



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN EN RECURSOS NATURALES –  
YACIMIENTOS

**COMPORTAMIENTO DE POZOS HIDRÁULICAMENTE FRACTURADOS EN  
MEDIOS FRACTURADOS ANISOTRÓPICOS FRACTALES CON DERIVADAS  
FRACCIONALES**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
DOCTORA EN INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS  
NATURALES

**PRESENTA:**  
ROSA MARÍA MARISCAL ROMERO

**DIRECTOR DE TESIS**  
DR. RODOLFO GABRIEL CAMACHO VELÁZQUEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

---

## Resumen

Se presenta un modelo tridimensional para analizar el comportamiento de flujo de gas en pozos horizontales en yacimientos naturalmente fracturados anisotrópicos con triple porosidad (matriz orgánica e inorgánica, red de fracturas naturales) con fracturas hidráulicas. El modelo propuesto generaliza los modelos hasta ahora propuestos en relación con el efecto combinado de la fractalidad, triple-porosidad, mecanismos de transporte dependientes de la escala para nano poros, geomecánica, y difusión anómala de trabajos previos.

Se considera el modelo de triple porosidad-triple permeabilidad porque la estimulación del fracturamiento hidráulico interactúa con la red de fracturas naturales originales cuyas propiedades petrofísicas son mejoradas como leyes de potencias con distintos exponentes respetando la anisotropía del medio, es decir se genera un volumen estimulado de yacimiento (SRV por sus siglas en inglés) elipsoidal alrededor de cada una de las fracturas hidráulicas. Como resultado del comportamiento fractal de las redes de fracturas, naturales e inducidas, se obtiene una distribución acorde de tamaño de bloque de matriz en este SRV. Además, se incluye la presencia de difusión anómala tanto en la red de fracturas naturales como en la matriz orgánica e inorgánica debida a las dependencias temporales del flujo por medio de la derivada fraccional de Caputo. Finalmente, se contemplan los efectos de producción sobre las propiedades petrofísicas, diferentes mecanismos de transporte dependientes de la escala en los nanoporosos de la matriz orgánica e inorgánica, y flujo de alta velocidad en la fractura hidráulica.

El modelo se valida usando la solución de un simulador comercial y soluciones analíticas de la literatura, considerando las restricciones respectivas de estos tipos de soluciones.

Se analiza a detalle la funcionalidad/beneficio de implementar el modelo propuesto y utilizar en conjunto triple porosidad, geometría fractal anisotrópica, subdifusión capturada a través de derivadas fraccionales, y diferentes mecanismos de transporte. Se identifican los periodos de flujo en las soluciones numéricas determinadas por estas consideraciones.

---

Los resultados indican que la forma de las curvas de pruebas de presión está directamente relacionada con los exponentes fractales anisotrópicos y el orden de la derivada temporal fraccional, que representan la densidad de fracturas dentro del SVR y el grado de difusión anómala, respectivamente.

A tiempos largos la disminución en la presión del gas produce una mejora en la permeabilidad aparente debido al efecto de deslizamiento de las matrices orgánica e inorgánica y a la desorción de gas de las paredes orgánicas, contribuyendo ambos efectos en la producción.

El proceso de agotamiento del yacimiento desencadena la compactación de las fracturas hidráulicas y naturales disminuyendo la permeabilidad y porosidad de estos medios debido al aumento de los esfuerzos efectivos.

En este trabajo se presenta un nuevo modelo tridimensional para obtener predicciones de producción, que generaliza el uso en conjunto de triple-porosidad, fractalidad, diferentes mecanismos de transporte dependientes de escala, geomecánica, y difusión anómala hasta ahora presentados en la literatura.

Se evalúa la practicidad de utilizar en conjunto todas estas características para simulación de yacimientos en relación con los beneficios de obtener escenarios de producción más realistas. El modelo desarrollado permite generar escenarios de rendimiento de pozos más apegados a la realidad y realizar una toma de decisiones con menor incertidumbre.

---

## Abstract

A 3D numerical model is presented to analyze the behavior of gas flow in hydraulically fractured horizontal wells in anisotropic heterogeneous naturally fractured reservoirs with triple porosity. This simulator generalizes the models previously presented because it combines the effects of fractality, present in the stimulated reservoir volume (SRV), triple-porosity, slip and viscous flow, Knudsen diffusion, and kerogen adsorption/desorption from the organic pore walls, geomechanics, anisotropy, and anomalous diffusion.

The proposed model considers the presence of a SRV due to the improvement of the original fracture network petrophysical properties caused by the hydraulic fracturing process generating an anisotropic and heterogeneous distribution of properties around the hydraulic fractures. As a result of the fractal distribution of properties, a consistent matrix shape factor distribution is obtained. The model includes the presence of anomalous diffusion both in the natural fracture network and in the organic and inorganic matrices through fractional derivatives, geomechanical effects, correction in the apparent permeability due to slip, Knudsen diffusion and the adsorption-desorption process, and high-speed flow in the hydraulic fractures.

The model is validated considering the solution of a commercial simulator and analytical solutions from the literature.

In this work, the functionality/benefit of implementing the proposed model with triple porosity, anisotropic fractal geometry, anomalous diffusion and different transport mechanisms are analyzed in detail.

The accuracy of the proposed model is verified using approximate analytical solutions, previously presented in the literature, identifying different flow periods, and asymptotic cases by means of a commercial simulator.

The results indicate that the shape of the pressure and rate decline curves are causally related to the anisotropic fractal exponents and the order of the fractional temporal

---

derivatives, which represent the density and connectivity of the natural fractures within the SRV and the degree of anomalous diffusion, respectively.

At long times the pressure decline produces an improvement in apparent permeability due to the sliding effect of the organic and inorganic matrices, and the desorption of gas from the organic walls also contributes to production.

The gas depletion process triggers the compaction of hydraulic and natural fractures, reducing the permeability and porosity of these media. This work shows the effect of the effective stress dependence of these properties.

The proposed model presents for the first-time production predictions which consider the anisotropic behavior of the SRV using the fractal geometry, with associated distributions of porosity, permeability, and matrix shape factor, and combines these properties with the effects of triple-porosity, different scale-dependent transport mechanisms, geomechanics, and anisotropic anomalous diffusion.

The practicality of using all these characteristics is demonstrated and evaluated in relation to the benefits of obtaining more realistic production scenarios. The developed model allows the generation of well performance scenarios that are closer to reality with less uncertainty.

---

## Contenido

	Pág.
Portada	
Resumen	
Abstract	
Agradecimientos	
Dedicatoria	
Contenido	
Nomenclatura	
1	Introducción
	Objetivo
2	Revisión bibliográfica
2.1	Descripción del sistema de estudio
2.2	Ecuaciones de flujo
2.2.1	Derivada fraccional de Caputo
2.2.2	Ecuación fraccional para difusión anómala
2.2.3	Ecuación de continuidad
2.2.4	Ley de flujo
2.2.5	Flujo no Darciano en fractura hidráulica
2.2.6	Ecuación de estado
2.2.7	Pseudo-presión
2.2.8	Geometría fractal
2.3	Mecanismos de flujo
2.3.1	Número de Knudsen
2.3.2	Efecto Klinkenberg
2.3.3	Difusión de Knudsen
2.3.4	Adsorción-Desorción

---

2.4	Correlaciones geomecánicas
<b>3</b>	<b>Formulación matemática</b>
3.1	Modelo de cuatro porosidades
3.1.1	Fractura hidráulica
3.1.2	Fracturas naturales
3.1.3	Matriz inorgánica
3.1.4	Matriz orgánica
3.2	Condiciones de frontera
<b>4</b>	<b>Solución Numérica de las ecuaciones de flujo</b>
4.1	Modelo de flujo
4.1.1	Ecuaciones de flujo en diferencias finitas
4.1.2	Construcción de la malla del yacimiento
4.1.3	Distribución inicial de porosidades y permeabilidades del sistema de microfracturas naturales
4.1.4	Condiciones iniciales
4.1.5	Procedimiento de solución del sistema de ecuaciones
4.1.6	Estructura de rutinas
<b>5</b>	<b>Resultados</b>
5.1	Validación con simulador de CMG
5.2	Efecto del orden de derivada fraccional
5.3	Efecto de diferentes mecanismos de subdifusión
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>
6.1	Recomendaciones
	<b>Bibliografía</b>
	<b>Lista de Tablas</b>
	<b>Lista de Figuras</b>

---

## Nomenclatura

- $w_F$  = Ancho de fractura hidráulica, pies
- $y_e$  =  $df/2$  Distancia entre fracturas hidráulicas, pies
- $h_F$  =  $1/2$  Altura de fractura hidráulica, pies
- $r_w$  = Radio del pozo, pies
- $x_F$  = Fractura hidráulica de longitud media, pies
- $k_{HF}$  = Permeabilidad de fractura hidráulica, md
- $k_{xNF}$  = Permeabilidad de fractura natural x (solo en caso homogéneo), md
- $k_{yNF}$  = Permeabilidad de fractura natural y (solo en caso homogéneo), md
- $k_{zNF}$  = Permeabilidad de fractura natural z (solo en caso homogéneo), md
- $k_{in}$  = Permeabilidad de la matriz inorgánica, md
- $k_{org}$  = Permeabilidad de la matriz orgánica, md
- $\phi_{HF}$  = Porosidad de fractura hidráulica, fracción
- $\phi_{NF}$  = Porosidad de fractura natural (solo en caso homogéneo), fracción
- $\phi_{in}$  = Porosidad de la matriz inorgánica, fracción
- $\phi_{org}$  = Porosidad de la matriz orgánica, fracción
- $c_{tHF}$  = Compresibilidad total de fractura hidráulica, psi-1
- $c_{tNF}$  = Compresibilidad total de fractura natural, psi-1

- 
- $c_{tin}$  = Compresibilidad total de la matriz inorgánica, psi-1  
 $c_{torg}$  = Compresibilidad total de la matriz orgánica, psi-1  
 $d_{fx}$  = Dimensión fractal en dirección x, adimensional  
 $d_{fy}$  = Dimensión fractal en dirección y, adimensional  
 $d_{fz}$  = Dimensión fractal en dirección z, adimensional  
 $\theta_x$  = Índice de conectividad en dirección x, adimensional  
 $\theta_y$  = Índice de conectividad en dirección y, adimensional  
 $\theta_z$  = Índice de conectividad en dirección z, adimensional  
 $L_x$  = Longitud característica x, pies  
 $\sigma_{orgtoin}$  = Factor de forma de matriz orgánica e inorgánica, 1/ft<sup>2</sup>  
 $\sigma_{NF}$  = Factor de forma de la matriz (Solo en el caso homogéneo),  
1/ft<sup>2</sup>  
 $p_{base}$  = Presión base, psia  
 $p_{max}$  = Presión máxima, psia  
 $\gamma_g$  = Gravedad específica del gas, adimensional  
 $y_{N_2}$  = Fracción molar de N<sub>2</sub>, fracción  
 $y_{CO_2}$  = Fracción molar de CO<sub>2</sub>, fracción  
 $y_{H_2S}$  = Fracción molar de H<sub>2</sub>S, fracción  
 $T_F$  = Temperatura, F°  
 $p_0$  = Presión inicial, psia  
 $c_\beta$  = Constante de flujo no Darcy, m<sup>1.5</sup>  
 $n_{HF}$  = Número de fracturas hidráulicas  
 $q$  = Caudal constante, ft<sup>3</sup>/d  
 $\alpha_{NF}$  = Orden de la derivada temporal fraccionaria de las fracturas  
naturales, adimensional
-

- 
- $\alpha_{in}$  = Orden de derivada temporal fraccionaria de la matriz inorgánica, adimensional
- $\alpha_{org}$  = Orden de derivada temporal fraccionaria de la matriz orgánica, adimensional
- $\tau$  = Tortuosidad, adimensional
- $\alpha_r$  = Coeficiente de acomodo del momento tangencial, fracción
- $V_L$  = Volumen de Langmuir, ft<sup>3</sup>
- $p_L$  = Presión de Langmuir, psi
- $p_{wf}$  = Presión de flujo de fondo de pozo, psi
- $a_1$  = Exponente empírico de la función porosidad-esfuerzo para las correlaciones del modelo geomecánico, psi<sup>-1</sup>
- $c_1$  = Exponente empírico para la función de porosidad-permeabilidad para las correlaciones del modelo geomecánico, adimensional
- $\phi_{r1}$  = Porosidad residual a esfuerzo altamente infinito,  $\phi_{r1} \ll \phi_0$ , adimensional

---

# Capítulo 1

## Introducción

Los combustibles fósiles son actualmente la principal fuente de energía capaz de abastecer las necesidades de consumo diario que se tienen a nivel nacional, donde más del 75% del combustible es importado.

En México, toda la producción de gas y aceite se obtiene de yacimientos convencionales, ubicados en tierra y en aguas someras, donde la mayoría están en etapa de declinación. Los yacimientos no convencionales y en aguas profundas todavía no están en explotación. Esta situación nos deja un panorama de yacimientos a explotar, para los próximos 30 años, constituido de yacimientos en etapas maduras, no convencionales y en agua profundas, donde estos dos últimos constituyen al menos el 43% de las reservas nacionales de crudo. En general, la recuperación de hidrocarburos de yacimientos maduros es baja tanto a nivel nacional como internacional, y la de yacimientos no convencionales es en general también muy baja a nivel mundial, parte de la baja recuperación se debe a una pobre caracterización y modelado del medio poroso.

En todos estos casos, se requerirá la implementación de herramientas y tecnología que aumentarán el costo de producción del barril del petróleo, dejando como principal tarea de la industria petrolera el poder generar modelos y tecnologías que permitan hacer rentable la explotación en estos yacimientos.

La contribución de este trabajo de investigación es proponer y resolver numéricamente un modelo para describir el flujo de gas para el caso de yacimientos no convencionales los cuales son naturalmente fracturados, incluyendo la presencia de pozos hidráulicamente fracturados, donde se tomen en consideración múltiples mecanismos de flujo, propios de sus características petrofísicas.

---

Los yacimientos de gas de lutitas se identifican por ser de ultra-baja permeabilidad, muy baja porosidad y presentar microfracturas naturales previas a los procesos de fracturamiento hidráulico.

Posterior al fracturamiento hidráulico, la densidad de fracturas naturales va incrementando conforme hay mayor proximidad a la cara de las fracturas hidráulicas, para captar la complejidad de este tipo de redes de fracturas se usó geometría fractal en el estudio.

Estos yacimientos han mostrado ser ricos en materia orgánica por lo que la matriz rocosa es un medio heterogéneo formado por la porosidad orgánica e inorgánica, la cual debe ser considerada debido a que conforme se agota la presión del yacimiento surge el proceso de desorción de gas a partir de su estado original adsorbido.

Debido al tamaño de los poros, las colisiones moleculares con las paredes son mucho más fuertes por lo que otro de los mecanismos que se presentan para el transporte de flujo son el deslizamiento y la difusión de Knudsen.

Estos medios porosos muestran efectos de histéresis los cuales son capturados por medio de derivadas parciales temporales fraccionales en la ecuación de continuidad. En las fracturas hidráulicas se puede presentar flujo de alta velocidad, es decir, flujo no-Darciano. Dentro del modelo, se consideran los efectos que tiene las caídas de presión. Por lo que a la par del modelo de flujo de fluido se resuelve el modelo de esfuerzos-deformaciones. Es decir, se va a considerar que la permeabilidad, porosidad y compresibilidad son funciones de la presión de poro, es decir del tiempo.

Como resultado de esta tesis se generará un simulador en diferencias finitas que resuelve todas las ecuaciones mencionadas de una manera implícita, una validación con un simulador comercial para los casos que este último maneja, y se generan algunos resultados del modelo desarrollado.

---

## Objetivo

Realizar un modelado numérico de flujo de fluidos en yacimientos no convencionales naturalmente fracturados anisotrópicos con geometría fractal en la densidad y conectividad de fracturas, considerando una formulación fraccional y fractal continua, para capturar la difusión anómala presente en este tipo de yacimientos. Tomar en cuenta las propiedades petrofísicas de este tipo de yacimientos para el establecimiento del problema analítico, considerando flujo primario a través de la red de fracturas.

Desarrollar un simulador numérico para predecir el comportamiento de la producción de gas en pozos horizontales con fracturas hidráulicas en yacimientos de lutitas fracturadas naturalmente considerando fenómenos de absorción/desorción de materia orgánica, flujo de deslizamiento, difusión de Knudsen, difusión fraccional y geometría fractal en la red de fracturas naturales.

---

## Capítulo 2

### Revisión bibliográfica

La producción de gas en formaciones de gas de lutitas requiere que el gas fluya hacia pozos horizontales con múltiples fracturas hidráulicas en estas formaciones. Por lo tanto, una comprensión de los principios que gobiernan el flujo de gas en estos medios porosos es esencial para determinar el agotamiento del gas de estas formaciones de lutitas.

La presente revisión, constituye las expresiones y flujo de ideas que llevaron al desarrollo del modelo de flujo de fluidos presentado en esta tesis.

#### 2.1 Descripción del sistema de estudio

Los yacimientos de estudio están compuestos por lutitas, una roca sedimentaria de grano fino que se fractura fácilmente. Este tipo de roca se formó a partir de la deposición de sedimentos orgánicos y posterior diagénesis, con partículas muy pequeñas de sedimentos, inferior a 0.06 mm, limo y arcilla, integrados por minerales como cuarzo, feldespato, illita, clorita, caolinita, esmectita e hidrómica (Dayal 2017). El espesor de estos yacimientos suele estar entre los 30 a 90 m, a profundidades características de 2 km o más, que se extienden sobre zonas de miles de kilómetros cuadrados. Por lo que la matriz de roca presenta dos tipos de porosidad: **orgánica**, con gargantas de poro del orden de 0.5 a 100 nm e **inorgánica** con radios de poro sobre 100 nm, resultando en un medio altamente heterogéneo, naturalmente fracturado.

La lutita carbonosa o negra contiene más del 1% de materia orgánica, hasta el 15%, y pueden contener gas o petróleo, donde la roca actúa como fuente y almacén de un sistema petrolero no convencional. Su estructura se caracteriza por una laminación muy fina. Sus

poros son muy pequeños y su permeabilidad muy baja, por lo que los fluidos (agua, gas y petróleo) no se mueven con facilidad dentro de la roca.

El petróleo se aloja tanto en la matriz porosa como en las fracturas naturales. Mientras que el gas se encuentra almacenado en tres formas distintas:

- Gas libre comprimido dentro de la matriz porosa de la roca o dentro de sus fracturas naturales.
- Gas adsorbido a la materia orgánica y a las superficies minerales dentro de las fracturas naturales y la matriz porosa.
- Gas disuelto en el Kerógeno o en el petróleo.

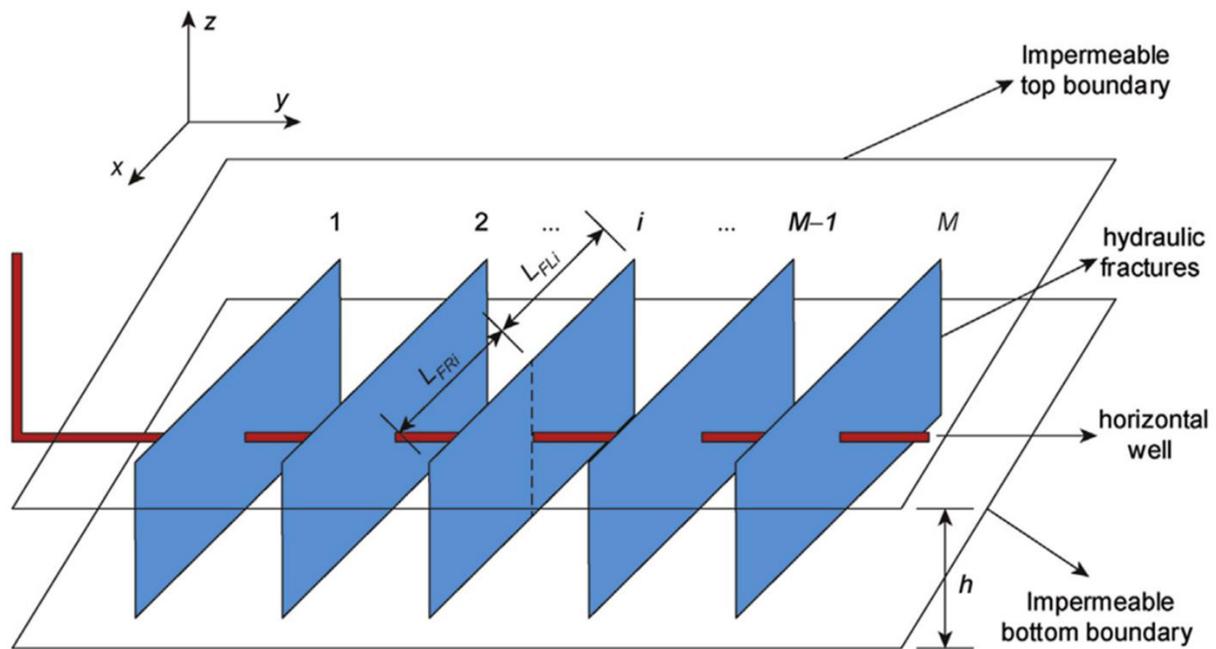


Figura 2.1. Esquema del sistema yacimiento-pozo horizontal-fracturas hidráulicas en conjunto con el sistema de coordenadas (Gu, et al. 2017).

