



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
(INGENIERÍA MECÁNICA) – (TERMOFLUIDOS)

ANÁLISIS DE UN SUMIDERO DE CALOR UTILIZANDO UN NANOFLUIDO  
CIRCULANDO EN UN MEDIO POROSO NO DARCYNIANO

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:  
**FRANCISCO FERNANDO HERNÁNDEZ FIGUEROA**

TUTOR:  
**IAN GUILLERMO MONSIVAIS MONTOLIU**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CDMX a 25 de octubre del 2022**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Resumen

En el presente trabajo se analiza numéricamente un proceso de transferencia de calor conjugado para un sumidero de calor en un microcanal rectangular, considerando que se introduce un nanofluido que circula dentro del microcanal y es impulsado por un gradiente de presión externo, el espacio interior del microcanal está confinado de un material poroso. El objetivo de este trabajo es encontrar los perfiles de temperatura de la matriz porosa y del espesor de pared del microcanal, además se tiene en cuenta un flujo de calor constante que es aplicado en las paredes exteriores del microcanal hacia el nanofluido. Los resultados muestran que el número de Brinkman es responsable del aumento de temperatura del sistema y es causante de ocasionar efectos bastante peculiares en el trabajo presente, mientras más grande sea el valor del Brinkman se va notar un aumento de la temperatura debido al efecto de inducir un mayor volumen de nanopartículas. que después de un cierto valor de la coordenada longitudinal, hay una temperatura más alta en el centro del microcanal que en la vecindad de la pared, esta situación se vuelve más evidente a medida que aumenta el número de Brinkman.

Las diferentes soluciones numéricas se obtuvieron a través del software de código libre Freefem ++ usando el método de elementos finitos(FEM).

## Abstract

In the present work, a conjugate heat transfer process for a heat sink in a rectangular microchannel is analyzed numerically, considering that a nanofluid is introduced that circulates inside the microchannel and is driven by an external pressure gradient, the interior space of the microchannel. microchannel is confined by a porous material. The objective of this work is to find the temperature profiles of the porous matrix and the wall thickness of the microchannel, also taking into account a constant heat flow that is applied on the outer walls of the microchannel towards the nanofluid. The results show that the Brinkman number is responsible for the increase in temperature of the system and is the cause of causing quite peculiar effects in the present work, the larger the Brinkman value, the greater the temperature increase due to the effect of inducing a higher volume of nanoparticles. that after a certain value of the longitudinal coordinate, there is a higher temperature in the center of the microchannel than in the vicinity of the wall, this situation becomes more evident as the Brinkman number increases.

The different numerical solutions are obtained through the free code software Freefem ++ using the finite element method (FEM).

# Nomenclatura

Símbolo	Término	Unidades SI
$\rho$	Densidad	$\frac{kg}{m^3}$
$Da$	Parámetro de Darcy	<i>adimensional</i>
$u$	Vector velocidad	$\frac{m}{s}$
$P$	Presión	$Pa$
$K$	Permeabilidad	$m^2$
$x$	Dirección horizontal	$m$
$y$	Dirección vertical	$m$
$F$	Coefficiente de arrastre de Forchheimer	<i>adimensional</i>
$\mu$	Viscosidad Dinámica	$\frac{kg}{m \cdot s}$
$\phi$	Porosidad del medio poroso	<i>adimensional</i>
$\nabla$	Operador Nabla	$\frac{1}{m}$
$U_\infty$	Velocidad de corriente libre	$\frac{m}{s}$
$L$	Longitud del microcanal	$m$
$X$	Dirección horizontal adimensional	<i>adimensional</i>
$H$	Altura del microcanal	$m$
$Y$	Dirección vertical adimensional	<i>adimensional</i>
$\xi$	Espesor de pared en su forma adimensional	<i>adimensional</i>
$u'$	Velocidad adimensional	<i>adimensional</i>
$\Lambda_F$	Parámetro inercial	<i>adimensional</i>
$\varphi$	Concentración de volumen de nanopartículas	%
$T$	Temperatura	$K$
$d_p$	Diámetro de nanopartícula.	$nm$
$h$	Espesor de pared	$m$
$Kn$	Número de Knudsen	<i>adimensional</i>
$\lambda$	Trayectoria libre media de moléculas	$m$
$\alpha_c$	Parámetro Conjugado	<i>adimensional</i>
$H_2O$	Compuesto químico de Agua	-
$Al_2O_3$	Compuesto químico de Oxido de Aluminio	-
$\epsilon$	Relación de aspecto fluido	<i>adimensional</i>
$\epsilon_h$	Relación de aspecto espesor de pared	<i>adimensional</i>
$\Phi$	Disipación Viscosa	-
$k$	Conductividad térmica	$\frac{W}{m \cdot K}$
$q''$	Flujo de calor	$\frac{W}{m^2}$
$\Delta T$	Diferencia de temperatura	$K$
$Pe$	Número de Peclet	<i>adimensional</i>
$Br$	Número de Brinkman	<i>adimensional</i>
$R$	Resistencias térmicas	-
$C_p$	Calor específico	$\frac{J}{kg \cdot K}$

Símbolo	Nomenclatura
<i>nf</i>	Nanofluido
<i>fb</i>	Fluido base sin nanopartículas
<i>s</i>	Fase sólida
<i>np</i>	Nanopartícula
<i>eff</i>	Efectiva
<i>w</i>	Pared del microcanal

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
1.1	Objetivo . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Formulación del problema</b>	<b>13</b>
2.1	Ecuaciones gobernantes . . . . .	14
2.2	Condiciones de frontera y velocidad de corriente libre . . . . .	15
2.3	Orden de Magnitud . . . . .	16
2.4	Análisis Adimensional . . . . .	20
2.5	Inyección de nanofluidos al modelo físico. . . . .	22
<b>3</b>	<b>Modelo Numérico.</b>	<b>27</b>
3.1	Formulación variacional. . . . .	28
<b>4</b>	<b>Resultados.</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>47</b>
<b>I</b>	<b>Apéndice I: Figuras</b>	<b>48</b>

# 1 Introducción

A lo largo de las últimas décadas, la micro y nano-tecnología han adquirido un enorme interés debido al auge de los sistemas microelectromecánicos (MEMS por sus siglas en inglés). Debido a lo anterior, ha sido necesario la fabricación de microcanales para construir sistemas integrados de refrigeración y enfriamiento<sup>(1)</sup>. En el estudio del rendimiento de los intercambiadores de calor donde se utiliza energía térmica, por ejemplo, para generar energía eléctrica, es una práctica común despreciar los efectos longitudinales de la conducción de calor, especialmente cuando se realiza un modelo bidimensional del intercambiador como placa paralela. Sin embargo, ignorar estos efectos puede conducir al deterioro del rendimiento térmico en las paredes y los tubos de los intercambiadores de calor de flujo cruzado y contraflujo, estos sistemas se ven afectados por la efectividad de los intercambiadores involucrados, la cual, en gran medida, depende de la conducción longitudinal (axial) en las paredes y de las irreversibilidades causadas por la mala distribución del flujo. Por lo tanto, la conducción longitudinal de calor representa una importante irreversibilidad en el desempeño térmico de los intercambiadores de calor que presentan grandes gradientes de temperatura, como ocurre en los sistemas criogénicos<sup>(16)</sup>.

Se ha estudiado que al incrustar medios porosos en los microcanales, se puede aumentar la relación de volumen del flujo. Se informa que el rendimiento térmico de un intercambiador de calor micro poroso es más alto que el de un microcanal convencional. De tal forma que el confinamiento de medios porosos en un microcanal parece ser un método prometedor de eliminación de alto flujo de calor en dispositivos miniaturizados<sup>(3)</sup>.

El medio poroso se refiere a un material que consiste en una matriz sólida con un vacío interconectado (poros) que puede permitir el flujo de calor y masa, se supone que la matriz sólida es rígida (la situación habitual). La interconexión del vacío (los poros) permite el flujo de uno o más fluidos a través del material<sup>(2)</sup>. En un medio poroso natural la distribución de los poros con respecto a la forma y el tamaño, es irregular. Ejemplos de medios porosos naturales son arena de playa, arenisca, piedra caliza, madera, etc. vistos en la Fig.1<sup>(2)</sup>.

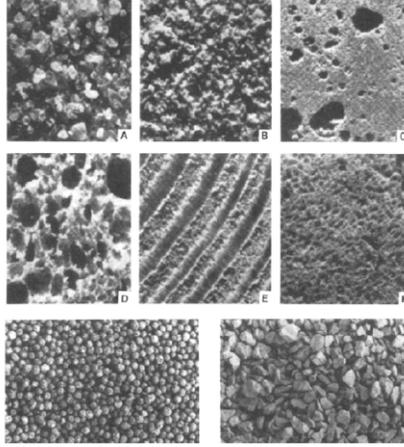


Figura 1: Ejemplos de medios porosos( A) arena de playa, A) arenisca, C) piedra caliza, D) pan de centeno, E) madera, y F) pulmón humano). Parte baja descripción de medios porosos naturales<sub>(2)</sub>.

Una parte fundamental para el flujo de la velocidad en los medios porosos es la porosidad( $\phi$ ) que se define como la fracción del volumen total del medio que está ocupado por el espacio vacío<sub>(2)</sub>. En 1856 Henry Darcy en su investigación de la hidrología del suministro de agua y sus experimentos sobre el flujo unidireccional en estado estable en un medio uniforme reveló una proporcionalidad entre el caudal y la diferencia de presión aplicada<sub>(2)</sub>. Expresado en la siguiente ecuación.

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Donde  $K$  es la permeabilidad específica; la permeabilidad específica es la propiedad de los medios porosos que caracteriza el flujo de fluidos a través de la matriz porosa por medio de la aplicación de un gradiente de presión;  $\mu$  se define como la viscosidad dinámica y  $\frac{\partial P}{\partial x}$  el gradiente de presión en la dirección  $x$ . La ecuación de Darcy ha sido verificada por los resultados de muchos experimentos. Esta ecuación en analogía con la ecuación de Navier-Stokes, señaló que la inclusión del término  $(u \cdot \nabla)u$  era inapropiada porque elevaba el orden (con respecto a las derivadas espaciales) de la ecuación diferencial, y esto era inconsistente cuando se utilizaba la ecuación de Darcy<sub>(2)</sub>. De igual manera es bien sabido que la ley de Darcy no puede predecir los efectos viscosos, se asumía incompresibilidad en el flujo y no se podía predecir los efectos de una velocidad alta. Es por eso que había una necesidad definitiva de extender el modelo de la ley de Darcy<sub>(2)</sub>.

$$\rho_f \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] = -\nabla P - \frac{K}{\mu}$$

En el caso de un fluido viscoso, una partícula material retiene su impulso, en ausencia de fuerzas aplicadas en la extensión de la ley de Darcy. La ecuación anterior, es lineal en la velocidad de filtración y se cumple cuando es suficientemente pequeña. En la práctica, "suficientemente pequeño" significa que el número de Reynolds basado en un diámetro de poro, es de unidad de orden o menor, el hecho de que el arrastre debido a obstáculos sólidos es comparable con el arrastre de la superficie debido a la fricción, lo que genera la necesidad de que el fluido fluya alrededor de partículas sólidas que conduce a una reducción en la coherencia del patrón de momento del fluido, el promedio de las fuerzas de arrastre microscópicas conduce a una teoría macroscópica no lineal del flujo, pero el promedio de términos de inercia microscópicos es insignificante en circunstancias prácticas típicas, lo que lleva a la ecuación realizada por Forchheimer.(2).

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}u - \frac{\rho_f F}{K^{\frac{1}{2}}} |u|u$$

En la ecuación anterior se presenta el termino de arrastre de Forchheimer( $F$ ) debido a esto la anterior ecuación, es la transición del flujo de la velocidad a escala de poro. La ruptura en la linealidad en la ecuación de Forchheimer se debe al hecho de que el arrastre de la forma debido a obstáculos sólidos ahora es comparable con el arrastre de la superficie debido a la fricción. Una alternativa a la ecuación Darcy con los términos inerciales omitidos, lleva a la modificación de la ecuación de Brinkman(2).

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}u + \mu e f f \nabla^2 u$$

Ahora se presentan dos términos viscosos,  $\mu e f f$  es la viscosidad efectiva y  $\mu$  la viscosidad dinámica. En la ecuación de Brinkman se muestra el primero término de Darcy y el segundo termino es análogo al término laplaciano que aparece en la ecuación de Navier-Stokes, para muchos propósitos prácticos no hay necesidad de incluir el término laplaciano solo si es necesario cuando se cumpla una condición de no deslizamiento, entonces se requiere el término laplaciano(2).

La aplicación de la dinámica de fluidos en medios porosos es muy amplia en diferentes campos de estudio, como lo es en recuperación de petróleo, en donde se permite desplazar un líquido por otro en presencia de una tercera fase. En áreas como la biología para el transporte de fluidos en plantas o en semillas; penetración de agua en suelos y aplicaciones médicas. En el área de textiles se puede presentar en el comportamiento de prendas en presencia de líquidos. En la construcción en la penetración de agua dentro de concretos o pastas de cemento. En la industria de alimentos en el área de cocción; filtración de bebidas con proceso de fermentación, etc.(2)

En cuanto a la ecuación de la energía empleada en el trabajo presente, se basa de la ecuación que expresa la primera ley de la termodinámica en un medio poroso se basa en una situación simple en la que el medio es isotrópico y donde los efectos radiativos y el trabajo realizado por los cambios de presión son despreciables. Se supone que existe un equilibrio térmico local tal que  $T_s = T_f = T$ , donde  $T_s$  y  $T_f$  son las temperaturas de las fases sólida y fluida, respectivamente<sup>(2)</sup>.

Sin embargo; la elección del fluido de trabajo también es de suma importancia. La baja conductividad térmica de un fluido convencional plantea una limitación principal para el rendimiento de un disipador térmico, se ha determinado que la agregación de partículas a través de un fluido convencional(nanofluido), los fluidos convencionales en el presente trabajo se llaman fluidos base, un fluido base puede ser agua, aceite, entre otros, se ha logrado que estos fluidos con agregación de partículas tengan mejoras significativas en la conductividad térmica<sup>(3)</sup>. Es debido mencionar que la conductividad térmica de un material sólido es mayor a la de un fluido. Por esto, se toman nanopartículas de diferentes materiales que se mezclan con el fluido base de trabajo con el fin de incrementar la conductividad térmica del fluido de trabajo. Entre los materiales más comúnmente usados se incluyen metales químicamente estables (oro, cobre), óxidos metálicos ( $Al_2O_3$ ,  $SiO_2$ ,  $TiO_2$ ,  $ZnO$ ,  $Fe_3O_4$ ,  $CuO$ ,  $MgO$ ), carburos metálicos (SiC), nitruros metálicos (AlN, SiN), el carbono en sus diversas formas (diamante, grafito, nanotubos de carbono)<sup>(4)</sup>.

El estudio de los nanofluidos se ha visto en mayor auge en los últimos años debido a sus aplicaciones en tan diversas áreas de investigación como en transferencia de calor o tecnologías de refrigerantes, en microelectrónica, MEMS, microfluídica, medicina y numerosos sistemas de gestión térmica<sup>(7)</sup>. Pero, ¿qué es un nanofluido? Se denomina nanofluido a suspensiones de materiales de partículas sólidas de tamaño nanométrico (metálicos o no metálicos) en fluidos base<sup>(5)</sup>.

La terminología de nanofluido fue primera vez implementada por Choi, quien reveló en una publicación donde se realizó un estudio de la mejora en la conductividad térmica en fluidos base en inmersión de nanopartículas. Mencionó que la mezcla homogeneizada de nanopartículas en fracciones bajas de volumen y fluidos convencionales aumenta notablemente el rendimiento térmico<sup>(5)</sup>.

Con el desarrollo de la nanotecnología se hizo posible la producción de partículas de tamaños entre 1 a 100 nanómetros ( $nm$ ) conocidas como nanopartículas, una comparación de la dimensión de éstas con objetos conocidos se muestra en la Fig. 2.

