



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**LAS PROPIEDADES MÉTRICAS DE LA
GEOMETRÍA EUCLIDIANA VÍA LAS
PROPIEDADES DE INCIDENCIA DE LA
GEOMETRÍA PROYECTIVA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

**DIANA YARETH SANTOYA
UGALDE**



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE ALONSO SANTOS
MELLADO**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE
MÉXICO 2022**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos de la alumna

Santoya

Ugalde

Diana Yareth

55 36 51 84 24

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

308320189

2. Datos del tutor

Dr.

Jorge Alonso

Santos

Mellado

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Javier

Bracho

Carpizo

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Narda

Cordero

Michel

5. Datos del sinodal 3

Dra.

Mónica

De Nova

Vázquez

6. Datos del Sinodal 4

Dr.

Rodolfo

San Agustín

Chi

7. Datos del trabajo escrito

Las propiedades métricas de la geometría euclidiana vía las propiedades de incidencia de la geometría proyectiva.

167 p.

2022

Diana Yareth Santoya Ugalde

Las propiedades métricas de la geometría euclidiana vía las propiedades de incidencia de la geometría proyectiva



1/2

"MONTECIENDO"

2011

Dedicado a Andrea, María, Andrés, Rocío y Martín

Agradecimientos

El presente escrito es un regalo para mí en diversos ámbitos de mi vida. Detrás de esta tesis hay una retahíla de aprendizajes, hechos, pensamientos, emociones y sentimientos que han sido contundentes para mi persona. Hoy, siento una dicha desbordante, debido a la conclusión de este trabajo que, sin duda, he realizado con dilección y ahínco.

Gracias a Dios, por darme la sabiduría, el talento y el consejo para terminar mi tesis.

Gracias a mi familia, quienes son la luz y el aliciente de mis días. A mi mamá, Andrea, por su aplomo, su encanto, su paciencia, su comprensión, su apoyo y por guiarme con amor abundante. A mi abuelita, María, por su alegría, su experiencia, su fortaleza y por inculcarme valores y hábitos. A mi abuelito, Andrés, por su nobleza, su empatía, su lucha y por enseñarme a ver por los demás. A mi tía, Rocío, por su ternura, su dedicación, su tenacidad, y por compartir tanto conmigo. A mi tío, Martín, por su entusiasmo, su entereza, su compromiso y por sembrar en mí el deseo universitario. A mi padrino, Ricardo, por su ejemplo, su firmeza y por transmitirme consejos valiosos. A mi papá, Cornelio, porque siempre ha estado a mi lado.

Gracias a mis profesores, quienes despertaron en mí el anhelo por la geometría. A mi asesor, el Dr. Alonso Santos, por su idoneidad, su carisma, su orientación y por confiar en mí y en este proyecto. Al Dr. Carlos Álvarez, por su tiempo y por todo lo que, directa o indirectamente, me motivó a aprender. Al Dr. Leobardo Fernández y al profesor Silvestre Cárdenas, por sus clases excepcionales.

Gracias a mis amigos, quienes me han acompañado a lo largo de estos años. A Adrián, Néstor, Alejandro, Antonio, Víctor, Lucio, Carlos, Orlado, Josué, David, León, Carlos, Ángel, Rafael, Salvador, Christopher, Francisco, Montserrat, Nayely, Mariangela, Gabriela, Araceli, Laura, Yadira, Irma, Claudia y Arelis. A mi amigo entrañable, el profesor Iseo, por permitirme usar su grabado *Amaneciendo* en la portada de mi tesis. A Ligia, por ayudarme a reconocer lo maravillosa que es la vida.

Gracias a mis sinodales, quienes han nutrido este escrito, sustancialmente. Al Dr. Javier Bracho, la Dra. Narda Cordero, la Dra. Mónica de Nova y el Dr. Rodolfo San Agustín. A mi institución, la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a quien le debo mi formación personal y académica.

Índice general

Capítulos	Página
Prefacio	1
1. Preliminares	5
1.1. Preliminares en el plano euclidiano	5
1.2. Preliminares en el plano proyectivo real	11
2. Relación armónica y razón cruzada	19
2.1. Hileras y haces armónicos	23
2.2. Relación armónica y propiedades de incidencia	31
2.3. Cuadrángulo completo y relación armónica	33
2.4. Razón cruzada	38
2.5. Razón cruzada y propiedades de incidencia	44
2.6. Conjuntos cuadrangulares	47
2.7. Cuadrángulo completo y razón cruzada	53
3. Inversiones e involuciones	59
3.1. Inversión	62
3.2. Inversión y razón cruzada	69
3.3. Involución	72

3.4. Cuadrángulo completo e involuciones	76
3.5. Propiedades de magnitud de una involución de puntos	80
3.6. Involución y razón cruzada	86
3.7. Propiedades de magnitud de una involución de líneas	88
3.8. Involución ortogonal	92
4. Polos y Polares	99
4.1. Polo y polar con respecto a una circunferencia	103
4.2. Cuadrángulo completo inscrito en una circunferencia	106
4.3. Polos, polares y razón cruzada	109
4.4. Cónicas	110
4.5. Tangentes y puntos de contacto a una cónica	117
4.6. Polo y polar con respecto a una cónica	125
4.7. Cuadrángulo completo inscrito en una cónica	129
4.8. Elementos de las cónicas vía propiedades de incidencia	135
4.9. Foco y directriz de una cónica	140
Conclusiones	149
Bibliografía	151
Índice alfabético	155

Prefacio

[...]-Ahora bien, ninguno de cuantos poseen el más leve barniz de geometría nos negará que la finalidad de esa ciencia es directamente contraria al lenguaje que emplean los que tratan de ella. -¿Cómo así? -Su lenguaje es muy divertido, aunque no tengas más remedio que usarlo. Hablan de cuadrar, de prolongar, de añadir, y así sucesivamente, como si realmente operasen, como si todas sus demostraciones tendiesen a la práctica, cuando toda esta esencia no tiene más objeto que el conocimiento. -Verdad es. -Pues convén todavía en otra cosa. -¿En qué? -En que tiene por objeto el conocimiento de lo que es siempre, y no de lo que nace y perece. -Sin dificultad convengo en ello, porque la geometría tiene por objeto el conocimiento de lo permanente. -Por tanto atrae al alma hacia la verdad, forma en ella el espíritu filosófico, obligándola a dirigir a lo alto sus miradas, en lugar de posarlas, como suele hacerse en las cosas terrenas. -Nada más cierto.[...]

Platón. Diálogos, La República Libro VII.

Nadie puede ignorar que, la geometría euclidiana parece estar asociada a nociones de magnitud. En gran medida, este hecho se debe al origen y desarrollo histórico de la misma, así como a la aplicación inmediata de esta disciplina a los problemas prácticos mediante el uso de herramientas métricas. De allí que, naturalmente, se piense en una relación indisoluble entre la geometría euclidiana y las nociones de magnitud. Más aún, también resulta natural suponer que la columna vertebral de la geometría euclidiana está conformada por nociones de magnitud propias de este dominio, a saber, paralelismo, ortogonalidad, punto medio de un segmento, bisectriz de un ángulo. No obstante, desde un enfoque sintético, el presente escrito nos ayudará a comprender cómo a partir de nociones proyectivas, esto es, nociones que conciernen sólo a relaciones de incidencia, se fraguan dichas nociones métricas, sin apelar a relaciones de magnitud desde un inicio.

Como veremos, con base en las propiedades de relación armónica, razón cruzada e involuciones, definiremos vía propiedades de incidencia, las nociones de: punto medio de un segmento, líneas perpendiculares y bisectrices de un ángulo, análogas a las del plano euclidiano. Además, en relación con la teoría que trataremos de involuciones y de polos y polares, clasificaremos a las cónicas y definiremos ciertas nociones asociadas a ellas, a saber, el centro, los diámetros, las asíntotas, los ejes, los vértices, los focos y las directrices, análogas a las del plano euclidiano. Desde este punto de vista, el

propósito de esta tesis será aclarar las condiciones bajo las cuales se derivan parte de las propiedades métricas, o propiedades de magnitud, del plano euclidiano por medio de las propiedades de incidencia del plano proyectivo real.

La transición matemática entre las nociones de magnitud y las nociones de incidencia, tiene su correlato en la transición histórica y empírica entre la geometría euclidiana y la geometría proyectiva. En el siglo III A. de C., Euclides le da orden y estructura a todo el conocimiento geométrico conocido hasta entonces, en su obra *Los Elementos*. En este escrito, compuesto por trece libros, se axiomatiza por primera vez la geometría euclidiana. En el primer libro se presenta un sistema de axiomas constituido por cinco *nociones comunes* y cinco *postulados*. Dentro de este sistema destaca, sobremanera, el quinto postulado. Éste es un enunciado que contiene una condicional y hace operativa la noción de paralelismo. Aún cuando la definición de líneas paralelas está basada en incidencia, deviene en las propiedades métricas más importantes de esta disciplina, a saber, las propiedades de paralelogramos, la semejanza de figuras, la trigonometría, las propiedades de ángulos inscritos. Así, la geometría euclidiana fue instrumento para resolver problemas prácticos, en tanto que diversas nociones de magnitud fueron emanadas del quinto postulado.

Varios siglos más tarde, durante el Renacimiento (s. XV-XVI) se advierten las primeras nociones que, posteriormente, serían base de la incipiente geometría proyectiva. Así como todo campo del saber tiene su origen en un problema práctico, la geometría proyectiva yace dentro del quehacer pictórico. Arquitectos, pintores y escultores de la época renacentista, entre ellos Filippo Brunelleschi, Leonardo Da Vinci y Alberto Durero (Corredor de Porras y Londoño, 2019, pp.303-309), por mencionar algunos, se cuestionaban cómo podían plasmar la imagen de un objeto tridimensional en un plano, de tal manera que la imagen resultante presentara el mismo aspecto que la imagen que es percibida por nuestros ojos. Desde luego, para lograr tal propósito, utilizaron herramientas geométricas. Incluso, el arte renacentista floreció conforme se comprendía la geometría desde el punto de vista creativo y, a su vez, nuevos instrumentos geométricos surgieron conforme incrementaban las demandas de las técnicas pictóricas.

A pesar de que, en principio, los artistas renacentistas veían con ojos euclidianos el problema de cómo trazar un objeto del espacio en una superficie plana, muy pronto se convencieron que su solución no dependía de nociones métricas. Ellos observaron que, ante nuestros ojos, las líneas paralelas se perciben como líneas que se intersecan, las distancias iguales se perciben como distancias distintas, los ángulos rectos se perciben como ángulos agudos u obtusos, las circunferencias se perciben como elipses. A diferencia de las líneas, los puntos y sus relaciones de incidencia que, ante nuestros ojos, se perciben tal como se presentan en las figuras que conforman el objeto tridimensional. Con base en tales observaciones, se establece la *perspectiva*, una técnica pictórica donde todas las líneas paralelas convergen en un punto, el *punto de fuga*. A partir, de dicha técnica se logra dar fin al problema en cuestión. Más aún, desde el punto de vista matemático, la perspectiva se concibió como una correspondencia basada en las

proyectividades más elementales del plano proyectivo real.

Durante muchos siglos, teoremas relacionados con nociones de incidencia, tales como los teoremas de Desargues y Pappus, fueron considerados como parte del campo de estudio de la geometría euclidiana. No obstante, fue hasta el siglo XIX que diversos matemáticos, entre ellos Christian von Staudt, Jean-Victor Poncelet, Jakob Steiner y David Hilbert (Corredor de Porras y Londoño, 2019, pp.297-300), por mencionar a algunos, distinguen las propiedades de incidencia de las propiedades de magnitud, es decir, conciben las relaciones de incidencia como nociones independientes de las nociones de magnitud. Luego, se establece una nueva geometría basada en un sistema de axiomas distinto de los axiomas que sostenían la geometría euclidiana. De acuerdo con Ewan Faulkner (2006), este hecho “[...] mostró que los teoremas de la geometría proyectiva fueran independientes del concepto de magnitud y que la magnitud en sí misma pudiera ser expresada en términos de cualquier elemento proyectivo. Así, los teoremas de la geometría métrica fueron encontrados como casos particulares de teoremas mas generales de la geometría proyectiva” (p.2).

Si bien, existen múltiples temas en común entre el plano euclidiano y el plano proyectivo real tienen, hay notables diferencias entre ellas. La noción de paralelismo es una de las diferencias más importantes entre ambos planos. En el plano euclidiano, todo par de líneas distintas se intersectan en un único punto, a excepción de las líneas paralelas. Mientras que, en el plano proyectivo real, todo par de líneas distintas se intersectan en un único punto, sin excepción alguna. De allí que, no existan las líneas paralelas en el plano proyectivo real. Para extender el plano euclidiano al plano proyectivo real, se acuerda que dos líneas paralelas se intersectan en un punto, al que se le conoce como *un punto al infinito*, *un punto ideal* o *un punto impropio*. Este punto es de naturaleza distinta a todos los demás puntos del plano euclidiano, a los que solemos llamar *puntos propios* o *puntos ordinarios*. Desde luego, hay un punto al infinito por cada dirección asociada a una línea. Asimismo, se acuerda que todos los puntos al infinito inciden con una misma línea, *la línea al infinito* o *línea ideal*. Esta línea, también es de naturaleza distinta a todas las demás líneas del plano euclidiano, a las que solemos llamar *líneas ordinarias*. De acuerdo con John Young (1982), el plano proyectivo real “consiste de todos los puntos y líneas del plano euclidiano, además de un conjunto de puntos al infinito que son incidentes con una línea, la línea al infinito, de tal manera que en toda línea del plano euclidiano incide uno de los puntos al infinito” (p. 14).

Al posicionarnos en el plano proyectivo real, mostraremos el objetivo de la presente tesis, develar cómo algunas de las principales nociones de magnitud del plano euclidiano se pueden derivar de nociones que conciernen sólo a relaciones de incidencia, una vez que agregamos la línea al infinito en el plano euclidiano. Para materializar tal propósito, trataremos los temas de: relación armónica, razón cruzada, involuciones y polos y polares. Así pues, este escrito estará dividido en cuatro capítulos: preliminares; relación armónica y razón cruzada; inversiones e involuciones; y polos y polares.

En el capítulo 1, *grosso modo*, presentaremos las definiciones y proposiciones en el plano euclidiano y en el plano proyectivo real, que nos servirán para abordar los temas posteriores.

Después, el capítulo 2 trata los temas de relación armónica y razón cruzada. En esta parte, analizaremos las propiedades principales de la relación armónica y la razón cruzada. Veremos cómo estas nociones, que se relacionan con propiedades de magnitud en el plano euclidiano, también se relacionan, *per se*, con propiedades de incidencia. Además, en el plano proyectivo real, advertiremos que la relación armónica será la única noción de magnitud que se podrá definir, cabalmente, a través de una configuración específica, el cuadrángulo completo. De la misma manera, veremos que la razón cruzada, vista como la generalización de la relación armónica, también se relacionará con dicha configuración. Así, con base en las propiedades de la relación armónica, en el plano proyectivo real, definiremos la noción de punto medio de un segmento, análoga a la del plano euclidiano.

Luego, el capítulo 3 versa sobre las inversiones e involuciones. En este apartado estudiaremos las propiedades principales de las inversiones y las involuciones en el plano euclidiano. Además, dilucidaremos cómo las inversiones son un caso particular de involuciones y constataremos que las inversiones y las involuciones preservan la razón cruzada y, en particular, la relación armónica. A partir de la relación entre las involuciones y la configuración del cuadrángulo completo, en el plano proyectivo real, develaremos las relaciones entre las propiedades de magnitud y las propiedades de incidencia de las involuciones. Así, de acuerdo con las propiedades de la relación armónica y las involuciones, en el plano proyectivo real definiremos las nociones de líneas perpendiculares y bisectrices de un ángulo, análogas a las del plano euclidiano.

Finalmente, el capítulo 4 aborda la relación de polos y polares. En esta última parte, presentaremos las propiedades principales de los polos y polares con respecto a una circunferencia y de los polos y polares con respecto a una cónica. Además, trataremos la noción de cónica y sus propiedades principales en el plano proyectivo real. Asimismo, veremos que los polos y polares tendrán una relación indisoluble con la configuración de cuadrángulo completo dentro de ambos planos, y constataremos que la relación polo y polar preservará la razón cruzada y, en particular, la relación armónica, en el plano euclidiano. Luego, en el plano proyectivo real, clasificaremos a las cónicas de acuerdo con sus relaciones de incidencia con la línea al infinito, y definiremos ciertas nociones asociadas a las cónicas, a saber, el centro, los diámetros, las asíntotas, los ejes, los vértices, los focos y las directrices, análogas a las del plano euclidiano.

Con base en los capítulos expuestos en esta tesis, esclareceremos las relaciones entre las nociones de magnitud del plano euclidiano y las nociones de incidencia del plano proyectivo real.

Capítulo 1

Preliminares

[...]-Dispondremos, pues, expresamente, que los ciudadanos de nuestro Estado no descuiden el estudio de la geometría; tanto más, cuanto que aparte de esta ventaja principal tiene otras que no son de desdeñar. -¿Cuáles? -Ante todo, aquellas de que hablaste tú, y que atañen a la guerra. Además, comunica al espíritu facilidad para las restantes ciencias; así vemos que hay una diferencia palmaria entre el que está versado en geometría y el que no lo está. -Grandísima es, en efecto, la diferencia. -Haremos pues, que aprendan esta otra ciencia nuestros jóvenes discípulos.[...]

Platón. Diálogos, La República Libro VII.

En este primer capítulo presentaremos las definiciones y las proposiciones en el plano euclidiano y en el plano proyectivo real, que nos permitirán abordar el contenido de esta tesis. Es deseable que, el lector del presente texto, se encuentre familiarizado con nociones básicas de geometría euclidiana y de geometría proyectiva. En el plano euclidiano, resultará provechoso contar con conocimientos de criterios de semejanza de triángulos, teorema de Tales, propiedades de ángulos inscritos. Mientras que, en el plano proyectivo real, resultará conveniente contar con conocimientos de nociones de triángulos en perspectiva, principio de dualidad y propiedades de correspondencias uno a uno. Por brevedad, nos remitiremos a enunciar las proposiciones que referenciaremos a lo largo del texto, más no demostraremos tales resultados. No obstante, señalaremos las fuentes donde se prueban tales proposiciones.

1.1. Preliminares en el plano euclidiano

Para consultar los axiomas y las nociones básicas en el plano euclidiano, recomendamos los textos de *Geometry: Euclid and Beyond* (2000) de Robin Hartshorne; *Foundations of geometry* (1971) de David Hilbert; y *College Geometry* (2007) de Nathan Altshiller.

Usaremos la notación \overline{AB} para referirnos a la magnitud del segmento que tiene por extremos a los puntos A y B . Mientras que, la notación AB considera segmentos dirigidos, esto es, AB es el segmento que comienza en el punto A y termina en el punto B , así $AB = -BA$. Además, usaremos la notación $C(O, r)$ para referirnos a la circunferencia de centro O y radio r .

A continuación enunciaremos las definiciones y los resultados previos en el plano euclideo que necesitamos en este escrito. Para comenzar, presentamos la siguiente proposición que versa sobre los ángulos inscritos que subtenden un diámetro, es decir, los ángulos rectos.

Proposición 1.1.1. *El lugar geométrico de los puntos P en los que un segmento dado AB subtende un ángulo recto, es la circunferencia de diámetro AB (véase figura 1.1).¹*

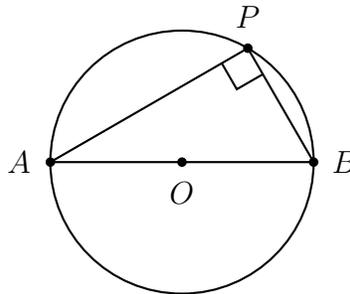


Figura 1.1: $\angle APB = 90^\circ$ si y sólo si abarca el diámetro AB

A partir de la noción de semejanza de triángulos y de las propiedades de ángulos inscritos, se introduce la noción de *potencia* de un punto con respecto a una circunferencia.

Proposición 1.1.2. *Sea P un punto en el plano de una circunferencia. Si un par de secantes distintas que inciden con P cortan a la circunferencia en los puntos A, A' y B, B' , respectivamente, entonces $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ (véase figura 1.2).²*

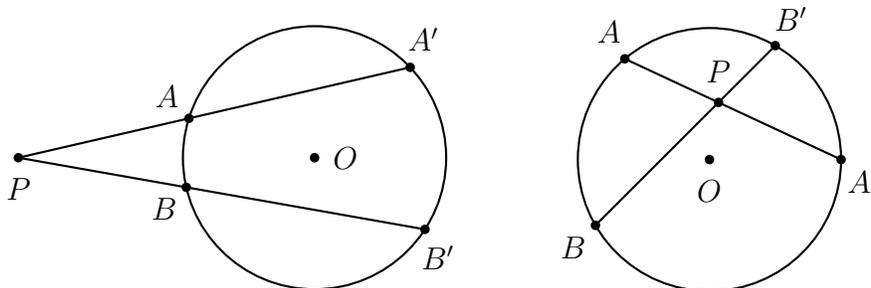


Figura 1.2: $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$

¹Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. pp.12,13.

²*Ibidem*. pp.190,191.

Definición 1.1.1. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y P un punto del plano. Denotamos por A y A' a los puntos en que una secante que incide con P corta a la circunferencia. Decimos que la *potencia* de P con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$ es la constante $PA \cdot PA'$.

La siguiente proposición caracteriza a los puntos equipotentes con respecto a dos circunferencias dadas.

Proposición 1.1.3. *El lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a dos circunferencias, es una línea perpendicular a la línea de los centros de las circunferencias dadas (véase figura 1.3).³*

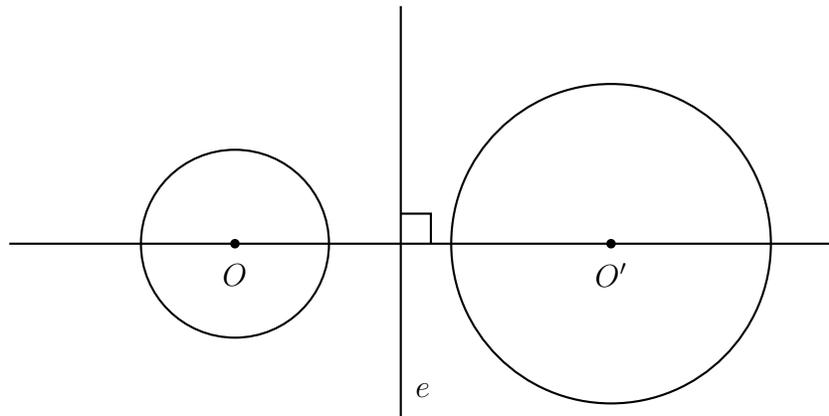


Figura 1.3: e es el eje radical de $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$

En relación con la proposición anterior, definimos lo siguiente:

Definición 1.1.2. El *eje radical* de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a las dos circunferencias.

Como parte de los alcances de la noción de potencia de un punto con respecto a una circunferencia, en la siguiente proposición veremos un criterio muy útil para determinar si dos circunferencias son *ortogonales*.

Definición 1.1.3. Decimos que dos circunferencias $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son *ortogonales* si y sólo si $(OO')^2 = r^2 + r'^2$.

Proposición 1.1.4. *Sean $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ dos circunferencias y T uno de sus puntos de intersección. Si una secante que incide con O corta a la circunferencia $\mathcal{C}(O', r')$ en un par de puntos A y A' , las circunferencias $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son ortogonales si y sólo si $OT^2 = OA \cdot OA'$ (véase figura 1.4).⁴*

³Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. p.194.

⁴*Ibidem*. p.192.

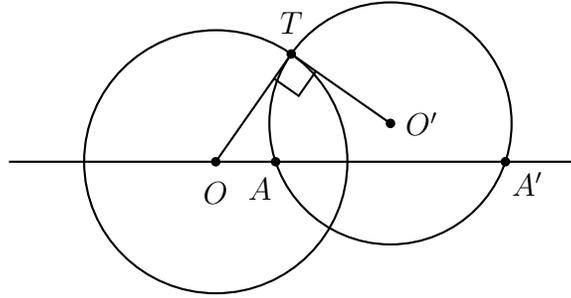


Figura 1.4: $OT^2 = OA \cdot OA'$ si y sólo si $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son ortogonales

Recordemos que, cada segmento del plano es asociado con un número real que representa la longitud del segmento. En relación con este hecho, definimos lo siguiente:

Definición 1.1.4. Sean AB un segmento y C un punto que incide con la línea AB . Decimos que C divide al segmento AB en la razón r en \mathbb{R} si y sólo si $\frac{AC}{CB} = r$.

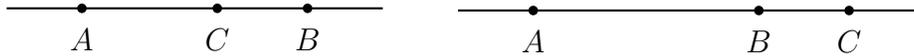


Figura 1.5: C divide al segmento AB en una razón dada

La noción de razón de partición de un segmento se basa en la noción de segmentos dirigidos. Los tres puntos en esta relación desempeñan un papel distinto: A es el origen del segmento, B es el fin del segmento y C es el punto divisorio. La razón en la que un punto divide a un segmento es un cociente, donde el numerador va del extremo inicial del segmento hasta el punto divisorio y el denominador va del punto divisorio hasta el extremo final del segmento (véase figura 1.5). Si C es un punto entre A y B , decimos que C divide internamente al segmento AB . En este caso, la razón de partición es positiva pues los segmentos AC y CB tienen la misma dirección. Mientras que, si el punto C es un punto fuera del segmento AB , decimos que C divide externamente al segmento AB . En este caso, la razón de partición es negativa pues los segmentos AC y CB tienen distinta dirección. En la siguiente proposición, Nikolai Beskin (1975), muestra que existen dos puntos C y D en una línea AB tales que dividen interna y externamente al segmento AB en un par de razones r y $-r$, respectivamente.

Proposición 1.1.5. Sean AB un segmento y $r \neq 1$ una razón, existe un único punto C en la línea AB tal que $\frac{AC}{CB} = r$ y un único punto D en la línea AB tal que $\frac{AD}{DB} = -r$ (véase figura 1.6).⁵

⁵Beskin, Nikolai (1975). *Dividing a segment in a given ratio*. pp.16-18.

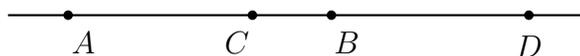


Figura 1.6: $\frac{AC}{CB} = r$ y $\frac{AD}{DB} = -r$

La proposición anterior trata el problema de partición de un segmento en términos de segmentos dirigidos. Ahora veremos la posibilidad de obtener la razón de partición de un segmento en términos de magnitudes asociadas a ángulos. A partir de la ley de senos, determinamos una forma de incluir a los senos asociados a ciertos ángulos dentro de una razón de proporción. Tal hecho es señalado en la siguiente proposición (véase figura 1.7):⁶

Proposición 1.1.6. Sean $\triangle AOB$ un triángulo y C un punto que incide con la línea AB , entonces

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA \operatorname{sen}\angle AOC}{BO \operatorname{sen}\angle COB}.$$

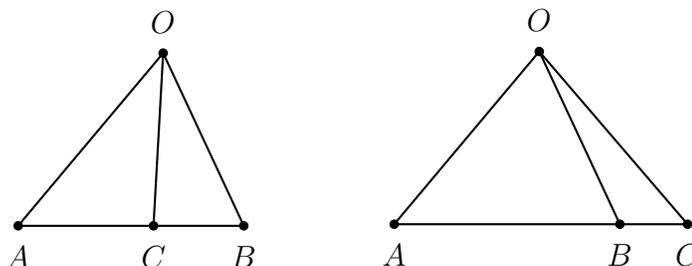


Figura 1.7: $\frac{AC}{CB} = \frac{OA \operatorname{sen}\angle AOC}{BO \operatorname{sen}\angle COB}$

Con base en la noción de partición de un segmento, se establecen los teoremas para determinar concurrencia de líneas y colinealidad de puntos en el plano euclidiano, los *teoremas de Ceva y Menelao*. A partir de este par de resultados, asociamos propiedades de magnitud a las nociones de concurrencia de líneas y colinealidad de puntos, en función de un triángulo.

Por una parte, el teorema de Ceva establece ciertas relaciones de magnitud que son condiciones necesarias y suficientes para concluir la concurrencia de tres líneas tales que cada una de éstas incide con uno de los vértices de un triángulo (véase figura 1.8).⁷

⁶Shively, Levi. (1984). *Introducción a la Geometría Moderna*. p.17.

⁷Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. pp.159,160.

Proposición 1.1.7. Teorema de Ceva. Sean $\triangle PAB$ un triángulo y PC , AR y BQ tres líneas que inciden con los vértices P , A y B del triángulo, respectivamente. Las líneas PC , AR y BQ son concurrentes si y sólo si

$$\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1.$$

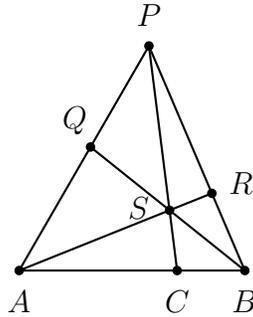


Figura 1.8: Teorema de Ceva

Por otra parte, el teorema de Menelao establece ciertas relaciones de magnitud que son condiciones necesarias y suficientes para concluir la colinealidad de tres puntos tales que cada uno de éstos incide con uno de los lados de un triángulo (véase figura 1.9).⁸

Proposición 1.1.8. Teorema de Menelao. Sean $\triangle PAB$ un triángulo y Q , D y R tres puntos que inciden con los lados PA , AB y BP del triángulo, respectivamente. Los puntos Q , D y R son colineales si y sólo si

$$\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BR}{RP} = -1.$$

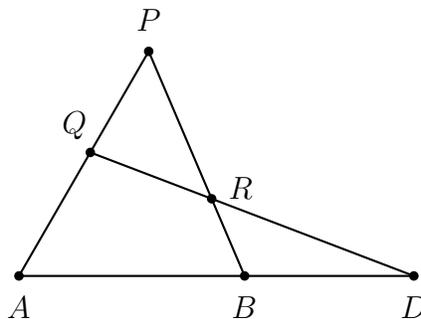


Figura 1.9: Teorema de Menelao

⁸Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. pp.154,155.

En relación con las propiedades enunciadas hasta este momento, abordaremos la parte de este escrito que concierne al plano euclidiano. Ahora, veremos las nociones del plano proyectivo real que nos permitirán abordar la otra parte de este texto.

1.2. Preliminares en el plano proyectivo real

Para consultar los axiomas y las nociones básicas en el plano proyectivo real, recomendamos los textos de *Projective Geometry* (1910) de Oswald Veblen y John Young; *Projective Geometry: From Foundations to Applications* (1998) de Albrecht Beutelspacher y Ute Rosenbaum; y *Lectures in Projective Geometry* (2005) de Abraham Seidenberg.

A continuación enunciaremos las definiciones y los resultados previos en el plano proyectivo real que necesitamos en este escrito. Para comenzar, presentamos las definiciones duales de *cuadrángulo completo* y *cuadrilátero completo* (véase figura 1.10).

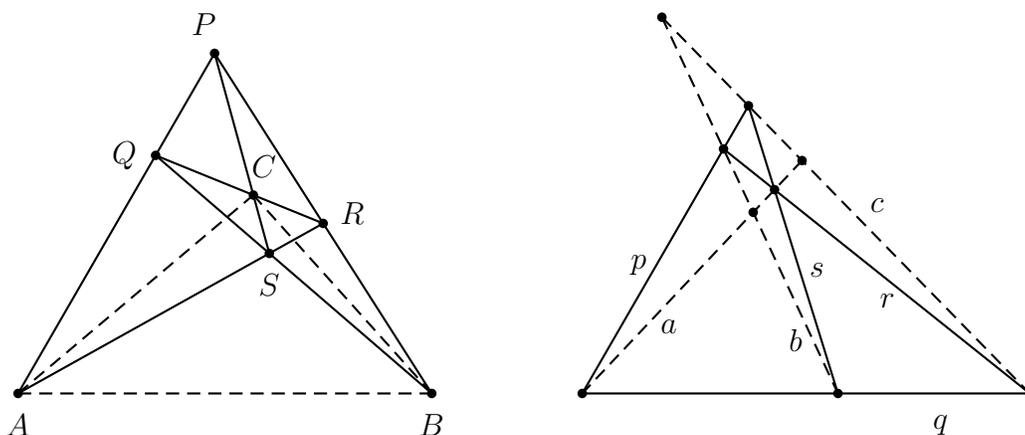


Figura 1.10: Cuadrángulo completo $PQRS$ y cuadrilátero completo $pqrs$

Definición 1.2.1. Un *cuadrángulo completo* $PQRS$ es una figura plana formada por cuatro puntos P, Q, R y S que inciden por pares con seis líneas distintas. Decimos que los puntos son sus cuatro *vértices* y que las líneas son sus seis *lados*. Además, diremos que dos lados son *opuestos* si el punto que incide con ellos no es un vértice. Al punto incidente con dos lados opuestos, lo llamaremos *punto diagonal* y al triángulo cuyos vértices son los tres puntos diagonales del cuadrángulo completo, lo llamaremos *triángulo diagonal*.

Definición 1.2.2. Un *cuadrilátero completo* $pqrs$ es una figura plana formada por cuatro líneas p, q, r y s que inciden por pares con seis puntos distintos. Decimos que las líneas son sus cuatro *lados* y que los puntos son sus seis *vértices*. Además, diremos que dos vértices son *opuestos* si la línea que incide con ellos no es un lado. A la línea incidente con dos vértices opuestos, la llamaremos *línea diagonal* y al triángulo cuyos lados son las tres líneas diagonales del cuadrilátero completo, lo llamaremos *triángulo diagonal*.

Dado un cuadrángulo completo $PQRS$ (véase figura 1.10). Observemos que, sus lados son las líneas PS, QS, RS, QR, RP y PQ . Además, sus pares de lados opuestos son las líneas PQ y RS ; PR y QS ; PS y QR . Asimismo, si denotamos por A al punto de intersección de las líneas PQ y RS ; por B al punto de intersección de las líneas PR y QS ; y por C al punto de intersección de las líneas PS y QR , tenemos que los puntos diagonales de este cuadrángulo completo son A, B y C . Por lo que, $\triangle ABC$ es el triángulo diagonal asociado al cuadrángulo completo $PQRS$. Por el principio de dualidad, obtenemos observaciones análogas para un cuadrilátero completo $pqrs$.

La proposición que, por excelencia, hace patente el alcance de la dualidad en el plano proyectivo real, es el *teorema de Desargues*. Este resultado es una proposición autodual, en la que su afirmación recíproca coincide con su afirmación dual (véase figura 1.11).

Proposición 1.2.1. Teorema de Desargues. *Dos triángulos están en perspectiva desde un punto si y sólo si están en perspectiva desde una línea.*⁹

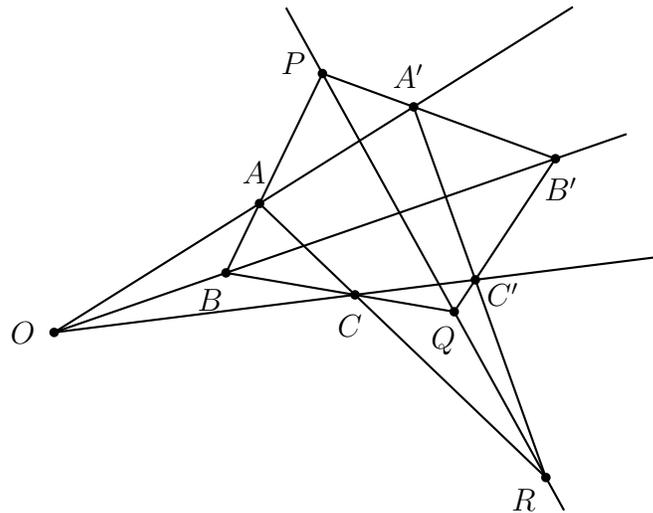


Figura 1.11: Teorema de Desargues

Dado que la incidencia es una relación recíproca que puede haber entre los puntos y líneas de un plano, veremos cómo establecer correspondencias entre puntos y líneas, vía las relaciones de incidencia entre estos elementos. Para realizar tal propósito, nos convendrá introducir el siguiente par de definiciones duales.

Definición 1.2.3. Una *hilera de puntos* es una figura formada por el conjunto de todos los puntos que inciden con una misma línea. A esta línea la llamaremos el eje o la línea de la hilera.

Definición 1.2.4. Un *haz de líneas* es una figura formada por el conjunto de todas las líneas que inciden con un mismo punto. A este punto lo llamaremos el centro o el vértice del haz.

⁹Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. pp.40,41.

A las hileras de puntos y los haces de líneas, Oswald Veblen y John Young (1910) los llaman las *formas uno-dimensionales* del plano proyectivo real. En particular, trataremos las correspondencias uno a uno que relacionan las hileras de puntos con los haces de líneas y, viceversa, es decir, las correspondencias uno a uno que relacionan un par de formas uno-dimensionales de distintos tipos (véase figura 1.12).

Definición 1.2.5. Dada una hilera de puntos y un punto O que no incide con el eje de la hilera, todo punto de la hilera incide con una línea que, a su vez incide con el punto O . Al conjunto de todas estas líneas que inciden con O , lo llamaremos la *proyección* de la hilera desde el punto O .

Definición 1.2.6. Dado un haz de líneas y una línea l que no incide con el centro del haz, toda línea del haz incide con un punto que, a su vez incide con la línea l . Al conjunto de todos estos puntos que inciden con l , lo llamaremos la *sección* del haz por la línea l .

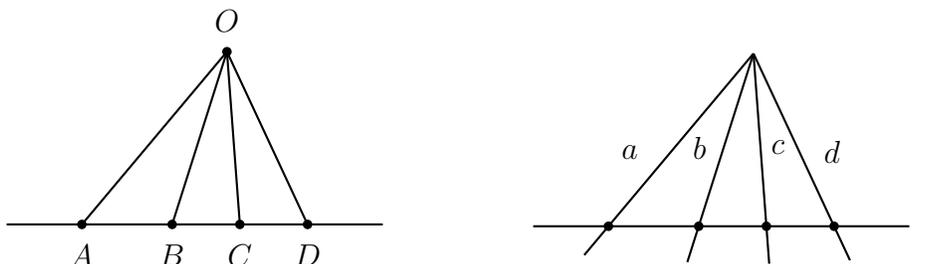


Figura 1.12: proyección desde O y sección por l

A las correspondencias proyección y sección, las llamaremos las *correspondencias elementales* del plano. Con base en éstas, se establece la noción de proyectividad.

Definición 1.2.7. Una *proyectividad* es una composición de un número finito de correspondencias elementales.

Desde luego, una proyectividad relaciona un par de formas uno-dimensionales del mismo o de distinto tipo. Emplearemos la notación

$$A \bar{\wedge} a$$

para indicar la proyectividad entre un par de elementos homólogos A, a de dos formas uno-dimensionales de distinto tipo. Además, diremos que un elemento de una forma uno-dimensional es *invariante*, si se corresponde a sí mismo bajo una proyectividad. Un caso particular de proyectividad es la que relaciona dos formas uno dimensionales del mismo tipo.

Definición 1.2.8. Una *perspectividad* es una composición de dos correspondencias elementales.

De acuerdo con la definición de perspectividad, dos hileras de puntos en el mismo plano están en perspectividad si todo par de puntos correspondientes inciden con una línea de un haz. De manera dual, dos haces de líneas en el mismo plano están en perspectividad si todo par de líneas correspondientes inciden con un punto de una hilera (véase figura 1.13). Por lo que, dos formas uno-dimensionales del mismo tipo están en perspectividad si y sólo si cada par de elementos correspondientes inciden con un elemento de una tercer forma uno-dimensional de distinto tipo, de tal manera que ésta no tenga una línea en común con alguna de las formas dadas. Si la tercera forma es un haz de líneas con vértice O , se dice que es una perspectividad central cuyo centro es O y si la tercer forma es una hilera de puntos con eje l , se dice que es una perspectividad axial cuyo eje es l .

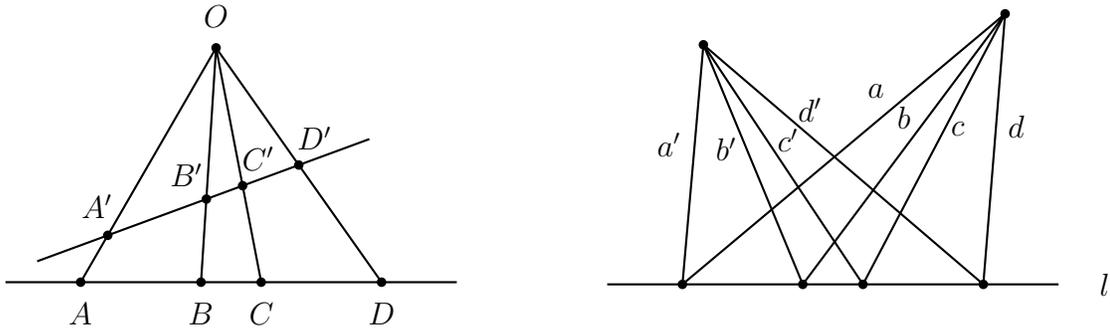


Figura 1.13: $ABCD \stackrel{O}{\wedge} A'B'C'D'$ y $abcd \stackrel{l}{\wedge} a'b'c'd'$

Emplearemos la notación

$$A \stackrel{O}{\wedge} A'$$

$$a \stackrel{l}{\wedge} a'$$

para indicar que los puntos A y A' están en perspectividad por medio del centro O , esto es, los puntos A , A' y O son colineales.

para indicar que las líneas a y a' están en perspectividad por medio del eje l , esto es, las líneas a , a' y l son concurrentes.

Asimismo, la notación

$$ABCD \stackrel{O}{\wedge} A'B'C'D'$$

$$abcd \stackrel{l}{\wedge} a'b'c'd'$$

indicará que A, A' ; B, B' ; C, C' y D, D' son pares de puntos correspondientes bajo la perspectividad con centro O .

indicará que a, a' ; b, b' ; c, c' y d, d' son pares de líneas correspondientes bajo la perspectividad con eje l .

Cabe resaltar que, las propiedades asociadas a las perspectivas son duales en su

totalidad, es decir, si dos formas están en perspectiva, entonces la figura dual consistirá de formas que están en perspectiva. Por el principio de dualidad, cualquier prueba de un teorema que concierna a perspectiva, en seguida podrá ser dualizado.

La siguiente proposición, señala cómo se transforma una triada de puntos incidentes con una línea, en una triada de puntos incidentes con otra línea, vía propiedades de incidencia.

Proposición 1.2.2. *Sean A, B, C tres puntos distintos que inciden con una línea l y A', B', C' tres puntos distintos que inciden con una línea l' , entonces los puntos A, B, C son transformados, vía propiedades de incidencia, en los puntos A', B', C' , respectivamente, por medio de dos centros de perspectiva.¹⁰*

Notemos que, la proyectividad presentada en la proposición anterior es realizable siempre que consideremos al menos tres puntos que inciden con l y sus correspondientes tres puntos que inciden con l' . Dicho en otro términos, cuando tenemos tres puntos y sus respectivas imágenes, construiremos la proyectividad que relaciona las primera triada con la segunda triada. En relación con este hecho, emerge una nueva interrogante: ¿es posible transformar cuatro elementos de una forma uno-dimensional en cuatro elementos de una forma uno-dimensional? Esta pregunta surge con el propósito de ver si una correspondencia proyectiva entre formas uno-dimensionales está completamente determinada cuando tres pares de elementos homólogos son dados. En la siguiente proposición se da respuesta a la cuestión planteada.¹¹

Proposición 1.2.3. *Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos incidentes con una línea y sean A', B', C' tres puntos incidentes con otra o con la misma línea. Dadas las proyectividades $ABCD \bar{\lambda}_1 A'B'C'D'$ y $ABCD \bar{\lambda}_2 A'B'C'D''$, entonces $D' = D''$.*

De manera más general, en la siguiente proposición, Oswald Veblen y John Young (1910) presentan el *Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva*. Éste será nombrado a través de sus iniciales *TFGP*, a lo largo de este escrito.¹²

Proposición 1.2.4. Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva. *Sean $1, 2, 3, 4$ cuatro elementos distintos de una forma uno-dimensional y sean $1', 2', 3'$ tres elementos distintos de otra o de la misma forma uno-dimensional. Dadas las proyectividades $1234 \bar{\lambda}_1 1'2'3'4'$ y $1234 \bar{\lambda}_2 1'2'3'4''$, entonces $4' = 4''$.*

Debido a que toda proyectividad tiene a lo más dos puntos invariantes, clasificaremos a las proyectividades, en virtud de sus puntos invariantes.

Definición 1.2.9. Decimos que

¹⁰Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.44.

¹¹*Ibidem*. pp.47,48.

¹²Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.95.

1. Una proyectividad es *elíptica* si no tiene elementos invariantes.
2. Una proyectividad es *parabólica* si tiene un elemento invariante.
3. Una proyectividad es *hiperbólica* si tiene dos elementos invariantes.

A partir del *TFGP* (proposición 1.2.4), Harold Coxeter (1987) señala una caracterización de una perspectividad entre los puntos que inciden con dos líneas, en función del punto que deja invariante.

Proposición 1.2.5. *Una proyectividad entre dos hileras de puntos que inciden con líneas distintas es una perspectividad si y sólo si el punto de intersección de las líneas es invariante (véase figura 1.14).¹³*

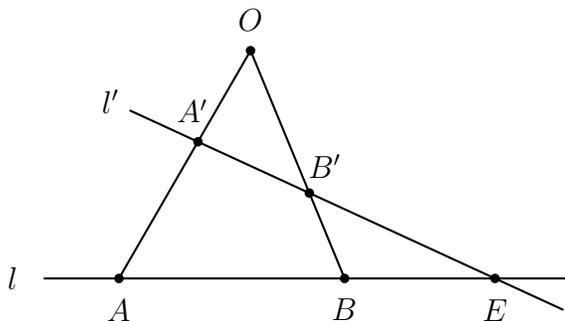


Figura 1.14: El punto E es invariante bajo la perspectividad $ABE \stackrel{O}{\wedge} A'B'E$

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.2.6. *Una proyectividad entre dos haces de líneas que inciden con puntos distintos es una perspectividad si y sólo si la línea que une los puntos es invariante.*

El *eje de proyectividad* es una línea específica asociada a una proyectividad entre las hileras de puntos que inciden con dos líneas distintas. A partir de dicha línea, John Young (1982) establece un método para construir la proyectividad que relaciona los puntos incidentes con dos líneas distintas.

Proposición 1.2.7. *Si una proyectividad relaciona dos hileras de puntos A, B, C, D, \dots y A', B', C', D', \dots que inciden con dos distintas líneas l y l' , respectivamente, entonces los puntos de intersección de los pares de líneas AB' y $A'B$; AC' y $A'C$, AD' y $A'D, \dots$, inciden con una línea. A esta línea la llamaremos el eje de proyectividad (véase figura 1.15).¹⁴*

¹³Coxeter, Harold. (1987). *Projective Geometry*. pp.35,36.

¹⁴Young, John. (1982). *Projective Geometry*. pp.49-51.

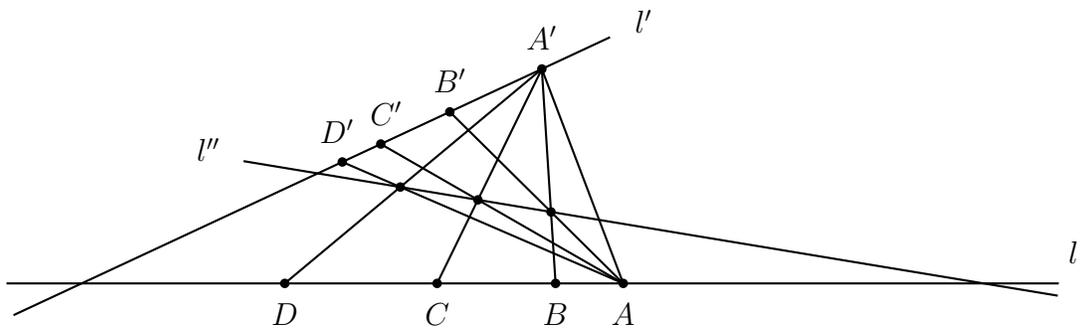


Figura 1.15: la línea l'' es el eje de proyectividad

Para finalizar, presentaremos el *teorema de Pappus*. Éste es una proposición enunciada en función de un *hexágono simple*.