Comúnmente se emplea una distribución optimizada de pozos horizontales a lo largo de un yacimiento con múltiples fracturas hidráulicas transversales para mejorar la productividad de este tipo de yacimientos de ultra-baja permeabilidad. Los pozos horizontales tienen una longitud de entre 1 a 8 km. Las fracturas hidráulicas pueden tener aproximadamente una altura y largo de 30 y 200 m, respectivamente, con anchos del orden de milímetros y espaciamientos entre fracturas del orden de 100 m. Posterior al

---

fracturamiento hidráulico, la densidad de fracturas naturales va incrementando conforme hay mayor proximidad a la cara de las fracturas hidráulicas, debido a la energía usada en este tipo de estimulación.

El gas de lutita está compuesto de 90% de metano con una pequeña cantidad de etano, butano y pentano. El gas de lutita es un gas inodoro casi sin azufre o nitratos.

## 2.2 Ecuaciones de flujo

Se enlistan las ideas y conceptos revisados en la realización de este trabajo de investigación:

### 2.2.1 Derivada fraccional de Caputo

El cálculo fraccional ha ganado popularidad durante los últimos años en cada vez más áreas de ciencias e ingeniería, debido a que varios procesos físicos, como la difusión o flujo de fluidos, pueden ser modelados considerando alguna de las múltiples definiciones de derivada fraccional existentes. Las definiciones de derivada fraccional son de carácter no local contrastante con la definición clásica, lo cual las vuelve mucho más generales.

En particular, la establecida por el físico matemático Michele Caputo en 1967 permite entender el papel físico que ocupan las condiciones iniciales dentro de la definición y se usa para modelar la derivada temporal de manera fraccional. Para una función  $f(t)$  definida en un intervalo  $[a, b]$ , con  $a < t < b$ , la derivada fraccional de orden  $\alpha$  de  $a$  a  $t$  se establece como:

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_a^t f^{(p)}(\tau) (t-\tau)^{p-1-\alpha} d\tau \quad (2.1)$$

donde  $p$  es un entero tal que  $p-1 < \alpha < p$  y  $\Gamma$  es la función Gamma:

---


$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{x-1} dv \quad (2.2)$$

Para el caso de una ecuación de difusión se considera que  $a = 0$ , ya que generalmente se establece como el tiempo inicial. Si  $p = 1$ ,  $0 < \alpha < 1$  y la ecuación (2.1) puede reescribirse como:

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.3)$$

Cuando  $\alpha \in \mathbb{N}$ , las derivadas de Caputo coinciden con las derivadas clásicas, excepto por el signo de la derivada correcta. La convolución integral en la ecuación (2.3) implica que la derivada fraccional tendrá en cuenta las dependencias temporales de largo alcance de la función, esto constituye la naturaleza hereditaria, a menudo denominada como efecto de memoria de la difusión anómala en un campo de velocidad heterogéneo, donde la tasa de cambio instantánea depende de estados previos.

Caputo también introdujo la transformada de Laplace de su derivada fraccional, estableciéndola como:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}\right\}(s) = s^\alpha \bar{p} - s^{\alpha-1} p(0) \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Ecuación fraccional para difusión anómala

La ecuación de difusión clásica se obtiene mediante el acoplamiento de una ley constitutiva en forma de la ley de Darcy con una ecuación de conservación para producir una ecuación diferencial parcial parabólica de la forma:

$$\nabla^2 p = D \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.5)$$


---

---

Donde el fenómeno de transporte de fondo es el movimiento aleatorio Browniano de partículas en un medio homogéneo, para el cual la aproximación matemática más simple viene dada por una caminata aleatoria. El desplazamiento de partículas resultante se describe mediante una función de densidad de probabilidad normal (o Gaussiana). El desplazamiento cuadrático medio de partículas es directamente proporcional al tiempo:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t \quad (2.6)$$

Todo transporte de partículas que no sigue el movimiento Browniano es conocido como difusión anómala y, por tanto, no puede describirse con precisión mediante la ecuación de difusión normal (Meerschaert 2012). En consecuencia, el proceso general de difusión evolucionará más rápido o más lento que en el caso normal:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^\alpha \quad (2.7)$$

Casos donde  $\alpha < 1$  se llaman subdifusión,  $\alpha > 1$  corresponde a superdifusión y  $\alpha = 1$  a la difusión normal,  $\alpha$  depende de la tortuosidad o la presencia de trampas del medio.

El fenómeno de la difusión anómala se puede modelar matemáticamente mediante una ecuación diferencial parcial fraccional. Chang y Yortsos (1990) presentaron por primera vez la teoría de la difusión fractal para realizar análisis de presión transitoria para yacimientos naturalmente fracturados (NFR, por sus siglas en inglés), considerando una distribución de fracturas desordenada y a diferentes escalas.

Camacho-Velásquez et al. (2008) presentaron las expresiones para identificar la respuesta de gasto y producción acumulada durante períodos de flujo transitorio y límite de frontera dominante. Estas expresiones, consideran la propuesta de Metzler (1994) para describir la difusión anómala asociada en medios fractales complejos o desordenados, una extensión del trabajo de O'Shaughnessy y Procaccia (1985), donde se incluía una derivada temporal fraccional, como se muestra a continuación:

$$\frac{\Gamma(1-\gamma)c\mu}{m} \left( \frac{\mu c r_w^{\theta+D}}{m} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial^\gamma p}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{r^{\beta+\theta}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\beta \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (2.8)$$

---

donde  $\gamma = \frac{D}{\theta+D}$ , siendo  $D$  la dimensión Euclidiana,  $\theta$  la conectividad de la red de fracturas con  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\beta = d_f - \theta - D$ ,  $m$  es el parámetro de red de fractura en un sistema fractal,  $c$  es la compresibilidad,  $\mu$  es la viscosidad,  $r_w$  es el radio del pozo y  $d_f$  es la dimensión fractal de Hausdorff.

### 2.2.3 Ecuación de continuidad

El objetivo de desarrollar modelos para el flujo de fluidos en medios porosos es comprender mejor y predecir el comportamiento de los pozos productores y, como consecuencia, estimar su recuperación final, así como optimizar el diseño de perforación y terminación, y mejorar la operación de los pozos futuros. En los yacimientos no convencionales, uno de los mayores desafíos consiste en caracterizar y modelar con precisión el flujo dentro del SRV, para estimar con precisión la producción y las reservas futuras. Los enfoques comunes incluyen modelos basados en redes de fractura discreta y modelos analíticos o numéricos de doble o múltiple porosidad. Sin embargo, en las últimas dos décadas, las representaciones fractales de yacimientos fracturados naturalmente y los modelos que usan derivadas fraccionales para capturar la difusión anómala han llamado la atención como posibles alternativas al modelo de flujo de fluidos en estas formaciones nanoporosas complejas.

A continuación, se revisan los diferentes modelos de flujo utilizados en yacimientos no convencionales.

Las redes de fracturas discretas (DFN, por sus siglas en inglés) son modelos geológicos de cuadrícula fina en los que las fracturas inducidas y naturales se representan explícitamente. Las propiedades de fractura, incluida su geometría, su morfología, orientación, echado, y su distribución en todo el sistema se deben describir en detalle (Narr et al. 2006). Generar DFN realistas requiere que se recopilen grandes cantidades de datos a través de análisis sísmico, de registros y de núcleo. Estos estudios de caracterización no solo son costosos y lentos; también requieren el desarrollo y uso de herramientas y técnicas capaces de realizar mediciones precisas a escalas finas. Las fracturas cercanas al pozo detectadas en los registros de imágenes se modelan de manera determinista, mientras que las más pequeñas

---

se generan estocásticamente (La Pointe et al. 1998). La caracterización de redes de fracturas discretas es prácticamente imposible en sistemas fracturados complejos. Además, la solución de las ecuaciones de flujo de fluidos en estos modelos discretos tiene un alto costo computacional. Como consecuencia, el uso de DFN no es adecuado para el análisis rutinario del comportamiento de los pozos horizontales.

Raghavan (2011) presentó la ecuación de continuidad derivada de una ecuación de balance de materia para medios complejos, usando la derivada temporal fraccional, buscando la consistencia de los principios de conservación:

$$\nabla \cdot [\lambda \nabla p] = \phi c \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \quad (2.9)$$

Donde la movilidad es  $\lambda = \frac{k}{\mu}$ ,  $k$  es la permeabilidad,  $\phi$  es la porosidad y  $\alpha$  es el orden de la derivada fraccional comprendido entre 0 y 1, considerando la definición de derivada fraccional de Caputo y donde  $\alpha = 1$  representa la ecuación de continuidad clásica.

#### 2.2.4 Ley de flujo

La ley de Darcy modificada que se usa para relacionar el movimiento fluido con la presión y los gradientes gravitacionales, también presentada por Raghavan es expresada como:

$$\vec{q} = -\frac{k_\gamma}{\mu} \frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial t^{\gamma-1}} [\nabla p] \quad (2.10)$$

La cual establece la relación entre el flujo y el gradiente de presión a través de su historia y una teoría de no-localidad.  $\vec{q}$  es la velocidad del fluido,  $\mu$  es la viscosidad y  $k_\gamma$  es la permeabilidad modificada.

La combinación de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy modificadas conducen a una ecuación diferencial de transferencia de fluidos diferente a la tradicional.

Para obtener representaciones más precisas de las variaciones a escala de poro en yacimientos fracturados de forma natural, se han propuesto extensiones de porosidad

---

múltiple. El modelo más utilizado para modelar flujo en yacimientos naturalmente fracturados corresponde al presentado por Warren y Root (1963) donde se establece el concepto de tamaño de bloque que supone fracturas homogéneamente distribuidas y totalmente interconectadas, este trabajo se inspira en el de Zheltov y Kochina (1960) que en principio sólo introdujo el término de factor de forma para definir el flujo de transferencia entre matriz y fractura. Con el enfoque fractal se puede distribuir el tamaño del bloque en función de la escala (Fuentes-Cruz y Valkó 2015; Valdes-Perez y Blasingame 2018) o, de forma más general, la consideración del factor de forma de la matriz en función de la escala.

Abdassah y Ershaghi (1986) utilizaron un modelo de triple porosidad, en el que el flujo hacia una red de fracturas homogénea ocurre desde dos matrices continuas distintas bajo flujo transitorio, lo que resulta en diferentes respuestas características durante la transición de los regímenes de flujo dominados por la fractura a los dominados por la matriz. Jalali y Ershaghi (1987) investigaron el impacto de la transferencia simultánea de matriz/fractura transitoria y pseudoestacionaria para emular el impacto de los bloques de matriz de baja y alta permeabilidad, respectivamente. Alternativamente, Al-Ghamdi y Ershaghi (1996) introdujeron un modelo de doble red de fracturas en el que un continuo de matriz y dos conjuntos de redes de fractura, que consisten en micro y macro fracturas, están conectados en paralelo (microfracturas y alimentación de matriz en macrofracturas) o en serie (flujo de matriz a microfracturas y de microfracturas a macrofracturas).

Algunos modelos que consideran estos mecanismos de flujo son una versión modificada del modelo de doble porosidad (Ozkan, et al. 2010) y mediante el modelado multiporoso (Jiménez y Aguilera 2019).

### **2.2.5 Flujo no Darciano en fractura hidráulica**

El flujo no Darciano ocurre a altas velocidades o flujo turbulento, el coeficiente de arrastre inercial o factor de turbulencia,  $\beta$ , es definido por la ecuación de Forchheimer, que para un sistema lineal que viene dado por (Wu, et al. 2012):

---


$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu v}{k} \left( 1 + \frac{\beta k \rho v}{\mu} \right) \quad (2.11)$$

donde  $\frac{\partial p}{\partial x}$  es el gradiente de presión fluyente,  $v$  es la velocidad del fluido (tasa de flujo dividido entre el área de sección transversal),  $\rho v^2$  es el término de flujo inercial. La ecuación anterior indica que el gradiente de presión requerido para mantener una tasa de flujo a través de un medio poroso es mayor que el determinado a través de la ecuación de Darcy debido a que el término  $\beta \rho v^2$  no puede ser despreciado. Reescribiendo la ecuación:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu v}{k} + \beta \rho v |v| \quad (2.12)$$

Esta ecuación es importante para los casos de régimen de flujo turbulento, los regímenes de flujo son clasificados por medio del Número de Reynolds,  $R$ :

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} \quad (2.13)$$

Donde  $v$  es la velocidad del flujo en [m/s] y  $d$  es el diámetro de la tubería. En la ecuación (2.11) el término  $\frac{k}{\mu} \beta \rho v$  puede reconocerse como un pseudo número de Reynolds,  $Re_{pse}$ , que es la relación de fuerzas inerciales a viscosas. Si el pseudo número de Reynolds es casi cero, entonces la mayor parte del gradiente de presión se debe al flujo viscoso y se aplica la ecuación de Darcy. Si  $Re_{pse} = 1$ , se requiere tanta caída de presión para superar la resistencia inercial como la viscosa, por lo que el efecto es significativo (Jones 1987).

El flujo turbulento ocurre cuando hay un flujo de gas de alta velocidad, que puede ser el caso de fracturas hidráulicas altamente permeables. Esta ecuación es importante debido a que en se ha observado el efecto que tiene en las pendientes en los periodos transitorios, mostrando que la pendiente semilogarítmica puede ser mayor que la observada para el caso laminar y está en función del número de Reynolds, definido para el flujo en medios porosos por Camacho-Velázquez et al. (1996).

---

### 2.2.6 Ecuación de estado

Ecuación de gases reales a partir de un gas ideal, usada ampliamente para el caso de gas natural considerando el factor de corrección, factor de compresibilidad,  $Z$  (Guo 2019).

$$pV = nZRT \quad (2.14)$$

donde  $V$  representa el volumen,  $n$  el número de moles,  $T$  es la temperatura y  $R$  es la constante universal de los gases ideales  $R = 8.314472 \frac{J}{mol \cdot K}$ . En conjunto con la relación de número de moles con masa,  $m$ , y masa molecular,  $M$ :

$$n = \frac{m}{M} \quad (2.15)$$

La densidad relativa de una mezcla de gases se define como la relación de la densidad del gas a la densidad del aire seco, ambas densidades se expresan a las mismas condiciones de presión y temperatura, es decir:

$$\gamma_g = \frac{\rho_g}{\rho_{aire}} \quad (2.16)$$

Con lo que se obtiene la expresión de cálculo para densidad:

$$\rho = \frac{\gamma_g M_{aire} p}{ZRT} \quad (2.17)$$

### 2.2.7 Pseudo-presión

Las propiedades del gas como viscosidad y compresibilidad son altamente dependientes de la presión, lo cual agrega una no linealidad adicional a la descripción de flujo de gas.

---

Por lo que para su tratamiento se define la pseudo presión o potencial real del gas de gas, definida como:

$$m = \int_0^p \frac{2p}{\mu Z} dp \quad (2.18)$$

### 2.2.8 Geometría fractal

La lutita es una roca que por génesis presenta múltiples microfracturas de muy baja permeabilidad. Después de un proceso de fracturamiento hidráulico, la estimulación no se genera un sólo plano.

Se usan las expresiones de ley de potencias para expresar la porosidad y permeabilidad fractal, dependiente de la escala, en la dirección Y, perpendicular a la cara de la fractura hidráulica (Chang y Yortsos 1990).

$$k_y = k_{FH} \left( \frac{y}{\frac{w_F}{2}} \right)^{d_{fy} - \theta_{fy} - D} \quad (2.19)$$

Expresiones similares se usan para las direcciones x y z.

La porosidad se expresa de la siguiente manera:

$$\phi = \frac{\phi_{FH}}{3} \left\{ \left( \frac{x}{\frac{w_F}{2}} \right)^{d_{fx} - 1} \left( \frac{y}{\frac{w_F}{2}} \right)^{d_{fy} - 1} \left( \frac{z}{\frac{w_F}{2}} \right)^{d_{fz} - 1} \right\} \quad (2.20)$$

Donde  $k_{FH}$  y  $\phi_{FH}$  es la permeabilidad y porosidad en la fractura hidráulica y  $w_F$  es el ancho de la fractura hidráulica.

De esta manera se captura el efecto que tiene la fractura hidráulica en las fracturas naturales en el SRV.

---

---

Una suposición adicional es que el factor de forma para la transferencia de fluido entre la matriz y el sistema de fracturas naturales puede distribuirse de una forma similar a la porosidad, de manera que:

$$\sigma = \sigma_{ref} \left( \frac{x}{\frac{w_F}{2}} \right)^{d_{fx}-1} \left( \frac{y}{\frac{w_F}{2}} \right)^{d_{fy}-1} \left( \frac{z}{\frac{w_F}{2}} \right)^{d_{fz}-1} \quad (2.21)$$

Donde se considera un valor de referencia  $\sigma_{ref}$  como el valor máximo del factor de forma pegado a la fractura hidráulica.

Con la definición de la ecuación (2.19) es factible que a  $y = \frac{x_{eF}}{2}$ , donde  $x_{eF}$  es la distancia entre fracturas hidráulicas, la permeabilidad sea mayor que la permeabilidad original de las fracturas naturales en la dirección  $y$ . Para evitar esto se puede comenzar con  $y = \frac{x_{eF}}{2}$ , considerando que ahí la  $k = k_{original}$ , la permeabilidad original del sistema de microfracturas naturales, y avanzar hacia la fractura hidráulica, donde en  $y = \frac{w_F}{2}$  la permeabilidad de las fracturas naturales debe ser menor o igual a la de las fracturas hidráulicas.

## 2.3 Mecanismos de flujo

La ecuación convencional de Darcy no puede capturar completamente la física del flujo en los nanoporos de las lutitas, y el flujo de gas en los poros a nano escala debe considerar los efectos submicrométricos como la difusión y el deslizamiento, por lo que los poros con diferentes diámetros contribuyen de manera diferente al flujo de gas, y se necesita un enfoque más riguroso para describir el flujo de gas en lutitas multiescala. Por lo tanto, se requiere capturar la sub-difusión, la cual es más lenta que la difusión normal representada por la ecuación de Darcy.

---

### 2.3.1 Número de Knudsen

Los regímenes de flujo de gas en lutitas se clasifican por el número de Knudsen, que se ve reflejado en la construcción de una permeabilidad aparente de las lutitas durante la producción del gas.

El número Knudsen,  $Kn$ , se define como la relación de la ruta libre media molecular  $l$  y el radio de poro  $r$ , que es un parámetro adimensional ampliamente reconocido para determinar el grado de adecuación del modelo continuo (Wu, et al. 2016):

$$k_n = \frac{\lambda}{r} \quad (2.22)$$

Donde  $\lambda$  es el camino libre medio, la distancia promedio que una molécula de gas puede moverse libremente antes de colisionar con otras moléculas:

$$\lambda = \frac{\mu}{p} \sqrt{\frac{\pi ZRT}{2MM}} \quad (2.23)$$

En donde  $\mu$  es la viscosidad del gas ( $\text{pa} \cdot \text{s}$ ),  $p$  es la presión del gas (MPa),  $R$  constante universal de los gases ( $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ),  $T$  la temperatura del yacimiento (K),  $M$  es la masa molar del gas ( $\text{kg}/\text{mol}$ ) y  $Z$  el factor de desviación del gas.

Los regímenes de flujo de gas se pueden clasificar en cuatro categorías según el número de Knudsen, Tabla 1: (1) flujo continuo, (2) flujo de deslizamiento, (3) flujo de transición y (4) flujo de molécula libre.

El número de Knudsen aumenta cuando baja la presión o disminuye el diámetro de la garganta del poro.

Flow regime	Knudsen number <sup>a,b</sup>	Model to be applied	Comment
Continuum (Viscous) flow	$Kn < 0.01$	Darcy's equation for laminar flow and Forchheimer's equation for turbulent flow	Assumes immobile fluid at the pore wall. Hence, no permeability correction is generally required
Slip flow	$0.01 < Kn < 0.1$	Darcy's equation with Klinkenberg or Knudsen's correction	Knudsen's correction is more accurate, but Klinkenberg's correction is easier and, as a result, is generally implemented
Transition flow	$0.1 < Kn < 10$	Darcy's law with Knudsen's correction can be applied. Alternative method is Burnett's equation with slip boundary conditions <sup>c</sup>	Knudsen's diffusion equation is a more reliable approach, especially when Kn is closer to 10
Knudsen's (Free Molecular) Flow	$Kn > 10$	Knudsen's diffusion equation <sup>d</sup> Alternative methods are DSMC and Lattice Boltzmann <sup>c</sup>	Usually occurs in shale formations where the pore-throat radius is very small

Tabla 2.1. Clasificación de regímenes de flujo y número de Knudsen para medios porosos (Ziarani y Aguilera 2012).

