Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ESTOCÁSTICO: INTEGRAL DE ITÔ, SEMIMARTINGALAS Y EL TEOREMA DE GIRSANOV

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JOSÉ ALBERTO CHACÓN MARTÍNEZ

Tutor:

DR. ADRIÁN GONZÁLEZ CASANOVA SOBERÓN

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2022

1. Datos del alumno
Chacón
Martínez
José Alberto
57 92 36 66
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
315327100

2. Datos del tutor
Dr.
Adrián
González Casanova
Soberón

3. Datos del sinodal 1
Dra.
María Clara
Fittipaldi

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María Emilia
Caballero
Acosta

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Sandra
Palau
Calderón

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Alejandro
Santoyo
Cano

7. Datos del trabajo escrito.
Introducción al Cálculo Estocástico: Integral de Itô, Semimartingalas y el Teorema de Girsanov.
74 págs.
2022

Introducción al Cálculo Estocástico: Integral de Itô, Semimartingalas y el Teorema de Girsanov

Índice general

Introducción

En esta tesis se presentán la bases de la teoría de integración estocástica, un tema principal en el estudio moderno de la probabilidad. El principal objetivo es proporcionar al lector una referencia clara y concisa sobre la construcción del proceso de integral estocástica de Itô, respecto de una semimartingala continua X,

$$(V \cdot X)_t \equiv \int_0^t V_s dX_s \ ,$$

y sus principales propiedades. Así como exponer la estructura de distintas clases de procesos estocásticos, principalmente para la clase de las semimartingalas continuas.

A lo largo de tres capítulos buscamos exponer la base, la construcción y la estructura de una teoría de integración estocástica general.

Concretamente, en el primer capítulo presentamos conceptos y métodos requeridos en el desarrollo posterior, mediante un breve recordatorio de lo que es un proceso estocástico, las distintas formas de estudiarlos y la exposición de tres grandes clases de procesos estocásticos: *procesos medibles, procesos adaptados y progresivamente medibles*. En especial, buscamos generar familiaridad con esta última clase pues nos limitaremos a integrar procesos estocásticos pertenecientes a ella.

El segundo capítulo tiene dos grandes objetivos:

I Mostrar la existencia de un proceso adecuado de integral estocástica $\int V dA$ respecto de procesos de variación finita, basados mayormente en la teoría de integración de Lebesgue-Stieltjes.

II Demostrar la existencia de los procesos de variación cuadrática $[M]$ y de covariación $[M, N]$, para cualesquier dos martingalas locales M y N, a partir de los cuales construimos y caracterizamos al proceso de integral estocástica $\int V dM$, concluyendo con una discusión de la famosa isometría de Itô.

En el tercer capítulo, extendemos la integral estocástica para considerar semimartingalas continuas $X = M + A$ como procesos integradores y establecemos las principales propiedades del proceso extendido

$$(V \cdot X)_t = \int_0^t V_s dM_s + \int_0^t V_s dA_s \ .$$

Posteriormente, nos enfocamos en exponer la estructura de la clase de semimartingalas continuas dentro de la teoría de integración estocástica. Esto último lo hacemos mediante la exposición de dos resultados principales: la Fórmula de Itô y el Teorema de Girsanov.

Durante el texto presentamos algunos ejemplos que clarifican a los resultados principales y que motivan el interés sobre sus posibles aplicaciones en diversas áreas.

La inspiración de realizar un trabajo como el presentado a continuación surge de la poca oferta de libros básicos en español que mantengan la generalidad en el desarrollo de una integral estocástica, ya que si bien las propiedades del movimiento browniano hacen que la integral estocástica $\int V_s dB_s$ sea de un interés central, una teoría más general enriquece de conceptos y métodos probabilísticos cuya utilidad no se limita a la integración estocástica o a las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Capítulo 1

Procesos Estocásticos

El objetivo de este capítulo es exponer de forma concisa distintas clases de procesos estocásticos y las principales relaciones entre ellas, fundamentales para el desarrollo de los siguientes capítulos.

En la Sección 1.1, damos una definición general de lo que es un proceso estocástico y presentamos los distintos objetos matemáticos que surgen de esta, necesarios para analizar las distintas caracterísiticas de un proceso. Presentamos las principales maneras de definir igualdades entre procesos estocásticos y establecemos algunos detalles importantes a considerar.

En la Sección 1.2, desarrollamos las clasificaciones de procesos medibles, adaptados y progresivamente medibles. En donde buscamos mostrar como se relacionan entre sí y la importancia de sus consecuencias en la teoría de integración a desarrollar.

1.1. Conceptos Básicos

Dado un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, un *elemento aleatorio* es cualquier mapeo medible ξ de Ω en un espacio medible $(S, \mathcal{S})$. La naturaleza del espacio Ω pierde interés, salvo en casos específicos, al considerar la medida inducida en S, conocida como la *distribución* de ξ:

$$\mathcal{L}(\xi)[B] = (\mathbb{P} \circ \xi^{-1})[B] \;\; ; \; B \in \mathcal{S}.$$

Decimos que dos elementos aleatorios ξ y η, en un espacio medible común S, tienen la misma distribución si $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{L}(\eta)$, situación que denotamos como $\xi \overset{d}{=} \eta$.

El interés particular en ciertos espacios S justifica la asignación de términos propios, nombrando a un elemento aleatorio ξ como una *variable aleatoria* en el caso $S = \mathbb{R}1$ y más específicamente, como un *vector aleatorio* cuando $S = \mathbb{R}^d$.

Diversas situaciones requieren para su total descripción la consideración de no una, si no una colección de variables aleatorias indexadas adecuadamente. Esta es la idea detrás de la siguiente definición.

Definición 1.1.1 *Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ fijo, un* ***proceso estocástico*** *es una colección de variables aleatorias indexadas por un conjunto T, denotada por $(X_t)_{t\in T}$.*

El conjunto T es conocido como el *espacio parametral* del proceso y usualmente esta relacionado con alguna noción temporal. En este trabajo nos enfocamos principalmente en los *procesos estocásticos a tiempo continuo* ($T = \mathbb{R}_+$), debido a su aplicabilidad en la descripción de sistemas que evolucionan con el tiempo de forma aleatoria. En adelante, la notación $(X_t)_{t\geq 0}$ hace referencia a un proceso a tiempo continuo.

De la definición anterior se desprenden distintos objetos matemáticos que describen distinta información característica del proceso, utilizando el más conveniente según la situación. Esto es, dado un proceso estocástico $(X_t)_{t\in T}$, para cada $t \in T$ fija, recuperamos una variable aleatoria

$$X_t(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^d \quad | \quad \omega \mapsto X_t(\omega) \ ; \ \omega \in \Omega \ .$$

Mientras que, para cada $\omega \in \Omega$ fija, obtenemos la función

$$X(\omega, \cdot) : T \to \mathbb{R}^d \quad | \quad t \mapsto X(\omega, t) := X_t(\omega) \ ; \ t \in T$$

conocida como la *trayectoria* del proceso respecto de ω.

En este trabajo buscamos definir un nuevo proceso $Y_t(\omega) \equiv \int^t V_s(\omega) dX(\omega, s)$ que concuerde con la noción de integrar las trayectorias de V respecto de las trayectorias de un proceso X, para una gran clase de procesos V. Destacamos que esta es solo la motivación detrás de la construcción a realizar, el proceso Y resultará ser un límite (en $L^2(P)$) de procesos más simples y no tiene mucho sentido pensarlo de forma trayectorial.

Ejemplo 1.1.1 (Proceso de Saltos.) Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias i.i.d, uniformes sobre el intervalo $[0, 1]$, cuyas distribuciones equivalen a la medida de Lebesgue en dicho intervalo. Definimos,

$$X_t = \sum_{n\geq 0} U_n \mathbb{1}_{(n,n+1]}(t) \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

X_t es una variable aleatoria al considerar que las funciones medibles son cerradas bajo la suma y el producto. Por tanto, $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico, constante por pedazos y con trayectorias continuas por la izquierda. En general, a los procesos definidos similarmente se les conoce como procesos de saltos.

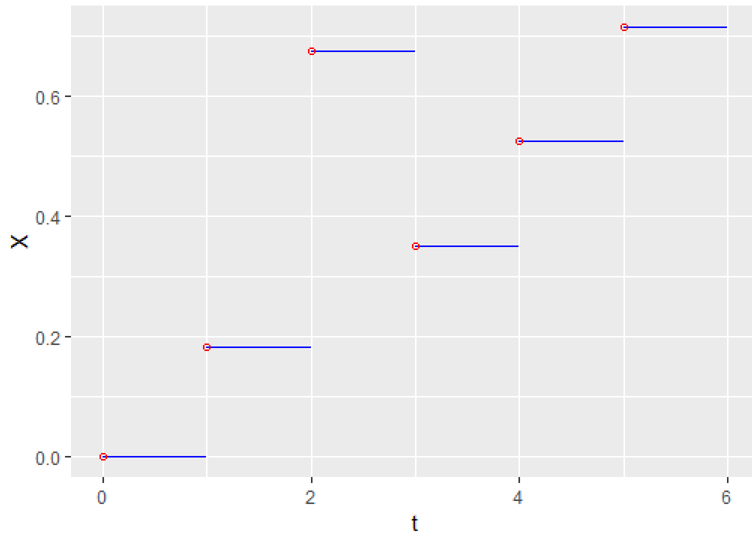

Figura 1.1 Trayectoria de una realización del proceso X.

La definición anterior no es la única manera de establecer lo que es un proceso estocástico, pero si la más común e intuitiva. Para presentar una interpretación equivalente pero menos elemental, introducimos la siguiente terminología.

Dado un espacio de medida $(S, \mathcal{S})$ y un conjunto T, denotamos mediante S^T a la clase de funciones $f : T \to S$, y como $\mathcal{S}^T$ a la σ-álgebra en S^T generada por los *mapeos de evaluación* $\{\pi_t : S^T \to S;\ t \in T\}$, dados por $\pi_t(f) = f(t)$. La pareja $(S^T, \mathcal{S}^T)$ es un espacio medible bien definido.

Lema 1.1.1 *Sea un espacio de medida $(S, \mathcal{S})$, T un conjunto indexador y U un subconjunto de S^T. Una función $H : \Omega \to U$ es $U \cap \mathcal{S}^T$-medible si, y solo si, la función $\phi_t := \pi_t \circ H : \Omega \to S$ es $\mathcal{S}$-medible para cada $t \in T$.*

Prueba: La medibilidad de H respecto de $U \cap \mathcal{S}^T$ es equivalente a la medibilidad respecto de $\mathcal{S}^T$, por lo que el resultado es inmediato al considerar que $\mathcal{S}^T$ es generada por los mapeos π_t.

$\square$

Así, asociando a cada $\omega \in \Omega$ con su respectiva trayectoria del proceso X

$$\omega \longmapsto X(\omega) := \{(t, X_t(\omega)) : t \in T\} \ ,$$

es posible entender a las variables aleatorias X_t como la composición $X_t = \pi_t \circ X(\omega)$. Esto justifica entender al proceso como un solo elemento aleatorio en el espacio medible de las funciones de T en $\mathbb{R}^d$, $(\mathbb{R}^d)^T$.

1.1.1. Tipos de Igualdad entre Procesos Estocásticos

La última interpretación posibilita definir un tipo igualdad entre procesos estocásticos basados únicamente en su distribución. Para esto, resulta importante notar que a cada proceso $(X_t)_{t\in T}$ es posible asociarle una familia de medidas definidas en $\mathbb{R}^k; k \in \mathbb{N}_+$ conocidas como las *distribuciones finito-dimensionales* del proceso X, definidas como

$$\mu_{t_1,\dots,t_k} = \mathcal{L}(X_{t_1},\dots,X_{t_k}) \quad ; \; t_i \in T, \; 1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}_+ \; .$$

Destacamos que es posible comparar las distribuciones finito-dimensionales de dos procesos, incluso si estos estan definidos en distintos espacios de probabilidad. Aún más, esta familia de distribuciones determina propiedades importantes del proceso, especialmente a la distribución del proceso $\mathcal{L}(X)$. ([14], p. 84)

Basados en estos hechos establecemos el tipo de igualdad más general para procesos estocásticos.

Definición 1.1.1 *Sean dos procesos estocásticos $(X_t)_{t\in T}$ y $(Y_t)_{t\in T}$ definidos en espacios de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ y $(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P}')$, respectivamente. Decimos que los procesos son* ***equivalentes*** *si tienen la misma familia de distribuciones finito-dimensionales.*

En cambio, para procesos estocásticos definidos en un mismo espacio de probabilidad existen dos principales tipos de igualdad: Uno para identificar la situación cuando las variables que conforman ambos procesos son iguales una a una c.s., y otro que identifica la igualdad casi segura entre sus trayectorias.

Definición 1.1.2 *Sean $(X_t)_{t\in T}, (Y_t)_{t\in T}$ dos procesos estocásticos definidos en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Decimos que:*

i) $(X_t)_{t\in T}$ *es una* ***versión*** *de* $(Y_t)_{t\in T}$ *si para toda $t \in T$, $X_t = Y_t$ c.s.*

ii) $(X_t)_{t\in T}$ *es* ***indistinguible*** *de* $(Y_t)_{t\in T}$ *si* $\mathbb{P}[\{X_t = Y_t, \forall t \in T\}] = 1$.

Es inmediato reconocer que la indistinguibilidad implica que los procesos sean una versión del otro y en consecuencia, que sean equivalentes entre sí. Es decir,

$$\text{Indistinguible} \implies \text{Versión} \implies \text{Equivalente}$$

Las implicaciones recíprocas no suelen ser ciertas, pero existen condiciones bajo las cuales hay uniformidad entre los distintos tipos de igualdad. Por ejemplo, cuando los procesos son continuos o cuando el espacio parametral es discreto, es posible probar que el ser una versión implica el ser indistinguible.

En general,dado un proceso X, los distintos tipos de igualdad cobran relevancia al asegurar la existencia de un determinado proceso Y que conserve la esencia del proceso original pero que también satisfaga nuevas propiedades convenientes.

Posiblemente el resultado más importante en involucrar algún tipo de igualdad entre procesos estocásticos es el Teorema de Continuidad de Kolmogorov, el cual da condiciones para que un proceso tenga una versión continua.

Teorema 1.1.1 (Continuidad de Kolmogorov.) *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en él. Si existen números reales positivos α, β, c tales que*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq c|t-s|^{1+\beta} \ ; \ s,t \in \mathbb{R}_+$$

entonces existe un proceso Y con trayectorias continuas, tal que es una versión de X.

1.2. Clasificaciones de procesos estocásticos

En el estudio de los procesos estocásticos y particularmente en su clasificiación, se hace uso de distintos criterios, ya sea el tipo de espacio parametral del proceso, la continuidad de las trayectorias o la dependencia entre las variables que conforman un proceso. Los distintos criterios, por variados que sean, pueden ser divididos en dos grandes grupos: Analíticos y Probabilísticos.

La principal diferencia entre ellos es, esencialmente, que los primeros estan enfocados en el comportamiento de las distribuciones, vistas como funciones, de los procesos estocásticos y/o las variables que los conforman. Por su parte, los métodos probabilísticos se enfocan directamente en las relaciones entre las variables aleatorias, entendidas como elementos en espacios de probabilidad.

En esta sección estudiamos clasficaciones relacionadas con la medibilidad de las variables que componen al proceso o del proceso mismo, visto como una sola función. Claramente estas son de naturaleza probabilística. Específicamente, exponemos los principales resultados de tres grandes clases de procesos estocásticos:

- Procesos Medibles
- Procesos Adaptados
- Procesos Progresivamente Medibles

cuya importancia no se limita a la teoría de integración estocástica.

1.2.1. Procesos Medibles

Dado un proceso a tiempo continuo X, es particularmente conveniente considerar al proceso como una función del espacio producto $\Omega \times \mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}^d$, esto es:

$$X : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \times (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) \quad | \quad (\omega, t) \to X(\omega, t) := X_t(\omega) \ .$$

Notamos que no todos los procesos vistos de esta manera son una función medible. Por ejemplo, si $V \notin \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ entonces el proceso $X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t \in V\}}$; $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ no es medible respecto la σ-álgebra producto $\mathscr{A} \otimes \mathcal{B}(\mathscr{R}_+)$. Pues para cualquier $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ que no contenga al 0 pero si al 1,

$$\{(\omega, t) : X_t(\omega) \in B\} = \Omega \times \{t \in V\} = \Omega \times V \notin \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \ .$$

Esto justifica la siguiente definición.

Definición 1.2.1 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in T}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, es un **proceso (conjuntamente) medible**, si el proceso visto como función de $\Omega \times T$ en $\mathbb{R}^d$, es medible respecto la σ-álgebra producto $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(T)$.*

La importancia de que un proceso sea medible es evidente al considerar la aplicabilidad de toda la teoría de funciones medibles, ya sea permitiendo aproximaciones o desigualdades convenientes.

Como un ejemplo concreto dentro de la teoría de integración estocástica presentamos la siguiente aplicación del Teorema de Fubini-Tonelli, especialmente importante al momento de definir la clase de procesos sobre los cuales tiene sentido una integral estocástica respecto de un movimiento browniano:

Teorema 1.2.1 (Fubini-Tonelli.) *Sean μ y ν dos medidas σ-finitas definidas en espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(F, \mathcal{F})$, respectivamente. Entonces existe una única medida $\mu \otimes \nu$ sobre $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ tal que $(\mu \otimes \nu)(B \times C) = \mu(B)\nu(C) \quad ; \ B \in \mathcal{E}, C \in \mathcal{F}$. Aún más, para cualquier función medible $f : E \times F \to \mathbb{R}_+$ se cumple:*

i) *La función $x \mapsto \int f(x, y)\nu(dy)$ es $\mathcal{E}$-medible,*

ii) *La función $y \mapsto \int f(x, y)\mu(dx)$ es $\mathcal{F}$-medible,*

iii) *y se satisface la igualdad de integrales:*

$$\int f d(\mu \otimes \nu) = \int \left(\int f(x, y)\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int \left(f(x, y)\mu(dx) \right) \nu(dy) \ .$$

Los puntos 1, 2 y 3 siguen siendo válidos para cualquier función $f : E \times F \to \mathbb{R}$ que sea integrable respecto de la medida $\mu \otimes \nu$.

Entonces, dado un proceso medible $(X_t)_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, nos enfocamos en su potencia al cuadrado X^2 que vuelve a ser un proceso medible y que satisface las hipótesis del teorema anterior. Por lo que la función

$$\omega \longmapsto \int_0^\infty X_s^2(\omega)\ ds \tag{1.1}$$

es $\mathscr{A}$-medible, siendo posible definir la esperanza

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty X_s^2\ ds\right] := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty X_s^2(\omega)\ ds\right] = \int_\Omega \left(\int_0^\infty X^2(\omega, s)\ ds\right)\ d\mathbb{P}\ .$$

Destacamos que al definir a la función en (1.1) se requiere que el mapeo

$$X^2(\omega, \cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad | \quad t \mapsto X^2(\omega, t) = X_t^2(\omega)\ ,$$

sea una función $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-medible para toda $\omega \in \Omega$. Esto también se sigue de la medibilidad de X ([21], p. 63).

Naturalmente, es posible establecer los resultados análogos relacionados con la sección $\omega \mapsto X^2(\omega, t)$ para $t \geq 0$, que en conjunto permiten el intercambio de integrales

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty X_s^2\ ds\right] = \int_0^\infty \left(\int_\Omega X^2(\omega, s) d\mathbb{P}\right) ds = \int_0^\infty \mathbb{E}[X_s^2]\ ds\ .$$

1.2.2. Procesos Adaptados

Desarrollamos ahora el concepto de *adaptabilidad*, del cuál surgen una variedad de objetos matemáticos tan necesarios como naturales en el estudio de los procesos estocásticos.

Definición 1.2.2 *Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ y un conjunto $T \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, una* ***filtración*** *en T es una familia $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$ no-decreciente de sub σ-álgebras de $\mathscr{A}$.*

Hoy en día es ampliamente aceptada la idea de Doob: el contexto adecuado para estudiar procesos estocásticos es el de un espacio filtrado $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$; es decir, un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ equipado con una filtración $\mathscr{F}_T \equiv \{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$.

De hecho, cada proceso estocástico $(X_t)_{t\in T}$ induce de manera natural una filtración en su espacio parametral, conocida como la *filtración canónica* de X, en donde

$$\mathscr{F}_t = \sigma(\{X_s; s \leq t\})\ ,$$

es la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $X_s, s \leq t$.

Es decir, la σ-álgebra más chica contenida en $\mathscr{A}$ para la que todas las variables $\{X_s; s \leq t\}$ son funciones medibles. Notamos que en particular, cada variable X_t es medible respecto de $\mathscr{F}_t$. La siguiente definición generaliza esta situación.

