UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

LA NOTACIÓN POLACA:
UN ESTUDIO HISTÓRICO Y ERGONÓMICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

JOSE EDUARDO MARCOS DEHILARIO

ASESOR: DR. AXEL ARTURO BARCELÓ ASPEITIA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX., 2022

A mi familia, por quienes soy y seré.

Liberando al cerebro de todo el trabajo innecesario, una buena notación nos permite concentrarnos en problemas más avanzados. En efecto, incrementa el poder mental de nuestra especie.

— Alfred North Whitehead

Al verme, [Lukasiewicz] sacó de la máquina de escribir la hoja de papel y me la entregó, diciendo "¡¿Ves lo bella y obviamente verdadera que esta fórmula es?!"

La fórmula comenzaba con algo como CCCCKNCCCAKACCCKKKKNNAACA…

[...] Lo que más me sorprendió en aquel momento no fue tanto el énfasis en lo "obvio" como en lo "bello". Para Lukasiewicz la ciencia -una afirmación, una prueba, una teoría, etc.- no sólo debía ser verdadera, sino también bella.

—Józef Maria Bocheński

Índice General

Agradecimientos

Si la extensión de las palabras de agradecimiento fueran proporcionales al apoyo que recibí de parte de todas las personas que me han ayudado a completar este trabajo, cientos de páginas se tendrían que agregar a esta tesis. Lo que tiene el lector en sus manos (o en su pantalla) es el resultado de un trabajo colaborativo que va más allá de lo académico. Esta parte del trabajo no hubiera sido posible de completarse sin el soporte de mi familia, mis amigos y mi Universidad.

En primer lugar, quisiera agradecer a todos los integrantes de mi familia. Mis padres, Hilario y Micaela, son las dos personas a las que más admiro y respeto. Su cariño hacia mí, sus enseñanzas y su ejemplo hacen que sea quien soy. Detrás de cada una de las letras que están aquí se encuentra una historia de cariño y arduo trabajo en la que ellos son los protagonistas. Siempre les estaré en deuda. También agradezco a mi hermanos, Carlos y Kevin, quienes han crecido conmigo y yo he crecido gracias a ellos. Sus risas, sus ideas y su compañía son un salvavidas para mí en los momentos de más estrés, angustia y cansancio. Finalmente, le agradezco a Arely, a quien admiro y amo, por su poder de transformar este mundo en uno mejor con solo brindarme un momento de su compañía. Siempre me he sentido y sentiré afortunado de contar con esta familia. Sin duda, soy la persona más afortunada del mundo por tenerlos en mi vida.

También quiero agradecer a todas las personas que me han brindado su amistad. Una mención especial para Naomi. También para Alberto y Germán. Se que no soy el amigo más cercano, pero no deben dudar que son una parte muy importante de mi vida. Espero que su amistad me siga acompañando en el futuro que me resta. Agradezco también a todos mis amigos de Talentum, mis compañeros de universidad y al increíble equipo PIPE, quienes han transformado mi vida en más de un sentido.

Por último, quisiera agradecer a los maestros que me han guiado hasta donde estoy. En primer lugar, a mi asesor, el Dr. Axel Barceló. Sin su guía, su conocimiento y su paciencia, probablemente nunca hubiera podido escribir más de un párrafo de este trabajo. Gracias a usted he aprendido el valor del rigor, el placer que hay detrás de la investigación y la importancia de compartir el conocimiento con otros. De todo corazón, le agradezco mucho que no se haya rendido conmigo y mi proyecto de investigación a pesar de todos estos años.

Agradezco a la profesora Herlinda Castelán, principal responsable de que ahora busque ser filósofo en lugar de computólogo o, en otras palabras, responsable de que haya escogido el buen camino. También quiero agradecer a mis profesores: Cristian Gutierrez, Carlos Romero, Luis Estrada, Gabriela Hernández, Raúl Quesada, Jorge Armando Reyes, Ivonne Pallares, Jesús Jasso... Gracias a sus clases, sus conversaciones y sus comentarios, terminé enamorándome de la lógica, de la filosofía de las matemáticas y de la filosofía de la ciencia. Gracias por darme las herramientas necesarias para escribir lo que aquí está escrito.

Por último agradezco el apoyo de la Universidad recibido a través del PAPIIT IA401717 "Pluralismo y normatividad en Lógica y Matemáticas" y la Beca de Titulación de la Facultad de Filosofía y Letras.

Introducción

Si le pedimos a un estudiante de Filosofía de la FFyL de la UNAM formalizar la oración

Si los Pumas ganan su próximo juego,

ni el Querétaro ni los Rayados clasifican.

es muy probable que este escriba algo como

$$p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$$

O quizá nos encontremos con

$$p \supset (\sim q \ \& \sim r)$$

Lo que es muy poco probable es que dicho estudiante decida escribir algo como

CpKNqNr

a pesar de que esta fórmula, escrita con la notación polaca, también expresa la forma lógica de nuestra oración de ejemplo.

La notación polaca, o notación libre de paréntesis, fue diseñada por Jan Łukasiewicz a principios del siglo XX como una alternativa a otros sistemas de notación. Pero a pesar de los esfuerzos que su creador hizo para difundirla, al igual que muchas otras aportaciones realizadas por los miembros de la Escuela Polaca de Lógica, ha pasado desapercibida frente a la notación y los trabajos de otros filósofos de la época.

Este trabajo tiene el propósito de cambiar un poco esta situación, tomando a la notación polaca como objeto de estudio y haciéndonos dos preguntas: 1) ¿Por qué Łukasiewicz la diseñó a pesar de contar con otras opciones? y 2) ¿El resultado era una buena alternativa frente al resto de las opciones? A través de este trabajo pretende argumentar que 1) la razón por la que Łukasiewicz decidió crear una nueva notación fue para contar con una notación que tuviera características adecuadas para investigar problemas relacionados con la simplicidad en la axiomatización de lógicas proposicionales; y que 2) Łukasiewicz logró su cometido. No solo creó una alternativa equivalente a otras notaciones más difundidas, es alternativa era superior por facilitar el trabajo de comparar distintas axiomatizaciones de un sistema formal en términos de simplicidad.

Existen varias razones por las que resulta valioso responder a estas preguntas. En primer lugar, creo que estas preguntas nos permiten extender las líneas de investigación contemporáneas sobre las notaciones lógicas como representaciones epistémicas. Desde hace algunas décadas, autores como Axel Barceló, Danielle Macbeth, K. Jon Barwise, Marco Panza y Mauricio Suárez han estado estudiando las características más importantes de aquellas representaciones cuyo propósito especial es hacer ciencia. Dentro de estos autores también hay que mencionar a Catarina Dutilth Novaes, quien escribió *Formal languages in Logic: A philosophical and cognitive analysis,* en donde busca la diferencia que hay entre razonar con lenguajes formales y sin ellos. Frente a estos problemas generales, esta tesis busca proponer un caso de estudio que hasta el momento ha sido ignorado, a pesar de que probablemente sea una de las notaciones alternativas más importantes.[1] Espero que este trabajo ayude a que se ponga más atención sobre la notación polaca y sobre el estudio comparativo de las notaciones lógicas.

En segundo lugar, considero que es necesario hablar sobre el trabajo de Jan Łukasiewicz, la Escuela Polaca de Lógica o la escuela de Leópolis-Varsovia en nuestra universidad y nuestro país. A pesar de los casi 100 años y los más de 10 mil kilómetros de distancia que nos separan, podemos encontrar similitudes entre el contexto de aquel grupo de investigación y algunos de los proyectos que nacen en nuestro país: desde enfrentarse a una complicada situación social y económica hasta la búsqueda de desarrollar un entorno académico que estuviera, no subordinado, sino a la par de los tradicionales polos de investigación internacional.

No obstante estas similitudes, nuestra Universidad ha producido muy poco trabajo enfocado a la Escuela Polaca de Lógica. Si uno se dirige al repositorio de tesis escritas por alumnos de la UNAM e intenta buscar un trabajo que trate sobre algún miembro de este grupo o sus aportaciones, sólo encontrará un par de tesis dedicadas a resultados de Alfred Tarski. Creo que las preguntas a las que se enfrenta esta tesis nos dará la oportunidad de hablar sobre la Escuela Polaca de Lógica e incluso aprender algunas lecciones históricas

[1] En el libro de Novaes, por ejemplo, la notación polaca solo se menciona tres veces y se refiere a ella como un conjunto de convenciones, más que como una notación independiente.

sobre aquello que este grupo hizo para convertirse en un referente internacional en su época o aquello que pudo hacer mejor para potenciar el impacto de sus aportaciones.

Por último, estamos en el mejor momento para responder a estas preguntas. Por una parte, la publicación de la excelente antología *The Lvov-Warsaw School: Past and Present*, (Garrido y Wybraniec-Skardowska, 2018), nos ha facilitado un importante conjunto de artículos en los que especialistas examinan la historia y las aportaciones de los diferentes miembros de este grupo. Por otra parte, en el año 2019, la Wielkopolska Biblioteka Cyfrowa (Biblioteca digital de la Gran Polonia) recibió apoyo del gobierno polaco para aumentar su acervo digital de revistas y modernizar su sistema de consulta; mientras que la iniciativa OP Digital Poland, lanzada por la Unión Europea en 2014, financió la digitalización de libros en posesión del Instituto de Matemáticas de la Academia Polaca de Ciencias y su presentación a través del Repozytorium Cyfrowe Instytutów Naukowych (Repositorio Digital de Institutos Científicos). Estas dos iniciativas nos han permitido consultar las obras originales tanto de los filósofos y matemáticos polacos, como las ediciones con las que conocieron el trabajo de otros importantes colegas como Giuseppe Peano y David Hilbert.

Tanto la discusión sobre la notación como representación epistémica como el acceso al acervo digital polaco me han permitido responder a las preguntas planteadas a través de cinco capítulos:

En el primer capítulo, “Conceptos fundamentales”, partiré del trabajo sobre las características de un lenguaje formal de Catarina Dutilh Novaes y del de Nelson Goodman sobre una teoría general de la notación para recuperar conceptos claves que nos permitan definir mejor nuestro objeto de estudio y sus componentes, aclarar las preguntas planteadas y establecer el tipo de respuesta que buscamos. Específicamente, buscaré definir las nociones de *carácter*, *esquema de notación*, *sistema de notación*, *lenguaje formal*, *características operativas* y *características ergonómicas*.

Los siguientes dos capítulos están dedicados a analizar el contexto en el que se diseñó y se usó la notación polaca, con miras a encontrar la respuesta a la primera pregunta: ¿Por qué Łukasiewicz la diseñó a pesar de contar con otras opciones? Este análisis parte de la premisa de que la notación polaca surge como resultado de la intersección de dos vías históricas. Por una parte, el proyecto que dio pié a la creación del grupo de Leópolis-Varsovia y la línea de investigación en la que surgió la notación polaca: la axiomatización de la lógica. Esta vía será analizada en el segundo capítulo "Historia de la Escuela Polaca de Lógica".

Por otra parte, la sucesión de propuestas de notaciones para la lógica proposicional realizadas por las principales figuras líderes en el campo de la lógica matemática: Boole, Frege, el dúo Russell-Whitehead y el dúo Hilbert-Ackermann. Tanto las propuestas como una breve descripción de la posible influencia sobre la notación de Łukasiewicz puede ser encontrada en el capítulo tercero "Historia de las notaciones para la lógica Proposicional".

El cuarto capítulo "Presentación de la notación polaca" está dedicado a exponer los detalles de la notación polaca para aquellos no familiarizados con este sistema. A partir de algunos de los conceptos definidos en el capítulo 1, el lector encontrará el conjunto de símbolos y reglas usados para escribir las fórmulas de esta notación. Pero, además, encontrarán una descripción del particular método de escritura de pruebas que usaba Łukasiewicz, un componente fundamental que generalmente no aparece en otras exposiciones de la notación.

Por último, el capítulo 5 "Evaluación de la notación polaca" está dedicado a responder directamente la segunda pregunta: "¿Es la notación polaca una buena alternativa? Para ello analizaremos tres posibles ventajas que la notación polaca pudo ofrecer a la investigación de Łukasiewicz en el campo de la axiomatización a comparación de las otras alternativas disponibles. Todo esto nos permitirá argumentar al final de este trabajo de investigación que Łukasiewicz desarrolló la notación polaca como un instrumento que le facilitaba trabajar en el proyecto de la fundamentación axiomática de la lógica y las matemáticas, objetivo que cumplió con un éxito aceptable.

1 | Conceptos fundamentales

El primer paso será aclarar los términos que se usarán a lo largo de esta tesis. En este primer capítulo me propongo presentar las nociones de *carácter*, *esquema de notación, sistema de notación, lenguaje formal* y *sistema formal*. Armarnos de estos conceptos nos ayudarán a hablar de diferentes aspectos de una notación en diferentes niveles. Empezar preguntándonos qué es una notación nos permitirá ser suficientemente específicos cuando nos propongamos presentar a la notación polaca, compararla con otras alternativas e identificar el origen de las posibles ventajas de la primera sobre el resto.

Para lograr lo anterior, en este primer capítulo está dividido en tres partes. En primer lugar, presentaré una caracterización de la noción de notación. Para ello, me valdré de la definición que surge de la teoría general de la notación que Nelson Goodman presenta en *Los lenguajes del arte*. En segundo lugar, dada la noción de notación a la que hayamos llegado, presentaré una noción de sistema formal de la lógica proposicional que nos permita estudiarlos como herramientas en la práctica de la lógica, a partir del trabajo de Catarina Dutilh Novaes. Por último, expondré algunos puntos que debemos tener en cuenta cuando nos propongamos evaluar una notación, tal como lo haremos en el capítulo final.

1.1 De la noción dada por el sentido común a una definición de notación

Un buen punto de partida es preguntarnos qué es lo que ya se entiende por notación. Una breve búsqueda nos llevará a darnos cuenta de que es muy poco común encontrar amplias definiciones de notación. Incluso obras dedicadas al estudio histórico de diferentes notaciones, como las obras de Cajori (1993) y Mazur (2014), carecen de una definición de notación. Podemos suponer que esto refleja la creencia común de que no hay dificultades graves al intentar de definir este término: notación es, en pocas palabras, el conjunto de símbolos que acordamos usar en cierto momento y de manera clara para referirnos a ciertos objetos. Esta definición es muy cercana a la que encontramos en textos de referencia en matemáticas. Por ejemplo, cuando buscamos “Notation” en MathWorld, nos encontramos con la siguiente definición: “Una notación es un conjunto de reglas bien definidas para representar cantidades y operaciones con símbolos”[2]. (Weisstein, n.d.)

Sin embargo, hay antecedentes de que definir lo que es una notación necesita de un trabajo mucho más elaborado. Entre ellos está el trabajo de Nelson Goodman, filósofo estadounidense quien en 1968 publicó el libro *Languages of Art. An Approach to Theory of Symbols.* En él, Goodman se plantea el reto de construir una “Teoría de la Notación” con la que pretende identificar las condiciones necesarias que deben cumplir las notaciones, desde las artísticas hasta las científicas.

Para este trabajo, quisiera recuperar de la teoría de Goodman tres de sus nociones centrales: *carácter*, *esquema de notación* y *sistema de notación*. Dos beneficios surgirán de haber partido de estos conceptos. Por una parte, nos permitirá ser más específicos al hablar de los objetos que componen a una notación. Goodman logró distinguir diferentes propiedades que surgen según cómo nos acerquemos a lo que generalmente vemos como un todo e identificamos como notación. Por otra parte, estos conceptos son suficientemente generales como para que ninguno de los componentes de las notaciones que revisaremos después quede fuera. Esta mezcla de precisión y poder conceptual son el mejor punto de partida para el proyecto que estamos por emprender.

1.1.1 Carácter

El primer concepto que deseo recuperar es el de *carácter*. Goodman presentó este concepto diciendo:

> Los caracteres son ciertas clases de ilocuciones, inscripciones o marcas. [...] La característica esencial de un carácter de la notación es que sus miembros pueden intercambiarse libremente sin ningún efecto sintáctico; o, de forma más literal (dado que las marcas en sí rara vez se mueven o son intercambiadas), que todas las inscripciones de un carácter dado son sintácticamente equivalentes. (Goodman, 2010, p. 126)

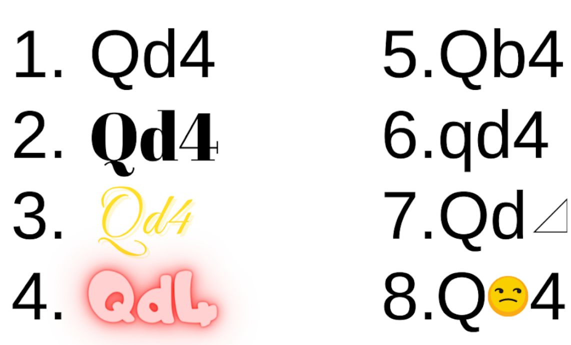
---

[2] “A notation is a set of well-defined rules for representing quantities and operations with symbols.” Weisstein, Eric W. "Notation" .

La definición de Goodman es por demás amplia. Por ejemplo, en ningún momento pone un límite para aquello que puede contar como marcas. Las marcas pueden ser visuales (como una línea dibujada por un lápiz en una libreta, un círculo en un pizarrón, una luz encendida en un tablero con focos), auditivas (el timbre de una casa o el sonido de notificación de un teléfono), táctiles (letras braille) o de algún otro tipo. Pero la característica esencial es que si sustituimos una marca dentro de una expresión por otra del mismo carácter, la expresión no cambiará, sino que seguirá siendo la misma.

Tomemos la "notación algebraica" de los movimientos de ajedrez. Para nuestra fortuna, esta notación usa un conjunto de caracteres bien conocido por nosotros: las letras del alfabeto. De manera general, un movimiento está representado usando una letra mayúscula, una letra minúscula y un número de la siguiente manera:

Dado que la letra Q representa a la reina, Qd4 nos indica que la reina se ha movido a la casilla ubicada en la fila d y la columna 4. Ahora, véanse las siguientes 8 variaciones:



¿Cuál sería la diferencia entre las de la izquierda y la derecha? Desde el punto de vista de Goodman, los grupos de marcas de la izquierda pertenecen a los mismos tres caracteres a los que pertenecen las marcas de la fórmula original. A pesar de los cambios en la forma y el color, seguimos considerando que no hay cambios en los elementos y modos de combinación.[3] Cosa diferente ocurre en el caso del lado derecho, en el que las variaciones en las marcas que hicimos nos impiden reconocerlas como formadas de la misma manera.

El lector puede haber notado ya el parecido que hay entre las nociones de *carácter* y *marca* con las nociones de *tipo* y *token*, mucho más comunes en filosofía. Generalmente, se presenta a los tipos (*type*) como objetos abstractos que cuentan con casos particulares concretos, los *tokens* (Wetzel, 2018). Es frecuente encontrar ejemplos de esta distinción con palabras: En la oración "La lógica es lógica", tenemos cuatro tokens (La, lógica, es, lógica), es decir, objetos compuestos de tinta particulares distinguibles entre sí. Pero tenemos solo tres tipos ("La", "es", "lógica"), con una doble instancia del tercer tipo. Visto así, los tipos coinciden con los caracteres y las marcas con tokens.

Parece ser que Goodman propuso sus nociones como una versión nominalista de aquellas. (2010, p. 126 Nota 3) Goodman no quería traer las discusiones sobre el estatus ontológico de los tipos a su teoría de la notación. Yo recupero estas nociones con un propósito similar. A pesar de que alguien podría decir que las nociones de tipo y token también podrían ser adecuadas para describir a los bloques básicos de una notación, creo que tienen la desventaja de haber sido usados en muchos otros contextos, desde lingüística hasta filosofía de la mente, y para mí sería complicado sostener que los caracteres y marcas tienen la misma relación entre sí que todos aquellos fenómenos. Mientras que aún se puede proponer cambios en la definición en las nociones de carácter y marca, al ser menos populares que los otros.

1.1.2 Esquema de notación

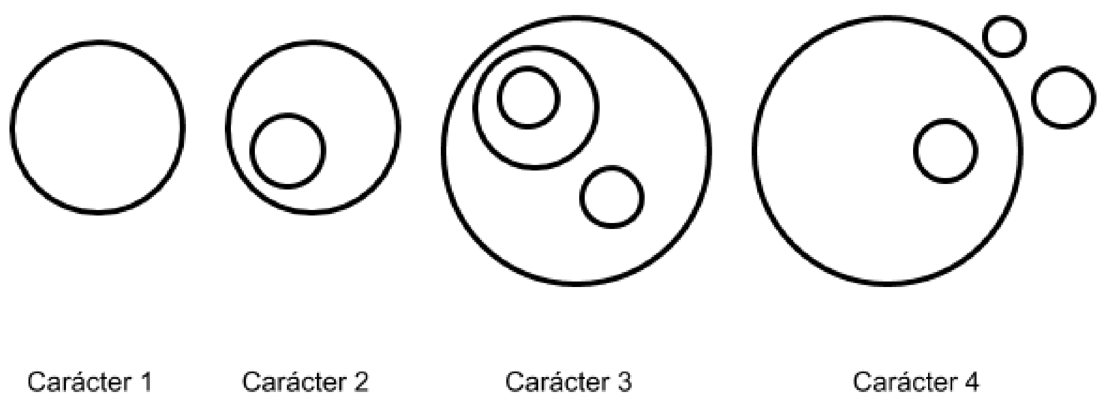
Al cambiar la noción que Goodman presenta de carácter, aun en ese pequeño detalle, ya no podemos recuperar tal cual las nociones de *esquema de notación* y *sistema de notación* que él construye. Pero aún podemos presentar caracterizaciones inspiradas en sus definiciones. Goodman presenta a los esquemas de notación diciendo que son: "Cualquier esquema de símbolos que consista de caracteres, por lo general con determinado modo de combinarse

[3] Goodman (2010, pp.126-127) llega a mencionar que las marcas pertenecientes al mismo carácter son réplicas una de otra. Es decir, creamos una nueva marca con la intención de copiar la otra marca que pertenece al carácter. Sin embargo, no parece ser el origen el que determine que dos marcas pertenecen a un mismo carácter, sino su equivalencia sintáctica.

entre ellos para formar otros caracteres". (Goodman, 2010, p. 126). Otra vez, dejemos a un lado la obligación de que estos ya sean símbolos de algo, pero mantengamos la cualidad esencial de que existen modos de combinarse para conformar otros caracteres. A estos les llamaremos modos de composición. Por lo tanto, terminaríamos definiendo a los esquemas de notación como colecciones de caracteres con modos de composición que permiten usar unos para formar otros nuevos.

Veamos qué es lo que se puede considerar como un esquema de notación. Como primer ejemplo, pongamos un esquema al que llamaremos *cadenas de "a"*. Tomemos un carácter con el que ya estamos familiarizados, el de la letra "a". Ahora digamos que cada vez que ponemos dos caracteres "a" juntos, tenemos un nuevo carácter. Tanto el carácter "a" como todas las cadenas que pueden formarse como "aaaa" o "aaaaaaaa" las consideraremos pertenecientes a una colección. Esta colección cumple con los requisitos hasta ahora impuestos a los esquemas de notación.

Otro esquema podría formarse usando círculos a partir de la siguiente descripción: un círculo o un conjunto de círculos son un carácter de nuestro nuevo esquema de notación. La siguiente imagen nos muestra algunos de los caracteres que formarían parte de nuestro nuevo esquema de notación: *diagramas circulares*.



Este ejemplo nos podría servir para hacer una pregunta que, aunque no cae dentro del objetivo de nuestro trabajo, considero importante realizar. ¿Es necesario contar con una definición recursiva explícita para poder hablar de modos de composición de un esquema de notación? Creo que no. Pensemos en la siguiente situación. El lector ahora conoce la regla y cuatro ejemplos de caracteres pertenecientes al esquema. ¿Qué respondería el lector al pedirle que decida si el siguiente carácter forma parte del esquema de notación?

Muy probablemente el lector responderá que este carácter no forma parte del esquema Diagramas circulares. Esto, a pesar de que nunca se hizo explícita alguna cláusula de clausura que descarte caracteres como este. Mi intuición es que la creación de esquemas de notación supone la habilidad para trabajar bajo cláusulas de clausura supuestas, sin que sea necesario que sean explícitas. Esto significa que, a pesar de su parecido, los modos de combinación no coinciden necesariamente con las reglas de formación. Las reglas de formación serán una caso especial de los otros, más riguroso y explícito, que caracterizan a los lenguajes formales. Pese a que hemos presentado en primer lugar a los caracteres, con este ejemplo podemos darnos cuenta que los caracteres dependen de un esquema de notación que establezca diferencias entre ellos.

Por otra parte, Goodman introduce la noción de disyunción de caracteres. Esta es una condición necesaria que tiene que cumplir un conjunto de caracteres para considerarse un esquema. Parafraseando a Goodman, para toda inscripción o marca, debe existir a los más un carácter [básico] perteneciente al esquema que la contenga. (Goodman, 2010, pp. 130-131)

Agregué la noción de "básico" a la definición de Goodman de la disyunción de caracteres con el propósito de evitar el problema que surge al preguntar al teórico de las notaciones si una marca pertenece a un solo círculo o al carácter compuesto. La noción de carácter básico es similar a la de carácter atómico que es la que usa Goodman. Pero también he decidido cambiar la noción de atómico por dos razones. En primer lugar, tengo la sospecha de que Goodman usó esa noción en clara analogía de las fórmulas atómicas de la lógica. Pero no son lo mismo y no es necesario crear esa confusión. La segunda razón es que me parece que nos invita a pensar en los caracteres atómicos como algo que no se puede dividir. Es decir, un carácter tal que una división suya no es a su vez otro carácter perteneciente al esquema. Sin embargo, recordemos que los caracteres son conjuntos al final de cuentas. ¿Cómo sería la división de un carácter? Podríamos decir entonces, que nos referimos a tomar una sección de las marcas que forman parte del carácter. La nueva definición de un carácter atómico sería aquel carácter tal que, si dividimos sus marcas de cierto modo, no resultaría en un carácter perteneciente al esquema. Pero veamos la siguiente situación. Nosotros vamos a querer decir más adelante que las letras minúsculas del alfabeto latino son caracteres básicos en la notación de Hilbert-Ackermann y en la Polaca. ¿Qué pasa en el siguiente caso?

¿La letra q podría contar como un carácter atómico? ¿A pesar de que al tomar una sección de su marca obtengamos otro carácter atómico? Es por eso que yo prefiero hablar de caracteres básicos, los cuáles definiría como aquellos que se han construido a partir de los modos de composición. De nuevo, será el esquema el que defina cuál es un carácter básico y cuál no lo es.

Pero también con estos ejemplos nos damos cuenta de que esta definición no es suficiente para identificar a los esquemas de notación con las notaciones a las que estamos acostumbrados. Una notación no es solo un conjunto de marcas organizadas según su pertenencia a un carácter. No solo basta con que puedan ser usadas como símbolo para algo, sino que, de hecho, estén correlacionadas con algo. Así pues, cuando nosotros vemos una partitura, nosotros no pensamos que solo se trata de un documento conformado por caracteres, sino que suponemos que nos permiten identificar una composición musical. De igual manera, cuando vemos una fórmula matemática, no solo la vemos como un montón de símbolos sino que suponemos que están para expresarnos algo.

1.1.3 Sistema de notación

Goodman es consciente de ello e introduce el importante concepto de sistema de notación. A diferencia de un esquema de notación, el sistema de notación sí nos pide que las marcas pertenecientes a ciertos caracteres estén correlacionados con un campo de referencia. Goodman, además, nos dice que:

> “La correlación de esquema con el campo de referencia, normalmente no sólo implica una correlación de las inscripciones con los objetos, sino también una correlación de los modos de combinación de inscripciones con las relaciones entre objetos”. (Goodman, 2010, p. 138)

En esta cita, debemos entender inscripciones como marcas pertenecientes a un carácter. Siendo así, deberíamos concluir que un sistema de notación es una colección de caracteres tal que las marcas que pertenezcan a un mismo carácter estén correlacionadas con un objeto de un campo de referencia y que dado un carácter C, obtenido de combinar A y B, nos indique algo respecto a alguna relación que tengan los objetos correlacionados con A y B. Es decir, que su modo de combinación esté correlacionado también.

Entonces, si nosotros queremos que nuestro primer ejemplo de esquema de notación, las cadenas de "a", sea un sistema de notación, tenemos que relacionarlo con un campo de referencia. Por ejemplo, una manera muy simple de hacerlo es relacionar cada marca perteneciente al carácter de "a", que sea componente de una cadena, con una moneda que tenga en mi bolsillo. Combinar una marca del carácter "a" con una cadena previa estaría correlacionada con agregar una moneda al grupo de monedas que ya tenía. Siendo así, la cadena "aaaaa" estaría correlacionada con tener 5 monedas. Mientras tanto, la cadena "aaaaaaaaaa" nos indicaría que tengo diez monedas. No es el sistema de notación más eficiente para esta tarea, pero cumple los requisitos más básicos para cumplirla. Ahora que ya tengo mi esquema de notación correlacionado con un campo de referencia, puedo decir que tengo un sistema de notación. A los sistemas de notación, presentados tal como los presentamos aquí, creo que son a los que convendría referirse como "notaciones".

1.2 Lenguajes formales

Una vez que tenemos una noción más clara de lo que cuenta como un sistema de notación, la siguiente pregunta es: ¿Qué es un sistema de notación de la lógica proposicional? Para lograrlo, revisemos los conceptos de *lenguaje formal* y *sistema formal* a la luz de nuestras nuevas nociones de carácter, esquema de notación y sistema de notaciones. Dado que Nelson Goodman, una vez que ha presentado sus conceptos, los desarrolla en el campo de la filosofía del arte, tomaremos un poco de distancia respecto a su trabajo. Nuestro nuevo soporte será el revelador trabajo de Catarina Dutilh Novaes.

Novaes (2012) parte de dos hipótesis importantes y que me gustaría adoptar. Por un lado, cree que los lenguajes formales son, ante todo, tecnología que nos permite pensar de maneras distintas a como lo hacemos sin ellas. Esta hipótesis está en consonancia con una importante facción en el debate sobre la representación de las matemáticas que se dedica a analizar las prácticas de los matemáticos más que sus objetos de estudio. Según esta facción, muchos de los objetos que se usan para representar y trabajar en matemáticas (diagramas, tablas, fórmulas, etc.) sirven como herramientas epistémicas.

Específicamente, Novaes nos asegura que hay al menos dos esferas en las que los lenguajes formales tiene un importante impacto cognitivo: capacidad de cálculo y expresividad. En primer lugar, y predominantemente, los lenguajes formales facilitan el cálculo. La capacidad de manipulación y transformación es fácil y está bien definida, lo que nos permite establecer claramente reglas de cálculo que nos permitan pasar de unas fórmulas a otras. En segundo lugar, los lenguajes formales nos permiten expresar más apropiadamente algún tipo de discurso a comparación del lenguaje natural. Aunque lo que se considere lo más apropiado dependerá del usuario de la notación, generalmente nos referiremos a exactitud e invariabilidad en el significado.

Aunque este trabajo ya supone esa primera hipótesis, la que sigue es la que nos permitirá conectar el trabajo hasta ahora desarrollado con el de Novaes. Según su perspectiva, los lenguajes formales se comprenderán mejor si los pensamos como un avance en la tecnologías de notación matemática[4]. Así pues, si nosotros quisiéramos hacer una historia de los lenguajes formales, no deberíamos iniciar necesariamente con Frege o Leibniz, sino que podemos remontar algunas de sus características esenciales hasta las diferentes notaciones numéricas que han surgido en el tiempo.

Para convencernos de esto, Novaes nos pide que dejemos a un lado, al menos provisionalmente, la definición matemática de los lenguajes formales. Esto es, como un conjunto básico de símbolos (el alfabeto) y estrictas reglas de formación que nos indican qué contará como una fórmula bien formada. En su lugar, nos pide que los entendamos como lenguajes escritos cuya dimensión semántica en lugar de ser representacional está basada en el uso de un agente, cuya función es predominantemente operacional y que es formal en tanto que puede usarse aun cuando no tenga un campo de referencia vinculado a ella (lo que ella identifica bajo el nombre de "de-semantification")[5]. Nótese que la segunda definición no es incompatible con la primera, sino que pretende ser una alternativa para identificar a los mismos objetos. Veamos cómo esta postura se relaciona con las nociones de carácter y esquema de notación que he descrito en los apartados anteriores.

---

[4] Véase Novaes, 2012, p. 66.

[5] "Thus, for the continuation of this investigation, the most important features of a formal language according to the conceptualization just presented are: they are written languages; their semantic dimension is not representational but rather usage-based within-agent; their function is predominantly operative rather than expressive; they are formal in that they are the product of a process of de-semantification and in that they display key computational properties (which in turn hinge crucially on their status as external cognitive artefacts)". *Ibid.* p. 65

En primer lugar, notemos que podemos pensar a todo lenguaje formal como un esquema de notación con un fragmento particularmente bien definido. Por un lado, su alfabeto, en lugar de decir que está compuesto por símbolos, diríamos que está compuesto por caracteres. Por otro lado, sus reglas de formación tienen la función de identificar a aquellos caracteres pertenecientes a nuestro esquema que vamos a correlacionar, aquellos que pertenecen al esquema pero no están correlacionados y aquellas marcas que no pertenecen a ninguno de estos dos grupos.

Este papel que juegan las reglas de formación es muy importante. Las reglas de formación definen a las fórmulas, es decir, a los caracteres que van a estar correlacionados con los objetos que acepte la ontología que se esté usando. Sin estas reglas, los lenguajes formales estarían muy limitados al solo quedar como esquemas de notación. En la práctica, nosotros no estudiamos los lenguajes formales sólo como combinaciones de caracteres, sino que muchas veces las estudiamos como una herramienta para estudiar algo más. Ese es el caso particular de la lógica, que no solo estudia a las posibles fórmulas bien formadas o establece nuevas reglas de transformación entre caracteres para ver cómo se comportan, las estudian a la luz del fenómeno de las inferencias y la consecuencia lógica.

¿Qué podemos hacer ahora que hemos conjugado el marco teórico de Goodman y Novaes? Una consecuencia de que un lenguaje formal sea, dicho en muy pocas palabras, un caso específico de una notación es que podemos estudiarlos bajo los lentes con los que estudiamos otras notaciones y otras herramientas epistémicas. Gracias a ello, nos podemos permitir hacer preguntas acerca de la función de un sistema formal dada una determinada tarea, la adecuación al usuario, la relación que hay entre notaciones alternativas o los diferentes tipos de marcas que componen a un sistema formal.

Pero también nos permite dar un paso más y preguntarnos cómo funcionan los caracteres que, aunque no pertenecen al lenguaje formal, también juegan un papel importante en la notación: las líneas o puntos que distinguen a las premisas de las conclusiones, los dígitos que enumeran a las diferentes fórmulas en una prueba o incluso los paréntesis.

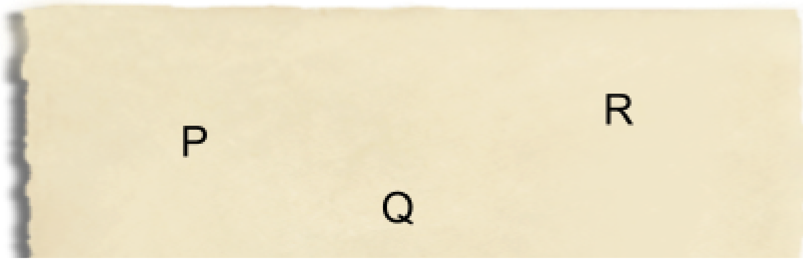
1.2.1 Sistemas de notación de la lógica proposicional.

Dado todo lo dicho anteriormente, creo que no será difícil aceptar la siguiente caracterización de las notaciones de la lógica proposicional: Un sistema de notación de la lógica proposicional es un esquema de notación tal que sus caracteres están conformados en un lenguaje formal y con campo de referencia que incluya (al menos) las nociones de proposiciones y funciones proposicionales. Una vez que logremos esto, podremos realizar el paso clave de definir reglas de transformación del lenguaje formal que se relacionen con las de la noción de consecuencia lógica de nuestra preferencia.

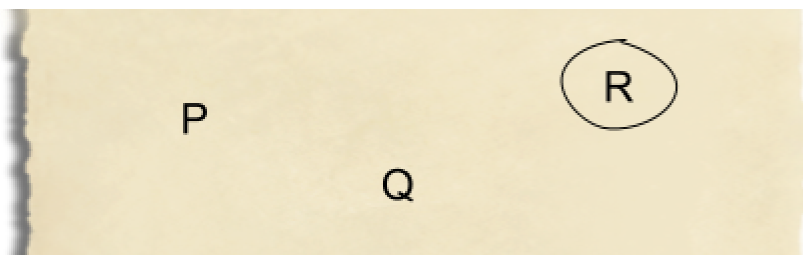
Conocemos ampliamente lenguajes formales convertidos en notaciones que cumplen esta condición. Tenemos, por ejemplo, a la notación de Hilbert-Ackerman que es la más cercana a ser la notación estándar actual. Al alfabeto lo componen diferentes tipos de caracteres. Por un lado, se aprovechan caracteres con los que ya estamos ampliamente familiarizados: las letras minúsculas del alfabeto latino ("p", "q", "r"...). Por otro, se introducen nuevos caracteres: ¬, ∧, ∨, →, ↔, |. A las letras las correlacionamos con las proposiciones atómicas y a los nuevos caracteres con las conectivas proposicionales. A través de las reglas de formación específicas del lenguaje formal, somos capaces de seleccionar cadenas de caracteres, es decir, definimos fórmulas, y las correlacionamos con proposiciones complejas, las convertimos en símbolos. Pero además, al incluir reglas de transformación (ya sea inferenciales o de equivalencia) entre diferentes cadenas de caracteres, somos capaces de correlacionar estas reglas con la noción de consecuencia lógica y las relaciones entre caracteres complejos con las relaciones que hay entre las proposiciones.

La presentación como notaciones, sin embargo, no se limitaría a los sistemas formales formados por cadenas de caracteres. También podría extenderse a aquellos sistemas formales diagramáticos. Un ejemplo de estos lo constituyen el sistema Alpha de los grafos existenciales de Peirce y sus peculiares recortes (Roberts, 1973).

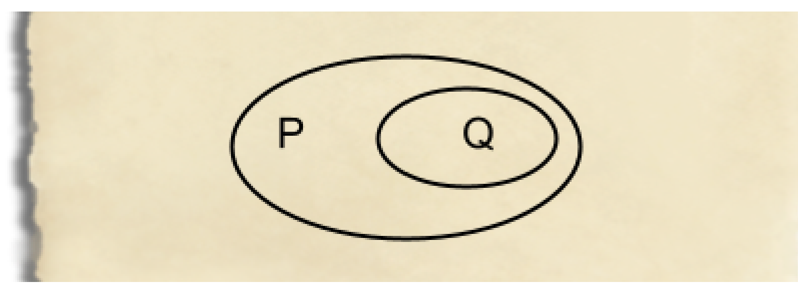
Al igual que con los sistemas anteriores, tenemos a las letras correlacionadas con las proposiciones atómicas. Escribir las proposiciones sobre una superficie, la cual es llamada "hoja de aserción", expresa que se están afirmando. Por ejemplo, si la siguiente fuese nuestra hoja de aserción, el "grafo" escrito en ella estaría expresando que las proposiciones P, Q o R son verdaderas:



Pero también tenemos a los recortes, los cuales son líneas que delimitan secciones de la superficie en donde se escriben las proposiciones. Los recortes niegan aquellos grafos que se encuentren dentro de la superficie delimitada. Por ejemplo, el siguiente grafo expresaría que P y Q son verdaderas, pero R es falsa:

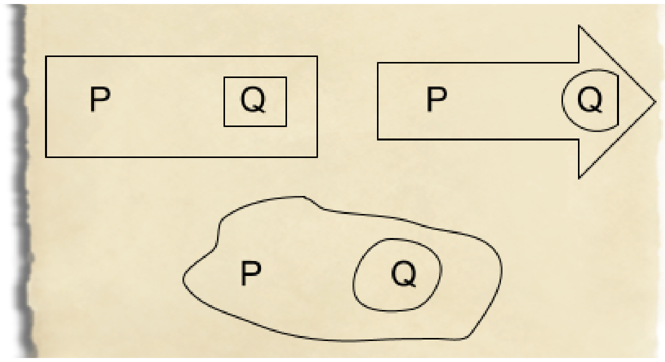


Mientras que el siguiente grafo expresa que se niega que P se afirme y Q se niegue (lo cual es equivalente a $\neg(P \land \neg Q)$ o $P \rightarrow Q$ en la notación estándar).



Ahora, lo interesante de los grafos existenciales es que estos recortes no tienen una forma fija. Basta con que sean líneas que encierran un área de la hoja de aserción sin cruzarse con otras (Roberts, 1971, p. 35). Todas las siguientes marcas pertenecen al mismo carácter que el ejemplo anterior[6]:

[6] Resulta interesante ver que Peirce aplicó su propia distinción entre tipo y token para describir a sus sistemas de notación de manera similar a como ahora usamos la noción de marca y carácter. "Peirce drew a distinction between the terms 'graph' and 'graph-instance', [...], So also an instance of a graph is a token; the graph itself, expressed in the instance, is a type". Roberts (1973, p.32)



El sistema Alpha de Peirce cuenta con sus propias reglas de transformación, así como con sus propias interpretaciones proposicionales. Es propiamente un sistema formal que, a pesar de no estar construido como cadenas de signos, puede ser estudiado a través de los conceptos de carácter, esquema de notación y sistema de notación.

