



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA
MECÁNICA – TERMOFLUIDOS**

**ANÁLISIS DE UN SUMIDERO DE CALOR EN UN MICROCANAL POROSO CON
PERMEABILIDAD VARIABLE**

TESIS

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:

ALAN GERARDO REYES RAMÍREZ

TUTOR

**DR. IAN GUILLERMO MONSIVAIS MONTOLIU
FACULTAD DE INGENIERÍA**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En este estudio se analiza de forma numérica la transferencia de calor de un fluido newtoniano que circula a través de un microcanal poroso con permeabilidad constante y distintos modelos de permeabilidad variable, además, se considera la transferencia de calor conjugada en las paredes del microcanal. Las ecuaciones de gobierno fueron resueltas mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento y el método de elementos finitos bajo el enfoque variacional para la ecuación de conservación de la energía y la ecuación de difusión acoplada. Se obtuvieron los resultados del campo de temperatura en los límites asintóticos térmicamente grueso ($\alpha_c/\epsilon^2 = 1$) y térmicamente delgado ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$) en el fluido y en el límite térmicamente delgado en la pared ($\alpha_c/\epsilon_h^2 = 25$) para la visualización de los efectos longitudinales de conducción de calor. Los resultados indican que el campo de temperaturas está fuertemente influenciado por el campo de velocidad y la función de permeabilidad variable de cada caso estudiado. Asimismo, se pudo observar que la temperatura varía en función del número de Brinkman, el cual representa el efecto de la disipación viscosa. No obstante, no hubieron cambios significativos de la temperatura en el fluido y en la pared en función del número de Darcy para $Da \leq 0.01$. Finalmente, el modelo en el que se experimentó la mayor diferencia de temperaturas comparado con el caso con permeabilidad constante fue el modelo potencial, el cual tuvo una temperatura en el fluido a la salida y en el centro del microcanal 66.7% mayor y una temperatura en la pared 45.5% mayor, para un $Br = 1.0$ y tomando en cuenta los efectos longitudinales de conducción de calor en la pared.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Aspectos fundamentales	1
1.1.1	Mejoramiento del rendimiento de sistemas térmicos mediante nanofluidos y medios porosos	7
1.2	Antecedentes	8
1.2.1	Estudios sobre nanorefrigerantes con aplicación a sistemas de refrigeración	8
1.2.2	Estudios sobre medios porosos con aplicación a sistemas de refrigeración	10
1.2.3	Estudios sobre el transporte de nanofluidos en medios porosos	10
1.2.4	Estudios sobre el flujo y la transferencia de calor de sumideros de calor en microcanales	12
1.2.5	Estudios sobre el flujo y la transferencia de calor en dispositivos térmicos porosos con permeabilidad variable	14
1.2.6	Antecedentes directos	16
1.3	Objetivo	18
2	Planteamiento del problema	18
2.1	Modelo físico	18
2.1.1	Ecuación de conservación de momentum	19
2.1.2	Ecuación de conservación de la energía	20
2.1.3	Condiciones de frontera	20
2.2	Adimensionalización del modelo físico	22
2.3	Límites asintóticos	24
2.4	Modelos de permeabilidad variable	25
3	Método numérico	25
4	Resultados y discusión	26
4.1	Validación	26
4.2	Resultados del campo de velocidades	27
4.3	Resultados del campo de temperaturas	29
4.4	Límite térmicamente delgado en el fluido	35
5	Conclusiones	37
6	Anexo	38
6.1	Procedimiento para la adimensionalización de las ecuaciones de conservación	38
6.1.1	Ecuación de momentum	38
6.1.2	Ecuación de la energía	40
6.1.3	Ecuación de difusión	42

Nomenclatura

Bi	Número de Biot
Br	Número de Brinkman
C_p	Calor específico a presión constante (J/kgK)
c_F	Coefficiente de Forchheimer
D	Diámetro de las nanopartículas (nm)
Da	Número de Darcy
$f(y)$	Función de permeabilidad conocida
$F(\eta)$	Función de permeabilidad adimensional
H	Altura del microcanal (m)
h	Espesor de la pared del microcanal (m)
K	Permeabilidad específica del medio poroso (m^2)
K_0	Permeabilidad de referencia (m^2)
K_∞	Permeabilidad del medio (m^2)
K_w	Permeabilidad en la pared (m^2)
$K(y)$	Función de permeabilidad variable
Kn	Número de Knudsen
k_w	Conductividad térmica de la pared (W/mK)
k_{eff}	Conductividad térmica efectiva (W/mK)
L	Largo del microcanal (m)
Nu	Número de Nusselt
Nu_{prom}	Número de Nusselt promedio
P	Presión (N/m^2)
Pe	Número de Péclet
q''	Flujo de calor W/cm^2
Re	Número de Reynolds
Ra	Número de Rayleigh
T_f	Temperatura del fluido (K)
T_w	Temperatura en la pared del microcanal (K)
T_0	Temperatura a la entrada del microcanal (K)
U_∞	Velocidad a la entrada del microcanal (m/s)
u	Velocidad de filtración unidimensional (m/s)
u_m	Velocidad de filtración promedio (m/s)
u^*	Velocidad de filtración adimensional
\mathbf{v}	Velocidad de filtración en tres dimensiones (m/s)
\mathbf{V}	Velocidad intrínseca promedio en tres dimensiones (m/s)
$v\%$	Concentración de nanopartículas en porcentaje de volumen
W	Ancho del arreglo de múltiples aletas (m)
W_c	Espaciado entre aletas (m)
x	Coordenada longitudinal (m)
y	Coordenada transversal (m)

Símbolos griegos

α_c	Parámetro conjugado adimensional
γ	Es un parámetro adimensional o parámetro de permeabilidad
ϵ	Relación de aspecto del microcanal
ϵ_h	Relación de aspecto para la pared del microcanal
θ_f	Temperatura adimensional en el fluido
θ_w	Temperatura adimensional en la pared
λ	Trayectoria libre media de las partículas
μ_f	Viscosidad del fluido ($Pa\ s$)
μ_{eff}	Viscosidad efectiva ($Pa\ s$)
ρ_f	Densidad del fluido (kg/m^3)
φ	Porosidad
ϕ	Concentración de nanopartículas (g/L)
Φ	Disipación viscosa (W/m^3)
η	Coordenada adimensional transversal
ξ	Coordenada adimensional transversal (pared)
χ	Coordenada adimensional longitudinal
ω	Factor numérico

Subíndices

s	Fase sólida
f	Fase fluida
m	Cantidad promedio
eff	Cantidad efectiva

1 Introducción

El consumo energético en los últimos años se ha ido incrementando en aplicaciones como refrigeración, bombas de calor y aire acondicionado. Por lo tanto, debido a las limitaciones de los recursos energéticos, es de vital importancia el mejoramiento de la transferencia de calor en sistemas térmicos (Bhattad, Sarkar, y Ghosh 2018; Kasaeian et al. 2017).

Por otro lado, la creciente demanda de dispositivos en microescalas requiere un análisis de los campos de velocidad, temperatura y sus efectos. Por lo tanto, el transporte de calor en microdispositivos se ha vuelto un tema importante en distintas áreas de la ingeniería debido a sus diversas aplicaciones como en sistemas micro electromecánicos (MEMS por sus siglas en inglés), enfriamiento de sistemas electrónicos, microcaloductos, enfriamiento de LEDs de alta potencia, entre otros (Tuckerman y Pease, 1981; Gaikwad et al, 2017; Wan et al, 2011).

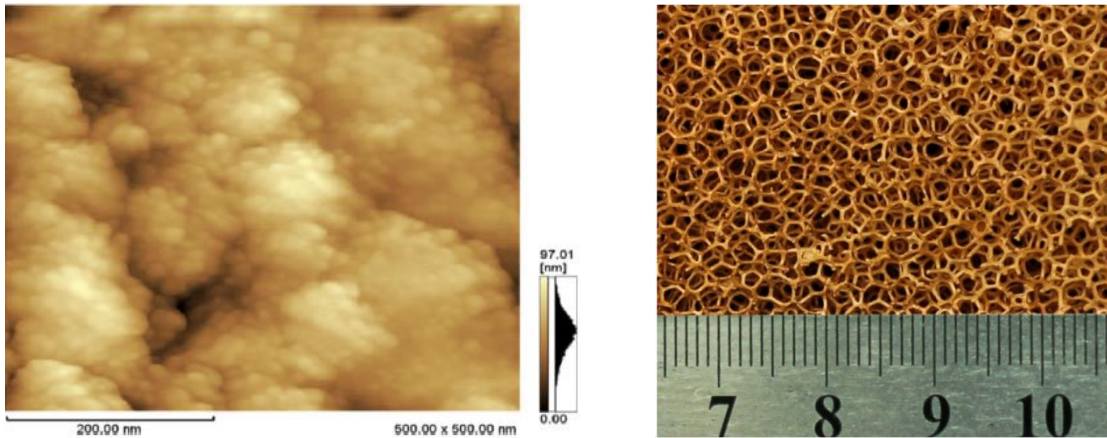
1.1 Aspectos fundamentales

El rendimiento de los sistemas térmicos puede ser incrementado al modificar el fluido de trabajo del sistema o al mejorar algunos de sus componentes como los intercambiadores de calor (Batthad et al. 2018). En investigaciones enfocadas en la mejora del fluido de trabajo, se ha encontrado que al implementar nanopartículas a los refrigerantes de sistemas de refrigeración se han conseguido mejores resultados en el rendimiento comparado con valores sin la implementación de nanopartículas (Bi et al. 2011; Mahbubul et al. 2015). A esta suspensión de nanopartículas (10-100 *nm* de dimensión) en un fluido base se le denomina nanofluido (Choi, 1995).

Un nanofluido está formado principalmente por dos componentes: el fluido base y las nanopartículas, sin embargo, en algunos casos es agregado un tercer componente llamado surfactante que sirve para prolongar la estabilidad de la mezcla cuando se presentan problemas de sedimentación de nanopartículas. El fluido base puede ser agua, etanol, glicol, refrigerante, lubricante, aceite etc. Por otra parte, las nanopartículas pueden ser de metales, óxidos de metales, carbono en distintas formas (nanotubos, diamante y grafeno) óxidos cerámicos y carburos metálicos gracias a sus cualidades térmicas para la transferencia de calor (Batthad et al. 2018; Kasaeian et al. 2017; Alawi et al. 2015).

Los nanofluidos pueden ser agrupados en tres categorías, dependiendo de la composición de las nanopartículas que los componen: (i) mono-nanofluidos (contienen las mismas nanopartículas) (ii) nanofluidos híbridos (contienen una mezcla de nanopartículas diferentes) y (iii) nanofluidos híbridos con nanopartículas compuestas (ya sean materiales sólidos o materiales sólidos y de cambio de fase). Además, los nanofluidos pueden emplearse de tres diferentes maneras para el mejoramiento del rendimiento de sistemas de refrigeración, bombas de calor y de aire acondicionado: (i) nanofluido con un refrigerante como fluido base (llamado nanorefrigerante) (ii) nanofluido con un lubricante como fluido base (llamado nanolubricante) y (iii) nanofluido como fluido). La [figura 1](#) (a) muestra la micrografía de un nanofluido con una gran cantidad de nanopartículas de Fe_3O_4 (Yu et al. 2010).

Por otro lado, un medio poroso se define como un material que consiste en una matriz sólida con vacíos conectados entre sí o poros que comúnmente están ocupados por un fluido. Los poros al estar conectados y saturados de fluido, permiten el flujo de éste a través del material (Kasaeian et al. 2017). La figura 1 (b) muestra la estructura de un medio poroso de matriz metálica o espuma metálica (Xu et al. 2015).



(a) micrografía de un nanofluido (Yu, et al. 2010)

(b) espuma metálica (Xu et al. 2019)

Figura 1. Esquema de un nanofluido y una espuma metálica.

Los medios porosos han tomado bastante interés durante las últimas décadas debido a su amplio rango de aplicaciones prácticas como en la producción de petróleo, enfriamiento de sistemas electrónicos, filtración, aislamiento térmico, agua subterránea y en todo tipo intercambiadores de calor. Esto es gracias a las cualidades únicas que caracterizan a este material como su alta conductividad térmica, baja densidad, buena resistencia mecánica y una gran área superficial. Por lo tanto, el flujo y el rendimiento térmico a través de un medio poroso son fundamentales para la implementación eficiente de este material multifuncional en la ingeniería térmica. Es por ello, que se debe prestar especial atención para el modelado de la conservación de momentum y energía (Xu et al. 2019; Kasaeian et al. 2017; Mahdi et al. 2015).

A partir del modelo continuo basado en el concepto volumen elemental representativo (r.e.v. por sus siglas en inglés) se define la velocidad de Darcy o velocidad de filtración (\mathbf{v}) como el promedio de la velocidad del fluido sobre un elemento de volumen que incorpora la parte sólida y al fluido del medio. Esta velocidad también se conoce como velocidad de filtración, velocidad superficial, densidad volumétrica de flujo. Asimismo, se define la velocidad intrínseca promedio (\mathbf{V}) como el promedio de la velocidad del fluido sobre un elemento de volumen que consiste únicamente de fluido del medio (Nield y Bejan, 2006). La velocidad de Darcy y la velocidad intrínseca promedio se relacionan mediante la aproximación de Dupuit-Forchheimer:

$$\mathbf{v} = \phi \mathbf{V} \quad (1.1)$$

donde φ es la porosidad del medio la cual se define como la fracción del volumen total que ocupan los poros. Así, $1 - \varphi$ será el espacio que ocupa la matriz sólida (Nield y Bejan, 2006).

La relación lineal entre la velocidad de Darcy y la caída de presión de un flujo a través de un medio poroso fue descubierta por Henry Darcy en 1856 y es conocida como la ley de Darcy o ecuación de Darcy:

$$u = -\frac{K}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.2)$$

donde $\partial P / \partial x$ es el gradiente de presión en la dirección del flujo y μ_f la viscosidad dinámica del fluido. El coeficiente K se define como la permeabilidad específica o permeabilidad intrínseca del medio la cual depende de la geometría de éste, pero es independiente de la naturaleza del fluido (Nield y Bejan, 2006).

Sin embargo, se han desarrollado diferentes modelos para describir el transporte de fluidos a través de un medio poroso como los de Darcy-Forchheimer y Brinkman; y al combinar ambos, se llega al modelo de Darcy-Brinkman-Forchheimer ya que la ecuación de Darcy está limitada en exactitud y en la aplicación de la condición de no deslizamiento, además de que, sólo es válida para flujos de baja velocidad, incompresibles e isotérmicos (Kasaeian et al. 2017; Mahdi et al. 2015).

El modelo de Darcy-Forchheimer también conocido como el modelo de Dupuit-Forchheimer extensión de la ley de Darcy o simplemente la ecuación de Forchheimer agrega un término no lineal a la ley de Darcy llamado el término de Forchheimer para ajustarse a datos experimentales, además de que define el efecto de arrastre de forma en el flujo (Nield y Bejan, 2006; Vafai, 2005).

$$\nabla P = -\frac{\mu_f}{K} \mathbf{v} - c_F K^{-1/2} \rho_f |\mathbf{v}| \mathbf{v} \quad (1.3)$$

donde c_F es un coeficiente adimensional de arrastre de forma, también conocido como el coeficiente de Forchheimer o coeficiente de inercia y se define como $c_F = b / \sqrt{a\varphi^3}$ donde a y b son constantes para parametrizar la geometría microscópica del medio y ρ_f es la densidad de fluido.

Con respecto al modelo de Brinkman, en su primera versión Brinkman agregó un término difusivo simplemente para satisfacer las especificaciones de frontera (Nield y Bejan, 2006; Vafai, 2005):

$$\nabla P = -\frac{\mu_f}{K} \mathbf{v} + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.4)$$

donde μ_{eff} se conoce como la viscosidad efectiva.

Finalmente, al combinar los modelos de Darcy-Forchheimer y Brinkman, se llega al modelo de flujo de Darcy-Brinkman-Forchheimer o también conocido como el modelo de Brinkman-Forchheimer extensión de Darcy (Vafai, 2005):

$$-\nabla P = \frac{\mu_f}{K} \mathbf{v} + \frac{C_F \rho_f}{K^{\frac{1}{2}}} |\mathbf{v}| \mathbf{v} - \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.5)$$

Asimismo, dependiendo del número de Reynolds basado en $K^{1/2}$ (Re_k), el régimen de un flujo en un medio poroso se divide en tres categorías: i) laminar ii) laminar no lineal (transición entre el flujo de Darcy en donde los efectos viscoso dominan, al flujo de Forchheimer en donde los efectos inerciales dominan, para un Re_k del orden de 10^2) y iii) turbulento (Nield y Bejan, 2006).

Para el caso de la energía, tomando un promedio sobre un elemento de volumen del medio tenemos, para la fase sólida:

$$(1 - \varphi)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \varphi) \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) + (1 - \varphi) q_s''' \quad (1.6)$$

Y para la fase fluida:

$$\varphi(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c_p)_f \mathbf{v} \cdot \nabla T_f = \varphi \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \varphi q_f''' \quad (1.7)$$

Aquí los subíndices s y f se refieren a las fases sólida y fluida respectivamente, c_p es el calor específico a presión constante del fluido, k es la conductividad térmica y $q''' [W/m^3]$ es la generación de calor por unidad de volumen. Sin embargo, si consideramos equilibrio térmico local haciendo $T_s = T_f = T$, obtenemos:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + q_m''' \quad (1.8)$$

donde

$$\begin{aligned} (\rho c)_m &= (1 - \varphi)(\rho c)_s + \varphi(\rho c_p)_f \\ k_m &= (1 - \varphi)k_s + \varphi k_f \\ q_m''' &= (1 - \varphi)q_s''' + \varphi q_f''' \end{aligned}$$

son, la capacidad térmica general por unidad de volumen, la conductividad térmica general y la generación de calor general por unidad de volumen del medio (Nield y Bejan, 2006).

Sumideros de calor

Por otra parte, los sumideros de calor se definen como un dispositivo que absorbe o disipa calor de los alrededores de forma efectiva mediante superficies extendidas o aletas. Por ello, tienen una amplia aplicación en sistemas de refrigeración, máquinas térmicas y en enfriamiento de sistemas térmicos, gracias a la efectividad con la que disipan el calor. Podemos encontrar distintos tipos de sumideros de calor dependiendo del tipo de aleta. Existen aletas de perfil rectangular, triangular, parabólico, radial, de alfiler, cónicas, parabólicas cóncavas por mencionar algunas. Asimismo, se pueden emplear múltiples aletas de enfriamiento para mejorar el rendimiento del sumidero de calor debido a que se incrementa su área superficial. A este tipo de configuración de aletas se le conoce como arreglo de aletas, siendo el arreglo de múltiples aletas de perfil rectangular la configuración más usada (Lee, 2011). En la [figura 2](#) se presenta un sumidero de calor en microcanales de múltiples aletas en donde W el ancho del arreglo, L es el largo del microcanal, H es la altura del microcanal, W_c es el espaciado entre aletas y h es el espesor de la pared del microcanal.