Definición 1.2.3 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in T}$, definido en el espacio $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$, es* ***adaptado*** *a la filtración $\mathscr{F}_T$ si para toda $t \in T$, X_t es $\mathscr{F}_t$-medible.*

El concepto de adaptabilidad resulta estar relacionado estrechamente con la interpretación temporal del parámetro t de un proceso estocástico X_t. Esto es porque en ciertos contextos, como al considerar un proceso a tiempo continuo y una filtración a tiempo continuo $\mathscr{F}_{t\geq 0} \equiv \mathscr{F}_{\mathbb{R}_+}$, la adaptabilidad de un proceso puede ser interpretada como que, para cada *tiempo* t, la σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ contiene toda la información de los eventos observables del proceso hasta el tiempo en cuestión. En concordancia, la filtración canónica de un proceso cumple con ser la filtración más chica para la cual el proceso es adaptado.[1]

Por otra parte, así como es posible generar una filtración dado un proceso estocástico, también es posible generar nuevas filtraciones a partir de una filtración dada. Destacamos que, a diferencia de la intersección, la unión arbitraria de σ-álgebras NO es siempre una σ-álgebra, razón por la que en adelante denotamos mediante $\bigvee_i \mathscr{F}_i$ a la mínima σ-álgebra que contiene a la unión $\bigcup_i \mathscr{F}_i$.

Entonces, dada una filtración $\mathscr{F}_{t\geq 0}$ definimos dos nuevas filtraciones asociadas como

$$\mathscr{F}_0^- = \mathscr{F}_0 \ , \ \mathscr{F}_t^- = \bigvee_{s<t} \mathscr{F}_s \qquad | \qquad \mathscr{F}_t^+ = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \qquad ; \ t \geq 0$$

con $\bigvee_{t\geq 0} \mathscr{F}_t^- = \bigvee_{t\geq 0} \mathscr{F}_t^+ = \bigvee_{t\geq 0} \mathscr{F}_t$ una σ-álgebra a la que denotamos por $\mathscr{F}_\infty$.

Notamos que para toda $t \geq 0$, se cumplen las contenciones

$$\mathscr{F}_t^- \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}_t^+.$$

Mostrando que, en particular, todo proceso $\mathscr{F}_t$-adaptado también es $\mathscr{F}_t^+$-adaptado.

A partir de ahora, siempre que el conjunto T sea lo suficientemente claro, una filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in T}$ puede ser denotada simplemente como $\mathscr{F}_t$.

En el caso que se cumpla la igualdad en filtraciones $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^+$, decimos que la filtración es ***continua por la derecha***. Esta es una suposición clave en el estudio de martingalas, pues suponiendo esta propiedad sobre la filtración $\mathscr{F}_t$ de nuestro espacio filtrado, es posible probar que todas las $\mathscr{F}_t$-martingalas tienen una versión càdlàg y por tanto, limitarnos a trabajar con martingalas de este tipo. Esencialmente, este es el resultado principal del Teorema de Regularización de Doob.

[1] en el sentido de que si X es adaptado a la filtración $\mathscr{A}_T$, entonces $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{A}_t$ para toda $t \in T$

Otra situación importante es cuando para toda $t \in T$, la σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ contiene a todos los conjuntos $\mathbb{P}$-nulos, en cuyo caso decimos que la filtración es ***completa*** o alternativamente, que el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ es completo.

En particular, en este trabajo resultará útil establecer la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1 *Dado un espacio de probabilidad filtrado y completo* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$,

i) *Un límite c.s. de procesos adaptados es un proceso adaptado.*

ii) *Un proceso indistinguible de un proceso adaptado también es adaptado.*

Prueba: Supongamos que, para cada $t \geq 0$, existe una sucesión $\{X_t^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias $\mathscr{F}_t$-medibles y un conjunto de medida cero $N \in \mathscr{F}_t$, tales que

$$X_t(\omega) = \lim_k X_t^k(\omega) \qquad ; \quad \omega \in \Omega \setminus N.$$

Sea entonces $a \in \mathbb{R}$ y consideremos la descomposición

$$X_t^{-1}([a,\infty)) = (X_t^{-1}([a,\infty]) \cap N) \cup (X_t^{-1}([a,\infty]) \cap (\Omega \setminus N)) \ .$$

Notando que la primer intersección es de medida cero, pues es subconjunto de N, es inmediato que pertenece a $\mathscr{F}_t$ ya que la filtración es completa. Mientras que considerando que el límite de funciones medibles es una función medible es claro que

$$X_t^{-1}([a,\infty)) \cap (\Omega \setminus N) = \{\omega \in \Omega : \lim_k X_t^k(\omega) \geq a\} \in \mathscr{F}_t \ .$$

Así pues, $X_t^{-1}([a,\infty]) \in \mathscr{F}_t$, siguiendose que X_t es $\mathscr{F}_t$-medible.

Similarmente, si X es un proceso indistinguible de un proceso adaptado Y, el resultado del segundo inciso se sigue de la igualdad

$$\begin{aligned} X_t^{-1}(A) &= (X_t^{-1}(A) \cap \{X_t \neq Y_t\}) \cup (X_t^{-1}(A) \cap \{X_t = Y_t\}) \\ &= (X_t^{-1}(A) \cap \{X_t \neq Y_t\}) \cup Y_t^{-1}(A) \ , \end{aligned}$$

válida para cualesquiera $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $t \geq 0$.

$\square$

En conjunto, las condiciones anteriores son sumamente convenientes dentro de la teoría de los procesos estocásticos, por lo que comúnmente se dice que una filtración $\mathscr{F}_{t\geq 0}$ satisface las **hipótesis habituales** si es continua por la derecha y completa. Resulta entonces relevante mostrar como toda filtración $\mathscr{F}_{t\geq 0}$ puede ser extendida a una filtración completa y continua por la derecha.

Dado un espacio filtrado $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, consideramos la σ-álgebra completada

$$\overline{\mathscr{A}} = \{A \cup N : A \in \mathscr{A}, N \in \mathcal{N}\} \ ,$$

en donde $\mathcal{N} = \{A \subset \Omega : \exists B \in \mathscr{A} \ (A \subseteq B \ , \ \mathbb{P}(B) = 0)\}$. A su vez, consideramos a la colección de conjuntos con medida cero dentro de $\overline{\mathscr{A}}$:[2]

$$\mathcal{N}_{\mathscr{A}} = \{A \in \overline{A} \ ; \ \mathbb{P}(A) = 0\}$$

y definimos, para cada $t \geq 0$,

$$\overline{\mathscr{F}}_t := \sigma(\mathscr{F}_t, \mathcal{N}_{\mathscr{A}}) \ .$$

Cumpliendose que $\overline{\mathscr{F}}_{t\geq 0}$ es la extensión completa más chica de $\mathscr{F}_{t\geq 0}$. Similarmente, $\mathscr{F}^+_{t\geq 0}$ es la extensión continua por la derecha más chica de $\mathscr{F}_{t\geq 0}$. Estas operaciones conmutan y en conjunto definen a

$$\mathscr{G}_t = \overline{(\mathscr{F}_t^+)} = (\overline{\mathscr{F}}_t)^+ \quad ; \quad t \geq 0$$

la mínima extensión completa y continua por la derecha de $\mathscr{F}_{t\geq 0}$, conocida como su **filtración aumentada**.

Dado un proceso estocástico, un objetivo natural es determinar la ocurrencia de eventos específicos relacionados con el proceso. Es en este sentido que se introducen los *tiempos de paro*, variables aleatorias valuadas en el espacio parametral del proceso que solo requieren de la información disponible en $\mathscr{F}_t$ para determinar si un evento ha ocurrido, o no, al tiempo t.

Definición 1.2.4 *Una variable aleatoria τ valuada en $T \cup \{+\infty\}$ es un **tiempo de paro** respecto de una filtración $\mathscr{F}_T$, si para toda $t \in T$ se cumple que $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Es decir, si el proceso $X_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$; $t \in T$ es $\mathscr{F}_T$-adaptado*

Destacamos que toda constante $t \in T$ es un tiempo de paro, así como que el mínimo ($\wedge$) y el máximo ($\vee$) de dos tiempos de paro también forman un nuevo tiempo de paro. Aún más, dado un tiempo de paro τ es posible inducir una σ-álgebra

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F}_\infty \ ; \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \ t \in T\}$$

cuya interpretación, similar a la de adaptabilidad, es que contiene toda la información de los eventos observables hasta el tiempo de paro τ. Cumpliendose que si τ y σ son dos tiempos de paro tales que $\tau \leq \sigma$, entonces $\mathscr{F}_\tau \subseteq \mathscr{F}_\sigma$.

La importancia de los tiempos de paro en la teoría de procesos estocásticos no puede ser exagerada. En especial, porque los tiempos de paro nos permiten considerar un cierto grado de aleatoriedad en la definición de variables aleatorias y procesos estocásticos.

[2]En este punto la notación $\mathbb{P}$ hace referencia a la única extensión de la medida original sobre la σ-álgebra completada, $\overline{\mathscr{A}}$ ([21], p. 40).

Dado un proceso X en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$ y un tiempo de paro τ respecto de la filtración $\mathscr{F}_T$, es posible definir una nueva variable aleatoria para cada realización del tiempo de paro, como:

$$X_\tau(\omega) = \mathbf{1}_{\{\tau(\omega)<\infty\}} \cdot X_{\tau(\omega)}(\omega) \quad ; \ \omega \in \Omega \ ,$$

y un nuevo proceso estocástico,

$$X_t^\tau(\omega) = X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) \quad ; \quad t \in T \ , \ \omega \in \Omega \ .$$

Este tipo de procesos "detenidos" juegan un papel central en los siguientes cápitulos.

El siguiente ejemplo puede ser considerado como una extensión a los procesos de saltos presentados en el Ejemplo 1.1.1, permitiendo considerar ahora intervalos de saltos definidos aleatoriamente.

Ejemplo 1.2.2 (Procesos Simples.) Sean $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de tiempos de paro tales que $\tau_n \uparrow \infty$, y $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias adaptadas a la filtración $\{\mathscr{F}_{\tau_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos el proceso simple V,

$$V_t = \sum_k \xi_k \cdot \mathbf{1}_{(\tau_k,\tau_{k+1}]}(t) \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

La naturaleza de un proceso simple permite definir para cualquier proceso X, un proceso de integral estocástica elemental $V \cdot X$, como:

$$(V \cdot X)_t \equiv \int_0^t V \ dX = \sum_k \xi_k \ \left(X_t^{\tau_{k+1}} - X_t^{\tau_k}\right) \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Notamos que la serie converge debido a que solo hay un número finito de términos no nulos, que $(V \cdot X)_0 = 0$ y que además $V \cdot X$ hereda las posibles propiedades de continuidad de X.

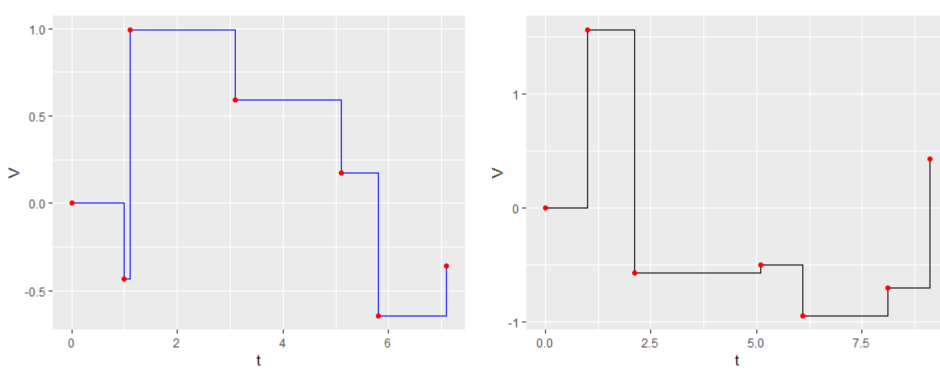

Figura 1.2 Trayectoria de dos realizaciones de un proceso simple.
Destacamos que los saltos se dan en distintos puntos.

Nuestro principal objetivo en los siguientes capítulos es extender la idea de esta integral a una clase más general de procesos V.

1.2.3. Procesos Progresivamente Medibles

La definición de la integral estocástica se limita por necesidad a cierto tipo de procesos con particularidades técnicas muy específicas, en particular se requiere que los integrandos sean *progresivamente medibles* respecto de cierta filtración asociada con el proceso integrador. A continuación exponemos los principales resultados relacionados al concepto, esto con el fin de entender la naturaleza e importancia de tal condición.

En adelante, dado un conjunto A, denotamos como $\mathscr{B}_A$ a la σ-álgebra formada por los conjuntos de Borel del conjunto A.

Definición 1.2.5 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ es* ***progresivamente medible****, o simplemente progresivo, respecto la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$, si para cada $t \geq 0$, la restricción del proceso a $\Omega \times [0, t]$ es medible respecto la σ-álgebra producto $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}_{[0,t]}$.*

Algunas de las consecuencias de ser progresivo pueden ser consideradas análogas a las expuestas sobre la medibilidad de un proceso, lo que es natural al considerar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.2 *Todo proceso progresivamente medible es medible.*
Prueba: Supongamos que un proceso $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ es progresivamente medible con respecto a una filtración $\mathscr{F}_{t\geq 0}$ y sea $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, es sencillo verificar la igualdad

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{k\geq 1} ((\Omega \times [0, k]) \cap X^{-1}(B)) \ ,$$

en donde, para cada $k \in \mathbb{N}^+$, el hecho de ser progresivamente medible asegura que

$$(\Omega \times [0, k]) \cap X^{-1}(B) \in \mathscr{F}_k \otimes \mathscr{B}_{[0,k]} \subseteq \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \ .$$

Es decir, $X^{-1}(B)$ es igual a una unión numerable de elementos de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ y por tanto un elemento de la σ-álgebra producto.

□

A diferencia de lo expuesto sobre procesos medibles, para un proceso progresivo X resulta relevante establecer explícitamente resultados sobre la sección $\omega \to X(\omega, t)$.

Notemos que dado un tiempo fijo $t \in \mathbb{R}_+$, la función

$$X(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R} \quad | \quad \omega \mapsto X(\omega, s)$$

es $\mathscr{F}_t$-medible para cada $s \leq t$. En particular, la variable aleatoria X_t es $\mathscr{F}_t$-medible.

Proposición 1.2.3 *Todo proceso progresivamente medible con respecto a una filtración $\mathscr{F}_{t\geq 0}$ es adaptado a la misma filtración.*

En resumen, la propiedad de ser progresivo es más fuerte que la propiedad de ser medible y/o adaptado. Asimismo, su definición es mucho menos intuitiva y generar una interpretación del concepto es más complicado.

Buscando facilitar el entendimiento del concepto, consideramos lo siguiente:

Dado un proceso progresivo X y un tiempo fijo $t \geq 0$, definimos

$$Y = X|_{\Omega\times[0,t]} \quad | \quad Y(\omega, s) := X(\omega, s) \quad ; \quad 0 \leq s \leq t \ , \ \omega \in \Omega \ .$$

Notando que, en particular, cada variable Y_s es medible respecto $\mathscr{F}_t$, esto define un proceso estocástico $(Y_s)_{s\leq t}$ en el espacio restringido $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t})$.[3] *Aún más, Y es un proceso medible respecto de la σ-álgebra producto $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}_{[0,t]}$ y adaptado respecto de la filtración $\{\mathscr{F}_s\}_{s\leq t}$.*

Es decir, un proceso progresivo X tiene la estructura suficiente para que toda la información del proceso hasta un tiempo $t \in [0, \infty)$ este compactada de tal forma que nos permita considerar a las variables $\{X_s : s \leq t\}$ como un proceso medible y adaptado por sí mismo.

Así, en analogía con la sección de procesos medibles, se asegura la correcta definición y el intercambio de integrales

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 \ ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}[X_s^2] \ ds \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Si además X es positivo o intregrable respecto de la medida producto $\mathbb{P} \otimes \lambda$, resulta que el proceso definido por

$$(X \cdot ds)_t(\omega) := \int_0^t X_s(\omega) \ ds \quad ; \quad t \in [0, \infty) \ , \ \omega \in \Omega$$

es adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$. Esta es una propiedad que buscaremos preservar bajo una gran variedad de medidas distintas a la de Lebesgue.

Por otra parte, anteriormente se mostró como a partir de un tiempo de paro es posible definir nuevos elementos aleatorios. Ahora veremos que consecuencias tiene el que un proceso sea progresivo sobre este tipo de objetos.

En especial, el primer inciso de la siguiente proposición muestra un mecanismo para construir una colección de variables aleatorias adaptadas a una filtración inducida por tiempos de paro $(\mathscr{F}_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Esto resulta útil al momento de definir procesos simples como en el Ejemplo 1.2.2.

[3] $\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}$ denota la restrición de la medida $\mathbb{P}$ a la sub σ-álgebra $\mathscr{F}_t$

Proposición 1.2.4 *Si X un proceso progresivamente medible y τ un tiempo de paro, ambos respecto a una filtración $\mathscr{F}_T$, entonces:*

i) *X_τ es una función medible respecto de la σ-álgebra inducida por τ, $\mathscr{F}_\tau$.*

ii) *X^τ es progresivamente medible respecto de la filtración $\mathscr{F}_T$.*

Prueba :

i) Sea $t \in T$. Dado que τ es un tiempo de paro, para cualesquiera $0 \leq a < b \leq t$

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \wedge t \in (a,b)\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq a\}^c \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq b\}$$
$$\in \mathscr{F}_a \cap \mathscr{F}_b \subseteq \mathscr{F}_t \ ,$$

mostrando que la función $\omega \mapsto \tau(\omega) \wedge t$ es $\mathscr{B}_{[0,t]}/\mathscr{F}_t$-medible y en consecuencia, que $\omega \mapsto (\omega, \tau(\omega) \wedge t)$ es $\left(\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}_{[0,t]}\right)/\mathscr{F}_t$ -medible. Mientras que como X es progresivo, la restricción $(\omega, s) \mapsto X(\omega, s),\ s \leq t$ es una función $\mathscr{B}_{[0,\infty)}/\left(\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}_{[0,t]}\right)$ -medible y por tanto, la composición

$$\omega \mapsto (\omega, \tau(\omega) \wedge t) \mapsto X(\omega, \tau(\omega) \wedge t) = X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega)$$

resulta ser una función $\Omega \to \mathbb{R}$ medible respecto de $\mathscr{F}_t$. Así, dado $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega) \in B\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \ .$$

Siguiendose que $\{X_\tau \in B\} \in \mathscr{F}_\tau$.

ii) Sea $t \in T$. Retomamos que, para cada $s \leq t$, la función $\omega \mapsto \tau(\omega) \wedge s$ es $\mathscr{B}_{[0,t]}/\mathscr{F}_s$-medible y por tanto, medible respecto de $\mathscr{F}_t$. Siguiendose que la función

$$\Omega \times [0,t] \to [0,t] \quad | \quad (\omega, s) \mapsto \tau(\omega) \wedge s$$

es $\mathscr{B}_{[0,t]}/\left(\mathscr{B}_{[0,t]} \otimes \mathscr{F}_t\right)$-medible y similarmente, $(\omega, s) \mapsto \omega$ es $\mathscr{F}_t/\left(\mathscr{B}_{[0,t]} \otimes \mathscr{F}_t\right)$ -medible. En consecuencia, el mapeo

$$\Omega \times [0,t] \to \Omega \times [0,t] \quad | \quad (\omega, s) \mapsto (\omega, \tau(\omega) \wedge s)$$

es medible respecto de $\mathscr{B}_{[0,t]} \otimes \mathscr{F}_t$. Además, dado que X es progresivo se tiene que $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)\ ,\ s \leq t$ es una función $\mathscr{B}(\mathbb{R})/\left(\mathscr{B}_{[0,t]} \otimes \mathscr{F}_t\right)$ -medible.

Por tanto, el mapeo

$$\Omega \times [0,t] \to \mathbb{R} \quad | \quad (\omega, s) \mapsto X(\omega, \tau(\omega) \wedge s) = X_{\tau(\omega)\wedge s}(\omega)$$

es $\mathscr{B}(\mathbb{R})/\left(\mathscr{B}_{[0,t]} \otimes \mathscr{F}_t\right)$ -medible. Concluyendo que X^τ es progresivo respecto de $\mathscr{F}_T$.

□

Naturalmente, después de explorar las principales consecuencias, surge la necesidad de buscar condiciones para asegurar que un proceso sea progresivamente medible.

Proposición 1.2.5 *Si un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ y todas sus trayectorias son continuas por la izquierda o continuas por la derecha, entonces el proceso es progresivamente medible respecto a la filtración $\mathscr{F}_t$.*

Proposición 1.2.6 *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ con trayectorias continuas y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces el proceso $(f(X_t))_{t\geq 0}$ es progresivamente medible con respecto a la filtración dada.*

Nótese entonces que dado un proceso adaptado, basta comprobar las hipótesis del Teorema de Continuidad de Kolmogorov (Teorema 1.1.1) para asegurar la existencia de una versión progresivamente medible.

Asimismo, el siguiente teorema asegura la existencia de una versión progresiva para cualquier proceso medible y adaptado. Este resultado puede llegar a ser considerado como el recíproco de las Proposiciones 1.2.2 y 1.2.3.