Además de las notaciones ya existentes, podemos definir otras nuevas notaciones aprovechando la noción de carácter. En mi experiencia, la manera más sencilla de presentar una notación es partiendo de otra más conocida para después definir equivalencias. Es de esta la manera en que vamos a proceder en el capítulo “Historia de las Notaciones”. Pero en este momento, vamos a darnos la libertad de imaginar algunas notaciones lógicas posibles.

En primer lugar, podríamos utilizar una que en lugar de diferencias de forma entre caracteres, explote las diferencias de color. Partiendo de la notación de Hilbert-Ackermann, establezcamos que nuestros caracteres consistan en filas de cuadrados que tengan uno de los 216 colores seguros para la web.[7] Un cuadrado negro (#00000) es el carácter para la negación, el cuadrado rojo (#ff0000) para el condicional, los cuadrados color verde 1 (#00ff00) y cyan (#00ffff) tienen el mismo papel que los caracteres “(“ y “)” respectivamente, mientras que para las proposiciones atómicas usamos el resto de colores. Adelante pueden encontrar algunos ejemplos de fórmulas de esta notación.

Vamos a llamar a esta la “notación de Color”.

[7] Una paleta de estos colores puede verse en (https://www.color-hex.com/216-web-safe-colors/)

1.3 ¿Cómo evaluamos una notación? Características operativas y ergonómicas.

La notación de Color podrá ser muy llamativa, pero espero que el lector esté de acuerdo con que se trata de una terrible notación. Este ejemplo nos enseña que no basta con que un sistema de notación cumpla los requisitos formales que hemos descrito más arriba para que la consideremos entre las posibles herramientas con las cuales podemos trabajar en lógica. También tiene que ser buena. ¿Pero qué significa que una notación sea buena?

Me temo que esa pregunta, de la manera en la que está formulada, no tiene respuesta. Yo creo que es más apropiado responder a la pregunta ¿cómo evaluamos que una notación es buena para realizar cierta tarea? Esta pregunta es mucho más específica y nos permite reconocer que dos notaciones pueden ser buenas por razones diferentes, pues los criterios con los que se evalúan dependen de la tarea para la que son usadas. Esta es la pregunta que nos llevará a poder analizar la dimensión ergonómica de nuestras notaciones.

La noción de ergonomía en herramientas epistémicas de representación ya ha sido introducida por Axel Barceló (2016) para referirse a los factores que determinan qué tan fácil o difícil de usar es una notación (en contraste con qué tan efectiva es, para ciertos fines) y cuya fuente está en las capacidades y limitaciones físicas e intelectuales de los usuarios y la tarea que están realizando. Siguiendo esta línea de pensamiento, lo que distingue a una buena notación lógica no es solo que cumple con los requisitos para estar correlacionada con los elementos de la lógica (requisitos que de ahora en adelante les llamaré *características operativas*). Además de las características operativas, una buena notación debe contar con *características ergonómicas,* es decir, cualidades y condiciones que nos ofrezcan ventajas a la hora de realizar tareas usando nuestra notación.

Veamos esto con el ejemplo de dos herramientas más familiares: un martillo y un mazo. ¿Cuál es mejor? Creo que todos aceptaremos que la respuesta depende de lo que se pretenda hacer con ellas. Si nuestra tarea consiste en colocar clavos, el martillo nos ofrece más ventajas (como la posibilidad de poder retirar algún clavo mal colocado). Pero si nuestra tarea consiste en usar un cincel, el peso del mazo y un área de impacto más amplia ofrecerá ventajas sobre el martillo. Ambos podrían suplantar al otro para realizar la tarea, pues comparten características operativas como un mango, una cabeza con peso, materiales que soporten el impacto, etc. Sin embargo, dependiendo de la herramienta que seleccionamos, necesitaríamos realizar un esfuerzo más grande para alcanzar nuestro objetivo. En este sentido es en el que digo que la evaluación de las notaciones dependerá de la tarea que se busque realizar con ellas.

Del mismo modo, pudiéramos reemplazar las fórmulas de la notación de Hilbert-Ackermann por las de la notación de Color en muchos casos. Sin embargo, debido a las condiciones de la tareas y a las limitaciones y capacidades (propias y extendidas) de los usuarios (pensamos escribir las fórmulas en pizarrones y archivos digitales; no contamos con teclados de color, pero sí de letras; existen personas con dificultades para distinguir colores unos de otros...) la notación de Hilbert-Ackermann cuenta con características ergónomicas que las hacen mucho mejor que la notación de Color.

Esto nos puede causar la sospecha de que si procedemos de este modo siempre podemos justificar una notación de manera muy arbitraria. Con suficiente imaginación, podríamos fabricar una tarea con suficientes condiciones que nos permitan justificar que nuestra notación es buena para esa tarea. ¿Es esto un problema? Solo si quisiéramos argumentar que para que una notación sea valiosa basta con que tenga al menos una tarea en donde ofrezca ventajas sobre otras. Pero definitivamente no estoy argumentando a favor de ello. Como dije en un principio, no estoy interesado en decir que una notación es buena en general, pues podemos proponer condiciones tan triviales al punto de que toda notación sea valiosa.

Por el contrario, estoy más interesado en partir de las tareas para las que de hecho usamos notaciones. Esto parece mucho más intuitivo en la práctica. Las personas generalmente no se topan con una notación y buscan cuál es la tarea en la que esta notación se desempeña mejor. Por el contrario, se encuentran realizando una tarea y buscan una notación que les permita representar su objeto de estudio para manipularlo y compartirlo. Es por ello que las reconstrucciones históricas en esta tesis tienen un peso tan importante. A través de una historia de las notaciones y una historia de la Escuela Polaca trataré de averiguar cuáles son las condiciones de la tarea que buscaba cumplir la notación polaca y, en el capítulo final, evaluaré si las cumple.

Antes de cerrar, quisiera aclarar que yo creo que la dimensión ergonómica de las notaciones parte de una pregunta relacionada, pero esencialmente diferente, a la investigación en la dimensión epistémica. En un sentido amplio, ambos tipos de investigación intentan responder por qué usamos cierta representación/notación. Por un lado, la investigación epistémica de las notaciones se ha concentrado en responder esta pregunta explicando la justificación que nos permite realizar inferencias sobre el objeto representado y su representación. En contraste, el análisis desde un punto de vista ergonómico permite responder a esta pregunta intentado explicar las ventajas que obtenemos al usar esa representación para, de ser necesario, realizar inferencias sobre el objeto representado. En este sentido, aunque dos sistemas resulten idénticos vistos desde el análisis epistémico en tanto a la información que podemos obtener de ellos, estos pueden ser muy diferentes vistos desde la perspectiva ergonómica en cuanto al costo de recursos (tiempo, cálculos, etc.) que necesitamos para obtener esa información.

1.4 Conclusiones

Dado que este texto tiene como objetivo presentar varias nociones que considero importantes para el estudio de los sistemas formales de la lógica proposicional, creo conveniente presentar como conclusión un recuento de las definiciones a las que llegamos.

En primer lugar, dijimos que consideramos como un carácter a una colección de marcas tales que todas ellas pueden correlacionarse con un mismo objeto. Después presentamos a los esquemas de notación como una colección de caracteres diferenciados que tengan modos de composición para formar nuevos caracteres. A partir de esto, dijimos que una notación, o más propiamente, un sistema de notación es un esquema de notación cuyos caracteres están de hecho correlacionados con un campo de referencia.

A partir de aquella definición caracterizamos a un lenguaje formal como un esquema de notación bien definido, con un cuerpo básico de caracteres que conforman un alfabeto y reglas de formación que delimitan el conjunto de caracteres correlacionados con el campo de referencia. Con eso llegamos a caracterizar a un sistema de notación de lógica proposicional como un sistema de notación que cuenta con un lenguaje formal que esté correlacionado con campo de referencia compuesto por objetos como proposición y conectiva.

Por último, para responder a la pregunta de si una notación es buena para cumplir cierta tarea, se propusieron las nociones de *características operativas* y *ergonómicas*. Las características operativas permiten que un esquema de notación se convierta en un sistema de notación de la lógica proposicional. Mientras que las características ergonómicas son aquellas cualidades que nos permiten usar a la notación para realizar tareas designadas de una manera eficiente y efectiva.

2 | Historia de la Escuela Polaca de Lógica.

Como ya mencionamos en el capítulo anterior, conocer los objetivos, los propósitos y los problemas que persiguen los usuarios de un sistema de notación nos puede ayudar a comprender mejor sus características y a evaluar su efectividad. Y, si en algún momento la notación polaca fue el sistema estándar de algún grupo de investigadores, entonces lo fue para aquellos que pertenecían a la Escuela Polaca de Lógica. Es por ello que en este capítulo quisiera exponer, al menos a grandes rasgos, qué fue la Escuela Polaca de Lógica.

Nuestro proceder irá de lo general a lo particular. En primer lugar, conoceremos cómo surge este grupo a partir de la fundación de la Escuela de Leópolis-Varsovia por parte de Kazimierz Twardowski. A partir de ahí, explicaremos cómo fue que la Escuela Polaca de Lógica se convirtió rápidamente en un referente mundial en cuanto al tema y cuáles fueron las principales investigaciones entre sus miembros. Con esto tendremos suficientes elementos para que al final nos acerquemos al trabajo científico de Jan Łukasiewicz y ubiquemos el momento en el que diseña su notación. Por último, presentaré un ejemplo del uso de la notación después de Łukasiewicz. Con esto habremos presentado el contexto inmediato en el que apareció la notación polaca.

2.1 Twardowski y el nacimiento de la Escuela de Leópolis-Varsovia

Lo primero que tenemos que conocer sobre la Escuela Polaca de Lógica es que formaba parte de un proyecto aún más grande: la Escuela de Leópolis-Varsovia (Lwów-Warszawa)[8]. Jan Woleński, quien es probablemente el mayor historiador de la academia polaca de principios del siglo XX, nos advierte del peligro que corremos al identificar ambas escuelas, puesto que

[8] En la literatura en inglés, lo que en nuestra lengua conocemos como la Escuela Polaca de Lógica es llamada “Warsaw School of Logic”, mientras que la Escuela de Leópolis-Varsovia es conocida como “The Lvov-Warsaw School”.

con ello perdemos de vista los grandes avances que los polacos hicieron en otros campos de la ciencia además de la lógica (Woleński, 1998, p. 9). Personajes como Tatarkiewicz y un joven Roman Ingarden se formaron dentro de la Escuela de Leópolis-Varsovia, pero por la naturaleza de sus trabajos de investigación no pertenecen a la Escuela Polaca de Lógica.

Aún cuando los límites que pusimos a nuestra investigación no nos permitan ahondar más en las investigaciones fuera del campo de la lógica, nos resultará valioso conocer la escuela que dio origen a tan fructífera atmósfera académica. También creo que resultaría valioso conocer esta historia como un caso de estudio de una escuela filosófica nacional que, a través de un claro programa de investigación, en muy pocos años se convirtió en un referente internacional.

***

Sin exagerar, podemos decir que la escuela de Leópolis-Varsovia surgió gracias al esfuerzo de un solo hombre que se encontró con las condiciones adecuadas. Este hombre fue Kazimierz Twardowski (1866-1938). Según nos cuenta Brożek, Twardowski nació y vivió hasta los 29 años en Viena (Brożek, 2018, p. 15). Aunque comenzó estudiando Leyes en la Universidad de Viena, al poco tiempo decidió cambiarse a la Facultad de Filosofía. Allí es donde conoció a quien se convertiría en su mayor influencia intelectual: Franz Brentano.

Woleński (1998, p. 3) nos comparte dos importantes citas de la autobiografía de Twardowski que retratan muy bien la influencia de Brentano sobre el polaco:

> Franz Brentano se convirtió para mí en el modelo de filósofo que es implacable en su búsqueda por el conocimiento de la verdad, y del profesor de filosofía en el espíritu antiguo que reúne a los estudiantes alrededor de él como si fueran amigos más jóvenes. [...] Él me demostró con el ejemplo que aún los problemas más difíciles pueden ser formulados claramente, y que las tentativas de solución pueden ser presentadas con no menos claridad, ofreciendo una que sea clara para uno mismo.[9]

[9] "Franz Brentano became for me the model of a philosopher who is relentless in his quest for knowledge of the truth, and of a teacher of philosophy in the spirit of antiquity who gathers students around him as younger friends. [...] He proved to me by example that the most difficult problems can be clearly formulated, and the attempts at their solution no less clearly presented, provided one that is clear within oneself." Mi traducción.

> Yo sentí un llamado a diseminar el estilo de filosofar que había aprendido de Brentano entre mis compatriotas, y en particular de iniciar a la juventud académica dentro del método y espíritu de esta filosofía.[10]

Con la idea de compartir estas enseñanzas obtenidas de Brentano, Twardowski llega en 1895 a Leópolis, que en ese momento se encuentra bajo el poder del Imperio Austrohúngaro. Siendo aún bastante desconocido dentro de la academia, comienza a dar clases de filosofía dentro de la Universidad de Leópolis. Podemos considerar que en ese año nace la Escuela de Leópolis-Varsovia.

Durante los años de 1898 y 1899, Twardowski dictó un curso sobre las nuevas tendencias en lógica. Para Woleński (1998, p. 8), este fue el primer contacto académico de los polacos con las ideas de Boole, Schröder y la lógica matemática. Para 1902, Jan Łukasiewicz recibe el grado de doctor con una tesis dirigida por Twardowski. (Jadacki, 2018, p. 34) En 1904, el maestro polaco establece la Sociedad Filosófica Polaca y se dice que para el siguiente año su seminario contaba con más de cien miembros activos. (Woleński, 1998)

Con la academia filosófica polaca dirigida por Twardowski, empezaron a florecer una gran cantidad de investigaciones en muchas áreas diferentes. Podemos suponer que esto se debe al esfuerzo que hacía el maestro polaco para que la nueva academia estuviera abierta a diferentes posturas y problemas. En el discurso inaugural de la Sociedad Filosófica Polaca, Twardowski declaraba:

> La Sociedad Filosófica Polaca no ejercerá de manera exclusiva ninguna corriente en filosofía pues su intención es cubrir todas las corrientes. Esta busca ser libre de toda parcialidad, buscar ser tan versátil como sea posible. El único dogma de la Sociedad será que el dogmatismo es el mayor enemigo de todo trabajo académico. Nosotros queremos todo el trabajo y todas las opiniones en nuestra sociedad para tener un único objetivo, la clarificación de la verdad. El camino hacia ese objetivo es la crítica académica. (Woleński, 1998, p. 8)

Tal apertura no solo era teórica, sino también práctica. La lógica matemática, por ejemplo, no figuraba entre los principales intereses de Twardowski en tanto que investigador. Su campo de especialidad fue la fenomenología que heredó de Brentano. Sin embargo, a sus

---

[10] "I felt a calling to disseminate the style of philosophizing that I had learned from Brentano among my countrymen, and in particular to initiate the academic youth into the spirit and method of this philosophy". Mi traducción.
Ambas son traducción al inglés de J. Woleński de Kazimierz Twardowski, "Selbstdarstellung", en *Grazer Philosophische Studien* 39, p. 14.

alumnos no les heredó necesariamente los problemas que le interesaban, sino la metodología de estudio y enseñanza que él había aprendido durante su periodo en Viena. Una metodología en donde la claridad era el principio más importante. Una claridad que creo podría considerarse familiar a la tradición analítica, pero sin pertenecer a ella. Y parece que esa fue la clave del levantamiento de la Escuela de Varsovia.

Detrás de esta apertura a diferentes corrientes y posturas, sin duda hay una fuerte motivación nacionalista. Woleński nos comenta que la directiva de Twardowski a la academia polaca de adoptar ideas de diversas fuentes sin decantarse por una de ellas la propuso como una solución para evitar que se terminase adoptando exclusivamente la de algún país extranjero. En ese caso, la recién nacida academia polaca terminaría quedando bajo la sombra de países con tradiciones fuertes como Inglaterra, Francia o Alemania (Woleński, 1998).

A un siglo de distancia de estas decisiones, creo que podemos concluir que esta decisión tuvo sus ventajas y desventajas. Por un lado, es cierto que sería muy forzado decir que la Escuela de Leópolis-Varsovia cae dentro de la tradición inglesa, francesa o alemana, pues tiene semejanzas y diferencias con cada una de ellas. Pero por otro lado, creo que ese nacionalismo fue también una de las causas de que la tradición polaca se extinguiera, pues con ello, la escuela quedó profundamente unida a los complicados eventos históricos que afectarían a Polonia durante la primera mitad del siglo XX.

Con la llegada de la Primera Guerra Mundial, la vida en Polonia se transformó, especialmente en la ciudad de Varsovia. Previo a la Primera Guerra Mundial, Varsovia era controlada por los rusos. Pero para 1916, Varsovia pasó al control de los alemanes y los austrohúngaros, los cuales tomarán una decisión que benefició a la Escuela de Twardowski: reactivar la Universidad de Varsovia y permitir que se dieran clases en polaco (Wybraniec-Skardowska, 2018).

Muchos estudiantes de Twardowski se convirtieron en profesores de la Universidad de Varsovia, creando una academia nacional polaca con dos centros principales: Leópolis y Varsovia. De ahí el nombre de la Escuela de Leópolis-Varsovia. Ese fue el periodo de mayor producción académica en Polonia: desde 1918, año en el que Polonia gana su independencia, y hasta 1939, año en el que Polonia fue invadida dando inicio a la Segunda Guerra Mundial.

2.2 La Escuela Polaca de Lógica

Con la aparición de la Universidad de Varsovia como nuevo centro nacional de la academia polaca, se dieron las condiciones necesarias para que se formase un grupo de investigadores interesados en la lógica matemática, es decir, lo que en la actualidad llamamos la Escuela Polaca de Lógica. Estas condiciones fueron principalmente dos: 1) el programa de Janiszewski para el desarrollo de una academia matemática nacional y 2) el encuentro de Łukasiewicz, Leśniewski y Tarski en Varsovia.

Empecemos hablando sobre el programa de Zygmunt Janiszewski (1888-1920). Janiszewski fue un importante matemático polaco. Perteneció a la primera generación de estudiantes de Twardowski, pero pronto encontraría su profesión como matemático como asistente de Wacław Sierpiński (Woleński, 1998). Partiendo de un sentimiento nacionalista similar al de Twardowski, Sierpińsk y Janiszewski desarrollaron un programa que tenía un propósito muy claro: crear una sólida academia polaca de matemáticas capaz de competir con otras academias del mundo.

Según Woleński (1998) nos comenta, al pensar en un plan para alcanzar dicho objetivo, Janiszewski consideró que la matemática polaca difícilmente podría competir internacionalmente en áreas como álgebra, análisis o geometría. Por ello, propuso que la escuela polaca se dedicara a hacer investigación en las nuevas áreas de las matemáticas que estaban surgiendo: teoría de conjuntos, topología y la fundamentación de las matemáticas. A esto se le llamó el "Programa Janiszewski".

Con la reactivación de la Universidad de Varsovia, Janiszewski encontró la oportunidad perfecta para iniciar con su programa en matemáticas. Este programa encontró resonancia entre los nuevos matemáticos polacos y, para 1920, apareció *Fundamenta Mathematicae*, una revista en polaco especializada en matemáticas. Esta revista se dividió en dos series: una dedicada a la teoría de conjuntos, la topología y sus aplicaciones, y la segunda exclusivamente a la lógica y la fundamentación de las matemáticas. (Woleński, 2018a)

Hay que hacer una aclaración: la Escuela Polaca de Matemáticas, como pasaría llamarse a la academia organizada como consecuencia del programa de Janiszewski, tampoco se redujo a la Escuela Polaca de Lógica. Al igual que la Escuela de Leópolis-Varsovia, la Escuela Polaca de Matemáticas incluyó, pero no se limitó, a los estudios en lógica matemática. Más bien, la

Escuela Polaca de Lógica resultó de la intersección entre la Escuela Matemática y la Escuela de Leópolis-Varsovia. Esta intersección fue resultado del trabajo de dos personas: Jan Łukasiewicz (1878-1956) y Stanisław Leśniewski (1886-1939). Ambos fueron estudiantes que obtuvieron su doctorado bajo la dirección de Twardowski en la Universidad de Leópolis a principios del siglo XX. De ahí obtuvieron una importante formación filosófica, un interés en los nuevos avances en lógica matemática que se estaban desarrollando y una imperiosa necesidad por publicar resultados claros y certeros.

Si bien la actividad académica de ambos había comenzado desde antes de que hubieran obtenido sus doctorados, lo cierto es que sus grandes aportaciones a la lógica comenzaron a partir de que se convirtieron en docentes de la Universidad de Varsovia. Leśniewski fue el primero en unirse, en 1918, cuando al intentar obtener su habilitación en la Universidad de Leópolis, le fue asignado un puesto en la renaciente Universidad de Varsovia. En 1919, sería nombrado como Profesor Extraordinario de Fundamentación de las Matemáticas (Simons, 2018).

Łukasiewicz por su parte, ya había estado a cargo de dar clases de lógica en la Universidad de Leópolis de 1911 a 1915. Pronto se convirtió en un respetado miembro de la academia polaca. Con la independencia de Polonia, en el año de 1919 se une como servidor público en el nuevo gobierno como Ministro de Denominaciones Religiosas y Educación Pública. Pero en 1920, deja el puesto y se convierte en profesor de la Universidad de Varsovia. Tal sería su influencia sobre esta universidad que Łukasiewicz se convertiría en su rector en 1922 y en 1931 (Jadacki, 2018).

Ahora, es importante destacar que la llegada de ambos a la Facultad de Matemáticas de Varsovia no fue una coincidencia. A mi parecer, esta fue una decisión que tenía la intención de fortalecer la Escuela Polaca de Matemáticas que se formaba paralelamente. Ambos eran importantes miembros de la Escuela de Leópolis, alumnos de Twardowski y conocedores de los últimos avances en lógica matemática, pero no eran, estrictamente hablando, matemáticos formados como lo eran Janiszewski o Sierpiński. Eran filósofos con amplio dominio en las técnicas matemáticas aplicadas al estudio de la lógica. Woleński al respecto nos comenta:

> Cuando la Universidad de Varsovia estaba siendo organizada después de 1918, los matemáticos varsovianos dieron un paso muy arriesgado: aceptaron que

dos filósofos, Łukasiewicz y Leśniewski fueran seleccionados como profesores de lógica en un ambiente matemático.[11] (Woleński, 1998, p.9)

A cien años de distancia, podemos decir que esta apuesta rindió sus frutos. Tanto Łukasiewicz como Leśniewski entraron en la etapa más productiva de sus vidas. Al mismo tiempo, formaron a investigadores que hicieron grandes aportaciones a la lógica matemática. En la década de los veinte se graduaron Alfred Tarski, Mordchaj Wajsberg, Adolf Lindenbaum, Stanisław Jaśkowski, Mojżesz Presburger y Bolesław Sobociński. En la década de los treinta se les unieron Andrzej Mostowski y Jerzy Słupecki (Woleński, 1989).

Sobre el trabajo de Łukasiewicz hablaremos a detalle más adelante, pero antes quisiera mencionar un poco sobre el tipo de investigaciones que se hacían en la Escuela de lógica. El primero sobre el que tenemos que hablar es, sin duda, Leśniewski. Al igual que Łukasiewicz, fue alumno de Twardowski en la Universidad de Leópolis. Pero él reconocería que fue Łukasiewicz quien lo introduciría a la lógica matemática en 1911 (Leśniewski, 1992, p. 181). Durante el periodo entre guerras trabajó con los tres temas por los que sería reconocido alrededor del mundo: la fundamentación de las matemáticas, la mereología y el desarrollo de sistemas formales, entre los que destaca la prototética.

En el campo de la fundamentación de las matemáticas, Leśniewski trabajó arduamente en la búsqueda de sistemas formales en los cuales fundamentar las matemáticas que estuvieran libres de antinomias como las que Russell encontró en los sistemas de Frege y que no dependieran de la teoría de conjuntos de Zermelo (Simons, 2018). Esta búsqueda le llevó en parte al desarrollo de su mereología, un sistema formal que dependiera de la relación "ser parte de". Su propuesta fue el primer sistema axiomatizado para la mereología y precedió cerca de 20 años a la propuesta de Nelson Goodman que dio atención a la mereología en el panorama filosófico. La prototética,[12] por su parte, fue otro de los sistemas en los que trabajó. Woleński (1998, p.151) define a la prototética como un cálculo proposicional generalizado, en donde se introducía el uso de cuantificadores para ligar variables proposicionales y que permitía usar functores variables.

[11]"When Warsaw University was being organized after 1918, Warsaw mathematicians took a very risky step: they agreed that two philosophers, Łukasiewicz and Leśniewski were to be appointed as professor of logic in a mathematical environment." Mi traducción.

[12] No encontré ninguna publicación en español que hiciera una traducción del término "prothotetics", que es como se ha traducido al inglés el nombre del sistema cada vez que se lo menciona. Veáse Łukasiewicz, 1963, p. 92.

Tarski sería el otro gran maestro que tendría la Escuela Polaca de Lógica y probablemente su miembro más famoso. Fue uno de los primeros estudiantes formados en la reconstruida Universidad de Varsovia, por lo que se considera que perteneció a la segunda generación de la Escuela de Leópolis-Varsovia. Sin embargo, pronto se convertiría en un referente al mismo nivel que Łukasiewicz y Leśniewski. En 1924 obtuvo su doctorado bajo la supervisión de Leśniewski. El siguiente año obtuvo su habilitación y comenzó a trabajar como asistente de Łukasiewicz en la Universidad de Varsovia. A partir de ese año iniciaría a dar clases a nivel universitario, aunque no obtuvo un puesto como profesor permanente hasta 1942 en la Universidad de California en Berkeley (Woleński, 2018a).

En lugar de hacer una exposición irrespetuosamente breve de sus famosos trabajos en teoría de modelos y semántica formal, quizá nos convendría más mencionar su influencia en los otros miembros de la Escuela de Varsovia. Apoyó a Leśniewski en el desarrollo de la prototética al demostrar en 1923 que la negación y la conjunción podían definirse a partir de la equivalencia material y el cuantificador universal (Woleński, 1989). Desarrolló una prueba de completitud del cálculo proposicional independiente de la de Post a principios de los 30 que presentó en Varsovia (Łukasiewicz, 1963). Fue el director de la tesis doctoral de Andrzej Mostowski en 1938, aunque por no tener el grado de profesor necesario para dirigir tesis doctorales, Kuratowski tomó el papel como supervisor oficial (Woleński, 1989). También fue quién dirigió la investigación de Mojżesz Presburger que lo llevó al desarrollo de las aritméticas de Presburger (Hasse, 2018). Esto por mencionar solo aportaciones concretas que podemos rastrear en el trabajo de otros miembros de la Escuela Polaca de Lógica.

Sobre el resto de miembros que formaron a la Escuela de Varsovia, sólo mencionaré sus más conocidas aportaciones.

Mordchaj Wajsberg (1902-?) desarrolló la primera axiomatización de un sistema de lógica multivaluado (Malinowski, 2018). También introdujo la noción de *organicidad*, según la cual un teorema es orgánico si y sólo si ninguna de sus subfórmulas es a su vez un teorema. Para 1927, él había encontrado un axioma único para la lógica proposicional igual de simple que el de Łukasiewicz que además era orgánico (Łukasiewicz, 1931).

Adolf Lindenbaum (1904-1942) fue el colaborador más cercano a Tarski durante su periodo entre guerras. Entre sus aportaciones más conocidas está el Lema de Lindenbaum y la conjetura de que cualquier cálculo proposicional puede ser caracterizada por una matriz, lo que dio origen a lo que ahora conocemos como álgebras de Lindenbaum (Purdy & Zygmunt, 2018).

Stanisław Jaśkowski (1906-1965) desarrolló, de manera independiente a Gentzen, sistemas de deducción natural. Además, trabajó arduamente en el área que ahora conocemos como lógicas no clásicas. Desarrolló el primer sistema lógica inclusiva, es decir, un sistema de primer orden que admite modelos con dominios vacíos. Mientras trabajaba en lógicas discursivas, en 1948 ofreció una construcción formal de lo que ahora llamaríamos un sistema paraconsistente (Indrzejczak, 2018).

Mojżesz Presburger (1904-?), como ya mencionamos anteriormente, desarrolló la Aritmética de Presburger. Esta es una teoría axiomática de primer orden sobre los números enteros menos expresiva que la construcción de Peano. Pero a diferencia de esta última, la aritmética de Presburger tiene la propiedad de ser completa y decidible (Hasse, 2018).

Bolesław Sobociński (1906-1980) fue el alumno más cercano a Leśniewski del grupo. Gracias a él es que tenemos conocimiento de buena parte de las investigaciones de Leśniewski. Pero del proyecto de Łukasiewicz, Sobocinski tomó el interés en la búsqueda de los axiomas más cortos para los diferentes sistemas de lógica proposicional (Bochenski, 1994). Encontró un único axioma orgánico para el sistema construido con negación y condicional de 139 símbolos. También desarrolló un axioma único para la prototética de Leśniewski. Además escribió una biografía sobre Łukasiewicz y, al finalizar la guerra obtuvo resultados importantes en lógica modal (Świetorzecka, 2018).

Por último, Jerzy Słupecki (1904-1987) fue uno de los últimos estudiantes en graduarse durante el periodo entreguerras de la Escuela Polaca de Lógica. Sobre sus investigaciones, Woleński nos cuenta que Słupecki hizo importantes aportaciones que desarrollaban el trabajo de Łukasiewicz. Desarrolló un criterio para determinar si una lógica multivaluada es funcionalmente completa. Introdujo la noción de una operación similar a la consecuencia lógica, pero cuyo resultado es rechazar cierta proposición. Además, fue uno de los primeros historiadores de la Escuela Polaca, publicando investigaciones históricas sobre los avances obtenidos por Jan Łukasiewicz y los demás miembros de su círculo (Woleński, 2018b).

Sin embargo, la historia de la Escuela de Polaca de lógica se vio truncada en el año de 1939. Por una parte, Leśniewski murió en mayo de ese año y para septiembre inicia la Segunda Guerra Mundial con la invasión de Alemania a Polonia. Gran parte de los archivos de

Łukasiewicz y Leśniewski, así como de sus estudiantes fueron destruidos durante la guerra (Jadacki, 2018 y Simons, 2018). Los alemanes restringieron la educación universitaria en Polonia, lo que obligó a los académicos a hacer sus actividades de manera clandestina o huir del país (Marek, 2018). Lindenbaum, Wajsberg y Presburger fueron víctimas de la guerra. Tarski logró sobrevivir gracias a que se encontraba en un viaje académico durante el inicio de la invasión alemana (Woleński, 2018a).

Sin duda esto marcó el fin de la Escuela Polaca de Lógica como un grupo activo de investigadores de alto nivel que trabajaban en conjunto sobre un programa en lógica. Después de la guerra, los sobrevivientes continuaron trabajando de manera independiente. Łukasiewicz obtuvo un puesto como profesor en la Real Academia de Irlanda en Dublín. Tarski se convirtió en ciudadano norteamericano y logró crear un fuerte centro de investigación en lógica matemática en la Universidad de California (Woleński, 2018a). Jaśkowski y Słupecki se quedaron en Polonia, en diferentes universidades, en donde organizaron también departamentos de lógica (Indrzejczak, 2018 y Woleński, 2018b).

El trabajo de investigación realizado durante la época dorada de la Escuela Polaca de Lógica también sufrió después de la guerra. Como ya mencionamos, una buena parte de las investigaciones de Łukasiewicz y Leśniewski fueron destruidas. Por otro lado, gran parte de las publicaciones estaban escritas en polaco, debido al proyecto nacionalista que mencionamos anteriormente. La poca popularidad del polaco hizo difícil la difusión de las publicaciones por el mundo. Y aunque se hizo un intento por refundar la Escuela de Leópolis-Varsovia en Breslavia (Wrocław), los resultados del trabajo realizado en este centro, que hasta la fecha sigue operando, difícilmente podrían competir contra los obtenidos por la Escuela de lógica de Varsovia en el periodo entreguerras.

2.3 Jan Łukasiewicz

Una vez que hemos conocido a la Escuela de Leópolis-Varsovia y a la Escuela Polaca de Lógica, quisiera analizar el trabajo de Jan Łukasiewicz: el creador de la notación polaca. Más que presentar una monografía, quisiera presentar al lector un texto que le ayude a conocer qué tipo de investigaciones interesaban a Jan Łukasiewicz. Con esto en mente, en capítulos siguientes podremos preguntarnos qué tanto de la notación se vio influenciada por los objetivos particulares de la investigación de su creador.

Łukasiewicz nació el 21 de diciembre de 1878 en Leópolis. Aunque primero inició estudiando Leyes, pronto cambiaría su carrera por la de Filosofía en los cursos iniciados por Twardowski. En 1902 obtuvo su doctorado a la edad de 24 años y para 1909 obtuvo su habilitación para dar clases a nivel universitario. Al siguiente año, viajó hacia Graz para participar en el seminario de Alexius Meinong. Al regresar, inició su carrera como profesor en la Universidad de Leópolis hasta que en 1918, con la independencia de Polonia, él pasó a ocupar un cargo del alto nivel en el nuevo gobierno nacional. Dos años después Łukasiewicz regresa a ser profesor, pero en esta ocasión a la Universidad de Varsovia, en donde se mantendría hasta el inicio de la Segunda Guerra Mundial. Con el cierre oficial de la Universidad, Łukasiewicz pasó a dar clases en la universidad clandestina que se organizó para continuar con la educación de los estudiantes polacos. En 1944 huyó de Varsovia e inició un largo éxodo que terminaría dos años después cuando se trasladó a Dublín, Irlanda. Allí se convertiría en profesor de lógica matemática hasta 1953. Murió el 13 de febrero de 1956 a la edad de 77 años (Łukasiewicz, 1994 y Jadacki, 2018).

Su investigación se suele dividir en dos periodos. Una fase previa a la primera guerra mundial en donde Łukasiewicz se interesó principalmente en trabajos sobre metodología de la ciencias empíricas. El segundo periodo se desarrolló al finalizar la Primera Guerra Mundial, tiempo durante el cual Łukasiewicz hizo sus principales aportaciones al campo de la lógica matemática (Słupecki & Borkowski, 1958). Fue durante este segundo periodo cuando se desarrolló la notación polaca.

Del primer periodo cabe destacar: (1) su propuesta de estudiar la inducción como una operación inversa a la deducción (de la cual cambiaría de opinión años después), (2) su análisis de la noción de probabilidad que lo llevó a afirmar que la probabilidad es una propiedad de las afirmaciones y no de los eventos, (3) sus artículos dedicados a dar un análisis lógico de la noción de causa, (4) su famoso trabajo en donde dilucida el principio de contradicción aristotélico, tema que lo acompañaría durante toda su vida y que lo llevaría al estudio del determinismo y las lógicas multivalentes y (5) una monografía sobre la noción de magnitud.[13]

Este último trabajo, titulado *Sobre la noción de magnitud* (*O pojęciu wielkości*) (Łukasiewicz, 1916), es el que podría resultar más interesante para nosotros, pues es un

[13] Un resumen más detallado del primer periodo del trabajo de Łukasiewicz lo pueden encontrar en (Słupecki & Borkowski, 1958)

claro antecedente del trabajo de Łukasiewicz en la axiomatización de un sistema. El objetivo de Łukasiewicz en este texto era hacer un análisis crítico de la noción de magnitud que el matemático Stanislaw Zaremba había propuesto un par de años antes. Para Zaremba, los elementos pertenecientes a un conjunto podrían considerarse magnitudes si cumplían con los siguientes principios:

1. $A = A$
2. $A = B \leftrightarrow B = A$
3. $(A = B \,\&\, B = C) \rightarrow A = C$
4. $A < B \vee A = B \vee A > B$
5. $A < B \leftrightarrow B > A$,
6. $(A < B \,\&\, B < C\,) \rightarrow A < C$
7. $(A = B \,\&\, B < C) \rightarrow A < C$
8. $(A < B \,\&\, B = C) \rightarrow A < C$

A partir de estos principios, Łukasiewicz simplificó la noción de magnitud. Según él, podemos llamar magnitud a los elementos de un conjunto ordenado y propone los siguientes axiomas y definiciones en lugar de los principios de Zaremba:

1. $A < B \rightarrow \sim(B<A)$
2. $(\, A<B \,\&\, \sim(C < B)\,) \rightarrow A<C$
3. $A > B =_{def} B < A$,
4. $A=B =_{def} \sim(A<B) \,\&\, \sim(B<A)$.[14]

Una importante hipótesis que está detrás nuestra investigación es que la notación polaca está conectada con la búsqueda de los axiomas más simples para diferentes sistemas. Si este fuese el caso, entonces *Sobre la noción de magnitud* constituye un claro antecedente. Más interesante resulta aún porque, a diferencia de otros textos dedicados a la búsqueda de tales axiomas, en este artículo Łukasiewicz nos trata de dar una justificación para esta búsqueda:

> Debemos formular la siguiente regla metodológica, la cual se refiere a los principios y a los conceptos primitivos: los principios y los conceptos primitivos de una teoría deductiva dada deberían ser seleccionados de tal manera que se reduzca su número tanto como sea posible. Al adoptar esta regla estamos siendo guiados por dos consideraciones: Primero, nosotros queremos tener la menor cantidad de proposiciones sin prueba y conceptos sin definición que sea posible, porque tratamos a ambos como un *malum necessarium*. En segundo lugar, entre menos conceptos

[14] Es importante aclarar que en el texto original no se usó ninguna notación lógica para enunciar estos principios. He decidido presentarlos de esta manera para facilitar su lectura.

> primitivos y principios necesitemos para presentar una teoría deductiva, más fundamentales son los conceptos y principios que hemos elegido y más simple es la teoría (Łukasiewicz, 1916, p. 67).[15]

Hay que notar cómo desde este texto publicado en 1916 Łukasiewicz está proponiendo que la simplicidad de una teoría depende de una cuestión cuantitativa: la cantidad de axiomas y conceptos primitivos. Esta es una idea que aplicará tanto a sus sistemas formales como en su sistema de notación, pero que no volverá a presentar de manera tan explícita como en este texto.

Simultáneamente a la llegada de la Primera Guerra Mundial, Łukasiewicz entra en una nueva fase de investigación en la que dejará de interesarse tanto en temas relacionados con la metodología de las ciencias naturales y empezará a trabajar en temas de lógica matemática. Esta nueva fase además coincidió con el nacimiento de la Escuela Polaca de Lógica, lo que le permitió a Łukasiewicz estar en el ambiente más propicio para alcanzar sus más grandes logros académicos.

Słupecki y Borkowski clasificaron los trabajos de la segunda fase de la investigación de su profesor en tres áreas: la axiomatización del cálculo proposicional bivalente, los sistemas de cálculo proposicional multivalente y la logística aristotélica, siendo probablemente sus contribuciones a la segunda área las más famosas en su trabajo (Słupecki & Borkowski, 1958). Pero por el momento, solo me gustaría repasar brevemente aquellas directamente relacionadas con la notación polaca y la axiomatización de sistemas formales.

El primero de los trabajos que debemos mencionar es sin duda “O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej” (“Sobre la importancia y las necesidades de la lógica matemática”). Publicado en 1929, esta parece haber sido la primera publicación en la que apareció la notación polaca y el sistema de escritura de pruebas de Łukasiewicz. Sin embargo, apareció sólo como una nota al pie del artículo y únicamente se presentaba los caracteres C y N para la conjunción y negación respectivamente (Łukasiewicz, 1929).

[15] “We may formulate the following methodological rule, which pertains to both principles and primitive concepts: the principles and the primitive concepts of a given deductive theory should be selected so as to reduce their number as far as possible. In adopting this rule we are guided by two considerations: first, we want to have as few unproved propositions and undefined concepts as possible, because we treat both as a malum necessarium. Secondly, the fewer primitive concepts and principles we need to present a deductive theory, the more fundamental are the concepts and principles we have chosen, and the simpler is the theory.” La traducción es mía.

Al siguiente año, la notación polaca aparecería en el artículo "Investigaciones sobre el cálculo proposicional" ("Untersuchungen über den Aussagenkalkül"), artículo que reúne varios resultados obtenidos por los diferentes miembros de la Escuela Polaca de Lógica en años anteriores (Łukasiewicz & Tarski, 1930). Allí podemos encontrar un sistema de tres axiomas para la lógica proposicional clásica:

1. CCpqCCqrCpr (Silogismo hipotético)
2. CCNppp (Ley de Clavius)
3. CpCNpq (Duns Scoto)

Cabe destacar dos cosas: Primero, estos axiomas ya están escritos en notación polaca. Segundo, Łukasiewicz los presenta como un sistema de axiomas más simple que los sistemas de Frege, Whitehead-Russell y Hilbert.