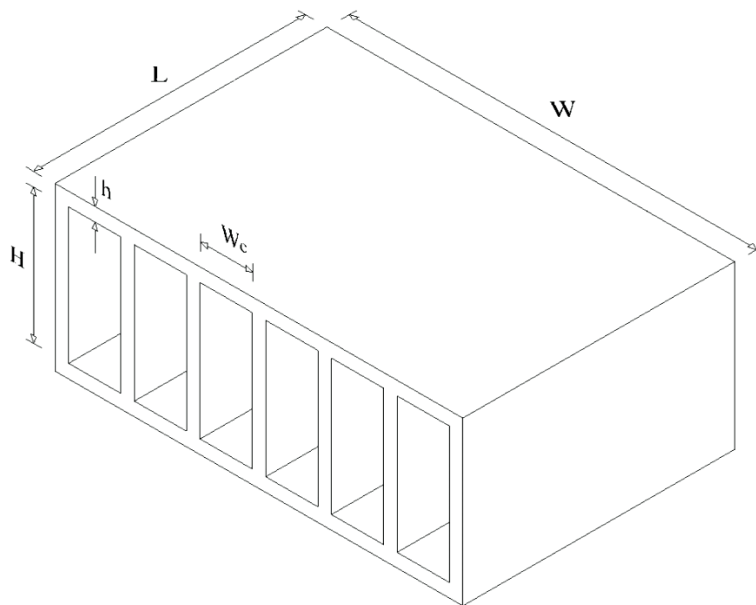


Figura 2. Arreglo de múltiples aletas de perfil rectangular.

Regímenes de flujo en microsistemas

En la escala micro, los microdispositivos se comportan de manera diferente. Las fuerzas inerciales tienden a ser muy pequeñas, mientras que los efectos de superficie como la fricción, la tensión superficial, fuerzas electroestáticas y fuerzas viscosas llegan a ser dominantes al momento de describir su comportamiento y se vuelven aún más importantes conforme el dispositivo se hace más pequeño. Este comportamiento diferente también se ve reflejado en la interacción con la superficie en microsistemas (Karniadakis, Beskok y Aluru, 2005).

Numero de Knudsen

El transporte de momentum y energía en un fluido ocurren debido a colisiones intermoleculares. La distancia que viajan estas moléculas entre colisiones se le conoce como la trayectoria libre media λ .

El número de Knudsen es la proporción entre el tamaño relativo de la trayectoria libre media λ y una longitud geométrica característica L que corresponde al tamaño del dominio del microflujo o una longitud en la cual ocurren grandes variaciones de una cantidad macroscópica.

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \quad (1.9)$$

Conforme el número de Knudsen se incrementa, los efectos enrarecidos se vuelven más importantes por lo que el flujo de calor, el esfuerzo cortante, la caída de presión y la correspondiente tasa de flujo másico no se pueden predecir de los modelos de flujo y transferencia de calor basados en la hipótesis del continuo. Por lo tanto, un modelo apropiado para el flujo y la transferencia de calor depende del rango del número de Knudsen. Los regímenes de flujo (tabla 1) dependen del número de Knudsen y se clasifican en: Flujo continuo, flujo de deslizamiento, flujo en transición y flujo libre molecular (Karniadakis et al. 2005; Yarin, Mosyak y Hetsroni, 2009).

Tabla 1. Clasificación del régimen de flujo en base al número de Knudsen (Yarin, Mosyak y Hetsroni, 2009).

Rango del número de Knudsen	Tipo de flujo
$Kn \leq 0.01$	El flujo puede ser considerado como un continuo (no hay efectos enrarecidos)
$0.01 < Kn < 0.1$	El flujo se encuentra en el régimen de deslizamiento y se puede modelar utilizando una teoría del continuo modificada que toman en consideración el deslizamiento de la pared
$0.1 < Kn < 10$	El flujo está en el régimen de transición entre deslizamiento de flujo y flujo molecular libre. Se trata estadísticamente utilizando, por ejemplo, la ecuación de Boltzmann.
$Kn \geq 10$	El flujo se considera como un flujo molecular libre. El movimiento individual de las moléculas debe modelarse y tratarse estadísticamente.

1.1.1 Mejoramiento del rendimiento de sistemas térmicos mediante nanofluidos y medios porosos

Se ha demostrado en diversos estudios que la implementación de nanofluidos puede mejorar significativamente la transferencia de calor en sistemas térmicos comparado con sistemas que utilizan fluidos convencionales. Los resultados de estos estudios reportan las siguientes características al emplear nanofluidos en sistemas térmicos (Alawi et al. 2015):

- Los nanofluidos poseen conductividades térmicas mayores comparados con los fluidos convencionales
- Existe una fuerte dependencia de la temperatura no lineal en la conductividad térmica efectiva
- Hay un mejoramiento o disminución de la transferencia de calor en flujos de una sola fase

Por otro lado, de acuerdo a Batthad et al. (2018) una forma de aumentar el rendimiento de un sistema de refrigeración es empleando nanofluidos como refrigerante o nanorefrigerantes y al hablar de nanorefrigerantes involucra el estudio de los fenómenos de transferencia de calor de ebullición y condensación debido al proceso de cambio de fase en el sistema. Algunos hechos importantes que entran en escena durante estos fenómenos son:

- Las nanopartículas en condiciones de aglomeración reducen el espesor de la capa límite debido a perturbaciones lo cual tiene como consecuencia la reducción de la resistencia térmica provocando un incremento en la tasa de transferencia de calor.
- Las nanopartículas absorben partículas líquidas provocando un aumento en la tasa de transferencia de calor.
- Las nanopartículas se depositan en las superficies de calentamiento y enfriamiento debido al proceso de condensación.
- Se incrementa la mojabilidad al incrementar la tensión superficial de la mezcla con la adición de nanopartículas teniendo como consecuencia un mejoramiento de la transferencia de calor.
- Para un máximo mejoramiento de las características de ebullición de los nanorefrigerantes se requiere un nivel óptimo de concentración.
- Se incrementa el punto de ebullición y se reduce el punto de congelamiento de los refrigerantes al mezclarlos con nanopartículas.
- Durante los procesos de ebullición y congelamiento las nanopartículas incrementan la tasa de transferencia de calor al añadir transferencia de calor conductiva y convectiva.
- Dependiendo de la concentración y tipo de nanopartículas la tasa de evaporación puede ser incrementada o reducida.

Otra manera de mejorar el rendimiento de los sistemas térmicos es mediante la implementación de medios porosos de alta conductividad térmica en los componentes relacionados con la transferencia de calor. Un medio poroso, provee una gran área superficial para la transferencia de calor entre el sólido y el fluido cuando un flujo fluye a través de él, por lo

tanto, un metal poroso puede trabajar como un tipo especial de aleta para la transferencia de calor superficial. Además, gracias al movimiento irregular de las partículas de fluido a través de la matriz porosa, hace que el fluido se mezcle de manera efectiva, lo cual promueve nuevamente la transferencia de calor. (Xu et al. 2019; Mahdi et al. 2015)

Recientemente, se ha optado por emplear tanto los nanofluidos como los medios porosos en sistemas térmicos para obtener mejores resultados en el rendimiento. Por un lado, la matriz porosa aumenta la superficie de contacto entre la fase líquida y la fase sólida y por otro lado, las nanopartículas dispersas en el fluido base aumentan la conductividad térmica del nanofluido (Kasaeian et al. 2017).

1.2 Antecedentes

1.2.1 Estudios sobre nanorefrigerantes con aplicación a sistemas de refrigeración

El estudio de las propiedades y sus efectos en la transferencia de calor de refrigerantes con suspensión de nanopartículas o nanorefrigerantes han sido el objeto de estudio de muchas investigaciones debido a los grandes beneficios que pudiera tener su uso en equipos térmicos como sistemas de refrigeración y aire acondicionado. Por ejemplo, Mahbul et al. (2015) realizaron un análisis térmico del rendimiento del nanorefrigerante $Al_2O_3/R134a$ y encontraron que al agregar un 5% de volumen de nanopartículas al refrigerante en un rango de temperaturas de entre 283-308 K se incrementaron la conductividad térmica, la viscosidad dinámica y la densidad del nanorefrigerante cerca del 28.58%, 13.08% y 11% respectivamente comparado con un refrigerante sin suspensión de nanopartículas. Además, el COP del sistema de refrigeración mostró un incremento del 15%, 3.2% y 2.6% para los valores de la conductividad térmica, densidad y calor específico, respectivamente en contraste con un refrigerante puro. Estas variaciones en las propiedades de los nanorefrigerantes se deben a varios factores. Para el caso de la conductividad térmica, la cual tuvo mayores efectos en el COP, observaron que se incrementó linealmente con el incremento de la temperatura debido a que las nanopartículas de Al_2O_3 poseen una alta conductividad térmica, el movimiento Browniano de las nanopartículas se intensifica y la contribución de la micro convección en la transferencia de calor aumenta (Mahbul et al. 2013).

Asimismo, Bi et al. (2011) analizaron experimentalmente el rendimiento de un refrigerador doméstico utilizando el nanorefrigerante $TiO_2/R600a$ como fluido de trabajo y encontraron que el rendimiento del refrigerador fue mayor. Sus resultados indican una reducción del 9.6% de energía utilizada al emplear 0.5 g/L $TiO_2/R600a$ de nanorefrigerante comparado con el refrigerante $R600a$ puro. Esta reducción de energía se debió a que al emplear nanopartículas en el refrigerante, la temperatura de evaporación se redujo teniendo como consecuencia temperaturas más bajas en los compartimientos de refrigeración de alimentos. Además, observaron que la velocidad de congelamiento del sistema con nanorefrigerante fue mayor comparada con el sistema con refrigerante puro. Por lo tanto, concluyeron que se pueden emplear el nanorefrigerante $TiO_2/R600a$ como fluido de trabajo y que puede operar normalmente y eficientemente en un ciclo de refrigeración.

Por su parte, Kumar y Elansezhian (2014) investigaron experimentalmente el rendimiento de un sistema de refrigeración por compresión de vapor usando el refrigerante R152a como fluido base y ZnO como nanopartículas. Para el experimento variaron las concentraciones de nanopartículas de ZnO en 0.1%v, 0.3%v y 0.5%v con un tamaño de partícula de 50 nm y 150 g de R152a. Sus resultados mostraron que el mejoramiento de la transferencia de calor en el sistema de refrigeración depende fuertemente de la concentración de nanopartículas llegando a una reducción del 21% en el consumo de energía para 0.5%v de nanopartículas. También, indicaron que la presión de succión y de descarga fue menores en un 10.5% con la implementación del nanorefrigerante, además, la temperatura del evaporador se redujo en un 6%. Por lo tanto, concluyeron que el nanorefrigerante ZnO/R152a puede trabajar normalmente y de forma segura en el sistema para reducir considerablemente el consumo de energía.

La [tabla 2](#) muestra un resumen de diferentes estudios sobre el rendimiento de sistemas de refrigeración al utilizar nanorefrigerantes. Los resultados de estas investigaciones indican que al implementar un nanorefrigerante a un ciclo de refrigeración, hay un aumento en la capacidad de congelamiento y una reducción en la presión de descarga y en el consumo de energía, lo que se traduce en un incremento en el COP.

Tabla 2. Investigaciones sobre el rendimiento de sistemas de refrigeración utilizando nanorefrigerantes (adaptada de Batthad et al. 2018).

Autor	Nanorefrigerante	Resultado
Bi et al. (2011)	$TiO_2/R600a$ ($\phi = 0,0.1,0.5$ g/L, D=50 nm)	Se mejoró el rendimiento del refrigerador comparado con un sistema con R600 puro, con 5.94% menos de energía utilizada y un mejoramiento del 9.6% de tasa de congelamiento.
Subramani y Prakash (2011)	$Al_2O_3/R134a$ (tamaño<50nm, $\phi = 0.06\%$ en peso)	Se incrementó la capacidad de congelamiento y el consumo de potencia se redujo en 25%.
Kumar y Elansezhian (2014)	$ZnO/R152a$ (D = 40 nm, $\phi = 0.1-0.5\%$ v)	La presión de descarga se redujo y el COP del sistema se incrementó hasta 3.56 al 0.5%v de partículas. La potencia se redujo en un 21%.
Mahbubul et al. (2015)	$Al_2O_3/R134a$ ($T_f=283-308$ K, $\phi = 0.5\%$ v)	El COP se incrementó hasta un 15%.
Soliman et al. (2015)	$Al_2O_3/R143a$ ($\phi = 0.1\%$ en peso, tamaño<50nm)	El rendimiento se incrementó en un 10.5% con 13.5% menos de consumo de energía.

1.2.2 Estudios sobre medios porosos con aplicación a sistemas de refrigeración

El uso de medios porosos en equipos relacionados con la transferencia de calor como los evaporadores y condensador en un ciclo de refrigeración resultan atractivos para mejorar su eficiencia. Gracias a características como la alta conductividad térmica, bajo peso y gran superficie específica, las espumas metálicas resultan excelentes para el mejoramiento de la transferencia de calor (Xu et al. 2019).

En el estudio de Tarawneh et al. (2019) analizaron experimentalmente los efectos de sobrecalentamiento en el rendimiento de un sistema de refrigeración por compresión de vapor utilizando diferentes mezclas de refrigerantes en un medio poroso. Sus resultados muestran un incremento en el porcentaje de la capacidad de evaporación del 144%, 168%, 146.3% y 161.5% para refrigerantes R-407c, R-22, R-404a y R-422a respectivamente, con un grado de sobrecalentamiento de 16°C y una porosidad en el evaporador del 40% comparado con un sobrecalentamiento de 6°C y un evaporador sin medio poroso. Para el medio poroso utilizaron esferas de acero inoxidable de diferentes diámetros para variar la porosidad del evaporador. Al variar la porosidad en el evaporador de 45% a 40% encontraron un mayor COP a la menor porosidad. Sin embargo, sostienen que se deben evitar altos grados de sobrecalentamiento del refrigerante ya que podría provocar un sobrecalentamiento en el compresor, conduciendo a la reducción de su vida útil.

Por su parte, Alomar et al. (2018) desollaron una investigación numérica del proceso completo de evaporación de agua dentro de un evaporador poroso. Sus resultados muestran que la porosidad tiene un efecto menor en los procesos de iniciación y terminación de cambio de fase, mientras que la conductividad térmica de la fase sólida, el número de Darcy, el número de Reynolds y el flujo de calor impuesto en el evaporador influyen fuertemente. Por lo tanto, mencionan que se requieren tanto las propiedades del medio poroso como las condiciones de operación del medio para que sea apropiadamente diseñado con el fin de alcanzar un objetivo concreto que vendría siendo el aumento en la eficiencia de sistemas térmicos.

Asimismo, Xia et al. (2017) estudiaron de forma experimental la transferencia de calor por convección de un flujo de aire que fluye hace un dispositivo tubular lleno de espumas porosas de Cu, Ni, y SiC con diferentes diámetros de poro y de alta porosidad de 0.87 a 0.97. Para ello, la muestra estudiada fue calentada transitoriamente por un flujo de aire caliente con una velocidad de entrada variando de 2.0 m/s a 9.0m/s. Sus resultados mostraron que el coeficiente volumétrico de transferencia de calor se redujo conforme la porosidad se incrementaba y se aumentó conforme el número de poros por pulgada se incrementaba.

1.2.3 Estudios sobre el transporte de nanofluidos en medios porosos

A pesar de que las espumas metálicas son excelentes para la transferencia de calor gracias a sus propiedades térmicas, se ven limitadas por la capacidad reducida para conducir el calor de la mayoría de los fluidos de trabajo lo cual restringe el mejoramiento de su rendimiento térmico. Es por eso que la implementación de nanofluidos con nanopartículas de alta conductividad térmica resulta ser una solución viable para la creación de sistemas térmicos más eficientes (Xu et al. 2019).

Existen diferentes investigaciones que estudian el transporte de nanofluidos a través de medios porosos ya que se obtienen las ventajas de ambos tales como una mayor conductividad térmica y una mayor área de contacto para una mejor transferencia de calor. Por ejemplo, Groşan et al. (2015) estudiaron la convección natural en estado estacionario en dos dimensiones de una cavidad porosa cuadrada saturada del nanofluido Cu/Agua, además, en el análisis incluyeron la generación de calor interna. También, analizaron los efectos de parámetros como el número de Rayleigh, el número de Lewis, y la relación adimensional entre los coeficientes termoforético y Browniano, en la velocidad, temperatura, concentración de nanopartículas y en los números de Nusselt y Sherwood. Sus resultados muestran que hay una reducción de la temperatura al agregar nanopartículas al fluido del medio poroso y un mejoramiento de la transferencia de calor cuando el valor de la conductividad térmica de las nanopartículas es mucho más grande que la conductividad térmica de la fase sólida del medio poroso. No obstante, afirman que cuando los valores de la conductividad térmica de las nanopartículas y de la fase sólida del medio poroso tienen valores cercanos este aumento de la transferencia de calor no tiene efectos en el flujo ni en sus características.

Otra investigación acerca de nanofluidos y medios porosos fue realizada por Sheremet y Pop (2015). En este estudio ellos analizaron numéricamente la convección natural del flujo y la transferencia de calor dentro de un anulo concéntrico horizontal repleto de un medio poroso y saturado del nanofluido Cu/Agua. El modelo matemático fue resuelto numéricamente por el método de diferencias finitas. Asimismo, analizaron los efectos de varios parámetros como el número de Rayleigh, la porosidad del medio, la proporción del radio del anulo y la matriz sólida del medio poroso en la variación del número de Nusselt promedio (Nu_{prom}). Sus resultados muestran que el Nu_{prom} tuvo una reducción a medida que se incrementaba la porosidad del medio poroso.

Asimismo, Alsabery et al. (2015) investigaron numéricamente la convección natural en una cavidad trapezoidal llenada parcialmente con una capa porosa de nanofluidos y una capa fluida de un fluido no newtoniano. Para ello, utilizaron el método de volumen finito para resolver las ecuaciones de conservación sobre un amplio rango de parámetros como el número de Rayleigh ($Ra = 10^5$ y $Ra = 10^6$), el número de Darcy ($10^{-5} \leq Da \leq 10^{-1}$), la fracción de volumen de nanopartículas ($0 \leq \phi \leq 0.2$) y el espesor de la capa porosa ($0.3 < S \leq 0.7$). Sus hallazgos mostraron que la convección se incrementó notablemente al agregar un nanofluido con agua como fluido base y nanopartículas de plata.

