



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

HACIA UNA TEORÍA MATEMÁTICA DEL  
JUEGO DE GO: TÁCTICAS, ESTRATEGIAS,  
INFLUENCIA Y CONTROL DE TERRITORIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

EMIL ESTUARDO GARCÍA BUSTAMANTE

TUTOR

DR. JOSÉ MATÍAS ALVARADO MENTADO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX., 2022



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Dedicada a:*  
*Pablo Torres(QEPD), Vladimiro González, Ricardo Quintero y Pépe Chacón*



# Agradecimientos

Elaborar esta tesis no sólo representó terminar mi licenciatura, si no culminar con todo un proceso de vida que me llevó a ser matemático. En este largo camino hay muchas personas a las que deseo agradecerles su apoyo, comprensión, solidaridad y sobre todo paciencia para que lograra terminar esta tesis.

En primer lugar deseo agradecer a mis papás, a mi mamá Marylena Bustamante y mi papá Otoniel García. Siempre me alentaron a que persiguiera mis pasiones y su apoyo ha sido incondicional en este proceso.

En segundo lugar deseo agradecer a mi esposa Dafne Ríos por que ha sido mi mejor aliada y siempre me impulsó a que concluyera este trabajo.

En tercer lugar deseo agradecer a mi tutor el Dr. Matías Alvarado Mentado, quien asumió este trabajo como una auténtica colaboración y tuvo la enorme paciencia para que desarrollara la obra según mis propios tiempos. Gracias por todas las sesiones de trabajo y todos los comentarios y observaciones que me permitieron corregir.

En cuarto lugar deseo agradecerle a la Dra. Rosaura Ruíz Gutiérrez, por el impulso que dió a la difusión del juego de Go desde la dirección de la Facultad de Ciencias en toda la UNAM, como fueron bachilleratos facultades y escuelas, durante los años 2009 - 2017 que fue directora.

Por último agradezco al Dr. José Rivaud Morayta (QEPD), por su labor pionera de promover el juego de Go en México, en la Facultad de Ciencias de la UNAM en los 80's y 90's.

Asimismo al proyecto CONACyT de Ciencia Básica A1-S-20037, Equilibrio de Nash, modelo de Ising y distribución de probabilidades en juegos cooperativos, del cuál mi tutor es Responsable Técnico.



# Índice general

Resumen . . . . .	1
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. El problema . . . . .	5
1.2. Objetivos . . . . .	6
1.3. Métodos y resultados . . . . .	6
<b>2. El juego de Go</b>	<b>7</b>
2.1. Enfoques y dinámicas del juego . . . . .	8
2.2. Piedras y libertades . . . . .	10
2.3. Tácticas . . . . .	13
2.4. Estrategias . . . . .	15
2.5. Estados . . . . .	16
2.6. Influencia y territorio . . . . .	20
<b>3. Gráficas y conexidad</b>	<b>25</b>
3.1. Definiciones básicas . . . . .	25
3.2. Operaciones con gráficas . . . . .	28
3.3. Gráficas conectadas y distancia . . . . .	29
3.4. Conexidad . . . . .	30



3.5. Teorema de Menger . . . . .	32
<b>4. Formalización del juego de Go</b>	<b>35</b>
4.1. Movimientos y configuraciones en el tablero . . . . .	35
4.2. Tácticas . . . . .	37
4.3. Estrategias, influencia y territorio . . . . .	41
<b>5. Cuantificación del control territorial con el modelo de Ising</b>	<b>43</b>
5.1. Espacio de estados y el árbol de juego . . . . .	43
5.2. Ejemplos de cuantificación . . . . .	47
5.3. Cuantificación a gran escala . . . . .	52
<b>6. Discusión</b>	<b>55</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Índice temático</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

1.1. Tablero de Go con piedras negras y blancas durante un juego . . .	3
2.1. Apertura negra en <i>san-san</i> , <i>hoshi</i> y <i>tengen</i> . . . . .	9
2.2. Piedra . . . . .	10
2.3. Libertades . . . . .	10
2.4. Grupo de 3 piedras . . . . .	11
2.5. Blanco conecta en 1 . . . . .	11
2.6. Negro corta en 1 . . . . .	11
2.7. La piedra negra marcada con $\triangle$ está en atari . . . . .	12
2.8. Blanco captura en C4 . . . . .	12
2.9. Esfera de influencia . . . . .	13
2.10. Invasión de blanco . . . . .	13
2.11. Reducción contra la apertura china . . . . .	14
2.12. Negro captura con una red . . . . .	14
2.13. Secuencia de blanco capturado en escalera . . . . .	15
2.14. Ojo . . . . .	15
2.15. Joseki en la esquina. Negro obtiene territorio en la esquina, blanco establece una posición en la banda inferior . . . . .	16
2.16. Capturando un grupo con un ojo . . . . .	17

2.17. Grupo blanco con dos ojos . . . . .	17
2.18. Depende del turno la vida o muerte del grupo blanco . . . . .	18
2.19. Negro 1 evita que blanco forme dos ojos . . . . .	18
2.20. Posición inicial de un ko. Si blanco captura la piedra marcada con $\Delta$ , negro tiene que esperar un turno para capturar de regreso	19
2.21. Los dos grupos en la esquina viven en seki . . . . .	20
2.22. Famoso moyo de Takemiya Masaki . . . . .	21
2.23. Territorio . . . . .	23
3.1. Una gráfica $G$ con 5 vértices y 6 aristas . . . . .	26
3.2. Una representación de $K_4$ . . . . .	26
3.3. $C_5$ también referida como 5-ciclo . . . . .	27
3.4. Gráfica 3-regular de orden 10 . . . . .	27
3.5. Gráfica bipartita . . . . .	28
3.6. $w_1, w_2, w_3$ son un $u - v$ separador . . . . .	33
4.1. $r$ es la piedra que resulta del movimiento $m(g)$ que forma la red sobre $\sigma$ . . . . .	39
4.2. Una piedra negra en escalera . . . . .	40
4.3. Una piedra $\sigma$ 2-conectada . . . . .	41
5.1. Influencia vs territorio . . . . .	48
5.2. Zona de cuantificación . . . . .	50

# Índice de tablas

5.1. Valor numérico de los patrones tácticos . . . . .	47
5.2. Calculando los sumandos de los $W_{ij}$ . . . . .	51
5.3. Calculando el primer término del Hamiltoniano . . . . .	51
5.4. Calculando el segundo término del Hamiltoniano . . . . .	52



# Resumen

El Go es un juego de estrategia, se juega entre dos jugadores sobre un tablero con una cuadrícula de  $19 \times 19$  líneas, colocando piedras negras y blancas en las intersecciones, con el objetivo de dominar la mayor cantidad de territorio en el tablero.

La explosión combinatoria que resulta de las alternativas para lograr ese dominio territorial es el punto crucial en el juego, en cuanto a desafío intelectual que representa. Tal desafío puede extrapolarse y representa retos científicos, tecnológicos y sociales de este siglo XXI, como por ejemplo, entender como se reproduce una tendencia en una red social o predecir la estructura de alguna de las más de 200 millones de proteínas conocidas por el hombre a la fecha. La necesidad de contar con un marco de referencia formal para analizar este grado de complejidad es lo que motiva el desarrollo de esta obra.

La tesis inicia con una introducción a los aspectos históricos y culturales del juego, seguido de una descripción, sin fórmulas matemáticas, de los conceptos fundamentales que encontramos en él, como son las tácticas, las estrategias y los estados de juego. Posteriormente, como antecedentes cercanos a nuestra formalización, presentamos algunos conceptos de teoría de gráficas.

En la sección esencial de esta tesis e inédita, se dan definiciones formales de los conceptos básicos: una piedra se define como un vértice ocupado por una piedra blanca ó negra, y, en su caso más general, se define como una trayectoria de vértices ocupados del mismo color en el tablero. Enseguida se define la función movimiento, esencial en todo el desarrollo posterior de esta tesis. A partir de la definición de movimiento se definen y caracterizan las tácticas cómo son la reducción, la invasión, la escalera, la red y el ojo. Así mismo se caracterizan las estrategias: influencia y territorio.

Se analiza la magnitud de la complejidad del juego de Go y se presenta una **función de energía**, previamente definida a esta tesis, la cual se utiliza para cuantificar la fuerza que tiene cada grupo de piedras de un color (jugador) en un estado (configuración) del tablero de Go. La función es una adaptación del Hamiltoniano de Ising, clásico de la física estadística para modelar sistemas

de energía, con gran cantidad de componentes, muy simples, que interactúan bajo reglas también muy simples. Con base en tal función se dan ejemplos y brevemente se describe su uso para cuantificar la ventaja de un jugador respecto a otro, a pequeña escala.

Al final y de manera muy breve se comentan procesos de biología de sistemas, equiparable a jugar Go bajo ciertas condiciones, desarrollados en artículos científicos ya publicados. Con la sección de Conclusiones se cierra la tesis.

# Capítulo 1

## Introducción

El Go es un juego de estrategia originario de la antigua China, en donde dos jugadores colocan por turnos piedras o fichas de colores negro y blanco, respectivamente, sobre las intersecciones de una cuadrícula de  $19 \times 19$  líneas en el tablero. El objetivo del juego es encerrar la mayor cantidad de **territorio** posible.

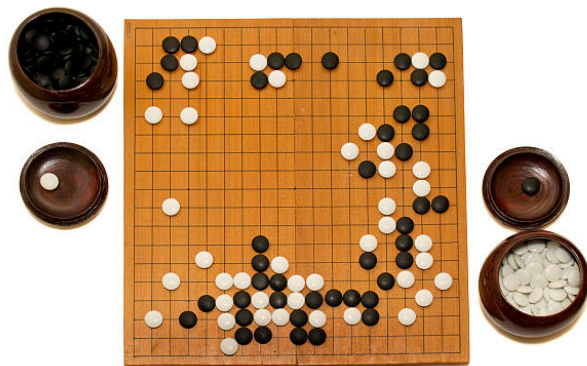


Figura 1.1: Tablero de Go con piedras negras y blancas durante un juego

Las piedras se colocan con el propósito de establecer fronteras que delimiten regiones vacías del tablero. A los vértices vacíos que conformen esas regiones se les denominará territorio. Una vez que las fronteras están bien definidas y el territorio consolidado, se cuantifica y el jugador con mayor territorio es el ganador.



El Go se rige bajo esencialmente una sola regla que es que si una piedra es rodeada por piedras rivales, la piedra rodeada procede a ser capturada por el rival y retirada del tablero. Este concepto fundamental se puede extender para la captura de grupos de piedras y será eje en la dinámica del juego.

Cabe señalar a esta altura que pese a la sencillez de sus reglas y elementos de juego, esconde una profunda complejidad y un vasto campo de exploración y descubrimiento [12].

Desde una perspectiva histórica, se cree que el Go, conocido como *Weiqi* en China y *Baduk* en Corea, la motivación de su creación fue por un emperador chino preocupado por heredar el trono a un hijo disperso; el emperador pidió ayuda a los sabios de su imperio, quienes crearon y le propusieron el juego de Go como instrumento para estimular el desarrollo de la fortaleza y templanza, mental y emocional del joven —características de un buen gobernante [9].

A lo largo de la historia este milenario juego de estrategia ha cautivado a una amplia gama de perfiles: artistas, intelectuales, académicos; más recientemente a emprendedores, empresarios y financieros. La ocupación eficaz del territorio, en cualquier ámbito, es fundamental. Para ello el juego de Go es muy revelador.

Grandes figuras de la historia han sido practicantes de Go: Albert Einstein, Alan Turing, John F. Nash, Yasunari Kawabata, entre otros. En particular Y. Kawabata ganó el Premio Nobel de literatura, el primero para Japón, en 1968, en buena medida gracias a su obra literaria “El maestro de Go” [8]. Incluso, Mao Tse Tung basó su campaña militar de la revolución comunista en las estrategias del Go como se lee en [4].

A nivel científico, los ingenieros del cómputo y las ciencias de datos —matemáticos entre ellos—, en los últimos años han tenido un rol protagónico en el desarrollo de los grandes maestros contemporáneos del Go, construyendo autómatas que juegan Go de manera insuperable [12]: la máquina AlphaGo en 2017 y su sucesora AlphaGoZero, mantienen un registro de escasos juegos perdidos frente a los maestros humanos del Go que han enfrentado. Más aún, al igual que los aficionados, los grandes maestros humanos del Go aprenden y se entrenan con inteligencias artificiales de Go, actualmente.

Se puede extrapolar el juego de Go a otros ámbitos, considerando como la idea fundamental, la construcción progresiva de estructuras para ocupar un territorio, de cualquier tipo: natural, comercial, financiero, político, o de solución de un problema [11].

Un ejemplo de esto es que la construcción progresiva de piedras y grupos en el Go, puede corresponder al desarrollo de células en tejidos y a su vez el desarrollo de tejidos en órganos, y así sucesivamente [2]; también hay analogía entre un juego de Go y la manera en que un mensaje hace tendencia y se posiciona en redes sociales, a partir de nodos que lo replican y contribuyen a su multiplicación

viral [11].

Con estos elementos podemos vislumbrar que en la expansión comercial, financiera y política, la influencia del razonamiento en, con y desde el Go es decisiva.

Actualmente, el Go se juega en una diversidad de formatos y en torneos muy prestigiados en el mundo entero: de manera presencial desde la histórica Copa Honinbo en Japón hasta la Copa Mundial Samsung, con generosos premios; asimismo, en plataformas virtuales como KGS <https://www.gokgs.com/>, OGS <https://online-go.com/>, Pandanet <https://pandanet-igs.com/>, entre muchas otras.

En China, Corea y Japón existe una amplia cultura alrededor de este juego, existiendo ligas profesionales patrocinadas, canales de televisión, academias para niños, etc. En Iberoamérica, México es potencia del juego de Go, en la rama amateur, junto con Brasil y Argentina, figurando también otros países de América Latina como Chile, Colombia y Cuba. Si bien la mayoría de los grandes jugadores profesionales son chinos, coreanos y japoneses, de manera sostenida es creciente el número de maestros profesionales que se han formado en Europa y en Estados Unidos. Seguramente, en pocos años tendremos los primeros jugadores mexicanos profesionales de Go.

## 1.1. El problema

El problema al abordar el desarrollo de una teoría matemática del juego de Go, conlleva definir los elementos tanto de estructura así como de la dinámica durante un juego. El escenario y reglas dónde se juega son muy simples. Sin embargo, es enorme la explosión combinatoria de posibilidades que existen para ganar una partida, considerando que existen 361 intersecciones en el tablero y que cada una puede estar en 3 estados posibles: blanco, negro o vacío, lo que resulta en que la cardinalidad del espacio de estados sea  $3^{361}$  y la del árbol de juego pensado como las posibles secuencias de estados, tiene como cota la cardinalidad del conjunto potencia del espacio de estados. Por esta razón se dice que hay más partidas de Go que átomos en el universo. La complejidad que conlleva su análisis formal es conforme tales dimensiones. Así, es necesario tener definiciones formales tales que permitan establecer, con precisión, la fuerza de cada jugador durante y al final de cada partida.