Proposición 1.2.8. Teorema de Pappus. *Si los vértices de un hexágono simple inciden alternadamente con dos líneas distintas, entonces las intersecciones de los tres pares de lados opuestos, son colineales (véase figura 1.16).¹⁵*

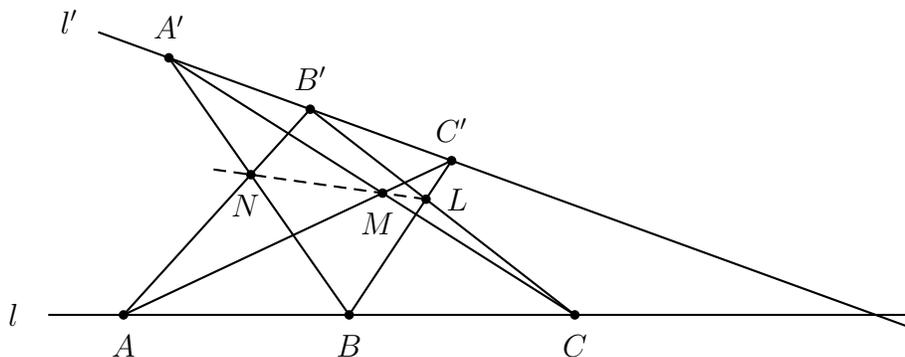


Figura 1.16: Teorema de Pappus

En relación con la proposición anterior, si los puntos L, M y N son las intersecciones de los pares de lados opuestos del hexágono simple $A'BC'AB'C$, cuyos vértices inciden alternadamente con las líneas l y l' ; a la línea incidente con los puntos L, M y N , la llamaremos la *línea de Pappus*.

Con base en las propiedades enunciadas hasta este momento, abordaremos la parte de este escrito que concierne al plano proyectivo real.

¹⁵Coxeter, Harold. (1987). *Projective Geometry*. p.38.

Capítulo 2

Relación armónica y razón cruzada

*Ama tu ritmo y ritma tus acciones,
bajo su ley, así como tus versos;
eres un universo de universos
y tu alma una fuente de canciones.*

Rubén Darío, Ama tu ritmo.

La *relación armónica* y la *razón cruzada* son nociones que fueron estudiadas por Euclides en sus tres libros de los *Porismas* durante el siglo III A. de C. Pero fue a finales del siglo XVIII que estas nociones, hasta entonces consideradas de índole métrico, comenzaron a adquirir cierta autonomía de las propiedades de magnitud, debido a su relación intrínseca con las propiedades de incidencia. Durante el siglo XIX, el interés por la relación armónica y la razón doble crecía a medida que las propiedades de incidencia eran usadas para convertir problemas del plano euclidiano al plano proyectivo real y, viceversa. Debido a que, muchos de los teoremas del plano proyectivo real eran formulados en términos de relación armónica, ésta se convirtió en una herramienta potente para transitar de un plano a otro.

En el plano euclidiano, la definición de hilera armónica es la siguiente:¹

Definición 2.0.1. Una *hilera armónica* $H(AB, CD)$ son cuatro puntos colineales A , B , C y D tales que los puntos C y D dividen interna y externamente al segmento AB en un par de razones r y $-r$, respectivamente, esto es,

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

¹Con base en la siguiente definición, advertiremos una relación de orden para una hilera armónica de puntos, pues si $H(AB, CD)$, entonces alguno de los puntos C o D está entre A y B y el otro está fuera del segmento AB .

Decimos que C y D *dividen armónicamente* al segmento AB , o bien que C y D son *conjugados armónicos* con respecto a A y B (véase figura 2.1).

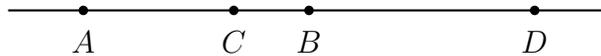


Figura 2.1: $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$

En el plano euclidiano, también tenemos la definición de haz armónico.

Definición 2.0.2. Un *haz armónico* $h(ab, cd)$ son cuatro líneas concurrentes $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ y $d = OD$ tales que

$$\frac{\text{sen}\angle AOC}{\text{sen}\angle COB} = -\frac{\text{sen}\angle AOD}{\text{sen}\angle DOB}.$$

Decimos que las líneas c y d son *conjugadas armónicas* con respecto a las líneas a y b (véase figura 2.2).

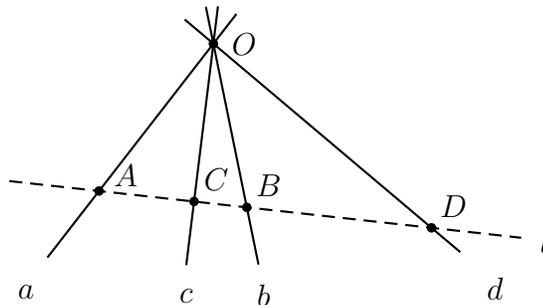


Figura 2.2: $\frac{\text{sen}\angle AOC}{\text{sen}\angle COB} = -\frac{\text{sen}\angle AOD}{\text{sen}\angle DOB}$

Como veremos, el par de definiciones anteriores detona que las relaciones de incidencia entre una hilera armónica y un haz incidente con los puntos de la hilera, preserven la relación armónica entre ambas figuras. De esta manera, la relación armónica es una noción de magnitud que permanece invariante bajo propiedades de incidencia, pues al transformar, vía propiedades de incidencia, una hilera armónica de puntos, se obtiene otra hilera armónica de puntos.

Por otra parte, en el plano proyectivo real, Christian von Staudt en *Geometry Der Lage* (1847), define las nociones de hilera armónica y haz armónico de la siguiente manera:

Definición 2.0.3. Una *hiler armónica* $H(AB, CD)$ son cuatro puntos colineales distintos A, B, C y D tales que A y B coinciden con dos de los puntos diagonales de un cuadrángulo completo $PQRS$ y que los puntos C y D son incidentes con los dos lados restantes del cuadrángulo completo. Decimos que los puntos C y D son conjugados armónicos con respecto a los puntos A y B (véase figura 2.3).

Definición 2.0.4. Un *haz armónico* $h(ab, cd)$ son cuatro líneas concurrentes distintas a, b, c y d tales que a y b coinciden con dos de las líneas diagonales de un cuadrilátero completo $pqrs$ y que las líneas c y d son incidentes con los dos vértices restantes del cuadrilátero completo. Decimos que las líneas c y d son conjugadas armónicas con respecto a las líneas a y b (véase figura 2.3).

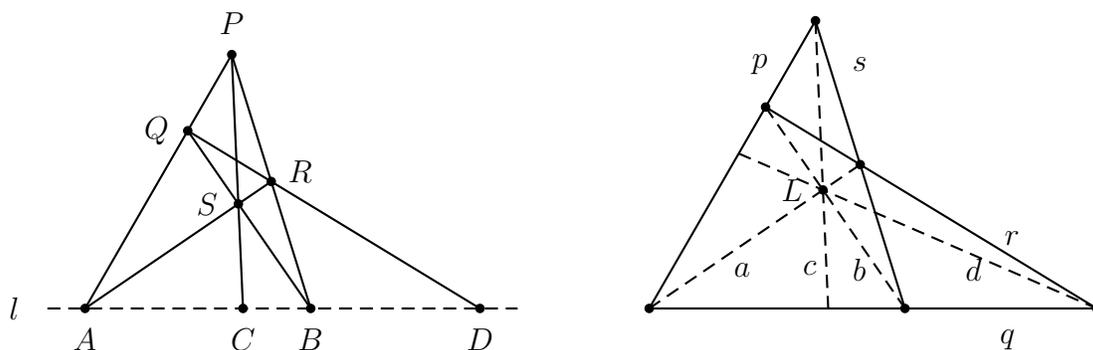


Figura 2.3: $H(AB, CD)$ y $h(ab, cd)$

Probaremos que las definiciones 2.0.1 y 2.0.3 son equivalentes, en el plano euclidiano. De esta manera, la relación armónica será una noción de magnitud susceptible de asociarse a ciertos puntos y líneas de un cuadrángulo completo. En el plano proyectivo real, tales hechos nos permitirán definir la noción de punto medio de un segmento, análoga a la del plano euclidiano, vía propiedades de incidencia.

En el plano euclidiano, también trataremos la generalización de la relación armónica, la razón cruzada, razón doble o razón anarmónica. Dicha noción está definida para una hiler de cuatro puntos.

Definición 2.0.5. Una *razón cruzada* k de cuatro puntos colineales A, B, C y D es la operación que resulta de dividir la razón en que C divide al segmento AB entre la razón en que D divide al segmento AB , esto es,

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = k$$

A la expresión anterior la denotaremos por $\{ABCD\} = k$ (véase figura 2.4).²

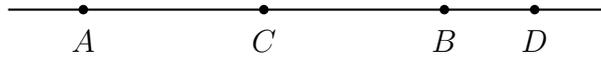


Figura 2.4: $\frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$

En el plano euclidiano, la razón cruzada también está definida para un haz de cuatro líneas.

Definición 2.0.6. Una *razón cruzada* k de cuatro líneas concurrentes $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ y $d = OD$ es la operación

$$\frac{\frac{\text{sen } \angle AOC}{\text{sen } \angle COB}}{\frac{\text{sen } \angle AOD}{\text{sen } \angle DOB}} = k$$

A la expresión anterior la denotaremos por $\{abcd\} = k$, o bien $O\{ABCD\} = k$ (véase figura 2.5).

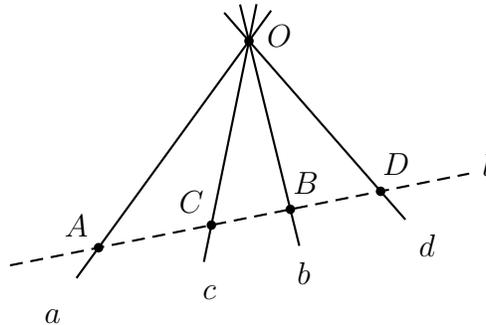


Figura 2.5: Hay seis razones cruzadas para OA, OB, OC y OD concurrentes

Como veremos, la razón cruzada será otra noción de magnitud que también se preserva bajo propiedades de incidencia, pues al considerar la razón cruzada de cuatro puntos colineales A, B, C y D , este valor no se altera si intercambiamos los puntos de dicha cuaterna por cualesquiera otros cuatro puntos A', B', C', D' que resulten de transformar los primeros cuatro mediante una perspectiva con centro O (véase figura 2.6). A

²Con base en la definición precedente, notemos que si $\frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB} > 0$, entonces ambos puntos C y D están entre A y B , o bien ambos puntos C y D están fuera del segmento AB . En contraste, si $\frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB} < 0$, entonces alguno de los puntos C o D está entre A y B y el restante punto está fuera del segmento AB .

pesar de que la razón cruzada está basada en nociones de magnitud, es considerada “el invariante más importante de la geometría proyectiva, que desdeña dicha noción. Se trata de hecho de la única invariante numérica conocida.” (Torres, 2012, p.8). Por lo que, mostraremos que la condición necesaria y suficiente para que una hilera de cuatro puntos pueda ser transformada, vía propiedades de incidencia, en otra hilera de cuatro puntos, es que la razón cruzada de ambas cuaternas sea la misma.

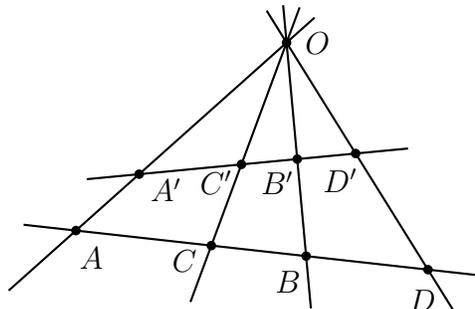


Figura 2.6: La razón cruzada se preserva bajo propiedades de incidencia

Así como relación armónica está asociada a los elementos de un cuadrángulo completo, dilucidaremos cómo la razón cruzada es una noción de magnitud que también guardará cierta correspondencia con la misma configuración. Estos hechos son de nuestro interés pues, tan pronto como avancemos, a partir de ellos podremos aproximarnos del plano euclidiano al plano proyectivo real y, viceversa.

2.1. Hileras y haces armónicos

Una vez presentada la noción de hilera armónica (definición 2.0.1), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano euclidiano. En la siguiente proposición, John Milne (1911) señala la construcción de una hilera armónica a partir tres puntos colineales.³

Proposición 2.1.1. Sean A, B y C tres puntos colineales distintos, existe un único punto D colineal con ellos tal que $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$.

Demostración. Para encontrar al conjugado armónico de C con respecto a A y B , trazamos dos líneas paralelas cualesquiera a y m incidentes con A y B , respectivamente (véase figura 2.7). Luego trazamos una línea que incida con C y que corte a las paralelas en O y P , respectivamente. Encontramos el punto Q incidente con m tal que $QB = BP$

³Milne, John. (1911). *An elementary treatise on cross-ratio geometry*. pp.22,23.

y llamamos D a la intersección de las líneas OQ y AB . De esta manera, D es el punto buscado. Por construcción, obtenemos los siguientes pares de triángulos semejantes:

$$\triangle AOC \sim \triangle BPC, \text{ por lo que } \frac{AC}{CB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BP}},$$

$$\triangle AOD \sim \triangle BQD, \text{ por lo que } \frac{AD}{DB} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{QB}}.$$

$$\text{Así, } \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

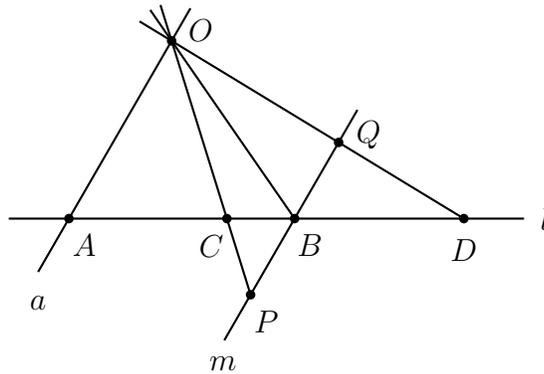


Figura 2.7: $H(AB, CD)$

Por la proposición 1.1.5, concluimos que D es el único punto tal que $H(ABCD)$. \square

Como observación a esta última construcción, tenemos que cuando C es el punto medio del segmento AB , C divide interiormente a AB en la razón $r = 1$, esto es, $\frac{AC}{CB} = 1$. Por consiguiente, los triángulos $\triangle AOC$ y $\triangle BPC$ son congruentes, luego obtenemos la siguiente igualdad de segmentos, $AO = PB = BQ$. Así, las líneas OQ y AB son paralelas y el punto D no está determinado. De ello resulta que, en el plano euclidiano, no esté definido el conjugado armónico del punto medio de cualquier segmento con respecto a los puntos extremos del segmento.

En la siguiente proposición, Levi Shively muestra que los pares de puntos A, B y C, D en una hilera armónica $H(AB, CD)$, son intercambiables.⁴

Proposición 2.1.2. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales, entonces $H(AB, CD)$ si y sólo si $H(CD, AB)$.

Demostración. Tenemos que $H(AB, CD)$ si y sólo si $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ si y sólo si

⁴Shively, Levi. (1984). *Introducción a la Geometría Moderna*. p.41.

$$\frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD} \text{ si y sólo si } H(CD, AB) \quad \square$$

De manera análoga, la relación $H(AB, CD)$ es equivalente a cualquiera de las siguientes relaciones: $H(AB, DC)$, $H(BA, CD)$, $H(BA, DC)$, $H(CD, AB)$, $H(CD, BA)$, $H(DC, AB)$ y $H(DC, BA)$.

Además de la noción de hilera armónica, tenemos la correspondiente definición euclidiana de haz armónico (definición 2.0.2). Recordemos que, debido a la forma en que está estructurada la geometría euclidiana, los ángulos están supeditados a los segmentos. Por consiguiente, la definición euclidiana de haz armónico está subordinada a la definición euclidiana de hilera armónica. Mientras que, para numerosos autores, como Nathan Altshiller (2007) o John Casey (1888), un haz armónico son cuatro líneas concurrentes que son cortadas por una transversal en una hilera armónica,⁵ para otros autores, como Roger Johnson (1960), además de tal definición, también precisan que un haz armónico se puede enunciar a partir ciertas relaciones de proporción de los senos asociados a algunos ángulos que se forman con las líneas del haz (pp.59,60). Es de notarse que en ambos casos, la noción que se establece es la misma, pues en uno y otro se proponen segmentos que están en la misma igualdad de proporción. No obstante, en este escrito nos hemos inclinado por la segunda definición, pues ésta subyace a que la relación armónica se preserve bajo propiedades de incidencia. Como prueba de tal hecho, encontramos la siguiente proposición.⁶

Proposición 2.1.3. Sean a, b, c y d cuatro líneas concurrentes en O y sea l una línea que corta a las líneas a, b, c y d en los puntos A, B, C y D , respectivamente. Entonces $H(AB, CD)$ si y sólo si $h(ab, cd)$ (véase figura 2.8).

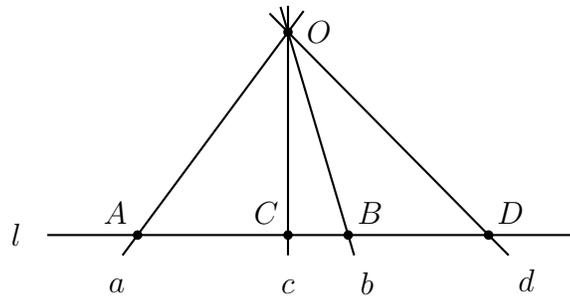


Figura 2.8: $H(AB, CD)$ syss $h(ab, cd)$

⁵Nathan Altshiller menciona “four concurrent lines [...] which are cut by one transversal, and therefore by every transversal, in four harmonic points, are said to form a harmonic pencil” (p.170). En tanto que, John Casey señala “if PQO be a triangle, OA a line through the vertex parallel to the base QP ; then any transversal through B , the middle of PQ , will meet OA in a point, which will be the harmonic conjugate of B , with respect to the points in which it meets the sides of the triangle[...]. If we join the points O, B , the system of four lines OA, OB, OC, OD is called a harmonic pencil” (p.90). Conviene ver la figura 2.9.

⁶Shively, Levi. (1984). *Introducción a la Geometría Moderna*. pp.44,45.

Demostración. Tenemos que $h(ab, cd)$ si y sólo si $\frac{\text{sen } \angle AOC}{\text{sen } \angle COB} = -\frac{\text{sen } \angle AOD}{\text{sen } \angle DOB}$

$$\text{si y sólo si } \frac{OA \text{ sen } \angle AOC}{BO \text{ sen } \angle COB} = -\frac{OA \text{ sen } \angle AOD}{BO \text{ sen } \angle DOB}.$$

Por la proposición 1.1.6, lo anterior ocurre si y sólo si

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \quad \text{si y sólo si } H(AB, CD).$$

□

Asimismo, dadas tres líneas concurrentes, encontraremos una única cuarta línea concurrente con ellas tal que estas cuatro formen un haz armónico. Si a, b y c tres líneas rectas concurrentes en el punto O , para encontrar la conjugada armónica de c con respecto a a y b , trazamos una línea l que corte a las líneas a, b y c en los puntos A, B y C , respectivamente. Con base en la proposición 2.1.1, construimos D un punto en l tal que $H(AB, CD)$ (véase figura 2.2). De esta manera, la línea $d = OD$ es la buscada, pues como el haz de líneas a, b, c, d es cortada por la transversal l en una hilera armónica, se sigue $\frac{\text{sen } \angle AOC}{\text{sen } \angle COB} = -\frac{\text{sen } \angle AOD}{\text{sen } \angle DOB}$. Asimismo, tal como sucedía en la proposición 2.1.2, también se tiene que los pares de líneas a, b y c, d en un haz armónico $h(ab, cd)$, son intercambiables.

En relación con esta última construcción, que a su vez está basada en la construcción de la proposición 2.1.1, Nathan Altshiller (2007) señala que si en un haz armónico un par de líneas conjugadas armónicas son perpendiculares, también son la bisectriz interna y externa del ángulo formado por el otro par.

Proposición 2.1.4. *En un haz armónico de líneas, un par de líneas conjugadas armónicas son perpendiculares si y sólo si bisecan los ángulos formados por las otras dos líneas.*⁷

Demostración. Dado $h(ab, cd)$ un haz armónico y l una línea que corta al haz en los puntos A, B, C y D , respectivamente (véase figura 2.9). Por la proposición 2.1.3 se sigue que $H(AB, CD)$. Denotamos O al vértice del haz, prolongamos la línea DO a un punto Q' y la línea AO a un punto A' .

Supongamos que las líneas conjugadas armónicas OC y OD son perpendiculares. Queremos demostrar que éstas son las bisectrices de los ángulos formados por a y b .

⁷Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. p.170.

Trazamos m , la paralela a la línea a por el punto B y denotamos P y Q a los puntos de intersección de la línea m con las líneas OC y OD , respectivamente. Por construcción, obtenemos los siguientes pares de triángulos semejantes:

$$\triangle AOC \sim \triangle BPC, \text{ por lo que } \frac{AC}{CB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BP}}$$

$$\triangle AOD \sim \triangle BQD, \text{ por lo que } \frac{AD}{BD} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{QB}}.$$

$$\text{Luego, } \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \text{ si y sólo si } \frac{\overline{OA}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{QB}}.$$

Como Q, B y P son colineales, se tiene que $QB = BP$. De manera que, B es el punto medio del segmento QP . Ahora, como las líneas OC y OD son perpendiculares, entonces $\angle POQ = 90^\circ$. Por la proposición 1.1.1, se tiene que O es un punto de la circunferencia de diámetro QP y dado que B es punto medio del segmento QP , se sigue que B es el centro del circuncírculo del triángulo rectángulo $\triangle POQ$. Así pues, B equidista de los vértices del triángulo $\triangle POQ$, esto es, $PB = BQ = BO$. Luego el triángulo $\triangle PBO$ es isósceles, de allí que $\angle BPO = \angle POB$. Además, como a y m son paralelas, entonces $\angle AOP = \angle BPO$. De esta manera, $\angle AOP = \angle BPO = \angle POB$, dicho en otros términos, $\angle AOC = \angle COB$. Por tanto, OC es bisectriz del ángulo $\angle AOB$. Asimismo, como $\angle QOA'$ y $\angle Q'OA$ son ángulos opuestos por el vértice, entonces $\angle QOA' = \angle Q'OA$. Ahora, como $\angle Q'OA = \angle Q'OC - \angle AOC = \angle COQ - \angle COB = \angle BOQ$, se sigue $\angle QOA' = \angle BOQ$. Por lo que, OD es bisectriz del ángulo $\angle BOA'$. Por tanto, OC y OD son las bisectrices de los ángulos formados por a y b .

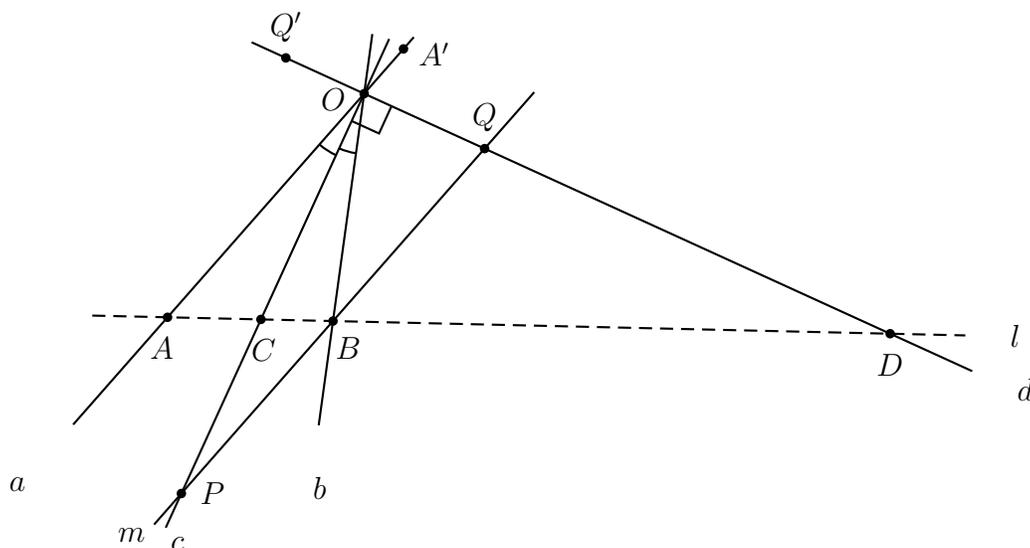


Figura 2.9: OC y OD bisecan al ángulo $\angle AOB$

Recíprocamente, supongamos que la líneas conjugadas armónicas OC y OD son las bisectrices de los ángulos formados por a y b , es decir, $\angle AOP = \angle POB$ y $\angle BOQ = \angle QOA'$. Queremos demostrar que OC y OD son perpendiculares.

Notemos que:

$$\angle AOP + \angle POB + \angle BOQ + \angle QOA' = 180^\circ,$$

$$2\angle POB + 2\angle BOQ = 180^\circ,$$

$$\angle POB + \angle BOQ = 90^\circ,$$

$$\angle POQ = 90^\circ.$$

Por consiguiente, las líneas conjugadas armónicas OC y OD son perpendiculares. \square

Por otra parte, en el plano proyectivo real, donde no existen nociones de magnitud, como el punto medio de un segmento o la bisectriz de un ángulo, la definición de hilera armónica (definición 2.0.3) se basa en ciertas relaciones de incidencia entre los puntos y líneas que son asociados a un cuadrángulo completo y, por el principio de dualidad, la definición de haz armónico (definición 2.0.4) se basa en ciertas relaciones de incidencia entre las líneas y puntos que son asociados a un cuadrilátero completo. A continuación obtendremos algunas de sus propiedades principales.

Dados tres puntos colineales, para Harold Coxeter (1949) el teorema de Desargues (proposición 1.2.1) será el instrumento, *sine qua non*, para probar la unicidad del cuarto punto colineal con ellos tal que los cuatro formen una hilera armónica, o dicho en otros términos, para mostrar que el cuarto punto no depende del cuadrángulo que se considere.

Proposición 2.1.5. Sean A, B y C tres puntos colineales distintos, existe un único punto D colineal con ellos tal que $H(AB, CD)$.⁸

Demostración. Sean A, B y C tres puntos incidentes con una línea l , construimos D tal que $H(AB, CD)$. Ésto lo logramos trazando un $\triangle PQS$ tal que A incida con PQ , B incida con QS , y C incida con PS . Denotamos por R al punto de intersección de las líneas AS y PB ; y por D al punto de intersección de las líneas AB y QR . Así, D es el punto buscado, pues construimos un cuadrángulo completo $PQRS$ que satisface la definición 2.0.3. De manera análoga, construimos D' tal que la hilera armónica $H(AB, CD')$ esté asociada a otro cuadrángulo completo $P'Q'R'S'$. En estas condiciones, D es el punto de intersección de las líneas QR y l , y D' es el punto de intersección de las líneas $Q'R'$ y l (véase figura 2.10). Queremos demostrar que los puntos D y D' coinciden.

⁸Coxeter, Harold. (1949). *The real projective plane*. p.17

Por construcción, los triángulos $\triangle PQS$ y $\triangle P'Q'S'$ están en perspectiva desde l , pues los puntos A, B y C son las intersecciones de sus lados correspondientes, entonces por el teorema de Desargues (proposición 1.2.1), las líneas PP', QQ' y SS' concurren en un punto O . De la misma manera, los triángulos $\triangle PRS$ y $\triangle P'R'S'$ están en perspectiva desde l , pues los puntos A, B y C son las intersecciones de sus lados correspondientes, entonces por el teorema de Desargues, las líneas PP', RR' y SS' concurren en un punto O' . Notemos que, las líneas SS' y PP' concurren en ambos puntos O y O' , por lo que estos puntos coinciden. De esta manera, los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ están en perspectiva desde O . Así, por el teorema de Desargues, el punto de intersección de QR y $Q'R'$ es colineal con A y B , es decir, en dicho punto concurren las líneas $QR, Q'R'$ y l . Por tanto, D coincide con D' .

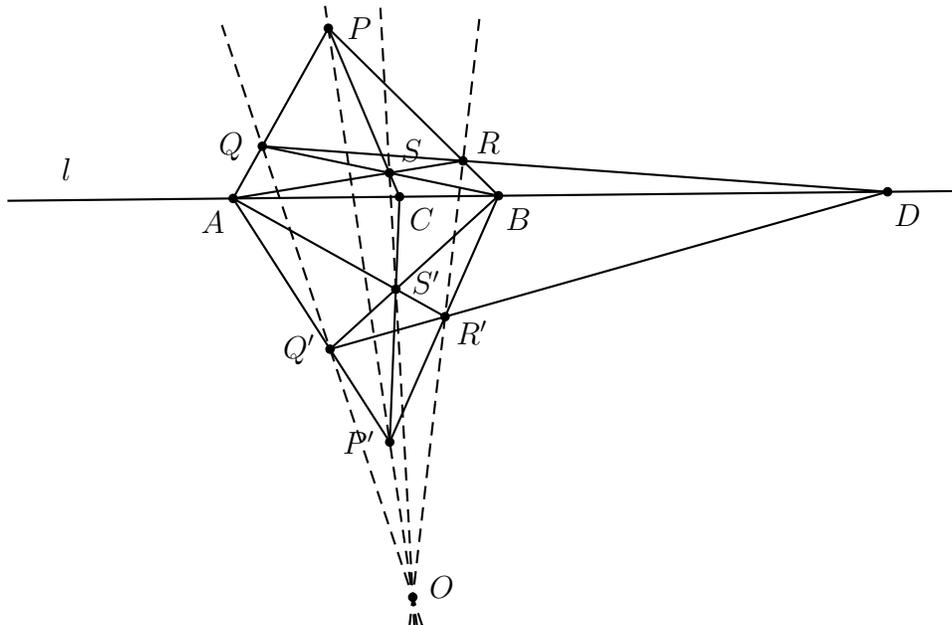


Figura 2.10: El conjugado armónico es único

□

Asimismo, dadas tres líneas concurrentes, para mostrar la unicidad de la cuarta línea concurrente con ellas tal que las cuatro formen un haz armónico, bastará dualizar la proposición anterior.

Proposición 2.1.6. *Sean a, b y c tres líneas concurrentes distintas, existe una única línea d concurrente con ellas tal que $h(ab, cd)$.*

En la siguiente proposición, John Young muestra que los pares de puntos A, B y C, D en una hilera armónica $H(AB, CD)$, son intercambiables (conviene recordar la proposición 2.1.2).

Proposición 2.1.7. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales, entonces $H(AB, CD)$ si y sólo si $H(CD, AB)$.⁹

Demostración. Sean A, B, C y D cuatro puntos que inciden con una línea l . Consideramos $PQRS$ un cuadrángulo completo tal que $H(AB, CD)$ (véase figura 2.11). Queremos demostrar que C y D son puntos diagonales de un cuadrángulo completo cuyos lados restantes inciden con A y B , respectivamente.

Denotamos por S' al punto de intersección de las líneas CR y PD ; y por Q' al punto de intersección de las líneas PS y QR . Veamos que la línea $S'Q'$ incide con A . Los triángulos $\triangle PRA$ y $\triangle DCQ'$ están en perspectiva desde la recta QB , pues los puntos Q, S y B son las intersecciones de sus lados correspondientes. Luego, por el teorema de Desargues (proposición 1.2.1), se sigue que las líneas PD, RC y AQ' concurren en el punto S' . Por consiguiente, el cuadrángulo completo $PS'Q'R$ es tal que C y D coinciden con dos de sus puntos diagonales y que los puntos A y B inciden con los dos lados restantes del cuadrángulo. Por tanto, obtenemos la hilera armónica $H(CD, AB)$. Similarmente, se prueba que si $H(CD, AB)$, entonces $H(AB, CD)$.

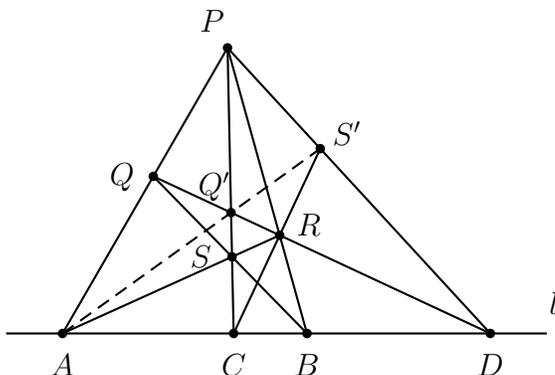


Figura 2.11: $H(AB, CD)$ si y sólo si $H(CD, AB)$

□

De manera análoga, la relación $H(AB, CD)$ es equivalente a cualquiera de las siguientes relaciones: $H(AB, DC)$, $H(BA, CD)$, $H(BA, DC)$, $H(CD, AB)$, $H(CD, BA)$, $H(DC, AB)$ y $H(DC, BA)$.

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.8. Sean a, b, c y d cuatro líneas concurrentes, entonces $h(ab, cd)$ si y sólo si $h(cd, ab)$.

⁹Young, John. (1982). *Projective Geometry*. pp.37,38.

2.2. Relación armónica y propiedades de incidencia

Recordemos que, en el plano euclidiano, la relación armónica se preserva al obtener una hilera a partir de un haz y, viceversa. De acuerdo con la proposición 2.1.3, el hecho de que los haces armónicos estén subordinados a las hileras armónicas, detona que las relaciones de incidencia que satisfacen las cuaternas armónicas sean fundamentales para argüir la consecución de otra cuaterna armónica. Más aún, notemos que un haz armónico no dependerá de la transversal que lo corte, pues si una transversal corta a un haz en una hilera armónica, entonces toda transversal lo cortará en una hilera armónica. Desde este punto de vista distinguimos que, aun cuando las relaciones de incidencia entre hileras y haces son clave para preservar la relación armónica, prescindiremos de la noción de haz armónico, dada en términos de magnitud. En la siguiente proposición, Nathan Altshiller (2007) muestra la invarianza de la relación armónica, sin recurrir a la noción de haz armónico.

Proposición 2.2.1. *Si una transversal corta a un haz en una hilera armónica, entonces cualquier otra transversal corta al mismo haz en una hilera armónica.*¹⁰

Demostración. Sean a, b, c y d cuatro líneas concurrentes en O . Consideramos l y l' dos transversales que cortan a las líneas del haz en los puntos A, B, C, D y A', B', C', D' , respectivamente (véase figura 2.12). Supongamos que $H(AB, CD)$, queremos demostrar que $H(A'B', C'D')$.

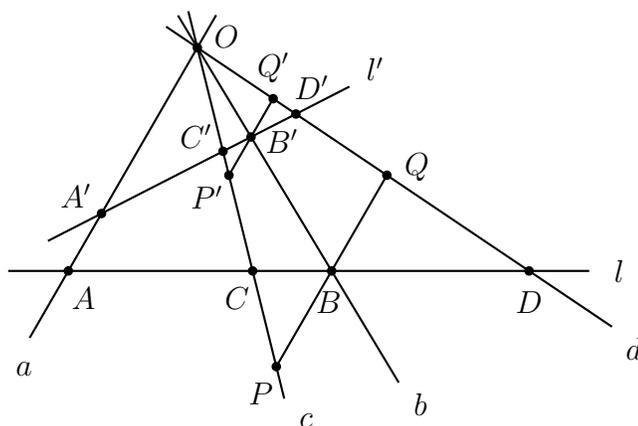


Figura 2.12: $H(AB, CD)$ sys $H(A'B', C'D')$

Trazamos m y m' líneas paralelas a a por los puntos B y B' , respectivamente. Denotamos por P y Q a los puntos de intersección de m con las líneas OC y OD , respectivamente; y por P' y Q' a los puntos de intersección de m' con las líneas OC y OD , respectivamente. Por construcción, obtenemos los siguientes pares de triángulos semejantes:

¹⁰Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. p.169.

$$\triangle AOC \sim \triangle BPC, \text{ por lo que } \frac{AC}{CB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BP}},$$

$$\triangle AOD \sim \triangle BQD, \text{ por lo que } \frac{AD}{DB} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{QB}}.$$

$$\text{Como } \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}, \text{ entonces } \overline{QB} = \overline{BP}.$$

Además, m y m' son líneas paralelas, por lo que $\overline{Q'B'} = \overline{B'P'}$. Observemos que:

$$\triangle A'OC' \sim \triangle B'P'C', \text{ por lo que } \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{B'P'}},$$

$$\triangle A'OD' \sim \triangle B'Q'D', \text{ por lo que } \frac{A'D'}{D'B'} = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{Q'B'}}.$$

$$\text{Como } \overline{Q'B'} = \overline{B'P'}, \text{ entonces } \frac{A'C'}{C'B'} = -\frac{A'D'}{D'B'}.$$

□

La proposición anterior, muestra que si bien podemos prescindir de la noción de magnitud de haz armónico, ésta sigue dependiendo de la noción de magnitud de hilera armónica y de las relaciones de incidencia que satisfacen las hileras armónicas que son formadas por transversales que cortan al haz.

A diferencia de las proposiciones 2.1.3 y 2.2.1, en el plano proyectivo real, John Young (1982) muestra que la relación entre una hilera armónica y un haz tal que la hilera se forma por las intersecciones de una trasversal al haz, se dará a través del principio de dualidad en cuadrángulos y cuadriláteros completos (conviene recordar la proposición 2.1.3).

Proposición 2.2.2. *Si una hilera armónica es proyectada desde un punto que no incide con la línea de la hilera, se obtiene un haz armónico. Recíprocamente, si un haz armónico es seccionado por una línea que no incide con el vértice del haz, se obtiene una hilera armónica.*¹¹

Demostración. Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales tales que $H(AB, CD)$ y sea P un punto que no incide con la línea AD (véase figura 2.13). Queremos demostrar que las líneas PA, PB, PC y PD forman un haz armónico.

Consideramos un triángulo $\triangle PQS$ tal que A incida con PQ , B incida con QS , y C incida con PS . Denotamos por R a la intersección de las líneas AS y PB (véase

¹¹Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.39.

figura 2.13). Veamos que los puntos Q, R y D son colineales. En estas condiciones, el cuadrángulo $PQRS$ tiene puntos diagonales A y B , y uno de sus lados incide con C . Como $H(AB, CD)$, por la proposición 2.1.5, tenemos que la línea QR incide en D . Por otra parte, las líneas $AD = p, AR = q, QD = s$ y $QB = r$ forman un cuadrilátero completo $pqrs$, donde $PA = a$ y $PB = b$ son líneas diagonales, y $PC = c$ y $PD = d$ son líneas que inciden con los vértices restantes, esto es, $h(ab, cd)$. Para mostrar el recíproco, basta dualizar esta última prueba.

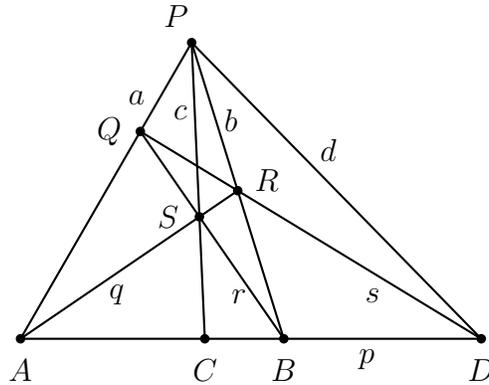


Figura 2.13: $H(AB, CD)$ syss $h(ab, cd)$

□

Como punto culminante, mostraremos que las definiciones 2.0.1 y 2.0.3 son equivalentes.

2.3. Cuadrángulo completo y relación armónica

Dada la pureza del método proyectivo, durante el siglo XIX mucho se discutió acerca del origen métrico de la relación armónica. Para cerrar dicha cuestión, Christian Von Staudt (1847) fue el primero en mostrar que, la relación armónica es susceptible de enunciarse en función de un elemento proyectivo específico, el cuadrángulo completo. Si bien es cierto que, la relación armónica es definida en términos de magnitud, no es menos cierto que la relación armónica también es definida en términos de incidencias. Así pues, relacionaremos, de manera equivalente, las cuaternas armónicas en el plano euclidiano con las cuaternas armónicas en el plano proyectivo real. A partir de los teoremas de Ceva y Menelao, veremos que la definición 2.0.1 es condición necesaria y suficiente para la definición 2.0.3, en el plano euclidiano.

Proposición 2.3.1. Sean A, B, C y D cuatro puntos incidentes con una línea l . Existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que A y B coinciden con dos de sus puntos dia-

gonales y que los puntos C y D inciden con los dos lados restantes del cuadrángulo completo si y sólo si $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$.

Demostración. Supongamos que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que A y B coinciden con dos de sus puntos diagonales y que los puntos C y D inciden con los dos lados restantes del cuadrángulo completo (véase figura 2.14). Queremos demostrar que $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$.

Como las líneas AR , BQ y PC concurren en el punto S y cortan a los lados BP , PA y AB del $\triangle PAB$ en los puntos R , Q y C , respectivamente, por el teorema de Ceva (proposición 1.1.7) se sigue que

$$\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1.$$

Luego, como la transversal QD corta a los lados PA , AB y BP del $\triangle PAB$ en los puntos Q , D y R respectivamente, entonces por el teorema de Menelao (proposición 1.1.8) se tiene que

$$\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BR}{RP} = -1.$$

Al dividir la primera ecuación entre la segunda, obtenemos $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$.

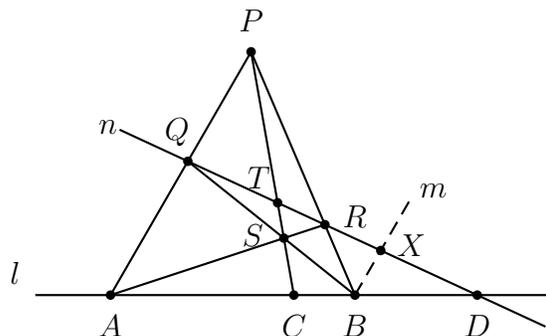


Figura 2.14: $H(AB, CD)$

Recíprocamente, supongamos que $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ (véase figura 2.14). Queremos demostrar que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que A y B coinciden con dos de sus puntos diagonales y que los puntos C y D inciden con los dos lados restantes del cuadrángulo completo.

Consideramos una línea n , distinta de l , incidente con D y sea Q un punto que incide con la línea n . Trazamos m , la paralela a AQ por el punto B , y denotamos por X al

punto de intersección de las líneas m y n . Elegimos R un punto incidente con n , tal que R es distinto de los puntos Q, X y D . Denotamos por S a la intersección de las líneas BQ y AR ; y por P a la intersección de las líneas AQ y BR . De esta manera, el cuadrángulo completo $PQRS$ es el buscado.

Veamos que los puntos P, S y C son colineales. Por construcción, la transversal QD corta a los lados PA, AB y BP del $\triangle PAB$ en los puntos Q, D y R , respectivamente, por el teorema de Menelao se sigue que

$$\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BR}{RP} = -1.$$

$$\text{Como } \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}, \text{ entonces } \frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1$$

Así pues, por el teorema de Ceva, las líneas AR, BQ y CP concurren en el punto S . Por tanto, mostramos que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que estos cuatro puntos forman una hilera armónica. \square

En caso de que A, B y C sean tres puntos incidentes con una línea l tales que C es punto medio de AB , vimos que D el conjugado armónico de C con respecto a AB no está definido en el plano euclidiano. No obstante, en relación con la proposición 2.3.1, probaremos que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que A y B coinciden con dos de sus puntos diagonales; C es la intersección de las líneas PS y l ; y las líneas QR y l son paralelas (véase figura 2.15).

Proposición 2.3.2. *Sean A, B y C tres puntos incidentes con una línea l . Existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que A y B coinciden con dos de sus puntos diagonales, C incide con PS , y las líneas QR y l son paralelas si y sólo si C es el punto medio del segmento AB .*

Demostración. Supongamos que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que A y B coinciden con dos de sus puntos diagonales, C incide con PS , y las líneas QR y l son paralelas (véase figura 2.15). Queremos demostrar que C es punto medio del segmento AB .

Como las líneas QR y l son paralelas, obtenemos los siguientes pares de triángulos semejantes:

$$\triangle PCB \sim \triangle PTR, \text{ por lo que } \frac{\overline{CB}}{\overline{TR}} = \frac{PC}{PT},$$

$$\triangle PCA \sim \triangle PTQ, \text{ por lo que } \frac{\overline{AC}}{\overline{QT}} = \frac{PC}{PT}.$$

Por tanto, $\frac{\overline{CB}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{QT}}$ si y sólo si $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{TR}}$.

$\triangle SCB \sim \triangle STQ$, por lo que $\frac{\overline{CB}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{TS}}$,

$\triangle SCA \sim \triangle STR$, por lo que $\frac{\overline{AC}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{TS}}$.

Por tanto, $\frac{\overline{CB}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{TR}}$ si y sólo si $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{TR}}{\overline{QT}}$.

De esta manera, $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ si y sólo si $\overline{AC} = \overline{CB}$

De esta última igualdad, concluimos que C es el punto medio del segmento AB .

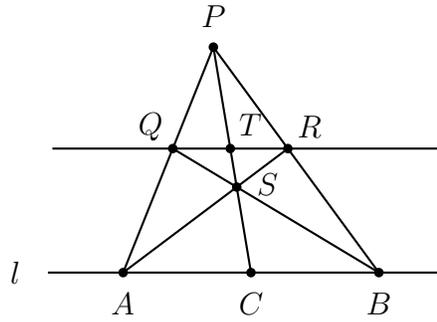


Figura 2.15: C es punto medio del segmento AB

Recíprocamente, si C es punto medio de AB . Consideramos un punto P no incidente con l . Trazamos las líneas PA, PB y PC . Elegimos un punto S incidente con PC , distinto de los puntos P y C . Denotamos por R a la intersección de las líneas AS y PB ; y por Q a la intersección de las líneas BS y PA (véase figura 2.15). Queremos demostrar que las líneas QR y l son paralelas.

Como las líneas AR, BQ y PC concurren en el punto S y cortan a los lados BP, PA y AB del $\triangle PAB$ en los puntos R, Q y C , respectivamente, por el teorema de Ceva se sigue que

$$\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BR}{RP} = 1.$$

Dado que $\frac{AC}{CB} = 1$, entonces $\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{BR}{RP} = 1$.

$$\text{Así, } \frac{PQ}{QA} = \frac{PR}{RB}.$$

Por el recíproco del teorema de Tales, concluimos que las líneas QR y l son paralelas. \square

En relación con la proposición anterior, en el plano proyectivo real, las rectas QR y l son incidentes en un punto al infinito, por lo que el conjugado armónico de C con respecto a A y B es dicho punto al infinito. De ello resulta que, en el plano proyectivo real, John Young (1982) defina al punto medio de un segmento de la siguiente manera:

Definición 2.3.1. El *punto medio de un segmento AB* es el conjugado armónico del punto al infinito que incide con la línea AB , con respecto a los puntos A y B .¹²

Cabe resaltar que, las definiciones de hilera armónica y de punto medio de un segmento en el plano proyectivo real, ya no dependen de nociones de magnitud.

De manera análoga a lo que hemos hecho para hileras armónicas en el plano euclidiano, probaremos que las definiciones 2.0.2 y 2.0.4 son equivalentes.

Proposición 2.3.3. Sean $PA = a, PB = b, PC = c, PD = d$ cuatro líneas incidentes con un punto P . Existe un cuadrilátero completo $pqrs$ tal que a y b coinciden con dos de sus líneas diagonales y que las líneas c y d son incidentes con los dos vértices restantes del cuadrilátero completo si y sólo si $\frac{\text{sen}\angle APC}{\text{sen}\angle CPB} = -\frac{\text{sen}\angle APD}{\text{sen}\angle DPB}$.

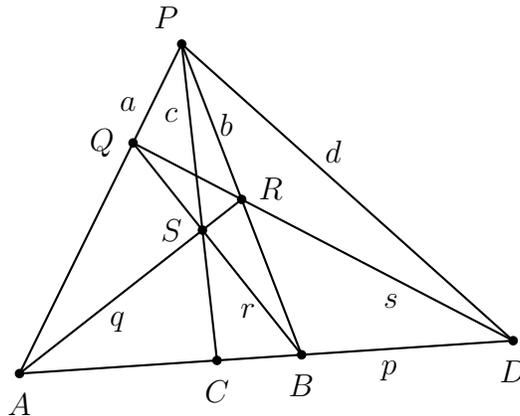


Figura 2.16: $h(ab, cd)$

Demostración. Sean a, b, c, d un haz con vértice P y consideramos p una transversal que interseca al haz en los puntos A, B, C, D , respectivamente (véase figura 2.16). Supongamos que

¹²Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.84.

$$\frac{\text{sen } \angle APC}{\text{sen } \angle CPB} = -\frac{\text{sen } \angle APD}{\text{sen } \angle DPB}.$$

Por la proposición 2.1.3, lo anterior sucede si y sólo si $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$

Luego, por la proposición 2.3.1 existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que A y B coinciden con dos de sus puntos diagonales y que los puntos C y D inciden con los dos lados restantes del cuadrángulo completo. Ésto ocurre si y sólo si las líneas $AD = p$, $AR = q$, $QD = s$ y $QB = r$ forman un cuadrilátero completo $pqrs$ donde $PA = a$ y $PB = b$ son líneas diagonales, y $PC = c$ y $PD = d$ son líneas que inciden con los vértices restantes. \square

La relación armónica será la propiedad que, concretamente, nos permitirá pasar del plano euclidiano al plano proyectivo real. Conforme avancemos en este escrito, veremos que muchos teoremas del plano proyectivo real estarán enunciados en términos de cuaternas armónicas y que, a partir de ellos, relacionaremos propiedades de magnitud del plano euclidiano con propiedades de incidencia del plano proyectivo real. Pero, antes de tal propósito, nos convendrá estudiar la generalización de la relación armónica, la *razón cruzada*.