Sin embargo, la primera presentación extensa de la notación polaca y el primer artículo en el que esta notación explota sus propiedades especiales aparecieron hasta el siguiente año, en 1931. Este fue el año en el que se publicó el libro de texto *Elementos de la lógica matemática* (*Elementy logiki matematycznej*) y el artículo "Comentarios sobre el axioma de Nicod y la deducción generalizante" ("Uwagi o aksjomacie Nicoda i 'indukcji uogólniającej'").

Los *Elementos* son un libro de texto que Łukasiewicz empezó a escribir desde 1928 como notas para un curso de lógica matemática que impartió en la Universidad de Varsovia. Este libro se divide en cinco partes: 1) una introducción a la incipiente lógica matemática en contraposición a la manera tradicional de hacer lógica filosófica, 2) una presentación axiomática del cálculo proposicional usando la notación polaca, 3) pruebas de la consistencia e independencia de los axiomas, así como de la completitud del sistema, 4) una breve presentación de un sistema extendido de lógica proposicional con cuantificadores proposicionales y 5) un sistema de cálculo para la silogística aristotélica.

Este es un libro con una clara intención didáctica. Es decir, su objetivo era servir como introducción a la tendencia matemática del estudio de la lógica. De aquí podemos darnos una idea clara de cómo se enseñaba lógica dentro de la Escuela Polaca. Los nombres de Tarski y Leśniewski, así como algunas de sus aportaciones y problemas, aparecen de manera esporádica a lo largo del texto, al mismo nivel que los de Hilbert y Russell. A lo largo del libro existen apartados históricos que enfatizan la posición de Łukasiewicz de que la lógica matemática es una continuación de la lógica filosófica, pero estudiada a través de nuevos métodos. Y, por supuesto, la notación oficial es la polaca.

"Comentarios sobre el axioma de Nicod y la 'deducción generalizante'" es un texto muy diferente. Publicado en el mismo año que los *Elementos,* este artículo de investigación tiene un doble objetivo. El objetivo principal parece que fue proponer a la "deducción generalizante", es decir, aquellos casos en los que se podía demostrar alguna tesis a partir de un caso particular suyo, como un problema de interés para lógicos y filósofos.[16] El segundo objetivo era dejar constancia de algunos de los avances de su grupo de investigación en cuanto a la axiomatización de sistemas de lógica proposicional. Entre estos avances está su descubrimiento de un axioma único igual de corto que el de Nicod, el concepto de fórmula orgánica de Wajsberg y un error en la demostración de Nicod identificado por Leśniewski. Yo me atrevería a proponer que otro de estos avances de investigación presentados fue la propia notación polaca. Łukasiewicz utilizará las primeras cuatro páginas de su artículo para presentar la notación (en donde la única conectiva es la negación de conjunción NAND asociada al carácter D) que le permitirá concluir más adelante que su axioma único es mucho más simple y general que el de Nicod. Si tengo razón, entonces "Comentarios sobre el axioma de Nicod" fue una presentación oficial de la notación, pero en lugar de tener un énfasis didáctico, se presenta como una herramienta de investigación.

Después de la publicación de los *Comentarios*, Łukasiewicz seguiría escribiendo artículos relacionados a la axiomatización de teorías formales, siempre usando la notación polaca.

Uno de ellos es "El cálculo equivalente" ("Der Äquivalenzenkalkül"), en donde Łukasiewicz presenta un fragmento de la lógica proposicional que se obtiene usando solo la equivalencia material como única conectiva. En este artículo presenta un axioma único de 11 letras para este fragmento y, además, una demostración de que no es posible encontrar una fórmula de menos de 11 letras que funciones como axioma único (Łukasiewicz, 1970).[17]

---

[16] En la sección de "El axioma más simple y el axioma más corto" del capítulo 5 se presenta una explicación más extensa sobre qué significa que una demostración sea una deducción generalizante, así como el papel de la notación para definir la simplicidad de un axioma.

[17] A pesar de ser escrito originalmente en alemán entre 1937 y 1939, este artículo fue publicado en polaco hasta 1961 y apareció por primera vez en inglés en 1970. La imprenta que lo iba a publicar fue destruida durante la invasión a Polonia en 1939 y la única copia que se conservó apareció años después. Menciono esto para hacer énfasis en cómo la Segunda Guerra Mundial afectó en gran medida el trabajo que conocemos de Łukasiewicz y, en general, de la Escuela de Leópolis-Varsovia.

En “El axioma más corto del cálculo implicacional de proposiciones” (“The shortest axiom of the implicational calculus of propositions”), vuelve a tratar el problema de axiomatizar un fragmento del cálculo proposicional. En esta ocasión, se centra en aquel fragmento que se obtiene al solo utilizar el condicional como conectiva. Este artículo fue escrito poco tiempo después de haberse instalado en Irlanda después de la segunda guerra mundial y, al parecer, el primero publicado en inglés. El objetivo fue demostrar que una fórmula de 13 letras puede servir como axioma único del cálculo implicacional. Destaca un apartado “histórico” sobre este problema, en el que se presentan los avances que él, Wajsberg y Tarski realizaron en la década de los 30 en el tema. Nuevamente presenta a la notación polaca y su particular manera de escribir las pruebas formales, siendo la primera presentación en inglés que pude encontrar. (Łukasiewicz, 1948)

En “Formalización de las teorías matemáticas” (“Sur la Formalisation des Théories Mathématiques”) (Łukasiewicz, 1953a), fue un texto preparado para el coloquio donde se discutieron resultados de la investigación en métodos formales de axiomatización. En este artículo, Łukasiewicz usará la prototética de Leśniewski (una extensión del sistema de lógica proposicional con conectivas variables) para tratar de dar un versión axiomatizada de la teoría de los números naturales. En este texto, en una nota al pie, Łukasiewicz presenta el resultado de uno de sus nuevos alumnos y heredero del programa de investigación en axiomas simples, C. A. Meredith, quien había logrado presentar un axioma de sólo seis letras para la prototética. En una brevísima reseña crítica, el matemático Steven Orey nos cuenta que este texto recibió comentarios de Paul Bernays y Haskell B. Curry, quienes concluyeron que “esta notación no posee ninguna ventaja sobre la notación clásica para las investigaciones de este tipo” (Orey, 1957, p. 214). Desafortunadamente, la reseña no incluye las razones que los llevaron a considerar esto.

Por último, quisiera mencionar el artículo “Un sistema de lógica modal” (“A system of modal logic”) (Łukasiewicz, 1953b). Publicado en 1953, este fue uno de los últimos artículos publicados en vida por Łukasiewicz. En él, el filósofo polaco mezcla varios de los temas de investigación que desarrolló a lo largo de su vida: la lógica aristotélica, la prototética, las matrices multivaluadas y la búsqueda de axiomas para sus sistemas. Para nosotros resulta interesante este texto porque agregó nuevas extensiones a la notación polaca. Entre ellos me parece sumamente interesante que introduzca el carácter “⊣” como un opuesto a la aserción representada por “⊢” desde el sistema de Russell-Whitehead. Łukasiewicz lo interpretará como “el signo de rechazo”.[18] Este carácter no fue incluido en el Capítulo 4 de esta tesis por su aparición tardía, pero podría considerarse parte propia de la notación polaca.

Como mencionaba antes, esta solo es una pequeña muestra de la investigación de Łukasiewicz. Al final de su antología, Borkowski enlista 92 publicaciones, de las cuales 79 fueron escritas antes de 1939. Nosotros nos hemos centrado aquí en destacar aquellas en las que la axiomatización fue el problema central, pues la hipótesis con la que trabajaremos en el capítulo final es que a través de este problema podemos entender las características específicas de la notación polaca. Pero debido a esta selección metodológica, hemos dejado a lado su investigación sobre lógicas multivaluadas y lógica aristotélica, la cual no es trivial ni intrascendente. Una de mis esperanzas en este trabajo es que esta breve introducción pueda servir para interesarse por los problemas que planteó y resolvió Jan Łukasiewicz.

2.4 A. N. Prior y *Formal Logic*

Como mencionamos anteriormente, después de la Segunda Guerra Mundial la Escuela Polaca de Lógica dejó de existir como tal. Sus principales miembros o se fueron al extranjero o murieron. Algunas de las líneas de investigación del Łukasiewicz fueron continuadas por diferentes alumnos, tanto algunos formados aún en Polonia como Słupecki y otros formados en Irlanda como Meredith. Estos alumnos, sin embargo, abandonaron la notación polaca por alguna de las otras alternativas. La notación polaca se salvó de desaparecer de las revistas de lógica sólo gracias a uno de los más improbables alumnos de Łukasiewicz: A. N. Prior.

Arthur Norman Prior (1914 - 1969) fue un filósofo neozelandés más conocido por haber inventado un sistema formal de lógica temporal. Prior conoció el trabajo de la Escuela Polaca de Lógica a través de Jozef Bocheński cerca de 1950, coincidiendo con un punto de quiebre en su vida académica que lo llevaba a interesarse por el estudio formal de la lógica (Kenny, 1970). Para 1952, Prior escribiría el artículo “La lógica simbólica de Łukasiewicz” (“Łukasiewicz’s symbolic logic”), en donde presentaría la notación polaca, incluido su sistema para escribir pruebas, a sus colegas cercanos a través del *Australasian Journal of Philosophy*. En el mismo año publicaría varias reseñas críticas de las obras de Łukasiewicz en esta misma revista e iniciaría correspondencia con él.

[18] “ The implication “If it is possible that p, then p” is rejected, in symbols:

1. 2 ⊣ C△PP

‘⊣’ is the sign of rejection)”. (Łukasiewicz, 1953, p. 352-353)

Pero creo que su mayor aportación a la historia de la notación polaca vino con la publicación de su libro de texto *Formal Logic* en 1953. Este es el único libro de texto, además de los *Elementos* de Łukasiewicz, cuya notación es el sistema polaco. De hecho, fue el primero escrito en inglés, pues los *Elementos* fueron traducidos 10 años después.

La elección de la notación polaca fue premeditada, pues a lo largo del texto Prior hace referencias que dejan en claro que conocía los textos de Russell y Whitehead, así como Hilbert-Ackerman, que, como se verá en el próximo capítulo, contenían alternativas a la notación polaca. En el prefacio de la primera edición, Prior justifica su elección de la notación polaca diciendo: "Esta me parece incuestionablemente el mejor simbolismo lógico para la mayoría de los propósitos y quisiera haber ayudado a mostrar que este es el caso"[19] (Prior, 1963, p. V).

Parece ser que Prior tenía la intención de mostrar las ventajas de la notación polaca a través del ejemplo, pues en realidad hace muy poco esfuerzo por brindar una justificación explícita. Entre líneas podemos encontrar algunos comentarios en donde nos dice que esta notación facilita las pruebas formales completas, pero nunca ahonda en ello (Prior, 1963, p. V - VI).

Después de escribir este libro, A. N. Prior seguiría escribiendo y publicando textos con esta notación. La usó en su famoso libro *Time and Modality* (Prior, 1957), en donde hace un extenso estudio de sistemas de lógica temporal. Y la usó en su último artículo publicado en vida "Extensionality and Propositional Identity" (Prior, 1969).[20]

La predilección de Prior por la notación de Łukasiewicz es un tanto difícil de explicar. Como mencioné, no encontré una explicación robusta de esto en sus textos. Pero investigadoras como Rybaříková (2016), han señalado que Prior pudo encontrar muchas semejanzas de sus propias convicciones lógicas y metafísicas entre los pensadores de la Escuela Polaca de Lógica. Específicamente, parece haberse identificado con el nominalismo de Leśniewski, así como la valoración de la historia de la lógica y el problema del

[19] "This seems to me unquestionably the best logical symbolism for most purposes, and I should like to have helped to show that it is." La traducción es mía.

[20] Este artículo apareció en *Crítica* del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM. Apareció tan solo dos años después de la fundación de la revista y exactamente tres meses antes de la muerte de Prior. Hasta donde pude investigar, este es el primer y único artículo escrito con la notación polaca que ha aparecido en la revista. Al artículo escrito en inglés lo acompaña un resumen en español, el cual parece ser el primer texto mexicano que usaba la notación polaca. Desafortunadamente, desconozco el nombre de quien redactó este resumen.

determinismo de Łukasiewicz. A pesar de que, conforme avanzaba en su investigación, Prior se distanciaba de las posiciones de los polacos, su uso de la notación polaca parece ser evidencia del compromiso del neozelandés por continuar con el proyecto empezado en Polonia.

2.5 Conclusiones

El objetivo de este capítulo era conocer el contexto histórico en el que nació y se usó la notación polaca. Para ello, hemos hecho un recorrido que va desde los orígenes de la escuela de Leópolis-Varsovia a finales del siglo XIX hasta los esfuerzos de Prior por difundir esta notación a mediados del siglo XX. De este viaje podemos sacar algunas conclusiones.

A través de este capítulo, he argumentado que la Escuela Polaca de Lógica fue proyecto de investigación que logró consolidarse y generar resultados como la notación polaca gracias a cuatro factores: a) partir de un proyecto con el objetivo expreso de formar un grupo de investigación nacional que impulsó Twardowski, b) constituirse como un proyecto abierto a todas las corrientes filosóficas, c) integrarse a un programa matemático con el que compartían objetivos para formar un proyecto multidisciplinario y d) impulsar a estudiantes y profesores a publicar en conjunto. También en este capítulo hice énfasis en cómo la llegada de la Segunda Guerra Mundial fue la causa de la falta de continuidad de este proyecto.

En cuanto a Jan Łukasiewicz, en este capítulo expuse su destacado papel en la creación de la Escuela Polaca de Lógica. También presenté evidencia de que el problema de la axiomatización de los sistemas formales tuvo un peso tan importante en su investigación como otros por los que se ha hecho famoso, como las lógicas multivaluadas o su estudio sobre la lógica aristotélica. Al mismo tiempo, ubiqué las primeras presentaciones de la notación polaca en el año de 1931, en los trabajos de “Comentarios sobre el axioma de Nicod” y los *Elementos de lógica matemática.* Además, a través de una breve revisión de su trabajo, mostré que esta notación lo acompañó desde ese año hasta las últimas publicaciones antes de su muerte.

Por último, presenté un ejemplo del uso de dicha notación externo a la Escuela Polaca a través de los trabajos de Arthur N. Prior.

A partir de lo aquí expuesto, podemos comparar la historia de la notación polaca con la de las notaciones alternativas que estudiaremos en el próximo capítulo. También ahora contamos con las bases para hacer el análisis crítico del capítulo 5, en donde revisaremos si la notación es capaz de cumplir con las expectativas de sus defensores. Sin embargo, más allá de los objetivos particulares que esta exposición cumple en esta tesis, espero que esta lleve al lector a considerar a Łukasiewicz, su Escuela y su Notación como parte clave en el desarrollo histórico de la lógica en general.

3 | Historia de las notaciones para la lógica proposicional

En el capítulo anterior, nos hemos centrado en entender cómo la notación polaca surgió en el contexto del trabajo de investigación de Łukasiewicz, de la Escuela Polaca de Lógica y de la Escuela de Leópolis-Varsovia en general. Esto ya nos dió un panorama de las intenciones que había detrás de este sistema de notación.

Pero ahora es necesario cambiar de perspectiva y buscar el lugar de la notación polaca frente al desarrollo de otros sistemas de notación para la lógica proposicional, especialmente aquellos de los que surgieron las notaciones modernas. Específicamente, en este capítulo busco indagar en los objetivos y características de los sistemas que antecedieron y compitieron contra la notación polaca para averiguar qué influencia tuvieron sobre Łukasiewicz al momento de diseñar la suya.

Estoy convencido que sobre este tema se podría escribir varios artículos que tengan por objetivo reconstruir cada uno de los aspectos que influyeron en el diseño y uso de estas notaciones. Sin embargo, dado el objetivo de este capítulo, me centraré en responder las siguientes tres preguntas respecto a cada una de las notaciones: 1) ¿Cuáles eran sus características esenciales? 2) ¿Cuál era la finalidad de la notación? y 3) ¿Qué influencia pudo tener sobre la notación polaca?

3.1 Boole y el surgimiento del álgebra de la lógica

Para Łukasiewicz, Boole marca el punto de partida de la lógica matemática. Según el polaco, antes de ella, solo habíamos estudiado la lógica desde un enfoque filosófico que, aunque valioso, carecía de la precisión y el rigor necesarios para hacer avances significativos en la materia (Łukasiewicz, 1937 y 1963). Novaes (2012) también pone al trabajo de Boole como el parteaguas a partir del cual podemos hablar de lenguajes formales de la lógica.[21]

Siguiendo a estos filósofos, este trabajo empezará el recuento histórico con la aparición de la álgebra de la lógica en 1847. Este fue el año en el que Boole publica el libro titulado *Análisis matemático de la lógica (The mathematical analysis of logic).* Junto a *Leyes del pensamiento (Laws of Thought)*, publicado en 1854, en estos dos libros Boole nos presenta una notación formal que nos permite estudiar y operar sobre la lógica proposicional. Para esta exposición, me centraré en la exposición que encontramos en el primer libro.

Antes de la descripción de los caracteres básicos, es importante hacer dos aclaraciones sobre el propósito de Boole. La primera es que su trabajo consistió en modelar la forma lógica de los argumentos a través del álgebra. Boole nos mostró cómo traducir la forma lógica de los enunciados a ecuaciones algebraicas, trabajar sobre estas ecuaciones usando las reglas del álgebra básica, y finalmente interpretar las ecuaciones resultantes como la forma lógica de la conclusión. A diferencia de los lógicos que revisaremos en los siguientes apartados, Boole no creó un esquema de notación, sino que tomó uno ya existente y, a través de las pautas de interpretación, lo convirtió en un sistema de notación diferente del original.

George Boole tuvo que hacer algunos cambios al álgebra básica tradicional para lograr su cometido. El más destacado fue respecto a los valores que pueden tener las variables. En el álgebra básica, es común suponer que las operaciones se realizan sobre el conjunto de los números reales e imaginarios. Sin embargo, en el sistema de Boole, los únicos dos valores son el 0 y el 1. Esto hace verdaderas algunas ecuaciones que no lo son en el álgebra básica, como lo es la ecuación $x=x^2$.

La segunda aclaración es que el principal interés de Boole no era modelar la lógica proposicional, sino una lógica de clases. Por ello, si uno lee los libros de este filósofo irlandés, encontrará que expresiones como $xy = x$, se interpretan como "Todos los X son Y". (Boole, 1847, p. 21). La lógica proposicional es tratada de manera secundaria, siguiendo el orden de relevancia que se había heredado desde Aristóteles. A pesar de esto, la interpretación

[21] Cabe destacar que, a diferencia del trabajo citado, esta investigadora inicia su recuento histórico de los lenguajes formales con los avances realizados en la Grecia clásica y otras culturas asiáticas. Como el lector irá descubriendo, nuestro recuento histórico se separa del realizado por la Novaes por realizar una breve descripción de los caracteres básicos e hilar los avances históricos hacia el desarrollo de la notación polaca.

proposicional será la que Boole va a heredar a Schröder y de ahí a Łukasiewicz. Por ello, a pesar de ser secundaria, en este apartado me voy a centrar exclusivamente en dicha interpretación.

3.1.1 Presentación

El álgebra de Boole ofrecía cierta interpretación a variables y constantes del álgebra común. En primer lugar, teníamos a las variables (x, y, z) que, a diferencia de las notaciones modernas, no funcionaban como variables proposicionales sino que Boole los consideraba como "elective symbols" (Boole, 1847, p. 49). Siguiendo la lectura que hace Stanley Burris (2018), Boole acuña este término para indicarnos que sus variables tienen como dominio a cierta clase particular.

Esta segunda aclaración es importante porque nos ayuda a entender la noción de los símbolos electivos (*elective symbols*). Boole acuña este término para referirse a las variables (x,y,z...) y poner énfasis en la nueva interpretación que está haciendo del lenguaje algebraico. A diferencia de las notaciones modernas, los símbolos electivos no funcionaban como variables proposicionales (variables cuyo valor puede ser verdadero o falso), sino como una función que dada un conjunto C y una clase X, el símbolo *x* "elegía" a todos los elementos del conjunto C pertenecientes a esa clase. (Burris, 2018) (Boole, 1847, p. 15)[22] Por ejemplo, si Y fuera la clase "Ser humano", entonces usamos el símbolo electivo *y* para representar al conjunto de los seres humanos.

Entonces, ¿cómo hizo Boole para conectar esta interpretación basada en clases con la lógica proposicional? Optó por representar a las proposiciones con las letras mayúsculas, por ejemplo X, e indicarnos que su respectivo símbolo electivo x opera sobre el conjunto de casos en los que X es verdadero. (Boole, 1847, p. 49)[23]. En otras palabras, la variable x "selecciona"

[22] En palabras de Boole: "The symbol x operating upon any subject comprehending individuals or classes, shall be supposed to select from that subject all the Xs which it contains."

Quizá pueda resultar extraño para algunos (al menos lo fue para mí), que Boole hubiese creado los símbolos electivos en lugar de operar sobre las clases mismas. De hecho, un giro similar se dará en *Laws of Thought*, cuando estas clases pasen a ser consideradas aquellos grupos de elementos particulares formados por nuestra mente. Véase (Boole, 1958, pos. 536) Creo que la decisión de Boole de crear símbolos electivos se puede explicar considerando que durante su primer libro, no es aún claro que Boole considerará a estas clases como el conjunto, sino como una "noción general" que nos permitía distinguir al conjunto. (Boole, 1947, p. 4-5).

[23] Es importante mencionar que para su segundo libro, Boole cambia el concepto de "casos" por el de "periodo de tiempo". Véase (Boole, 1958) Proposición 10.3

a todos los casos en los que la proposición X es verdadera, la variable y selecciona los casos de Y, z los casos en que Z es verdadera y así con cada una de las variables.

Las constantes 1 y 0 también tienen interpretaciones similares. Al 1 le llama el Universal hipotético y representa a todos los casos y circunstancias concebibles. En contraposición, el 0 representaría la ausencia de todo caso, lo que ahora llamaríamos el conjunto vacío. Con estos caracteres y sus respectivas interpretaciones, ya es posible representar varias relaciones lógicas del lenguaje natural.

Para expresar la verdad o la falsedad de una proposición, podemos usar el igual (=). Por ejemplo, para decir que la proposición X es verdadera, escribiríamos:

$$x = 1$$

Esto indica que el conjunto de casos en los que X es verdadera es igual a todos los casos del Universo. Es decir, X es verdadera en todo caso. Para indicar que es falsa, tenemos que escribir:

$$x = 0$$

Esto indica que el conjunto de casos en los que X es verdadera es igual al vacío. Es decir, no hay caso en el que X sea verdadera.

Para traducir la negación de una proposición al lenguaje algebraico, Boole usó la resta (-). Para decir que la negación de X es verdadera, escribiríamos:

$$1 - x = 1$$

Es importante notar que el carácter "-" no es tal cual una negación, ni ninguna de las relaciones lógicas más conocidas, en el sentido que lo hace el carácter "¬" en la notación estándar. Al igual que el resto de operaciones, la resta actúa sobre los conjuntos definidos por los símbolos electivos. De esta manera, Boole nos podrá decir cosas como: "El símbolo 1 - x selecciona aquellos casos en los que la proposición X es falsa". (Boole, 1847, p. 51) Así pues, la ecuación podría interpretarse como "En todos los casos, la proposición X es falsa".

Para la conjunción de X y Y, Boole propone usar la multiplicación. La ecuación que indicaría una conjunción es:

$$xy = 1$$

pues la única solución a esa ecuación es cuando $x = 1$ y $y = 1$. De aquí podemos deducir fácilmente la ecuación que exprese negación de la conjunción (NAND), quedando como:

$$1 - xy = 1 \text{ ó } xy = 0.$$

En la disyunción podemos encontrar el mejor ejemplo sobre cómo la notación de Boole relaciona las ecuaciones completas con las conectivas lógicas y no cierto carácter simple con la conectiva. Según Boole, la ecuación que expresa la disyunción (no exclusiva de) de X y Y es:

$$x + y - xy = 1.$$ [24]

Es importante decir que las disyunciones serían un punto de discusión entre los contemporáneos de Boole. Burris nos cuenta que el matemático consideraba que la expresión x+y solo era interpretable si asumimos que X y Y eran clases separadas. En la interpretación proposicional, por lo tanto, x+y sería interpretable como una disyunción sólo si asumimos que X y Y son mutuamente excluyentes entre sí.[25]

Según Burris (2018), esta interpretación está conectada con el esfuerzo de Boole por evitar que, como Jevons hizo, consideremos que la ecuación x+x = x pudiera tener como solución a 1. Como lo dijimos más arriba, Boole deseaba mantener en la medida de lo posible las reglas de derivación del álgebra para números enteros y esa regla, a pesar de la simplificación que suponía, lo llevaría a tomar un paso más lejos de los límites que había puesto.

Por último, para indicar que el condicional "Si X, entonces Y" es verdadero, tendríamos que indicar que la conjunción entre X y la negación de Y es falsa. Es decir:

$$1- x(1-y) = 1 \text{ ó } x(1-y) = 0$$

¿Cómo quedaría una expresión más compleja? Tomemos el teorema "Si P entonces Q, entonces si no Q entonces no P". En álgebra de Boole, la expresión electiva de P entonces Q, es 1 - (p(1 - q)). Mientras que la expresión electiva de no Q entonces no P es 1 - ((1 - q)(1 - (1 - p))). Por lo tanto, la afirmación del teorema es expresada por la ecuación:

---

[24] Para llegar a ella Boole parte de que la disyunción no exclusiva es equivalente a decir que la conjunción de la negación de X y la negación de Y son falsas. Es decir, (1 - x)(1 - y) = 0. Al multiplicar los términos del lado izquierdo de la ecuación obtendremos 1-x-y+xy=0 que, después de restarle 1 a ambos lados y luego multiplicarlos por -1, es igual a x+y-xy=1. Véase (Boole, 1847, pp. 51-53)

[25] Véase (Burris, 2018) Sección 5.1 Hay que mencionar que Burris usa como evidencia una cita textual de *Laws of Thought.*

Sin embargo, Boole proponía que como expresión electiva de una disyunción exclusiva escribiéramos x+y-2xy. (G. Boole, *The mathematical analysis of logic,* p. 53) Así, si para afirmar una disyunción exclusiva, escribiríamos x+y-2xy=1. De esto, podríamos concluir que su negación (la cual resultaría en un bicondicional) sería x+y-2xy=0.

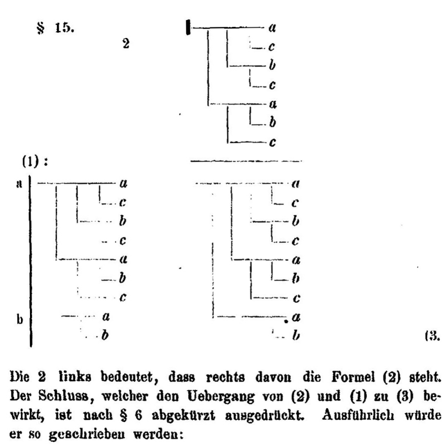
$$[1 - (p(1 - q))][1 - ((1 - q)(1 - (1 - p)))] = 0$$

3.1.2 Boole y Łukasiewicz

No sabemos si Łukasiewicz leyó alguna traducción de los libros de Boole a alguno de los idiomas que dominaba. (Es poco probable que haya leído los textos originales, pues parece que comenzó a aprender inglés hasta 1945. (O'Hanlon, 2019)). Sin embargo, sabemos que conocía bien la notación de Boole antes de inventar la notación polaca. En 1921, escribió un extenso artículo sobre la lógica bivaluada en donde usaba lo que él llamó "[...] el simbolismo de Boole y Schröder, tal como fue simplificado por Couturat.". (Łukasiewicz, 1921, p. 89) Esta anotación nos ayuda a darnos una idea de cuál fue el camino que tomó la notación de Boole hasta llegar a investigadores como Łukasiewicz.

El sistema de Louis Couturat que Łukasiewicz hereda tiene tres diferencias con respecto al original de Boole que son relevantes para nosotros: a) Pone a la interpretación de clases y a la interpretación proposicional como iguales, sin decantarse por una. b) Agrega símbolos propios para la negación (1-p pasa a ser p´) y el condicional (p(1-q)=0 pasa a ser p < q). c) Se zanja la discusión y el carácter "+" pasa a ser interpretado como una disyunción exclusiva. (Couturat, 2004). Estos cambios estaban respondiendo a los de la lógica matemática para 1914, año en el que se publica el texto de Couturat.

3.2 La conceptografía de Frege



Facsímil de la *Conceptografía*

Si nos preguntaran "¿Cuál de los sistemas de notación expuestos en este capítulo es el más influyente en la notación polaca?", tendría que responder que es la conceptografía. La conceptografía es el nombre con el que Frege bautizó a su sistema formal de lógica. En su notación podemos encontrar un esfuerzo explícito por buscar simplicidad, brevedad y rigor, características que Łukasiewicz destaca una y otra vez en su propia notación.

Creo que las más claras exposiciones de la notación fregeana, sus motivos y características esenciales las podemos encontrar en la *Conceptografía* (*Begriffsschrift*) y en un muy interesante texto titulado "El lenguaje de fórmulas lógico de Boole y mi conceptografía" ("Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift"). El primero fue publicado en 1879 y, a juicio de Margarita Valdés (2016), contiene la primera presentación de un sistema formal suficientemente sofisticado para poder expresar desde fórmulas de la lógica proposicional hasta fórmulas de la lógica de segundo orden. A este libro lo consideraremos la primera aparición de la conceptografía como sistema de notación.

El segundo es un texto escrito en 1882, pero que fue rechazado para imprenta y fue publicado únicamente después de la muerte de Frege, hasta 1969. Xavier de Donato nos cuenta que este artículo buscaba contestar a una crítica hecha por Schröder en una reseña de la Conceptografía, en donde se le criticaba a Frege haber introducido una notación nueva en lugar de usar la notación de Boole. (Frege, 2016) Esta respuesta me parece de gran valor para nuestros objetivos, pues a pesar de no ser la fuente a través de la cual conocieron los contemporáneos de Frege a la conceptografía, es un texto que revela mucho sobre sus intereses. En este texto Frege compara la conceptografía con la notación de Boole en propósitos y cualidades, de una manera muy similar a como nosotros analizaremos la notación polaca en el capítulo 4.

3.2.1 Presentación

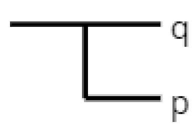
Frege consideraba que la conceptografía necesitaba solo cuatro signos (a los que nosotros llamaremos caracteres simples).

> "1. la barra horizontal de contenido,
>
> 2. la barra de negación,
>
> 3. la barra vertical que conecta dos barras de contenido (o "barra de condición"), y
>
> 4. la barra vertical de juicio" (Frege, 1879)

La barra horizontal de contenido nos presenta lo que Frege llamaba “contenido enjuiciable”. Es representado con una línea horizontal a la cual le sigue algún símbolo que represente a dicho contenido. Por ejemplo:

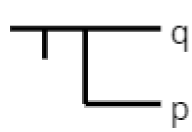
Un contenido puede ser negado si nosotros agregamos una pequeña línea vertical que se conecte de manera perpendicular con su barra de contenido. Por ejemplo:

Dos barras de contenido se pueden conectar a través de una línea vertical que corta la barra superior y se conecta al extremo izquierdo de la barra inferior.

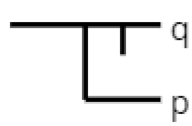


A esta se le llama barra de condición, pues indica que el contenido inferior (p) es condición material del contenido superior (q). Es decir, se niega que p sea el caso y q no. (p → q en la notación de Hilbert Ackermann).

La barra de condición divide a la barra de contenido superior en dos partes. La sección izquierda se convierte en la barra de contenido del condicional, mientras que la sección derecha se mantiene como la barra de contenido del consecuente. Entonces, un condicional negado ¬(p → q) sería representado como:

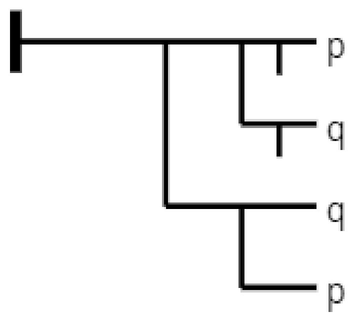


Mientras que un condicional con el consecuente negado (p → ¬q) se representaría:



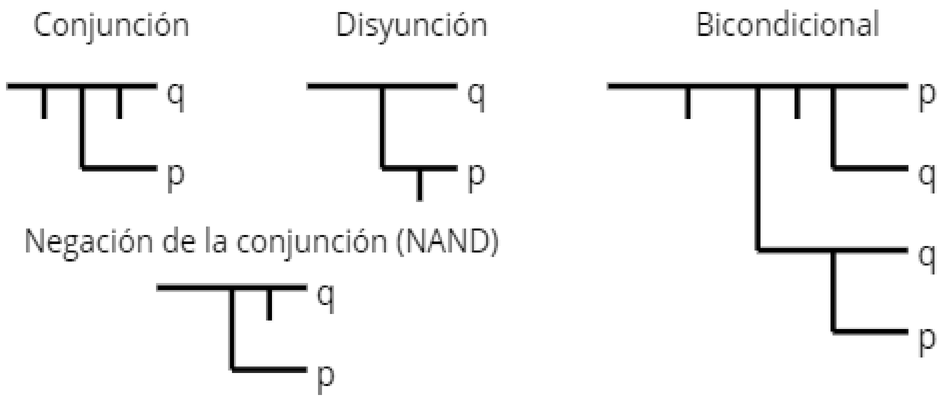
Por último, la barra de juicio era una línea vertical más gruesa que se colocaba en el extremo izquierdo de la barra de contenido. Por ejemplo:

Con esta barra de juicio, Frege hacía una distinción entre representar conexiones lógicas entre contenidos enjuiciables a través de la conceptografía y afirmar que son verdaderas. Esta es una característica única que distingue a esta notación de las de Boole y Peano, pero que Russel y Whitehead recuperaron después.[26] Entonces, el diagrama que afirma la verdad de "Si p entonces q, entonces si no q entonces no p" ($(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$) luciría de la siguiente manera:



Otra diferencia con el resto de notaciones es que la conceptografía no tiene caracteres básicos especiales para la conjunción, la disyunción, el bicondicional o la negación de la conjunción. Frege los construye a partir de las barras de contenido, de negación y de condición.

[26] Sin embargo, en la notación de Boole también es diferente escribir ab y ab = 1. La primera es una representación de una conjunción. Mientras que la segunda es la afirmación de que dicha conjunción es verdadera. Un interesante tema de investigación sería verificar si esta hipótesis es correcta o Boole y Frege estaban pensando en cosas diferentes.



Una vez que conocemos las bases de la conceptografía, la segunda pregunta es: ¿cuál era su objetivo? ¿Qué es lo que Frege quería lograr con la introducción de este sistema de notación? Para responder a esto, vale la pena traer a colación dos fragmentos en donde él nos lo explica:

> Por lo pronto, ésta debe servir para probar de la manera más segura la precisión de una cadena de inferencias y para indicar toda presuposición que quisiera colarse inadvertidamente y poder investigarla en su origen. Por ello, se evita expresar cualquier cosa que carezca de significado para la *inferencia lógica [Schlussfolge]*[27] (Frege, 1879, p. 42)

> Yo deseaba completar el lenguaje de fórmulas de las matemáticas con signos para las relaciones lógicas de modo tal que de ello resultase una conceptografía que hiciese innecesaria la inclusión de palabras en el curso de una prueba y, gracias a ellos, combinase el mayor grado de precisión con la mayor brevedad posible. (Frege, 2016, p. 11)

Ambos fragmentos de textos diferentes expresan la misma idea: la conceptografía busca servir como un reemplazo más apropiado para las palabras que expresan relaciones lógicas en una demostración matemática.

Es importante recalcar esto (y como pueden ver, Frege lo hizo en más de una ocasión) pues veremos que esa es la principal ventaja de la conceptografía sobre notaciones como la de Boole, así como la razón detrás de optar por un diseño que no consiste en cadenas de caracteres. Para Frege, era necesario que en la notación pudiera combinarse con aserciones

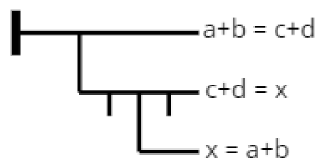
[27] G. Frege, "Prólogo" en *Conceptografía,* p. 42

matemáticas que brindaran contenido a la prueba sin perder legibilidad, simplicidad y precisión[28].

Veamos esto con un ejemplo. Supongamos que queremos escribir un teorema de aritmética básica con la notación de Boole, la única opción disponible para la época en la que Frege desarrolló su notación. Supongamos que queremos formalizar las relaciones lógicas dentro de la afirmación "Si x = a+b y c+d = x, entonces a+b = c+d." En la notación de Boole tendríamos que escribir:

$$((x = a+b)(c+d = x))(\ 1-(a+b = c+d)\ ) = 0$$ [29]

Como el lector puede notar, la notación hace confuso distinguir entre las operaciones aritméticas y las conectivas lógicas. Compárese con el diagrama que dibujaría Frege:



Con este diagrama seguimos expresando las relaciones lógicas (algo que Frege reconocía que ya podía hacer Boole), sin que se confundan con el contenido expresado a través de las diferentes afirmaciones matemáticas. Suponiendo que fuésemos competentes en la lectura de los diagramas de Frege, esta manera de escribir matemáticas supondría una ventaja en precisión respecto al lenguaje natural.

Obviamente, este ejemplo es injusto para la notación de Boole. El objetivo del irlandés no era en absoluto mezclar afirmaciones aritméticas con su sistema de notación, porque evidentemente llevaría a equívocos. El mismo Frege lo reconoce y es por eso que inicia su texto en el que compara su conceptografía con los avances de Boole recordándonos la

[28] Véanse las siguientes declaraciones de Frege: "Todo lo contrario [a la aritmética en donde hay expresiones para el contenido pero no para las relaciones lógicas] pasa con el modo de simbolización que proviene de Leibniz para las relaciones lógicas, que *Boole, R. Grassman, Stanley Jevons, E. Schröder* y otros han renovado recientemente. Sin duda se tienen aquí las formas lógicas, si bien no cabalmente completas; pero falta el contenido. Cada intento de poner aquí expresiones de contenido -digamos ecuaciones analíticas- en lugar de las simples letras, indicará, por la oscuridad, lo pesado y aun lo multívoco de las formas correspondientes, cuán poco apropiado es este modo de simbolización para la construcción de una conceptografía. [...]" (Frege, 1882, p. 160)

[29] En la notación de Boole, la proposición "Si X y Y, entonces Z" tendría la forma (X*Y)(1-Z)=0. Intercambiando X por $x = a+b$, Y por $c+d = x$ y Z por $a+b = c+d$, obtenemos la fórmula escrita arriba.

finalidad de ambas con el texto ya citado. Pero, a pesar de que Frege reconocía esto, es claro que consideraba que la capacidad de resaltar las relaciones lógicas en los textos matemáticos era una necesidad que deben satisfacer las notaciones lógicas; y, por lo tanto, una ventaja de su conceptografía frente a notaciones basadas en cadenas de caracteres. Por ejemplo, cuando compara a la notación de Peano frente a la de Boole y a la suya misma.

> Ahora investigaré más de cerca la naturaleza esencial de la conceptografía de Peano. Es presentada como una descendiente del cálculo lógico de Boole pero, puede decirse, como una diferente de las otras. [...] Pero la idea fundamental se ha modificado por completo. La lógica de Boole es lógica y nada más. Esta lidia únicamente a la forma lógica, para nada con introducir un contenido en esta forma, mientras que esta es exactamente la intención del señor Peano. En este sentido, su empresa se parece más a mi conceptografía que a la lógica de Boole.[30] (Frege & Dudman, 1969, p. 11)

En ese mismo texto rescataría la disposición de los caracteres de la conceptografía frente a las notaciones lineales una vez más. Para Frege, una conceptografía no buscaba distinguir las relaciones lógicas separándolas del contenido del razonamiento y representándolas por separado. Tenía que hacerlas visibles en la prueba misma.

3.2.2 Influencia de Frege sobre Łukasiewicz

En cuanto a la influencia de la conceptografía en la notación polaca, debemos reconocer que, a pesar de que no se heredan los caracteres ni la disposición bidimensional del espacio, sí encontramos una herencia de los criterios que justifican algunas características. Específicamente la precisión y simplicidad.

Existe evidencia de que Łukasiewicz había leído a Frege muchos años antes de desarrollar la notación polaca. Podemos encontrar que lo cita, junto a Peano y Russell, en un texto sobre probabilidad escrito en 1913 mientras estaba en Graz estudiando con Alexius Meinong. (Łukasiewicz, 1913) El nombre de Frege vuelve a aparecer en los *Elementos* de Łukasiewicz,

[30] “I shall now enquire more closely into the essential nature of the Peano Begriffsschrift. It is presented as a descendent of Boole’s logical calculus but, it may be said, as one different from the others. [...] But the fundamental idea has been altered entirely. Boole’s logic is logic and nothing more. It deals solely with logical form, and not at all with injecting of a content into this form -while this is exactly the intention of Herr Peano. In this regard his enterprise more closely resembles my Begriffsschrift than it does Boole's logic”. Mi traducción.

mientras hace una revisión histórica de las tendencias que dieron origen a la lógica como rama de estudio independiente:

> El valor incalculable de las investigaciones lógicas de Frege consiste en su excepcional precisión; su autor desarrolló un método verdaderamente científico de establecer las fundaciones de las matemáticas, y en ese aspecto la tendencia iniciada por Frege ha brindado un mayor servicio que la tendencia representada por la lógica algebraica [refiriéndose a Boole].[31] (Łukasiewicz, 1963, p. 6)

¿En qué consiste esa precisión que Łukasiewicz alaba? A lo largo del Prólogo de *Conceptografía,* en fragmentos como el citado más arriba,[32] Frege nos invita a pensar en la precisión como una cualidad que poseen las pruebas formales cuando logran expresar adecuadamente las complicadas relaciones entre proposiciones sin llevarnos a equívocos. La precisión que ofrece la conceptografía son símbolos con significados unívocos y sencillos que pueden combinarse hasta conseguir complejas pruebas en las que cada paso descansa en un regla de inferencia previamente justificada. Łukasiewicz encontró en Frege un tratamiento axiomático mejorado con un lenguaje formal y lo rescata en la misma obra en donde va a presentar su propia notación.