La [tabla 3](#) muestra algunos estudios sobre el transporte de nanofluido a través de un medio poroso para distintas geometrías y diferentes nanofluidos en distintas concentraciones. En la mayoría de los estudios se observó que el número de Nusselt depende de distintos parámetros como el número de Rayleigh, la porosidad del medio poroso, la fracción volumétrica de nanopartículas y la relación de flotabilidad.

Por lo tanto, como se pudo observar de la [tabla 3](#), hay una gran cantidad de investigaciones que involucran tanto a los nanofluidos como a los medios porosos para casos específicos. Sin embargo, existe una limitada cantidad de estudios que estén directamente aplicados a sistemas de refrigeración y que utilicen medios porosos en sus componentes y nanofluidos como fluidos de trabajo para mejorar su rendimiento térmico.

Tabla 3. Resumen de algunos estudios sobre el flujo de nanofluidos en medios porosos (adaptada de Kasaeian et al. 2017).

Autor	Geometría	Nanofluido	Resultado
Sheremet et al. (2015)	Cavidad cuadrada	Cu/Agua (0.1-0.7% en peso)	El Nu_{prom} mejora con Ra y se reduce con la porosidad del medio poroso.
Zargartalebi et al. (2015)	Placa horizontal	Al_2O_3 /Agua (1.0,2.1,3.4,4.7 % vol)	El número de Nusselt reducido disminuye a medida que se incrementa la relación de flotabilidad.
Grosan et al. (2015)	Cavidad cuadrada	Cu/Agua	La adición de partículas mejora la transferencia de calor en el medio poroso.
Ghalambaz et al. (2015)	Paralelográfica	Cu/Agua	La adición de nanopartículas mejora la transferencia de calor en la matriz.
Sheremet y Pop (2015)	Cilindro horizontal	Cu/Agua (2,5% vol)	El Nu_{prom} se reduce con el incremento de la porosidad del medio poroso.
Alsabery et al. (2015)	Cavidad trapezoidal	Plata/Agua	La transferencia de calor por conducción dentro de la pared estuvo influenciada por la permeabilidad de la capa porosa.

1.2.4 Estudios sobre el flujo y la transferencia de calor de sumideros de calor en microcanales

Desde el primer estudio sobre sumideros de calor en microcanales realizado por Tuckerman y Pease (1981) este dispositivo ha sido el objeto de estudio de muchas investigaciones gracias a su gran capacidad de disipar el calor en superficies pequeñas. Con la creciente generación de calor de los dispositivos electrónicos más modernos y a su vez con la tendencia a reducir su tamaño, resulta necesario buscar maneras efectivas para mejorar su rendimiento térmico.

Jang y Choi (2006) estudiaron numéricamente el efecto en el rendimiento de un sumidero de calor en microcanales empleando nanofluidos como fluido base con partículas de Cu en agua de $D = 2 \text{ nm}$ y con partículas de diamante en agua de $D = 2 \text{ nm}$. Sus resultados indicaron que el rendimiento de enfriamiento del sumidero de calor mejoró aproximadamente en un 10% comparado con un sumidero de calor con agua como fluido de trabajo.

Por otro lado, Hung, Huang y Yan (2013) compararon de manera numérica distintas configuraciones de medios porosos en sumideros de calor en microcanales. Las distribuciones fueron de forma rectangular, con ampliación en la salida, trapezoidal, rectangular delgada, en bloques y en sándwich. Sus resultados indican que el rendimiento térmico del sumidero de calor puede mejorarse al utilizar las configuraciones con medios porosos en los microca-

nales, además, mencionan que también puede ser incrementado a grandes número de Reynolds. Finalmente, concluyeron que las distribuciones en sándwich y trapezoidal fueron las que tuvieron mayor eficiencia térmica y mayor rendimiento de enfriamiento, sin embargo, si se considera el rendimiento térmico junto con la caída de presión, obtuvieron que la distribución en sándwich fue el mejor diseño entre las otras configuraciones. Esto evidencia que al variar la cantidad de medio poroso, su distribución y la ausencia o presencia en dispositivos térmicos puede mejorar en gran medida la eficiencia que si solo se tratase de un medio poroso uniforme a lo largo del microcanal.

Baek, Radebaugh y Bradley (2020) estudiaron de manera numérica y experimental el problema conjugado de transferencia de calor al evaluar el efecto de la conducción axial en la pared del microcanal para validar la teoría que predice que el número de Nusselt es independiente del número de Reynolds en el régimen de flujo laminar para microcanales. Por un lado, utilizaron un modelo numérico para simular la transferencia de calor en el microcanal con conducción en la pared y para predecir la diferencia de la temperatura en la pared a diferentes distancias. Por otro lado, midieron experimentalmente la diferencia de temperatura en un microcanal con un diámetro hidráulico de $160\mu m$. Finalmente, sus resultados mostraron que el número de Nusselt en el régimen de flujo laminar para el microcanal es independiente del número de Reynolds para valores menores a $Re = 300$.

Gaikwad, Mondal y Wongwises (2017) analizaron la generación de entropía en un flujo de fluido viscoso disipativo Newtoniano a través de un microcanal hiperporoso formado entre dos placas paralelas, tomando en cuenta los efectos no lineales del arrastre de Forchheimer y de la transferencia de calor conjugada. Para observar los cambios en la energía disponible del sistema, variaron la constante de Forchheimer, el número de Darcy, la porosidad del medio, y en la pared superior, el espesor, el número de Biot y la conductividad como se indica en la [tabla 4](#). Sus resultados indican que el gradiente de temperatura a través del fluido y la pared del microcanal además del cambio en la temperatura del fluido debido al calor disipativo generado por el arrastre no lineal en el flujo, alteran la tasa de transferencia de calor.

La [tabla 4](#) resume algunas investigaciones realizadas sobre sumideros de calor en microcanales y los parámetros principales utilizados para su análisis.

Tabla 4. Algunos estudios sobre sumideros de calor en microcanales.

Autor	Parámetros	Resultado
Qu y Mudawar (2002a)	$W_c = 231 \mu m$ $L = 44.764 mm$ $H = 713 \mu m$ $Re \sim 139 - 1672$	Las ecuaciones convencionales de Navier-Stokes y la ecuación de la energía pueden predecir con exactitud el flujo y la transferencia de calor en un sumidero de calor en microcanales de estas dimensiones.
Chein y Huang (2005)	$h = W_c = 100 \mu m$ $L = 300 \mu m$ $h = W_c = 57 \mu m$ $L = 365 \mu m$	Se incrementó el rendimiento en gran medida al utilizar nanopartículas de Cu .

Jang y Choi (2006)	$H = 350 \mu m$ $A_r = 8.6$ $Re \sim 100$ $q'' = 1350 W/cm^2$	Se incrementó el rendimiento de enfriamiento en aproximadamente 10% al utilizar nanopartículas de Cu y diamante.
Wan et al. (2011)	$L \times H = 9 mm \times 3 mm$ $\phi = 0.66$ $K = 2.47E - 10 m^2$ $q'' = 500 W/cm^2$ $u = 0.5 m/s$	Al incrementar la velocidad del líquido puede mejorar el coeficiente promedio de transferencia de calor. El dispositivo puede disipar flujo extremos de calor de hasta $500 W/cm^2$ al implementar medios porosos.
Hung, Huang y Yan (2013)	$L = 0.01 m$ $H = 0.009 m$ $Re \sim 45 - 1350$ $\epsilon = 6.25$ $\phi = 0.66$ $K = 2.47E - 10 m^2$ $q'' = 1E + 6 W/m^2$ $u_m = 2.257 m/s$	La distribución en sándwich obtuvo los mejores resultados en términos de la eficiencia térmica y del rendimiento de enfriamiento si se considera la caída de presión a lo largo del microcanal.
Gaikwad, Mondal y Wongwises (2017)	$cF \sim 5 - 15$ $Da \sim 0.1 - 10$ $\phi \sim 0.4 - 0.6$ $Bi \sim 2 - 4$ $u_m \sim 50 - 100 \mu m/s$ $H \sim 100 \mu m$ $Pe \sim 10^{-2} - 10^{-3}$	La transferencia de calor se vio afectada por el gradiente de temperatura en el fluido y la pared y al cambio en la temperatura en el fluido debido al calor generado por el arrastre de Forchheimer.
Baek, Radebaugh y Bradley (2020)	$L = 90 mm$ $D_{int} = 160 \mu m$ $Re \sim 71 - 2014$ $Re \sim 56 - 1824$ $T \sim 77K - 400K$	Al evaluar el efecto de la conducción axial en la pared del microcanal se muestra que el Nu en el régimen laminar para microcanales es independiente del Re para valores menores a $Re = 300$.

1.2.5 Estudios sobre el flujo y la transferencia de calor en dispositivos térmicos porosos con permeabilidad variable

Degan, Vasseur y Bilgen (1994) estudiaron analíticamente la transferencia de calor convectiva en una cavidad rectangular porosa saturada de fluido. Asumieron al medio poroso hidrodinámicamente y térmicamente anisotrópico. Para la permeabilidad del medio poroso, consideraron que la dirección principal está orientada en la dirección oblicua al vector de gravedad, mientras que para la conductividad térmica, consideraron que coincide con los ejes coordenados vertical y horizontal. Por otro lado, las paredes verticales de la cavidad fueron calentadas y enfriadas por un flujo de calor constante respectivamente, mientras que las paredes horizontales las consideraron adiabáticas. Sus resultados indican que tanto la relación de permeabilidad como la inclinación del eje principal tienen una fuerte influencia en la

transferencia de calor por convección en un medio poroso anisotrópico. Por lo tanto, encontraron la máxima tasa de transferencia de calor si la matriz porosa está orientada con sus ejes principales con alta permeabilidad paralelos a la dirección vertical. Asimismo, hallaron una alta intensidad de flujo pero una transferencia de calor menor en relaciones de conductividad térmica grandes.

Por otro lado, Kuznetsov y Nield (2001) investigaron analíticamente los efectos en la convección forzada de la heterogeneidad de la permeabilidad y la conductividad térmica en un canal de placas paralelas y en un ducto circular poroso divididos en 3 capas con distintos valores de permeabilidad y de conductividad térmica. Así, definieron a la permeabilidad del medio K y a la conductividad térmica k que fueran no uniformes en el espacio y asumieron que tanto K como k fueran funciones únicamente de la coordenada vertical. Sus resultados muestran una dependencia del número de Nusselt con la variación de la permeabilidad, tendiendo a incrementarse el Nu conforme la relación de permeabilidad entre capas se incrementaba. Asimismo, encontraron una variación del Nu al variar la conductividad térmica, pero en general, hallaron un valor máximo y una reducción del Nu como consecuencia del efecto de la heterogeneidad.

Por su parte, Hu et al. (2017) simularon el flujo y la transferencia de calor en un medio poroso hidrodinámicamente y térmicamente anisotrópico en la escala del volumen elemental representativo (r.e.v. por sus siglas en inglés) mediante el modelo de Lattice Boltzmann de tiempo de relajación múltiple. Sus resultados numéricos indican que se pueden producir grandes tasas de transferencia de calor al emplear un medio poroso anisotrópico con algunos parámetros óptimos como el número de Darcy, la relación de conductividad térmica entre fluido y sólido y el ángulo de inclinación, si es comparado con un medio poroso isotrópico.

Asimismo, Alomar et al. (2019) estudiaron numéricamente el flujo en dos fases a través de un evaporador poroso pero para este caso consideraron un medio poroso anisotrópico. Sus resultados muestran que la anisotropía de la permeabilidad y la conductividad térmica de la fase sólida tienen efectos significativos en la iniciación y terminación del proceso de cambio de fase. Además, sostienen que hay efectos significativos en el comportamiento del flujo y en la tasa de transferencia de calor debido a las propiedades anisotrópicas del medio poroso comparado con un medio poroso isotrópico. También, mencionan que el efecto de la conductividad térmica de la fase sólida es un parámetro importante a considerar para diseñar un evaporador poroso.

Por otro lado, Maghsoudi y Siavashi (2018) buscaron optimizar la convección mixta del nanofluido Cu-agua en una cavidad porosa heterogénea. Las paredes horizontales las consideraron adiabáticas y móviles y las paredes verticales fueron expuestas a una temperatura fría y caliente. Asimismo, consideraron al diámetro del poro en diferentes regiones de la cavidad como una variable decisiva para el proceso de optimización. Sus resultados indican que para flujos en los cuales domina la convección, el medio poroso heterogéneo optimizado pudo mejorar la transferencia de calor en hasta 8.3%.

En la [tabla 5](#) se resumen algunos estudios sobre el flujo y la transferencia de calor a través de medios porosos con distintos enfoques para analizar la permeabilidad en el medio, ya sea permeabilidad heterogénea o permeabilidad anisotrópica y sus consecuencias en la transferencia de calor.

Tabla 5. Estudios sobre el flujo y la transferencia de calor en medios porosos con permeabilidad variable.

Estudio	Enfoque	Resultado
Kuznetsov y Nield (2001)	Permeabilidad heterogénea	Hay una dependencia del Nu con la variación de la permeabilidad.
Hu et al. (2017)	Permeabilidad anisotrópica	Se puede producir una gran tasa de transferencia de calor al emplear un medio poroso anisotrópico.
Maghsoudi y Siavashi (2018)	Permeabilidad heterogénea	Para flujos en los cuales domina la convección, el medio poroso heterogéneo optimizado pudo mejorar la transferencia de calor en hasta 8.3%.
Alomar et al. (2019)	Permeabilidad anisotrópica	La anisotropía de la permeabilidad es relevante en la iniciación y terminación del proceso de cambio de fase.

1.2.6 Antecedentes directos

El estudio del transporte de masa y la transferencia de calor en medios porosos es fundamental en distintas áreas de la ingeniería como en la producción de petróleo, filtración, refrigeración de sistemas electrónicos, aislamientos térmicos y en cualquier intercambiador de calor en general (Xu et al. 2019; Kasaeian et al. 2017; Mahdi et al. 2015).

Una simplificación habitual a la hora de analizar la transferencia de calor entre las paredes de un ducto calentadas desde el exterior y un fluido al interior del ducto, es considerar que el flujo de calor está calentando directamente al fluido. Suponer que el material sólido posee una conductividad térmica grande, o desde otro punto de vista, suponer que las paredes del ducto son infinitamente delgadas tiene como objetivo simplificar el análisis de la conducción de calor en las paredes. No obstante, esta simplificación se aleja de la realidad y conlleva una pérdida de exactitud. Es por esto, que algunos autores han señalado la importancia de tomar en cuenta el efecto de la transferencia de calor conjugada en las paredes. Por ejemplo, Qu y Mudawar (2002b) investigaron el flujo de un fluido en tres dimensiones y la transferencia de calor en un sumidero de calor rectangular en microcanales tomando en cuenta el efecto de la transferencia de calor conjugada. Ellos encontraron que la mayor temperatura se encontró en la base del sumidero de calor a la salida del microcanal. También, hallaron que al aumentar la conductividad térmica del substrato sólido, la temperatura en la base calentada del sumidero de calor se reducía. Finalmente, concluyeron que el método clásico para analizar aletas provee un sencillo análisis para modelar la transferencia de calor en microcanales, sin embargo, señalan que algunas suposiciones claves propias del método provocan que el caso estudiado se aleje de la realidad significativamente por lo que tomar en cuenta el efecto de la transferencia de calor conjugada es primordial en el análisis de sumideros de calor en microcanales. En particular, Qu y Mudawar (2002a), Gaikwad et al. (2017) y Baek, Radebaugh y Bradley (2020) han encontrado en sus resultados la importancia de considerar el

efecto conjugado de la transferencia de calor para analizar sumideros de calor en microcanales.

Por otro lado, en el análisis de la conservación de la energía en sumideros de calor, es común despreciar el efecto de la conducción de calor longitudinal. Si suponemos que tenemos una fuente de calor en una de las paredes de un intercambiador de placas paralelas, el término transversal de conducción de calor es mucho más relevante que el término longitudinal, esto se debe principalmente por la dirección del flujo de calor de la fuente. Sin embargo, varios autores han demostrado que para ciertos casos, no es conveniente despreciar el término de la conducción de calor longitudinal en las paredes. Por ejemplo, Luna y Méndez (2005) describieron el proceso de la transferencia de calor conjugada en estado estacionario entre una placa calentada desde la base por un flujo de calor constante en un medio poroso no darciniano y la convección forzada de un flujo hidrodinámicamente desarrollado. Ellos definieron una relación de aspecto ϵ y un parámetro conjugado α_c el cual describe la importancia de la conducción de calor longitudinal a través de la placa. De este modo, encontraron que el efecto de la conducción de calor longitudinal está fuertemente influenciado por estos dos parámetros en el régimen de la placa térmicamente delgada ($\alpha_c/\epsilon^2 \gg 1$). Uno de sus resultados indicó que el perfil de temperatura en función de la coordenada longitudinal cambió significativamente para diferentes valores del parámetro alfa ($\alpha_c = 0.5, 1.0$ y 5.0). Asimismo, otros autores han estudiado la importancia de considerar los efectos de la conducción de calor longitudinal en intercambiadores de calor de placas y tubos y sus consecuencias en el rendimiento térmico (Ranganayakulu, Seetharamu, y Sreevatsan, 1997; Ciofalo, 2007).

Como se observó en los diferentes estudios resumidos en la [tabla 5](#), surgen distintas implicaciones al considerar a la permeabilidad de un medio poroso como variable. Entre las principales se encuentra que existe una fuerte dependencia entre la permeabilidad y la transferencia de calor y que en resumidas cuentas, la transferencia de calor tiende a mejorar al variar la permeabilidad del medio. Así, resulta conveniente analizar intercambiadores de calor porosos con permeabilidad variable, dadas las ventajas que conllevaría considerar a la permeabilidad de esa manera. Distintos estudios han propuesto modelos de permeabilidad variable para analizar fenómenos que se presentan en dispositivos de transferencia de calor. Por ejemplo, Rees y Pop (2000) propusieron un modelo de permeabilidad exponencial para analizar la convección libre vertical de una superficie plana calentada con temperatura uniforme y un fenómeno conocido como *channeling effect* que se presenta cuando un medio poroso es rodeado por una superficie impermeable y el cual consiste en un incremento de la porosidad y permeabilidad cerca de la superficie. Sin embargo, Murthy y Feyen (1989) propusieron un modelo de permeabilidad cuadrático para analizar la dispersión de solutos que reaccionan químicamente y por su parte Ciriello et al. (2013) asumieron un modelo potencial de permeabilidad variable para analizar la propagación de corrientes de gravedad delgada en medios porosos. Por consiguiente, existe un gran campo de investigación en diferentes ramas del conocimiento relacionada a los medios porosos con permeabilidad variable incluida la transferencia de calor de sumideros de calor en microcanales.

Por lo tanto, para esta investigación se considerará el efecto de la transferencia de calor conjugada entre las paredes y un medio poroso de permeabilidad variable de un microcanal. Asimismo, se estudiarán los efectos del término de conducción de calor longitudinal en las paredes y se analizarán los casos donde es necesario considerarlo ya que por el simple hecho de suponer que las paredes del microcanal poseen un espesor y una conductividad finita, los términos longitudinal y transversal de conducción de calor toman relevancia en el análisis.