2.4. Razón cruzada

Una vez presentada la noción de razón cruzada (definición 2.0.5), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano euclidiano. Al variar el orden en que consideramos la posición de cuatro puntos colineales, hay $4! = 24$ posibles valores de razones cruzadas asociadas a estos puntos, pero de éstas no todas son distintas. Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \{ABCD\} &= \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = k, \\ \{BADC\} &= \frac{\frac{BD}{DA}}{\frac{BC}{CA}} = \frac{BD \cdot CA}{BC \cdot DA} = \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \{ABCD\}, \\ \{CDAB\} &= \frac{\frac{CA}{AD}}{\frac{CB}{BD}} = \frac{CA \cdot BD}{CB \cdot AD} = \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \{ABCD\}, \\ \{DCBA\} &= \frac{\frac{DB}{BC}}{\frac{DA}{AC}} = \frac{DB \cdot AC}{DA \cdot BC} = \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \{ABCD\}. \end{aligned}$$

Así pues, el valor de la razón cruzada de una hilera de cuatro puntos no se modifica, si intercambiamos las posiciones de cualquier par de puntos en ella, al mismo tiempo que también intercambiamos las posiciones del otro par. Observemos que en las razones cruzadas de las igualdades anteriores, el par de puntos A y B son asociados siempre, así como el par de puntos C y D . Además, si sólo intercambiamos el orden de un par, el valor de la razón cruzada se invierte, esto es,

$$\{ABDC\} = \frac{\frac{AD}{DB}}{\frac{AC}{CB}} = \frac{AD \cdot CB}{AC \cdot DB} = \frac{1}{\frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB}} = \frac{1}{\{ABCD\}} = \frac{1}{k}.$$

Si consideramos otros pares formados por estos puntos, obtenemos distintas razones cruzadas. Por la identidad de Euler, tenemos que

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0,$$

$$AD \cdot BC + AC \cdot DB = AB \cdot DC,$$

$$\frac{AD \cdot BC}{AD \cdot BC} + \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot BC} = \frac{AB \cdot DC}{AD \cdot BC},$$

$$1 - \{ABCD\} = \frac{AB \cdot DC}{AD \cdot BC},$$

$$1 - k = \frac{AB \cdot DC}{AD \cdot BC} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AD}{DC}} = \{ACBD\}.$$

Asimismo, por la identidad de Euler, tenemos que

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0,$$

$$AC \cdot DB - AD \cdot CB = AB \cdot DC,$$

$$\frac{AC \cdot DB}{AC \cdot DB} - \frac{AD \cdot CB}{AC \cdot DB} = \frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB},$$

$$1 - \frac{1}{\{ABCD\}} = \frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB},$$

$$\frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{AB \cdot DC}{AC \cdot DB} = \frac{\frac{AB}{BD}}{\frac{AC}{CD}} = \{ADBC\}.$$

Los valores de las seis razones cruzadas asociadas a cuatro puntos colineales son k , $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$ y sus recíprocos $\frac{1}{k}$, $1-k$, $\frac{k}{k-1}$. De esta manera, las 24 permutaciones para los puntos

A, B, C y D son agrupadas en seis grupos con la misma razón doble.¹³

$$\begin{aligned}
k &= \{ABCD\} = \{BADC\} = \{DCBA\} = \{CDAB\}, \\
\frac{1}{1-k} &= \{ACDB\} = \{CABD\} = \{BDC A\} = \{DBAC\}, \\
\frac{k-1}{k} &= \{ADBC\} = \{DACB\} = \{CBDA\} = \{BCAD\}, \\
\frac{1}{k} &= \{ABDC\} = \{BACD\} = \{CDBA\} = \{DCAB\}, \\
1-k &= \{ACBD\} = \{CADB\} = \{DBC A\} = \{BDAC\}, \\
\frac{k}{k-1} &= \{ADCB\} = \{DABC\} = \{BCDA\} = \{CBAD\}.
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que, cuatro puntos colineales forman una hilera armónica si y sólo si su razón anarmónica es -1, esto es,¹⁴

$$\begin{aligned}
H(AB, CD) \text{ si y sólo si } \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \text{ si y sólo si } \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = -1 \text{ si y sólo si} \\
\{ABCD\} = -1.
\end{aligned}$$

Dados tres puntos colineales y una razón $k \neq 1$, John Milne (1911) muestra que existe un único punto colineal con ellos tal que los cuatro puntos tienen razón cruzada k (conviene recordar la proposición 2.1.1).¹⁵

Proposición 2.4.1. Sean A, B, C tres puntos colineales distintos y una razón $k \neq 1$, existe un único punto D colineal con ellos tal que $\{ABCD\} = k$.

Demostración. Para encontrar un cuarto punto colineal con ellos tal que $\{ABCD\} = k$, trazamos dos líneas paralelas cualesquiera a y m , distintas de l , incidentes con A y B , respectivamente. Luego trazamos una línea que incida con C y que corte a las paralelas en O y P , respectivamente. Encontramos el punto Q incidente con m tal que $\frac{BQ}{BP} = k$ y llamamos D a la intersección de las líneas OQ y AB (véase figura 2.17). De esta manera, D es el punto buscado. Por construcción, obtenemos los siguientes pares de triángulos semejantes:

¹³Para un análisis detallado de las permutaciones de elementos en una razón cruzada, los textos de: Nikolai Beskin (*Dividing a segment in a given ratio*, Moscú, 1975) y John Milne (*An elementary treatise on cross-ratio geometry*, Londres, 1911), pueden servir de consulta.

¹⁴Si $H(AB, CD)$, sus razones cruzadas se reducen a: $-1, \frac{1}{2}$ y 2 .

¹⁵Milne, John. (1911). *An elementary treatise on cross-ratio geometry*. pp.7,8.

$$\triangle AOC \sim \triangle BPC, \text{ por lo que } \frac{AC}{CB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BP}},$$

$$\triangle AOD \sim \triangle BQD, \text{ por lo que } \frac{DB}{AD} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OA}}.$$

$$\text{Así, } \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{OA}}.$$

Como B, P y Q son colineales, se sigue que $\frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \frac{BQ}{BP} = k$.

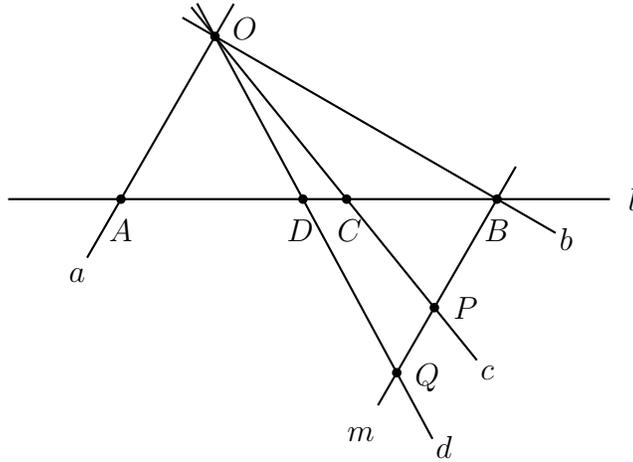


Figura 2.17: $\frac{AC \times DB}{AD \times CB} = k$

Por la proposición 1.1.5, concluimos que D es el único punto tal que $\{ABCD\} = k$. \square

Más aún, en relación con esta última construcción, en la siguiente proposición, John Casey (1888) señala una manera para encontrar las otras cinco razones cruzadas de los puntos A, B, C y D . Ésto en función de tres segmentos específicos asociados a dicha construcción.

Proposición 2.4.2. Sean A, B, C y D los puntos en que una transversal corta a un haz de cuatro líneas con vértice O . Si a través de uno de los cuatro puntos trazamos una paralela a una de las líneas del haz que incide con uno de los puntos restantes y corta a las líneas restantes del haz en los puntos P y Q , entonces las seis razones cruzadas de los puntos A, B, C y D pueden ser expresadas en términos de los cocientes de los segmentos BQ, BP y PQ .¹⁶

Demostración. Sean A, B, C y D los puntos en que una transversal corta a un haz de cuatro líneas a, b, c y d con vértice O . Trazamos m la paralela a a por B y denotamos

¹⁶Casey, John. (1888). *A sequel to the first books of the Elements of Euclid*. pp.127,128.

por P y Q a las intersecciones de la línea m con las líneas c y d , respectivamente (véase figura 2.17). Bajo esta construcción, por la proposición 2.4.1, tenemos que

$$\frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \frac{BQ}{BP},$$

$$\text{pero } \frac{BQ}{BP} = \frac{BP + PQ}{BP} = 1 + \frac{PQ}{BP}.$$

$$\text{Luego, } \frac{PQ}{BP} = \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} - 1 = \frac{AC \cdot DB + AD \cdot BC}{AD \cdot CB}.$$

Como $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$ (Identidad de Euler), entonces:

$$\frac{PQ}{BP} = \frac{AB \cdot DC}{AD \cdot CB}.$$

$$\text{Además, } \frac{BQ}{PQ} = \frac{BQ}{BP} \cdot \frac{BP}{PQ} = \frac{AC \cdot DB}{AB \cdot DC}.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \frac{BQ}{BP}; \quad \frac{AB \cdot DC}{AD \cdot CB} = \frac{PQ}{BP} \quad \text{y} \quad \frac{AC \cdot DB}{AB \cdot DC} = \frac{BQ}{PQ}.$$

De manera análoga, obtenemos las razones cruzadas recíprocas. Así pues, podemos obtener las seis razones cruzadas en términos de los segmentos BQ , BP y PQ . \square

En vista de la definición de razón cruzada de cuatro puntos colineales, se tiene la correspondiente definición de razón cruzada de cuatro líneas concurrentes (definición 2.0.5). Dado que podemos considerar los ángulos asociados a las líneas de haz y debido a que cada ángulo se corresponde con un único segmento, la noción de razón cruzada de una hilera de cuatro puntos detonará la noción de razón cruzada de un haz de cuatro líneas. Para numerosos autores, como John Casey (1888), la razón anarmónica de cuatro líneas concurrentes será la razón anarmónica de cuatro puntos en los que una transversal corta al haz (p.128). En tanto que, para otros autores, como John Milne (1911) o Nikolai Beskin (1975), además de tal definición, también refieren que la razón cruzada de cuatro líneas concurrentes puede ser expresada en términos de ciertas relaciones de proporción de los senos asociados a algunos ángulos que se forman con las líneas del haz.¹⁷ Ambas definiciones son similares, pues en una y otra se proponen segmentos que están en la misma igualdad de proporción. Sin embargo, nosotros nos

¹⁷John Milne (1911) menciona “If we consider the four concurrent straight lines OA, OB, OC, OD , we define the compound ratio $\frac{\text{sen}(A,C)}{\text{sen}(A,D)} : \frac{\text{sen}(B,C)}{\text{sen}(B,D)}$ formed by taking the sines of four of six angles which these lines make with one another as the cross ratio of the pencil $O(ABCD)$ ” (p.10). En tanto que, Nikolai Beskin (1975) señala “The cross ratio of four straight lines can be expressed in terms of the angles formed by these lines, i.e. without recourse to a cutting line. It is left to the reader to prove the following formula: $(abcd) = \frac{\text{sen}(a,c)}{\text{sen}(c,b)} : \frac{\text{sen}(a,d)}{\text{sen}(d,b)}$ ” (p.52).

inclinaremos por la segunda definición, pues ésta subyace a que la razón cruzada se preserve bajo propiedades de incidencia. Como prueba de este hecho, encontramos la siguiente proposición (conviene recordar la proposición 2.1.3).

Proposición 2.4.3. Sean a, b, c y d cuatro líneas concurrentes en O y sea l una línea que corta a las líneas a, b, c y d en los puntos A, B, C y D , respectivamente. Entonces $\{ABCD\} = k$ si y sólo si $\{abcd\} = k$ (véase figura 2.18).

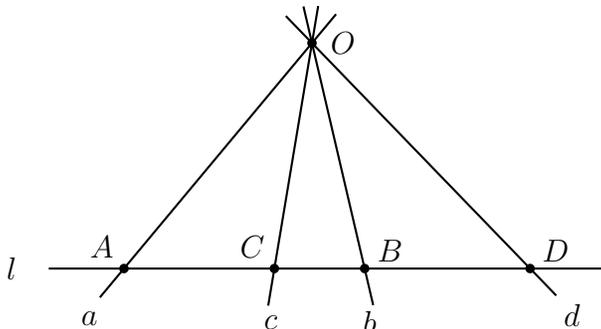


Figura 2.18: $\{ABCD\} = \{abcd\}$

Demostración. Tenemos que $\{abcd\} = k$ si y sólo si $\frac{\text{sen } \angle AOC}{\text{sen } \angle COB} = k \cdot \frac{\text{sen } \angle AOD}{\text{sen } \angle DOB}$

$$\text{si y sólo si } \frac{OA \text{ sen } \angle AOC}{BO \text{ sen } \angle COB} = k \cdot \frac{OA \text{ sen } \angle AOD}{BO \text{ sen } \angle DOB}.$$

Por la proposición 1.1.6, lo anterior ocurre si y sólo si

$$\frac{AC}{CB} = k \cdot \frac{AD}{DB} \quad \text{si y sólo si } \{ABCD\} = k.$$

□

En relación con la proposición anterior, observemos que el estudio de la razón cruzada de haces podrá ser viable a través de las propiedades de razón cruzada de hileras. Por ejemplo, dadas tres rectas concurrentes OA, OB, OC y una razón positiva k , al seguir la construcción de la proposición 2.4.1, encontraremos una única línea recta OD concurrente con ellas tal que $O\{ABCD\} = k$. Además, por la proposición 2.4.2, en dicha construcción podremos expresar las seis razones cruzadas de estas líneas rectas en términos de los cocientes de tres segmentos asociados a aquella.

Tal como sucedía con la relación armónica, la manera en que la razón cruzada de un haz está definida, apuntará en dirección a las propiedades de incidencia.

2.5. Razón cruzada y propiedades de incidencia

Recordemos que, en el plano euclidiano, la razón cruzada se preserva al obtener una hilera a partir de un haz y, viceversa. En vista de la proposición 2.4.3, las relaciones de incidencia que satisface una cuaterna, son fundamentales para obtener otra cuaterna con la misma razón doble. Más aún, notemos que la razón cruzada de un haz no dependerá de la transversal que lo corte, ya que cualquier par de transversales cortan a las líneas del haz en hileras de puntos con la misma razón cruzada. Por lo que, si bien es cierto que las relaciones de incidencia entre haces e hileras son centrales para la razón doble, no es menos cierto que es prescindible la noción de razón cruzada de un haz, dada en términos de magnitud. Como prueba de este hecho, en la siguiente proposición, Nikolai Beskin (1975) muestra que dos transversales cortan a un haz en dos hileras con la misma razón doble, sin necesidad de recurrir a la noción de razón doble de un haz (conviene recordar la proposición 2.2.1).

Proposición 2.5.1. *Cualesquiera dos transversales cortan a un haz de cuatro líneas en hileras de cuatro puntos con la misma razón cruzada.*¹⁸

Demostración. Sean a, b, c y d cuatro líneas de un haz con vértice O . Consideramos l y l' dos transversales que cortan a las líneas del haz en los puntos A, B, C, D y A', B', C', D' , respectivamente (véase figura 2.19). Queremos demostrar que $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$.

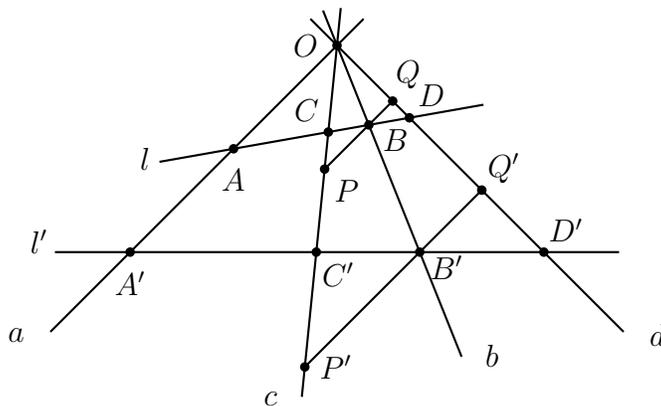


Figura 2.19: $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$

Trazamos m y m' líneas paralelas a a por los puntos B y B' , respectivamente. Denotamos por P y Q a los puntos de intersección de m con las líneas OC y OD , respectivamente; y por P' y Q' a los puntos de intersección de m' con las líneas OC y OD , respectivamente. Por construcción, obtenemos los siguientes pares de triángulos semejantes:

¹⁸Beskin, Nikolai. (1975). *Dividing a segment in a given ratio*. p.51.

$$\triangle AOC \sim \triangle BPC, \text{ por lo que } \frac{AC}{CB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BP}},$$

$$\triangle AOD \sim \triangle BQD, \text{ por lo que } \frac{AD}{DB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{QB}}.$$

$$\text{Así, } \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = -\frac{\overline{QB}}{\overline{BP}}.$$

$$\triangle A'OC' \sim \triangle B'P'C', \text{ por lo que } \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{B'P'}},$$

$$\triangle A'OD' \sim \triangle B'Q'D', \text{ por lo que } \frac{A'D'}{D'B'} = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{Q'B'}}.$$

$$\text{Así, } \frac{A'C' \cdot D'B'}{C'B' \cdot A'D'} = -\frac{\overline{Q'B'}}{\overline{B'P'}}.$$

Además, m y m' son líneas paralelas, por lo que $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{B'P'}}$. Por tanto,

$$\frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \frac{A'C' \cdot D'B'}{A'D' \cdot C'B'}.$$

□

En el plano euclidiano, la concurrencia de líneas y la colinealidad de puntos, pueden ser precisadas a partir de propiedades de la razón anarmónica. Así pues, con base en el teorema de Pappus, veremos que una hilera de cuatro puntos podrá ser transformada, vía propiedades de incidencia, en otra hilera de cuatro puntos si y sólo si la razón cruzada de ambas cuaternas es la misma.

Proposición 2.5.2. *Sean A, B, C tres puntos incidentes con una línea l y A', B', C' tres puntos incidentes con otra línea l' . Si D y D' son un par de puntos que inciden con las líneas l y l' , respectivamente, y si D'' es el punto de intersección de las líneas CD' y $C'D$, entonces $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$ si y sólo si D'' incide con la línea de Pappus del hexágono simple $AB'CA'BC'$.¹⁹*

Demostración. Denotamos por A'' al punto de intersección de las líneas AC' y $A'C$; por B'' al punto de intersección de las líneas BC' y $B'C$; y por C'' al punto de intersección de las líneas CC' y $A''B''$ (véase figura 2.20). Al considerar el hexágono $AB'CA'BC'$, por el teorema de Pappus, tenemos que la línea $A''B''$ es la línea de Pappus del hexágono simple $AB'CA'BC'$. Denotamos por l'' a la línea $A''B''$.

¹⁹Milne, John. (1911). *An elementary treatise on cross-ratio geometry*. pp.40,41.

Supongamos que $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$. Queremos demostrar que D'' incide con l'' .

Denotamos por D_1 al punto de intersección de las líneas DC' y l'' ; y por D_2 al punto de intersección de las líneas CD' y l'' . Como los puntos A, B, C, D y los puntos A'', B'', C'', D_1 son las secciones al haz con centro C' por las líneas l y l'' , respectivamente, por la proposición 2.5.1 se sigue $\{ABCD\} = \{A''B''C''D_1\}$. Además, como los puntos A', B', C', D' y los puntos A'', B'', C'', D_2 son las secciones al haz con centro C por las líneas l' y l'' , respectivamente, por la proposición 2.5.1 se sigue que $\{A'B'C'D'\} = \{A''B''C''D_2\}$. Luego

$$\{A''B''C''D_1\} = \{ABCD\} = \{A'B'C'D'\} = \{A''B''C''D_2\}$$

Por la proposición 2.4.1, concluimos que los puntos D_1 y D_2 coinciden. Pero, D'' es el punto de intersección de las líneas CD' y $C'D$, esto es, D'' también coincide con D_1 y D_2 . Por tanto, D'' incide con la línea l'' .

Recíprocamente, supongamos que D'' es un punto que incide con la línea l'' . Queremos demostrar que $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$.

Notemos que, que los puntos A, B, C, D y los puntos A'', B'', C'', D'' son las secciones al haz con centro en C' por las líneas l y l'' , respectivamente. Análogamente, observemos que los puntos A', B', C', D' y los puntos A'', B'', C'', D'' son las secciones al haz con centro en C por las líneas l' y l'' , respectivamente. Luego, por la proposición 2.5.1 se sigue que

$$\{ABCD\} = \{A''B''C''D''\} = \{A'B'C'D'\}.$$

$$\text{Por tanto, } \{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}.$$

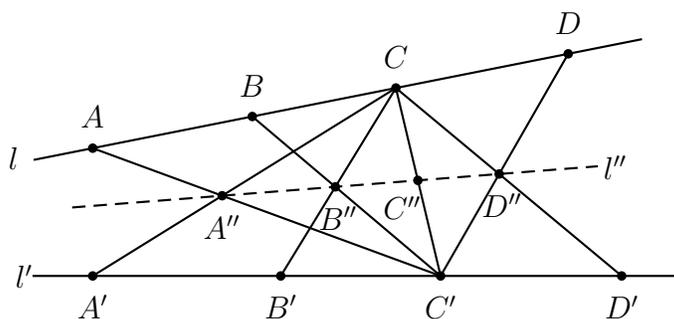


Figura 2.20: $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$ si y sólo si D'' incide con $A''B''$

□

En relación con la proposición precedente, la colinealidad de los puntos A'', B'' y D'' es condición necesaria y suficiente para $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$. En este sentido, aún cuando la razón doble es una noción basada en propiedades de magnitud resulta ser, *per se*, una noción intrínsecamente relacionada con propiedades de incidencia.

Veamos que las propiedades de razón cruzada podrán ser asociadas a los elementos de dos configuraciones específicas, el cuadrángulo completo y el cuadrilátero completo.

2.6. Conjuntos cuadrangulares

En el plano proyectivo real, introduciremos las nociones *conjunto cuadrangular de puntos* y *conjunto cuadrangular de líneas*. Oswald Veblen y John Young (1911) aclaran que, si bien es natural llamar conjunto cuadrilateral de líneas a la configuración dual de un conjunto cuadrangular de puntos, nos convendrá llamar conjunto cuadrangular de líneas a dicha figura, pues así podremos establecer una notación uniforme entre ambas figuras duales (p.79).

Definición 2.6.1. Un *conjunto cuadrangular de puntos* es la hilera de puntos que resulta de seccionar los lados de un cuadrángulo completo por una línea que no incide con un vértice (véase figura 2.21).

Definición 2.6.2. Un *conjunto cuadrangular de líneas* es el haz de líneas que resulta de proyectar los vértices de un cuadrilátero completo desde un punto que no incide con un lado (véase figura 2.21).

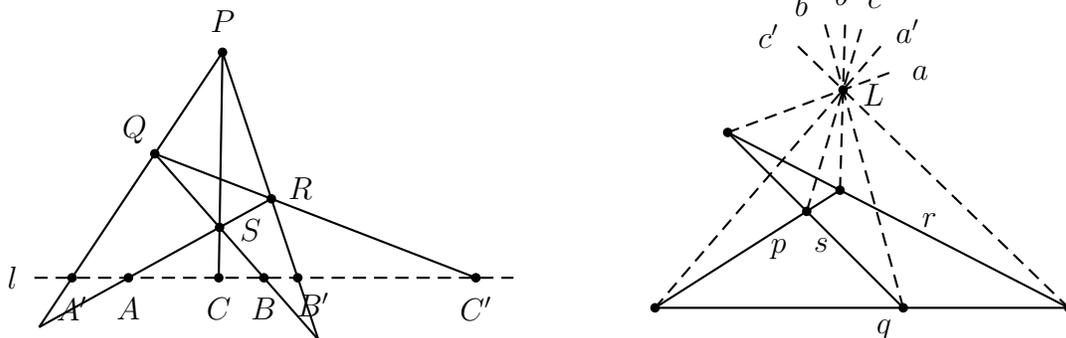


Figura 2.21: $(AA')(BB')(CC')$ y $(aa')(bb')(cc')$

En general, un conjunto cuadrangular de puntos está formado por seis puntos colineales, cada uno incidente con un lado del cuadrángulo.

En general, un conjunto cuadrangular de líneas está formado por seis líneas concurrentes, cada una incidente con un vértice del cuadrilátero.

Sin embargo, el número de puntos se reduce a cinco o cuatro si sucede que la línea que secciona a los lados del cuadrángulo completo incide con uno o dos de sus puntos diagonales, respectivamente. En caso de que tal línea incida con dos puntos diagonales, el conjunto cuadrangular de puntos deviene en una hilera armónica. Un conjunto cuadrangular de puntos será denotado por $(AA')(BB')(CC')$, donde los pares de puntos A, A' ; B, B' y CC' son, respectivamente, la sección a los pares de lados opuestos del cuadrángulo por una línea.

Sin embargo, el número de líneas se reduce a cinco o cuatro si sucede que el punto que proyecta a los vértices del cuadrilátero completo incide con una o dos de sus líneas diagonales, respectivamente. En caso de que tal punto incida con dos líneas diagonales, el conjunto cuadrangular de líneas deviene en un haz armónico. Un conjunto cuadrangular de líneas será denotado por $(aa')(bb')(cc')$, donde los pares de líneas a, a' ; b, b' y c, c' son, respectivamente, la proyección a los pares de vértices opuestos del cuadrilátero desde un punto.

Dados cinco puntos colineales, para Oswald Veblen y John Young (1910), el teorema de Desargues (proposición 1.2.1) será el instrumento, *sine qua non*, para probar la unicidad del sexto punto colineal con ellos tal que los seis formen un conjunto cuadrangular de puntos, o dicho en otros términos, para mostrar que el sexto punto no depende del cuadrángulo que se considere (conviene recordar la proposición 2.1.5).

Proposición 2.6.1. Sean A, B, C, A', B' cinco puntos colineales distintos, existe un único punto C' colineal con ellos tal que $(AA')(BB')(CC')$.²⁰

Demostración. Sean A, B, C, A', B' cinco puntos incidentes con una línea l , construimos C' tal que $(AA')(BB')(CC')$. Ésto lo logramos trazando un triángulo $\triangle PQS$ tal que A' incida con PQ , B incida con QS , y C incida con PS . Denotamos por R a la intersección de las líneas AS y PB' , y por C' a la intersección de las líneas $A'B'$ y QR . Así, C' es el punto buscado, pues construimos un cuadrángulo completo $PQRS$ que satisface la definición 2.6.1. De manera análoga, construimos C'' tal que el conjunto cuadrangular $(AA')(BB')(CC'')$ esté asociado a otro cuadrángulo completo $P'Q'R'S'$. En estas condiciones, C' es el punto de intersección de las líneas QR y l , y C'' es el punto de intersección de las líneas $Q'R'$ y l (véase figura 2.22). Queremos demostrar que los puntos C' y C'' coinciden.

Por construcción, los triángulos $\triangle PQS$ y $\triangle P'Q'S'$ están en perspectiva desde l , pues los puntos A', B y C son las intersecciones de sus lados correspondientes, entonces por el teorema de Desargues (proposición 1.2.1), las líneas PP', QQ' y SS' concurren en un punto O . De la misma manera, los triángulos $\triangle PRS$ y $\triangle P'R'S'$ están en perspectiva desde l , pues los puntos A, B' y C son las intersecciones de sus lados correspondientes, entonces por el teorema de Desargues, las líneas PP', RR' y SS' concurren en un punto

²⁰Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.50.

O' . Notemos que, las líneas SS' y PP' concurren en ambos puntos O y O' , por lo que estos puntos coinciden. De esta manera, los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ están en perspectiva desde O . Así, por el teorema de Desargues, el punto de intersección de QR y $Q'R'$ es colineal con A' y B' , es decir, en dicho punto concurren las líneas $QR, Q'R'$ y l . Por tanto, C' coincide con C'' .

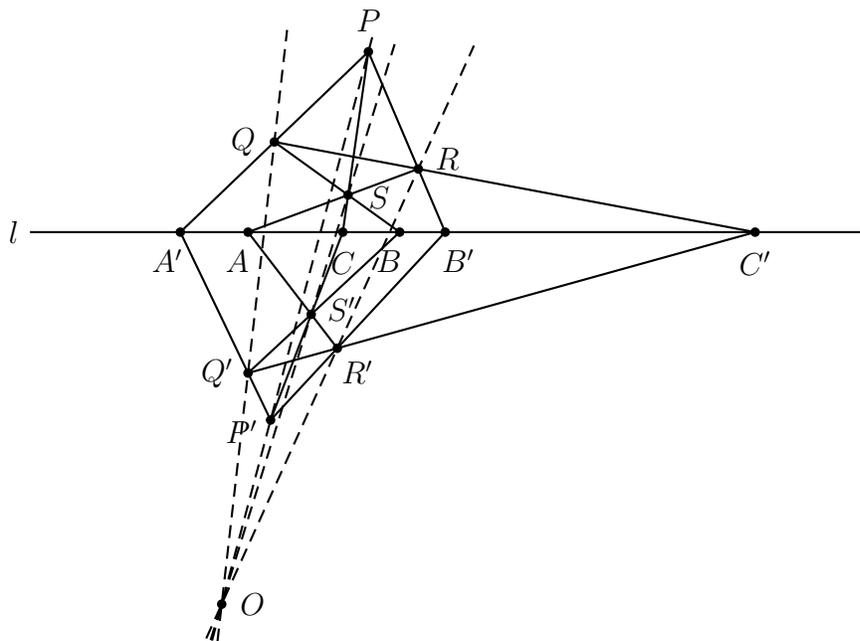


Figura 2.22: Existe un único punto C' tal que $(AA')(BB')(CC')$

□

Asimismo, dadas cinco líneas concurrentes, para mostrar la unicidad de la sexta línea concurrente con ellas tal que formen un conjunto cuadrangular de líneas, bastará dualizar la proposición anterior.

Proposición 2.6.2. Sean a, b, c, a' y b' cinco líneas concurrentes distintas, existe una única línea c' concurrente con ellas tal que $(aa')(bb')(cc')$.

La convención de llamar conjunto cuadrangular de líneas a lo que, de manera natural, llamaríamos conjunto cuadrilateral de líneas, se debe al hecho de que a partir de un conjunto cuadrangular de líneas, obetendremos un conjunto cuadrangular de puntos y, viceversa. La siguiente proposición justifica la uniformidad de la notación empleada.

Proposición 2.6.3. La sección de un conjunto cuadrangular de líneas, por uno de los lados de un cuadrilátero completo asociado a él, es un conjunto cuadrangular de puntos.²¹

²¹Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. pp.79,80.

Demostración. Sea $pqrs$ un cuadrilátero completo y L un punto distinto de sus vértices. Así, la proyección de L a los vértices del cuadrilátero forman un conjunto cuadrangular de líneas $(aa')(bb')(cc')$ (véase figura 2.23). Consideramos s uno de los lados del cuadrilátero como una transversal. Queremos demostrar que $(aa')(bb')(cc')$ es seccionado por s en un conjunto cuadrangular de puntos.

Denotamos por P a la intersección de los lados r y q ; por Q a la intersección de los lados p y r ; y por R a la intersección de los lados p y q . Observemos que, los lados LR, QL, LP, PQ, RP y QR del cuadrángulo completo $PQRL$ cortan a la línea s en A, B, C, A', B' y C' , los mismos puntos en que las líneas del conjunto cuadrilateral $(aa')(bb')(cc')$ es seccionado por s . Por tanto, $(AA')(BB')(CC')$ es un conjunto cuadrangular de puntos asociado al cuadrángulo completo $PQRL$.

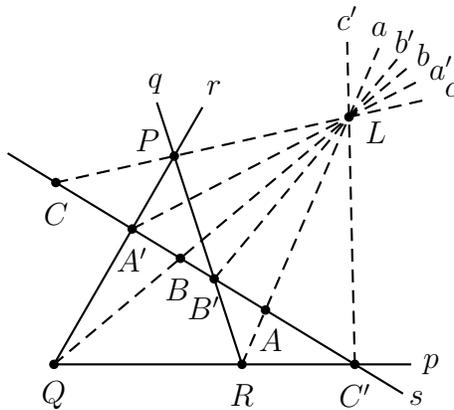


Figura 2.23: $(AA')(BB')(CC')$ syss $(aa')(bb')(cc')$

□

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.6.4. *La proyección de un conjunto cuadrangular de puntos, desde uno de los vértices de un cuadrángulo completo asociado a él, es un conjunto cuadrangular de líneas.*

De acuerdo con Oswald Veblen y John Young (1910), condiciones suficientes y necesarias para obtener un conjunto cuadrangular de puntos, son establecidas por cierta proyectividad que involucran a tales puntos.

Proposición 2.6.5. *Sean A, B, C, A', B' y C' seis puntos incidentes con una línea l , entonces $(AA')(BB')(CC')$ si y sólo si existe una proyectividad tal que $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$.*²²

²²Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. pp.100,101.

Demostración. Supongamos que $(AA')(BB')(CC')$ es un conjunto cuadrangular asociado al cuadrángulo completo $PQRS$ (véase figura 2.24). Queremos demostrar que existe la proyectividad $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$.

Denotamos por T al punto de intersección de las líneas PS y QR . Notemos que

$$ABCC' \stackrel{S}{\bar{\wedge}} RQTC' \stackrel{P}{\bar{\wedge}} B'A'CC'$$

Así, $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$

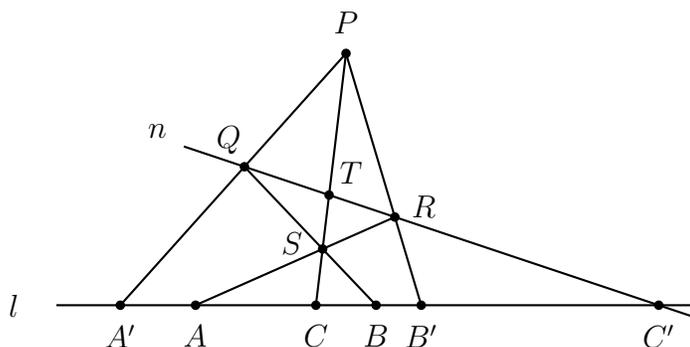


Figura 2.24: $(AA')(BB')(CC')$ si y sólo si existe $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$

Recíprocamente, supongamos que existe una proyectividad tal que $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$. Queremos demostrar que $(AA')(BB')(CC')$.

Consideramos una línea n , distinta de l , incidente con C' ; y un punto S que no incide con la línea n ni con la línea l . Denotamos por Q al punto de intersección de las líneas BS y n ; por R al punto de intersección de las líneas AS y n ; por P al punto de intersección de las líneas $A'Q$ y $B'R$; por T al punto de intersección de las líneas CS y QR ; y por T' al punto de intersección de la líneas PC y QR . De este modo, tenemos que

$$RQTC' \stackrel{S}{\bar{\wedge}} ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC' \stackrel{P}{\bar{\wedge}} RQT'C'$$

Luego, por el *TFGP* (proposición 1.2.4), se sigue que los puntos T y T' coinciden. Así pues, los puntos P , S y C son colineales. Por tanto, obtenemos el conjunto cuadrangular $(AA')(BB')(CC')$ asociado al cuadrángulo completo $PQRS$. \square

Como consecuencia de la proposición precedente, cuando una línea que secciona a los lados de un cuadrángulo completo incide con dos de sus puntos diagonales, obtenemos una caracterización de hilera armónica en función de una transformación proyectiva específica.

Proposición 2.6.6. Sean A, B, C y C' cuatro puntos incidentes con una línea l , entonces $H(AB, CC')$ si y sólo si existe una proyectividad tal que $ABCC' \bar{\wedge} BACC'$.

Demostración. Supongamos que $H(AB, CC')$ es una hilera armónica asociada al cuadrángulo completo $PQRS$ (véase figura 2.25). Queremos demostrar que existe la proyectividad $ABCC' \bar{\wedge} BACC'$.

Denotamos por T al punto de intersección de las líneas PS y QR . Notemos que

$$ABCC' \stackrel{S}{\bar{\wedge}} RQTC' \stackrel{P}{\bar{\wedge}} BACC'$$

Así, $ABCC' \bar{\wedge} BACC'$

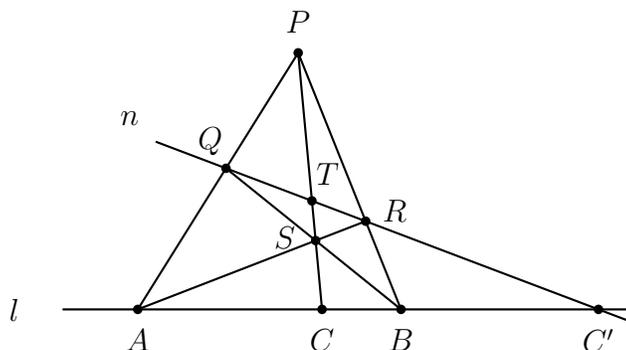


Figura 2.25: $H(AB, CD)$ si y sólo si $ABCC' \bar{\wedge} BACC'$

Recíprocamente, supongamos que existe la proyectividad $ABCC' \bar{\wedge} BACC'$. Queremos demostrar que $H(AB, CC')$.

Consideramos una línea n , distinta de l , incidente con C' ; y un punto S que no incide con la línea n ni con la línea l . Denotamos por Q al punto de intersección de las líneas BS y n ; por R al punto de intersección de las líneas AS y n ; por P al punto de intersección de las líneas AQ y BR ; por T al punto de intersección de las líneas CS y QR ; y por T' al punto de intersección de las líneas PC y QR . De este modo, tenemos que

$$RQTC' \stackrel{S}{\bar{\wedge}} ABCC' \bar{\wedge} BACC' \stackrel{P}{\bar{\wedge}} RQT'C'$$

Luego, por el *TFGP* (proposición 1.2.4), se sigue que los puntos T y T' coinciden. Así pues, los puntos P, S y C son colineales. Por tanto, obtenemos la hilera armónica $H(AB, CC')$ asociada al cuadrángulo completo $PQRS$. \square

Por el principio de dualidad, obtenemos los siguientes resultados:

Proposición 2.6.7. Sean a, b, c, a', b' y c' seis líneas incidentes con un punto L , entonces $(aa')(bb')(cc')$ si y sólo si existe una proyectividad tal que $abcc' \bar{\wedge} b'a'cc'$.

Proposición 2.6.8. Sean a, b, c y c' cuatro líneas incidentes con un punto L , entonces $h(ab, cc')$ si y sólo si existe una proyectividad tal que $abcc' \bar{\wedge} bacc'$.

2.7. Cuadrángulo completo y razón cruzada

Finalmente, en el plano euclidiano, veamos que ciertas propiedades de razón doble, vista como la generalización de la relación armónica, también estarán relacionadas con los puntos del conjunto cuadrangular asociado a un cuadrángulo completo. Diego Fernández *et. al.* (2012) señalan dichas propiedades en la siguiente proposición (conviene recordar la proposición 2.3.1).²³

Proposición 2.7.1. Sean A, A', B, B', C, C' seis puntos incidentes en una línea l . Existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', C, C' inciden con los lados RS, PQ, QS, PR, PS, QR , respectivamente, si y sólo si $\{ACBC'\} = \{A'C'B'C'\}$.

Demostración. Supongamos que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', C, C' inciden con los lados RS, PQ, QS, PR, PS, QR , respectivamente (véase figura 2.26). Queremos demostrar que $\{ACBC'\} = \{A'C'B'C'\}$, esto es,

$$\frac{AB \times C'C}{AC' \times BC} = \frac{A'B' \times CC'}{A'C \times B'C'}$$

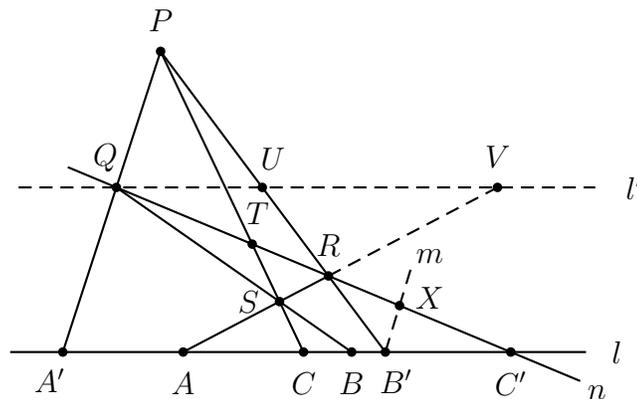


Figura 2.26: $\frac{AB \times C'C}{AC' \times BC} = \frac{A'B' \times CC'}{A'C \times B'C'}$

²³Fernández, Diego *et.al.* (2012). *Sobre un porisma de Euclides y su dualización.* pp.86-89.

Denotamos por T al punto de intersección de QR y PS . Observemos que la recta PC , corta a los lados QC' , $C'B$, BQ del $\triangle QC'B$ en los puntos T , C , S , respectivamente, entonces por el Teorema de Menelao (proposición 1.1.8) se sigue

$$\frac{QT}{TC'} \cdot \frac{C'C}{CB} \cdot \frac{BS}{SQ} = -1,$$

de donde obtenemos

$$\frac{C'C}{CB} \cdot \frac{BS}{SQ} = -\frac{TC'}{QT}. \quad (1)$$

Además, la misma transversal corta a los lados QC' , $C'A'$, $A'Q$ del $\triangle QC'A'$ en T , C , P , respectivamente, entonces por el teorema de Menelao se sigue

$$\frac{QT}{TC'} \cdot \frac{C'C}{CA'} \cdot \frac{A'P}{PQ} = -1,$$

de donde obtenemos

$$\frac{C'C}{CA'} \cdot \frac{A'P}{PQ} = -\frac{TC'}{QT}. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\frac{C'C}{CB} \cdot \frac{BS}{SQ} = \frac{C'C}{CA'} \cdot \frac{A'P}{PQ}. \quad (3)$$

Asimismo, la transversal RA corta a los lados QC' , $C'B$, BQ del $\triangle QC'B$ en R , A , S , respectivamente, entonces

$$\frac{QR}{RC'} \cdot \frac{C'A}{AB} \cdot \frac{BS}{SQ} = -1,$$

de donde obtenemos

$$\frac{BS}{SQ} = \frac{C'R}{QR} \cdot \frac{AB}{C'A}. \quad (4)$$

Además, la transversal PB' corta a los lados QC' , $C'A'$, $A'Q$ del $\triangle QC'A'$ en R , B' , P , respectivamente, entonces

$$\frac{QR}{RC'} \cdot \frac{C'B'}{B'A'} \cdot \frac{A'P}{PQ} = -1,$$

de donde obtenemos

$$\frac{A'P}{PQ} = \frac{C'R}{QR} \cdot \frac{B'A'}{C'B'}. \quad (5)$$

Al sustituir (4) y (5) en (3) y eliminando el término común, tenemos que

$$\frac{C'C}{CB} \cdot \frac{AB}{C'A} = \frac{C'C}{CA'} \cdot \frac{B'A'}{C'B'},$$

esto es,

$$\frac{AB \cdot C'C}{AC' \cdot BC} = \frac{A'B' \cdot CC'}{A'C \cdot B'C'}.$$

Concluimos que $\{ACBC'\} = \{A'C'B'C\}$.

Recíprocamente, supongamos que $\{ACBC'\} = \{A'C'B'C\}$, esto es,

$$\frac{AB \cdot C'C}{AC' \cdot BC} = \frac{A'B' \cdot CC'}{A'C \cdot B'C'}. \quad (6)$$

Queremos demostrar que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', C, C' inciden con los lados RS, PQ, QS, PR, PS, QR , respectivamente.

Consideramos una línea n , distinta de l , incidente con C' y sea Q un punto que incide con la línea n . Trazamos m , la paralela a $A'Q$ por el punto B' , y denotamos por X al punto de intersección de las líneas m y n . Elegimos R un punto incidente con n tal que R es distinto de los puntos Q, X y C' . Denotamos por S a la intersección de las líneas BQ y AR ; y por P a la intersección de las líneas $A'Q$ y $B'R$. De esta manera el cuadrángulo completo $PQRS$ es el buscado.

Veamos que los puntos P, S y C son colineales. De (6) tenemos que

$$\frac{A'C \cdot C'B'}{CB \cdot C'A} = \frac{A'B' \cdot C'C}{AB \cdot C'C} = \frac{A'B'}{AB},$$

Por lo que

$$\frac{A'C}{CB} \cdot \frac{C'B'}{C'A} = \frac{A'B'}{AB} \quad (7)$$

Ahora, trazamos l' , la paralela a l por el punto Q . Denotamos por U y V a las intersecciones de l' con las líneas PB' y AR , respectivamente. Dado que los triángulos $\triangle C'AR$ y $\triangle QVR$ son semejantes, se sigue

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{QV}} = \frac{C'R}{RQ} > 0 \quad (8)$$

Como los triángulos $\triangle C'B'R$ y $\triangle QUR$ son semejantes, se sigue

$$\frac{\overline{C'B'}}{\overline{QU}} = \frac{C'R}{RQ} > 0 \quad (9)$$

Por lo que, de (8) y (9) tenemos que

$$\frac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A}} = \frac{\overline{QU}}{\overline{QV}}, \text{ entonces } \frac{C'B'}{C'A} = \frac{QU}{QV}. \quad (10)$$

Al sustituir (10) en (7) tenemos

$$\frac{A'C}{CB} \cdot \frac{QU}{QV} = \frac{A'B'}{AB},$$

de donde obtenemos

$$-\frac{A'C}{BC} = \frac{A'B'}{QU} \cdot \frac{QV}{AB}. \quad (11)$$

Como los triángulos $\triangle A'B'P$ y $\triangle QUP$ son semejantes, se sigue

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{QU}} = \frac{A'P}{QP} > 0 \quad (12)$$

También, como los triángulos $\triangle QVS$ y $\triangle BAS$ son semejantes, se sigue

$$\frac{\overline{QV}}{\overline{AB}} = \frac{QS}{SB} > 0 \quad (13)$$

De este modo, por (12) y (13) se tiene que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{QU}} \cdot \frac{\overline{QV}}{\overline{AB}} = -\frac{A'P}{QP} \cdot \frac{QS}{BS}$$

Como $\frac{A'B'}{AB} > 0$ y $\frac{QV}{QU} > 0$, entonces

$$\frac{A'B'}{QU} \cdot \frac{QV}{AB} = -\frac{A'P}{QP} \cdot \frac{QS}{BS} \quad (14)$$

Al sustituir (14) en (11) tenemos

$$\frac{A'C}{BC} = \frac{A'P}{QP} \cdot \frac{QS}{BS}.$$

Finalmente, obtenemos que

$$\frac{A'P}{PQ} \cdot \frac{QS}{SB} \cdot \frac{BC}{CA} = -1.$$

Además, P , S y C son puntos que, respectivamente, inciden con los lados $A'Q$, QB y BA' del triángulo $\triangle A'QB$. Concluimos, por el Teorema de Menelao que los puntos P , S y C son colineales. \square

En la proposición anterior constatamos cómo propiedades de razón cruzada son asociadas a la configuración del cuadrángulo completo. Es de esperarse que, similarmente, exista una proposición que señale las propiedades de la razón cruzada de las líneas de un conjunto cuadrangular de líneas asociado a un cuadrilátero completo. Una propuesta de tal resultado puede ser consultada en el texto *Sobre un porisma de Euclides y su dualización* (2012). Cabe resaltar que, la proposición 2.7.1 es la generalización de la proposición 2.3.1. Por consiguiente, en la misma configuración del cuadrángulo completo, en general, hallamos propiedades de razón cruzada en función de un conjunto cuadrangular de seis puntos y, en particular, propiedades de relación armónica en función de un conjunto cuadrangular de cuatro puntos.