Esta precisión descansa sobre otro criterio que, como veremos más adelante, también terminó heredando Łukasiewicz: la simplicidad. También en el Prólogo, Frege justifica haber elegido el condicional como conectiva y el modus ponens como inferencia en dicho criterio:

> La restricción, en §6, a un solo modo de inferencia se justifica en virtud de que en la fundamentación de una conceptografía de este tipo, los componentes primitivos se tienen que tomar tan simples como sea posible si se quiere lograr orden y claridad. (Frege, 1879, p. 45)

Compárese esas palabras con las de Łukasiewicz en 1916:

> Nosotros debemos formular la siguiente regla metodológica, la cual se refiere a los principios y a los conceptos primitivos: los principios y los conceptos primitivos de una teoría deductiva dada deberían ser seleccionados de tal manera que se reduzca su número tanto como sea posible. Al adoptar esta regla estamos siendo guiados por dos consideraciones: Primero, nosotros queremos tener la menor cantidad de proposiciones sin prueba y conceptos sin definición que sea posible, porque tratamos a ambos como un *malum necessarium*. En segundo lugar, entre menos conceptos primitivos y principios necesitemos para presentar una teoría deductiva,

[31] Los corchetes son mios. "The priceless value of Frege's logical researches consists in their exceptional precision; their author worked out a truly scientific method of laying the foundations of mathematics, and in that respect the trend in logic initiated by Frege has much greater services to its credit than the trend represented by the algebra of logic."

[32] Vease p. 56

más fundamentales son los conceptos y principios que hemos elegido y más simple es la teoría.[33] (Łukasiewicz, 1916)

Debo reconocer que estas citas no son suficientes para establecer una relación de herencia directa entre Frege y Łukasiewicz. La simplicidad como criterio metodológico no es una postura que podamos atribuir exclusivamente a Frege. Pero con esto podemos al menos reconocer que había una afinidad entre los pensamientos de ambos filósofos.

Sin embargo, para mí, esta afinidad se convierte en herencia cuando nos damos cuenta que en la notación polaca, los términos primitivos (y sobre los versan las reglas de inferencia) son C y N, los cuales corresponden a la barra de condición y a la barra de negación del sistema de Frege. Al igual que haría Frege, Łukasiewicz introduce el resto de conectivas a través de definiciones. (Łukasiewicz, 1963)

Łukasiewicz no da una justificación sobre por qué elegir precisamente al condicional y la negación como términos primitivos. Frege si la da, aunque muy brevemente en la Conceptografía, aduciendo que, frente a usar la conjunción y la negación, la primera opción expresa de manera más sencilla la inferencia. (Frege, 1879, p 63) En su texto sobre la notación de Boole también recurrirá a la simplicidad, dando un argumento que reposa sobre la siguiente consideración:

> Yo he seguido un camino bien distinto [refiriéndose al uso de símbolos propios para cada conectiva], de acuerdo con el cual cada signo primitivo recibe un significado tan simple como sea posible. Cuando de dos expresiones una dice todo lo que la otra significa, mientras que esta no contiene todo el significado de aquélla, digo que el significado de la segunda es más simple que el de la primera, ya que cuenta con menos contenido. (Frege, 2016, pp. 13-14)

Lo cierto es que su defensa del condicional como conectiva más simple es bastante discutible.[34] Sin embargo, lo que quisiera rescatar es que ya podemos encontrar en Frege un antecedente de la preocupación por la simplicidad que, como veremos, Łukasiewicz trató a lo largo de sus investigaciones lógicas.

---

[33] La traducción es mía. Para más información sobre el contexto de estas palabras, véase la sección "Jan Łukasiewicz" en esta tesis.

[34] Según Frege, el condicional es más simple que el resto de conectivas diádicas porque de las cuatro combinaciones de valores de verdad de sus variables, solo se niega uno (antecedente verdadero y consecuente falso), a diferencia del resto en el que se niegan dos casos. (Recordemos que la disyunción de Boole era la exclusiva). Sin embargo, frente a este argumento, podríamos preguntar por qué consideró el número de negaciones y no el número de afirmaciones para calificar la simplicidad.

3.3 La notación de Peano

Signos de forma speciale.

$=$ « æqua ». 3* ...

$\supset$ « tunc ». 3* 4* ...

. : .·. () [] 3* ...

, ; 5* 6*

⁝ 79* 136 143

’ ‘ 77* 135 139

$\cap$ « et » 3* 4* ...

$\cup$ « aut » 10* 33 36-39 42 51 57 136 140 142 ...

$-$ « non » 10* 27 31 37-43 140 ...

Λ « nihil » 12* 46 116 135 143

Primeros diez caracteres de la “Tabla de símbolos” del *Formulario Mathematico.*

Si el lector compara la notación de Boole o de Frege con las notaciones que podemos encontrar en los libros de texto recomendados para los cursos de lógica proposicional (como el clásico *lógica Simbólica* de I. Copi), con dificultad encontrará similitud entre ellas. Las fórmulas rara vez aparecen como ecuaciones o como diagramas en las clases introductorias de lógica formal. ¿Qué fue lo que pasó?

La respuesta corta es que estos sistemas de notación fueron reemplazados por variantes de la notación de Giuseppe Peano. Por ello, creo que es valioso presentar la notación que sirvió como base de sistemas contemporáneos de notación.

Para la siguiente exposición me basaré en la notación tal y como aparece en dos publicaciones de Peano. La primera es un texto titulado “Los principios de la aritmética, presentados según un método nuevo” (“Arithmetices principia nova methodo exposita”).

Este texto es importante por dos razones. En primer lugar, es aquí en donde Giuseppe Peano presentó su axiomatización de los números naturales. En segundo lugar, esta es la primera aparición de la notación de Peano en una publicación de la que tengo conocimiento. Este texto fue publicado en 1889, 10 años después de la *Conceptografía*, pero 14 años antes de *Las leyes Fundamentales de la Aritmética* (1903), por lo que podemos considerar ambas notaciones como coetáneas.[35]

[35] Según la bibliografía que aparece en (Valdés, 2016, p. 581)

La segunda obra es el *Formulario Matemático*, el proyecto más ambicioso en el que Peano se embarcó.[36] El *Formulario* consta de una enorme colección de los conceptos y teoremas más importantes en el área de la lógica matemática, la aritmética, el álgebra, la geometría, el cálculo diferencial y el cálculo integral. Publicar la 5° edición de esta obra le tomó 20 años redactando, organizando a colegas expertos para que escribieran aportaciones e incluso fundando una imprenta especial que pudiera publicar el libro con los caracteres especiales que él proponía. (Roero, 2011)

Por último, debemos mencionar que, aunque en este capítulo estoy usando el término "la notación de Peano" para hablar del conjunto de caracteres que usó para formalizar la lógica proposicional, lo cierto es que el proyecto de Peano era mucho más ambicioso. Él buscaba establecer símbolos consistentes para las diferentes áreas de las matemáticas. En "Los principios de la aritmética", Peano presenta 15 "signos de la lógica", pero 29 contando los de aritmética (sin contar los símbolos para operaciones)[37]. (Peano, 1889) En comparación, el *Formulario* contiene 13 caracteres propiamente lógicos, pero la cantidad se eleva a 170 si contamos los de las otras áreas.[38] La notación lógica de Peano es solo un fragmento de un proyecto más grande de formalización de las matemáticas.

3.3.1 Presentación

Peano nos presenta cinco caracteres especiales para la lógica proposicional con una estructura infija (con el operador ubicado entre los argumentos)[39]. El primero de ellos es el carácter ⊃ y lo usa para representar la implicación. De esta manera, para escribir que de p se deduce q, escribimos:

$$\mathbf{p \supset q}$$

Resulta interesante ver que, antes de que apareciera el carácter ⊃, Peano formalizaba la implicación con una C invertida: Ɔ. (Peano, 1889, p. 105) Peano justificó su elección explicándonos que q es consecuencia de p se podría representar como **q C p**. Dicho de esta manera, **p Ɔ q** resulta una solución intuitiva para representar la relación inversa. La rotación

[36] Específicamente, presentaremos los caracteres que aparecen en la 5° (y última) edición del *Formulario*, la cual fue publicada en 1908. Esta versión es considerada como la versión más completa, incluso por el mismo Peano. Véase (Roero, 2011, p. 83)

[37] En los caracteres lógicos se incluyen aquellos de la lógica de clases.

[38] Cfr. (Peano, 1908, pp. XVII-XIX y p. 461)

[39] En contraste con un orden prefijo, en donde el operador está antes de sus argumentos.

de caracteres más conocidos (tanto letras latinas como griegas) fue una propuesta recurrente de Peano para introducir nuevos caracteres. Podemos suponer que eso facilitaba el trabajo de impresión.

Peano también usa el signo de igualdad = dentro de sus fórmulas. De hecho, en el *Formulario* es el primer carácter en ser introducido en toda la obra e incluso cuenta con una pequeña nota histórica en el que se nos indica que este signo se ha registrado desde 1557 y se popularizó gracias a Newton. Sin embargo, cabe mencionar que Peano no parece distinguir entre su uso para introducir definiciones y usarlo como un bicondicional. Interpretándolo como bicondicional, entonces formalizaremos p si y solo q como **p = q**.

El carácter de la negación es un guión ─. Es el único carácter monádico, por lo que el operador se escribe a la izquierda de su argumento. Por lo tanto, la negación de p, se escribe **─ p**. Resulta interesante ver que en la notación de Peano, las fórmulas **p ─⊃ q** y **p ─ = q** son fórmulas válidas y equivalentes a la negación de un condicional y de una igualdad respectivamente. (Peano, 1889, p. 106)

Para la disyunción, Peano introduce el carácter ∪. Por lo tanto, p o q es formalizado **p ∪ q.**

Para crear el carácter de la conjunción, Peano invierte el de la disyunción ∩. Así, la conjunción de p y q es formalizada como **p ∩ q**. Sin embargo, aduciendo una mayor brevedad, Peano también propone que la conjunción de dos proposiciones sea representada colocando a ambas proposiciones juntas, sin ningún carácter especial en medio: **pq**. (Peano, 1889, p. 104)

En "Los principios de la aritmética", Peano introdujo un carácter especial para representar "falso o absurdo". El carácter es una V invertida: **Λ**. Con un razonamiento similar al condicional, el italiano nos indica que V sería el carácter más adecuado para representar "verdadero". Por lo tanto, **Λ** representaría lo contrario. Sin embargo, en el *Formulario* ya no aparece esta interpretación proposicional y pasa a representar al conjunto vacío ("clase nullo").

Para finalizar esta exposición de la notación, debemos hablar de la propuesta más famosa entre los diferentes caracteres de Peano: los puntos como signos de agrupación. En el *Formulario,* el italiano nos cuenta que el uso de puntos lo retoma de Leibniz. (Peano, 1908, p.

4) Junto a los paréntesis, Peano usó un sistema de puntos (. : ∴ ∷) para dividir las diferentes partes de una fórmula y así evitar ambigüedades. La regla es la siguiente:

> Para que una fórmula dividida por puntos se pueda entender, primero se toman juntos los signos que no están separados por puntos, después aquellos separados por un puntos, después aquellos separados por dos puntos, etc. (Peano, 1889, p. 104)

De esta manera, por ejemplo, si nos dan la siguiente fórmula

$$p \supset q. \supset r$$

debemos tomar primero a p ⊃ q como una partícula (pues no hay ningún punto en medio). Después, eso lo tomaríamos como el antecedente del segundo condicional. Con paréntesis, la fórmula se escribiría (p ⊃ q) ⊃ r. Comparemos con

$$p \supset . q \supset r$$

Ahora deberíamos tomar primero a q ⊃ r. Usando paréntesis la misma fórmula quedaría como p ⊃ (q ⊃ r).

Otro ejemplo sería el de "Si p entonces q, entonces si no q entonces no p". Escrito con la notación de Peano, quedaría p ⊃ q . ⊃ . ‒ q ⊃ ‒ p. (Compárese con los caracteres más complicados que la notación de Boole y de Frege proponían para esta misma fórmula).

Por último, un ejemplo más complejo sería la formalización de "De la conjunción entre el q y condicional de p y q no se sigue la disyunción de p y r". Esta afirmación se podría formalizar de diferentes maneras:

‒ ((q ∩ (p ⊃ q)) ⊃ (p ∪ r))

‒ ((q (p ⊃ q)) ⊃ (p ∪ r)) (Quitando el carácter ∩ en la conjunción)

‒ ∴ q ∩ . p ⊃ q : ⊃ : p ∪ r (Usando los puntos para agrupar)

‒ ∴ q . p ⊃ q : ⊃ : p ∪ r (Usando puntos y quitando ∩)

q . p ⊃ q : ‒⊃ : p ∪ r (Negando el condicional directamente)

Todas estas son variantes permitidas dentro del sistemas de notación de Peano. Creo incluso que, a pesar de las diferencias en los caracteres, Peano las consideraría la misma fórmula.

3.3.2 Debate Peano-Frege sobre la conceptografía

Una de las razones por las que estoy interesado en exponer aquí la notación de Peano es porque me permite recuperar un interesante debate que surgió cuando dicha notación se comparó con la de Frege. Empecemos brindando algo de contexto.

Tanto la notación de Frege como la notación de Peano parecen tener las mismas motivaciones: proponer un lenguaje más simple y exacto para expresar las relaciones lógicas que están detrás de las matemáticas. Peano reconocía ese parecido. Usaba, por ejemplo, el término "ideografía" para referirse a su sistema formal. Incluso, en un texto en el que discutía la crítica que Frege hizo a su notación, Peano declaró:

> "Se puede cambiar la forma de los símbolos, es decir, los pocos signos para representar las ideas fundamentales: más no pueden existir dos ideografías diferentes en sustancia"[40] (Peano, 1897, p. 566-567)

Al leer dicho texto de Peano y "On Herr Peano's Begriffsschrift and My Own" de Frege, podemos darnos cuenta de que ambos consideraban que ambas notaciones responden a las mismas intenciones, pero los símbolos seleccionados por su colega fallaban al cumplirlas. Como vimos anteriormente, Frege pensaba que la notación de Peano estaba limitada a la lógica proposicional y producía desventajas al ser usada junto a expresiones matemáticas de otras áreas. Para Peano, la notación de Frege no presentaba las relaciones lógicas con la brevedad necesaria para ser útil. (Peano, 1897)

Este debate propone un interesante problema. Sabemos que al final la historia privilegió a las notaciones derivadas de la de Peano. ¿Es porque tenía razón y su sistema cumple de mejor manera con el propósito de una conceptografía? ¿O fue un desafortunado error y las circunstancias hicieron que el sistema de Frege, a pesar de ser superior, quedara relegado? ¿Realmente uno de los dos cumplió mejor con la intención detrás de una conceptografía?

Esta dicotomía surge sólo si aceptamos la opinión de Peano. Pero, ¿realmente sólo puede existir una ideografía? Yo creo que no. Pero mi justificación de esta respuesta depende de la interpretación que le demos a "ideografías diferentes en sustancia". Por un lado, podemos tomarlo como si Peano hubiese creído que no pueden existir dos notaciones igual de buenas.

[40] "Si potrà cambiare la forma dei simboli, cioè i pochi segni per rappresentare le idee fondamentali; ma non possono sussistere due ideografie differenti nella sostanza". [Agradezco a Carlos Marcos por la traducción]

Pero por otro lado, suponiendo que la sustancia de una notación es aquello que representa, el italiano también podría haberse estado refiriendo a que no pueden existir dos *sistemas lógicos* sustancialmente diferentes. Es decir, como si Peano fuera un partidario del monismo lógico.

Decidirnos entre alguna de las dos interpretaciones es complicado. Desafortunadamente, en ese artículo, Peano corta abruptamente la respuesta hacia Frege. El resto del artículo es una exposición breve de su sistema en donde, en ocasiones, se enfatiza la necesidad de investigar cuáles son las ideas más fundamentales detrás de las matemáticas, pues estos deben ser los elementos primitivos del sistema. Aunado a eso, también está el problema de que no es claro si Peano hacía una distinción entre notación y sistema lógico, por lo que incluso sus comentarios podrían implicar a ambas interpretaciones. Por ello, más que intentar reconstruir una respuesta de Peano, nos conviene intentar responder al problema por nosotros mismos.

Responder a un Peano presuntamente monista cae fuera de los límites de esta tesis. Solo cabe mencionar que el italiano publicó el artículo mencionado en 1897. El desarrollo de lógicas alternativas al sistema clásico aún no llegaban (la tesis de doctorado de Brouwer en donde se presentan el intuicionismo matemático va a aparecer diez años después, por poner un ejemplo). Por lo que pensar que existía una sola lógica quizá era la posición por default.

¿Pueden dos notaciones lógicas ser sustancialmente diferentes? Como lo vimos en el capítulo 1, suponer que ambas son notaciones lógicas conlleva que ambas comparten las características operativas. Es decir, cuenta con las características necesarias para representar a un sistema lógico. Si las características operativas fueran la sustancia de una notación, entonces Peano tendría razón. Todas deben compartir, sino las mismas características, al menos la misma capacidad.

Sin embargo, creo que esta respuesta es trivial. Suponer que la sustancia de una notación son sus características operativas nos lleva a una oración casi tautológica. Decir que "dos notaciones lógicas no pueden ser sustancialmente diferentes" sería lo mismo que decir que "dos notaciones que cuentan con las características operativas para representar a la lógica no pueden contar con características operativas que no les permitan representar a la lógica".

Además de su trivialidad, esta respuesta me deja insatisfecho por el papel en el que deja a las características ergonómicas. Identificar una parte de un elemento como su sustancia se considera como esencial, dejando a un lado al resto de cualidades como no-esenciales. Algo que podría cambiar sin que el objeto deje de ser el mismo. Sin embargo, como espero que esta historia de las notaciones haya subrayado, creo que las características ergonómicas son tan esenciales como las operativas. Frente a Peano, yo le diría que su propia notación es un ejemplo de cómo las características que otorgan ventajas ergonómicas son las que le permitieron distinguirse del resto. La notación de Peano contaba con ventajas como brevedad y flexibilidad. Estas ventajas son tan importantes para la notación de Peano que yo las consideraría una de las claves para entender su éxito histórico.

Para entender el peso de estas ventajas y las características que las posibilitaron es importante remarcar una diferencia de enfoque entre los proyectos de Peano y Frege. Ambos buscaban un lenguaje que sirviera como fundamento de las matemáticas, garantizara el rigor y eliminase las ambigüedades provocadas por el lenguaje natural en la enunciación de axiomas y teoremas. Empero, Frege y Peano optaron por estrategias distintas para alcanzar estos objetivos. Frege adoptó una estrategia mucho más individual. Escribió una trilogía de libros dedicada a demostrar que la lógica, por sí misma, era suficiente para construir la aritmética: *La conceptografía, Los fundamentos de la aritmética y Las leyes fundamentales de la aritmética.* Esta trilogía, publicada a lo largo de 24 años, fue el principal proyecto de Frege y probablemente la más grande obra en la que se usó su conceptografía.

En comparación, el proyecto más grande en el que se usó la notación de Peano fue el *Formulario matemático*. Como lo platicamos al principio de esta sección, el *Formulario* buscaba presentar los axiomas y teoremas fundamentales detrás de las principales áreas de las matemáticas de la época. En lugar de un proyecto logicista enfocado en la aritmética, Peano propuso un programa mucho más comprensivo en donde la notación lógica demuestra su poder para representar las verdades de todas las matemáticas. En un fragmento de una carta enviada a su amigo Felix Klein, Peano explica esto con total claridad:

> "Y aquí me detengo un momento, para llevar tu atención hacia la lógica matemática, y al *Formulario*. La lógica matemática con un número de signos muy limitado (se usan 7 y estos pueden ser reducidos aún más) ha logrado expresar todas las relaciones lógicas imaginables entre clases y proposiciones; o más bien el análisis de estas relaciones ha llevado al uso de esos signos, con los cuáles todo puede ser expresado, incluso las relaciones más complicadas, lo cual es difícil y laborioso expresar con el lenguaje ordinario. Pero su ventaja no se limita a la simplificación de la escritura: su utilidad radica especialmente en el análisis de las ideas y razonamientos que se llevan a cabo en matemáticas. Mientras tanto, para ilustrar su utilidad, el *Formulario* de

matemáticas está siendo impreso. [...] Este *Formulario* no se podría realizar en lenguaje ordinario. Pero se vuelve posible, y relativamente simple con la notación de la lógica matemática. Estas no solo condensan la escritura, sino que muestran que muchas proposiciones, que en lenguaje ordinario parecen ser diferentes, son transformadas en símbolos de la misma manera, y por lo tanto son una y la misma proposición. [...] Estoy trabajando en la publicación del *Formulario*, y estoy muy contento por contar con la colaboración de un gran número de colegas, y de muchos jóvenes recién graduados, quienes han asumido distintas partes con entusiasmo. Pero mis esfuerzos están dirigidos a dar a conocer estos métodos al mundo científico."[41]

Como el final de este fragmento lo deja en claro, a diferencia de la trilogía de Frege, el *Formulario* fue un trabajo principalmente colaborativo. La concisión y flexibilidad de la notación permitió que diferentes colegas y estudiantes de Peano la usaran para presentar los más importantes descubrimientos en aritmética, álgebra, geometría, cálculo diferencial e integral y teoría de curvas. En palabras de Roero: "El valor de la exposición condensada en símbolos tuvo la intención de permitir el diálogo entre especialistas de diferentes sectores de las matemáticas y así los jóvenes investigadores serían capaces de dominar con mayor facilidad un campo que cada vez se hacía más extenso."[42] (Roero, 2011, p. 107)

Poco más de veinte años después de que Peano escribiera la carta anteriormente citada, en 1915, el matemático escribió un texto titulado "Importancia de los símbolos en matemáticas" ("Importanza dei simboli in matematica"), en el cual hace un recuento de los

[41] Fragmento de Carta de G. Peano a F. Klein, 25 de agosto de 1894, en (Roero, 2011, p. 87) "And here I pause for a moment, in order to draw your attention to mathematical Logic, and to the Formulario. Mathematical logic with a very limited number of signs (7 used, and these can be reduced still further) has succeeded in expressing all the logical relations imaginable between classes and propositions; or rather the analysis of these relations has led to the use of these signs, with which everything can be expressed, even the most complicated relations, which it is difficult and laborious to express with ordinary language. But its advantage is not limited to the simplification of writing; its usefulness lies especially in the analysis of the ideas and reasonings that are carried out in mathematics. Meanwhile, to illustrate its usefulness, the Formulario of mathematics is being printed. [...] This Formulario could not be put into effect in ordinary language. But it becomes possible, and relatively simple with the notations of mathematical logic. These not only condense the writing, but show that many propositions which, in ordinary language, seem to be distinct, are transformed into symbols in the same way, and hence are actually one and the same proposition. [...] I am working on the publication of the Formulario, and am happy to have the collaboration of a number of colleagues, and of several recent young graduates, who have taken on the various parts with enthusiasm. But my efforts are directed at making known these methods to the scientific world." La traducción y los corchetes son míos.

[42] "The value of the exposition condensed in symbols was intended to permit dialogue among specialists in several different sectors of mathematics and the young researchers would thus be able more readily to have command of a field which was becoming ever more extensive" Mi traducción.

logros obtenidos por la introducción de lenguajes simbólicos en diversas áreas de las matemáticas, entre ellas la lógica. Este breve ensayo fue escrito después de la publicación de la *Principia* de Russell, obra que Peano vio como uno de los más grandes ejemplos de los logros que se podían alcanzar usando las ventajas que ofrecía su notación. Peano concluye ese texto diciendo:

> "Que de esta nueva herramienta simbólica se puedan obtener nuevos resultados se desprende de la opinión general de quienes la han utilizado. Que estos nuevos resultados son importantes se desprende del hecho de que las obras escritas en símbolos lógicos han sido leídas y citadas por numerosos autores y han servido de base para nuevas investigaciones."[43] (Peano, 1915, p. 234)

Como puede verse, Peano era de la firme creencia que el *Formulario* y su notación había logrado su propósito: servir como lenguaje de la investigación en cualquier área de las matemáticas. Esto gracias a las ventajas que ofrecía. Por ello dudo que Peano se negara a aceptar las características que permitían esas ventajas como sustanciales para su notación. Es por eso que me tengo que resistir a la idea de que ninguna notación es sustancialmente diferente. Por el contrario, las características y ventajas que lo diferencia es la sustancia de una notación.

Al mismo tiempo, este recuento histórico permite darnos cuenta que las notaciones de Peano y Frege no perseguían exactamente la misma intención, como parece que ellos creían. El proyecto de Peano era mucho más práctico y didáctico que el de Frege. Frege buscaba construir un microscopio especializado que brindara rigor y claridad a la investigación en matemáticas. Peano, por otro lado, ofreció anteojos que, aunque no eran tan precisos, pudiesen ser adoptados por cualquier área de las matemáticas que lo requiriera.

La discusión sobre la influencia de la notación de Peano en Łukasiewicz la he dejado para después de la presentación de sus variantes.

[43] "That from such a new symbolic tool new results can be obtained can be seen from the general opinion of those who have used it. That these new results are important can be seen from the fact that the works written in logical symbols have been read and cited by numerous authors, and have served as a basis for new research." Mi traducción

3.4 Las variantes de Peano: Russell-Whitehead y Hilbert-Ackermann.

Algunos años después de la publicación de "Los principios de la aritmética" de Peano, aparecieron dos nuevas notaciones que se convertirían en el estándar para trabajar con lógica matemática: la notación de Russell-Whitehead y la notación de Hilbert-Ackermann.

En estricto sentido, estas son sistemas de notación completamente independientes. Sin embargo, les llamo *variantes de Peano* por la cercanía y obvia influencia que ejerció la notación del italiano sobre ellas. Las fórmulas de ambas están constituidas por cadenas de caracteres. Ambas toman la estructura infija (incluyendo la excepción de la negación) de las fórmulas. También establecen caracteres diferentes que tomen el papel de conectivas y representen al mismo grupo básico de relaciones lógicas que Peano estableció en el *Formulario*. Aunque las cosas en común entre estas notaciones continúan, bastan estas tres para darnos cuenta que había una mayor cercanía entre ellas, que las que tiene este grupo con la conceptografía de Frege y el álgebra de Boole.

3.4.1 Russell - Whitehead

La notación de Russell y Whitehead está esencialmente unida a la *Principia Mathematica*. No solo fue en esta obra, publicada en 1910, la primera vez en la que apareció esta, sino que también comparten su punto de origen: el Primer Congreso Internacional de Filosofía, el cual se llevó a cabo del 1 al 5 de agosto de 1900 en París.[44] Este congreso parece haber estado dividido en tres partes, siendo la última de ellas dedicada a la historia y lógica de las ciencias. Fue durante este congreso en donde Russell, quien presentaba un artículo sobre nociones absolutas y relativas del espacio y del tiempo, conoció a Peano, quien presentaba su propio trabajo sobre definiciones matemáticas. (Lovett, 1901) El propio Russell recordaba ese episodio de la siguiente manera:

> "Fue en el Congreso Internacional de Filosofía en París en el año de 1900 que me dí cuenta de la importancia de una reforma lógica para la filosofía de las matemáticas. Al escuchar las discusiones de Peano de Turín y los otros filósofos reunidos me dí cuenta de esto. Yo no había conocido antes su trabajo, pero me quedé impresionado por el hecho de que, en cada discusión,

[44] Resulta interesante darse cuenta que el Primer Congreso Internacional de Filosofía coincidió en fecha y lugar con el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, el cual inició el día 6 de agosto. Aunque no encontré evidencia de que Russell haya participado, sabemos que Peano sí lo hizo. (Scott, 1900) Fue también este congreso en donde David Hilbert propuso sus famosos 23 problemas abiertos.

él mostraba más precisión y rigor lógico que los demostrados por cualquier otro. Yo fui hacia él y le dije, 'Me gustaría leer todo su trabajo. ¿Trae copias consigo?' Él tenía e inmediatamente lo leí todo. Estas dieron ímpetu a mi propias opiniones en los principios de las matemáticas"[45] (Russell, 1959, p. 65)

En ese mismo año, Russell escribe, bajo la tutela de Whitehead, *Principios de Matemáticas (The Principles of Mathematics).* En este libro podemos ver la poderosa influencia que tenían los trabajos de Peano sobre Russell. Su nombre aparece a lo largo de toda la obra e incluso hay una sección entera nombrada "La lógica simbólica de Peano" (Russell, 1903, p. 26-32). Sin embargo, resulta sorprendente darse cuenta que Russell no usó la notación de Peano. El libro se desarrolla principalmente en prosa. Russell se va a referir tiempo después a esta obra como un "borrador crudo y muy inmaduro" de la futura *Principia*. (Russell, 1959, p. 54)

Al mismo tiempo que Russell terminaba de escribir los *Principios*, empezaría a trabajar junto a Whitehead con el trabajo que daría por resultado la *Principia Mathematica*. Según se cuenta en el prefacio, la *Principia* originalmente estaba pensada para ser un segundo volumen de los *Principios*. Pero pronto se convirtió en una obra independiente cuyo objetivo era mostrar que las verdades matemáticas se siguen de verdades puramente lógicas. (Russell & Whitehead, 1910)

También en el prefacio podemos encontrar una interesante nota que resume cómo se originó la notación de Russell y Whitehead:

"En cuanto a la notación, nosotros hemos seguido a Peano tanto como fue posible, complementando su notación, cuando parecía necesario, por la de Frege o la de Schröder. Una buena parte del simbolismo, sin embargo, ha tenido que ser nuevo, no tanto por habernos sentido insatisfechos con el simbolismo de otros, como por el hecho de que estamos tratando con ideas que no han sido simbolizadas previamente."[46] (Russell & Whitehead, 1910, p. xvii)

[45] "It was at the International Congress of Philosophy in Paris in the year 1900 that I became aware of the importance of logical reform for the philosophy of mathematics. It was through hearing discussions between Peano of Turin and the other assembled philosophers that I became aware of this. I had not previously known his work, but I was impressed by the fact that, in every discussion, he showed more precision and more logical rigour than was shown by anybody else. I went to him and said, 'I wish to read all your works. Have you got copies with you?' He had, and I immediately read them all. It was they that gave the impetus to my own views on the principles of mathematics."

[46] "In the matter of notation, we have as far as possible followed Peano, supplementing his notation, when necessary, by that of Frege or by that of Schröder. A great deal of the symbolism, however, has had to be

Años después, Russell reconoció que la mayoría de los caracteres que usaron para complementar la notación de Peano fueron inventados por Whitehead. (Russell, 1959) Estos nuevos caracteres a los que se refiere, puedo suponer, son aquellos usados para extender la notación de Peano con su interpretación proposicional con la teoría de cuantificación de Frege. Desafortunadamente, tendremos que saltarnos una explicación detallada de estos caracteres para ceñirnos a los de la lógica proposicional.

Russell y Whitehead hicieron varios cambios al conjunto de caracteres de la notación de Peano para la lógica proposicional. En primer lugar, destaca cómo modificaron los caracteres relacionados con la disyunción y la conjunción. En Peano, la diferencia entre los tres caracteres solo era de la orientación de la herradura: condicional ⊃, disyunción ∪ y conjunción ∩. Ese cambio buscaba, en parte, reflejar la dualidad entre los operadores de conjunción y disyunción. Sin embargo, Russell y Whitehead optaron por dejar la herradura vertical ∩ y la herradura vertical invertida ∪ para la intersección y la unión de conjuntos respectivamente. Por ello tuvieron que introducir caracteres especiales para ambas. Para la disyunción, Russell y Whitehead optaron por una letra **v** en negritas.[47]

Sin embargo, para la conjunción, la solución fue un poco menos clara que una simple sustitución de carácter. Así como en la notación de Peano, en esta nueva notación la conjunción de dos fórmulas se expresa colocándolas juntas. Los ingleses también optaron por mantener el uso de puntos de Peano para separar las subfórmulas y eliminar vaguedad. Pero a diferencia de Peano no dieron la opción de usar algún carácter especial para indicar la conjunción además de los puntos. Así pues, para representar la conjunción de las variables *p* y *q,* podíamos escribir p **.** q, con el punto en negritas.

Otro cambio importante fue la introducción de un carácter especial ≡ para la conectiva de equivalencia. En Peano aún se representaba a la equivalencia con el símbolo de igualdad. Sin embargo, Russell y Whitehead usaron el signo de igualdad para el caso particular de establecer definiciones. La equivalencia la entendían como la implicación recíproca entre dos fórmulas, distinguiéndose de la definición que servía para indicar el significado de un nuevo símbolo. Por último, cambiaron el guión horizontal de la negación — por la virgulilla ~.

---

new, not so much through dissatisfaction with the symbolism of others, as through the fact that we deal with ideas not previously symbolised."

[47] El uso de negritas no fue una regla explícita del lenguaje, pero fue un estilo de formato que apareció junto a la *Principia*. Todas las conectivas lógicas se destacan en negritas.

Russell y Whitehead también agregaron un nuevo elemento con su respectivo carácter que no aparecía en los trabajos de Peano: la aserción $\vdash$ El carácter de aserción parece haber surgido como una adaptación de la barra de juicio y la barra de contenido de Frege a un estilo que pudiera integrarse a una cadena de caracteres. Pero a diferencia de Frege, quien solo usa la barra de juicio para indicar que una fórmula es verdadera, en la notación de los ingleses tiene un doble uso. Por una parte, tiene el mismo significado del de Frege. Pero por otra parte, toma el significado por el que es conocida hasta ahora: como indicador de la consecuencia lógica.

Por último, en 1927 Russell y Whitehead publicaron la segunda edición de la *Principia* y recuperaron un carácter novedoso: la barra de Sheffer, "|". Considerando los trabajos de Henry M. Sheffer y Jean Nicod, asignan este carácter a la negación de la conjunción (NAND). Esta adición es un ejemplo de los cambios en la lógica matemática que resultaron de la aparición de la *Principia*. Partiendo de esta obra, Sheffer demostró en 1913 que tanto la negación de la conjunción (NAND) como la negación de la disyunción (NOR) son suficientes por sí mismas para definir a las conectivas fundamentales de Russell y Whitehead. (Sheffer, 1913) Por su parte, Nicod demostró en 1917 que era posible formar un axioma único para el sistema de los ingleses solo con NAND, representada por la barra de Sheffer |, como única conectiva. (Nicod, 1917)

El siguiente cuadro presenta, con ejemplos, los cambios introducidos:

Carácter en la notación de Peano	Carácter en la notación de Russell-Whitehead	Ejemplo	
		Peano	Russell-Whitehead
$-$	$\sim$	$-. p \supset q$	$\sim. p \supset q$
$\cup$	v	$p \cup. q \cup r$	p v. q v r
$\cap$	No hay un carácter asignado.	$p \cap. q \cap r$ $p . q \cap r$	p : q . r
$=$	$\equiv$	$-.p \cup q: = : p \supset q$	$\sim.p$ v $q: \equiv : p \supset q$

No hay un carácter asignado.	|	–: p ∩ –. q ∩ r	p | . q | r

3.4.2 Hilbert-Ackermann

La notación de Hilbert-Ackermann es la última notación que incluiremos en esta breve historia. Esta notación se ha convertido en lo más cercano que hay en la actualidad al estándar. Al revisar las últimas ediciones de destacadas revistas en filosofía analítica o lógica, podemos encontrar fórmulas escritas a esta notación. Solo por poner un ejemplo, uno de los últimos artículos publicados por Studia Logica (revista fundada por la Escuela Polaca) está escrito en su totalidad en esta notación.[48] Como este artículo podemos encontrar un gran número de libros de texto y revistas escritos únicamente con esta notación.

Al igual que la notación de Russell y Whitehead, considero a esta una notación derivada de Peano. Podemos encontrar operadores infijos, se presentan caracteres propios para el mismo conjunto de conectivas e incluso parecen estar basados en los anteriores. Sin embargo, debo aclarar que, para crear esta notación, Hilbert y Ackermann parecen haber estado más inspirados por la *Principia Mathematica* que por el *Formulario.* En la primera versión de la notación de Hilbert-Ackermann aparecerán muchas de las aportaciones originales de la notación de los ingleses, especialmente en el aspecto de la lógica de primer orden. A pesar de esto, pronto el lector podrá ver que las diferencias que podemos encontrar en cuanto al lenguaje proposicional entre la notación de Hilbert-Ackermann y la de Peano no son mayores que las que tiene con la notación de Russell-Whitehead. Es por ello que las he agrupado en una misma categoría.

Anteriormente hice la aclaración de que me refería a la primera versión de la notación porque existen dos versiones con importantes diferencias. La primera apareció con la edición original de los *Grundzüge der theoretischen logik* (Elementos de la lógica teórica), publicada en 1928. La segunda versión llegaría 30 años después, en 1958, con la aparición de una cuarta edición de los *Grundzüge.* Esta nueva edición apareció 15 años después de la

[48] Veáse Bílková, M., Colacito, "A. Proof Theory for Positive Logic with Weak Negation". *Studia Logica* 108, 649–686 (2020). https://rdcu.be/b7iEF

muerte de David Hilbert, por lo que los cambios en la notación los podemos atribuir completamente a Willhelm Ackermann.

La versión de 1928[49] decide recuperar los caracteres propuestos por diferentes investigadores del área:

Para la conjunción, proponen el ampersand &. Para la disyunción, recupera el carácter ∨ de Russell y Whitehead. Con la opción de que la disyunción sea eliminada. Es decir, al igual que pasa con la conjunción en Peano, si dos proposiciones están juntas, por ejemplo **pq**, se debe interpretar como que son una disyunción **p v q**. Esta convención desaparece en la segunda versión.

Resulta curiosa la elección de la virgulilla ~ para el bicondicional a pesar de que dicho carácter ya estaba asignado a la negación en la notación de Russell-Whitehead.

Recuperan la barra de Sheffer | para representar la negación de la conjunción.

Para el condicional, optan por recuperar la flecha → de los trabajos de Paul Hertz (1992). Él fue un matemático colega de Hilbert y Ackermann en la Universidad de Gotinga, cuyo trabajo publicado en 1922 es la aparición más antigua de la asociación de la flecha → con el condicional de la que tengo conocimiento.

En el caso de la negación, recupera la propuesta de Jean Nicod y coloca una línea arriba de la subfórmula negada.[50] De esta manera, la negación de p se escribiría $\overline{p}$; la conjunción de p y la negación de q se escribiría $p \,\&\, \overline{q}$y la negación de la disyunción de p con la negación de q se escribiría como $\overline{p \vee \overline{q}}$. Nótese cómo las líneas se colocan por encima del resto de los caracteres para hacer explícito el argumento de la negación.

Por último, cabe destacar la desaparición de los puntos como caracteres de agrupación. Los paréntesis quedan como único recurso. Además, propone una orden de operadores para eliminar la cantidad de paréntesis: →, ~, & y ∨. Entonces, una fórmula como

p → q v r & s

debería interpretarse como

---

[49] Para recuperar la primera versión de la notación he usado la primera traducción al inglés que apareció de los Grundzüge. En la bibliografía la pueden encontrar como (Hilbert & Ackermann, 1950)

[50] El texto más antiguo en el que encontré la idea de colocar un barra arriba de la fórmula fue en (Nicod, 1917) Es el mismo texto al que responde Łukasiewicz. Véase “El axioma más simple y el axioma más corto” en el capítulo 5 de esta tesis,

$$p \rightarrow ((q \vee r) \ \& \ s) \ .$$

La segunda versión[51] es tan diferente a la primera como esta lo es con respecto a la notación de la *Principia*. En el "Prólogo" a la cuarta edición de los *Grundzüge*, Ackermann explica que los cambios realizados a lo que él llama "el simbolismo hilbertiano" vienen dados para cubrir ciertas desventajas:

> "El signo «~», que usábamos para indicar que dos proposiciones eran acordes, se usa en la mayoría de los trabajos angloamericanos como signo de negación. La raya de negación es ciertamente clara por sí misma, pero da lugar a dificultades tipográficas cuando hay que rayar varias veces largas partes de la fórmula. [...] Por lo tanto, los anteriores signos «—», «&», «~», «(x)» y «(Ex)» se ha sustituido, respectivamente, por «¬», «∧», «↔», «∀x» y «∃x», en donde hay que hacer observar que «¬» a diferencia de lo que ocurría con «—», se coloca a la izquierda de la expresión que se niega. Me he adherido con ello a un simbolismo que, tal como aquí se presenta o en forma ligeramente diferente, se utiliza mucho en las publicaciones alemanas sobre lógica matemática." (Hilbert & Ackermann, 1962, p. 10)

Resulta interesante notar que no hay una explicación particular de por qué se ha reemplazado el carácter asignado a la conjunción. Como recordará el lector, el carácter ∧ ya había sido usado por Peano para representar la falsedad o el conjunto vacío. En un uso independiente, Sheffer usaba un carácter muy parecido como alternativa a su barra en su artículo. (Sheffer, 1913, p. 487) Para mí, creo que se buscaba remarcar la dualidad entre la conjunción y la disyunción al optar por esos caracteres que solo cambian en orientación. Sin embargo, Ackermann nunca explica su elección.