Cabe señalar que es tal la complejidad de este juego que otros autores que han investigado el tema han tenido que reducir considerablemente el espectro de análisis para poder modelar de manera efectiva su dinámica. Tal es el caso de Berlekamp y Wolfe [3], quienes a través de la teoría combinatoria de juegos presentan un modelo para enfrentar el cierre de una partida de Go y capturar la mayor cantidad de territorio en esta etapa, sin embargo esto sólo cubre una

muy pequeña parte de lo que implica una partida completa.

## 1.2. Objetivos

El propósito en esta tesis es iniciar el desarrollo de una teoría formal del juego de Go, la cual toma como elementos básicos las piedras individuales y los grupos de piedras o piedras compuestas, para, enseguida, definir tácticas y estados del juego. Luego se pasa a definir los conceptos —más avanzados— de estrategias de control territorial e influencia.

De manera complementario se presenta una metodología, definida y utilizada en trabajos previos, para cuantificar la fuerza que tiene cada grupo de piedras de un mismo color (jugador) en el tablero. A tal fin se introduce el concepto de **energía del sistema**, con base en un modelo adaptado del Hamiltoniano de Ising, formulación clásica de la física estadística para cuantificar la energía de un sistema con gran cantidad de componentes. Se dan ejemplos de cuantificación y brevemente se comenta el desarrollo y uso de tal método de cuantificación en literatura previa relacionada.

## 1.3. Métodos y resultados

En el Capítulo 2 se describe e ilustra el juego de Go: tácticas, estrategias y estilos de juego; todo en lenguaje natural para comprensión de un público amplio. En el Capítulo 3 se introducen conceptos de teoría de gráficas parcialmente útiles para que en el Capítulo 4 se den las definiciones matemáticas de la teoría a desarrollar y se formulen teoremas. En el Capítulo 5 se presenta el modelo del Hamiltoniano de Ising, el cual es un modelo extensivo para cuantificar la fuerza de los grupos de piedras en el tablero. El Capítulo 6 es para una breve discusión y el 7 es de conclusiones.

## Capítulo 2

# El juego de Go

En este capítulo se describe el juego de Go a partir de sus elementos básicos, el tablero, las piedras, las tácticas y las estrategias en el contexto de control territorial e influencia.

El Go es un juego de estrategia de suma cero y de información completa [6] en el que 2 jugadores colocan por turnos piedras de color negro y blanco respectivamente, sobre las intersecciones de una cuadrícula de  $19 \times 19$  líneas con el propósito de encerrar más área vacía que el oponente. A esta área vacía se le llamará territorio.

El juego de Go se basa esencialmente en una sola premisa: si un conjunto de piedras es rodeado por piedras rivales, este será capturado y retirado del tablero; el área liberada se convierte en territorio de quien hizo la captura.

A partir de la generalización de esta premisa de rodear al rival se desarrolla un conjunto de tácticas, las cuales se traducen en maniobras en una zona del tablero con objetivos bien definidos para ganar control o influencia sobre regiones en el tablero. Algunas de las tácticas son: **escalera**, **red**, **reducción**, **invasión** y **ojo**. Más adelante daremos sus definiciones precisas y formales.

La implementación sucesiva de diferentes tácticas da paso a la conformación de estrategias, las cuales se entienden como un plan a gran escala y no sólo a nivel local, para hacerse del mayor control territorial posible. Las principales estrategias son: **influencia**, **moyo**, **territorio** y **joseki**.

El final del juego se da una vez que las fronteras de las regiones controladas por cada color quedan totalmente definidas y por ende los territorios consolidados. Por consenso de ambos jugadores se procede a contar el tamaño de los territorios entendido como el número de vértices vacíos en cada área, más la cantidad

de piedras rivales capturadas. Aquel jugador que tenga la mayor cantidad de territorio en el tablero es el ganador.

A pesar de la amplia gama de combinaciones tácticas y estratégicas necesarias en una partida, la premisa fundamental del juego radica en la posibilidad de capturar al rival o ser capturado por él. A través de este principio de captura es que podemos hablar de la **vida** y **muerte** de las piedras y de los grupos que se llegan a conformar. De manera preliminar podemos enunciar que una piedra o un grupo de piedras está **muerto** si es capturado y retirado del tablero o, si bien todavía no ha sido capturado, está destinado a estarlo debido a la condición de encierro que el rival le confiere. Una piedra o grupo de piedras está **vivo** si puede escapar del encierro que pretende hacerle el rival.

En este juego de vida y muerte, ambos conjuntos de piedras, tanto blancas como negras, compiten por un mismo recurso, el territorio. El territorio coloquialmente se entiende como las regiones vacías del tablero que están bajo total control de un color en específico. Una piedra que sea colocada dentro del territorio rival tendría nulas posibilidades de sobrevivir. En el capítulo 4 daremos una definición formal de este concepto.

## 2.1. Enfoques y dinámicas del juego

Esencialmente existen dos tipos de enfoques en el juego de Go, el más tradicional enfoque territorial, también conocido como *amashi* en el Japón antiguo [10] y el estilo más novedoso que está orientado en la obtención y creación de influencia.

El enfoque de juego territorial se desarrolla al colocar y distribuir las piedras cerca de las orillas del tablero, en particular en la tercera y cuarta línea, para perfilar una región de control entre el borde del tablero y la distribución de tales piedras [7]. En este enfoque la esquina representa el lugar más valioso para jugar dado que en ella colindan dos de las orillas del tablero. Las piedras rivales que se coloquen dentro de esta región delimitada por la distribución de piedras y las dos orillas serán susceptibles a ser capturadas.

Hasta comienzos del siglo XX el enfoque de juego profesional estuvo basado en estos principios territoriales, pero a partir del movimiento llamado *Shin fuseki* o nueva apertura en japonés, originado por Go Seigen y Kitani Minoru, se comenzó a hacer énfasis en la construcción de influencia con las piedras y se abandonaba el enfoque puramente territorial [7].

La influencia que ejerce un grupo de piedras es la capacidad potencial que tiene una región del tablero por convertirse en territorio. A diferencia del enfoque territorial orientado a las esquinas y orillas, la influencia se ejerce principalmente hacia el centro del tablero. Esto implica que lo que se construye no es territorio

sólido, pero si algo que tiene la capacidad de serlo, pero que dependerá de como se desarrolle para confirmar si se consolida o no.

La confrontación de este nuevo estilo de juego orientado a la influencia y el tradicional estilo orientado al territorio alcanzó su clímax en 1933 en la histórica partida entre Go Seigen y Honinbo Shusai Meijin. En este juego, el joven Go Seigen, utilizó una apertura de *san-san*(tres-tres), *hoshi*(estrella) y *tengen*(cielo). En los cánones tradicionales, en la apertura siempre se debía comenzar jugando en las esquinas y posteriormente hacer extensiones o aproximaciones a las piedras en las esquinas, por lo que un tercer movimiento negro en *tengen* era algo completamente inaudito. De hecho la novela de “El maestro de Go” de Y. Kawabata [8], está inspirada en esta partida.

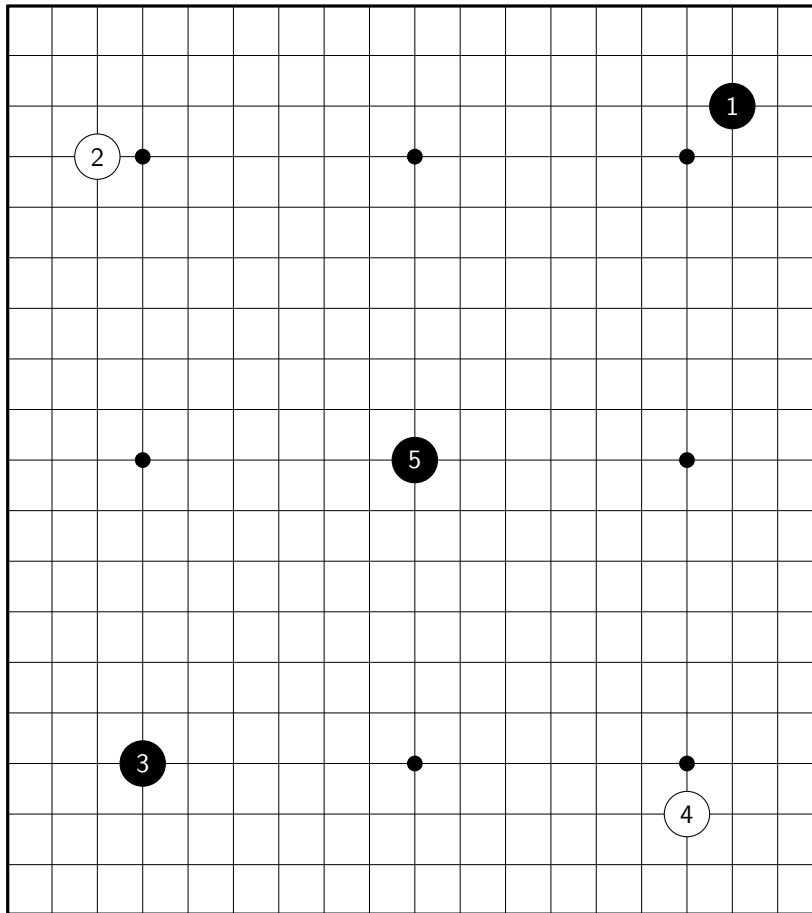


Figura 2.1: Apertura negra en *san-san*, *hoshi* y *tengen*

La región del tablero en la que se intersectan las influencias de distintas piedras aliadas se le denomina una esfera de influencia o *moyo*, una región proclive a volverse territorio.

Es este balance entre influencia y territorio, y entre, vida y muerte, entre otros factores, lo que hace del Go una actividad estética; e incluso artística.

La enorme multiplicidad de opciones para desarrollar soluciones, permite extrapolar su razonamiento analítico profundo a diversas áreas y disciplinas.

## 2.2. Piedras y libertades

Para comenzar una discusión más profunda acerca de este juego y el modelo que deseamos plantear será necesario definir los siguientes conceptos básicos:

**Piedra:** Unidad atómica de color blanco o negro que es colocada por un jugador durante su turno en una de las intersecciones vacías del tablero.

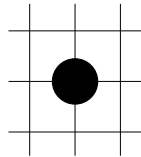


Figura 2.2: Piedra

**Libertades:** Intersecciones vacías adyacentes a la intersección en la que se encuentra una piedra. En general una única piedra tiene 4 libertades. Si una piedra rival ocupa alguna de estas 4 intersecciones entonces la piedra solo tendrá 3 libertades.

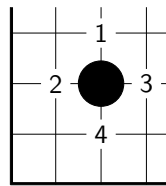


Figura 2.3: Libertades

**Grupos:** Un grupo de piedras se conforma por todas aquellas piedras individuales que se encuentran en intersecciones contiguas en la cuadrícula. Cada

intersección tiene 4 intersecciones contiguas o adyacentes a través de los cuales una piedra colocada en ella puede desarrollarse en un grupo.

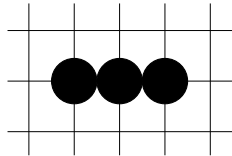


Figura 2.4: Grupo de 3 piedras

**Conexión:** Cuando dos piedras o dos grupos de piedras o más se unen para formar un sólo grupo.

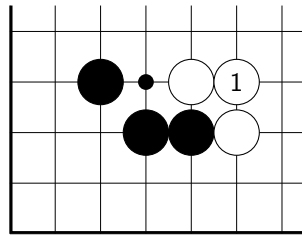


Figura 2.5: Blanco conecta en 1

**Corte:** Piedra que impide la conexión de dos piedras o grupos rivales.

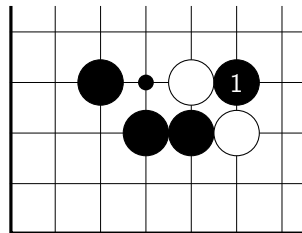


Figura 2.6: Negro corta en 1

**Atari:** Cuando una piedra o un grupo de piedras tiene una sólo libertad se dice que está en atari.



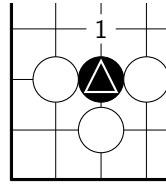


Figura 2.7: La piedra negra marcada con  $\triangle$  está en atari

**Captura:** Cuando una piedra o un grupo de piedras es encerrada por piedras rivales y pierde todas sus libertades, estas piedras serán retiradas del tablero por el rival y consideradas como capturas.

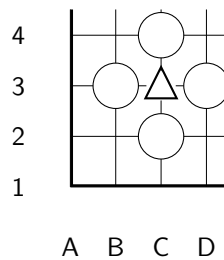


Figura 2.8: Blanco captura en C4

**Esfera de influencia:** Es una región del tablero en la que se encuentra una distribución de piedras de un mismo color el cual tiene el potencial de convertirse en territorio.

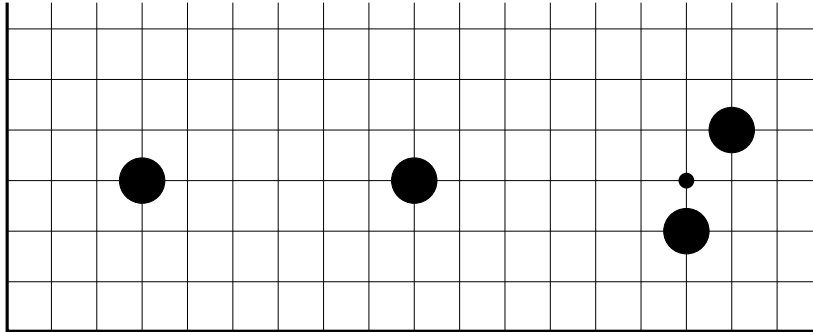


Figura 2.9: Esfera de influencia

## 2.3. Tácticas

Las tácticas se pueden comprender como maniobras que persiguen cierto objetivo a nivel local, como puede ser encerrar un grupo de piedras, reducir la posible expansión del territorio rival en una dirección o invadir una esfera de influencia rival para evitar que esta se consolide.

A continuación presentaremos, en lenguaje natural, las que consideramos las tácticas más relevantes:

**Invasión:** Cuando un jugador coloca una piedra dentro del territorio o esfera de influencia del rival.

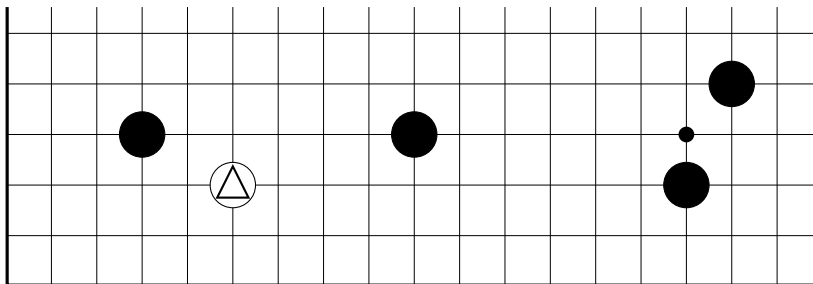


Figura 2.10: Invasión de blanco

El objetivo de la invasión es crear un grupo incondicionalmente vivo dentro de la esfera de influencia rival o que las piedras invasoras rompan la frontera de la esfera de influencia para escapar hacia una región del tablero donde no haya riesgo de ser capturado. En contra parte el rival hará todo lo posible para encerrar al grupo invasor y capturarlo.