Capítulo 3

Inversiones e involuciones

*La celeste unidad que presumes,
hará brotar en ti mundos diversos,
y al resonar tus números dispersos
pitagoriza en tus constelaciones.*

Rubén Darío, Ama tu ritmo.

En *Science and Hypothesis* (1952), Henri Poincaré imagina “un mundo encerrado en una gran esfera y sujeto a las siguientes leyes: la temperatura no es uniforme; es mayor en el centro, y disminuye gradualmente a medida que nos movemos hacia la circunferencia de la esfera, donde es cero absoluto [...] en este mundo todos los cuerpos tienen el mismo coeficiente de dilatación, de manera que la dilatación lineal de cualquier cuerpo es proporcional a su temperatura absoluta [...] un objeto en movimiento se volverá cada vez más pequeño a medida que se acerca a la circunferencia de la esfera” (pp.65,66). Si bien, tal manera de pensar difiere parcialmente de nuestro universo, nos ayuda a entender muchas de las leyes de la naturaleza que lo rigen y, en particular, nos ayuda a comprender la geometría que se relaciona con tales leyes. Por ejemplo, dada una esfera, el reflejo que tiene un cuerpo exterior a ella es más grande en la medida que su distancia a la esfera es más pequeña. A pesar de que, la transformación que precisa tal hecho tiene dominio y rango tridimensional, obedece a una transformación del plano euclidiano que se define vía una circunferencia, la *inversión*. Más aún, como veremos, esta última cumplirá las propiedades de una transformación más general, la *involución*.

En el plano euclidiano, una inversión es una transformación punto a punto del plano que deja fijos a los puntos de una circunferencia y que transforma puntos internos de tal circunferencia en puntos externos y, viceversa.

Definición 3.0.1. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y A un punto distinto de O . Decimos que un punto A' , colineal con O y A , es *el inverso de A con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$* si y sólo

si $OA \cdot OA' = r^2$. La circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$ es llamada la *circunferencia de inversión*, el punto O es llamado el *centro de inversión* y la constante r es llamada el *radio o constante de inversión* (véase figura 3.1).

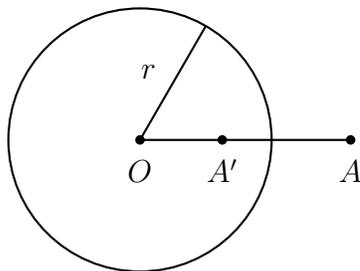


Figura 3.1: A y A' son inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$

Al iterar dos veces la inversión con respecto a una circunferencia, todo punto se transforma en sí mismo. De suerte que, la inversión es una transformación de periodo dos. La inversión estará definida para cualquier punto en el plano de una circunferencia, a excepción del centro de la circunferencia, para el cual su correspondiente punto bajo la inversión no estará definido en el plano euclidiano.

Entre las propiedades principales de la inversión, encontramos que ésta es la transformación que nos permite relacionar un par de figuras en el plano euclidiano, principalmente, líneas y circunferencias. Veremos que, la inversión transforma cualquier línea que incide con el centro de inversión en una circunferencia que no pasa por el centro de inversión. Asimismo, probaremos que la inversión preserva la razón cruzada de una hilera de cuatro puntos y en particular, la relación armónica, ésta última relacionada con propiedades de incidencia. La inversión deviene en una importante herramienta métrica para el dominio euclidiano en la medida que las propiedades mencionadas son utilizadas en la solución de problemas.

Por otra parte, en el plano proyectivo real, tenemos la noción de involución.

Definición 3.0.2. Una *involución* es una proyectividad de periodo dos de una forma uno-dimensional en sí misma. Los pares de puntos (o líneas) correspondientes bajo una involución son llamados *puntos (o líneas) conjugados de la involución* (véase figura 3.2).

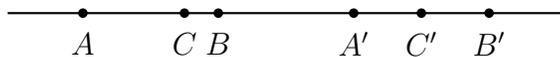


Figura 3.2: $A, A'; B, B'; C, C'; \dots$ son pares de puntos conjugados de una involución

Es evidente que, toda involución coincide con su transformación inversa y al iterar dos veces la involución, todo punto se transforma en sí mismo. En el plano euclidiano,

existen transformaciones de periodo dos, a saber, las reflexiones, las rotaciones por un ángulo de 180° y las inversiones. Desde esta perspectiva, todas éstas podrían ser comparadas con la definición 3.0.2.

En el plano proyectivo real, entre las propiedades principales de las involuciones, veremos que una condición necesaria y suficiente para que tres pares de puntos sean conjugados de una involución es que los seis puntos sean elementos de un conjunto cuadrangular. De allí que, la noción de involución sea susceptible de asociarse a ciertos puntos y líneas de un cuadrángulo completo (o cuadrilátero completo). Además, como cualquier proyectividad, las involuciones son distinguidas acorde a sus puntos invariantes. Sin embargo, toda involución será elíptica, o bien hiperbólica, pues mostraremos que no existen las involuciones parabólicas.

Las involuciones también estarán definidas en el plano euclidiano. En este último, una involución estará precisada para una hilera de puntos incidentes con una línea, a partir de un punto y una constante distinta de cero.

Definición 3.0.3. Sean l una línea, O un punto que incide con l y una constante k distinta de cero. Decimos que una hilera de puntos $A, A'; B, B'; C, C' \dots$, por pares e incidentes con l , están en *involución* si y sólo si $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \dots = k$. El punto O es llamado el *centro de la involución*, la constante k es llamada la *constante de involución* y los puntos de cualquier par de la hilera son llamados *puntos conjugados de la involución* (véase figura 3.3).

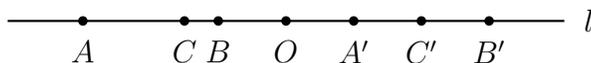


Figura 3.3: $A, A'; B, B'; C, C'; \dots$ son pares de puntos conjugados de una involución

De acuerdo con la definición anterior, hallaremos que cuando la constante de involución es positiva, la involución es una inversión cuya circunferencia de inversión es la que tiene por centro al centro de la involución y por diámetro al segmento determinado por el par de puntos invariantes de la involución. De suerte que, toda inversión es un caso particular de involución.

En el plano euclidiano, entre las propiedades principales de las involuciones, encontramos que éstas preservan la razón cruzada de una hilera de cuatro puntos y en particular, la relación armónica. Asimismo, a partir de propiedades de razón cruzada, probaremos propiedades para las involuciones en el plano euclidiano, análogas a las propiedades para las involuciones en el plano proyectivo real.

Si bien, en el plano proyectivo real, la definición de involución no parte de ningún punto en específico, se definirá al conjugado del punto al infinito como el centro de la involución. Con base en este hecho, probaremos la equivalencia entre las definiciones 3.0.2

y 3.0.3. Asimismo, veremos que, en el plano euclidiano, la no existencia del conjugado del centro de la involución está relacionada con las líneas paralelas a la línea que incide con los pares de puntos conjugados. Para ello es importante mencionar la definición de un haz en involución en el plano euclidiano.

Definición 3.0.4. Sea O un punto del plano. Decimos que un haz de líneas $a, a'; b, b'; c, c', \dots$, por pares e incidentes con O , están en *involución* si y sólo si cualquier línea, que no incide con O , corta al haz en una hilera de puntos $A, A'; B, B'; C, C' \dots$ que están en involución. Las líneas de cualquier par del haz son llamadas *líneas conjugadas de la involución* (véase figura 3.4).

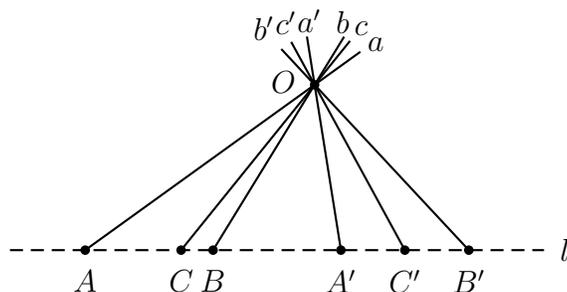


Figura 3.4: $a, a'; b, b'; c, c'; \dots$ son pares de puntos conjugados de una involución

Como veremos, en el plano euclidiano, cualquier haz en involución tiene un par de líneas conjugadas perpendiculares y en caso de que haya más de un par de líneas conjugadas perpendiculares, todas los pares de líneas serán perpendiculares. En relación con este resultado, en el plano proyectivo real, nos convendrá estudiar la única involución elíptica en la línea al infinito, la *involución ortogonal*. Tales hechos nos permitirán definir las nociones de líneas perpendiculares y bisectrices de un ángulo, análogas a las del plano euclidiano, vía propiedades de incidencia.

Al igual que la relación armónica, las involuciones serán clave para aproximarnos del plano euclidiano al plano proyectivo real y, viceversa.

3.1. Inversión

Una vez presentada la noción de inversión (definición 3.0.1), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano euclidiano. Para comenzar haremos las siguientes observaciones (véase figura 3.5):

Observación 3.1.1. Si A y A' son puntos inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces

1. la constante r es la media geométrica entre los segmentos OA y OA' .¹
2. A es el inverso de A' si y sólo si A' es el inverso de A , ya que la condición $OA \times OA' = r^2$ es simétrica en A y A' .
3. los puntos A y A' estarán del mismo lado del punto O , pues $r^2 > 0$.
4. si $OA \times OA' = r^2$ y $OA > r$, entonces $OA' < r$, es decir, si A es un punto exterior a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces su inverso A' es un punto interior a $\mathcal{C}(O, r)$.
5. si $OA \times OA' = r^2$ y $OA = r$, entonces $OA' = r$, es decir, si A está en $\mathcal{C}(O, r)$, entonces su inverso A' coincide con él.
6. si $OA \times OA' = r^2$ y $OA < r$, entonces $OA' > r$, es decir, si A es un punto interior a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces su inverso A' es un punto exterior a $\mathcal{C}(O, r)$.

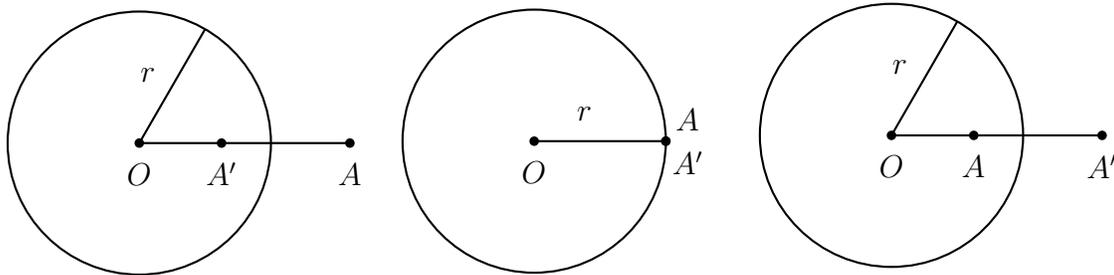


Figura 3.5: $OA \times OA' = r^2$

Además, no existe el inverso del centro de inversión O , pues de existir, tendríamos que $OO \cdot OO' = r^2$, luego $r = 0$, lo cual es una contradicción. Con base en la definición 3.0.1, construiremos el inverso de cualquier punto A , distinto de O , con respecto a una circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$. En la siguiente proposición, hacemos mención de una de las construcciones de puntos inversos más conocida.

Proposición 3.1.1. *Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y un punto A en el plano, existe un único punto A' tal que A y A' son inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$.*²

Demostración. Recordemos que, si A está en $\mathcal{C}(O, r)$, entonces su inverso coincide con él mismo. Así, tenemos otros dos casos dependiendo de la posición de A con respecto a la circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$.

¹Decimos que un segmento de longitud h es media geométrica entre dos segmentos de longitudes a y b , respectivamente, si $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$.

²Johnson, Roger. (1960). *Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise of the Geometry of the Triangle and the Circle.* p.46.

Caso 1. El punto A es exterior a $\mathcal{C}(O, r)$ (véase figura 3.6).

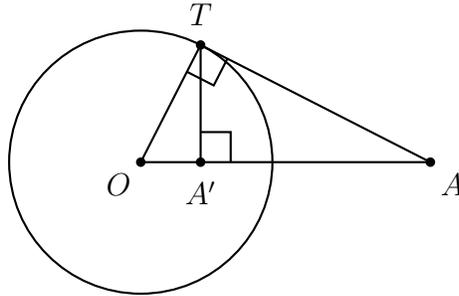


Figura 3.6: A es exterior a $\mathcal{C}(O, r)$

Desde A trazamos AT una tangente a la circunferencia. Trazamos la perpendicular a OA por T y denotamos por A' al pie de esta perpendicular. De esta manera, A' es el punto buscado. Por construcción, los triángulos $\triangle OTA$ y $\triangle OA'T$ son semejantes. Por lo que

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2.$$

Como OA y OA' tienen la misma dirección, entonces $OA \cdot OA' = r^2$.

Caso 2. El punto A es interior a $\mathcal{C}(O, r)$ (véase figura 3.7).

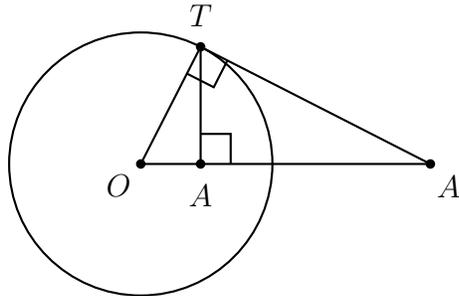


Figura 3.7: A es un punto interior de $\mathcal{C}(O, r)$

Trazamos la perpendicular a OA por A . Denotamos por T a uno de los puntos de intersección de esta perpendicular y $\mathcal{C}(O, r)$. Trazamos el segmento OT . Llamamos A' a la intersección de la tangente a $\mathcal{C}(O, r)$ por T y la línea OA . De esta manera, A' es el punto buscado. Por construcción, los triángulos $\triangle OTA$ y $\triangle OA'T$ son semejantes. Por lo que

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \quad \text{sys} \quad \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$$

Como OA y OA' tienen la misma dirección, entonces $OA \cdot OA' = r^2$.

Para mostrar la unicidad de A' , el inverso de A con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, supongamos que existe A'' , distinto de A' , tal que A'' también es inverso de A con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Así pues, $OA \times OA' = r^2 = OA \times OA''$, esto es, $OA \times OA' = OA \times OA''$ si y sólo si $OA' = OA''$. Dado que los puntos A' y A'' están del mismo lado del punto O , se sigue que el punto A' coincide con A'' . Por tanto A' , el punto inverso de A , es único. \square

La siguiente proposición, sale a colación, pues subyace a la estrecha relación que existe entre la relación armónica y la noción de puntos inversos.³

Proposición 3.1.2. *Sean M, N, A, A' son cuatro puntos colineales y O el punto medio del segmento MN , entonces $H(MN, AA')$ si y sólo si $ON^2 = OA \times OA'$.*

Demostración. Tenemos que $H(MN, AA')$ si y sólo si $\frac{MA}{AN} = -\frac{MA'}{A'N}$.

Luego, por la colinealidad de los puntos M, N, A, A' , ésto ocurre si y sólo si

$$\frac{MO + OA}{ON - OA} = -\frac{MO + OA'}{ON - OA'},$$

$$\frac{ON + OA}{ON - OA} = -\frac{ON + OA'}{ON - OA'},$$

$$(ON + OA)(ON - OA') = -(ON + OA')(ON - OA),$$

$$ON^2 - ON \cdot OA' + OA \cdot ON - OA \cdot OA' = -ON^2 + ON \cdot OA - OA' \cdot ON + OA' \cdot OA,$$

$$2ON^2 = 2(OA \cdot OA'),$$

$$ON^2 = OA \cdot OA'.$$

\square

Con base en la proposición anterior, Nathan Altshiller (2007) señala una manera de caracterizar a un par de puntos inversos.

Proposición 3.1.3. *Un par de puntos son inversos con respecto a una circunferencia si y sólo si dividen armónicamente el diámetro correspondiente de la circunferencia.⁴*

³Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. pp.166,167.

⁴*Ibidem*. p.172.

Demostración. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y A y A' un par de puntos inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Consideramos MN el diámetro de $\mathcal{C}(O, r)$ que corresponde a los puntos A y A' (véase figura 3.8). Dado que O es el punto medio del segmento MN , por la proposición 3.1.2 se sigue que $H(MN, AA')$ si y sólo si $ON^2 = OA \times OA'$ si y sólo si $r^2 = OA \times OA'$.

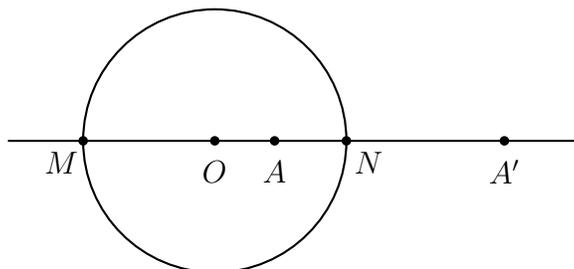


Figura 3.8: $H(MN, AA')$

□

En relación con la proposición anterior, dado que un par de puntos inversos dividen armónicamente al diámetro correspondiente, toda circunferencia que pase por ese par de puntos inversos será ortogonal a la circunferencia de inversión. Este hecho es señalado por Isaac Leonard *et. al.* (2014) en la siguiente proposición (véase figura 3.9).

Proposición 3.1.4. *Dos circunferencias son ortogonales si y sólo si una de las circunferencias pasa a través de un par de puntos que son inversos con respecto a la otra circunferencia.*⁵

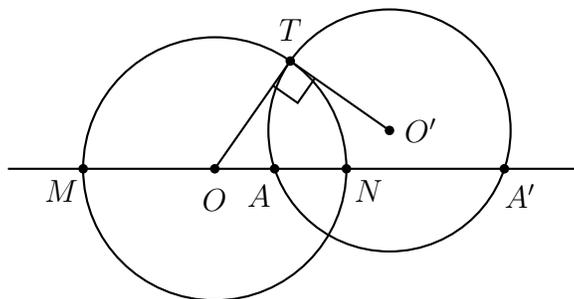


Figura 3.9: $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son ortogonales

Demostración. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ dos circunferencias ortogonales. Denotamos por A y A' a los puntos en que una secante que incide con O corta a la circunferencia $\mathcal{C}(O', r')$. Queremos demostrar que A y A' son inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$.

⁵Leonard, Isaac *et. al.* (2014). *Classical Geometry, Euclidean, Transformational, Inversive and Projective*. pp.354,355.

Sea T uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias. Como las circunferencias $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son ortogonales, por la proposición 1.1.4, tenemos que $OA \cdot OA' = OT^2 = r^2$. Por tanto, A y A' son inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y $\mathcal{C}(O', r')$ una circunferencia que pasa por A y A' , un par de puntos inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son ortogonales.

Sea T uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias. Dado que $OA \times OA' = r^2 = OT^2$, por la proposición 1.1.4, tenemos que $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son ortogonales. \square

La inversión será una transformación que, entre otras cosas, relacione circunferencias con líneas y, viceversa. Por lo que, este hecho representará una ventaja en la medida en que podamos convertir problemas que conciernen a circunferencias en problemas que conciernen a líneas y, al revés. Para ver un ejemplo de tal hecho, *cfr.* [Altshiller,2007, pp. 237,238]. Asimismo, otra propiedad esencial para la inversión será la semejanza que hay entre dos triángulos tal que uno tiene de vértices dos puntos, el otro sus puntos inversos y ambos comparten el centro de inversión como tercer vértice.

Proposición 3.1.5. *Si A y B son dos puntos cualesquiera y A' y B' sus inversos con respecto a una circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$, entonces los triángulos $\triangle OBA$ y $\triangle OA'B'$ son semejantes.⁶*

Demostración. Queremos demostrar que los triángulos $\triangle OBA$ y $\triangle OA'B'$ son semejantes (véase figura 3.10).

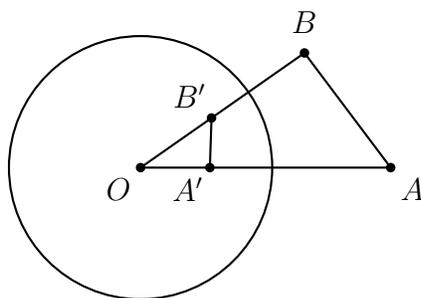


Figura 3.10: $\triangle OBA$ y $\triangle OA'B'$ son inversamente semejantes

Notemos que, $OA \times OA' = r^2 = OB \times OB'$, esto es, $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$. Luego, los triángulos $\triangle OA'B'$ y $\triangle OBA$ tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y comparten el ángulo que tiene vértice O . Así, por el criterio de semejanza LAL, tenemos que los triángulos $\triangle OA'B'$ y $\triangle OBA$ son semejantes. \square

⁶Johnson, Roger. (1960). *Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise of the Geometry of the Triangle and the Circle.* p.48.

Veamos que, bajo inversión, una línea podrá transformarse en sí misma o en una circunferencia dependiendo si la línea incide o no incide con el centro de inversión.

Proposición 3.1.6. *El inverso de una línea que pasa por el centro de inversión, es la misma línea.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y l una línea que incide con O . Notemos que, para todo punto A incidente con l , su inverso A' es tal que O, A y A' son colineales y que $OA \times OA' = r^2$. Así pues, los inversos de los puntos que inciden con l , también inciden con la misma línea. Por tanto, la línea l se invierte en ella misma. \square

Cabe resaltar que, si la línea l se invierte en ella misma, este hecho no significa que cada punto se invierta en sí mismo, sino que los inversos son puntos que también inciden con dicha línea. Por otra parte, en la siguiente proposición, Samuel Greitzer y Harold Coxeter (1967) muestran la manera en que las circunferencias y las líneas están mutuamente relacionadas a través de la inversión (véase figura 3.11).

Proposición 3.1.7. *Dada una línea que no pasa por el centro de inversión, su inverso es una circunferencia que pasa por el centro de inversión. Recíprocamente, el inverso de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una línea que no pasa por el centro de inversión.*⁷

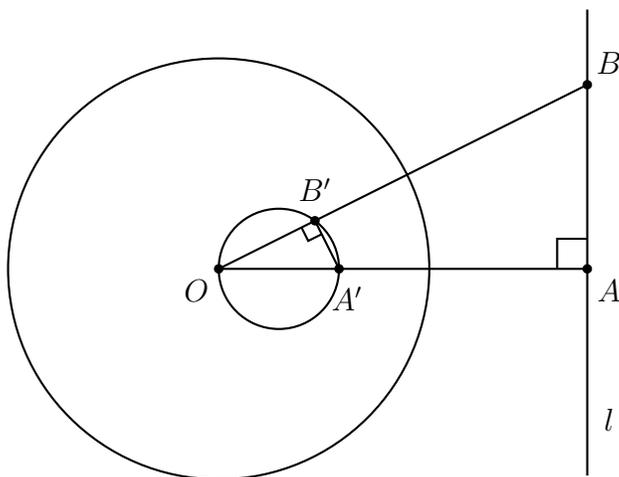


Figura 3.11: La circunferencia de diámetro OA' y la línea l son inversas

Demostración. Sea $\mathcal{C}(O, r)$ la circunferencia de inversión y l una línea que no pasa por O . Queremos demostrar que la inversa de l es una circunferencia que pasa por O .

Denotamos por A al pie de la perpendicular a l por O y consideramos B , un punto distinto de A , incidente con l . Trazamos A' y B' , los inversos de A y B con respecto

⁷Greitzer, Samuel y Coxeter, Harold (1967). *Geometry Revisited*. p.109.

a $\mathcal{C}(O, r)$. Por la proposición 3.1.5, los triángulos $\triangle OA'B'$ y $\triangle OBA$ son semejantes. Luego, como $\angle BAO = 90^\circ$, entonces $\angle OB'A' = 90^\circ$. Por la proposición 1.1.1, tenemos que la circunferencia de diámetro OA' pasa por el punto B' . Por tanto, para todo punto B que incide con l , su inverso B' está en la circunferencia de diámetro OA' .

Recíprocamente, sea $\mathcal{C}(O, r)$ la circunferencia de inversión y consideramos una circunferencia que pasa por O . Queremos demostrar que la inversa de esta circunferencia es una línea que no incide con O .

Sean OA' el diámetro de tal circunferencia y B' un punto en ella. Como $\angle OB'A'$ abarca un diámetro, por la proposición 1.1.1, se sigue que $\angle OB'A' = 90^\circ$. Trazamos A y B , los inversos de A' y B' con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Por la proposición 3.1.5, los triángulos $\triangle OA'B'$ y $\triangle OBA$ son semejantes, así $\angle BAO = 90^\circ$. Por consiguiente, B incide con la perpendicular a OA por A . Por tanto, para todo punto B' en la circunferencia de diámetro OA' , su inverso B incide con una línea. \square

Con base en la proposición precedente, es de notarse que para mostrar cierta colinealidad de puntos, en ocasiones nos convendrá probar que sus inversos son concíclicos y, viceversa. Tal hecho, también nos muestra la forma en que se presentan ciertas relaciones de incidencia ante la inversión, aun cuando las circunferencias no son un elemento del plano proyectivo real. Cabe mencionar que una circunferencia que no pase por el centro de inversión, se invertirá en otra circunferencia que no pase por el centro de inversión, este par de circunferencias serán homotéticas y el centro de inversión será uno de los centros de homotecia. Para ver una prueba de tal hecho, *cfr.* [Altshiller,2007, pp. 233,234]

La importancia de la inversión no sólo radica en el estudio de las relaciones mutuas entre dos figuras inversas, sino también en la búsqueda de las propiedades que permanecen invariantes bajo la inversión de dichas figuras. Los ángulos que forman un par de figuras, serán los mismos ángulos que forman sus figuras inversas, ésto puede consultarse en [Shively,1984, pp. 97,98]. No obstante, la inversión no preserva la longitud de los segmentos. En este sentido, la inversión no es una transformación rígida, tal como las traslaciones, rotaciones y reflexiones. A pesar de alterar la distancia, veremos que la razón cruzada y, en particular, la relación armónica serán propiedades que no se alteran bajo inversión.

3.2. Inversión y razón cruzada

Para mostrar cómo la razón cruzada y la relación armónica de hileras de puntos permanecen invariantes bajo inversión, en la siguiente proposición, Isaac. Leonard, *et al*

(2014) muestran la manera en que la distancia es afectada por la inversión.⁸

Proposición 3.2.1. Si A' y B' son los inversos de A y B con respecto a una circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$, entonces

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{BA} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}.$$

Demostración. Trazamos A' y B' los inversos de A y B con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$.

Caso 1. Los puntos A , B y O no son colineales (véase figura 3.12).

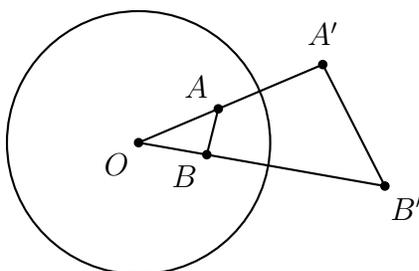


Figura 3.12: $\overline{A'B'} = \frac{\overline{BA} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$

Por la proposición 3.1.5, los triángulos $\triangle OA'B'$ y $\triangle OBA$ son semejantes. Por lo que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'} \cdot \overline{OB}}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} = \frac{r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}},$$

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{BA} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}.$$

Caso 2. Los puntos A , B y O son colineales (véase figura 3.13).

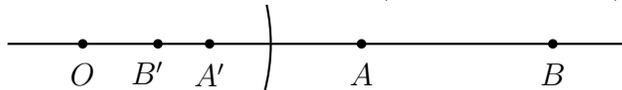


Figura 3.13: $A'B' = \frac{BA \times r^2}{OA \times OB}$

Como A' , O y B' son colineales, entonces $A'B' = A'O + OB'$. Además, debido a que $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$, entonces $A'O = \frac{r^2}{AO}$ y $OB' = \frac{r^2}{OB}$. Por lo que

⁸Leonard, Isaac *et. al.* (2014). *Classical Geometry, Euclidean, Transformational, Inversive and Projective*. pp.349,350.

$$A'B' = A'O + OB' = \frac{r^2}{AO} + \frac{r^2}{OB} = \frac{r^2(AO + OB)}{AO \cdot OB} = \frac{BA \cdot r^2}{OA \cdot OB},$$

$$A'B' = \frac{BA \times r^2}{OA \times OB}.$$

□

En el segundo caso de la siguiente proposición, Samuel Greitzer y Harold Coxeter (1967) muestran que la razón cruzada se preserva bajo inversión.⁹

Proposición 3.2.2. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y A, B, C, D cuatro puntos colineales. Si A', B', C', D' son sus inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{\overline{AD} \cdot \overline{CB}} = \frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{D'B'}}{\overline{A'D'} \cdot \overline{C'B'}}.$$

Demostración. Sean l la línea que incide con los puntos A, B, C y D . Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. El punto O no incide con la línea l (véase figura 3.14).

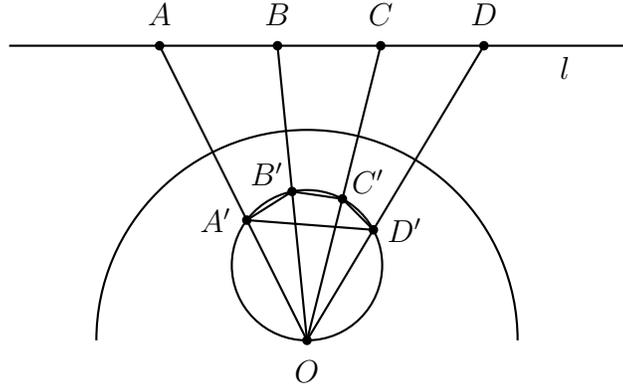


Figura 3.14: $\frac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{\overline{AD} \cdot \overline{CB}} = \frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{D'B'}}{\overline{A'D'} \cdot \overline{C'B'}}$

De acuerdo con la proposición 3.1.7, la línea l se invierte en una circunferencia que no pasa por O . Luego, los puntos A', B', C', D' están en dicha circunferencia. Así, por la proposición 3.2.1 se sigue

$$\frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{D'B'}}{\overline{A'D'} \cdot \overline{C'B'}} = \frac{\frac{\overline{CA} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OC}} \cdot \frac{\overline{BD} \cdot r^2}{\overline{OD} \cdot \overline{OB}}}{\frac{\overline{DA} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OD}} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot r^2}{\overline{OC} \cdot \overline{OB}}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{\overline{AD} \cdot \overline{CB}}.$$

⁹Greitzer, Samuel y Coxeter, Harold (1967). *Geometry Revisited*. p.112.

Caso 2. El punto O incide con la línea l (véase figura 3.15).

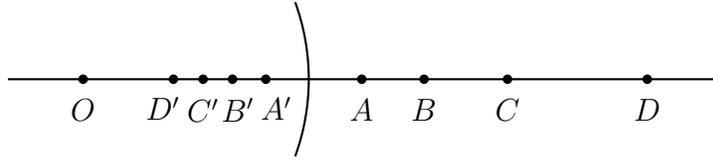


Figura 3.15: $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$

De acuerdo con la proposición 3.1.6, la línea l se invierte en ella misma. Luego, los puntos A', B', C', D' inciden con l . Así, por la proposición 3.2.1 se sigue

$$\{A'B'C'D'\} = \frac{A'C' \cdot D'B'}{A'D' \cdot C'B'} = \frac{\frac{CA \cdot r^2}{OA \cdot OC} \cdot \frac{BD \cdot r^2}{OD \cdot OB}}{\frac{DA \cdot r^2}{OA \cdot OD} \cdot \frac{BC \cdot r^2}{OC \cdot OB}} = \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \{ABCD\}.$$

□

Dado que la razón cruzada de cuatro puntos inversos se preserva bajo inversión, en particular, la relación armónica de cuatro puntos colineales se preservará bajo inversión.

Proposición 3.2.3. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y A, B, C, D cuatro puntos colineales con el punto O . Si A', B', C', D' son sus inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces $H(AB, CD)$ si y sólo si $H(A'B', C'D')$.

Después de tratar el tema de inversión en geometría euclidiana, estudiaremos el correspondiente tema de involución en geometría proyectiva.

3.3. Involución

Una vez presentada la noción de involución (definición 3.0.2), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano proyectivo real.

Si una proyectividad entre los puntos incidentes con una línea, transforma un punto A en un punto distinto A' , no necesariamente transforma al punto A' en el punto A . Ahora bien, si una proyectividad entre los puntos incidentes con una línea, transforma un punto A en un punto distinto A' y transforma al punto A' en A , decimos que los puntos A y A' se corresponden el uno al otro doblemente. De manera dual, si una proyectividad entre las líneas incidentes con un punto, transforma una línea a en una línea distinta a' y transforma a la línea a' en a , decimos que las líneas a y a' se corresponden la una a la

otra doblemente. Desde luego, una proyectividad en una forma uno-dimensional en la cual se satisface que cualesquiera dos puntos relacionados se corresponden el uno al otro doblemente, es una involución. El efecto inmediato de una involución es emparejar los elementos de una forma uno-dimensional, ya sea una hilera de puntos o un haz de líneas, de tal manera que a cada elemento de un par, le corresponda el otro elemento del par. Es evidente que, los puntos (líneas) de un mismo par, son puntos (líneas) conjugados de la involución.

En la siguiente proposición, Harold Coxeter (1987) muestra que existe una proyectividad que intercambia por pares a cuatro puntos que inciden con una línea. Como veremos, esta propiedad será una herramienta muy útil en la obtención de resultados que conciernen a involuciones.¹⁰

Proposición 3.3.1. *Si A, A', B, B' son cuatro puntos colineales y distintos entre sí, entonces*

1. *existe una proyectividad tal que $AA'BB' \bar{\wedge} A'AB'B$.*
2. *existe una proyectividad tal que $AA'BB' \bar{\wedge} BB'AA'$.*
3. *existe una proyectividad tal que $AA'BB' \bar{\wedge} B'BA'A$.*

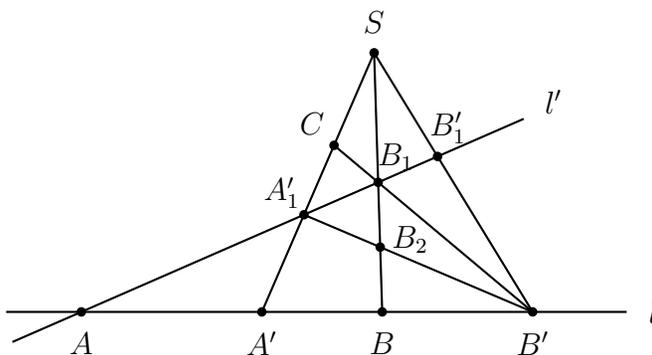


Figura 3.16: La proyección $AA'B \bar{\wedge} A'AB'$ transforma B' en B

Demostración. Denotamos por l a la línea que incide con los puntos A, A', B, B' (véase figura 3.16). Sea S un punto no incidente con l , consideramos una línea l' incidente con A y que no sea incidente con S . Denotamos por A'_1, B_1, B'_1 a la sección del haz con centro S , por la línea l' . Denotamos por C al punto de intersección de las líneas B_1B' y A'_1S ; y por B_2 al punto de intersección de las líneas SB y A'_1B' .

1. Primero, notemos que

¹⁰Coxeter, Harold. (1987). *Projective Geometry*. p.12.

$$AA'BB' \stackrel{S}{\bar{\wedge}} AA_1B_1B'_1 \stackrel{B'}{\bar{\wedge}} A'A_1CS \stackrel{B_1}{\bar{\wedge}} A'AB'B.$$

Por tanto, existe una proyectividad tal que $AA'BB' \bar{\wedge} A'AB'B$.

2. Además, observemos que

$$AA'BB' \stackrel{S}{\bar{\wedge}} AA_1B_1B'_1 \stackrel{B'}{\bar{\wedge}} BB_2B_1S \stackrel{A'_1}{\bar{\wedge}} BB'AA'.$$

Por tanto, existe una proyectividad tal que $AA'BB' \bar{\wedge} BB'AA'$.

3. Finalmente, notemos que

$$AA'BB' \stackrel{A'_1}{\bar{\wedge}} B_1SBB_2 \stackrel{B'}{\bar{\wedge}} CSA'A'_1 \stackrel{B_1}{\bar{\wedge}} B'BA'A.$$

Por tanto, existe una proyectividad tal que $AA'BB' \bar{\wedge} B'BA'A$.

□

En la siguiente proposición, Oswald Veblen y John Young (1910) muestran que, si bajo una proyectividad, dos puntos distintos se corresponden el uno al otro doblemente, entonces todo par de puntos homólogos se corresponden el uno al otro doblemente.

Proposición 3.3.2. *Si en una proyectividad entre los puntos incidentes con una línea, dos puntos distintos se corresponden el uno al otro doblemente, entonces la proyectividad es una involución.*¹¹

Demostración. Sean A, A' dos puntos distintos incidentes con una línea l tal que se corresponden el uno al otro doblemente en una proyectividad y sean B, B' , dos puntos distintos e incidentes con l , otro par de puntos correspondientes. Queremos demostrar que los puntos B y B' se corresponden uno al otro doblemente.

Consideramos B'' el correspondiente de B' bajo la proyectividad, así $AA'BB' \bar{\wedge} A'AB'B''$. Además, por la proposición 3.3.1 existe una proyectividad tal que $A'AB'B'' \bar{\wedge} AA'B''B'$. Al componer estas proyectividades obtenemos $AA'BB' \bar{\wedge} AA'B''B'$. Por el *TFGP* (proposición 1.2.4), el punto B coincide con el punto B'' . Luego, la proyectividad $AA'B \bar{\wedge} A'AB'$ transforma B' en B , esto es, los puntos B y B' se corresponden uno al otro doblemente. Por tanto, la proyectividad es una involución. □

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

¹¹Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.102.

Proposición 3.3.3. *Si en una proyectividad entre las líneas incidentes con un punto, dos líneas distintas se corresponden la una a la otra doblemente, entonces la proyectividad es una involución.*

Recordemos que una proyectividad está completamente determinada cuando tres pares de puntos correspondientes están dados. No obstante, como consecuencia de la proposición anterior, dos pares de puntos correspondientes serán suficientes para determinar una involución.

Proposición 3.3.4. *Una involución está determinada por cualesquiera dos de sus pares.*¹²

Demostración. Sean A, A' y B, B' dos pares de puntos conjugados de una involución en una línea l . Consideramos C un punto incidente con l y sea C' su punto correspondiente. Por la proposición 3.3.2 se sigue que C y C' se corresponden el uno al otro doblemente y por el *TFGP* (proposición 1.2.4) se tiene que la involución ha sido determinada. \square

Harold Coxeter (1949) presenta una manera muy útil de caracterizar a las involuciones.

Proposición 3.3.5. *Los puntos $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares conjugados de una involución si y sólo si existe una proyectividad tal que $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$.*¹³

Demostración. Supongamos que $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución. Queremos demostrar que existe una proyectividad tal que $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$.

Como $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución, entonces $ABCC' \bar{\wedge} A'B'C'C$. Además, por la proposición 3.3.1, existe una proyectividad tal que $A'B'C'C \bar{\wedge} B'A'CC'$. Al componer estas proyectividades, obtenemos $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$.

Recíprocamente, supongamos que existe una proyectividad tal que $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$. Queremos demostrar que $A, A'; B, B'; C, C'$ son pares de puntos conjugados de una involución.

Por la proposición 3.3.1, existe una proyectividad tal que $B'A'CC' \bar{\wedge} A'B'C'C$. Al componer estas proyectividades, obtenemos $ABCC' \bar{\wedge} A'B'C'C$. Luego, por la proposición 3.3.2 se sigue que $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos de una involución. \square

La proposición anterior nos dará la relación entre las involuciones y los puntos de un conjunto cuadrangular asociado a un cuadrángulo completo.

¹²Coxeter, Harold. (1949). *The real projective plane*. p.47.

¹³*Ibidem*. p.47.

3.4. Cuadrángulo completo e involuciones

Tres pares de puntos conjugados de una involución son caracterizados como elementos de un conjunto cuadrangular de puntos. Una línea, que no incide con un vértice, corta a los pares de lados opuestos de un cuadrángulo completo en tres pares de puntos de una involución. De esta manera, las involuciones tendrán una relación cabal con la configuración del cuadrángulo completo.

Proposición 3.4.1. *Los puntos $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares conjugados de una involución si y sólo si $(AA')(BB')(CC')$.¹⁴*

Demostración. Sean $A, A'; B, B', C, C'$ puntos incidentes con una línea l (véase figura 3.17). Si, $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución, por la proposición 3.3.5, tal hecho ocurre si y sólo si existe la proyectividad $ABCC' \bar{\wedge} B'A'CC'$. A su vez, por la proposición 2.6.5, lo anterior sucede si y sólo si $(AA')(BB')(CC')$.

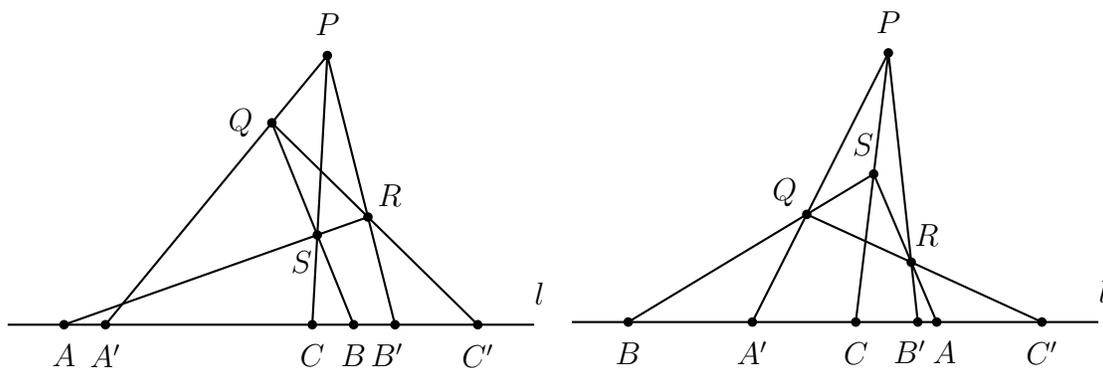


Figura 3.17: $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados

□

La proposición precedente nos da una manera de construir a C' el punto conjugado de un punto C en la involución determinada por los pares A, A' y B, B' , una vez que construimos el conjunto cuadrangular $(AA')(BB')(CC')$, a partir de los cinco puntos A, A', B, B' y C . Dualmente, tres pares de líneas conjugadas de una involución podrán ser caracterizados como elementos de un conjunto cuadrangular de líneas. Un punto, que no incide con un lado, se une a los pares de vértices opuestos de una cuadrilátero completo en tres pares de líneas de una involución.

Proposición 3.4.2. *Las líneas $a, a'; b, b'$ y c, c' son pares conjugadas de una involución si y sólo si $(aa')(bb')(cc')$.*

¹⁴Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.103.

Con base en las relaciones entre involuciones y cuadrángulos completos que hemos tratado, en el plano proyectivo real, presentaremos un par de teoremas duales que serán análogos para los teoremas de Ceva (proposición 1.1.7) y Menelao (proposición 1.1.8). Debido a la naturaleza métrica de este par de teoremas, no son válidos en el plano proyectivo real. No obstante, C. O'hara y D. Ward (1937) señalan que, como la concurrencia de líneas y la colinealidad de puntos son nociones de incidencia, habrá condiciones no métricas para determinar tales propiedades en función de triángulos (p.91). El siguiente par de teoremas enuncian condiciones necesarias y suficientes para la concurrencia de tres líneas que inciden con los vértices de un triángulo y para la colinealidad de tres puntos que inciden con los lados de un triángulo.

Proposición 3.4.3. Teorema de Ceva (proyectivo). *Si $\triangle PQR$ es un triángulo cuyos lados QR, RP y PQ son las líneas p, q y r , respectivamente; tres líneas l, m y n son incidentes con P, Q y R , respectivamente; x una línea que interseca a las seis líneas anteriores en puntos distintos entre sí; y los puntos A, B, C, A', B' y C' son las intersecciones de la línea x con cada una de las líneas n, m, l, r, q y p , respectivamente. Así pues, las líneas l, m y n son concurrentes si y sólo si $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución (véase figura 3.18).¹⁵*

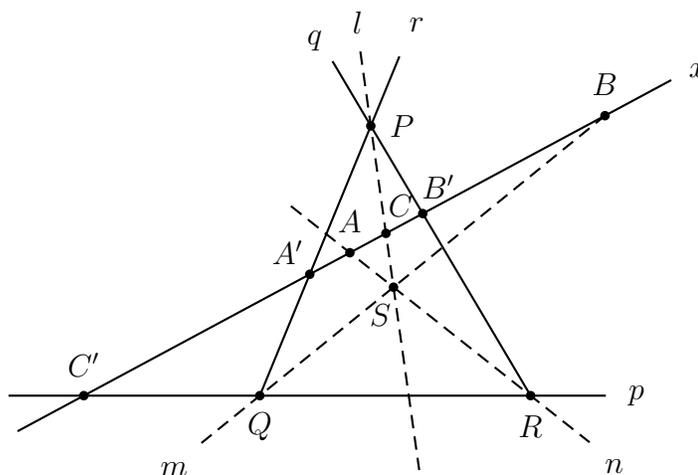


Figura 3.18: Teorema de Ceva (proyectivo)

Demostración. Supongamos que las líneas l, m y n concurren en un punto S . Queremos demostrar que $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución.

Notemos que los puntos A, B, C, A', B' y C' son las intersecciones de x con los lados RS, SQ, PS, PQ, PR y QR del cuadrángulo completo $PQRS$, esto es, $(AA')(BB')(CC')$. Por la proposición 3.4.1 concluimos que $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución.

¹⁵O'hara, C. y Ward, D. (1937). *An Introduction to Projective Geometry*. p.91.

Recíprocamente, supongamos que A, A' ; B, B' y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución. Queremos demostrar que las líneas l, m y n concurren.

Denotamos por S al punto de intersección de las líneas m y n , llamamos l' a la línea PS y sea C'' el punto de intersección de las líneas x y l' . Luego, los puntos A, B, C'' , A', B' y C' son las intersecciones de x con los lados RS, SQ, PS, PQ, PR y QR del cuadrángulo completo $PQRS$, esto es, $(AA')(BB')(C''C')$. Por la proposición 3.4.1, se sigue que A, A' ; B, B' y C'', C' son pares de puntos conjugados de la involución. Por hipótesis, el conjugado de C' es el punto C , por lo que los puntos C y C'' coinciden. De manera que, la línea l pasa por S . Por tanto, las líneas l, m y n concurren en el punto S . \square

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.4.4. Teorema de Menelao (proyectivo). *Si $\triangle PQR$ es un triángulo cuyos lados QR, RP y PQ son las líneas p, q y r , respectivamente; tres puntos L, M y N son incidentes con p, q y r , respectivamente; X un punto que se une a los seis puntos anteriores en líneas distintas entre sí; y las líneas a, b, c, a', b' y c' son las uniones del punto X con cada uno de los puntos N, M, L, R, Q y P , respectivamente. Así pues, los puntos L, M y N son colineales si y sólo si a, a' ; b, b' y c, c' son pares de líneas conjugadas de una involución (véase figura 3.19).¹⁶*

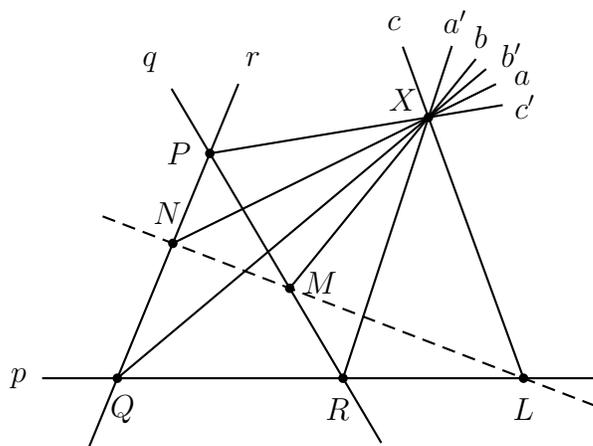


Figura 3.19: Teorema de Menelao (proyectivo)

Debido a que las involuciones son un caso particular de las proyectividades, analizaremos qué sucede con los puntos fijos, si es que existen, de una involución. A los puntos fijos de una involución los llamaremos *puntos dobles*. Recordemos que toda proyectividad, distinta de la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos. Cuando no tiene puntos fijos es elíptica, cuando tiene un punto fijo es parabólica y cuando tiene dos puntos fijos es hiperbólica. En la siguiente proposición, C. O'hara y D. Ward (1937) muestran que

¹⁶O'hara, C. y Ward, D. (1937). *An Introduction to Projective Geometry*. p.91.

los puntos dobles de una involución hiperbólica son siempre distintos y descarta la existencia de las involuciones parabólicas.