El tamaño de las partículas que se introducen en el fluido base es clave en la estabilidad de los nanofluidos. Cualquier suspensión de sólidos en un líquido, en presencia del campo gravitatorio, tiende a separarse. Un proceso que se conoce con el término de sedimentación. Sin embargo, la sedimentación tiene efectos adversos en los nanofluidos, ya que modifica sus propiedades y la formación de depósitos sólidos puede impedir su uso práctico. La sedimentación de partículas está gobernada por la ley de Stokes, que nos da la velocidad de caída de una partícula. En el caso de suspensiones de nanopartículas, la combinación del

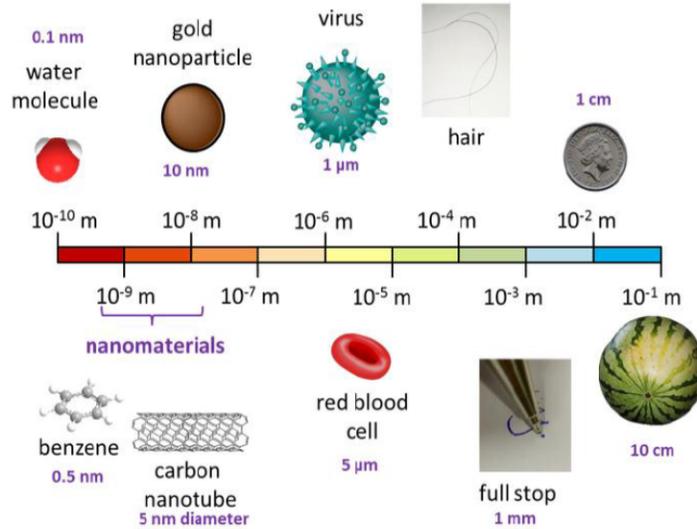


Figura 2: Comparación de partículas nanometricas en diferentes escalas[15].

tamaño pequeño y el movimiento browniano dan lugar a suspensiones altamente estables durante periodos extensos de tiempo, sin observarse sedimentación<sup>(8)</sup>. Cuando el medio poroso está delimitado por una pared impermeable, lo que presenta al menos dos dificultades para analizar el proceso de transferencia de calor: la ley de Darcy es inaplicable en las regiones cercanas a la pared y los efectos de frontera deben conservarse en el análisis<sup>(17)</sup>.

En el caso de microcanales la reducción de tamaño de un microcanal conduce a una mejora en la relación superficie y volumen, el problema se vuelve intrínseco al transporte de termofluidos de microescala que reside en la caída de presión significativa que varía inversamente a la escala de longitud de la sección transversal de los micro dispositivos<sup>(6)</sup>. Las condiciones fundamentales en la que trabajan microcanales suelen tener longitudes características del orden de 1 a  $100 [\mu\text{m}]$ , por lo cual cuando se trabajan con estas escalas utilizar el parámetro del número de Knudsen $[Kn]$ , definido como<sup>(13)</sup>:

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

El número de Knudsen caracteriza el efecto de la rarefacción y se define como la relación entre el camino libre medio molecular ( $\lambda$ ) y la longitud característica(L). A medida que el número de Knudsen aumenta, las hipótesis de la mecánica del medio continuo y por lo tanto es necesario utilizar otros modelos que describen el comportamientos de las propiedades físicas que se requieren estudiar<sup>(14)</sup>. Estas inconsistencias se deben fundamentalmente a los efectos de rarefacción e interacciones moleculares que típicamente presentan los fluidos en

micro-escalas. Los efectos de rarefacción son aquellos que se presentan en ambientes de baja presión en los cuales el esfuerzo cortante, momentum y los flujos de calor y masa ya no pueden ser predichos por modelos basados en la hipótesis del medio continuo. Sin embargo, es muy poco lo que se sabe de estos efectos en líquidos por lo que los estudios más avanzados son los que se han hecho en flujo de gases, mayores detalles y otros efectos de rarefacción se encuentran en el libro de Karniadakis et al.<sup>(15)</sup>.

En el estudio de la transferencia de calor a nivel micro, se definen tres tipos de regímenes de acuerdo al valor que toma el número de Knudsen <sup>(15)</sup>.

- Régimen de Deslizamiento( $0.01 \leq Kn \leq 0.1$ ). En este tipo de flujo las ecuaciones de Navier-Stokes siguen siendo válidas para describir el movimiento del fluido sin embargo están sujetas a ciertas modificaciones en las condiciones de frontera tanto para la velocidad como para la temperatura las cuales son: velocidad de deslizamiento y salto de temperatura en la pared.
- Régimen de Transición( $0.1 \leq Kn \leq 10$ ). En este tipo de flujo ya los efectos de rarefacción e interacciones moleculares comienzan a invalidar las leyes de la mecánica del medio continuo; sin embargo, es posible hacer aproximaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes empleando la ecuación de Boltzmann para describir el movimiento de las moléculas de fluido. Este régimen se llama de transición debido a que el movimiento molecular pasa de ser ordenado (difusivo o continuo) a presentar un carácter aleatorio; es decir, las moléculas del fluido viajan libremente sin seguir un patrón fijo o conocido.
- Régimen Molecular( $Kn > 10$ ). En este régimen de flujo el movimiento de las moléculas de fluido ya no puede ser descrito por ninguna de las leyes de la física clásica por lo cual, si se requiere hacer una descripción analítica detallada de este comportamiento se necesita recurrir a la mecánica cuántica (ecuación de Schrödinger) o a la mecánica estadística. Actualmente se cuenta con técnicas de simulación numérica que pueden describir el comportamiento del fluido en el régimen molecular.

## 1.1 Objetivo

Es introducir los modelos correspondientes de nanofluidos, a través de un microcanal con confinamiento poroso, para analizar el flujo de la velocidad y la transferencia de calor, además de considerar el efecto conjugado de la transferencia de calor. La idea en general es encontrar una manera eficiente de mejorar la disipación de calor, en un sumidero de calor.

## 2 Formulación del problema

En la Fig. 3 se representa gráficamente el modelo físico a estudiar en dos dimensiones, se describe el modelo en un microcanal rectangular asumiendo que las propiedades del medio poroso y el nanofluido son homogéneas e isotropicas, el nanofluido es distribuido uniformemente por todo el medio poroso, se asume que el medio poroso se encuentra en equilibrio termodinámico local con el nanofluido. La transferencia de calor del microcanal tiene lugar en las paredes solidas inferiores y exteriores que sirven como sumideros de calor, donde el flujo de calor suministrado ( $q''$ ) es transmitido de las placas solidas hacia el fluido con el fin de que este calor puede disiparse. La línea intermedia del modelo físico muchas veces es llamada región de entrada hidrodinámica donde es la sección desde la entrada del microcanal hasta el punto en el que la capa límite emerge en la línea central<sup>(11)</sup>. Además de considerar al modelo físico como un sistema bidimensional (2D) con un sistema de coordenadas rectangular ( $x,y$ ). El canal tiene una altura de  $H$  y una longitud  $L$ , de manera que ( $H \ll L$ ). El espesor de las paredes del microcanal ( $h$ ) es mucho menor que  $H$ . El espesor de esta pared inferior está dado por  $h$  y es tal que  $h \ll L$ ; esto quiere decir que tenemos dos relaciones de esbeltez (o también llamadas de aspecto), una para el fluido  $\epsilon = H/L$  y otra para el sólido dada por  $\epsilon_h = h/L$ , que se mostraran mucho más adelante.

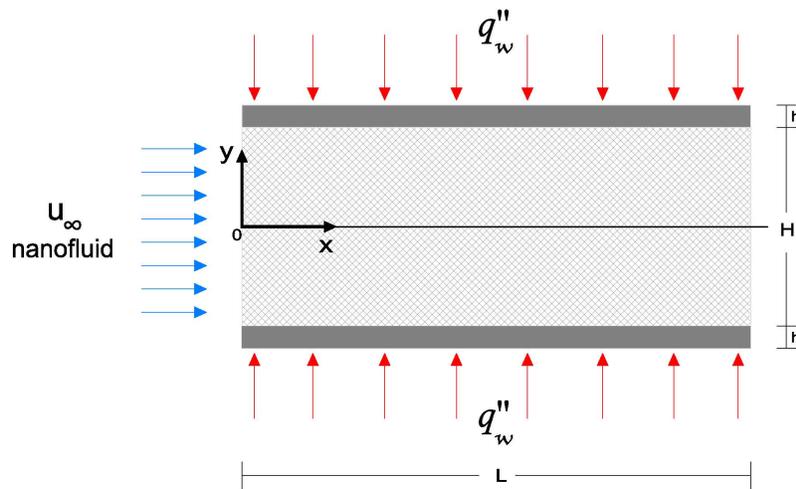


Figura 3: Flujo de un nanofluido a través de un microcanal con confinamiento poroso

## 2.1 Ecuaciones gobernantes

De la descripción de la ecuación de momentum para el transporte de nanofluidos sobre el medio poroso, el análisis queda en la ecuación que describe el modelo de Brinkman-Forchheimer extensión de Darcy<sup>(5)</sup>, el cual tiene la siguiente forma.

$$\rho_{nf} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] = -\nabla P + \mu e f f \nabla^2 u - \left( \frac{\mu_{nf} \phi u}{K} + \frac{\rho_{nf} F \phi |u|u}{K^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (1)$$

Tomando en cuenta el análisis presente para el confinamiento de un medio poroso en un microcanal del modelo físico Fig. 3 las fuerza de gravedad en el nanofluido se ven despreciadas para la Ec. (1). Considerando un flujo de velocidad unidireccional  $x$ , la ecuación de continuidad es igual a cero  $\nabla \cdot u = 0$  por lo cual se desprecian los términos inerciales del fluido y se asume una aceleración convectiva insignificante, un flujo completamente desarrollado  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ , considerando un estado estacionario  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , se asume un flujo incompresible; la permeabilidad y porosidad constante.

Desarrollando el análisis de forma bidimensional, las derivadas parciales toman la siguiente forma.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

La viscosidad efectiva queda de la siguiente manera.

$$\mu e f f = \frac{\mu_{nf}}{\phi}.$$

Además de la viscosidad del fluido el medio poroso tiene un papel muy importante en el comportamiento en el cambio del campo del flujo de la velocidad, asumiendo los anteriores argumentos queda de la siguiente manera la Ec. (1)<sub>(6)</sub>. Para este caso los términos de Arrastre de Forchheimer son tan pequeños que se desprecian debido a las velocidades tan pequeñas con las cuales estamos manejando y esto debido a las dimensiones proporcionadas para el microcanal, por lo cual no se tomaran en cuenta el modelo de la Ec. (1) y se tiene el modelo de Darcy-Brinkman.

$$0 = -\nabla P + \frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu_{nf}}{K} u \quad (3)$$

Por otro lado, para estudiar los efectos longitudinales de la conducción de calor en el medio poroso, consideramos la ecuación de la energía teniendo en cuenta los términos difusivos y convectivos despreciando nuevamente la componente transversal de la velocidad. La ecuación (5) muestra los términos influidos por la disipación viscosa.

$$(\rho C_p)_{nf} u \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} = k_{eff} \left( \frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (4)$$

$$\Phi = \mu_{eff} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{\mu_{nf} u^2}{K} \quad (5)$$

$$k_{eff} = (1 - \phi)k_s + \phi k_{nf} \quad (6)$$

Junto con la ecuación de energía de las paredes del microcanal para completar el problema de transferencia de calor conjugado, se tiene la ecuación de Laplace Ec.(7), donde  $T_{nf}$  y  $T_w$  son respectivamente las temperaturas del nanofluido y de la pared del microcanal,  $k_{eff}$  es la conductividad térmica efectiva del medio poroso y  $C_p$  es el calor específico a presión constante del fluido<sub>(16)</sub>.

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

Para este trabajo, limitaremos el análisis exclusivamente al régimen de continuo y no se considera el efecto de deslizamiento en la pared del microcanal.

## 2.2 Condiciones de frontera y velocidad de corriente libre

El flujo se mueve por un gradiente de presión dado, tenemos que el gradiente de presión  $-\nabla P = -\frac{dP}{dx}$ , para la Ec. (3) el análisis se asume un gradiente de presión constante fuera de la capa límite hidrodinámica del microcanal donde la velocidad  $u = U_\infty$  como se muestra en la Fig. 4, se debe considerar que el desarrollo de la capa límite hidrodinámica en microcanales con confinamiento poroso tiene un desarrollo mucho más rápido que un microcanal sin confinamiento; el gradiente de presión queda de la siguiente forma<sub>(10)</sub>.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\mu_{nf} U_\infty}{K} \quad (8)$$

La Ec. (3) muestra el gradiente de presión requerido para mantener la velocidad de corriente libre ( $U_\infty$ ) en equilibrio de la resistencia de la matriz solida del medio poroso. Al combinar la Ec. (3) y Ec. (8) se sustituye el gradiente de presión y la ecuación de momentum se reduce al modelo de Darcy-Brinkam.

$$\frac{\mu_{nf}}{\phi} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{\mu_{nf}}{K} (u - U_\infty) \quad (9)$$

Para obtener la solución analítica como numérica hay que establecer las condiciones de frontera correspondientes; la primer condición es de simetría  $\frac{du}{dy} |_{Y=0} = 0$ , donde se describe un problema simétrico respecto al eje  $x$ ,  $y$  en el microcanal donde se presenta a través de una condición de frontera tipo Neumann, para la segunda condición de no deslizamiento donde  $u(y = H) = 0$

asume que la velocidad en todos los puntos en la superficie del canal son igual a cero siendo una condición del tipo Dirichlet<sup>(9)</sup>.

De la misma forma las condiciones de frontera para la ecuación de la energía son de la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad T_{nf}|_{x=0} = T_0; \quad \left. \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0; \quad T_{nf}|_{y=\pm \frac{H}{2}} = T_w \quad (10)$$

Las condiciones de frontera de la ecuación (10) describe respectivamente, la condición de simetría, la temperatura en la entrada del microcanal, la condición asume un flujo completamente desarrollado a la salida del microcanal y finalmente la continuidad de temperatura en la interface sólido y líquido. Para la ecuación (7) se tienen las siguientes condiciones de frontera que representan las condiciones adiabáticas:

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial x} \right|_{x=(0,L)} = 0; \quad q'' = k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=(H/2+h)} \quad (11)$$

Donde  $k_w$  es la conductividad térmica de la pared,  $T_0$  es la temperatura del fluido en la entrada del microcanal y  $q''$  es el flujo de calor uniforme aplicado a la pared exterior del microcanal. Para la ecuación (11) las condiciones de frontera representan, el flujo de calor en los extremos longitudinales y el flujo de calor en la superficie exterior de la pared del microcanal. Además, se tiene la condición de continuidad del flujo de calor en la interfaz fluido-pared Ec. (12):

$$k_{eff} \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=H/2} = k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=H/2} \quad (12)$$

De la ecuación (4), podemos apreciar que, en general, las variaciones de temperatura en la fase fluida causadas por el flujo de calor uniformemente impuesto en las paredes del microcanal pueden controlarse mediante términos difusivos, disipativos y convectivos. Por ello, se realizó un análisis del orden de magnitud para identificar los límites distinguibles más importantes. Para esto, el orden de magnitud de la velocidad de entrada  $u \sim U_\infty$  se rigió directamente por la ecuación (8), mientras que el orden de magnitud de los términos convectivos, difusivos y disipativos de la ecuación de energía (4-6).

### 2.3 Orden de Magnitud

Para el caso concreto de las ecuaciones de gobierno mencionadas anteriormente se ha asumido el nanofluido en el microcanal poroso como un continuo. La validez de esta suposición se puede evaluar con el número de Knudsen mencionado en la introducción  $Kn = \frac{\lambda}{L}$ . El orden de magnitud para  $L$  como la longitud característica se toma en cuenta como 100 [ $\mu m$ ] y el camino libre medio

de las moléculas de agua es de  $0.1[nm]$ . Lo que hace que el número de Knudsen sea del orden de  $Kn \leq 1 \times 10^{-6}$ , que es relativamente pequeño, lo que hace justificar la suposición del continuo<sup>(20)</sup>.