**Reducción:** Una reducción es una jugada que se realiza en las colindancias de la frontera de una esfera de influencia rival con el propósito de limitar el desarrollo de dicha esfera de influencia.

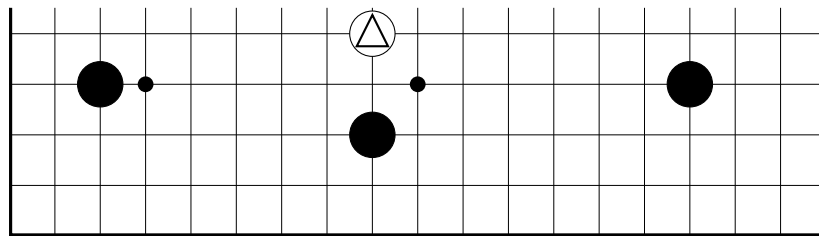


Figura 2.11: Reducción contra la apertura china

A pesar de que una reducción no se juega dentro de la esfera de influencia rival *per se*, también es susceptible a ser atacada por el rival.

**Red:** Técnica de captura de piedras que consiste en colocar una piedra en una posición diagonal al grupo bajo ataque que impide que el grupo pueda escapar por cualquier de los flancos abiertos.

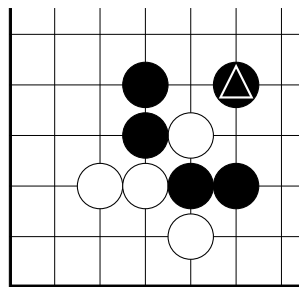


Figura 2.12: Negro captura con una red

**Escalera:** Técnica de captura que consiste en la colocación progresiva de un

grupo de piedras en atari. La captura se concreta cuando el grupo de piedras bajo ataque llega a la orilla del tablero o cuando encuentra una piedra rival que no le permite seguir escapando.

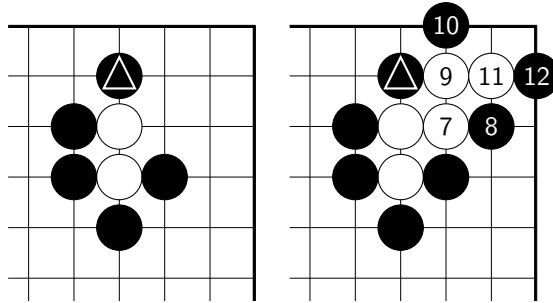


Figura 2.13: Secuencia de blanco capturado en escalera

**Ojo:** Intersección vacía que es rodeada por un grupo de piedras del mismo color. Un grupo con un ojo tiene la característica que en caso de ser encerrado, su última libertad será el ojo.

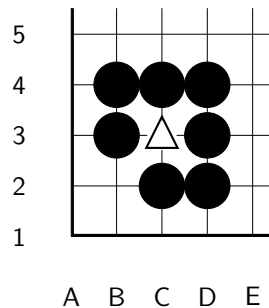


Figura 2.14: Ojo

## 2.4. Estrategias

Las estrategias se pueden considerar como el plan a gran escala que tiene un jugador para hacerse del mayor control territorial posible. Su implementación consiste en el uso consecutivo de tácticas que se hilan con cierta coherencia para conseguir un objetivo mayor.

**Influencia:** Es la potencial capacidad que tiene una región del tablero en consolidarse como territorio debido a la distribución de varias piedras de un mismo color en esa región.

**Moyo:** Esfera de influencia o región de influencia que perfilan las piedras de un mismo color.

**Territorio:** Región encerrada por piedras de un mismo color en las cuales las posibilidades de que el oponente invada de manera exitosa son prácticamente nulas. Esfera de influencia que se consolida.

**Joseki:** Secuencia de jugadas, generalmente en las esquinas, en donde cada jugador obtiene cierto beneficio (territorio, influencia, iniciativa, etc.) y que a nivel local se le considera como un resultado equilibrado.

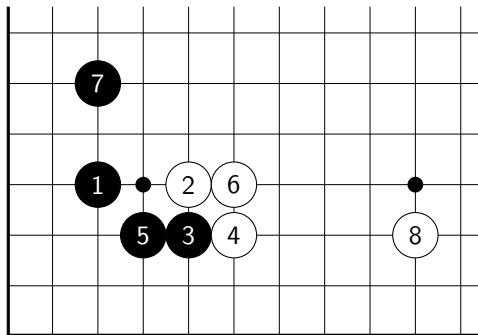


Figura 2.15: Joseki en la esquina. Negro obtiene territorio en la esquina, blanco establece una posición en la banda inferior

## 2.5. Estados

Los estados en el juego de Go quedan definidos como sigue:

**Semeai:** Carrera de libertades entre dos grupos rivales de piedras, en el que se busca reducir el número de libertades del grupo rival a cero antes que el oponente haga lo mismo.

**Vida y muerte:** A través de los conceptos de libertad y captura podemos definir cuando una piedra o un grupo de piedras está vivo o muerto. Podemos extender esta definición para otro tipo de grupos en los cuales no necesariamente necesitamos capturarlo por completo para poder decir que el grupo está muerto.

Nótese la Figura 2.14, en este caso el grupo blanco tiene un sólo ojo y negro puede capturarlo, primero ocupando las libertades exteriores del grupo blanco (diagrama izquierdo) y finalmente ocupando la última libertad interior (diagrama derecho). Vale la pena señalar que cuando un grupo está en atari podemos capturarlo entrando en una posición de aparente suicidio como es la jugada de negro 1.

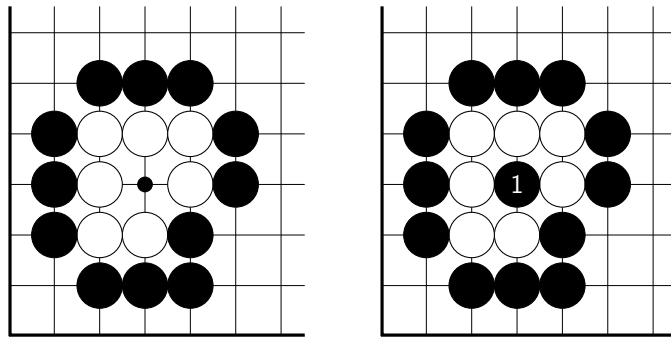


Figura 2.16: Capturando un grupo con un ojo

Existen sin embargo ciertos grupos a los cuales no se les puede dejar sin libertades, a estos grupos se les conoce como grupos con dos ojos. Un ejemplo de este tipo de grupos se muestra a continuación:

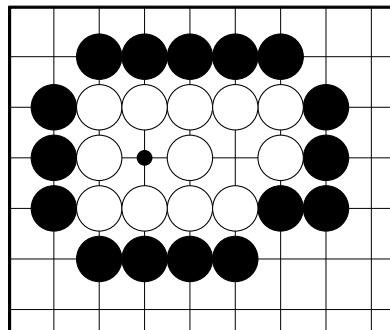


Figura 2.17: Grupo blanco con dos ojos

Aunque negro ocupe las libertades exteriores del grupo blanco, negro nunca podrá darle atari a este grupo ya que cuenta con dos ojos distintos. Negro no puede dejar nunca a blanco con una sola libertad ya que no puede ocupar

ninguna de las 2 libertades del grupo blanco, ya que colocar una piedra en cualquiera de estas 2 posiciones sería suicidio para negro. En este caso el grupo blanco no se puede capturar por lo que está incondicionalmente vivo.

Existen posiciones donde dependerá de quien tenga el turno para determinar si un grupo puede o no hacer los dos ojos. Un ejemplo de esta posición la vemos en la figura siguiente:

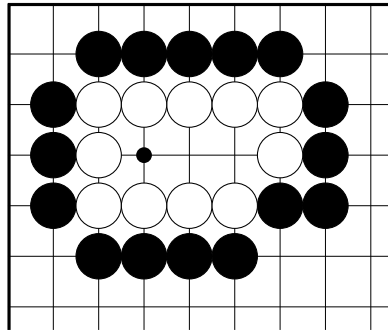


Figura 2.18: Depende del turno la vida o muerte del grupo blanco

Si es el turno de blanco, el puede jugar en el punto central y dividir su territorio en dos ojos asegurando su vida incondicional, como vimos en la Figura 2.17, pero si es el turno de negro, ocupar el mismo punto central deja al grupo blanco con un sólo ojo de 3 espacios, lo que implica que eventualmente es posible poner al grupo blanco en atari y capturarlo.

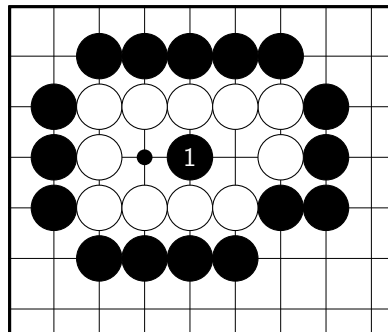


Figura 2.19: Negro 1 evita que blanco forme dos ojos

Considerando que el grupo blanco tiene un sólo ojo, está rodeado por negro y no tiene escapatoria, se le considera como un grupo muerto, aún cuando tiene

dos libertades y no se le ha capturado por completo y retirado del tablero.

Existe una extensa teoría referente a la vida y muerte de grupos, sin embargo lo relevante para este trabajo es entender el valor que tiene un grupo con dos ojos, ya que cuando hacemos una invasión en el territorio del oponente lo que buscamos es construir un grupo con esta propiedad, para que nunca pueda ser capturado y así poder destruir el territorio del rival.

**Ko:** Infinito en japonés. Posición en la que una piedra se encuentra en atari pero al ser capturada, la piedra que captura también queda en atari. Dado que se forma un ciclo de captura infinito, para evitar esto se establece la regla de que el jugador que es capturado primero debe esperar un turno para poder capturar de regreso la piedra rival. Este turno de espera da pie a lo que se llama “amenaza de ko”, la cual por lo general es respondida por el rival y permite que se capture de nuevo la piedra en atari. La recurrente realización de amenazas de ko por un jugador y otro se llama “lucha de ko”.

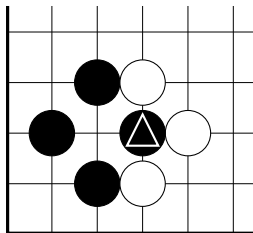


Figura 2.20: Posición inicial de un ko. Si blanco captura la piedra marcada con  $\triangle$ , negro tiene que esperar un turno para capturar de regreso

**Seki:** Vida mutua en japonés. Es una posición de simbiosis en la que dos grupos rivales comparten libertades y ninguno puede capturar al otro sin ser capturado primero.



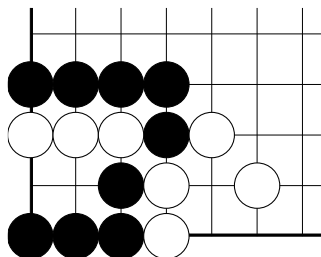


Figura 2.21: Los dos grupos en la esquina viven en seki

## 2.6. Influencia y territorio

El objetivo del juego de Go es conseguir más territorio que el oponente, para conseguir esto existen diversos enfoques en cuanto al desarrollo de las piedras y los grupos.

El primer enfoque es uno puramente territorial el cual se basa en ocupar posiciones claves en tercera línea principalmente, la cual es considerada la línea del territorio. Otro enfoque se concentra más en la influencia y velocidad. La influencia se puede definir como el potencial futuro que tiene cierta estructura de piedras para convertirse en territorio.

Cuando hablamos de influencia por lo general hablamos de esferas de influencia, las cuales se definen como una región del tablero con el potencial de convertirse en territorio, a estas esferas de influencia se les conoce con el término de *moyo*. Jugadas colocadas en cuarta, quinta y sexta línea enfatizan la influencia sobre el territorio.

**Moyo.-** Región del tablero cuyo contorno está delineado por piedras de un solo color y cuyas intersecciones están vacías en su mayoría. Este conjunto de intersecciones vacías es considerablemente más grande que el conjunto de piedras que delimitan la región. El revolucionario jugador de Go, Takemiya Masaki, puso de relieve la importancia de *moyos* fuertes como preámbulo para conquistar territorio.

Cuando lidiamos con *moyos* hablamos de su susceptibilidad a ser invadidos o reducidos y es en esta lucha donde se define que tanto territorio se puede realmente crear a partir de estas esferas de influencia. El jugador que posea la esfera de influencia intentará utilizar sus piedras para atacar a las piedras invasoras o reductoras y a través de este ataque procurará obtener alguna ventaja que se consolide como territorio real.

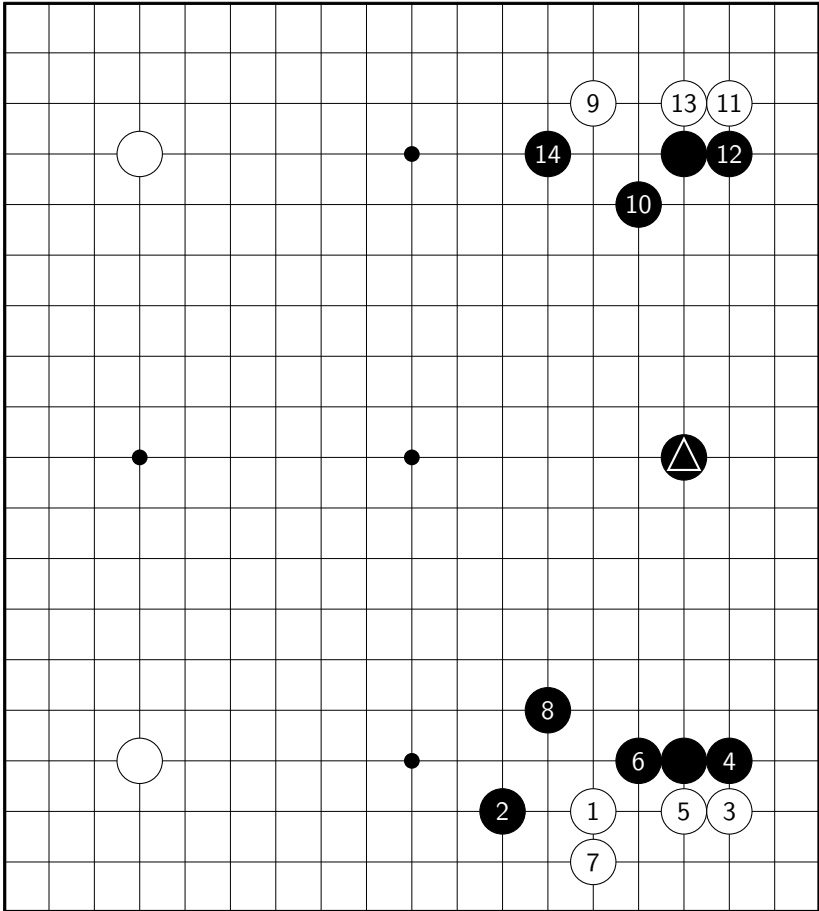


Figura 2.22: Famoso moyo de Takemiya Masaki

En el Go contemporáneo se hace más énfasis en juego veloz que procure establecer esferas de influencia, más que en un juego con un enfoque puramente territorial. Esto cabe señalar se ha dado a través de un proceso evolutivo sobre la teoría del juego, ya que en la teoría del siglo XIX y su predecesora, el enfoque era puramente territorial y fue hasta el siglo XX que nuevas teorías se desarrollaron con un enfoque más centrado en el desarrollo de *moyos*.