Proposición 3.4.5. *Si una involución de una hilera tiene un punto doble, entonces tiene un segundo punto doble, distinto del primero.*¹⁷

Demostración. Sea M un punto doble de una involución. Queremos demostrar que existe un segundo punto doble, distinto de M , de la involución.

Consideramos C y C' un par de puntos conjugados de la involución, tales que C y C' son distintos. Sea N es el conjugado armónico de M con respecto a C y C' , y sea N' el punto conjugado de N en la involución. Por consiguiente, $MNCC' \bar{\wedge} MN'C'C$. Además, como $H(MN, CC')$, entonces $H(MN', C'C)$. Por la proposición 2.1.7, las relaciones $H(MN, CC')$ y $H(MN', C'C)$ son equivalentes y como el conjugado armónico es único, los puntos N y N' coinciden. Por tanto N es distinto de M y es un punto doble de la involución. \square

Observemos que, en la proposición anterior, los pares de puntos que son conjugados armónicos con respecto a M y N , son pares de puntos conjugados de una involución cuyos puntos dobles son M y N . Este hecho es mencionado por Oswald Veblen y John Young (1910) en la siguiente proposición (véase figura 3.20).

Proposición 3.4.6. *Una involución de una hilera tiene puntos dobles si y sólo si son conjugados armónicos con respecto a cada par de la involución.*¹⁸

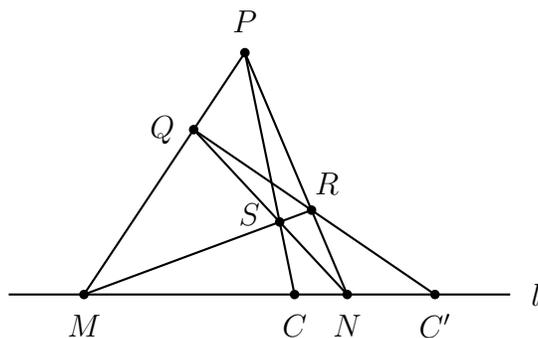


Figura 3.20: M y N son puntos dobles de la involución

Demostración. Sean M y N puntos dobles de una involución y sean C y C' un par de puntos conjugados de la involución. Por la proposición 3.3.5, ésto ocurre si y sólo si existe una proyectividad tal que $MNCC' \bar{\wedge} NMCC'$. Además, por la proposición 2.6.6, se tiene que $MNCC' \bar{\wedge} NMCC'$ si y sólo si $H(MN, CC')$. \square

¹⁷O'hara, C. y Ward, D. (1937). *An Introduction to Projective Geometry*. pp.87,88.

¹⁸Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.103.

Puesto que una sección de un haz armónico es una hilera armónica, es evidente que, una línea corta a los pares de líneas conjugadas de una involución en una hilera de pares de puntos conjugados de una involución y que las intersecciones con las líneas dobles del haz, son los puntos dobles de la hilera. Por el principio de dualidad, obtenemos los siguientes resultados:

Proposición 3.4.7. *Si una involución de un haz tiene una línea doble, entonces tiene una segunda línea doble, distinta de la primera.*

Proposición 3.4.8. *Una involución de un haz tiene líneas dobles si y sólo si son conjugadas armónicas con respecto a cada par de la involución.*

Ahora trataremos las propiedades de magnitud que se le asocian a las involuciones en el plano euclidiano. De esta manera, veremos que toda inversión será un caso particular de una involución.

3.5. Propiedades de magnitud de una involución de puntos

En el plano proyectivo real, toda línea l incide con un punto impropio, esto es, el punto al infinito que incide con todas las líneas paralelas a l . Dado un par de puntos conjugados de una involución, al obtener el conjugado del punto al infinito bajo la involución, tal punto será un punto propio. Si bien, no podemos hacer consideraciones métricas en torno al punto al infinito incidente con una línea, sí podremos hallar importantes propiedades métricas en la involución de una hilera de puntos, una vez que distinguimos al conjugado del punto al infinito en la involución. John Young (1982) define el centro de una involución de la siguiente manera:

Definición 3.5.1. El *centro de una involución* en una línea, es el conjugado del punto al infinito que incide con la línea.¹⁹

Esta última noción nos permitirá comparar las involuciones en el plano proyectivo con las involuciones en el plano euclidiano. Una vez presentada la noción de una hilera en involución (definición 3.0.3), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano euclidiano. En la siguiente proposición, John Young (1982) muestra que los pares de puntos conjugados de una involución podrán asociarse a los elementos de un cuadrángulo completo.

Proposición 3.5.1. *Los puntos $A, A'; B, B'$ son pares de una involución con centro O si y sólo si existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', O inciden en los lados RS, PQ, QS, PR, PS , respectivamente, y QR es paralela a AB .*²⁰

¹⁹Young, John. (1982) *Projective Geometry*. p.98.

²⁰*Ibidem*. p.99.

Demostración. Supongamos que $A, A'; B, B'$ son pares de una involución con centro O . Queremos demostrar que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', O inciden en los lados RS, PQ, QS, PR, PS , respectivamente, y QR es paralela a AB .

Consideramos un punto P no incidente con la línea AB y trazamos las líneas PA' y PB' . Trazamos los circuncírculos de los triángulos $\triangle PAA'$ y $\triangle PBB'$. Denotamos por S al otro punto de intersección de estas dos circunferencias. Luego, R es el punto de intersección de las líneas AS y PB' ; y Q es el punto de intersección de las líneas BS y PA' (véase figura 3.21). De esta manera, el cuadrángulo completo $PQRS$ es el buscado.

Primero veamos que el punto O , incide con la línea PS . Notemos que, la línea PS es el eje radical de los circuncírculos de $\triangle PAA'$ y $\triangle PBB'$. Como $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, por la proposición 1.1.3, tenemos que O es un punto que incide con la línea PS .

Ahora, para mostrar que la línea QR es paralela a la línea AB , veamos que los puntos P, Q, R y S son concíclicos. Por propiedades de potencia, tenemos que $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OS \cdot OP$. Luego, los triángulos $\triangle AOS$ y $\triangle POA'$ comparten el ángulo en el vértice O y cumplen $\frac{OA}{OS} = \frac{OP}{OA'}$. Así, por el criterio de semejanza LAL, los triángulos $\triangle AOS$ y $\triangle POA'$ son semejantes. Por lo que, $\angle A'PO = \angle OAS$ y $\angle OA'P = \angle ASO$. Asimismo, los triángulos $\triangle BOS$ y $\triangle POB'$ comparten el ángulo en el vértice O y cumplen $\frac{OB}{OS} = \frac{OP}{OB'}$. Así, por el criterio de semejanza LAL, los triángulos $\triangle BOS$ y $\triangle POB'$ son semejantes. Por lo que, $\angle OPB' = \angle SBO$ y $\angle PB'O = \angle OSB$.

Los ángulos internos del triángulo $\triangle PA'B'$ suman 180° , esto es,

$$\angle B'A'P + \angle PB'A' + \angle A'PB' = 180^\circ,$$

dicho en otros términos,

$$\angle OA'P + \angle PB'O + (\angle A'PO + \angle OPB') = 180^\circ.$$

Además, $\angle ASO = \angle RSP$ y $\angle OSB = \angle PSQ$, por ser ángulos opuestos por el vértice. Así pues, obtenemos lo siguiente

$$(\angle RSP + \angle PSQ) + (\angle QPS + \angle SPR) = 180^\circ,$$

$$\angle RSQ + \angle QPR = 180^\circ.$$

Por propiedades de cuadriláteros cíclicos, lo anterior ocurre si y sólo si los puntos P, Q, R y S son concíclicos. Por consiguiente, $\angle QPS = \angle QRS$. Además, como $\angle QPS = \angle A'PO = \angle OAS$, entonces $\angle QRS = \angle OAS$, dicho en otros términos, $\angle QRA = \angle BAR$. Ésto último sucede si y sólo si las líneas QR y AB son paralelas.

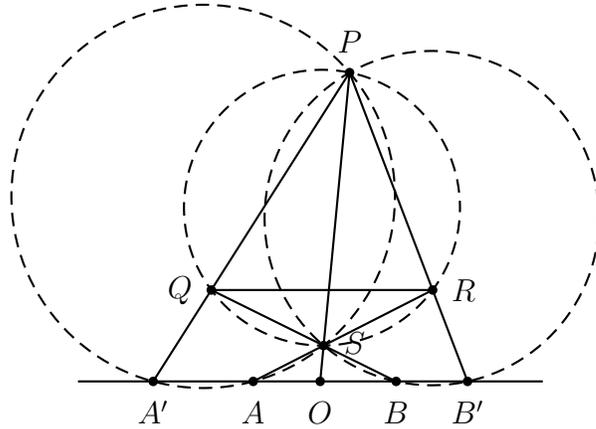


Figura 3.21: El cuadrángulo completo $PQRS$ es tal que QR es paralela a AB

Recíprocamente, supongamos que existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', O inciden en los lados RS, PQ, QS, PR, PS , respectivamente, y QR es paralela a AB (véase figura 3.22). Queremos demostrar que los puntos $A, A'; B, B'$ son pares de una involución con centro O .

Denotamos por T al punto de intersección de las líneas PS y QR . Como QR es paralela a AB , obtenemos los siguientes pares de triángulos semejantes:

$$\triangle POB' \sim \triangle PTR, \text{ por lo que } \frac{\overline{OB'}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{PT}},$$

$$\triangle SOB \sim \triangle STQ, \text{ por lo que } \frac{\overline{OB}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{ST}}.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OB'}}{\overline{TQ} \cdot \overline{TR}} = \frac{\overline{SO} \cdot \overline{PO}}{\overline{ST} \cdot \overline{PT}}.$$

$$\triangle POA' \sim \triangle PTQ, \text{ por lo que } \frac{\overline{OA'}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{PT}},$$

$$\triangle SOA \sim \triangle STR, \text{ por lo que } \frac{\overline{OA}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{ST}}.$$

$$\text{Por tanto, } \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{\overline{TQ} \cdot \overline{TR}} = \frac{\overline{SO} \cdot \overline{PO}}{\overline{ST} \cdot \overline{PT}}.$$

$$\text{Por consiguiente, } \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k.$$

Si $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} > 0$, entonces $\overline{OA} > 0$ y $\overline{OA'} > 0$, o bien $\overline{OA} < 0$ y $\overline{OA'} < 0$. Como A, A', B, B' y O son colineales, así $OA \cdot OA' = k$. Análogamente, si $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} < 0$,

concluimos que $OA \cdot OA' = k$. Por tanto, $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = k$.

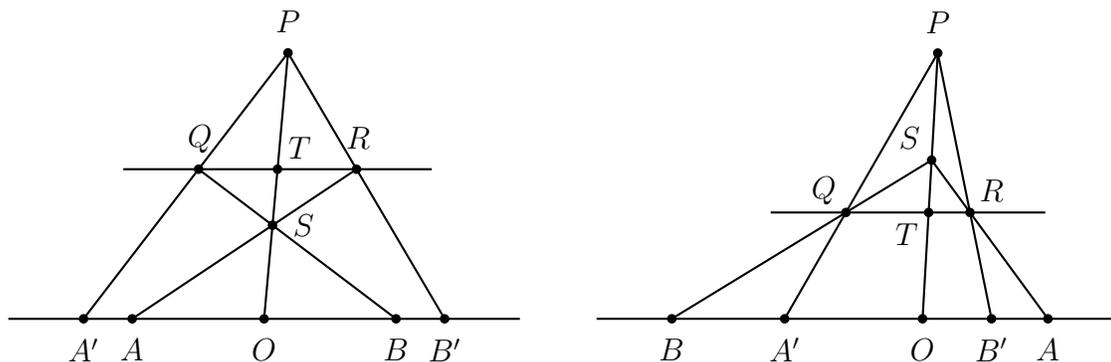


Figura 3.22: $OA \times OA' = OB \times OB' = k$

□

Si A, A', B y B' son cuatro puntos colineales, la proposición anterior nos da un método para construir el centro de la involución tal que A, A' y B, B' son pares de puntos conjugados. Trazamos l , una paralela a la línea AB , y consideramos un punto P que no incida con l ni con AB . Denotamos por Q a la intersección de PA' y l ; por R a la intersección de PB' y l ; por S a la intersección de QB y AR ; y por O a la intersección de PS y AB . De esta manera, O es el punto buscado.

Cualquier par de puntos conjugados de una involución, o están de un mismo lado del centro, o bien están en lados distintos del centro. Tal diferencia nos permitirá establecer las siguientes nociones:

Definición 3.5.2. Una hilera en involución es *elíptica* si y sólo si los dos puntos de un par conjugado están en lados distintos del centro.

Definición 3.5.3. Una hilera en involución es *hiperbólica* si y sólo si los dos puntos de un par conjugado están en el mismo lado del centro.

Además, a los puntos fijos de una involución los llamaremos *puntos dobles*. En relación con las definiciones precedentes, haremos las siguientes observaciones:

Observación 3.5.1. Sean A, A' , y B, B' pares de puntos conjugados de una involución con centro O .

1. Si la involución es *elíptica*, entonces los segmentos AA' y BB' no son ajenos y ninguno está completamente contenido en el otro.
2. Si la involución es *hiperbólica*, entonces los segmentos AA' y BB' son ajenos o uno está completamente contenido en el otro.

Demostración. Tenemos que

1. si la involución es elíptica, entonces los dos puntos de cualquier par de puntos conjugados A, A' y B, B' , están en lados distintos de O (véase figura 3.23). Luego, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = k < 0$.

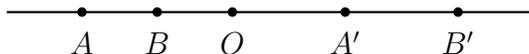


Figura 3.23: Los segmentos AA' y BB' no son ajenos

Sin pérdida de generalidad, supongamos lo siguiente

$$OA' < OB',$$

$$\frac{k}{AO} < \frac{k}{BO},$$

$$AO > BO.$$

Así, los segmentos AA' y BB' no son ajenos y ninguno está completamente contenido en el otro.

2. si la involución es hiperbólica, entonces los dos puntos de cualquier par de puntos conjugados A, A' y B, B' están del mismo lado de O . Sean M uno de los puntos dobles de la involución. Luego, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OM^2 = k > 0$.

Caso 1. Los pares de puntos A, A' y B, B' están en distintos lados de O (véase figura 3.24).

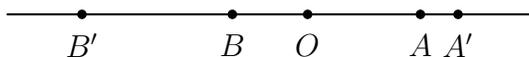


Figura 3.24: Los segmentos AA' y BB' son ajenos

En este caso, está claro que, los segmentos AA' y BB' son ajenos.

Caso 2. Los pares de puntos A, A' ; B, B' y el punto M están de un mismo lado de O (véase figura 3.25).



Figura 3.25: BB' está completamente contenido en AA'

Como $OM^2 = OB \cdot OB'$, entonces $OM < OB \cdot OB'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos lo siguiente

$$\begin{aligned} OB' &< OM, \\ \frac{k}{OB} &< \frac{k}{OM}, \\ OB &> OM. \end{aligned}$$

Por lo que, $OB' < OM < OB$. Además, si

$$\begin{aligned} OA' &< OB', \\ \frac{k}{OA} &< \frac{k}{OB}, \\ OA &> OB. \end{aligned}$$

Por tanto, $OA' < OB' < OM < OB < OA$. Así, el segmento BB' está completamente contenido en el segmento AA' . \square

Notemos que, si la involución es hiperbólica, esto es, $OA \cdot OA'$ es positivo, entonces trazamos la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{OA \cdot OA'}$ (véase figura 3.26). Así, la involución es inducida por una inversión con respecto a una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{OA \cdot OA'}$. Por tanto, toda inversión induce una involución, pero no toda involución es inducida por una inversión. Además, si M es un punto doble de una involución hiperbólica, entonces $OM^2 = OA \cdot OA'$. Luego, la línea OA también incide con un segundo punto doble N , distinto de M , tal que $MO = ON$ y por tanto, $OM^2 = ON^2 = OA \cdot OA'$. Dado que O es punto medio del segmento MN y $ON^2 = OA \cdot OA'$, por la proposición 3.1.2, ésto ocurre si y sólo si $H(MN, AA')$. Por lo que, M y N son conjugados armónicos con respecto a cada par de puntos conjugados de la involución.

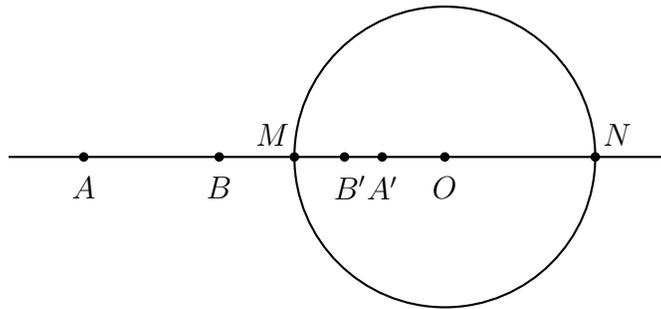


Figura 3.26: La involución de puntos es hiperbólica

En el plano proyectivo real, vimos que los puntos conjugados de una involución son asociados a un conjunto cuadrangular de puntos. Ahora, en el plano euclidiano, veremos que tal resultado también se obtendrá vía propiedades de razón cruzada.

3.6. Involución y razón cruzada

Como ya hemos visto, la razón cruzada es una propiedad de magnitud que se preserva bajo propiedades de incidencia. Así pues, al estar relacionadas con propiedades de incidencia, las involuciones preservan la razón cruzada, esto es, la razón cruzada de cuatro puntos será igual a la razón cruzada de sus cuatro puntos conjugados. En el plano euclidiano, tal hecho es expuesto en la siguiente proposición.

Proposición 3.6.1. *Si $A, A'; B, B'; C, C'$ y D, D' son pares de puntos conjugados de una involución, entonces $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$.*

Demostración. Denotamos por O al centro de la involución. De este modo, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = OD \cdot OD' = k$. Queremos demostrar que $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \{ABCD\} &= \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB} = \frac{(AO + OC)(DO + OB)}{(AO + OD)(CO + OB)} \\ &= \frac{\left(\frac{k}{A'O} + \frac{k}{OC'}\right) \left(\frac{k}{D'O} + \frac{k}{OB'}\right)}{\left(\frac{k}{A'O} + \frac{k}{OD'}\right) \left(\frac{k}{C'O} + \frac{k}{OB'}\right)} = \frac{\left(\frac{A'O + OC'}{A'O \cdot OC'}\right) \left(\frac{D'O + OB'}{D'O \cdot OB'}\right)}{\left(\frac{A'O + OD'}{A'O \cdot OD'}\right) \left(\frac{C'O + OB'}{C'O \cdot OB'}\right)} \\ &= \frac{(A'O + OC')(D'O + OB')}{(A'O + OD')(C'O + OB')} = \frac{A'C' \cdot D'B'}{A'D' \cdot C'B'} = \{A'B'C'D'\}. \end{aligned}$$

□

Ahora, en comparación con la proposición 3.3.5 que hemos tratado en el plano proyectivo real, en la siguiente proposición, Levi Shively (1984) menciona una versión de dicho resultado en el euclidiano, con base en propiedades de razón cruzada.

Proposición 3.6.2. *Dados seis puntos en una línea relacionados por pares. Los seis puntos forman pares de puntos conjugados de una involución si y sólo si la razón cruzada*

de cualesquiera cuatro puntos de ellos es igual a la razón cruzada de sus cuatro puntos correspondientes.²¹

Demostración. Sean $A, A'; B, B'$ y C, C' tres pares de puntos en una línea.

Supongamos que A, A', B, B' y C, C' son pares de puntos de una involución. Sea O el centro de dicha involución, esto es, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = k$. Queremos demostrar, sin pérdida de generalidad, que $\{AA'BC\} = \{A'AB'C'\}$.

Análogamente a la prueba de la proposición 3.6.1, tenemos que $\{AA'BC\} = \{A'AB'C'\}$.

Recíprocamente, supongamos que A, A', B, B' y C, C' son pares de puntos tales que la razón cruzada de cualesquiera cuatro es igual a la razón cruzada de sus correspondientes. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{AA'BC\} = \{A'AB'C'\}$. Queremos demostrar que A, A', B, B' y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución.

Con base en la proposición 3.5.1, construimos O el centro de la involución determinada por los pares de puntos A, A' y B, B' y sea C'' el conjugado del punto C bajo dicha involución. Dado que A, A', B, B' y C, C'' son pares de puntos conjugados, entonces $\{AA'BC\} = \{A'AB'C''\}$. Luego, $\{A'AB'C'\} = \{A'AB'C''\}$, por la proposición 2.4.1, concluimos que C y C'' son el mismo punto. Por tanto, A, A', B, B' y C, C' son pares de puntos conjugados de la misma involución. \square

En relación con la proposición precedente, Leví Shively (1984) presenta una prueba euclidiana de la proposición 3.4.1, la cual enuncia que una línea, que no pasa por un vértice, corta a los lados opuestos de un cuadrángulo completo en tres pares de puntos conjugados de una involución.

Proposición 3.6.3. *Los puntos $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares conjugados de una involución si y sólo si existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', C y C' inciden en los lados RS, PQ, QS, PR, PS y QR , respectivamente.²²*

Demostración. Sean A, A', B, B', C, C' puntos incidentes con una línea l . Si, $A, A'; B, B'$ y C, C' son pares de puntos conjugados de una involución. Por la proposición 3.6.2, tal hecho ocurre si y sólo si $\{ACBC'\} = \{A'C'B'C\}$. A su vez, por la proposición 2.7.1, lo anterior sucede si y sólo si existe un cuadrángulo completo $PQRS$ tal que los puntos A, A', B, B', C y C' inciden en los lados RS, PQ, QS, PR, PS y QR , respectivamente. \square

En el plano euclidiano, la noción de hilera de puntos en involución tiene su correspondiente noción de haz de líneas en involución.

²¹Shively, Levi. (1984). *Introducción a la Geometría Moderna*. pp.131,132.

²²*Ibidem*. p.136.

3.7. Propiedades de magnitud de una involución de líneas

Una vez presentada la noción de un haz en involución (definición 3.0.4), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano euclidiano. Para comenzar, haremos las siguientes distinciones:

Definición 3.7.1. Un haz en involución es *elíptica* si y sólo si una línea corta al haz en una hilera en involución elíptica.

Definición 3.7.2. Un haz en involución es *hiperbólica* si y sólo si una línea corta al haz en una hilera en involución hiperbólica.

En relación con el par de nociones anteriores, haremos las siguientes observaciones:

Observación 3.7.1. Sean $a, a'; b, b'$ y c, c' pares de líneas conjugadas de un haz en involución.

1. Si la involución es *elíptica*, entonces cualquier par de líneas, que no inciden con el vértice, cortan al haz en una hilera en involución elíptica.
2. Si la involución es *hiperbólica*, entonces cualquier par de líneas, que no inciden con el vértice, cortan al haz en una hilera en involución hiperbólica.

Demostración. Sean l_1 y l_2 dos líneas que cortan al haz a, a', b, b', c, c' , de vértice O , en los puntos $A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1$ y $A_2, A'_2, B_2, B'_2, C_2, C'_2$, respectivamente.

1. Supongamos que $A_1, A'_1; B_1, B'_1;$ y C_1, C'_1 son los pares de una involución elíptica (véase figura 3.27). Queremos demostrar que $A_2, A'_2; B_2, B'_2;$ y C_2, C'_2 son pares de una involución elíptica.

Como $A_1, A'_1; B_1, B'_1;$ y C_1, C'_1 son los pares de una involución, por la proposición 3.6.2, lo anterior ocurre si y sólo si $\{A_1A'_1B_1C_1\} = \{A'_1A_1B'_1C'_1\}$. Además, como l_1 y l_2 cortan a las líneas a, a', b, c del haz en los puntos A_1, A'_1, B_1, C_1 y A_2, A'_2, B_2, C_2 , respectivamente. Por la proposición 2.5.1, se tiene que $\{A_1A'_1B_1C_1\} = \{A_2A'_2B_2C_2\}$. Análogamente, se tiene que $\{A'_1A_1B'_1C'_1\} = \{A'_2A'_2B'_2C'_2\}$. Por lo que, $\{A_2A'_2B_2C_2\} = \{A'_2A_2B'_2C'_2\}$. Por la proposición 3.6.2, lo anterior ocurre si y sólo si $A_2, A'_2; B_2, B'_2;$ y C_2, C'_2 son los pares de una involución.

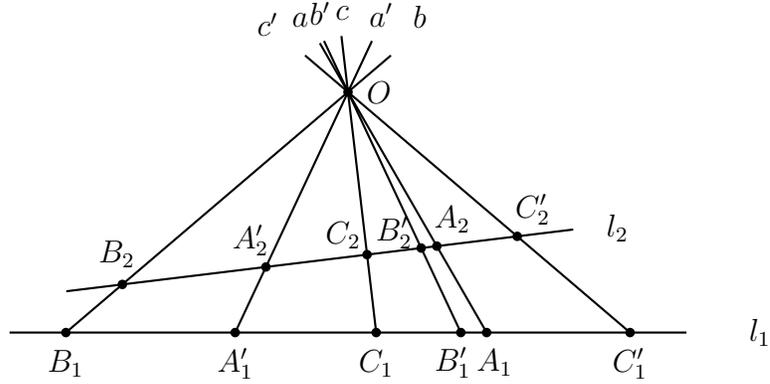


Figura 3.27: Haz en involución elíptica

Para ver que la involución en la línea l_2 es elíptica, supongamos que los puntos $A_1, A'_1; B_1, B'_1$ son pares de una involución elíptica y que los puntos $A_2, A'_2; B_2, B'_2$ son pares de una involución hiperbólica.

Como A_1, A'_1 y B_1, B'_1 son pares de una involución elíptica, por la observación 3.5.1, tenemos que los segmentos $A_1A'_1$ y $B_1B'_1$ no son ajenos y ninguno está completamente contenido en el otro. Así, al considerar los radios $\frac{A_1B_1}{B_1A'_1}$ y $\frac{A_1B'_1}{B'_1A_1}$, uno de ellos es positivo y el otro es negativo. Por lo que

$$\{A_1A'_1B_1B'_1\} = \frac{\frac{A_1B_1}{B_1A'_1}}{\frac{A_1B'_1}{B'_1A_1}} < 0$$

Además, como A_2, A'_2 y B_2, B'_2 son pares de una involución hiperbólica, por la observación 3.5.1, tenemos que los segmentos $A_2A'_2$ y $B_2B'_2$ son ajenos, o bien uno está completamente contenido en el otro. Así, al considerar los radios $\frac{A_2B_2}{B_2A'_2}$ y $\frac{A_2B'_2}{B'_2A_2}$, ambos son negativos, o bien ambos son positivos. Por lo que

$$\{A_2A'_2B_2B'_2\} = \frac{\frac{A_2B_2}{B_2A'_2}}{\frac{A_2B'_2}{B'_2A_2}} > 0.$$

No obstante, como l_1 y l_2 cortan a las líneas a, a', b, b' del haz en los puntos A_1, A'_1, B_1, B'_1 y A_2, A'_2, B_2, B'_2 , respectivamente, por la proposición 2.5.1, se tiene que $\{A_1A'_1B_1B'_1\} = \{A_2A'_2B_2B'_2\}$, lo cual es una contradicción, pues una de estas razones cruzadas es negativa y la otra positiva. Por tanto, A_2, A'_2 y B_2, B'_2 son pares de una involución elíptica.

2. Análogamente a la prueba anterior. \square

También observemos que, si l_1 y l_2 son dos líneas que cortan a los pares a, a', b, b' de un haz en involución hiperbólica, de vértice O , en los puntos A_1, A'_1, B_1, B'_1 y A_2, A'_2, B_2, B'_2 , respectivamente, entonces A_1, A'_1 y B_1, B'_1 son los pares de una involución hiperbólica. Si M_1 es un punto fijo de dicha involución, existe un segundo punto fijo N_1 , distinto de M_1 , tales que M_1 y N_1 son conjugados armónicos con respecto a cada par de la involución en la línea l_1 . Denotamos por M_2 y N_2 a las intersecciones de la líneas l_2 con las líneas OM_1 y ON_1 , respectivamente. Por la proposición 2.2.1, tenemos que los puntos M_2 y N_2 son conjugados armónicos con respecto a cada par de la involución en la línea l_2 . En relación con este hecho, diremos que las *líneas dobles* de un haz en involución hiperbólica son aquellas que son cortadas por cualquier transversal en puntos dobles de una hilera en involución hiperbólica.

Está claro que, las propiedades de hileras en involución serán heredadas a los haces en involución, a excepción del centro de una involución, ya que para un haz en involución no estará definido ni un centro ni un eje de involución.

En la siguiente proposición, John Milne (1911), por una parte, señala que en toda involución de líneas conjugadas, hay un único par de líneas conjugadas perpendiculares y, por otra parte, enuncia la existencia de una involución de líneas conjugadas donde cada par de líneas son perpendiculares.

Proposición 3.7.1. *En un haz en involución, existe un par de líneas conjugadas perpendiculares. Si existe más de un par de líneas perpendiculares conjugadas en un haz, entonces todo par de líneas conjugadas son perpendiculares.*²³

Demostración. Sean $a, a'; b, b'; \dots$ pares de líneas conjugadas de un haz en involución y llamamos P al vértice del haz (véanse figuras 3.28 y 3.29). Queremos demostrar que hay un par de líneas conjugadas perpendiculares en dicho haz.

Consideramos l una línea que corta al haz de líneas $a, a'; b, b'; \dots$ en los puntos $A, A'; B, B'; \dots$, respectivamente. Con base en la proposición 3.5.1, construimos O el centro de la involución de puntos en la línea l . Trazamos el segmento OP y encontramos Q en la línea OP tal que $OQ \cdot OP = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \dots$ ²⁴ Luego, denotamos O' al punto de intersección de la línea l y la mediatriz del segmento PQ . De este modo, O' es el centro de una única circunferencia que pasa por P y Q . Esta circunferencia interseca a l en dos puntos D y D' . De esta manera, las líneas PD y PD' son las líneas buscadas.

²³Milne, John. (1911). *An elementary treatise on cross-ratio geometry*. p.100.

²⁴Para ver una construcción del punto Q , el texto de Levi Shively (*Introducción a la Geometría Moderna.*, México, 1984) puede servir de consulta.

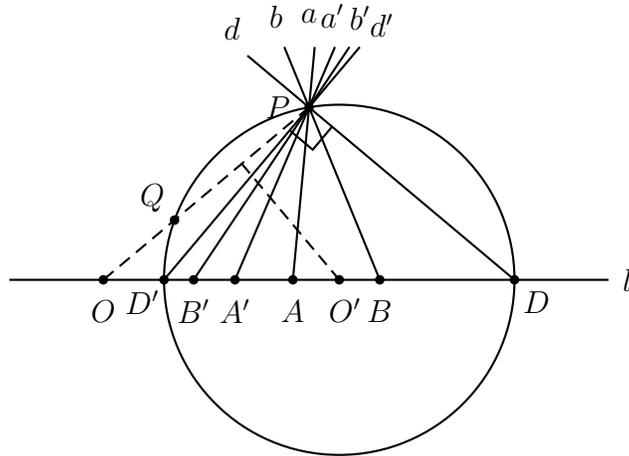


Figura 3.28: PD y PD' son el par de líneas perpendiculares conjugadas del haz

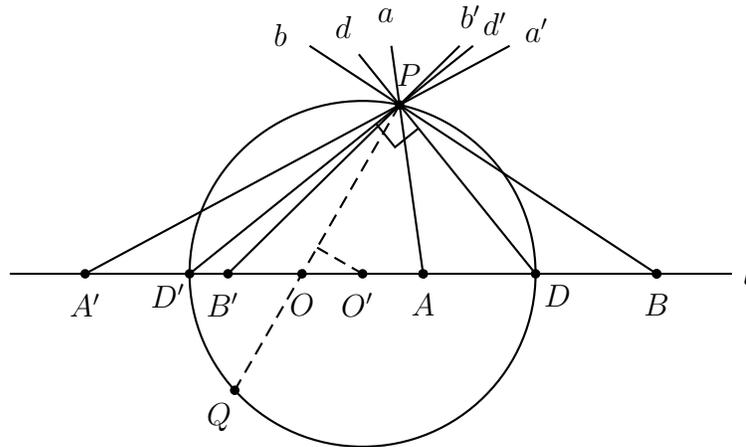


Figura 3.29: PD y PD' son el par de líneas perpendiculares conjugadas del haz

Notemos que, aun cuando la involución sea elíptica o hiperbólica, por propiedades de potencia, toda circunferencia que pase por los puntos P y Q y que interseque a la línea l , lo hace en pares de puntos conjugados de la involución. Sin embargo, la circunferencia de centro O' que pasa por P y Q es la única circunferencia que interseca a la línea l en D y D' , dos puntos conjugados que son extremos de uno de sus diámetros. Así, por la proposición 1.1.1 se sigue $\angle DPD' = 90^\circ$. Por tanto, las líneas PD y PD' son el par de líneas perpendiculares conjugadas del haz.

Si $\overline{PO} = \overline{OQ}$, y las líneas PQ y l son perpendiculares (véase figura 3.30), tenemos que la línea l es la mediatriz del segmento PQ . Por consiguiente, toda circunferencia que pase por P y Q tendrá su centro en l y todos los pares de líneas conjugadas serán perpendiculares.

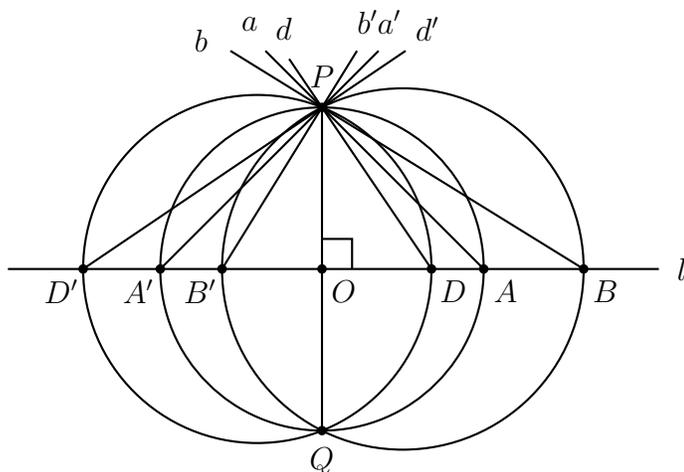


Figura 3.30: Todo par de líneas conjugadas son perpendiculares

□

Cabe resaltar que cuando una involución de líneas es hiperbólica, en general, no sucede que las líneas dobles sean perpendiculares. En la figura 3.28, observemos que las líneas PD y PD' son el par de líneas conjugadas perpendiculares de la involución, mientras que los puntos D y D' se corresponden el uno al otro doblemente, esto es, las líneas PD y PD' no son las líneas dobles de la involución de líneas. Asimismo, notemos que la involución de líneas conjugadas perpendiculares es elíptica, es decir, no tiene puntos invariantes, pues si una línea pasará a través de un punto invariante de esta involución, tendría que ser perpendicular a sí misma, lo cual no es posible.

Nos convendrá tratar la involución en un haz donde cada par de líneas conjugadas son perpendiculares, pues será el instrumento, *sine qua non*, para definir la noción de líneas perpendiculares, vía propiedades de incidencia.

3.8. Involución ortogonal

En el plano proyectivo real, John Young (1982) distingue una involución elíptica en la línea al infinito.

Definición 3.8.1. La *involución ortogonal* o *involución absoluta* es una involución elíptica en la línea al infinito.²⁵

Así como lo hicimos para la noción de punto medio de un segmento (definición 2.3.1),

²⁵Young, John. (1982) *Projective Geometry*. p.90.

en el plano proyectivo real, la noción de líneas perpendiculares tampoco tendrá relación con nociones de magnitud.

Definición 3.8.2. Dos líneas son *perpendiculares* si y sólo si inciden con un par de puntos conjugados de la involución ortogonal.²⁶

Con base en la noción anterior, también definimos lo siguiente:

Definición 3.8.3. Una *altura* de un triángulo es una línea que incide con uno de sus vértices y es perpendicular al lado opuesto.

A sabiendas de la nociones precedentes, probaremos que las alturas de un triángulo concurren, en el plano proyectivo real. Este hecho se debe a que las alturas y los lados de un triángulo cortarían a la línea al infinito en pares de puntos conjugados de la involución ortogonal. Harold Coxeter (1949) señala este hecho en la siguiente proposición.

Proposición 3.8.1. *En el plano proyectivo real, las tres alturas de un triángulo son concurrentes.*²⁷

Demostración. Sean $\triangle PQR$ un triángulo y PD, QE y RF sus alturas (véase figura 3.31). Queremos demostrar que éstas son concurrentes.

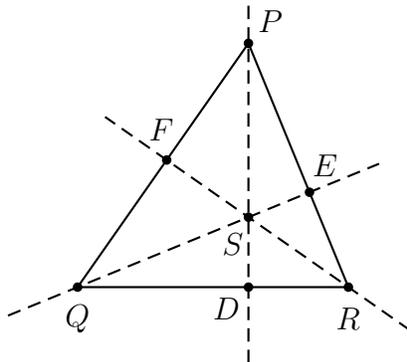


Figura 3.31: Las alturas del $\triangle PQR$ son concurrentes

Notemos que, las alturas PD y QE son tales que los pares de líneas PD, QR y QE, PR intersecan a la línea al infinito en pares de la involución ortogonal. Denotamos S a la intersección de estas dos alturas. Así pues, por la proposición 3.4.1, se tiene que los pares de lados PS, QR y PR, QS del cuadrángulo $PQRS$ intersecan a la línea al infinito en pares de puntos conjugados de la involución ortogonal. Además, las líneas RS y PQ también cortan a la línea al infinito en pares de esa misma involución. Por lo que, la línea RS es la tercer altura del $\triangle PQR$. Por tanto, las alturas PD, QE y RF concurren en el punto S . \square

²⁶Young, John. (1982) *Projective Geometry*. p.90.

²⁷Coxeter, Harold. (1949). *The real projective plane*. p.118.

Cabe mencionar que, en la proposición anterior, el triángulo $\triangle PQR$ no tiene vértices incidentes con la línea al infinito, pues la noción de perpendicularidad se define para líneas distintas de la línea al infinito. Además, en la misma proposición se aprecia el alcance del teorema de Ceva proyectivo (proposición 3.4.3) en el plano proyectivo real, donde se muestra la concurrencia de líneas que inciden en los vértices de un triángulo vía ciertas propiedades de involuciones, a diferencia del teorema de Ceva (proposición 1.1.7) en el plano euclidiano, donde se muestra la concurrencia de líneas a través de ciertas relaciones de magnitud.

En la siguiente proposición, John Young (1982) menciona que todas las involuciones elípticas en la línea al infinito son la misma involución, esto es, todas coinciden con la involución ortogonal.

Proposición 3.8.2. *Si dos líneas son perpendiculares en el plano euclidiano, entonces en el plano proyectivo real, sus puntos ideales son pares conjugados de una única involución elíptica, la involución ortogonal.*²⁸

Demostración. Sea $\triangle PQR$ un triángulo en el plano euclidiano y sean PD, QE, RF sus alturas, sabemos que estas líneas concurren en el ortocentro S . Cuando extendemos al plano proyectivo real, tenemos que los pares de lados opuestos RS, PQ ; QS, PR y PS, QR del cuadrángulo completo $PQRS$ cortan a la línea al infinito en los pares de puntos A, A' ; B, B' y C, C' , respectivamente. Por la proposición 3.4.1, éstos son conjugados de una involución. Ahora consideramos l y l' dos líneas perpendiculares del plano euclidiano (véase figura 3.32). Queremos demostrar que al extender al plano proyectivo real, los puntos ideales de l y l' son puntos conjugados de la involución que tenemos.

Como $\triangle PQR$ es un triángulo, entonces l no es paralela a dos de sus lados. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la línea l no es paralela a QR ni a QP . Denotamos por R' al punto de intersección de las líneas l y QR , y por P' el punto de intersección de las líneas l y QP . Notemos que, la perpendicular $R'F'$ a QP por R' es paralela a RF y la perpendicular $P'D'$ a QR por P' es paralela a PD . Denotamos por S' al punto de intersección de las líneas $R'F'$ y $P'D'$. Así, cuando extendemos al plano proyectivo real, el punto ideal de la línea $R'F'$ es el mismo que el de la línea RF , esto es, el punto A . Análogamente, las líneas PD y $P'D'$ son incidentes con C . De esta manera, los pares de lados opuestos $R'S', P'Q$; $QS', P'R'$ y $P'S', QR'$ del cuadrángulo completo $P'QR'S'$ cortan a la línea al infinito en los pares de puntos A, A' ; B_1, B'_1 y C, C' , respectivamente. La involución que los pares de lados opuestos del cuadrángulo completo $PQRS$ determina en la línea al infinito tiene dos pares en común con la involución del cuadrángulo completo $P'QR'S'$. Luego por la proposición 3.3.4, ambas involuciones coinciden. Ahora bien, como l' es perpendicular a l en el plano euclidiano, entonces l' y QS' son paralelas, donde S' es el ortocentro del triángulo $\triangle P'QR'$. Por lo

²⁸Young, John. (1982) *Projective Geometry*. pp.88,89.

que, al extender al plano proyectivo real, el punto ideal de la línea l' es B_1 , el conjugado del punto ideal B'_1 de la línea l .

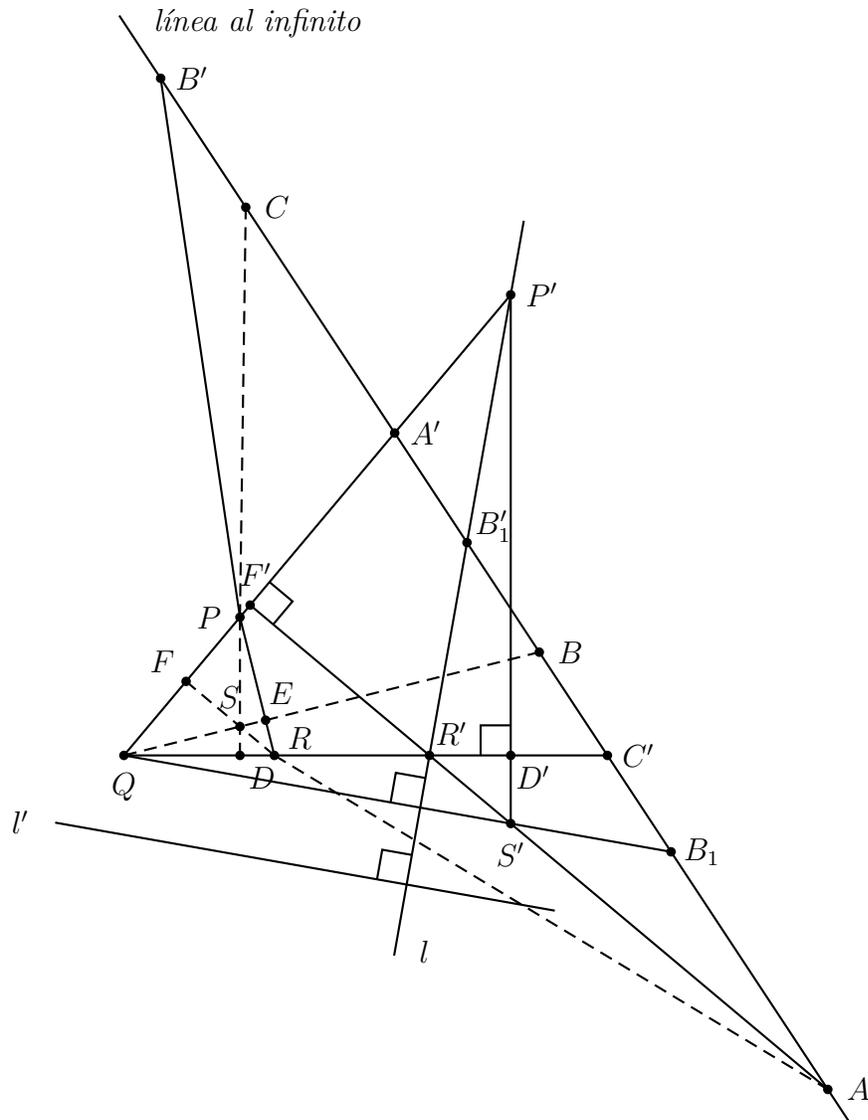


Figura 3.32: $PQRS$ y $P'QR'S'$ inducen la misma involución

Por otro lado, supongamos que esta involución tiene un punto doble M . Así, existen m y m' dos líneas perpendiculares en el plano euclidiano tal que el punto M es el punto ideal de ambas líneas, al extender al plano proyectivo real; lo cual es una contradicción, pues si m y m' inciden con M , entonces son paralelas en el plano euclidiano. Por lo que, la involución es elíptica. De esta manera, la involución coincide con todas las involuciones elípticas en la línea al infinito. Por tanto, la involución coincide con la involución ortogonal. \square

Si l es una línea en el plano euclidiano, denotamos por l_∞ a la línea l con su punto ideal en el plano proyectivo real. Así pues, como consecuencia de la proposición anterior, obtenemos lo siguiente:

Proposición 3.8.3. *Las líneas l y l' son perpendiculares en el plano euclidiano si y sólo si l_∞ y l'_∞ son perpendiculares en el plano proyectivo real.*

Demostración. Supongamos que las líneas l y l' son perpendiculares en el plano euclidiano. Por la proposición 3.8.2 tenemos que l_∞ y l'_∞ son perpendiculares en el plano proyectivo real (véase figura 3.33).

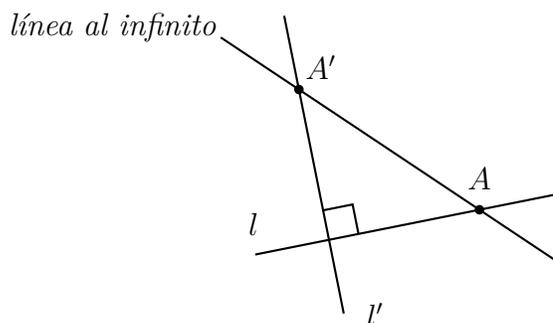


Figura 3.33: l y l' son perpendiculares si y sólo si l_∞ y l'_∞ son perpendiculares

Recíprocamente, supongamos que l_∞ y l'_∞ son perpendiculares en el plano proyectivo real. Queremos demostrar que l y l' son perpendiculares en el plano euclidiano.

Supongamos que l y l' no son perpendiculares en el plano euclidiano. Luego, existe una línea l'' , distinta de l' , tal que l y l'' son perpendiculares en el plano euclidiano. Por la proposición 3.8.2 tenemos que l_∞ y l''_∞ cortan a la línea al infinito en A y A'' , un par de puntos conjugados de la involución ortogonal, en el plano proyectivo real. Además, como l_∞ y l'_∞ son perpendiculares en el plano proyectivo real, entonces cortan a la línea al infinito en A, A' , un par de puntos conjugados de la involución ortogonal. Como el conjugado de A en la involución ortogonal es único, se sigue que los puntos A' y A'' coinciden. Por lo que l'_∞ y l''_∞ inciden con el mismo punto ideal en el plano proyectivo real, esto es, l' y l'' son paralelas en el plano euclidiano. Como l y l'' son perpendiculares en el plano euclidiano, entonces l y l' son perpendiculares, lo cual es una contradicción. Por tanto, l y l' son perpendiculares en el plano euclidiano. \square

Sabemos que, en cualquier par de líneas perpendiculares en el plano euclidiano, una de las líneas es perpendicular a todas las líneas paralelas a la otra línea. En relación con este hecho, por la proposición 3.8.3 tenemos que en cualquier par de líneas perpendiculares en el plano proyectivo real, una de las líneas es perpendicular a todas las líneas paralelas a la otra línea, ya que éstas cortan a la línea al infinito en el mismo punto ideal del correspondiente par de la involución ortogonal.

John Young (1982) menciona que los pares de líneas perpendiculares en un haz de líneas son pares de líneas conjugadas de una involución, pues la línea al infinito interseca a este haz en pares de puntos conjugados de la involución ortogonal. Distinguiremos la involución de líneas perpendiculares en un haz de la siguiente manera:

Definición 3.8.4. La *involución circular* de un haz es la involución de líneas perpendiculares del haz.²⁹

Finalmente, de acuerdo con con la proposición 2.1.4, en un haz armónico un par de líneas armónicas son perpendiculares si y sólo si son las bisectrices de los ángulos formados por el otro par, en el plano euclidiano. En correspondencia con este hecho, en el plano proyectivo real definiremos la noción de bisectriz de un ángulo, tal como lo hicimos para la noción de punto medio de un segmento (definición 2.3.1) y para la noción de líneas perpendiculares (definición 3.8.2), sin recurrir a nociones de magnitud.