De la ecuación (4), podemos apreciar que, en general, las variaciones de temperatura en la fase fluida causadas por el flujo de calor uniformemente impuesto en las paredes del microcanal pueden controlarse mediante términos difusivos, disipativos y convectivos. Por ello, se realizó un análisis del orden de magnitud para identificar los límites distinguibles más importantes. En esta dirección, el orden de magnitud de la velocidad de entrada  $u \sim U_\infty$  se rige directamente por la ecuación (8), mientras que el orden de magnitud de los términos convectivos, difusivos y disipativos de la ecuación de energía (4-6). Para la ecuación de la energía el análisis de orden de magnitud, toma la siguiente forma;

$$(\rho C_p)_{nf} U_\infty \frac{\Delta T_{nf}}{L} \sim k_{eff} \left( \frac{\Delta T_{nf}}{L^2} + \frac{\Delta T_{nf}}{\frac{H^2}{2}} \right) + \mu_{eff} \left( \frac{U_\infty}{\phi \frac{H^2}{2}} \right)^2 \quad (13)$$

Considerando ahora que el término difusivo transversal de la relación anterior,  $k_{eff} \frac{\Delta T_{nf}}{\frac{H^2}{2}}$ , es dominante porque siempre está controlado por el flujo de calor uniforme en las paredes del microcanal (debemos recordar que  $q'' \sim k_{eff} \frac{\Delta T_{nf}}{\frac{H^2}{2}}$ , podemos dividir la ecuación anterior con la ayuda de este término para obtener la siguiente relación de orden.

$$\epsilon Pe \sim \epsilon^2 + 1 + Br \quad (14)$$

Donde la relación de aspecto  $\epsilon$  se define como  $\epsilon = \frac{H/2}{L}$ ,  $Pe$  es el conocido número de Péclet, que se da como  $Pe = \frac{(\rho C_p)_f U_\infty (H/2)}{k_{eff}}$  y denota el número de Brinkman  $Br$  del problema, denotado por  $Br = \frac{\mu_f U_\infty^2 (H/2)}{K q''}$ . Esta última relación se obtuvo considerando que  $\Delta T_f = \frac{q''(H)}{2k_{eff}}$  que se puede derivar de la relación de orden. Por lo tanto, a partir de la relación de orden de la Ec. (14) <sup>(21)</sup>, podemos distinguir fácilmente diferentes límites asintóticos relevantes dependiendo de los valores asumidos de los parámetros adimensionales  $\epsilon$ ,  $Pe$  y  $Br$ . Estos límites se definen en el siguiente párrafo.

Las variaciones de temperatura en el fluido controladas por términos disipativos y difusivos: para la mayoría de aplicaciones prácticas en microcanales, el límite más característico se controla cuando  $Br$  es del orden de la unidad con el número de Péclet ( $Pe$ ), y la relación de aspecto  $\epsilon$  asumiendo ambos valores muy pequeños,  $Pe \ll 1$  y  $\epsilon \ll 1$ . En este caso, entonces los términos dominantes de la relación de orden <sup>(21)</sup> son solo los términos transversal difusivo y disipativo, para este caso, el balance de energía entre estos dos términos determina las variaciones de temperatura más importantes en la fase fluida. Este límite ha sido ampliamente estudiado en la literatura especializada sin la presencia de los efectos de conducción de calor longitudinal en las paredes del microcanal.

En el caso de las variaciones de temperatura en el fluido controladas por términos convectivos, longitudinales y difusivos transversales: a partir de la definición del número de Brinkman, podemos apreciar que para mantener valores finitos o del orden de la unidad para este parámetro, En general, se requiere una tendencia a asumir valores crecientes de la viscosidad del fluido; de lo contrario, con valores pequeños de la viscosidad del fluido, el Brinkman correspondiente asume valores pequeños. Por ejemplo, en el caso del dopar un fluido base con nanopartículas genera un aumento en la viscosidad de manera notable, en el caso específico que considerando el agua como  $\mu_{fb} \sim 10^{-3} Kg/ms$  (agua), un valor característico de  $U_\infty \sim 10^{-2} m/s$ ,  $\phi = 0.93$ ,  $q'' = 1W/m^2$  y  $L = 100 \text{ micras}$ , obtenemos que  $Br \sim 4 \times 10^{-3}$ , se obtienen resultados similares para el aire. Para este caso, el número de Brinkman es  $Br \sim 10^{-5} \ll 1$ . Por esta razón, consideramos en el presente trabajo el otro límite relevante: el caso en el que el término convectivo y los términos difusivos longitudinal y transversal de la relación son del mismo orden de magnitud<sup>(21)</sup>,  $\epsilon Pe \sim \epsilon^2 \sim 1$ , junto con  $Br \ll 1$ . En este caso, las variaciones de temperatura para la fase fluida son menos importantes en comparación con el primer caso ( $Br \sim 1$ ) que incluye el término disipativo. De esta manera, para este caso simplificado podemos identificar muy bien, la influencia de los efectos de la conducción de calor longitudinal en las paredes del microcanal. El caso en el que son importantes todos los términos de la ecuación de energía para cada región (es decir, paredes sólidas y fluidas del microcanal) no se considera en el presente trabajo.

Sin embargo, antes las ecuaciones gobernantes en forma adimensional, debemos apreciar que el mecanismo térmico para calentar la fase fluida solo está controlado por el flujo de calor impuesto en el paredes externas del microcanal. Por tanto, el orden de magnitud de las diferencias de temperatura características en el fluido y en la pared, se puede expresar respectivamente mediante las siguientes expresiones:

$$q'' = k_w \frac{\Delta T_w}{h} \sim k_{eff} \frac{\Delta T_{nf}}{H/2} \quad (15)$$

Donde  $\Delta T_{nf}$  y  $\Delta T_w$  son respectivamente las diferencias de temperatura características en el fluido y en la pared, es necesario realizar un análisis de orden de magnitud para estas diferencias de temperatura características. Ambos deben considerarse en sentido transversal porque se asume que los extremos de entrada y salida de la pared del microcanal son adiabáticos, por lo que es pertinente considerar que las mayores caídas de temperatura ocurren en sentido transversal, tanto en el medio poroso como en la pared del microcanal. Por tanto, el orden de magnitud de las diferencias de temperatura características en el fluido y en la pared. por tanto, obtenemos la siguiente relación entre ambas diferencias de temperatura características.

$$\frac{\Delta T_{nf}}{\Delta T_w} = \frac{k_w}{k_{eff}} \frac{H/2}{h} \sim \frac{k_w}{k_{eff}} \frac{\epsilon}{\epsilon_h} \quad (16)$$

Donde  $\epsilon_h = \frac{h}{L}$  y  $\epsilon = \frac{(H/2)}{L}$  son las relaciones de aspecto de pared y del fluido, respectivamente. Por lo cual podemos definir el siguiente parámetro conjugado:

$$\alpha_c = \frac{k_w}{k_{eff}} \epsilon \epsilon_h \quad (17)$$

Se puede apreciar que el parámetro conjugado  $\epsilon_h$ , que viene dado por la Ec. (17), se puede reescribir como:  $\alpha_c = \frac{R_f}{R_w} \epsilon_h^2$ ; donde  $R_f$  y  $R_w$  representan las resistencias térmicas por conducción por unidad de profundidad en cada región y dadas como  $R_f = \frac{H}{2Lk_{eff}}$  y  $R_w = \frac{h}{Lk_w}$ , respectivamente. De esta manera, el parámetro conjugado  $\alpha_c$ ; define físicamente, excepto por la relación de aspecto  $\epsilon_h^2$ , la competencia entre ambas resistencias térmicas por conducción, por esta razón, se prefirió seleccionar el parámetro más relevante para este problema conjugado como fue escrito en la Ec. (17), es decir,  $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = \frac{R_f}{R_w}$ . Por lo tanto, la interpretación física del parámetro conjugado ofrece dos opciones: para valores finitos de la relación de aspecto  $\epsilon_h$ , el parámetro conjugado solo está determinado por la competencia entre ambas resistencias térmicas; de lo contrario, para un valor predeterminado de la relación  $\frac{R_f}{R_w}$ , el parámetro conjugado está determinado por la relación de aspecto  $\epsilon_h$ . En ambos casos, podemos obtener límites distinguibles similares dependiendo de los valores asumidos de  $\alpha_c$  y  $\frac{R_f}{R_w}$ , situación que se analiza en la siguiente ecuación.

$$\frac{\Delta T_{nf}}{\Delta T_w} \sim \frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = \frac{Hk_w}{2hk_{eff}} \quad (18)$$

Donde  $\alpha_c$  representa también la competencia entre la conducción de calor en la pared y la convección de calor en el fluido. Por lo tanto, podemos analizar aquí dos límites asintóticos significativos, el conocido límite de pared térmicamente delgado ( $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \gg 1$ ) y el límite de pared térmicamente grueso ( $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \ll 1$ )<sup>(17)</sup>. Uno de los objetivos principales de este trabajo es analizar los efectos longitudinales de la conducción de calor tanto en el fluido como en la pared del microcanal, estos efectos son más importantes en el límite de pared térmicamente delgado, por lo que para analizar el límite de pared térmicamente grueso vamos a usar un límite superior definido por  $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \sim 1$ ; por lo tanto, la diferencia de temperatura característica en el problema de transferencia de calor conjugado es  $\Delta T_{nf} = \frac{Hq''}{2k_{eff}}$  para el medio poroso y  $\Delta T_w = \frac{hq''}{k_w}$  para la pared del microcanal.

Para el caso de los límites térmicamente delgado y grueso: si  $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2}$  es del orden de la unidad, entonces  $\alpha_c \sim \epsilon_h^2$  y considerando que la relación de aspecto es muy pequeña, entonces  $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$  y para este caso, efectivamente el primer término de la izquierda de la ecuación de la energía se puede despreciar en comparación con el segundo término, en una primera aproximación. Este caso representa la situación en la que sólo son importantes los gradientes transversales de temperatura; un caso ampliamente estudiado en la literatura<sup>(17)</sup>. Sin embargo, para  $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} \gg 1$ , entonces  $\alpha_c \gg \epsilon_h^2$  y para este caso, no hay argumento

para despreciar los términos de conducción de calor longitudinal de la ecuación de energía en las paredes. Para este límite, ambos términos de la ecuación de Aplace o energía del microcanal deben ser conducción retenida, por lo tanto, para incluir los efectos de conducción de calor axial o longitudinal en las paredes.

Sin embargo, cuando la relación de aspecto en el fluido es menor que la del sólido, la caída de temperatura en la dirección transversal puede ser más importante en la pared que en el fluido, es decir:

$$\frac{\Delta T_{nf}}{\Delta T_w} \sim \left(\frac{\alpha_c}{\epsilon^2}\right) \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon_h^2}\right) \quad (19)$$

Con  $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h} \sim 1$  y  $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_h}\right)^2 \ll 1$ , se tiene:

$$\left(\frac{H}{2h}\right)^2 = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_h}\right)^2 \ll \left(\frac{\epsilon^2}{\alpha_c}\right) \ll 1 \quad (20)$$

Las Ec. (19) y (20) muestran que para este caso particular, las variaciones de temperatura en el fluido son mucho menores que las variaciones transversales de temperatura en el sólido; así, la temperatura en el fluido solo varía en función de la coordenada longitudinal. Esto se puede ver en la sección de resultados.

## 2.4 Análisis Adimensional

En la Fig. 5 muestra la descripción de las variables adimensionales. Debido a la condición de simetría planteada anteriormente el microcanal permite representar el mismo comportamiento de este en el centro cuando  $Y = 0$  a  $Y = H = \frac{H}{2}$  esto permite generar el mismo tipo de comportamiento en la dirección del eje  $X$ . Para la ecuación obtenida anteriormente se propone la siguiente escala adimensional<sub>(10)</sub>.

$$X = \frac{x}{L}; u' = \frac{u}{U_\infty}; Y = \frac{y}{\frac{H}{2}}; \theta_{nf} = \frac{(T_{nf} - T_0)}{\Delta T_{nf}}; \theta_w = \frac{(T_w - T_0)}{\Delta T_w}; \xi = \frac{(H/2 + h - y)}{h} \quad (21)$$

Para las direcciones  $x, y$  su adimensionalización corresponde a las longitudes características de cada dirección  $H, L$ . Las anteriores ecuaciones nos permiten describir de mejor manera la física del problema. Otros parametros y escalas que van a servir para el proyecto.

$$Pe = \frac{(\rho C p)_{fb} U_\infty (H/2)}{k_{eff}}; Br = \frac{\mu_{fb} U_\infty^2 (H/2)}{K q''}; Da = \frac{K}{\phi (H/2)^2}; \Delta T_w = \frac{q'' h}{k_w}; \epsilon = \frac{(H/2)}{L}; \Delta T_{nf} = \frac{q'' (H/2)}{k_{eff}}; \epsilon_h = \frac{h}{L} \quad (22)$$

Utilizando los parámetros adimensionales de la ecuación (17) para la ecuación de momentum de la ecuación(9).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dy} \frac{dY}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dY} \left( \frac{1}{\frac{H}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\frac{H}{2}} \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dY} \right) = \frac{1}{\frac{H}{2}} \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dY} \right) \frac{dY}{dy} = \frac{1}{\frac{H}{2}} \frac{d^2 u}{dY^2} \\ 0 &= \frac{\mu_{nf}}{K} (U_\infty - U_\infty u') + \frac{\mu_{nf} U_\infty}{\phi \frac{H^2}{2}} \frac{d^2 u'}{dY^2}\end{aligned}\quad (23)$$

$$0 = \frac{\mu_{nf} U_\infty}{K} (u' - 1) + \frac{\mu_{nf} U_\infty}{\phi \frac{H^2}{2}} \frac{d^2 u'}{dY^2}\quad (24)$$

Dividiendo por  $\mu_{nf} U_\infty$  y implementando el número de Darcy.

$$\frac{(u' - 1)}{K} = \frac{1}{\phi \frac{H^2}{2}} \frac{d^2 u'}{dY^2}\quad (25)$$

$$(u' - 1) = \frac{K}{\phi \frac{H^2}{2}} \frac{d^2 u'}{dY^2}\quad (26)$$

$$(u' - 1) = Da \frac{d^2 u'}{dY^2}\quad (27)$$

$$\frac{d^2 u'}{dY^2} = Da^{-1} (u' - 1)\quad (28)$$

Condiciones de frontera en su forma adimensional y la solución analítica de la ecuación de momentum Ec. (24) son las siguientes.

$$\left. \frac{du'}{dY} \right|_{Y=0} = 0\quad (29)$$

$$u'(Y = \frac{H}{2} = 1) = 0\quad (30)$$

$$u' = 1 - \frac{\cosh(Da^{-\frac{1}{2}} Y)}{\cosh(Da^{-\frac{1}{2}})}\quad (31)$$

## 2.5 Inyección de nanofluidos al modelo físico.

Para el presente trabajo la inyección del nanofluido, se vera inmersa en las propiedades expuestas en la ecuación de la energía, por la densidad del nanofluido, el calor específico, la viscosidad dinámica y la conductividad térmica del nanofluido.

La viscosidad dinámica es vital en los nanofluidos como lo es la conductividad térmica hay menos estudios que discuten sobre la viscosidad dinámica de los nanofluidos en comparación con los estudios que se han centrado en la conductividad térmica. Se han descrito demasiados modelos en función de expresar la efectividad que tiene la viscosidad dinámica en el papel de los nanofluidos. Diversos estudios han sido relacionando con base en métodos experimentales, de manera numérica, teórica, etc. que se han introducido para investigar su efecto sobre la viscosidad de los nanofluidos<sup>(5)</sup>.

El primer modelo de viscosidad dinámica es el modelo de Brinkman de 1952, es una modificación del modelo de viscosidad dinámica de Einstein de 1906;  $\mu_{nf} = \mu_{fb}(1 + 2.5\varphi)$  para una  $\varphi \leq 5\%$  <sup>(5)</sup>. La ecuación modificada incluyo la concentración del volumen de nanopartículas( $\varphi$ ), la viscosidad dinámica de nanopartículas y del fluido base. Para así obtener el siguiente modelo de viscosidad dinámica.

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{fb}} = \frac{1}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad (32)$$

La conductividad térmica en nanofluidos se ha definido como la relación entre la conductividad térmica del nanofluido y la conductividad térmica del fluido base  $\left(\frac{k_{nf}}{k_{fb}}\right)$ , un gran número de investigadores desarrollaron sus modelos de conductividad térmica basados en la investigación de Maxwell quien examinó la conducción a través de medios heterogéneos. La conductividad térmica de un nanofluido se compone de una mezcla de dos fases que consta de fases continuas y discontinuas determinada por Maxwell.  $\frac{k_{nf}}{k_{fb}} = \frac{k_s + 2k_{fb} + 2\varphi(k_{fb} - k_s)}{k_s + 2k_{fb} - \varphi(k_{fb} - k_s)}$ , donde  $\varphi$  es la concentración de nanopartículas,  $k_{fb}$  y  $k_s$  es la conductividad térmica del fluido base y la conductividad térmica de la fase sólida respectivamente. Una de las hipótesis que Maxwell se refirió para formar su modelo. Fue que la conductividad térmica depende de los fluidos base que se estén considerando <sup>(5)</sup>. Para el estudio correspondiente se implementara el modelo de Timofeeva et al. ecuación (33) donde se introdujera una concentración de nanopartículas del 1-5%, con el fin de cuidar los problemas de sedimentación en microcanales y como material del nanofluido se implementara el  $Al_2O_3 - H_2O$ <sup>(18)</sup>.

$$k_{nf} = (1 + 3\varphi)k_{fb} \quad (33)$$

Las mediciones propuestas <sup>(19)</sup>, sugieren que existe una mejora insignificante asociada con el uso de nanofluidos de refrigerantes base, en términos de reducir las temperaturas en las paredes de los dispositivos, lo que cuestiona el mérito general del uso de nanofluidos en disipadores de calor de microcanal.