La ventaja que ofrecen las esferas de influencia es la de permitir la flexibilidad en el juego ya que no hay un apego a tal o cual estructura, si no se da oportunidad a desarrollar los territorios a partir de la evolución misma de la partida y no necesariamente a partir de las estructuras planteadas en la apertura.

Conforme se avance en el juego es imprescindible que el jugador con la esfera de influencia capitalice en territorio estas estructuras ya sea de manera parcial después de una reducción o invasión o de manera alterna a partir del ataque con las piedras de la esfera y la capitalización producto de este ataque en otras regiones del tablero.

**Territorio.-** Zona del tablero delimitada por piedras de un jugador y las orillas del tablero en la cual una invasión rival sería captura o neutralizada.

En el siguiente diagrama podemos observar dos zonas del tablero las cuales se pueden considerar como territorio. La de la esquina superior derecha es territorio de negro y la de la esquina inferior izquierda es territorio de blanco. Una invasión rival en cualquiera de las intersecciones marcadas con un recuadro sería muy susceptible a ser capturada.

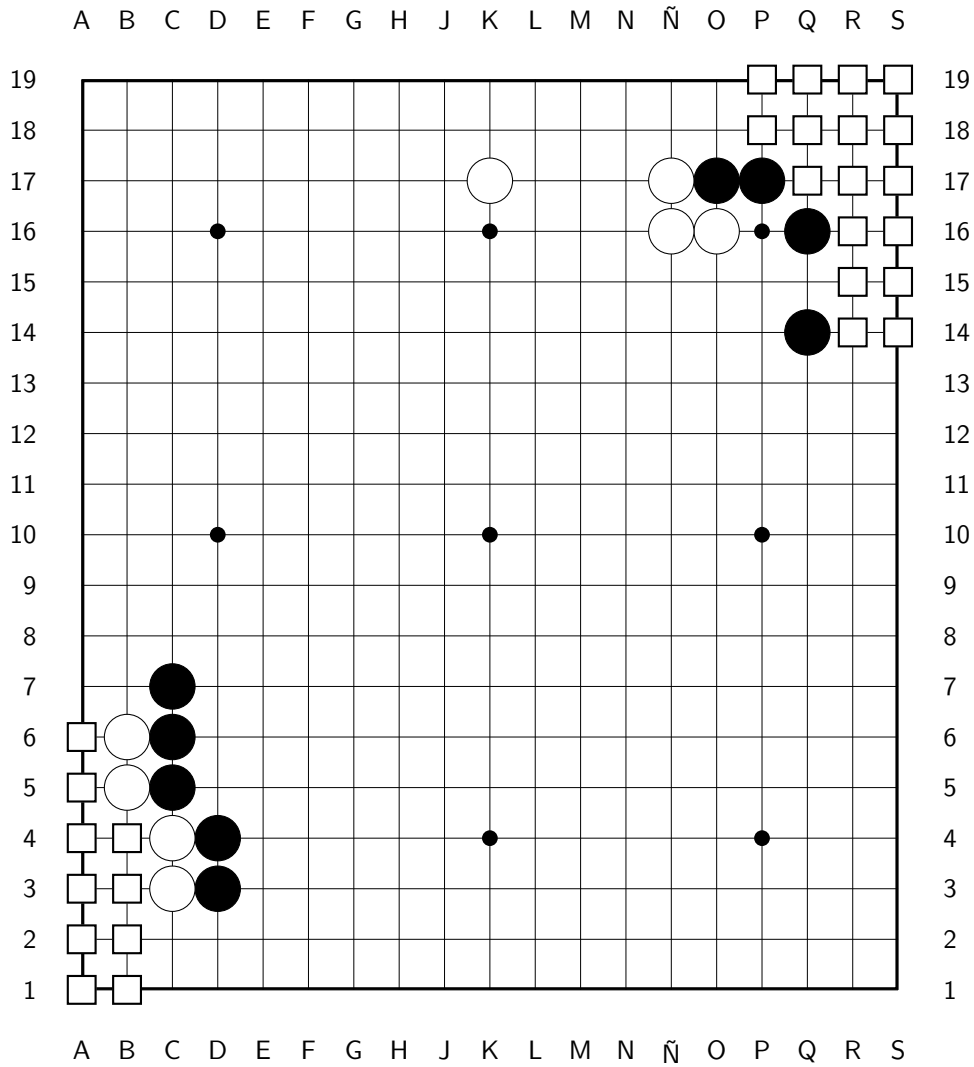


Figura 2.23: Territorio



## Capítulo 3

# Gráficas y conexidad

En este capítulo se presentan los conceptos de teoría de gráficas y de conexidad que utilizamos para hacer el desarrollo formal básico de la teoría del juego de Go.

Los grupos en el tablero de Go se pueden pensar como vértices conectados por aristas, lo que da pie a que utilicemos los conceptos que encontramos en la teoría de gráficas para comenzar con una formalización del juego.

Es posible hacer un desarrollo teórico del juego de Go en paralelo con la teoría de gráficas. En esta tesis se hace una introducción básica e inicial, para este desarrollo. Una teoría amplia sobre el juego de Go daría lugar, creo, a varias tesis de grado y posgrado.

### 3.1. Definiciones básicas

Una **gráfica** es una pareja  $G = (V(G), A(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto finito no vacío de elementos llamados **vértices** y  $A(G)$  es un conjunto formado por subconjuntos de elementos de  $V(G)$  de cardinalidad 2. Por lo general sabremos a que gráfica  $G$  nos referimos, por lo que estos conjuntos también se pueden denotar como  $V$  y  $A$  respectivamente. A los elementos en  $A$  se les llama **aristas**. Por simplicidad a esta pareja se le denotará solamente como  $G$ .

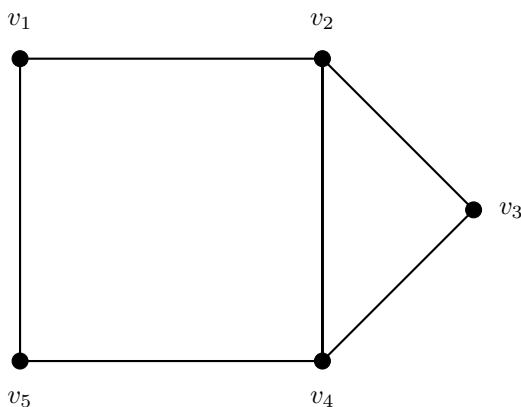


Figura 3.1: Una gráfica  $G$  con 5 vértices y 6 aristas

Cada arista  $\{u, v\}$  en  $G$  usualmente se le denota  $uv$ . Adicionalmente diremos que si  $a = uv \in A$  entonces  $a$  une a  $u$  y a  $v$ .

Si  $uv$  es una arista de  $G$ , entonces decimos que  $u$  y  $v$  son **vértices adyacentes**. De similar manera si  $uv$  y  $vw$  son aristas distintas en  $G$  entonces diremos que  $uv$  y  $vw$  son **aristas adyacentes**.

El número de vértices en una gráfica es el **orden** de  $G$  y el número de aristas es el **tamaño** de  $G$ . Una gráfica de orden 1 se le conoce como **gráfica trivial**. Una gráfica de tamaño 0 se le conoce como **gráfica vacía**.

En el otro extremo tenemos a las **gráficas completas** en donde cualesquiera dos vértices distintos están unidos por una arista. El tamaño de una gráfica completa de orden  $n$  es  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ . A la gráfica completa de orden  $n$  se le denota como  $K_n$ .

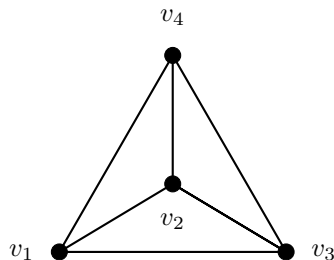


Figura 3.2: Una representación de  $K_4$

Otro concepto importante es el del **grado** de un vértice  $v$  en una gráfica  $G$ , el cual se define como el número de vértices en  $G$  que son adyacentes a  $v$ . El grado más grande entre los vértices de  $G$  se le llama el **grado máximo** de  $G$  y se denota por  $\Delta(G)$ . Al **grado mínimo** se le denota  $\delta(G)$ .

Tipos importantes de gráficas son las llamadas **trayectorias** y **ciclos**. Para un entero  $n \geq 1$ , la trayectoria  $P_n$  es una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $n - 1$  cuyos vértices se pueden etiquetar como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y cuyas aristas son  $v_i v_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Para un entero  $n \geq 3$ , el ciclo  $C_n$  también referido como  $n$ -ciclo, es una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $n$  cuyos vértices se pueden etiquetar como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y cuyas aristas son  $v_1 v_n$  y  $v_i v_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

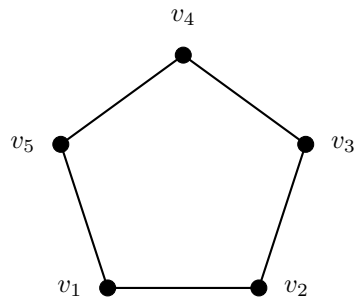


Figura 3.3:  $C_5$  también referida como 5-ciclo

Otro tipo importante de gráficas son las llamadas **regulares** en las cuales todos los vértices de la gráfica tienen el mismo grado. A estas gráficas también se les llama  $r$ -regular si el grado de los vértices es  $r$ . Por ejemplo la gráfica completa  $K_n$  es una gráfica  $(n - 1)$ -regular. Por otro lado, todo ciclo es 2-regular.

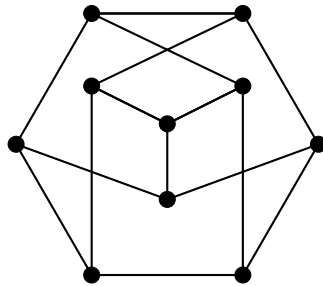


Figura 3.4: Gráfica 3-regular de orden 10

Las gráficas **bipartitas** son aquellas en las que existe una partición disjunta de



los vértices de  $G$  digamos  $V(G) = U \cup W$  donde para todo  $uw \in A(G)$ ,  $u \in U$  y  $w \in W$ .

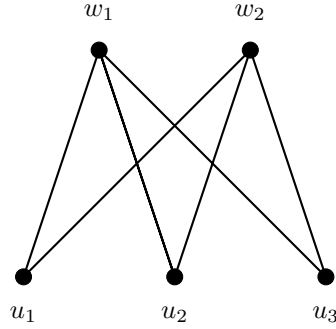


Figura 3.5: Gráfica bipartita

Una gráfica  $H$  es una **subgráfica** de una gráfica  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ . Si  $H$  es una subgráfica de  $G$  entonces diremos que  $G$  es una **supergráfica** de  $H$ . Si  $V(H) = V(G)$ , entonces  $H$  es una **subgráfica generadora** de  $G$ . Adicionalmente si  $H \neq G$  entonces  $H$  es una **subgráfica propia** de  $G$ . Que  $H$  sea una subgráfica propia de  $G$  implica que  $V(H) \subsetneq V(G)$  ó que  $A(H) \subsetneq A(G)$ .

Si consideramos un conjunto no vacío  $S \subseteq V(G)$  podemos hablar de la **subgráfica inducida** por  $S$  que se denota  $G[S]$ . Dos vértices son adyacentes en  $G[S]$  si y sólo si  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$ . De la misma forma para un conjunto no vacío  $X \subseteq A(G)$  podemos hablar de la subgráfica inducida  $G[X]$  y un vértice  $v$  pertenece a  $G[X]$  si y sólo si  $v$  es incidente con al menos una arista en  $X$ .

## 3.2. Operaciones con gráficas

Hay distintas maneras de producir nuevas gráficas a partir de otras ya existentes. Veremos alguna de estas operaciones a continuación.

El **complemento** de una gráfica  $G$  se denota como  $\overline{G}$  y tiene como conjunto de vértices a  $V(G)$  y dos vértices son adyacentes en  $\overline{G}$  si y sólo si estos vértices no son adyacentes en  $G$ . Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$  entonces  $\overline{G}$  será de orden  $n$  y de tamaño  $\binom{n}{2} - m$ .

La **unión**  $G = G_1 + G_2$  de dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  tiene como conjunto de vértices a  $V(G_1) \cup V(G_2)$  y como conjunto de aristas  $A(G) = A(G_1) \cup A(G_2)$ .

La **junta**  $G = G_1 \vee G_2$  de dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  tiene como conjunto de vértices

$V(G_1) \cup V(G_2)$  y tiene como conjunto de aristas

$$A(G) = A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$$

Dicho de otro modo la junta  $G$  tiene a todas las aristas originales de  $G_1$  y  $G_2$  y además conecta a cada vértice de  $G_1$  con todos los vértices de  $G_2$ .

El **producto cartesiano**  $G = G_1 \times G_2$  de  $G_1$  y  $G_2$  tiene como conjunto de vértices  $V(G_1) \times V(G_2)$  donde dos vértices distintos  $(u, v)$  y  $(x, y)$  de  $G_1 \times G_2$  son adyacentes si ocurre cualquiera de lo siguiente:

$$(1) u = x \text{ y } vy \in A(G_2) \text{ o } (2) v = y \text{ y } ux \in A(G_1)$$

### 3.3. Gráficas conectadas y distancia

Será de especial relevancia determinar si en una gráfica  $G$ , podemos viajar de un vértice a otro y de qué manera es posible hacer esto. Para analizar este tipo de situaciones es de utilidad introducir nuevos conceptos como caminos, paseos y trayectorias.

Para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$ , un  $u - v$  **camino**  $C$  en  $G$  es una secuencia de vértices en  $G$ , empezando en  $u$  y terminando en  $v$  que cumple que vértices consecutivos son adyacentes en  $G$ . A estos caminos podemos denotarlos como:

$$C = (u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$$

donde  $v_i v_{i+1} \in A(G)$  para  $0 \leq i \leq k - 1$ . Es común decir que  $C$  contiene cada vértice  $v_i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) y cada arista  $v_i v_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq k - 1$ ). El número de aristas encontradas en  $C$  será la **longitud** de  $C$ . En caso de que el camino termine en el mismo vértice en el que comenzó diremos que es un **camino cerrado**, en caso contrario diremos que es un **camino abierto**.

Un camino en una gráfica  $G$  se dice que es un **paseo** si ninguna arista se repite, en cambio, un camino que no repite vértices se dice que es una **trayectoria**. Cabe señalar que toda trayectoria es un paseo, ya que al no repetir vértices será imposible pasar por una misma arista dos veces.

Diremos que dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$  están **conectados** si  $G$  contiene un camino  $u - v$ . Diremos que la gráfica  $G$  está conectada o es **conexa** si cualesquiera dos vértices en ella están conectados.