La siguiente tabla compara las dos versiones de la notación de Hilbert-Ackermann con la de Peano y la de Russell-Whitehead a través de diferentes ejemplos.

Peano	Russell-Whitehead	Hilbert-Ackermann Primera versión	Hilbert-Ackermann Segunda versión
$-. \ p \cup q$	$\sim . \ p \vee q$	$\overline{pq}$	$\neg(p \vee q)$
$p \supset . \ q \cap r$	$p \supset : q \ . \ r$	$p \rightarrow (q \ \& \ r)$ $p \rightarrow q \ \& \ r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$

[51] Para la segunda versión, he tomado como referencia a (Hilbert & Ackermann, 1962), la cual es una traducción al español de la edición de 1958.

- : - p. ∩ q	~p. | q	$\overline{p}\vert q$[52]	¬p | q
- : p ∪ - .-q ∩ r	~ ∴ p ∨ ~ : ~q . r	$\overline{p \vee (\overline{\overline{\overline{q} \,\&\, r}})}$	¬(p ∨ ¬(¬q ∧ r))

3.4.3 La herencia de las variantes de Peano a Łukasiewicz

La notación de Peano llegó a Łukasiewicz de la misma manera en la que llegó a muchos de los interesados en lógica matemática de la época: gracias al trabajo de Bertrand Russell. Es por ello que he dejado la discusión de la notación de Peano hasta este punto. El importante papel de intermediario que jugó Russell y la *Principia* sale a la luz al revisar la bibliografía de Łukasiewicz. En la traducción de sus obras seleccionadas siempre encontraremos el nombre de Peano citado junto al de Russell.[53] Casi siempre en un contexto en el que les atribuye, junto a Frege, haber dado el rumbo correcto a las investigaciones en lógica.

Por otro lado, la más antigua publicación que encontré en donde Łukasiewicz usó alguna de las notaciones derivadas de Peano es el texto "Interpretacja liczbowa teorii zdań" ("Una interpretación numérica de la teoría de proposiciones"). Publicado en 1923, en este texto nunca se menciona a Peano; solo a Russell y Whitehead, lo que es comprensible pues era en la *Principia Mathematica* en donde se presentó el problema que discutía. (Łukasiewicz, 1923) Previamente, Łukasiewicz había hecho únicamente uso de los puntos como caracteres de agrupación en el texto "lógica bivalente". (Łukasiewicz, 1921)

La notación de Hilbert-Ackermann, por otra parte, ya no fue un antecesor de la notación polaca, sino que apareció casi al mismo tiempo. Como ya lo hemos mencionado, Łukasiewicz ubica la creación de la notación polaca cerca de 1924, pero la primera publicación en la que fue usada llegó hasta 1929. Es decir, tan solo un año después de la publicación de los *Grundzüge* de Hilbert y Ackermann. Hay evidencia de que Łukasiewicz también conocía este libro y su notación, pues en sus propios *Elementos,* el polaco lo presenta como un ejemplo de la investigación de punta en lógica matemática. (Łukasiewicz, 1963, p. 8) Sin embargo, a

[52] Nicod, al introducir la línea de la negación arriba de la subfórmula, mencionaba que al negar el lado izquierdo de una fórmula conectada por la barra de Sheffer hacía surgir un "símbolo natural ¬ para la implicación". Efectivamente, una fórmula como la aquí señalada es equivalente al condicional p → q, quedando la p "adentro" del carácter formado.

[53] Vease (Łukasiewicz, 1913, p. 49; 1916, p. 65; 1921, p. 89)

partir de 1929 todas las publicaciones de Łukasiewicz de las que tengo conocimiento fueron escritas solo en notación polaca.

Siendo así, queda claro que preguntarnos por la influencia de la notación de Peano sobre Łukasiewicz es lo mismo que preguntarnos por la notación de Russell-Whitehead. Y, para mí, creo que la influencia puede resumirse en dos aspectos clave: 1) la cadena de caracteres como estructura básica para construir fórmulas, 2) el conjunto de funciones con caracteres propios y 3) el propósito general de un sistema lógico formal.

Con la noción de *estructura de cadena* me refiero a las notaciones cuyas fórmulas se construyen al concatenar diferentes caracteres, uno detrás del otro, de manera horizontal. A pesar de los esfuerzos de Frege (y de Peirce), Peano siguió la tendencia del álgebra y convirtió las cadenas en la estructura estándar para construir fórmulas en lógica. Łukasiewicz, siguiendo esta línea, también pensaría en las fórmulas de la lógica como cadenas, a pesar de eliminar otras características de las ecuaciones algebraicas como el orden infijo o los paréntesis.

Otro aspecto en el que hay una clara influencia es en el conjunto de funciones que cuentan con un carácter específico. A diferencia de Frege, Peano optó continuamente por mantener caracteres para funciones que ya sabía que no eran fundamentales. Russell y Whitehead seleccionaron como fundamentales a la negación y a la disyunción, pero mantuvieron el resto de conectivas para simplificar el sistema. Łukasiewicz actuaría del mismo modo, asignando caracteres a la negación, el condicional, la conjunción, la disyunción, la bicondicional y la negación de la conjunción, el mismo conjunto de funciones clave dentro de la *Principia Mathematica*.

La última influencia clave creo que es más una herencia en común de Peano y Frege para Łukasiewicz. Si algo nos enseñó el debate entre estos dos es que ambos compartían la visión de una conceptografía que permitiera avanzar en el estudio del milenario arte de la lógica y que al mismo tiempo brindara herramientas para atacar los nuevos problemas de las matemáticas que estaban surgiendo en su tiempo. Hilbert se quedó solo con la segunda parte de esta visión. Para Łukasiewicz, al igual que para Peano y Frege, la lógica que estaba surgiendo era una disciplina necesariamente independiente[54]. Esto iba acompañado de la necesidad de tener una notación particular a esta nueva disciplina.

3.5 Conclusiones

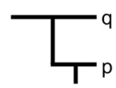
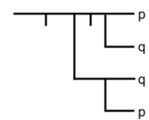
El objetivo de este capítulo era ubicar a la notación polaca en la historia de las notaciones de la lógica proposicional. Ahora, después de hacer este recorrido, podemos darnos cuenta de que la notación polaca surgió en la última parte de un periodo en el que convivieron varias propuestas. Pero que haya nacido al final de este periodo no significa que esto fuera un obstáculo para que se hubiera popularizado. A través de la investigación histórica que he realizado, hemos podido descubrir que la notación se presentó casi treinta años antes de la segunda versión de Hilbert-Ackermann, la notación más cercana a un estándar que tenemos en la actualidad.

Pero creo que más interesante que crear una línea del tiempo con las primeras publicaciones en las que apareció cada uno de estos sistemas, el principal resultado de este capítulo es que hemos descubierto la intrincada red de influencia que ha habido entre los sistemas de notación, así como los debates, intenciones y justificaciones que han estado detrás de lo que parecen minúsculos cambios. Hemos podido ver cómo cada uno de estos investigadores diseñaron características ergonómicas que les permitieran usar a la lógica para sus respectivas investigaciones dadas las limitaciones técnicas que tenían.

En particular, hemos descubierto que la notación polaca no es un invento que surgió de manera aislada en el seno de un grupo de investigación en Polonia. Por el contrario, en este capítulo se presentó evidencia de que Jan Łukasiewicz conocía cada una de estas notaciones y se apropió de muchas de las características que él apreciaba de cada una de ellas. Desde su diseño, la notación polaca es una heredera de la historia de la lógica.

[54] Él mismo remarcaba esto en su libro de texto: "In fact, there are not two logics, mathematical and philosophical; there is only one logic, founded by Aristotle, completed by the ancient school of the Stoics, and pursued, often with great subtlety, by medieval logicians, an it is that logic which is developed by mathematical logic. The realization of that unity of logic is already gaining ground, and some authors cease to use the term "mathematical logic". [...] If the present lectures are entitled *Principles [Elements] of Mathematical Logic*, this is only in order to emphasize what will be their trend and method". (Łukasiewicz, 1963, p. 8-9) Los corchetes son míos.

Comparativa de fórmulas bien formadas en los principales sistemas notacionales del s. XX

Conectiva / Sistema de Notación	Negación	Condicional	Conjunción	Disyunción	Bicondicional	Negación de la conjunción (NAND)
Boole (1847)	p = 0 1 - p = 1	p(1-q) = 0	pq = 1	p + q - pq = 1	p - q = 0	pq = 0
Frege (1879)						
Peano (1889)	— p	p ⊃ q	p ∩ q	p ∪ q	p = q	— . p ∩ q
Russell - Whitehead (1910)	~p	p ⊃ q	p . q	p v q	p ≡ q	~ : p . p
Łukasiewicz (1929)	Np	Cpq	Kpq	Apq	Epq	Dpq
Hilbert - Ackermann (1928 y 1958)	$\overline{p}$ ¬p	p → q	p & q p ∧ q	pq p ∨ q	p ~ q p ↔ q	p | q

4 | Presentación de la notación polaca

Una vez que hemos revisado el contexto en el que la notación polaca fue creada, pasemos a entender cómo funciona. Lo que el lector encontrará a continuación tiene dos objetivos: 1) dotar al lector de las herramientas necesarias para usar la notación polaca en la construcción de pruebas formales y 2) convencerlo de que la notación polaca tiene las mismas características operativas que la notación de Hilbert-Ackermann para representar las fórmulas de la lógica proposicional.

Para alcanzar estos dos objetivos, expondré a detalle las características más importantes de la notación polaca. Revisaremos cuáles son los componentes de su lenguaje, así como las reglas de formación que rigen a sus caracteres, de tal modo que el lector sea capaz de leer, escribir y reconocer fórmulas bien formadas escritas en la notación polaca. Dado que esta notación viene unida a una manera particular de escribir las pruebas, también expondremos las reglas y características necesarias para leer y escribir pruebas como las que aparecen en los artículos y libros de Łukasiewicz. Por último, presentaremos dos métodos para traducir de la notación estándar a la polaca y viceversa de manera mecánica.

Durante esta exposición, usaremos los conceptos de carácter y símbolo que hemos introducido en el capítulo anterior. También suponemos que el lector tiene dominio sobre la lógica proposicional escrita con la notación de Hilbert-Ackermann.

4.1 El alfabeto

La notación polaca construye fórmulas a partir de dos tipos de caracteres: aquellos asignados a operadores[55] y aquellos asignados a sus argumentos.

[55] Łukasiewicz usa el término "functor" para identificar a lo que aquí llamaremos operador. Aunque el término de funtor existe en el español como traducción directa de "functor", dado que ésta ha cobrado un

4.1.1 Caracteres de operadores

La notación polaca hace uso de las siguientes seis letras mayúsculas como caracteres asignados a los operadores.

Carácter	Operador	Equivalencia en Hilbert-Ackermann
N	Negación	¬
C	Condicional material	→
K	Conjunción	∧
A	Disyunción	∨
E	Equivalencia material	↔
D	Negación de la conjunción (NAND)	/

Estos operadores tenían el objetivo de modelar las conectivas lógicas como si fueran una función veritativa, bajo la tradición empezada por Boole y Frege. A diferencia de la notación del resto de notaciones que vimos en el capítulo anterior, todos los caracteres asignados a conectivas pertenecen al alfabeto común, lo que facilitaba su escritura en una máquina de escribir común. Esto supone una gran ventaja a la hora de compartir resultados por correo como se acostumbraba en esta época. Como veremos más adelante, esto fue una importante característica que podemos suponer que formó parte de las exigencias del diseño.

4.1.2 Caracteres para los argumentos de los operadores

Para completar su lenguaje, la notación polaca hace uso de las letras minúsculas y los números 1 y 0. Este conjunto de caracteres toma el lugar de argumentos de los operadores. Con ellos, se busca representar a las proposiciones modelándolas como variables que

nuevo significado junto a la Teoría de Categorías, he optado por usar el término de operador, emulando a Prior en (1963).

pueden tomar un valor de verdad, o en su defecto, como proposiciones verdaderas (1) o falsas (0).

Caracteres de operador = {N, C, K, A, E, D}

Caracteres de argumentos = {0, 1, p, q, r, s…}

A los elementos de la unión del conjunto de los caracteres de operador y el de caracteres de argumento les llamaremos *caracteres básicos.*

4.1.3 Reglas de formación

Ahora que ya vimos los componentes básicos del lenguaje, podemos analizar las reglas de formación que nos permiten construir *caracteres compuestos* que identificamos como fórmulas bien formadas y que distinguimos de otros caracteres que se podrían construir a través de la concatenación aleatoria de los caracteres básicos.

Pero aquí me gustaría abrir un paréntesis para comparar la manera en que Łukasiewicz presentó su notación con la que lo haríamos si nos ceñimos a las diferencias establecidas entre carácter, fórmula y símbolo de la sección anterior.

A continuación encontrarán las reglas de formación que aparecen en el libro de Łukasiewicz.

La expresión x es una fórmula bien formada si y sólo si una de las siguientes condiciones es satisfecha:

1) es x una letra minúscula,
2) x es la negación de una fórmula bien formada,
3) x es una implicación cuyos argumentos son fórmulas bien formadas,
4) x es una disyunción cuyos argumentos son fórmulas bien formadas,
5) x es una conjunción cuyos argumentos son fórmulas bien formadas,
6) x es una negación de la conjunción cuyos argumentos son fórmulas bien formadas,
7) x es una equivalencia cuyos argumentos son fórmulas bien formadas.[56]

[56] Łukasiewicz no usó el término "fórmula bien formada". En su lugar, en la traducción de su libro de texto, nos encontramos con el término "meaningful expression". Ambos términos parecen claramente referirse a lo mismo: caracteres que cumplen con reglas de formación específicas. Es por eso que he decido presentar las reglas de Łukasiewicz reemplazando el término que vendría a ser "expresiones significativas" por "fórmulas bien formadas".

Compárese con la traducción al inglés en (Łukasiewicz, 1963, p. 37)

"*The expression x is a meaningful expression if and only if one of the following conditions is satisfied*:
1) x is a small letter,
2) x is the negation of a meaningful expression,
3) x is an implication with arguments which are meaningful expressions,

La elección de palabras con las que se enuncian estas reglas de formación me parecen una buena oportunidad para resaltar la importancia de la distinción entre carácter, fórmula y símbolo. Para empezar, hagamos la siguiente pregunta: ¿A qué se refiere Łukasiewicz cuando habla de algo como "x es la negación de..."? Podría referirse a tres cosas diferentes. En primer lugar, podría referirse a la negación presente en el lenguaje natural que busca ser modelada con este lenguaje formal. Es decir, al objeto que ya está asociado al símbolo N. Pero esto no debería ser el caso, pues las reglas parecen tener como objetivo que la definición de fórmulas bien formadas sea independiente de la traducción de alguna oración del lenguaje natural.

En segundo lugar, podría referirse al operador con el cuál se va a modelar la negación del lenguaje natural. Se toma prestado el nombre para vincular al fenómeno de la negación con esta función que se va a definir. Pero, ¿no sería problemático hacer referencia a un operador que aún no definimos? Más si la definición de las reglas de este operador en parte dependen de que sepamos distinguir las fórmulas bien formadas que seguirán estas reglas.

En tercer lugar, podría referirse al carácter "N". Este parecería el camino menos problemático. Pero en esta circunstancia, ¿qué sentido tiene llamarlo negación en el momento mismo de la definición? Alguien podría sostener que esto responde a un sentido didáctico: sería más fácil para el lector si desde un principio empezamos a asociar el carácter N con la función de negación y con la negación del lenguaje natural. Sin embargo, usar el mismo nombre para tres cosas diferentes y relacionadas podría resultar cuando menos confuso.

Una enunciación que contemple la diferencia entre carácter, fórmula y símbolo podría ser la siguiente:

> El carácter X es una fórmula bien formada si y solo sí se cumple alguna de las siguientes condiciones:
>
> 1) X es una letra minúscula, un 1 (uno) o un 0 (cero)[57],

4) x is an alternation with arguments which are meaningful expressions,
5) x is a conjunction with arguments which are meaningful expressions,
6) x is a non-conjunction with arguments which are meaningful expressions,
7) x is an equivalence with arguments which are meaningful expressions."

[57] Nótese que 1 y 0 no son consideradas como parte del conjunto de las fórmulas bien formadas en las exposiciones de la notación por parte de Łukasiewicz. Sin embargo, en la práctica sí estaban incluidas, por lo que he decidido agregarlas dentro de la notación.

2) X es formado a partir del carácter N seguido de una fórmula bien formada,

3) X es formado a partir de alguno de los caracteres C, K, A, E o D seguido por dos fórmulas bien formadas.

Estas reglas definen lo que probablemente es la cualidad más famosa de la notación polaca: los operadores preceden a los argumentos. Por ello a la notación polaca se le considera una notación prefija, en contraste con notaciones infijas (en donde el operador está entre los argumentos como ocurre en la notación de Hilbert-Ackermann o en la escritura habitual de sumas y restas) y sufijas (en donde el operador está después de sus argumentos).

Veamos algunos ejemplos de fórmulas bien formadas en notación polaca. Caracteres como

p 0 q r 1

son considerados fórmulas bien formadas por cumplir la primera condición. Mientras que los caracteres

N K 4 Ñ _

serían ejemplos de caracteres que no son considerados como fórmulas bien formadas. Introducir estos caracteres sería introducir objetos para los que no tenemos reglas de operación.

Continuemos formando nuevas fórmulas bien formadas a partir de las que ya tenemos. Aceptando que los primero cinco caracteres son fórmulas bien formadas, entonces tenemos que:

Np	Kpq	Dpp	Apq	Cpr	Eqq
$\neg p$	$p \wedge q$	p / p	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \leftrightarrow q$

Np es una fórmula bien formada en tanto que cumple la condición 2. El resto se justifican por la condición 3. Con las fórmulas anteriores podemos formar otras nuevas:

NNp	**NNp**	$\neg\neg p$
AKpqDpp	**AKpqDpp**	$(p \wedge q) \vee (p / p)$
NAKpqCpr	**NAKpqCpr**	$\neg ((p \wedge q) \vee (p \rightarrow r))$
EKpqDNApqDpp	**EKpqDNApqDpp**	$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg (p \vee q) / (p / p))$

4.1.4 Un algoritmo de comprobación

Para decidir si una fórmula pertenece al esquema de notación que estamos definiendo bastaría con revisar de manera recursiva si cumple con las reglas establecidas. Sin embargo, seguir la revisión a mano podría ser un poco complicado para el lector. Así que considero que sería pertinente presentar un algoritmo que facilite la tarea. Me parece que el procedimiento más adecuado para esto sería una adaptación del algoritmo desarrollado por Enderton (2007) para las notaciones prefijas.

Enderton se enfrentó al reto de definir un procedimiento que nos permitiera decidir si los términos dentro de una fórmula de primer orden cumplían con las reglas de formación.[58] Dado que los términos en el lenguaje de la lógica de primer orden tienen una estructura prefija, Enderton se vio obligado a exponer un algoritmo que funcionara para notaciones en donde los caracteres de operador se coloquen antes de los caracteres de argumento.

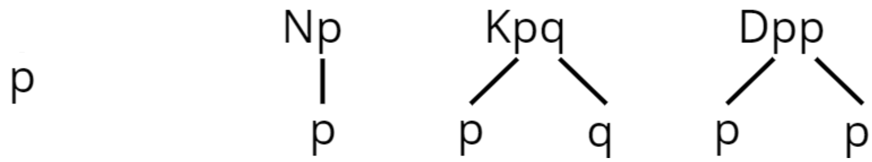
Hay dos ideas centrales detrás de ese procedimiento: una función $\mathcal{K}$ que toma como argumentos a los caracteres y la representación intuitiva que llamaré como "árboles genealógicos".

Empecemos por estos últimos. Un árbol genealógico es una representación gráfica que nos permite ver a una fórmula como el resultado de un conjunto finito de aplicaciones de "operaciones de construcción de fórmula"[59] a los caracteres que cumplan con alguna de las reglas 1, 2 o 3 que vimos anteriormente, es decir, a las fórmulas básicas.

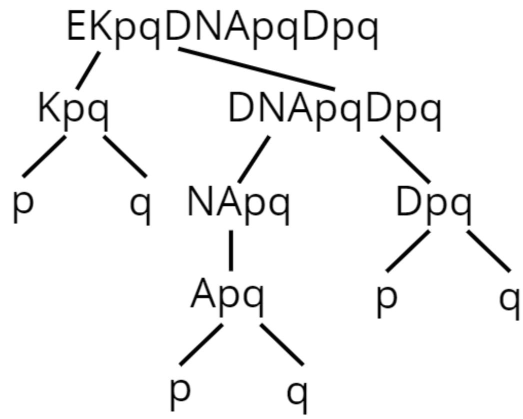
Veamos un ejemplo de cómo luciría el árbol genealógico de algunas fórmulas. Los más simples serían, trivialmente, los árboles de caracteres de argumentos y los de los caracteres construidos con una única aplicación de alguna operación de construcción de fórmula.

[58] "The terms are defined to be those expressions that can be built up from constant symbols and the variables by prefixing the function symbols." (Enderton, 2007, p. 74) Es decir, con términos nos referimos a caracteres como "Pxy" dentro de la fórmula $\forall x \forall y(Pxy)$.

[59] Nosotros podemos identificar estas operaciones de construcción de fórmulas con las reglas de formación que convierte a la notación polaca en un esquema de notación. Ahora bien, creo que es importante mencionar que las reglas de formación de las notaciones en general no tienen por qué estar tan bien definidas como las que aparecen en el libro de Enderton. El autor tiene el propósito de definirlas de tal manera que le permita que el conjunto de las fórmulas bien formadas esté cerrado bajo las operaciones de construcción de fórmulas. Esto le permite al autor aplicar un principio de inducción sobre las fórmulas bien formadas.



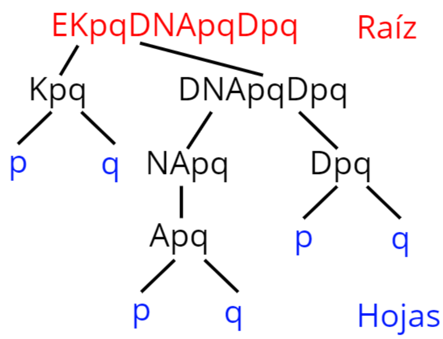
A través de más aplicaciones de las operaciones de construcción, podemos construir fórmulas más complejas. Véase como ejemplo el siguiente árbol genealógico de la fórmula EKpqDNApqDpq[60], conformada a partir de 6 operaciones de construcción.



Nótese que cada nodo está compuesto por una fórmula y está conectado con las subfórmulas a las que se le aplicó la operación de construcción para formar la primera. Así, DNApqDpq, la cuál es una fórmula de nuestro esquema de notación, está conectada con NApq y Dpq, las cuales concatenamos y agregamos al principio de la cadena el carácter D.

Es importante que nosotros ubiquemos en el árbol la raíz y las hojas. La raíz de un árbol genealógico es el primer nodo de nuestro árbol. En el caso anterior, la raíz es el nodo que contiene a EKpqDNApqDpq. Las hojas son los nodos que no están conectados con otro nodo que se encuentre en un nivel inferior. Es decir, son los nodos finales. En nuestro árbol de ejemplo, las hojas son aquellos nodos que contienen únicamente p's y q's.

[60] $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg\, (p \vee q)\ /\ (p\ /\ p))$ en la notación de Hilbert-Ackermann.



Ahora, la idea detrás del método de comprobación de Enderton es que una cadena de caracteres es una fórmula de nuestro esquema de notación siempre y cuando seamos capaces de construir su árbol genealógico cuyas hojas sean únicamente caracteres de argumentos. Ahora el problema de encontrar un algoritmo que identifique las fórmulas bien formadas pasa a convertirse en el problema de encontrar un algoritmo que construya el árbol genealógico de una fórmula dada. Es ahí en donde entra en juego la función $\mathcal{K}$, la cual opera sobre caracteres. Enderton nos presenta a la función $\mathcal{K}$ así:

> Ahora definimos la función $\mathcal{K}$ sobre los símbolos involucrados tales que para el símbolo s, $\mathcal{K}(s)=1-n$, en donde n es el número de términos que deben seguir a s para obtener un término.[61] (Enderton, 2007, p. 105)

Adaptada a los caracteres de la notación polaca, podríamos definir la función $\mathcal{K}$ como:

$\mathcal{K}(x)$ = 1-0 = 1, en donde x es un carácter de argumento e.g. 0, 1, p, q, r, s….

$\mathcal{K}$(N) = 1-1 = 0

$\mathcal{K}$(X) = 1-2 = -1, en donde X es un carácter de función de dos argumentos. Es decir, X ∈ {C, K, A, E, D}.[62]

Por último, tal como lo hizo Enderton, nos quedaría explicitar la función $\mathcal{K}$ para que tome como argumentos caracteres compuestos. Siendo $c_1c_2...c_n$ una cadena de los caracteres básicos:

$$\mathcal{K}(c_1c_2...c_n) = \mathcal{K}(c_1) + \mathcal{K}(c_2) + ...+ \mathcal{K}(c_n)$$

[61] "[...] We now define a function $\mathcal{K}$ on the symbols involved such that for a symbol s, $\mathcal{K}$(s)=1-n, where n is the number of terms that must follow s to obtain a term" La traducción es mía.

[62] Nótese que la definición de la función $\mathcal{K}$ de Enderton podría permitirnos introducir caracteres para funciones que acepten un número arbitrario de argumentos. Sería muy simple adaptar este argumento a extensiones de la notación que agreguen nuevos caracteres para conectivas n-adicas.

Veamos un ejemplo. Tomemos nuevamente la fórmula NAKpqCpr que construimos anteriormente como argumento de la función $\mathcal{K}$. Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}(\text{NAKpqCpr}) &= \mathcal{K}(\text{N}) + \mathcal{K}(\text{A}) + \mathcal{K}(\text{K}) + \mathcal{K}(\text{p}) + \mathcal{K}(\text{q}) + \mathcal{K}(\text{C}) + \mathcal{K}(\text{p}) + \mathcal{K}(\text{r}) \\
&= 0 + (-1) + (-1) + 1 + 1 + (-1) + 1 + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ahora veamos qué resultado arroja la función $\mathcal{K}$ cuando toma como argumento un carácter que no cumple con las reglas de formación de la notación polaca: ppKr

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}(\text{ppDr}) &= \mathcal{K}(\text{p}) + \mathcal{K}(\text{p}) + \mathcal{K}(\text{D}) + \mathcal{K}(\text{r}) \\
&= 1 + 1 + (-1) + 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

De hecho, Enderton demuestra que para cualquier término t, $\mathcal{K}(t) = 1$[63]. Para este trabajo podemos demostrar un resultado análogo:

> Para cualquier fórmula bien formada f de la notación polaca, $\mathcal{K}(f) = 1$[64].

Para demostrarlo, podemos usar una prueba inductiva:

Primero, comprobamos que esta afirmación es verdadera para los caracteres básicos. En este caso, por la misma definición de K, sabemos que

> $\mathcal{K}(x) = 1$, en donde x es un carácter de argumento {0, 1, p, q, r, s…}

Ahora, supongamos que $f_{1\ y}\ f_2$ son dos fórmulas de nuestro esquema de notación. Siendo así tendríamos que comprobar que la propiedad se mantiene cuando a estas fórmulas se les aplica una operación de construcción de fórmula. Veámoslo caso por caso:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}(\text{N}f_1) &= \mathcal{K}(\text{N}) + \mathcal{K}(f_1) = 0 + 1 = 1 \\
\mathcal{K}(\text{K}f_1f_2) &= \mathcal{K}(\text{K}) + \mathcal{K}(f_1) + \mathcal{K}(f_2) = -1 + 1 + 1 = 1 \\
\mathcal{K}(\text{A}f_1f_2) &= \mathcal{K}(\text{A}) + \mathcal{K}(f_1) + \mathcal{K}(f_2) = -1 + 1 + 1 = 1 \\
\mathcal{K}(\text{C}f_1f_2) &= \mathcal{K}(\text{C}) + \mathcal{K}(f_1) + \mathcal{K}(f_2) = -1 + 1 + 1 = 1 \\
\mathcal{K}(\text{D}f_1f_2) &= \mathcal{K}(\text{D}) + \mathcal{K}(f_1) + \mathcal{K}(f_2) = -1 + 1 + 1 = 1 \\
\mathcal{K}(\text{E}f_1f_2) &= \mathcal{K}(\text{E}) + \mathcal{K}(f_1) + \mathcal{K}(f_2) = -1 + 1 + 1 = 1
\end{aligned}
$$

---

[63] Véase el Lema 23 en (Enderton, 2007, p. 105)

[64] Nótese que el condicional recíproco “Dado una concatenación de caracteres f, si $\mathcal{K}(f) = 1$, entonces f es una fórmula bien formada de la notación polaca” es falso. Un ejemplo de esto es qN, la cual no es un carácter que cumpla con las reglas de formación pero para el cuál se cumple que $\mathcal{K}(\text{qN}) = \mathcal{K}(\text{q}) + \mathcal{K}(\text{N}) = 1 + 0 = 1$.

Por lo tanto, para cualquier carácter compuesto f que cumpla con las reglas previamente definidas, es decir, para cualquier fórmula bien formada f de la notación polaca, $\mathcal{K}(f) = 1$.

Calcular el valor que $\mathcal{K}$ le daría a una fórmula es muy simple. Basta con recorrer la fórmula de izquierda a derecha. Al encontrarse con un carácter de una función de dos argumentos restamos 1. Al encontrarnos con un carácter de argumento, sumamos 1. Al encontrarnos con negación, simplemente continuamos con el siguiente carácter.

Una vez que hemos definido la función $\mathcal{K}$ para los caracteres de la notación polaca y hemos presentado la noción intuitiva de los árboles genealógicos, podemos pasar a describir el algoritmo para su construcción de una manera más precisa[65]:

Algoritmo de Revisión A

1) Revisar si todas las hojas contienen únicamente caracteres de argumentos. Si es el caso, hemos terminado nuestro árbol y el carácter en la raíz es una fórmula. Si no, entonces seleccionamos la primera hoja de izquierda a derecha que no sea un carácter de argumento.
2) Una vez seleccionado el nodo, debemos verificar que contenga un carácter compuesto. Si efectivamente tenemos un carácter compuesto, continuamos al siguiente paso. Si no es el caso, finalizamos nuestro trabajo, pues el carácter en la raíz no es una fórmula.
3) Ahora revisamos si el carácter contenido en nuestro nodo seleccionado comienza con una N y el segmento s_1 que sigue a la N cumple con que $\mathcal{K}(s_1)=1$. Si ambas condiciones se cumplen, entonces agregamos un nuevo nodo debajo que contenga al carácter actual excepto la N con la que inicia y regresamos al paso 1. Si no es el caso, pasamos al paso 4.
4) Después revisamos que si el carácter comienza con K, A, C, E o D. Si no empieza con ninguno de estos, entonces el carácter no es fórmula y finalizamos la tarea. Si la respuesta es afirmativa, entonces agregamos dos nodos debajo del nodo actualmente seleccionado y pasamos al siguiente paso.
5) Entonces, sin contar el carácter básico con el que comienza el carácter en el nodo, empezamos a escanear el carácter compuesto de izquierda a derecha hasta encontrar

[65] Enderton (2007, p. 106) ofrece un algoritmo más general que contempla a caracteres de funciones n-ádicas.

un segmento s_1 tal que $\mathcal{K}(s_1)$=1. Ese segmento lo agregamos en el primer nodo vacío que formamos en el paso anterior. Verificamos que el resto del carácter, al cual llamaremos s_2, también cumple con que $\mathcal{K}(s_2)$=1. Si es así, entonces lo agregamos al segundo nodo vacío y regresamos al paso 1. Si no, entonces finalizamos la tarea ya que el carácter en la raíz no es una fórmula.

Si nuestro algoritmo finaliza respondiendo afirmativamente a la pregunta del paso 1, entonces habremos construido el árbol genealógico del carácter en la raíz y habremos demostrado que tal carácter es una fórmula[66].

4.1.5 Un algoritmo más simple

A pesar de que el algoritmo anterior es eficaz para demostrar si una cadena es una fórmula de la notación polaca, no es muy eficiente. ¿Será posible crear un método más simple? Estoy casi seguro de que sí. A continuación el lector encontrará mi propuesta y los avances que he hecho para garantizar su eficacia.

Mi propuesta es la siguiente:

Algoritmo de comprobación B

> Recorre la cadena de caracteres de izquierda a derecha sumando los valores de K de cada carácter. La cadena de caracteres es una fórmula si y sólo si la suma llegó a 1 sólo al terminar de recorrer la cadena.

Esto puede ser expresado de una manera más precisa como una conjetura:

> **Conjetura 1**: Dado una cadena de caracteres C_n compuesto por la concatenación de *n* caracteres básicos, se cumple que C_n es una fórmula sí y sólo sí $\mathcal{K}(C_n)=1$ y $\forall i<n$, $\mathcal{K}(S_i) < 1$, en donde S_i es la concatenación de los primeros i caracteres de C_n.

---

[66] El Dr. Barceló me hizo ver otro algoritmo más simple que el basado en la construcción de árboles genealógicos. Podemos resumir su algoritmo de comprobación de la siguiente manera:

1. Eliminar todas las N, excepto si hay una hasta la derecha. Si la hay, la fórmula está mal formada.
2. Sustituye toda subsecuencia de la forma *Oab* donde *O* es un operador y *a* y *b* son variables proposicionales por una variable proposicional cualquiera.
3. Repite 2 hasta que no existan subsecuencias de la forma Oab.
4. Si y solo sí al finalizar obtienes una letra, entonces la fórmula original está bien formada.

A las diferentes S_i les llamaremos segmentos iniciales propios, siguiendo la terminología de Enderton (2007), quien introduce la noción de segmento inicial. Veamos un ejemplo. Dada la cadena EKpqDNApqDpq, alguno de los segmentos iniciales pueden ser EKpq, EKpqDNAp, E y la misma EKpqDNApqDpq. Un segmento inicial propio descarta la opción de que ese segmento sea igual a la fórmula original.

La primera parte del bicondicional de nuestra conjetura ya fue demostrada por Enderton, quien la presenta como el Corolario 23C en *A mathematical introduction to Logic*:

> **Corolario 23C**: Ningún segmento inicial propio de un término es en sí mismo un término. Si t_1 es un segmento inicial propio de un término, entonces K $(t_1) < 1$.[67] (Enderton, 2007, p. 106)

Quedaría pues en nuestras manos demostrar el recíproco de este condicional. Es decir, demostrar que:

Conjetura 2 $\mathcal{K}(C_n)=1$ y $\forall$ $i<n$, $\mathcal{K}(S_i) < 1 \Rightarrow C_n$ es una fórmula

Este es el condicional más valioso para nuestro algoritmo, pues nos permitiría pasar de los valores de K para la cadena a la afirmación de que es una fórmula. Para demostrar este condicional, apostamos por una prueba inductiva. Adelante encontraremos un esbozo de esta prueba.

Caso Base

Hemos restringido nuestro conjunto de caracteres a los caracteres básicos que definimos al principio de este capítulo. Como caso base, tomemos las cadenas en donde n=1. Es decir, cadenas de un solo carácter. Tenemos dos casos: Ó $\mathcal{K}(C_1) = 1$ ó $\mathcal{K}(C_1) \neq 1$

Caso 1. $\mathcal{K}(C_1) = 1$

Los únicos caracteres simples que tienen un valor K igual a 1 son los caracteres de argumento (1, 0, p, q, r, s….), los cuales, cumplen con nuestra condición 1 de la definición de fórmulas bien formadas. Como el consecuente de la conjetura 2 es verdadero, sabemos que la conjetura será verdadera.

[67] "**Corollary 23C.** No proper initial segment of a term is itself a term. If t_1 is a proper initial segment of a term t, then K (t1) < 1." La traducción es mía.

Caso 2. $\mathcal{K}(C_1) \neq 1$

Este es el caso en el que nuestra cadena consta de un carácter de conectiva. Si fuese este el caso, entonces el antecedente de nuestra conjetura es falso. Por lo tanto, nuestra conjetura también es verdadera.

Paso inductivo

Sea C_{n+1} la concatenación de la cadena C_n y un carácter básico X. Tenemos que demostrar que si el siguiente condicional es verdadero

(a) Si $\mathcal{K}(C_n) = 1$ y $\forall$ **i<n,** $\mathcal{K}(S_i) < 1$, entonces **Cn es una fórmula**.

entonces se debe cumplir que

(b) Si $\mathcal{K}(C_{n+1}) = 1$ y $\forall$ **j<n+1,** $\mathcal{K}(S_j) < 1$, entonces C_{n+1} **es una fórmula.**

Empecemos suponiendo (a) para lograr demostrar (b). Si lo logramos, entonces habremos demostrado el paso inductivo.

Ahora supongamos el antecedente de (b), es decir, que $\mathcal{K}(C_{n+1}) = 1$ y $\forall$ **j<n+1,** $\mathcal{K}(S_j) < 1$**.** Si a partir de esto logramos demostrar que C_{n+1} **es una fórmula** entonces habremos demostrado (b).

El condicional (a) es equivalente a la siguiente afirmación:

(a2) Alguno de los siguientes casos es verdadero:

I. $\mathcal{K}(C_n) \neq 1$

II. $\exists$ i<n, $\mathcal{K}(S_i) \geq 1$

III. C_n es una fórmula

Revisemos cada uno de los casos. Procederé a revisar del caso III al caso I para hacer más fácil seguir la demostración.

Caso III. C_n es una fórmula

Este caso es contradictorio con la segunda afirmación del antecedente de (b) que supusimos más arriba. Es decir, este caso se contradice con que $\forall$ **j<n+1,** $\mathcal{K}(S_j) < 1$**.** Si C_n es una fórmula, entonces $\mathcal{K}(C_n)=1$. Pero C_n es una secuencia inicial de C_{n+1}. De hecho, es S_n.

Entonces deberíamos concluir que $\exists$ j<n+1 para el que no se cumple que $\mathcal{K}(S_j) < 1$. Así que descartamos este caso.

Caso II. $\exists$ i<n, $\mathcal{K}(S_i) \geq 1$

Este caso también es contradictorio con $\forall$ **j<n+1,** $\boldsymbol{\mathcal{K}(S_j) < 1}$, pues dicha secuencia inicial S_i de C_n tal que $\mathcal{K}(S_i) \geq 1$ es a su vez una secuencia inicial de C_{n+1}. También descartamos este caso.

Caso I. $\mathcal{K}(C_n) \neq 1$

Afirmar $\mathcal{K}(C_n) \neq 1$ es equivalente a afirmar que:

o $\boldsymbol{\mathcal{K}(C_n) >}$ 1 o $\boldsymbol{\mathcal{K}(C_n) = 0}$ o $\boldsymbol{\mathcal{K}(C_n) < 0}$

La primera opción es equivalente a afirmar que una secuencia inicial de C_{n+1} tiene un valor de k mayor a 1. Esto nuevamente entra en contradicción con $\forall$ **j<n+1,** $\boldsymbol{\mathcal{K}(S_j) < 1}$**.**

A su vez, la última opción entraría en contradicción con la primera afirmación del antecedente de (b), es decir, con que $\mathcal{K}(C_{n+1}) = 1$. Si $\mathcal{K}(C_n) < 0$, entonces el valor K del carácter básico X que agregamos a C_n para obtener C_{n+1} debería ser mayor a 1. Es decir, $\mathcal{K}(X) > 1$. Pero no existe ningún carácter básico con un valor K mayor a 1. Entonces, es imposible satisfacer al mismo tiempo a $\mathcal{K}(C_{n+1})=1$ y $\mathcal{K}(C_n) < 0$.

Por lo tanto, tiene que ser el caso que $\boldsymbol{\mathcal{K}(C_n) = 0}$**.**

***

Desafortunadamente, es hasta aquí hasta donde llegan mis avances. A partir de este punto tenemos que demostrar que C_{n+1}. O dicho de otro modo, garantizar que se puede construir el árbol genealógico de C_{n+1}.

Solo me queda hacer un resumen de los supuestos con los que nos quedamos hasta este punto de la prueba:

1. $\mathcal{K}(C_n) = 0$. Esto puede ser interpretado como que existe el mismo número de caracteres de conectiva diádica que caracteres de argumento.
2. $\mathcal{K}(C_{n+1}) = 1$. Esto, junto a lo anterior, nos lleva a concluir que X es un carácter de argumento {1, 0, p, ... }

3. $\forall$ $j<n+1$, $\mathcal{K}(S_j) < 1$. Esto me hace pensar que existe una función inyectiva tal que a cada carácter de argumento de C_n le asigne una conectiva diádica que está a su izquierda. Al conjuntarlo con 1, se sigue que dicha función es biyectiva.