Se informaron mediciones experimentales del calor específico del nanofluido de  $Al_2O_3 - H_2O$  . produce una predicción deficiente de los calores específicos medidos por el contrario, una expresión promediada en masa satisface la primera ley de la termodinámica y tiene la forma de la ecuación (30) (5).

$$Cp_{nf} = \frac{(1 - \varphi)(\rho C_p)_{fb} + \varphi(\rho C_p)_{np}}{(\rho_{fb}(1 - \varphi) + \rho_{np}\varphi)} \quad (34)$$

Para el modelo densidad ecuación (31). Se ha demostrado que los datos experimentales sobre las mediciones de densidad no son suficientes para varios nanofluidos a diferentes niveles, a la par que se ha demostrado que la densidad varía respecto a la temperatura, de manera alterna se han llevado acabo mediciones exhaustivas para obtener su densidad y proporcionar datos, así como para verificar su aplicación a la ecuación(que también se conoce como teoría de la mezcla para varios nanofluidos)(5). Para establecer un modelo de estudio con densidad, calor específico y conductividad térmica variable se obtuvo para nanopartículas de inmersas en agua  $Al_2O_3 - H_2O$ , las cuales se emplearan en el trabajo presente.

$$\rho_{nf} = \rho_{fb}(1 - \varphi) + \rho_{np}\varphi \quad (35)$$

Modelos para las nanopartículas de $Al_2O_3 - H_2O$ inmerso agua	Valor
$\rho^* = \frac{\rho_{np}}{\rho_{fb}}$	3.977
$k^* = \frac{k_s}{k_{fb}}$	55.1724
$Cp^* = \frac{Cp_{np}}{Cp_{fb}}$	0.174

El respectivo análisis para la ecuación de la energía, Ec.(4-6) toma la siguiente forma:

$$(\rho C_p)_{nf} u \frac{\partial T_{nf}}{\partial x} = k_{eff} \left( \frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{nf}}{\partial y^2} \right) + \mu_{eff} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu_{nf} u^2}{K} \quad (36)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = \rho_{fb}(1 - \varphi) + \rho_{np}\varphi \left( \frac{(1 - \varphi)(\rho C_p)_{fb} + \varphi(\rho C_p)_{np}}{(\rho_{fb}(1 - \varphi) + \rho_{np}\varphi)} \right) \quad (37)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_{fb} + \varphi(\rho C_p)_{np} \quad (38)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = \left\{ (1 - \varphi) + \varphi \left[ \frac{(\rho C_p)_{np}}{(\rho C_p)_{fb}} \right] \right\} (\rho C_p)_{fb} \quad (39)$$

Utilizando las siguientes consideraciones para la Ec. (31),  $\rho^* = \frac{\rho_{np}}{\rho_{fb}}$  y  $Cp^* = \frac{Cp_{np}}{Cp_{fb}}$ . La Ec. (35) toma la siguiente forma:

$$(\rho C_p)_{nf} = (\rho C_p)_{fb} [(1 - \varphi) + \varphi \rho^* Cp^*] \quad (40)$$

Para la  $k_{eff}$  se toma en cuenta que  $(k_{eff})_{nf} = (1 - \phi) k_s + \phi k_{nf}$ , implementando el modelo de Thimofeeva et al. de la Ec. (30), la conductividad térmica efectiva queda de la siguiente forma.

$$(k_{eff})_{nf} = (1 - \phi) k_s + \phi(1 + 3\varphi)k_{fb} \quad (41)$$

$$\left(\frac{k_{eff}}{k_{fb}}\right)_{nf} = (1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi) \quad (42)$$

En la Ec. (38) se considera la  $k^*$  como  $k^* = \frac{k_s}{k_{fb}}$ .

Para continuar con el análisis adimensional de la ecuación de la energía, tomando en cuenta los parámetros adimensionales Ecs. (17-18) las Ecs. (33-38), la Ec. (32) toma la siguiente forma.

$$\begin{aligned} & (\rho C_p)_{fb} [(1 - \varphi) + \varphi \rho^* Cp^*] U_\infty u' \frac{\Delta T_{nf}}{L} \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} = \\ & k_{fb} [(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi)] \left( \frac{\Delta T_{nf}}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} + \frac{\Delta T_{nf}}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} \right) + \frac{\mu_{fb}}{\phi(1 - \varphi)^{2.5}} \left( \frac{U_\infty}{\frac{H}{2}} \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu_{fb}(U_\infty u')^2}{K(1 - \varphi)^{2.5}} \end{aligned} \quad (43)$$

Tomando en cuenta que  $\Delta T_{nf} = \frac{q'' \frac{H}{2}}{k_{eff}} = \frac{q'' \frac{H}{2}}{k_{fb}[(1 - \phi)k^* + \phi(1 + 3\varphi)]}$  y multiplicamos ambos miembros de la Ec. (39) por  $\frac{\left(\frac{H}{2}\right)^2}{\Delta T_{nf} K}$ .

$$\begin{aligned} & (\rho C_p)_{fb} [1 - \varphi (\rho^* Cp^* - 1)] U_\infty \left(\frac{H}{2}\right) \varepsilon u' \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} = \\ & k_{fb} [(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi)] \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} \right) + \frac{\mu_{fb} U_\infty^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2}{\Delta T_{nf} (1 - \varphi)^{2.5} K} \left[ Da \left( \frac{\partial u'}{\partial Y} \right)^2 + (u')^2 \right] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & (\rho C_p)_{fb} [1 - \varphi (\rho^* Cp^* - 1)] U_\infty \left(\frac{H}{2}\right) \varepsilon u' \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} = \\ & k_{fb} [(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi)] \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} \right) + \frac{\mu_{fb} U_\infty^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2}{\Delta T_{nf} (1 - \varphi)^{2.5} K} \left[ Da \left( \frac{\partial u'}{\partial Y} \right)^2 + (u')^2 \right] \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
& (\rho C_p)_{fb} [1 - \varphi (\rho^* C p^* - 1)] U_\infty \left( \frac{H}{2} \right) \varepsilon u' \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} = \\
& [(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi)] \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} \right) + \frac{\mu_{fb} U_\infty^2 \left( \frac{H}{2} \right)^2}{k_{fb} \frac{q'' \frac{H}{2}}{k_{fb} [(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi)]} (1 - \varphi)^{2.5} K} \left[ Da \left( \frac{\partial u'}{\partial Y} \right)^2 + (u')^2 \right] \quad (46)
\end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros de la Ec. (42) por  $(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi)$ , se obtiene el modelo final de la ecuación de la energía en su forma adimensional.

$$\begin{aligned}
& [(1 - \phi) k^* + \phi] \left[ \frac{1 - \varphi (\rho^* C p^* - 1)}{(1 - \phi) k^* + \phi(1 + 3\varphi)} \right] \varepsilon P e u' \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_{nf}}{\partial Y^2} \\
& + \frac{Br}{(1 - \varphi)^{2.5}} \left[ Da \left( \frac{\partial u'}{\partial Y} \right)^2 + (u')^2 \right] \quad (47)
\end{aligned}$$

Las condiciones de frontera correspondientes en su forma adimensional son las siguientes:

$$\left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial X} \right|_{X=1} = 0; \quad \theta_{nf}|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0; \quad \theta_{nf}|_{Y=1} = \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \theta_w|_{\xi=1} \quad (48)$$

La Ec. (43) es el modelo de la ecuación de la energía para la fase fluida del sistema. Para la ecuación de la energía de la pared Ec.(7) en su forma adimensional se representa de la siguiente forma.

$$\frac{\partial T_w}{\partial x} = \frac{\partial \theta_w}{\partial x} = \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} \quad (50)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial y} = \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} \quad (52)$$

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (53)$$

Implementando la relación de aspecto de la pared  $\epsilon_h = \frac{h}{L}$  en la Ec. (48). Se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} + \frac{L^2}{h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial X^2} + \frac{1}{\epsilon_h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (55)$$

Finalmente la ecuación de la energía en la pared del microcanal se representa por la Ec. (55). Y sus condiciones de frontera en su forma adimensional toman la siguiente forma:

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \right|_{x=(0,1)} = 0; \quad q'' = \frac{k_w \Delta T_w}{-h} \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} = 0 \quad (56)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{nf}}{\partial Y} \right|_{Y=1} = - \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \quad (57)$$

### 3 Modelo Numérico.

Un considerable número de publicaciones dan diversas soluciones, empleando métodos numéricos para medios porosos y nanofluidos en los cuales se abordan diferentes problemas. Muchas publicaciones abordan el problema con múltiples herramientas computacionales se utilizan tales como ANSYS, OpenFOAM, FluidSim, Comsol CFD, etc.

Para el presente trabajo se empleo el software Freefem ++ para la resolución para obtener la solución de las ecuaciones diferenciales acopladas y sus correspondientes condiciones de frontera. Freefem ++ es un software libre de alto nivel para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales en dos y tres dimensiones, que resuelve a través del uso del método de elemento finito(FEM por sus siglas inglés), en los cuales se pueden resolver diversos problemas físicos de dinámica de fluidos, biología, transferencia de calor, etc.

El método (FEM) es un procedimiento de aproximación para la solución de ecuaciones diferenciales, con condiciones en la frontera y condiciones iniciales, del tipo que se presentan en problemas de ingeniería, física y matemática. El procedimiento básicamente envuelve la división del dominio en muchas pequeñas regiones, llamadas "elementos", convenientemente distribuidas, las cuales pueden ser de forma triangular, cuadrilátera, etc., y usando una interpolación para describir el comportamiento de estos subdominios. Un número satisfactorio de puntos, llamados "nodos", son especificados para cada elemento y a cada uno de ellos le corresponde un valor de la variable o las variables de la ecuación diferencial, que se obtiene interpolando dentro de cada elemento<sub>(23)</sub>.

Freefem ++ tiene diversas funciones como un generador de malla automático avanzado, capaz de adaptarse a una malla a posterior, tiene un solver diferencial elíptico de propósito general que esta interconectado con algoritmos de soluciones rápidas como lo son UMFPACK, SuperLU, MUMPS, Crout, Cholesky, etc. Resuelve problemas iterativos prescritos por el usuario con el lenguaje de alto nivel que maneja. Tiene una gran diversidad de elementos finitos triangulares, incluyendo elementos discontinuos<sub>(22)</sub>.

Una parte importante para la solución de cualquier tipo de problema para Freefem ++ se requiere la descripción del problema en su forma variacional, una vez obtenido el problema en su forma adimensional, pasa a ser desarrollado en su forma variacional.

Para el presente trabajo en la solución de las ecuaciones de gobierno se selecciono un tipo de malla, llamada malla estructurada con doscientos nodos a lo largo y doscientos nodos a lo ancho, se le llama malla estructurada por seguir un patrón reticular a lo largo de toda la geometría. Particularmente una malla estructurada de tipo triangular con un dominio rectangular<sub>(22)</sub>. Los elementos se encuentran espaciados y distribuidos de forma homogénea a lo ancho y largo del canal, la solución esta programada para que guarde la solución de cada uno de sus nodos para valores constantes en  $X$ .  $Y$  y  $\xi$  en múltiplos de 0.1.

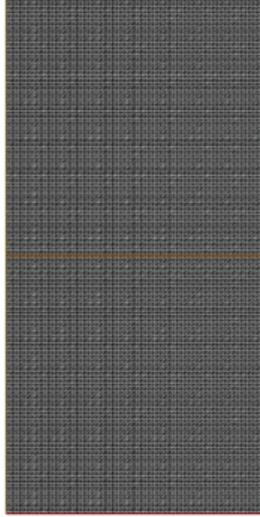


Figura 4: Malla estructurada para la descripción del microcanal y pared del microcanal.

### 3.1 Formulación variacional.

En Freefem ++ para que pueda ser capaz de resolver las ecuaciones de cualquier problema es necesario plantearlas a través del calculo variacional o formulación débil. De esta manera la formulación débil nos proporciona una mejor integración entre las ecuaciones, condiciones de frontera y el dominio de análisis. En la formulación débil el dominio de análisis sera expresado como  $\Omega$ , el diferencial del área de la región  $\Omega$  se abrevia de la siguiente manera  $d\Omega = dXdY$ . La variable auxiliar en el análisis es expresada como las variables presentadas con el subíndice  $a$ . Por otro lado, los subíndices  $w$  y  $f$  corresponden al campo de temperatura en la pared y en el microcanal poroso, respectivamente. La formulación variacional permite reducir el orden de las derivadas. En el presente trabajo la ecuaciones de gobierno ya adimensionalizadas muestran unas derivadas de segundo orden, al aplicar la formulación débil la ecuación queda con la derivada en un primer orden. Para la formulación variacional a Freefem ++ permite que su resolución sea más eficiente.

El primer paso es escribir en términos del calculo variacional la ecuación de momentum Ec. (28), como se puede notar, la velocidad no depende del campo de temperatura, por lo que se resuelve de forma independiente, por lo que la solución de esta ecuación se puede resolver simplemente en un solo paso usando el solucionador UMFPACK de manera consistente porque es una ecuación diferencial homogénea ordinaria. Por lo tanto queda de la siguiente manera.

$$-\int_{\Omega_f} \left( \frac{du'}{dY} \frac{du'_a}{dY} \right) d\Omega_f = \int_{\Omega_f} Da^{-1}(u' - 1)u'_a d\Omega_f \quad (58)$$

Siguiendo el mismo método de resolución, podemos utilizar la formulación débil para aplicarla dentro de las ecuaciones de energía para el campo de temperatura en la pared Ec. (55) y en el microcanal poroso Ec. (43) con sus condiciones de frontera, e incluyendo la interfaz límite de contacto a través de la conservación del flujo de calor y la igualdad de temperatura Ec. (57). Análogamente, como método de solución, llamamos a la función `Convect` en la ecuación de energía en el microcanal para considerar los efectos de la velocidad en todo el ancho del sistema. De esta manera, las ecuaciones de energía para ambos medios descritas bajo el esquema de formulación débil con términos transitorios de convergencia se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} & -[(1 - \phi)k^* + \phi] \left[ \frac{1 - \varphi(\rho^* Cp^* - 1)}{(1 - \phi)k^* + \phi(1 + 3\varphi)} \right] \varepsilon Pe u' \frac{\theta_f^{n+1} - \theta_f^n}{\Delta t} \theta_{fa} d\Omega_f \\ & - \int_{\Omega_f} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_f^n}{\partial X} \frac{\partial \theta_{fa}}{\partial X} + \frac{\partial \theta_f^n}{\partial Y} \frac{\partial \theta_{fa}}{\partial Y} \right) \theta_{fa} d\Omega_f = \int_{\Omega_f} Br \left[ Da \left( \frac{du'}{dY} \right)^2 + u'^2 \right] \theta_{fa} \Omega_f \end{aligned} \quad (59)$$

y

$$-\int_{\Omega_w} \frac{\theta_w^{n+1} - \theta_w^n}{\Delta t} \theta_{wa} d\Omega_w + \int_{\Omega_w} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_w^n}{\partial X} \frac{\partial \theta_{wa}}{\partial X} + \frac{\partial \theta_w^n}{\partial \xi} \frac{\partial \theta_{wa}}{\partial \xi} \right) \theta_{wa} d\Omega_w \quad (60)$$

Además, se realizó un estudio de independencia de malla donde se demostró que un número de elementos de  $4 \times 10^5$  y una tasa de convergencia de  $1 \times 10^{-8}$  es suficiente para una precisión confiable. En la siguiente sección mostraremos y discutiremos los resultados basados en las variaciones de los números de Brinkman. Dicho anteriormente la paquetería de `Freefem ++` cuenta con una amplia selección de métodos numéricos por medio del FEM para la solución de un problema. Para el problema se optó por utilizar el método de `UMFPACK`.

## 4 Resultados.

Para esta sección de resultados se vio innecesario incluir los perfiles de velocidad debido a que ya se han estudiado ampliamente en la literatura, un enfoque muy similar se tomo para los perfiles mostrados por Monsivais et al.<sup>(25)</sup> donde muestra los perfiles de velocidad del fluido en función de la coordenada transversal  $Y$ . Estos resultados son muy similares a los obtenidos por el modelo analítico de Vafai y Kim<sup>(10)</sup>.