Una subgráfica conexa  $H$  de una gráfica  $G$  es una **componente** de  $G$  si  $H$  no es una subgráfica propia de cualquier subgráfica conectada de  $G$ . El número de componentes en una gráfica  $G$  se denota como  $k(G)$ . Se sigue que  $G$  está conectada si y sólo si  $k(G) = 1$ .

A partir de las distintas trayectorias que unen a un vértice  $v$  con un vértice  $u$  podemos definir la **distancia** de  $u$  a  $v$ ,  $d_G(u, v)$ , como la mínima longitud de estas trayectorias. A estas trayectorias de longitud mínima se les denotará como **geodésicas**  $u - v$ .

Otro concepto de trascendencia es el de la **excentricidad** de un vértice  $e(v)$  el cual se define como la distancia máxima entre  $v$  y los demás vértices de una gráfica conectada  $G$ . A partir de esta definición podemos dar paso a otro concepto llamado el **diámetro** de  $G$ ,  $diam(G)$ , el cual se define como la excentricidad más grande entre los vértices de  $G$ . En contra parte el **radio** de  $G$ ,  $rad(G)$ , se define como la excentricidad más pequeña de los vértices en  $G$ .

A partir de los conceptos de diámetro y radio podemos definir un **vértice central** como aquel que cumple que  $e(v) = rad(G)$  y también podemos definir un **vértice periférico** como aquel que  $e(v) = diam(G)$ . Bajo esta óptica si dos vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  cumplen que  $d(u, v) = diam(G)$ , entonces diremos que  $u$  y  $v$  son **vértices antipodales** de  $G$ .

Dada un gráfica  $G$  conexa, un concepto fundamental es aquel de **vértice de corte**  $v$ , el cual cumple que  $G - v$  es una gráfica desconectada. Se sigue que si  $v$  es un vértice de corte de  $G$ , entonces  $G - v$  consiste de componentes  $G_1, G_2, \dots, G_k$  para algún entero  $k \geq 2$ . De manera más general un vértice  $v$  es un vértice de corte si  $k(G - v) > k(G)$ .

De manera análoga a como definimos un vértice de corte como aquel que si es removido de una gráfica  $G$  conexa resulta en una gráfica desconectada, también existen aristas con esta propiedad. Aquella arista  $e = uv$  que al ser removida da como resultado una gráfica desconectada se le conoce como **punto de corte**. Necesariamente,  $G - e$  consiste de dos componentes, uno conteniendo a  $u$  y otro conteniendo a  $v$ . De manera general,  $e$  es un punto de corte en  $G$  si  $k(G - e) > k(G)$ , de hecho en este caso  $k(G - e) = k(G) + 1$ .

### 3.4. Conexidad

En la sección anterior hablamos sobre gráficas conectadas, vértices de corte y puentes (aristas de corte). Sin embargo, aún no hemos establecido un criterio para determinar qué tan conexa es una gráfica respecto de otra. Por ejemplo  $K_3$  no posee vértices de corte ni puentes, sin embargo la trayectoria de orden 3,  $P_3$  tiene tanto vértices de corte como puentes. En esta sección introduciremos dos de las medidas más utilizadas para determinar que tan conexa es una gráfica.

Un **conjunto de corte** de una gráfica  $G$  es un conjunto de vértices  $S$  tal que la gráfica  $G - S$  es inconexa. Un conjunto de corte de mínima cardinalidad se le llama **conjunto de corte mínimo** de  $G$  y a esta cardinalidad se le llama la

**conexidad** de  $G$  y se le denota como  $\kappa(G)$ .

Las gráficas completas no contienen conjuntos de corte ya que remover cualquier subconjunto de vértices de ellas dan como resultado una gráfica completa más pequeña. Por ende, la conexidad de una gráfica completa de orden  $n$  se define como  $n - 1$ , i.e.  $\kappa(K_n) = n - 1$ . En general la conexidad  $\kappa(G)$  de una gráfica  $G$  es el número más pequeño de vértices que se necesitan remover para obtener una gráfica desconectada o trivial. De esta forma para toda gráfica de orden  $n$ ,  $0 \leq \kappa(G) \leq n - 1$ .

En ocasiones es más útil conocer cuando una gráfica  $G$  no puede ser desconectada al removerle cierto número de vértices, en lugar de conocer la conexidad exacta de  $G$ . Por lo que se dice que una gráfica  $G$  está  **$k$ -conectada**, si  $\kappa(G) \geq k$  con  $k \geq 1$ . Esto quiere decir que  $G$  está  $k$ -conectada si remover menos de  $k$  vértices no desconecta a  $G$ , ni la hace trivial.

Que tan conectada está una gráfica no solo se puede medir en términos del número de vértices que se necesitan remover para desconectarla, si no también en términos del número de aristas que se necesitan eliminar de  $G$  para llegar a una gráfica inconexa.

Es así que se define un **conjunto de corte de aristas** como un subconjunto  $X$  de  $A(G)$  tal que la gráfica  $G - X$  está desconectada. Un conjunto de corte de aristas de mínima cardinalidad en  $G$  se define como un **conjunto de corte de aristas mínimo** y esta cardinalidad es la **conexidad lineal** de  $G$  que se denota como  $\lambda(G)$ . Considerando que el conjunto de aristas incidentes a cualquier vértice de una gráfica  $G$  de orden  $n$  es un corte de arista de  $G$ , obtenemos:

$$0 \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq n - 1$$

El caso de la igualdad se obtiene para  $K_n$ , dado que se puede demostrar que  $\lambda(K_n) = \delta(K_n)$

**Teorema 3.4.1.** *Para cada entero positivo  $n$ ,*

$$\lambda(K_n) = n - 1$$

*Demostración.* Sabemos que  $\lambda(G) \leq n - 1$  para cualquier gráfica  $G$ , lo que faltaría probar en este caso es que  $\lambda(K_n) \geq n - 1$  para obtener la igualdad deseada.

Sea  $X$  un corte de arista mínimo de  $K_n$ . Esto implica que  $|X| = \lambda(K_n)$ .

Por otro lado al remover  $X$  de  $K_n$ , la gráfica resultante  $K_n - X$  tiene exactamente dos componentes digamos  $G_1$  y  $G_2$ . Si el orden de  $G_1$  es  $k$ , entonces el orden de  $G_2$  es  $n - k$ . Ya que todos los vértices de  $G_1$  estaban conectados con todos los vértices de  $G_2$  se sigue que  $|X| = k(n - k)$ .

Dado que  $k \geq 1$  y  $n - k \geq 1$ , se sigue que  $k - 1 \geq 0$  y  $n - k - 1 \geq 0$  por lo que  $(k - 1)(n - k - 1) \geq 0$ . Pero  $(k - 1)(n - k - 1) = k(n - k) - n + 1$ . Esto último es mayor a cero, lo que implica que  $\lambda(K_n) = |X| = k(n - k) \geq n + 1$ , que es justo lo que necesitamos demostrar.  $\square$

Esta desigualdad se puede extender para dar una cota inferior a la arista-conexidad de una gráfica  $G$ , la cual resulta ser la conexidad de la gráfica.

**Teorema 3.4.2.** *Para toda gráfica  $G$ ,*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

*Demostración.* Ya observamos que  $\lambda(G) \leq \delta(G)$  por lo que faltaría demostrar que  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .

Sea  $|X|$  un corte de arista mínimo, *i.e.*  $|X| = \lambda(G)$ . Sabemos que  $X$  divide a la gráfica en dos conjuntos disjuntos de vértices, digamos  $V_1$  y  $V_2$ .

Sabemos que a lo más  $\lambda(G)$  vértices son incidentes con alguna arista en  $X$  tanto en  $V_1$  como en  $V_2$ , lo que implica que basta con remover  $\lambda(G)$  vértices que sean incidentes con algún arista en  $X$  ya sea en  $V(G_1)$  o en  $V(G_2)$  para desconectar la gráfica.

Dado que la conexidad de una gráfica  $\kappa(G)$  es el mínimo número de vértices que se necesitan quitar para desconectar a  $G$ , se obtiene que:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G)$$

$\square$

### 3.5. Teorema de Menger

El Teorema de Menger es uno de los resultados mejor conocidos y más útiles sobre la conexidad de una gráfica.

Para hablar de él, primero necesitamos introducir nuevos conceptos. Para dos vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$ , un  $u - v$  **separador** es un conjunto  $S \subseteq V(G) - \{u, v\}$  tal que  $u$  y  $v$  se encuentran en dos distintas componentes de  $G - S$ . Un  $u - v$  separador de mínima cardinalidad es un  $u - v$  **separador mínimo**.

Para cualquiera dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$ , una colección de  $u - v$  caminos son **internamente ajenos** si cualesquiera dos caminos solo tienen a  $u$  y a  $v$  en común.

El teorema de Menger enuncia que los conceptos de  $u - v$  caminos internamente ajenos y conjuntos  $u - v$  separadores están conectados.

**Teorema 3.5.1** (Menger). *Sean  $u$  y  $v$  dos vértices no adyacentes en una gráfica  $G$ . El mínimo número de vértices en un  $u - v$  separador es igual al máximo número de  $u - v$  caminos internamente ajenos.*

La demostración completa de este teorema se puede consultar en [5]. En este trabajo nos limitaremos a analizar la siguiente gráfica para dar luz sobre lo que implica este teorema. En la gráfica  $G$  observamos que  $S = \{w_1, w_2, w_3\}$  es un mínimo  $u - v$  separador, por Menger esto implicaría que existen exactamente un máximo de 3  $u - v$  caminos internamente ajenos.

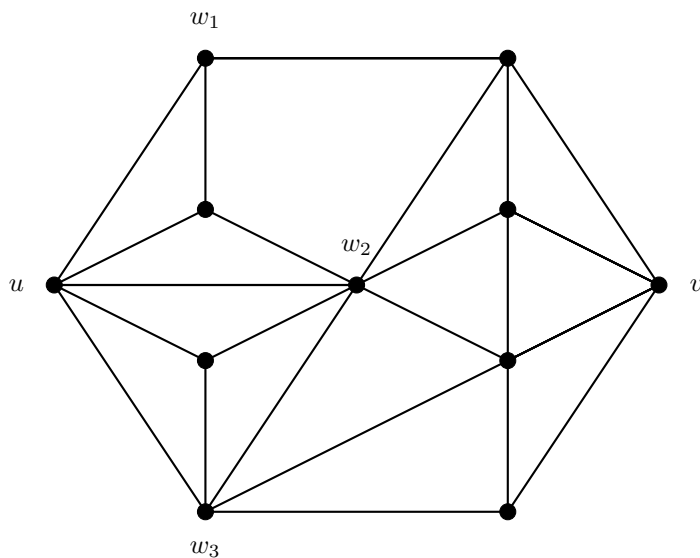


Figura 3.6:  $w_1, w_2, w_3$  son un  $u - v$  separador



## Capítulo 4

# Formalización del juego de Go

En este capítulo se formalizarán matemáticamente los conceptos propios del juego presentados en el capítulo dos. El concepto de conexidad presentada en el capítulo anterior es útil para definir formalmente elementos básicos del juego de Go.

### 4.1. Movimientos y configuraciones en el tablero

**tablero:**  $\tau = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x, y \leq 19\}$ .

**Color:**  $\forall \pi \in \tau$ , definimos el color de  $\pi$  como  $\rho(\pi) \in \{n, b, e\} = \Lambda$ , donde  $n$ = negro,  $b$ = blanco y  $e$ = vacío.

**Configuración de juego:**  $g = \{(\pi, \rho(\pi)) : \pi \in \tau, \rho(\pi) \in \Lambda\}$ .

$g$  se interpreta como una coloración del tablero; observe que  $\tau$  corresponde a la configuración inicial  $g_o = \{(\pi, e) : \pi \in \tau, \rho(\pi) = e, \forall \pi\}$ .

Obsérvese que bajo esta definición no todas las configuraciones de juego son válidas, ya que no podemos tener piedras sin libertades sobre el tablero. Una discusión más extensa sobre esta observación se realizará en el capítulo 5.

**Conjunto de configuraciones de juego:**  $G \subset \tau \times \Lambda = \{g : g \text{ es una configuración de juego}\}$ .

$G$  contiene todas las posibles coloraciones del tablero, en particular  $g_o \in G$ .



**Vértice:** es elemento de una  $g$ ,  $\vartheta = (\pi, \rho(\pi)) \in g$

**Vértices ocupados en  $g$ :**  $Ps(g) = \{\vartheta = (\pi, \rho(\pi)) : \rho(\pi) \neq e\}$ .

Sean  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$  vectores unitarios en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , y  $\vartheta_0 = (\pi_0, \rho(\pi_0))$ ,  $\vartheta_1 = (\pi_1, \rho(\pi_1))$  en  $g$ .

**Distancia Manhattan  $Mh$ :** Se define en  $g$  entre  $\vartheta_0$  y  $\vartheta_1$  como  $Mh(\vartheta_0, \vartheta_1) = |\pi_0\hat{\mathbf{i}} - \pi_1\hat{\mathbf{i}}| + |\pi_0\hat{\mathbf{j}} - \pi_1\hat{\mathbf{j}}|$ .

Dado un entero  $n \leq 19$ , se define la **vecindad de un vértice**  $\vartheta$  de radio  $n$  como el conjunto  $B_n(\vartheta) = \{\vartheta_s \in \Sigma \mid Mh(\vartheta, \vartheta_s) \leq n\}$

Decimos que  $t$  es una **trayectoria** entre  $\vartheta$  y  $\vartheta^*$  en  $g$ ; si y sólo si,

1.  $t = \vartheta_1\vartheta_2\dots\vartheta_n$ , tal que  $\vartheta = \vartheta_1$  y  $\vartheta_n = \vartheta^*$
2.  $Mh(\vartheta_k, \vartheta_{k+1}) = 1$
3.  $\rho(\pi) = \rho(\pi_k) = \rho(\pi^*) \forall k$  con  $2 \leq k \leq n - 1$ .

En este caso diremos que la longitud de  $t$  es  $n$ . Obsérvese que bajo esta definición hay trayectorias negras, blancas y vacías.

$C \subset g$  es **conexo** si entre cualesquiera dos vértices en  $C$  existe una trayectoria dentro de  $C$ .

Así podemos hablar del color de un conjunto conexo  $C$  como  $\rho(C) = \rho(\pi)$  para cualquier vértice  $(\pi, \rho(\pi)) \in C$ .

A partir de esto, para cualquier conjunto  $C$  en  $g$ , diremos que  $U \subseteq C$  es una **componente conexa** de  $C$  si  $U$  es conexo y  $U$  no es subconjunto propio de cualquier otro subconjunto conexo de  $C$ .

Decimos que  $\sigma \subset Ps(g)$  es una **pedra** si  $\sigma$  es una componente conexa de  $Ps$ .

$\sigma$  es una piedra individual si  $|\sigma| = 1$ , y se denota  $s$  específicamente.

Entonces, en general, una piedra  $\sigma$  es la **concatenación de piedras individuales contiguas y del mismo color**; es decir, de piedras del mismo color en vértices adyacentes en dirección vertical u horizontal.