Definición 3.8.5. Las *bisectrices* de un ángulo son el par de líneas perpendiculares que son conjugadas armónicas con respecto al par de líneas que forman el ángulo.³⁰

²⁹Young, John. (1982) *Projective Geometry*. p.90.

³⁰*Ibidem*. p.90.

Capítulo 4

Polos y Polares

*Escucha la retórica divina
del pájaro del aire y la nocturna
irradiación geométrica adivina;
mata la indiferencia taciturna
y engarza perla y perla cristalina
en donde la verdad vuelca su urna.*

Rubén Darío, Ama tu ritmo.

A principios del siglo XIX, en diversas publicaciones de la revista *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, se introducen los términos *polo* y *polar*. La relación polo y polar es un tema concerniente tanto al plano euclidiano, como al plano proyectivo real. Mientras que, en el primero, tal relación se efectúa vía una circunferencia, en el segundo, se efectúa vía una cónica. Bajo esta correspondencia, a cada punto del plano se le asocia una única línea, su polar y, a su vez, a dicha línea se le asocia el punto mencionado, su polo. De manera que, a partir de esta relación punto a línea y línea a punto del plano, se establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos y el conjunto de líneas de un plano. Como veremos, en los enunciados de las propiedades principales atribuidas a la relación polo y polar, podrá sustituirse la palabra circunferencia por la palabra cónica y, viceversa, debido a que la circunferencia es un caso particular de cónica en el plano proyectivo real.

En el plano euclidiano, la relación polo y polar con respecto a una circunferencia se define de la siguiente manera:

Definición 4.0.1. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia y A, A' un par de puntos inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Decimos que a , la *polar* de A con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, es la perpendicular a la línea OA por el punto A' . En tal caso, también decimos que A es el *polo* de a con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$ (véase figura 4.1).

La relación polo y polar con respecto a una circunferencia se comporta como una correspondencia de periodo dos. Para todo punto en el plano, existe su correspondiente polar con respecto a una circunferencia, a excepción del centro de la circunferencia, pues su polar no está definida en el plano euclidiano. De la misma manera, para toda línea en el plano existe su polo con respecto a una circunferencia, a excepción de los diámetros de la circunferencia, ya que sus polos no están definidos en el plano euclidiano. Tales hechos se deben a que no existe el inverso del centro de la circunferencia.

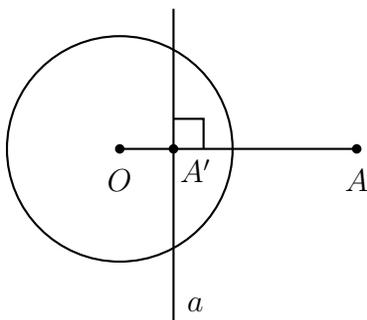


Figura 4.1: Con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, a es la polar de A y A es el polo de a

Entre las propiedades principales de la relación polo y polar con respecto a una circunferencia, veremos que los polos y polares están, intrínsecamente, asociados a propiedades de relación armónica. Por lo que, la relación polo y polar será una noción susceptible de asociarse a ciertos puntos y líneas de un cuadrángulo completo (o cuadrilátero completo). Asimismo, notaremos que las propiedades que vimos de inversión, subyacen a las propiedades que veremos de polos y polares. Además, a partir de las relaciones de incidencia que hay entre un punto y la polar de otro punto, o bien entre una línea y el polo de otra línea, introducimos el siguiente par de definiciones en el plano euclidiano. Éstas parecen ser duales en el sentido del plano proyectivo real (véase figura 4.2).

Definición 4.0.2. Un par de puntos son *conjugados polares* con respecto a una circunferencia si y sólo si la polar de uno de los puntos, incide con el otro punto.

Definición 4.0.3. Un par de líneas son *conjugadas polares* con respecto a una circunferencia si y sólo si el polo de una de las líneas, incide con la otra línea.

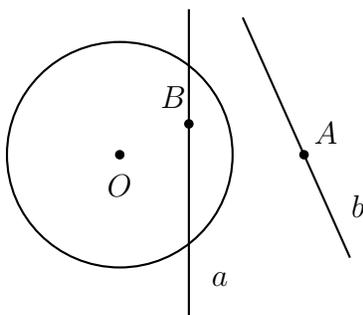


Figura 4.2: A y B son conjugados polares con respecto a la circunferencia

Probaremos que, si un par de puntos A y B son conjugados polares con respecto a una circunferencia, entonces los puntos de ese par son intercambiables, es decir, A incide con la polar de B si y sólo si B incide con la polar de A . Con base en tal resultado, mostraremos que la relación polo y polar preserva la razón cruzada de una hilera de cuatro puntos y, en particular, la relación armónica.

Por otra parte, en el plano proyectivo real, a partir de una cónica se presenta la relación polo y polar. Tal como lo hacen Oswald Veblen y John Young en *Projective Geometry* (1910), *in extenso*, abordaremos las cónicas vía propiedades de incidencia. Una vez que tratamos las relaciones entre las tangentes y los puntos de contacto a una cónica, precisaremos las condiciones que caracterizan a las líneas y los puntos que guardan relaciones de incidencia con una cónica. Veremos que tales hechos devienen en las propiedades que establecen el siguiente par de nociones duales (véase figura 4.3).

Definición 4.0.4. Dada una cónica y un punto A en el plano de la cónica. Si A no incide con la cónica, decimos que a , la *polar* de A con respecto a la cónica, es la línea que incide con los puntos conjugados armónicos de A con respecto a un par de puntos que están en la cónica y que son colineales con A , y con los puntos que inciden con las tangentes a la cónica por todos estos pares de puntos. Si A es un punto que incide con la cónica, decimos que a , la *polar* de A con respecto a la cónica, es la tangente a la cónica por el punto A .

Definición 4.0.5. Dada una cónica y una línea a en el plano de la cónica. Si a no es tangente a la cónica, decimos que A , el *polo* de a con respecto a la cónica, es el punto que incide con las líneas conjugadas armónicas de a con respecto a un par de líneas tangentes a la cónica y que son concurrentes con a , y con las líneas que inciden con los puntos de contacto a la cónica por todos estos pares de líneas. Si a es una línea tangente a la cónica, decimos que A , el *polo* de a con respecto a la cónica, es el punto de contacto a la cónica por la línea a .

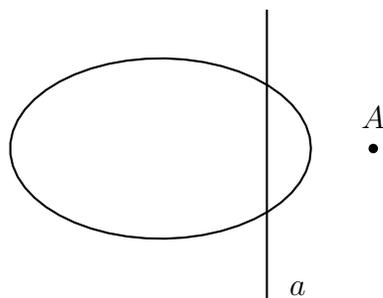


Figura 4.3: Con respecto a la cónica, a es la polar de A si y sólo si A es el polo de a

Con respecto a una cónica, probaremos que a es la polar de A si y sólo si A es el polo de a . Así, la relación polo y polar se comporta como una correspondencia de periodo dos. Es evidente que, los polos y polares se relacionan, *per se*, con la relación armónica.

Entre las propiedades principales de la relación polo y polar con respecto a una cónica,

veremos que ésta será una noción susceptible de asociarse a ciertos puntos y líneas de un cuadrángulo completo (o cuadrilátero completo). Asimismo, notaremos que las propiedades que vimos de involuciones, subyacen a las propiedades que veremos de polos y polares. Además, a partir de las relaciones de incidencia que hay entre un punto y la polar de otro punto, o bien entre una línea y el polo de otra línea, introducimos el siguiente par de definiciones duales en el plano proyectivo real (véase figura 4.4).

Definición 4.0.6. Un par de puntos son *conjugados polares* con respecto a una cónica si la polar de uno de los puntos, incide con el otro punto.

Definición 4.0.7. Un par de líneas son *conjugadas polares* con respecto a una cónica si el polo de una de las líneas, incide con la otra línea.

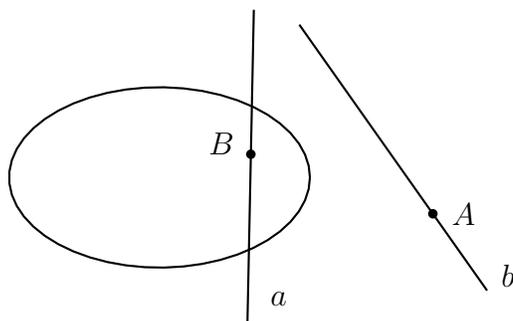


Figura 4.4: A y B son conjugados polares con respecto a la cónica

Probaremos que, si un par de puntos A y B son conjugados polares con respecto a una cónica, entonces los puntos de ese par son intercambiables, es decir, A incide con la polar de B si y sólo si B incide con la polar de A .

En el plano euclidiano, las cónicas son clasificadas en elipses, parábolas e hipérbolas. Incluso, en este plano se trata con un caso particular de elipse, la circunferencia. Además, existen diversos elementos asociados a las cónicas, a saber, el centro, los diámetros, las asíntotas, los ejes, el eje principal, los vértices, los focos, las directrices. A pesar de que, tal clasificación y tales elementos se relacionan con nociones de magnitud, estableceremos nociones análogas en el plano proyectivo real, a partir de propiedades de incidencia. En particular, nos parecerá fundamental comprender la manera en que las involuciones y los polos y polares, precisan los focos y las directrices de una cónica, pues muchas de las principales caracterizaciones métricas de las cónicas están dadas en función de tales elementos.

La relación armónica, las involuciones, y los polos y polares con respecto a una cónica, tratados en conjunto, detonarán las relaciones entre las nociones de magnitud y las nociones de incidencia asociadas a una cónica, una vez que se introduce la línea al infinito en el plano euclidiano. En este capítulo, constataremos que tales hechos nos permitirán aproximarnos del plano euclidiano al plano proyectivo real y, viceversa.

4.1. Polo y polar con respecto a una circunferencia

Una vez presentada la relación polo y polar con respecto a una circunferencia (definición 4.0.1), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano euclidiano. Para comenzar, derivado de la observación 3.1.1, hacemos las siguientes observaciones (véase figura 4.5):

Observación 4.1.1. Si A y a son un punto y una línea que están correspondidos por la relación polo y polar con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces

1. a es la polar de A si y sólo si A es el polo de a , por definición.
2. si A es un punto exterior a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces su polar a corta a $\mathcal{C}(O, r)$.
3. si A está en $\mathcal{C}(O, r)$, entonces su polar a es tangente a la circunferencia.
4. si A es un punto interior a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces su polar a no corta a $\mathcal{C}(O, r)$.

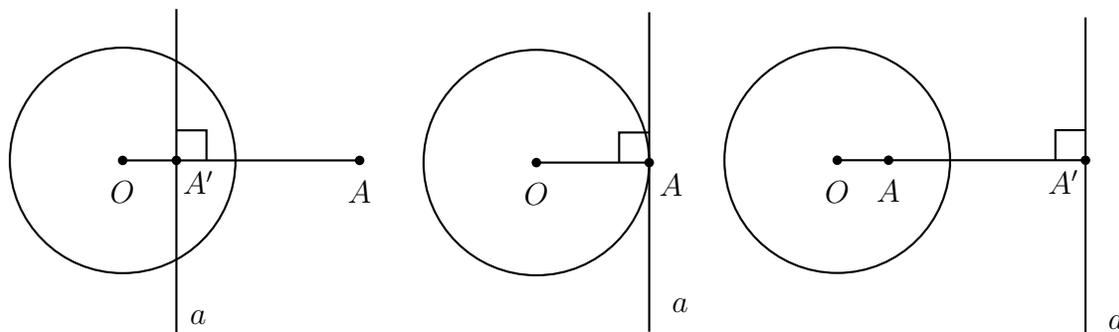


Figura 4.5: a es polar de A y A es el polo de a

Al emparejar a cada punto del plano con su polar, con respecto a una circunferencia, obtenemos un conjunto de pares de elementos.

Definición 4.1.1. Un *sistema polar* es el conjunto de los pares que son formados por una línea y un punto en el plano de una circunferencia, de tal manera que el punto es el polo de la línea y la línea es la polar del punto con respecto a la circunferencia.

Si bien, la relación polo y polar con respecto a una circunferencia involucra nociones de magnitud, veremos que también estará relacionada, *per se*, con propiedades de incidencia. Dados una circunferencia y un punto en el plano euclidiano, que no incide con la circunferencia, a través de tal punto podemos trazar líneas que cortarían a la circunferencia, a lo más, en dos puntos. Así, al considerar los puntos conjugados armónicos del punto dado con respecto a los extremos de una secante a la circunferencia dada y que

es incidente con el punto dado, determinamos una única línea asociada a tal punto. En la siguiente proposición, Nathan Altshiller (2007) señala que tal línea es la polar del punto dado. De suerte que, encontramos la polar de un punto dado usando la relación armónica, una propiedad que, como ya vimos, no necesita usar magnitud.

Proposición 4.1.1. *Sea $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia, y A un punto que es distinto de O y que no incide con la circunferencia. El conjunto de los puntos conjugados armónicos de A con respecto a un par de puntos que están en $\mathcal{C}(O, r)$ y que son colineales con A , es incidente con la polar de A .¹*

Demostración. Denotamos por MN al diámetro de $\mathcal{C}(O, r)$ que incide con A . Sean P y Q los puntos en que una secante que incide con A corta a la circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$, de tal manera que las líneas PQ y MN son distintas (véase figura 4.6). Construimos A'' el conjugado armónico de A con respecto a PQ , y llamamos A' al pie de a , la perpendicular al diámetro MN por A'' . Queremos demostrar que la línea a es la polar de A .

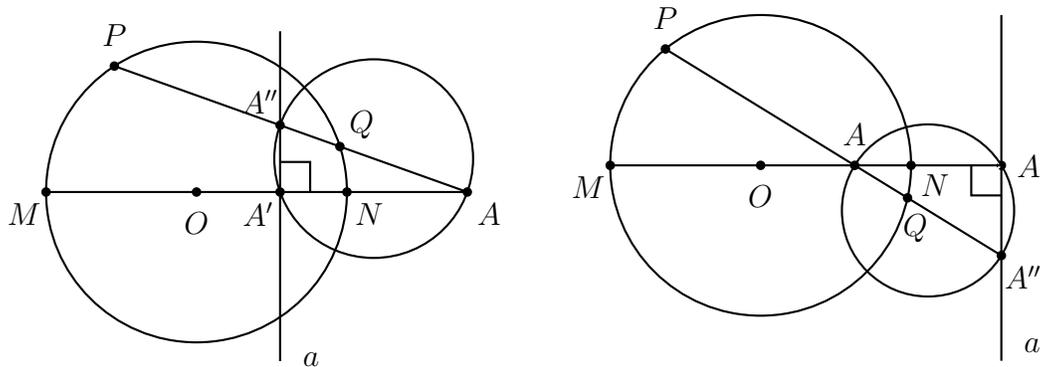


Figura 4.6: La línea a se conecta con los correspondientes conjugados armónicos de A

Debido a que $\angle AA'A'' = 90^\circ$, por la proposición 1.1.1, tenemos que A' es un punto de la circunferencia de diámetro AA'' . Además, los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento AA'' , por la proposición 3.1.3 y por propiedades de potencia, tenemos que las dos circunferencias son ortogonales. Luego, por la proposición 3.1.4, los puntos A y A' son inversos con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Por tanto, a es la polar de A . Como PQ fue cualquier secante, concluimos que el conjunto de puntos que describe A'' , incide con la polar de A . \square

En la proposición precedente observemos que, si A está en el exterior de la circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$, entonces el conjunto mencionado es un segmento de recta contenido en la polar de A . Mientras que, si A está en el interior de la circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$, entonces el conjunto mencionado coincide con la polar de A .

¹Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. pp. 177,178.

Adelante, mencionaremos la manera de construir la polar de un punto, únicamente con regla. Por ahora, expondremos una construcción que está relacionada con el trazo de puntos inversos expuesto en la proposición 3.1.1.

Proposición 4.1.2. *La polar de un punto A con respecto a una circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$, incide con los puntos de contacto de las tangentes a $\mathcal{C}(O, r)$ por el punto A , si es que tales tangentes existen.²*

Demostración. Denotamos por X e Y a los puntos de contacto de las tangentes, si es que existen, desde A a la circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$ (véase figura 4.7). Queremos demostrar que a , la polar de A , coincide con la línea XY .

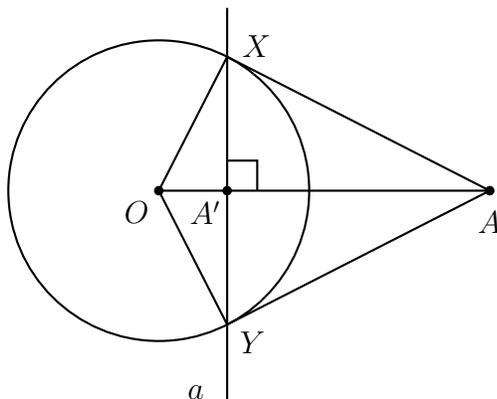


Figura 4.7: La polar de A coincide con la línea XY

Como AX y AY son tangentes, entonces el punto A equidista de los puntos X e Y . Además, como O es el centro de $\mathcal{C}(O, r)$, entonces O también equidista de los puntos X e Y . Por consiguiente, la línea OA es mediatriz del segmento XY . Por lo que, la línea OA es perpendicular a la línea XY . Denotamos por A' al punto de intersección de las líneas XY y OA . Por la proposición 3.1.1, tenemos que A' es el inverso de A con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Por tanto, la polar de A coincide con la línea XY . \square

De manera análoga, se prueba la siguiente proposición:

Proposición 4.1.3. *El polo de una línea a con respecto a una circunferencia, incide con las tangentes a la circunferencia por los puntos de contacto en los que a interseca a la circunferencia, si es que tales puntos existen.*

Con respecto a una circunferencia, tres puntos no colineales forman un triángulo y sus polares forman otro triángulo. En caso de que ambos triángulos coincidan, lo llamaremos de la siguiente manera:

²Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. p.178.

Definición 4.1.2. *Un triángulo es autopolar con respecto a una circunferencia si cada lado del triángulo es la polar de su vértice opuesto.*

En relación con la definición anterior, si un triángulo es autopolar con respecto a una circunferencia, entonces uno de sus vértices es interior y los otros dos exteriores a la circunferencia y el centro de la circunferencia es el ortocentro del triángulo. Para ver una prueba de tales hechos, *cfr.* [Altshiller,2007, pp.181,182]. Veamos cómo afecta la relación polo y polar al triángulo diagonal de un cuadrángulo completo cuyos vértices inciden con la circunferencia.

4.2. Cuadrángulo completo inscrito en una circunferencia

En el plano euclidiano, decimos que un cuadrángulo completo está *inscrito* en una circunferencia si sus cuatro vértices inciden con la circunferencia. Análogamente, decimos que un cuadrilátero completo está *circunscrito* a una circunferencia si sus cuatro lados son tangentes a la circunferencia. Con base en las propiedades de relación armónica asociadas a la configuración del cuadrángulo completo, Roger Johnson (1960) enuncia la siguiente proposición (véase figura 4.8).

Proposición 4.2.1. *Si un cuadrángulo completo está inscrito en una circunferencia, entonces su triángulo diagonal es autopolar, con respecto a la circunferencia.*³

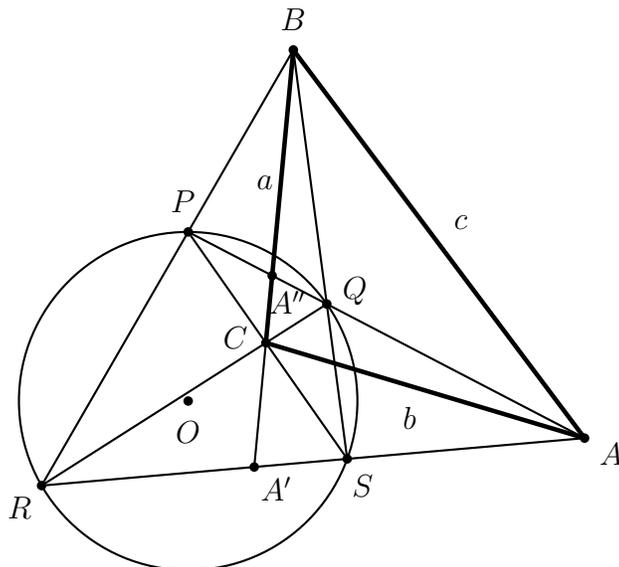


Figura 4.8: El triángulo $\triangle ABC$ es autopolar con respecto a la circunferencia

³Johnson, Roger. (1960). *Euclidean Geometry. An Elementary Treatise of the Geometry of the Triangle and the Circle.* pp.102-104.

Demostración. Sea $PQRS$ un cuadrángulo inscrito en una circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$ y sea $\triangle ABC$ su triángulo diagonal (véase figura 4.8). Queremos demostrar que $\triangle ABC$ es autopolar con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$.

Denotamos por A' y A'' a las intersecciones de la línea BC con las líneas RS y PQ , respectivamente. Por la proposición 2.3.1, tenemos que $H(RS, A'A)$ y $H(PQ, A''A)$. Luego, por la proposición 4.1.1, obtenemos que la línea $A'A''$ es la polar de A . Dado que A', A'', B y C son puntos colineales, la línea $A'A''$ coincide con la línea BC . Así pues, la polar de A es BC , su lado opuesto en el triángulo $\triangle ABC$. Análogamente, se prueba que la línea AC es la polar de B y que la línea AB es la polar de C . Por tanto, $\triangle ABC$ es un triángulo autopolar con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. \square

Observemos que, la proposición anterior nos permite construir la polar de un punto con respecto a una circunferencia, únicamente con el uso de regla. Asimismo, con base en dicha proposición y en las relaciones entre cuadrángulos y cuadriláteros completos, se infiere el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *Si un cuadrilátero completo está circunscrito a una circunferencia, entonces su triángulo diagonal es autopolar con respecto a la circunferencia.*

Una vez presentada la noción de puntos conjugados polares con respecto a una circunferencia (definición 4.0.2), diremos que un punto es *autoconjugado* con respecto a una circunferencia si y sólo si el punto incide con su polar. Además, diremos que una línea es *autoconjugada* con respecto a una circunferencia si y sólo si la línea incide con su polo. De esta manera, los puntos autoconjugados son los puntos que inciden con una circunferencia y las líneas autoconjugadas son las tangentes a la circunferencia por dichos puntos de contacto.

Notemos que, si dos puntos que inciden con una secante a una circunferencia, son conjugados armónicos con respecto a los puntos de intersección de la secante y la circunferencia, la relación armónica de los puntos deviene en la propiedad de ser puntos conjugados polares. Mientras que, si dos puntos conjugados polares inciden con una línea que no corta a la circunferencia, la simetría de la propiedad de ser conjugados polares no descansa en la relación armónica. En el plano euclidiano, tales hechos son señalados en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.3. Teorema Fundamental de Polos y Polares (TFPyP). *Con respecto a una circunferencia, si la polar de un punto A incide con un punto B , entonces la polar del punto B incide con el punto A .⁴*

Demostración. Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia; A y B un par de puntos y A' y B' sus respectivos inversos. Supongamos que a , la polar de A con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, incide con B . Queremos demostrar que b , la polar de B con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, incide con A .

⁴Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. p.179.

Caso 1. La línea AB es secante a la circunferencia (véase figura 4.9).

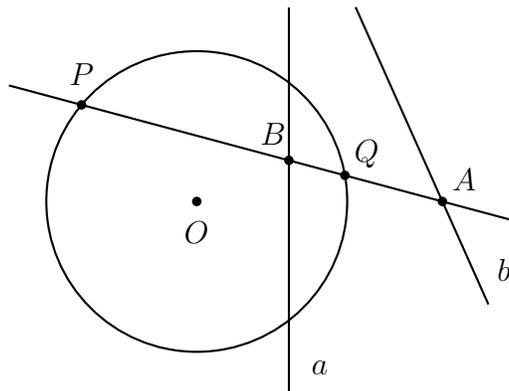


Figura 4.9: A y B son puntos conjugados polares con respecto a la circunferencia

Sean P y Q los puntos de intersección de la línea AB y la circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$. Como la polar de A incide con B , por la proposición 4.1.1, se sigue que $H(PQ, BA)$. De manera que, A es el conjugado armónico de B con respecto a P y Q . Luego, en el par de puntos A y B , se tiene que uno es interior y otro exterior a $\mathcal{C}(O, r)$. Así, por la proposición 4.1.1 se tiene que la polar de B incide con A .

Caso 2. La línea AB no interseca a la circunferencia (véase figura 4.10).

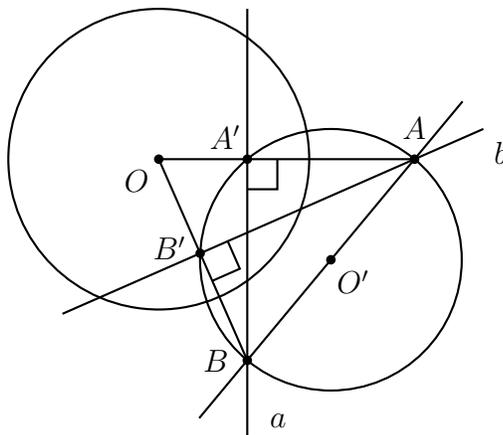


Figura 4.10: A y B son puntos conjugados polares con respecto a la circunferencia

Sea $\mathcal{C}(O', r')$ la circunferencia de diámetro el segmento AB . Como $\angle AA'B = 90^\circ$, por la proposición 1.1.1 se tiene que la circunferencia $\mathcal{C}(O', r')$ pasa por el punto A' . Además, como A y A' son inversos, por la proposición 3.1.4, se sigue que las circunferencias $\mathcal{C}(O, r)$ y $\mathcal{C}(O', r')$ son ortogonales. Por lo que, $\mathcal{C}(O', r')$ también pasa por el punto B' , así $\angle BB'A = 90^\circ$. Por tanto, la línea AB' es la polar de B , esto es, la polar de B incide con A . \square

De esta última prueba, se infiere el siguiente resultado:

Proposición 4.2.4. *Si el polo de una línea a incide con una línea b , entonces el polo de la línea b incide con la línea a .*

Dada una circunferencia $\mathcal{C}(O, r)$ y una línea l que no incide con O . Entre las consecuencias del *TFPyP* (proposición 4.2.3), encontramos que las polares de los puntos que inciden con l , son incidentes con L , el polo de l . Análogamente, los polos de las líneas que inciden con un punto L , distinto de O , son incidentes con l , la polar de L . Veamos cómo afecta la transformación polo y polar a la razón cruzada de una hilera de cuatro puntos y a la razón cruzada del haz formado por sus respectivas polares.

4.3. Polos, polares y razón cruzada

Así como, en el capítulo anterior, probamos que la razón cruzada se preserva bajo inversiones e involuciones en el plano euclidiano, mostraremos que con respecto a una circunferencia, los elementos de un sistema polar preservan la razón cruzada. Tal hecho es mostrado por John Casey (1888) en la siguiente proposición (véase figura 4.11).⁵

Proposición 4.3.1. *Dados $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia; A, B, C, D cuatro puntos incidentes con l , una línea que no incide con O . Si a, b, c, d son sus polares con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces $\{ABCD\} = \{abcd\}$.*

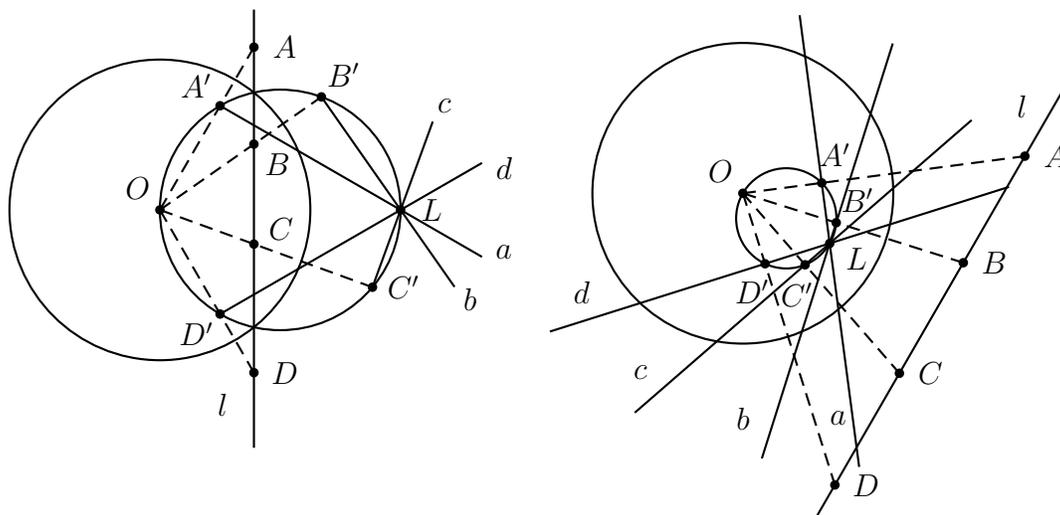


Figura 4.11: $\{ABCD\} = \{abcd\}$

⁵Casey, John. (1888). *A sequel to the first books of the Elements of Euclid*. p.141.

Demostración. Denotamos por A', B', C' y D' a los inversos de A, B, C y D con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$. Queremos demostrar que $\{ABCD\} = \{abcd\}$.

Por la proposición 4.2.3, tenemos que las polares a, b, c y d concurren en L , el polo de l . Además, como la línea l no incide con el centro de $\mathcal{C}(O, r)$, por la proposición 3.1.7 tenemos que l se invierte en la circunferencia de diámetro OL , luego los puntos A', B', C' y D' están en dicha circunferencia. Así pues, las líneas a, b, c y d coinciden con las líneas LA', LB', LC' y LD' , respectivamente. Ahora, como O es un punto que no incide con l , por la proposición 2.4.3, se sigue que $\{ABCD\} = O\{ABCD\} = O\{A'B'C'D'\}$. También, $O\{A'B'C'D'\} = L\{A'B'C'D'\}$, pues los respectivos ángulos con vértices en O y L son iguales, o bien suplementarios. Por tanto, $\{ABCD\} = \{abcd\}$. \square

Debido a la proposición anterior, la relación armónica se preservará bajo la relación de polos y polares con respecto a una circunferencia.

Proposición 4.3.2. *Dados $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia; A, B, C, D cuatro puntos incidentes con l , una línea que no incide con O . Si a, b, c, d son sus polares con respecto a $\mathcal{C}(O, r)$, entonces $H(AB, CD)$ si y sólo si $h(ab, cd)$.*

Si bien, en el plano euclidiano se aborda el tema de polos y polares con respecto a una circunferencia, veremos que en el plano proyectivo se puede tratar dicho tema con respecto a cualquier cónica. Para realizar tal propósito, nos convendrá definir las cónicas y presentar algunas de las propiedades principales de las mismas.

4.4. Cónicas

Las cónicas, en su definición primigenia, son curvas planas que resultan de seccionar un cono por un plano. La importancia de tales curvas radica en su frecuente aparición en diversos escenarios de la naturaleza, así como en sus múltiples aplicaciones a la técnica. Como es muy sabido, hoy en día existen distintas definiciones de cónicas: métricas, analíticas, proyectivas. En este escrito, abordaremos a las cónicas a partir de propiedades de incidencia.

Oswald Veblen y John Young (1910) presentan las definiciones de *cónica de puntos* y *cónica de líneas* en función de lugar geométrico y de envolvente geométrica, respectivamente.⁶ En principio, estos autores tratan de manera dual a estas dos figuras. Al final, proponen como *cónica* a la figura que resulta de unificar ambas figuras. Cabe mencionar que, dichas nociones son basadas en la definición de cónica introducida por Jakob Steiner en sus diversos escritos sobre geometría sintética que desarrolló a principios del siglo XIX (véase figura 4.12).

⁶Recordemos que, un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos que satisface una condición dada. Mientras que, una *envolvente geométrica* es un conjunto de líneas que satisface una condición dada.

Definición 4.4.1. Una *cónica de puntos* es el lugar geométrico de todos los puntos que inciden con los pares de líneas correspondientes de una proyectividad entre dos haces. En caso de que la proyectividad sea una perspectividad, decimos que la cónica de puntos es *degenerada*.

Definición 4.4.2. Una *cónica de líneas* es la envolvente geométrica de todas las líneas que inciden con los pares de puntos correspondientes de una proyectividad entre dos hileras. En caso de que la proyectividad sea una perspectividad, decimos que la cónica de líneas es *degenerada*.

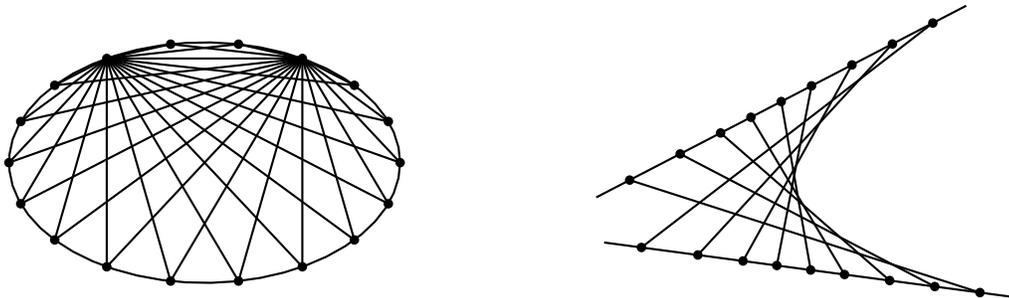


Figura 4.12: Cónica de puntos y cónica de líneas

En relación con las definiciones anteriores, distinguiremos a los centros de los haces en proyectividad que generan a una cónica de puntos y a los ejes de las hileras en proyectividad que generan a una cónica de líneas.

Definición 4.4.3. Decimos que un par de puntos son *base generadora* de una cónica de puntos si y sólo si son centros de dos haces en proyectividad que generan la cónica de puntos.

Definición 4.4.4. Decimos que un par de líneas son *base generadora* de una cónica de líneas si y sólo si son ejes de dos hileras en proyectividad que generan la cónica de líneas.

Observemos que, si S y S' son base generadora de una cónica de puntos, a la línea SS' del haz con centro en S le corresponde una línea s' del haz con centro en S' , de tal manera que la intersección de las líneas SS' y s' es un punto de la cónica de puntos, esto es, S' es un punto de la cónica de puntos. Análogamente, se infiere que S es un punto de la cónica de puntos. Por consiguiente, los puntos de la base generadora de una cónica de puntos, inciden con la cónica de puntos.

Así como una circunferencia queda completamente determinada a partir de tres puntos dados, en la siguiente proposición, Oswald Veblen y John Young (1910) señalan que la cónica de puntos que incide con cinco puntos, no colineales por tercias, es única.

Proposición 4.4.1. Si S y S' son los centros de dos haces y A, B, C son tres puntos dados no colineales, una cónica de puntos generada por los haces con centros en S y S'

y que contiene a los puntos A, B y C , queda determinada de manera única.⁷

Demostración. Para ver que la cónica de puntos que contiene a los puntos S, S', A, B, C queda determinada de manera única, construiremos un sexto punto de la cónica de puntos, a partir de los puntos S, S', A, B, C .

Consideramos una línea l incidente con B y llamamos a, b, c, a', b' y c' a las líneas $SA, SB, SC, S'A, S'B$ y $S'C$, respectivamente. Además, sean T, U, V, R los puntos que la línea l corta a las líneas a, c, a', c' . Denotamos por P al punto de intersección de las líneas $S'A$ y SB ; por Q al punto de intersección de las líneas RP y SC ; y por X al punto de intersección de las líneas AQ y l (véase figura 4.13). De esta manera, X es el punto buscado.

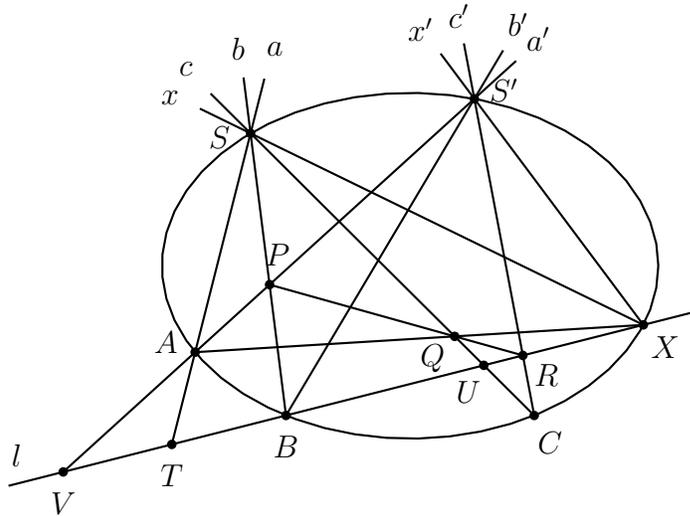


Figura 4.13: La cónica que contiene a los puntos S, S', A, B, C es única

Notemos que, los puntos T, B, U son la sección al haz a, b, c por la línea l y los puntos V, B, R son la sección al haz a', b', c' por la línea l , así

$$TBU \bar{\wedge} abc \bar{\wedge} a'b'c' \bar{\wedge} VBR,$$

$$TBU \bar{\wedge} VBR. \tag{1}$$

Por otra parte, observemos que l corta a los lados SA, QP, SQ, AP, SP y AQ del cuadrángulo completo $SAPQ$ en los puntos T, R, U, V, B y X , esto es, $(TR)(UV)(BX)$. Por la proposición 2.6.5, lo anterior ocurre si y sólo si existe la proyectividad

$$TUBX \bar{\wedge} VRBX. \tag{2}$$

⁷Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. pp.110,111.

Por el *TFGP* (proposición 1.2.4), tenemos que las proyectividades escritas en (1) y (2) son la misma. Por lo que, X es el otro punto doble de dicha proyectividad. Denotamos por x y x' a las líneas SX y $S'X$, respectivamente. De esta manera

$$TBUX \bar{\wedge} VBRX \text{ si y sólo si } abcx \bar{\wedge} a'b'c'x'.$$

Por tanto, la cónica de puntos generada por los haces con centros en S y S' y que incide con cualesquiera tres puntos de la cuaterna A, B, C y X queda determinada de manera única. \square

En relación con proposición anterior, haremos la siguiente observación:

Observación 4.4.1. El punto X coincide con el punto B si y sólo si Q incide con la línea AB . Esto último significa que PR, SC y AB concurren en Q . Dicho en otros términos, P es el punto de intersección de las líneas $S'A$ y SB ; Q es el punto de intersección de las líneas AB y SC ; R es el punto de intersección de las líneas $S'C$ y PQ ; y l es la línea que incide con B y R . La línea l incide con la cónica de puntos en un único punto B .

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4.2. *Si s y s' son los ejes de dos hileras y a, b, c son tres líneas dadas no concurrentes, una cónica de líneas generada por las hileras con ejes en s y s' y que contiene a las líneas a, b y c , queda determinada de manera única.*

En la siguiente proposición, Oswald Veblen y John Young (1910) establecen que la proyectividad que genera una cónica de puntos, es independiente de la base generadora que se considere.

Proposición 4.4.3. *En una cónica de puntos que contiene al menos cinco puntos, cualesquiera dos de ellos son base generadora.*⁸

Demostración. Sean S, A, B, C, S' puntos que inciden con una cónica de puntos no degenerada. Consideramos a S y S' como base generadora de la cónica, esto es, las líneas $a = SA, b = SB, c = SC$ son correspondientes a las líneas $a' = S'A, b' = S'B, c' = S'C$; donde A es la intersección de las líneas a y a' , B es la intersección de las líneas b y b' , y C es la intersección de las líneas c y c' (véase figura 4.14). Queremos demostrar que cualesquiera dos de los cinco puntos son base generadora.

Sin pérdida de generalidad, veamos que los puntos A y C también son base generadora de la cónica de puntos. Consideramos una línea l incidente con B y denotamos por T, U, V, R a los puntos en que la línea l corta a las líneas a, c, a', c' , respectivamente.

⁸Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.111.

Además, denotamos por P al punto de intersección de las líneas $S'A$ y SB ; y por Q al punto de intersección de las líneas RP y SC . Llamamos t y t' a las líneas AB y CB , respectivamente. En estas condiciones, tenemos que

$$ata' \bar{\wedge} TBV \stackrel{A}{\wedge} SBP \stackrel{Q}{\wedge} UBR \bar{\wedge} ctc'.$$

Así, $ata' \bar{\wedge} ctc'$.

Por lo que, los puntos B, S y S' son intersecciones de pares de líneas correspondientes de una proyectividad entre los haces con centros en A y C . Por la proposición 4.4.1, tenemos que la cónica de puntos generada por los haces con centros S y S' y que incide con A, B y C coincide con la cónica de puntos generada por los haces con centros A y C y que incide con B, S y S' . Por tanto, los puntos A y C también son base generadora de la cónica de puntos. Análogamente se prueba que cualquier otro par de puntos de la cónica de puntos es base generadora.

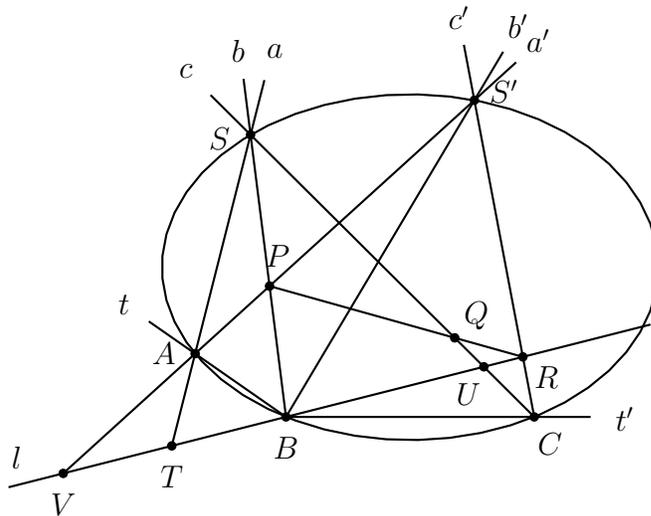


Figura 4.14: La cónica que contiene a los puntos S, S', A, B, C es única

□

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4.4. *En una cónica de líneas que contiene al menos cinco líneas, cualesquiera dos de ellas son base generadora.*

Con el propósito de caracterizar los puntos que inciden con una cónica de puntos, introducimos la siguiente noción:

Definición 4.4.5. Un *hexágono simple* es una figura plana formada por seis puntos, no colineales por tercias, y las seis líneas que unen pares de puntos sucesivos. Decimos que los seis puntos son los *vértices* y las seis líneas son los *lados* del hexágono. Además, si $ABCDEF$ es un hexágono, cuyos vértices han sido considerados en el orden escrito, decimos que los pares de lados AB, DE ; BC, EF ; y CD, FA son *lados opuestos* y que los pares de vértices A, D ; B, E ; y C, F son *vértices opuestos*.

La siguiente proposición fue mostrada por Blaise Pascal (s. XVII), en ella se enuncian las condiciones necesarias y suficientes para que seis puntos incidan con una cónica de puntos.

Proposición 4.4.5. Teorema de Pascal. *Seis puntos, no colineales por tercias, están en una cónica de puntos no degenerada, si y sólo si los puntos que inciden con los tres pares de lados opuestos del hexágono simple que tiene por vértices los seis puntos, son colineales.*⁹

Demostración. Sean S, B, X, A, S', C puntos en una cónica de puntos no degenerada. Consideramos a S y S' como base generadora de la cónica, esto es, las líneas $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, $x = SX$ son correspondientes a las líneas $a' = S'A$, $b' = S'B$, $c' = S'C$, $x' = S'X$; donde A es la intersección de las líneas a y a' , B es la intersección de las líneas b y b' , C es la intersección de las líneas c y c' , y X es la intersección de las líneas x y x' (véase figura 4.15). Además, consideramos al hexágono simple $SBXAS'C$ y denotamos

por P al punto que incide con el par de lados opuestos SB y AS' ;

por Q al punto que incide con el par de lados opuestos XA y CS ;

y por R al punto que incide con el par de lados opuestos BX y $S'C$.

Queremos demostrar que los puntos P, Q y R son colineales.

Denotamos por A' al punto de intersección de las líneas AS' y BX : y por B' al punto de intersección de las líneas SB y AX . En estas condiciones, notemos que

$$AB'QX \bar{\wedge} abcx \bar{\wedge} a'b'c'x' \bar{\wedge} A'BRX.$$

Luego, obtenemos una proyectividad entre los puntos de la línea BX y la línea AX . Como X es el punto invariante de la proyectividad, por la proposición 1.2.5 se sigue que la proyectividad es una perspectividad con centro P , donde P es la intersección de las líneas AA' y BB' , esto es,

⁹Young, John. (1982). *Projective Geometry*. pp.64-67.

$$AB'QX \stackrel{P}{\bar{\wedge}} A'BRX.$$

Por tanto, los puntos P, Q y R son colineales.

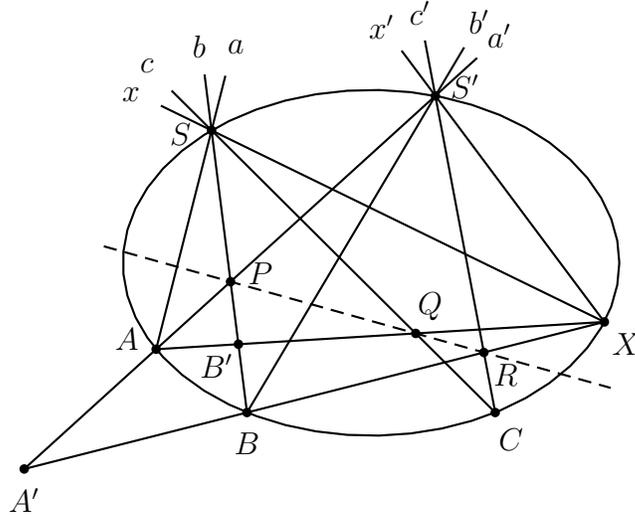


Figura 4.15: Teorema de Pascal

Recíprocamente, supongamos que $SBXAS'C$ es un hexágono simple tal que P, Q y R , los puntos de intersección de sus pares de lados opuestos, son colineales (véase figura 4.15). Llamamos a, b, c, x, a', b', c' y x' a las líneas $SA, SB, SC, SX, S'A, S'B, S'C$ y $S'X$, respectivamente. Asimismo, denotamos por A' al punto de intersección de las líneas AS' y BX ; y por B' al punto de intersección de las líneas SB y AX . Queremos demostrar que los puntos S, B, X, A, S', C inciden con una cónica de puntos.

Como P, Q y R son colineales, entonces

$$AB'QX \stackrel{P}{\bar{\wedge}} A'BRX.$$

Además, los puntos A, B', Q, X son la sección al haz a, b, c, x por la línea AX y los puntos A', B, R, X son la sección al haz a', b', c', x' por la línea BX , por lo que

$$abcx \bar{\wedge} AB'QX \bar{\wedge} A'BRX \bar{\wedge} a'b'c'x'.$$

$$\text{Así, } abcx \bar{\wedge} a'b'c'x'.$$

Por consiguiente, existe una proyectividad entre las líneas del haz con centro S y las líneas del haz con centro S' . De donde, los puntos A, B, C y X inciden con la cónica de puntos generada por los haces con centros S y S' . \square

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4.6. Teorema de Brianchon. *Seis líneas, no concurrentes por tercias, están en una cónica de líneas no degenerada si y sólo si las líneas que inciden con los tres pares de vértices opuestos del hexágono simple que tiene por lados las seis líneas, son concurrentes.*

A partir de propiedades de incidencia, estableceremos relaciones entre los puntos de una cónica de puntos y las líneas de una cónica de líneas.

4.5. Tangentes y puntos de contacto a una cónica

Con el fin de develar las relaciones que existen entre las propiedades asociadas a una cónica de puntos y las propiedades asociadas a una cónica de líneas, presentamos el siguiente par de definiciones duales:

Definición 4.5.1. Una línea p en el plano de una cónica de puntos que incide con ésta en un único punto P , es la *tangente* a la cónica de puntos por el punto P .

Definición 4.5.2. Un punto P en el plano de una cónica de líneas que incide con ésta en una única línea p , es el *punto de contacto* a la cónica de líneas por la línea p .

En la siguiente proposición, Oswald Veblen y John Young (1910) señalan que existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de una cónica y las líneas que son tangentes a la cónica por dichos puntos.