Teorema 1.2.3 (Doob & Chung.) *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico medible y adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$. Entonces el proceso tiene una versión progresivamente medible con respecto a la misma filtración.*

La estructura de la prueba es la siguiente: Primero, demostramos que todo proceso X tiene una aproximación por procesos de la forma

$$X_n(t) = \sum_k Y_{n,k} \mathbb{1}_{A_{n,k}}(t) \ ,$$

en donde $A_{n,k}$ son una partición formada por conjuntos de Borel del espacio parametral y $Y_{n,k}$ son variables aleatorias. Posteriormente, las variables $Y_{n,k}$ (que son aproximación de X sobre $A_{n,k}$) son reemplazados por valores exactos de X de tal forma que las sumas de las expresiones $Y_{n,k}\mathbb{1}_{A_{n,k}}$ definan en conjunto un proceso progresivo $\tilde{X}_n$. Finalmente, dados los procesos progresivos $\tilde{X}_n$, definimos

$$\tilde{X} = \limsup_n \tilde{X}_n \ .$$

Este proceso es una versión progresiva de X.

Referimos al lector a [13] para consultar la prueba formal de este resultado, así como su motivación y detalles relacionados con los procesos progresivos.

Capítulo 2

Integral Estocástica

En este capítulo mostramos la existencia de un proceso adecuado de integral estocástica para procesos integradores de variación finita y posteriormente, a través del proceso de variación cuadrática, construimos la integral estocástica respecto de una martingala local continua para una clase amplia de procesos progresivos.

En la Sección 2.1, exponemos características importantes de los procesos de variación finita y definimos un proceso de integral estocástica respecto de esta clase de procesos, basados en la teoría de integración de Lebesgue-Stieltjes. Presentamos un resumen de esta teoría de integración en el Apéndice A.

En la Sección 2.2, introducimos el concepto de martingala local y probamos la existencia del proceso de variación cuadrática $[M]$ y de covariación $[M, N]$, para cualesquiera dos martingalas locales continuas M y N.

En la Sección 2.3, a través de los procesos de variación cuadrática y covariación, construimos y caracterizamos un proceso de integral estocástica $\int V dM$ para una gran clase de procesos progresivos V, extendiendo la integral estocástica elemental.

Destacamos que a partir de la Sección 2.2., hasta el final del trabajo, es necesario estar familiarizado con la teoría de martingalas a tiempo continuo. Es por esto que en el Apéndice B enunciamos los resultados indispensables para la comprensión del texto.

Mientras que específicamente para este capítulo, en adelante consideramos un espacio filtrado $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, con $\mathscr{F}_{t\geq 0}$ una filtración completa y continua por la derecha. Salvo mención explícita, vamos a suponer que:

- Tanto la adaptabilidad como el ser progresivo es respecto de la filtración $\mathscr{F}_{t\geq 0}$.
- La propiedad de ser medible es respecto de la σ-álgebra producto $\mathscr{F}_\infty \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$.

2.1. Integral Estocástica respecto Procesos de Variación Finita

En el capítulo anterior, específicamente en el Ejemplo 1.2.1, fue posible definir un proceso de integral estocástica trayectoria por trayectoria, descartando la naturaleza del proceso integrador, dada la estructura de los procesos simples. Sin embargo, para integrandos más generales es necesario considerar más detalladamente las trayectorias del proceso integrador. Comenzamos por establecer la siguiente definición.

Definición 2.1.1 *Un proceso X es de* ***variación finita*** *si es adaptado y sus trayectorias $t \mapsto X_t(\omega)$ son finitas, continuas por la derecha y de variación finita c.s. Si en cambio las trayectorias son finitas, continuas por la derecha y crecientes c.s., decimos que X es* ***creciente***.

Dado un proceso X y un tiempo $t \geq 0$, denotamos por $(V_X)_t = \sup \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$ a su variación sobre el intervalo $[0, t]$, en donde el supremo corre sobre todas las particiones de la forma $\Delta = \{0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$. De esta manera definimos un nuevo proceso, sensible a las características de X.

Proposición 2.1.1 *Sea X un proceso de variación finita. Entonces:*

i) *El proceso de variación V_X es adaptado y creciente.*

ii) *Para cualquier tiempo de paro τ, $(V_X)^\tau = V_{(X^\tau)}$.*

Prueba: **i)** Sea $t \geq 0$. Notamos que $(V_X)_t = \sup \sum_i |X_{q_{i+1}} - X_{q_i}|$, donde el supremo corre sobre las particiones de $[0, t]$ contenidas en $\mathbb{Q}_+$. Dado que solo hay un número contable de tal particiones y que X_q es $\mathscr{F}_t$-medible para $q \leq t$, obtenemos que $(V_X)_t$ es el supremo de una colección numerable de sumas de variables aleatorias $\mathscr{F}_t$ medibles. Por tanto, $(V_X)_t$ es $\mathscr{F}_t$-medible.

ii) Sea $\omega \in \Omega$ fija. Considerando el supremo sobre las particiones de $[0, t \wedge \tau(\omega)]$

$$\begin{aligned}(V_X)_{t\wedge\tau(\omega)} &= \sup \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega)| = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |X^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - X^\tau_{t_i}(\omega)| \\ &= (V_{X^\tau})_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega) \leq (V_{X^\tau})_t(\omega).\end{aligned}$$

Similarmente, considerando ahora el supremo sobre las particiones de $[0, t]$,

$$\begin{aligned}(V_{X^\tau})_t(\omega) &= \sup \sum_{i=0}^{n-1} |X^\tau_{t_{i+1}}(\omega) - X^\tau_{t_i}(\omega)| = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_{i+1}\wedge\tau(\omega)}(\omega) - X_{t_i\wedge\tau(\omega)}(\omega)| \\ &\leq (V_X)_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega).\end{aligned}$$

□

Denotamos por $\mathcal{V}_0$ al espacio de procesos de variación finita que empiezan en cero y como $\mathcal{V}_0^+$ al subconjunto de $\mathcal{V}_0$ compuesto por los procesos crecientes. Por la proposición anterior, es claro que para cualquier proceso en $\mathcal{V}_0$ su proceso de variación es un elemento de $\mathcal{V}_0^+$.

Además, en consideración de la Proposición A.2, notamos que todo proceso adaptado con trayectorias finitas, continuas por la derecha y monótonas es de variación finita. Así como que la descomposición de un proceso X como la resta de dos procesos en $\mathcal{V}_0^+$ es equivalente a que el proceso sea de variación finita.

Lema 2.1.1 *Sea A un proceso adaptado con trayetorias finitas, continuas por la derecha y que empieza en cero. Entonces $A \in \mathcal{V}_0$ si, y solo si, existen procesos $A^+, A^- \in \mathcal{V}_0^+$ tales que $A = A^+ - A^-$.*

La naturaleza de un proceso de variación finita $A \in \mathcal{V}_0$ posibilita su uso como proceso integrador y aún más, permitirá definir para una gran clase procesos H un único c.s. proceso de integral estocástica $(H \cdot A) \in \mathcal{V}_0$, tal que la variable aleatoria $(H \cdot A)_t$ sea equivalente a la integral ordinaria de Lebesgue-Stieltjes $\int_0^t HdA$, para cada $t \geq 0$.

Destacamos que la importancia del siguiente teorema no radica en mostrar la existencia de la integral $\int HdA$, si no en asegurar la existencia de un proceso en $\mathcal{V}_0$ que concuerde con ella.

Teorema 2.1.1 *Si $A \in \mathcal{V}_0$ y H es un proceso progresivo e integrable respecto de A c.s., entonces existe un único proceso $H \cdot A \in \mathcal{V}_0$, tal que $(H \cdot A)_t$ es igual c.s. a la integral de Lebesgue de H con respecto de A sobre el intervalo $[0, t]$, para toda $t \geq 0$.*
Demostración:

CASO 1: $A \in \mathcal{V}_0^+$, acotado

Sea $N = \{\omega \in \Omega : H(\omega)$ no es integrable respecto $A(\omega)\}$, el cúal por hipótesis es de medida cero. Dado que $\mathscr{F}_t$ es una filtración completa se tiene que $N \in \mathscr{F}_t, t \geq 0$ y en consecuencia,

$$\{(\omega, s) \in \Omega \times [0, t] \mid \mathbb{1}_N(\omega) = 1\} = N \times [0, t] \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}_{[0,t]} \ .$$

Mostrando que tanto $(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_N(\omega)$ como $(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_{N^c}(\omega)$ son procesos progresivos y por tanto, $K := H\mathbb{1}_{N^c}$ es progresivo e integrable respecto de A para toda ω. Definimos entonces,

$$Y_t(\omega) = \int_0^t K_s(\omega) dA_s(\omega) \quad ; \quad \omega \in \Omega, t \geq 0$$

un proceso que a cada tiempo $t \geq 0$, concuerda c.s. con la integral de Lebesgue de H respecto de A, sobre cada intervalo $[0, t]$.

Notamos que al ser la integral de Lebesgue respecto de una medida (no-negativa), es una función de variación finita. Mientras que para comprobar que Y tiene trayectorias continuas por la derecha basta ver que lo son en N^c, dado que Y se anula dentro de N.

Sea $\omega \in N^c$ y $t \geq 0$, entonces por el Lema A.1

$$|Y_{t+h}(\omega) - Y_t(\omega)| = \Big| \int_t^{t+h} H_s(\omega) dA(\omega)_s \Big| \leq \int_t^{t+h} |H_s(\omega)| \ |dA(\omega)_s| \quad , \ h \geq 0 \ .$$

Por convergencia dominada (considerando la función $s \to |H_s(\omega)| \mathbb{1}_{(t,t+\varepsilon]}(s)$ para algún $\varepsilon > 0$ adecuado) esto implica que

$$\limsup_{h\to 0} |Y_{t+h}(\omega) - Y_t(\omega)| \leq \lim_{h\to 0} \int_t^{t+h} |H_s(\omega)| \ |dA(\omega)_s| = 0 \ .$$

Mostrando que Y tiene trayectorias continuas por la derecha. Solo falta probar que es adaptado.

Sea $v_A(\omega)$ la medida inducida por $A(\omega)$ como en el Lema A.2. Notesé que aquí se utiliza la hipótesis de que A es acotado para garantizar que $(V_A)_\infty < +\infty$ sea finita para toda $\omega \in \Omega$.

Por dicho lema, la familia restringida $(v_A(\omega)|_{[0,t]})_{\omega\in\Omega}$ es un kernel P-integrable de $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ en $([0,t], \mathscr{B}_{[0,t]})$. A su vez, como K es progresivo se tiene que la restricción a $\Omega \times [0,t]$ es una función $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}_{[0,t]}$-medible. Concluyendo que el mapeo $\omega \mapsto Y_t = \int_0^t K_s(\omega) dA_s(\omega)$ es $\mathscr{F}_t$-medible, en consideración del Lema A.3.

CASO 2: $A \in \mathcal{V}_0^+$**, arbitrario**

Definimos la sucesión de tiempos de paro,

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid |A_t| > n\} \quad ; \quad n \geq 0 \ .$$

Estos satisfacen que $\tau_n \uparrow \infty$ c.s., dado que $A \in \mathcal{V}_0^+$. Claramente, para cada n, el proceso detenido A^{τ_n} es acotado y pertenece a $\mathcal{V}_0$. Siguiendose por el caso anterior, la existencia de procesos $H \cdot A^{\tau_n} \in \mathcal{V}_0$ que coinciden con la integral de Lebesgue de H respecto de A^{τ_n} sobre cada intervalo $[0,t], \ t \geq 0$.

Sea entonces el conjunto común de medida cero

$$N = \{\omega \in \Omega \mid \lim_n \tau_n(\omega) < \infty \ , \ H \text{ no es integrable respecto de } A\} \ .$$

Análogamente al caso anterior, definimos $K := H\mathbb{1}_{N^c}$ un proceso progresivo y $Y_t = \int_0^t K_s dA_s$ un proceso que concuerda c.s. con la integral de H respecto de A, sobre cada intervalo $[0,t]$.

Notamos que para toda $\omega \in N^c$,

$$Y_t = \int_0^t H_s dA_s = \lim_n \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n)}(s) H_s dA_s \overset{c.s.}{=} \lim_n \int_0^t H_s dA_s^{\tau_n} = \lim_n (H \cdot A^{\tau_n})_t$$

en donde la segunda igualdad se da por convergencia dominada. Esto muestra que Y es el límite c.s. de procesos adaptados respecto de una filtración completa, por lo que Y es adaptado por sí mismo. De igual manera se sigue que Y es continuo por la derecha. Concluyendo $Y \in \mathcal{V}_0$.

CASO 3: $A \in \mathcal{V}_0$, arbitrario

Por el Lema 2.1.1 tenemos la descomposición $A = A^+ - A^-$ con $A^\pm \in \mathcal{V}_0^+$. Y así, por el caso anterior, sabemos que existen procesos $H \cdot A^\pm$ en $\mathcal{V}_0$ que coinciden c.s. con la integral de H respecto de $A^\pm$ sobre cada intervalo $[0, t]$, respectivamente. Por tanto, el proceso

$$H \cdot A = H \cdot A^+ - H \cdot A^-$$

satisface las propiedades requeridas del teorema.

□

Ejemplo 2.1.1 Dada $\{T_1, T_2, ...\}$ una sucesión infinita de v.a.i.i.d $\exp(\lambda)$, un proceso de Poisson homogéneo de tasa λ es definido como:

$$N_t = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{W_n \leq t\}} \quad ; \quad t \geq 0$$

en donde $W_0 = 0$ y $W_n = T_1 + ... + T_n$, $n \geq 1$.

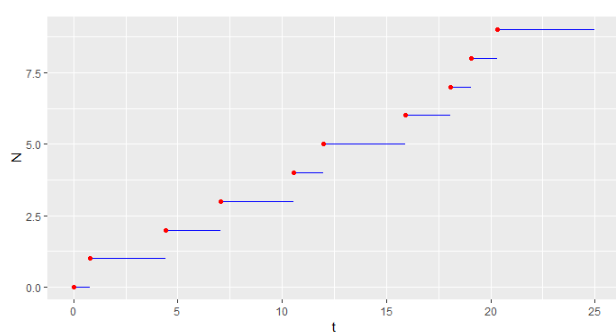

Figura 2.1 Trayectoria de un proceso de poisson ($\lambda = 2.5$)

Es fácil verificar que, restringido un intervalo de tiempo finito $[0, T]$, las trayectorias del proceso N_t son finitas, monótonas crecientes y continuas por la derecha, por lo que el proceso (restringido) es de variación finita y de hecho, un elemento de $\mathcal{V}_0^+$.

Así, para cada $\omega \in \Omega$, existe una única medida $\mu_N(\omega)$ sobre $[0,T]$ tal que:

$$\mu_N((a,b];\omega) = N_b(\omega) - N_a(\omega) \quad ; \; (a,b] \subseteq [0,T] \; .$$

Siguiendose por el teorema anterior que si H es un proceso progresivo e integrable respecto de N c.s., entonces existe un único proceso $H \cdot N \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$(H\cdot N)_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dN_s(\omega) = \int_0^t H_s \mu_N(ds;\omega) \quad c.s. \quad ; \quad t \leq T \; .$$

Aún más, es posible probar que

$$\mu_N(dx;\omega) = \sum_{n\geq 0} \delta_{W_n(\omega)}(dx)$$

y en consecuencia,

$$(H\cdot N)_t(\omega) = \sum_{n=1}^{N_t(\omega)} H_{W_n(\omega)}(\omega) \qquad c.s.$$

Destacamos la dependencia de la ω elegida sobre la medida μ_N y la integral $(H \cdot N)$.

Los resultados anteriores son importantes por sí mismos y por su relación con el tercer capítulo, específicamente al definir la integral estocástica respecto de semimartingalas. Sin embargo, la condición $A \in \mathcal{V}_0$ del Teorema 2.1.1 no es una limitación menor.

Proposición 2.1.2 *Si una martingala continua M pertenece a $\mathcal{V}_0$, entonces $M \overset{c.s.}{=} M_0$*
Prueba: Supongamos s.p.g. que $M_0 = 0$, bastando probar que $M = 0$ c.s.

Considerando ahora a V_s la variación de M, definimos $S_n = \inf\{s : V_s \geq n\}, n \geq 0$ siendo claro que la martingala M^{S_n} es de variación acotada para toda n. Esto simplifica nuevamente el problema, siendo suficiente probar el resultado para martingalas con variación acotada, digamos por $N \in \mathbb{N}^+$.

Sea entonces $t > 0$ y $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t\}$ una partición de $[0,t]$. Como M es una martingala, $\mathbb{E}[M_{t_{i+1}} M_{t_i}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}\big[M_{t_{i+1}} M_{t_i} | \mathscr{F}_{t_i}\big]\big] = \mathbb{E}[M_{t_i}^2]$ y por tanto

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1} M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right].$$

Así, por la continuidad de M tenemos que

$$\mathbb{E}[M_t^2] \leq \mathbb{E}\big[V_t \sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\big] \leq N \sup_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| \longrightarrow 0 \; ,$$

conforme $|\Delta| \to 0$. Mostrando que $M = 0$ c.s.

□

Este resultado establece la necesidad de nuevos conceptos y métodos, capaces de considerar una clase más amplia que $\mathcal{V}_0$ como procesos integradores, buscando abarcar con particular interés al movimiento browniano y en general, a las martingalas continuas.

2.2. Procesos de Variación Cuadrática Finita

Definición 2.2.1 *Dado un proceso estocástico a tiempo continuo X y una sucesión de particiones $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{k_n} = t\}$ del intervalo $[0,t]$ tales que $|\Delta_n| \to 0$, definimos*

$$Q_t^n(X) := \sum_{i=1}^{k_n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \ .$$

Decimos que X es de ***variación cuadrática finita****, si existe un proceso $[X]$ tal que para toda $t > 0$, $Q_t^n(X)$ converge en probabilidad a $[X]_t$ conforme $|\Delta_n| \to 0$.*

$$\forall\ t, \varepsilon > 0 \quad \lim_{|\Delta_n|\to 0} \mathbb{P}(\{\omega : |Q_t^n(X(\omega)) - [X]_t(\omega)| > \varepsilon\}) = 0 \ .$$

En caso de existir, el proceso $[X]$ es conocido como la *variación cuadrática de X*, siendo la extensión en términos probabilistas de la variación cuadrática clásica.

Ejemplo 2.2.1 La variación cuadrática del movimiento browninano sobre un intervalo $[0,t]$ converge en $L^2(\mathbb{P})$ a la longitud del intervalo, es decir:

$$\lim_{|\Delta_n|\to 0} \sum_{i=1}^{k_n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = t \quad , \text{ en el sentido } L^2(\mathbb{P}) \ .$$

Prueba: Dada una partición $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t\}$ del intervalo $[0,t]$, denotamos $\Delta B_{t_i} = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ y $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Entonces, es sencillo verificar que:

$$\mathbb{E}\left[\Big(\sum_i (\Delta B_{t_i})^2 - t\Big)^2\right] = \mathbb{E}\left[\Big(\sum_i (\Delta B_{t_i})^2 - \Delta t_i\Big)^2\right] = \sum_i Var[(\Delta B_{t_i})^2 - \Delta t_i]$$

$$= 2\sum_i (\Delta t_i)^2 \leq \left[2\ (\max_i \Delta t_i)(\sum_i \Delta t_i)\right] = 2|\Delta| t \ .$$

Mostrando la convergencia deseada conforme $|\Delta| \to 0$.

□

El siguiente resultado muestra que el proceso de variación cuadrática no genera redundancia con el proceso de variación. De hecho, considerando la contrapuesta, se establece que el proceso de variación cuadrática $[X]$ solo es relevante cuando V_X no es una opción.

Proposición 2.2.1 *Sea X un proceso con trayectorias continuas. Si X es de variación finita, entonces es de variación cuadrática nula.*

Por su parte, la siguiente caracterización del proceso de variación cuadrática de una martingala acotada es clave en el entendimiento del concepto y un paso necesario para establecer resultados más generales.

Proposición 2.2.2 *Toda martingala M continua y acotada es de variación cuadrática finita y el proceso $[M]$ es el único proceso en $\mathcal{V}_0^+$ tal que $M^2 - [M]$ es una martingala.*
La prueba de este resultado corresponde a la del Teorema 1.3, p. 120 de [22].

2.2.1. Martingalas Locales

Aunque el resultado anterior no considera ni siquiera al movimiento browniano, siendo insuficiente para nuestros propósitos, este puede ser extendido a una clase más amplia de procesos que abarca mínimamente a las martingalas continuas. Es con este propósito que introducimos el concepto de *martingala local*, un tipo fundamental de proceso estocástico con variación cuadrática finita.

Definición 2.2.2 *Decimos que un proceso estocástico M, adaptado y continuo por la derecha es una $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$-**martingala local** si se satisface que:*

i) *Existen tiempos de paro $\{\tau_n : n \geq 1\}$ tales que $\tau_n \uparrow \infty$ c.s.*

ii) *y para toda n, M^{τ_n} es una $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$-martingala.*

Evitamos la notación $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ siempre que el contexto lo permita.

Nota: *Comúnmente en la literatura se requiere que los procesos $M^{\tau_n}\mathbb{1}_{\{\tau_n>0\}}$ sean martingalas uniformente integrables, pero considerando los tiempos de paro acotados $\tau_n \wedge n$ siempre se asegura tal condición. En adelante siempre suponemos que M_0 es constante, por lo que también es posible prescindir del término $\mathbb{1}_{\{\tau_n>0\}}$.*

En este contexto decimos que los tiempos de paro τ_n forman una *secuencia de localización* para (o que reducen a) M, siendo posible encontrar distintas secuencias de localización para un mismo proceso. Este concepto de *reducción por localización* es esencial en la teoría de integración estocástica, permitiendo un análisis secuencial de procesos cuya naturaleza dificulta un análisis general.