1.3 Objetivo

Analizar la transferencia de calor de un fluido newtoniano que circula a través de un microcanal poroso variando la permeabilidad del medio y considerando el efecto de la transferencia de calor conjugada en las paredes del microcanal.

2 Planteamiento del problema

2.1 Modelo físico

Se considera el transporte de un fluido newtoniano unidireccional completamente desarrollado a través de un microcanal poroso. El microcanal está calentado de forma simétrica por un flujo de calor constante q'' y bajo la influencia de un gradiente de presión constante como se muestra en la [figura 3](#). Asimismo, el microcanal está formado entre dos placas paralelas a una distancia H , de longitud L y ancho W_c . Además, las paredes del microcanal poseen un espesor h por lo que se analizará el flujo de calor por conducción en las paredes. También, las propiedades termofísicas del fluido se considerarán como constantes y se supondrá equilibrio térmico local ($T_f = T_s = T$) para este problema.

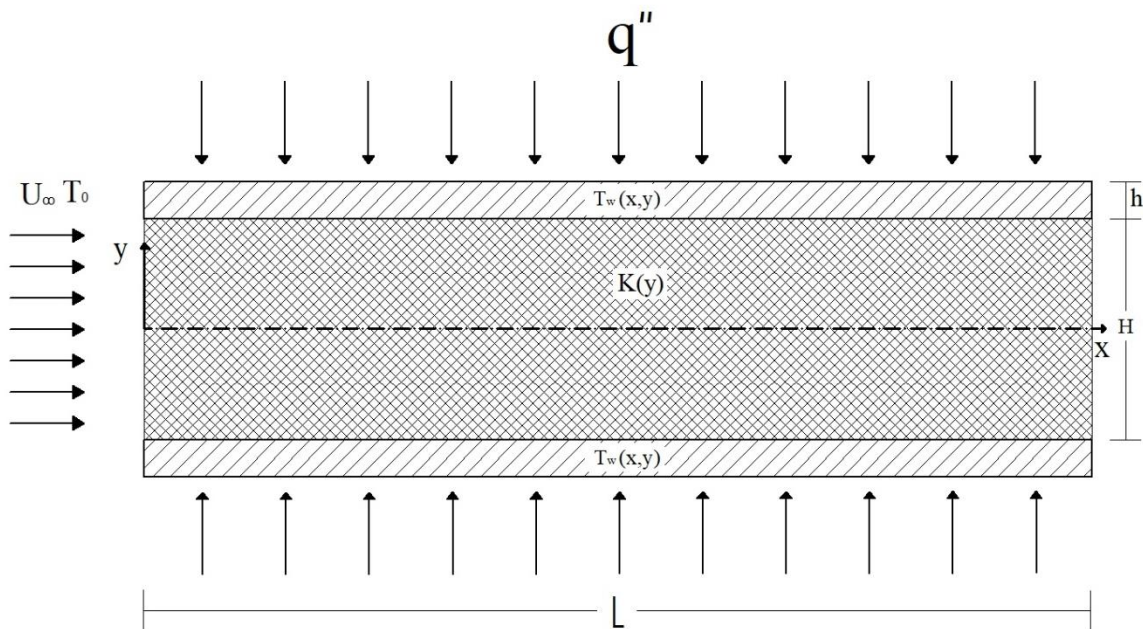


Figura 3. Representación esquemática del microcanal poroso formado entre dos placas paralelas a una distancia H .

2.1.1 Ecuación de conservación de momentum

Para el análisis del problema se consideró la ecuación de Brinkman para la conservación de momentum en medios porosos (ecuación (1.4)). Para un flujo incompresible, laminar, completamente desarrollado, unidireccional y con permeabilidad variable resulta:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu_{eff} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu_f}{K(y)} u \quad (2.1)$$

donde $K(y) = K_0 f(y)$, siendo K_0 una permeabilidad de referencia y $f(y)$ una función de permeabilidad conocida. Para este problema, $\mu_{eff} = \mu_f / \phi$ (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995). Además, los efectos inerciales y de arrastre de forma de Forchheimer no fueron tomados en consideración debido a que $Da < 10^{-2}$ lo que quiere decir que la permeabilidad del medio es baja y entre menor sea la permeabilidad, los efectos inerciales se reducirán (Vafai y Tien, 1981).

Asimismo, fuera de la capa límite hidrodinámica a la entrada del microcanal, se debe satisfacer la siguiente ecuación (Vafai y Kim, 1989):

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu_f}{K} U_\infty - \frac{\rho_f c_F \phi U_\infty^2}{\sqrt{K}} \quad (2.2)$$

Sin embargo, para este estudio nuevamente no se incluirá el término inercial (tercer término del lado derecho de la ecuación (2.2)) y se considerará a la permeabilidad como una función de y , por lo que resulta:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu_f}{K(y)} U_\infty \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) nos dice que el gradiente de presión no es constante al depender de la permeabilidad variable $K(y)$ pero es conocido. Al sustituir la ecuación (2.3) en la ecuación (2.1) finalmente obtenemos:

$$\mu_{eff} \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\mu_f}{K(y)} (u - U_\infty) \quad (2.4)$$

2.1.2 Ecuación de conservación de la energía

Para este problema, se utilizó la ecuación de conservación de la energía considerando equilibrio térmico local en el medio poroso (ecuación (1.8)). En este caso se incluyen los efectos viscosos, se asumen a las propiedades termofísicas como constantes y se considera al campo de temperaturas que varía en las direcciones transversal y longitudinal, dando como resultado:

$$\rho_f c_p u \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_{eff} \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (2.5)$$

Aquí, Φ es el término de disipación viscosa y se define como (Salama et al. 2013):

$$\Phi = \mu_{eff} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{\mu_f u^2}{K(y)} \quad (2.6)$$

Nuevamente, para el término de la disipación viscosa, no se consideró el término de Forchheimer debido al valor del Da . Por lo tanto, si sustituimos la ecuación (2.6) en la ecuación (2.5) obtenemos la ecuación de la energía para este estudio:

$$\rho_f c_p u \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_{eff} \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right) + \mu_{eff} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{\mu_f u^2}{K(y)} \quad (2.7)$$

Finalmente, para incluir el efecto de la transferencia de calor conjugada suponiendo que hay transferencia de calor por conducción a través de las paredes del canal por tener un espesor finito h , es necesario considerar la ecuación de la energía en las paredes o ecuación de difusión:

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

donde T_w es la temperatura en las paredes del microcanal.

2.1.3 Condiciones de frontera

Para la ecuación de conservación de momentum (ecuación (2.4)) tenemos la condición de no deslizamiento (ecuación (2.9)) y la condición de simetría (ecuación (2.10)):

$$u|_{y=H/2} = 0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.10)$$

Para la ecuación de conservación de la energía (ecuación (2.7)) tenemos la condición de simetría para la temperatura (ecuación (2.11)), la temperatura a la entrada (ecuación (2.12)) y la condición de salida la cual garantiza que a la salida del microcanal, el perfil de temperatura se encuentra completamente desarrollado (ecuación (2.13)):

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.11)$$

$$T_f|_{x=0} = T_0 \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.13)$$

Finalmente, para la ecuación de difusión en las paredes (ecuación (2.8)) tenemos la continuidad de temperatura en la interface sólido-líquido (ecuación (2.14)), el flujo de calor en la interface sólido-líquido (ecuación (2.15)), la condición adiabática (ecuación (2.16)) y el flujo de calor en la superficie exterior del microcanal (ecuación (2.17)):

$$T_f|_{y=H/2} = T_w|_{y=H/2} \quad (2.14)$$

$$k_{eff} \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=H/2} = k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=H/2} \quad (2.15)$$

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial x} \right|_{x=0,L} = 0 \quad (2.16)$$

$$q'' = k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=(H/2+h)} \quad (2.17)$$

donde las ecuaciones (2.14) y (2.15) son a su vez las mismas condiciones de frontera para la ecuación de conservación de la energía en el fluido para la coordenada transversal.

2.2 Adimensionalización del modelo físico

Ecuación de momentum

Para la adimensionalización de la ecuación de conservación de momentum, se utilizaron los siguientes parámetros adimensionales: $\eta = y/(H/2)$; $u^* = u/U_\infty$. Al sustituir los parámetros anteriores en la ecuación (2.4), se obtiene la siguiente ecuación de momentum en su forma adimensional:

$$\frac{d^2 u^*}{d\eta^2} = \frac{Da^{-1}(u^* - 1)}{F(\eta)} \quad (2.18)$$

donde $Da = K_0/\varphi(H/2)^2$ es el número de Darcy basado en una permeabilidad de referencia K_0 y $F(\eta)$ es una función de permeabilidad variable adimensional. Asimismo, las condiciones de frontera adimensionales para la ecuación (2.18) están dadas por:

$$u^*|_{\eta=1} = 0 \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{du^*}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (2.20)$$

Ecuación de la energía

Por otra parte, para adimensionalizar la ecuación de conservación de la energía (ecuación (2.7)) se utilizaron los siguientes parámetros adimensionales: $\chi = x/L$; $\theta_f = (T_f - T_0)/\Delta T_f$; $\Delta T_f = q''(H/2)/k_{eff}$ donde ΔT_f se obtuvo al realizar el análisis de orden de magnitud del flujo de calor uniforme en el fluido ($q'' \sim k_{eff}\Delta T_f/(H/2)$). Al utilizar los parámetros anteriores y ordenar los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$\epsilon Pe u^* \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} + Br \left[Da \left(\frac{du^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{(u^*)^2}{F(\eta)} \right] \quad (2.21)$$

donde $\epsilon = (H/2)/L$ es una relación de aspecto, $Pe = (\rho c_p)_f U_\infty (H/2)/k_{\text{eff}}$ es el número de Péclet y $Br = \mu_f U_\infty^2 (H/2)/K_0 q''$ es el número de Brinkman basado en una permeabilidad de referencia K_0 . Las condiciones de frontera en su forma adimensional para la ecuación (2.21) están dadas por:

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (2.22)$$

$$\theta_f|_{\chi=0} = 0 \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0 \quad (2.24)$$

Ecuación de difusión

Finalmente, para la ecuación de difusión, se utilizaron los siguientes parámetros para obtener su forma adimensional: $\chi = x/L$; $\xi = (H/2 + h - y)/h$; $\theta_w = (T_w - T_0)/\Delta T_w$; $\Delta T_w = q'' h/k_w$, donde nuevamente ΔT_w se obtuvo de un análisis de orden de magnitud del flujo de calor constante pero ahora en las paredes del microcanal ($q'' \sim k_w \Delta T_w/h$). Al sustituir los términos anteriores en la ecuación (2.8), obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\epsilon_h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.25)$$

donde, $\epsilon_h = h/L$ es una relación de aspecto para las paredes del microcanal. Las condiciones de frontera en su forma adimensional para la ecuación (2.25) son:

$$\theta_f|_{\eta=1} = \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \theta_w|_{\xi=1} \quad (2.26)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = - \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \quad (2.27)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \right|_{\chi=0,1} = 0 \quad (2.28)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -1 \quad (2.29)$$

donde $\alpha_c = \epsilon \epsilon_h k_w / k_{eff}$ es un parámetro conjugado el cual dependiendo de su valor, mide la importancia de la conducción de calor longitudinal (Luna y Méndez, 2005). Las ecuaciones (2.26) y (2.27) son a su vez las mismas condiciones de frontera adimensionales para la ecuación de conservación de la energía en el fluido para la coordenada transversal.

2.3 Límites asintóticos

Con el objetivo de analizar la transferencia de calor en el microcanal y sobre todo la influencia del término longitudinal de conducción de calor de la ecuación de difusión, se estudiarán los valores que pueden tomar el parámetro conjugado α_c y las relaciones de aspecto para el fluido y la pared representadas por ϵ y ϵ_h respectivamente.

Si $\alpha_c \sim \epsilon_h^2$ entonces $\alpha_c / \epsilon_h^2 \sim 1$ el cual se conoce como el límite térmicamente grueso en la pared del microcanal en el cual los efectos transversales de conducción de calor en la pared del microcanal son mayores a los efectos longitudinales. Por otro lado, si $\alpha_c \gg \epsilon_h$ entonces $\alpha_c / \epsilon_h^2 \gg 1$ el cual se conoce como límite térmicamente delgado en la pared y aquí, los efectos longitudinales de conducción de calor en la pared del microcanal son más importantes. De la misma forma, existen otros dos límites asintóticos para el fluido que dependen de los valores que toma el parámetro α_c / ϵ^2 . Si $\alpha_c / \epsilon^2 \sim 1$ corresponde al límite térmicamente grueso para el fluido y si $\alpha_c / \epsilon^2 \geq 1$ corresponde al límite térmicamente delgado para el fluido.

Estos límites se pueden apreciar claramente si analizamos el orden de magnitud de los componentes de la ecuación de difusión. Por consiguiente, si la ecuación (2.25) es multiplicada por el parámetro conjugado α_c , y si la componente α_c / ϵ_h^2 del segundo término del lado izquierdo de la ecuación es del orden de la unidad (límite térmicamente grueso), entonces $\alpha_c \sim \epsilon_h^2$, sin embargo, la relación de aspecto ϵ_h tiene un valor pequeño por lo que $\alpha_c \sim \epsilon_h^2 \ll 1$. Por lo tanto, el primer término del lado izquierdo de la ecuación (2.25) que representa la difusión de calor longitudinal se puede despreciar en comparación con el orden de magnitud del segundo término que representa la difusión de calor transversal. Este es el caso más estudiado en la literatura en el cual la temperatura en las paredes varía más en la dirección

transversal que en la longitudinal. No obstante, para el caso en el que $\alpha_c/\epsilon_h^2 \gg 1$ (límite térmicamente delgado) se traduce a que $\alpha_c \gg \epsilon_h^2$ por lo que los efectos de difusión de calor en las paredes en la dirección longitudinal ya no son despreciables. Un explicación más detallada de estos límites asintóticos se puede encontrar en los estudios de Luna y Méndez (2005) y Monsivais et al. (2021a).

2.4 Modelos de permeabilidad variable

Para este estudio, se utilizarán distintos modelos de permeabilidad variable en la dirección transversal. Para ello, se tomará como longitud característica $H/2$ que es la mitad de la altura del microcanal. En la [tabla 6](#) se resumen los modelos de permeabilidad y los estudios en dónde fueron empleados. Asimismo, en la [tabla 7](#) se presentan los modelos de permeabilidad variable adimensionalizados con el parámetro $\eta = y/(H/2)$.

Tabla 6. Modelos de permeabilidad variable en la dirección transversal del microcanal de algunos estudios

Estudio	Modelo de permeabilidad variable
Murthy y Feyen (1989)	$f(y) = (1 + y/(H/2))^2$
^a Rees y Pop (2000)	$f(y) = 1 + (K_w/K_\infty - 1)e^{-y/(H/2)}$
^b Ciriello et al. (2013)	$f(y) = (y/(H/2))^{\omega-1}$

^a K_∞ es la permeabilidad del medio, K_w es la permeabilidad en la pared

^b ω es un factor numérico ($\omega = 1.5$)

Tabla 7. Modelos de permeabilidad variable adimensionalizados

Estudio	Modelo de permeabilidad adimensional
Murthy y Feyen (1989)	$F(\eta) = (1 + \eta)^2$
^a Rees y Pop (2000)	$F(\eta) = 1 + (\gamma - 1)e^{-\eta}$
Ciriello et al. (2013)	$F(\eta) = (\eta)^{\omega-1}$

^a $\gamma = K_w/K_\infty$ es un parámetro adimensional o parámetro de permeabilidad

3 Método numérico

Dado que la ecuación de momentum (ecuación (2.18)) es una ecuación diferencial en derivadas ordinarias y de que la velocidad no depende de la temperatura, se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden de disparo para encontrar el campo de velocidad para cada modelo de permeabilidad variable. El tamaño de paso que se utilizó fue de 0.01 y el número de nodos fue de 100 a lo largo de la dirección transversal.

Sin embargo, para el problema conjugado de la ecuación de la energía en el fluido y la ecuación de difusión de calor en las paredes del microcanal, se utilizó el método de elementos

finitos con el enfoque variacional mediante el software libre FreeFem++. De igual manera, se obtuvieron resultados para cada modelo de permeabilidad variable, para diferentes valores del Da y Br y para los límites térmicamente grueso y delgado en el fluido y la pared. El número de nodos que se utilizó para resolver estas ecuaciones fueron 50×200 para la dirección transversal y longitudinal, respectivamente. Además, el dominio computacional va a lo largo de todo el microcanal y del centro del microcanal ($\eta = 0$) a la intersección entre el medio poroso y la pared sólida superior ($\eta = 1$) para la región del fluido y de la pared sólida superior ($\xi = 1$) a la parte exterior de la pared por donde el flujo de calor entra al microcanal ($\xi = 0$) para la región del sólido.

4 Resultados y discusión

4.1 Validación

Los resultados de la velocidad fueron validados con la solución teórica reportada por Vafai y Kim (1989). En la [figura 4](#) se presenta la comparación entre la distribución de velocidad con la altura del microcanal obtenida en este estudio y la obtenida mediante la solución teórica para el caso con permeabilidad constante y sin considerar los efectos inerciales. De la [figura 4](#) se puede concluir que la solución de la ecuación de momentum (ecuación (2.18)) obtenida de forma numérica, concuerda con exactitud con la solución teórica.

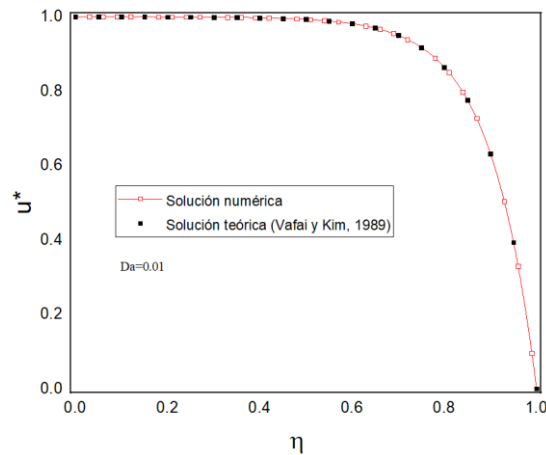


Figura 4. Comparación del perfil de velocidad obtenido de forma numérica y teórica para el caso con permeabilidad constante, con un $Da = 0.01$ y sin considerar efectos inerciales

Los resultados del campo de temperaturas en la pared dada la escases de investigaciones experimentales en esta rama, se validaron mediante el estudio experimental de Baragh et al. (2018). En él a diferencia de este estudio, obtuvieron el campo de temperaturas debido a un flujo de aire que circula a través de un canal de sección circular de 10 cm de diámetro y 70 cm de longitud con un conjunto de mallas como medio poroso colocadas a diferentes distancias a lo largo del canal (el medio poroso no es continuo en todo el canal). En la [figura 5](#) se puede apreciar la diferencia entre los resultados numéricos y experimentales del campo de

temperatura en la pared en grados Celsius para el caso con permeabilidad constante, con $Da = 0.003$, $Br = 0.0$ y para disipar un flujo de calor constante de 1250 W/m^2 . A partir de la [figura 5](#) se puede concluir que debido a las diferentes condiciones en las que se llevó a cabo el experimento de Baragh et al. (2018), el perfil de temperaturas no concuerda con exactitud a los resultados obtenidos en este estudio. Sin embargo, el campo de temperatura se encuentra en el mismo orden de magnitud y su variación es menor de $3 \text{ }^\circ\text{C}$.