En el régimen de flujo continuo, la condición de límite antideslizante es válida y el flujo de gas es lineal, en este caso es válido aplicar la ley de Darcy.

A medida que aumenta el número de Knudsen, los efectos de rarefacción, que es la pérdida o disminución de la densidad de una sustancia, se vuelven más significativos, y la suposición del continuo se rompe eventualmente, por lo que, para los regímenes de flujo distintos al flujo continuo, la ecuación tradicional de la ley de Darcy ya no es aplicable.

Por lo tanto, podemos concluir que el flujo de gas en los yacimientos de gas de lutitas es un proceso de flujo de múltiples escalas que incluye principalmente flujo continuo, flujo deslizando y flujo de transición.

El efecto de deslizamiento de la velocidad y difusión molecular del gas surge de la interacción entre las moléculas y la pared de los poros. En estado de gas, las moléculas se siguen moviendo en direcciones aleatorias con la velocidad térmica. Este efecto se puede caracterizar por un factor de desviación del gas real, la viscosidad y el camino libre medio de las moléculas.

---

Cuando el diámetro del poro llega a ser lo suficientemente estrecho como para ser comparable con el camino libre medio de las moléculas de gas, las moléculas de gas con frecuencia colisionarán con las paredes del canal de flujo. El gas dentro de tales canales de flujo estrechos se vuelve enrarecido y posee ciertas características de transporte únicas.

### 2.3.2 Efecto Klinkenberg

Cuando  $0.001 < Kn < 0.1$ , la permeabilidad absoluta para la fase gaseosa se escribe en función de la presión del gas como:

$$k_{deslizamiento} = k_{\infty} \left( 1 + \frac{b}{p} \right) \quad (2.24)$$

Conocida como Efecto Klinkenberg, donde  $k_{\infty}$  es la permeabilidad constante de la fase gaseosa absoluta bajo una presión muy grande (cuando se minimiza el efecto Klinkenberg) y  $b$  es el factor de Klinkenberg, dependiendo de la estructura de poros del medio y la temperatura de formación. Klinkenberg postuló esta expresión con base en experimentos en 1941.

Cuando el radio de poro disminuye de microescala a nanoescala, el flujo de gas experimenta una transición del régimen de Darcy al flujo deslizante y al flujo de transición. Mientras los líquidos poseen una velocidad de cero al contacto con la superficie de los granos de la roca, los gases presentan una velocidad finita en la superficie de los granos, es decir, los gases exhiben deslizamiento en las superficies de la roca.

Se espera que este efecto sea mayor para el caso de yacimientos de lutita debido a los nanoporos de la roca y a la baja permeabilidad asociada.

---

### 2.3.3 Difusión de Knudsen

Cuando  $Kn > 1$ , el transporte de gas está dominado por las colisiones entre las moléculas de gas y las paredes de los poros, lo que se denomina difusión de Knudsen. La difusión de Knudsen es dominante para los poros cuyo diámetro promedio varía entre 2 nm y 50 nm, que es comparable o menor que el camino libre medio de las partículas (Darabi, et al., 2012).

Si el diámetro de los poros es más pequeño que el camino libre medio de las moléculas de gas que se difunden y la densidad del gas es baja, las moléculas de gas chocan con las paredes de los poros con más frecuencia que entre sí.

Roy, et al. (2003) demostró que la difusión de Knudsen en nanoporos puede escribirse en forma de gradiente de presión. Se describe el flujo másico de gas por difusión con efectos viscosos insignificantes en un nanoporo como:

$$J_D = \frac{MD_k}{10^3 RT} \nabla p \quad (2.25)$$

donde  $M$  es la masa molar,  $D_k$  es la constante de difusión de Knudsen,  $R = 8.314 \text{ J/mol/K}$  constante de los gases y  $T$  es la temperatura absoluta en Kelvin. La constante de difusión de Knudsen se define como:

$$D_k = \frac{2r}{3} \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{0.5} \quad (2.26)$$

La masa molar se define como de acuerdo con las ecuaciones (2.15) y (2.16):

$$M = \frac{m}{n} = \gamma_g M_{aire} \quad (2.27)$$

Donde  $m$  es la masa de la sustancia,  $n$  es el No. de moles,  $\gamma_g$  es la densidad relativa del gas y  $M_{aire}$  es la masa molar del aire.

Javadpour (2009) condensa todos estos mecanismos en una permeabilidad aparente, la cual explicaremos a continuación.

---

---

Para un solo capilar, el flujo viscoso y la permeabilidad del flujo deslizante de la fase compresible se pueden expresar como (Huang, et al. 2018):

$$k_{Darcy} = k_{\infty} = \frac{\phi r^2}{8\tau} \Rightarrow r = \left( \frac{8\tau k_{Darcy}}{\phi} \right)^{0.5} \quad (2.28)$$

Donde  $r$  es el radio del poro,  $\tau$  es la tortuosidad del medio, que suele tomarse como  $\tau = 1$ . La ecuación (2.28) despejada permite calcular el radio del poro en función de la permeabilidad y porosidad del medio.

La compresibilidad del gas real es definida por la ecuación (2.29), aumenta a medida que la presión cae, el cambio es significativo cuando se trata de condiciones de baja presión (Zhang, et al. 2015):

$$c_g = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dp} \quad (2.29)$$

Introduciendo (2.23) en (2.22), obtenemos que el número de Knudsen se escribe como:

$$Kn = \frac{\mu}{rp} \left( \frac{\pi ZRT}{2M} \right)^{0.5} \quad (2.30)$$

A pesar de que el modelo generalizado no puede cubrir todos los regímenes de flujo, es completamente aplicable el flujo viscoso y el flujo deslizante cuando  $Kn \leq 1$ . Por lo tanto, el factor de corrección para la permeabilidad se puede introducir para caracterizar el flujo viscoso impulsado por la presión y el flujo de deslizamiento. La permeabilidad de flujo viscoso o flujo de deslizamiento de la fase compresible impulsada por la diferencia de presión se puede expresar como:

$$k_{deslizamiento} = k_{Darcy} f(Kn) = k_{Darcy} \left( 1 + \frac{b}{p} \right) \quad (2.31)$$

Donde el factor de Klinkenberg,  $b$ , se define como (Singh, et al. 2014):

---


$$b = \frac{\mu}{r} \left( \frac{2}{\alpha_r} - 1 \right) \left( \frac{8\pi RT}{M} \right)^{0.5} \quad (2.32)$$

Donde  $\alpha_r$  es el coeficiente de acomodación del momento tangencial, fracción.

La permeabilidad al flujo viscoso y al flujo de deslizamiento sin considerar el coeficiente de ponderación se puede expresar como (Beskok y Karniadakis 1999):

$$k_{deslizamiento} = k_{Darcy} [1 + \alpha_{Kn} Kn] \left[ 1 + \frac{4kn}{1 + kn} \right] \quad (2.33)$$

donde  $\alpha_{Kn}$  es el coeficiente de rarefacción del gas ideal; deducida por Beskok y Karniadakis (1999) basándose en muchos experimentos:

$$\alpha_{Kn} = \frac{128}{15\pi^2} \tan^{-1}[4Kn^{0.4}] \quad (2.34)$$

Definimos la permeabilidad total aparente como:

$$\frac{k_{app}}{k_{Darcy}} = F_{Knudsen} + F_{viscous+slip} \quad (2.35)$$

Donde  $F_{Knudsen}$  esta estimado como en la ecuación (2.36) de las ecuaciones (2.26), (2.29) y (2.30):

$$F_{Knudsen} = c_g \mu D'_K f_{Knudsen} \quad (2.36)$$

$$D'_K = \frac{D_K}{k_{Darcy}} = \frac{28}{3r} \left( \frac{8ZRT}{\pi M} \right)^{0.5} \quad (2.37)$$

$$f_{Knudsen} = \frac{1}{1 + \frac{1}{kn}} \quad (2.38)$$

Se establece  $F_{viscous+slip}$  como un caso general de  $F = 1 + \frac{b}{p}$  de la ecuación (2.31):

---


$$F_{viscous+slip} = f_{Darcy} + \frac{b}{p} \quad (2.39)$$

$$f_{Darcy} = \frac{1 + \alpha_{Kn}kn}{1 + kn} \left[ 1 + \frac{4kn}{1 + kn} \right] \quad (2.40)$$

La ecuación (2.35) se puede escribir finalmente como (Javadpour 2009):

$$\frac{k_{app}}{k_{darcy}} = \frac{2\mu\gamma_g M_{aire}}{3 \times 10^3 RT \rho_{avg}^2} \left( \frac{8RT}{\pi\gamma_g M_{aire}} \right)^{0.5} \frac{8}{r} + \left[ 1 + \left( \frac{8\pi RT}{\gamma_g M_{aire}} \right)^{0.5} \frac{\mu}{p_{avg} r} \left( \frac{2}{\alpha_r} - 1 \right) \right] \frac{1}{\rho_{avg}} \quad (2.41)$$

### 2.3.4 Adsorción-Desorción

El fenómeno de desorción del gas es representado a través de la Isoterma de Langmuir (1916). Para calcular la cantidad de gas adsorbido en la superficie de la roca, se deben hacer mediciones, de contenido de gas e isoterma de adsorción, en laboratorio a muestras de núcleo.

La isoterma de Langmuir es representada por la siguiente ecuación 4:

$$V_E = V_L \frac{p}{p + p_L} \quad (2.42)$$

Donde  $V_E$  es el contenido de gas en scf/ton (volumen estándar adsorbido por unidad de masa de roca),  $p$  es la presión del yacimiento,  $p_L$  es la presión de Langmuir o presión a la cual el 50% del gas se ha desprendido de la superficie y  $V_L$  es el volumen de gas adsorbido a  $p_L$  y depende del contenido de materia orgánica y madurez térmica de la lutita.

El fenómeno se presenta debido a la diferencia de concentración de fluido gaseoso entre el espacio poroso de la matriz o las fracturas naturales y el kerógeno adherido a la roca.

El químico francés Langmuir propuso la ecuación isotérmica de Langmuir en 1918 para analizar la adsorción de gas en superficies sólidas en función de la dinámica molecular. Se aplicaron los siguientes supuestos:

- 
1. La superficie de un adsorbente es uniforme y la adsorción de las moléculas de gas a las superficies de las moléculas sólidas es la adsorción en monocapa;
  2. El proceso de adsorción de gas es dinámico; es decir, las moléculas adsorbidas liberadas por el movimiento térmico pueden volver a la fase gaseosa y, a la inversa, las moléculas en la fase gaseosa pueden reabsorberse en las superficies sólidas; cuando se alcanza el equilibrio de adsorción, la tasa de adsorción es igual a la tasa de desorción;
  3. La velocidad de adsorción de la molécula de gas sobre las superficies sólidas es directamente proporcional a la presión parcial de gas de este componente;
  4. No ocurre fuerza de interacción entre las moléculas de gas adsorbidas en las superficies sólidas. Por lo tanto, el intercambio de masa se puede considerar por separado para el gas adsorbido y el gas libre. Es decir, la tasa de adsorción en el área unitaria de una superficie de roca  $J_{ads}$  es:

$$J_{ads} = k_a p (1 - \theta_L) \quad (2.43)$$

$$J_{des} = k_d \quad (2.44)$$

Donde  $\theta_L$  es la cobertura de gas de la superficie de roca porosa,  $k_a$  y  $k_d$  son las tasas de adsorción y desorción de equilibrio del gas (Zhang 2019).

$$q_{ads-des} = -(1 - \phi) \frac{\partial}{\partial t} \left( V_L \frac{p}{p_L + p} \right) \quad (2.45)$$

Donde  $\phi$  es la porosidad del medio. El gas se desorbe de las paredes de los poros de la matriz orgánica debido a la caída de presión, cuando se libera el gas aumenta el radio hidráulico del poro y se produce un flujo deslizante, lo que aumenta la permeabilidad aparente de la matriz orgánica (Swami, et al. 2013).

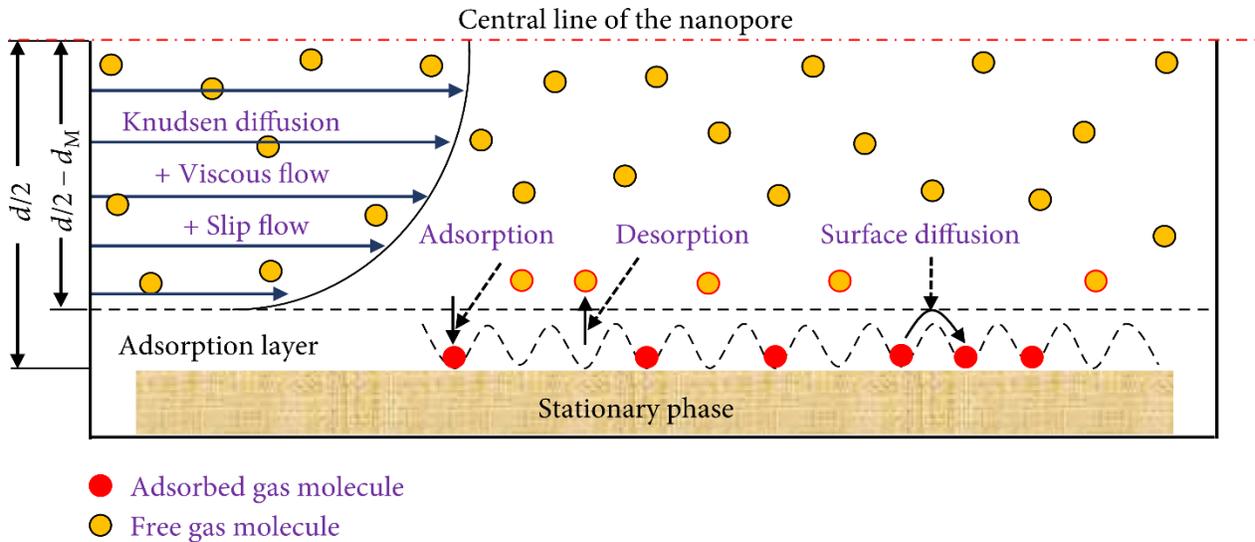


Figura 2.2. Mecanismos de transporte de gas en nanoporos de lutitas (Huang, et al. 2018).

En la Figura 2.2 se observa un resumen de los mecanismos de transporte presente en los nanoporos y el radio de influencia.

## 2.4 Geomecánica de yacimientos

La conductividad de la fractura disminuirá como resultado de la deformación o el cierre inducido por la variación en los esfuerzos debida a la producción (Best y Katsube 1995). Se consideran las siguientes correlaciones empíricas que relacionan porosidad-esfuerzo y permeabilidad-esfuerzo de manera indirecta por medio de la porosidad (Rutqvist et al., 2002):

Para porosidad:

$$\phi = \phi_r + (\phi_0 - \phi_r)e^{a_1 \Delta p} \quad (2.46)$$

Donde  $\Delta p = p - p_0$  representa la variación en el esfuerzo por medio de la variación entre la presión  $p$  al tiempo  $t$  en comparación con la presión inicial  $p_0$ ,  $\phi_0$  es la porosidad en esfuerzo cero o inicial y  $\phi_r$  es la porosidad residual a esfuerzo altamente infinito,  $\phi_{r1} \ll \phi_0$  y  $a_1$  es el exponente empírico de la correlación de porosidad.

---

Para permeabilidad:

$$k = k_0 e^{c_1 \left( \frac{\phi}{\phi_0} - 1 \right)} \quad (2.47)$$

Donde  $k_0$  es la permeabilidad en esfuerzo cero o inicial y  $c_1$  es el exponente empírico de la correlación de permeabilidad.

---

## Capítulo 3

### Formulación matemática

Se presenta la derivación del modelo tridimensional numérico de difusión anómala para flujo monofásico de gas.

En formaciones nanoporosas de lutitas, usualmente la principal contribución al flujo de fluidos proviene del SRV, delimitada por los tamaños característicos de la fractura hidráulica y la penetración perpendicular a la misma. La comunicación de flujo entre el SRV y el pozo horizontal se produce únicamente a través de las fracturas hidráulicas. Consideramos el caso en el que se tienen fracturas hidráulicas idénticas, paralelas entre si y perpendiculares al pozo. En este caso, se considera que las fracturas hidráulicas se abren en la dirección del esfuerzo mínimo principal, que para nuestro sistema coordinado coincide con el eje Y y se propagan en la dirección del esfuerzo máximo y el esfuerzo vertical, relacionado con los ejes X y Z, respectivamente. Por lo que, la dirección principal del flujo es normal a las fracturas hidráulicas. En la Fig. 2.1 se muestra un esquema del sistema yacimiento-pozo horizontal-fracturas hidráulicas en conjunto con el sistema de coordenadas utilizado.

En este caso el sistema estudiado se reduce a un cuarto del volumen de drenaje de una sola fractura hidráulica.

#### 3.1 Modelo de cuatro porosidades

El sistema de ecuaciones se resuelve para pseudo presión considerando la definición establecida en la ecuación (2.18), para ello se realizó un cambio de variable tomando la derivada por ambos lados de esta ecuación con lo que se obtuvo la relación:

---


$$dp = \left[ \frac{\mu Z}{2p} \right] dm \quad (3.1)$$

El sistema de ecuaciones se estableció como:

### 3.1.1 Fractura Hidráulica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (q_{x,Forch}(m_{HF})) + \frac{\partial}{\partial y} (q_{y,Forch}(m_{HF})) + \frac{\partial}{\partial z} (q_{z,Forch}(m_{HF})) + q_{NFtoHF}^* + q_{intoHF}^* \\ + q_{orgtoHF}^* - q_{HF}^* = \phi_{HF} c_{HF} \frac{\partial}{\partial t} [m_{HF}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde  $m_{HF}$  es la pseudo-presión en la fractura hidráulica (HF, por sus siglas en inglés),  $\phi_{HF}$  es la porosidad de fractura hidráulica,  $c_{HF}$  es la compresibilidad total de fractura hidráulica,  $q_{HF}^*$ , el gasto de producción por unidad de volumen,  $q_{NFtoHF}^*$  el gasto de transferencia de fluido por unidad de volumen del sistema de microfracturas naturales a la fractura hidráulica,  $q_{intoHF}^*$  el gasto de transferencia de fluido por unidad de volumen de matriz inorgánica a la fractura hidráulica,  $q_{orgtoHF}^*$  el gasto de transferencia de fluido por unidad de volumen de matriz orgánica a la fractura hidráulica, y  $q_{x,Forch}$ ,  $q_{y,Forch}$ ,  $q_{z,Forch}$  la velocidad del flujo en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  resultantes de resolver el par de ecuaciones de Forchheimer para cada coordenada (2.12):

$$\left[ \frac{2p}{\mu Z} \right]_0 \left[ \frac{c_{\beta} \rho}{k_{HF}^{1.25} \phi_{HF}^{0.75}} \right] q_{x,Forch} |q_{x,Forch}| + \left[ \frac{2p}{\mu Z} \right]_0 \left[ \frac{\mu}{k_{HF}} \right] q_{x,Forch} + \frac{\partial m_{HF}}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

$$\left[ \frac{2p}{\mu Z} \right]_0 \left[ \frac{c_{\beta} \rho}{k_{HF}^{1.25} \phi_{HF}^{0.75}} \right] q_{y,Forch} |q_{y,Forch}| + \left[ \frac{2p}{\mu Z} \right]_0 \left[ \frac{\mu}{k_{HF}} \right] q_{y,Forch} + \frac{\partial m_{HF}}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

$$\left[ \frac{2p}{\mu Z} \right]_0 \left[ \frac{c_{\beta} \rho}{k_{HF}^{1.25} \phi_{HF}^{0.75}} \right] q_{z,Forch} |q_{z,Forch}| + \left[ \frac{2p}{\mu Z} \right]_0 \left[ \frac{\mu}{k_{HF}} \right] q_{z,Forch} + \frac{\partial m_{HF}}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$


---

---

que es el flujo no Darciano, donde  $c_\beta$  es la constante de flujo no Darcy,  $\rho$  es la densidad que se estima por medio de la ecuación (2.17),  $k_{HF}$  es la permeabilidad de la fractura hidráulica,  $\phi_{HF}$  es la porosidad de la fractura hidráulica y  $\mu$  la viscosidad.