**Conjunto de piedras:**  $\Sigma = \{\sigma \subset Ps : \sigma \text{ es piedra}\}$ .

**Conjunto de piedras individuales de  $\sigma \in \Sigma$ :** es el conjunto  $\bar{\sigma} = \{s : |s| = 1 \text{ y } s \text{ elemento de } \sigma\}$ .

Las **piedras aliadas son del mismo color y las adversarias de distinto color**; si las piedras aliadas son blancas las adversarias son negras, y viceversa.

**Conjunto de libertades de una piedra  $\sigma_0$ :**

$$L(\sigma_0) = \{\vartheta = (\pi, e) : \exists \vartheta_0 \in \overline{\sigma_0} \text{ con } Mh(\vartheta_0, \vartheta) = 1\}.$$

Dado  $C \in g$  un conjunto conexo, se define su **conjunto frontera** como  $\partial(C) = \{\vartheta : \exists \vartheta_0 \in C \text{ con } Mh(\vartheta, \vartheta_0) = 1, \rho(\vartheta) \neq \rho(\vartheta_0)\}$ . Note que por definición  $C \cap \partial(C) = \emptyset$ .

El **conjunto de libertades interiores de una piedra  $\sigma$**  se define como  $I(\sigma)$  y es la unión de las componentes conexas  $U_i$  del conjunto de libertades  $L(\sigma)$  que cumplen con que  $\rho(\partial(U_i)) = \rho(\sigma)$ .

**Conjunto de libertades exteriores  $E(\sigma)$ :** Dada  $\sigma \in \Sigma$ , es el complemento de  $I(\sigma)$  respecto  $L(\sigma)$ ,  $E(\sigma) = L(\sigma) \setminus I(\sigma)$ .

**Movimiento:** Dada una configuración de juego  $g \in G$  y un vértice  $(\pi, e) \in g$ ,  $m$  es un movimiento que modifica a  $(\pi, e)$ , si  $m$  es una función de  $G$  en  $G$ ,  $m(g) = g' \in G$ , tal que,

$$m(g) = g' \rightarrow \begin{cases} (\pi, e) \rightarrow (\pi, n) \\ (\pi, e) \rightarrow (\pi, b) \end{cases}$$

Uno de los vértices  $(\pi, n), (\pi, b)$  está en  $g'$ .

Si  $(\pi, n) \in g'$  es  $m$  un movimiento que resulta en una piedra negra unitaria en la configuración  $g'$ ; si  $(\pi, b) \in g'$  es  $m$  un movimiento que resulta en una piedra blanca unitaria en la configuración  $g'$ .

## 4.2. Tácticas

**Conexión:** Decimos que el movimiento  $m(g)$  conecta a  $\sigma$  con  $\sigma'$ , piedras aliadas en  $\Sigma$ , si la piedra resultante  $s$  produce que  $\sigma \cup \{s\} \cup \sigma'$  es conexo en  $m(g)$ .

Obsérvese que la condición de conexidad implica que  $\rho(\sigma) = \rho(s) = \rho(\sigma')$

**Atari:** Diremos que un movimiento  $m(g)$  es atari a  $\sigma$ , si el vértice  $(\pi, e)$  que  $m$  modifica está en  $L(\sigma) \subset g$  y  $|L(\sigma)| = 1$  en  $m(g)$ .

**Captura:** Diremos que un movimiento  $m(g)$  resulta en captura a  $\sigma$  si:

1. Se tiene que  $\sigma$  está en atari.
2. El vértice  $(e, \pi)$  que modifica  $m(g)$  es el único elemento de  $L(\sigma)$ .
3. Se retira a  $\sigma$  del tablero, lo que se expresa como que  $\forall (\pi, \rho(\pi)) \in \sigma \subset g$  resulta en que  $(\pi, e) \in m(g)$ .

Dada una piedra  $\sigma$ , decimos que una componente conexa,  $\varepsilon(\sigma)$ , de  $L(\sigma)$  es **ojo** de  $\sigma$  si  $\varepsilon(\sigma) \subseteq I(\sigma)$  y  $\partial(\varepsilon(\sigma))$  es conexa.

Observación: Una condición necesaria para la existencia de un ojo es que su conjunto frontera está conformado por piedras del mismo color. La condición suficiente es que este conjunto frontera sea conexo.

Decimos que una piedra  $\sigma$  tiene **dos ojos**, si  $I(\sigma)$  tiene al menos dos componentes conexas disjuntas  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  tal que los conjuntos frontera de estas componentes son conexos.

**Suicidio:** Diremos que un movimiento  $m$  es un suicidio si la piedra resultante  $s$  cumple que  $L(s) = 0$  o que si  $s$  se conecta una piedra  $\sigma$  entonces se tiene que  $L(\sigma \cup \{s\}) = 0$ .

Este movimiento es válido en el sistema de reglas Neozelandés; pero no en el sistema de reglas japonés o chino.

**Ojo falso:** Dada  $\sigma \in \Sigma$  decimos que  $\varphi(\sigma) \subset L(\sigma)$  es ojo falso de  $\sigma$  si  $\varphi(\sigma) \subseteq I(\sigma)$  y  $\partial(\varepsilon(\sigma))$  es inconexa.

**Semeai:** Decimos que  $\sigma$  y  $\sigma'$ , piedras adversarias, están en un semeai si:

1.  $L(\sigma) \cap L(\sigma') \neq \emptyset$ .
2. Existe una secuencia de movimientos aliados a  $\sigma$ ,  $s_1, s_2, \dots, s_k$  en  $L(\sigma')$ , tal que  $s_k$  produce la captura de  $\sigma'$ .
3. Existe una secuencia de movimientos aliados a  $\sigma'$ ,  $s'_1, s'_2, \dots, s'_n$  en  $L(\sigma)$ , tal que  $s'_n$  produce la captura de  $\sigma$ .

Si  $k < n$  entonces diremos que  $\sigma$  gana el semeai. Si  $n < k$  diremos que  $\sigma'$  gana el semeai.

**Piedra muerta:** Decimos que  $\sigma$  está muerta si para toda trayectoria  $t$  que tenga como posición de inicio a un elemento de  $\bar{\sigma}$ , entonces existen  $n$  movimientos rivales tal que  $\sigma$  es capturada.

Observación: Note que una piedra muerta es una piedra que aún no ha sido capturada pero que bajo cualquier secuencia de jugadas terminará siendolo.

**Red:** Diremos que un movimiento rival  $m(g)$  resulta en una red sobre  $\sigma$ , si:

1.  $|L(\sigma)| \leq \left\lceil \frac{|\partial(\sigma)|}{2} \right\rceil$  en  $g$ . Note que  $|\partial(\sigma)|$  es la máxima cantidad de libertades que puede tener  $\sigma$ .

2. Existe una piedra unitaria  $s_0$  en  $\bar{\sigma}$  que cumple  $Mh(r, s_0) = 2$  donde  $r$  es la piedra resultante de  $m(g)$ .
3. Para todo movimiento  $w(m(g))$  que resulte en una piedra aliada unitaria  $s$  que se conecte con  $\sigma$ , existe un movimiento rival  $m'(w)$  que resulta en que:  
 $|L(\sigma \cup \{s\})| \leq |L(\sigma)|.$

Note que  $L(\sigma) \subset m(g)$  y que  $L(\sigma \cup \{s\}) \subset m'(w)$ .

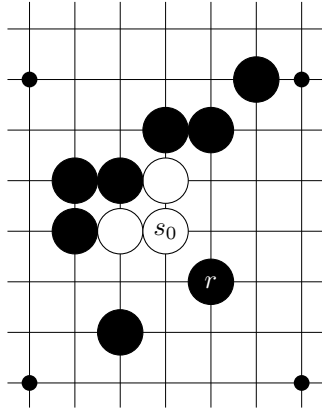


Figura 4.1:  $r$  es la piedra que resulta del movimiento  $m(g)$  que forma la red sobre  $\sigma$

**Escalera:** Un movimiento rival  $m(g)$  es una escalera sobre  $\sigma$ , si  $m$  es atari sobre  $\sigma$  y si  $\sigma$  se conecta con una piedra unitaria aliada  $s_1$  en su única libertad, entonces  $\exists s'_1$  atari sobre  $\sigma \cup \{s_1\}$  tal que si este conjunto se conecta con  $s_2$  en su única libertad, entonces  $\exists s'_2$  atari sobre  $\sigma \cup \{s_1\} \cup \{s_2\}$  y así sucesivamente hasta que  $s'_k$  produce la captura de  $\sigma \cup \{s_1\} \cup \dots \cup \{s_k\}$  para alguna  $k \in \mathbb{N}$ .

Observación: Note que una escalera es un caso particular de red, dado que una piedra  $\sigma$  en escalera cumple las 3 condiciones de red:

1.  $|L(\sigma)| \leq \left\lceil \frac{|\partial(\sigma)|}{2} \right\rceil$  en  $g$ . En particular para la piedra  $\sigma$  en escalera se cumple que  $|L(\sigma)| = 1$
2. Existe una piedra unitaria  $s_0$  en  $\bar{\sigma}$  que cumple  $Mh(r, s_0) = 2$ . Donde  $r$  es una de las piedras que establece la escalera.
3. Para toda piedra unitaria aliada  $s_1$  que se conecte a  $\sigma$ , existe un movimiento rival  $s'_1$  tal que  $|L(\sigma \cup \{s_1\})| = |L(\sigma)| = 1$ .

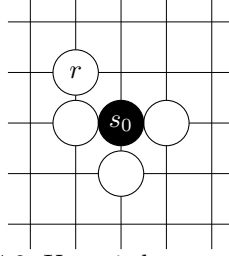


Figura 4.2: Una piedra negra en escalera

A continuación enunciaremos un par de teoremas que describen la relación que existen entre las distintas tácticas definidas:

**Teorema 4.2.1.** *Una piedra  $\sigma$  con dos ojos no se puede capturar.*

*Demostración.* Dado que para que una piedra  $\sigma$  sea capturada necesita estar primero en atari, basta con probar que no es posible poner en atari a una piedra  $\sigma$  con dos ojos.

Por definición si una piedra  $\sigma$  tiene dos ojos, entonces  $I(\sigma)$  tiene al menos dos componentes conexas disjuntas  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  cuyos conjuntos frontera son conexos. Esto implica que si  $s_1, \dots, s_n$  piedras rivales ocupan las libertades de  $\sigma$  hasta que  $|L(\sigma)| = 2$  entonces  $\exists \vartheta_1 \in \varepsilon_1$  y  $\vartheta_2 \in \varepsilon_2$  libertades tales que un movimiento rival  $m$  en  $\vartheta_1$  o en  $\vartheta_2$  sería suicidio, lo que implica que no hay forma de dar atari a  $\sigma$ , por lo tanto  $\sigma$  no es capturable.  $\square$

**Teorema 4.2.2.** *Una piedra  $\sigma$  que está en red o en escalera es una piedra muerta.*

*Demostración.* Sea  $m(g)$  un movimiento rival que resulta en una red sobre una piedra  $\sigma$ . Basta con probar que toda trayectoria  $t$  que comience en una piedra unitaria  $s_0 \in \bar{\sigma}$  termina siendo capturada.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $|\partial(\sigma)| = k$ . Por definición de red:

$$1) |L(\sigma)| \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.$$

2) Para cada piedra aliada unitaria  $s_1$  que se conecte a  $\sigma$ , existe una piedra rival  $s'$  que mantiene las libertades de  $\sigma \cup \{s_1\}$  menor o igual a  $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ .

Sea  $s_0$  el elemento en  $\bar{\sigma}$  que cumple que  $Mh(s_0, s_1) = 1$ , por lo tanto por la condición del inciso 2), la trayectoria  $t$  que comienza en  $s_0$  y sigue en  $s_1$  no puede

alcanzar más que  $\lceil \frac{k}{2} \rceil$  libertades y esta condición permanece para cualquier  $s_2$  piedra aliada que se conecte con  $t$  y así sucesivamente.

Esto quiere decir que existen  $n = \lceil \frac{k}{2} \rceil$  movimientos rivales tal que  $t$  se queda sin libertades y por lo tanto  $\sigma$  es capturada. Considerando que esto aplica  $\forall t$  trayectoria que tenga como posición de inicio un elemento de  $\bar{\sigma}$  podemos concluir que  $\sigma$  está muerta.

Dado que se mostró que una escalera es un caso particular de red, un razonamiento análogo muestra que una piedra en escalera también es una piedra muerta.  $\square$

Para finalizar esta sección enunciaremos el Teorema de Menger aplicado para el modelo que hemos establecido para el juego de Go:

**Teorema 4.2.3** (Menger). *Sean  $u$  y  $v$  piedras unitarias aliadas no adyacentes en una piedra  $\sigma$ . El mínimo número de vértices que se requerirían remover para desconectar a  $u$  y  $v$  es igual al máximo número de  $u - v$  caminos internamente disjuntos.*

Como ejemplo tomemos la siguiente piedra  $\sigma$  con un ojo y consideremos a  $u$  y  $v$  como las piedras unitarias aliadas no adyacentes. En este caso es fácil ver que el conjunto  $\{x, y\}$  es un  $u - v$  separador mínimo y cuyo tamaño coincide con los dos caminos internamente disjuntos que unen a  $u$  con  $v$  dentro de  $\sigma$ .

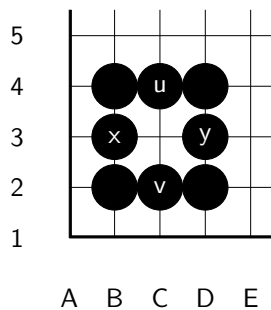


Figura 4.3: Una piedra  $\sigma$  2-conectada

### 4.3. Estrategias, influencia y territorio

Sea  $A \subset \Sigma$  un conjunto de piedras aliadas.

Sean  $t_1, t_2, \dots, t_n$  las trayectorias vacías de mínima longitud que conectarían a las  $\sigma \in A$  entre ellas. Definimos la **influencia** de  $A$  como  $Inf(A) \subset g$  y es aquel conjunto que cumple que  $\partial Inf(A) = \cup_{i=1}^n t_i$ .

**Territorio:** Definimos el territorio de  $A$  como  $T(A) = \{\vartheta \in g : \vartheta \text{ es libertad interior para alguna } \sigma \in A \text{ y que para todo } m \text{ movimiento rival que modifique } \vartheta, \text{ se tiene que la piedra resultante } s \text{ pierde el semeai contra las } \sigma \in A\}$ .

**Invasión:** Un movimiento  $m$  es una invasión si la piedra resultante  $s$  está en  $Inf(A)$  y si  $s$  es es piedra rival a  $A$ .

**Reducción:** Un movimiento  $m$  es una reducción si la piedra resultante  $s$  está en  $\partial Inf(A)$  y  $s$  es una piedra rival a  $A$ .

A continuación, un Teorema que define la relación que existe entre las estrategias de invasión e influencia y las condiciones que se deben cumplir para que estas resulten en una piedra muerta:

**Teorema 4.3.1.** *Si la piedra resultante  $s$  de una invasión  $m(g)$  en  $Inf(A)$  no logra conectarse con piedras aliadas que estén en el complemento de  $Inf(A)$  respecto a  $g$  y no logra hacer dos ojos, entonces  $s$  está muerta.*

*Demostración.* Sea  $s$  la piedra unitaria rival resultante de una invasión en  $Inf(A)$ . Dado que  $s$  no logrará hacer dos ojos, podemos asumir que  $s$  a lo más formará un ojo.