Para los siguientes resultados se presenta un conjunto de figuras en las que se realiza una comparación de los perfiles de temperatura del fluido entre los límites térmicamente grueso y térmicamente delgado en el fluido, en la pared solamente se considero el límite térmicamente delgado. Cabe mencionar que estos perfiles se muestran tanto para la pared como para el fluido, destacándose este último caso, ya que se presentan resultados más interesantes y por lo tanto, existe un mayor número de casos a analizar. Para llevar a cabo esta discusión, consideramos para todos los casos que los efectos longitudinales de la transferencia de calor en la pared del microcanal son más relevantes que los transversales, lo que se conoce como límite de pared térmicamente delgado ( $\frac{\alpha_c}{\epsilon_b} = 25$ ). La presencia de disipación viscosa está representada por el número de Brinkman, que varía de  $Br=0.01$  a  $Br=1.0$ . Para evitar los efectos de arrastre de Forchheimer, se realiza el uso de  $Da=0.01$  o menor<sup>(24)</sup>. Además, el número de Peclet ( $Pe$ ) utilizado para los siguientes resultados es 0.01, ya que este es un valor característico para flujos de fluidos en microcanales. Y se considera el término de la fracción volumétrica de nanopartículas de  $\varphi \leq 5\%$  con el fin de evitar los problemas de sedimentación y obstrucción en microcanales. En los resultados solamente se colocaron los resultados de los límites térmicamente delgado en la pared.

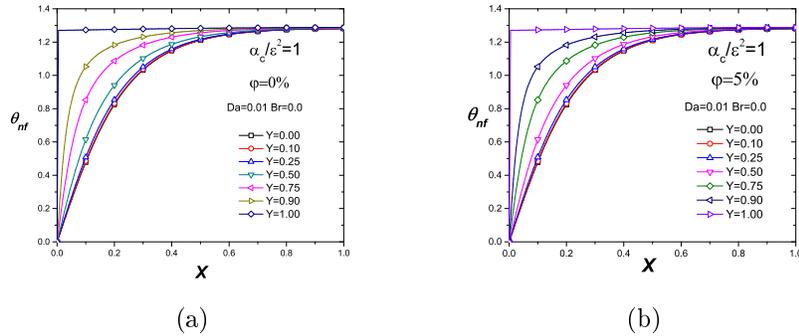


Figura 5: Perfiles de temperatura del fluido con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un límite térmicamente grueso en el fluido.

Para el caso de la Fig. 5-6, mostrar los resultados de la fracción de volumen nanopartículas inmersas ( $\varphi$ ) en diferentes valores de 0% o 5%, era insignificante ya que no se mostro ninguna variación de los perfiles de temperatura en el

caso de tener un fluido base sin nanopartículas a un nanofluido esto se puede observar de mejor manera en Apéndice I. Con estos resultados se observa mucho más adelante que el parámetro de Br, tiende a ser más significativo afectando de igual forma haciendo tener un efecto notable con el aumento de  $\varphi$ . La Fig. 6-8, muestra los perfiles de temperatura adimensionales en función de la coordenada longitudinal en la pared del microcanal, considerando  $Da=0.01$  y  $Br=0$ . para diferentes valores de  $\xi$ . La Fig. 6-8 muestra el caso del límite térmicamente en el fluido, donde se ve claramente que existe una variación de temperatura muy pequeña para cada coordenada transversal de la pared.

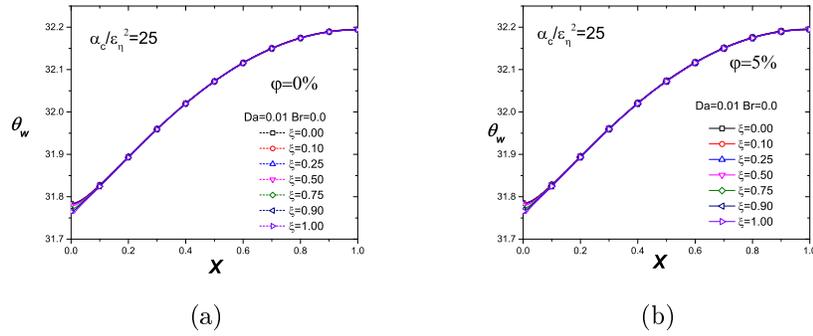


Figura 6: Perfiles de temperatura de la pared con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un limite térmicamente delgado la pared y un limite térmicamente grueso en el fluido.

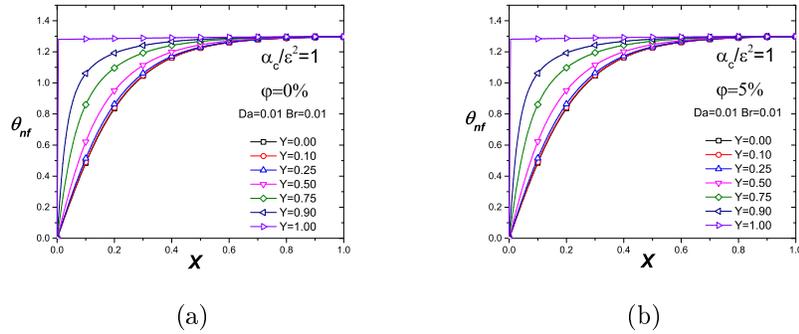


Figura 7: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un limite térmicamente grueso en el fluido.

La Fig. 7 muestra una variación muy pequeña de la temperatura en comparación con la Fig. 5, esto es debido a que el efecto de la disipación viscosa provocada por el Br, se empieza a presentar en el calentamiento del medio poro-

so. De la misma forma la Fig. 8 presenta pequeñas variaciones en la temperatura de la pared del microcanal en comparación con lo presentada en la Fig. 6, el efecto de variar el volumen de nanopartículas no presenta un cambio alguno en los perfiles lo cual es provocado a que el efecto del Br no estan representativo con el valor de  $Br=0.01$ . La Fig. 7 muestra el caso del límite térmicamente grueso para el fluido, donde se puede observar una clara dependencia de la temperatura con la coordenada transversal, a mayores valores de  $Y$ , se presenta un mayor incremento en los perfiles de temperatura, siempre y cuando la coordenada longitudinal  $X$ , está entre 0 y 0,6. A partir de  $X = 0.6$ , todos los perfiles de temperatura alcanzan un límite que oscila en torno a 1,3 aproximadamente. Un efecto bastante interesante, mostrado en la Fig. 7, ocurre cuando  $Y = 1$ , que representa la temperatura del fluido en contacto con la pared. En este caso, la temperatura del fluido alcanza un valor máximo desde la entrada al microcanal, por lo que se observa una pendiente muy pronunciada, a diferencia de lo que sucede para los demás valores de  $Y$ .

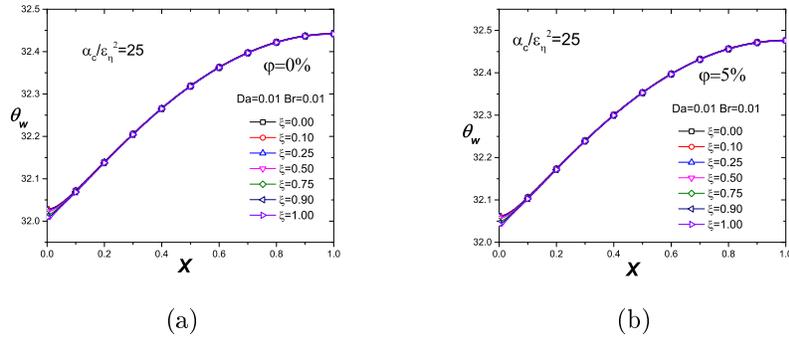


Figura 8: Perfiles de temperatura de la pared con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un límite térmicamente delgado en la pared y un límite térmicamente grueso en el fluido.

La Fig. 9, presenta un efecto bastante interesante muestra que en  $X = 0.6$  hay un cruce de perfiles de temperatura para valores de  $Y=0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$  y  $0.90$ . Esto significa que a partir de  $X = 0.6$ , los perfiles de temperatura comienzan a alcanzar valores más altos cerca del centro del microcanal ( $Y = 0$ ) que en las cercanías de la pared ( $Y = 1$ ). En el caso de la variación del volumen de nanopartículas de  $\varphi=0\%-5\%$  al tener el efecto del  $Br=0.1$  se nota una pequeña variación en la temperatura del medio poroso. Esto ya que se empieza a notar el efecto de absorción de temperatura que produce los nanofluidos, debido este se genera un aumento en de la temperatura en el medio poroso.

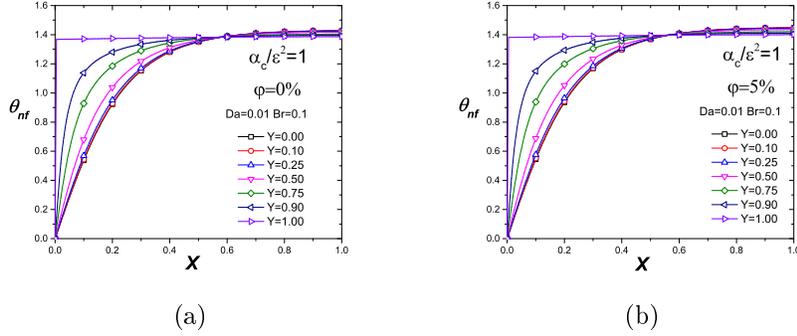


Figura 9: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un limite térmicamente grueso en el fluido.

Para la Fig. 10, la coordenada transversal  $\xi$  no genera ningún efecto en como en las Fig. 6 y 8, para este caso de los perfiles de las figuras se puede observar que se desarrolla tan rápido antes de  $X=0.1$ , que no mantienen ningún cambio respecto a  $\xi$ . Aquí el efecto de  $\varphi$  de igual se vuelvo notorio se observa un aumento en la temperatura de la pared del microcanal.

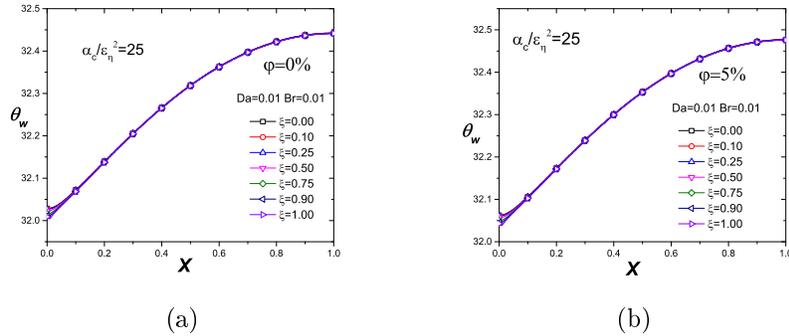
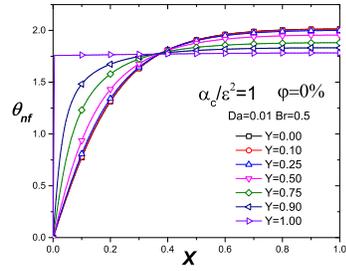
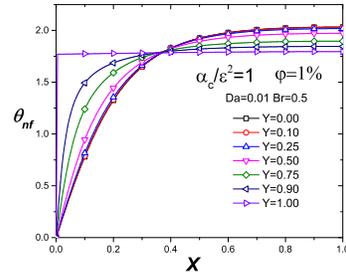


Figura 10: Perfiles de temperatura en la pared con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un limite térmicamente delgado en la pared y un limite térmicamente grueso en el fluido..

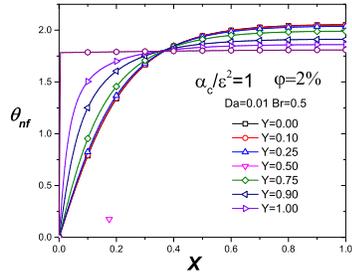
En la Fig. 11, nuevamente hay un aumento en el valor del número de Brinkman, se encuentran nuevamente perfiles muy similares a los de las Fig. 6, pero ahora hay un ligero aumento en la temperatura, alcanzando un valor máximo. se observa con más detalle, a diferencia de la Fig. 9 el calentamiento de la parte central de la pared del microcanal para este caso el efecto se presenta para  $X = 0.4$ , Después de  $X = 0.4$ , se ve claramente la influencia de la disipación viscosa actuando como fuente de calor para valores del número de Brinkman cercanos a la unidad, ya que al aumentar significativamente la velocidad en  $Y$



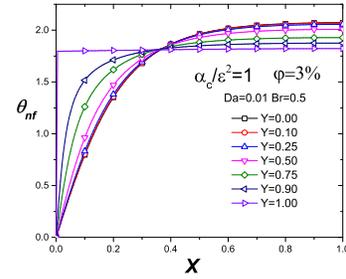
(a)



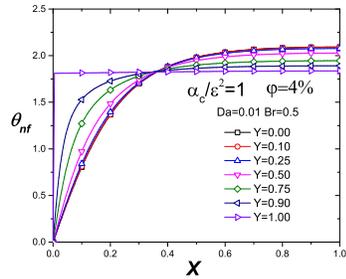
(b)



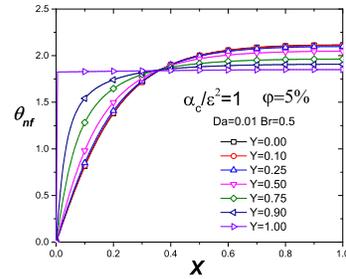
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 11: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.5$  para un limite térmicamente grueso en el fluido.

$= 0$ , este efecto se vuelve dominante sobre los manifestados por transferencia de calor tanto por convección como por difusión que se transmite desde la pared del microcanal hacia el medio poroso, razón por la cual la temperatura del fluido es mayor en el centro que en cualquier otra región del sistema.

Para la Fig. 12 se muestra el mismo efecto que en las figuras mostradas anteriormente para los perfiles adimensionales de la temperatura en la pared del microcanal, de la misma manera como en la Fig. 10 el efecto del incremento de  $\varphi$  produce aumentos en la temperatura de la pared del microcanal.

Como era de esperar para la Fig. 13, a medida que aumenta el número de Brinkman, el efecto de la disipación viscosa provoca un aumento en la temperatura del fluido, el efecto del cruce de perfiles de temperatura es más importante, pero en esta ocasión, este comportamiento se da en  $X = 0.3$ , analizando este efecto en comparación de las Fig. 9, 11 y 12, se observa como el cruce de los perfiles se dirige hacia la entrada de el microcanal, lo que implica que por aumentando el número de Brinkman, el efecto de disipación viscosa causado por las altas velocidades en  $Y = 0$  ocurre cada vez más cerca de la entrada. De la misma manera la Fig. 14, presenta el mismo comportamiento, se genera un crecimiento de la temperatura en la pared del microcanal debido al aumento del volumen de nanopartículas.

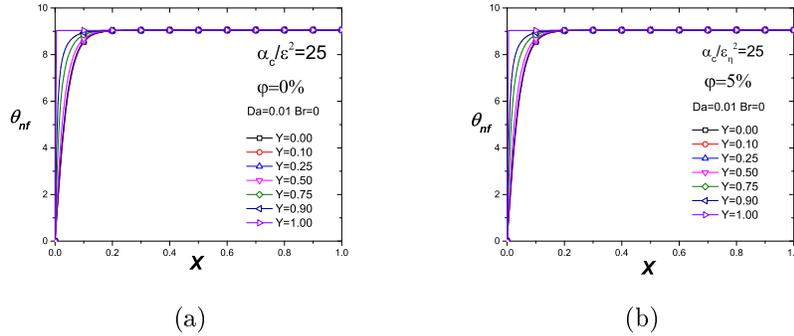
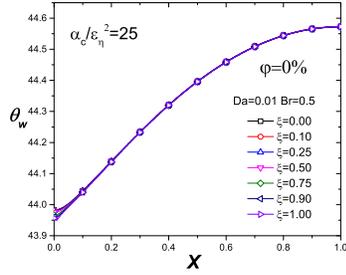
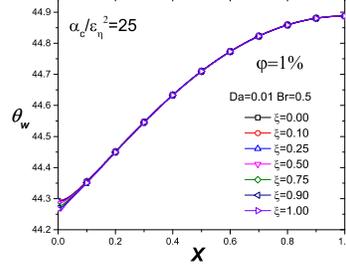


Figura 15: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un límite térmicamente delgado en el fluido.

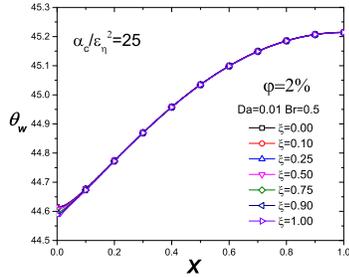
Para la Fig. 15 que representa el caso del límite térmicamente delgado en el fluido, sin embargo, estos incrementos de temperatura con respecto a  $Y$ , solo son visibles para valores de  $X$  entre 0 y 0.1. Después de  $X = 0.1$ , los perfiles de temperatura alcanzan un valor máximo que ronda aproximadamente los 9. Los perfiles alcanzan una temperatura más alta en el límite térmicamente delgado, lo que a su vez muestra que a partir de  $X = 0.1$ , la temperatura del fluido ya no depende de la coordenada transversal.