Las transferencias de fluido de las otras porosidades a la fractura hidráulica se establecen como, del sistema de microfracturas a la fractura hidráulica:

$$q_{NFtoHF} = \frac{Vk_{NF}}{A_{trans\ NFtoHF}\mu(m_{NF})}(m_{NF} - m_{HF}) \quad (3.6)$$

Donde  $V$  es el volumen de roca,  $k_{NF}$  es la permeabilidad del sistema de microfracturas naturales,  $A_{trans\ NFtoHF}$  es el área de transferencia entre las fracturas naturales (NF, por sus siglas en inglés) y la fractura hidráulica,  $\mu(m_{NF})$  es la viscosidad con respecto al valor de pseudo presión NF y  $m_{NF}$  es la pseudo presión de fracturas naturales.

De la matriz inorgánica a la fractura hidráulica:

$$q_{intoHF} = \frac{Vk_{in}}{A_{trans\ intoHF}\mu(m_{in})}(m_{in} - m_{HF}) \quad (3.7)$$

Donde  $k_{in}$  es la permeabilidad de la matriz inorgánica,  $A_{trans\ intoHF}$  es el área de transferencia entre la matriz inorgánica y la fractura hidráulica,  $\mu(m_{in})$  es la viscosidad con respecto al valor de pseudo presión inorgánica y  $m_{in}$  es la pseudo presión de la matriz inorgánica.

De la matriz orgánica a la fractura hidráulica:

$$q_{orgtoHF} = \frac{Vk_{org}}{A_{trans\ orgtoHF}\mu(m_{org})}(m_{org} - m_{HF}) \quad (3.8)$$

Donde  $k_{org}$  es la permeabilidad de la matriz orgánica,  $A_{trans\ orgtoHF}$  es el área de transferencia entre la matriz orgánica y la fractura hidráulica,  $\mu(m_{org})$  es la viscosidad con respecto al valor de pseudo presión orgánica y  $m_{org}$  es la pseudo presión de la matriz orgánica.

---

---

### 3.1.2 Fracturas Naturales

La fractura hidráulica produce interconexión e incremento en la apertura de las microfracturas naturales que decrece como una ley de potencias conforme se alejan de la cara de la fractura hidráulica. Se modela este medio de microfracturas naturales heterogéneo considerando difusión anómala, para constituir el sistema de ecuaciones se consideran las expresiones presentadas por Raghavan (2011), que sistematizan el uso de la ecuación de continuidad con una la ley de flujo fraccional que generaliza la dependencia espacial y temporal de los gradientes de presión, donde el orden de la derivada fraccional esta entre 0 y 1. Con el caso asintótico,  $\alpha = 1$  se vuelve a la Ley de Darcy habitual. Por lo tanto, la Ley de Darcy es un caso especial de la ley general del flujo.

La motivación detrás del uso de la ley de flujo fraccional es el deseo de capturar el comportamiento de histéresis propia del flujo en medios heterogéneos. En este modelo las propiedades petrofísicas fueron distribuidas espacialmente de manera explícita por leyes de potencias en 3D, es decir tienen distribuciones fractales.

Para el sistema de microfracturas naturales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{NFx}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha_{FN}-1}}{\partial t^{\alpha_{FN}-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_{NFy}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha_{FN}-1}}{\partial t^{\alpha_{FN}-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_{NFz}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha_{FN}-1}}{\partial t^{\alpha_{FN}-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial z} \right) \\ + q_{intoNF}^* + q_{orgtoNF}^* - q_{NFtoHF}^* = \phi_{NF} c_{NF} \frac{\partial^{\alpha_{FN}} m_{NF}}{\partial t^{\alpha_{FN}}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde  $k_{NFx}$ ,  $k_{NFy}$ ,  $k_{NFz}$  son la permeabilidad del sistema de microfracturas en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  dependientes de la escala definidas en (2.19),  $\mu_{NF}$  es la viscosidad calculada considerando el valor de pseudo-presión en NF,  $m_{NF}$  es la pseudo-presión en el sistema de microfracturas naturales,  $q_{intoNF}^*$  el gasto de transferencia de fluido por unidad de volumen de matriz inorgánica a fracturas naturales,  $q_{orgtoNF}^*$  el gasto de transferencia de fluido por unidad de volumen de matriz orgánica a fracturas naturales,  $\phi_{NF}$  es la porosidad del sistema de microfracturas naturales dependiente de la escala definida en la ecuación (2.20),  $c_{NF}$  es la compresibilidad total de fractura natural y  $\alpha_{FN}$  el orden de la derivada temporal fraccionaria de las fracturas naturales.

---

---

Las transferencias de fluido de las otras porosidades a las fracturas naturales se calculan como, de la matriz inorgánica al sistema de microfracturas naturales:

$$q_{intoNF} = \frac{V\sigma_{NF}k_{in}}{\mu_{in}}(m_{in} - m_{NF}) \quad (3.10)$$

Donde  $\sigma_{NF}$  es el factor de forma dependiente de la escala definido por la ecuación (2.21),  $k_{in}$  es la permeabilidad de la matriz inorgánica y  $\mu_{in}$  es la viscosidad con respecto al valor de pseudo presión inorgánica.

De la matriz orgánica al sistema de microfracturas naturales

$$q_{orgtoNF} = \frac{V\sigma_{NF}k_{org}}{\mu_{org}}(m_{org} - m_{NF}) \quad (3.11)$$

Donde  $k_{org}$  es la permeabilidad de la matriz orgánica y  $\mu_{org}$  es la viscosidad con respecto al valor de pseudo presión orgánica.

### 3.1.3 Matriz Inorgánica

También se modela flujo dependiente de estados previos para las matrices inorgánica y orgánica, expresadas por el juego de ecuación de continuidad y flujo fraccionales. En estas porosidades se considera que las propiedades petrofísicas están distribuidas de manera homogénea inicialmente y correspondiente con los valores medidos originalmente, sin embargo, debido a la producción este valor inicial será corregido dinámicamente por la expresión de Javadvpour (2009).

Para la Matriz Inorgánica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{app,in}}{\mu_{in}} \frac{\partial^{\alpha_{in}-1}}{\partial t^{\alpha_{in}-1}} \frac{\partial m_{in}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_{app,in}}{\mu_{in}} \frac{\partial^{\alpha_{in}-1}}{\partial t^{\alpha_{in}-1}} \frac{\partial m_{in}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_{app,in}}{\mu_{in}} \frac{\partial^{\alpha_{in}-1}}{\partial t^{\alpha_{in}-1}} \frac{\partial m_{in}}{\partial z} \right) \\ + q_{orgtoin}^* - q_{intoHF}^* - q_{intoNF}^* = \phi_{in} c_{in} \frac{\partial^{\alpha_{in}} m_{in}}{\partial t^{\alpha_{in}}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

---

Donde  $k_{app,in}$  es la permeabilidad aparente total definida por la ecuación (2.41),  $q_{orgtoin}^*$  es el gasto de transferencia de fluido por unidad de volumen de matriz orgánica a inorgánica,  $\phi_{in}$  es la porosidad de la matriz inorgánica,  $c_{in}$  es la compresibilidad total de la matriz inorgánica y  $\alpha_{in}$  es el orden de derivada temporal fraccionaria de la matriz inorgánica.

Donde la transferencia de matriz orgánica a inorgánica queda establecida por la expresión:

$$q_{orgtoin} = \frac{V\sigma_{orgtoin}k_{org}}{\mu_{org}}(m_{org} - m_{in}) \quad (3.13)$$

Donde  $\sigma_{orgtoin}$  es el factor de forma entre la matriz orgánica a la inorgánica constante en todo el medio.

---

### 3.1.4 Matriz Orgánica

La matriz Orgánica se considera como un medio con propiedades petrofísicas diferentes de las de la matriz inorgánica. Se considera que el medio presenta gas natural adsorbido en las paredes porosas que desorberá a medida que disminuya la presión de poro, por lo que a la ecuación de continuidad se le agrega un término correspondiente al proceso de desorción, donde la tasa de adsorción-y desorción de equilibrio del gas está dada por la teoría de adsorción de Langmuir (1918), donde la derivada clásica es sustituida por una de orden fraccional para tener equilibrio de unidades en la ecuación.

Para la Matriz Orgánica:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{app,org}}{\mu_{org}} \frac{\partial^{\alpha_{org}-1}}{\partial t^{\alpha_{org}-1}} \frac{\partial m_{org}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_{app,org}}{\mu_{org}} \frac{\partial^{\alpha_{org}-1}}{\partial t^{\alpha_{org}-1}} \frac{\partial m_{org}}{\partial y} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_{app,org}}{\mu_{org}} \frac{\partial^{\alpha_{org}-1}}{\partial t^{\alpha_{org}-1}} \frac{\partial m_{org}}{\partial z} \right) - q_{orgtoHF}^* - q_{orgtoNF}^* - q_{orgtoin}^* \\
& = \phi_{org} c_{org} \frac{\partial^{\alpha_{org}} m_{org}}{\partial t^{\alpha_{org}}} - \frac{1 - \phi_{org}}{V} \frac{\partial^{\alpha_{org}}}{\partial t^{\alpha_{org}}} \left( V_L \frac{m_{org}}{m_L + m_{org}} \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Donde  $k_{app,org}$  es la permeabilidad aparente total de la matriz orgánica definida en la ecuación (2.41) y  $\alpha_{org}$  es el orden de derivada temporal fraccionaria de la matriz orgánica. Es importante notar que el término  $\frac{1-\phi_{org}}{V} \frac{\partial^{\alpha_{org}}}{\partial t^{\alpha_{org}}} \left( V_L \frac{m_{org}}{m_L + m_{org}} \right)$  es una adaptación de la ecuación (2.45), donde se considera la derivada temporal como de orden fraccional para tener una ecuación consistente.

## 3.2 Condiciones de frontera

Para todas las ecuaciones del modelo definidas por (3.2), (3.9), (3.12) y (3.14) se resuelven de manera simultánea con las correlaciones para permeabilidad y porosidad dependientes de los esfuerzos establecidas en (2.46) y (2.47).

---

Se considera que la única zona de drenaje del sistema SRV y la fractura hidráulica (HF, por sus siglas en inglés) es la que comprende la intersección del pozo con la HF, por lo que se considera que las condiciones de contorno están dadas por:

$$-\frac{k_i}{\mu_i} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_i}{\partial x} \Big|_{x=x_F+\delta x} = 0 \quad (3.15)$$

donde  $i = xNF, in, org$ , para  $0 \leq y \leq y_e$ ,  $0 \leq z \leq h_F$ ,  $\delta x$  representa la penetración de la estimulación en  $x$ .

$$-\frac{k_i}{\mu_i} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_i}{\partial y} \Big|_{y=y_e} = 0 \quad (3.16)$$

donde  $i = yNF, in, org$ , para  $0 \leq x \leq x_F + \delta x$ ,  $0 \leq z \leq h_F$ .

$$-\frac{k_i}{\mu_i} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_i}{\partial z} \Big|_{z=h_F} = 0 \quad (3.17)$$

donde  $i = zNF, in, org$ , para  $0 \leq x \leq x_F + \delta x$ ,  $0 \leq y \leq y_e$

Con las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17) se establece que la frontera exterior a la cuarta parte simulada es completamente impermeable tanto para el sistema de microfracturas naturales  $i = NF$ , la matriz inorgánica  $i = in$  y la matriz orgánica  $i = org$ .

Para resolver este problema, consideramos que la presión de fondo de pozo es constante, y que la región de drenaje está constituida por la intersección de la HF con el pozo.

$$q = \frac{\sqrt{2}\pi n_{HF} w_F k_{HF}}{\mu_{HF}} (p_i - p_{wf}) \quad (3.18)$$

para  $0 \leq x \leq \frac{r_w}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{w_F}{2}$ ,  $0 \leq z \leq \frac{r_w}{2}$ , donde  $n_{HF}$  es el número de fracturas hidráulicas distribuidas en el pozo horizontal de manera equidistante,  $w_F$  es el ancho de la fractura hidráulica y  $p_i$  la presión en la celda productora.

---

---

## Capítulo 4

### Solución Numérica de las ecuaciones de flujo

En esta sección se presenta el proceso de desarrollo de la solución numérica para resolver el modelo propuesto en el Capítulo 3.

#### 4.1 Modelo de flujo

Este sistema de ecuaciones se resuelve de manera numérica aproximándolas en diferencias finitas centrales en espacio y regresivas en tiempo. A continuación, se presenta el desarrollo para la discretización de todas las ecuaciones.

El dominio espacial definido por  $x \in [0, x_F]$ ,  $y \in [0, y_e]$  y  $z \in [0, h_F]$ , definido por la región punteada de la Figura 4.1, se discretiza en una malla logarítmica de bloques centrados. Para representar adecuadamente las fuertes variaciones de la presión en las vecindades de la fractura hidráulica. Los centros de los bloques de la rejilla están representados por los índices  $(i, j, k)$ . El dominio de tiempo definido por  $t \in [0, t]$  es discretizado en  $N + 1$  pasos de tiempo de incremento logarítmico y los pasos de tiempo están etiquetados con el superíndice  $n = 0, \dots, N$ . Las aproximaciones numéricas de la función son denotadas por  $p_i^n$ .

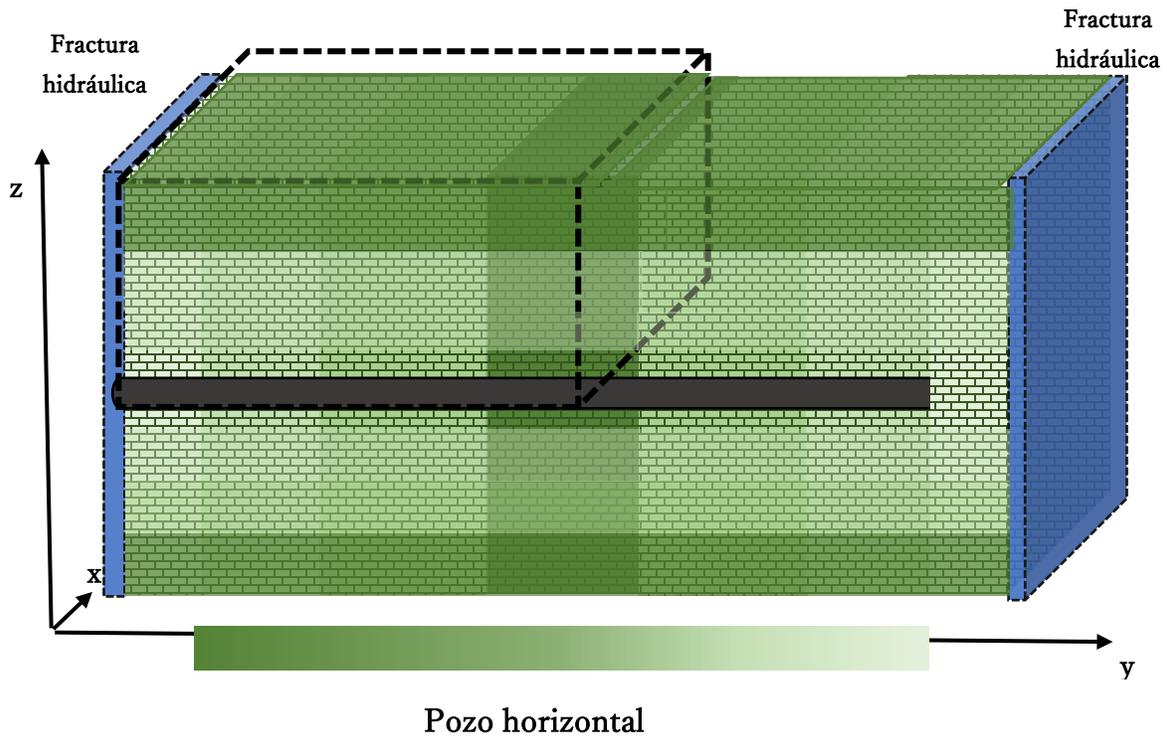


Figura 4.1 Región simulada numéricamente.

#### 4.1.1 Ecuaciones de flujo en diferencias finitas

Las derivadas de tiempo y espacio de la ecuación de difusión anómala se aproximan mediante las diferencias centrales en espacio y regresivas en tiempo. Para obtener un esquema implícito, las derivadas fraccionales en los términos de flujo son tomados al tiempo  $n + 1$ . Así la ecuación a resolver para las celdas de fractura hidráulica viene dada por, la cual es el desarrollo en diferencias finitas correspondiente a la ecuación (3.2):

$$\begin{aligned}
F_{HF\ i,j,k}^{n+1} = & \frac{V_{i,j,k}}{\Delta x_{i,j,k}} (q_{for\ i+0.5,j,k}^{n+1} - q_{for\ i-0.5,j,k}^{n+1}) + \frac{V_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j,k}} (q_{for\ i,j+0.5,k}^{n+1} - q_{for\ i,j-0.5,k}^{n+1}) \\
& + \frac{V_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k}} (q_{for\ i,j,k+0.5}^{n+1} - q_{for\ i,j,k-0.5}^{n+1}) + q_{NFtoHF\ i,j,k}^{n+1} + q_{intoHF\ i,j,k}^{n+1} \\
& + q_{orgtoHF\ i,j,k}^{n+1} - q_{HF\ [celda\ productora]}^{n+1} \\
& - \frac{V_{i,j,k} \Phi_{HF\ i,j,k}^n C_{t\ HF}}{ccv\ \Delta t} (m_{HF\ i,j,k}^{n+1} - m_{HF\ i,j,k}^n) = 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $ccv = \left[ \frac{2p}{\mu p} \right]_0$  es una constante que se estima con el valor de presión inicial.

La transferencia de fluido de Matriz Orgánica, Inorgánica y Fracturas Naturales a la Fractura Hidráulica, ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) pueden estimarse por:

$$q_{NFtoHF\ i,j,k}^{n+1} = \frac{V_{i,j,k} k_{NF}^n [celda\ vecina]}{A_{trans\ NFtoHF} \mu_{NF}^{n+1} [celda\ vecina]} (m_{NF}^{n+1} [celda\ vecina] - m_{HF\ i,j,k}^{n+1}) \tag{4.2}$$

$$q_{intoHF\ i,j,k}^{n+1} = \frac{V_{i,j,k} k_{in}^n [celda\ vecina]}{A_{trans\ intoHF} \mu_{in}^{n+1} [celda\ vecina]} (m_{in}^{n+1} [celda\ vecina] - m_{HF\ i,j,k}^{n+1}) \tag{4.3}$$

$$q_{orgtoHF\ i,j,k}^{n+1} = \frac{V_{i,j,k} k_{org}^n [celda\ vecina]}{A_{trans\ orgtoHF} \mu_{org}^{n+1} [celda\ vecina]} (m_{org}^{n+1} [celda\ vecina] - m_{HF\ i,j,k}^{n+1}) \tag{4.4}$$

En diferencias finitas la derivada fraccional de Caputo, ecuación (2.3) se extiende como la integral:

$$\left. \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right|_{t=t^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{1-\alpha} - l^{1-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^\alpha} (u^{n+1-l} - u^{n-l}) \tag{4.5}$$

Donde el tiempo  $t^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta t^i$ .

El Método Numérico Totalmente Implícito con  $0 \leq \alpha \leq 1$  dominio finito para todos,  $t \geq 0$  es consistente e incondicionalmente estable (Murio 2008). No hay limitaciones en el paso de tiempo para la precisión; sin embargo, los pasos de tiempo grandes pueden causar problemas de estabilidad numérica.