Sea  $t$  una trayectoria que parta de la piedra  $\sigma$  que contenga a  $s$ , dado que  $\sigma$  solo tiene un ojo y no le es posible conectarse con piedras aliadas fuera de  $Inf(A)$ , entonces  $t$  queda confinada dentro de  $Inf(A)$  y dado que por cada piedra rival  $s_i$  que se le añada a  $s$  se tiene una jugada aliada  $s'$  a  $A$ , entonces  $|A| > |L(\sigma)|$  y como  $|L(\sigma)|$  está acotado por  $|Inf(A)|$  entonces sea  $n = |Inf(A)|$  el máximo número de piedras que se requiere para capturar a  $t$ , por lo tanto  $\sigma$  está muerta.

□

## Capítulo 5

# Cuantificación del control territorial con el modelo de Ising

En este capítulo se utilizan las definiciones del Capítulo 4 para introducir el concepto de energía de una configuración de juego dada, la cual se calcula como la suma de las posibles interacciones entre todas las piedras que están en dicha configuración.

### 5.1. Espacio de estados y el árbol de juego

En el capítulo anterior definimos el conjunto  $G$  como aquel que contiene a todas las configuraciones de juego  $g$  posibles. En teoría de computación [1] a este conjunto se le conoce como espacio de estados. Considerando que  $G \subset \tau \times \Lambda$  y dado que  $|\tau| = 19^2 = 361$  y que  $|\Lambda| = |\{n, b, e\}| = 3$  se encuentra una primera cota superior para el espacio de estados en Go:

$$n(G) < 3^{361} \approx 10^{172}$$

Sin embargo, existen elementos en  $\tau \times \Lambda$  que no reúnen los requisitos para ser una configuración de juego válida, cómo contener piedras  $\sigma$  que no tengan libertades. Bajo esta óptica una pregunta natural es ¿que cantidad del total de elementos del espacio de estados es realmente una configuración de juego?



Esta pregunta fue contestada por Tromp y Farnebäck en [13], quienes estimaron que sólo el 1.2% de todos los elementos de  $\tau \times \Lambda$  son configuraciones de juego legales, lo que implica que:

$$n(G) \approx 10^{170}$$

En cuanto al árbol de juego o árbol de decisiones,  $DT$ , considerado como todas las posibles secuencias de configuraciones de juego sucesivas, una primera aproximación a su tamaño se obtiene de  $361!$ , considerando que la primera jugada se puede realizar de 361 maneras, la segunda de 360 y así sucesivamente. De esta manera se obtiene:

$$n(DT) < 361! \approx 1.4379 \times 10^{768}$$

Sin embargo, el anterior razonamiento excluye la posibilidad de volver a jugar en un vértice donde haya sido colocada una piedra capturada y por ende esté vacío. Si se considera la posibilidad de jugar en vértices que estaban previamente ocupados, el tamaño del árbol de juego crece de una manera considerable superando el googolplex, tal como lo muestran Walraet y Tromp [14], de hecho la aproximación a la que llegan es:

$$n(DT) < 10^{10^{117}}$$

Estas cotas superiores nos dan una idea de la magnitud de posibilidades que existen en el juego de Go. La complejidad del juego de Go respecto al ajedrez es significativa: la cardinalidad del espacio de estados en el ajedrez es una cantidad mucho menor que la cardinalidad del árbol de juego (decisión), que es, a su vez, mucho menor que las ordenaciones de 64 en 32,  $O(64; 32)$ . Una metáfora para comparar la diferencia de posibilidades entre jugar ajedrez o Go es si un niño quiere encontrar su ratón (*hámster*) en su casa, ó en una urbe como la Ciudad de México o Sao Paolo.

## La función de energía: el modelo de Ising

El modelo del Hamiltoniano de Ising describe propiedades magnéticas de materiales a partir de las interacciones de espines atómicos, como momentos magnéticos que poseen un comportamiento dicotómico que apunta aleatoriamente hacia arriba o hacia abajo y toman el valor 1 o  $-1$  [15]. Cada espín interactúa con sus espines vecinos o con campos externos que tienden a alinearlos en la dirección aplicada y dependiendo de la fuerza de las interacciones, el sistema

como un todo sufre transiciones de fase. Los espines están ordenados en una retícula N-dimensional y la función de energía se define por el hamiltoniano:

$$H(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} W_{ij} x_i x_j + \mu \sum_i h_i x_i$$

Donde:

- $x$ : espín del campo magnético.
- $W_{ij}$ : intercambio de energía entre  $x_i x_j$ .
- $\mu$ : energía, positiva +, negativa -.
- $h$ : impacto particular de MF sobre  $x$ .

## La función de energía para el juego de Go

Utilizando como referencia el modelo de Ising para materiales magnéticos, la función de energía para modelar el juego de Go toma como referencia los siguientes parámetros:

1. El número de piedras individuales en un grupo de piedras.
2. El número de ojos que se relaciona con cada piedra
3. El patrón táctico que cada piedra está haciendo.
4. La fuerza de las piedras aliadas que hacen sinergia entre ellas.
5. La fuerza de piedras aliadas que contrarrestan la sinergia de piedras adversarias.

Para este propósito, se propone la descripción cuantitativa de cada piedra de la siguiente manera:

$$x_i = c_i(n_i + r_{ojo}^{k_i})$$

Donde:

- $n_i$ : es el número de piedras individuales del grupo.
- $r_{ojo}$ : es mayor a 1 ó es igual a 0 si no hay ojo.

- $k_i$ : indica el número de ojos en la piedra  $i$ .
- $c_i$ : indica el color de la piedra, 1 para blanco y  $-1$  para negro.

De esta manera  $r_{ojo}^{k_i}$  cuantifica el impacto en el número de ojos en la piedra  $i$  y si  $k_i \geq 2$  esto implica que  $i$  nunca podrá ser capturada por tener dos ojos. Si no hay ojos entonces simplemente indica el tamaño de  $i$  y el color.

Otro elemento que es necesario definir en este modelo es el de  $W_{ij}$  el cual cuantifica la razón de unión o repulsión entre cada par  $i, j$  de piedras individuales o compuestas. De esta manera  $W_{ij}$  engloba las tensiones que existen a lo largo de los caminos que unen a la piedra  $i$  con la piedra  $j$ , siendo afectado por la presencia y fortaleza de piedras adversarias que puedan impedir la conexión  $i - j$  o por el contrario, por la presencia de piedras aliadas que pueda resultar en fortaleza mutua. Esta interacción la podemos evaluar de la siguiente manera:

$$W_{ij} = \sum_s r_t x_s^{ij}$$

Donde:

- $x_s^{ij}$  describe cada piedra  $s$  que yace entre la piedra  $i$  y la  $j$ , que hace un patrón táctico específico.
- $r_t$  cuantifica el poder conocido de antemano del patrón  $t$ : ojo ( $r_{ojo}$ ), red ( $r_{net}$ ), escalera ( $r_{esc}$ ), invasión ( $r_{inv}$ ) o reducción ( $r_{red}$ )

A través de un procedimiento de ponderación de partidas reales entre jugadores del más alto nivel, en [2] se establece un orden total para los parámetros de patrón táctico a partir del poder de cada táctica. Cabe destacar que estas estimaciones están abiertas a análisis y precisiones. El orden establecido es el siguiente:  $(r_{ojo}) > (r_{net}) > (r_{esc}) > (r_{inv}) > (r_{red})$ .

Cabe señalar que este procedimiento de reconocimiento y ponderación de tácticas se implementa a través del uso de “Back-Propagation Neural Networks” como se señala en [15].

En términos llanos este orden se sustenta en la preponderancia que tiene un patrón con un ojo, seguido de la red, la cual involucra al menos 3 piedras, no todas unitarias. Sigue la escalera, la cual sabemos que es un caso particular de red y encontramos al final la invasión y la reducción.

Cómo mero ejemplo, y sólo considerando el orden descrito entre las tácticas, los valores particulares en la siguiente Tabla se utilizan para calcular la fuerza de los grupos de piedras:

Táctica	Coficiente	Valor
Ojo	$r_{ojo}$	1.4
Red	$r_{net}$	0.6
Escalera	$r_{esc}$	0.5
Invasión	$r_{inv}$	0.4
Reducción	$r_{red}$	0.4

Tabla 5.1: Valor numérico de los patrones tácticos

Se enfatiza que los valores de la Tabla anterior para los patrones tácticos son sólo para ejemplificar. El modelo tiene la flexibilidad de incorporar los valores que le asigne el usuario. Los valores pueden variar con base en la experiencia y conocimientos del usuario.

Más aún, el modelo es estocástico y los valores para ponderar la fuerza de las tácticas no son deterministas, si no pertenecen a rangos de intervalos. Esta característica da al modelo gran flexibilidad para asignar valores asociados a la fuerza de las tácticas. Por la misma razón, el modelo posee un enorme poder expresivo y de aplicabilidad en problemas relacionados de alta complejidad. Ejemplo de ellos son los valores asignados en [2] para la metástasis del cáncer y la respuesta inmune utilizando como analogía las tácticas propias del juego de Go.

En resumen, el primer término del Hamiltoniano cuantifica la interacción de colaboración con piedras del mismo color o la lucha contra piedras adversarias. El segundo término, en particular el campo externo  $h_i$  añade el número de libertades que cada piedra  $i$  tiene.

## 5.2. Ejemplos de cuantificación

Para ejemplificar el cálculo de la suma de las ponderaciones del Hamiltoniano de Ising en una posición particular tomaremos como punto de partida una partida de Takemiya Masaki contra Cho Chikun, en la cual podemos ver dos estilos de juego contrapuestos, la influencia desarrollada por el negro hacia el centro en el costado derecho, contra el cobro territorial de blanco en las esquinas del mismo lado.

Para comenzar con el cálculo, primero notemos cuántos sumandos tiene el primer término de nuestro Hamiltoniano de Ising:

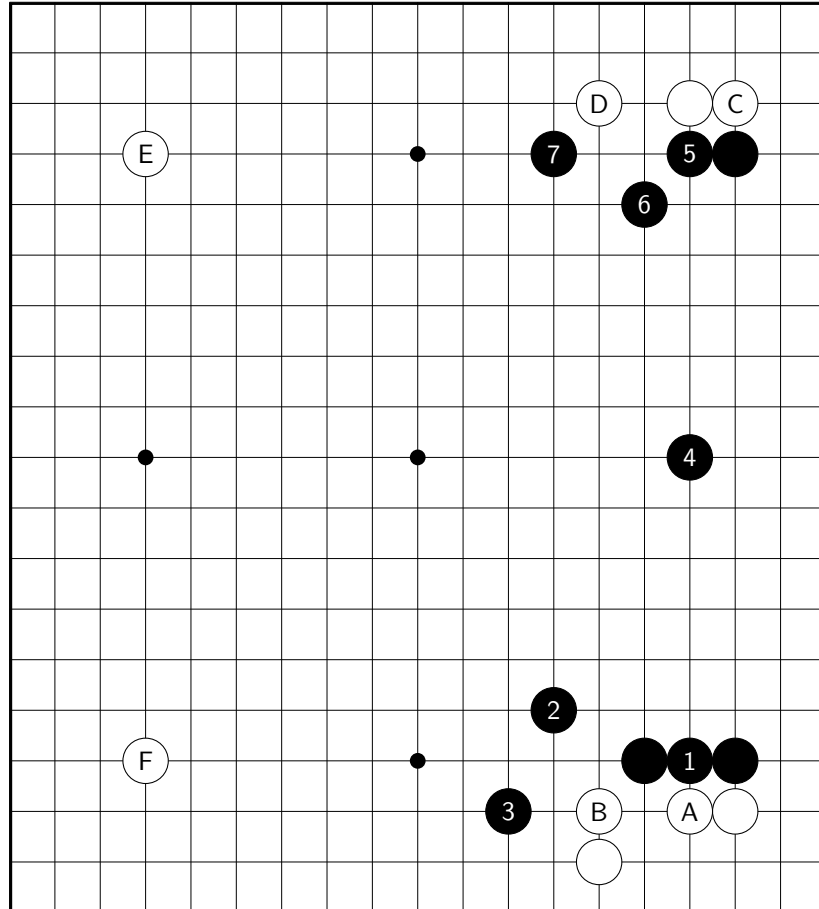


Figura 5.1: Influencia vs territorio

$$\sum_{i,j} W_{ij} x_i x_j$$

Considerando que tenemos 7 piedras negras numeradas del 1 al 7 y 6 piedras blancas etiquetadas de la A a la F, nuestro conjunto total de piedras es de cardinalidad 13, por lo que en este momento de la partida contamos con un total de 78 interacciones:

$$\binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$$

Para cada una de estas interacciones será necesario calcular el valor del coeficiente  $W_{ij}$  el cual está dado por:

$$W_{ij} = \sum_s r_t x_s^{ij}$$

Este coeficiente engloba las tensiones de las piedras aliadas o enemigas  $x_s^{ij}$  que se encuentren a lo largo de los caminos que unen a la piedra  $i$  con la piedra  $j$  que para fines prácticos las consideraremos como:

$$x_s^{ij} = \{x_s \in St | Mh(x_i, x_s) \leq 3 \cup Mh(x_j, x_s) \leq 3\}$$

En otras palabras  $x_s^{ij}$  serán todas aquellas piedras  $x_s$  en una vecindad cerrada de radio 3 a  $x_i$  ó a  $x_j$  utilizando la métrica Manhattan.

Para fines prácticos en este trabajo sólo calcularemos los  $W_{ij}$  para los valores  $ij$  correspondientes a  $(i, j) = (1,2), (1,3), (2,3), (A,B), (1,A), (2,A), (3,A), (1,B), (2,B), (3,B)$ , que es equivalente a considerar solo las piedras de la esquina inferior derecha.