Por otra parte, desde la definición es evidente que existe una relación entre las martingalas y las martingalas locales. De hecho, es sencillo verificar que toda martingala continua por la derecha es una martingala local y que toda martingala local acotada es una verdadera martingala.

Sin embargo, destacamos que el concepto de martingala local es mucho más general que el de martingala. No todas las martingalas locales son martingalas.

Ejemplo 2.2.2 (Martingala local estricta.) Sea B_t un movimiento browniano uni-dimensional y $T = \text{ínf}\{t \geq 0\ ; B_t = -1\}$, el cual resulta ser un tiempo de paro finito c.s. Definimos:

$$X_t = \begin{cases} 1 + B_{\frac{t}{1-t} \wedge T} & \text{si } t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases} \qquad \mathscr{G}_t = \begin{cases} \mathscr{F}_{\left(\frac{t}{1-t}\right)} & \text{si } t < 1, \\ \mathscr{F}_\infty & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Cumpliendose que X es una $\mathscr{G}_t$-martingala local estricta. Para ver esto, afirmamos que la sucesión de tiempos de paro

$$\tau_n = \frac{n}{n+1} \mathbb{1}_{T \geq n} + \left(\frac{T}{1+T} + n \right) \mathbb{1}_{T < n} \quad ; \ n \geq 0$$

es una secuencia de localización para X.

Dado que T es finito c.s., después de cierto punto siempre tendremos que $T < n$ y por tanto, que $\tau_n = T(1+T)^{-1} + n$ c.s.. Mostrando que $\tau_n \uparrow \infty$ c.s.

Sea ahora $n \geq 0$; Entonces, podemos ver que para $t < 1$

$$X_t^{\tau_n} = (X_t^{\tau_n})\, \mathbb{1}_{T \geq n} + (X_t^{\tau_n})\, \mathbb{1}_{T < n} = \left(X_t^{n/(n+1)} \right) \mathbb{1}_{T \geq n} + \left(X_t^{\frac{T}{T+1} + n} \right) \mathbb{1}_{T < n}$$

$$= \left(X_{t \wedge \frac{n}{n+1}} \right) \mathbb{1}_{T \geq n} + (X_t)\, \mathbb{1}_{T < n} = \left(1 + B_{\frac{t}{1-t} \wedge n \wedge T} \right) \mathbb{1}_{T \geq n} + \left(1 + B_{\frac{t}{1-t} \wedge T} \right) \mathbb{1}_{T < n}$$

$$= \left(1 + B_{\frac{t}{1-t} \wedge n} \right) \mathbb{1}_{T \geq n} + \left(1 + B_{\frac{t}{1-t} \wedge T} \right) \mathbb{1}_{T < n} = 1 + B_{t/(1-t)}^{n \wedge T}$$

y similarmente, que $X_t^{\tau_n} = 1 + B_{n \wedge T}$ para $t \geq 1$.

Es decir,

$$X_t^{\tau_n} = \left(1 + B_{t/(1-t)}^{n \wedge T} \right) \mathbb{1}_{t < 1} + (1 + B_{n \wedge T})\, \mathbb{1}_{t \geq 1} \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Notamos entonces que por el Corolario B.3, $B_t^{n\wedge T}$ es una $\mathscr{F}_t$-martingala y que de hecho es uniformemente integrable. Mientras que por el Corolario B.1, el proceso

$$B_{t/(1-t)}^{n\wedge T} \quad ; \quad t \geq 0$$

es una martingala respecto de la filtración $\mathscr{G}_t$. Siguiendose que efectivamente, para cada n, X^{τ_n} es una $\mathscr{G}_t$-martingala y por tanto, que X es una martingala local.

Sin embargo, su esperanza no es constante en t,

$$\mathbb{E}[X_0] = 1 \neq 0 = \mathbb{E}[X_1]$$

por lo que X no puede ser una martingala.

No obstante, algunos resultados para martingalas locales parecieran extender resultados de martingalas. Por ejemplo, que la clase de todas las martingalas locales es un espacio vectorial sobre el campo de los reales (notando que la secuencia de localización puede diferir de un elemento a otro) o que una martingala local detenida por un tiempo de paro sigue siendo una martingala local.

Adicionalmente, es posible establecer que un proceso es una martingala local si cualquier sucesión de tiempos de paro $\tau_n \uparrow \infty$ *reduce* al proceso en una sucesión de martingalas locales. Este criterio lo utilizamos repetidas veces en el resto del trabajo.

Lema 2.2.1 *Sea $\tau_n, n \geq 1$ una colección de tiempos de paro arbitraria tal que $\tau_n \uparrow \infty$. Entonces un proceso M es una martingala local si, y solo si, M^{τ_n} es una martingala local para toda n.*

Prueba: Sea M una martingala local con secuencia de localización (σ_n) y τ un tiempo de paro arbitrario. Claramente, para cada n, $(M^\tau)^{\sigma_n} = (M^{\sigma_n})^\tau$ es una martingala. Esto es, el proceso M^τ es una martingala local con secuencia de localización (σ_n) .

Supongamos ahora que cada M^{τ_n} es una martingala local con secuencia de localización $(\sigma_k^n)_k$. Dado que para toda n, $\sigma_k^n \to \infty$ c.s., es posible elegir un conjunto de índices $(k_n)_n$ tales que

$$\mathbb{P}\{\sigma_{k_n}^n < \tau_n \wedge n\} \leq 2^{-n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} .$$

Definiendo $\tau_n' = \tau_n \wedge \sigma_{k_n}^n$, por el Lema de Borel-Cantelli[1] obtenemos que $\tau_n' \to \infty$ y en consecuencia para los tiempos de paro $\tau_n'' = \inf_{m\geq n} \tau_m'$, que $\tau_n'' \uparrow \infty$ c.s. Notando que $(M^{\tau_n''}) = (M^{\tau_n'})^{\tau_n''}$ se obtiene el resultado.

□

[1]Para su consulta referimos al lector a [14], p. 92.

2.2.2. El Proceso de Covariación

Notamos que en cuanto a las propiedades de sus trayectorias, el concepto de martingala local también extiende al de martingala continua. En particular, las martingalas locales no triviales son de variación infinita.

Proposición 2.2.3 *Si una martingala local M pertenece a $\mathcal{V}_0$, entonces $M \overset{c.s.}{=} M_0$.*

Ahora, establecemos la existencia del proceso de covariación $[M,N]$ para cualesquiera dos martingalas locales continuas M y N. Este proceso es de variación finita y coincide con el proceso de variación cuadrática $[M]$ en el caso $N = M$, formando conjuntamente el puente entre la teoría de integración de Lebesgue-Stieltjes y la de integración estocástica a desarrollar.

Teorema 2.2.1 (Covariación.) *Para cualesquiera dos martingalas locales continuas M y N, existe un único (c.s.) proceso continuo $[M,N]$ en $\mathcal{V}_0$ tal que $MN - [M,N]$ es una martingala local continua.*

Demostración: Comenzamos por probar la existencia y unicidad del proceso $[M,M]$. Sea $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de tiempos paros con $\tau_n \uparrow \infty$ y tales que para cada n, $X_n = M^{\tau_n}\mathbb{1}_{[\tau_n>0]}$ sea una martingala continua y acotada. Entonces por la Proposición 2.2.2 existe, para cada n, un proceso $A_n \in \mathcal{V}_0^+$ tal que $X_n^2 - A_n$ es una martingala continua. Notando que $\left(X_{n+1}^2 - A_{n+1}\right)^{\tau_n} = X_n^2 - A_{n+1}^{\tau_n}$ es también una martingala continua, por la unicidad de A_n obtenemos que $A_n = A_{n+1}^{\tau_n}$.

Esto nos permite definir un proceso $[M,M]$, como:

$$[M,M]_t = (A_n)_t \quad ; \quad t \in [0,\tau_n]\ .$$

Cumpliendose que $(M^{\tau_n})^2 - [M,M]^{\tau_n} = (M^2 - [M,M])^{\tau_n}$ es una martingala continua y por tanto, una martingala local continua. Así, por el Lema 2.2.1 obtenemos que $M^2 - [M,M]$ es una martingala local continua. Mientras que la unicidad global de $[M,M]$ es consecuencia directa de la unicidad en cada intervalo $[0,\tau_n]$.

En adelante utilizamos las notaciones $[M]$ y $[M,M]$ indistintamente, a pesar de que propiamente $[M,M]$ es el proceso de variación cuadrática de M^2.

Sean ahora M,N dos martingalas locales continuas. Considerando la existencia de los procesos $[M+N]$ y $[M-N]$, es inmediato verificar que

$$4MN - ([M+N] - [M-N]) = \big((M+N)^2 - [M+N]\big) - \big((M-N)^2 - [M-N]\big)$$

es una martingala local, por lo que definiendo $[M,N] = \frac{1}{4}\left([M+N] - [M-N]\right)$ obtenemos el proceso buscado.

En general, la unicidad del proceso $[M,N]$ se sigue de la Proposición 2.2.3.

$\square$

El proceso $[M, N]$ cumple con propiedades bastante convenientes, similares a las de un producto interior. Estas propiedades serán utilizadas con bastante frecuencia en pruebas posteriores.

Proposición 2.2.4 *Para cualesquiera martingalas locales continuas M y N, el proceso $[M, N]$ satisface las siguientes propiedades:*

i) $[M, N] = [N, M]$.

ii) $[M]$ *es no-decreciente c.s.*

iii) $[M] = 0$ *si, y solo si, M es constante c.s.*

iv) $[aM_1 + bM_2, N] = a[M, N] + b[M_2, N]$.

v) $[M^\tau, N] = [M, N]^\tau = [M^\tau, N^\tau]$ *para cualquier tiempo de paro τ.*

Nótese la similitud entre los incisos iii) y v) con la Proposición 2.1.1

Considerando ahora que los procesos $[M]$ y $[M, N]$ pertenecen a $\mathcal{V}_0$, es posible definir procesos de integrales respecto de ellos, como en el Teorema 2.1.1. De hecho, el siguiente resultado acerca de este tipo de integrales resultará sumamente útil en la prueba de resultados importantes.

Proposición 2.2.5 *Para cualesquiera par de martingalas locales continuas M y N, y procesos medibles U, V se cumple c.s*

$$\int_0^t |U||V| \; d\big|[M, N]\big| \leq (U^2 \cdot [M])_t^{1/2} \; (V^2 \cdot [N])_t^{1/2} \;\; ; \; t \geq 0 \; .$$

Prueba: Sea $t \geq 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$, por la proposición anterior es sencillo verificar que

$$\begin{aligned} 0 \leq [aM + bN] &= a[M, aM + bN] + b[N, aM + bN] = a[aM + bN, M] + b[aM + bN, N] \\ &= a\left(a[M, M] + b[N, M]\right) + b\left(a[M, N] + b[N, N]\right) \\ &= a^2[M] + 2ab[M, N] + b^2[N] \; . \end{aligned}$$

i.e.,

$$0 \leq a^2[M]_t + 2ab[M, N]_t + b^2[N]_t \quad \text{c.s.}$$

en donde, para cada a, podemos considerar a esta última expresión como una forma cuadrática $Ax^2 + Bx + C$ no-negativa. Cumpliendose que $B^2 - 4AC \leq 0$ y por tanto,

$$[M, N]_t^2 \leq [M]_t [N]_t \qquad c.s.$$

Sea ahora $s < t$. Notamos que para los procesos $M - M^s$ y $N - N^s$,

$$\begin{aligned}[M - M^s, N - N^s] &= [M, N - N^s] - [M^s, N - N^s] \\ &= [M,N] - [M,N^s] - [M^s,N] + [M^s,N^s] \\ &= [M,N] - 2[M,N]^s + [M^s,N^s] \\ &= [M,N] - [M,N]_s \ .\end{aligned}$$

Obteniendo por la última desigualdad que

$$\big|\ [M,N]_t - [M,N]_s\ \big| \le \left([M]_t - [M]_s\right)^{1/2}\ \left([N]_t - [N]_s\right)^{1/2} \ .$$

Consideramos ahora el caso

$$U(\omega,s) = \sum_{i=0}^{n-1} U_i(\omega)\mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s)\ , \quad V(s,\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} V_i(\omega)\mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s)\ ,$$

con $0 = t_0 < t_1 \dots t_n = t$ una partición del intervalo $[0,t]$ y variables aleatorias acotadas U_i, V_i. En tal caso, es posible ver que

$$\left|\ \int_0^t UV\ d[M,N]\ \right| \le \sum_i |U_iV_i|\ |\ [M,N]_{t_{i+1}} - [M,N]_{t_i}\ |$$

$$\le \sum_i |U_i|\ |V_i|\ \left([M]_{t_{i+1}} - [M]_{t_i}\right)^{1/2}\ \left([N]_{t_{i+1}} - [N]_{t_i}\right)^{1/2} .$$

A su vez, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esto es menor que

$$\left(\sum_i U_i^2([M]_{t_{i+1}} - [M]_{t_i})\right)^{1/2} \left(\sum_i V_i^2([N]_{t_{i+1}} - [N]_{t_i})\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^t U^2\ d[M]\right)^{1/2} \left(\int_0^t V^2\ d[N]\right)^{1/2}_{.}$$

Es decir,

$$\left|\ \int_0^t UV\ d[M,N]\ \right| \le \left(\int_0^t U^2\ d[M]\right)^{1/2} \left(\int_0^t V^2\ d[N]\right)^{1/2}_{.}$$

Por convergencia dominada esto se extiende para procesos medibles.

Finalmente, consideramos a las derivadas de Radon-Nikodym

$$J_s := d[M,N]_s/|d[M,N]_s| \ .$$

Es necesario aclarar que $d[M,N]_s$ y $|d[M,N]_s|$ denotan la medida asociada y la medida de variación total de $[M,N]$, restringidas sobre el intervalo $(0,s]$, respectivamente.

Así, J es un proceso medible con valores en $\{-1,1\}$, por lo que utilizando la desigualdad anterior con $UJ \cdot \mathrm{sgn}(UV)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t |UV d[M,N]| &= \left| \int_0^t |UV| \cdot |d[M,N]| \right| \\
&= \left| \int_0^t (UV)\mathrm{sgn}(UV) \frac{d[M,N]^2}{|d[M,N]|} \right| \\
&= \left| \int_0^t (UJ\mathrm{sgn}(UV))V d[M,N] \right| \\
&\leq \left((UJ\mathrm{sgn}(UV))^2 \cdot [M]\right)_t^{1/2} \ (V^2 \cdot [N])_t^{1/2} \\
&= (U^2 \cdot [M])_t^{1/2} (V^2 \cdot [N]_t)^{1/2} \ .
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.1 (Kunita-Watanabe.) *Para cualesquiera $p \geq 1$ y $q \in \mathbb{R}^+$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$,*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |U||V| \ d|[M,N]| \right] \leq \ \left|\left| \ (U^2 \cdot [M])_\infty^{1/2} \ \right|\right|_p \left|\left| \ (V^2 \cdot [N])_\infty^{1/2} \ \right|\right|_q \ .$$

2.3. Integral Estocástica de Itô

Denotamos por $\mathcal{E}$ al espacio de los procesos simples, acotados y con saltos en solo un número finito de tiempos fijos. Retomando la integral estocástica elemental previamente definida, establecemos la siguiente relación característica.

Proposición 2.3.1 *Para cualesquiera dos martingalas locales continuas M y N, y procesos $U, V \in \mathcal{E}$, los procesos $U \cdot M$ y $V \cdot N$ son martingalas locales continuas, y satisfacen*

$$[U \cdot M, V \cdot N] = (UV) \cdot [M,N] \quad \text{c.s.} \tag{2.1}$$

Prueba: Suponiendo que la suma $V \cdot M = \sum_k \eta_k \left(M_t^{\tau_{k+1}} - M_t^{\tau_k} \right)$ tiene solo un número finito de términos no nulos, por el Lema B.1 tenemos que $V \cdot M$ es una martingala y la propiedad se extiende al caso general por la integrabilidad uniforme. Mediante un proceso de localización obtenemos la primer afirmación.

Probamos ahora la igualdad en (2.1). Sea $U_t = \sum_{k \le n} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(t)$ donde ξ_k es acotada y $\mathscr{F}_{\tau_k}$-medible para cada k. Mediante localización suponemos a M, N y $[M, N]$ acotadas, de tal forma que M, N y $MN - [M, N]$ sean verdaderas martingalas.

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(U \cdot M)_\infty N_\infty\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_j \xi_j \left(M_{t_{j+1}} - M_{t_j} \right) \sum_k \left(N_{t_{k+1}} - N_{t_k} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_k \xi_k \left(M_{t_{k+1}} N_{t_{k+1}} - M_{t_k} N_{t_k} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_k \xi_k \left([M, N]_{t_{k+1}} - [M, N]_{t_k} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[(U \cdot [M, N])_\infty \right] \ . \end{aligned}$$

Reemplazando a M, N por M^τ, N^τ para un tiempo de paro arbitrario τ, tenemos que

$$\mathbb{E}(U \cdot M)_\tau N_\tau = \mathbb{E}((U \cdot M^\tau)_\infty N_\infty^\tau) = \mathbb{E}(U \cdot [M^\tau, N^\tau])_\infty = \mathbb{E}(U \cdot [M, N])_\tau \ ,$$

asegurando que $(U \cdot M)N - U \cdot [M, N]$ es una martingala y en consecuencia, que

$$[U \cdot M, N] = U \cdot [M, N] \quad \text{c.s.}$$

$\square$

La importancia de este resultado radica en que al momento de extender $V \cdot M$ para una clase más amplia de procesos V, consideraremos a (2.1) *como la propiedad característica de la integral estocástica.*

Introducimos ahora el espacio $\mathcal{M}^2$ constituido por todas las martingalas continuas, L^2-acotadas, que comienzan en cero, equipado con la norma

$$||M||_{\mathcal{M}^2} = ||M_\infty||_2 = \mathbb{E}\left[(M_\infty)^2 \right]^{1/2} \ ,$$

cuya estructura resulta clave en el desarrollo posterior.

En adelante, para un proceso X definimos

$$X_t^* = \sup_{s \le t} |X_s| \quad , \quad X^* = \sup_{t \ge 0} |X_t| \ .$$

Lema 2.3.1 *La pareja* $(\mathcal{M}^2, ||\cdot||_{\mathcal{M}^2})$ *es un espacio de Hilbert.*

Prueba: Sea $M^1, M^2, ...$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}^2$, entonces la sucesión inducida (M^n_∞) es de Cauchy en L^2 y por tanto converge a algun elemento $\xi \in L^2$. Considerando la L^2-martingala $M_t = \mathbb{E}[\xi|\mathscr{F}_t]$, $t \geq 0$ notamos que $M_\infty = \xi$ c.s., ya que ξ es $\mathscr{F}_\infty$-medible. Así, por la Desigualdad de Doob

$$||(M^n - M)^*||_2 \leq 2||M^n - M||_{\mathcal{M}^2} = 2||M^n_\infty - M_\infty||_2 \longrightarrow 0$$

y $||M^n - M|| \longrightarrow 0$. Aún más, $(M^{n_k} - M)^* \longrightarrow 0$ c.s. para alguna subsucesión, asegurando que M es continua c.s. y que $M_0 = 0$.

□

Lema 2.3.2 *Para todo proceso* $M \in \mathcal{M}^2$*,*

$$||M||_{\mathcal{M}^2} = ||\ [M]^{1/2}_\infty\ ||_2 = (\mathbb{E}[M]_\infty)^{1/2} \quad .$$

Finalmente contamos con las herramientas necesarias para demostrar la existencia de un proceso que extienda a la integral estocástica elemental, respecto de una martingala local continua.

Definición 2.3.1 *Dada una* $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$*-martingala local* M*, denotamos mediante* $L(M)$ *el espacio de los procesos progresivos* V *respecto de la filtración* $\mathscr{F}_t$*, tales que*

$$(V^2 \cdot [M])_t = \int_0^t V^2 d[M] < \infty \quad c.s. \quad para\ toda\ t > 0\ .$$

Es posible ver que, equivalentemente, $L(M)$ consiste de todos los procesos progresivos V para los que existe una sucesión de tiempos de paro $\tau_n \uparrow \infty$ tales que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n} V^2 d[M]\right] < +\infty \quad ; \quad n \geq 0\ .$$

Teorema 2.3.1 (Integral Estocástica, Itô, Kunita, Watanabe.) *Para cualquier martingala local continua* M *y cualquier proceso* $V \in L(M)$*, existe una única (c.s.) martingala local continua* $V \cdot M$ *que comienza en cero, tal que*

$$[V \cdot M, N] = V \cdot [M, N] \quad c.s. \tag{2.2}$$

para toda martingala local continua N*.*

Demostración: (Unicidad) Sean M' y M'' dos martingalas locales continuas con $M_0' = M_0'' = 0$ tales que $[M', N] = V \cdot [M, N] = [M'', N]$ c.s., para toda martingala local continua N. Siguiendose por la linealidad de la covariación que $[M' - M'', N] = 0$ c.s. En particular, tomando $N = M' - M''$ obtenemos que $[M' - M''] = 0$ c.s. Mostrando que $(M' - M'')^2$ es una martingala local continua y constante que comienza en cero, siendo inmediato que $M' = M''$ c.s.