El desarrollo para el elemento de la ecuación correspondiente al sistema de microfracturas (3.9) en diferencias finitas, está dado como sigue:

---


$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{NFx}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \right) \Big|_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_{NFy}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial y} \right) \Big|_{i,j,k}^{n+1} \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_{NFz}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial z} \right) \Big|_{i,j,k}^{n+1} + q_{orgtoNF}^* \Big|_{i,j,k}^{n+1} + q_{intoNF}^* \Big|_{i,j,k}^{n+1} \\
& - q_{NFtoHF}^* \Big|_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{NFCNF} \frac{\partial^\alpha m_{NF}}{\partial t^\alpha} \Big|_{i,j,k}^{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Si  $u = \frac{k_{NFx}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{NFx}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.7}$$

Empleando diferencias centrales en la aproximación de la Ecuación y apoyándose en los puntos  $i \pm 1/2$ , que corresponden a las fronteras de la celda  $i, j, k$  en la dirección  $x$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j,k}^{n+1} & \approx \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \{u_{i+0.5,j,k} - u_{i-0.5,j,k}\} \\
& = \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \left\{ \frac{k_{NFx_{i+0.5,j,k}}}{\mu_{NF_{i+0.5,j,k}}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i+0.5,j,k}^{n+1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{k_{NFx_{i-0.5,j,k}}}{\mu_{NF_{i-0.5,j,k}}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i-0.5,j,k}^{n+1} \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Se necesita ahora aproximar  $\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x}$ , en este caso la aproximación será en diferencias regresivas de la derivada parcial con respecto al tiempo usando la Ecuación (4.5) y considerando  $u = \frac{\partial m_{NF}}{\partial x}$ , se obtienen la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial t^{\alpha-1}} \Big|_{i+0.5,j,k}^{n+1} & \approx \frac{1}{\Gamma(2 - (\alpha - 1))} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{1-(\alpha-1)} - l^{1-(\alpha-1)}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (u_{i+0.5,j,k}^{n+1-l} - u_{i+0.5,j,k}^{n-l}) \\
& = \frac{1}{\Gamma(3 - \alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} \left( \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i+0.5,j,k}^{n+1-l} - \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i+0.5,j,k}^{n-l} \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$


---

---


$$\frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial t^{\alpha-1}} \Big|_{i-0.5,j,k}^{n+1} \approx \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} \left( \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i-0.5,j,k}^{n+1-l} - \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i-0.5,j,k}^{n-l} \right) \quad (4.10)$$

En estos términos se debe aproximar los términos  $\frac{\partial m_{NF}}{\partial x}$  en las fronteras de las celdas. Usando de nuevo diferencias centrales y apoyándose ahora en los nodos  $(i, j, k)$ ,  $(i+1, j, k)$  e  $(i-1, j, k)$ , se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$\frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i+0.5,j,k}^{n+1-l} \approx \frac{m_{NF}^{n+1-l} \Big|_{i+1,j,k} - m_{NF}^{n+1-l} \Big|_{i,j,k}}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i+0.5,j,k}^{n-l} \approx \frac{m_{NF}^{n-l} \Big|_{i+1,j,k} - m_{NF}^{n-l} \Big|_{i,j,k}}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i-0.5,j,k}^{n+1-l} \approx \frac{m_{NF}^{n+1-l} \Big|_{i,j,k} - m_{NF}^{n+1-l} \Big|_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \Big|_{i-0.5,j,k}^{n-l} \approx \frac{m_{NF}^{n-l} \Big|_{i,j,k} - m_{NF}^{n-l} \Big|_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \quad (4.14)$$

Sustituyendo (4.11), (4.12), (4.13) y (4.14) en las ecuaciones (4.9) y (4.10)

---


$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \right|_{i+0.5,j,k}^{n+1} \\
& \approx \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} \left( \frac{1}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \{m_{NF\ i+1,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i,j,k}^{n+1-l}\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \{m_{NF\ i+1,j,k}^{n-l} - m_{NF\ i,j,k}^{n-l}\} \right) \\
& = \frac{1}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF\ i+1,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i,j,k}^{n+1-l} \\
& \quad - m_{NF\ i+1,j,k}^{n-l} + m_{NF\ i,j,k}^{n-l}) \\
& = \frac{1}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF\ i+1,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i+1,j,k}^{n-l} \\
& \quad - \{m_{NF\ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i,j,k}^{n-l}\}) \\
& = \frac{1}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF\ i+1,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i+1,j,k}^{n-l}) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF\ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i,j,k}^{n-l}) \right\} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \right|_{i-0.5,j,k}^{n+1} \\
& \approx \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} \left( \frac{1}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \{m_{NF\ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i-1,j,k}^{n+1-l}\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \{m_{NF\ i,j,k}^{n-l} - m_{NF\ i-1,j,k}^{n-l}\} \right) \\
& = \frac{1}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF\ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i,j,k}^{n-l}) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF\ i-1,j,k}^{n+1-l} - m_{NF\ i-1,j,k}^{n-l}) \right\} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (4.15) y (4.16) en la ecuación (4.8)

---


$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_{NF x}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial x} \right) \right|_{i,j,k}^{n+1} \\
& \approx \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \left\{ \frac{k_{NF x \ i+0.5,j,k}}{\mu_{NF \ i+0.5,j,k}} \left\{ \frac{1}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i+1,j,k}^{n+1-l} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - m_{NF \ i+1,j,k}^{n-l} \right) - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF \ i,j,k}^{n-l}) \right\} \right\} \\
& - \frac{k_{NF x \ i-0.5,j,k}}{\mu_{NF \ i-0.5,j,k}} \left\{ \frac{1}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF \ i,j,k}^{n-l}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i-1,j,k}^{n+1-l} - m_{NF \ i-1,j,k}^{n-l}) \right\} \right\} \Bigg\} \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_{NF y}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial y} \right) \right|_{i,j,k}^{n+1} \\
& \approx \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \left\{ \frac{k_{NF y \ i,j+0.5,k}}{\mu_{NF \ i,j+0.5,k}} \left\{ \frac{1}{\Delta y_{i,j+0.5,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i,j+1,k}^{n+1-l} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - m_{NF \ i,j+1,k}^{n-l} \right) - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF \ i,j,k}^{n-l}) \right\} \right\} \\
& - \frac{k_{NF y \ i,j-0.5,k}}{\mu_{NF \ i,j-0.5,k}} \left\{ \frac{1}{\Delta y_{i,j-0.5,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i,j,k}^{n+1-l} - m_{NF \ i,j,k}^{n-l}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF \ i,j-1,k}^{n+1-l} - m_{NF \ i,j-1,k}^{n-l}) \right\} \right\} \Bigg\} \tag{4.18}
\end{aligned}$$


---

---


$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{k_{NFZ}}{\mu_{NF}} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} \frac{\partial m_{NF}}{\partial Z} \right) \Bigg|_{i,j,k}^{n+1} \\
& \approx \frac{1}{\Delta Z_{i,j,k}} \left\{ \frac{k_{NFZ_{i,j,k+0.5}}}{\mu_{NF_{i,j,k+0.5}}} \left\{ \frac{1}{\Delta Z_{i,j,k+0.5}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF_{i,j,k+1}}^{n+1-l} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - m_{NF_{i,j,k+1}}^{n-l} \right) - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF_{i,j,k}}^{n+1-l} - m_{NF_{i,j,k}}^{n-l}) \right\} \right\} \\
& - \frac{k_{NFZ_{i,j,k-0.5}}}{\mu_{NF_{i,j,k-0.5}}} \left\{ \frac{1}{\Delta Z_{i,j,k-0.5}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF_{i,j,k}}^{n+1-l} - m_{NF_{i,j,k}}^{n-l}) \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF_{i,j,k-1}}^{n+1-l} - m_{NF_{i,j,k-1}}^{n-l}) \right\} \right\} \Bigg\} \tag{4.19}
\end{aligned}$$


---

Sustituyendo (4.17), (4.18) y (4.19) en la ecuación (4.6):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{k_{NF} x_{i+0.5,j,k}}{\mu_{NF} x_{i+0.5,j,k}} \frac{1}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i+1, j, k} \right. \\
& \left. - m_{NF}^{n-l, i+1, j, k}) - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k} - m_{NF}^{n-l, i, j, k}) \right\} \\
& - \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{k_{NF} x_{i-0.5,j,k}}{\mu_{NF} x_{i-0.5,j,k}} \frac{1}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k} - m_{NF}^{n-l, i, j, k}) \right. \\
& \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i-1, j, k} - m_{NF}^{n-l, i-1, j, k}) \right\} \\
& + \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{k_{NF} y_{i,j+0.5,k}}{\mu_{NF} y_{i,j+0.5,k}} \frac{1}{\Delta y_{i,j+0.5,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j+1, k} \right. \\
& \left. - m_{NF}^{n-l, i, j+1, k}) - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k} - m_{NF}^{n-l, i, j, k}) \right\} \\
& - \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{k_{NF} y_{i,j-0.5,k}}{\mu_{NF} y_{i,j-0.5,k}} \frac{1}{\Delta y_{i,j-0.5,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k} - m_{NF}^{n-l, i, j, k}) \right. \\
& \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j-1, k} - m_{NF}^{n-l, i, j-1, k}) \right\} \\
& + \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{k_{NF} z_{i,j,k+0.5}}{\mu_{NF} z_{i,j,k+0.5}} \frac{1}{\Delta z_{i,j,k+0.5}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k+1} \right. \\
& \left. - m_{NF}^{n-l, i, j, k+1}) - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k} - m_{NF}^{n-l, i, j, k}) \right\} \\
& - \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{k_{NF} z_{i,j,k-0.5}}{\mu_{NF} z_{i,j,k-0.5}} \frac{1}{\Delta z_{i,j,k-0.5}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left\{ \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k} - m_{NF}^{n-l, i, j, k}) \right. \\
& \left. - \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{2-\alpha} - l^{2-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha-1}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k-1} - m_{NF}^{n-l, i, j, k-1}) \right\} + q_{intoNF}^{*n+1} + q_{orgtoNF}^{*n+1} \\
& + q_{NFtoHF}^{*n+1} \text{ [si la celda es vecina a la FH]} \\
& - \frac{\phi_{NF} c_{tNF}}{ccv} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{1-\alpha} - l^{1-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^{\alpha}} (m_{NF}^{n+1-l, i, j, k} - m_{NF}^{n-l, i, j, k}) = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

---

Considerando:

$$\begin{aligned}
C(\gamma, x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{1-\gamma} - l^{1-\gamma}}{(\Delta t^{n+1-l})^\gamma} (x^{n+1-l} - x^{n-l}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \left\{ \underbrace{\frac{1}{(\Delta t^{n+1})^\gamma} (x^{n+1} - x^n)}_{l=0} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(l+2)^{1-\gamma} - (l+1)^{1-\gamma}}{(\Delta t^{n-l})^\gamma} (x^{n-l} - x^{n-1-l}) \right\} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación (4.20) por  $V_{i,j,k}$  y reescribiendola como la función de residuos para el sistema de fracturas naturales que considera (4.21), se obtiene:

---


$$\begin{aligned}
F_{NF i,j,k}^{n+1} = & \frac{\Delta t^{\alpha-1}}{ccv} \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{k_{NF x i+0.5,j,k}}{\mu_{NF i+0.5,j,k}} \left( C(\alpha-1, m_{NF i+1,j,k}) \right. \\
& \left. - C(\alpha-1, m_{NF i,j,k}) \right) \\
& - \frac{\Delta t^{\alpha-1}}{ccv} \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \frac{k_{NF x i-0.5,j,k}}{\mu_{NF i-0.5,j,k}} \left( C(\alpha-1, m_{NF i,j,k}) \right. \\
& \left. - C(\alpha-1, m_{NF i-1,j,k}) \right) \\
& + \frac{\Delta t^{\alpha-1}}{ccv} \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j+0.5,k}} \frac{k_{NF y i,j+0.5,k}}{\mu_{NF i,j+0.5,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left( C(\alpha-1, m_{NF i,j+1,k}) \right. \\
& \left. - C(\alpha-1, m_{NF i,j,k}) \right) \\
& - \frac{\Delta t^{\alpha-1}}{ccv} \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j-0.5,k}} \frac{k_{NF y i,j-0.5,k}}{\mu_{NF i,j-0.5,k}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left( C(\alpha-1, m_{NF i,j,k}) \right. \\
& \left. - C(\alpha-1, m_{NF i,j-1,k}) \right) \\
& + \frac{\Delta t^{\alpha-1}}{ccv} \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k+0.5}} \frac{k_{NF z i,j,k+0.5}}{\mu_{NF i,j,k+0.5}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left( C(\alpha-1, m_{NF i,j,k+1}) \right. \\
& \left. - C(\alpha-1, m_{NF i,j,k}) \right) \\
& - \frac{\Delta t^{\alpha-1}}{ccv} \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k-0.5}} \frac{k_{NF z i,j,k-0.5}}{\mu_{NF i,j,k-0.5}} \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left( C(\alpha-1, m_{NF i,j,k}) \right. \\
& \left. - C(\alpha-1, m_{NF i,j,k-1}) \right) + q_{intoNF i,j,k}^{n+1} + q_{orgtoNF i,j,k}^{n+1} \\
& + q_{NFtoHF}^{n+1} \text{ [si la celda es vecina a la FH]} \\
& - \frac{\Delta t^{\alpha-1} V_{i,j,k} \phi_{NF i,j,k} c_{t NF}}{ccv} C(\alpha, m_{NF i,j,k}) = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$


---

Aplicando el mismo procedimiento de (4.6) a (4.22) para la Ecuación de Matriz Inorgánica establecida en (3.12):

$$\begin{aligned}
F_{in\ i,j,k}^{n+1} = & \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{k_{app\ in\ i+0.5,j,k}^{n+1}}{\mu_{in\ i+0.5,j,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{in\ i+1,j,k}^{n+1-l}) - C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& - \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \frac{k_{app\ in\ i-0.5,j,k}^{n+1}}{\mu_{in\ i-0.5,j,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{in\ i-1,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& + \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j+0.5,k}} \frac{k_{app\ in\ i,j+0.5,k}^{n+1}}{\mu_{in\ i,j+0.5,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{in\ i,j+1,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& - \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j-0.5,k}} \frac{k_{app\ in\ i,j-0.5,k}^{n+1}}{\mu_{in\ i,j-0.5,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{in\ i,j-1,k}^{n+1-l}) \right) \\
& + \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k+0.5}} \frac{k_{app\ in\ i,j,k+0.5}^{n+1}}{\mu_{in\ i,j,k+0.5}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k+1}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& - \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k-0.5}} \frac{k_{app\ in\ i,j,k-0.5}^{n+1}}{\mu_{in\ i,j,k-0.5}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{in\ i,j,k-1}^{n+1-l}) \right) + q_{org\ to\ in\ i,j,k}^{n+1} - q_{into\ HF}^{n+1} \text{ [si la celda es vecina a la FH]} \\
& - q_{into\ NF}^{n+1} - \frac{V_{i,j,k} \phi_{in\ i,j,k} c_{t\ in}}{CCV} C(\alpha, m_{in\ i,j,k}^{n+1-l}) = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Y para la Ecuación de Matriz Orgánica, ecuación (3.14):

$$\begin{aligned}
F_{org\ i,j,k}^{n+1} = & \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta x_{i+0.5,j,k}} \frac{k_{app\ org\ i+0.5,j,k}^{n+1}}{\mu_{org\ i+0.5,j,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{org\ i+1,j,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& - \frac{1}{\Delta x_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta x_{i-0.5,j,k}} \frac{k_{app\ org\ i-0.5,j,k}^{n+1}}{\mu_{org\ i-0.5,j,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{org\ i-1,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& + \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j+0.5,k}} \frac{k_{app\ org\ i,j+0.5,k}^{n+1}}{\mu_{org\ i,j+0.5,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{org\ i,j+1,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& - \frac{1}{\Delta y_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta y_{i,j-0.5,k}} \frac{k_{app\ org\ i,j-0.5,k}^{n+1}}{\mu_{org\ i,j-0.5,k}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{org\ i,j-1,k}^{n+1-l}) \right) \\
& + \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k+0.5}} \frac{k_{app\ org\ i,j,k+0.5}^{n+1}}{\mu_{org\ i,j,k+0.5}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k+1}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}) \right) \\
& - \frac{1}{\Delta z_{i,j,k}} \frac{V_{i,j,k}}{\Delta z_{i,j,k-0.5}} \frac{k_{app\ org\ i,j,k-0.5}^{n+1}}{\mu_{org\ i,j,k-0.5}^{n+1}} \left( C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}) \right. \\
& \left. - C(\alpha - 1, m_{org\ i,j,k-1}^{n+1-l}) \right) - q_{org\ to\ HF}^{n+1} \text{ [si la celda es vecina a la FH]} \\
& - q_{org\ to\ NF}^{n+1} - q_{org\ to\ in}^{n+1} - \frac{V_{i,j,k} \phi_{org\ i,j,k} C_{t\ org}}{CCV} C(\alpha, m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}) \\
& + \frac{V_L (1 - \phi_{org\ i,j,k})}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{1-\alpha} - l^{1-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^\alpha} \left( \frac{m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}}{m_L + m_{org\ i,j,k}^{n+1-l}} \right. \\
& \left. - \frac{m_{org\ i,j,k}^{n-l}}{m_L + m_{org\ i,j,k}^{n-l}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

---

### 4.1.2 Construcción de la malla del yacimiento

La malla es logarítmica en las tres direcciones considerando como longitud característica el radio del pozo y el ancho de fractura hidráulica, según corresponda, para permitir una representación precisa de la fractura. Esta subdivisión está basada en la suposición de que todos los segmentos se originan a partir de la geometría de la fractura hidráulica.

Este tipo de distribución genera que el ancho de la celda secunente a la fractura hidráulica sea de la mitad del ancho de la fractura hidráulica y que la conductividad entre la fractura hidráulica y las celdas vecinas este en los mismos ordenes de magnitud.

La mayor heterogeneidad estará presente en la zona vecina a la fractura hidráulica.

En la Figura 4.2 se presenta la región simulada y como quedaría distribuida la malla logarítmica tridimensionalmente.

En la Figura 4.3 se presenta la división logarítmica por planos.

El volumen simulado es un cuarto, delimitado por la separación entre volumen estimulado y separación entre fracturas.

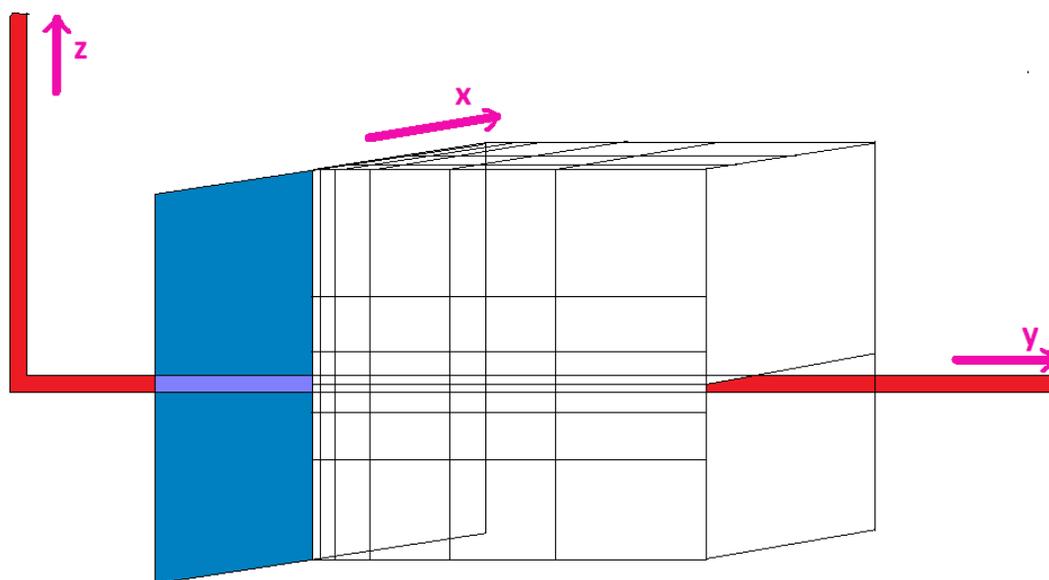


Figura 4.2. Esquema especial de la distribución de la malla en 3D.

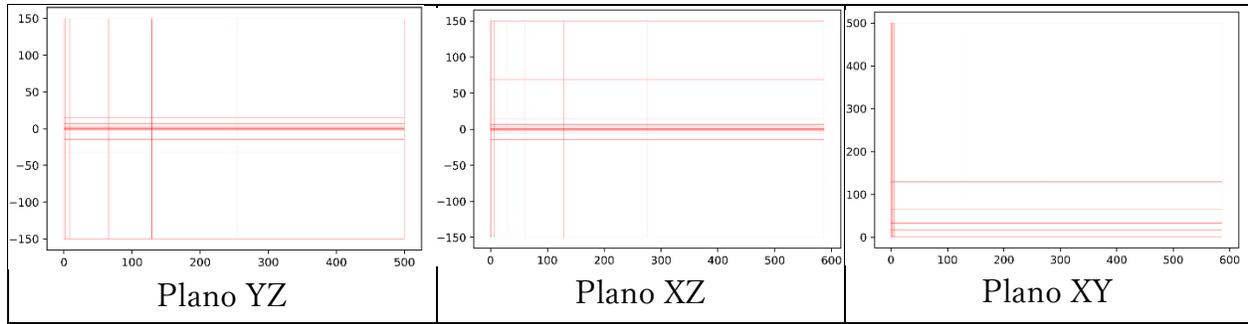


Figura 4.3. Mallado logarítmico en los 3 planos.

#### 4.1.3 Distribución inicial de porosidades y permeabilidades del sistema de microfracturas naturales

Se puede realizar una distribución de propiedades petrofísicas para el sistema de microfracturas naturales considerando las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21), que determinan la relación entre las propiedades con la escala al introducir los valores de las dimensiones fractales y conectividades en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , así como los valores y longitudes de referencia. Sin embargo, en este trabajo se investigó un enfoque donde, las propiedades petrofísicas del sistema de microfracturas naturales se distribuyen considerando las características geométricas de la fractura hidráulica.

La red de fracturas se vuelve más densamente interconectada cuanto más cerca está de la fractura hidráulica en cualquier dirección, distribuimos las propiedades petrofísicas del sistema de fracturas como una ley de potencia que cubre el espacio 3D como una muñeca Matrioshka, donde las capas se asemejan a la forma de la fractura hidráulica.