Esta función biyectiva debe corresponder a las aristas que conectan las hojas del árbol genealógico. Sin embargo, aún no he encontrado una forma de llegar a ellas.

En el anexo 2 de esta tesis, el lector encontrará los resultados de un algoritmo de fuerza bruta que demuestra que la conjetura y el método de comprobación a partir de barrido funcionan para todas las cadenas de caracteres con una extensión menor o igual a 14. Espero que estos resultados parciales ayuden a que otras personas puedan interesarse en completar esta prueba.

4.2 Las pruebas

Además de seleccionar caracteres y diseñar las reglas de formación, Łukasiewicz se esmeró en introducir junto a la notación polaca un estilo de la escritura de pruebas. Estas pruebas tienen sus propias reglas e incluso sus propios caracteres, pero poco se ha escrito sobre este estilo en los textos que nos presentan a la notación polaca. Creo que es valioso que conozcamos y comprendamos esta manera de escribir pruebas por dos razones: 1) nos permite acercarnos de manera más fiel a los textos originales de Łukasiewicz y 2) como veremos adelante con más a detalle, este estilo de pruebas refleja la importancia que tenía para Łukasiewicz la eficiencia, la simpleza y el rigor en la presentación de resultados en lógica.

Dividiré esta presentación del estilo polaco de pruebas formales en dos partes. En primer lugar, expondré el sistema de axiomas y reglas que usa Łukasiewicz para construir su sistema de cálculo proposicional. Después, ahondaremos en la característica esencial de este estilo: las líneas de justificación.

4.2.1 Axiomas

El cálculo de Łukasiewicz es un sistema deductivo axiomático. Como ya habíamos mencionado en el apartado histórico, Łukasiewicz trabajó durante toda su vida con varios conjuntos de axiomas o axiomas únicos para el cálculo proposicional. Probablemente el conjunto más sencillo que podemos seleccionar para comprender cómo se desarrolla una prueba polaca es el conjunto que aparece en los *Elementos.* (Łukasiewicz, 1963) En esta obra el autor seleccionó el conjunto conformado por las siguientes tres fórmulas como los axiomas del sistema:

Ax.1 CCpqCCqrCpr	S.Hipotético	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
Ax. 2 CCNppp	Ley de Clavius	$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
Ax. 3 CpCNpq	Ley de Duns Scoto	$p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$

Podemos suponer que Łukasiewicz encontraba en estos axiomas tres importantes características para que sirvieran como axiomas de un cálculo formal: 1) De hecho, hacen que el sistema sea completo y consistente. 2) A diferencia de los axiomas de Frege, de Hilbert o de Russell-Whitehead, en este conjunto todos los axiomas son independientes entre sí (Łukasiewicz & Tarski, 1930) y 3) podemos identificarlos fácilmente con leyes lógicas que hemos reconocido históricamente.

Sin embargo, sabemos que la búsqueda de la escuela polaca por variantes que sirvieran como axiomas de su sistema proposicional dio frutos y que podemos seleccionar incluso un solo axioma que sirva como la base de nuestro sistema. Me parece relevante mencionar dos.

El primero de estos fue descubierto por Tarski, Łukasiewicz y Sobocinski en la década de los 20. Al igual que los axiomas de Łukasiewicz, los únicos caracteres de operador que lo conforman son N y C:

Axioma 1b: CCCpCqpCCCNrCsNtCCrCsuCCtsCtuvCwu

Este axioma está compuesto de 33 letras, dos caracteres de operador (N, C) y seis caracteres de argumento (p, q, r, s, t, u, v, w). En su momento fue presentado como el axioma más corto que conocieran los miembros más importantes de la escuela polaca. (Łukasiewicz & Tarski, 1930)

Sin embargo, en el texto "Comentarios sobre el axioma de Nicod" (Łukasiewicz, 1931), Łukasiewicz menciona que para 1925 ya había encontrado el siguiente axioma único que hemos introducido en el apartado histórico y seguiremos hablando de él durante el siguiente capítulo:

Axioma Ł: DDpDqrDDsDssDDsqDDpsDps

Este axioma tiene únicamente 23 letras, un carácter de operador (D) y cuatro caracteres de argumento (p, q, r, s).

4.2.2 Reglas de inferencia y definiciones

Ahora que ya tenemos los axiomas de nuestro sistema, es necesario que contemos con reglas de transformación que nos permitan hacer operaciones con ellos. Łukasiewicz (1963) consideró que era suficiente con tener tres reglas de inferencia: la regla de sustitución, la regla de separación y la regla del reemplazo.

Regla de sustitución

> *Si una fórmula α es una tesis del sistema, entonces cualquier expresión que sea una sustitución correcta de la fórmula α será también una tesis del sistema.*

Para entender a cabalidad esta regla es necesario definir qué es una "sustitución correcta". Łukasiewicz lo define de la siguiente manera:

> Decimos que una expresión [fórmula] β es una correcta sustitución de la expresión α sí y sólo sí β difiere de α únicamente en que en el lugar en el que aparece cierta variable en α, la expresión β tiene una expresión significativa [una fórmula], tal que dicha expresión significativa en β sea equiforme donde quiera que corresponda a variable equiformes en α. (Łukasiewicz, 1963, p. 39)[68]

En otras palabras, si tenemos una fórmula α, podemos sustituir una de sus variables, en todas su apariciones, por una fórmula β. El resultado sería una sustitución correcta de α. Si α es tesis, además podemos reconocer al resultado como una tesis del sistema gracias a la regla de sustitución. Esta regla es lo que ahora conocemos como sustitución uniforme.

Por ejemplo, tomemos al axioma 3 de nuestro sistema:

C**p**CN**p**q

Ahora, nosotros decidimos sustituir el carácter p por la fórmula CNpq. Entonces obtendremos:

[68] "We say that an expression β is a correct substitution of the expression α if and only if β differs from α only in that place of certain variables which occur in α the expression β has certain meaningful expressions, such that meaningful expressions in β are equiform whenever they correspond to equiform variables in α." La traducción y el texto entre corchetes son míos,

C**CNpq**CN**CNpq**q.

Dado que CpCNpq y CCNpqcnCNpqq solo difieren en que cada vez que aparece p en la primera, aparece CNpq en la segunda, podemos reconocer a la segunda como una sustitución correcta del axioma 3. Además, como el axioma 3 es una tesis del sistema, entonces debemos reconocer a CCNpqcnCNpqq como una tesis del sistema.

Regla de separación

> *Si las fórmulas α y β son tesis del sistema y la fórmula α es un condicional que tiene por antecedente a la fórmula β, entonces la fórmula γ que esté como consecuente de α será también una tesis del sistema.*

Esta regla no es otra que Modus Ponens. Si tenemos una fórmula condicional como nuestro Axioma 2 C**CNpp**p y supongamos que sabemos que la fórmula **CNpp** es una tesis de nuestro sistema, entonces podemos concluir que p es también una tesis.

Quizá más interesante sería discutir la regla de separación que adapta para sistemas cuya única conectiva es D.

Regla de separación para D (NAND)

Si tenemos una tesis de la forma DαD$\beta\gamma$ y α es también una tesis, entonces la fórmula γ puede ser agregada como tesis del sistema. El que Łukasiewicz la considere como una versión de la regla de separación nos lleva a pensar que consideraba a esta regla y sus variantes como algo propio de los sistemas de lógica proposicional.

Esta regla es válida pues Dαβ (α | β) es equivalente a NKαβ ¬(α ∧ β). A su vez, estas dos fórmulas son equivalentes a CαNβ (α → ¬β) Por lo tanto:

$$\mathrm{D}\alpha\mathrm{D}\beta\gamma \Leftrightarrow \mathrm{NK}\alpha\mathrm{NK}\beta\gamma \Leftrightarrow \mathrm{C}\alpha\mathrm{NNK}\beta\gamma \Leftrightarrow \mathrm{C}\alpha\mathrm{K}\beta\gamma$$

$$(\alpha \mid (\beta \mid \gamma)) \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \gamma)) \Leftrightarrow \alpha \to \neg\neg(\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$$

Entonces, una tesis de la forma DαD$\beta\gamma$ es equivalente a un condicional con α como antecedente.

Regla de reemplazo

Si una ecuación X = Y es una sustitución uniforme de una definición, entonces toda sustitución (no necesariamente uniforme) de Y por (por lo menos alguna, pero no necesariamente toda) X o de X por Y en una tesis A es también una tesis.

Como el lector pudo notar, esta regla depende de las definiciones que introducimos a continuación:

- Definición 01. Apq = CNpq
- Definición 02. Kpq = NCpNq
- Definición 03. Dpq = CpNq
- Definición 04. Epq = NCCpqNCqp

Łukasiewicz nos explica cómo funciona esta regla a través de un ejemplo[69]. Tomemos otra vez nuestro axioma 2:

CCNppp

Este axioma es una fórmula condicional cuyo antecedente es CNpp, el cual resulta ser una sustitución correcta de la fórmula CNpq que podemos encontrar en la definición 1.

Def 1. (sust) App = CNpp

Entonces nosotros podemos reemplazar CNpp por App en el axioma 2, obteniendo la nueva tesis del sistema:

CAppp

Cabe mencionar que la regla de reemplazo, a diferencia de la regla de sustitución, no obliga al usuario a que se reemplace cada una de las apariciones de la subformula β por su fórmula correspondiente según la definición. De este modo, si tuviéramos una tesis cómo:

CCNppCNpp

Entonces nosotros podemos reemplazar la primera aparición de CNpp por App, pero dejar la segunda como está, obteniendo la tesis:

[69] Op. Cit., p. 40

CAppCNpp

También cabe destacar que Łukasiewicz en sus *Elementos* apuesta por una versión que a su parecer es más débil (y quizá más exacta) de esta fórmula, que podríamos redactar de la siguiente manera:

Si una ecuación X = Y es una sustitución uniforme de una definición, entonces toda sustitución (no necesariamente uniforme) de Y por (por lo menos alguna, pero no necesariamente toda) X en una tesis A es también una tesis.

Sobre esta formulación, Łukasiewicz dice lo siguiente:

> Noten que nuestra regla del reemplazo no establece nada sobre reemplazar el definiendum [lado izquierdo] por el definiens [lado derecho]. Se ha dado una versión más débil de manera deliberada, dado que esta definición es suficiente para hacer completo uso de las definiciones. [70] (Łukasiewicz, 1963, p. 40)

Esta definición sigue el espíritu de Łukasiewicz al apostar por las versiones más simples y débiles de nuestros supuestos al construir el sistema. Sin embargo, pone en aprietos al usuario al limitar las conclusiones que nosotros podemos obtener de tesis que contengan conectivas diferentes de C y N, pues no tenemos reglas de eliminación de las otras conectivas. Véase, por ejemplo, si quisiéramos justificar la tesis CNpNp $(\neg p \rightarrow \neg p)$ a partir de la tesis equivalente DNpp $(p \mid \neg p)$. Con una regla como la que hemos propuesto en un principio, la justificación es muy sencilla.

1. Comenzamos con la tesis DNpp.
2. En la definición 03 (Dpq = CpNq) sustituimos p por Np y sustituimos q por p. Entonces obtendremos la igualdad DNpp = CNpNp.
3. Entonces, justificados en la regla de reemplazo, reemplazamos DNpp por CNpNp y esta última es aceptada como tesis del sistema.

En cambio, con una regla más apegada a la visión de Łukasiewicz el procedimiento tendría que ser el siguiente.

[70] "[...] Note that our rule of replacement does not state anything about replacing the definiendum by the definiens. It has been deliberately given a weaker formulation, since even in that version it suffices to make a full use of the definitions." La traducción y los corchetes son míos..

1. Antes que todo, deberíamos haber reconocido a la fórmula Cpp como una tesis del sistema.
2. Comenzamos con la tesis DNpp.
3. En la tesis Cpp, sustituimos p por nuestra fórmula objetivo: CNpNp. De ahí obtenemos la tesis C CNpNp CNpNp.
4. En la definición 03 (Dpq = CpNq) sustituimos p por Np y sustituimos q por p. Entonces obtendremos la igualdad DNpp = CNpNp.
5. Justificados en la regla de reemplazo, reemplazamos CNpNp por DNpp en el antecedente de la tesis obtenida en 3. El resultado es C DNpp CNpNp.
6. Justificados en la regla de separación, usamos la tesis de 2 para separar el consecuente del condicional en 5, obteniendo la fórmula que buscábamos CNpNp.

La diferencia entre la enunciación de las reglas es mínima, pero, como espero haya dejado en claro este ejemplo, las ventajas pueden ser importantes. Así que he considerado que la primera versión ofrece un buen equilibrio entre simplicidad metodológica y ventajas ergonómicas.

4.2.3 Pruebas *à la* polaca

Ahora que contamos con todos los elementos necesarios, podemos pasar a otro aspecto relevante: la notación que Łukasiewicz proponía para las pruebas formales. A diferencia de la notación para las fórmulas que fue adoptada en los escritos de una buena parte de la escuela polaca, no encontramos evidencia de la notación de las pruebas en publicaciones que no fuesen las de Łukasiewicz. Sin embargo, que no fuese popular en su momento no significa que carezca de valor para el presente. De hecho, como veremos en los capítulos siguientes, el particular estilo de Łukasiewicz nos puede arrojar luz sobre la misión e ideales de Łukasiewicz, así como ideas para nuevas notaciones.

Creo que la manera más fácil de exponer las particulares características de una prueba escrita con el estilo polaco, es primero mostrar una prueba completa y diseccionar sus componentes. Veamos entonces la prueba que demuestra que Cpp ($p \rightarrow p$) es una tesis del sistema.

Ax. 1.	CCpqCCqrCpr
Ax. 2.	CCNppp
Ax. 3.	CpCNpq

1 q/CNpq * C3 - 9

T. 9. CCCNpqrCpr

9 q/p, r/p * C2 - 16

T. 16. Cpp

Como podemos observar, la diferencia principal entre una prueba estándar y una prueba polaca son las líneas de justificación. Cada línea nos brinda toda la información necesaria para obtener la siguiente tesis, partiendo de las aceptadas anteriormente. Tomemos la línea de justificación del teorema 9 y diseccionamos sus partes.

1 q/CNpq * C3 - 9

A diferencia del estilo que se adopta en libros habituales en clases de lógica como del Copi o el de Enderton[71], en donde cada paso consiste en una aplicación de una regla particular, en las pruebas polacas es habitual que cada paso consista en una aplicación de la regla de separación, junto con la aplicación de las sustituciones necesarias para realizarla. En este caso, la sección en rojo nos indica que para generar el condicional al que se le aplicará la regla de sustitución hay que realizar una sustitución, mientras que la sección en naranja nos indica cómo se realizó la regla de separación. Tomemos primero la sección en rojo:

1 q/CNpq

Podemos leer esta sección como si nos dijera: *En la tesis número 1, debemos sustituir cada aparición de la variable q por la fórmula CNpq.* En esta prueba, la tesis número 1 es el axioma CCp**q**CC**q**rCpr. Al aplicar dicha instrucción, obtenemos CCp**CNpq**CC**CNpq**rCpr. Pero como podrá ver el lector, a pesar de que esta fórmula es una tesis del sistema justificada a partir de la regla de sustitución, no es la que aparece como tesis 4.

[71] En el caso de Copi, cada línea consta de una aplicación de una de las formas válidas elementales de argumento. (Copi & Cohen, 2007) En el caso de Enderton, cada línea consta de una o más aplicaciones del Modus Ponens o de alguno de sus teoremas de generalización y deducción. Véase (Enderton, 2007, p. 122) Nótese cómo estas opciones son diferentes a la notación polaca, en donde se pueden llevar a cabo una o más aplicaciones de una o más reglas en una sola línea. El siguiente ejemplo lo dejará más claro.

Esto es porque al resultado de la regla de sustitución, además tuvimos que aplicarle la regla de separación. Las instrucciones vienen en la sección en naranja:

C3 - 9

Esta sección la podemos leer de la siguiente manera: *El resultado es un condicional* (C) *cuyo antecedente es la tesis número 3 y cuyo consecuente es nuestra tesis 9.*[72] En el lugar en donde en este ejemplo está el número 3 se espera que esté el número de una fórmula que ya reconocimos como tesis. Entonces, por la regla de separación, el consecuente sería también una tesis del sistema y es la que colocamos como teorema en la siguiente línea. En nuestro ejemplo, el resultado de la regla de sustitución fue C**CpCNpq**CCCNpqrCpr, un condicional cuyo antecedente es el axioma 3 de nuestro sistema. Por lo tanto, podemos introducir como tesis al consecuente CCCNpqrCpr como el teorema 4.

La línea de justificación del teorema 16 se lee de la misma manera:

5 q/p, r/p * C2 - 16

La sección en rojo nos dice que en el teorema 4 sustituyamos la *q* por *p* y *r* por *p*. De ahí obtenemos CCCNpppCpp. La sección en naranja nos dice que nuestro resultado C**CCNppp**Cpp tiene como antecedente al axioma 2, por lo que debemos reconocer a su consecuente como el teorema 16. Así demostramos, que Cpp es una tesis de nuestro sistema.

Hasta aquí hemos descrito la notación para las reglas de sustitución y separación. Para ejemplificar la notación para la regla del reemplazo, usemos las tesis probadas para demostrar que CCApqrCpr[73]. De hecho, solo necesitaremos una línea para demostrarlo.

9 * 01 · 9a

T. 9a CCApqrCpr

Cuando aparece un punto · nos indica que se está aplicando la regla de reemplazo. La línea de justificación de nuestro ejemplo la podemos leer como: *a la tesis 9 se aplicó la regla de reemplazo usando la definición 01 para obtener la tesis 9a.*

[72] En el caso de la versión de la regla de separación para D, la línea se podría escribir D3 DX - 4, en donde X puede ser el número de alguna tesis (incluso una que no haya aparecido previamente) y

[73] $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ en la notación Hilbert-Ackermann

Veamos un ejemplo más complejo. Con la siguiente prueba, Łukasiewicz demuestra que CApqCqpp es una tesis del sistema[74].

Ax. 1. CCpqCCqrCpr

Ax. 2. CCNppp

Ax. 3. CpCNpq

1 p/Cpq, q/CCqrCpr, r/s * C1 - 4

T. 4 CCCCqrCprsCCpqs

4 q/Cqr, r/Csr, s/CCsqCpCsr * C4 p/s, s/CpCsr - 5

T. 5 CCpCqrCCsqCpCsr

4 s/CCCprsCCqrs * C1 p/Cqr, q/Cpr, r/s - 6

T. 6 CCpqCCCprsCCqrs

5 p/Cpq, q/CCprs, r/CCqrs, s/t * C6 - 7

T. 7 CCtCCprsCCpqCtCCqrs

1 q/CNpq * C3 - 9

T. 9. CCCNpqrCpr

9 r/CCCNpppCCqpp * C6 p/Np, r/p, s/p - 10

T. 10 CpCCCNpppCCqpp

10 p/CCNppp * C2 - C2 p/CCNppp - 11

T. 11 CCqCCNpppCCNppp

9 p/t, q/CCNppp r/CCNpppp * C11 q/Nt - 12

T. 12 CtCNppp

[74] Para que el lector pueda seguir esta prueba de manera exhaustiva sin necesidad de enfrentarse al proceso de las sustituciones programé un pequeño asistente que aplica las reglas de sustitución y de separación de manera automática. El lector puede acceder a este asistente a través del siguiente liga https://onlinegdb.com/ByY5gSCvI

	7 p/Np, r/p, s/p * C 12 - 13
T. 13	CCNpqCtCCqpp
	1 p/CNpq, q/CtCCqpp * C13-14
T. 14	CCCtCCqpprCCNpqr
	14 t/NCCqpp, r/CCqpp * C2 p/CCqpp - 15
T. 15	CCNpqCCqpp
	15 * 01 · 15a
T. 15a	CApqCqpp

A diferencia del ejemplo anterior, en esta prueba encontramos líneas de justificación más complejas.

Revisemos la del teorema 11:

10 p/CCNppp * C2 - C2 p/CCNppp - 11

¿Cómo debemos leer estas instrucciones? Primero, se nos indica que, para obtener el condicional que usaremos en la separación, necesitamos sustituir p por CCNppp en el teorema 10. El resultado de dicha operación sería:

C**CCNppp**C<u>CCNCCNpppCCNpppCCNppp</u>CCqCCNpppCCNppp

Lo cual coincide con el resto de la indicación de Łukasiewicz: Es un condicional cuyo antecedente (en negritas) es el axioma 2 y cuyo consecuente es, a su vez, un condicional que tiene por antecedente (subrayado) al axioma 2 con p sustituido por CCNppp y como consecuente a la tesis 11. Entonces, después de dos aplicaciones de la regla de separación obtenemos 10.

Utilizando este estilo de pruebas, Łukasiewicz logró ofrecer pruebas completamente formales para 143 teoremas en sus *Elementos.* (Łukasiewicz, 1963, p. 42-66) Entre ellas podemos destacar los axiomas de Hilbert (T. 18, 21, 22, 30 y 54 más el axioma 3) y los axiomas de la *Principia Mathematica* (T. 73, 74, 74, 76 y 78), probablemente con el objetivo de demostrar la superioridad de su conjunto de axiomas sobre las otras propuestas.

4.3 Traducción a Hilbert - Ackermann

Para facilitar la lectura, hasta ahora he acompañado a las fórmulas polacas de una versión equivalente en una notación estándar de Hilbert y Ackermann. Sin embargo, creo valioso terminar este capítulo con una sección dedicada a métodos de traducción entre ambas notaciones. Es por ello que en esta última sección expondré un par de algoritmos que nos ayudarán a transformar fórmulas de la notación polaca en fórmulas de la notación estándar y viceversa.

Dado que para cada conectiva importante tiene su propio carácter asignado en ambas notaciones, es posible obtener para cada fórmula de la notación polaca una fórmula análoga de la notación estándar con el mismo número y jerarquía de conectivas, lo que haría a ambas equivalente con respecto a la formalización lógica de oraciones en el lenguaje natural. Lo mismo se mantiene partiendo de la notación estándar a la notación polaca.

Entonces, ¿cuál es el reto que necesitan resolver nuestros algoritmos de traducción? Pasar de una notación infija a una prefija y viceversa. Esto implica que el algoritmo debe manejar efectivamente los paréntesis de la notación infija. Además, no debería causar demasiadas complicaciones al usuario. Así pues, nuestras técnicas tienen que ser eficientes y efectivas al traducir. Considero que los métodos expuestos a continuación cumplen con tales requisitos.

4.3.1 De Hilbert-Ackermann a Polaca[75]

El algoritmo de traducción de una fórmula de la notación de Hilbert Ackermann a una polaca se puede resumir en cuatro pasos[76]:

1. Encerrar entre paréntesis la fórmula completa.
2. Recorrer la fórmula de izquierda a derecha y, al encontrar una conectiva, reemplazar el paréntesis más cercano a su izquierda por dicha conectiva.
3. Cambiar todos los caracteres de conectiva por los que corresponden en notación polaca. (Véase la tabla al inicio de este capítulo)

[75] Junto con el algoritmo manual que a continuación expondré, he implementado un servicio web que nos permite traducir fórmulas de notación estándar a polaca automáticamente. Lo pueden encontrar en https://jeduardomdehilario4.wixsite.com/zhishi/traductor-notacion-estandar-a-polac

[76] Este método es una adaptación del algoritmo presentado en (Chu, 2002)

4. Eliminar el resto de paréntesis.

Veamos cómo funciona el algoritmo a través de un ejemplo. Traduzcamos la fórmula

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg\, (p \vee q) \,/\, (p \rightarrow p))$$

1. Encerrar entre paréntesis la fórmula completa.

$$((p \wedge q) \leftrightarrow (\neg\, (p \vee q) \,/\, (p \rightarrow p)))$$

Este paso nos ayuda a garantizar que cada conectiva diádica esté circunscrita por al menos un par de paréntesis. Lo que nos permite realizar el siguiente paso sin excepciones.

2. Recorrer la fórmula de izquierda a derecha y, al encontrar una conectiva, reemplazar el paréntesis más cercano a su izquierda por dicha conectiva.

Por ejemplo, si empezamos con

$$((p \wedge q) \leftrightarrow (\neg\, (p \vee q) \,/\, (p \rightarrow p)))$$

El primer operador de la izquierda es la conjunción

$$((p \wedge q) \leftrightarrow (\neg\, (p \vee q) \,/\, (p \rightarrow p)))$$

y el paréntesis abierto más cercano hacia su izquierda es el segundo abierto

$$((p \wedge q) \leftrightarrow (\neg\, (p \vee q) \,/\, (p \rightarrow p)))$$

al poner el operador en lugar del paréntesis, nos queda:

$$(\wedge\, p\, q) \leftrightarrow (\neg\, (p \vee q) \,/\, (p \rightarrow p)))$$

Repitiendo este proceso para el resto de los operadores, obtenemos la secuencia de símbolos que buscábamos:

$$\leftrightarrow \wedge\, p\, q) \,/\, \neg \vee p\, q) \rightarrow p\, p)))$$

Noten que con este paso logramos que cada conectiva diádica esté por delante de sus argumentos, pues ese es el lugar que ocupaban los paréntesis de apertura.

3. Cambiar todos los caracteres de conectiva por los que corresponden en notación polaca.

La fórmula que estamos traduciendo contiene las seis conectivas diferentes, por lo que es conveniente ver nuestra tabla de equivalencia de nuevo.

Caracteres de conectivas en la notación Hilbert-Ackermann	Caracteres de conectivas en la notación polaca.
¬	N
→	C
∧	K
∨	A
↔	E
/	D

Al cambiar cada conectiva, nuestra fórmula quedaría:

E K p q) D N A p q) C p p)))

4. Eliminar paréntesis.

Al eliminar los paréntesis restantes, el resultado sería una fórmula bien formada de la notación polaca.

E K p q D N A p q C p p

Este paso, además, nos ayuda a eliminar paréntesis dobles que la fórmula original hubiese tenido. Es entonces, que tenemos un algoritmo simple de realizar a mano para cualquiera interesado en traducir entre la notación de Hilbert y la polaca.

4.3.2 De polaca a Hilbert-Ackermann[77]

El algoritmo para traducir de la notación polaca a Hilbert-Ackermann en realidad es una adaptación de algunos algoritmos bien conocidos para pasar de una notación postfija a una infija.[78] La idea detrás de dichos algoritmos está en una estructura de datos conocida como "pila". Sin embargo, a continuación encontrarán un algoritmo pensado para ser realizado por usuarios humanos y no necesariamente máquinas.

El procedimiento consiste en ir revisando cada uno de los caracteres de la fórmula polaca de derecha a izquierda. Cada carácter nos obligará a realizar una acción. Al finalizar habremos escrito su traducción a Hilbert Ackermann de derecha a izquierda. Las reglas son las siguientes.

1. Si encontramos una variable, la copiamos a la izquierda del último carácter que hayamos escrito dejando un espacio entre ellas.

2. Si encontramos una conectiva diádica, la escribimos en el espacio libre más a la izquierda que encontramos. Luego, colocamos un paréntesis de apertura por delante de la subfórmula a la izquierda de nuestra conectiva y un paréntesis de cierre adelante de la subfórmula a la derecha.

3. Si encontramos una N, copiamos a la izquierda del carácter más a la izquierda sin dejar espacio.

Al revisar cada uno de los caracteres, debemos cambiar los caracteres de conectiva de la notación polaca por los de Hilbert Ackermann y con eso tendremos una fórmula bien formada de la notación de Hilbert-Ackermann.

Revisemos este algoritmo con un ejemplo. Traduzcamos de vuelta a la fórmula

E K p q D N A p q C p p

Empezamos a recorrer la fórmula de derecha a izquierda, por lo que el primer elemento a revisar será la última letra p.

E K p q D N A p q C p p

[77] Además del algoritmo manual que expondré en este apartado, pueden encontrar un pequeño programa de traducción en la siguiente liga https://jeduardomdehilario4.wixsite.com/zhishi/traductor-notacion-polaca-a-estanda

[78] Es difícil ubicar quién presentó por primera vez este algoritmo. Pero no es complicado encontrar exposiciones de este tipo en páginas web de referencias. Por ejemplo (Singh, 2019)

Al ser una variable, aplicamos la regla 1 y escribimos en nuestra fórmula-resultado la misma p

E K p q D N A p q C p p

p

El segundo carácter que revisamos es nuevamente p. Aplicamos nuevamente la regla 1, escribiendo una nueva p a la izquierda de la anterior con un espacio en medio.

E K p q D N A p q C p p

p p

El tercer carácter es C, una conectiva. Entonces aplicamos la regla 2 y lo colocamos en el espacio más a la izquierda. En este caso, al ser el único espacio disponible, colocaremos la conectiva entre ambas p

E K p q D N A p q C p p

p C p

La regla 2 también nos indica que debemos poner paréntesis a la izquierda de la subfórmula izquierda y a la derecha de la subfórmula derecha de la conectiva que acabamos de colocar.

E K p q D N A p q C p p

(p C p)

El siguiente carácter es la letra q. Aplicamos la regla 1 dejando un espacio de la fórmula entre paréntesis.

E K p q D N A p q C p p

q (p C p)

La regla 1 debe ser aplicada a la p a continuación.

E K p q D N A p q C p p

p q (p C p)

El siguiente carácter es la letra A, un carácter de conectiva. Por lo tanto, debemos aplicar la regla 2 y colocar la A en medio del espacio más a la izquierda. Es decir, entre p y q. Luego, cerrar los paréntesis.

E K p q D N A p q C p p

(p A q) (p C p)

La letra N es el único carácter para el que aplica la regla 3. Copiamos la N a la izquierda de los paréntesis que acabamos de colocar. Esta vez, sin dejar espacio.

E K p q D N A p q C p p

N(p A q) (p C p)

Aplicamos la regla 2 con la D.

E K p q D N A p q C p p

(N(p A q) D (p C p))

Aplicamos la regla 1 con la q y la siguiente p.

E K p q D N A p q C p p

q (N(p A q) D (p C p))

E K p q D N A p q C p p

p q (N(p A q) D (p C p))

Aplicamos la regla 2 con la siguiente K, colocándola en el espacio más a la izquierda.

E K p q D N A p q C p p

(p K q) (N(p A q) D (p C p))

Por último, aplicamos la regla 2 con la E final. La colocamos en el único espacio disponible.

E K p q D N A p q C p p

((p K q) E (N(p A q) D (p C p)))

Ahora tenemos a todos los operadores entre sus argumentos. Ahora solo intercambiamos los caracteres de operador polaco por los de Hilbert-Ackermann usando la tabla al principio del capítulo y obtenemos:

((p K q) E (N(p A q) D (p C p)))

((p ∧ q) ↔ (¬(p ∨ q) / (p →p)))

4.4 Extensiones de la notación polaca

Este trabajo de titulación estuvo centrado en la notación polaca para la lógica de proposiciones desde un principio. Nos pareció que este componente era suficiente para presentar los argumentos detrás de esta tesis y, por ello, se analizaron al resto de notaciones solo en su componente proposicional. Esto podría dar la equivocada idea, la cual confieso que tenía por verdadera al iniciar mi investigación, de que la notación polaca se encuentra limitada a la lógica proposicional. Sin embargo, uno no podría estar más equivocado. Existen extensiones de la notación polaca que nos permiten trabajar con lógica de Primer Orden y lógica Modal.

Para terminar este capítulo presentaré los caracteres que necesitamos incluir para extendernos a estas tres áreas, junto con algunos ejemplos de traducciones entre los lenguajes natural y formal. Recuperaremos las extensiones tal y como se presenta en el libro *Formal Logic* de Arthur N. Prior (1963) y en el artículo "Un sistema de lógica modal" (*A* *system of modal logic*) de Łukasiewicz (1953). Se asumirá que los lectores ya conocen los sistemas construidos a partir de notaciones derivadas de Peano.

4.4.1 Lógica de Primer Orden

La notación polaca para la lógica de primer orden tiene cinco tipos de caracteres: los caracteres de conectivas, los de predicados, los de cuantificadores y los caracteres para variables y constantes individuales.

Los **caracteres de conectivas** permanecen igual que en la notación para lógica proposicional:

Para los **caracteres de predicados**, Prior recuperó las letras minúsculas del alfabeto griego: φ, ψ, θ, γ….

Como vimos en el capítulo 5, dos letras griegas mayúsculas habían sido introducidas como **caracteres de cuantificadores** por Łukasiewicz junto con su sistema de lógica proposicional con cuantificadores[79]:

- Π (pi mayúscula) para el cuantificador universal
- Σ (sigma mayúscula) para el cuantificador existencial.

Pero a diferencia del sistema de Łukasiewicz, Prior los introduce para que operen igual que los cuantificadores ∀ y ∃ del sistema de Russel y Whitehead.

Para las **variables individuales**, Prior propone usar las últimas letras minúsculas del alfabeto latino: x, y, z… de manera similar a como se hace en otras disciplinas matemáticas.

Desafortunadamente, Prior no introduce ningún conjunto de caracteres especiales para las **constantes individuales**. El problema es más grande cuando nos damos cuenta que mezcla variables proposicionales y sus caracteres (p, q, r...) dentro del sistema de primer orden, por lo que la solución común de tomar al resto de letras que no representan variables individuales como posibles constantes puede resultar complicado. Me queda, pues, recuperar la segunda común: establecer que los caracteres para las constantes individuales serán las primeras letras del alfabeto (a, b, c, d….).

[79] Véase Łukasiewicz (1963), pp. 92-102

El carácter X es una fórmula bien formada de este lenguaje si y solo si cumple con alguna de estas condiciones:

1. X es la concatenación de un carácter de predicado de n lugares y seguido por n caracteres de constante o variable individuales.
2. X es la concatenación del carácter N seguido por una fórmula bien formada.
3. X es la concatenación de alguno de los caracteres C, K, A, E o D seguido por dos fórmulas bien formadas
4. X es la concatenación de un carácter de cuantificador seguido por una variable individual y una fórmula bien formada.

Al igual que en el sistema de Russell y Whitehead, una fórmula bien formada que no contenga variables libres será considerada un término del sistema.

Tomemos el siguiente diccionario para poner algunos ejemplos de traducciones del lenguaje natural a la lógica de primer orden usando notación polaca.

Dominio: El conjunto de los lógicos.	a: Łukasiewicz
φx: x es Polaco	b: Tarski
ψxy: x es alumno de y	c: Gödel
θxy: x es colega de y	d: Prior

φa	Łukasiewicz es polaco.
Nφd	Prior no es polaco.
Kφaφb	Łukasiewicz es polaco y Tarski es polaco.
ψba	Tarski es alumno de Łukasiewicz
Cψbaφb	Si Tarski es alumno de Łukasiewicz, entonces Tarski es polaco.
CAθcbθcdθca	Si Gödel es colega de Tarski o de Prior, entonces Gödel es colega de Łukasiewicz.
Σxφx	Alguien es polaco.
ΣxKφxψxa	Existe alguien que es polaco y es alumno de Łukasiewicz. Algún polaco es alumno de Łukasiewicz.
NΣxKφxNθxa	No existe nadie que sea polaco y no sea colega de Łukasiewicz.

ΠxθxcPARAM	Todos son colegas de Gödel.
ΠxCψxaφx	Todos los alumnos de Łukasiewicz son polacos.
ΠxΠyθxy	Todos son colegas de todos.
ΠxΠyEθxyθyx	Dados dos lógicos, el primero es colega del segundo si y sólo si el segundo es colega del primero.
ΠxCφxΣyθxyψya	Para cualquier lógico, si es polaco, entonces existe alguien que es su colega y es alumno de Łukasiewicz.

4.4.2 Lógica Modal

Para extender la notación polaca de lógica proposicional a la lógica modal, es suficiente con agregar un nuevo tipo de caracteres que se asignen a los operadores modales: “Es necesario que” y “Es posible que”.

Tenemos dos propuestas de caracteres. Primero está la que presentó Łukasiewicz en 1953, en donde usó Γ (gamma mayúscula) para el operador de necesidad y Δ (delta mayúscula) para el operador de posibilidad. Por su parte, Prior en su libro *Time and Modality* (1957) presentó el sistema de Łukasiewicz, pero cambió los caracteres modales por letras del alfabeto latino: L para el operador de necesidad y M para el operador de posibilidad.[80]

Para extender la notación polaca a modal basta con agregar a las reglas de formación dos nuevas condiciones que incluyan estos caracteres:

El carácter X es una fórmula bien formada de este lenguaje si y solo si cumple con alguna de estas condiciones:

[....]
- X es una concatenación del carácter Γ seguido de una fórmula bien formada.
- X es una concatenación del carácter Δ seguido de una fórmula bien formada.

[....]
- X es una concatenación del carácter L seguido de una fórmula bien formada.
- X es una concatenación del carácter M seguido de una fórmula bien formada.

[80] En *Formal Logic,* Prior menciona que la M viene de la palabra “Möglich” que en alemán significa “posible”. (Prior, 1963, p. 188)

Versión de Łukasiewicz	Versión de Prior

Agregar estas condiciones a las reglas de formación de la notación polaca proposicional nos permite escribir expresiones como las siguientes:

	Łukasiewicz	Prior
Es necesario que *p*	Γp	Lp
Es posible que *q*	Δq	Mq
Si *p,* entonces es posible que *p*.	CpΔp	CpMp
Si es necesario que *q,* entonces *q.*	CΓqq	CLqq
Si es necesario que si *p, entonces q, entonces si es posible que p,* entonces es posible que *q.*	CΓCpqCΔpΔq	CLCpqCMpMq

Pero también es posible agregarlas a las reglas de formación de la notación polaca para lógica de primer orden. Usando el diccionario del apartado anterior, esta extensión nos permitiría traducir expresiones como:

	Łukasiewicz	Prior
Es necesario que Łukasiewicz sea polaco.	Γφa	Lφa
Es posible que Tarski sea colega de Gödel	Δθbc	Mθbc
No es posible que todos sean colegas de sí mismos.	NΔΠxθxx	NMΠxθxx
Si Łukasiewicz es colega de Tarski, entonces es posible que exista alguien que sea colega de Tarski.	CθbcΔΣxθxc	CθbcMΣxθxc
Es falso que para todos los lógicos es necesario que exista alguien que sea polaco y, o es posible que sea su alumno o es posible que sea su colega.[81]	NΠxΓΣyKφyAΔψyxΔθyx	NΠxLΣyKφyAMψyxMθyx

[81] En la notación de Hilbert-Ackermann la traducción quedaría como:
¬∀x□∃y(Py &(◊Axy ∨ ◊Cxy))

4.5 Conclusiones

Hagamos un recuento de los resultados obtenidos en este capítulo y su aportación al argumento de esta tesis.

En el primer apartado *El alfabeto* construimos un esquema de notación tal como lo definimos en nuestro capítulo de consideraciones metodológicas. Es decir, un conjunto de caracteres bien definido a través de reglas de formación, pero cuyos elementos aún no están relacionados con un campo de referencia. Recordemos que era valioso para nosotros que tales objetos existieran para distinguir las características propias de los caracteres y después determinar cómo se unen con las características de los objetos representados. En este caso, con las propiedades de los sistemas lógicos.

En el segundo apartado, describimos el sistema axiomático para la lógica proposicional que Łukasiewicz construyó sobre la notación polaca. Haberlo logrado es evidencia de que la notación polaca cuenta con las mismas características operativas que la notación de Hilbert Ackermann. Es decir, puede ser usada para representar efectivamente a la lógica proposicional.

En el último apartado dedicado a las traducciones, se expusieron dos algoritmos que nos permiten pasar de una fórmula bien formada en notación polaca o Hilbert-Ackermann a una fórmula correspondiente en el otro sistema de notación. Una vez más, esto brinda evidencia sobre la equivalencia operativa entre ambas notaciones. Es decir, lo que podemos representar con un sistema, lo podemos representar en el otro con el mismo nivel de precisión.

Por último, cabe mencionar que a lo largo de este capítulo se analizaron varias técnicas que serán de mucha utilidad para el capítulo final de la tesis. Propusimos un algoritmo muy simple de verificación de fórmulas en notación polaca. Aunque no logramos completar la demostración de su fiabilidad, se logró definir el problema en términos matemáticos. Además, se implementaron los algoritmos de traducción Polaca/Hilbert-Ackermann en un aplicación web con el objetivo de facilitar el camino para las personas interesadas en aprender a usar la notación polaca.

¿Qué es lo que debería seguir? Si he logrado mi cometido, el lector estará de acuerdo conmigo que la notación polaca parece contar con los elementos suficientes para poder realizar el mismo trabajo que realizamos con la notación de Hilbert-Ackermann. Pero poder realizar el mismo trabajo no es lo mismo que realizar el mismo trabajo con el mismo nivel de esfuerzo. Aún es necesario evaluar este otro aspecto sobre el que he insistido desde el primer capítulo de esta tesis: las características ergonómicas de la notación. Es decir, ¿qué tanto nos facilita/complica hacer las tareas que deseamos hacer con respecto a otra notación?