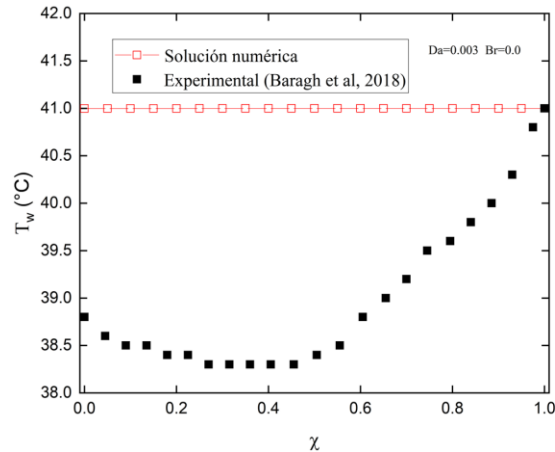


Figura 5. Comparación del perfil de temperatura en la pared obtenido de forma numérica y experimental para el caso con permeabilidad constante y con $Da = 0.003$ y $Br = 0.0$

4.2 Resultados del campo de velocidades

A continuación se presentan los campos de velocidad obtenidos de la ecuación de momentum (ecuación (2.18)) para el caso con permeabilidad constante y para cada modelo de permeabilidad variable resumido en la [tabla 7](#) para valores de $Da = 0.001 - 0.1$. Sin embargo, para valores cercanos a $Da = 0.1$ hay una pérdida de exactitud en los resultados ya que los efectos inerciales empiezan a cobrar importancia. Por lo tanto, estos resultados que se muestran para este valor de Da únicamente son para ilustrar la tendencia y dependencia que tiene el campo de velocidades.

En la [figura 6a](#) se muestra el perfil de velocidad con permeabilidad constante. En la [figura 6b](#) se muestra el campo de velocidad del fluido en el medio poroso para el modelo cuadrático de Murthy y Feyen (1989). En los resultados de este modelo se puede observar una fuerte dependencia del campo de velocidad con el número de Darcy, especialmente en el centro del microcanal teniendo una reducción de la velocidad máxima de aproximadamente el 19% para $Da = 0.1$ comparado con los casos cuando $Da = 0.001, 0.01$. De igual forma, en la [figura 6c](#) se puede apreciar una dependencia similar del perfil de velocidad con el número de Darcy empleando el modelo de permeabilidad exponencial de Rees y Pop (2000). Sin embargo, el perfil de velocidades empleando el modelo de Murthy y Feyen (1989) es menor cuando está cerca de la pared del microcanal. En el modelo potencial de Ciriello et al. (2013) a diferencia de los modelos anteriores, la dependencia del valor de la velocidad máxima en el centro del microcanal con el número de Darcy fue mínima y el mayor cambio que se puede apreciar es en la curvatura del perfil como se muestra en la [figura 6d](#). Para obtener los resultados empleando este modelo se utilizó un valor de $\omega = 1.5$.

En la [figura 7](#) se muestra una comparación entre los distintos modelos de permeabilidad variable y el caso cuando se tiene permeabilidad constante para un $Da = 0.01$. Un resultado

relevante que se puede apreciar es que el perfil de velocidad para el caso del modelo de Ciriello et al. (2013) es mayor o similar al caso cuando la permeabilidad es constante en todo el dominio. Esto se debe principalmente al valor del parámetro numérico ω que se utilizó en el modelo de permeabilidad variable; los valores de $\omega > 1$ representan un incremento de la permeabilidad con la distancia de la pared sólida (Ciriello et al., 2013).

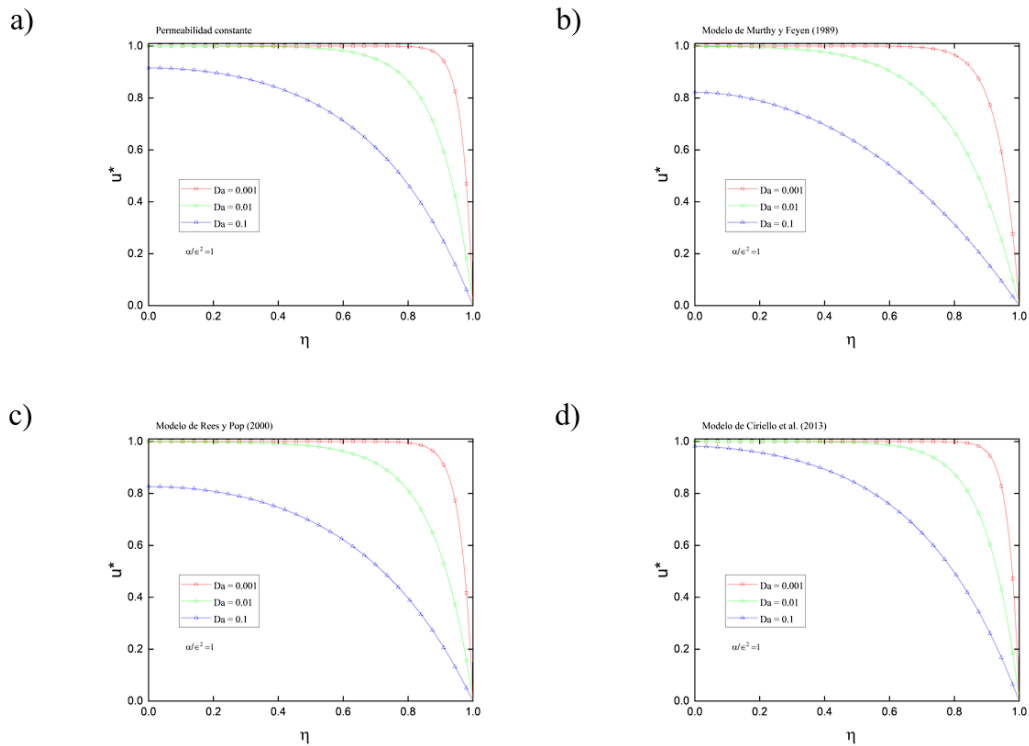


Figura 6. Perfil de velocidad para distintos valores de Da : a) permeabilidad variable b) modelo de Murthy y Feyen (1989) c) modelo de Rees y Pop (2000) y d) modelo de Ciriello et al. (2013).

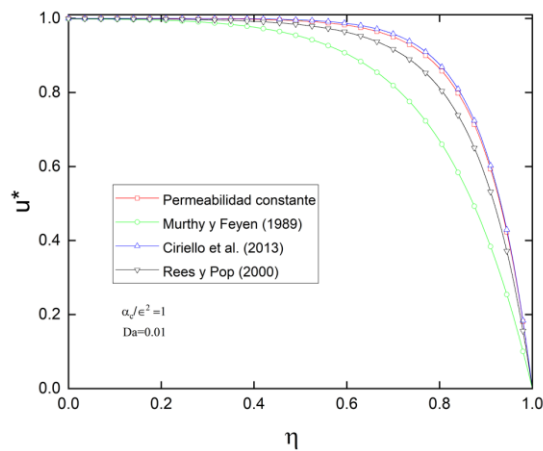


Figura 7. Comparación del perfil de velocidad entre el caso con permeabilidad constante y los distintos modelos de permeabilidad variable con $Da = 0.01$

Los resultados anteriores (figura 6 y 7) servirán para resolver el problema conjugado de la energía en el medio poroso y en las paredes sólidas del microcanal ya que en la ecuación de la energía (ecuación (2.21)) aparece el término de la velocidad del flujo por considerar la disipación viscosa en el análisis de la conservación de la energía y dado que la ecuación de momentum no está acoplada a las ecuaciones de energía, se pudo resolver de forma separada. Sin embargo, el campo de velocidades para un $Da = 0.1$ no se utilizarán porque para obtener resultados más exactos se necesitaría considerar el término inercial de Forchheimer en la ecuación de momentum.

4.3 Resultados del campo de temperaturas

Para los resultados que involucran al campo de temperatura, únicamente se presentan aquellos casos en los cuales los efectos longitudinales en la pared son más relevantes, es decir, para el caso en el que tenemos el límite térmicamente delgado en la pared ($\alpha_c/\epsilon_h^2 = 25$). Además, estos resultados se obtuvieron para distintos valores del número de Brinkman de $Br = 0.01 - 1.0$, para valores del número de Darcy de $Da = 0.001, 0.01$ y para un valor del número de Péclet de $Pe = 0.01$, el cual es un valor característico para flujos en microcanales.

En la figura 8 se puede observar el campo de temperaturas en el fluido para el caso con permeabilidad constante a lo largo de la coordenada longitudinal, para distintos valores de η y para $Br = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$ y $Da = 0.01$. Aquí, se puede apreciar que el campo de temperaturas está en función del número de Brinkman debido al aumento en la temperatura que se puede notar en la figura 8d cuando $Br = 1.0$ a diferencia de la figura 8a cuando $Br = 0.01$. Asimismo, se puede notar que para valores del $Br < 0.5$, el perfil de temperatura sufre un incremento para cada valor de la coordenada transversal η y alcanza un límite después de un determinado valor de χ . Este comportamiento se puede observar en la figura 8b: la temperatura se incrementa en función de la coordenada transversal hasta llegar a un valor de $\chi = 0.6$, después llega a un límite y se mantiene oscilando alrededor de $\theta_f \sim 1.35$. Sin embargo, para valores del $Br \geq 0.5$ el comportamiento es distinto ya que después de alcanzar un determinado valor de χ , los perfiles de temperatura vuelven a incrementarse para cada valor de la coordenada transversal. El incremento de temperatura en el fluido que se presenta en el centro del microcanal se debe al calentamiento por disipación viscosa ya que el valor del Br representa este fenómeno. Por lo tanto, este comportamiento en función del número de Brinkman se repite para cada uno de los modelos que a continuación se presentan.

La figura 9 ilustra el campo de temperaturas pero ahora en la pared del microcanal en función de la coordenada longitudinal, para distintos valores de ξ y para $Br = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$ y $Da = 0.01$. Nuevamente, el campo de temperatura depende del valor del número de Brinkman pero ahora en las paredes debido al aumento en la temperatura. Por ejemplo, si tomamos el valor $\chi = 0$ de la figura 9a, la temperatura de la pared es de aproximadamente $\theta_w \sim 32.01$ mientras que la temperatura para la misma posición pero de la figura 9d es de aproximadamente $\theta_w \sim 56.18$. No obstante, la diferencia de temperaturas a lo largo de la coordenada longitudinal y para cada valor de la coordenada transversal es mínima. Por ejemplo, si tomamos el campo de temperaturas de la figura 7b la diferencia entre $\chi = 0, \theta_w \sim 34.21$ y $\chi = 1, \theta_w \sim 34.67$ es de solo 0.46.

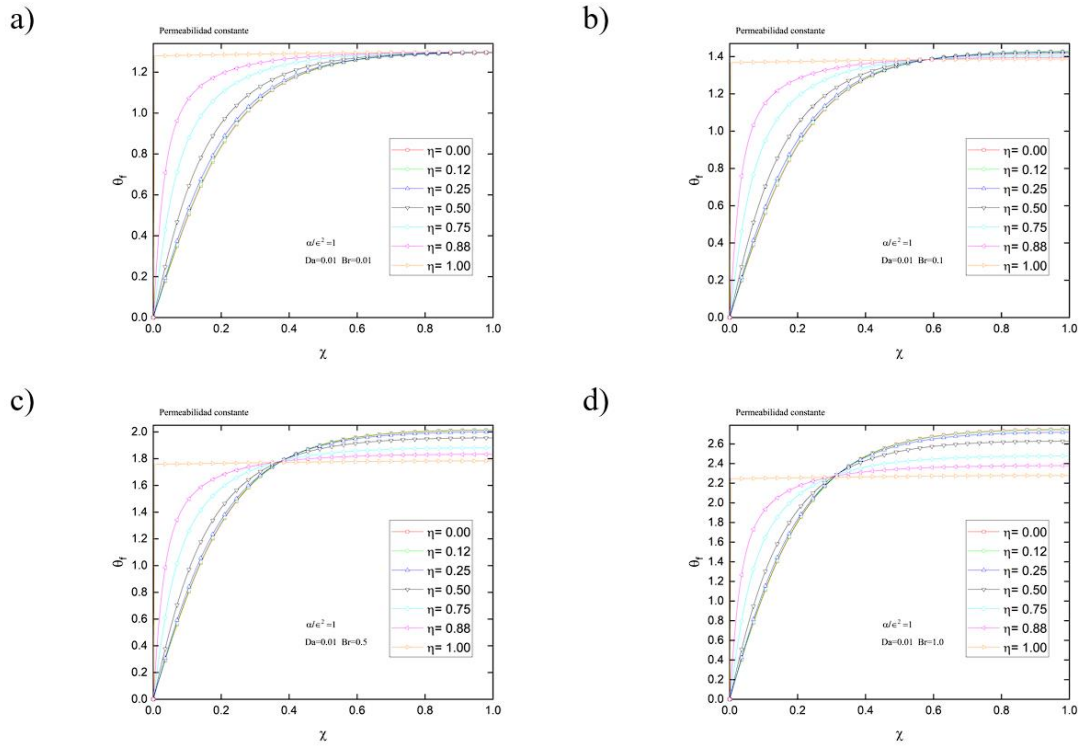


Figura 8. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en el fluido con $Da = 0.01$ y empleando permeabilidad constante

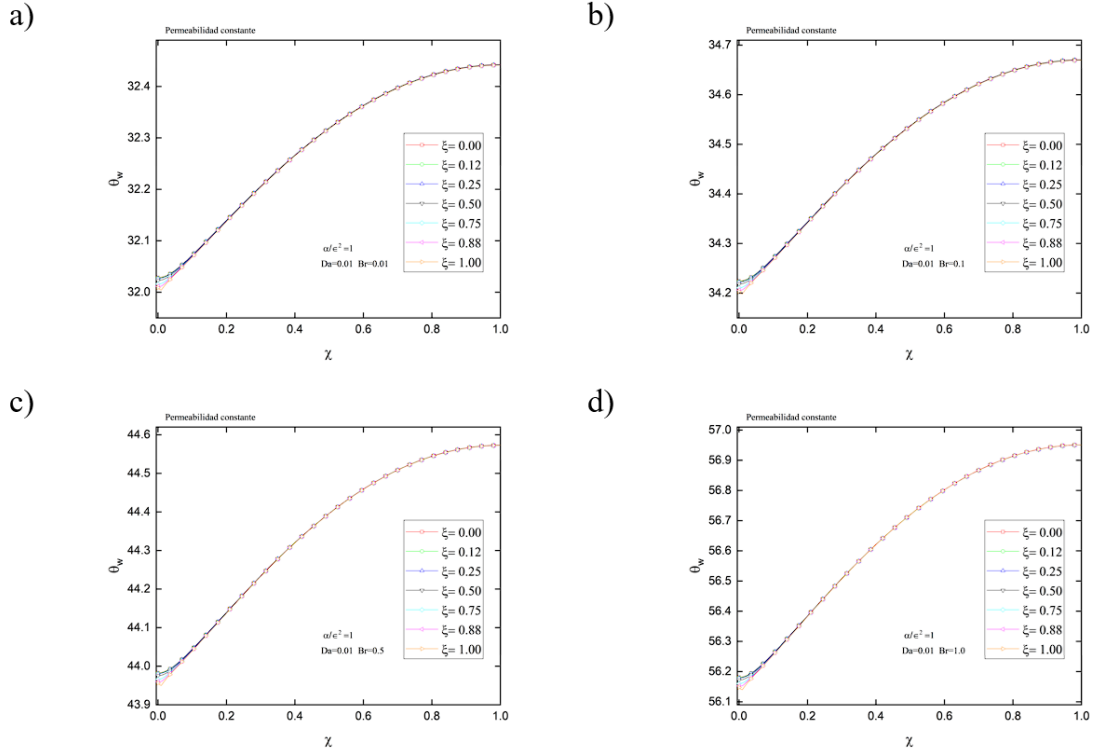


Figura 9. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en la pared con $Da = 0.01$ y empleando permeabilidad constante

La [figura 10](#) muestra los resultados del campo de temperatura en el fluido empleando el modelo cuadrático de Murthy y Feyen (1989) y bajo las mismas condiciones de la [figura 8](#). A diferencia del caso con permeabilidad constante, en la [figura 10](#) se puede apreciar una reducción del campo de temperatura, siendo más notoria para valores altos del número de Brinkman. Por ejemplo, en la [figura 8d](#) el valor máximo que alcanza la temperatura en $\chi = 1$ y $\eta = 0$ es de aproximadamente $\theta_f = 2.7$ mientras que en la [figura 10d](#) la temperatura máxima en $\chi = 1$ y $\eta = 0$ es de aproximadamente $\theta_f = 2.1$.

Los resultados del campo de temperatura en la pared empleando el modelo cuadrático de Murthy y Feyen (1989) y bajo las mismas condiciones de la [figura 9](#) se pueden observar en la [figura 11](#). Al igual que en la [figura 9](#) se puede observar una ligera diferencia de temperatura a lo largo de la coordenada longitudinal y del mismo modo se puede apreciar una dependencia con el número de Brinkman. Además, se presentó nuevamente una reducción significativa de la temperatura en la pared del microcanal en función del número de Brinkman.

Al emplear el modelo exponencial de Rees y Pop (2000) se obtuvieron los resultados del campo de temperatura en el fluido que se muestran en la [figura 12](#), bajo las mismas condiciones de la [figura 8](#). Al igual que en los resultados empleando el modelo de Murthy y Feyen (1989) se puede apreciar una reducción de la temperatura en el fluido. Sin embargo, este decremento en la temperatura fue ligeramente menor. Por ejemplo, si tomamos el valor en $\chi = 1, \eta = 1$ de la [figura 12d](#) nos da un valor de $\theta_f \sim 1.85$ mientras que el valor de la temperatura para la misma posición pero de la [figura 10d](#) es de $\theta_f \sim 1.75$, lo que resulta en una diferencia de aproximadamente 0.10.