A continuación, se indica el método de distribución geométrico ejemplificado con la porosidad, el proceso es análogo para el factor de forma y la permeabilidad.

##### Procedimiento de distribución de porosidad elipsoidal fractal:

1. Se construye una función para distribuir la porosidad como una ley de potencias en  $y$  de la forma:

$$\phi_{NF}(y, 0, 0) = Ay^\alpha \quad (4.25)$$

donde los valores de  $A$  y  $\alpha$  se estiman considerando que  $\phi_{NF}\left(\frac{w_F}{2}, 0, 0\right) = \phi_{HF}$  y  $\phi_{NF}(y_e, 0, 0) = \phi_{in}$ , datos estimados para la FH y propiedades originales del yacimiento.

2. La distribución 3D se hace considerando elipsoides cuyos ejes guardan una relación geométrica con la geometría de la FH.

$$\frac{x^2}{x_F^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{w_F}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{h_F^2} = 1 \quad (4.26)$$

3. Para cualquier punto  $(u, v, w) \in SRV$  se estima el valor del eje  $b$  del elipsoide que le corresponde.
4. El valor de  $b$  se introduce en la ecuación (4.25) y este indicaría el valor de  $\phi_{NF}$  correspondiente. De manera que cada capa elipsoide tendrá un valor asignado por (4.25).

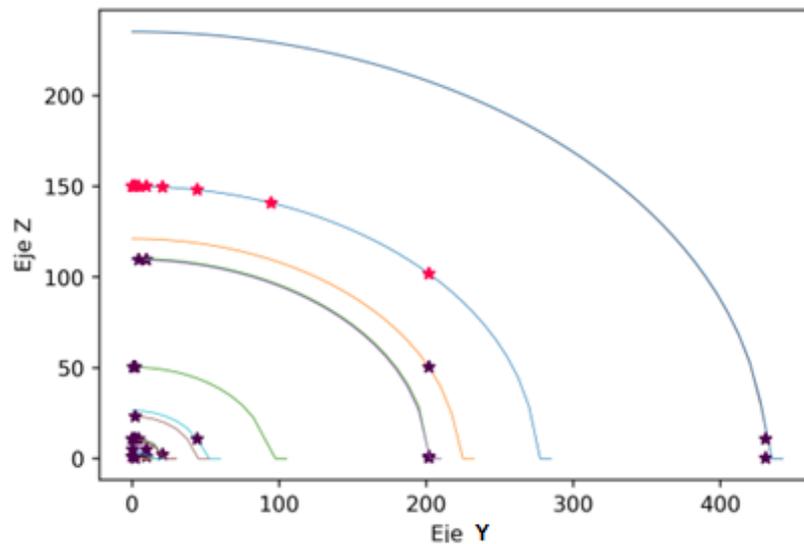


Figura 4.4. Identificación de elipsoides con eje  $b$ .

El método sólo distribuye el valor de  $k_y$  del tensor de permeabilidad, para estimar los valores de las componentes  $k_x$  y  $k_z$  se consideró que las características geométricas de la

fractura hidráulica suelen estar determinadas por el estado de esfuerzos in-situ de la roca, Xu y Wong (2010) analizó la relación entre el tensor de esfuerzos y el tensor de permeabilidad antes de generar la fractura hidráulica, encontrando que las magnitudes en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de ambos tensores son semejantes entre sí antes del proceso de fracturamiento y genera una fuerte anisotropía después del proceso de fracturamiento en la fractura hidráulica, se puede partir entonces, de que, para el sistema de microfisuras naturales, las componentes  $k_x$  y  $k_z$  del tensor de permeabilidad son equivalentes al esfuerzo horizontal máximo,  $s_H$ , y el esfuerzo vertical,  $s_v$ , en conjunto con  $k_y$  y el esfuerzo horizontal mínimo,  $s_h$ .

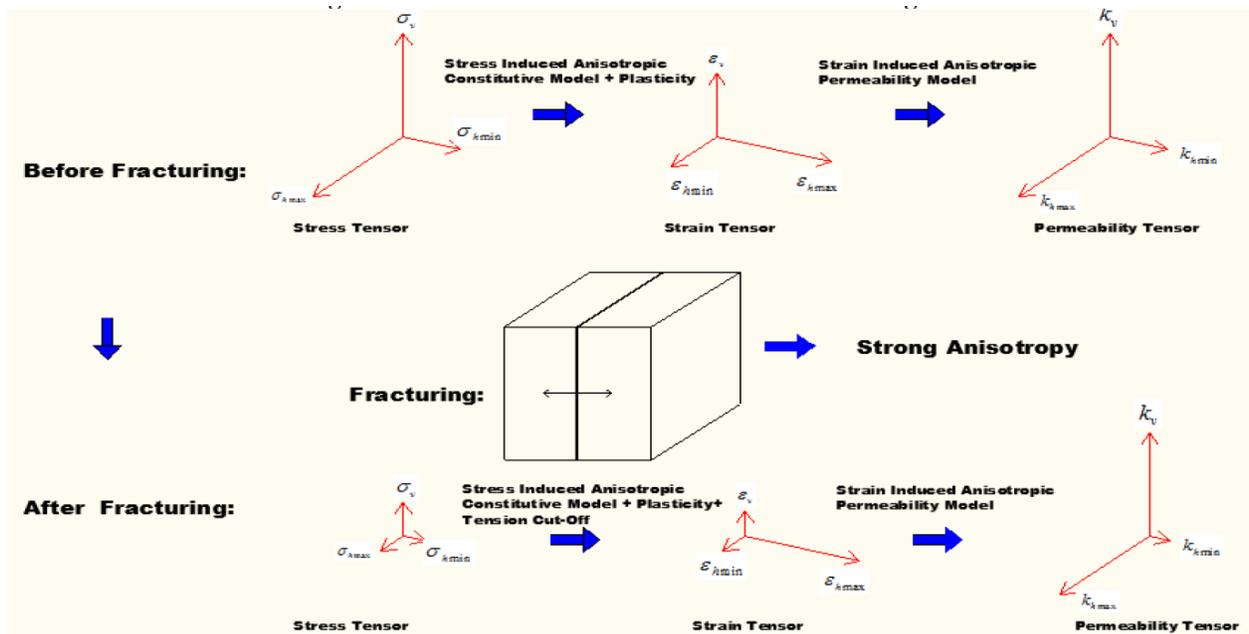


Figura 4.5. Relación de anisotropía entre el tensor de esfuerzo, el tensor de deformación y el tensor de permeabilidad (Xu y Wong 2010).

Con esta metodología se obtienen los valores de  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  y  $\phi$  para cualquier celda ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) en el yacimiento.

La Figura 4.6 muestra la distribución elipsoidal de las componentes del tensor de permeabilidad. Cada conjunto de gráficos muestra en la esquina superior izquierda el plano XZ unido al plano de fractura hidráulica, en la esquina superior derecha el plano YZ con  $x = 0$ , en la esquina inferior derecha el plano XY con  $y = 0$  y en la esquina inferior

izquierda el plano correspondiente a la fractura hidráulica. El espectro de permeabilidad abarca desde 10 md (rojo) hasta 0,0001 md (azul).

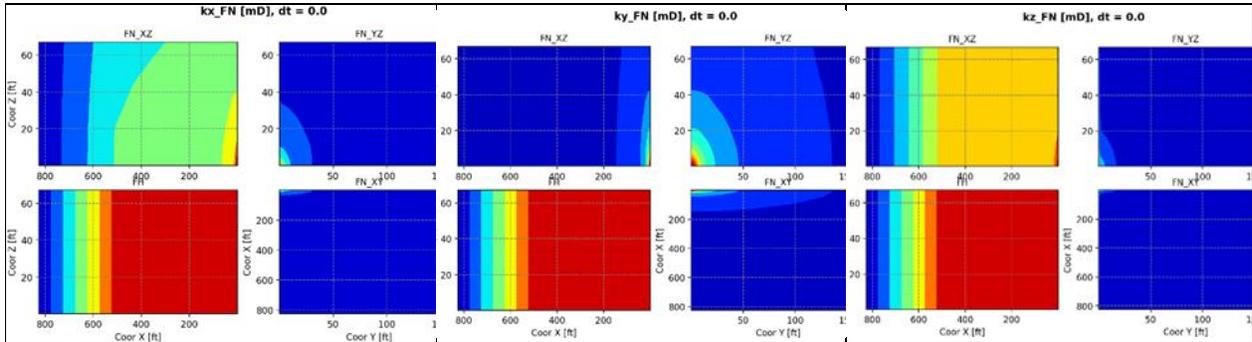


Figura 4.6. Distribución elipsoidal de las componentes del tensor de permeabilidad.

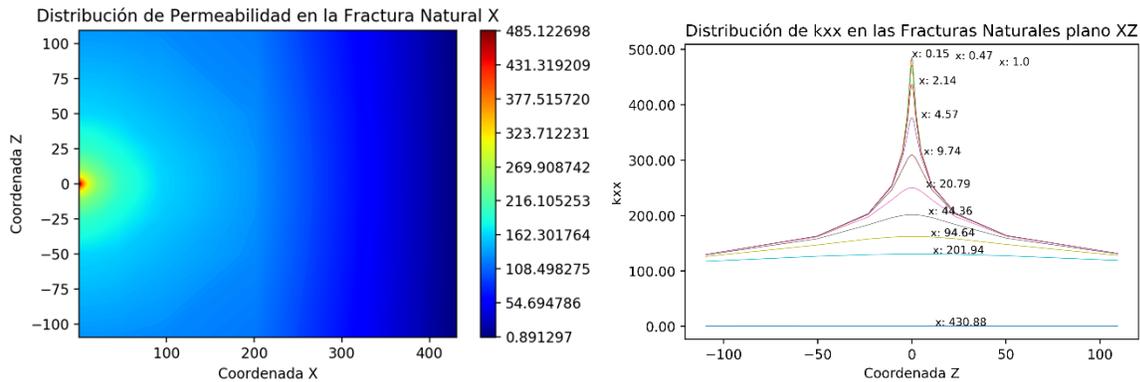


Figura 4.7. Distribución de  $k_x$  en el plano XZ por medio de la ecuación (2.19)

En la Figura 4.8 se muestra la distribución espacial de la porosidad. Del lado izquierdo considerando el caso donde la distribución considera las elipsoides de la fractura hidráulica y del lado derecho el caso en el cual se aplican las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) con los valores:  $d_{fx} = 1.976$ ,  $d_{fy} = 1.95$ ,  $d_{fz} = 1.997$ ,  $\theta_x = 1$ ,  $\theta_y = 0.1$  y  $\theta_z = 1$ . Se observa que en la vecindad cercana a la fractura hidráulica y en la zona más alejada de la fractura hidráulica ambos tipos de distribuciones suelen tener valores muy similares, sin embargo las transiciones no son del todo similares, mostrando que para el caso del método de fórmulas puede llegar a tener valores un poco más elevados en las zonas de los ejes coordenados.

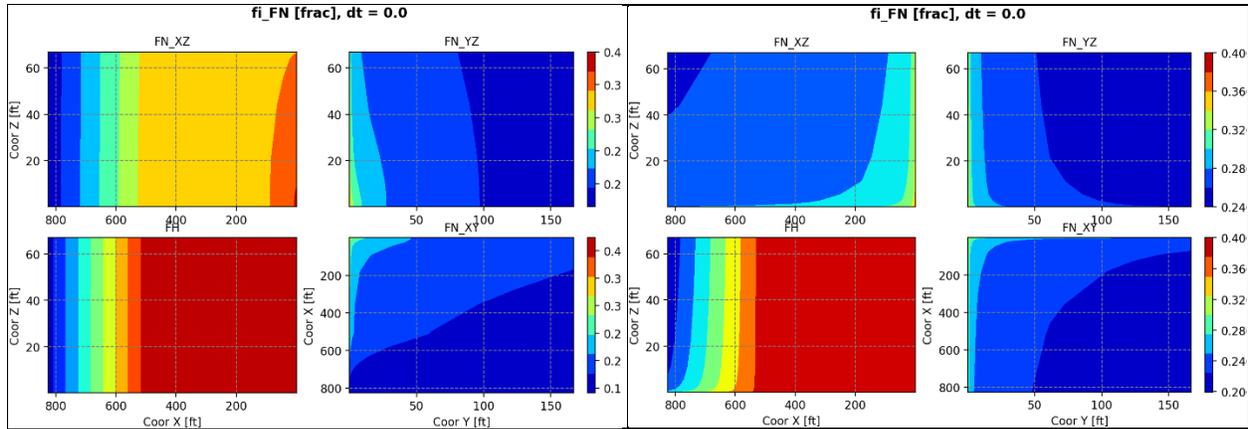


Figura 4.8 Distribución espacial de la porosidad.

#### 4.1.4 Condiciones iniciales

Se construye la tabla de relación entre presión ( $p$ ), viscosidad ( $\mu$ ), factor de compresibilidad ( $Z$ ) y el valor de pseudo-presión considerando el valor de la densidad relativa del gas de acuerdo con su composición  $\gamma_g$  y la ecuación de estado (2.14).

Inicialmente se considera que las propiedades petrofísicas de la fractura hidráulica, matriz orgánica e inorgánica se distribuyen isotrópica y homogéneamente en su respectivo medio. Se considera presión constante en todas las partes del dominio numérico para el tiempo  $t = 0$ .

#### 4.1.5 Procedimiento de solución del sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones determinado por (4.1), (4.22), (4.23) y (4.24) sirve de base para construir el Jacobiano y la función de residuos del sistema para el paso  $n + 1$ . Este sistema de ecuaciones es aproximado en diferencias finitas centrales en el espacio y regresivas en el tiempo.

El dominio de tiempo es definido por  $t \in [0, t]$  y se discretiza en  $N + 1$  pasos de tiempo de incremento logarítmico y los pasos de tiempo se etiquetan con el superíndice  $n = 0, \dots, N$ .

---

Para obtener un esquema implícito, se toman las derivadas fraccionarias en los términos de flujo en el tiempo  $n + 1$ . Para manejar la no linealidad, se adopta un esquema de iteración de Newton-Raphson, en el que el jacobiano se evalúa numéricamente para variables primarias seleccionadas y la solución se logra cuando el residuo se vuelve pequeño.

Para el desarrollo en diferencias finitas de las derivadas fraccionarias se consideró la expresión presentada por Zhuang y Liu (2006), es decir:

$$\left. \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right|_{t=t^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=0}^n \frac{(l+1)^{1-\alpha} - l^{1-\alpha}}{(\Delta t^{n+1-l})^\alpha} (u^{n+1-l} - u^{n-l}) \quad (4.27)$$

El Método Numérico Totalmente Implícito con  $0 \leq \alpha \leq 1$  para todo dominio finito,  $t \geq 0$  es consistente e incondicionalmente estable (Murio 2008). No hay limitaciones en el paso de tiempo para la precisión; sin embargo, los pasos de tiempo grandes pueden causar problemas de estabilidad numérica.

#### 4.1.6 Estructura de Rutinas

A continuación, en la Figura 4.9 se presenta el diagrama de flujo de aplicación de rutinas que constituye el simulador numérico que resuelve el sistema de ecuaciones (4.1), (4.22), (4.23) y (4.24).

En la Tabla 4.1 se presenta la descripción de las rutinas que constituyen el simulador numérico.

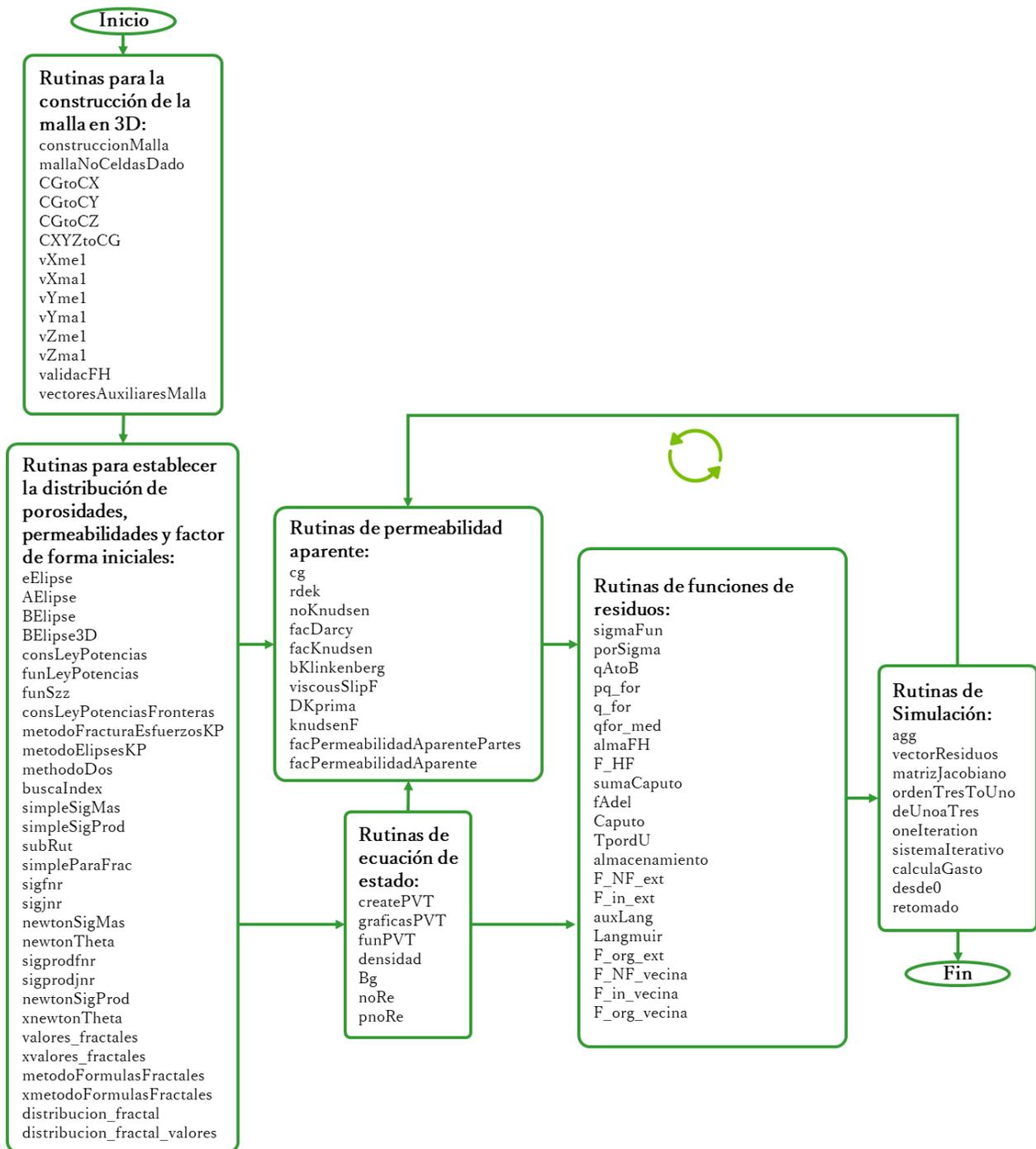


Figura 4.9 Diagrama de flujo de rutinas de simulación.