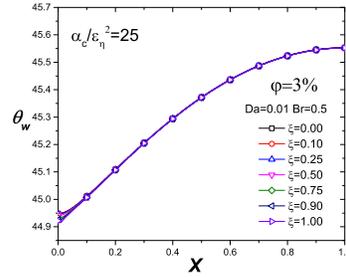
(a)



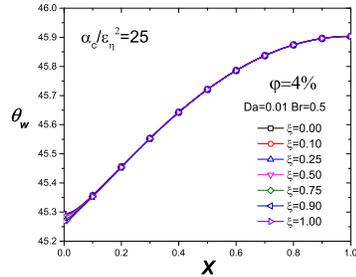
(b)



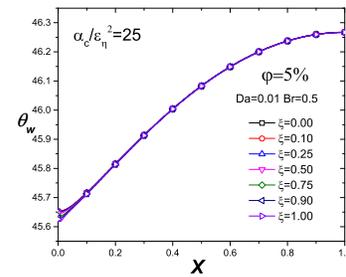
(c)



(d)

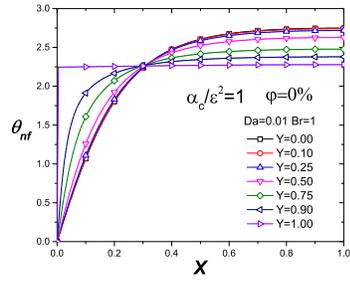


(e)

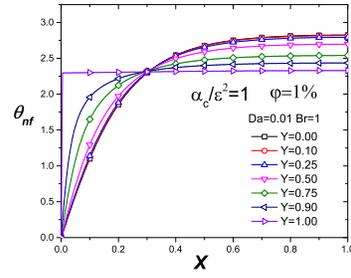


(f)

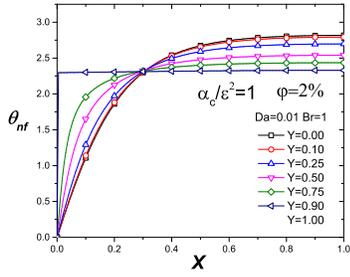
Figura 12: Perfiles de temperatura en la pared con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.5$  para un límite térmicamente delgado en la pared y un límite térmicamente grueso en el fluido.



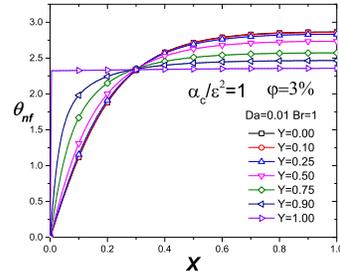
(a)



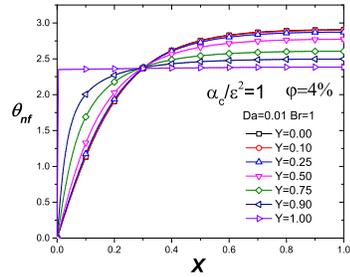
(b)



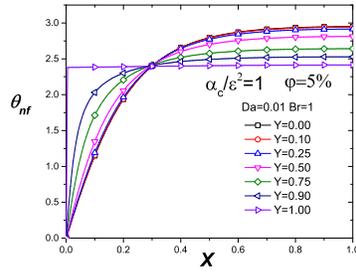
(c)



(d)

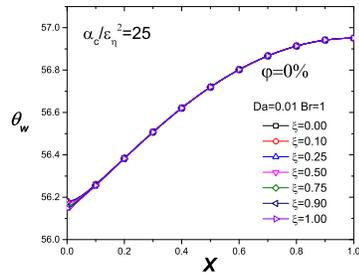


(e)

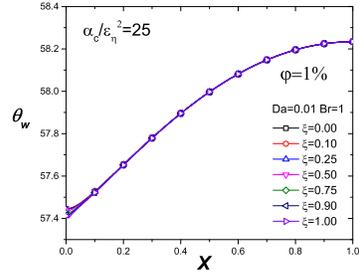


(f)

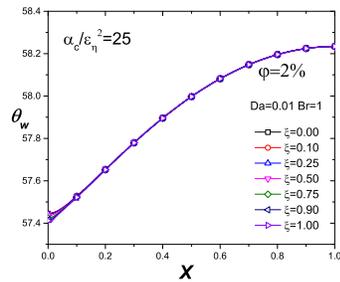
Figura 13: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=1.0$  para un limite térmicamente grueso en el fluido.



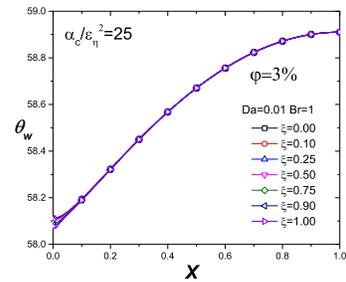
(a)



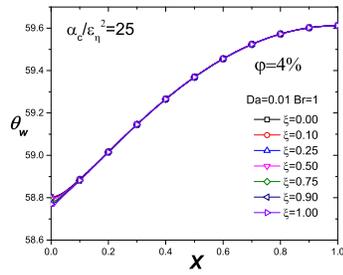
(b)



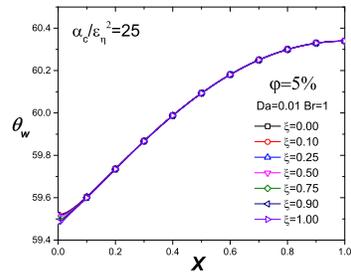
(c)



(d)

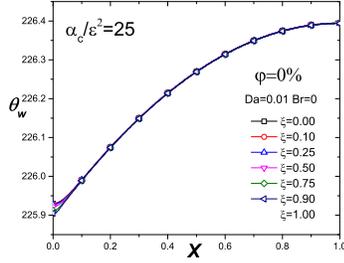


(e)

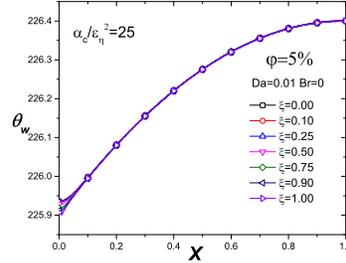


(f)

Figura 14: Perfiles de temperatura en la pared con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=1.0$  para un limite térmicamente delgado en la pared.



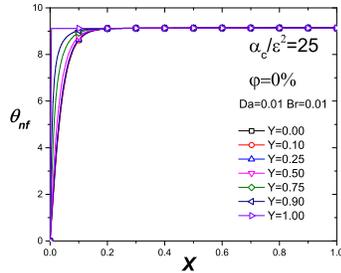
(a)



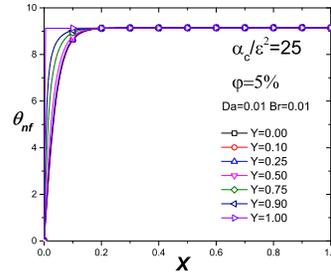
(b)

Figura 16: Perfiles de temperatura de la pared con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un limite térmicamente delgado la pared y un limite térmicamente delgado en el fluido.

En el caso de la Fig. 16 se presenta el efecto que tiene en la pared los perfiles de temperatura cuando se considera el limite térmicamente delgado en el fluido, una de las consideraciones más vistosas es el aumento drastico aproximadamente del 85.7% que se observa en la temperatura en comparación con el limite térmicamente grueso en el fluido. Esto demuestra que el limite termicamente delgado tiende a generar una disipación mucho más rapida de la temperatura lo cual genera un aumento en el calentamiento en la pared, las competencias de las resistencias térmicas en la pared como en fluido tienden a generar un desarrollo mucho más rápido en los perfiles de temperatura y esto de igual forma genera una menor resistencia en la conducción de calor en la pared del microcanal.



(a)



(b)

Figura 17: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un limite térmicamente delgado en el fluido.

De la misma forma que sus predecesoras la Fig. 17 presenta el mismo comportamiento que la Fig. 15 debido a que no es muy representativo el número de Brinkman. Para la Fig. 19 se presenta el mismo comportamiento que la Fig.

17 los únicos cambios que se presentan es el aumento de la temperatura del nanofluido.

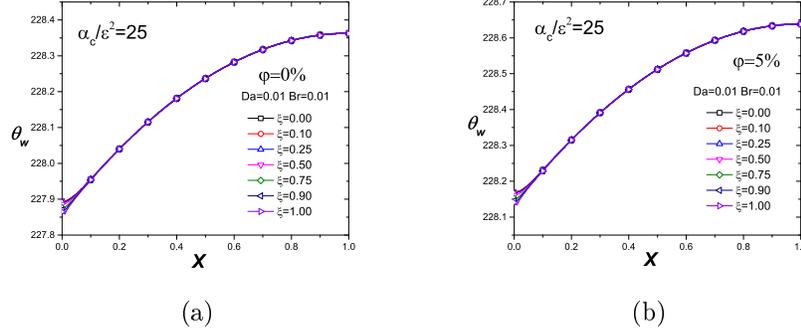


Figura 18: Perfiles de temperatura de la pared con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un límite térmicamente delgado la pared y un límite térmicamente delgado en el fluido.

La Fig. 18 muestra el mismo caso que la Fig. 16, se genera un asenso en la temperatura bastante alto en comparación cuando el límite del nanofluido es térmicamente grueso, se muestran pequeñas variaciones cuando se tiene que  $\varphi$  varía del  $\varphi=0\%$ -5%, se notan pequeños cambios en la temperatura de la pared del microcanal.

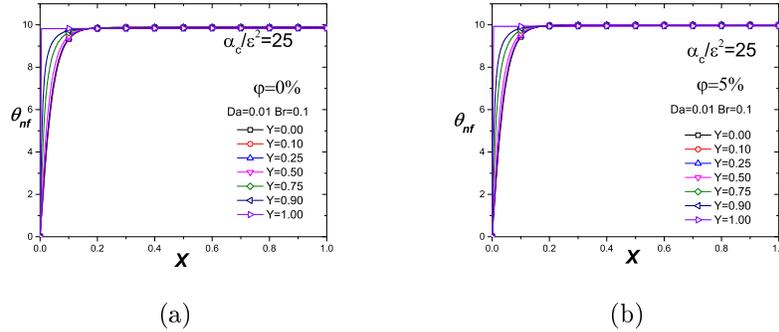
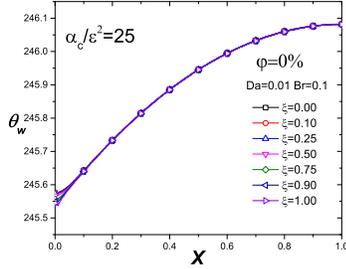
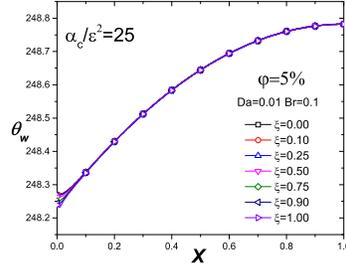


Figura 19: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\varphi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un límite térmicamente delgado en el fluido.

En la Fig. 19 representa el límite térmicamente delgado en el fluido, el efecto del cruce de los perfiles se presenta nuevamente para  $X = 0.1$  aproximadamente, sin embargo, la dependencia de la temperatura con la coordenada transversal se mantiene sin ser muy significativa.



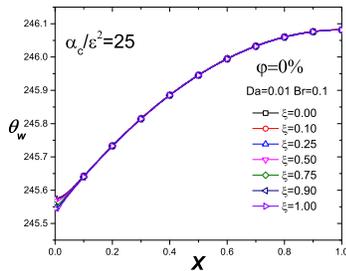
(a)



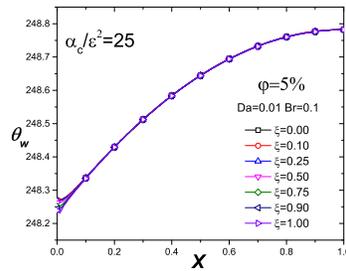
(b)

Figura 20: Perfiles de temperatura de la pared con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un límite térmicamente delgado la pared y un límite térmicamente delgado en el fluido.

De la misma forma la Fig. 20 repite el mismo patrón que las Fig. 16-18, donde se observa cambios bastante altos en la temperatura en comparación del límite térmicamente grueso en el fluido y cambios en la temperatura con la variación de  $\phi$ . Para la Fig 21, el efecto de la disipación viscosa genera un aumento de la temperatura considerando el efecto que tienen las nanopartículas inmersas aun así la dependencia de la coordenada transversal no es tan significativa.



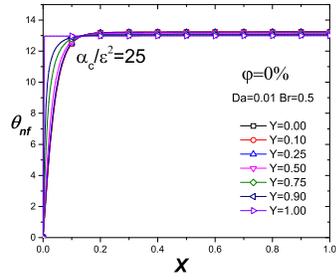
(a)



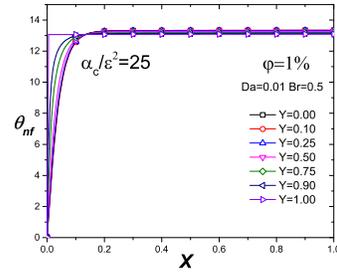
(be)

Figura 21: Perfiles de temperatura de la pared con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un límite térmicamente delgado la pared y un límite térmicamente delgado en el fluido.

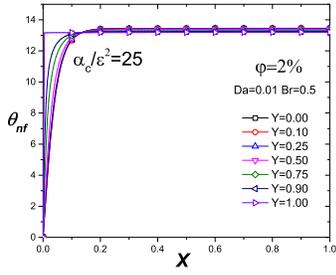
Para la Fig. 22 es mucho más notorio el cambio de temperatura en los perfiles debido a  $\phi$  esto es en consecuencia por el número de Brinkman, al ser más representativo el efecto de la disipación viscosa influye de gran manera en los cambios de la variación de  $\phi$ . De igual forma para la Fig. 24 el aumento de la temperatura es mucho más notorio cuando  $Br=1$ . Los perfiles de temperatura en la pared del microcanal observan el mismo comportamiento de desarrollo en



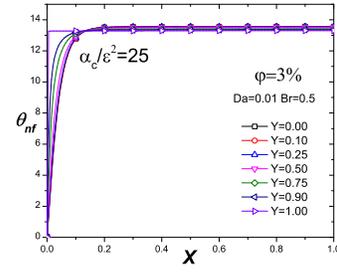
(a)



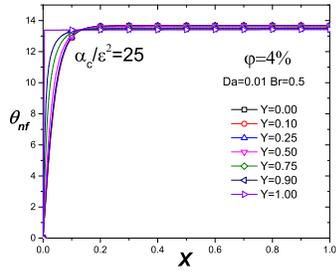
(be)



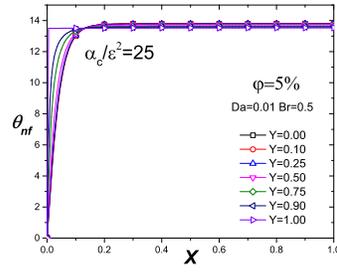
(c)



(d)

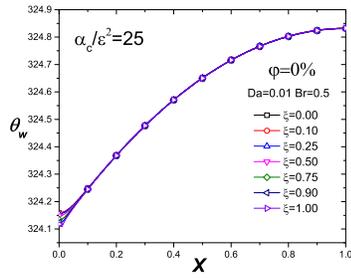


(e)

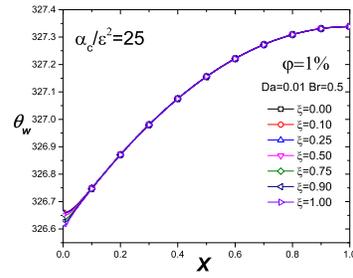


(f)

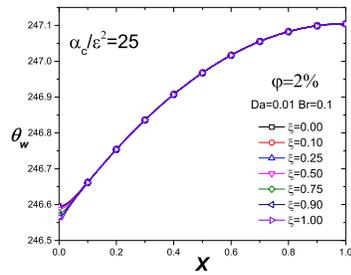
Figura 22: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.5$  para un limite térmicamente delgado en el fluido.