Por otro lado, la [figura 13](#) ilustra los resultados del campo de temperatura en la pared empleando el modelo exponencial de Rees y Pop (2000) y bajo las mismas condiciones de la [figura 9](#). En esta figura se puede observar una reducción en el campo de la temperatura en la pared del microcanal si comparamos los resultados con los obtenidos para el caso con permeabilidad constante. Sin embargo, esta reducción fue significativamente menor a la obtenida empleando el modelo de Murthy y Feyen (1989).

El campo de temperatura en el fluido al utilizar el modelo potencial de Ciriello et al. (2013) y bajo las mismas condiciones de la [figura 8](#), se puede observar en la [figura 14](#). Este caso fue el que más difirió de los anteriores al tener el mayor valor de temperatura en todo el dominio, incluso mayor que en el caso con permeabilidad constante. Por ejemplo, en el centro y a la salida del microcanal, el valor de la temperatura en el fluido fue de $\theta_f \sim 4.5$ para un $Br = 1.0$, de acuerdo a la [figura 14d](#). Esto quiere decir que si comparamos este valor con el obtenido para el caso con permeabilidad constante de la [figura 8d](#) el cual fue de $\theta_f \sim 2.7$ tenemos una diferencia de 1.8. En otras palabras, al emplear el modelo de Ciriello et al. (2013), el aumento de la temperatura en el centro y a la salida del microcanal es 66.7% mayor comparado con el caso con permeabilidad constante.

La [figura 15](#) muestra los resultados del campo de temperatura en la pared empleando el modelo de Ciriello et al. (2013). Para esta figura a diferencia de las anteriores, el campo de temperatura en el pared del microcanal fue notablemente mayor para altos números de Brinkman. Si tomamos el valor del campo de temperatura para un $Br = 1.0$ a la salida del microcanal ([figura 15d](#)) nos da de $\theta_w \sim 82.89$ mientras que para el caso con permeabilidad constante en la misma región, fue de $\theta_w \sim 56.95$, es decir, una diferencia del 45.5%.

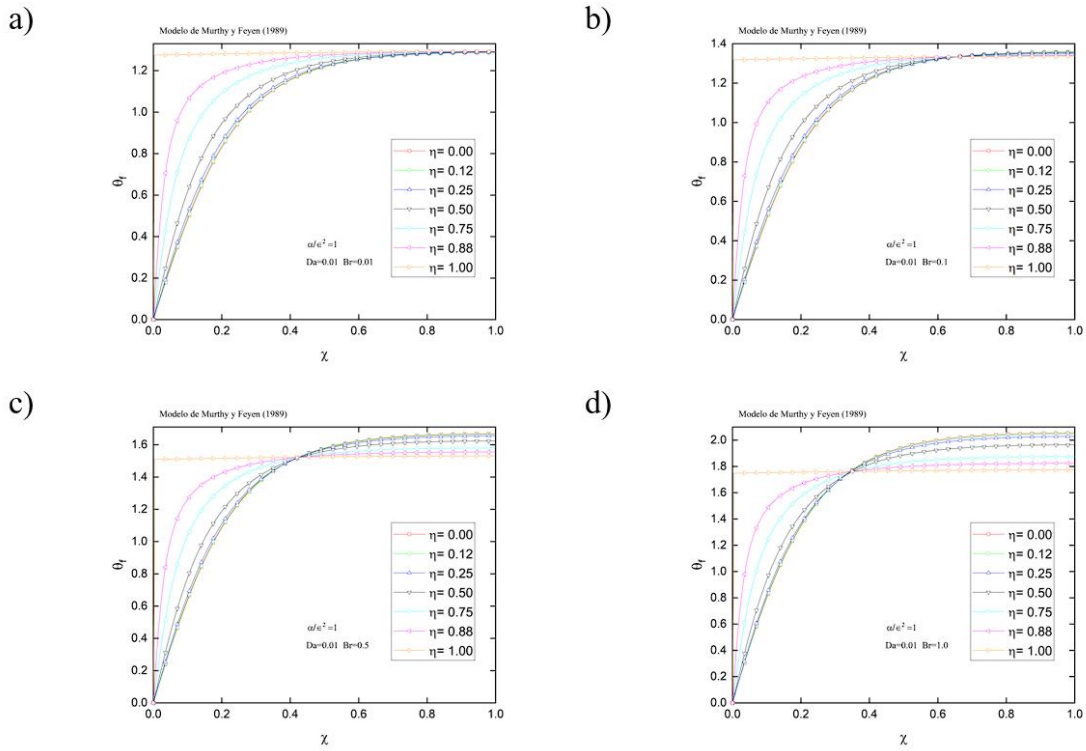


Figura 10. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en el fluido con $Da = 0.01$ y empleando el modelo de Murthy y Feyen (1989)

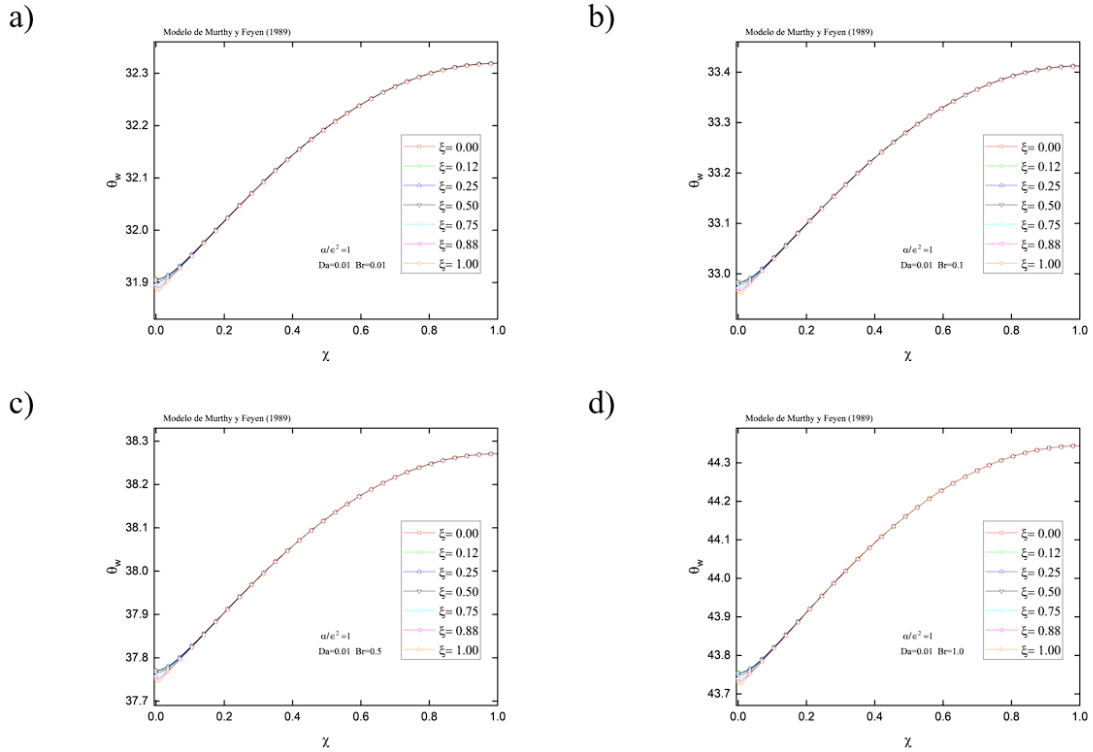


Figura 11. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en la pared con $Da = 0.01$ y empleando el modelo de Murthy y Feyen (1989)

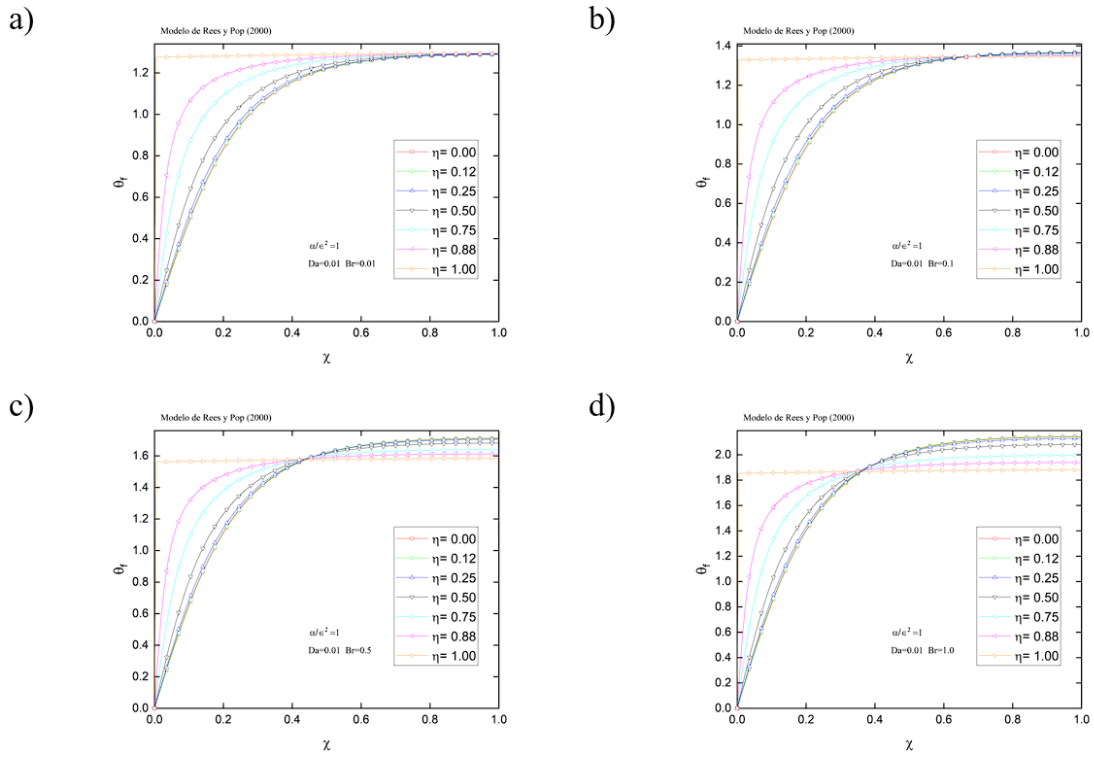


Figura 12. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en el fluido con $Da = 0.01$ y empleando el modelo de Rees y Pop (2000)

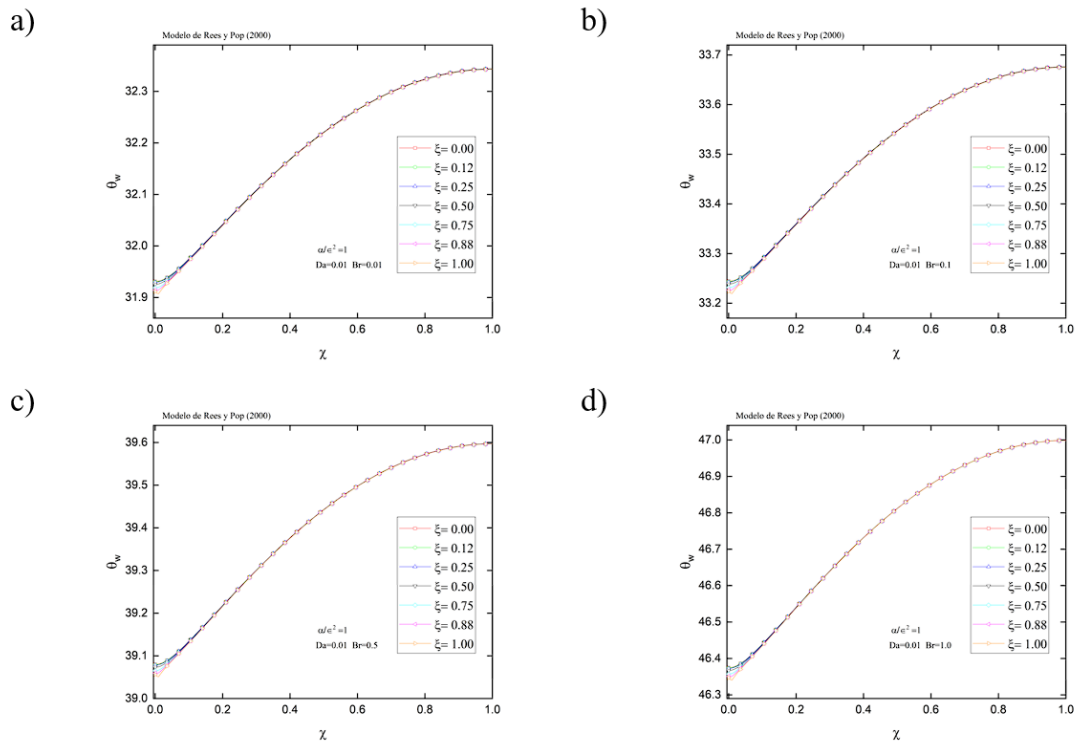


Figura 13. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en la pared con $Da = 0.01$ y empleando el modelo de Rees y Pop (2000)

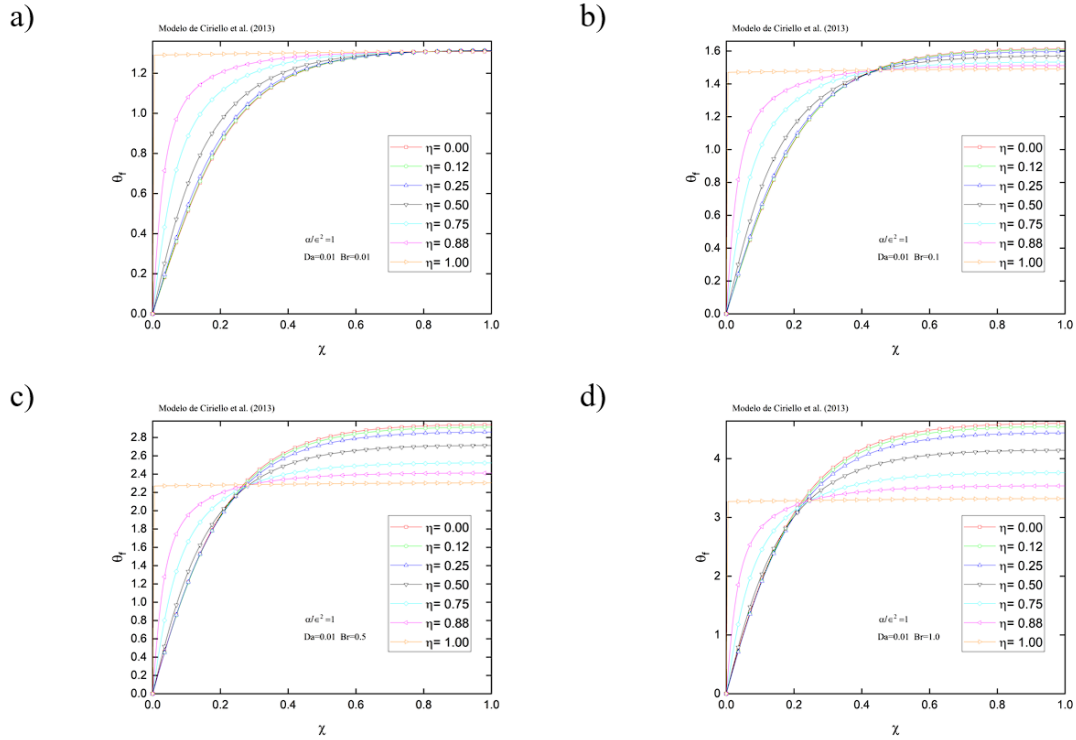


Figura 14. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en el fluido con $Da = 0.01$ y empleando el modelo de Ciriello et al. (2013)

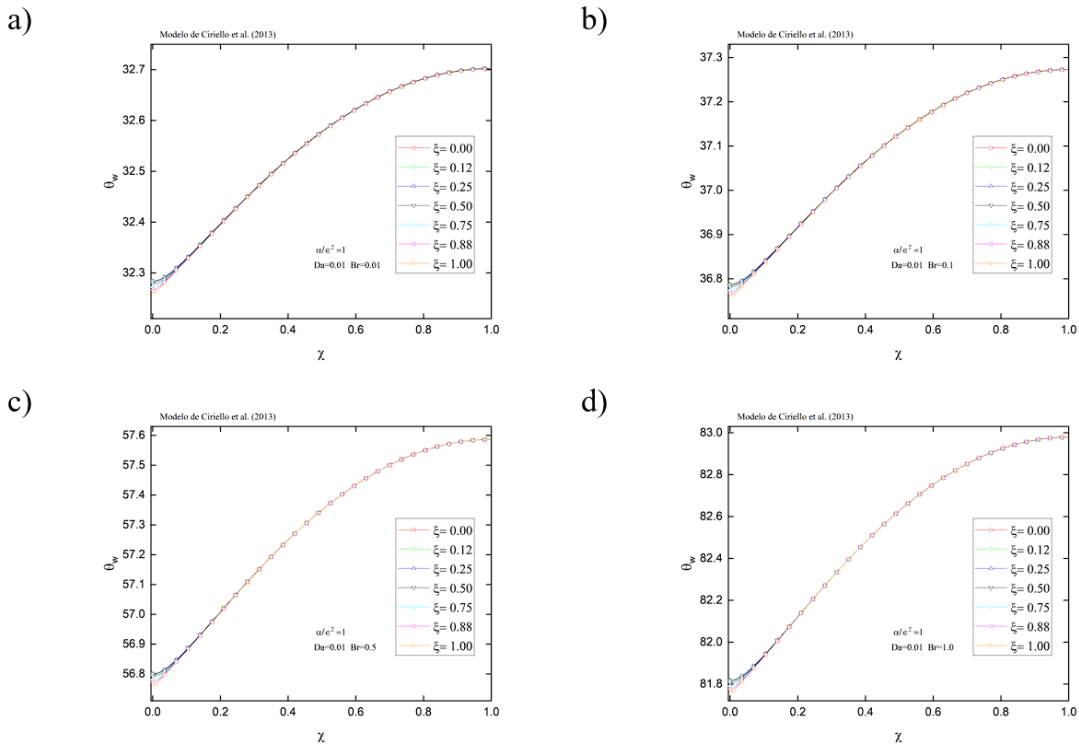


Figura 15. Efectos del número de Br en el campo de temperaturas en la pared con $Da = 0.01$ y empleando el modelo de Ciriello et al. (2013)

4.4 Límite térmicamente delgado en el fluido

Para la [figura 16](#) se obtuvieron los campos de temperaturas de cada uno de los modelos con permeabilidad variable y para el caso con permeabilidad constante, pero ahora en el límite térmicamente delgado en el fluido, es decir, cuando $\alpha_c/\epsilon^2 = 25$, para distintos valores de η , para $Br = 0.5$ y únicamente para $Da = 0.01$, ya que no hubo una diferencia significativa al variar este parámetro. En estos resultados, de igual manera, se puede observar en la [figura 16d](#) que el campo de temperatura empleando el modelo potencial de Ciriello et al. (2013) resultó ser el mayor entre los cuatro casos. Además, una característica importante que se presentó para todos los casos fue que el campo de temperaturas en el fluido alcanza un límite después de un valor en la coordenada longitudinal de $\chi \sim 0.15$, lo que quiere decir que en el límite térmicamente delgado en el fluido, aparte de aumentar la temperatura para todos los casos estudiados, se redujo la distancia desde la entrada del microcanal en la que el campo de temperatura alcanza un límite máximo. También, a diferencia del caso en el límite térmicamente grueso en el fluido para el mismo valor del $Br = 0.5$, en este caso no ocurre el calentamiento después de cierta distancia de la entrada cerca del centro del microcanal que se presentaba antes. Esto se debe a que en este límite, las variaciones en la coordenada transversal se reducen ya que la resistencia térmica en esa dirección es menor.