(Existencia) Consideramos primero el caso $||V||_M^2 = \mathbb{E}(V^2 \cdot [M])_\infty < \infty$.
Dado que V es medible, por el Lema A.1 y el Corolario 2.2.1

$$\left| \mathbb{E}\left[(V \cdot [M,N])_\infty\right] \right| \leq \mathbb{E}\left[\left| (V \cdot [M,N])_\infty \right| \right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^\infty |V| d|[M,N]| \right]$$

$$\leq \mathbb{E}[(V^2 \cdot [M])_\infty]^{1/2} \; \mathbb{E}[\; [N]_\infty]^{1/2} = ||V||_M \; ||N||_{\mathcal{M}^2} \quad ; \quad N \in \mathcal{M}^2 \; .$$

Esto asegura que el mapeo $N \to \mathbb{E}(V \cdot [M, N])_\infty$ es un funcional continuo en $\mathcal{M}^2$, el cual es un espacio de Hilbert. Así, por el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet existe un elemento $V \cdot M \in \mathcal{M}^2$ tal que:

$$\mathbb{E}\left[(V \cdot [M,N])_\infty\right] = \mathbb{E}\left[(V \cdot M)_\infty N_\infty\right] \quad ; \quad N \in \mathcal{M}^2 \; . \tag{2.3}$$

Considerando ahora un tiempo de paro arbitrario τ, por el último inciso de la Proposición 2.2.5 y el Teorema del Paro Opcional,

$$\mathbb{E}(V \cdot [M,N])_\tau = \mathbb{E}(V \cdot [M,N]^\tau)_\infty = \mathbb{E}(V \cdot [M,N^\tau])_\infty = \mathbb{E}\left[(V \cdot M)_\infty N_\infty^\tau\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[(V \cdot M)_\infty N_\tau\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[(V \cdot M)_\infty | \mathscr{F}_\tau] N_\tau\right] = \mathbb{E}(V \cdot M)_\tau N_\tau \; .$$

Mientras que como V es adaptado por ser progresivo, por el Corolario B.2 obtenemos que $(V \cdot M)N - V \cdot [M, N]$ es una martingala y en consecuencia,

$$[V \cdot M, N] = V \cdot [M,N] \quad c.s. \quad ; \; N \in \mathcal{M}^2 \; .$$

Mediante localización extendemos el resultado para cualquier martingala local N.

En el caso general $V \in L(M)$, definimos

$$\tau_n = \inf\{t > 0; (V^2 \cdot [M])_t = n\} \quad ; \quad n \geq 0 \; .$$

Cumpliendose que para toda n, $V \in L(M^{\tau_n})$. Esto asegura, por el desarrolo previo, la existencia de martingalas locales continuas $V \cdot M^{\tau_n}$ tales que, para cualquier martingala local continua N,

$$[V \cdot M^{\tau_n}, N] = V \cdot [M^{\tau_n}, N] \quad \text{c.s.} \quad ; \; n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Notando que para cualesquiera $m < n$, $(V \cdot M^{\tau_n})^{\tau_m}$ satisface la relación equivalente con $[M^{\tau_m}, N]$, obtenemos que $(V \cdot M^{\tau_n})^{\tau_m} = V \cdot M^{\tau_m}$ y por tanto, que existe un proceso continuo $V \cdot M$ tal que:

$$(V \cdot M)^{\tau_n} = V \cdot M^{\tau_n} \quad c.s. \quad ; \quad n \geq 0 \ .$$

Este proceso es una martingala local por el Lema 2.2.1. Además, por (2.4) sabemos que $[V \cdot M, N] = V \cdot [M, N]$ c.s. sobre cada $[0, \tau_n], n \geq 0$. Considerando que $\tau_n \uparrow \infty$, esta relación se extiende a todo $\mathbb{R}_+$.

□

El proceso $V \cdot M$ es conocido como la *integral estocástica de Itô* de V respecto de M, dando pie a la notación

$$(V \cdot M)_t = \int_0^t V_s dM_s \ .$$

Comparando la igualdad en (2.1) con la igualdad en (2.2), notamos que efectivamente este proceso extiende a la integral estocástica elemental previamente definida. Esperaremos a extender la integral a una clase más grande de integrandos, antes de presentar sus principales propiedades.

Usualmente, el proceso de integral estocástica es de interés solo sobre intervalos de tiempo finitos. No siempre es necesario que el proceso V pertenezca a $L(M)$ de manera global.

Por ejemplo, supongamos que solo buscamos definir al proceso $V \cdot M$ sobre un intervalo $[0, T]$. Considerando:

$$U(\omega, t) = \begin{cases} V(\omega, t) & \text{si} \quad t \leq T \ , \\ 0 & \text{si} \quad t > T \ . \end{cases}$$

solo es necesario que U pertenezca a $L(M)$, para poder definir a $(V \cdot M)$ como la restricción de $(U \cdot M)$ sobre $[0, T]$. En adelante, a este tipo de integrabilidad es a la que nos referimos cuando digamos que un proceso V pertenece a $L(M)$ sobre $[0, T]$.

2.3.1. Isometría de Itô

Destacamos que por la igualdad en (2.3), se satisface que

$$\mathbb{E}(V \cdot M)^2_\infty = \mathbb{E}\left[(V \cdot M)_\infty (V \cdot M)_\infty\right] = \mathbb{E}(V \cdot [M, (V \cdot M)])_\infty = \mathbb{E}(V^2 \cdot [M, M])_\infty$$

para cualquier $V \in L^2(M)$. Esto no es un resultado trivial, por lo que es necesario establecerlo propiamente.

Para esto último, si M una martingala local continua, denotamos

$$\mathscr{L}^2(M) := \{V \in L(M) : ||V||_M^2 = \mathbb{E}(V^2 \cdot [M])_\infty < \infty\} ,$$

y mediante $L^2(M)$ al espacio de sus clases de equivalencia; el cual es un espacio de Hilbert bajo la norma $|| \cdot ||_M$.

Corolario 2.3.1 (Isométria de Itô.) *Para cualquier martingala local continua M, el mapeo*

$$\Phi : \left(L^2(M), || \cdot ||_M\right) \longrightarrow (\mathcal{M}^2, || \cdot ||_{\mathcal{M}^2})$$

$$V \longmapsto \Phi(V) := V \cdot M$$

es una isometría. Es decir, para todo $V \in L^2(M)$

$$||V \cdot M||_{\mathcal{M}^2}^2 = \mathbb{E}\left[(\int_0^\infty V_s dM_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty V_s^2 \; d[M]_s\right] = ||V||_M^2 \; .$$

La importancia de este resultado radica en asegurar que bajo ciertas condiciones el proceso de integral estocástica es una martingala perteneciente a $\mathcal{M}^2$. En general, solo podemos decir que el proceso $V \cdot M$ es una martingala local continua.

Ejemplo 2.3.1 Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$-movimiento browniano estándar y $T \geq 0$. Este proceso es una martingala local continua y de hecho, por la Proposición 1.2.5 es un proceso progresivo. Siguiendose además, por lo visto en la sección de procesos medibles, que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T B_s^2 d[B]_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T B_s^2 ds\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[B_s^2\right] ds$$

$$= \int_0^T s ds = \frac{T^2}{2} \; .$$

Es decir, $B_t \in L^2(B)$ sobre el intervalo $[0, T]$.

Por tanto, el proceso $\{\int_0^t B dB_s \; ; \; t \leq T\}$ es una martingala en $\mathcal{M}^2$ tal que

$$\mathbb{E}\left[(\int_0^T B_s dM_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T B_s^2 ds\right] = \frac{T^2}{2} \; .$$

Nota Histórica

Mencionamos que la manera en como construimos y caracterizamos a la integral estocástica no es la única manera de hacerlo. De hecho, llegar a los métodos y conceptos que utilizamos en este trabajo requirió más de 20 años en contribuciones de diversos personajes.

Inicialmente, en 1944 K. Itô probó la existencia de la integral estocástica solo para el caso en que el proceso integrador fuera un movimiento browniano y únicamente sobre el intervalo $[0,1]$ ([8]). En esencia, su construcción consiste en definir la integral estocástica para procesos elementales X^k y probar la isometría:

$$\mathbb{E}\left[(\int_0^1 X_s^k dB_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^1 (X_s^k)^2 ds\right].$$

Entonces, para cualquier proceso X que pueda ser aproximado adecuadamente por esta clase de procesos, se define su integral como un límite de integrales elementales

$$\int_0^1 X_s dB_s \equiv \lim_{k\to\infty} \int_0^1 X_s^k dB_s \ ,$$

en donde el límite se entiende en el sentido de $L^2(\mathbb{P})$.

En 1951 K. Itô mismo extiende estos resultados para definir la integral estocástica respecto de un movimiento browniano sobre conjuntos más generales ([9]). Por ejemplo, sobre los conjuntos de Borel de un intervalo $(a,b]$. En esta misma publicación se comienza a ver a la integral estocástica como un proceso estocástico por sí mismo.

Dos años más tarde, en 1953 J.L. Doob extendió la integral estocástica de Itô para considerar como integrandos a las martingalas M para las cuales exista una función no-decreciente (por tanto, de variación finita) F tal que

$$\mathbb{E}\big[|M_t - M_s|^2\big] = F(t) - F(s) \quad ; \ 0 \le s < t \le T \ . \tag{2.5}$$

Ya que a partir de este hecho, para cualquier proceso conjuntamente medible, adaptado respecto de la misma filtración para la que M es martingala y que satisfaga la condición de integrabilidad

$$\int_0^T \mathbb{E}[X_s^2] \ dF(s) \ ,$$

es posible definir, nuevamente mediante un procedimiento de límites, la integral estocástica de X respecto de M ([5]). La isometría de Itô se extiende ahora como:

$$\mathbb{E}\left[(\int_0^T X_s dM_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_s^2 dF(s)\right].$$

En 1962, como una aplicación de los resultados desarrollados en su prueba del Teorema de Descomposición de Supermartingalas, P.A. Meyer probó que para cualquier proceso en la clase $\mathfrak{M}$ de martingalas cuadrado integrables también existe una función creciente que satisface la relación en (2.5), generalizando así el trabajo de Doob para la clase $\mathfrak{M}$ ([17]).

Hasta este punto, la integral estocástica siempre había sido caracterizada como un límite, pero en 1965 M. Motoo y S. Watanabe vislubran a la integral estocástica como un operador lineal sobre $\mathfrak{M}$ ([18]) y establecen la propiedad característica:

$$\langle f \cdot M, N \rangle = f \cdot \langle M, N \rangle \ .$$

Aquí $\langle X, Y \rangle$ denota un predecesor del proceso de covariación, definido únicamente para procesos $X, Y \in \mathfrak{M}$, cuya principal característica es la igualdad

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)(Y_t - Y_s)\middle|\mathscr{F}_s\right] = \langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_s \quad ; \quad 0 \leq s < t$$

con $\mathscr{F}_t$ denotando la filtración para la cual X, Y son martingalas.

Ese mismo año, en 1965, K. Itô y S. Watanabe introducen el concepto de martingala local ([10]).

Por su parte, en 1967 H. Kunita y S. Watanabe prueban que para cualesquiera dos martingalas locales M y N, cuyos procesos detenidos pertenezcan a $\mathfrak{M}$, existe un único proceso de variación finita $\langle M, N \rangle$ que satisface la igualdad

$$\langle M, N \rangle_{t \wedge \tau} \equiv \langle M^\tau, N^\tau \rangle_t \ ,$$

para cualquier tiempo de paro τ con $M^\tau, N^\tau \in \mathfrak{M}$ ([16]).

Durante la construcción de la integral estocástica respecto de una martingala local M, el proceso $\langle M, M \rangle$ juega un papel similar al de la función F anteriormente mencionada. Sin embargo, lo novedoso en los trabajos de S. Watanabe fueron las ideas asociadas al proceso $\langle M, N \rangle$.

Capítulo 3

Semimartingalas

En este tercer capítulo extendemos la integral estocástica para abarcar a las semimartingalas como proceso integrador y exponemos la estructura de esta clase de procesos dentro de la teoría de integración estocástica. En específico, desarrollamos los resultados conocidos como la Fórmula de Itô y el Teorema de Girsanov.

En la Sección 3.1, introducimos a las semimartingalas como una extensión simultánea de los procesos de variación finita y de las martingalas locales. Entonces, establecemos las principales propiedades del proceso de integral estocástica.

En la Sección 3.2, presentamos la Fórmula de Itô como el teorema central dentro de la teoría de integración estocástica y por tanto, de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Establecemos algunas consecuencias útiles de esta fórmula, destacando que la clase de semimartingalas continuas es invariante bajo la composición de funciones suficientemente suaves.

En la Sección 3.3, establecemos el Teorema de Girsanov y su relación con la teoría de integración estocástica. Esto lo hacemos con el objetivo de mostrar las consecuencias más importantes sobre la clase de semimartingalas continuas, al considerar distintas medidas de probabilidad.

3.1. Extensión de la Integral Estocástica

Una vez probada la existencia de un proceso de integral estocástica con respecto a una martingala local, resulta conveniente la extensión a una clase más amplia de procesos integradores, que abarque y extienda simultáneamente lo expuesto sobre martingalas locales continuas y los procesos de variación finita. Con este fin introducimos el concepto de *semimartingala continua*.

Definición 3.1.1 *Un proceso continuo X es una $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$-semimartingala continua si puede ser escrito en la forma $X = M + A$, con M una $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$-martingala local continua y A un proceso continuo en $\mathcal{V}_0$.*

Entendemos por una *semimartingala continua en* $\mathbb{R}^d$ a un proceso $X = (X^1, ..., X^d)$ en donde cada componente X^i es una semimartingala continua. La descomposición $X = M + A$ es única c.s., siendo conocida como la *descomposición canónica* de X.

Intuitivamente, la variación cuadrática de una semimartingala $X = M+A$ debería ser igual a la suma $[M] + [A]$, lo que en consideración de la Proposición 2.2.1 es solamente $[M]$. El siguiente resultado confirma esta idea, mostrando que el proceso de variación cuadrática se extiende de manera natural a las semimartingalas continuas.

Proposición 3.1.1 *Sea $X = M + A$ una semimartingala continua, entonces X es de variación cuadrática finita y además $[X, X] = [M, M]$.*
Prueba: Sea $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = t\}$ una partición del intervalo $[0, t]$. Claramente,
$\sum_{i<k} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 = \sum_i \left|M_{t_{i+1}} + A_{t_{i+1}} - M_{t_i} + A_{t_i}\right|^2$

$$= \sum_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^2 + 2\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|^2 \, . \quad (3.1.1)$$

Así, es posible ver que conforme $|\Delta| \to 0$,

$$\sum_i \left|(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})\right| \leq \sup_i \left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\right] \; \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| \to 0 \; ,$$

dado que M es continua y A es de variación finita. Además, como A es de variación finita entonces es de variación cuadrática nula y por tanto, el último término en (3.1.1) tiende a cero. Esto es,

$$(1) = \sum_i |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^2 \longrightarrow [M, M]_t \quad , \quad |\Delta| \to 0 \; .$$

Mostrando el resultado deseado, $[X, X] = [M, M]$.

□

A partir de este último resultado, establecemos la siguiente definición.

Definición 3.1.2 *Sean X y Y dos semimartingalas continuas con descomposición canónica $M + A$ y $N + B$, respectivamente. Definimos el proceso de covariación de X y Y, como*

$$[X, Y] = [M, N] = \frac{1}{2} \left(\, [X + Y, X + Y] - [X - Y, X - Y] \, \right) \, .$$

Además, es posible mostrar que para cualquier $t \geq 0$ y sucesión de particiones $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{k_n} = t\}$ como en la Definición 2.2.1, se satisface el límite en probabilidad

$$\lim_{|\Delta_n| \to 0} \sum_{i=0}^{k_n - 1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) \to [X, Y]_t \ ,$$

justificando así el término de covariación para el proceso $[X, Y]$.

Extendemos ahora la integral estocástica para considerar semimartingalas continuas como procesos integradores:

Dada una semimartingala continua $X = M + A$, denotamos mediante $L(A)$ a la clase de procesos progresivos V, tales que el proceso $(V \cdot A)_t = \int_0^t V dA$ existe en el sentido del Teorema 2.1.1. Y retomando la Definición 2.3.1, establecemos

$$L(X) := L(M) \cap L(A) \ . \tag{3.1.2}$$

Notemos que dado un proceso progresivo V, se cumple que $V \in L(X)$ si, y solo si, $V^2 \in L([M])$ y $V \in L(A)$.

Así, para cualquier semimartingala continua $X = M + A$ y proceso $V \in L(X)$ definimos *el proceso de integral estocástica de V respecto de X*, como la suma

$$V \cdot X = V \cdot M + V \cdot A \ . \tag{3.1.3}$$

En general, $V \cdot X$ es nuevamente una semimartingala continua con descomposición canónica $V \cdot M + V \cdot A$. Pero notamos que si X es estrictamente una martingala local o un proceso de variación finita, el proceso $V \cdot X$ también lo es de manera estricta.

3.1.1. Propiedades de la Integral Estocástica

Como es de esperarse, las características del proceso extendido de integral estocástica asemejan a las de una integral ordinaria y aún más, las del proceso de variación cuadrática (inciso 3). Destacamos que las propiedades presentadas a continuación son válidas, en particular, para integrales estocásticas respecto martingalas locales estrictas. Es por esta razón que no las establecimos al final del cápitulo 2 y preferimos esperar hasta haber extendido la integral estocástica.

Proposición 3.1.2 *Dada una semimartingala continua X, un proceso $V \in L(X)$ y un proceso progresivo U:*

i) *Si $U \in L(X)$, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$(aU + bV) \cdot X = a(U \cdot X) + b(V \cdot X) \ .$$

ii) *$U \in L(V \cdot X)$ si, y solo si, $UV \in L(X)$. En cuyo caso,*

$$U \cdot (V \cdot X) = (UV) \cdot X \quad c.s.$$

iii) *Para cualquier tiempo de paro τ, $(V \cdot X)^\tau = V \cdot X^\tau = (V1_{[0,\tau]}) \cdot X \quad c.s.$*

El segundo inciso es conocido como la *regla de la cadena*, al ser una extensión del resultado homónimo para integrales ordinarias de Lebesgue-Stieltjes. Asimismo, es posible establecer una versión estocástica del teorema de convergencia dominada.

Teorema 3.1.1 (Convergencia Dominada Estocástica.) *Sea X una semimartingala continua. Si $U, V, V_1, V_2, ...$ son procesos en $L(X)$ tales que $|V_n| \leq U$ para toda n y $V_n \to V$, entonces*

$$\lim_n (V_n \cdot X - V \cdot X)^*_t \overset{P}{=} 0 \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Para la prueba de este teorema consideramos la siguiente propiedad de continuidad de la integral estocástica respecto de martingalas locales continuas.

Lema 3.1.1 *Para cualesquiera martingalas locales continuas M_n y procesos V_n en $L(M_n)$, se cumple $(V_n \cdot M_n)^* \xrightarrow{P} 0$ si, y solo si, $(V_n^2 \cdot [M_n])_\infty \xrightarrow{P} 0$.*

Demostración del Teorema 3.1.1: Considerando la descomposición $X = M + A$, tenemos que $U^2 \in L([M])$ y $U \in L(A)$. Esto porque $U \in L(X)$.

Así, por convergencia dominada tenemos que

$$((V_n - V)^2 \cdot [M])_t \to 0 \quad \text{y} \quad (V_n \cdot A - V \cdot A)^*_t \to 0 \quad \text{c.s.} \ .$$

Por el lema anterior, la primer convergencia implica que

$$(V_n \cdot M - V \cdot M)^*_t \xrightarrow{P} 0 \ ,$$

siguiendose el resultado al considerar los últimos dos límites.

□

En este punto surge un resultado clave en el entendimiento de la relación entre las martingalas locales y el proceso de covariación, ya que este último no solo sirve para caracterizar al proceso de integral estocástica, la relación va más allá y se extiende hasta las semimartingalas continuas.

Proposición 3.1.3 (Integración por partes.) *Para cualesquiera dos semimartingalas continuas X y Y, se satisface que*

$$XY = X_0Y_0 + X \cdot Y + Y \cdot X + [X, Y] \quad c.s. \tag{3.1.4}$$

Prueba: Sean $t > 0$ y Δ_n una sucesión de particiones del intervalo $[0, t]$, como en la Definición 2.1.1. Entonces, para cualquier $n \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{k_n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{k_n-1}\left(X_{t_{i+1}}^2 - 2X_{t_{i+1}}X_{t_i} + X_{t_i}^2\right) = \sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_{i+1}}^2 - 2\sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}X_{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}^2$$

$$= \left(X_t^2 + \sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}^2 - X_0^2\right) - 2\sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}X_{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}^2$$

$$= X_t^2 - X_0^2 - 2\sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}X_{t_{i+1}} + 2\sum_{i=0}^{k_-1} X_{t_i}^2$$

$$= X_t^2 - X_0^2 - 2\sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \; .$$

i.e.,

$$\sum_{i=0}^{k_n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = X_t^2 - X_0^2 - 2\sum_{i=0}^{k_n-1} X_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \; .$$

Tomando el límite $n \to \infty$, el lado derecho es igual al término $[X, X]_t$. Mientras que en el lado izquierdo, es posible ver que el límite de la suma equivale a la integral $\int_0^t XdX_s$ y así obtener la relación

$$[X, X]_t = X_t^2 - X_0^2 - 2\int_0^t XdX_s \; .$$

Esto prueba el caso $X = Y$ y mediante polarización obtenemos el resultado general.