Proposición 4.5.1. *Un punto de una cónica de puntos incide con una única tangente a la cónica de puntos.*¹⁰

Demostración. Sea A un punto dado de una cónica de puntos y sea B cualquier otro punto de ella. Queremos demostrar que hay una única tangente a la cónica de puntos por el punto A .

Consideramos P un punto variable de la cónica de puntos (véase figura 4.16). Así, por la proposición 4.4.3, se sigue que hay una proyectividad entre el haz de líneas con centro A y el haz de líneas con centro B , donde los pares de líneas correspondientes se intersecan en P . Supongamos que la línea AB , que incide con B , interseca a su correspondiente línea del haz con centro en A , en un punto P . De esta manera, las líneas AB y AP son correspondientes bajo la proyectividad. Pero, las líneas AP y BP también son correspondientes bajo la proyectividad, lo cual contradice el hecho de que la proyectividad es una correspondencia uno a uno. Por tanto, existe una única línea

¹⁰Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.112.

incidente con A que tiene a AB como línea correspondiente, dicho en otras palabras, existe una única tangente a la cónica de puntos por el punto A .

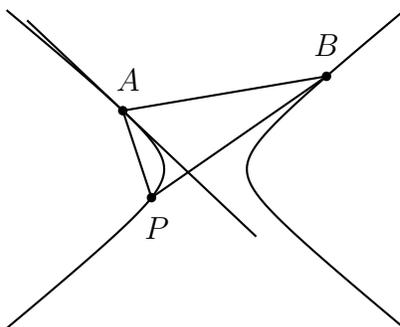


Figura 4.16: Existe una única tangente a la cónica de puntos por el punto A

□

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.5.2. *Una línea de una cónica de líneas incide con un único punto de contacto a la cónica de líneas.*

De acuerdo con John Young (1982), una tangente a una cónica de puntos es considerada como la posición límite de una secante donde los dos puntos de intersección de la secante y la cónica de puntos, coinciden. En las siguientes cuatro proposiciones presentamos los *casos degenerados* del teorema de Pascal (proposición 4.4.5). En éstos se consideran varios casos límites, para obtener la colinealidad de ciertos puntos que son asociados a figuras, cuyo número de vértices es menor que seis y que inciden con una cónica de puntos. Para abordar el primer caso, introducimos la siguiente definición:

Definición 4.5.3. Un *pentágono simple* es una figura plana formada por cinco puntos A, B, C, D y E , no colineales por tercias, y las cinco líneas AB, BC, CD, DE y EA que unen puntos sucesivos. Decimos que los cinco puntos son los *vértices* y las cinco líneas son los *lados* de la figura.

Proposición 4.5.3. *Sean S, B, A, S', C los vértices de un pentágono simple que inciden con una cónica de puntos, entonces la tangente a la cónica de puntos por B interseca al lado $S'C$ en un punto colineal con los puntos que inciden con los otros pares de lados no adyacentes SB, AS' y BA, CS .*¹¹

Demostración. Sea b la tangente a la cónica de puntos por B . Denotamos por P a la intersección de las líneas SB y AS' ; por Q a la intersección de las líneas BA y CS ; y

¹¹Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.113.

por R a la intersección de las líneas b y $S'C$. Queremos demostrar que los puntos P, Q y R son colineales.

Consideramos l una línea, distinta de b , incidente con B . Con base en la proposición 4.4.1, construiremos un sexto punto X de la cónica de puntos, que incide con la línea l . Denotamos por P al punto de intersección de las líneas SB y AS' ; por R al punto de intersección de las líneas $S'C$ y l ; y por Q al punto de intersección de las líneas SC y PR . Así, X es el punto de intersección de las líneas AQ y l (véase figura 4.17.a). Por la observación 4.4.1, la línea l coincide con b si y sólo si B coincide con X . Para esta línea particular b , se tiene que P el punto de intersección de las líneas SB y AS' ; R el punto de intersección de la líneas b y $S'C$; y Q el punto de intersección de las líneas BA y CS ; son colineales (véase figura 4.17.b).

Figura 4.17.a

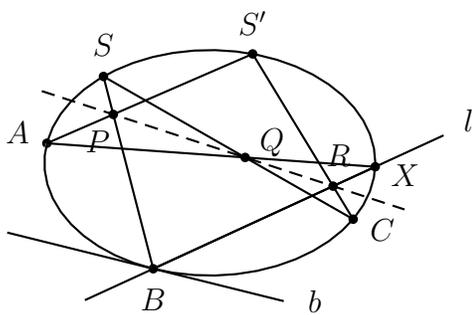


Figura 4.17.b

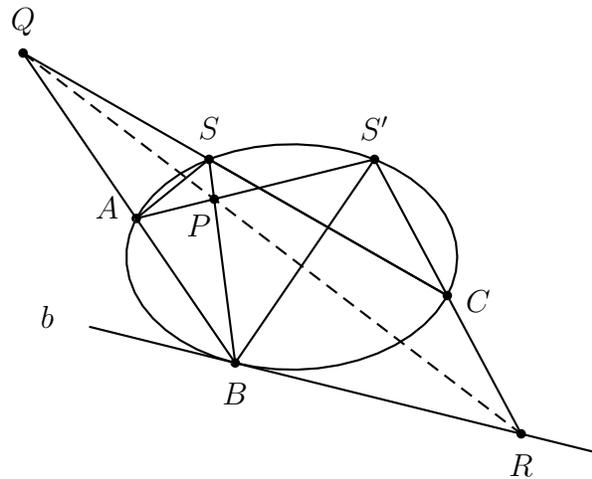


Figura 4.17: Los puntos P, Q y R son colineales

□

A partir de la proposición anterior, obtenemos una manera de construir la tangente por uno de los vértices de un pentágono simple $SBAS'C$, que inciden con una cónica de puntos. Denotamos por P a la intersección de las líneas SB y AS' ; por Q a la intersección de las líneas BA y CS ; y por R a la intersección de la líneas b y $S'C$ (véase figura 4.17). La tangente b a la cónica de puntos por B es tal que los puntos P, Q y R son colineales, esto es, las líneas PQ, b y $S'C$ concurren en R . Así, b coincide con la línea BR .

Para continuar con el segundo caso degenerado del teorema de Pascal, presentamos la siguiente definición:

Definición 4.5.4. Un *cuadrángulo simple* es una figura plana formada por cuatro puntos A, B, C y D , no colineales por tercias, y las cuatro líneas AB, BC, CD y DA

que unen puntos sucesivos. Decimos que los cuatro puntos son los *vértices* y las cuatro líneas son los *lados* de la figura.

Proposición 4.5.4. Sean B, S, A, C los vértices de un cuadrángulo simple que inciden con una cónica de puntos, entonces la tangente a la cónica de puntos por B y el lado AC , la tangente a la cónica de puntos por C y el lado BS , y el par de lados BC y SA , se intersecan en tres puntos colineales.¹²

Demostración. Sean b y c las tangentes a la cónica de puntos por B y C , respectivamente. Denotamos por P a la intersección de las líneas SA y CB ; por Q a la intersección de las líneas c y BS ; y por R a la intersección de las líneas b y AC . Queremos demostrar que los puntos P, Q y R son colineales.

Consideramos l una línea, distinta de c , incidente con C . Con base en la proposición 4.5.3, construiremos un quinto punto S' de la cónica de puntos, que incide con la línea l . Denotamos por Q a la intersección de las líneas l y BS ; y por R a la intersección de las líneas b y AC ; y por P a la intersección de las líneas SA y RQ . Así, S' es el punto de intersección de las líneas BP y l (véase figura 4.18.a). Luego, la línea l coincide con c si y sólo si C coincide con S' . Para esta línea particular c , se tiene que P el punto de intersección de las líneas SA y CB ; Q el punto de intersección de las líneas c y BS ; y R el punto de intersección de las líneas b y AC , son colineales (véase figura 4.18.b).

Figura 4.18.a

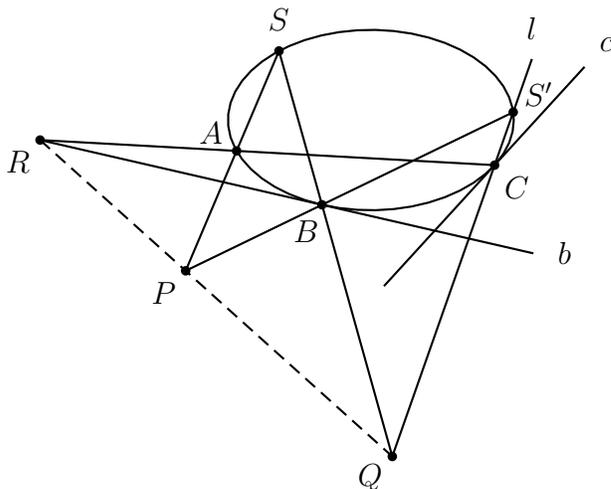


Figura 4.18.b

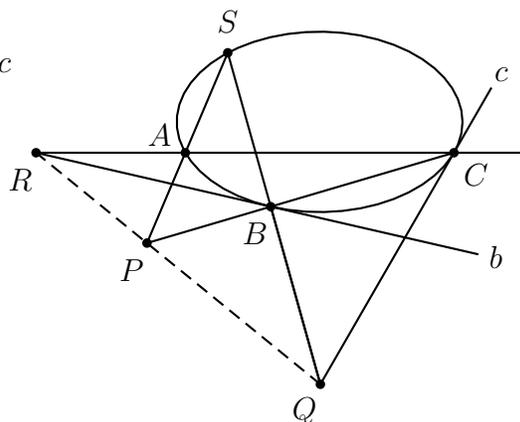


Figura 4.18: Los puntos P, Q y R son colineales

□

¹²Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. pp.114,115.

El tercer caso degenerado del teorema de Pascal, involucra los puntos diagonales de un cuadrángulo completo cuyos vértices inciden con una cónica de puntos.

Proposición 4.5.5. Sean S, B, A, C los vértices de un cuadrángulo completo que inciden con una cónica de puntos, entonces las tangentes por el par de vértices B y C se intersectan en un punto colineal con P y Q , los puntos diagonales del cuadrángulo que no inciden con el lado BC .¹³

Demostración. Sean b y c , las tangentes a la cónica de puntos por B y C , respectivamente. Denotamos por P a la intersección de las líneas AC y SB ; por Q a la intersección de las líneas BA y SC ; y por R a la intersección de las líneas b y c . Queremos demostrar que los puntos P, Q y R son colineales.

Consideramos l una línea, distinta de c , incidente con C . Con base en la proposición 4.5.3, construiremos un quinto punto S' de la cónica de puntos, que incide con la línea l . Denotamos por P a la intersección de las líneas BS y AC ; por R a la intersección de las líneas l y b ; y por Q a la intersección de las líneas PR y AB . Así, S' es el punto de intersección de las líneas SQ y l (véase figura 4.19.a). Luego, la línea l coincide con c si y sólo si C coincide con S' . Para esta línea particular c , se sigue que P el punto de intersección de las líneas BS y AC ; R el punto de intersección de las líneas c y b ; y Q el punto de intersección de las líneas BA y SC , son colineales (véase figura 4.19.b).

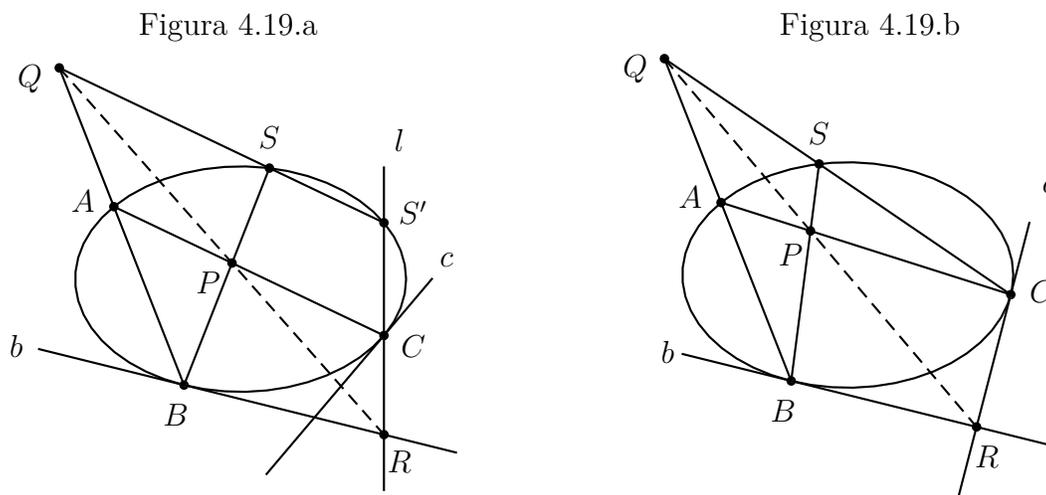


Figura 4.19: Los puntos P, Q y R son colineales

□

La proposición 4.5.4 deviene en el cuarto caso degenerado de Pascal.

¹³Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.115.

Proposición 4.5.6. *Un triángulo cuyos vértices inciden con una cónica de puntos y el triángulo formado por las tangentes por estos puntos, están en perspectiva.¹⁴*

Demostración. Sean $\triangle ABC$ un triángulo cuyos vértices inciden con una cónica de puntos, a la tangente a la cónica de puntos por A , b la tangente a la cónica de puntos por B , y c la tangente a la cónica de puntos por C . Denotamos por $\triangle A'B'C'$ al triángulo formado por estas tres tangentes, donde A' es la intersección de las líneas b y c , B' es la intersección de las líneas a y c , y C' es la intersección de las líneas b y a (véase figura 4.20). Además, denotamos por P al punto de intersección de las líneas a y CB ; por Q al punto de intersección de las líneas c y BA ; y por R al punto de intersección de las líneas b y AC . Queremos demostrar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva, esto es, los puntos P, Q y R son colineales.

Consideramos l una línea, distinta de a , incidente con A . Con base en la proposición 4.5.4, construiremos un cuarto punto S de la cónica de puntos, que incide con l . Denotamos por P a la intersección de las líneas l y CB ; por R a la intersección de las líneas b y AC ; y por Q a la intersección de las líneas c y RP . Así, S es el punto de intersección de las líneas QB y l (véase figura 4.18.b). Luego, la línea l coincide con a si y sólo si A coincide con S . Para esta línea particular a , se sigue que P el punto de intersección de las líneas a y CB ; Q el punto de intersección de las líneas c y AB ; y R el punto de intersección de las líneas b y AC , son colineales (véase figura 4.20).

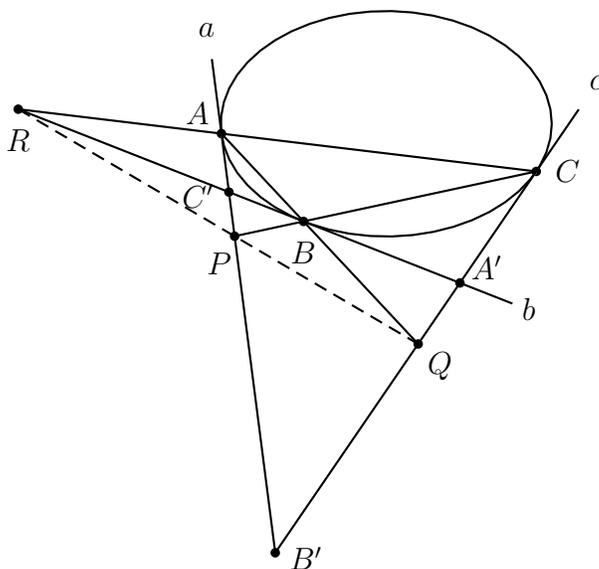


Figura 4.20: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva

□

¹⁴Veblen, Oswald. y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. pp.115,116.

A partir de las proposiciones 4.5.4 y 4.5.5, John Young (1982) establece que toda cónica de puntos podrá ser relacionada con la cónica de líneas que se forma con las tangentes a aquella.

Proposición 4.5.7. *Las tangentes a una cónica de puntos no degenerada, forman una cónica de líneas no degenerada.*¹⁵

Demostración. Sean A, B, C y S cuatro puntos en una cónica de puntos y sean a, b, c y s sus respectivas tangentes (véase figura 4.21). Queremos demostrar que las líneas a, b, c y s forman una cónica de líneas.

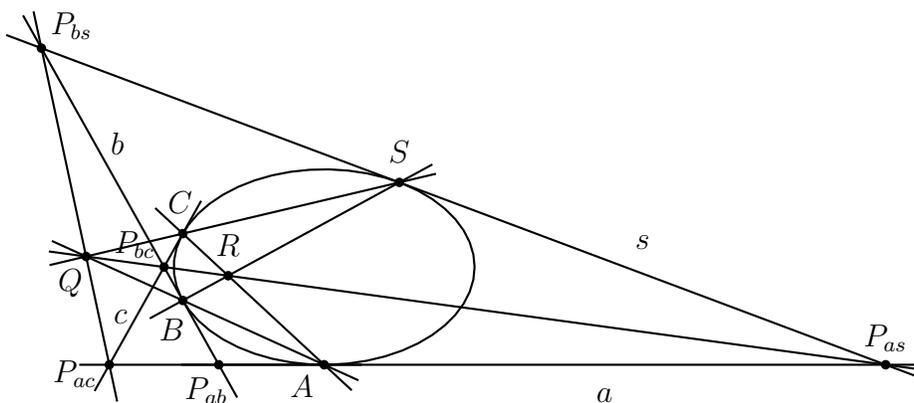


Figura 4.21: Las tangentes a una cónica de puntos forman una cónica de líneas

Denotamos por R al punto de intersección de las líneas AC y BS ; por Q al punto de intersección de las líneas AB y SC ; y por P_{ab} al punto de intersección de las tangentes a y b . Por la proposición 4.5.5, tenemos que P_{bc} el punto de intersección de las tangentes b y c ; y P_{as} el punto de intersección de las tangentes a y s , inciden con la línea RQ . Además, por la proposición 4.5.4, tenemos que P_{ac} el punto de intersección de las tangentes a y c ; P_{bs} el punto de intersección de las tangentes b y s ; y el punto Q son colineales. Luego, con base en la proposición 1.2.7, la línea AB es el eje de proyectividad entre las hileras de puntos que inciden con las líneas a y b , definida por:

$$AP_{ab}P_{ac} \bar{\wedge} P_{ab}BP_{bc}$$

Bajo esta proyectividad, al punto P_{as} le corresponde el punto P_{bs} . Así pues, si s es una línea variable incidente con pares de puntos correspondientes que inciden con las líneas a y b , entonces la totalidad de las líneas s satisfacen la definición de cónica de líneas. \square

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

¹⁵Young, John. (1982). *Projective Geometry*. pp.72,73.

Proposición 4.5.8. *Los puntos de contacto a una cónica de líneas no degenerada, forman una cónica de puntos.*

En vista del par de proposiciones duales precedentes, Oswald Veblen y John Young (1910) señalan que la figura formada por una cónica de líneas y sus puntos de contacto, o dicho en otros términos, la figura formada por una cónica de puntos y sus tangentes, es una figura autodual (p. 118.). De ello resulta que, tal figura sea nombrada de la siguiente manera:

Definición 4.5.5. *Una cónica es la figura formada por una cónica de puntos y sus tangentes.*

Con base en la definición anterior, las cónicas heredarán las propiedades tanto de las cónicas de puntos, como de las cónicas de líneas. Asimismo, Oswald Veblen y John Young (1910) mencionan que las proposiciones duales establecidas en torno a cónicas de puntos y cónicas de líneas, tienen las mismas consecuencias para ambas figuras. Así, por ejemplo, el dual del teorema de Pascal y sus casos degenerados, forman un conjunto de teoremas con el mismo efecto, tanto para cónicas de puntos, como para cónicas de líneas. Luego, al enunciar los teoremas duales que conciernen a cónicas, la palabra cónica permanece fija, mientras que las palabras punto (de una cónica) y tangente (a una cónica) son intercambiables (p.118). Para ilustrar este hecho, escribiremos la versiones más conocidas de los teoremas duales de Pascal y de Brianchon, en donde la palabra cónica unifica los términos cónica de puntos y cónica de líneas.

Teorema de Pascal

(Proposición 4.4.5)

Seis puntos, no colineales por tercias, están en una cónica no degenerada si y sólo si los puntos que inciden con los tres pares de lados opuestos del hexágono simple que tiene por vértices los seis puntos, son colineales.

Teorema de Brianchon

(Proposición 4.4.6)

Seis líneas, no concurrentes por tercias, son tangentes a una cónica no degenerada si y sólo si las líneas que inciden con los tres pares de vértices opuestos del hexágono simple que tiene por lados las seis líneas, son concurrentes.

Después de haber tratado la relación polo y polar con respecto a una circunferencia, estudiaremos la relación polo y polar con respecto a una cónica. Las propiedades que vimos para el primer caso, también serán propiedades atribuidas al segundo caso. En la siguiente sección, notaremos que en cada enunciado de una proposición concerniente a polos y polares, la palabra circunferencia podrá ser intercambiada por la palabra cónica, y viceversa.

4.6. Polo y polar con respecto a una cónica

Una vez presentadas las nociones de polar de un punto con respecto a una cónica (definición 4.0.4), y de polo de una línea con respecto a una cónica (definición 4.0.5), obtendremos algunas de sus propiedades principales en el plano proyectivo real. Para comenzar, notemos que la noción de polar de un punto con respecto a una cónica está, intrínsecamente, asociada a la relación armónica, de la misma manera en que la relación polo y polar con respecto a una circunferencia, lo estaba. Dados una cónica y un punto en el plano proyectivo real, que no incide con la cónica, a través de tal punto podemos trazar líneas que cortarían a la cónica, a lo más, en dos puntos. Así, al considerar los puntos conjugados armónicos del punto dado con respecto a los extremos de una secante a la cónica dada y que es incidente con el punto dado, determinamos una única línea asociada a tal punto. De acuerdo con C. O'hara y D. Ward (1937), dicha línea también incide con los puntos de intersección de las tangentes a la cónica por un par de puntos que son colineales con el punto dado. La siguiente proposición subyace a la definición 4.0.4 (véase figura 4.22).

Proposición 4.6.1. *Dada una cónica y A un punto que no incide con la cónica. El conjunto de los puntos conjugados armónicos de A con respecto a un par de puntos que están en la cónica y que son colineales con A , y de los puntos que inciden con las tangentes a la cónica por todos estos pares de puntos; es incidente con una línea.¹⁶*

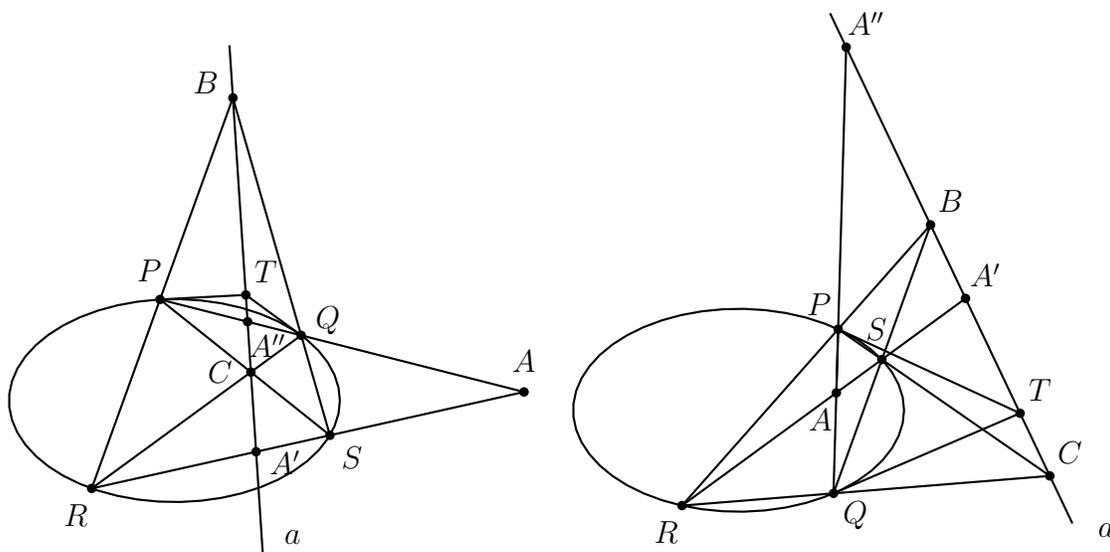


Figura 4.22: La línea a incide con los correspondientes conjugados armónicos de A

Demostración. Sean P y Q los puntos en que una secante que incide con A corta a la cónica. Denotamos por A'' al conjugado armónico de A con respecto a P y Q . Además,

¹⁶O'hara, C. y Ward, D. (1937). *An Introduction to Projective Geometry*. p.112.

sean R y S los puntos en que otra secante que incide con A corta a la cónica. Denotamos por A' al conjugado armónico de A con respecto a R y S . También, sea T el punto de intersección de las tangentes a la cónica por los puntos P y Q . Queremos demostrar que los puntos A', A'' y T inciden con una línea.

Denotamos por B al punto de intersección de las líneas PR y QS ; y por C al punto de intersección de las líneas PS y QR . De esta manera, $\triangle ABC$ es el triángulo diagonal asociado al cuadrángulo completo $PQRS$, cuyos vértices inciden en la cónica. Luego, por la proposición 4.5.5 se sigue que los puntos B, T y C son colineales. Pero, como $H(RS, A'A)$ y $H(PQ, A''A)$, entonces los puntos A', A'', B y C son colineales. Por tanto, los puntos T, A' y A'' inciden con la línea BC . \square

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.6.2. *Dada una cónica y una línea a que no es tangente a la cónica. El conjunto de las líneas conjugadas armónicas de a con respecto a un par de líneas tangentes a la cónica y que son concurrentes con a , y de las líneas que inciden con los puntos de contacto de la cónica por todos estos pares de líneas; es incidente con un punto.*

Como es de esperarse, los términos polo y polar con respecto a una cónica, coexistirán y se interrelacionarán de manera cabal. Tal hecho es señalado por C. O'hara y D. Ward (1937) en la siguiente proposición.

Proposición 4.6.3. *Una línea a es la polar de un punto A con respecto a una cónica si y sólo si el punto A es el polo de la línea a con respecto a la cónica.¹⁷*

Demostración. Sea a , la polar de A con respecto a una cónica (véase figura 4.23). Queremos demostrar que A es el polo de la línea a con respecto a la cónica.

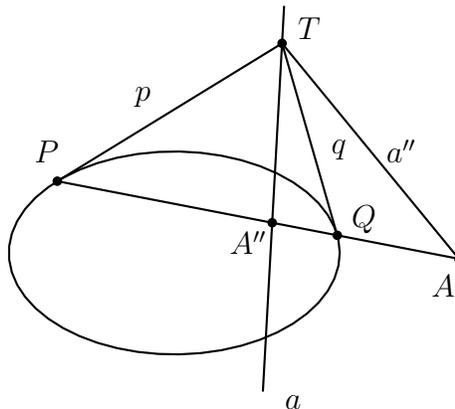


Figura 4.23: a es la polar de A si y sólo si A es el polo de a

¹⁷O'hara, C. y Ward, D. (1937). *An Introduction to Projective Geometry*. pp.117,118.

Si A es un punto que incide con la cónica, de acuerdo con las definiciones 4.0.4 y 4.0.5, tenemos que a es la tangente a la cónica por el punto A y por tanto, A es el polo de a . Ahora, si A es un punto que no incide con la cónica, consideramos P y Q un par de puntos incidentes con la cónica tales que P, Q y A son puntos colineales. Denotamos por T al punto de intersección de p y q , las tangentes a la cónica por los puntos P y Q , y llamamos a'' a la línea TA . Sea A'' el conjugado armónico de A con respecto a P y Q . Como a es la polar de A , de acuerdo con la definición 4.0.4, los puntos A'' y T inciden con a . Además, como $H(PQ, A''A)$, por la proposición 2.2.2, tenemos que $h(pq, aa'')$. Por otra parte, como $h(pq, aa'')$, de acuerdo con la definición 4.0.5, la línea a'' incide con el polo de a . Además, como p y q son tangentes concurrentes con a , entonces la línea PQ incide con el polo de a . Por tanto, el polo de a es el punto de intersección de las líneas a'' y PQ , esto es, el polo de a es el punto A . Análogamente, se prueba el recíproco. \square

En virtud de la proposición anterior, se sigue que la relación polo y polar se comporta como una correspondencia de periodo dos. Al emparejar a cada punto del plano con su polar con respecto a una cónica, obtenemos un conjunto de pares de elementos.

Definición 4.6.1. Un *sistema polar* es el conjunto de los pares que son formados por una línea y un punto en el plano de una cónica, de tal manera que el punto es el polo de la línea y la línea es la polar del punto con respecto a la cónica.

En la siguiente proposición, John Young (1982) muestra que la relación polo y polar con respecto a una cónica es una proyectividad.¹⁸ Denotaremos por $[Q]$ al conjunto de puntos Q que inciden con una cónica y, en particular con una línea. Además, denotaremos por $S[Q]$ al conjunto de líneas SQ que inciden con S y con $[Q]$.

Proposición 4.6.4. *Si un punto B se mueve a lo largo de una hilera en a , entonces la polar b de B se mueve a lo largo del haz en A , el polo de a ; esto es, existe una proyectividad entre la hilera de puntos B y el haz de líneas b y, viceversa.¹⁹*

Demostración. Usaremos la notación de la proposición 4.6.1 y la figura 4.22. Queremos demostrar que existe una proyectividad entre la hilera de puntos B y el haz de líneas b y, viceversa.

¹⁸Cabe mencionar que, la noción de la relación polo y polar presentada en este escrito, no es la única manera en que se puede abordar tal tema en el plano proyectivo real. Por ejemplo, H. Coxeter (1987) define una polaridad como una *correlación* de periodo dos. Tal noción hace que la relación polo y polar sea definida, desde un principio, a partir de transformaciones proyectivas. Más aún, él prueba que una polaridad hiperbólica determina una cónica e inversamente, una cónica determinará una polaridad hiperbólica. Tales hechos pueden ser consultados en el texto de H. Coxeter (*Projective Geometry*. Estados Unidos de América, 1987).

¹⁹Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.78.

Notemos que, si consideramos al punto S y a la línea a como fijos, entonces los puntos A y R son fijos. Si B se mueve a lo largo de a , entonces los puntos P y Q y la línea AC , también se moverán. Sin embargo, ésta última siempre pasa a través del punto fijo A . Por la proposición 4.4.3 los haces de líneas $S[Q]$ y $R[Q]$ están en proyectividad. Por lo que

$$[B] \bar{\wedge} S[Q] \bar{\wedge} R[Q] \stackrel{a}{\bar{\wedge}} A[C]$$

Pero, por la proposición 4.6.1 se sigue que la línea AC es b , la polar de B . Por tanto, existe una proyectividad que relaciona polos y polares. \square

En la siguiente proposición, Oswald Veblen y John Young (1910) señalan una construcción para la polar de un punto con respecto a una cónica, vía el uso de líneas tangentes.

Proposición 4.6.5. *Dada una cónica y A un punto que no incide con la cónica. La polar de A con respecto a la cónica, incide con los puntos de contacto de las tangentes a la cónica por el punto A , si es que tales tangentes existen.*²⁰

Demostración. Sean X e Y los puntos de contacto de x e y , las tangentes a la cónica por A (véase figura 4.24). Queremos demostrar que la polar de A con respecto a la cónica, coincide con la línea XY .

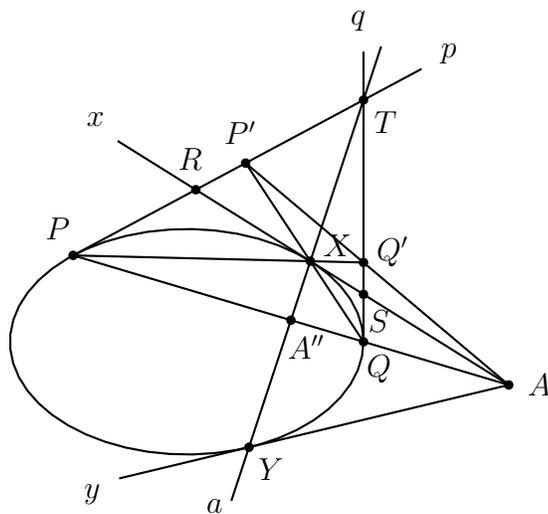


Figura 4.24: La polar de A coincide con la línea XY

Consideramos P y Q un par de puntos en la cónica que son colineales con A y llamamos T al punto de intersección de p y q , las tangentes a la cónica por P y Q . Además,

²⁰Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.121.

denotamos por R al punto de intersección de x y p , por S al punto de intersección de x y q , por P' al punto de intersección de XQ y p , y por Q' al punto de intersección de XP y q . Por la proposición 4.5.6, se tiene que los triángulos $\triangle PXQ$ y $\triangle STR$ están en perspectiva, esto es, los puntos A, P' y Q' son colineales. Ahora, denotamos A'' al punto de intersección de las líneas TX y PQ . De esta manera, obtenemos la hilera armónica $H(PQ, A''A)$ asociada al cuadrángulo completo $TP'Q'X$. Pero, por la proposición 4.6.1, la línea TA'' coincide con la polar de A . Así, el punto X incide con la polar de A . De manera similar, obtenemos que el punto Y , también incide con la polar de A . Por tanto, la línea XY coincide con la polar de A . \square

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.6.6. *Dada una cónica y una línea a que no es tangente a la cónica. El polo de a con respecto a la cónica, incide con las tangentes a la cónica por los puntos de contacto en los que a corta a la cónica, si es que tales puntos existen.*

Con respecto a una cónica, tres puntos no colineales forman un triángulo y sus polares forman otro triángulo. En caso de que ambos triángulos coincidan, lo llamaremos de la siguiente manera:

Definición 4.6.2. *Un triángulo es autopolar con respecto a una cónica si cada lado del triángulo es la polar de su vértice opuesto.*

Veamos cómo afecta la relación polo y polar al triángulo diagonal de un cuadrángulo completo cuyos vértices inciden con la cónica.

4.7. Cuadrángulo completo inscrito en una cónica

En el plano proyectivo real, decimos que un cuadrángulo completo está *inscrito* en una cónica si sus cuatro vértices inciden con la cónica. Análogamente, decimos que un cuadrilátero completo está *circunscrito* a una cónica si sus cuatro lados son tangentes a la cónica. Con base en las propiedades de relación armónica asociadas a la configuración del cuadrángulo completo, Harold Coxeter (1949) enuncia la siguiente proposición.

Proposición 4.7.1. *Si un cuadrángulo completo está inscrito en una cónica, entonces su triángulo diagonal es autopolar, con respecto a la cónica.²¹*

Demostración. Sea $PQRS$ un cuadrángulo cuyos vértices están en una cónica y sea ABC su triángulo diagonal (véase figura 4.25). Queremos demostrar que $\triangle ABC$ es autopolar con respecto a la cónica.

²¹Coxeter, Harold. (1949). *The real projective plane*. pp.73,74.

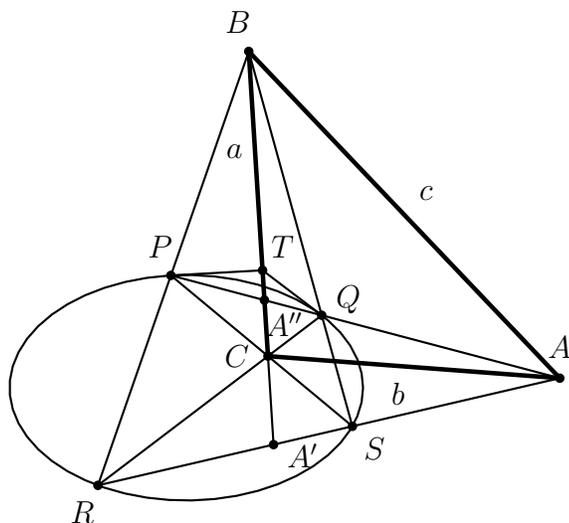


Figura 4.25: El triángulo $\triangle ABC$ es autopolar con respecto a la cónica

Denotamos por A' y A'' a las intersecciones de la línea BC con las líneas RS y PQ , respectivamente. Dado que se forman los cuadrángulos $BPQC$ y $BRSC$, tenemos que $H(RS, A'A)$ y $H(PQ, A''A)$, respectivamente. Luego, por la proposición 4.6.1, la línea $A'A''$ es la polar de A . Como A', A'', B y C son puntos colineales, la línea $A'A''$ coincide con la línea BC . Así pues, la polar de A es BC , su lado opuesto en el triángulo $\triangle ABC$. Análogamente, se prueba que la línea AC es la polar de B y que la línea AB es la polar de C . Por tanto, $\triangle ABC$ es un triángulo autopolar con respecto a la cónica. \square

Observemos que la proposición 4.7.1 nos da otra forma de construir la polar de un punto con respecto a una cónica. Además, por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.7.2. *Si un cuadrilátero completo está circunscrito a una cónica, entonces su triángulo diagonal es autopolar, con respecto a la cónica.*

Una vez presentada la noción de puntos conjugados polares con respecto a una cónica (definición 4.0.6), diremos que un punto es *autoconjugado* con respecto a una cónica si y sólo si el punto incide con su polar. Además, una vez presentada la noción de líneas conjugadas polares con respecto a una cónica (definición 4.0.7), diremos que una línea es *autoconjugada* con respecto a una cónica si y sólo si la línea incide con su polo. De esta manera, los puntos autoconjugados son los puntos que inciden con la cónica y las líneas autoconjugadas son las tangentes a la cónica por dichos puntos de contacto.

John Milne (1911) menciona que el término *conjugado* es frecuentemente usado para referirnos a tres propiedades geométricas, a saber, en el caso de dos pares de puntos que forman una hilera armónica (conjugados armónicos), en el caso de dos puntos correspondientes de una involución (conjugados de una involución) y en el caso de dos

puntos tales que uno incide con la polar del otro (conjugados polares). La teoría que hemos versado relacionada con tales temas nos permite justificar tal hecho. Así pues, la frase “Dos puntos son conjugados con respecto a una cónica”, significa que los dos puntos poseen las tres propiedades ya referidas (pp.169,170). De manera dual, podemos elucidar propiedades análogas para la noción de líneas conjugadas polares (definición 4.0.7). Es inmediato notar que el término conjugado tiene una relación indisociable con la configuración del cuadrángulo completo, ya que los términos: conjugados armónicos, conjugados de una involución y conjugados polares, son términos asociados a dicha configuración.

Notemos que, si dos puntos que son incidentes con una secante a una cónica, son conjugados armónicos con respecto a los puntos de intersección de la secante y la cónica, la relación armónica de los puntos deviene en la propiedad de ser puntos conjugados polares. Mientras que, si dos puntos conjugados polares inciden con una línea que no corta a la cónica, la propiedad de ser conjugados polares no descansa en la relación armónica. En el plano proyectivo real, tales hechos son señalados en la siguiente proposición.

Proposición 4.7.3. Teorema Fundamental de Polos y Polares (TFPyP). *Con respecto a una cónica, si la polar de un punto A incide con un punto B , entonces la polar del punto B incide con el punto A .*²²

Demostración. Dada una cónica. Supongamos que a , la polar de A con respecto a la cónica, incide con B . Queremos demostrar que b , la polar de B con respecto a la cónica, incide con A .

Caso 1. La línea AB corta a la cónica (véase figura 4.26).

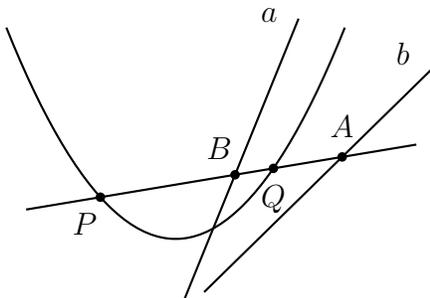


Figura 4.26: A y B son puntos conjugados con respecto a la cónica

Sean P y Q los puntos de intersección de la línea AB y la cónica. Si la polar de A incide con B , por la proposición 4.6.1 se sigue que $H(PQ, BA)$. De manera que, A es el punto armónico de B con respecto a P y Q . Así, por la proposición 4.6.1 se tiene que la polar de B incide con A .

²²Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. p.122.

Caso 2. La línea AB no corta a la cónica (véase figura 4.27).

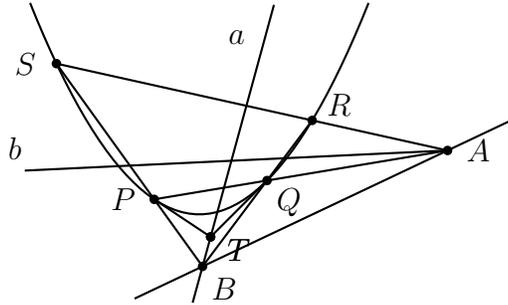


Figura 4.27: A y B son puntos conjugados con respecto a la cónica

Si la línea AB no corta a la cónica, denotamos por P' y Q' a los puntos de contacto de las tangentes a la cónica por B . Luego, consideramos PQ una secante a la cónica que incide con A , tal que los puntos P y Q son distintos de los puntos P' y Q' . Denotamos R y S a los otros puntos de intersección de la cónica y las líneas QB y PB , respectivamente; y sea A' el punto de intersección de las líneas PQ y RS . Luego, por la proposición 4.7.1, el punto A' incide con la polar de B . Además, por la proposición 4.5.5, tenemos que la polar de A' incide con B y con T , el punto de intersección de las tangentes en P y Q . No obstante, por hipótesis, la polar de A incide con estos mismos puntos. Por lo que, los puntos A y A' coinciden. Por tanto, la polar de B incide con el punto A . \square

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.7.4. *Con respecto a una cónica, si el polo de una línea a incide con una línea b , entonces el polo de la línea b incide con la línea a .*

Entre las consecuencias del $TFPyP$ (Proposición 4.7.3), encontramos que las polares de los puntos que son incidentes con una línea l , inciden con L , el polo de la línea l . De manera dual, los polos de las líneas que son incidentes con un punto L , inciden con l , la polar de L .

Así como los polos y las polares con respecto a una circunferencia estaban relacionados con la inversión en el plano euclidiano, los polos y las polares con respecto a una cónica estarán relacionados con las involuciones en el plano proyectivo real. Este hecho es mencionado por Derrick Lehmer (1917) en la siguiente proposición.

Proposición 4.7.5. *Los pares de puntos conjugados incidentes con una línea no tangente a una cónica, son pares de una involución. Los puntos dobles, si es que existen, son los dos puntos de intersección de la línea y la cónica.*²³

²³Lehmer, Derrick. (1917). *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. pp.81,82.

Demostración. Dada una cónica y una línea l no tangente a ella. Consideramos un punto A que incide con l , y a su polar con respecto a la cónica. Denotamos por A' al punto de intersección de las líneas l y a , y sea a' su polar con respecto a la cónica (véase figura 4.28). Así, A' es el punto conjugado de A , que incide con la línea l . Queremos demostrar que la correspondencia entre A y A' es una involución.

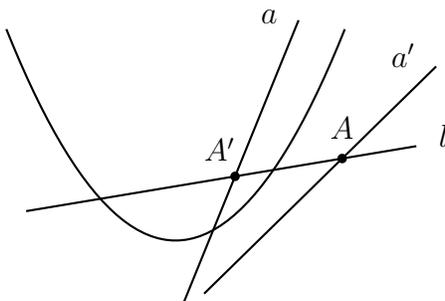


Figura 4.28: A y A' son puntos conjugados de una involución

Como A' es conjugado de A , por la proposición 4.7.3, el punto A es conjugado de A' , es decir, A incide con a' . Así, bajo la correspondencia, al punto A' le corresponde la intersección de las líneas l y a' , esto es, el punto A . Por la proposición 4.6.4, la relación polo y polar es una proyectividad, así la correspondencia entre A y A' es una proyectividad. Además, como ésta intercambia al par de puntos A y A' , por la proposición 3.3.2 se tiene que la proyectividad es una involución. Más aún, si l corta a la cónica en dos puntos P y Q , dado que estos puntos son autoconjugados en la línea l , se sigue que son puntos dobles de la involución. \square

Por el principio de dualidad, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.7.6. *Los pares de líneas conjugadas incidentes con un punto que no está en una cónica, son pares de una involución. Las líneas dobles, si es que existen, son las dos tangentes por el punto a la cónica.*

Con base en el par de proposiciones precedentes, definimos lo siguiente:

Definición 4.7.1. Un punto es *exterior* a una cónica si y sólo si existe una involución hiperbólica de pares de líneas conjugadas que inciden con el punto.

Definición 4.7.2. Un punto es *interior* a una cónica si y sólo si existe una involución elíptica de pares de líneas conjugadas que inciden con el punto.

Dada una cónica, A un punto y a su polar con respecto a la cónica. Observemos que, si A es un punto exterior a la cónica, por la proposiciones 4.7.6 y 4.6.5, se sigue que a es una línea secante a la cónica. Asimismo, si A es un punto interior a la cónica, por la

proposición 4.7.6 se sigue que A es una línea que no corta a la cónica. De esta manera, la relación polo y polar es una correspondencia que, a los puntos de una cónica los transforma en su respectiva tangente, a los puntos externos de la cónica los transforma en líneas secantes a la cónica y a los puntos internos de la cónica los transforma en líneas que no cortan a la cónica (véanse figuras 4.29, 4.30 y 4.31).

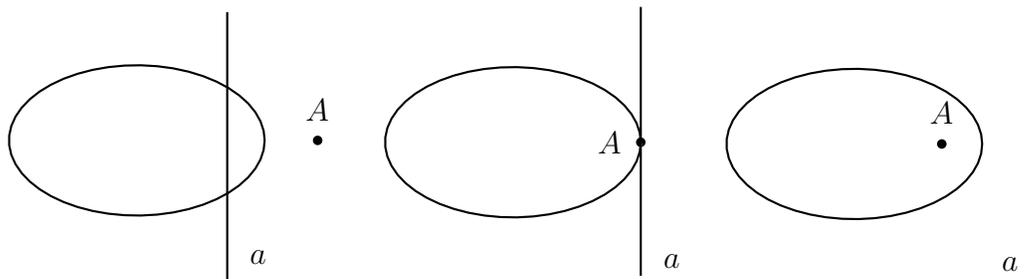


Figura 4.29: a es la polar de A y A es el polo de a

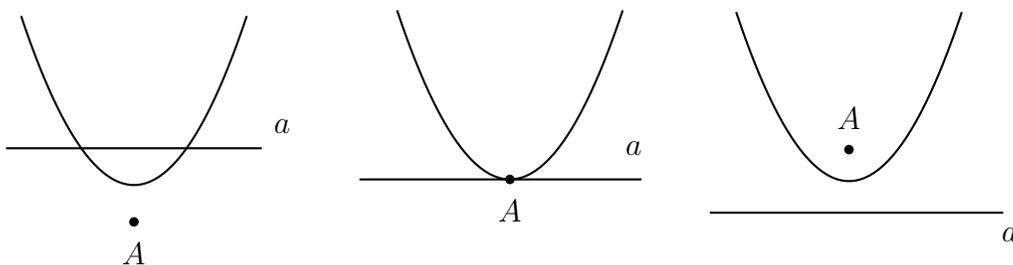


Figura 4.30: a es la polar de A y A es el polo de a

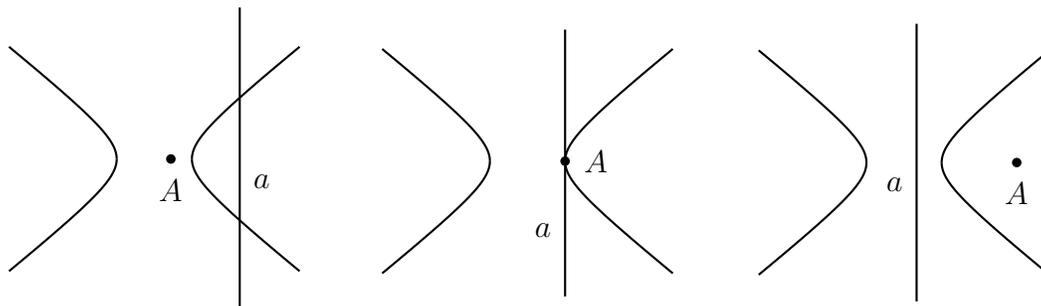


Figura 4.31: a es la polar de A y A es el polo de a

Al distinguir la línea al infinito en el plano proyectivo real, clasificaremos a las cónicas y definiremos elementos asociados a ellas, vía propiedades de incidencia.

4.8. Elementos de las cónicas vía propiedades de incidencia

Así como definimos, vía propiedades de incidencia, las nociones de: punto medio de un segmento (definición 2.3.1), líneas perpendiculares (definición 3.8.2) y bisectrices de un ángulo (definición 3.8.5), en el plano proyectivo real; definiremos los elementos asociados a una cónica, a saber, el centro, los diámetros, las asíntotas, los ejes, el eje principal, los vértices, el foco y la directriz, análogos a los del plano euclidiano.