5 | Evaluación del diseño de la notación polaca

Como ya lo he venido adelantando, en este capítulo final de mi tesis tengo la intención de evaluar a la notación polaca a la luz de las diferentes facetas de la investigación que realizaba Jan Łukasiewicz. Este ha sido el objetivo de construir un marco teórico que nos permitiera hablar de los diferentes componentes y aspectos de las notaciones, de hacer un recuento histórico en la historia de las notaciones y en la historia de la investigación en lógica durante el periodo entreguerras en Polonia y de haber expuesto los detalles de esta notación.

Para lograr mi cometido, voy a dividir mi evaluación en tres aspectos diferentes, según las ventajas ergonómicas que he encontrado en la notación polaca. En primer lugar, expondré las ventajas que ofrece frente a sistemas de notación como el de Boole al distinguir a la lógica como un objeto de estudio independiente. En segundo lugar, expondré las ventajas que ofrece frente a notaciones como la de Frege al presentar pruebas completas de manera eficiente. En tercer lugar, hablaremos de cómo la notación polaca nos permite definir la simplicidad de un sistema axiomático a través del número de caracteres, en comparación con las notaciones derivadas de Peano.

5.1 El objeto de estudio de la lógica

Como ya adelantamos en el segundo capítulo, el libro de texto *Elementos de la lógica matemática* (Łukasiewicz, 1963) buscaba servir como recurso principal para un curso introductorio a la lógica formal. Este libro es importante para comprender a la notación polaca pues, si bien no es aquí donde hace su primera aparición, en la introducción de este libro nos encontraremos con una breve reconstrucción de las diferentes tendencias históricas que desembocaban en su aproximación matemática a la lógica. Es de especial interés leer cómo, desde la perspectiva de Łukasiewicz, la notación de Frege tiene ventajas importantes sobre la de Boole[82]. Esto resulta ser particularmente relevante para el tema que estamos tratando cuando nos damos cuenta que la notación polaca conserva estas ventajas que le otorgan la precisión necesaria para servir en la fundamentación de las matemáticas.

Łukasiewicz nos advierte que hay tres grandes diferencias entre la corriente iniciada por Frege y la iniciada por Boole:

> El simbolismo lógico de Frege no podía, como en el caso del simbolismo de Boole, ser modelado en matemáticas, pues la lógica de Frege era sobre todo para establecer los fundamentos de la aritmética: en consecuencia, el uso de simbolismo aritmético en lógica llevaría a una ambigüedad de los símbolos. Esta es la primera diferencia entre la tendencia representada por Frege y el álgebra de la lógica. La segunda diferencia resulta de la primera: como Frege no usó simbolismo algebraico, no estuvo tentado a establecer tareas lógicas que fueran análogas a los problemas matemáticos, ni usó métodos matemáticos en lógica y, por consiguiente, entendió mejor la naturaleza específicas de los problemas lógicos. Finalmente, la tercera diferencia está conectada con el objetivo principal de Frege: dado que buscaba basar la aritmética sobre fundamentos lógicos, no podía recurrir a ningún teorema lógico en su investigación.[83] (Łukasiewicz, 1963, pp. 5-6)

Revisemos a detalle cada una de estas diferencias y veamos si también aplican a la notación polaca.

La primera diferencia resulta ser que la notación de Frege no toma caracteres propios de las matemáticas. Esto, a juicio de Łukasiewicz, evita que haya una ambigüedad en el significado de los caracteres cuando intentemos trabajar en la fundamentación de la aritmética, como parecía buscar Frege.

Boole nunca se enfrentó a ese problema pues su objetivo no es fundamentar ninguna área de las matemáticas. Por el contrario, como anteriormente vimos, el objetivo de su

[82] Véase la sección de "Influencia de Frege sobre Łukasiewicz" en el capítulo 3.
[83] "Frege's logical symbolism could not, as was the case with Boole's symbolism, be modelled on mathematics, for Frege's logic was to serve above all to lay the foundations of arithmetic; consequently, the use of arithmetical symbolism in logic would lead to an ambiguity of symbols. This is the first difference between the trend represented by Frege and the algebra of logic. The second difference results from the first: as he did not use algebraic symbolism, Frege was not tempted to set logic tasks which were analogous to mathematical problems, he did not use mathematical methods in logic and therefore better understood the specific nature of the logical problems. Finally, the third difference is connected with Frege's principal objective: since he wanted to base arithmetic on logical foundations he could not resort in his research to any mathematical theorems." La traducción es mía.

investigación es mostrar que el álgebra no sólo puede aplicarse a problemas que impliquen el concepto de magnitud:

> Que una interpretación cuantitativa esté asignada para las formas existentes de Análisis, es el resultado de las circunstancias por las que estas formas fueron determinadas, y no forman parte de una condición universal del Análisis. Sobre los fundamentos de este principio general, yo me propongo establecer el Cálculo de la lógica, y que yo reclamo para este un lugar entre las formas aceptadas del Análisis Matemático, a pesar de que es su objeto y en sus instrumentos deba quedar aislada en el presente.[84] (Boole, 1847, p. 4)

Esto resulta particularmente revelador pues tenemos un ejemplo claro de una misma característica que podría ofrecer una ventaja ergonómica al realizar una tarea, pero una desventaja para realizar otra tarea. Mientras que la notación de Boole nos podría conducir a la ambigüedad del significado de los caracteres, lo cual resulta en una desventaja para quien intenta fundamentar las matemáticas, usar los mismos caracteres es una gran ventaja si queremos enfatizar que las técnicas y resultados que hemos usado en otra área se pueden aplicar en una nueva investigación.

Sin embargo, creo que el objetivo de Boole es aún más ambicioso de lo que Łukasiewicz nos lo ha presentado. Boole no solo quiere establecer una analogía con alguna herramienta de representación previa. Quiere extender el propio objeto de estudio del álgebra. Es decir, quiere aumentar el tamaño del conjunto de las posibles interpretaciones para los caracteres usados en álgebra, incluyendo a la de los objetos estudiados por la lógica. No parece una confusión accidental derivada de la notación, sino un proyecto dirigido hacia ese fin.

Pero regresemos al caso de la notación polaca. De manera similar a la de Frege, la notación polaca no comparte caracteres propios de algún área de las matemáticas en particular. Pero nótese que usa letras. Estos son caracteres compartidos entre la notación de Łukasiewicz, la de Boole, la de Frege y muchas áreas de las matemáticas. Sin embargo, esto no parece molestar a Łukasiewicz. A él le basta con que no aparezcan los caracteres que le hacen pensar a Boole que los problemas en lógica han de resolverse usando métodos algebraicos, es decir, los caracteres que atribuimos específicamente a la aritmética y el álgebra (+, -, x...). A esto me refiero cuando digo que ni la notación de Frege ni la de Łukasiewicz tienen caracteres propios de alguna área de las matemáticas.

[84] "That to the existing forms of Analysis a quantitative interpretation is assigned, is the result of the circumstances by which those forms were determined, and is not to be construed into a universal condition of Analysis. It is upon the foundation of this general principle, that I purpose to establish the Calculus of Logic, and that I claim for it a place among the acknowledged forms of Mathematical Analysis, regardless that in its object and in its instruments it must at present stand alone." La traducción es mía.

A la luz de esto se entiende mejor la segunda y la tercera diferencia citada por Łukasiewicz. A él le parece que Frege entiende de mejor manera "la naturaleza específica de los problemas lógicos" que Boole, pues no combina problemas lógicos con problemas matemáticos, ni los métodos de la lógica con los métodos del álgebra. Por lo tanto, no habría justificación obvia para que los resultados del álgebra se pudieran aplicar sin más a los problemas de la lógica. Esta división entre las dos disciplinas lleva a reconocer la independencia de la lógica. Y esto parece, si no ser consecuencia de la notación fregeana, al menos quedar patente en ella.

¿La notación polaca comparte esta característica? Parece que sí, como resultado de la primera diferencia. Al enfrentarnos a fórmulas diferentes de las del álgebra, no resulta inmediato pensar que las podemos manipular de la misma manera. Es decir, si queremos traer a colación un método o resultado usado en el álgebra, tenemos que hacer el esfuerzo de justificar por qué ese método funciona. Esto, aunque implica un mayor esfuerzo, simplifica explicar por qué se está tratando con problemas sobre lógica y no sobre alguna de las otras grandes áreas de la matemática. Es decir, permite fijar fácilmente el campo de correlación.

Al analizar estas tres diferencias nos encontramos con otro aspecto de la precisión que le atribuye Łukasiewicz a la notación de Frege y la suya propia: la precisión al delimitar el objeto de estudio y los métodos de la lógica frente a las de otras disciplinas matemáticas. Y tal precisión puede alcanzarse cumpliendo con un criterio bastante simple al elegir caracteres: no usar caracteres propios de otras áreas de las matemáticas.

5.2 Pruebas completas

La noción de precisión científica que Łukasiewicz intenta recuperar de Frege para retomarla en su propio trabajo no consiste únicamente en la definición de los conceptos lógicos. La precisión es una propiedad más general que se ejemplifica entre las diferentes disciplinas que hacen uso de demostraciones. Para Łukasiewicz, es la precisión que puede alcanzar las pruebas en lógica lo que destaca a esta disciplina entre otras:

> No todas las disciplinas pueden hoy en día alcanzar el nivel de precisión científica tal como el que ha sido alcanzado por la lógica matemática. Pero es algo bueno tener un estándar alto de precisión científica, pues entonces podemos evaluar la precisión de otras pruebas y esforzarnos para incrementarla. Este es uno de los grandes logros de la lógica matemática: ha

creado un nuevo estándar de precisión científica, hasta ahora no igualado en general por la matemática, y a fortiori por otras disciplinas.[85] (Łukasiewicz, 1963, p. 21)

Empecemos aclarando en qué consiste la precisión respecto a una prueba. Aunque Łukasiewicz nunca la define, si nos dice que un prueba completamente explícita es más precisa que una que no lo es. Así parece dar a entender cuando, previo al párrafo citado arriba, nos ofrece una demostración de un teorema aritmético como ejemplo de precisión:

El ejemplo presentado a continuación será un modelo de una prueba matemática completa, que satisface las condiciones de precisión formuladas por Frege. [...]

La prueba del Teorema 8, tal como fue presentada arriba, es un ejemplo de una prueba completa. En esa prueba, la aceptación de cada oración es justificada por una regla determinada que fue adoptada con antelación. Cada paso en la prueba puede ser corroborado; la corroboración se encuentra en la línea de la prueba que precede a cada sentencia aceptada en la prueba. [86] (Łukasiewicz, 1963, pp. 18-20)

Esto resulta importante para nuestro propósito, pues el mismo Łukasiewicz reconoce que las operaciones permitidas por la notación que está usando (la cual es casi equivalente que la notación polaca) es lo que permite presentar dicha prueba completa y sin saltos:

La prueba dada anteriormente podría ser realizada sin el uso de símbolos, pero entonces luciría más complicada y menos clara. Los símbolos que hemos adoptado son más cortos que las palabras correspondientes al lenguaje cotidiano y nos permite observar con un vistazo cómo está construido el teorema dado. Asimismo, la notación simbólica hace más fácil una formalización completa de la prueba. La prueba podría ser revisada de manera totalmente mecánica. Una persona que no conozca el significado de los símbolos que hemos usado estaría en

[85] "Not every discipline can today reach such level of scientific precision as has been achieved by mathematical logic. But it is a good thing to have a high standard of scientific precision, for we can then properly evaluate the precision of other proof and strive to increase it. This is one of the greatest achievements of mathematical logic: it has created a new standard of scientific precision, so far unequaled in general by mathematics, and a fortiori by other disciplines." Mi traducción

[86] "The example to be given now will be a model of a complete mathematical proof, satisfying the conditions of precision formulated by Frege. [...]
The proof of Theorem 8 as given above is an example of a complete proof. In that proof, the recognition of every sentence is justified by a certain rule which was adopted in advance. Every step in the proof can be substantiated; the substantiation is to be found in that line of the proof which precedes every sentence recognized in the proof"

condiciones de revisar la corrección de la prueba con solo conocer las reglas de inferencia.[87] (Łukasiewicz, 1963, *Idem*)

Hay que desmenuzar esta última cita, pues junto con las otras dos nos otorga mucha información sobre las condiciones que para Łukasiewicz imponía esta tarea.

En primer lugar, hay que notar el contexto en el que Łukasiewicz está usando la notación. Anteriormente yo adelantaba que el filósofo polaco se veía así mismo como heredero de una tradición preocupada por la fundamentación de las matemáticas. Esto hacía que su notación se comprometa, al menos, con la independencia de la lógica respecto a otras disciplinas matemáticas. Pero estas citas nos presentan de manera explícita el uso específico en el que quiere usarse: en la presentación de pruebas formales que cumplan con la más alta precisión científica.

Este uso se verá beneficiado por una notación que permita a) ser capaz de visualizar la estructura de los teoremas, b) ocultar la información que no es necesaria para las pruebas, c) crear pruebas completas imprimibles en un libro. Todas estas son ventajas ergonómicas de esta notación dada la tarea de presentar pruebas formales.

Las primeras dos ventajas son, como ya hemos visto en el primer capítulo, reconocidas por Novaes como ventajas de los lenguajes formales sobre los lenguajes naturales[88]. Lo mismo hace Łukasiewicz al señalar que el uso de fórmulas nos permite "ver con un vistazo como un teorema está construido", lo cual se da a entender como lo único relevante al construir pruebas. El punto b) es la propiedad de que los lenguajes formales estén des-semantificados. Ignoramos el contenido y nos quedamos solo con los caracteres, lo cual nos permite revisar la corrección de las pruebas sin la necesidad de interpretar las fórmulas usadas. Ambas propiedades serán reconocidas por Łukasiewicz en otros ensayos. Por ejemplo, en "En defensa de la logística" ("W obronie logistyki"), en donde nos dice:

En este sentido tratamos de formalizar todas las deducciones lógicas, esto es, interpretarlas como inscripciones construidas de tal manera que podamos checar su corrección sin referirnos a los

[87] "The proof given above might be carried out without the use of symbols, but then it would seem more complicated and less clear. The symbols we have adopted are shorter than the corresponding words in everyday language and enable us to see at a glance how a given theorem is constructed. Moreover, symbolic notation makes easier a complete formalization of the proof. The proof might be checked quite mechanically. A person who did not know the meaning of the symbols we have used would be in a position to check the correctness of the proof if he only knew the rules of inference." Mi traducción

[88] Véase la sección Lenguajes formales en el capítulo 1.

significados de esas inscripciones. Lo hacemos así debido a que somos incapaces de aprehender los significados, mientras que los signos son visibles y claros, y al compararlos podemos confiar por completo en la obviedad visual.[89] (Łukasiewicz, 1937, p. 240)

Es difícil explicar en qué consiste esa obviedad visual de la que Łukasiewicz habla. Pero creo que no queda duda que se refiere a una habilidad con la que ya contamos como usuarios y que es explotada por la notación. Se trata, pues, de una ventaja ergonómica.

Ahora, es importante que no llevemos la desemantificación muy lejos. Ciertamente, algo que no habíamos discutido pero que el lector podría suponer es que la desemantificación, podría llevarnos hacia la corriente del formalismo. Łukasiewicz, quien definitivamente no era formalista, nos advierte que hay una diferencia entre ser capaz de ocultar el significado mientras revisamos una prueba y eliminar el significado. Estamos frente a verdades lógicas:

> A través de un difícil trabajo mental, llevado a cabo por años y superando dificultades enormes, paso a paso hemos adquirido nuevas verdades lógicas. ¿A qué corresponden estas verdades? ¿Con inscripciones vacías y ornamentos espaciales? Yo no soy un artista gráfico o un calígrafo, y no estoy interesado ni en ornamentos ni en inscripciones. Toda la diferencia que hay entre la logística [la lógica matemática] y un juego de ajedrez consiste precisamente en esto, que las piezas de ajedrez no significan nada, mientras que los símbolos lógicos tienen significado.[90] (Łukasiewicz, 1937, p. 240)

Ahora, ¿qué implica el punto C? ¿Qué significa que una notación nos permite escribir pruebas completas y publicarlas? Como Łukasiewicz claramente señala en la segunda cita, en una prueba completa cada paso está justificado por una regla aceptada y la justificación está incluida de manera explícita en la prueba. Recordemos cómo luce una prueba de Łukasiewicz:

1. CCpqCCqrCpr
2. CCNppp

---

[89] "In this way we try to formalize all logical deductions, that is, to interpret them as inscriptions constructed so that we can check the correctness of the reasoning without referring to the meanings of those inscriptions. We do so because we are unable to grasp the meanings, whereas the signs are visible and clear, and in comparing them we can rely entirely on visual obviousness."

[90] "By difficult mental work, going on for years and surmounting enormous difficulties, we are step by step acquiring new logical truths. And with what are these truths to be concerned? With empty inscriptions and spatial ornaments? I am not a graphic artist or a calligrapher, and I am not interested in ornaments and inscriptions. The whole difference between logistic and a game of chess consists precisely in this, that chessmen do not mean anything, while logical symbols have meaning."

3. CpCNpq

1 p/Cpq, q/CCqrCpr, r/s * C1 - 4,

4. CCCCqrCprsCCpqs

En la sección de "Pruebas á la Polaca" en el capítulo anterior podrán encontrar una descripción más detallada de cómo se escribe una demostración formal en este sistema de notación. Por ahora, basta con recordar que la línea arriba del teorema 4 funge como la justificación. De manera abreviada nos dice que en el axioma 1 tenemos que sustituir de manera uniforme p por Cpq, q por CCqrCpr y r por s. Una vez que tenemos eso, la segunda sección "C1-4" nos indica que tendremos un condicional cuyo antecedente sea el axioma 1 y cuyo consecuente sea el teorema 4, con el cuál nos vamos a quedar por Modus Ponens. Toda esta información está condensada de manera en una sola línea.

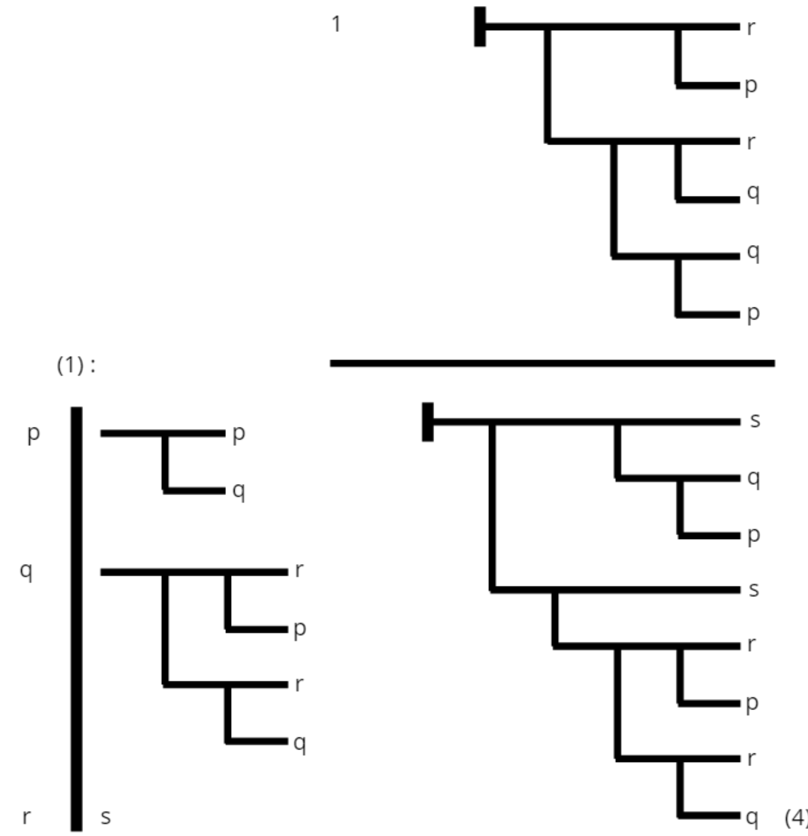
Queda claro que mucho de este trabajo de abreviar sería imposible sin el uso de un sistema de notación. El lenguaje formal está acompañado de un conjunto de caracteres que, en lugar de estar correlacionados con la ontología de la lógica, lo están con un conjunto de procedimientos realizados sobre otros caracteres.

Esta capacidad de abreviar está un paso por delante de otros sistemas formales. Específicamente de los árboles de Frege, modelo del que parte Łukasiewicz. El gran logro del polaco sobre el sistema de notación de Frege es mantener toda la información ofrecida que pueda ofrecer esta notación de una manera muy compacta. Otros autores, como Peter Simons, reconocen cómo aparece esta ventaja en *Elementos de la lógica matemática*:

> Basado en esto (el sistema axiomático), y usando una notación para las pruebas lineal extremadamente comprimida que se encuentra en el extremo opuesto de las espaciosas pruebas de Frege, Łukasiewicz prueba cerca de 140 teoremas en tan solo 19 páginas.[91] (Simons, 2020)

Esto lo podemos comprobar nosotros mismos viendo cómo luciría esta misma prueba usando la notación de Frege para fórmulas y las diferentes convenciones que usa al escribir pruebas:

[91] "On this basis, and using an extremely compressed linear notation for proofs which is at the opposite extreme of Frege's space-occupying proofs, Łukasiewicz proves around 140 theorems in a mere 19 pages." La traducción es mía



El diagrama a la derecha del número uno está representando al axioma 1 del sistema de Łukasiewicz. La línea larga horizontal nos indica que hay una inferencia. El carácter "(1):" a la izquierda de la línea horizontal, nos indica que dicha inferencia depende de usar la premisa 1, con las sustituciones que se indican debajo. Por último, el diagrama debajo de la línea horizontal representa a la conclusión, en este caso al Teorema 4 de Łukasiewicz.

De entrada, se puede notar que la prueba usando la notación de Frege abarca mucho más espacio. Si bien, cuando se trata de una sola prueba la diferencia no podría ser tan relevante, cuando se propone presentar las pruebas completas de 145 teoremas esto podría ser una gran ventaja para la extensión del libro. Lo mismo con la justificación, en donde todas las instrucciones de sustituir caben también en pocas líneas, contrario a la prueba de Frege en donde tenemos que dibujar secciones del árbol por separado.

Otra ventaja es la facilidad con la que se puede capturar una prueba usando una simple máquina de escribir pues no son necesarios caracteres especiales, en contraste con la notación de Frege (y de casi todas las notaciones alternativas). Esto es una importante ventaja que fue reconocida por otros autores, pero que no he encontrado explícitamente por el propio Łukasiewicz como una ventaja.[92] Otra vez, esto quizá no resulte un problema cuando se trata de una sola fórmula, pero cuando se trata de transcribir y presentar un conjunto grande de fórmulas complejas, ser capaz de construirlas todas usando una máquina de escribir o un simple editor de texto, simplifica presentarlas en libros y artículos de investigación, que no tienen la flexibilidad de una pizarra. Usar sólo caracteres comunes es también una característica ergonómica.

5.3 El axioma más simple y el axioma más corto.

Hasta el momento hemos podido observar como las características de esta notación parecen más adecuadas que las características de las notaciones adoptadas por Boole y Frege. En esta sección daremos un último paso y compararemos la notación polaca con la notación de Peano y sus derivadas: la notación de Russell-Whitehead y la notación de Hilbert-Ackermann. Para ello, nos centraremos en las ventajas que la notación ofrece al comparar axiomatizaciones de la lógica proposicional.

Como lo vimos en la sección dedicada a Łukasiewicz, la notación polaca tuvo un papel importante como herramienta de investigación en un artículo de 1931 titulado “Comentarios acerca del axioma de Nicod y de la ‘deducción generalizante’” ("Uwagi o aksjomacie Nicoda i ‘indukcji uogólniającej'”). El objetivo principal de este artículo era presentar un axioma equivalente al de Nicod, es decir, una fórmula que pudiera funcionar como axioma único de la lógica proposicional y que usara una conectiva. A juicio de Łukasiewicz, su propuesta se trataba de un axioma más simple y general que el de Nicod. Adelante encontrarán el axioma de Nicod frente al de Łukasiewicz con sus traducciones a la notación estándar:

(Nicod) DDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps

(Łukasiewicz) DDpDqrDDsDssDDsqDDpsDps

(N) $\{p|(q|r)\} \mid [\,\{t|(t|t)\} \mid \{\,(s|q) \mid ((p|s)|(p|s))\,\}\,]$

[92] Bochenski cuenta en una anécdota que “He [Łukasiewicz] received me sitting at his typewriter on which he was typing one of his interminable formulae (as every logician knows, you can type a Łukasiewiczian formula on an ordinary typewriter)”. (Bochenski, 1994, p. 2)

Peter Simons también nos lo comenta en la entrada de la SEP dedicada a la notación polaca “Łukasiewicz's notation had the advantage, in an age between handwritten copy and computerized typesetting, of being writable on a normal typewriter without special symbols.” (Simons, 2020)

(Ł) {p|(q|r)} | [{s|(s|s)} | { (s|q) | ((p|s)|(p|s)) }]

Nótese cómo el axioma de Nicod se obtiene del de Łukasiewicz al reemplazar la variable t por la variable s, quedándose con 4 variables. En otras palabras, (Ł) es un caso especial de (N). Dado que ambos eran axiomas equivalentes, a Łukasiewicz le resultó interesante descubrir que podíamos presentar una prueba tal que nos lleve de (Ł) a (N). Según Łukasiewicz, esto significa que contamos con un ejemplo claro en el que partiendo de una tesis más particular se concluye una tesis más general, rompiendo esta antigua concepción según la cual la lógica solo nos permite ir de lo general a lo particular. A este tipo de razonamientos los llamó "deducción generalizante". A lo largo del artículo, presenta otros ejemplos y propone diferentes hipótesis sobre otros grupos de fórmulas que tengan esa propiedad.

Para terminar de convencernos de que el axioma (Ł) es más simple que (N), en este artículo aparece un último argumento que hace uso de cuantificadores universales que operaban sobre las proposiciones, una idea que ya había trabajado con anterioridad.[93] El carácter Π (pi mayúscula) fue el elegido para representar al cuantificador. De este modo, la fórmula ΠpCpp se leería como "Para toda proposición p, si p, entonces p" y la fórmula ΠpΠqCCNqNqCpq se leería como "Para cualesquiera proposiciones p y q, si es el caso que si no p entonces no q, entonces si p entonces q". Łukasiewicz expone su argumento de la siguiente manera:

> Mi axioma puede ser considerado como una simplificación del axioma de Nicod si ambos, en lugar de ser escritos usando variables reales, i.e., libres; son precedidos por cuantificadores universales que liguen las variables que aparecen en los axiomas. Al introducir una expresión del tipo "Πα", la cual signifique "para toda α" y usando la notación libre de paréntesis con cuantificadores, obtendremos las siguientes tesis:
>
> (No) **ΠpΠqΠrΠsΠt**DDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps
>
> (Ło) **ΠpΠqΠrΠs**DDpDqrDDsDssDDsqDDpsDps

[93] Véase "The meaning of quantifiers" en (Łukasiewicz, 1921)

De esta manera mi axioma es más corto, y por lo tanto más simple, que el axioma de Nicod.[94] (Łukasiewicz, 1931, pp. 185-186)

Le pido al lector que ponga atención a los términos que está usando Łukasiewicz para hablar de simplicidad: la longitud de la fórmula y el número de variables diferentes. Con este paso, Łukasiewicz está proponiendo un criterio objetivo para hablar de la simplicidad o complejidad de un conjunto de axiomas para la lógica proposicional.[95]

Así como hizo Łukasiewicz en sus "Comentarios al axioma de Nicod", nosotros hemos introducido la búsqueda de los axiomas únicos más cortos a través del problema de la deducción generalizadora. Sin embargo, es importante recalcar que la búsqueda por el axioma más simple y general para cada sistema nunca fue dependiente de la investigación sobre ese tipo de razonamientos. Como lo vimos en la sección histórica, hay testimonios de que Łukasiewicz y otros miembros de la Escuela Polaca estaban comprometidos con la búsqueda de los más simples axiomas únicos para los diferentes sistemas de lógica. Sobre esta faceta de su investigación suelen haber dos posturas: están los que enfatizan la cualidad deportiva de esta tarea dentro de la Escuela Polaca y los que enfatizan el valor de estas investigaciones como parte de la labor de la lógica matemática.

A los del primer grupo, buscar el axioma más corto le parece un ejercicio sin valor por sí mismo. Lo consideran, a lo más, como parte de un entrenamiento en el uso del lenguaje o en la construcción de pruebas para demostrar que cierta fórmula puede ser un axioma de algún sistema lógico. Un ejemplo de ellos podría ser el lógico polaco Andrzej Grzegorczyk, contemporáneo de los alumnos de Łukasiewicz, quien escribió:

---

[94] "My axiom may be considered as a simplification of Nicod's axiom if both are noted down not by means of real, i.e., free, variables, that is if both axioms are preceded by universal quantifiers which bind the variables occurring in the axioms. On introducing an expression of the type which means "for every a" and using the parenthesis free notation of expressions with quantifiers, we obtain the following theses:

(No) ΠpΠqΠrΠsΠtDDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps
(Ło) ΠpΠqΠrΠsDDpDqrDDsDssDDsqDDpsDps

In this form my axiom is shorter, and hence simpler, than Nicod's axiom." Las negritas y la traducción son mías. Al terminar este argumento, hay una nota al pie de página en donde se nos indica que Wajsberg logró encontrar un axioma igual de corto que (Ł) que además era orgánico (ninguna de sus subfórmulas es una tesis). Sobre la noción de organicidad, véase lo dicho sobre el trabajo de Wajsberg en la sección "Escuela Polaca de Lógica" en el capítulo 2.

[95] Jan Wolenski (1989) ya nos había señalado este paso tomado por Łukasiewicz, como lo podemos ver en la próxima cita que hago de este autor.

> Ellos [esto es, Łukasiewicz y sus estudiantes - J. W.] se involucraron en un deporte intelectual específico que consistía en acortar axiomas de sistema. Muchos récords en este campo fueron establecidos por esta escuela. Hay axiomas únicos, los axiomas únicos más cortos entre aquellos que son conocidos, e incluso los axiomas más cortos posibles para los diferentes sistemas del cálculo proposicional. Usualmente aquellos axiomas únicos más cortos no tienen aplicaciones en la práctica y son difíciles de recordar. Hay sistemas de axiomas más largos, pero mucho más intuitivos, y que son de uso común. Łukasiewicz incluso fue un teórico de ese deporte: él aseguraba que el contenido intuitivo de un axioma no es importante, dado que cuenta solo el conjunto de teoremas que son consecuencia de este. Si un axioma implica todos los teoremas que queremos tener en una teoría, entonces ese axioma es bueno. En este sentido, desde la opinión de Łukasiewicz, hay muy buenos sistemas de axiomas, y la elección que uno hace depende de los gustos personales de uno mismo. Esto justifica plenamente la predilección por la brevedad,manifestada por Łukasiewicz mismo en su investigación.[96] (Krajewski & Woleński, 2007, p. 3)

Jan Woleński, filósofo e historiador de la Escuela Polaca, podría ser un representante de la segunda postura. Según Woleński, la búsqueda del axioma más corto era una investigación con valor por sí misma para la Escuela Polaca, pues revelaba una propiedad de los axiomas independientemente de su aplicación en matemáticas:

> El punto, sin embargo, es que la brevedad de un axioma es una propiedad objetiva, la cual Łukasiewicz trató como merecedora de investigación en sí misma, y no debido a preferencias, incluso si Łukasiewicz tuviera tales preferencias. Para una persona que acepte el principio de "la lógica por la lógica misma", y tal fue el caso de la Escuela de Varsovia, la extensión de un axioma es un hecho lógico que debe ser investigado con independencia de los problemas relativos a las aplicaciones de ese axioma, e. g., en matemáticas. (Woleński, 1989, pp. 91-92)[97]

[96]"They [that is, Łukasiewicz and his students - J.W.] engaged in a specific intellectual sport which consisted in shortening axiom systems. Many records in that field were established by that school. There are the only axioms, and the only shortest ones among those which are known, and even the shortest possible ones for the various systems of the propositional calculus. Usually those only shortest ones have no applications in practice and are difficult to remember. There are axioms systems which are longer but much more intuitive, and which are in common use. Łukasiewicz was even a theorist of that sport; he claimed that the intuitive content of an axiom system is not important, since it is only the set of those theorems we are its consequences that counts. If an axiom system yields all those theorems which we want to have in a given theory, then that axiom system is good. In this sense, in Łukasiewicz opinion, there are very good axiom systems, and the choice one makes depends on one's personal likings. This fully justifies the predilection for brevity, manifested by Łukasiewicz himself in his research."

La nota dentro del paréntesis pertenece a Woleński.

[97] "The point, however, is that the brevity of an axiom system is an objective property, which Łukasiewicz treated as worthy of investigation for its own sake, and not because of preferences, even if Łukasiewicz had such preferences. For a person who accepts the principle of 'logic for logic's sake', and such was the case in the Warsaw School, the length of an axiom system is a logical fact which ought to be investigated regardless of problems concerning the applications of that axiom system, e.g., in mathematics."

Este tipo de respuesta me parece mucho más sensata a la luz de lo que conocemos del contexto de Łukasiewicz y su escuela. Empero, aún me parece un poco insatisfactoria. Decir que la longitud de un axioma es valiosa por sí misma me parece que no considera la conexión que construye Łukasiewicz entre esta y la simplicidad de un sistema axiomático. Partamos de la información que ya recopilamos en los capítulos anteriores para tratar de dar una respuesta mucho más elaborada.

Como mencionamos en el capítulo 2, Łukasiewicz, desde muy temprano en su carrera, ya consideraba a la simplicidad de una teoría como algo que debemos buscar.[98] En el texto *Sobre la noción de magnitud* (*O pojęciu wielkości*), ya podemos encontrar tanto un esfuerzo explícito para buscar la simplicidad, como el primer antecedente en el trabajo de Łukasiewicz en el que la simplicidad de dos teorías alternativas se puede comparar según el número de axiomas y términos primitivos. En esa ocasión, Łukasiewicz fue capaz de presentar un sistema axiomático que modelaba la noción de magnitud mucho más "simple" que el de Stanislaw Zaremba, matemático contemporáneo suyo. Redujo el número de axiomas de 8 a 4 y el número de términos sin definición de tres (mayor que, menor que, igual que) a uno (menor que).[99]

¿Pero qué pasa cuando reducimos al máximo el sistema de axiomas y los conceptos primitivos? El axioma de Nicod abrió una nueva pregunta metodológica: ¿consideraremos como igualmente simples a dos teorías que parten de un solo axioma y una sola conectiva? Creo que para Łukasiewicz la intuición le mostraba que no. Aún cuando dos sistemas axiomáticos tengan el número mínimo de axiomas y conceptos primitivos, aún tenemos criterios que nos permiten considerar a una de ellas como la más simple. Ahí es donde entra la longitud de la fórmula. La longitud es, como nos dice Wolenski, un criterio objetivo. Sin embargo, esto no lo hace valioso en sí mismo. Es valioso en tanto nos da luz sobre la simplicidad de una teoría axiomática. La longitud de los axiomas nos permite preguntarnos "¿Cuál es la teoría más simple?" a pesar de contar con múltiples sistemas de un solo axioma y una sola conectiva.[100]

---

[98] Véase la sección "Jan Lukasiewicz" del capítulo 2

[99] Cabe recordarle al lector que este texto no contaba con ninguna notación lógica. Las relaciones lógicas son expresadas en lenguaje cotidiano y no fueron consideradas en el conteo de términos sin definición.

[100] Sin embargo, como los axiomas de Nicod y Łukasiewicz muestran, la longitud del axioma no basta como criterio de desempate definitivo. La organicidad de las fórmula así como el número de variables (aunque este último podría reducirse a la longitud del axioma a través de un argumento como el de

La validez de estos criterios podría discutirse. Sin embargo, más que evaluar el criterio, mi objetivo en este apartado es analizar la relación que había entre este criterio y nuestra notación. En otras palabras, ¿la notación polaca ofrece alguna ventaja a la hora de comparar la longitud de los axiomas frente a otros? Yo creo que la respuesta es afirmativa, pero creo esta se obtuvo evadiendo una desventaja de otras notaciones: los paréntesis.

Los paréntesis o, de manera más general, los signos de agrupación, son caracteres heredados de las notaciones algebraicas con las que cuentan todas las variantes de Peano. Ya sea a través de paréntesis, corchetes, llaves o puntos, estos tienen el propósito de eliminar las ambigüedades entre fórmulas diferentes cuando se escriben en notación infija.

Los caracteres de agrupación son necesarios, en tanto que todos los sistemas están construidos o por conectivas no asociativas (como el condicional y la negación de la conjunción) o por alguna conectiva asociativa, junto con la negación. En el primer caso, fórmulas como $\mathbf{p{\to}q{\to}r}$ necesitan paréntesis para discernir $\mathbf{(p{\to}q) \to r}$ de $\mathbf{p \to (q{\to}r)}$. En el segundo caso, fórmulas como $\mathbf{\neg\ p \lor r}$ los necesitan para distinguir $\mathbf{\neg p \lor r}$ de $\mathbf{\neg(p \lor r)}$.

Pero, ¿estos caracteres deberían considerarse al comparar dos fórmulas por su longitud? Parece ser que la respuesta intuitiva es que no. Y es que los paréntesis pueden ocasionar problemas debido a que las reglas que siguen generalmente se dan por sentadas, aprovechando la familiaridad que tiene alguien que estudia lógica con sus usos en aritmética y álgebra. Esto debemos reconocerlo como una ventaja ergonómica importante de los paréntesis frente a los puntos al estilo de Peano como signo de agrupación. Sin embargo, esto también otorga cierto nivel de arbitrariedad al uso de los paréntesis, siempre que se respete que aparezcan en pares y que contengan a una subfórmula.

Esto resulta incompatible con el criterio de longitud, pues la longitud de una fórmula va a variar según cuántos pares de paréntesis decidamos agregar a la fórmula. Por poner un

Łukasiewicz) fueron otros criterios importantes. Parece ser que el objetivo no solo era comparar la simplicidad entre diferentes axiomatizaciones, sino encontrar uno que pudiera ser declarado como el más simple. Hasta donde tengo entendido, el mejor candidato resultó ser el axioma de Wajsberg: DDpDqrDDDsrDDpsDpsDpDpq

Además de ser un axioma único construido a partir de sólo una conectiva, es igual de corto que el Nicod y Łukasiewicz (23 letras), tiene el mismo número de variables proposicionales (4) y es orgánico (ninguna de sus subfórmulas es, a su vez, una tesis del sistema). Resultaría interesante como tema de investigación futura lograr demostrar si es la única fórmula que cumple con estas propiedades o si necesitamos agregar un nuevo criterio a la rúbrica polaca.

ejemplo, creo que nadie podría poner en duda que **p→(q∧r)**, **(p→(q∧r))**, **((p)→((q)∧(r)))** son todas la misma fórmula. Sin embargo, sus longitudes son 7, 9 y 15 respectivamente. Intuitivamente, una fórmula debería ser igual de simple que sí misma, por lo que un uso arbitrario de paréntesis hace imposible que la longitud pueda ser usada como criterio de simplicidad.[101]

Lo cierto es que el uso no es del todo arbitrario. En muchos libros de texto podemos encontrar convenciones que nos permiten disminuir el número de signos de agrupación en una fórmula al mínimo posible. En el *Formulario* de Peano (1908, p. 3), se acuerda que el condicional tiene prioridad sobre la conjunción; mientras que en la primera versión de los *Grundzüge* de Hilbert y Ackermann (1950, p. 7), se resuelve que debe aprovecharse las propiedades asociativas de la conjunción y la disyunción para eliminar los paréntesis posibles, así como su propia jerarquía de operaciones (→, ~, &, ∨).

No obstante, estas convenciones no nos salvan de que aparezcan casos como el anterior. Tomemos, por ejemplo, el caso de las convenciones de Hilbert y Ackermann. En esta notación, no podemos escribir la fórmula **p→(q→r)** sin paréntesis, a diferencia de lo que ocurre con **p ∨ q ∨ r**. La primera tiene una longitud de 7, mientras que la segunda es solo de 5. ¿Podríamos decir que la segunda fórmula es más simple que la primera? Otro caso problemático es el de las fórmulas **m & (p→ (q→r))** y **m & (p ∨ q ∨ r ∨ m)**. Ambos tienen la misma longitud, el mismo número de variables y el mismo número de conectivas diferentes, pero en el segunda caso la fórmula cuenta con 4 conectivas, mientras que en el primero son solo 3. ¿Diríamos que ambas son igual de simples?

En ambos casos, la respuesta que nos da el criterio de longitud parece ser contraintuitiva. Si nos atenemos a este criterio, en el primer ejemplo, dos fórmulas con el mismo número de conectivas y variables, resultan tener complejidades diferentes, mientras que en el segundo dos fórmulas con diferente número de conectivas tienen la misma complejidad. Los paréntesis desconectan la relación que se suponía entre la longitud de una fórmula y el número de elementos relevantes para la simplicidad.