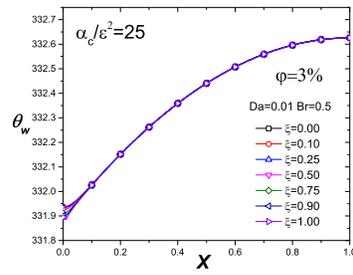
(a)



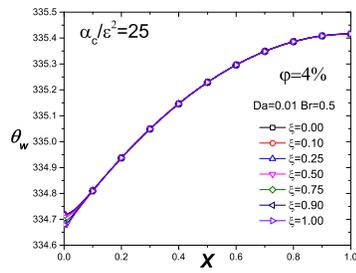
(be)



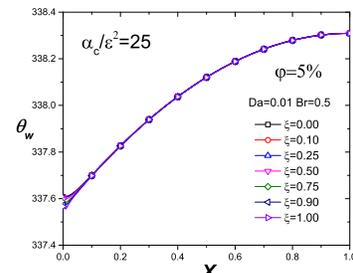
(c)



(d)



(e)

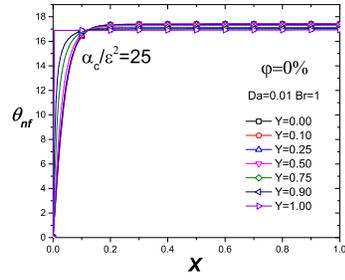


(f)

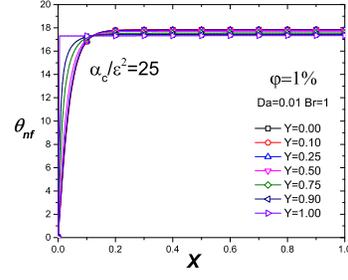
Figura 23: Perfiles de temperatura en la pared con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.5$  para un límite térmicamente delgado en la pared y un límite térmicamente delgado en el fluido.

comparación con los obtenidos cuando se tiene un límite térmicamente grueso en el fluido, en comparación un límite térmicamente delgado en el fluido proporciona una mayor disipación de temperatura en la pared y lo cual se hace mucho más notable los efectos longitudinales.

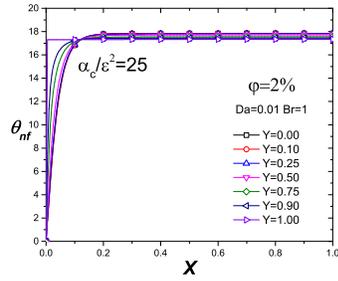
La temperatura del canal principalmente se ve afectada por el aumento del número de Brinkman. Sin embargo, para  $0 < Br < 0.1$ , el incremento de temperatura es insignificante; sin embargo, a partir de  $Br > 0.1$  la temperatura aumenta sustancialmente, para  $Br \sim 0.1$  hay un cruce de perfiles de temperatura donde valores más altos de esta variable se observan en el centro del microcanal con respecto al fluido cerca de la pared.



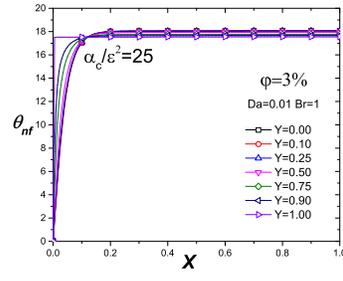
(a)



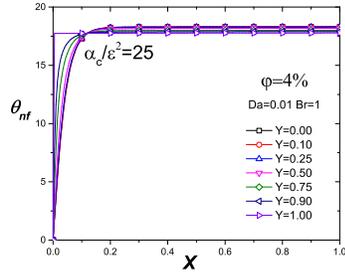
(b)



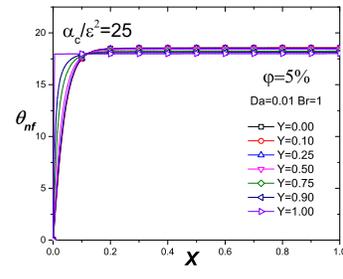
(c)



(d)

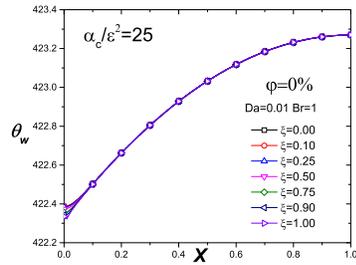


(e)

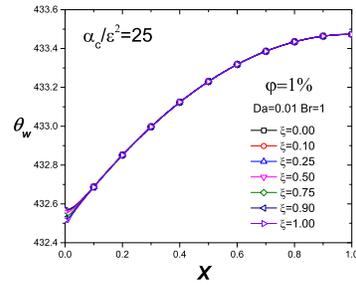


(f)

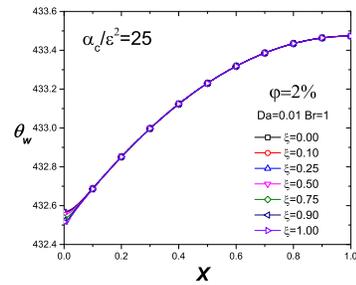
Figura 24: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=1.0$  para un limite térmicamente delgado en el fluido.



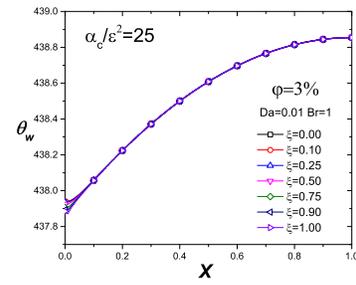
(a)



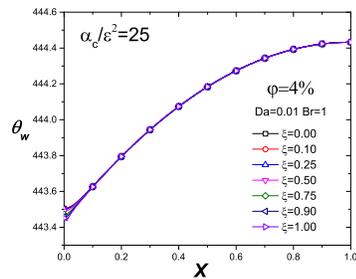
(b)



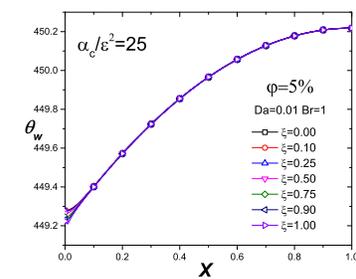
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 25: Perfiles de temperatura en la pared con una variación de  $\phi$  (0%-5%), un  $Da=0.01$  y  $Br=1.0$  para un límite térmicamente delgado en la pared y un límite térmicamente delgado en el fluido.

## 5 Conclusiones.

Este trabajo presenta el análisis conjugado de la transferencia de calor en un microcanal rectangular en el que un medio poroso homogéneo está confinado y un nanofluido fluye a través este. El microcanal está sujeto a un flujo de calor externo que se transfiere al líquido. El objetivo de este trabajo es estudiar la influencia de la disipación viscosa generada por la interacción del flujo a través del medio poroso y de esta manera, determina los perfiles de temperatura tanto de la pared como del nanofluido. Considerando los efectos longitudinales de la transferencia de calor en la pared del microcanal no han sido analizados para medios porosos en la literatura, se estudia el límite de pared térmicamente delgado ( $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 25$ ), lo que destaca la importancia de estos efectos. Asimismo, se tienen dos límites dominantes establecido en el fluido, que dependen de la importancia de la coordenada longitudinal. El primero se denomina límite térmicamente grueso donde estos efectos son despreciables en comparación con las transversales ( $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 1$ ). El segundo corresponde al límite térmicamente delgado donde ocurre la situación opuesta ( $\frac{\alpha_c}{\epsilon_h^2} = 25$ ). Para el trabajo se considera  $\varphi \leq 5\%$ , debido a que queremos evitar el efecto de sedimentación que se presenta en microcanales con confinamiento de un medio poroso. En el caso de la pared del microcanal se considera solamente para este análisis al límite térmicamente delgado.

El número de Brinkman que representa la disipación viscosa, es responsable del aumento de temperatura tanto en el nanofluido como en la pared, se observa que  $Br > 0.1$  cercanos a la unidad, los aumentos de temperatura son más notables que de igual forma el cruce de los perfiles de temperatura se ve más afectados mientras más significativo es el número de Brinkman, el número de Br es el responsable de generar que el volumen de nanopartículas inmersas se vuelva más notable su efecto.

Un efecto muy importante es la observación que tiene el aumento de la temperatura en la pared del microcanal para efectos del límite térmicamente delgado en el fluido, estos efectos hacen referencia a considerar que los efectos longitudinales si son importantes a tomar en cuenta en la aplicación de microcanales. Es fácil observar en las figuras donde se considera el límite térmicamente grueso en el fluido valores más bajos en la pared del microcanal en comparación a los que se muestran cuando se tiene un límite térmicamente delgado en el fluido.

Por otro lado, el número de Darcy no tiene un efecto significativo sobre los perfiles de temperatura en el fluido y en la pared. Esto se debe a que en este trabajo consideramos valores de  $Da \leq 0.01$  para evitar los efectos de arrastre de Forchheimer. Para el límite térmicamente grueso para el fluido, la dependencia del perfil de temperatura con la coordenada transversal es mucho mayor que en el caso del límite térmicamente delgado, esto es debido a que el efecto de la resistencia térmica tiene un efecto de generar un desarrollo mucho más lento en los perfiles, en el caso del límite térmicamente delgado al existir una menor resistencia el desarrollo de los perfiles es mucho más rápido.

## Parte I

# Apéndice I: Figuras

Como se menciona en las secciones anteriores muchos comportamientos en las gráficas fueron similares debido a que la variación de la fracción del volumen de nanopartículas no tenían variaciones en los perfiles de temperatura; las gráficas se muestran en esta sección.

En relación con la Fig. 5-10, la Fig. 25-30 muestra la variación del volumen de nanopartículas inmersas cuando varía de  $\varphi=1\%$ - $4\%$ , como se observa en la Fig. 25 no existe variación en los valores de la temperatura.

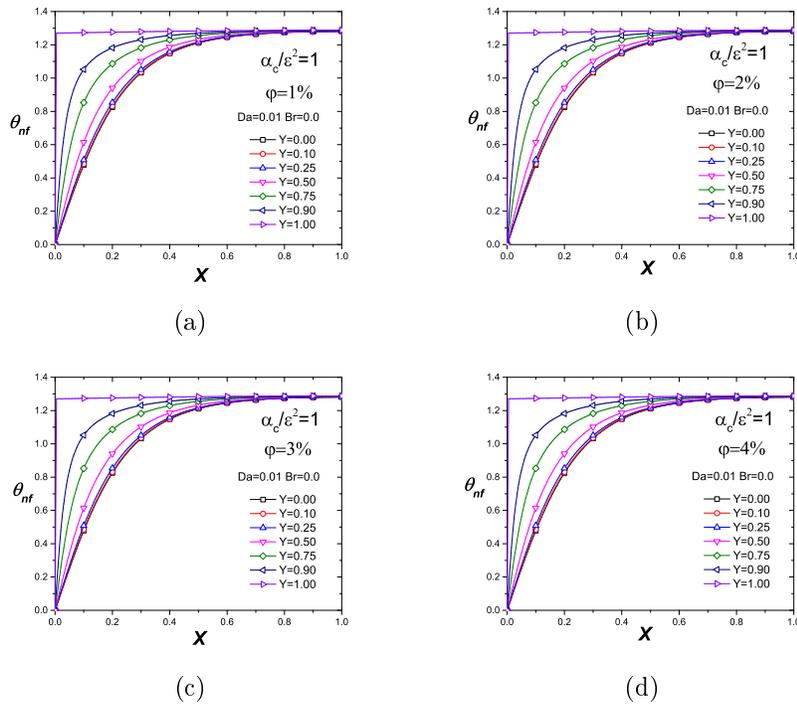
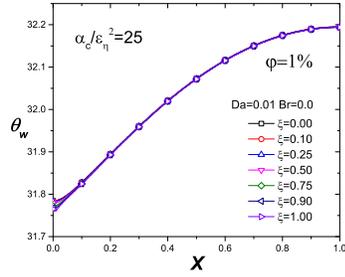
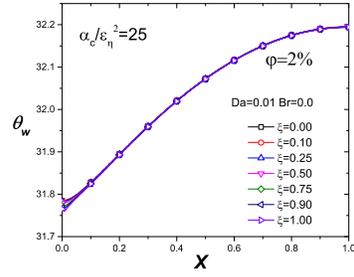


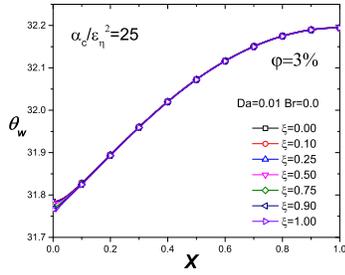
Figura 26: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\varphi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un limite térmicamente grueso en el fluido.



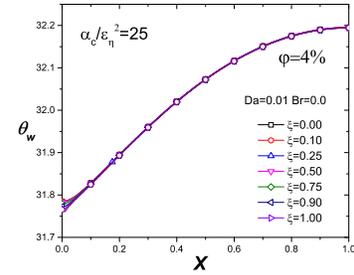
(a)



(b)

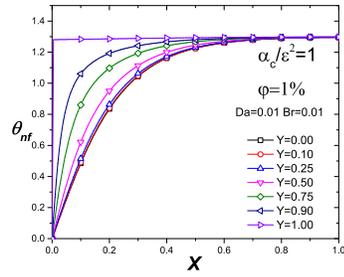


(c)

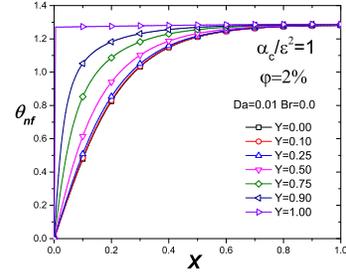


(d)

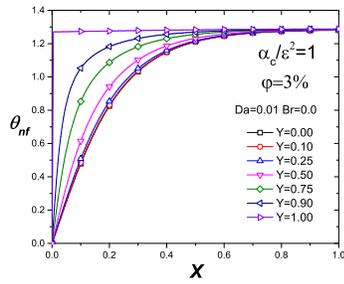
Figura 27: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un limite térmicamente delgado la pared y un limite térmicamente grueso en el fluido.



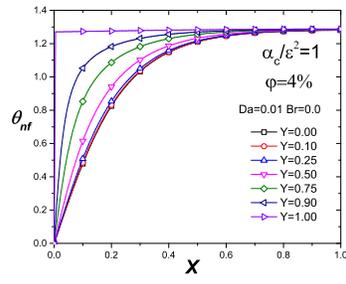
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 28: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un límite térmicamente grueso en el fluido.

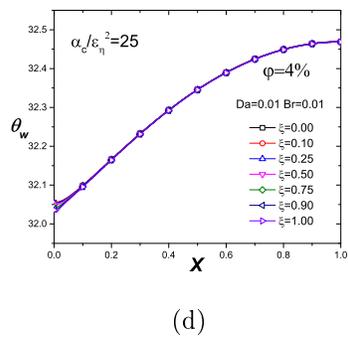
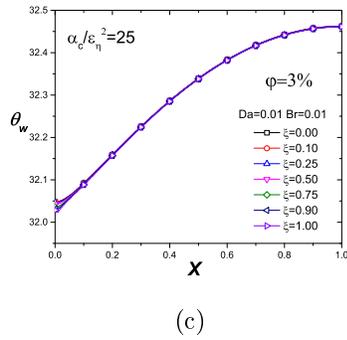
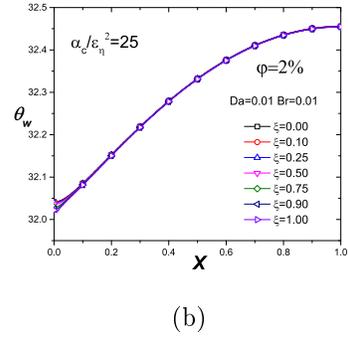
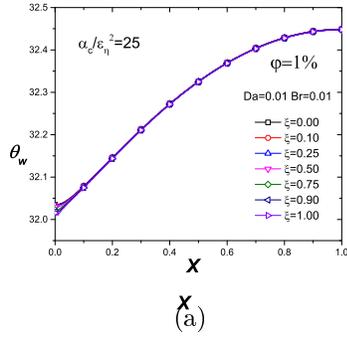
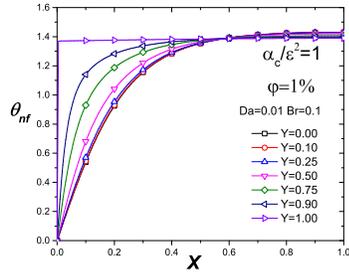
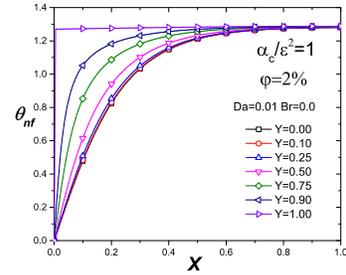


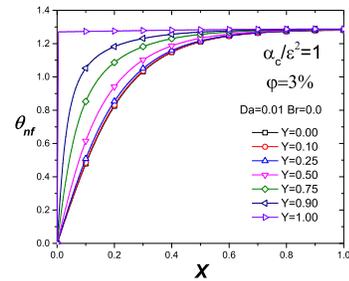
Figura 29: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un limite térmicamente delgado la pared y un limite térmicamente grueso en el fluido.