A partir de la relación polo y polar con respecto a una cónica, distinguiremos un primer punto notable asociado a una cónica en el plano proyectivo real.

Definición 4.8.1. El *centro* de una cónica es el polo de la línea al infinito con respecto a la cónica.²⁴

Además, se acordará diferenciar a las líneas que inciden con el centro de una cónica.

Definición 4.8.2. Un *diámetro* de una cónica es una línea que incide con el centro de la cónica.²⁵

En concordancia con las relaciones de incidencia, también se convendrá lo siguiente:

Definición 4.8.3. Todo diámetro de la cónica es la polar con respecto a la cónica de algún punto al infinito.²⁶

Mientras que, en el plano euclidiano las cónicas son clasificadas en: hipérbolas, parábolas y elipses, en relación con ciertas propiedades de magnitud; en el plano proyectivo real, al considerar la línea al infinito y una cónica, sucede cualesquiera de los siguientes tres escenarios: la línea al infinito no corta a la cónica, la línea al infinito es tangente a la cónica, o bien la línea al infinito corta a la cónica en dos puntos distintos (véase figura 4.32).

Definición 4.8.4. En el plano proyectivo real, hacemos la siguiente clasificación

1. Una *elipse* es una cónica que no corta a la línea al infinito
2. Una *parábola* es una cónica que es tangente a la línea al infinito.
3. Una *hipérbola* es una cónica que es secante a la línea al infinito.²⁷

²⁴Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.87.

²⁵*Ibidem*. p.87.

²⁶*Ibidem*. p.87.

²⁷*Ibidem*. p.87.

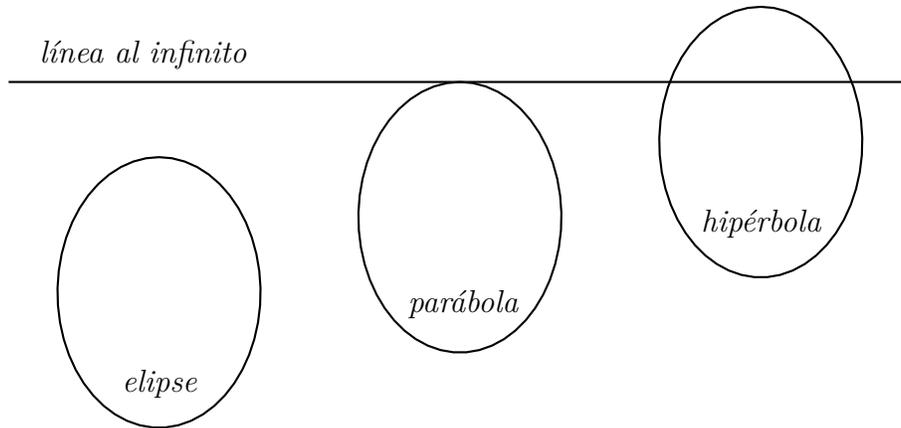


Figura 4.32: Elipse, parábola e hipérbola

De acuerdo con la clasificación de cónicas, el centro de una hipérbola es un punto exterior a la cónica, el centro de una parábola es un punto de la cónica y el centro de una elipse en un punto interior a la cónica. Así, la línea al infinito es autoconjugada, si la cónica es una parábola y no es autoconjugada, si la cónica es una hipérbola o una elipse. Asimismo, la línea al infinito induce una involución con dos puntos fijos, si la cónica es una hipérbola y una involución sin puntos fijos, si la cónica es una elipse. Observemos que, el centro de una parábola es un punto impropio, pues como la línea al infinito es tangente a la parábola, es la polar del punto al infinito que es su punto de contacto. Mientras que, la hipérbola y la elipse tendrán como centro un punto propio.

Definición 4.8.5. Una *cónica central* es una cónica cuyo centro no es un punto al infinito (elipse e hipérbola).²⁸

A propósito de la definición de hipérbola y dado que su centro es un punto exterior a ella, definimos lo siguiente:

Definición 4.8.6. Las *asíntotas* son las tangentes a una hipérbola en los puntos donde ésta corta a la línea al infinito.²⁹

Mientras que, la elipse y la parábola no tienen asíntotas, la hipérbola se relaciona con propiedades de magnitud que son asociadas a la definición 4.8.6, para consultar tales propiedades *cfr.* [Coxeter,1949, pp.113,115]. Observemos que, las asíntotas inciden con el centro de la hipérbola, ya que el punto de intersección de las asíntotas es el polo de la línea al infinito. Además, con base en la proposición 4.7.6, notemos que en la involución de líneas conjugadas en el centro de la hipérbola, las asíntotas son las líneas dobles de

²⁸Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.87.

²⁹*Ibidem*. p.87.

la involución. Así pues, los pares de diámetros conjugados son armónicos con respecto a las asíntotas.

También, por la proposición 4.7.6, sabemos que los diámetros conjugados de una cónica son pares de una involución y que sus líneas dobles, si es que existen, son tangentes a la cónica. Harold Coxeter (1949) señala que tal involución es elíptica o hiperbólica acorde si la cónica es una elipse o una hipérbola. En este hecho reside el origen de los nombres para los dos tipos de involución y, análogamente, los nombres elíptica, parabólico e hiperbólico para los tres tipos de proyectividades (p.111).

Con el propósito de relacionar las propiedades de magnitud de las cónicas con las propiedades de incidencia de las mismas, en el plano proyectivo real, obtendremos algunas consecuencias de las definiciones presentadas en esta sección. Con base en las propiedades de la relación polo y polar con respecto a una cónica, John Young (1982) enuncia el siguiente resultado.

Proposición 4.8.1. *Los puntos medios de un conjunto de cuerdas paralelas de una cónica inciden con un diámetro d que es conjugado del diámetro paralelo a las cuerdas. Más aún, el diámetro d incide con los puntos de contacto, si es que existen, de las tangentes a la cónica que son paralelas a las cuerdas.*³⁰

Demostración. Dada una cónica y un conjunto de cuerdas paralelas a la cónica (véase figura 4.33). Queremos demostrar que los puntos medios de dichas cuerdas inciden con un diámetro que es conjugado del diámetro paralelo a las cuerdas.

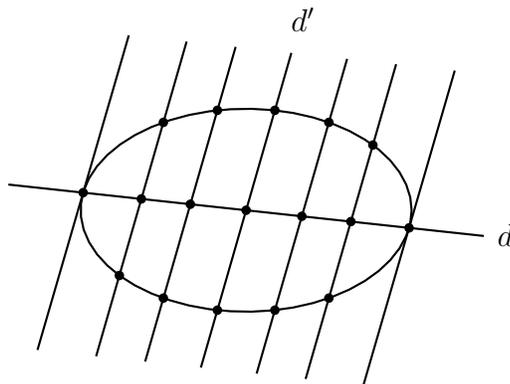


Figura 4.33: El diámetro d incide con los puntos medios de las cuerdas paralelas

Notemos que, el conjunto de cuerdas paralelas inciden en un mismo punto al infinito. De acuerdo con la definición 2.3.1, el punto medio de cada cuerda es el conjugado armónico de dicho punto al infinito con respecto a los puntos extremos de la cuerda. Por la proposición 4.6.1, tenemos que los puntos medios de todas las cuerdas inciden

³⁰Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.88.

con d la polar del mencionado punto al infinito, esto es, d es un diámetro de la cónica. Ahora, denotamos d' al diámetro paralelo a las cuerdas del conjunto, observemos que d' incide con el polo de d , así por el *TFPyP* (proposición 4.7.3) se tiene que d incide con el polo de d' . De manera que, los diámetros d y d' son líneas conjugadas con respecto a la cónica.

Finalmente, veamos que d incide con los puntos de contacto de las tangentes a la cónica que son paralelas a las cuerdas. Por la proposición 4.6.5, tenemos que los puntos de contacto de las tangentes a la cónica, por dicho punto al infinito inciden con d y como tales tangentes son paralelas, se tiene que d incide con los puntos de contacto de las tangentes a la cónica que son paralelas a las cuerdas. \square

Al considerar el centro de una cónica central, por la proposición 4.7.6, tal punto es centro de una involución de líneas conjugadas con respecto a la cónica. A su vez, la involución ortogonal induce la involución circular (definición 3.8.4) en el centro de una cónica central. En caso de que ambas involuciones coincidan, en el plano proyectivo real, se define lo siguiente:

Definición 4.8.7. Una *circunferencia* es una cónica en la cual la involución de diámetros conjugados coincide con la involución circular en el centro.³¹

Debido a que, en una circunferencia en el plano euclidiano, cualesquiera dos diámetros conjugados son perpendiculares (véase figura 4.34), entonces al extender al plano proyectivo real, por la proposición 3.8.3 tenemos que la circunferencia es una cónica que corresponde a la definición de circunferencia en el plano proyectivo real. En virtud de que, la involución de diámetros conjugados es elíptica, Harold Coxeter (1949) concluye que la circunferencia, *stricto sensu*, es una elipse, pues ésta tiene una involución elíptica de diámetros conjugados en el centro (p.120).

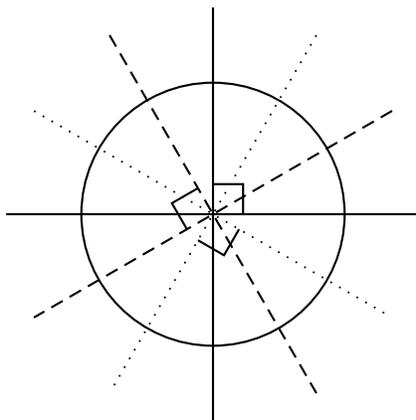


Figura 4.34: Involución de diámetros conjugados coincide con la involución circular

³¹Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.91.

A partir de la definición 4.8.7, es inmediato inferir diversas propiedades, *verbi gratia*, la polar de un punto con respecto a una circunferencia es perpendicular al diámetro que incide con el punto; una tangente al círculo es perpendicular al diámetro que incide con su punto de contacto; las líneas que unen los extremos de un diámetro con un punto de la circunferencia son perpendiculares.

En caso de que la involución de diámetros conjugados de una cónica no coincida con la involución circular en el centro, esto es, en caso de que no todos los pares de diámetros conjugados sean perpendiculares, en el plano proyectivo real también definimos lo siguiente:

Definición 4.8.8. Un *eje de una cónica* es un diámetro que es perpendicular a las cuerdas que biseca.³²

De acuerdo con la proposición 4.8.1, todo conjunto de cuerdas perpendiculares a uno de los ejes de una cónica central, son bisecadas por el otro eje. Por consiguiente, los puntos de la cónica son simétricos con respecto a cualquiera de sus ejes (véase figura 4.35).

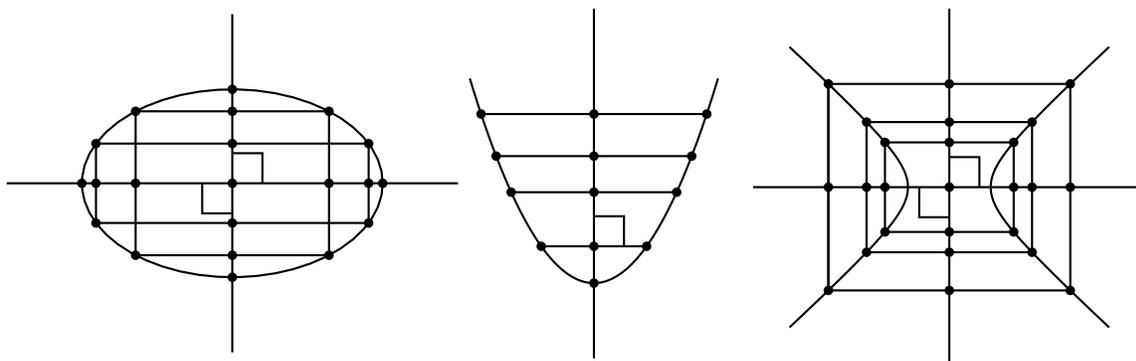


Figura 4.35: Las cónicas son simétricas con respecto a cualquiera de sus ejes

Dado que el centro de la parábola es un punto al infinito, todos sus diámetros son paralelos. Sin embargo, sólo uno de esos diámetros biseca a las cuerdas perpendiculares a él, así la parábola tiene un único eje. Mientras que, en una cónica central, los ejes son el par de diámetros conjugados perpendiculares.

De acuerdo con Harold Coxeter (1949), en una cónica central (elipse o hipérbola), hay dos involuciones de diámetros, una es la de diámetros conjugados generada por la cónica (involución elíptica o hiperbólica) y otra es la de diámetros perpendiculares generada por la involución ortogonal (involución elíptica). A excepción de la circunferencia, en cualquier cónica central ambas involuciones tienen sólo un par en común. Este par de

³²Coxeter, Harold. (1949). *The real projective plane*. p.122.

diámetros conjugados perpendiculares es un par de ejes. Una circunferencia tiene una infinidad de ejes, pues todos sus diámetros son ejes (p. 123).

Debido a que el centro de la elipse es un punto interior a la cónica, sus ejes son secantes a la elipse. Asimismo, el eje de una parábola es una secante en la que uno de sus extremos es un punto al infinito. A diferencia de la hipérbola, donde uno de los ejes es secante y el otro no corta a la cónica.

Con respecto a una cónica, en general, a toda línea le corresponde una única línea tal que es conjugada y perpendicular a la primera. En relación con este hecho, establecemos lo siguiente:

Definición 4.8.9. Un par de líneas son *conjugadas normales* con respecto a una cónica si y sólo si son perpendiculares y conjugadas con respecto a la cónica.³³

Así como en la circunferencia, la involución circular en el centro coincide con la involución de diámetros conjugados, distinguiremos a los puntos que son vértices de haces cuyos pares de líneas son conjugadas normales con respecto a una cónica.

4.9. Foco y directriz de una cónica

En el plano euclidiano, entre los elementos principales de una cónica se encuentran sus focos y sus directrices. Las caracterizaciones métricas de las cónicas más conocidas son enunciadas en términos de tales elementos, como referencia de este hecho, *cfr.*[Bracho,2009, pp.70-72]. Sin embargo, en el plano proyectivo real, un foco y su directriz de una cónica estarán basados en la relación polo y polar. Desde luego, al ser puntos notables, los focos de una cónica cumplirán ciertas propiedades que ningún otro punto del plano proyectivo real satisface.

Definición 4.9.1. El *foco* de una cónica es un punto donde los pares de líneas conjugadas que inciden con él, son pares de líneas conjugadas normales.³⁴

Observemos que, el centro de una circunferencia es su foco. Asimismo, como la involución de líneas perpendiculares es elíptica, se sigue que un foco es un punto interior de una cónica. De lo contrario, una tangente trazada desde el foco sería autoconjugada, esto es, perpendicular a sí misma. En la siguiente proposición, Harold Coxeter (1949) muestra que si existen dos focos para una cónica, la línea que incide con ellos es un diámetro y, más aún, un eje de la cónica.

Proposición 4.9.1. *Si existen dos focos para una cónica, la línea que incide con ellos es un eje.*³⁵

³³Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.92.

³⁴*Ibidem*. pp.92,93.

³⁵Coxeter, Harold. (1949). *The real projective plane*. p.132.

Demostración. Dada una cónica, supongamos que F y F' son los dos focos de la cónica. Queremos demostrar que la línea FF' es un eje.

Notemos que, las líneas perpendiculares a FF' por F y F' , respectivamente, son conjugadas a FF' . Por lo que, el polo de la línea FF' es el punto al infinito en la dirección perpendicular a FF' . Por tanto, la línea FF' es un diámetro y como es perpendicular a su diámetro conjugado, tenemos que la línea FF' también es un eje de la cónica. \square

Con base en la proposición anterior, observemos que los focos siempre inciden con un eje de la cónica, de lo contrario tendríamos un diámetro que no pasa por el centro de la cónica. Así pues, nos convendrá distinguir tal eje.

Definición 4.9.2. El *eje principal* de una cónica es el eje que incide con los focos de una cónica.³⁶

En la siguiente proposición, Derrick Lehmer (1917) muestra la existencia de los focos de una cónica y dilucida las condiciones bajo las cuales se pueden encontrar tales puntos.

Proposición 4.9.2. *A excepción de la circunferencia, existen sólo dos puntos en el plano donde la involución de líneas conjugadas determinada por una cónica central es circular. En tal caso, los puntos son los focos de la cónica.*³⁷

Demostración. Dada una cónica central. Primero veamos que en los ejes de la cónica dada, existe una involución de puntos, donde cada par de puntos correspondientes son centros de dos haces en proyectividad tal que los pares de líneas correspondientes son conjugadas normales. Posteriormente, veremos que hay dos puntos dobles en dicha involución, cada uno será centro de un haz donde todo par de líneas conjugadas son perpendiculares. Por lo que, tales puntos dobles serán los focos de la cónica.

Sea P un punto en uno de los ejes de la cónica central, trazamos q una línea que incide con P . Notemos que, por la proposición 4.6.4, si q se mueve a lo largo del haz en P , su polo Q se mueve a lo largo de la hilera en p , la polar de P . Además, como el eje donde incide P es la polar del punto al infinito en la dirección perpendicular a dicho eje, así la polar de P es una línea perpendicular al eje donde incide P (véase figura 4.36). De esta manera, Q describe una hilera de puntos que están en proyectividad con el haz de líneas que describe q . Ahora, trazamos q' la línea perpendicular a q por el punto Q . Luego, el punto al infinito en la dirección perpendicular a q describe una hilera de puntos en la línea al infinito. Esta última hilera de puntos está en proyectividad con la hilera de puntos que describe Q . Más aún, las líneas q' que unen puntos correspondientes de estas dos hileras siempre son líneas conjugadas de q y son perpendiculares a q , dicho en otros términos, son conjugadas normales de q . Pero, como el punto al infinito en la

³⁶Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.96.

³⁷Lehmer, Derrick. (1917). *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. pp.90-92.

dirección perpendicular al eje, es el mismo punto al infinito que incide en p , se sigue que tal punto al infinito es invariante bajo la proyectividad. Por la proposición 1.2.5, se tiene que la proyectividad entre las dos hileras, es una perspectiva. Así pues, todas las líneas que describe q' , las conjugadas normales a todas las líneas del haz que describe q , se intersecan en un punto P' . El punto P' incide en el mismo eje donde incide P , lo cual se observa al considerar q perpendicular a dicho eje. Por lo que, P es el centro de un haz y P' es el centro de otro haz. Luego, el punto P se empareja con el punto P' , pues al mover el punto P a lo largo del eje y mantener la línea q paralela a una dirección fija, obtenemos una correspondencia proyectiva entre las hileras de puntos descritos por P y P' , respectivamente. Los pares de tal transformación se corresponden el uno al otro doblemente, pues P es el correspondiente de P' . Por consiguiente, P y P' son un par de una involución.

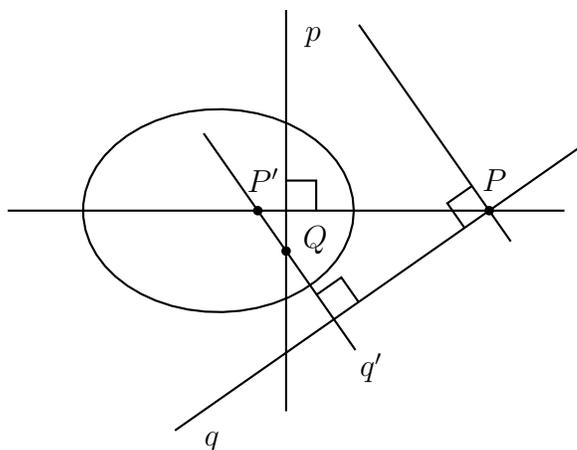


Figura 4.36: P y P' son un par de puntos conjugados de una involución

Ahora, veamos que la involución expuesta anteriormente tiene puntos dobles. Recordemos que, las líneas del haz con centro en P y sus correspondientes líneas en el haz con centro P' son conjugadas normales. Así, si P y P' coinciden, tendremos un punto donde todas las líneas son perpendiculares a sus conjugadas. Mostraremos que la involución descrita en el eje principal debe tener puntos dobles. Por la proposición 4.9.1, en el eje que no es principal, no existen puntos dobles como los que estamos buscando. Ahora, consideramos Q, Q' y R, R' , obtenidos de la misma forma en que obtuvimos P y P' , dos pares de puntos conjugados en el eje que no es principal y consideramos las circunferencias de diámetros QQ' y RR' , respectivamente (véase figura 4.37). Denotamos F y F' a los puntos de intersección de las dos circunferencias. Como el centro de la cónica es el centro de la involución, se constata que los puntos F y F' están en el eje principal. Además, las líneas FR y FR' son conjugadas normales, pues inciden con los puntos R y R' , respectivamente, y el ángulo $\angle RFR'$ es recto. Por tanto, la involución de puntos $Q, Q'; R, R'; \dots$ es proyectada desde F y F' en dos haces de líneas en involución cuyas líneas correspondientes son conjugadas normales a la cónica. Por tanto, F y F' son los focos de la cónica.

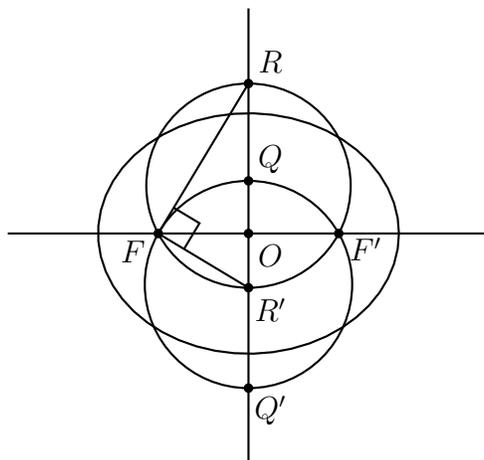


Figura 4.37: F y F' son los puntos dobles de la involución en el eje principal

□

Observemos que, el análisis presentado en la proposición anterior no se sigue para la parábola, pues en este caso sólo tenemos un eje. Si P se mueve hacia el infinito, la línea q también se mueve hacia la línea al infinito. Dado que ésta es tangente a la parábola, el polo Q de q se mueve hacia el infinito y también el punto P' . Por lo que P y P' coinciden en el punto al infinito. Por tanto, el punto al infinito en el eje de una parábola puede ser considerado un foco de la misma.

Como ya hemos mencionado, muchos resultados que conciernen a cónicas son presentados en función de sus focos. Tal hecho muestra el protagonismo, *ipso facto*, de estos elementos en el escenario de las cónicas. En la siguiente proposición, Derrick Lehmer (1917) enuncia una propiedad de las cónicas en función de sus focos.

Proposición 4.9.3. *Las líneas que unen un punto en una cónica y sus focos, forman ángulos iguales con las tangentes por el punto.*³⁸

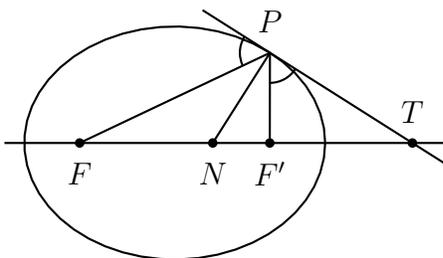


Figura 4.38: Las líneas PF y PF' forman ángulos iguales con la tangente

³⁸Lehmer, Derrick. (1917). *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. p.93.

Demostración. Dada una cónica y sean F y F' sus focos. Consideramos P un punto incidente con la cónica. Trazamos la tangente a la cónica por P y su perpendicular por P , el punto de contacto. Denotamos por N y T a los puntos en que este par de líneas cortan al eje principal (véase figura 4.38). Queremos demostrar que las líneas PF y PF' forman ángulos iguales con la tangente. Notemos que la tangente y su perpendicular son conjugadas normales. Así pues, los puntos T y N son puntos conjugados de la involución descrita en la proposición 4.9.2. Luego, por la proposición 3.4.6 se sigue que N y T son conjugados armónicos con respecto a F y F' , los puntos dobles de la involución. Como $H(NT, FF')$, al proyectar esta hilera desde P , obtenemos un haz armónico de líneas. Pero, PN y PT un par de conjugadas armónicas de este haz son perpendiculares. De acuerdo con la definición 3.8.5, la línea PN es bisectriz del ángulo $\angle FPF'$. Por tanto, las líneas PF y PF' forman ángulos iguales con la tangente. \square

En relación con la proposición anterior, Derrick Lehmer (1917) aclara que, en el caso de la parábola, se puede considerar como uno de los focos al punto al infinito en la dirección de los diámetros.

Proposición 4.9.4. *En una parábola, un diámetro y la tangente por uno de sus extremos forman el mismo ángulo que dicha tangente y la línea que incide con su punto de contacto y el foco.*³⁹

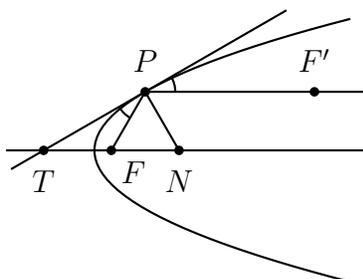


Figura 4.39: Las líneas PF y PF' forman ángulos iguales con la tangente

El eje principal corta a la cónica en puntos que llamaremos de la siguiente manera:

Definición 4.9.3. El *vértice* o los *vértices* de una cónica son los puntos en los que el eje principal corta a la cónica.⁴⁰

Notemos que, la parábola tiene un vértice, a menos que se considere un punto al infinito como vértice. En contraste, una cónica central tiene dos vértices. Por el contrario, la circunferencia tiene una infinidad de vértices, ya que todo punto en la circunferencia es un vértice.

³⁹Lehmer, Derrick. (1917). *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. p.94.

⁴⁰Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.101.

Una vez esclarecida la existencia de los focos de una cónica, asociaremos a cada uno de esos puntos una única línea en el plano de la cónica.

Definición 4.9.4. Una *directriz* de una cónica es la polar de uno de sus focos.⁴¹

Debido a que los focos son puntos interiores a la cónica, las directrices son líneas que no cortan a la cónica. Una cónica central tiene dos directrices, pues éstas tienen dos focos. Mientras que, una parábola tiene sólo una directriz, pues ésta tiene un único foco, a menos que se considere la línea al infinito como la otra directriz. Dada una cónica, uno de sus focos F y su correspondiente directriz d . Notemos que, F y el punto al infinito en la línea perpendicular al eje por el punto F , son puntos conjugados. Así, d incide con tal punto al infinito y por tanto, la directriz es perpendicular a eje principal. Además, observemos que en toda cónica, los vértices son conjugados armónicos con respecto a un foco y el punto en que la correspondiente directriz corta al eje. En particular, en una parábola, el vértice es el conjugado armónico del punto al infinito en el eje principal con respecto al foco y el punto en el que su respectiva directriz corta al eje, es decir, el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz.

A partir de las definiciones precedentes, John Young (1982) deduce la siguiente propiedad que funge como caracterización de los puntos de una cónica, vía uno de sus focos y su directriz, en el plano euclidiano.

Proposición 4.9.5. *La razón de la distancia de un punto en una cónica al foco entre la distancia del punto a la correspondiente directriz es constante.*⁴²

Demostración. Sean F un foco de una cónica, d su correspondiente directriz con respecto a la cónica y P un punto incidente con d (véase figura 4.40). Queremos demostrar que la razón de la distancia de un punto en la cónica al foco F entre la distancia del mismo punto a la directriz d es constante.

Consideramos una línea que incida con P y que corte a la cónica en los puntos A y B . Denotamos por T la intersección de las tangentes en A y B , así T es polo de AB . Como d es polar de F , las líneas FP y FT son conjugadas y como pasan a través del foco, las líneas FP y FT son perpendiculares. Denotamos por C al punto de intersección de las líneas FT y AB ; y por Q al punto de intersección de las líneas FT y d . Como FT es la polar de P , por la proposición 4.6.1 se sigue que $H(AB, PC)$. Si proyectamos a esta hilera armónica a través de líneas paralelas a FT , en la directriz d , obtenemos $H(PQ, MN)$. Así pues, las líneas FP, FQ, FM, FN forman un haz armónico con centro en el foco. Además como las rectas FP y FQ son perpendiculares, luego $\angle QFM = \angle QFN$ y $\angle CFA = \angle CFB$.

⁴¹Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.101.

⁴²*Ibidem*. pp.102,103.

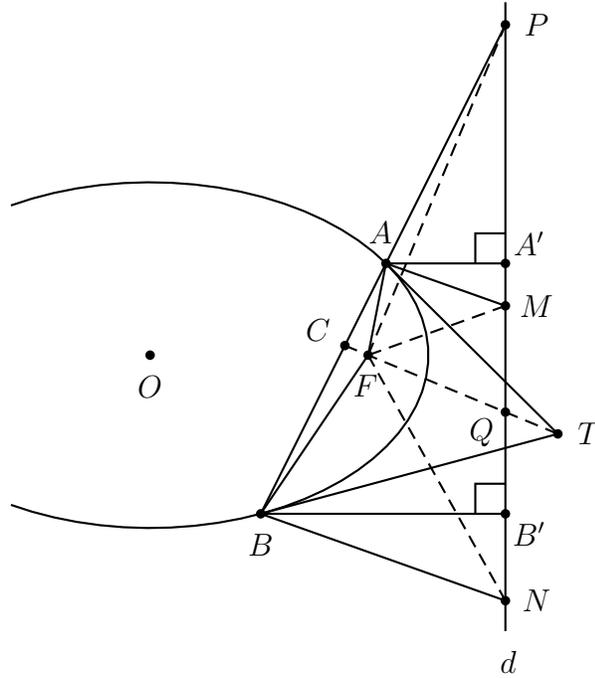


Figura 4.40: $\frac{FA}{AA'} = \frac{FB}{BB'}$

Los triángulos $\triangle FAM$ y $\triangle FBN$ son semejantes, por lo que

$$\frac{FA}{AM} = \frac{FB}{BN}$$

Si a través de los puntos A y B trazamos las líneas AA' y BB' , perpendiculares a la directriz, tenemos que los triángulos $\triangle AA'M$ y $\triangle BB'N$ son semejantes, por lo que

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN}$$

De estas últimas dos igualdades, se sigue que

$$\frac{FA}{AA'} = \frac{FB}{BB'}$$

Por tanto, la razón de la distancia de cualquier punto en la cónica al foco F entre la distancia del mismo punto a la directriz d , es constante. \square

Al radio enunciado en la proposición anterior lo llamaremos de la siguiente manera:

Definición 4.9.5. La *excentricidad* de una cónica es la razón de la distancia de un punto en la cónica al foco entre la distancia del punto a la directriz.⁴³

Recordemos que, la elipse y la hipérbola tienen dos focos y, por tanto, dos directrices. Dado que estas cónicas son simétricas con respecto a sus ejes, es evidente que, su excentricidad es una misma constante asociada a cualquiera de sus focos y su respectiva directriz. Cualquier punto en la cónica satisface la constante de excentricidad. Así, al considerar un vértice de la cónica, notamos que esta constante es, menor que uno para la elipse, igual a uno para la parábola y mayor que uno para la hipérbola.

Como consecuencia de la proposición anterior, John Young (1982) enuncia la siguiente proposición relacionada con *radios focales*, es decir, las distancias de un punto en una cónica a sus focos (véase figura 4.41).

Proposición 4.9.6. *En la elipse, la suma de los radios focales es constante. En la hipérbola, la diferencia de los radios focales es constante.*⁴⁴

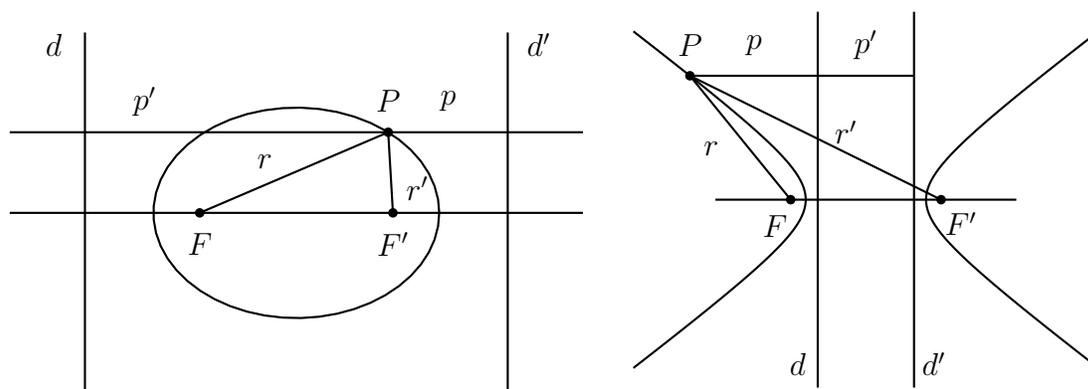


Figura 4.41: En la elipse $p + p'$ es constante y en la hipérbola $p - p'$ es constante

Demostración. Sean r y r' las distancias de un punto P en la elipse o hipérbola a sus focos F y F' , respectivamente, y sean p y p' las distancias de P a las correspondientes directrices d y d' . Queremos demostrar que, en la elipse $p + p'$ es constante y en la hipérbola $p - p'$ es constante.

Por la proposición 4.9.5, tenemos que $r = ep$ y $r' = ep'$. Por lo que, $r + r' = e(p + p')$ y $r - r' = e(p - p')$. Luego, notemos que en la elipse la suma $p + p'$ es constante, ya que es la distancia entre las directrices. Por tanto, la suma de los radios focales de P en la elipse es constante. Análogamente, notemos que en la hipérbola la diferencia $p - p'$ es constante, pues es la distancia entre las directrices. Por tanto, la diferencia de los radios focales de P en la hipérbola es constante. \square

⁴³Young, John. (1982). *Projective Geometry*. p.103.

⁴⁴*Ibidem*. pp.103,104.

Conclusiones

A lo largo del presente escrito, hemos hallado relaciones entre las propiedades de magnitud y las propiedades de incidencia en torno a tres temas: relación armónica, involuciones, y polos y polares; una vez que agregamos la línea al infinito al plano euclidiano. Aun cuando no es posible hacer consideraciones de magnitud alrededor de los puntos al infinito del plano proyectivo real, vimos que sí es factible atribuirle nociones de magnitud a cada uno de los puntos propios que resulta en cualquiera de los siguientes tres escenarios: el conjugado armónico del punto al infinito, el conjugado del punto al infinito bajo una involución y el conjugado polar del punto al infinito. De manera análoga, si bien no es posible hacer consideraciones de magnitud alrededor de la línea al infinito del plano proyectivo real, vimos que sí es factible atribuirle nociones de magnitud al punto propio que resulta ser el polo de la línea al infinito y a las líneas que resultan ser las polares de los puntos al infinito, con respecto a una cónica. Tales resultados y la relación que guarda el término conjugado con la configuración del cuadrángulo completo, nos permitieron entender las inversiones y los polos y polares vía una circunferencia, como casos particulares de las involuciones y de los polos y polares vía una cónica, respectivamente. Por otra parte, en el plano euclidiano, constatamos cómo las involuciones y los polos y polares preservan la razón cruzada y en particular, la relación armónica, esta última relacionada con propiedades de incidencia.

En el plano proyectivo real, vía propiedades de incidencia, definimos las nociones de punto medio de un segmento, líneas perpendiculares y bisectrices de un ángulo, análogas a las del plano euclidiano. Más aún, en el plano proyectivo real, una vez que introducimos la clasificación de las cónicas, mediante las relaciones de incidencia entre ellas y la línea al infinito, también definimos nociones asociadas a las cónicas, a saber, el centro, los diámetros, las asíntotas, los ejes, el eje principal, los vértices, los focos y las directrices, análogas a las del plano euclidiano. La suma de tales elementos más las propiedades de incidencia de la relación armónica, las involuciones y los polos y polares con respecto a una cónica, culmina con la consecución de las caracterizaciones métricas más conocidas de las cónicas, a saber, la excentricidad y diversas propiedades enunciadas en función de los focos de una cónica, en el plano euclidiano. El camino trazado en esta tesis, se basó en un enfoque sintético que logró materializar su propósito, aclarar las condiciones bajo las cuales las propiedades de magnitud del plano euclidiano se obtienen vía las

propiedades de incidencia del plano proyectivo real.

Nos parece importante mencionar que, el presente escrito cimienta parte de las bases de una potencial línea de investigación que continuará dilucidando las relaciones entre las propiedades de magnitud y las propiedades de incidencia. Aun cuando sólo nos remitimos a definir algunas nociones específicas por medio de propiedades de incidencia, logramos establecer herramientas poderosas que, inmediatamente, devienen en resultados más complejos en el plano euclidiano, *verbi gratia*, las ecuaciones canónicas de la elipse, la parábola y la hipérbola,⁴⁵ así como diversas propiedades de esta última cónica en relación con sus asíntotas.⁴⁶ En particular, con base en la definición de líneas paralelas en el plano proyectivo real, que tratamos en esta tesis, también es posible definir, vía propiedades de incidencia, otras nociones análogas a las del plano euclidiano, *verbi gratia*, la noción de circunferencias ortogonales y por consiguiente, la noción de circunferencias coaxiales.⁴⁷ Es evidente que, hay muchas nociones euclidianas y proyectivas que no fueron tratadas en este escrito. No obstante, quedan abiertas las siguientes preguntas: ¿es posible establecer cualquier propiedad de magnitud del plano euclidiano vía propiedades de incidencia del plano proyectivo real? De ser así, ¿bajo qué condiciones es realizable tal hecho? Tales preguntas subyacen a las posibles investigaciones que pueden seguir desarrollándose con base en la presente tesis. Quizá, las futuras respuestas nos doten de suficientes elementos para convencernos de que la esencia de la geometría plana pueda ser proyectiva y no métrica, como se piensa, frecuentemente.

⁴⁵Para un análisis detallado de las ecuaciones canónicas de la elipse, la parábola y la hipérbola, el texto de Derrick Lehmer (*An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. Estados Unidos de América. 1917), puede servir de consulta.

⁴⁶Para un análisis detallado de las propiedades de la hipérbola en relación con sus asíntotas, el texto de Harold Coxeter (*The real projective plane*. Estado Unidos de América, 1949), puede servir de consulta.

⁴⁷Para un análisis detallado de las nociones de circunferencias ortogonales y circunferencias coaxiales, vía propiedades de incidencia, el texto de Ewan Faulkner (*Projective Geometry*. Estados Unidos de América. 2006), puede servir de consulta.

Bibliografía

- [Altshiller,2007] Altshiller, Nathan. (2007). *College Geometry*. 2ª edición. Nueva York. Dover Publications.
- [Beskin,1975] Beskin, Nikolai. (1975). *Dividing a segment in a given ratio*. 1ª edición. Moscú. Mir Publishers.
- [Beutelspacher,1998] Beutelspacher, Albrecht y Rosenbaum, Ute. (1998). *Projective Geometry: From Foundations to Applications*. Reino Unido. Cambridge University Press.
- [Bracho,2009] Bracho, Javier. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. México. Fondo de Cultura Económica.
- [Casey,1888] Casey, John. (1888). *A sequel to the first books of the Elements of Euclid*. 5ª edición. Dublín. Hobges, Figgis & Co.
- [Corredor,2019] Corredor de Porras, Magaly y Londoño, Carlos. (2019). El arte y la historia de la construcción de la geometría proyectiva. *Saber, ciencia y libertad. Volumen 14*. pp.295-311.
- [Coxeter,1987] Coxeter, Harold. (1987). *Projective Geometry*. 2ª edición. Estados Unidos de América. Springer-Verlang.
- [Coxeter,1949] Coxeter, Harold. (1949). *The real projective plane*. 1ª edición. Estados Unidos de América. Mc Graw Hill book company Inc.
- [Fernández,2012] Fernández, Diego *et. al.* (2012). Sobre un porisma de Euclides y su dualización. *Miscelánea Matemática. Volumen 54*. pp.81-98.
- [Faulkner,2006] Faulkner, Ewan. (2006). *Projective Geometry*. 2ª edición. Estados Unidos de América. Dover Publications.

- [Greitzer,1967] Greitzer, Samuel y Coxeter, Harold. (1967). *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of América.
- [Hartshorne,2000] Hartshorne, Robin. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. Estados Unidos de América. Springer. 2000.
- [Heath,1956] Heath, Thomas L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated with introduction and comentary by Sir Thomas L. Heath*. 2ª edición. Estados Unidos de América. Dover Publications.
- [Hilbert,1971] Hilbert, David. (1903). *Grundlagen der geometrie*. 2ª edición. Teubner, Leipzig. (Versión en inglés: *Foundations of geometry*. (1971). The Open Court Publishing. Estados Unidos de América).
- [Johnson,1960] Johnson, Roger. (1960). *Advanced Euclidean Geometry. An Elementary Treatise of the Geometry of the Triangle and the Circle*. Estados Unidos de América. Dover Publications, Inc.
- [Lehmer,1917] Lehmer, Derrick. (1917). *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. Estados Unidos de América. Ginn and Company.
- [Leonard,2014] Leonard, Isaac. *et. al.* (2014). *Classical Geometry, Euclidean, Transformational, Inversive and Projective*. Estados Unidos de América. John Wiley & Sons Inc.
- [Milne,1911] Milne, John. (1911). *An elementary treatise on cross-ratio geometry*. Londres. Cambridge University Press.
- [O'hara,1937] O'hara, C. W. y Ward, D. R. (1937). *An Introduction to Projective Geometry*. Gran Bretaña. Oxford University Press.
- [Platón,1957] Platón. (1957). *Diálogos*. Decimoséptima edición. México. Porrúa.
- [Poincaré,1952] Poincaré, Henri (1952) *Science and Hypothesis*. Nueva York. Dover Publications Inc.
- [Seidenberg,2005] Seidenberg, Abraham. (2005). *Lectures in Projective Geometry*. Nueva York. Dover Publications Inc.
- [Shively,1984] Shively, Levi. (1984). *Introducción a la Geometría Moderna*. México. John Wiley & Sons Inc.

- [Torres,2012] Torres, Carlos. (2012). ¿Qué significa comprender el Teorema de Desargues?. *Miscelánea Matemática. Volumen 54*. pp.3-23.
- [Veblen,1910] Veblen, Oswald y Young, John. (1910). *Projective Geometry*. Volumen I. Estados Unidos de América. Ginn and Company.
- [Young,1982] Young, John. (1982). *Projective Geometry*. Chicago. The Open Court Publishing Company.

Índice alfabético

- bisectriz, 26, 97, 144, 149
- Brianchon
 - teorema de, 117, 124
- Ceva
 - teorema de, 10, 33, 34, 77, 94
- Ceva (proyectivo)
 - teorema de, 77, 94
- circunferencia, 138–140, 144
- circunferencias
 - coaxiales, 150
 - ortogonales, 7, 66, 108, 150
- conjugados, 130, 132
 - armónicos, 20, 35, 79, 85, 103, 108, 125, 126, 130, 137, 144, 145, 149
 - de una involución, 60, 61, 76, 83, 85–87, 93, 96, 130, 149
 - polares con respecto a una circunferencia, 100, 107
 - polares con respecto a una cónica, 102, 130, 131, 149
- conjunto cuadrangular
 - de líneas, 47, 49, 76
 - de puntos, 47–50, 53, 76
- cuadrángulo
 - completo, 11, 33, 35, 53, 76, 80, 87, 100, 102, 106, 112, 121, 126, 129, 131, 149
 - simple, 119
- cuadrilátero
 - completo, 11, 37, 100, 102, 107, 129
- cónica, 101, 110, 124–129, 133, 137, 140, 144, 145, 147
 - asíntotas de una, 102, 136, 149
 - base generadora de una, 111, 113
 - central, 136, 138, 139, 141, 144
 - centro de una, 102, 135, 138, 141, 142, 149
 - de líneas, 110, 111, 113, 118, 123, 124
 - de puntos, 110, 111, 113, 115, 117, 118, 121, 123, 124
 - degenerada, 111
 - directriz de una, 102, 140, 145, 147, 149
 - diámetro de una, 102, 135, 137, 139, 140, 144, 149
 - eje de una, 102, 139–142, 149
 - eje principal de una, 102, 141, 142, 144, 145, 149
 - elipse, 102, 135, 137, 138, 140, 147, 150
 - excentricidad de una, 147, 149
 - foco de una, 102, 140, 141, 143–145, 147, 149
 - hipérbola, 102, 135, 137, 140, 147, 150
 - parábola, 102, 135, 139, 140, 144, 145, 147, 150
 - punto exterior a una, 133, 136
 - punto interior a una, 133, 136, 140
 - vértice de una, 102, 144, 147, 149
- Desargues
 - teorema de, 12, 28, 48
- dualidad

principio de, 15, 16, 30, 32, 50, 52,
 74, 78, 80, 113, 114, 117, 118,
 123, 126, 129, 130, 132, 133

eje radical, 7, 81

Euler
 identidad de, 39, 42

formas uno-dimensionales, 13, 14

haz
 armónico, 20, 21, 25, 26, 28, 48
 de líneas, 12
 en involución, 62, 88, 90

hexágono simple, 17, 115, 116

hilera
 armónica, 19, 21, 23, 28, 40, 48,
 130, 145
 de puntos, 12
 en involución, 61, 80, 90

homotecia, 69

infinito
 línea al, 3, 92–94, 136, 141, 143, 145
 punto al, 3, 37, 80, 137, 139, 141,
 149

inversión, 59, 62, 67, 70, 85, 100, 132,
 149
 centro de, 60, 68, 69
 circunferencia de, 60
 radio de, 60

involución, 59–61, 72, 86, 102, 130, 132,
 133, 142, 144, 149
 centro de una, 61, 80, 142
 circular, 97, 138, 139, 141
 constante de, 61
 de líneas conjugadas, 133, 136, 138,
 139, 141
 de puntos conjugados, 132
 elíptica, 83, 88, 92, 94, 137–140
 hiperbólica, 79, 83, 85, 88, 90, 137,
 139
 ortogonal, 62, 92–96, 138, 139

líneas
 autoconjugadas, 107, 130, 136, 140
 conjugadas normales, 140–142
 diagonales, 11, 21
 dobles, 80, 90, 92, 133, 136
 paralelas, 3, 24, 35, 80, 81, 95,
 137–139, 142, 145, 150
 perpendiculares, 26, 90, 92–94, 96,
 138–142, 144, 145, 149

media geométrica, 63

mediatriz, 105

Menelao
 teorema de, 10, 33, 34, 54, 77

Menelao (proyectivo)
 teorema de, 78

ortocentro, 94, 106

Pappus
 teorema de, 17, 45

Pascal
 casos degenerados, 118, 119, 121,
 124
 teorema de, 115, 124

pentágono simple, 118

perspectividad, 13, 22, 111, 115

polar, 99, 101, 103–105, 125, 126, 128,
 132, 141, 145, 149

polo, 99, 101, 103, 105, 125, 129, 132,
 141, 149

polo y polar, 99, 149
 con respecto a una circunferencia,
 99, 103, 124, 132, 149
 con respecto a una cónica, 102,
 125–127, 132, 135, 137, 140, 149

potencia de un punto, 6, 7, 91

proyección, 13, 50

proyectividad, 13, 72–75, 111, 113, 115,
 117, 123, 127, 141, 142
 eje de, 16
 elíptica, 16, 137
 hiperbólica, 16, 137
 parabólica, 16, 137

punto de contacto

- a una circunferencia, 105
- a una cónica, 101, 117, 124, 129, 130, 137, 144
- punto medio, 24, 35, 37, 137, 145, 149
- puntos
 - autoconjugados, 107, 130
 - diagonales, 11, 21, 34, 35, 121
 - dobles, 78, 83, 85, 132, 142, 144
 - inversos, 59, 62, 63, 65, 67, 70, 99, 105
- radios focales, 147
- razón cruzada, 19, 38, 41, 44, 53, 69, 71, 86, 109, 149
 - de un haz, 22, 42
 - de una hilera, 21, 39, 101
- razón de partición, 8
- relación armónica, 19, 31, 65, 72, 100–102, 104, 106, 107, 110, 125, 129, 149
- sección, 13, 49
- sistema polar
 - con respecto a una circunferencia, 103, 109
 - con respecto a una cónica, 127
- Tales
 - teorema de, 37
- tangente
 - a una circunferencia, 105
 - a una cónica, 101, 117, 118, 120–126, 128–130, 137, 140, 144
 - TFGP*, 15, 51, 52, 74, 75, 113
 - TFPyP*, 107, 109, 131, 132, 138
- triángulo
 - altura de un, 93, 94
 - autopolar, 106, 129, 130
 - diagonal, 11, 106, 107, 126, 129
- triángulos
 - en perspectiva, 12, 29, 30, 48, 122, 129