Para sortear estos obstáculos podríamos optar por la estrategia opuesta: en lugar de buscar que se use el mínimo número de paréntesis, podríamos optar por poner el máximo número de paréntesis. Por ejemplo, podríamos pedir que los argumentos de cada conectiva

[101] En el caso de los puntos de Peano, la misma situación se repite con pq.⊃r (longitud 5) y p.q:⊃:r (longitud 7).

siempre sean encerrados entre paréntesis. Para compensar el peso de la negación, podemos pedir que sus argumentos sean encerrados entre dos pares de paréntesis. De este modo, cada vez que introducimos una conectiva, cuatro caracteres extras son agregados a la fórmula. En la siguiente tabla podremos encontrar algunos ejemplos de fórmulas escritas con la convención propuesta:

p ∨ q	(p)∨(q)
¬p	¬((p))
p → ¬(p ∨ q)	(p) → (¬(((p) ∨ (q))))
¬(p ∨ q) → (¬p ∧ ¬q)	(¬(((p) ∨ (q)))) → ((¬((p))) ∧ (¬((q))))
¬(p ∨ q) ∨ ¬p ∨ ¬q	(¬(((p) ∨ (q)))) ∨ ((¬((p))) ∨ (¬((q))))

Sin embargo, el exceso de paréntesis hace que estos pierdan el propósito principal: permitir al usuario que distinga las diferentes partes de la fórmula.

El lector se estará preguntando en este momento porque hemos llegado hasta estas rebuscadas soluciones en lugar de optar por el camino simple: no contar los paréntesis. Si sabemos que los paréntesis no son relevantes para la simplicidad de una fórmula, ¿por qué no simplemente ignorarlos en el conteo de caracteres? Me temo que, en ese caso, estaríamos trabajando con un criterio diferente. Ya no se podría considerar de longitud, pues ya no se considera que tan larga o corta sea la fórmula. En su lugar, se estaría contando cuántos caracteres "lógicos" aparecen en la fórmula. Esto me parece que abre el problema de distinguir entre caracteres lógicos y no lógicos dentro de una fórmula. A pesar de que en la práctica los distinguimos sin dificultad, ciertamente hay algo de arbitrario en la resolución.

Con estos ejemplos queda claro que los paréntesis son necesarios para tener suficiente expresividad en las notaciones derivadas de Peano. Pero al mismo tiempo, pone diferentes obstáculos a la búsqueda de un criterio para la simplicidad basado en la longitud de la cadena de caracteres. Esto no ocurre con la notación polaca. La notación polaca tiene la misma expresividad que las derivadas de Peano. Además, nos ofrece una ventaja clara para comparar la simplicidad entre fórmulas al reducir la simplicidad a la longitud sin crear nuevas dificultades que necesiten de nuevas convenciones.

Los ejemplos de las convenciones también nos sirvieron para notar cómo han habido esfuerzos por parte de los usuarios de la notación derivada de Peano para reducir el uso de los paréntesis en la medida de lo posible. Visto a la luz de estos esfuerzos, la notación polaca resulta ser una buena propuesta para eliminar un elemento que se ha aceptado con recelo. Al desaparecer los caracteres y quedarse solo con caracteres lógicos, cada fórmula de la notación polaca tendrá cantidad igual o menor de caracteres que la fórmula equivalente en alguna notación infija, sin que esto provoque ambigüedad.

Aunque desde un principio hemos hecho énfasis únicamente en el aspecto ergonómico, también podría ser argumentable que esto cuenta con importante valor epistémico. Al escribir un axioma único, no solo estamos presentando la fórmula particular que permite construir todo el sistema, también estamos expresando (y podemos interpretar) su "nivel" de simplicidad en el momento.

En uno de sus textos, Łukasiewicz presentó dicha cualidad como un logro, empezando una breve exposición de su nueva notación diciendo: "He tenido éxito inventando un simbolismo libre-de-paréntesis más simple, que requiere el menor espacio posible".[102] (Łukasiewicz, 1934, p. 216) Tan importante fue para Łukasiewicz haber eliminado los signos de agrupación que lo que ahora conocemos como notación polaca, él siempre la llamó con ese nombre: simbolismo sin paréntesis (symbolikę beznawiasową).

5.4 Conclusiones

Este capítulo es la síntesis y la razón de ser de los capítulos precedentes. Su objetivo era tomar lo aprendido en ellos para responder a una pregunta: ¿La notación polaca ofrecía ventajas especiales al proyecto de investigación de Łukasiewicz? Y espero que, después de leer este capítulo, el lector esté convencido que dicha notación ofrecía al menos tres ventajas con respecto a las alternativas de la época.

Al comparar la notación polaca sobre el álgebra de Boole, descubrimos la primera ventaja de este capítulo: la capacidad de servir como una herramienta libre de equívocos para trabajar sobre el proyecto de fundamentar a las matemáticas. Al estar libre de los caracteres

[102] Estas palabra son importantes porque reafirman que la ausencia de caracteres de agrupación es una cualidad heredada de Frege, aunque presentada de manera más eficiente: "This symbolism of Frege's does, however, have the advantage of avoiding all punctuation marks, such as brackets, dots and so on. I have succeeded in devising a simpler bracket-free symbolism, requiring the least possible space. Brackets are eliminated by placing the functions "if" and "not" before their arguments. [...]".

tradicionalmente asociados a las matemáticas, se establecía a la lógica como disciplina independiente de las matemáticas, una postura que, como argumentamos en este capítulo, sostenía Łukasiewicz.

Por otra parte, al compararla con la notación de Frege, pudimos profundizar un poco más en la gran influencia que tuvo sobre la notación polaca. Esto nos permitió ver a la notación de Łukasiewicz como una continuación de varios de los principios de diseño de la notación de Frege, entre las cuáles se destaca la precisión. Sin embargo, la notación polaca venía acompañada de la importante ventaja de presentar la misma información con la misma precisión en un formato mucho más compacto que permitiera presentar las pruebas completas de una manera legible y práctica para la publicación de textos.

Por último, frente a las notaciones derivadas de Peano, se argumentó que la ausencia de paréntesis en la notación polaca permitía postular un criterio de simplicidad basado en la longitud que nos ayudaba a comparar dos conjuntos de axiomas diferentes. Este criterio no era superfluo y estaba alineado con otros criterios metodológicos a los que Łukasiewicz estaba adherido. Durante la exposición de esta ventaja, además se presentaron ejemplos que nos permitieron ver que las notaciones derivadas de Peano también tendían a reducir el uso de signos de agrupación en sus fórmulas.

6 | Conclusiones generales

Al principio de este trabajo nos propusimos responder a dos preguntas: 1) ¿Por qué Łukasiewicz diseñó la notación polaca aún cuando existían otras opciones? y 2) ¿Podemos considerar al resultado como una buena alternativa respecto al resto de opciones?

Con respecto a la primera pregunta, podemos decir que Jan Łukasiewicz creó la notación polaca como una herramienta que le permitiera llevar a cabo sus investigaciones y las de sus estudiantes en lógica formal, específicamente aquellas que involucraron la búsqueda de sistemas axiomáticos para la lógica proposicional. Gracias a evidencias que pudimos hallar en sus trabajos y las opiniones de sus estudiantes y colegas, pudimos constatar que esta línea de investigación ocupó un lugar muy importante dentro de la Escuela Polaca de Lógica y que los usos de la notación polaca siempre estuvieron ligados a la presentación de avances en la materia tanto como libros de texto para formar a nuevos estudiantes.

También creo que se ha presentado evidencia de que, al crear la notación polaca, Łukasiewicz buscaba recuperar las mejores características que él vió en la conceptografía de Frege, como la simplicidad entendida como la menor cantidad posible de elementos o la búsqueda de evitar la ambigüedad de los caracteres. Pero además, Łukasiewicz se esforzó por acompañarlas con las ventajas que suponían las notaciones derivadas de Peano, como el conjunto de conectivas con un carácter asignado o la estructura de cadena.

Para cerrar nuestra respuesta a esta primera pregunta, cabe mencionar que, aunque ya existían otras notaciones en el momento en el que Łukasiewicz lanzó su propuesta, estas tenían muy poco tiempo de vida. Remarco esto porque creo que muchas personas, al igual que yo lo hacía antes de iniciar esta investigación, podemos pensar que la notación polaca nació como una alternativa que no pudo contra una notación que ya estaba definida como estándar. Pero lo cierto es que en su momento, no existía ninguna notación estándar, al menos no con el papel que en la actualidad ocupa la segunda versión de la notación Hilbert-Ackermann. Entonces, es válido decir que Łukasiewicz se encontraba en un momento histórico en el que los lógicos seguían buscando la notación que mejor cumpliera con las necesidades de la joven disciplina que era la lógica matemática.

En cuanto a la segunda pregunta, tuvimos que refinarla un poco. En primer lugar, establecimos que calificaríamos una herramienta como "buena" solo de manera relativa a una tarea y en comparación de un conjunto de otras herramientas que también pueden cumplir con dicho propósito, según las ventajas que ofreciera al usuario. Siguiendo a Barceló (2016), llamaremos a éstas, sus ventajas "ergonómicas". De esta manera y gracias a lo que habíamos descubierto en la primera parte de esta tesis, nuestra segunda pregunta se convirtió en ¿Cuáles son las ventajas que la notación polaca ofrecía al estudio de la lógica matemática, entendida esta según el proyecto de investigación de Łukasiewicz en torno a la axiomatización, frente a otras notaciones disponibles?

Para responder a esta pregunta, nuestro último capítulo se dedicó a mostrar sus características ergonómicas. Encontramos tres ventajas: frente al sistema de Boole, la notación polaca favorecía el proyecto de fundamentar disciplinas matemáticas a través de la lógica al evitar compartir caracteres propios de otras disciplinas. Frente a la notación de Frege, permitió presentar pruebas completamente explícitas en poco espacio y simplificó su proceso de escritura. Por último, frente a las notaciones derivadas de Peano, la notación de Łukasiewicz permitió proponer un criterio de simplicidad basado en la longitud para sistemas construidos a partir de un solo axioma.

Al contrastar esto con la reconstrucción que hicimos del contexto histórico, podemos darnos cuenta que estas ventajas explican el éxito relativo que la notación tuvo dentro del círculo de la Escuela Polaca de Lógica hasta su disolución debido a la Segunda Guerra Mundial, pues estaban alineadas con el proyecto de investigación del grupo. Pero al mismo tiempo nos ayuda a entender por qué esta notación no floreció después de la disgregación del grupo de estudio, salvo en casos aislados como el de Arthur N. Prior. Cuando se reinició el esfuerzo de difundir la notación polaca después de la guerra, las otras notaciones se habían asentado lo suficiente y otras líneas de investigación se habían abierto.

Además de responder a estas dos preguntas, creo que el presente trabajo de investigación también ha generado otras conclusiones valiosas. En primer lugar, la importancia de incluir las características ergonómicas en el análisis y evaluación de las notaciones. Creo que este trabajo es un ejemplo de que el análisis ergonómico puede abonar profundidad a las investigaciones sobre representaciones epistémicas en filosofía de la ciencia. Partir desde este enfoque nos permite ligar las capacidades y tareas particulares de los usuarios a lo largo de la historia y a lo largo de la diversidad de capacidades a las explicaciones sobre el papel que tienen las notaciones en la tarea científica.

Pero por otro lado, es relevante en una evaluación que puede acompañar al uso cotidiano de las notaciones como herramientas epistémicas. Por poner un ejemplo, cuando los filósofos deciden atacar un problema de lógica o de otra área usando la lógica, no se preguntan qué notación usar a pesar de que hay opciones. Creo que esto sucede también en otros campos del conocimiento en donde se usan notaciones. En estos casos, valdría la pena hacer previamente una evaluación, aunque sea breve, de las notaciones disponibles para ver cuál tiene las mejores características ergonómicas y son suficientes para que valga el costo de aprender la notación o pedir que otros la aprendan.

En otro sentido, el estudio histórico nos ayudó a ver un ejemplo de cómo un grupo de estudio con grandes limitaciones, como el que fue organizado por Łukasiewicz, Leśniewski y Tarski a principios del siglo XX fue capaz de colocarse como un centro de investigación referente a nivel internacional en su campo en tan solo dos décadas. Esta transformación parece haber descansado sobre tres pilares: 1) un proyecto de investigación intencionalmente enfocado en problemas novedosos, 2) una metodología de investigación basada en las lecciones heredadas de Twardowski que aspiraba a la claridad, la multidisciplina y la simplicidad y 3) un equipo colaborativo plural, en donde participaron estudiantes y expertos de diferentes niveles y disciplinas. Esta lección podría rescatarse para nuestra Universidad

El camino a seguir en el futuro es claro: la clave para aumentar nuestra comprensión y mejorar nuestros sistemas de notación es el contexto alrededor de la actividad de hacer lógica. Es este el que establece las necesidades que tienen que cubrirse durante la tarea de diseñar notaciones. Actualmente podemos decir que la notación de Hilbert-Ackermann es suficiente para cumplir las tareas que realizamos con ella. Pero también ha quedado patente que es posible hacer adaptaciones o nuevas propuestas de notación para cubrir otras necesidades. Es lo que hizo Łukasiewicz en su tiempo y esto también puede hacer en el presente. Así que queda preguntarnos: ¿Hay alguna necesidad que haya surgido en la investigación de la lógica que no estuviera ahí hace 70 años? ¿Podríamos facilitar el trabajo de nuestro tiempo con nuevas propuestas notacionales? Creo que esta es la pregunta que debería continuar ante el camino abierto por esta tesis.

Anexo 1. Cronología de la historia de la notación polaca

A lo largo de esta tesis, hemos explorado la idea de que la notación polaca es el producto de la intersección de tres líneas históricas: el proyecto de la Escuela Polaca de Lógica, la axiomatización de la lógica proposicional y el desarrollo de propuestas de notaciones. Con el siguiente cuadro, queremos ofrecer una vista sintética de los antecedentes y procesos simultáneos a la notación polaca.

Periodo	Historia de las notaciones en lógica	Historia de la Escuela Polaca de Lógica	Historia de la axiomatización de la lógica Proposicional
Siglo XIX	(1847) Boole publica *The Mathematical Analysis of Logic* (Análisis matemático de la lógica), iniciando la tradición algebraica de la lógica y usando los caracteres aritméticos como símbolos lógicos. (1879) Frege publica *Begriffsschrift* (Conceptografía), dando origen a la lógica formal y presentando sus diagramas. (1889) Peano publica *Aritmetices Principia. Nova methodo exposita* en donde propone nuevos caracteres (−, ∩, ∪, ɔ, =) para las conectivas lógicas. (1900) Russell conoce a Peano en la I Conferencia Internacional de Filosofía	(1878) Nace Jan Łukasiewicz (1895) Twardowski obtiene su licencia e inicia a dar clases en la Universidad de Leópolis a los 29 años.	(1879) Frege presenta en su *Conceptografía* la primera axiomatización de la lógica proposicional con seis axiomas.
1901-1910	(1910) Russell y Whitehead comienzan a publicar la Principia Mathematica. A partir de la notación de Peano, diseñan una nueva notación para la lógica de predicados.	(1902) Łukasiewicz recibe el grado de doctor.	(1910) Russell y Whitehead ofrecen en la Principia cinco axiomas para la lógica proposicional basados en la negación y la conjunción.
1911-1920		(1918) Polonia gana su independencia. La Universidad de Varsovia inicia un periodo de reconstrucción y la Escuela de Leópolis se convierte en la Escuela de Leópolis-Varsovia. (1920) Łukasiewicz empieza a dar clases en la Universidad de Varsovia. Junto a Leśniewski, imparten cursos de lógica en la facultad de	(1912) Sheffer publica "A set of five independent postulates for boolean algebras, with application to logical constant" en donde presenta la barra de Sheffer (|). (1917) Nicod publica "A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic", en donde presenta un axioma único para la lógica proposicional usando

		matemáticas.	únicamente la barra de Sheffer.
1921-1930	(1928) Hilbert y Ackermann publican la primera edición de Grundzüge der theoretischen Logik (Elementos de lógica teórica). En esta edición ocupan los caracteres $\bar{p}$, &, v, →, ~ como símbolos de las conectivas lógicas.	(1924) Łukasiewicz comienza a diseñar la notación polaca. Tarski obtiene el grado de doctor a los 23 años con una tesis supervisada por Leśniewski. (1928) Łukasiewicz redacta sus *Elementos de la lógica matemática* como notas para su curso usando la notación polaca.	(1924) En este año, Łukasiewicz presenta una simplificación de los axiomas de la *Principia*, de los de Hilbert y su propio conjunto de tres axiomas que después usa en sus *Elementos.* (1925) Según Leśniewski y Łukasiewicz, en este año este último logra reducir el número de variables distintas en el axioma de Nicod de cinco a cuatro. Este resultado lo publicaría hasta 1931. (1926) Bernays publica "Axiomatische Untersuchungen des Aussagen-Kalkuls der 'Principia Mathematica'" (Investigaciones axiomaticas sobre el calculo proposicional de la 'Principia mathematica') en donde demuestra que bastan cuatro de los axiomas de Russell-Whitehead para obtener la lógica proposicional. (1928) Łukasiewicz logra encontrar tres axiomas independientes para la lógica proposicional: CCpqCCqrCpr, CCNppp y CpCNpq.
1931	**Łukasiewicz publica "Uwagi o aksjomacie Nicoda i 'dedukcji uogdlniającej'" (Comentarios sobre el axioma de Nicod y la 'deducción generalizante') y *Elementy logiki matematycznej* (Elementos de la lógica matemática), en donde presenta la notación polaca (N, K, A, C, E) a la comunidad académica.**		
1931-1950		(1938) Muere Twardowski. (1939) Muere Leśniewski. Inicia la Segunda Guerra Mundial. Cierra la Universidad de Varsovia. (1943) Łukasiewicz escapa de Polonia. Tres años después llegaría a Dublín, en donde dará clases de lógica formal hasta 1953.	
1950-2000	(1958) Se publica la cuarta edición de los *Grundzüge* de Hilbert y Ackermann. Allí se presentan los caracteres ¬, ⋀, ⋁, →, ↔, ∀, ∃ como reemplazo de los presentados en ediciones anteriores. Esta notación pasaría a convertirse en la notación estándar.	(1955) A. N. Prior publica *Formal Logic* (Lógica Formal), un libro de introducción a la lógica en inglés que usa la notación polaca. (1956) Muere Łukasiewicz.	

Siglo XXI			(2001) Usando técnicas de demostración automática, Fitelson (2001) prueba que no hay un axioma más simple que el de Łukasiewicz para la lógica clásica.

Anexo 2. Evidencia computacional para la Conjetura 2

En la sección 4.1.5 “Un algoritmo más simple”, propongo un método que nos ayudaría a confirmar que una cadena de caracteres es una fórmula bien formada con mucha facilidad. Bastaría con recorrer la cadena de caracteres de izquierda a derecha. Si nos encontramos con un carácter de proposición, sumamos 1; si nos encontramos con un carácter de conectiva diádica, restamos 1; y si nos encontramos con ‘N’, no sumamos ni restamos nada. Este método nos ayudaría a comprobar la corrección de la fórmula en muy simples pasos, lo que supondría una ventaja ergonómica.

Sin embargo, este algoritmo funciona siempre y cuando la siguiente conjetura es verdadera:

Conjetura 2

$\mathcal{K}(C_n)=1$ y $\forall\, i<n, \mathcal{K}(S_i) < 1 \Rightarrow C_n$ es una fórmula bien formada.

A pesar de mis esfuerzos, no logré demostrar la verdad de esta conjetura. Esto me llevó a buscar resultados parciales que al menos nos permitieran ver este método como una heurística razonable. Con esto en mente, decidí escribir un código de fuerza bruta que verifique la conjetura para cadenas cortas.

El código que a continuación presento tiene el propósito de generar todas las combinaciones de caracteres de variables, negaciones y conectivas, para luego verificar si son fórmulas bien formadas. Esta verificación se hace a través de dos métodos diferentes. Por una parte, usando el algoritmo del Dr. Axel Barceló basado en los árboles que se generan a partir de la definición recursiva de fórmulas bien formadas[103]. Este método elimina las negaciones y reemplaza de manera reiterativa las subfórmulas compuestas con dos variables como argumentos por una variable proposicional. Si al final del proceso nos quedamos con una variable, es posible armar un árbol genealógico. El segundo método utiliza el procedimiento de recorrer la fórmula sumando los valores K.

Para disminuir el número de operaciones necesarias, los únicos caracteres que componen las cadenas son ‘C’, ‘N’ y ‘a’. Esto, con el entendido de que, a partir de una fórmula bien formada compuesta por estos caracteres, se pueden sustituir instancias particulares de ‘C’ por el resto de caracteres de conectiva y de ‘a’ por el resto de caracteres de proposición, y obtendremos una nueva fórmula bien formada que obtenga los mismos resultados en el

[103] Véase Nota al pie de página 66 en p. 85.

algoritmo de barrido, en el algoritmo del Dr. Barceló y con un árbol semejante al de la fórmula original.

La función `generaListaCompleta(N)` crea una tabla de tres columnas, en la que la primera columna están todas las combinaciones de caracteres de una extensión N; en la segunda columna, el resultado del primer criterio; y en la tercera, el resultado del segundo criterio. En caso de que ambos criterios no coincidan, se imprime en consola la fórmula en cuestión como un contracaso.

A través de Google Apps Script, el código se ejecutó para verificar si se cumplía la conjetura en las cadenas de caracteres con una extensión menor o igual a 14. Esto fue equivalente a

$$\sum_{n=1}^{14} 3^{n} = 7{,}174{,}452 \text{ de cadenas de caracteres}$$

Para las más de 7 millones de cadenas, se cumplió lo que esperábamos. Si el algoritmo de barrido las identificaba como una fórmula bien formada, también lo hacía el algoritmo del Dr. Barceló. Ambos métodos identificaron las mismas 66,706 cadenas de caracteres como fórmulas bien formadas. De esta manera podemos concluir que **el algoritmo de comprobación de barrido funciona con todas las fórmulas con una extensión igual o menor a 14 caracteres**. Considero que con adecuaciones que usen de manera más eficiente la memoria y los cálculos que mi código rudimentario, podríamos extender estos resultados.

```
JavaScript

let listaPseudoformulas = [];

//Genera recursivamente todas las combinaciones de caracteres con una extensión
máxima (extMaxima) de N
function generarPseudoformulas(formula, extMaxima) {
  if(formula.length< extMaxima){
    listaPseudoformulas.push([formula, undefined, undefined]);

    generarPseudoformulas(formula + 'C', extMaxima);
    generarPseudoformulas(formula + 'N', extMaxima);
    generarPseudoformulas(formula + 'a', extMaxima);
  }
  return;
}

//Función K para caracteres
function valorKcaracter(caracter){
  switch (caracter){
```

```
    case "a":
      return 1;
    case "N":
      return 0;
    case "C":
      return -1;
  }
}

//Segundo criterio. Algoritmo de barrido aplicando la función K
function valorKformula(formula){
  let resultado=0;
  for (let i=0; i<formula.length-1; i++){
    resultado +=valorKcaracter(formula[i]);
    if(resultado==1){
      return false;
    }
  }

  resultado +=valorKcaracter(formula[formula.length-1]);
  if(resultado==1){
    return true;
  }
  return false;
}

//Primer criterio. Recibe una cadena compuesta de conectivas "C" y proposiciones "a"
y resuelve si se trata de una fórmula bien formada.
function esFormula(pseudoFormula){
  if(pseudoFormula.length>1){
    let sustitucion = pseudoFormula.replace(/Caa/g, "a");

    if(sustitucion!=pseudoFormula){
      return esFormula(sustitucion);
    }
    return false;
  }

  if(pseudoFormula.length<=1 && pseudoFormula=="a"){
    return true;
  }

  return false;
}

// Genera una lista con todas las fórmulas bien formadas dado el primer criterio
menores a una extensión dada. Revisa si cumple ambos criterios. Si no lo hace,
imprime el contracaso de la hipótesis. Llena la matriz listaPseudoformulas.

function generaListaCompleta(extension){
  let wff=[];
```

```
  generarPseudoformulas("", extension);
  for(i in listaPseudoformulas){

    //Primer paso del primer método de verificación. Si finaliza con un N, no es
fórmula. Si no, se inicia el reemplazo de subfórmulas Caa por a.

    if(listaPseudoformulas[i][0].charAt(listaPseudoformulas[i][0].length-1)=="N"){
      listaPseudoformulas[i][1]=false;
    }else{
      listaPseudoformulas[i][1]=esFormula(listaPseudoformulas[i][0].replace(/N/g,
""))
    }

    //Segundo método. Envía la cadena como argumento de la función de barrido.
    listaPseudoformulas[i][2]=valorKformula(listaPseudoformulas[i][0]);

    //Revisa si el resultado es el mismo. Si no, lo imprime como contracaso.
    if(listaPseudoformulas[i][1]!=listaPseudoformulas[i][2]){
      let contracaso = listaPseudoformulas[i][0];
      console.log(contracaso);
    }

    //Guarda las fbf en una lista.
    if(listaPseudoformulas[i][1]){
      wff.push(listaPseudoformulas[i][0]);
    }
  }
  return wff;
}
```

Tabla con las 216 fórmulas bien formadas conformadas por cadenas con una extensión igual o menor a 8 con caracteres del conjunto {C, N, a}.

Ext.	Fórmula	Ext.	Fórmula	Ext.	Fórmula	Ext.	Fórmula	Ext.	Fórmula	Ext.	Fórmula
1	a	6	NNNNNa	7	NCCNaaa	8	CCaaCNaa	8	CNCaNNaa	8	NCNaNCaa
2	Na	7	CaCaCaa	7	NCNaCaa	8	CCaaNCaa	8	CNCCaaaa	8	NCNaNNNa
3	Caa	7	CaCaNNa	7	NCNaNNa	8	CCaaNNNa	8	CNCNaaNa	8	NCNCaaNa
3	NNa	7	CaCCaaa	7	NCNCaaa	8	CCaCaaNa	8	CNCNaNaa	8	NCNCaNaa
4	CaNa	7	CaCNaNa	7	NCNNaNa	8	CCaCaNaa	8	CNCNNaaa	8	NCNCNaaa
4	CNaa	7	CaCNNaa	7	NCNNNaa	8	CCaCNaaa	8	CNNaCaNa	8	NCNNaCaa
4	NCaa	7	CaNCaNa	7	NNCaCaa	8	CCaNaCaa	8	CNNaCNaa	8	NCNNaNNa
4	NNNa	7	CaNCNaa	7	NNCaNNa	8	CCaNaNNa	8	CNNaNCaa	8	NCNNCaaa

5	CaCaa	7	CaNNCaa	7	NNCCaaa	8	CCaNCaaa	8	CNNaNNNa	8	NCNNNaNa
5	CaNNa	7	CaNNNNa	7	NNCNaNa	8	CCaNNaNa	8	CNNCaaNa	8	NCNNNNaa
5	CCaaa	7	CCaaCaa	7	NNCNNaa	8	CCaNNNaa	8	CNNCaNaa	8	NNCaCaNa
5	CNaNa	7	CCaaNNa	7	NNNCaNa	8	CCCaaaNa	8	CNNCNaaa	8	NNCaCNaa
5	CNNaa	7	CCaCaaa	7	NNNCNaa	8	CCCaaNaa	8	CNNNaCaa	8	NNCaNCaa
5	NCaNa	7	CCaNaNa	7	NNNNCaa	8	CCCaNaaa	8	CNNNaNNa	8	NNCaNNNa
5	NCNaa	7	CCaNNaa	7	NNNNNNa	8	CCCNaaaa	8	CNNNCaaa	8	NNCCaaNa
5	NNCaa	7	CCCaaaa	8	CaCaCaNa	8	CCNaaCaa	8	CNNNNaNa	8	NNCCaNaa
5	NNNNa	7	CCNaaNa	8	CaCaCNaa	8	CCNaaNNa	8	CNNNNNaa	8	NNCCNaaa
6	CaCaNa	7	CCNaNaa	8	CaCaNCaa	8	CCNaCaaa	8	NCaCaCaa	8	NNCNaCaa
6	CaCNaa	7	CCNNaaa	8	CaCaNNNa	8	CCNaNaNa	8	NCaCaNNa	8	NNCNaNNa
6	CaNCaa	7	CNaCaNa	8	CaCCaaNa	8	CCNaNNaa	8	NCaCCaaa	8	NNCNCaaa
6	CaNNNa	7	CNaCNaa	8	CaCCaNaa	8	CCNCaaaa	8	NCaCNaNa	8	NNCNNaNa
6	CCaaNa	7	CNaNCaa	8	CaCCNaaa	8	CCNNaaNa	8	NCaCNNaa	8	NNCNNNaa
6	CCaNaa	7	CNaNNNa	8	CaCNaCaa	8	CCNNaNaa	8	NCaNCaNa	8	NNNCaCaa
6	CCNaaa	7	CNCaaNa	8	CaCNaNNa	8	CCNNNaaa	8	NCaNCNaa	8	NNNCaNNa
6	CNaCaa	7	CNCaNaa	8	CaCNCaaa	8	CNaCaCaa	8	NCaNNCaa	8	NNNCCaaa
6	CNaNNa	7	CNCNaaa	8	CaCNNaNa	8	CNaCaNNa	8	NCaNNNNa	8	NNNCNaNa
6	CNCaaa	7	CNNaCaa	8	CaCNNNaa	8	CNaCCaaa	8	NCCaaCaa	8	NNNCNNaa
6	CNNaNa	7	CNNaNNa	8	CaNCaCaa	8	CNaCNaNa	8	NCCaaNNa	8	NNNNCaNa
6	CNNNaa	7	CNNCaaa	8	CaNCaNNa	8	CNaCNNaa	8	NCCaCaaa	8	NNNNCNaa
6	NCaCaa	7	CNNNaNa	8	CaNCCaaa	8	CNaNCaNa	8	NCCaNaNa	8	NNNNNCaa
6	NCaNNa	7	CNNNNaa	8	CaNCNaNa	8	CNaNCNaa	8	NCCaNNaa	8	NNNNNNNa
6	NCCaaa	7	NCaCaNa	8	CaNCNNaa	8	CNaNNCaa	8	NCCCaaaa		
6	NCNaNa	7	NCaCNaa	8	CaNNCaNa	8	CNaNNNNa	8	NCCNaaNa		
6	NCNNaa	7	NCaNCaa	8	CaNNCNaa	8	CNCaaCaa	8	NCCNaNaa		
6	NNCaNa	7	NCaNNNa	8	CaNNNCaa	8	CNCaaNNa	8	NCCNNaaa		
6	NNCNaa	7	NCCaaNa	8	CaNNNNNa	8	CNCaCaaa	8	NCNaCaNa		
6	NNNCaa	7	NCCaNaa	8	CCaaCaNa	8	CNCaNaNa	8	NCNaCNaa		

Bibliografía

Barceló, A. A. (2016). Las imágenes como herramientas epistémicas. *Scientiae Studia*, *14*(1), 45-63. 10.11606/S1678-31662016000100004

Bochenski, J. M. (1994). Morals of thought and speech - Reminiscences. In J. Woleński (Ed.), *Philosophical logic in Poland* (pp. 1-8). Springer. 0.1007/978-94-015-8273-5

Boole, G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic. Being an essay towards a calculus of deductive reasoning.* Macmillan, Barclay & Macmillan.

Boole, G. (1958). *An investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Dover Publications.

Brożek, A. (2018). Kazimierz Twardowski: A Great Teacher of Great Philosophers. En A. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present* (pp. 15-32). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-319-65430-0_2

Burris, S. (2018, Verano). George Boole. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Obtenido de https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/boole/

Chu, I.-P. (2002). *Convert Infix Expression to Post-Fix Expression*. Lecture Notes CSC415 Week 9. Obtenido de https://condor.depaul.edu/ichu/csc415/notes/notes9/Infix.htm

Copi, I. M., & Cohen, C. (2007). *Introducción a la lógica* (E. A. González Ruiz, Trad.). Limusa.

Couturat, L. (2004). *The Algebra of Logic*. Project Gutenberg.

Enderton, H. B. (2007). *A mathematical introduction to logic* (2nd ed.). Harcourt Academic Press.

Fitelson, B. (2001). New Elegant Axiomatizations of Some Logics. *Branden Fitelson Personal Web.* https://fitelson.org/ar.html#AR

Frege, G. (1879). Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas, construido a semejanza del lenguaje aritmético, para el pensamiento puro. In M. M. Valdés (Ed.), *Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas* (pp. 39-153). Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM.

Frege, G. (1882). Justificación científica de una conceptografía. In M. M. Valdés (Ed.), *Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas* (pp. 155-161). Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM.

Frege, G. (2016). *El lenguaje de fórmulas lógico de Boole y mi conceptografía* (X. de Donato, Trans.). Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Frege, G., & Dudman, V. H. (1969). On Herr Peano's Begriffsschrift and my own. *Australasian Journal of Philosophy*, *47*(1), 1-14. 10.1080/00048406912341001

Garrido, Á. & Wybraniec-Skardowska, U. eds. (2018), The Lvov-Warsaw School. Past and Present. (pp. 361-371). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_27

Goodman, N. (2010). *Los lenguajes del arte: Aproximación a la teoría de los símbolos* (J. Cabanes, Trans.). Paidos.

Hasse, C. (2018, Julio). A Survival Guide to Presburger Arithmetic. *ACM SIGLOG News*, *5*(3), 67-82. 10.1145/3242953.3242964

Hertz, P. (1992, Septiembre). Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. *Mathematische Annalen*, *87*, 246-269. 10.1007/BF01459067

Hilbert, D., & Ackermann, W. (1950). *Principles of Mathematical Logic* (L. Hammond, G. Leckie, & F. Steinhardt, Trans.). Chelsea Publishing Company.

Hilbert, D., & Ackermann, W. (1962). *Elementos de lógica teórica* (V. Sánchez de Zavala, Trad.). Tecnos.

Indrzejczak, A. (2018). Stanisław Jaśkowski and Natural Deduction Systems. In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present* (pp. 465-483). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_33

Jadacki, J. (2018). Jan Łukasiewicz: A Creator of New Ideas in Logic and a Reinterpreter of Its History. In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present* (pp. 33-46). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_3

Kenny, A. (1970). Arthur Norman Prior (1914-1969). *Proceedings of the British Academy*, *56*, 321-349.

Leśniewski, S. (1992). On the foundations of Mathematics (D. I. Barnett, Trans.). In S. J. Surma (Ed.), *Collected Works* (Vol. 1, pp. 174-381). Polish Scientific Publishers.

Lovett, E. O. (1901). Mathematics at the International Congress of Philosophy, Paris, 1900. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *7*(4), 157-183. https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183416497

Łukasiewicz, J. (1913). Logical foundations of probability theory. In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works* (pp. 16-63). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1916). On the concept of magnitude. In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works*. (pp. 64-83) North-Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1921). Two-Valued Logic. In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works* (pp. 89-109). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1923). A numerical interpretation of the theory of propositions. In L. Borkowski (Ed.), *Selected works* (pp. 129-130). North-Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1929). O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej. *Nauka Polska*, (10), 604-620. https://www.sbc.org.pl/dlibra/publication/22955/edition/20205/content

Łukasiewicz, J. (1931). Comments on Nicod's Axiom and on "Generalizing Deduction" (O. Wojtasiewicz, Trans.). In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works* (pp. 179-196). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1934). On the history of the logic of propositions. In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works* (pp. 197-217). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1937). In defence of logistic. In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works* (pp. 236-249). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1948, Abril). The shortest axiom of the implicational calculus of propositions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, *52*(3), 25 - 33.

Łukasiewicz, J. (1953a). Formalization of mathematical theories. In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works* (pp. 341 - 351). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1953b). A system of modal logic. In L. Borkowski (Ed.), *Selected Works* (pp. 352 - 390). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1963). *Elements of Mathematical Logic* (O. Wojtasiewicz, Trans.). Pergamon Press.

Łukasiewicz, J. (1970). The equivalential calculus. In L. Borkowski (Ed.), *Selected works* (pp. 250-278). North Holland Publishing Company.

Łukasiewicz, J. (1994). Curriculum Vitae of Jan Łukasiewicz. *Metalogicon*, (2), 133-137. http://web.mclink.it/MI2701/rivista/1994ld/Łukasiewicz94ld.pdf

Łukasiewicz, J., & Tarski, A. (1930). Investigation into the sentential calculus. In L. Borkowski (Ed.), *Selected works* (pp. 131-152). North Holland Publishing Company.

Malinowski, G. (2018). Łukasiewicz and His Followers in Many-Valued Logic. In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present* (pp. 301-328). Birkhaus. 10.1007/978-3-319-65430-0_24

Marek, V. W. (2018). A View of Revival of Mathematical Logic in Warsaw, 1945–1975. In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowski (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present.* (pp. 665-672). Birkhaüser. 10.1007/978-3-319-65430-0_45

Mazur, J. (2014). *Enlightening Symbols. A short history of Mathematical Notation and Its Hidden Powers*. Princeton University Press.

Nicod, J. (1917). A reduction in the number of primitive propositions in logic. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences.*, *19*, 32-41. Biodiversity Heritage Library. https://www.biodiversitylibrary.org/page/30410144#page/46

Novaes, C. D. (2012). *Formal languages in logic: a philosophical and cognitive analysis.* Cambridge University Press. 10.1017/CBO9781139108010

O'Hanlon, O. (2019, Abril 8). *Home from home – An Irishman's Diary on Polish logician, mathematician and philosopher Jan Łukasiewicz*. The Irish Times. https://www.irishtimes.com/opinion/home-from-home-an-irishman-s-diary-on-polish-logician-mathematician-and-philosopher-jan-Łukasiewicz-1.3853608

Orey, S. (1957, Junio). Review of Sur la Formalisation des Théories Mathématiques. *The Journal of Symbolic Logic*, *22*(2), 214. 10.2307/2964191

Peano, G. (1889). The principles of arithmetic, presented by a new method. In H. C. Kennedy (Ed.), *Selected works of Giussepe Peano* (pp. 101-134). George Allen & Unwin LTD.

Peano, G. (1897). Studii di logica matematica. *Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino*, *32*(11), 565-583.

Peano, G. (1908). *Formulario mathematico* (5° ed.). Fratres Bocca Editores. http://rcin.org.pl/impan/Content/69130/WA35_11930_5421_Formulario.pdf

Peano, G. (1915). The importance of symbols in mathematics. In H. C. Kennedy (Ed.), *Selected works of Giuseppe Peano* (pp. 227-234). George Allen & Unwin Ltd.

Prior, A. N. (1952). Łukasiewicz's symbolic logic. *Australasian Journal of Philosophy*, *30*(1), 33-46. 10.1080/00048405285200031

Prior, A. N. (1957). *Time and Modality*. Oxford University Press.

Prior, A. N. (1963). *Formal Logic*. Oxford University Press. 10.1093/acprof:oso/9780198241560.001.0001

Prior, A. N. (1969). Extensionality and propositional identity. *Crítica*, *3*(7), 35-60. https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.1969.59

Purdy, R., & Zygmunt, J. (2018). Adolf Lindenbaum, Metric Spaces and Decompositions. In A. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present.* (pp. 505-550). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_36

Roberts, D. D. (1973). *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. De Gruyter Mouton.

Roero, C. S. (2011). The Formulario between Mathematics and History. In F. Skof (Ed.), *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic* (pp. 83-133). Springer. 10.1007/978-88-470-1836-5_6

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics* (Vol. 1). Cambridge University Press. https://archive.org/details/principlesofmath01russ

Russell, B. (1959). *My Philosophical Development*. Simon and Schuster.

Russell, B., & Whitehead, A. N. (1910). *Principia Mathematica* (Vol. 1). Cambridge University Press.

Scott, C. A. (1900). The International Congress of Mathematicians in Paris. *Bulletin of American Mathematical Society*, *7*(2), 57-69. 10.1090/s0002-9904-1900-00768-3

Sheffer, H. M. (1913). A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. *Transactions of the American Mathematical Society*, *14*, 481-488. 10.1090/S0002-9947-1913-1500960-1

Simons, P. (2018). Stanisław Leśniewski: Original and Uncompromising Logical Genius. In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present.* (pp. 209-221). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_15

Singh, P. (2019, Febrero 8). *Postfix to Infix*. GeeksforGeeks. Obtenido de https://www.geeksforgeeks.org/postfix-to-infix/

Słupecki, J., & Borkowski, L. (1958). The Logical Works of J. Łukasiewicz. *Studia Logica*, (8), 7-56. https://www.jstor.org/stable/20013604

Świetorzecka, K. (2018). Bolesław Sobociński: The Ace of the Second Generation of the LWS. In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present.* (pp. 599-613). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_41

Valdés, M. M. (2016). Presentación. In *Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas* (pp. 5-13). Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM.

Weisstein, E. W. (n.d.). *Notation*. MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Notation.html

Wetzel, L.,(2018, Otoño) *Types and Tokens*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Obtenido de https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/types-tokens/

Woleński, J. (1989). *Logic and philosophy in Lvov-Warsaw School*. Springer. 10.1007/978-94-009-2581-6

Woleński, J. (1998). The reception of the Lvov-Warsaw School. In *The Lvov-Warsaw School and Contemporary Philosophy* (pp. 3-19). Springer Netherlands. 10.1007/978-94-011-5108-5

Woleński, J. (2018). Alfred Tarski (1901–1983). In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present.* (pp. 361-371). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_27

Woleński, J. (2018). Jerzy Słupecki (1904–1987). In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present* (pp. 567-573). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_39

Wybraniec-Skardowska, U. (2018). Introduction. The School: Its Genesis, Development and Significance. In Á. Garrido & U. Wybraniec-Skardowska (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present.* (pp. 3 - 14). Birkhäuser. 10.1007/978-3-319-65430-0_1