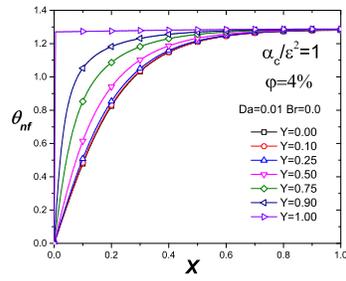
(a)



(b)

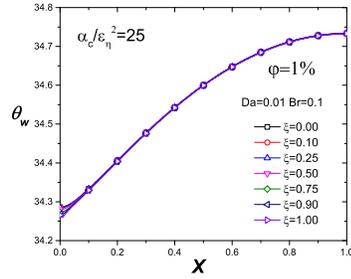


(c)

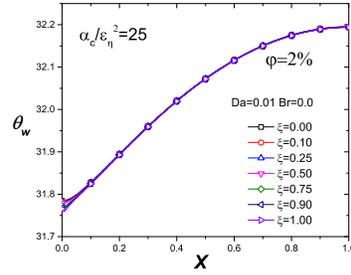


(d)

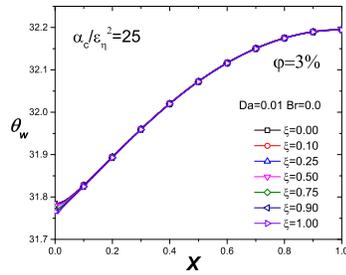
Figura 30: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un limite térmicamente grueso en el fluido.



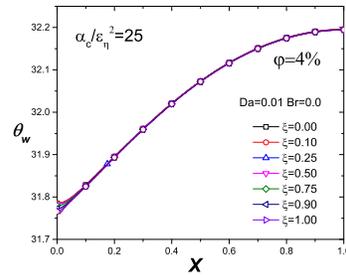
(a)



(b)



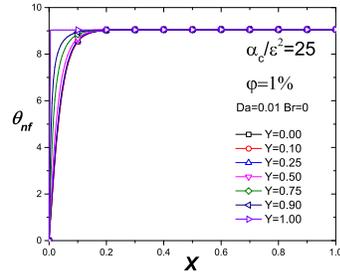
(c)



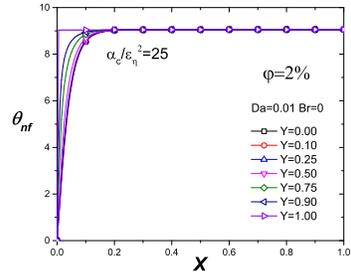
(d)

Figura 31: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un limite térmicamente grueso en el fluido.

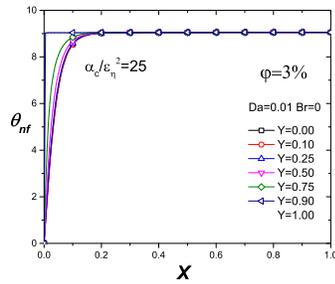
Para las Fig. 15-20 donde se muestra el limite térmicamente delgado en el fluido como en la pared, de igual forma las Fig. 31-36 muestran la nula variación que existe en los valores de la temperatura que existe considerando la variación de  $\phi$ , la concentración de partículas se vuelve sumamente considerable en el momento en que los valores del número de Brinkman se vuelve más significativo.



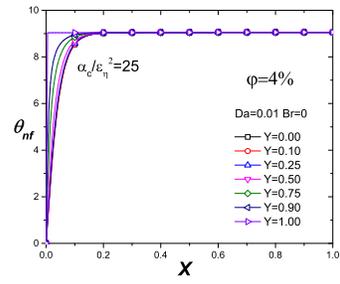
(a)



(b)

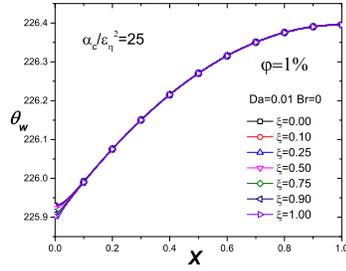


(c)

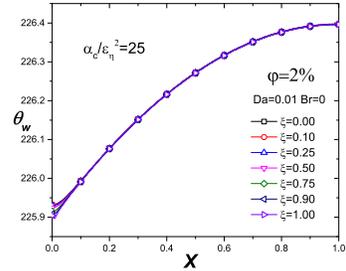


(d)

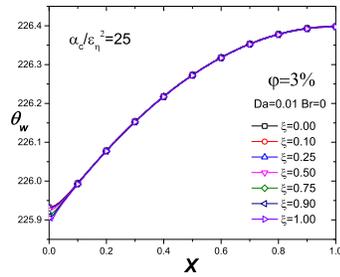
Figura 32: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un limite térmicamente delgado en el fluido.



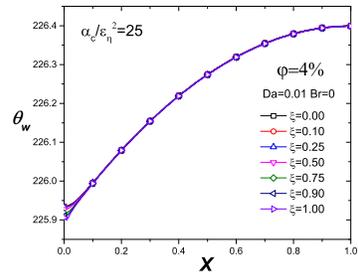
(a)



(b)

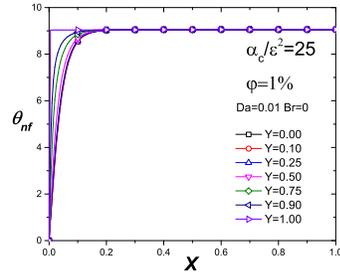


(c)

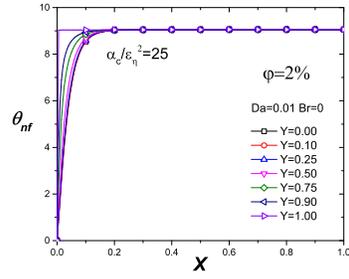


(d)

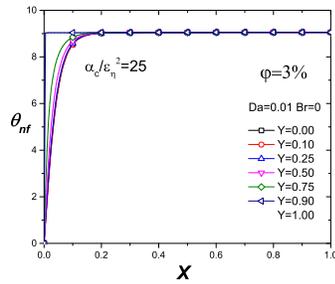
Figura 33: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0$  para un límite térmicamente delgado la pared y un límite térmicamente delgado en el fluido.



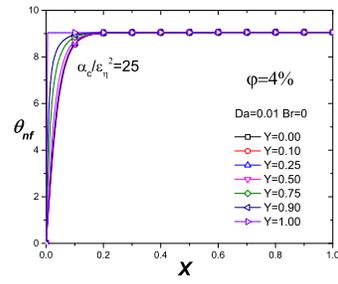
(a)



(b)

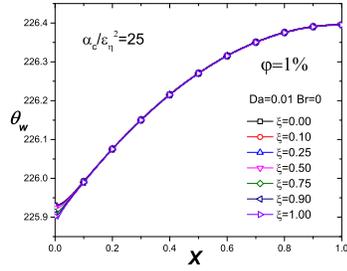


(c)

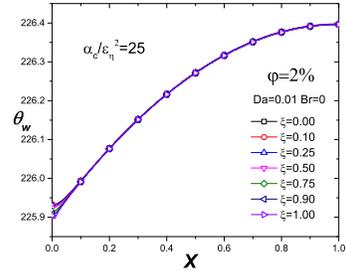


(d)

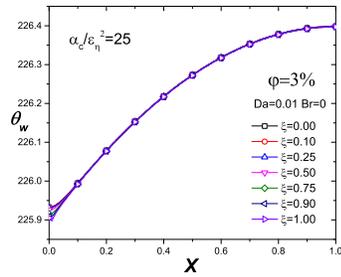
Figura 34: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un límite térmicamente delgado en el fluido.



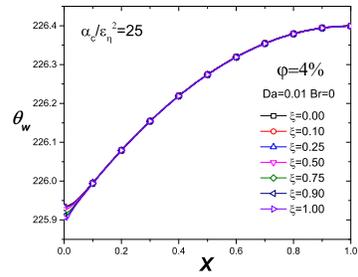
(a)



(b)

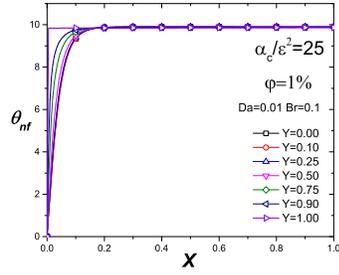


(c)

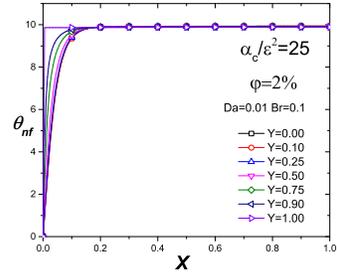


(d)

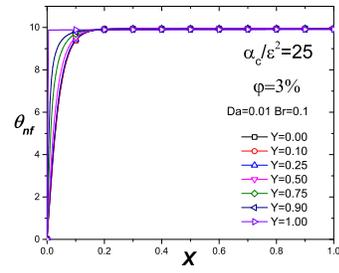
Figura 35: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.01$  para un límite térmicamente delgado la pared y un límite térmicamente delgado en el fluido.



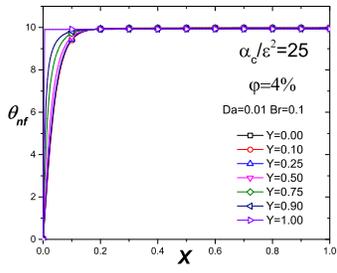
(a)



(b)

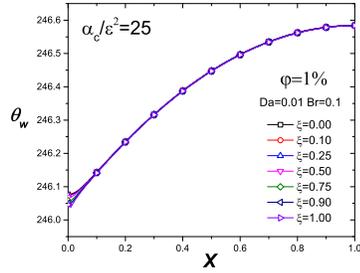


(c)

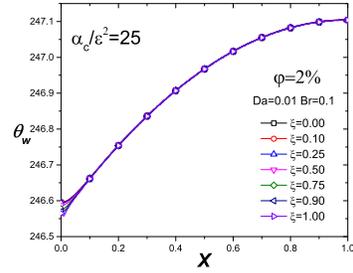


(d)

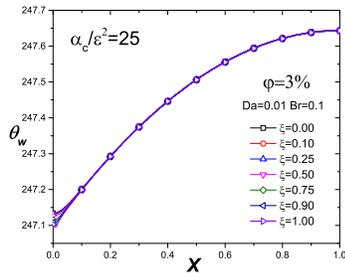
Figura 36: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un limite térmicamente delgado en el fluido.



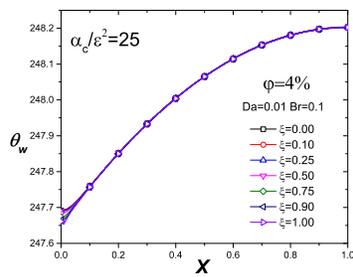
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 37: Perfiles de temperatura en el fluido con una variación de  $\phi$  (1%-4%), un  $Da=0.01$  y  $Br=0.1$  para un límite térmicamente delgado en el fluido.

## Referencias

- [1] D. A Tuckerman. Heat transfer micro-structures for integrated circuits, Lawrence Livermore National Laboratory, USA, page 5315, 1984
- [2] Nield, Donald & Bejan, A. (2006). Convection in Porous Media. (3ra ed.). New York: Springer Science Business Media, Inc
- [3] Ting, Tiew Wei & Hung, Yew & Guo, Ningqun. (2015). Entropy generation of viscous dissipative nanofluid flow in thermal non-equilibrium porous media embedded in microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 81. 862-877. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.11.006.
- [4] Vélez Agudelo, Catalina, Conductividades térmicas de sistemas con cambio de fase: nanofluidos y nanocompuestos. Tesis de Dr. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense de Madrid, 2018.
- [5] A. Alawi, Omer & Che Sidik, Nor Azwadi & Hong, Wei Xian & Hao Kean, Tung & Kazi, S.N.. (2017). Thermal conductivity and viscosity models of metallic oxides nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 116. 1314–1325. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.133.
- [6] Gaikwad, Harshad & Mondal, Pranab & Wongwises, Somchai. (2017). Non-linear drag induced entropy generation analysis in a microporous channel: The effect of conjugate heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 108. 2217-2228. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.041.
- [7] Murshed, S M Sohel & Estellé, Patrice. (2017). A state of the art review on viscosity of nanofluids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 76. 1134-1152. 10.1016/j.rser.2017.03.113. .. (1989). Forced Convection in a Channel Filled With a Porous Medium: An Exact Solution. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C); (United States)*. 111:4. 10.1115/1.3250779.
- [8] Campos Leyton, Carlos Andrés, EFECTO DE DISTINTOS NANOFLUIDOS EN LA ABSORCIÓN DE RADIACIÓN SOLAR. Tesis de lic. Facultad de ciencias físicas y matematicas-Universidad de Chile, 2018
- [9] Yazdi, Mohammad Eftekhari & Aghamajidi, Mohammad & Dinarvand, Saeed & Pop, Ioan. (2018). Tiwari-Das nanofluid model for magnetohydrodynamics (MHD) natural-convective flow of a nanofluid adjacent to a spinning down-pointing vertical cone. *Propulsion and Power Research*. 7. 10.1016/j.jprr.2018.02.002.
- [10] Vafai, Kambiz & Kim, S.J.. (1989). Forced Convection in a Channel Filled With a Porous Medium: An Exact Solution. *Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME (American Society of Mechanical Engineers), Series C); (United States)*. 111:4. 10.1115/1.3250779.

- [11] Cengel, Yunus A. y Cimbala, John M. (2007), *Mecánica de Fluidos, Fundamentos y Aplicaciones*. (1ra ed.), México, Mc Graw Hill.
- [12] Nguyen, C. & Desgranges, F. & Galanis, Nicolas & Roy, Gilles & Mare, Thierry & Boucher, S. & Mintsa, H.. (2008). Viscosity data for Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water nanofluid-hysteresis: is heat transfer enhancement using nanofluids reliable?. *International Journal of Thermal Sciences - INT J THERM SCI*. 47. 103-111. 10.1016/j.ijthermalsci.2007.01.033.
- [13] Monsiváis Montoliu, Ian Guillermo, *Análisis teórico y mecanismos de enfriamiento en microcanales*. Tesis de Dr. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.
- [14] Chen, C. O. K., & Weng, H. C. (2005). Natural convection in a vertical microchannel.
- [15] G. E. Karniadakis, A. Beskok, and N. Aluru. *Microflows and Nanoflows*. Springer, 2005
- [16] Monsivais, Ian & Méndez, Federico & Gomez, Ares & Lizardi, José. (2021). Conjugate Heat Transfer in a Thin Microchannel Filled with a Porous Medium. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 1-11. 10.2514/1.T6196.
- [17] Luna, N., & Mendez, F. (2005). Forced convection on a heated horizontal flat plate with finite thermal conductivity in a non-darcian porous medium. *International Journal of Thermal Sciences*, 44(7), 656-664.
- [18] Timofeeva, E. V., Gavrilov, A. N., McCloskey, J. M., Tolmachev, Y. V., Sprunt, S., Lopatina, L. M., & Selinger, J. V. (2007). Thermal conductivity and particle agglomeration in alumina nanofluids: experiment and theory. *Physical Review E*, 76(6), 061203.
- [19] Bergman, T. L. (2009). Effect of reduced specific heats of nanofluids on single phase, laminar internal forced convection. *International Journal of heat and mass Transfer*, 52(5-6), 1240-1244.
- [20] Ting, T. W., Hung, Y. M., & Guo, N. (2015). Entropy generation of viscous dissipative nanofluid flow in thermal non-equilibrium porous media embedded in microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 81, 862-877.
- [21] Li, Y., and Yao, S.-C., "Porous media modeling of microchannel cooled electronic chips with nonuniform heating," *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 29, No. 4, 2015, pp. 695–704.
- [22] Hecht F. New development in Freefem++. En: *Jornal of Numerical Mathematics*(2012).

- [23] Naranjo Lazaro, Carlos, Aplicación de elementos finitos a problemas de termofluidos. Tesis de maestría. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Universidad Autónoma de Nuevo León, 1999
- [24] Vafai K, Kim S J et al. 1989 ASME J. Heat Transfer 111 1103–1106.
- [25] Monsivais, I., Méndez, F., Gomez, A., & Lizardi, J. (2022). Conjugate Heat Transfer in a Thin Microchannel Filled with a Porous Medium. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 36(1), 40-50.