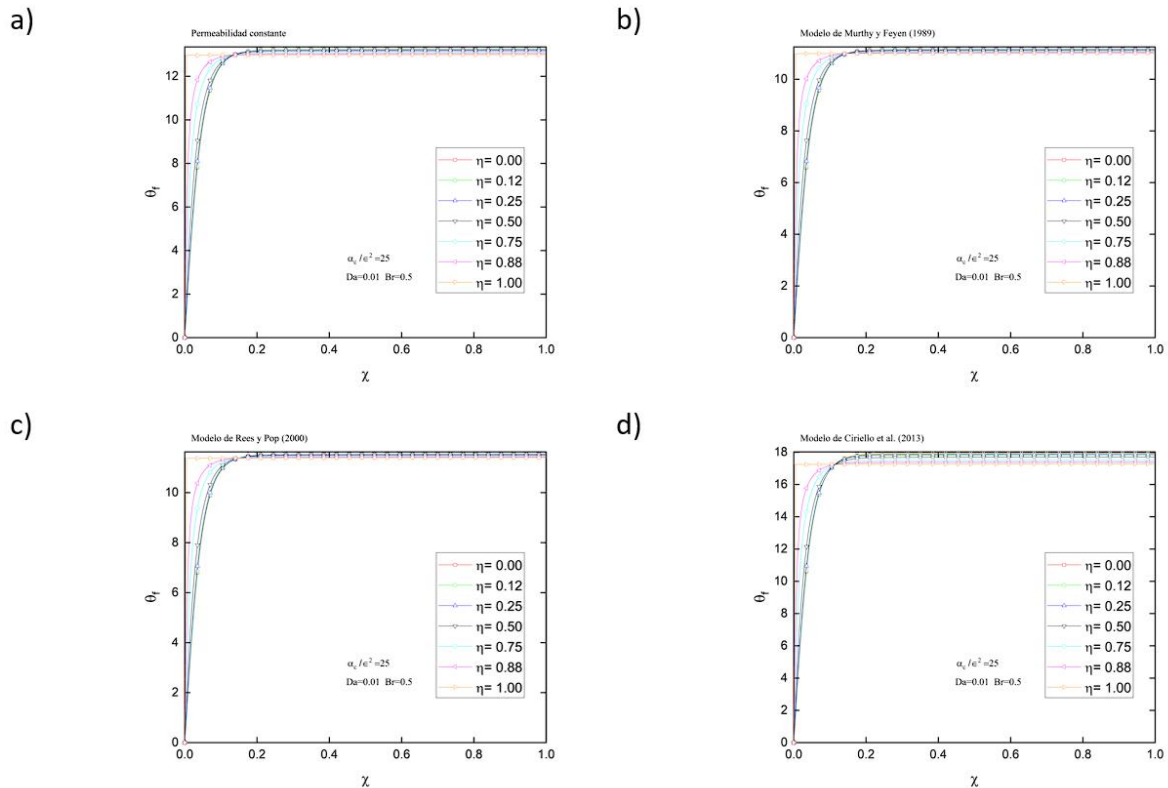


Figura 16. Comparación de los campos de temperatura en el fluido empleando permeabilidad constante y diferentes modelos de permeabilidad variable para el caso térmicamente delgado en el fluido ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$) con $Da = 0.01$ y $Br = 0.5$: a) permeabilidad constante, b) modelo de Murthy y Feyen (1989), c) modelo de Rees y Pop (2000) y d) modelo de Ciriello et al. (2013)

No obstante, en las [figuras 17-20](#) las cuales ilustran los resultados del campo de temperaturas en la pared, para distintos valores de ξ , para $Br = 0.5$, $Da = 0.01, 0.001$ y para el caso en el límite térmicamente delgado en el fluido ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$), sí podemos observar una ligera dependencia de la temperatura a la entrada y a la salida del microcanal con el número de Darcy. En estas figuras se presenta un incremento sustancial de la temperatura en la pared del microcanal, comparado con el campo de temperaturas reportado en las [figuras 9, 11, 13, 15](#) para el caso en el límite térmicamente grueso en el fluido ($\alpha_c/\epsilon^2 = 1$) y se debe a la discrepancia entre ambos límites térmicos, es decir, en el límite térmicamente delgado para el fluido, el flujo de calor que circula a través del microcanal es incapaz de disiparse en el medio poroso (Monsivais et al. 2021b). En la [figura 20](#), al igual que los resultados del campo de temperatura para el fluido, el modelo empleado de Ciriello et al. (2013) resultó tener la mayor temperatura en la pared a lo largo del microcanal de entre los cuatro casos.

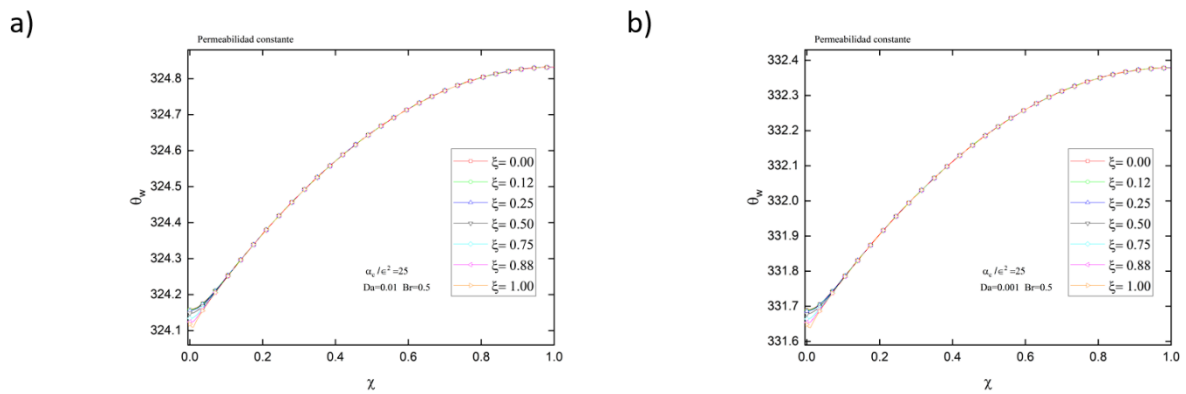


Figura 17. Efectos del número de Darcy en el campo de temperaturas en la pared para el caso térmicamente delgado en el fluido ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$) con $Br = 0.5$ y empleando permeabilidad constante

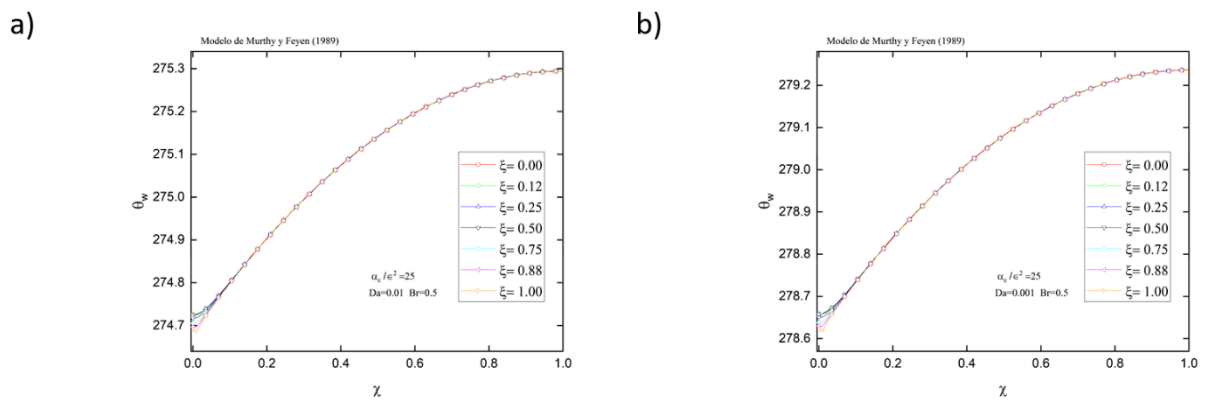
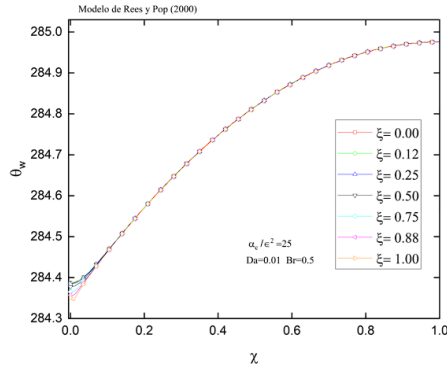


Figura 18. Efectos del número de Darcy en el campo de temperaturas en la pared para el caso térmicamente delgado en el fluido ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$) con $Br = 0.5$ y empleando el modelo de Murthy y Feyen (1989)

a)



b)

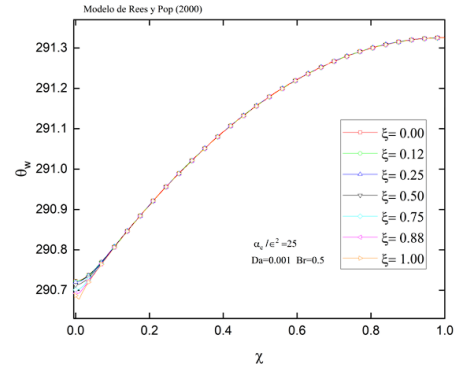
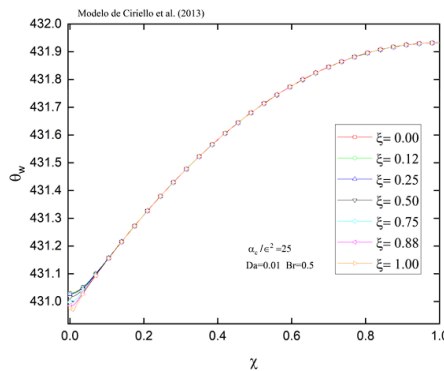


Figura 19. Efectos del número de Darcy en el campo de temperaturas en la pared para el caso térmicamente delgado en el fluido ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$) con $Br = 0.5$ y empleando el modelo de Rees y Pop (2000)

a)



b)

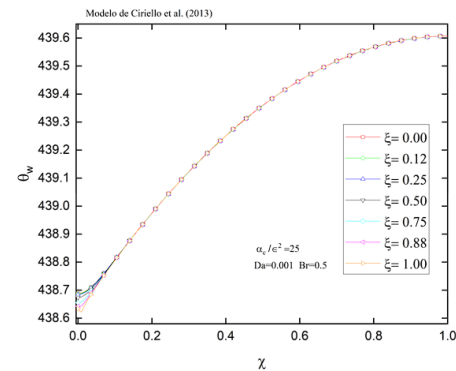


Figura 20. Efectos del número de Darcy en el campo de temperaturas en la pared para el caso térmicamente delgado en el fluido ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$) con $Br = 0.5$ y empleando el modelo de Ciriello et al. (2013)

5 Conclusiones

En este estudio se realizó el análisis de la transferencia de calor de un fluido que circula a través de un microcanal con confinamiento poroso para distintos modelos de permeabilidad variable y tomando en cuenta la transferencia de calor conjugada. Se consideró un flujo newtoniano a través de un medio poroso empleando, un valor constante, un modelo cuadrático, exponencial y potencial para la permeabilidad del medio, bajo la influencia de un gradiente de presión variable en la dirección transversal. Las ecuaciones de conservación se resolvieron de forma numérica, utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden y el método de elementos finitos bajo el enfoque variacional. Los resultados del campo de velocidades y

temperaturas en el fluido y la pared del microcanal fueron obtenidos en función del número de Darcy y del número de Brinkman. Asimismo, para visualizar la importancia de los efectos longitudinales de conducción de calor, se obtuvieron los resultados del campo de temperatura para los límites asintóticos térmicamente grueso ($\alpha_c/\epsilon^2 = 1$) y térmicamente delgado ($\alpha_c/\epsilon^2 = 25$) en el fluido y en el límite térmicamente delgado en la pared ($\alpha_c/\epsilon_h^2 = 25$).

De acuerdo a los resultados de la ecuación de la energía y la ecuación de difusión, indican que para ambas regiones los campos de temperatura dependen fuertemente del campo de velocidades y de la función de permeabilidad variable de cada modelo empleado. Por ejemplo, al emplear el modelo potencial se obtuvo el mayor aumento de la temperatura en el centro y en las paredes del microcanal, para un $Br = 1.0$; siendo un 66.7% mayor comparado con el caso al utilizar un valor constante para la permeabilidad del medio en el centro y a la salida del microcanal en el fluido y de un 45.5% mayor para la temperatura en la pared a la salida del microcanal para cada valor de la coordenada transversal. Por el contrario, los modelos cuadrático y exponencial tuvieron una reducción de la temperatura en el fluido de 24.1% y 20.4% y en la pared de 22.1% y 17.5%, respectivamente en las mismas regiones del microcanal. Esto quiere decir que para diseñar medios porosos con el objetivo de disipar calor, se debe de elegir con cuidado el tipo de función que describa la variación de la permeabilidad para evitar un efecto contraproducente.

También, en los resultados se puede observar que tanto el campo de temperaturas en el fluido como en la pared se ven fuertemente influenciados por efecto de la disipación viscosa en los cuatro casos estudiados, es decir, los campos de temperatura están en función del número de Brinkman. No obstante, la temperatura en ambas regiones no se vio influenciada significativamente por el número de Darcy ($Da \leq 0.01$).

6 Anexo

6.1 Procedimiento para la adimensionalización de las ecuaciones de conservación

6.1.1 Ecuación de momentum

$$\frac{\mu_f d^2u}{\varphi dy^2} = \frac{\mu_f}{K(y)}(u - U_\infty) \quad (2.4)$$

donde $K(y) = K_0 f(y)$, siendo K_0 una permeabilidad de referencia y $f(y)$ una función de permeabilidad variable propuesta.

Para el proceso de adimensionalización se definen los siguientes parámetros:

$$\eta = \frac{y}{H/2} \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}$$

Si los sustituimos en la ecuación (2.4) resulta:

$$\frac{\mu_f d^2 U_\infty u^*}{\varphi dy^2} = \frac{\mu_f}{K_0 f(y)} (U_\infty u^* - U_\infty)$$

De donde a partir de la regla de la cadena

$$\frac{du^*}{dy} = \frac{du^*}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{H/2} \frac{du^*}{d\eta}$$

$$\frac{d^2 u^*}{dy^2} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{du^*}{dy} \right) \frac{d\eta}{dy} = \left(\frac{1}{H/2} \right)^2 \frac{d^2 u^*}{d\eta^2}$$

Factorizando y ordenando

$$\frac{\mu_f U_\infty}{\varphi (H/2)^2} \frac{d^2 u^*}{d\eta^2} = \frac{\mu_f U_\infty}{K_0 f(y)} (u^* - 1)$$

Al dividir ambos lados de la ecuación por $\mu_f U_\infty$ y ordenando los términos se obtiene:

$$\frac{d^2 u^*}{d\eta^2} = \frac{\varphi (H/2)^2}{K_0 F(\eta)} (u^* - 1)$$

Donde $F(\eta)$ es una función de permeabilidad variable adimensional. Por lo tanto la ecuación de momentum en su forma adimensional es:

$$\frac{d^2 u^*}{d\eta^2} = \frac{Da^{-1} (u^* - 1)}{F(\eta)} \quad (2.18)$$

donde $Da = K_0 / \varphi (H/2)^2$ es el número de Darcy basado en una permeabilidad de referencia K_0 .

Condiciones de frontera

$$u|_{y=H/2} = 0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.10)$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales en las ecuaciones (2.9) y (2.10) y ordenando:

$$(U_\infty) u^*|_{\eta=1} = 0$$

$$\left(\frac{U_\infty}{H/2}\right) \frac{du^*}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0$$

Simplificando

$$u^*|_{\eta=1} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{du^*}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (2.20)$$

6.1.2 Ecuación de la energía

$$\rho_f C_p u \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_{eff} \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right) + \mu_{eff} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{\mu_f u^2}{K(y)} \quad (2.7)$$

Para adimensionalizar la ecuación de conservación de la energía (ecuación (2.7)) se utilizaron los siguientes parámetros adimensionales:

$$\chi = \frac{x}{L} \quad \theta_f = \frac{T_f - T_0}{\Delta T_f} \quad \Delta T_f = \frac{q''(H/2)}{k_{eff}} \quad \eta = \frac{y}{H/2}$$

donde ΔT_f se obtuvo al realizar el análisis de orden de magnitud del flujo de calor uniforme en el fluido ($q'' \sim k_{eff} \Delta T_f / (H/2)$). Si sustituimos los parámetros anteriores en la ecuación (2.7) resulta:

$$\rho_f C_p U_\infty u^* \frac{\partial \Delta T_f \theta_f}{\partial x} = k_{eff} \left(\frac{\partial^2 \Delta T_f \theta_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta T_f \theta_f}{\partial y^2} \right) + \mu_{eff} \left(\frac{dU_\infty u^*}{dy} \right)^2 + \frac{\mu_f (U_\infty u^*)^2}{K_0 F(\eta)}$$

De donde a partir de la regla de la cadena

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial x} = \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \left(\frac{1}{L} \right) \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \theta_f}{\partial x} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x} = \left(\frac{1}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2}$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial y} = \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{1}{H/2} \right) \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \theta_f}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{1}{H/2} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2}$$

Reordenando

$$\frac{\rho_f C_p U_\infty u^* \Delta T_f}{L} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = k_{eff} \left(\frac{\Delta T_f}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\Delta T_f}{(H/2)^2} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} \right) + \mu_{eff} U_\infty^2 \left(\frac{1}{(H/2)^2} \right) \left(\frac{du^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{\mu_f (U_\infty u^*)^2}{K_0 F(\eta)}$$

Factorizando

$$\frac{\rho_f C_p U_\infty u^* \Delta T_f}{L} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \frac{k_{eff} \Delta T_f}{(H/2)^2} \left(\left(\frac{H/2}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} \right) + \mu_f U_\infty^2 \left[\left(\frac{1}{(H/2)^2} \right) \left(\frac{1}{\varphi} \right) \left(\frac{du^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{(u^*)^2}{K_0 F(\eta)} \right]$$

Recordando que para este problema $\mu_{eff} = \mu_f / \varphi$ (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995). Dividiendo ambos lados de la ecuación por el término $k_{eff} \Delta T_f / (H/2)^2$:

$$\frac{\rho_f C_p U_\infty u^* (H/2)^2}{L k_{eff}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \left(\left(\frac{H/2}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{(H/2)^2}{k_{eff} \Delta T_f} \mu_f U_\infty^2 \left[\left(\frac{1}{(H/2)^2} \right) \left(\frac{1}{\varphi} \right) \left(\frac{du^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{(u^*)^2}{K_0 F(\eta)} \right]$$

Sustituyendo $\Delta T_f = \frac{q''(H/2)}{k_{eff}}$ y volviendo a factorizar

$$\frac{\rho_f C_p U_\infty u^* (H/2)^2}{L k_{eff}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \left(\left(\frac{H/2}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{(H/2)^2 k_{eff}}{k_{eff} q''(H/2) K_0} \mu_f U_\infty^2 \left[\left(\frac{K_0}{\varphi (H/2)^2} \right) \left(\frac{du^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{(u^*)^2}{F(\eta)} \right]$$

Simplificando

$$\frac{\rho_f C_p U_\infty u^* (H/2)^2}{L k_{eff}} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \left(\left(\frac{H/2}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} \right) + \frac{(H/2) \mu_f U_\infty^2}{q'' K_0} \left[\left(\frac{K_0}{\varphi (H/2)^2} \right) \left(\frac{du^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{(u^*)^2}{F(\eta)} \right]$$

Finalmente se obtiene:

$$\epsilon Pe u^* \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} + Br \left[Da \left(\frac{du^*}{d\eta} \right)^2 + \frac{(u^*)^2}{F(\eta)} \right] \quad (2.21)$$

donde $\epsilon = (H/2)/L$ es una relación de aspecto, $Pe = (\rho c_p)_f U_\infty (H/2) / k_{eff}$ es el número de Péclet y $Br = \mu_f U_\infty^2 (H/2) / K_0 q''$ es el número de Brinkman basado en un permeabilidad de referencia K_0 .