<b>Nombre de Rutina</b>	<b>Descripción</b>
construccionMalla	Función para construcción de malla
mallaNoCeldasDado	Función para construcción de malla considerando un número de celdas en x, y y z dado
CGtoCX	Función de Número de Celda General a Número de Celda en la cordenada X
CGtoCY	Función de Número de Celda General a Número de Celda en la cordenada Y
CGtoCZ	Función de Número de Celda General a Número de Celda en la cordenada Z
CXYZtoCG	Función de Número de Celda X, Y y Z a Número de Celda General
vXme1	Vecino de la celda en la celda en la coordenada X, i - 1
vXma1	Vecino de la celda en la celda en la coordenada X, i + 1
vYme1	Vecino de la celda en la celda en la coordenada Y, i - 1
vYma1	Vecino de la celda en la celda en la coordenada Y, i + 1
vZme1	Vecino de la celda en la celda en la coordenada Z, i - 1
vZma1	Vecino de la celda en la celda en la coordenada Z, i + 1
validacFH	Función con la que se valida si una celda pertenece a la zona de FH
vectoresAuxiliaresMalla	Función donde se construyen vectores auxiliares de vecinos y geométricos
eElipse	Ecuación que regresa y en una ecuación de elipse, val es en el eje x. Se introduce Eje Menor y Eje Mayor, en ese orden.
AElipse	Ecuación que regresa lado largo de elipse
BElipse	Ecuación que regresa lado corto de elipse
BElipse3D	Ecuación que regresa bb de una elipse tridimensional
consLeyPotencias	Se obtiene A_const, alp_exp # nc.funLeyPotencias(A_const, alp_exp, valx)
funLeyPotencias	Función de ley de potencias dado un valor de constante A y un exponente alpha
funSzz	Esfuerzo vertical como función de z
consLeyPotenciasFronteras	Se obtiene A_const, alp_exp considerando 2 fronteras
metodoFracturaEsfuerzosKP	Cálculo de distribución inicial de porosidades, permeabilidades y factor de forma por el método que considera características de forma de la FH y de los esfuerzos
metodoElipsesKP	Cálculo de distribución inicial de porosidades, permeabilidades y factor de forma por el método de elipses de la fractura hidráulica
methodoDos	Ambos métodos: metodoElipsesKP y metodoFracturaEsfuerzosKP
buscaIndex	Algoritmo de búsqueda de 4 índices en la malla

Nombre de Rutina	Descripción
simpleSigMas	Método simple con fórmula de suma para calcular dsx, dsy, dsz y sigref considerando $Lref = 0.5 * wF$
simpleSigProd	Método simple con fórmula de producto para calcular dsx, dsy, dsz y sigref considerando $Lref = 0.5 * wF$
subRut	Subrutina para calcular las thetas y las ks de referencia
simpleParaFrac	Método simple para calcular theta_x, theta_y, theta_z, dfx, dfy y dfz considerando $Lref = 0.5 * wF$ , $kref = k_{HF}$ y $firef = fi_{HF}$
sigfnr	Función para Newton Raphson para encontrar sigref, Lref, dsx, dsy, dsz caso de la suma
sigjnr	Rutina para calcular el Jacobiano y la función de residuos para calcular los valores de conectividad en x, y y z considerando la fórmula de suma
newtonSigMas	Método Newton Raphson para calcular dsx, dsy, dsz, sigref y Lref
newtonTheta	Método Newton Raphson para calcular theta_x, theta_y, theta_z considerando la fórmula de suma
sigprodfnr	Función para Newton Raphson para encontrar sigref, Lref, dsx, dsy, dsz caso del producto
sigprodjnr	Rutina para calcular el Jacobiano y la función de residuos para calcular los valores de conectividad en x, y y z considerando la fórmula de producto
newtonSigProd	Método Newton Raphson para calcular dsx, dsy, dsz, sigref y Lref fórmula de producto
xnewtonTheta	Método Newton Raphson para calcular theta_x, theta_y, theta_z considerando Lref considerando una porosidad como producto de leyes de potencias de las coordenadas considerando la fórmula de producto
valores_fractales	Valores de leyes de potencias
xvalores_fractales	Valores de leyes de potencias considerando una porosidad como producto de leyes de potencias de las coordenadas
metodoFormulasFractales	Calcula distribución de permeabilidades y porosidades iniciales usando las funciones fractales definidas
xmetodoFormulasFractales	Calcula distribución de permeabilidades y porosidades iniciales usando las funciones fractales definidas considerando una porosidad como producto de leyes de potencias de las coordenadas
distribucion_fractal	
distribucion_fractal_valores	
createPVT	Cálculo del PVT

<b>Nombre de Rutina</b>	<b>Descripción</b>
funPVT	Interpolación de tabla PVT
densidad	Función que regresa el valor de la densidad para determinado valor de p
Bg	Función que regresa el valor de el Gas formation volume factor para determinado valor de p
noRe	Función que calcula el número de Reynolds, valor adimensional usando pseudo presion
pnoRe	Función que calcula el número de Reynolds, valor adimensional usando presion
sigmaFun	Factor de forma de un paralelepipedo Kazemi
porSigma	Función auxiliar con la que se calcularon w_NF, w_in, w_org
cg	Cálculo de Compresibilidad Isotérmica del Gas (cg) unidades [1/psi]
rdek	Cálculo de los radios de la matriz orgánica e inorgánica a partir de su permeabilidad
noKnudsen	Cálculo del número de Knudsen
facDarcy	Cálculo del factor para la permeabilidad de Darcy de la matriz inorgánica y orgánica
facKnudsen	Cálculo del factor para la permeabilidad de Knudsen de la matriz inorgánica y orgánica
bKlinkenberg	Cálculo de la b de Klinkenberg
viscousSlipF	Cálculo del factor de viscosidad y deslizamiento
DKprima	Cálculo del factor Dk/kD para la difusión de Knudsen
knudsenF	Cálculo del factor de Knudsen
facPermeabilidadAparentePartes	Cálculo del factor para corregir la permeabilidad aparente
facPermeabilidadAparente	Cálculo del factor para corregir la permeabilidad aparente
qAtoB	Función general que calcula la transmisibilidad y gasto de flujo entre un medio poroso A a otro B
pq_for	Calcula gasto de la ecuación de Forchheimer considerando presión
q_for	Calcula gasto de la ecuación de Forchheimer considerando pseudo presión
qfor_med	Cálculo de gasto usando Forchheimer considerando media ala ya sea + 1/2 o - 1/2
almaFH	Función que calcula el término de Almacenamiento tanto para la ecuación de FH como FN
F_HF	Función de residuos de la Fractura Hidráulica
sumaCaputo	Función de integral de Caputo como sumatoria iterativa
fAdel	Función auxiliar para integral de Caputo

<b>Nombre de Rutina</b>	<b>Descripción</b>
Caputo	Función que calcula la integral de Caputo en diferencias finitas
TpordU	Función que calcula la media ala de la Transmisibilidad por el cambio de pseudo presión para las funciones de residuos de Fractura Natural, Matriz Inorgánica y Matriz Orgánica
almacenamiento	Almacenamiento General
F_NF_ext	Función de residuos de las Fracturas Naturales en la Matriz Exterior
F_in_ext	Función de residuos de la Matriz Inorgánica en la Matriz Exterior
auxLang	Función auxiliar para calcular la desorción con la Isoterma de Langmuir
Langmuir	Función que calcula el término de desorción de Langmuir que considera la integral temporal fraccional usando la definición de Caputo
F_org_ext	Función de residuos de la Matriz Orgánica en la Matriz Exterior
F_NF_vecina	Función de residuos de las Fracturas Naturales en la zona vecina a la Fractura Hidráulica
F_in_vecina	Función de residuos de la Matriz Inorgánica en la zona vecina a la Fractura Hidráulica
F_org_vecina	Función de residuos de la Matriz Orgánica en la zona vecina a la Fractura Hidráulica
agg	Da el índice de acuerdo a la porosidad
vectorResiduos	Construcción de vector de residuos
vectorResiduosDosIN	
vectorResiduosDosORG	
vectorResiduosUno	
matrizJacobiano	Construcción de Jacobiano
matrizJacobianoDosIN	
matrizJacobianoDosORG	
matrizJacobianoUno	
ordenTresToUno	Ordena el vector de pseudopresiones de los 4 medios
deUnoatres	Pasa un vector ordenado a tres
ordenDosToUno	
deUnoadOs	
onelteration	Una iteración
sistemalterativo	Sistema Iterativo para un delta_t dado
calculaGasto	Fórmula para calcular gasto para el caso de gasto variable
desde0	Simulador que inicia desde el tiempo cero
retomado	Simulación que inicia apartir de cualquier tiempo

---

## Capítulo 5

### Resultados

En este capítulo se muestran los resultados de la implementación del modelo propuesto en el Capítulo 3. Para que un modelo sea aceptado como representativo del sistema que describe, sus resultados deben verificarse evaluándolos en comparación con soluciones publicadas o verificadas anteriormente del mismo sistema.

#### 5.1 Validación con el simulador de CMG

La validez de este modelo numérico se verificó frente al simulador comercial de la compañía CMG. La Figura 5.1 muestra la comparación de una simulación de producción de gas, en IMEX, a  $p_{wf}$  constante, utilizando DUALPERM con fracturas hidráulicas. En el módulo BUILDER se construyó un volumen de simulación análogo al de nuestro simulador con una malla de celdas de  $28 \times 34 \times 40$ . Los datos del yacimiento, las propiedades de los fluidos y las características de la fractura hidráulica se extrajeron del ejemplo de Eagle Ford proporcionado por Albinali y Ozkan 2016.

Los datos utilizados para el proceso de validación se presentan en la Tabla 5.1.

La comparación gráfica muestra una buena similitud entre ambas soluciones después de 1 día, en tiempos cortos existen algunas diferencias que se atribuyen a la selección de pasos de tiempo iniciales, en el caso del simulador propuesto estos aumentan logarítmicamente.

Name	MNEM	Value	Unit
Hydraulic fracture width	wF	0.01	ft
df/2 Distance between hydraulic fractures	ye	170	ft
Profundidad pozo	zref	7000	ft
1/2 Hydraulic fracture height	hF	75	ft
Wellbore radius	rw	0.23	ft
Hydraulic fracture half-length	xF	550	ft
Hydraulic fracture permeability	k_HF	50000	md
Natural fracture permeability x (only in homogeneous case)	kx_NF	10	md
Natural fracture permeability y (only in homogeneous case)	ky_NF	10	md
Natural fracture permeability z (only in homogeneous case)	kz_NF	10	md
Inorganic matrix permeability	k_in	0.0001	md
Hydraulic fracture porosity	fi_HF	0.38	fraction
Natural fracture porosity (only in homogeneous case)	fi_NF	0.4	fraction
Inorganic matrix porosity	fi_in	0.1	fraction
Hydraulic fracture total compressibility	ct_HF	0.00001	psi-1
Natural fracture total compressibility	ct_NF	0.0001	psi-1
Inorganic matrix total compressibility	ct_in	0.00001	psi-1
Sigma of the natural fracture (Only in the homogeneous case)	sigma_NF_homo	24169.2166	1/ft2
Base pressure	p_base	14.7	psia
Maximum pressure	p_max	10000	psia
PVT intervals number	no_inter	200	
Gas specific gravity	gamma_g	1	
Temperature	T_F	180	F
Initial pressure	p0	5375	psia
Number of hydraulic fractures	nF	14	

Tabla 5.1. Propiedades de las fracturas y el yacimiento para construir el caso de validación con simulador de CMG.

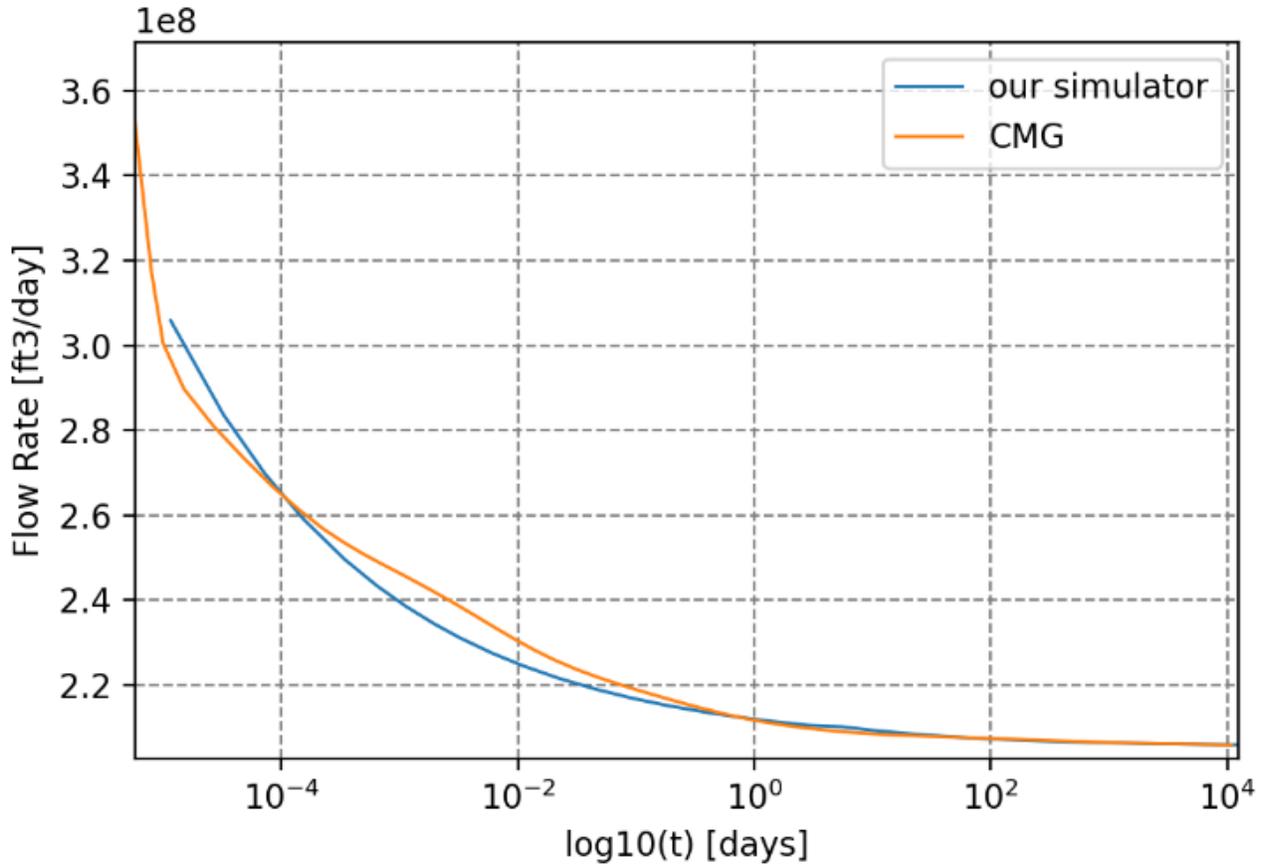


Figura 5.1. Comparación de prueba con gasto variable para el sistema de gas DUALPERM: CMG vs. Simulador propuesto.

## 5.2 Efecto del orden de derivada fraccional

Se analizó el efecto de la variación del orden en la derivada fraccional de la ecuación (3.9), considerando la corrección de permeabilidad propuesta por Javadpour 2009, en la Figura 5.2 se presentan las curvas correspondientes a  $\alpha = 0.8, 0.6, 0.4$  y  $0.2$ . Se puede observar que el orden de la derivada fraccional tiene una gran influencia en el comportamiento de caída de la producción.

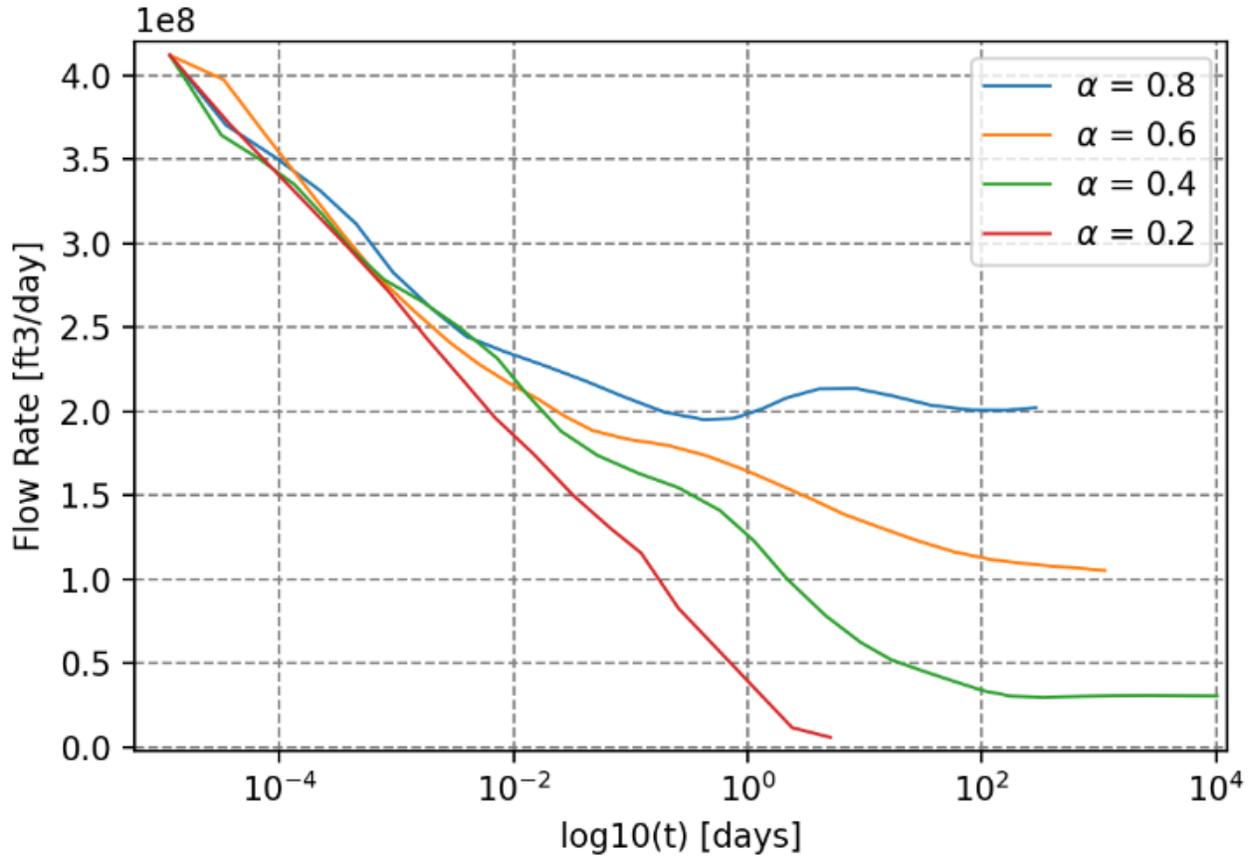


Figura 5.2. Evaluación del efecto de diferentes órdenes de derivadas.

### 5.3 Efecto de diferentes mecanismos de subdifusión

La Figura 5.3 muestra una comparación entre el caso homogéneo, que considera los datos de Albinali y Ozkan 2016, y la difusión normal, y dos simulaciones con dos enfoques para capturar la distribución fractal de las propiedades petrofísicas. El método fractal\_formula considera las Ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21), para este caso de simulación, los parámetros fractales fueron:  $d_{fx} = 1.976$ ,  $d_{fy} = 1.95$ ,  $d_{fz} = 1.997$ ,  $\theta_x = 1$ ,  $\theta_y = 0.1$  y  $\theta_z = 1$ , y el enfoque fractal\_geometry considera el tensor de permeabilidad y las propiedades de porosidad de la red de fracturas como una ley de potencia que cubre el espacio tridimensionalmente con las capas elipsoidales.

En estas simulaciones no consideramos la corrección de permeabilidad aparente de Javadpour. Podemos observar que existen diferencias en tiempos tempranos entre las respuestas de gasto variable correspondientes a los dos enfoques fractales, pero después de 0,1 días ambos métodos arrojan respuestas similares y las diferencias con el caso homogéneo aumentan con el tiempo.

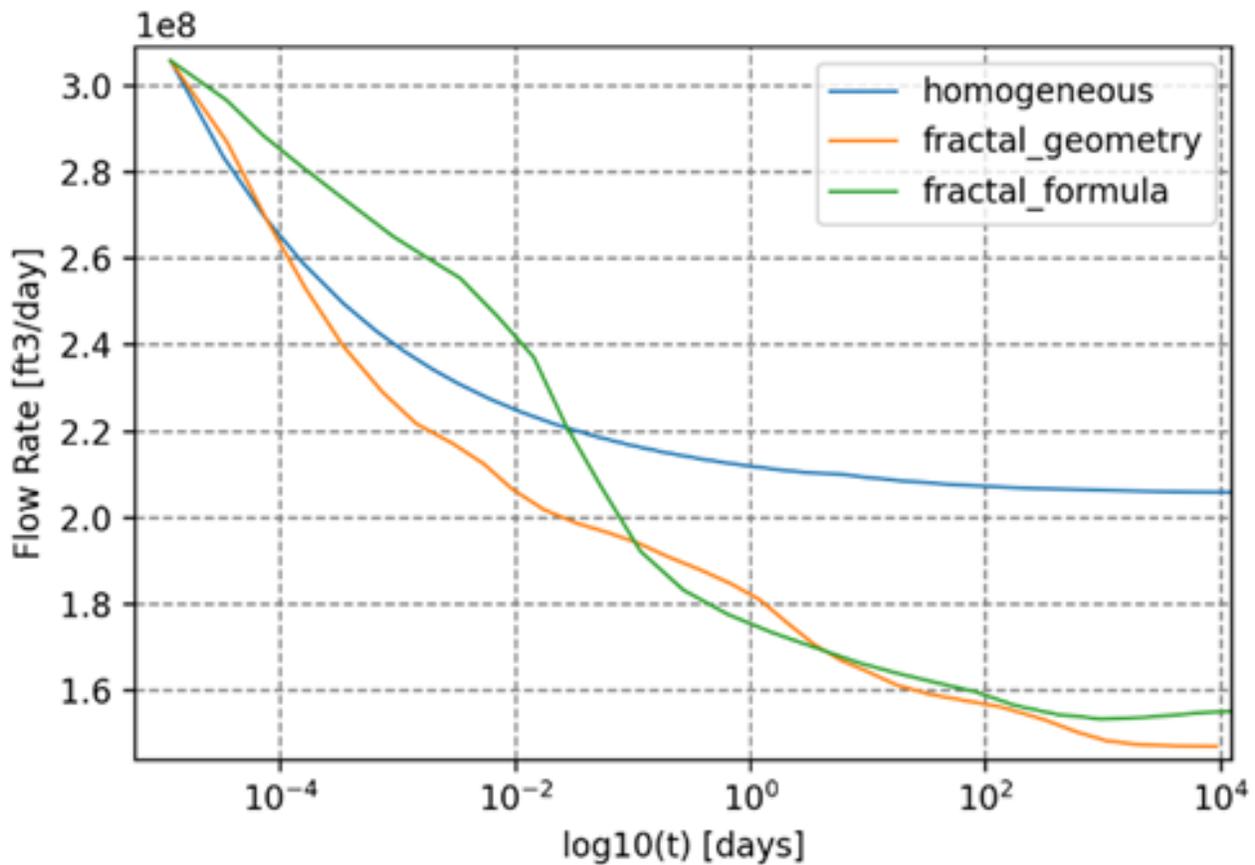


Figura 5.3. Comparación de tasas de flujo entre el caso homogéneo y dos vistas de distribución fractal 3D.