□

Para finalizar la sección presentamos el siguiente resultado de aproximación.

Proposición 3.1.4 *Sea una semimartingala continnua $X = M + A$ y un proceso $V \in L(X)$, entonces existen procesos $V_1, V_2, ... \in \mathcal{E}$ tales que $((V_n - V)^2 \cdot [M])_t \to 0$ y $((V_n - V) \cdot A)^*_t \to 0$ para toda $t \geq 0$, c.s.*

En particular, por el Lema 3.1.1 la convergencia $((V_n - V)^2 \cdot [M])_\infty \to 0$ implica la convergencia $((V_n - M) \cdot M)^* \xrightarrow{P} 0$. Y dado que la convergencia c.s. implica la convergencia en probabilidad $((V_n - V) \cdot A)^*_t \xrightarrow{P} 0$, obtenemos por propiedades del supremo que

$$((V_n - V) \cdot X)^* \leq ((V_n - V) \cdot M)^* + ((V_n - V) \cdot A)^* \xrightarrow{P} 0 \ .$$

Mostrando que para todo $V \in L(X)$, la integral estocástica respecto de X puede ser aproximada mediante integrales de procesos simples. Esto debe recordar al lector la construcción usual de Itô mencionada en la nota histórica.

3.2. Fórmula de Itô

La fórmula de Itô, establecida por primera vez en 1951 por Kiyoshi Itô, es actualmente considerada como una de las fórmula más importantes en la teoria de la probabilidad y la principal dentro de la teoría de integración estocástica. En el limitado contexto de este trabajo, su importancia radica en asegurar que la propiedad de ser semimartingala se preserva bajo la composición de funciones suficientemente suaves.

Esto último no sucede, por ejemplo, con la propiedad de ser martingala ni con la propiedad de ser martingala local; Si M es una martingala y f una función convexa, entonces $f(M)$ es una semimartingala. Mientras que si M es una martingala local, usualmente $f(M)$ no es una martingala local sino una semimartingala estricta.

En adelante, de manera usual denotamos mediante $C^k = C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ a la clase de funciones reales en $\mathbb{R}^d$ que son k veces continuamente diferenciables.

Teorema 3.2.1 (Fórmula de Itô.) *Sea $X = (X^1, ..., X^d)$ una semimartingala continua en $\mathbb{R}^d$. Entonces, para cualquier función $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene que $f(X)$ es una semimartingala continua tal que*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_s)\, dX^i_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}(X_s)\, d[X^i, X^j]_s \quad (3.2.1)$$

para toda $t \geq 0$.

Demostración: Por claridad solamente probamos el caso $d = 1$, ya que el caso general sigue la misma estructura. Sea entonces X una semimartingala continua unidimensional y $\mathcal{C}$ la clase de funciones $f \in C^2(\mathbb{R})$ tales que

$$f(X) = f(X_0) + f'(X) \cdot X + \frac{1}{2} f''(X) \cdot [X] \tag{3.2.2}$$

Claramente, $\mathcal{C}$ es un subespacio lineal de $\mathcal{C}^2$ que contine a las funciones $f(x) \equiv 1$ y $f(x) = x$, por lo que basta mostrar que es cerrado bajo multiplicación para aseguar que $\mathcal{C}$ contine a todos los polinomios.

Para ver esto, sean f y g en $\mathcal{C}$. Entonces, tanto $F = f(X)$ como $G = g(X)$ son semimartingalas continuas y así, por la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned}
(*) = (fg)(X) - (fg)(X_0) = FG - F_0 G_0 &= F \cdot G + G \cdot F + [F, G] \\
&= F \cdot \left(g'(X) \cdot X + \frac{1}{2} g''(X) \cdot [X] \right) \\
&+ G \cdot \left(f'(X) \cdot X + \frac{1}{2} f''(X) \cdot [X] \right) \\
&+ [f'(X) \cdot X, g'(X) \cdot X] \, .
\end{aligned}$$

En donde $[F, G] = [f'(X) \cdot X, g'(X) \cdot X]$ debido a que $f(X_0), g(X_0)$ son solo constantes y $f''(X) \cdot [X]$, $g''(X) \cdot [X]$ son procesos de variación finita.

A su vez, por la regla de la cadena tenemos que

$$F \cdot (g'(X) \cdot X + \frac{1}{2} g''(X) \cdot [X]) = (fg')(X) \cdot X + \frac{1}{2} (fg'')(X) \cdot [X] \; ,$$

y análogamente

$$G \cdot (f'(X) \cdot X + \frac{1}{2} f''(X) \cdot [X]) = (gf')(X) \cdot X + \frac{1}{2} (f''g)(X) \cdot [X] \; .$$

Mientras que por la propiedad característica de la integral de Itô,

$$[f'(X) \cdot X, g'(X) \cdot X] = (f'g')(X) \cdot [X] \; .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
(*) &= (fg' + f'g)(X) \cdot X + \frac{1}{2} (fg'' + 2f'g' + f''g)(X) \cdot [X] \\
&= (fg)'(X) \cdot X + \frac{1}{2} (fg)''(X) \cdot [X] \; ,
\end{aligned}$$

mostrando que efectivamente el producto fg es un elemento de $\mathcal{C}$.

Sea ahora $f \in C^2$ arbitraria. Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, para cada $c > 0$ existen polinomios $p_1, p_2, ...$ tales que $\sup_{|x|\leq c} |p_n(x) - f''(x)| \to 0$. Integrando dos veces cada p_n obtenemos polinomios f_n que satisfacen

$$\sup_{|x|\leq c} \Big(|f(x) - f(x)| \vee |f'(x) - f'(x)| \vee |f''(x) - f''(x)| \Big) \to 0 \quad ; \quad c > 0 \ .$$

En particular, $f_n(X_t) \to f(X_t)$ para cada $t > 0$.

Considerando entonces a $M + A$ como la descomposición canónica de X, por convergencia dominada (ordinaria) obtenemos que

$$\left(f_n'(X) \cdot A + \frac{1}{2} f_n''(X) \cdot [X] \right)_t \longrightarrow \left(f'(X) \cdot A + \frac{1}{2} f''(X) \cdot [X] \right)_t \quad ; \quad t > 0$$

y similarmente, que $((f_n'(X) - f'(X))^2 \cdot [M])_t \to 0$ para $t \geq 0$.

Así, por el Lema 3.1.1

$$(f_n'(X) \cdot M)_t \xrightarrow{P} (f'(X) \cdot M)_t \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Mostrando que la igualdad en (3.2.2) válida para los polinomios f_n se mantiene válida en el límite para f. Obteniendo el resultado deseado.

□

Observación: Considerando la función $f(x, y) = xy$, la fórmula de integración por partes resulta ser simplemente una aplicación directa de la Fórmula de Itô.

En algunos casos, la condición $f \in C^2$ puede ser reemplazada por condiciones más débiles. Por ejemplo, si algunos componentes X^i son de variación finita solo es necesario que F sea de clase C^1 en las respectivas coordenadas, para que $F(X)$ sea nuevamente una semimartingala. El siguiente resultado es un ejemplo muy importante de esta situación.

Corolario 3.2.1 *Sea X es una semimartingala continua y $f(t, x)$ una función de clase C^1 en t y de clase C^2 en x, entonces $f(X_t) = f((t, X_t))$ es una semimartingala continua tal que*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} \ (X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X} \ (X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \ (X_s) d[X]_s \ ,$$

para toda $t \geq 0$.

Mientras que en el caso $f(X_t) = f(t)$, en conjunto con una aplicación directa de la fórmula de integración por partes, obtenemos la siguiente fórmula.

Corolario 3.2.2 *Si X es una semimartingala continua y $f(X_t) = f(t)$ es una función de clase C^2, entonces se satisface que*

$$f(t)X_t = f(0)X_0 + \int_0^t f(s)dX_s + \int_0^t X_s df(s) \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Ahora nos enfocamos en ejemplificar el uso de la Fórmula de Itô. Comenzando por el siguiente ejemplo clásico de como la fórmula de Itô facilita la evaluación de integrales estocásticas.

Ejemplo 3.2.1 Sea $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ con $n \geq 1$, y X una semimartingala continua.

Por la fórmula de Itô,

$$\frac{X_t^{n+1}}{n+1} = \int_0^t X_s^n dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t nX_s^{n-1}d[X]_s \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Equivalentemente,

$$\int_0^t X_s^n dX_s = \frac{X_t^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{2}\int_0^t X_s^{n-1}d[X]_s \ .$$

3.2.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y su relación con la Fórmula de Itô

En este punto estamos listos para introducir a la ecuaciones diferenciales estocásticas y en especial, mostrar la importancia de la fórmula de Itô en su resolución.

Definición 3.2.1 *Sean b, σ_j funciones de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$. Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b^i(s, X_s)ds + \sum_j \int_0^t \sigma_j^i(s, X_s)dB_s^j \quad ; \ t \geq 0 \tag{3.2.3}$$

en donde $B = (B^1, ..., B^r)$ es un movimiento browniano r-dimensional respecto de una filtración $\mathscr{F}_{t\geq 0}$, y la solución $X = (X^1, ..., X^d)$ es una $\mathscr{F}_{t\geq 0}$-semimartingala continua en $\mathbb{R}^d$. Siempre que todas las integrales existan.

En general, nos referimos a la ecuación en (3.2.3) simplemente como la ecuación (b, σ) y la escribimos preferentemente en su forma diferencial,

$$dX_t^i = b^i(t, X)dt + \sigma_j^i(t, X)dB_t^j \ .$$

Por conveniencia nos limitaremos a trabajar el caso $d = 1$. Esto es algo usual en la literatura, considerando que los resultados se extienden fácilmente a dimensiones superiores. Bajo esta restricción, la ecuación (b, σ) toma la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \ . \tag{3.2.4}$$

Este tipo de ecuaciones sirven, en analogía a la ecuaciones diferenciales ordinarias, para describir sistemas cuyos cambios infinitesimales son generados por perturbaciones aleatorias. Evidentemente, su alcance práctico es muy grande y es gracias a estas aplicaciones que la teoría de integración estocástica ha llegado a ser relevante en áreas como la física, economía, biología, ingeniería, entre otras.

Sin embargo, en las ecuaciones diferenciales estocásticas sucede algo que no tiene analogía con las ecuaciones ordinarias: Las soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas dependen directamente de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ y de un movimiento browniano dado.

Esta dependencia es expuesta a lo largo de todo el desarrollo anterior, desde la definición de martingala local hasta la construcción de la integral estocástica. Siempre trabajamos bajo una filtración y medida establecida. Debido a esto, es necesario establecer distintos tipos de soluciones posibles para una ecuación diferencial estocástica.

Definición 3.2.2 (Solución Fuerte.) *Dado un espacio de probabilidad filtrado fijo* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$*, un* $\mathscr{F}_t$*-movimiento browniano* B *y una función* $\mathscr{F}_0$*-medible* ξ*. Una solución fuerte de la ecuación* (b, σ) *es definida como un proceso adaptado* X*, tal que* $X_0 = \xi$ *c.s. y que satisface la igualdad en* (3.2.4)*.*

Definición 3.2.3 (Solución Débil.) *Dada una distribución* μ*, una solución débil de la ecuación* (b, σ) *consiste de un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$*, junto con un* $\mathscr{F}_t$*-movimiento browniano* B *y un proceso adaptado* X*, tal que* $\mathcal{L}(X_0) = \mu$ *y que satisface* (3.2.4)*.*

Esencialmente, una solución fuerte es inducida a partir de un movimiento browniano fijo, definido en un espacio de probabilidad dado. Mientras que una solución débil requiere de la definición de un espacio de probabilidad adecuado, en el que exista un movimiento browniano a partir del cual sea posible construir una solución a la ecuación dada.

Mencionamos también que a los procesos estocásticos que resultan ser soluciones (débiles o fuertes) de una ecuación diferencial estocástica se les conoce como *difusiones*. En adelante, siempre que hagamos referencia a una difusión será a través de la ecuación (b, σ) que soluciona, pero hacemos un llamado a no confundir a la ecuación misma como el proceso difusivo. Una difusión es una solución, no una ecuación diferencial estocástica.

Dada una ecuación (b, σ) en un espacio de probabilidad fijo y con un movimiento browniano dado B_t, es posible utilizar la fórmula de Itô para evaluar la integral $\sigma(t, X_t)dB_t$ y verificar directamente si un proceso dado X satisface la ecuación (b, σ). Es decir, verificar si X es una solución fuerte de la ecuación. Pero su utilidad no se limita a la evaluación de integrales.

Presentamos ahora un ejemplo de como a partir de la fórmula de Itô podemos construir una solución fuerte a una ecuación diferencial estocástica.

Ejemplo 3.2.2 (Igualación de coeficientes.)
Buscamos encontrar una solución a la ecuación

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dB_t \qquad | \qquad X_0 = 1 \tag{3.2.5}$$

con B_t un movimiento browniano fijo en un espacio de probabilidad dado.

Para esto, supongamos que $X_t = f(t, B_t)$ para alguna función f tal que esta sea de clase C^1 respecto la primer coordenada y de clase C^2 respecto la segunda coordenada. Entonces, si igualamos los coeficientes de (3.2.5) con los de la fórmula de Itô podemos generar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_t(s,x) + \frac{1}{2} f_{xx}(s,x) = \alpha f(s,x) \\ \\ f_x(s,x) = \beta f(s,x) \end{cases}$$

en donde de la segunda ecuación obtenemos que

$$f(s,x) = C\exp(\beta x + g(s)) \ ,$$

con $g(s)$ una función dependiente únicamente de s y C una constante en $\mathbb{R}$. Substituyendo esto en la primer ecuación y simplificando, llegamos a que $g(s) = (\alpha - \frac{\beta^2}{2})s$. Así, en consideración de la condición inicial $X_0 = 1$ podemos concluir que

$$X_t = f(t, B_t) = \exp\left(\beta B_t + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right) t\right)$$

es una solución fuerte de (3.2.5).

La discusión de las ecuaciones diferenciales estocásticas es breve debido a cuáles son los objetivos principales de este trabajo. Sin embargo, recomendamos ampliamente el trabajo presentado en [20].

Nota Histórica

Hacemos una pausa para mencionar el destacado trabajo del matemático Vincent Doeblin, quien en 1940 por causa de la II Guerra Mundial tuvo que resguardar la mayoría de sus notas sin publicar en la Academia Nacional de Ciencias Francesa, con la instrucción de ser reveladas hasta 100 años despues. Lamentablemente, Doeblin murió ese mismo año siendo parte de las tropas francesas. Pero en el año 2000, a petición de su hermano, las notas fueron compartidas con la comunidad matemática.

En esas notas, adelantandose a su época, Doeblin utilizó ideas relacionadas con el entonces recién introducido concepto de martingalas para estudiar difusiones a través de sus *sample paths*, marcando una gran diferencia con la manera puramente análitica de hacerlo que se tenía por esos tiempos.

V. Doeblin también fue capaz de establecer una relación que describe el comportamiento de ciertas difusiones bajo la composición de funciones suaves, en una manera similar a como lo hace la fórmula en (3.2.1). Es debido a la independencia entre los trabajos de Doeblin y los trabajos de K. Itô que dicha fórmula es también conocida como la Fórmula de Itô-Doeblin.

3.3. Teorema de Girsanov

Hasta el momento hemos visto como se comporta la clase de las semimartingalas bajo la integración estocástica y la composición de funciones de clase C^2. Ahora veremos que pasa bajo cambios de medidas absolutamente continuas.

En adelante consideramos un solo espacio de medida $(\Omega, \mathscr{A})$, equipado con una filtración continua por la derecha y completa $\mathscr{F}_{t\geq 0}$. Mientras que para una mayor claridad, dada una medida de probabilidad P, denotamos:

- $\mathcal{S}(P)$, la clase de $(\mathscr{F}_t, P)$-semimartingalas
- $\mathcal{M}(P)$, la clase de $(\mathscr{F}_t, P)$-martingalas locales

Asimismo, sean Q y P dos medidas de probabilidad definidas sobre la σ-álgebra terminal $\mathscr{F}_\infty$. Denotamos como $Q \lhd P$ la situación en que la restricción $Q|_{\mathscr{F}_t}$ sea absolutamente continua respecto de la restricción $P|_{\mathscr{F}_t}$, para toda $t \geq 0$. Esto es, si para todo conjunto $A \in \mathscr{F}_t$ tal que $P(A) = 0$ se cumple que $Q(A) = 0$.

En tal caso, para cada $t \geq 0$, denotamos a la derivada de Radón-Nikodym como

$$D_t = \frac{dQ|_{\mathscr{F}_t}}{dP|_{\mathscr{F}_t}} \ .$$

Reconociendo que para cualesquiera $0 \leq s < t$, se satisface que

$$\mathbb{E}_P[1_A D_t] = Q(A) = \mathbb{E}_P[1_A D_s] \quad ; \ A \in \mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \ ,$$

obtenemos que la colección de variables aleatorias $D \equiv \{D_t\}_{t\geq 0}$ es una P-martingala.

Aún más, por las hipótesis sobre la filtración es posible elegir a cada D_t, dentro de las P-clases de equivalencia $[D_t]$, de tal forma que el proceso D sea una P-martingala con trayectorias càdlàg P-c.s.

Destacamos que la condición $Q \lhd P$ es una condición más débil que la continuidad absoluta de Q respecto P sobre toda $\mathscr{F}_\infty$, denotada simplemente como $Q \ll P$. En el siguiente resultado exponemos la principal diferencia entre ambas condiciones.

Proposición 3.3.1 *Si $Q \lhd P$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *D es uniformemente integrable.*

ii) *$Q \ll P$.*

Prueba: **i $\implies$ ii)** Supongamos que D es uniformemente integrable, existiendo $D_\infty \in L^1$ tal que $D_t = \mathbb{E}[D_\infty|\mathscr{F}_t]$ para toda $t \geq 0$. Considerando $A \in \mathscr{F}_\infty$, tenemos que $A \in \mathscr{F}_{t_0}$ para algún $t_0 \geq 0$. Y así,

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A \lim_t D_t] = \lim_t \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_t] \ ,$$

en donde para toda $t \geq t_0$, $A \in \mathscr{F}_{t_0} \subseteq \mathscr{F}_t$ y por tanto $\mathbb{E}_P[1_A D_t] = E_Q[1_A]$.

Siguiendose que

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_\infty] = \lim_t \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A] = Q(A) \ .$$

Esto es, $Q = D_\infty \cdot P$ sobre toda $\mathscr{F}_\infty$.

ii $\implies$ i) Supongamos ahora que $Q \ll P$. Entonces para toda $A \in \mathscr{F}_t$,

$$Q(A) = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_\infty] = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A \mathbb{E}_P\left[D_\infty|\mathscr{F}_t\right]] \ .$$

Por la únicidad de la derivada de Radón-Nikodym esto equivale a mostrar que

$$D_t = \mathbb{E}_P[D_\infty|\mathscr{F}_t] \quad \text{c.s.} \ ,$$

asegurando la integrabilidad uniforme.

$\square$

Notamos que en general la martingala D no solamente es positiva, sino que también lo es c.s. bajo la medida Q.

Proposición 3.3.2 *Si $Q \lhd P$, D es una martingala estrictamente positiva Q-c.s.*

Asimismo, resulta importante establecer el tipo de continuidad que existe entre las medidas, restringidas a filtraciones inducidas por tiempos de paro.

Proposición 3.3.3 *Si $Q \lhd P$, entonces para cualquier tiempo de paro τ*

$$Q = D_\tau \cdot P \qquad \textit{sobre } \mathscr{F}_\tau \cap \{\tau < \infty\} \ .$$

Prueba: Sea $t \geq 0$ y $A \in \mathscr{F}_{t\wedge\tau}$, entonces por el Teorema de Paro Opcional

$$\mathbb{E}_P[D_{t\wedge\tau}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_P\Big[\mathbb{E}_P[D_t|\mathscr{F}_{t\wedge\tau}]\mathbb{1}_A\Big] = \mathbb{E}_P\Big[\mathbb{E}_P[D_t\mathbb{1}_A|\mathscr{F}_{t\wedge\tau}]\Big] = \mathbb{E}_P[D_t\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A]$$

i.e,

$$Q(A) = \mathbb{E}_P[D_{t\wedge\tau}\mathbb{1}_A] \quad ; \quad A \in \mathscr{F}_{t\wedge\tau} \ .$$

Siguiendose que para toda $t \geq 0$,

$$Q(A \cap \{\tau \leq t\}) = \mathbb{E}_P[D_\tau \mathbb{1}_{A\cap\{\tau\leq t\}}] \quad ; \quad A \in \mathscr{F}_\tau \ .$$

Tomando el límite $t \to \infty$, llegamos al resultado deseado.