Condiciones de frontera

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.11)$$

$$T_f|_{x=0} = T_0 \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.13)$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales en las ecuaciones (2.11)-(2.13) y ordenando

$$\left(\frac{\Delta T_f}{H/2} \right) \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0$$

$$(\Delta T_f) \theta_f|_{x=0} = 0$$

$$\left(\frac{\Delta T_f}{L} \right) \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0$$

Simplificando

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (2.22)$$

$$\theta_f|_{x=0} = 0 \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0 \quad (2.24)$$

6.1.3 Ecuación de difusión

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

donde T_w es la temperatura en las paredes del microcanal. Se definen los siguientes parámetros adimensionales

$$\chi = \frac{x}{L} \quad \xi = \frac{H/2+h-y}{h} \quad \theta_w = \frac{T_w - T_0}{\Delta T_w} \quad \Delta T_w = \frac{q'' h}{k_w}$$

donde nuevamente ΔT_w se obtuvo de un análisis de orden de magnitud del flujo de calor constante pero ahora en las paredes del microcanal ($q'' \sim k_w \Delta T_w / h$). Sustituyendo los parámetros anteriores en la ecuación (2.8) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \theta_w \Delta T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_w \Delta T_w}{\partial y^2} = 0$$

De donde a partir de la regla de la cadena

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial x} = \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \left(\frac{1}{L}\right) \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial x} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x} = \left(\frac{1}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2}$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial y} = \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \left(-\frac{1}{h}\right) \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \theta_w}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2}$$

Reordenando

$$\frac{\Delta T_w}{L^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{\Delta T_w}{h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = 0$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por $\Delta T_w / L^2$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{L^2}{h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = 0$$

Finalmente, haciendo un cambio de variable

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\epsilon_h^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.25)$$

donde, $\epsilon_h = h/L$ es una relación de aspecto para las paredes del microcanal (Luna y Méndez, 2005).

Condiciones de frontera

$$T_f|_{y=H/2} = T_w|_{y=H/2} \quad (2.14)$$

$$k_{eff} \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=H/2} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \Big|_{y=H/2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial x} \Big|_{x=0,L} = 0 \quad (2.16)$$

$$q'' = k_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \Big|_{y=(H/2+h)} \quad (2.17)$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación (2.11)

(2.11)

$$(\Delta T_f) \theta_f \Big|_{\eta=1} = (\Delta T_w) \theta_w \Big|_{\xi=1}$$

Recordando que $\Delta T_f = q''(H/2)/k_{eff}$ y $\Delta T_w = q''h/k_w$

$$\left(\frac{q''(H/2)}{k_{eff}} \right) \theta_f \Big|_{\eta=1} = \left(\frac{q''h}{k_w} \right) \theta_w \Big|_{\xi=1}$$

Simplificando y reordenando

$$\theta_f \Big|_{\eta=1} = \left(\frac{k_{eff}}{k_w} \right) \left(\frac{h}{H/2} \right) \theta_w \Big|_{\xi=1}$$

Haciendo un cambio de variables

$$\theta_f \Big|_{\eta=1} = \frac{\epsilon_h^2}{\alpha_c} \theta_w \Big|_{\xi=1} \quad (2.26)$$

donde $\alpha_c = \epsilon_h k_w / k_{eff}$ es un parámetro conjugado el cual mide la importancia de la conducción de calor longitudinal (Luna y Méndez, 2005).

(2.15)

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación (2.15)

$$k_{eff} \left(\frac{\Delta T_f}{H/2} \right) \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = k_w \left(\frac{\Delta T_w}{-h} \right) \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}$$

Recordando que $\Delta T_f = q''(H/2)/k_{eff}$ y $\Delta T_w = q''h/k_w$

$$q'' \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = -q'' \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}$$

Simplificando

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = - \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \quad (2.27)$$

(2.16)

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación (2.16)

$$\left(\frac{\Delta T_w}{L} \right) \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0,1} = 0$$

Simplificando

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0,1} = 0 \quad (2.28)$$

(2.17)

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación (2.17)

$$\left(\frac{\Delta T_w}{-h} \right) k_w \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = q''$$

Recordando que $\Delta T_w = q''h/k_w$

$$\left(\frac{q''h/k_w}{-h} \right) k_w \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = q''$$

Simplificando

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -1 \quad (2.29)$$

7 Referencias

1. Alawi, Omer A., Nor Azwadi Che Sidik, and M'hamed Beriache. 2015. "Applications of Nanorefrigerant and Nanolubricants in Refrigeration, Air-Conditioning and Heat Pump Systems: A Review." *International Communications in Heat and Mass Transfer* 68: 91–97. <http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.08.014>.
2. Alomar, Omar Rafae et al. 2019. "Numerical Investigation of Two-Phase Flow in Anisotropic Porous Evaporator." *International Journal of Thermal Sciences* 135:1–16.
3. Alomar, Omar Rafae, Miguel A.A. Mendes, Subhashis Ray, and Dimosthenis Trimis. 2018. "Numerical Investigation of Complete Evaporation Process inside Porous Evaporator Using Staggered and Non-Staggered Grid Arrangements." *International Journal of Thermal Sciences* 129: 56–72.
4. Alsabery A.I., Chamkha A.J., Hussain S.H., Saleh H., Hashim I. 2015. "Heatline visualization of natural convection in a trapezoidal cavity partly filled withnanofluid porous layer and partly with non-Newtonian fluid layer." *Adv. Powder Technol.* 26 1230–1244.
5. Baek, S., Radebaugh, R., Bradley, P.E. 2020. "A new method for heat transfer coefficient measurements of single-phase fluids during laminar flow in microchannels." *Int. J. Heat Mass Transfer* 157: 119891. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119891>.
6. Baragh, S., Shokouhmand, H., Ajarostaghi, S.S.M., Nikian, M. 2018. "An experimental investigation on forced convection heat transfer of single phase flow in a channel with different arrangements of porous media." *Int. J. Therm. Sci.* 134: 370–379. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.04.030>
7. Bhattad, Atul, Jahar Sarkar, and Pradyumna Ghosh. 2018. "Improving the Performance of Refrigeration Systems by Using Nanofluids: A Comprehensive Review." *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 82: 3656–69. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.10.097>.
8. Bi, Shengshan, Kai Guo, Zhigang Liu, and Jiangtao Wu. 2011. "Performance of a Domestic Refrigerator Using TiO₂-R600a Nano-Refrigerant as Working Fluid." *Energy Conversion and Management* 52(1): 733–37. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2010.07.052>.

9. Chein, R., Huang, G. 2005. "Analysis of microchannel heat sink performance using nanofluids." *Applied Thermal Engineering* 25: 3104-3114. doi:10.1016/j.applthermaleng.2005.03.008
10. Choi SUS. 1995. "Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles, developments and applications of non-Newtonian flows." New York: ASME; p. 99–105.
11. Ciofalo, M. 2007. "Local effects of longitudinal heat conduction in plate heat exchangers. *International journal of heat and mass transfer* 50: 3019-3025. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.12.006
12. Ciriello, V., Di Federico, V., Archetti, R., and Longo, S. 2013. "Effect of Variable Permeability on the Propagation of Thin Gravity Currents in Porous Media." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 57: 168–175.
13. Degan, G., Vasseur, P., Bilgen, E. 1994. "Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer." *Int. J. Heat Transfer*. 0017-9310(94)00330-0.
14. Gaikwad, H.S., Mondal, P.K., Wongwises, S. 2017. "Non-linear drag induced entropy generation analysis in a microporous channel: The effect of conjugate heat transfer." *Int. J. Heat Mass Transfer* 108: 2217-2228. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.041>
15. Ghalambaz M., Shereme M.A. t, Pop I. 2015. "Free convection in a parallelogrammic porous cavity filled with a nanofluid using Tiwari and Das' nanofluid model." *PLOSE ONE*. <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0126486> 17/17.
16. Grosan, T., C. Revnic, I. Pop, and D. B. Ingham. 2015. "Free Convection Heat Transfer in a Square Cavity Filled with a Porous Medium Saturated by a Nanofluid." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 87: 36–41.
17. Hu, Y., Li. D., Shu, S., Niu, X. 2017. "A multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the flow and heat transfer in a hydrodynamically and thermally anisotropic porous medium." *Int. J. Heat Mass Transfer* 104: 544-558. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.008>
18. Hung T.C., Huang, Y.X., Yan, W.M. 2013. "Thermal performance analysis of porous-micr channel heat sinks with different configuration designs." *Int. J. Heat Mass Transfer*, 66: 235-243. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.07.019>
19. Jang, S.P., Choi S.U.S. 2006. "Cooling performance of a microchannel heat sink with nanofluids." *Applied Thermal Engineering* 26: 2457-2463. doi:10.1016/j.applthermaleng.2006.02.036
20. Karniadakis, G., Beskok, A., Aluru, N. 2005. "Microflows and Nanoflows Fundamentals and Simulation." Vol. 29. New York: Springer.
21. Kasaeian, Alibakhsh et al. 2017. "Nanofluid Flow and Heat Transfer in Porous Media: A Review of the Latest Developments." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 107: 778–91.
22. Kumar DS, Elansezhian R. 2014. "ZnO nanorefrigerant in R152a refrigeration system for energy conservation and green environment." *Front Mech Eng* 9 (1): 75–80.

23. Kuznetsov, A.V. and Nield, D.A. 2001. "Effects of heterogeneity in forced convection in a porous medium: Triple layer or conjugate problem." *Numerical Heat Transfer, Part A*, 40: 363–385.
24. Lee, H. 2011. "Thermal Design Heat Sinks, Thermoelectrics, Heat Pipes, Compact Heat Exchangers, and Solar Cells." 1st ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
25. Luna, N., and Mendez, F. 2005. "Forced convection on a heated horizontal flat plate with finite thermal conductivity in a non-darcian porous medium." *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, No. 7, pp. 656–664.
26. Maghsoudi, P. and Slavashi, M. 2018. "Application of nanofluid and optimization of pore size arrangement of heterogeneous porous media to enhance mixed convection inside a two-sided lid-driven cavity." *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*.
27. Mahbulul, I. M. et al. 2013. "Thermophysical Properties and Heat Transfer Performance of Al₂O₃/R-134a Nanorefrigerants." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 57(1): 100–108.
28. Mahbulul, I. M., A. Saadah, R. Saidur, M. A. Khairul, and A. Kamyar. 2015. "Thermal Performance Analysis of Al₂O₃/R-134a Nanorefrigerant." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 85 (June): 1034–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.02.038>.
29. Mahdi, Raed Abed, H. A. Mohammed, K. M. Munisamy, and N. H. Saeid. 2015. "Review of Convection Heat Transfer and Fluid Flow in Porous Media with Nanofluid." *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 41: 715–34.
30. Monsivais, I., Méndez, F., Gomez, A., Lizardi, J. 2021a. "Conjugate Heat Transfer in a Thin Microchannel Filled with a Porous Medium." *Aerospace Research Central* Vol. 36, No. 1. <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.T6196>
31. Monsivais, I. G., Méndez, F., Lizardi, J. J., Ramos, E. A. 2021b. "Impact of viscous dissipation on the conjugate heat transfer between the walls of a porous microchannel." *Phys. Scr.* 97: 065002. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac6a21>
32. Murthy, N.N., and Feyen, J. 1989. "Influence of Variable Permeability on the Dispersion of a Chemically Reacting Solute in Porous Media." *Int. J. Engng Sci.* Vol. 27, No. 12, pp 1661-1671.
33. Nield D, Bejan A. 2006. "Convection in porous media." 3rd ed. New York: Springer.
34. Ochoa-Tapia, J.A., and Whitaker, S. 1995. "Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid — I. Theoretical development." *Int. J. Heat Mass Transfer* 38: 2647–2655.
35. Qu, W., Mudawar, I. 2002a. "Experimental and numerical study of pressure drop and heat transfer in a single-phase micro-channel heat sink." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45: 2549-2565.
36. Qu W., Mudawar I. 2002b. "Analysis of three-dimensional heat transfer in micro-channel heat sinks." *Int J Heat Mass Transf* 45(19):3973–3985.
37. Ranganayakulu, C., Seetharamu, K., and Sreevatsan, K. 1997. "The effects of longitudinal heat conduction in compact plate-fin and tube-fin heat exchangers using a

- finite element method.” *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 40, No. 6: pp. 1261–1277.
38. Rees, D.A.S., and Pop, I. 2000. “Vertical Free Convection in a Porous Medium with Variable Permeability Effects.” *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43: 2565-2571.
 39. Salama A., Abbas I.a., El-Amin, M.F., Sun, S. 2013. “Comparison study between the effects of different terms contributing to viscous dissipation in saturated porous media.” *Int. J. Therm. Sci.* 64: 195–203. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2012.08.021>.
 40. Sheremet, M. A. and I. Pop. 2015. "Natural Convection in a Horizontal Cylindrical Annulus Filled with a Porous Medium Saturated by a Nanofluid using Tiwari and Das' Nanofluid Model." *European Physical Journal Plus* 130 (6). doi:10.1140/epjp/i2015-15107-4. www.scopus.com.
 41. Sheremet, M.A., Grosan, T. & Pop, I. 2015. “Free Convection in a Square Cavity Filled with a Porous Medium Saturated by Nanofluid Using Tiwari and Das' Nanofluid Model.” *Transp Porous Med* 106: 595–610 (2015). <https://doi.org/10.1007/s11242-014-0415-3>
 42. Soliman A.M.A., Abdelrahman A.K., Taher S.H., Ookawara S. 2015. “Performance enhancement of vapor compression cycle using nano materials.” in: *Proceedings of the 4th international conference on renewable energy research and applications Palermo, Italy*. p. 821–6.
 43. Subramani N, Prakash MJ. 2011 “Experimental studies on a vapour compression system using nanorefrigerants.” *Int J Eng, Sci Technol*; 3(9): 95–102.
 44. Tarawneh, M, Jawarneh, AM, Tilan, H, Ababneh, A, Al–Migdady, A. 2019. “Investigation of the effect of superheating on the performance of a refrigeration system using low temperature different refrigerant blends in porous media.” *Heat Transfer—Asian Res.* 48: 2216- 2236. <https://doi.org/10.1002/htj.21481>
 45. Tuckerman, D.B., Pease R.F. 1981. “High-performance heat sinking for VLSI, *IEEE Electron.*” *Dev. Lett. EDL-2* 126–129.
 46. Vafai K. 2005. “Handbook of porous media.” 2nd ed. Florida: Taylor & Francis Group.
 47. Vafai, K., Kim, S. J. 1989. “Forced convection in a channel filled with a porous medium: an exact solution.” *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 111, No. 4, pp. 1103–1106.
 48. Vafai, K. and Tien, C.L. 1981. “Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media.” *Int. J. Heat Transfer* 24: 195–203. [1.5.3, 4.9]
 49. Wan, Z.M., Liu, J., Su, K.L., Hu, X.H., M, S.S. 2011. “Flow and heat transfer in porous micro heat sink for thermal management of high power LEDs.” *Microelectronics Journal* 42: 632-637. doi:10.1016/j.mejo.2011.03.009
 50. Xia, Xin lin et al. 2017. “Experiment on the Convective Heat Transfer from Airflow to Skeleton in Open-Cell Porous Foams.” *International Journal of Heat and Mass Transfer* 106: 83–90. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.053>.

51. Xu, H. J., Z. B. Xing, F. Q. Wang, and Z. M. Cheng. 2019. "Review on Heat Conduction, Heat Convection, Thermal Radiation and Phase Change Heat Transfer of Nanofluids in Porous Media: Fundamentals and Applications." *Chemical Engineering Science* 195: 462–83.
52. Xu, Huijin, Liang Gong, Shanbo Huang, and Minghai Xu. 2015. "Flow and Heat Transfer Characteristics of Nanofluid Flowing through Metal Foams." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 83: 399–407. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.12.024>.
53. Yarin, L.P., Mosyak, A., Hetsroni, G. 2009. "Fluid flow, heat transfer and boiling in micro-channels." 1st ed. Berlin: Springer. DOI 10.1007/978-3-540-78755-6
54. Yu, Wei, Huaqing Xie, Lifei Chen, and Yang Li. 2010. "Enhancement of Thermal Conductivity of Kerosene-Based Fe₃O₄ Nanofluids Prepared via Phase-Transfer Method." *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 355(1–3): 109–13.
55. Zargartalebi, H., Noghrehabadi, A., Ghalambaz, M. et al. 2015. "Natural Convection Boundary Layer Flow over a Horizontal Plate Embedded in a Porous Medium Saturated with a Nanofluid: Case of Variable Thermophysical Properties." *Transp Porous Med* 107: 153–170. <https://doi.org/10.1007/s11242-014-0430-4>