Será necesario definir el patrón táctico que cada una de las  $x_s$  está formando, por lo que a partir de la experiencia previa en el juego, diremos que los patrones tácticos de cada una de las piedras son los siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow r_{red} \\ x_2 &\rightarrow r_{net} \\ x_3 &\rightarrow r_{net} \\ x_A &\rightarrow r_{oyo} \\ x_B &\rightarrow r_{inv} \end{aligned}$$

Adicionalmente necesitamos calcular el valor para cada  $x_i$  a partir de su formulación:

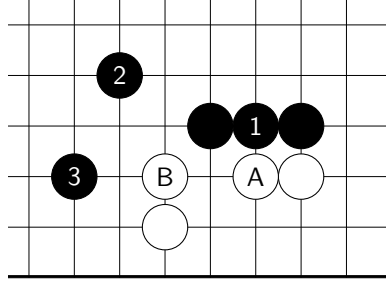


Figura 5.2: Zona de cuantificación

$$x_i = c_i(n_i + r_{ojo}^{k_i})$$

Por lo que obtenemos:

$$x_1 = 1(3) = 3$$

$$x_2 = 1(1) = 1$$

$$x_3 = 1(1) = 1$$

$$x_A = -1(2 + 1.4^1) = -3.4$$

$$x_B = -1(2) = -2$$

Para calcular  $x_s^{ij}$  notemos que  $x_s^{ij} = B_3(x_i) \cup B_3(x_j)$  donde  $B_3(x_i)$  es la vecindad de radio 3 y centro en  $x_i$  y dado que:

$$x_A, x_B, x_2 \in B_3(x_1)$$

$$x_1, x_3, x_B \in B_3(x_2)$$

$$x_B, x_2 \in B_3(x_3)$$

$$x_1, x_B \in B_3(x_A)$$

$$x_A, x_1, x_2, x_3 \in B_3(x_B)$$

Se sigue que:

$$x_s^{12} = \{x_1, x_2, x_3, x_A, x_B\} \text{ y que } x_s^{12} = x_s^{13} = x_s^{AB} = x_s^{1B} = x_s^{2B} = x_s^{3B}$$

$$x_s^{23} = \{x_1, x_2, x_B\} \text{ y que } x_s^{23} = x_s^{3A}$$

$$x_s^{1A} = \{x_1, x_2, x_A, x_B\}$$

$$x_s^{2A} = \{x_1, x_2, x_3, x_A, x_B\}$$

Agrupando la información en una tabla obtenemos:

$i$	$r_t$	$x_i$	$r_t x_i$
1	0.4	3	1.2
2	0.6	1	0.6
3	0.6	1	0.6
A	1.4	-3.4	-4.76
B	0.4	-2	-0.8

Tabla 5.2: Calculando los sumandos de los  $W_{ij}$ 

De esta manera:

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= \sum_s r_t x_s^{12} = 1.2 + 0.6 + 0.6 - 4.76 - 0.8 = -3.16 \\
 W_{23} &= \sum_s r_t x_s^{23} = 0.6 - 0.8 + 1.2 = 1 \\
 W_{1A} &= \sum_s r_t x_s^{1A} = 1.2 + 0.6 - 4.76 - 0.8 = -3.76 \\
 W_{2A} &= \sum_s r_t x_s^{2A} = 1.2 - 4.76 - 0.8 = -4.36
 \end{aligned}$$

Considerando que nuestro primer término del Hamiltoniano se compone por la suma de  $W_{ij} x_i x_j$  procedamos a calcular estos valores:

$ij$	$W_{ij}$	$x_i$	$x_j$	$W_{ij} x_i x_j$
12	-3.16	3	1	-9.48
13	-3.16	3	1	-9.48
23	1	1	1	1
1A	-3.76	3	-3.4	38.352
2A	-4.36	-1	-3.4	14.824
3A	1	1	-3.4	-3.4
1B	-3.16	3	-2	18.96
2B	-3.16	1	-2	6.32
3B	-3.16	1	-2	6.32
AB	-3.16	-3.4	-2	-21.488
$\sum_{i,j} W_{ij} x_i x_j$	-	-	-	41.928

Tabla 5.3: Calculando el primer término del Hamiltoniano

Ahora, procedemos a calcular el segundo término del hamiltoniano:

$$\mu \sum_i h_i x_i$$



En nuestro caso, el valor de  $\mu = 1$ , ya que se puede considerar como un campo externo homogéneo.

En el modelo de Go el coeficiente  $h_i$  representa la cantidad de libertades que posee la piedra  $x_i$ , por lo que obtenemos:

$i$	$h_i$	$x_i$	$h_i x_i$
1	6	3	18
2	4	1	4
3	4	1	4
A	4	-3.4	-13.6
B	6	-2	-12
$\sum_i$	-	-	-0.4

Tabla 5.4: Calculando el segundo término del Hamiltoniano

Obtenemos entonces el resultado final del Hamiltoniano para el área restringida a la esquina inferior derecha:

$$H(x_1, x_2, x_3, x_A, x_B) = \sum_{i,j} W_{ij} x_i x_j + \mu \sum_i h_i x_i = 41.928 - 0.4 = 41.528$$

Este valor positivo de tamaño nada despreciable indica que el lado dominante en esta región del tablero es negro. Según la adaptación que utilizamos del Hamiltoniano de Ising, la cuantificación del conjunto de piedras negras que corresponde a una posición de influencia, supera a la cuantificación del conjunto de piedras blancas que corresponde a una posición de territorio.

### 5.3. Cuantificación a gran escala

En [2] se introduce la idea de interpretar la disputa territorial, inherente al juego de Go entre negras y blancas, como una metáfora útil para avanzar en la comprensión del proceso biológico de competencia entre el cáncer y su metástasis, contra el sistema propio de la respuesta inmune. La herramienta formal para cuantificar la disputa territorial, en el tablero para el Go, y sobre los tejidos de los órganos y el cuerpo para el cáncer contra la respuesta inmune es el Hamiltoniano de Ising. Es muy precisa la cuantificación de las piedras que aventajan a las rivales en partidas oficiales de Go en prestigiosos torneos. Resulta plausible cuantificar la ventaja del sistema biológico de mayor fuerza, el crecimiento

del cáncer y la respuesta inmune, con respecto al otro: según su fortaleza, cada sistema biológico aventaja, en distintos momentos al otro: tal como se reporta en la literatura científica, el proceso de ventaja - desventaja entre estos sistemas biológicos es dinámica en el tiempo así como la intensidad con la que se manifiesta.

En [11] se presenta el desarrollo de redes neuronales profundas (RNP, DNN por su abreviatura en inglés) construidas al concatenar Máquinas Restringidas de Boltzman (MRB), para el reconocimiento automático de patrones de un juego de Go. Luego del reconocimiento, con la función de energía adaptada en el Hamiltoniano de Ising, puede cuantificarse la fortaleza de las piedras aliadas en el tablero y sus adversarias en los distintos momentos de un juego. Las MRB tienen una expresión vectorial, equivalente al del Hamiltoniano de Ising.

Las MRB fueron las primeras máquinas para aprendizaje profundo, creadas por Hinton y Sejnowsky alrededor de 1980. Tal creación los hizo acreedores del premio Turing (el “*Nobel de Computación*”) del año 2017.



## Capítulo 6

# Discusión

El juego de Go, dada su complejidad generada por la interacción de elementos simples bajo reglas simples, es representativo de problemas centrales del presente siglo. Su complejidad es equiparable (¿o supera?) con la propia de disciplinas como bioinformática, genómica, genética, supercómputo, redes sociales y naturales, tanto a nivel micro y macro. Las batallas del Go son representativas de la diversidad y gran escala del acceso a datos y la capacidad de procesarlos actualmente. La mayoría de ellos son retos abiertos actualmente. Las matemáticas para resolver algorítmicamente el juego de Go son esencialmente estocásticas y muy poco deterministas. Los formalismos estocásticos son los propios de la termodinámica y la física estadística.

El juego de ajedrez fue un reto científico y tecnológico representativo del siglo XX. Las matemáticas para resolver algorítmicamente el juego de ajedrez son determinista y ligeramente estocásticas aplicando el método Monte Carlo. El juego de Go es el análogo al ajedrez en el presente siglo dado el tamaño del reto que representa.

Desde inicios del siglo XXI existen las llamadas inteligencias artificiales que juegan Go: programas que utilizan métodos de Inteligencia Artificial. A partir de 2016, algunas de tales inteligencias lo juegan a muy alto nivel, mucho mayor que el de los mejores maestros humanos profesionales de China, Corea y Japón. Esto ha sido gracias al desarrollo del llamado aprendizaje profundo, el cual utiliza redes neuronales convolucionales y un elaborado sistema de reconocimiento de patrones. Entre las inteligencias artificiales más destacadas y populares para jugar Go están AlphaGo y su evolución AlphaGo Zero [12].

A la fecha existen desarrollos formales sobre el juego de Go, como es el caso de [3] el cual utiliza la teoría de juegos combinatorios desarrollada por Conway; ese trabajo se limita a analizar las posiciones del cierre de juego, que representa

una minúscula parte del campo de exploración existente.

En esta tesis se presentan las bases para desarrollar una teoría **completa** del juego, considerando tácticas, estrategias y estilos, por supuesto, plausible de extensiones o generalizaciones. Por otro lado se hace revisión de aplicaciones del razonamiento automatizado del juego de Go a la comprensión y cuantificación de problemas complejos; es el caso del crecimiento y metástasis del cáncer y la respuesta inmune [2, 11]. El modelo de Ising que se utiliza para cuantificar la energía de un sistema complejo compuesto por elementos simples ha sido tema del trabajo que realizó el reciente ganador de la medalla Fields, Hugo Duminil-Copin, quien obtuvo notables resultados para el modelo de Ising para 3 y 4 dimensiones <https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2022>.

## Capítulo 7

# Conclusiones

En esta tesis se presentan los inicios de una teoría matemática del juego de Go. Se proponen definiciones de los conceptos básicos del juego y las tácticas; luego definiciones de estrategias y los estilos para jugarlo por control de territorio y por influencia. Además, se presenta una manera de cuantificar el territorio y la influencia en cierta posición específica; y, bajo estos cálculos, determinar que jugador domina sobre el tablero. Estos cálculos utilizan el Hamiltoniano de Ising, herramienta clásica de la física estadística.

Esta tesis de licenciatura en matemáticas es un primer acercamiento formal a la elaboración de una teoría matemática extensiva para el juego de Go. A la fecha los desarrollos formales sobre el juego de Go se han referido a su explosión combinatoria y en el análisis de los finales de un partido.

Sin lugar a dudas esta obra todavía es perfectible y la teoría en particular todavía tiene mucho campo para evolucionar y describir con aún mas precisión la dinámica del juego, lo cual ofrece interesantes posibilidades para futuros desarrollos.



# Bibliografía

- [1] L.V. Allis. *Searching for solutions in games and artificial intelligence*. PhD thesis, Maastricht University, January 1994.
- [2] Didier Barradas, Matías Alvarado, Mark Agostino, and Cocho Germinal. Cancer growth and metastasis as a metaphor of go gaming: An ising model approach. *PLoS ONE*, 13, 05 2018.
- [3] Elwyn Berlekamp and David Wolfe. *Mathematical Go: Chilling Gets the Last Point*. CRC Press, 1994.
- [4] Scott A. Boorman. *The Protracted Game, A Wei-ch'i Interpretation of Maoist Revolutionary Strategy*. New York Oxford University Press, 1969.
- [5] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang. *Graphs and Digraphs*. CRC Press, 2016.
- [6] Ken Chen and Zhixing Chen. Static analysis of life and death in the game of go. *Information Sciences*, 121(1):113–134, 1999.
- [7] Toshiro Kageyama. *Lessons in the fundamentals of go*. Kiseido Publishing Company, 1978.
- [8] Yasunari Kawabata. *El maestro de Go*. Emece lingua franca, 5a edición, Buenos Aires, Argentina, 2006.
- [9] Shirakawa Masayoshi. *A journey in Search of the Origins of Go*. Yutopian Enterprises, 2005.
- [10] John Power. *Invincible, The games of Shusaku*. Kiseido, 1982.
- [11] Alfonso Rojas-Domínguez, Didier Barradas-Baustista, and Matías Alvarado. Modeling the game of go by ising hamiltonian, deep belief networks and common fate graphs. *IEEE Access*, 7:120117–120127, 2019.
- [12] David Silver, Aja Huang, Chris J. Maddison, Arthur Guez, Laurent Sifre, George van den Driessche, Julian Schrittwieser, Ioannis Antonoglou, Veda Panneershelvam, Marc Lanctot, Sander Dieleman, Dominik Grewe,



- John Nham, Nal Kalchbrenner, Ilya Sutskever, Timothy Lillicrap, Madeleine Leach, Koray Kavukcuoglu, Thore Graepel, and Demis Hassabis. Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search. *Nature*, 529(7587):484–489, jan 2016.
- [13] John Tromp and Gunnar Farneböck. Combinatorics of go. 4630:84–99, 05 2006.
- [14] Matthieu Walraet and John Tromp. A googolplex of go games. 10068:191–201, 2016.
- [15] Arturo Yee Rendón. *Selection of Strategies in Complex Games: Baseball, American Football and Go*. Departamento de Computación, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, CINVESTAV del IPN, 2015.

# Índice temático

## A

ajedrez, 44, 55  
árbol de juego, 5, 43,  
44  
atari, 11, 15, 17–19,  
37, 39, 40

## C

captura, 4, 7, 8, 12,  
14–16, 19,  
22, 37–39  
color, 1, 6–8, 10, 12,  
15, 16, 20,  
35, 36, 38,  
46, 47  
complejidad, 1, 4, 5,  
44, 55  
componente, 2, 6,  
29–32,  
36–38, 40  
conectada, 29–31, 41  
conexa, 29, 30,  
36–38, 40  
conexidad, 25,  
30–32, 37  
configuración de  
juego, 35,  
37, 43, 44  
corte, 11, 30–32  
cuantificación, 6, 43,  
47, 50, 52

## D

desconectada, 30, 31  
inconexa, 30,  
31, 38  
distancia, 29, 30, 36  
dos ojos, 17–19, 38,  
40, 42, 46

## E

energía, 6, 43, 45, 53  
escalera, 1, 7, 14, 15,  
39–41, 46,  
47  
espacio de  
estados, 5,  
43, 44  
espín, 44, 45  
estados, 1, 6, 16  
estrategias, 1, 4, 6,  
7, 15, 41,  
42, 56, 57

## F

fuseki, 8

## G

grupo, 1, 6, 8,  
10–19, 45

## H

Hamiltoniano, 1, 6,  
44, 47,  
51–53, 57

## I

influencia, 1, 5–8,  
10, 12–14,  
16, 20, 22,  
41, 42, 47,  
48, 52, 57  
invasión, 1, 7, 13, 14,  
19, 22, 42,  
46, 47

## J

joseki, 7, 16

## K

ko, 19

## L

libertades, 10–12,  
15–19,  
37–43, 47,  
52  
longitud, 29, 30, 36,  
42

- M 44-47, 49, 52
- movimiento, 1, 8, 37-40, 42
- moyo, 7, 10, 16, 20-22
- muerta, 8, 16, 18, 38, 40-42
- O
- ojo, 1, 7, 15, 17, 18, 38, 41, 42, 45-47, 49, 50
- P
- piedra, 1, 4, 8, 10-16, 18, 19, 36-42,
- 19, 20, 22, 25, 35, 37, 52, 53, 57
- R
- red, 1, 7, 14, 38-41, 46, 47, 49
- reducción, 1, 7, 14, 22, 42, 46, 47
- S
- seki, 19
- semeai, 16, 38, 42
- suicidio, 17, 18, 38, 40
- T
- tablero, 1, 3-8, 10, 12, 14-16,
- territorio, 1, 3-5, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 18-20, 22, 23, 41, 42, 48, 52, 57
- trayectoria, 1, 27, 29, 30, 36, 38, 40-42
- tácticas, 1, 6-8, 13, 15, 37, 40, 46, 56, 57
- V
- vivo, 8, 14, 16, 18
- vértice, 1, 27-31, 36, 37, 44