$\square$

Lema 3.3.1 *Si $Q \lhd P$ y X es un proceso càdlàg adaptado tal que XD es una P-martingala local, entonces X es por sí mismo una Q-martingala local.*

Prueba: Debido a la continuidad entre medidas, una secuencia de localización τ_n para XD también es una sucesión de tiempos de paro tal que $\tau_n \uparrow \infty$ c.s., respecto de Q. Basta probar entonces que, para cada n, X^{τ_n} es una Q-martingala.

Notamos primero que para toda $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}_Q\big[|X_t^\tau|\big] = \mathbb{E}_P\big[|X_t^\tau D_t^\tau|\big] = \mathbb{E}_P\big[|(XD)_t^\tau|\big] < +\infty \ .$$

Es decir, cada X_t^τ es Q-integrable.
Sean ahora $s \leq t$ y $A \in \mathscr{F}_{s\wedge\tau_n}$, entonces

$$\mathbb{E}_Q[X_s^{\tau_n}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_P[(XD)_s^{\tau_n}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_P[(XD)_t^{\tau_n}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_Q[X_t^{\tau_n}\mathbb{1}_A] \ .$$

Mencionamos que la segunda igualdad se da porque $(XD)^{\tau_n}$ es una martingala, mientras que la última se debe a la contención $A \in \mathscr{F}_{s\wedge\tau_n} \subseteq \mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}$.

Retomando la última igualdad, tenemos por la propiedad característica de la esperanza condicional que

$$\mathbb{E}_Q[X_t^{\tau_n}|\mathscr{F}_{s\wedge\tau_n}] = X_s^{\tau_n} \ .$$

Mostrando que X^{τ_n} es una Q-martingala respecto de la filtración $\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}$ y por tanto, también respecto de $\mathscr{F}_t$. Esto como una aplicación del Corolario B.1.

□

Establecemos ahora el resultado principal de la sección, cuya esencia es mostrar la invariancia de las semimartingalas bajo cambios de medidas suficientemente continuas.

Teorema 3.3.1 (Girsanov.) *Si $Q \lhd P$ y D es una P-martingala continua, entonces cualquier P-semimartingala es también una Q-semimartingala. Más especificamente:*

- *Si M es una P-martingala local continua, entonces*

$$\tilde{M} = M - D^{-1} \cdot [M, D] \tag{3.3.1}$$

es una Q-martingala local continua.

Demostración: Consideremos los tiempos de paro

$$\tau_n = \text{ínf}\{t : D_t \leq 1/n\} \quad ; \quad n \geq 0 \tag{3.3.2}$$

los cuales satisfacen que $\tau_n \uparrow \infty$, P-c.s., dado que D es estrictamente positiva Q-c.s.

Notamos que, para cada n, por la Proposición 2.2.5

$$\int_0^{t<\tau_n} D_s^{-1} d\big|[M,D]\big| \leq n\big|[M,D]\big| \leq n\left([D]_t[M]_t\right)^{1/2} < +\infty \ .$$

Esto asegura que D^{-1} es integrable respecto $[M, D]$ y consecuentemente, $D^{-1} \cdot [M, D]$ es de variación finita, sobre cada intervalo $[0, \tau_n]$. Siguiendose así que el proceso $(D^{-1} \cdot [M, D])^{\tau_n}$ es finito P-c.s. y por tanto, que $(\tilde{M}D)^{\tau_n}$ es el producto de dos P-semimartingalas.

Por la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned}(\tilde{M}D)_t^{\tau_n} &= M_0D_0 + \int_0^{t\wedge\tau_n} \tilde{M} dD_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} D_s d\tilde{M}_s + [\tilde{M}, D]_{t\wedge\tau_n} \\ &= M_0D_0 + \int_0^{t\wedge\tau_n} \tilde{M}_s dD_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} D_s dM_s \\ &\quad -[M,D]_{t\wedge\tau_n} + [\tilde{M}, D]_{t\wedge\tau_n}\end{aligned}$$

$$= M_0 D_0 + \int_0^{t\wedge\tau_n} \tilde{M}_s dD_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} D_s dM_s \ .$$

Mostrando que $(\tilde{M}D)^{\tau_n}$ es una P-martingala local y, por el Lema 3.3.1, que $\tilde{M}^{\tau_n}$ es una Q-martingala local. Finalmente, $\tilde{M}$ es una Q-martingala local por el Lema 2.2.1.

Así, cualquier P-semimartingala $X = M + A$ puede ser escrita como

$$X = \tilde{M} + D^{-1} \cdot [M, D] + A$$

bajo la medida Q, en donde $D^{-1} \cdot [M, D]$ es de variación finita pues lo es sobre cada intervalo $[0, \tau_n]$ y $\tau_n \uparrow \infty$. Probando la contención $S(P) \subseteq S(Q)$.

$\square$

Veamos ahora las principales consecuencias de este último resultado sobre la integración estocástica. Comenzando por notar que para cualquiera dos P-martingalas locales M y N, su proceso de covariación coincide con el de las Q-martingalas locales $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$.

Esto último es inmediato al considerar que la covariación de un proceso de variación finita con cualquier semimartingala siempre se anula:

$$[\tilde{M}, \tilde{N}] = \big[M - D^{-1} \cdot [M, D], N - D^{-1} \cdot [N, D]\big]$$

$$= \big[M, N - D^{-1} \cdot [N, D]\big] - \big[D^{-1} \cdot [M, D], N - D^{-1} \cdot [N, D]\big]$$

$$= [M, N] - \big[M, D^{-1} \cdot [N, D]\big] - \big[D^{-1} \cdot [M, D], N\big] + \big[D^{-1} \cdot [M, D], D^{-1} \cdot [N, D]\big]$$

$$= [M, N] - D^{-1} \cdot \Big(\cancel{\big[M, [N, D]\big]} - \cancel{\big[[M, D], N\big]} + D^{-1} \cdot \cancel{\big[[M, D], [M, D]\big]}\Big) = [M, N] \ .$$

Similarmente, podemos ver que

$$[\tilde{M}, N] = [M - D^{-1} \cdot [M, N], N] = [M, N] - D^{-1} \cdot \big[[M, N], N\big] = [M, N] \ .$$

En resumen,

$$[\tilde{M}, \tilde{N}] = [\tilde{M}, N] = [M, N] \quad ; \qquad M, N \in \mathcal{M}(P) \ .$$

En particular esto muestra que para cualquier P-semimartingala X, su proceso de variación cuadrática es el mismo bajo ambas medidas:

$$[X]_Q = [\tilde{M}] = [M] = [X]_P \ .$$

Debido a esto, en adelante evitamos la distinción con subíndices. Sin embargo, para una mayor claridad, denotamos por $L_P(X)$ a la clase de procesos integrables bajo una medida P, respecto de una P-semimartingala X, en el sentido de la definición en (3.1.2).

Por su parte, la fórmula en (3.3.1) define un mapeo

$$G_P^Q : \mathcal{M}(P) \longrightarrow \mathcal{M}(Q) \quad | \quad G_P^Q(M) = \tilde{M}$$

conocido como *la transformación de Girsanov de P a Q*. Es justo por esta transformación que el Teorema de Girsanov ha ganado relevancia en diversas áreas prácticas.

Antes de profundizar en este hecho, exponemos la relación entre esta transformación y la integración estocástica. Para empezar, notamos que la transformación de Girsanov conmuta con la integración estocástica.

Proposición 3.3.4 *Sea M una P-martingala local. Si H es un proceso en $L_P(M)$, entonces H también pertenece a $L_Q(\tilde{M})$ y además, $\widetilde{H \cdot M} = H \cdot \tilde{M}$.*
Prueba: Supongamos $H \in L_P(M)$. Reconociendo que el ser progresivo no depende de la medida en cuestión y que por la igualdad $[M] = [\tilde{M}]$, tenemos $(V^2 \cdot [\tilde{M}])_t = (V^2 \cdot [M])$. La primer afirmación resulta de que la filtración es completa y $Q \lhd P$.

En cuanto a la igualdad entre integrales,

$$\begin{aligned} H \cdot \tilde{M} &= H \cdot (M - D^{-1} \cdot [M, D]) = H \cdot M - H \cdot (D^{-1} \cdot [M, D]) \\ &= H \cdot M - (HD^{-1}) \cdot [M, D] \overset{c.s.}{=} H \cdot M - D^{-1}[H \cdot M, D] = \widetilde{H \cdot M} \ . \end{aligned}$$

□

Corolario 3.3.1 *Sea $X = M + A$ una P-semimartingala. Entonces, $L_P(X) \subset L_Q(X)$ y para cualquier proceso $V \in L_P(X)$ se cumple que $(V \cdot X)_P = (V \cdot X)_Q$ c.s., bajo Q.*
Prueba: Sea $V \in L_P(X)$. Entonces, por definición

$$V^2 \in L_P([X]) = L_P([M]) = L_Q([\tilde{M}]) \ ,$$

y $V \in L_P(A) = L_Q(A)$.

Falta mostrar que $V \in L_Q(D^{-1} \cdot [M, Z])$. Pero dado que $D^{-1} \in L([M, D])$, por la regla de la cadena, esto es equivalente a mostrar que $VD \in L_Q([M, D])$. Consideremos entonces los tiempos de paro definidos en (3.3.2) y notemos que para cada $n \geq 1$, por la Proposición 2.2.5,

$$\int_0^t |VD^{-1}| d\big|[M, D]\big| \leq n \left\{(V^2 \cdot [M])_t \times [D]_t\right\}^{1/2} = n \left\{(V^2 \cdot [\tilde{M}])_t \times [D]_t\right\}^{1/2} < +\infty$$

para toda $t \leq \tau_n$. Es decir, $(VD)^{\tau_n} \in L_Q([M, Z])$.

Esto último se generaliza a todo $\mathbb{R}_+$, puesto que $\tau_n \uparrow \infty$. Concluyendo,
$$V \in L_Q(D^{-1} \cdot [M, D]) \ .$$
Para la segunda afirmación, por simplicidad denotamos
$$I := V \cdot M + V \cdot A \qquad , \qquad I' := V \cdot \tilde{M} + V \cdot \big(D^{-1} \cdot [M, D] + A\big) \ .$$
Siendo posible ver que
$$[I - I'] = [V \cdot M] - 2[I, I'] + [V \cdot \tilde{M}] \ ,$$
y además,
$$\begin{aligned}[I, I'] &= [V \cdot M, V \cdot \tilde{M}] + [V \cdot M, V \cdot \big(D^{-1} \cdot [M, D] + A\big)] \\ &+ [V \cdot A, V \cdot \tilde{M}] + [V \cdot A, V \cdot \big(D^{-1} \cdot [M, D] + A\big)] \\ &= [V \cdot M, V \cdot \tilde{M}] \ .\end{aligned}$$
Por tanto,
$$\begin{aligned}[I - I'] &= [V \cdot M] - 2[V \cdot M, V \cdot \tilde{M}] + [V \cdot \tilde{M}] \\ &= [V \cdot M] - 2\left[V \cdot M, \widetilde{(V \cdot M)}\right] + \left[\widetilde{(V \cdot M)}\right] \\ &= [V \cdot M] - 2[V \cdot M, V \cdot M] + [V \cdot M] = 0 \ .\end{aligned}$$
Mostrando que $I = I'$, Q-c.s.

$\square$

Retomando la proposición anterior, si H es un proceso progresivo podemos definir
$$\Phi_H : \mathcal{M}(P) \to \mathcal{M}(Q) \qquad | \qquad \Phi_H(M) = \begin{cases} H \cdot M & ; \ H \in L_P(M) \\ \equiv 0 & ; \ H \notin L_P(M) \end{cases}$$
cumpliendose la conmutatividad en la composición $G_P^Q \circ \Phi_H = \Phi_H \circ G_P^Q$.
Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(P) \arrow[r, "M \longrightarrow \tilde{M}"] \arrow[d, "\Phi_H = H \cdot M"'] & \mathcal{M}(Q) \arrow[d, "\Phi_H = H \cdot \tilde{M}"] \\ \mathcal{M}(P) \arrow[r, "H \cdot M \longrightarrow H \tilde{\cdot} M"'] & \mathcal{M}(Q) \end{tikzcd}$$

Figura 3.1 Diagrama de la composición $G_P^Q \circ \Phi_H$.

Si bien la prueba del Teorema de Girsanov solo requiere de la condición $Q \lhd P$, cuando las medidas resultan ser equivalentes surgen consecuencias muy interesantes, principalmente sobre la transformación de Girsanov. Denotamos por $Q \sim P$ la situación en que dos medidas son equivalentes; es decir, cuando $Q \lhd P$ y $P \lhd Q$.

Definición 3.3.1 *Decimos que un par de medidas de probabilidad (P, Q) forman un* ***par de Girsanov*** *si $Q \sim P$ sobre $\mathscr{F}_\infty$, y la P-martingala D es continua.*

En tal caso las medidas generan una simétria interesante, pues (Q, P) resulta ser también un par de Girsanov y como consecuencia de la siguiente proposición, la transformación de Girsanov resulta ser un mapeo uno-a-uno y sobre (una biyección).

Proposición 3.3.5 *Si (P, Q) y (Q, R) son dos pares de Girsanov, entonces (P, R) es un par de Girsanov y se satisface que:*

$$G_Q^R \circ G_P^Q = G_P^R$$

En particular, $G_Q^P \circ G_P^Q = G_P^Q \circ G_Q^P = I$.
Prueba: Considerando que para cualquier conjunto $A \in \mathscr{F}_t$,

$$\mathbb{E}_R[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_Q\left[1_A \left.\frac{dR}{dQ}\right|_{\mathscr{F}_t}\right] = \mathbb{E}_P\left[(\mathbb{1}_A \left.\frac{dR}{dQ}\right|_{\mathscr{F}_t}) \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t}\right] = \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_A \left(\left.\frac{dR}{dQ}\right|_{\mathscr{F}_t} \times \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t} \right)\right].$$

Obtenemos que

$$\left.\frac{dR}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t} = \left.\frac{dR}{dQ}\right|_{\mathscr{F}_t} \times \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t} ,$$

siendo inmediato que (P, R) es un par de Girsanov.

Por otra parte, $G_P^R(M)$ es por definición la martingala local en la descomposición de M bajo R. Pero M y $G_P^Q(M)$ solo difieren por un proceso de variación finita, por lo que $G_P^R(M)$ también es la martingal local en la descomposición de $G_P^Q(M)$ bajo R.

□

Asimismo, la integral estocástica conmuta con la composición iterada de distintas transformaciones de Girsanov. Este hecho lo resumimos en el siguiente diagrama, en donde consideramos a Φ_H como en la Figura 3.1.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(P) \arrow[rrrr] \arrow[ddd] & & & & \Phi_H \circ G_P^R \arrow[ddd] \\
& \mathcal{M}(P) \arrow[r, "G_P^Q"] \arrow[d, "\Phi_H"'] & \mathcal{M}(Q) \arrow[r, "G_Q^R"] & \mathcal{M}(R) \arrow[d, "\Phi_H"] & \\
& \mathcal{M}(P) \arrow[r, dash, "G_P^Q"'] & \mathcal{M}(Q) \arrow[r, dash, "G_Q^R"'] & \mathcal{M}(R) & \\
G_P^R \circ \Phi_H \arrow[rrrr] & & & & \mathcal{M}(R)
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.2 Diagrama de la composición $G_Q^R \circ G_P^Q \circ \Phi_H$.

3.3.1. Aplicación del Teorema de Girsanov

Anteriormente se mencionó que, en la mayoría de los contextos donde el Teorema de Girsanov tiene importancia, esta no es debida a la afirmación $S(P) \subseteq S(Q)$ sino a la fórmula en (3.3.1). Esto es porque, en esencia, a partir de ella es posible cambiar convenientemente la expresión de un proceso, considerando distintas medidas a las del espacio original.

Justamente en la aplicación del Teorema de Girsanov, la manera más natural de construir a la medida Q es a partir de una martingala M, como :

$$Q(A) = \int_A M_t(\omega) dP(\omega) \quad \text{para toda } A \in \mathscr{F}_t \ ; \ t \geq 0 \tag{3.3.3}$$

lo que denotamos simplemente por $Q = M \cdot P$.

Debido a esto, es necesario establecer versiones más *constructivas* del Teorema 3.3.1.

Corolario 3.3.2 *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad, B un $(\mathscr{F}_t, P)$-movimiento browniano y X un proceso tal que*

$$\mathscr{E}(X)_t = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}[X]_t\right\} \tag{3.3.4}$$

sea una $(\mathscr{F}_t, P)$ -martingala. Entonces,

$$\tilde{B} = B - [B, X]$$

es un $\mathscr{F}_t$-movimiento browniano bajo la medida $Q = \mathscr{E}(X) \cdot P$.

Prueba: Nótese que si suponemos válida la igualdad

$$X_t = \log \mathscr{E}(X)_0 + \int_0^t \mathscr{E}(X)_s^{-1} d\mathscr{E}(X)_s \tag{3.3.5}$$

por la fórmula de Itô,

$$\begin{aligned}\log \mathscr{E}(X)_t &= \log \mathscr{E}(X)_0 + \int_0^t \mathscr{E}(X)_s^{-1} d\mathscr{E}(X)_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mathscr{E}(X)_s^{-2} d[\mathscr{E}(X)]_s \\ &= X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t \quad .\end{aligned}$$

Mostrando que de hecho, la igualdad en (3.3.5) se cumple y por tanto

$$\begin{aligned}[B,X]_t &= [B_t, \log \mathscr{E}(X)_0 + \int_0^t \mathscr{E}(X)_s^{-1} d\mathscr{E}(X)_s] \\ &= [B_t, \left(\mathscr{E}(X)^{-1} \cdot \mathscr{E}(X)\right)_t] = \left(\mathscr{E}(X)^{-1} \cdot [B, \mathscr{E}(X)]\right)_t \quad .\end{aligned}$$

Así, reconociendo a $\mathscr{E}(X)$ en el papel de la martingala D, por el Teorema 3.3.1 tenemos que $\tilde{B} = B - [B,X]$ es una $(\mathscr{F}_t, Q)$-martingala. Dado que además $[\tilde{B},\tilde{B}]_t = [B,B]_t = t$, por el Teorema de Caracterización de Lévy concluimos que $\tilde{B}$ es un $(\mathscr{F}_t, Q)$-movimiento browniano.

□

Naturalmente surge la necesidad de establecer condiciones sobre el proceso X bajo las cuales $\mathscr{E}(X)$ sea una verdadera martingala. El resultado más destacado en esta cuestión es conocido como la *condición de Novikov.*

Lema 3.3.2 (Novikov.) *Si X es una martingala local tal que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}[X]_\infty\right)\right] < +\infty \ ,$$

entonces $\mathscr{E}(X)$ es una martingala uniformemente integrable.

El siguiente caso particular tiene un mayor reconocimiento que incluso el Teorema 3.3.1. Esto puede ser atribuido a que esta versión fue establecida por R. Cameron y W. Martin en 1944, mientras que la versión más general fue probada por I. Girsanov en 1960.

Corolario 3.3.3 (Cameron-Martin-Girsanov.) *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad, B un $(\mathscr{F}_t, P)$-movimiento browniano y A un proceso $\mathscr{F}_t$-adaptado tal que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty A^2(s)ds\right)\right] < +\infty \ . \tag{3.3.6}$$

Entonces,

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t A(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t A(s)^2 ds\right\}$$

es una $(\mathscr{F}_t, P)$-martingala y el proceso

$$\tilde{B} = B + \int_0^t A(s)\ ds$$

es un $\mathscr{F}_t$-movimiento browniano bajo la medida $Q = M \cdot P$.

Prueba: Considerando que

$$\left[\int_0^t A(s)dB_s\right] = \int_0^t A^2(s)ds \quad , \quad \left[B, \int_0^t A(s)dB_s\right] = \int_0^t A(s)\ d[B,B]_s = \int_0^t A(s)ds$$

el resultado es una aplicación de la Proposición 3.3.5 con $\mathscr{E}(X)_t = \mathscr{E}(-\int_0^t A(s)ds)$.

□

Para finalizar la sección, ahora ejemplificamos la importancia del Teorema de Girsanov en el área de las ecuaciones diferenciales estocásticas. En adelante solo consideramos intervalos de tiempo finitos $[0,T], T > 0$.

Supongamos que dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ y una difusión

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad , \quad X_0 = x \qquad | \quad t \in [0,T] \tag{3.3.7}$$

con B un $\mathscr{F}_t$-movimiento browniano, buscamos modificar la deriva μ de alguna manera conveniente. En tal caso, podemos considerar un proceso adaptado $A(X_s)$ que satisfaga la condición de Novikov simplificada,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T \frac{1}{2}A^2(X_s)ds\right)\right] < +\infty\ ,$$

de tal forma que el proceso que resuelve la ecuación

$$d\tilde{B}_t = A(X_t)dt + dB_t\ ,$$

sea un $\mathscr{F}_t$-movimiento browniano bajo la medida $Q = M \cdot P$, en donde

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t A(X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t A(X_s)^2 ds\right).$$

Así, dada la relación $dB_t = d\tilde{B}_t - A(X_t)dt$ podemos desarrollar

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)\left[d\tilde{B}_t - A(X_t)dt\right] = \Big(\mu(X_t) - \sigma(X_t)A(X_t)\Big)dt + \sigma(X_t)d\tilde{B}_t$$

para obtener que

$$dX_t = (\mu(X_t) - \sigma(X_t)A(X_t))dt + \sigma(X_t)d\tilde{B}_t \tag{3.3.8}$$

es una difusión en el espacio $(\Omega, \mathscr{F}_t, Q)$ que surge tras cambiar la *deriva* de X.