En la Figura 5.3 se observa que el caso homogéneo sobrestima la producción a tiempos largos después de 0.1 días. Los casos fractales no presentan un comportamiento idéntico, estas diferencias son más notorias en tiempos cortos. Las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) arrojan propiedades de permeabilidad y porosidad cuya estimulación penetra más profundamente en el volumen con respecto a la distribución con elipsoides, de modo que

en tiempos cortos el gasto obtenido con el uso de las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) es mayor que el obtenido con la distribución geométrica elipsoidal.

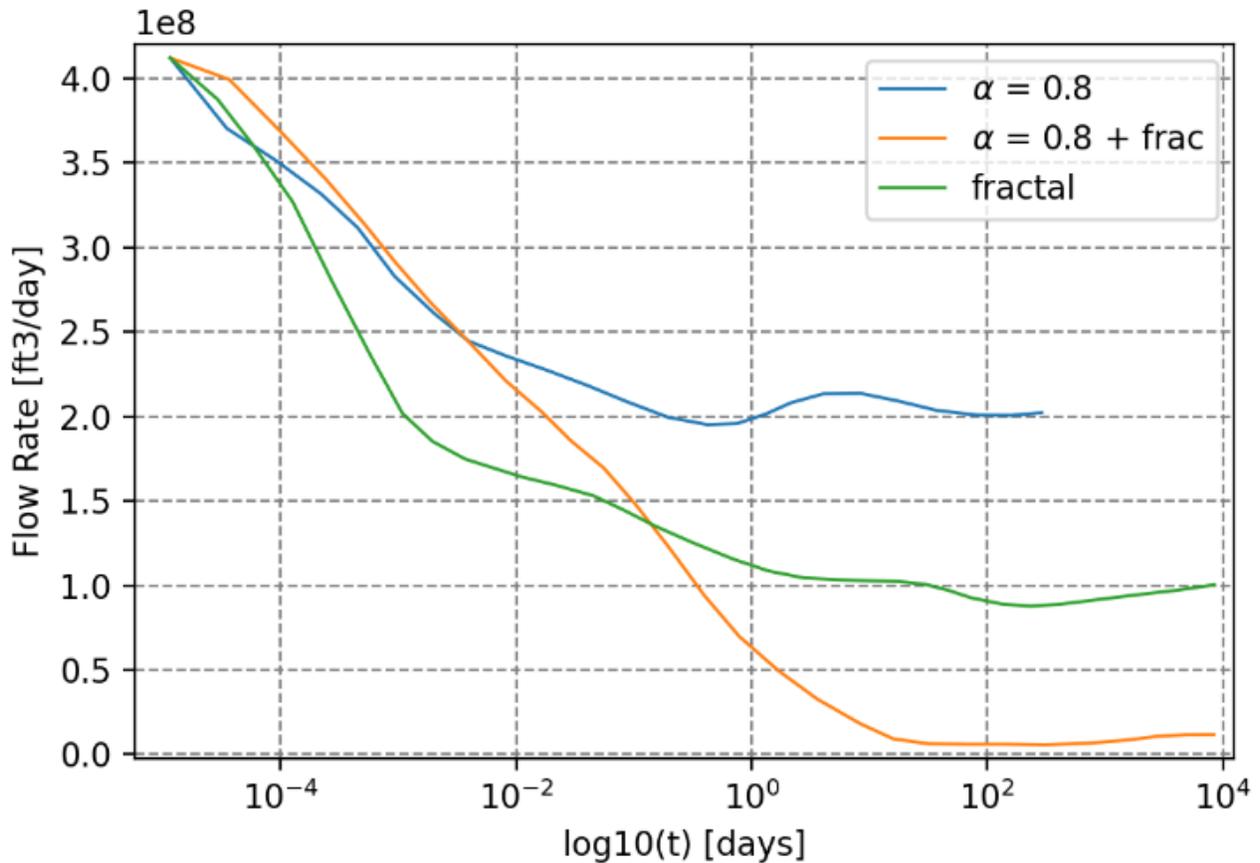


Figura 5.4. Efecto combinado de difusión anómala y distribución fractal de propiedades petrofísicas.

Se realizaron algunas pruebas donde se probó el efecto combinado de considerar la difusión anómala, representada mediante el uso de órdenes de derivada fraccionales, en las ecuaciones (3.9) y (3.12), y/o la distribución 3D de las propiedades petrofísicas fractales. Los resultados se presentan en la Figura 5.4 donde se comparan los casos donde solo existe un orden derivado fraccionario  $\alpha = 0.8$  (línea azul), o la distribución fractal con  $d_{fx} = 1.88$ ,  $d_{fy} = 1.97$ ,  $d_{fz} = 1.91$ ,  $\theta_x = 0.9$ ,  $\theta_y = 0.15$ ,  $\theta_z = 0.9$ , representada por la línea verde. Además del efecto combinado, es decir, el enfoque fraccionario-fractal, representado por la línea naranja en esta figura. Se pueden observar grandes diferencias en los comportamientos de declinación de la producción de estos tres procesos subdifusivos.

---

---

## Capítulo 6

### Conclusiones

En este trabajo, se concentraron los esfuerzos en desarrollar un modelo que combina diferentes mecanismos de transporte con difusión anómala, capturados por los enfoques fraccionales y/o fractales, con un sistema de multi-porosidad.

En base a los resultados presentados en este trabajo, tenemos las siguientes conclusiones:

1.- El modelo numérico propuesto se validó con el simulador de la compañía CMG para un caso donde  $\alpha = 1$ , derivada temporal entera, y las propiedades petrofísicas del sistema de fracturas naturales homogéneas e isotrópicas, caso Euclidiano, es decir un caso de difusión normal, observándose una similitud entre los resultados del modelo numérico propuesto y las del simulador de la compañía CMG lo que da confianza en los resultados del modelo propuesto.

2.- Se generaron unas simulaciones variando la distribución fractal de las propiedades petrofísicas y los órdenes de derivadas fraccionarias. Estas simulaciones demuestran que los parámetros fractales y el orden de la derivada fraccionaria tienen una gran influencia en el comportamiento de declinación de la producción.

3.- El modelo propuesto permite una representación más realista de los efectos de generar fracturas hidráulicas con un SRV, con propiedades petrofísicas de la red de microfracturas mejoradas, para yacimientos de gas de esquisto. También incluye una amplia variedad de heterogeneidades y mecanismos de transporte previamente documentados por otros autores.

---

## 6.1 Recomendaciones

Se presentan algunas recomendaciones respecto al presente trabajo:

1. Se deben realizar estudios de caracterización estática-dinámica de yacimientos para permitir la compilación de datos de validación para la geometría compleja de las fracturas inducidas alrededor de la fractura hidráulica, ya que se puede observar que estas geometrías tienen un impacto significativo en el rendimiento de la producción.
2. Las no linealidades inherentes asociadas con el flujo en un sistema de permeabilidad distribuida representan un desafío para la validación de las soluciones obtenidas. En este trabajo se explora un proceso para resolver esto de manera totalmente implícita. Sin embargo, todavía es necesario seguir estudiando opciones de solución, como puede ser una forma desacoplada del sistema de ecuaciones o una solución de forma paralelizada.
3. El modelo ha sido desarrollado en base a la suposición de que el gas está presente como una sola fase en la formación de lutitas, una ampliación de este trabajo es considerar flujo multifásico.
4. Investigar la implementación de estos modelos para el análisis de casos de campo.

---

## Bibliografía

Abdassah, D., & Ershaghi, I. 1986. Triple-porosity systems for representing naturally fractured reservoirs. *SPE Formation Evaluation*, 1(02), 113-127.

Albinali, A. and Ozkan, E., 2016, May. Analytical modeling of flow in highly disordered, fractured nano-porous reservoirs. In *SPE Western Regional Meeting*. SPE-180440-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/180440-MS>.

Albinali, A. and Ozkan, E., 2016, September. Anomalous diffusion approach and field application for fractured nano-porous reservoirs. In *Spe annual technical conference and exhibition*. SPE-181255-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/181255-MS>.

Al-Ghamdi, A., & Ershaghi, I. 1996. Pressure transient analysis of dually fractured reservoirs. *SPE Journal*, 1(01), 93-100.

Ambrose, R.J., Hartman, R.C., Diaz-Campos, M., Akkutlu, I.Y. and Sondergeld, C.H., 2010, February. New pore-scale considerations for shale gas in place calculations. In *SPE unconventional gas conference*. SPE-131772-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/131772-MS>.

Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N., 1960. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24(5), pp.1286-1303.

Barker, J.A., 1988. A generalized radial flow model for hydraulic tests in fractured rock. *Water Resources Research*, 24(10), <http://dx.doi.org/10.1029/WR024i010p01796>

Beskok, A., & Karniadakis, G. E. 1999. Report: a model for flows in channels, pipes, and ducts at micro and nano scales. *Microscale thermophysical engineering*, 3(1), 43-77.

---

Best, M.E. and Katsube, T.J., 1995. Shale permeability and its significance in hydrocarbon exploration. *The Leading Edge*, 14(3), pp.165-170. <http://dx.doi.org/10.1190/1.1437104>.

Camacho Velazquez, R., Fuentes-Cruz, G. and Vásquez-Cruz, M., 2008. Decline-curve analysis of fractured reservoirs with fractal geometry. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 11(03), SPE-104009-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/104009-PA>.

Camacho Velazquez, R., Mario, V. C., José, R. C., Fernando, S. V., & Luis, M. C. 1996. New results on transient well tests analysis considering nonlaminar flow in the reservoir. *SPE Formation Evaluation*, 11(04), 237-244.

Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International*, 13(5), pp.529-539. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>.

Chang, J. and Yortsos, Y.C., 1990. Pressure transient analysis of fractal reservoirs. *SPE Formation Evaluation*, 5(01), SPE-18170-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/18170-PA>.

Darabi, H., Ettehad, A., Javadpour, F., & Sepehrnoori, K. 2012. Gas flow in ultra-tight shale strata. *Journal of Fluid Mechanics*, 710, 641-658.

Dayal, A. M. 2017. Shale. In *Shale Gas* (pp. 1-11). Elsevier.

Fuentes-Cruz, G. and Valko, P.P., 2015. Revisiting the dual-porosity/dual-permeability modeling of unconventional reservoirs: the induced-interporosity flow field. *SPE Journal*, 20(01), pp.124-141. SPE-173895-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/173895-PA>.

Gu, D., Ding, D., Gao, Z., Zhang, A., Tian, L. and Wu, T., 2017. Pressure transient analysis of multiple fractured horizontal wells in naturally fractured unconventional reservoirs based on fractal theory and fractional calculus. *Petroleum*, 3(3), pp.326-339. <http://dx.doi.org/10.1016/j.petlm.2016.12.005>.

Guo, B. 2019. *Well productivity handbook: vertical, fractured, horizontal, multilateral, multi-fractured, and radial-fractured wells*. Gulf Professional Publishing, 17-51.

---

Holy, R.W. and Ozkan, E., 2016, September. Numerical modeling of multiphase flow toward fractured horizontal wells in heterogeneous nanoporous formations. ATCE SPE-181662-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/181662-MS>.

<https://www.arenapublica.com/articulo/2013/10/23/205>

<https://www.excelsior.com.mx/nacional/2018/02/24/1222521>

Huang, S., Wu, Y., Cheng, L., Liu, H., Xue, Y. and Ding, G., 2018. Apparent permeability model for shale gas reservoirs considering multiple transport mechanisms. *Geofluids*, 2018. <http://dx.doi.org/10.1155/2018/2186194>.

Jalali, Y., & Ershaghi, I. 1987. Pressure transient analysis of heterogeneous naturally fractured reservoirs. In SPE California Regional Meeting.

Javadpour, F., 2009. Nanopores and apparent permeability of gas flow in mudrocks (shales and siltstone). *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 48(08), pp.16-21. PETSOC-09-08-16-DA. <http://dx.doi.org/10.2118/09-08-16-DA>.

Jimenez, B.A. and Aguilera, R., 2019. Physics-Based Fluid-Flow Modeling of Liquids-Rich Shale Reservoirs Using a 3D Three-Phase Multiporosity Numerical-Simulation Model. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 22(04), pp.1501-1526. SPE-191459-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/191459-PA>.

Jones, S. C. 1987. Using the inertial coefficient,  $b$ , to characterize heterogeneity in reservoir rock. SPE Annual Technical Conference and Exhibition.

Karniadakis, G., Beskok, A. and Aluru, N., 2006. *Microflows and nanoflows: fundamentals and simulation* (Vol. 29). Springer Science & Business Media.

Klinkenberg, L. J. 1941. The permeability of porous media to liquids and gases. *SPE Drilling & Production Practice*.

Langmuir, I. 1916. The constitution and fundamental properties of solids and liquids. Part I. Solids. *Journal of the American Chemical Society*, 38(11), 2221-2295.

---

Langmuir, I. 1918. The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica and platinum. *Journal of the American Chemical Society*, 40(9), 1361-1403.

LaPointe, P., Eiben, T., & Dershowitz, W. 1998. The application of discrete fracture network models to fractured reservoir engineering: Analytical approach, data sets and early results in Yates field, West Texas. FRDFNT Project Report, Golder Associates, Redmond, Washington [http://www.fracturedreservoirs.com/niper/database/papers/rmag/rmag\\_60.htm](http://www.fracturedreservoirs.com/niper/database/papers/rmag/rmag_60.htm) (accessed 20 July 2010).

Liu, S., Li, H. and Valkó, P., 2018, July. A Production Decline Model Based on Anomalous Diffusion Stemming from Complex Fracture Network. SPE/AAPG/SEG URTEC-2902890-MS. <http://dx.doi.org/10.15530/URTEC-2018-2902890>.

Meerschaert, M. M. 2012. Fractional calculus, anomalous diffusion, and probability. *Fractional Dynamics: Recent Advances*, 265-284.

Metzler, R., Glöckle, W. G., & Nonnenmacher, T. F. 1994. Fractional model equation for anomalous diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 211(1), 13-24.

Murio, D.A., 2008. Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(4), pp.1138-1145. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.015>

Narr, W., Schechter, D. S., & Thompson, L. B. 2006. Naturally fractured reservoir characterization (Vol. 112). Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers.

O'Shaughnessy, B. and Procaccia, I., 1985. Analytical solutions for diffusion on fractal objects. *Physical Review Letters*, 54(5), <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.455>.

Ozcan, O., Sarak, H., Ozkan, E. and Raghavan, R., 2014, October. A trilinear flow model for a fractured horizontal well in a fractal unconventional reservoir. SPE Annual Technical Conference and Exhibition. SPE-170971-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/170971-MS>.

---

Ozkan, E., Raghavan, R. and Apaydin, O.G., 2010, September. Modeling of fluid transfer from shale matrix to fracture network. SPE Annual Technical Conference and Exhibition. SPE-134830-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/134830-MS>.

Raghavan, R., 2011. Fractional derivatives: Application to transient flow. *Journal of Petroleum Science & Engineering*, 80(1). <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2011.10.003>.

Roy, S., Raju, R., Chuang, H. F., Cruden, B. A., & Meyyappan, M. 2003. Modeling gas flow through microchannels and nanopores. *Journal of Applied Physics*, 93(8), 4870-4879.

Rutqvist, J., Wu, Y.S., Tsang, C.F. and Bodvarsson, G., 2002. A modeling approach for analysis of coupled multiphase fluid flow, heat transfer, and deformation in fractured porous rock. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 39(4), pp.429-442. [http://dx.doi.org/10.1016/S1365-1609\(02\)00022-9](http://dx.doi.org/10.1016/S1365-1609(02)00022-9).

Singh, H., Javadpour, F., Ettehadtavakkol, A., & Darabi, H. 2014. Nonempirical apparent permeability of shale. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 17(03), 414-424.

Swami, V., Settari, A.T. and Javadpour, F., 2013, June. A numerical model for multi-mechanism flow in shale gas reservoirs with application to laboratory scale testing. EAGE Annual Conference & Exhibition incorporating SPE Europec. SPE-164840-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/164840-MS>.

Valdes-Perez, A.R. and Blasingame, T.A., 2018, June. Pressure-transient behavior of doubleporosity reservoirs with transient interporosity transfer with fractal matrix blocks. SPE Europec featured at 80th EAGE Conference and Exhibition. SPE-190841-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/190841-MS>.

Warren, J.E. and Root, P.J. 1963. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *SPE J.* 3 (3): 245–255. SPE-426-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/426-PA>.

Wei, Y., He, D., Wang, J. and Qi, Y., 2015, November. A coupled model for fractured shale reservoirs with characteristics of continuum media and fractal geometry. SPE Asia Pacific unconventional resources conference and exhibition. SPE-176843-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/176843-MS>.

---

Wu, K., Chen, Z., Li, X., Guo, C., & Wei, M. 2016. A model for multiple transport mechanisms through nanopores of shale gas reservoirs with real gas effect–adsorption-mechanic coupling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93, 408-426.

Wu, Y.S., Wang, C., Li, J. and Fakcharoenphol, P., 2012, June. Transient gas flow in unconventional gas reservoirs. SPE Europec/EAGE Annual Conference. SPE-154448-MS. <http://dx.doi.org/10.2118/154448-MS>.

Xu, B. and Wong, R.C., 2010. A 3D finite element model for history matching hydraulic fracturing in unconsolidated sands formation. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 49(04), pp.58-66. <https://doi.org/10.2118/136697-PA>

Zhang, J., Huang, S., Cheng, L., Xu, W., Liu, H., Yang, Y., & Xue, Y. 2015. Effect of flow mechanism with multi-nonlinearity on production of shale gas. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 24, 291-301.

Zhang, L., 2019. Numerical simulation of MFHWs in shale gas reservoirs based on CVFEM. In *Developments in Petroleum Science* (Vol. 66, pp. 237-286). Elsevier. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-64315-5.00008-5>.

Zhuang, P. and Liu, F., 2006. Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 22(3), pp.87-99. <https://doi.org/10.1007/BF02832039>

Ziarani, A.S. and Aguilera, R., 2012. Knudsen’s permeability correction for tight porous media. *Transport in porous media*, 91(1), pp.239-260. <http://dx.doi.org/10.1007/s11242-011-9842-6>.

## Lista de Tablas

---

No.	Descripción	Página
2.1	Clasificación de regímenes de flujo y número de Knudsen para medios porosos (Ziarani y Aguilera 2012).	
4.1	Descripción de las rutinas que constituyen el simulador numérico	
5.1	Propiedades de las fracturas y el yacimiento para construir el caso de validación con CMG	

## Lista de Figuras

No.	Descripción	Página
2.1	Esquema del sistema yacimiento-pozo horizontal-fracturas hidráulicas en conjunto con el sistema de coordenadas (Gu, et al. 2017).	
2.2	Mecanismos de transporte de gas en nanoporos de lutitas (Huang, et al. 2018).	
4.1	Región simulada numéricamente.	
4.2	Esquema especial de la distribución de la malla en 3D.	
4.3	Mallado logarítmico en los 3 planos.	
4.4	Identificación de elipsoides con eje .	
4.5	Relación de anisotropía entre el tensor de esfuerzo, el tensor de deformación y el tensor de permeabilidad (Xu y Wong 2010).	
4.6	Distribución elipsoidal de las componentes del tensor de permeabilidad.	
4.7	Distribución de $k_x$ en el plano XZ por medio de la ecuación (2.19)	
4.8	Distribución espacial de la porosidad.	
4.9	Diagrama de flujo de rutinas de simulación.	
5.1	Comparación de prueba con gasto variable para el sistema de gas DUALPERM: CMG vs. Simulador Propuesto.	
5.2	Evaluación del efecto de diferentes órdenes de derivadas.	
5.3	Comparación de tasas de flujo entre el caso homogéneo y dos vistas de distribución fractal 3D.	
5.4	Efecto combinado de difusión anómala y distribución fractal de propiedades petrofísicas.	