En esencia, lo que hicimos fue construir una solución débil para esta última ecuación a partir de una solución fuerte de la ecuación en (3.3.7). Esta resulta ser la aplicación de mayor uso del Teorema de Girsanov, principalmente porque nos proporciona una herramienta para simplificar la deriva de una difusión. El siguiente ejemplo muestra que incluso es posible eliminar la deriva por completo.

Ejemplo 3.3.1 Sea $(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ un espacio de probabilidad y X una difusión:

$$dX_t = \theta dt + dB_t \quad , \quad X_0 = x_0 \qquad | \quad t \in [0,T] \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

con B un $(\mathscr{F}_t, P)$-movimiento browniano. Entonces, es inmediato que $c \equiv \theta$ satisface la condición de Novikov simplificada y en consecuencia,

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \theta dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta ds\right) = \exp\Big(-\theta(B_t - \frac{t}{2})\Big)$$

es una P-martingala. Siguiendose que $Q = M \cdot P$ es una medida de probabilidad, bajo la cual X es simplemente igual a un movimiento browniano.

Es decir, en el espacio $(\Omega, \mathscr{A}, Q)$, se tiene que

$$dX_t = d\tilde{B}_t$$

con $\tilde{B} = B - [B, M]$ un Q-movimiento browniano.

Nótese también la diferencia en los valores esperados

$$\mathbb{E}_P[X_t] = x_0 + \theta t \qquad , \qquad \mathbb{E}_Q[X_t] = x_0 \ .$$

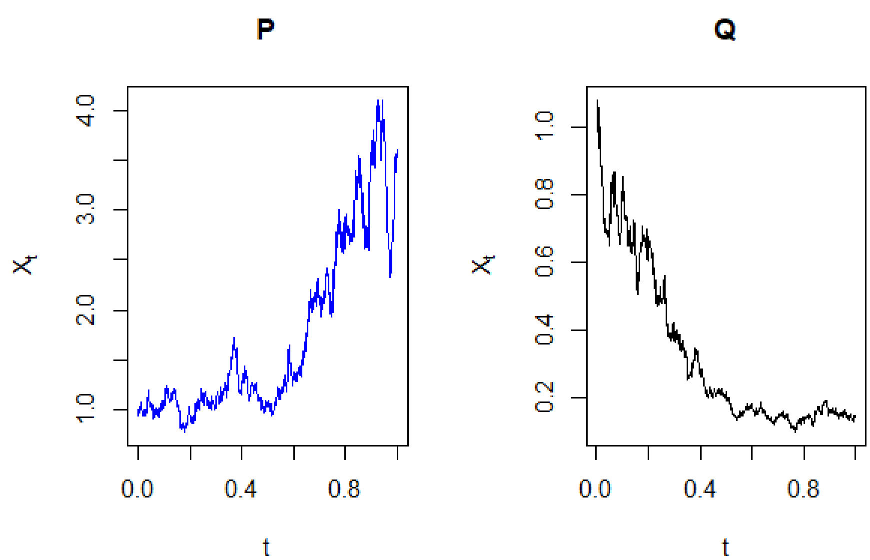

Figura 3.3 Trayectoria del proceso X bajo las medidas P y Q. $(\theta = 2.5)$

Ejemplo 3.3.2 Sea $(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ un espacio de probabilidad y X una difusión:

$$dX_t = -cX_t(1-X_t)dt + \sqrt{X_t(1-X_t)}dB_t \quad | \quad t \in [0,T]$$

con B un $\mathscr{F}_t$-movimiento browniano. Consideramos entonces el proceso

$$A(s) = -c\sqrt{X_s(1-X_s)} \quad ; \ s \geq 0$$

en donde la condición de Novikov se satisface porque A es una función acotada, siguiendose que

$$M_t = \exp\left(c\int_0^t \sqrt{X_s(1-X_s)}dB_s - \frac{c^2}{2}\int_0^t X_s(1-X_s)ds\right)$$

es una $(\mathscr{F}_t, P)$-martingala a partir de la cual definimos la medida $Q = M \cdot P$.

De esta forma, en el espacio $(\Omega, \mathscr{A}, Q)$ se tiene que

$$dX_t = \sqrt{X_t(1-X_t)}d\tilde{B}_t \ , \tag{3.3.9}$$

con $\tilde{B} = B - [B, M]$ un Q-movimiento browniano.

La ecuación (3.3.9) caracteriza a la difusión de Wright-Fisher. Este proceso es muy importante en la teoría matemática de genética de poblaciones, describiendo el comportamiento de una población que evoluciona aleatoriamente, sin mutación, selección o superposición entre sus generaciones. En este trabajo nos limitamos a retomar que c.s. la difusión de Wright-Fisher siempre alcanza el valor 0 ó 1 en un tiempo finito.

Sea ahora N un conjunto de medida Q cero, entonces

$$Q(N) = \mathbb{E}_Q[1_N] = \mathbb{E}_P[1_N M_T] = 0 \ .$$

Reconociendo que $1_N M_T$ es no negativa, esto asegura que $1_N M_T = 0$, P-c.s. Aún más, como en este caso M es estrictamente positiva, tenemos que $1_N = 0$, P-c.s. y por tanto que $P(N) = 0$. Mostrando que N también es de medida P cero.

En particular, para el tiempo de paro

$$\tau = \text{ínf}\{t \geq 0 \ ; \ X_t \in \{0,1\}\} < +\infty \quad , \quad Q - c.s.$$

tomamos $N = \{\tau < +\infty\}^c$ y concluimos que τ también es finito P-c.s.

Concretamente, esto muestra que el conjunto de trayectorias en las que X no toma el valor 0 ni el valor 1, tiene medida cero en ambos espacios de probabilidad. Esto es, bajo ambas medidas, el proceso eventualmente llegará a tomar el valor 0 ó 1 c.s.

Apéndice A

Funciones de Variación Finita

En esta sección presentamos un resumen de la teoría de integración de Lebesgue-Stieltjes, en donde debido a nuestro interés en las trayectorias de un proceso a tiempo continuo, nos limitamos a tratar con funciones reales definidas sobre $[0, \infty)$. Esta sección esta basada mayormente en el texto *A brief introduction to Lebesgue-Stieltjes integral* [26].

Comenzamos por retomar que significa que una función sea de variación finita.

Definición A.1 *Dada una función* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *y una partición del intervalo* $[0, t]$, $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$*, definimos*

$$S_t^{\Delta} = \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$$

y denotamos al supremo, sobre todas las particiones del intervalo, como

$$V_f(t) := \sup_{\Delta} S_t^{\Delta} \ .$$

Cuando este número es finito, decimos que f *es de variación finita sobre* $[0, t]$.

Si f *es de variación finita sobre cada intervalo* $[0, t]$*, decimos que* f *es de variación finita. Mientras que si* $\sup_t V_t(t) < +\infty$*, decimos que* f *es de variación acotada.*

Destacamos que para cualquier colección de particiones $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$|\Delta_n| := \max_{0\leq k\leq n-1} |t_{k+1} - t_k| \to 0 \ ,$$

el supremo de $V_f(t)$ coincide con el límite de las sumas $S_t^{\Delta_n}, n \to \infty$.

Proposición A.1 *Toda función monotona es de variación acotada. Aún más,*

i) *si f es una función creciente, $V_f([a,b]) = f(b) - f(a)$.*

ii) *si f es una función decreciente, $V_f([a,b]) = f(a) - f(b)$.*

para cualesquiera $a \leq b \in \mathbb{R}_+$.

En adelante, denotamos por FV al espacio de las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de variación finita, continuas por la derecha, y mediante FV_0 al subconjunto de FV compuesto por las funciones que comienzan en cero.

Teorema A.1 *Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función medible que comienza en cero. Entonces se cumple que $f \in FV_0$ si, y solo si, existe una única descomposición $f = f^+ - f^-$ con $f^\pm \in FV_0$, y medidas únicas $\mu_f^\pm$ tales que*

$$\mu_f^\pm(a,b] = f^\pm(b) - f^\pm(a) \quad ; \quad (a,b] \subset \mathbb{R}_+ \ .$$

En cuyo caso, la descomposición esta dada por $f^\pm = \frac{1}{2}(V_f \pm f)$.

A partir de las medidas del teorema anterior, podemos definir a la integral de Lebesgue-Stieletjes respecto de funciones en FV, como una integral ordinaria de Lebesgue. Para esto, consideramos la medida de variación total de f:

$$|\mu_f| = \mu_f^+ + \mu_f^- \ ,$$

la cual coincide con la medida inducida por la variación V_f, pues satisface que

$$|\mu_f|([0,t]) = V_f(t) \quad ; \quad t \geq 0 \ .$$

Definición A.2 *Sea $f \in FV_0$ y $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función medible. Decimos que h es integrable respecto de f si $\int_0^t |h(s)| \ d|\mu_f|_s < \infty$, para cada $t \geq 0$. En cuyo caso, definimos a la integral de h respecto de f sobre $[0,t]$ como:*

$$\int_0^t h(s)df(s) := \int_0^t h(s)d\mu_f^+ - \int_0^t h(s)d\mu_f^- \ .$$

Proposición A.2 *Sea $A \in FV_0$ y $f : [0,t] \to \mathbb{R}$ una función medibe, integrable respecto de A. Definimos $g(t) = \int_0^t f(s)dA_s$. Entonces, para cualquier función medible $h : [0,r] \to \mathbb{R}$ que sea integrable respecto de g ó tal que $\int_0^r |h(s)f(s)| \ |dA_s| < \infty$, se satisface*

$$\int^r h(s)dg_s = \int^r h(s)f(s)dA_s \ .$$

Lema A.1 *Si f es una función medible y acotada, y μ es una medida finita (signada), entonces*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| \ .$$

Si bien los resultados anteriores son esencialmente la base de la teoría de integración respecto de funciones en FV, en el desarrollo del texto, específicamente en el segundo cápitulo, es necesario considerar algunos resultados más sofisticados.

Decimos $A \in FV$ es integrable si su proceso de variación $V_A \in V^+$ es integrable.

Lema A.2 *Sea $A \in V$ integrable, con $(V_A)_\infty(\omega)$ finita para toda ω. Para cada ω, sea $\mu_A(\omega)$ la medida (signada) en $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_+)$ inducida por $A(\omega)$. Entonces, la familia $(v_A(\omega))_{\omega\in\Omega}$ es un kernel P-integrable de $(\Omega, \mathscr{F})$ en $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_+)$ y similarmente, la familia restringida $(v_A(\omega)|_{[0,t]})_{\omega\in\Omega}$ es un kernel P-integrable de $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ en $([0,t], \mathscr{B}_{[0,t]})$*

Referimos al lector a consultar la prueba de este resultado en [28], p. 33

Lema A.3 *Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $(E, \mathcal{E})$ un espacio meidble y (v_ω) un F-kernel P-integrable sobre $\mathcal{E}$. Denotamos por λ a la integración de (v_ω) respecto de $\mathbb{P}$. Entonces, si $f : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ una función $\mathscr{F} \otimes \mathcal{E}$-medible e integrable respecto de $|\lambda|$*

i) El mapeo $x \to f(\omega, x)$ es $\mathcal{E}$-medible para cada $\omega \in \Omega$.

ii) El mapeo $x \to f(\omega, x)$ es integrable respecto de v_ω y $\omega \to \int f(\omega, x) dv_\omega(x)$ es F-medible y P-integrable c.s.

Este resultado corresponde al T.A.1.17, p. 147 de [28].

Apéndice B

Martingalas

A continuación presentamos algunos resultados esenciales sobre martingalas, requeridos para el entendimiento del texto. Solamente buscamos formar una guía sobre la cual basar una lectura más profunda, pues una correcta exposición requiere de un tiempo considerable de estudio. Esta sección es solo una parte de lo expuesto en el Capítulo 9 de *Foundations of Modern Probability* [14] y en el Capítulo 2 de *Continuous Martingales and Brownian Motion* [22].

Definición B.1 *Dado un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{F}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$*, decimos que un proceso* M *es una* $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$*-martingala si satisface las siguientes condiciones:*

i) M *es integrable, i.e.* $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ *para toda* $t \geq 0$.

ii) M *es adaptado respecto de la filtración* $\mathscr{F}_t$.

iii) *Para cualesquiera* $s \leq t \in \mathbb{R}_+$*, se cumple la igualdad*

$$\mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s] = M_s \ .$$

Evitamos la notación $(\mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ siempre que el contexto lo permita y similarmente definimos dos clases más de procesos estocásticos. En donde decimos que M es una **supermartingala** si, en lugar de la igualdad, se cumple que

$$\mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s] \leq M_s \qquad ; \ s < t \ .$$

En cambio, si se satisface que

$$\mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s] \geq M_s \qquad ; \ s < t$$

decimos que M es una **submartingala**.

Notamos que la función $t \to \mathbb{E}[M_t]$ es constante en el caso de que M sea una martingala, decreciente en el caso que sea una supermartingala y creciente en el caso de que sea una submartingala. Destacamos que la clase de las supermartingalas tiene la estructura de un espacio vectorial sobre el campo de los reales, para el cual las martingalas forman un subespacio vectorial.

Los métodos asociados a las martinglas cuentan actualmente con una presencia e importancia innegable en gran parte de la teoría de procesos estocástica. En gran parte, esto es debido al trabajo de Joseph L. Doob, quien en su libro *Stochastic Processes* [5] concreto la teoría básica de las martingalas y mostró algunas aplicaciones a juegos de azar.

Sin embargo, algunos de sus resultados más importantes solo fueron probados para martingalas a tiempo discreto y tomó un tiempo llegar a los resultados hoy en día mayormente conocidas. Por ejemplo, fue hasta 1963 que Meyer extendió el teorema de descomposición para supermartingalas en [17].

Asimismo, el concepto de *optional stopping* ha sido desarrollado a profundidad y se han establecidos distintas versiones para ampliar sus aplicaciones. Solamente presentamos la versión utilizada requerida en el trabajo presente.

Teorema B.1 (Paro Opcional.) *Si M es una martingala y S, T son dos tiempos de paro acotados tales que $S \leq T$, entonces*

$$M_S = \mathbb{E}[M_T|\mathscr{F}_S] \quad c.s.$$

Si además, la martingala M es uniformemente integrable, entonces la propiedad se mantiene para cualquier par de tiempos de paro.

Este resultado es el contenido del Teorema 3.2, p. 67 de [22].

Justamente a partir de este resultado es posible establecer criterios bastante útiles sobre cuando un proceso es una martingala y transformaciones bajo las cuales la propiedad de ser martingala se mantiene.

Corolario B.1 *Sea M una martingala y (τ_s) una colección no decreciente de tiempos de paro. Entonces, si M es uniformemente integrable o cada tiempo de paro es acotado, el proceso $(M_{\tau_s})_s$ es una martingala respecto de la filtración $\{\mathscr{F}_{\tau_s}\}_s$.*

Corolario B.2 *Un proceso adaptado cadlag X es una martingala si, y solo si, para cualquier tiempo de paro acotado τ_n, $X_\tau \in L^1$ y $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.*

Corolario B.3 *Si M es una martingala y τ un tiempo de paro arbitrario, entonces el proceso detenido M^{τ_n} vuelve a ser una martingala.*

En particular, el siguiente resultado es utilizado para probar una propiedad clave de la integral estocástica elemental.

Lema B.1 *Si M es una $\mathscr{F}_t$-martingala, para cualquier tiempo de paro τ con una cantidad numerable de valores y cualquier variable aleatoria η que sea $\mathscr{F}_\tau$-medible y acotada, el proceso $N_t = \eta(M_t - M_{t\wedge\tau})$ es nuevamente una $\mathscr{F}_t$-martingala.*

La prueba de este resultado se encuentra disponible en [14], p. 194.

A su vez, en el desarrollo de la teoría de martingalas se han encontrado algunas condiciones que surgen de manera natural y que resultan sumamente convenientes en diversas situaciones.

Por ejemplo, la propiedad de que una martingala sea uniformemente integrable. Esta condición surge de manera natural, considerando que una martingala definida en un intervalo cerrado por la derecha es uniformemente integrable, y trae consigo consecuencias muy importantes, como en la segunda afirmación del Teorema B.1.

Proposición B.1 *Si M es una martingala, las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

i) $\lim_{t\to\infty} M_t$ *existe en* L^1 *;*

ii) *existe una variable aleatoria* $M_\infty \in L^1$ *tal que* $M_t = \mathbb{E}[M_\infty|\mathscr{F}_t]$*;*

iii) M *es uniformemente integrable.*

en cuyo caso, $X_\infty = \lim_t X_t$ *c.s. Además, si la martingala es acotada en* L^p $(p > 1)$*:*

$$\sup_t ||X_t||_p < +\infty$$

entonces las condiciones anteriores se satisfacen, y se cumple la convergencia en L^p*.*

Esta proposición corresponde al Teorema 3.1, p. 68 de [22].

Mientras que si la filtración $\mathscr{F}_t$ sobre la que estamos trabajando es continua por la derecha, es posible limitarnos a tratar solamente martingalas con trayectorias càdlàg. Este resultado es parte del Teorema 9.28, p. 201 de [14].

Teorema B.2 (Regularización, Doob.) *Sea X una $\mathscr{F}_t$-submartingala a tiempo continuo. Si la filtración $\mathscr{F}_t$ es continua por la derecha, entonces X tiene una versión càdlàg si, y solo si, la función $t \to \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha.*
En particular, esto se cumple cuando X es una martingala.

Bibliografía

[1] Bell, J. (2015), *Jointly measurable and progressively measurable stochastic processes*, Department of Mathematics, University of Toronto.

[2] Chung, K.L. y Williams, R.J. (1990), *Introduction to Stochastic Integration*, Second Edition, Birkhäuser Boston.

[3] Coculescu, D. y Nikeghbali, A. (2010), *Filtrations*, John Wiley & Sons.

[4] Cohen, N. S. y Elliott J.R. (2015), *Stochastic Calculus and Applications*, Second Edititon, Birkhäuser, New York, NY.

[5] Doob, J.L. (1953), *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New York.

[6] Guerrero Vazquez, Rosa (1998), *Cálculo estocástico y valuación de opciones con el modelo de Black-Scholes*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.

[7] Jarrow, R. y Protter, Ph. (2004), *A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880-1970*, Insititute of Mathematical Statistics, Cornell University, Lecture Notes-Monograph Series **45**, 75-91.

[8] Itô, K. (1944), *Stochastic integral*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20**, 519-524.

[9] Itô, K. (1951), *On Stochastic Differential Equations*, Memoirs of the American Mathematical Society **4**, 1-51.

[10] Itô, K. y Watanabe, S. (1965), *Transformation of Markov processes by multiplicative functionals*, J. Math. Kyoto Univ. **4**, 1–75.

[11] Jeulin, T. (1980), *Semi-martingales et grossisementes d ´une filtratition*, Lecture Notes in Mathematics **833**, Springer.

[12] Jeulin, T. y Yor, M. (EDS), (1985), *Grossissementes de filtrations: exemples et applications*, Lecture Notes in Mathematics **1118**, Springer.

[13] Kaden, S. y Potthoff, J. (2004), *Progressive Stochastic Processes and an application of the Itô Integral*, Stochastic Analysis and Applications **22**, 843-865.

[14] Kallenberg, O. (2002), *Foundations of Modern Probability*, Third Edition, Springer-Verlag.

[15] Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer-Verlag.

[16] Kunita, H. y Watanabe, S. (1967), *On Square Integrable Martingales*, Nagoya Math. J. **30**, 209–245.

[17] Meyer, P.A. (1962), *A decomposition theorem for supermartingales*, I11. J. Math. **6**, 193-205.

[18] Motoo, M. y Watanabe, S. (1965), *On a class of aditive functionals of Markov process*, J. Math. Kyoto Univ. **4**, 429–469.

[19] Oksendal, B. (1992), *Stochastic differential equations: an introduction with applications*, Third Edition, Springer-Verlag.

[20] Pérez Cendejas, Ulises (2019), *Ecuaciones diferenciales estocásticas, soluciones fuertes y proceso de Bessel*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.

[21] Jacod, J. y Protter, P. (2000), *Probability Essentials*, Springer.

[22] Revuz, D. y Yor, M. (1999), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Third Edition, Springer-Verlag.

[23] Reyes Hernández, Emmanuel (2016), *Una introducción a la integración estocástica con aplicación a los mercados financieros*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.

[24] Rincón, L. (2012), *Introducción a los procesos estocásticos*, Primera Edición, Prensas de Ciencias.

[25] Shreve, S.E. (2004), *Stochastic Calculus for Finance II*, First Edition, Springer Finance, Springer.

[26] Shiu-Tang, L. (2017), *A brief introduction to Lebesgue-Stieltjes integral*, Mathematics Department, University of Utah.

[27] Skorokhod, A. V. (1965), *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley Publishing Company.

[28] Sokol, A. (2014), *An introduction to stochastic integration with respect to general semimartingales*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen.