



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCOMPOSICIÓN DE ESPACIOS DE DIMENSIÓN 3

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

LUIS ATZIN FRANCO REYNA

TUTOR

DR. FERNANDO GALAZ GARCÍA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Este trabajo no es más que la culminación de una serie de esfuerzos conjuntos de múltiples personas para hacerme llegar hasta donde estoy.

Primeramente, quiero agradecerle al Dr. Fernando Galaz García por ser mi tutor y por guiarme durante este último año en la escritura de este trabajo. No podría haber conocido al Dr. Fernando sin el Dr. Omar Antolín Camarena, quien me presentó con él y me ayudó a obtener la Beca Iniciación a la Investigación en el año 2021, la cual permitió que, entre otras cosas, este trabajo se desarrollara.

Gran parte de este trabajo lo realicé durante mi estancia en Reino Unido en otoño de 2021. Quiero agradecer a la UNAM y a la Facultad de Ciencias por haberme ofrecido su apoyo para realizar una empresa como ésta. De igual importancia, al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Durham por haberme recibido con los brazos abiertos. El éxito de mi estancia se debe, en parte, a la mejor compañía que pude haber tenido, mi familia yucateca, Brian Isaac y Diana Piña, que me acogieron en su casa y me ofrecieron su hospitalidad y amistad. Junto con ellos, quiero agradecer a Mauricio Che, con quien platiqué múltiples veces sobre matemáticas. Así como a todos los amigos que hice allá.

La parte final de este trabajo es un breve vistazo a un trabajo de investigación en colaboración con el Dr. Fernando Galaz García, el Dr. Luis Guijarro, el Dr. José Carlos Gómez Larrañaga y el Dr. Wolfgang Heil. Quiero agradecer tanto al Dr. Fernando como al Dr. Luis por haberme aceptado y tratado como un colaborador desde un inicio, por enseñarme a ser un mejor matemático en cada reunión y cada correo electrónico, así como por todo el apoyo para impulsar mi futuro académico. También quiero agradecer al Dr. José Carlos, quien, durante sus cursos de topología de 3-variedades, me enseñó muchos de los preliminares para este trabajo. Finalmente, quiero agradecer al Dr. Wolfgang Heil por su paciencia contestando muchas de mis preguntas.

Durante mi estancia en la Facultad de Ciencias, tuve varios profesores que me marcaron. Quiero agradecer al Mtro. Ernesto Alejandro Vázquez Navarro quien fue el primero en introducirme a la geometría, me enseñó a siempre cuestionar las cosas, preguntarme el por qué de las cosas y a ser formal en mis pruebas; a la Dra. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla, sin duda alguna es de las profesoras que más se preocupa porque sus alumnos aprendan y nadie se quede atrás, gracias a ella aprendí Cálculo y me introdujo a la Geometría Diferencial.

Quiero agradecer también a cada uno de los sinodales, el Dr. Omar Antolín Camarena, la Dra. Raquel del Carmen Perales Aguilar, el Dr. Fernando Galaz García, el

Dr. Jesús Núñez Zimbrón y el Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco, quienes dedicaron parte de su valioso tiempo en leer y corregir este trabajo.

Sin embargo, a pesar de que este es un trabajo en matemáticas para obtener el grado de licenciado, mi lugar de máximo aprendizaje durante los últimos 6 años ha sido el frontón cerrado. Bajo la tutela de Héctor Castillo Islas y María de la Luz Salazar Núñez aprendí tenis de mesa, pero más aún, aprendí sobre la vida. El equipo de tenis de mesa fue uno de los pilares que me sostuvo y me impulsó durante estos últimos años. Todos ellos estuvieron siempre a mi lado mientras me formaba y aguantaron mis pláticas sobre «cosas abstractas matemáticas» que no entendía. Incluso me ayudaron a practicar cuando tenía que exponer. En especial quiero agradecer a Julio Raygosa, Ricardo Olalde, Andrés González, Emilio Romero, Hugo Rolón, Ivo Rolón, Abiu Jiménez, Adrián Casarrubias, Axel Reyes y Osvaldo Serrano que me han visto y ayudado a crecer. Más que mis amigos son mi segunda familia.

Nada de esto hubiera sido posible sin todo el esfuerzo y dedicación de mis padres. Jamás he estado solo, siempre han estado ellos dos a mi lado apoyándome y dando todo por verme triunfar. En los momentos difíciles han sido ellos quienes me han ayudado a levantarme y a seguir adelante. Sin duda, no podría estar más agradecido con alguien en la vida que con ellos. Son los mejores padres del mundo y este trabajo es para ellos, con la esperanza que los haga sentir orgullosos y felices.

Finalmente, quiero agradecer a mi hermana, el conejito, por estar a mi lado todos estos años. Por ser mi modelo a seguir y mi brújula del camino correcto. No podría haber pedido una mejor compañera de vida.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. 3-variedades</b>	<b>3</b>
1.1. Variedades topológicas . . . . .	3
1.2. Variedades diferenciables . . . . .	4
1.2.1. Transversalidad . . . . .	5
1.2.2. Fibrados vectoriales . . . . .	7
1.2.3. Vecindades tubulares . . . . .	8
1.3. Suma conexa . . . . .	9
1.4. Triangulaciones . . . . .	10
<b>2. Descomposición prima de 3-variedades</b>	<b>13</b>
2.1. Existencia de la descomposición prima . . . . .	13
2.2. Unicidad de la descomposición prima . . . . .	17
<b>3. Orbifolds</b>	<b>25</b>
3.1. Definiciones y Teoremas básicos . . . . .	25
3.2. Orbifolds de dimensiones bajas . . . . .	29
3.3. Orbifolds buenos y malos . . . . .	32
3.4. 2-suborbifolds y 3-orbifolds irreducibles . . . . .	34
<b>4. Descomposición de Orbifolds</b>	<b>35</b>
4.1. Suma conexa de Orbifolds . . . . .	36
4.2. Triangulación de Orbifolds . . . . .	36
4.3. Teorema de finitud para 2-suborbifolds normales . . . . .	37
4.4. Existencia de la descomposición . . . . .	40
4.5. 3-orbifolds primos no irreducibles . . . . .	44
<b>5. Comentarios finales</b>	<b>49</b>
<b>Apéndice A. Grupos</b>	<b>53</b>
A.1. Definiciones básicas . . . . .	53
A.2. Grupos de Lie . . . . .	54
A.3. Acciones Propias . . . . .	55



# Introducción

Una hormiga camina por la cáscara de una naranja. ¿Conocerá ella la forma de la naranja? ¿Sabrá lo que es ser redonda? De la misma forma, los seres humanos caminamos sobre la Tierra. ¿Sabremos la forma del planeta? ¿Sabremos qué es que la tierra sea redonda? Cualquier persona con más de 6 años podría responder que sí. La Tierra es redonda, redonda como una pelota. ¿Pero cómo sabemos esto? Lo sabemos porque tenemos referencias externas a la Tierra, como el sol y la luna y porque el ser humano ha logrado salir de la superficie de la tierra y observarla desde fuera. Ahora bien, la tierra y todos los planetas y seres vivos que vivimos en ellos navegamos por el universo como si éste fuera una caja rectangular que jamás termina. ¿Cuál es la forma del universo? ¿Podríamos saber qué es que el universo esté curvado? Estas preguntas han motivado durante muchos años el estudio de las 3-variedades: espacios en los que si un ser viviese en ellos, pensaría que son una simple caja rectangular infinita, aunque pueden bien no serlo. Estudiarlas es abrirnos paso a entender más cómo es el universo en el que vivimos, a pesar de no poder hacer lo mismo que un astronauta y simplemente salir de la superficie de la Tierra.

El ser humano es un ser categórico. Nos gusta clasificar y categorizar las cosas para entenderlas mejor. Una forma de hacer esto es reducir estructuras complejas a bloques más sencillos que después se pueden unir, como los juguetes LEGO o como la gramática que divide la estructura compleja de un texto en oraciones y éstas a su vez en palabras con distintas funciones. Si pensamos en términos un poco más matemáticos, el ejemplo más natural y sencillo son los números naturales. Existe una cantidad infinita de números naturales, todos esencialmente distintos. Sin embargo, existe un bloque que es de cierta forma el más sencillo, el número 1. Además, si partimos de él y de una cierta operación, la suma, podemos reconstruir cualquier otro número natural que queramos (ver [Figura 1](#)). Ésta es la filosofía que nos lleva a considerar descomposiciones primas. Tenemos una bolsa con una cantidad infinita de objetos, que son extremadamente complejos. Buscamos encontrar en ella una cantidad más manejable de objetos que sean relativamente más sencillos y con la cual podamos construir cualquier otro objeto de nuestra bolsa.

En este trabajo, nos concentraremos en hacer esto para 3-variedades y para 3-órbifolds. Las 3-variedades son objetos topológicos, están hechos de plastilina y mientras no cortemos, podemos torcerlos y doblarlos a nuestro antojo. Si queremos algo un poco más rígido, entonces obtenemos los órbifolds. Si nuestros ojos son como cámaras fotográficas, una variedad es como una foto desenfocada de un objeto y los órbifolds es el resultado de tomar la misma foto pero enfocando correctamente.



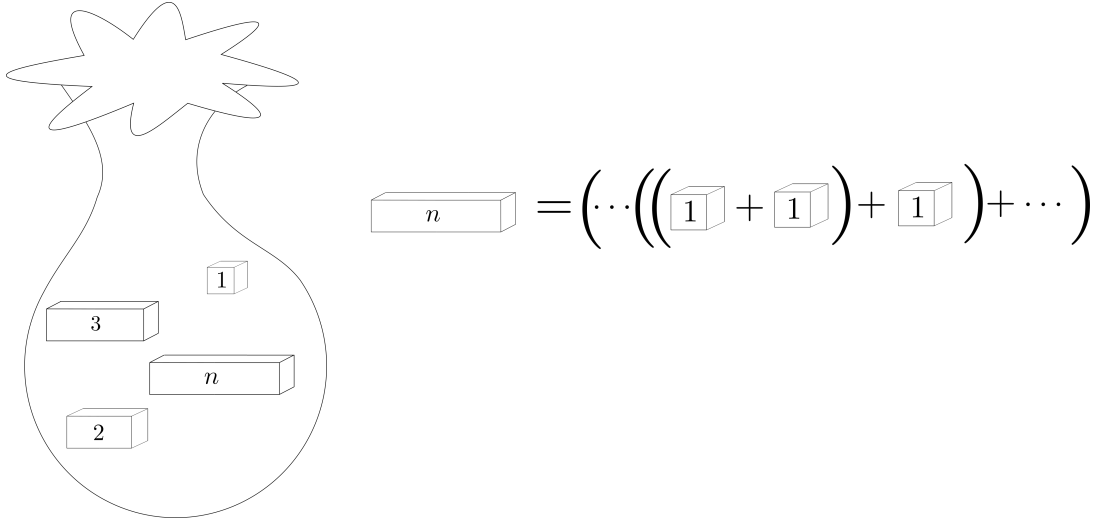


Figura 1: Los números naturales como ejemplo de descomposiciones.

El Capítulo 1 aborda los preliminares para entender qué son las variedades topológicas y nociones afines a ellas. En el Capítulo 2, probamos que existe una descomposición prima de 3-variedades y que cumple una noción de unicidad. En el Capítulo 3, nuevamente presentamos preliminares para entender qué es un orbifold y nociones afines. Finalmente, en el Capítulo 4, demostramos que los 3-órbitos también cumplen una descomposición en factores primos, sin embargo las cosas ya no son tan sencillas. Como nuestra cámara ya enfoca correctamente, vemos más detalles y objetos que considerábamos iguales ya no lo son.

# 1 3-variedades

A lo largo de esta tesis se supondrá que el lector tiene conocimientos básicos sobre variedades diferenciables. Sin embargo, en este primer capítulo presentamos algunas definiciones básicas para asentar la notación.

## 1.1. Variedades topológicas

Las variedades son espacios topológicos que, localmente, son euclidianos. A éstas se le puede agregar una «estructura» para poder estudiar ciertas propiedades. Ejemplos de esto son las variedades diferenciables y triangulables. Enunciaremos primero la definición más general, una variedad topológica:

**Definición 1.1** (Variedad Topológica). *Una **variedad topológica** es un espacio topológico  $M$  segundo numerable y Hausdorff para el cual existe una familia de parejas  $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  que cumple las siguientes propiedades:*

- Para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $M_\alpha$  es un abierto de  $M$  y además  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha = M$ .
- Para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi_\alpha : M_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo, donde  $\Omega_\alpha$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

A una pareja  $(M_\alpha, \varphi_\alpha)$  se le llama **carta** de  $M$ . A la familia  $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  la llamamos **atlas** para  $M$ . La **dimensión** de  $M$  es  $n$ .

La definición anterior puede ser modificada ligeramente permitiendo que los abiertos  $\Omega_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  sean abiertos de  $\mathbb{R}_+^n$ , donde

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}.$$

Esta definición ligeramente modificada es, en realidad, la definición de una **variedad con frontera**. Más aún, si  $M$  es una variedad con frontera y  $x \in M$  es tal que toda vecindad de él es homeomorfa a un abierto del  $0 \in \mathbb{R}_+^n$ , entonces decimos que  $x$  pertenece a la frontera de  $M$ . Ésta última la denotaremos como  $\partial M$ .

Si  $M$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ , entonces diremos que es una  $n$ -**variedad** para ser más breves. Además, diremos que una variedad es **cerrada** si es un espacio topológico compacto y no tiene frontera.

Los siguientes corolarios serán de suma importancia, pues, en particular, el último de ellos prueba que la dimensión de una variedad está bien definida y justifica el

nombre de  $n$ -variedad. Para ver la prueba de ellos se puede consultar los Corolarios 19.8, 19.9 y 19.10 de [Bre93].

**Corolario 1.2.** *Si  $M$  es una  $n$ -variedad topológica y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es inyectiva y continua, entonces  $f$  es una función abierta.*

**Corolario 1.3** (Invariancia del Dominio). *Si  $M$  y  $N$  son  $n$ -variedades y  $f: M \rightarrow N$  es una función inyectiva y continua, entonces  $f$  es abierta.*

**Corolario 1.4** (Invariancia de la Dimensión). *Si  $M$  es una  $m$ -variedad y  $N$  una  $n$ -variedad tal que  $M$  es homeomorfa a  $N$ , entonces  $n = m$ .*

Cuando la dimensión de las variedades topológicas que se estudian es 1, 2 o 3, se suele decir que se está estudiando variedades de dimensión baja. En este trabajo nuestro principal objetivo es estudiar las variedades topológicas cuya dimensión es igual a 3.

La topología de las variedades es muy interesante. Dado que localmente son euclidianas, localmente cumplen muchas propiedades que se obtienen de  $\mathbb{R}^n$ . Ejemplo de esto son las siguientes dos proposiciones (ver Proposiciones 4.23 y 4.64 de [Lee11]):

**Proposición 1.5.** *Toda variedad topológica es localmente conexa y localmente conexa por trayectorias.*

**Proposición 1.6.** *Toda variedad topológica es localmente compacta.*

**Observación 1.7.** *Supongamos que  $M$  es una variedad conexa. Por la Proposición 1.5 sabemos que  $M$  es localmente conexa por trayectorias. Luego, se tiene que  $M$  es conexa por trayectorias (ver Proposición 4.26 de [Lee11]).*

## 1.2. Variedades diferenciables

**Definición 1.8** (Variedad Diferenciable). *Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica  $M$  con un atlas  $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  tal que:*

- Si  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tal que  $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$ , entonces la función

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(M_\alpha \cap M_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta)$$

*es un difeomorfismo (ver Figura 1.1).*

- El atlas  $\{(M_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  es maximal respecto a cartas compatibles. Esto es, si  $(V, \psi)$  es otra carta de  $M$  tal que para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$  la función

$$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}: \psi(M_\alpha \cap V) \rightarrow \varphi_\alpha(M_\alpha \cap V)$$

*es un difeomorfismo, entonces  $(V, \psi) \in \{(M_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ .*

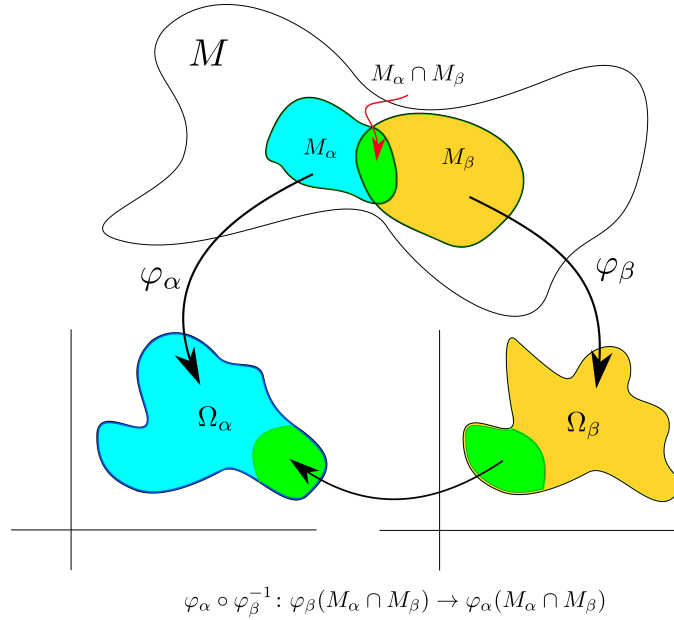


Figura 1.1: Cambio de coordenadas en una variedad diferenciable.

Dada una variedad diferenciable  $M$  y un punto  $x \in M$ , podemos construir el espacio tangente a  $M$  en  $x$ . Éste es un espacio vectorial y lo denotaremos como  $T_x M$  (ver Capítulo 3 de [Lee12]).

Un concepto importante es el de subvariedad; a continuación presentamos su definición.

**Definición 1.9** (Subvariedad). *Sea  $N$  una variedad diferenciable. Un subconjunto  $M \subset N$  es una **subvariedad** de dimensión  $n$  si para todo punto  $a \in M$ , existe una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $a$  en  $N$  y un difeomorfismo  $\psi: \mathcal{U} \subset N \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n+k}$  tal que*

$$\psi(\mathcal{U} \cap M) = \mathbb{R}^n \cap \mathcal{V},$$

donde  $\mathbb{R}^n$  esta visto como el subespacio

$$\{(x_1, \dots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid x_{n+1} = \dots = x_{n+k} = 0\}$$

de  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

### 1.2.1. Transversalidad

Un concepto clave en la Topología Diferencial es el de *transversalidad*. Intuitivamente, si pensamos en dos rectas en el plano cuya intersección es no vacía, entonces se intersecan en otro subespacio afín. Más aún, si las rectas son distintas, entonces su intersección es sólo un punto. De forma similar, si pensamos en dos planos en el espacio que se intersequen, entonces su intersección es una línea recta (que es un subespacio afín) o son el mismo plano (ver Figura 1.2). Cuando hablamos de subvariedades, su intersección no necesariamente es una subvariedad; sin embargo, si se

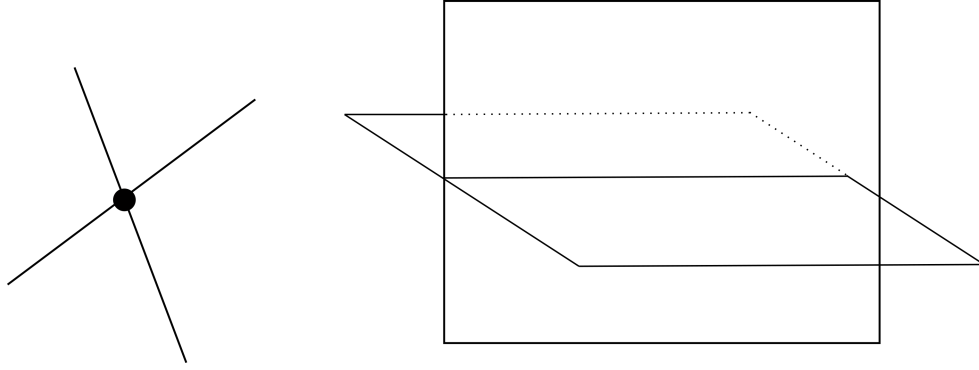


Figura 1.2: Idea intuitiva de la transversalidad

intersecan transversalmente, entonces su intersección sí es una subvariedad y podemos decir exactamente cuál es su codimensión. Para leer más sobre esto se puede consultar el excelente libro [GP74].

**Definición 1.10.** Sean  $M$  una  $n$ -variedad,  $Z$  y  $N$  subvariedades de  $M$ . Decimos que  $Z$  y  $N$  son **transversales**, abreviado  $N \pitchfork Z$ , si para cualquier  $x \in N \cap Z$  se cumple que:

$$T_x N + T_x Z = T_x M.$$

**Definición 1.11.** Sean  $M$  una  $m$ -variedad,  $N$  una  $n$ -variedad,  $Z \subset N$  una subvariedad y  $f: M \rightarrow N$  una función. Decimos que  $f$  es **transversal** a  $Z$ , abreviado  $f \pitchfork Z$ , si se cumple que para todo  $x \in f^{-1}(Z)$ :

$$\text{Im}(df_x) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} N.$$

Notemos que la [Definición 1.11](#) implica la [Definición 1.10](#) tomando la función inclusión  $\iota: N \hookrightarrow M$ . En este sentido, podemos pensar a la [Definición 1.11](#) como una generalización de la [Definición 1.10](#). Tenemos los siguientes dos teoremas que son fundamentales para nuestro trabajo (ver Teoremas 6.30 y 6.36 de [Lee12]):

**Teorema 1.12.** Supongamos que  $N$  y  $M$  son variedades diferenciables y  $S \subset M$  es una subvariedad de  $M$ .

- (a) Si  $f: N \rightarrow M$  es una función suave transversal a  $S$ , entonces  $f^{-1}(S)$  es una subvariedad de  $N$  tal que  $\text{codim}(S) = \text{codim}(f^{-1}(S))$ .
- (b) Si  $S' \subset M$  es una subvariedad de  $M$  que interseca a  $S$  transversalmente, entonces  $S \cap S'$  es una subvariedad y se cumple que :

$$\text{codim}(S \cap S') = \text{codim}(S) + \text{codim}(S').$$

**Teorema 1.13.** Supongamos que  $M$  y  $N$  son variedades diferenciables y  $X \subset M$  es una subvariedad. Toda función suave  $f: N \rightarrow M$  es homotópica a una función suave  $g: N \rightarrow M$  transversal a  $X$ .

### 1.2.2. Fibrados vectoriales

Los fibrados y fibrados vectoriales juegan un papel muy importante en el estudio de la Geometría Diferencial. En esta subsección presentamos sus definiciones para, a partir de ellas, poder hablar de vecindades normales y enunciar el Teorema de la Vecindad Tubular que será de suma importancia en el resto del trabajo. Para leer más sobre fibrados se puede consultar el libro [Lee09].

**Definición 1.14** (Fibrado). Sean  $F$ ,  $M$ ,  $E$  variedades diferenciables y  $\pi: E \rightarrow M$  una función suave. La cuádrupla  $(E, \pi, M, F)$  se llama **fibrado** si, para cada punto  $p \in M$ , existen un abierto  $U \subset M$  tal que  $p \in U$  y un difeomorfismo  $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

A la variedad  $E$  se le llama el **espacio total**,  $\pi$  es la **proyección del fibrado**,  $M$  es el **espacio base** y  $F$  es la **fibra**. Para cada  $p \in M$ , el conjunto  $E_p := \pi^{-1}[\{p\}]$  se le llama **fibra sobre  $p$** .

**Ejemplo 1.** Si  $M$  y  $F$  son variedades diferenciables, entonces  $(M \times F, pr_1, M, F)$  es el **fibrado trivial**.

Es importante recalcar que si  $(E, \pi, M, F)$  es un fibrado, entonces  $\pi$  es una submersión y para cada  $p \in M$  se tiene que  $E_p$  es difeomorfo a  $F$ .

**Definición 1.15.** Dado un fibrado  $(E, \pi, M, F)$ , una **sección** es una función  $\sigma: M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \sigma = id_M$ . Una **sección local** sobre un abierto  $U \subset M$  es una función  $\sigma: U \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \sigma = id_U$ .

Las funciones  $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  que aparecen en la [Definición 1.14](#) se conocen como **trivializaciones locales**. Una pareja  $(U, \phi)$ , donde  $\phi$  es una trivialización local, se conoce como **carta del fibrado**. Una familia  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de cartas de fibrado tal que  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$  se le conoce como **atlas de fibrado**.

**Definición 1.16** (Fibrado Vectorial). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Un fibrado vectorial con fibra  $V$  es un fibrado  $(E, \pi, M, V)$  tal que:

- Para cada  $x \in M$  el conjunto  $E_x$  tiene la estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y es isomorfo como espacio vectorial a  $V$ .
- Cada  $p \in M$  está en el dominio de alguna carta de fibrado  $(U, \phi)$  tal que para cada  $x \in U$  la función  $\Phi|_{E_x}: E_x \rightarrow V$  es un isomorfismo de espacios vectoriales, donde  $\phi = (\pi, \Phi)$ .

### 1.2.3. Vecindades tubulares

El objetivo de esta subsección es enunciar uno de los teoremas más importantes de Geometría Diferencial y que será de suma importancia en este trabajo: el Teorema de la Vecindad Tubular. Iniciamos con la definición del espacio normal. Para más detalles, se puede consultar [Hir76] o [Sil08].

Sea  $M$  una  $n$ -variedad y  $X$  una subvariedad de  $M$  de dimensión  $k < n$ . Tenemos la función inclusión:

$$\iota: X \hookrightarrow M.$$

Para cada  $x \in X$ , el espacio tangente a  $X$  en  $x$  se puede ver como un subespacio lineal del espacio tangente a  $M$  en  $x$  mediante la inclusión lineal

$$d\iota_x: T_x X \hookrightarrow T_{i(x)} M.$$

El espacio cociente  $N_x X := T_x M / T_x X$  es un espacio vectorial de dimensión  $n - k$  al que se le llama **espacio normal** a  $X$  en  $x$ . El **fibrado normal** de  $X$  es:

$$NX := \{(x, v) : x \in X, v \in N_x X\}.$$

La cuádrupla  $(NX, pr_1, X, \mathbb{R}^{n-k})$  tiene la estructura de un fibrado vectorial (ver [Definición 1.16](#)). Definimos la **sección cero** como la sección

$$i_0: X \hookrightarrow NX$$

dada por  $i_0(x) \mapsto (x, 0)$ . Esta encaja a  $X$  en  $NX$  como una subvariedad cerrada.

**Definición 1.17.** Una vecindad  $\mathcal{U}_0$  de  $i_0(X)$  es **convexa**, si la intersección  $\mathcal{U}_0 \cap N_x X$  es convexa para cada  $x \in X$ .

**Teorema 1.18** (Teorema de la Vecindad Tubular). Si  $M$  es una  $n$ -variedad y  $X$  una subvariedad de dimensión  $k < n$  de  $M$ , entonces existe una vecindad convexa  $\mathcal{U}_0$  de  $i_0(X)$  en  $NX$ , una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $X$  en  $M$  y un difeomorfismo  $\varphi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_0 \subset NX & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U} \subset M \\ & \swarrow i_0 & \nearrow \iota \\ & X & \end{array}$$

**Definición 1.19.** Sea  $M$  una 3-variedad y  $E$  una 2-esfera en  $M$ . Esto es,  $j: \mathbb{S}^2 \hookrightarrow M$  es un encaje y  $j(\mathbb{S}^2) = E$ . Si  $M \setminus E$  es desconexa, entonces decimos que  $E$  **separa** a  $M$ ; de lo contrario, diremos que  $E$  no separa a  $M$ .

**Observación 1.20.** Si  $M$  es una 3-variedad conexa, entonces por la [Observación 1.7](#) se tiene que  $M$  es conexa por trayectorias. Esto implica que  $E$  es una 2-esfera que no separa a  $M$  si y sólo si existe una curva simple cerrada  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma([0, 1])$  interseca a  $E$  transversalmente en un solo punto (ver Lema 3.4 de [Lac]).

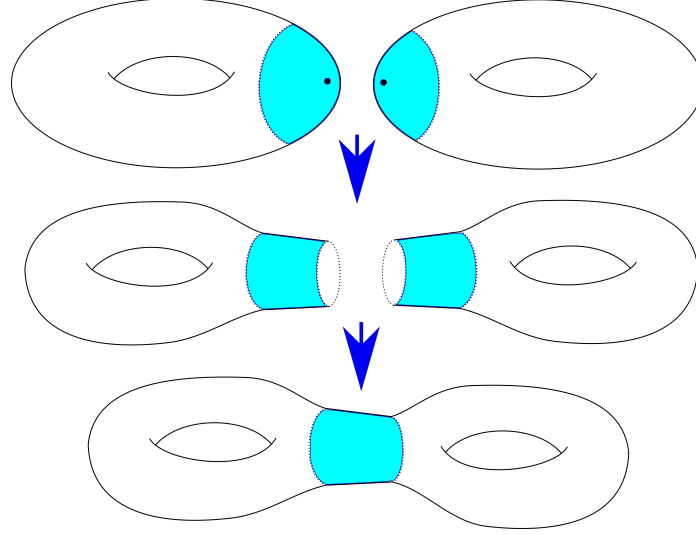


Figura 1.3: Suma conexa de dos toros.

### 1.3. Suma conexa

Dado un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$ , denotaremos el interior de  $A$  como  $\overset{\circ}{A}$ .

**Definición 1.21** (Suma conexa). Sean  $M_1, M_2$  dos  $n$ -variedades diferenciables conexas. Escogemos dos encajes de la bola unitaria de dimensión  $n$ :

$$i_1 : \mathbb{B}^n \rightarrow \text{int}(M_1) \quad , \quad i_2 : \mathbb{B}^n \rightarrow \text{int}(M_2)$$

tales que  $i_1$  preserve la orientación e  $i_2$  invierta la orientación. Sea además  $\alpha : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  un difeomorfismo que invierta la orientación. Definimos  $\alpha_n : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  como:

$$\alpha_n(v) = \alpha(\|v\|) \left( \frac{v}{\|v\|} \right)$$

y luego la **suma conexa** de  $M_1$  con  $M_2$  como

$$M_1 \# M_2(i_1, i_2, \alpha) := (M_1 \setminus i_1[\{0\}]) \cup_g (M_2 \setminus i_2[\{0\}]),$$

donde  $g = i_2 \circ \alpha_n \circ i_1^{-1} : i_1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}) \rightarrow i_2(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$  (ver [Figura 1.3](#)).

En general, no especificaremos cuáles son los encajes  $i_1$  e  $i_2$  ni el difeomorfismo  $\alpha$ . Esto está justificado por el siguiente teorema (ver Teorema 1.1, Capítulo 6 de [\[Kos92\]](#)):

**Teorema 1.22.** Si  $M_1$  y  $M_2$  son  $n$ -variedades diferenciables ( $n > 1$ ) conexas y orientadas, entonces  $M_1 \# M_2$  es una variedad diferenciable conexa y orientada. Más aún, esta operación no depende (salvo difeomorfismo) de la elección del difeomorfismo  $\alpha$  o los encajes  $i_1$  e  $i_2$ .



Esta definición de la suma conexa es la que se presenta en [Kos92]. Debemos hacer notar que la definición original se debe a Milnor en [Joh63]. Si se comparan, se notará que la diferencia primordial está en que Kosinski construye  $M_1 \# M_2$  utilizando la función  $g = i_2 \circ \alpha_n \circ i_1^{-1}$  que sirve para cualquier difeomorfismo  $\alpha$ , mientras que Milnor utiliza la función  $g = i_2 \circ h \circ i_1^{-1}$  donde  $h(u) = (1 - \|u\|)u$ . Este cambio no hace diferencia en el espacio final  $M_1 \# M_2$ . Además, es de importancia notar que tanto  $h$  como  $\alpha_n$  revierten la orientación y por ende  $g$  preserva la orientación, lo cual hace que  $M_1 \# M_2$  sea orientable.

Durante el siguiente capítulo se utilizará con frecuencia que la suma conexa es una operación conmutativa, asociativa y con neutro. Esto queda plenamente justificado por el siguiente teorema (ver Capítulo 6, Teorema 2.2 de [Kos92]):

**Teorema 1.23.** *Si  $\mathcal{M}$  es el conjunto de todas las  $n$ -variedades conexas, orientadas y cerradas, entonces  $(\mathcal{M}, \#)$  es un monoide conmutativo. Esto es:*

- Para cualesquiera  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$  se tiene que  $M_1 \# M_2 = M_2 \# M_1$ .
- Para cualesquiera  $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$  se tiene que

$$(M_1 \# M_2) \# M_3 = M_1 \# (M_2 \# M_3).$$

- Para cualquier  $M \in \mathcal{M}$  se tiene que  $M \# \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n \# M = M$ .

## 1.4. Triangulaciones

**Definición 1.24** (Puntos afinmente independientes). *Sean  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . Decimos que estos puntos son **afinmente independientes** si:*

$$\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\} \subset \mathbb{R}^n$$

*es un conjunto linealmente independiente.*

De esta definición es inmediato que  $n + 1$  es la cantidad máxima de puntos afinmente independientes que puede existir en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.25** (Simplejos). *Un **simplejo**  $\sigma$  es la envolvente convexa de un subconjunto finito de puntos afinmente independientes  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Los elementos de  $A$  los llamamos **vértices** de  $\sigma$ . La dimensión de  $\sigma$  es  $\dim \sigma := |A| - 1$ .*

Notemos que si tenemos un simplejo  $\sigma$  generado por  $A = \{v_0, \dots, v_k\}$ , entonces podemos expresar a  $\sigma$  como

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i v_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1 \wedge \forall i \in \{0, \dots, k\} (t_i \in [0, 1]) \right\}. \quad (1.1)$$

Así, cada punto  $x \in \sigma$  se puede ver como  $x = \sum_{i=0}^k t_i v_i$ . A los números  $t_i$  los llamamos **coordenadas baricéntricas**.

Además, dado  $B \subset A$ , al simplejo  $\tau$  generado por  $B$  se le llama una **cara** de  $\sigma$  y lo denotamos como  $\tau < \sigma$ .

**Definición 1.26** (Baricentro). Sea  $\sigma$  un simplejo generado por  $A = \{v_0, \dots, v_k\}$ . Definimos el baricentro de  $\sigma$  como

$$\text{Bar}(\sigma) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} v_i. \quad (1.2)$$

**Definición 1.27** (Complejo simplicial). Un conjunto  $K$  de simplejos en  $\mathbb{R}^n$  es un **complejo simplicial** si cumple:

- si  $\sigma \in K$  y  $\tau < \sigma$ , entonces  $\tau \in K$ ;
- si  $\sigma, \tau \in K$ , entonces  $\sigma \cap \tau < \sigma$  y  $\sigma \cap \tau < \tau$ , y
- $K$  es localmente finito; esto es, dado un  $x \in \sigma \in K$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que solo hay un número finito de elementos  $\tau \in K$  que intersecan a  $U$ .

La unión de todos los elementos de  $K$  es la **realización geométrica** de  $K$ ; también se le suele llamar poliedro y se denota:

$$|K| := \bigcup K.$$

**Definición 1.28** (Subcomplejo y p-esqueleto). Sea  $K$  un complejo simplicial. Decimos que  $L \subset K$  es un **subcomplejo simplicial** de  $K$  si  $L$  por sí mismo es un complejo simplicial.

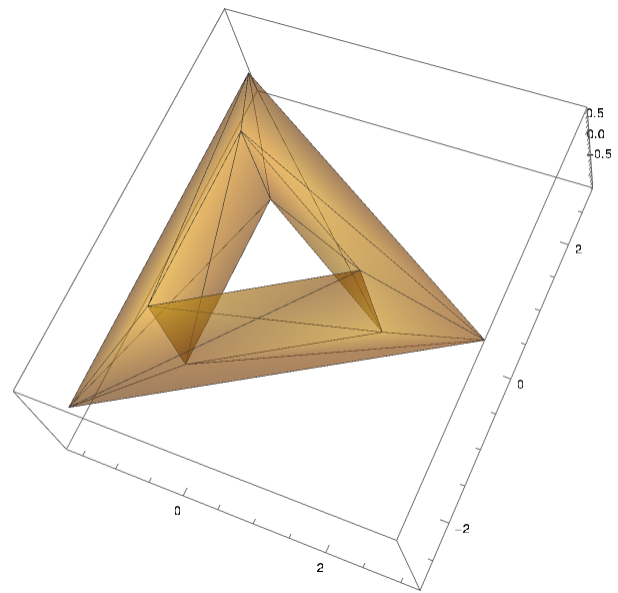
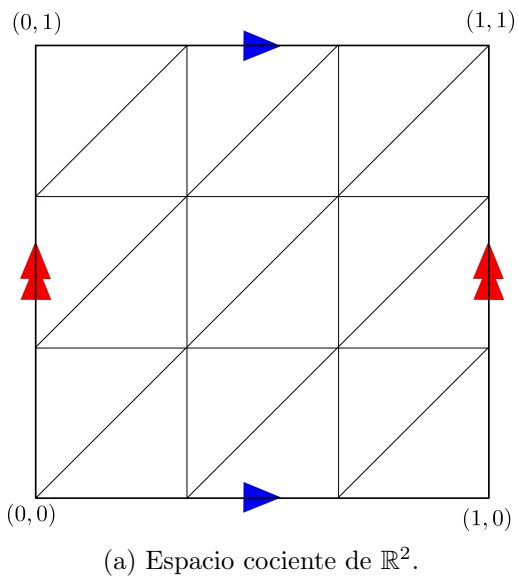
Un ejemplo importante de subcomplejo simplicial es el **p-esqueleto**, que se denota por  $K^p$ , y está definido como:

$$K^p := \{\sigma \in K \mid \dim \sigma \leq p\}.$$

**Definición 1.29** (Triangulación). Dado un espacio topológico  $X$ , una **triangulación** de  $X$  es una pareja  $(K, f)$ , donde  $K$  es un complejo simplicial y  $f : |K| \rightarrow X$  es un homeomorfismo.

**Ejemplo 2.** Consideremos el toro  $\mathbb{T}^2$ . Una triangulación de éste se puede observar en la [Figura 1.4a](#). Nótese que, en esta figura, se pide que los lados paralelos del cuadrado se identifiquen. Esto es, esta triangulación se puede pensar como un espacio cociente de  $[0, 1]^2$ . Para que ésta triangulación sea una verdadera triangulación, dada nuestra definición, en realidad se debe ver como en la [Figura 1.4b](#). Es fácil ver que ésta sí es una triangulación de  $\mathbb{T}^2$ : se tiene un complejo simplicial de  $\mathbb{R}^3$  cuya realización geométrica es homeomorfa a  $\mathbb{T}^2$ .

Finalmente, cabe mencionar que en este trabajo estaremos trabajando en la categoría de variedades diferenciables. Sin embargo, un teorema de Whitehead nos asegura que toda variedad diferenciable admite una triangulación (ver Teorema 7 de [\[Whi40\]](#)).

Figura 1.4: Triangulación del Toro  $\mathbb{T}^2$ .

## 2 Descomposición prima de 3-variedades

En este capítulo se probará la existencia y unicidad de la descomposición en factores primos de 3-variedades cerradas, conexas y orientadas. Seguiremos el artículo de J. Milnor [Mil62], en el cual se demuestra la unicidad de la descomposición en factores primos de las 3-variedades **cerradas, conexas y orientadas**. Sin embargo, a diferencia de Milnor, utilizaremos la estructura diferencial de las variedades en lugar de su estructura lineal a trozos. Esto es en parte siguiendo el tratamiento que se da del tema en [Hat]. Antes de probar la unicidad de la descomposición debemos probar la existencia de ésta. La existencia de la descomposición se debe a H. Kneser [Kne29]. En esta tesis probaremos la existencia de la descomposición siguiendo los pasos descritos por Milnor en [Mil62]. Su prueba se basa en que la conjetura de Poincaré es cierta, lo cual se debe al trabajo de Perelman, ver por ejemplo [MT07].

### 2.1. Existencia de la descomposición prima

Durante esta primera sección daremos por sentado que el lector está familiarizado con el producto libre de grupos. Para una introducción a ellos, se puede consultar el capítulo 11 de [Rot95] o el capítulo 14 de [Cas03].

Fijaremos un poco de notación sobre grupos. Sea  $G$  un grupo y  $A \subseteq G$  un subconjunto de  $G$ . Al subgrupo normal generado por  $A$  lo denotaremos como  $N_A$ . Recordemos ahora el Teorema de Seifert-van Kampen (ver Teorema XIV.3.21 de [Cas03]):

**Teorema 2.1** (Seifert-van Kampen). *Sea  $X$  un espacio topológico. Supongamos que  $X = X_1 \cup X_2$  con  $X_1, X_2$  abiertos. Si  $X_1, X_2$  y  $X_1 \cap X_2$  son no vacíos y conexas por trayectorias, entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) \star \pi_1(X_2, x_0) / N_{\{i_{1\star}(\alpha)i_{2\star}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}}$$

para  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ , donde  $N_{\{i_{1\star}(\alpha)i_{2\star}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}}$  es el subgrupo normal de  $\pi_1(X_1, x_0) \star \pi_1(X_2, x_0)$  generado por  $\{i_{1\star}(\alpha)i_{2\star}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}$  e  $i_1, i_2$  son las inclusiones

$$i_1 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1 \quad , \quad i_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2$$

que inducen homomorfismos de grupos

$$i_{1\star} : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X_1, x_0) \quad , \quad i_{2\star} : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X_2, x_0)$$

Una aplicación directa de este teorema prueba el siguiente corolario (ver Corolario XIV.3.22 de [Cas03]):

**Corolario 2.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Supongamos que  $X = X_1 \cup X_2$  con  $X_1, X_2$  abiertos. Si  $X_1, X_2$  y  $X_1 \cap X_2$  son no vacíos, conexos por trayectorias, y además tanto  $X_2$  como  $X_1 \cap X_2$  son simplemente conexos, entonces el homomorfismo de grupos*

$$j_{1*} : \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*inducido por la inclusión*

$$j_1 : X_1 \rightarrow X$$

*es un isomorfismo de grupos.*

Recordemos que si  $X$  es un espacio topológico conexo por trayectorias y  $x, y \in X$ , entonces

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$$

(ver Teorema 7.13 de [Lee11]). Por ende, si  $M$  es una variedad topológica conexa, entonces por la [Observación 1.7](#) sabemos que  $M$  es conexa por trayectorias y, por lo tanto, su grupo fundamental no depende del punto base (salvo isomorfismo).

**Lema 2.3.** *Sean  $M$  una  $n$ -variedad conexa sin frontera con  $n \geq 3$ ,  $p \in M$  y  $M^* = M \setminus \{p\}$ . Se tiene que  $\pi_1(M) \cong \pi_1(M^*)$ .*

*Demostración.* Dado que  $M$  es una  $n$ -variedad y  $p \in M$ , existe una carta  $\varphi : U \rightarrow V$ , donde  $U \subset M$  y  $V \subset \mathbb{R}^n$  son abiertos en sus respectivos espacios y  $p \in U$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\varphi(p) = 0 \in V$  y sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathbb{B}_\varepsilon(0) \subset V$ . Definimos los siguientes dos conjuntos:

- $M_1 = M \setminus \{p\}$ ,
- $M_2 = \varphi^{-1}(\mathbb{B}_\varepsilon(0))$ .

Notamos que  $M_1 \cap M_2 = \varphi^{-1}(\mathbb{B}_\varepsilon(0)) \setminus \{p\}$ . Es claro que  $M = M_1 \cup M_2$ ;  $M_1, M_2$  son abiertos en  $M$ ;  $M_1, M_2, M_1 \cap M_2$  son no vacíos, conexos por trayectorias. Además  $M_2$  es simplemente conexo, pues  $\varphi$  es un homeomorfismo y  $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$  es simplemente conexo. También  $M_1 \cap M_2 = \varphi^{-1}(\mathbb{B}_\varepsilon(0)) \setminus \{p\}$  es simplemente conexo, pues  $n \geq 3$ . Se cumplen las condiciones del [Corolario 2.2](#) y por lo tanto para cada  $x_0 \in M_1 = M \setminus \{p\} = M^*$  se tiene que

$$\pi_1(M^*, x_0) \cong \pi_1(M, x_0).$$

Finalmente, por lo observado en los párrafos anteriores al lema, podemos omitir el punto base y simplemente escribir:

$$\pi_1(M^*) \cong \pi_1(M).$$

□

Este lema nos permite probar que el grupo fundamental de la suma conexa es isomorfo al producto libre de los grupos fundamentales de las variedades a sumar.

**Teorema 2.4.** Sean  $M$  y  $N$  variedades conexas sin frontera con  $n \geq 3$ . Para la suma conexa se tiene que

$$\pi_1(M\#N) \cong \pi_1(M) \star \pi_1(N).$$

*Demostración.* Denotaremos por  $\mathbf{1}$  al grupo que sólo tiene un elemento, el neutro. Sean  $i_1 : \mathbb{B}^n \rightarrow M$ ,  $i_2 : \mathbb{B}^n \rightarrow N$  los dos encajes de la bola unitaria  $n$  dimensional tal que

$$M\#N = (M \setminus i_1[\{0\}]) \cup_g (N \setminus i_2[\{0\}]).$$

Definimos los siguientes conjuntos:

- $U_1 := M \setminus i_1[\{0\}]$ .
- $V_1 := N \setminus i_2[\{0\}]$ .
- $U_2 := i_1(\mathring{\mathbb{B}}^n)$ .
- $V_2 := i_2(\mathring{\mathbb{B}}^n)$ .

Finalmente, sean  $W_1$  la imagen de  $U_1$  en  $M\#N$  y  $W_2$  la imagen de  $V_1$  en  $M\#N$ . Es claro que  $U_1, U_2, V_1, V_2$  son conjuntos abiertos en sus respectivas variedades. Más aún

$$M = U_1 \cup U_2 \quad , \quad N = V_1 \cup V_2 \tag{2.1}$$

y  $M\#N = U_1 \cup_g V_1$  por definición.

Tenemos también que

$$i_1(\mathring{\mathbb{B}}^n) \setminus i_1(0) = U_1 \cap U_2 = U_2 \setminus i_1[\{0\}] \approx W_1 \cap W_2 \approx V_2 \setminus i_2[\{0\}] = V_1 \cap V_2 = i_2(\mathring{\mathbb{B}}^n) \setminus i_2(0),$$

donde  $\approx$  significa que los espacios son homeomorfos. Ésto nos dice que

$$\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \pi_1(V_1 \cap V_2) \cong \pi_1(W_1 \cap W_2) \cong \mathbf{1}, \tag{2.2}$$

pues  $i_1(\mathring{\mathbb{B}}^n) \setminus i_1(0)$  e  $i_2(\mathring{\mathbb{B}}^n) \setminus i_2(0)$  son simplemente conexos al ser  $n \geq 3$ .

Ahora bien, como  $n \geq 3$  y  $M, N$  son variedades conexas sin frontera, tenemos por el [Lema 2.3](#) que

$$\pi_1(U_1) \cong \pi_1(M) \quad , \quad \pi_1(V_1) \cong \pi_1(N) \tag{2.3}$$

Por otro lado, como ya teníamos que  $U_1$  y  $V_1$  son abiertos, entonces  $W_1$  y  $W_2$  son abiertos en  $M\#N$  tales que

$$M\#N = W_1 \cup W_2$$

y además  $W_1, W_2$  y  $W_1 \cap W_2$  son no vacíos y conexos por trayectorias. Entonces, por el [Teorema 2.1](#), tenemos que

$$\pi_1(M\#N, x_0) \cong \pi_1(W_1, x_0) \star \pi_1(W_2, x_0) / N_{\{j_{1\star}(\alpha)j_{2\star}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(W_1 \cap W_2, x_0)\}}.$$

Sin embargo, por [\(2.2\)](#) tenemos que

$$\pi_1(M\#N, x_0) \cong \pi_1(W_1, x_0) \star \pi_1(W_2, x_0)$$

para  $x_0$  en  $W_1 \cap W_2$ . Como se observó más arriba, en una variedad el grupo fundamental no depende del punto base. Por lo tanto,

$$\pi_1(M \# N) \cong \pi_1(W_1) \star \pi_1(W_2).$$

Para finalizar, sabemos que  $W_1 \approx U_1$  y que  $W_2 \approx V_1$ . Por ende, usando (2.3), obtenemos

$$\pi_1(W_1) \cong \pi_1(M) \quad , \quad \pi_1(W_2) \cong \pi_1(N).$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\pi_1(M \# N) = \pi_1(M) \star \pi_1(N).$$

□

Por el resto de este capítulo se asumirá que toda 3-variedad es **cerrada, conexa y orientada**.

Para hablar de descomposición prima de 3-variedades, hay que introducir algunos conceptos, como el de variedad prima e isomorfismo de 3-variedades.

**Definición 2.5** (Isomorfismo). *Sean  $M_1, M_2$  dos 3-variedades. Diremos que  $M_1$  y  $M_2$  son **isomorfas**, denotado como  $M_1 \simeq M_2$ , si existe un difeomorfismo que preserve la orientación.*

Dado que  $\mathbb{S}^3$  sirve como elemento neutro para la suma conexa, diremos que  $\mathbb{S}^3$  es una 3-variedad **trivial** y a cualquier otra 3-variedad  $M$  que no sea isomorfa a  $\mathbb{S}^3$  la llamaremos **no trivial**.

**Definición 2.6** (Variedad Prima). *Una 3-variedad  $P$  no trivial es **prima** si no existe una descomposición  $P \simeq M_1 \# M_2$  tal que  $M_1$  y  $M_2$  sean 3-variedades no triviales.*

Precisamos de un último teorema antes de presentar la existencia de la descomposición. Éste se conoce como Teorema de Grushko-Neumann (ver Capítulo 10 de [Kur56]):

**Teorema 2.7** (Teorema de Grushko-Neumann). *Si  $G$  es un producto libre de grupos, entonces el número mínimo de generadores de  $G$  es igual a la suma del mínimo número de generadores para cada factor. Es decir, si  $\rho(G)$  es el número mínimo de generadores de  $G$  y además  $G = A_1 \star \cdots \star A_k$ , entonces*

$$\rho(G) = \rho(A_1) + \cdots + \rho(A_k).$$

La versión presentada aquí es en realidad una consecuencia directa del Teorema de Grushko que se prueba en [Kur56].

Con estas herramientas que hemos preparado podemos ahora probar que toda 3-variedad tiene una descomposición en factores primos con respecto a la suma conexa.

**Teorema 2.8** (Existencia de la Descomposición Prima). *Sea  $M$  una 3-variedad. Entonces, existen  $k \in \mathbb{N}$  y 3-variedades  $P_1, \dots, P_k$  primas tales que*

$$M \simeq P_1 \# \dots \# P_k.$$

*Demostración.* Si  $M$  es prima, ya acabamos. Supongamos que  $M$  no es una 3-variedad prima. Entonces  $M$  se puede expresar como  $M \simeq M_1 \# M_2$ , donde  $M_1$  y  $M_2$  son no triviales. Si ambas son primas ya acabamos. De lo contrario, nuevamente podemos expresar a  $M_1$  o  $M_2$  como suma conexa de variedades no triviales. Podemos seguir de esta forma descomponiendo hasta que todas las variedades sean primas. Para ver que en efecto este proceso termina notemos que, por los [Teoremas 2.7 y 2.4](#),

$$\rho(\pi_1(M_1 \# M_2)) = \rho(\pi_1(M_1)) + \rho(\pi_1(M_2)).$$

Por ende, si  $M \simeq M_1 \# \dots \# M_k$  con  $k > \rho(\pi_1(M))$ , entonces para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$  se debe tener que  $\rho(\pi_1(M_i)) = 0$ . Por lo tanto  $\pi_1(M_i) = \mathbb{1}$ . Luego, por la conjetura de Poincaré,  $M_i \simeq \mathbb{S}^3$ . Por lo tanto este proceso de descomponer cada variedad no prima en suma conexa de variedades no triviales termina en un número finito de pasos. Por ende  $M$  tiene una descomposición en 3-variedades primas.  $\square$

## 2.2. Unicidad de la descomposición prima

**Definición 2.9** (Variedades Equivalentes). *Sean  $M$  y  $N$  dos 3-variedades posiblemente con fronter. Decimos que  $M$  y  $N$  son **equivalentes** si una puede ser obtenida a partir de la otra al realizar una cantidad finita de las siguientes dos operaciones:*

- *Quitar el interior de una 3-bola encajada.*
- *Si tiene frontera homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ , le pegamos una 3-bola identificando sus fronteras.*

El siguiente teorema es de suma importancia pues nos ayudará a, más adelante (ver [Lemas 2.15 y 2.14](#)), asegurar que la 3-esfera es una variedad prima, que es lo mínimo que necesitamos para hablar de descomposición prima con la suma conexa.

**Teorema 2.10** (Teorema de Alexander–Schönflies). *Toda 2-esfera en  $\mathbb{R}^3$  acota una 3-bola.*

La prueba de este teorema ocupa variedades diferenciables y funciones de Morse. Se puede encontrar en [\[Sch14\]](#). La versión de Alexander utiliza topología PL y su prueba se puede encontrar en [\[Ale24b\]](#). Cabe recalcar que en la prueba de [\[Sch14\]](#) los encajes deben ser suaves para que el teorema se cumpla; ésta es una de las razones por la cual trabajamos en la categoría de variedades diferenciables y siempre pedimos que las 2-esferas en una 3-variedad estén suavemente encajadas. El mismo Alexander encontró un contraejemplo para cuando el encaje es simplemente topológico; se le conoce como la «Esfera Cornuda de Alexander» (ver [\[Ale24a\]](#)).

Ahora, veremos nuestro primer ejemplo de una variedad prima que no es trivial.



**Lema 2.11.** *La variedad  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  es prima.*

*Demostración.* Sea  $S \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  una 2-esfera que separe. Entonces,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \setminus S$  consiste de dos 3-variedades compactas  $V$  y  $W$ , cada una con frontera una 2-esfera. Ahora bien, recordemos que

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \cong \pi_1(V) * \pi_1(W),$$

donde el primer isomorfismo se da pues  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  (ver Teorema XIV.1.18 de [Cas03]) y el último isomorfismo es una aplicación del Teorema 2.1. Esto implica que alguna de las 3-variedades  $V$  o  $W$  debe ser simplemente conexa. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $V$  es simplemente conexa. Sabemos que la cubierta universal de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  es  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Tenemos así la función cubriente  $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  y, como  $V$  es simplemente conexa, entonces su preimagen  $\tilde{V} = p^{-1}(V)$  es difeomorfa a  $V$ . La frontera de  $V$  es homeomorfa a una 2-esfera, por lo tanto  $\partial\tilde{V}$  es una 2-esfera en  $\mathbb{R}^3$ . Así,  $\partial\tilde{V}$  acota una 3-bola en  $\mathbb{R}^3$  por el Teorema 2.10 y, como además  $\partial\tilde{V}$  acota a  $\tilde{V}$ , entonces concluimos que  $\tilde{V}$  es una 3-bola. Por ende,  $V$  también es una 3-bola. Esto prueba que toda 2-esfera en  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  acota una 3-bola y por lo tanto es prima.  $\square$

**Definición 2.12** (Variedad Irreducible). *Sea  $M$  una 3-variedad. Decimos que  $M$  es irreducible si toda 2-esfera en  $M$  acota a una 3-bola.*

**Lema 2.13.** *Sea  $M$  una 3-variedad. Supongamos que  $M$  contiene una 2-esfera  $E$  que no separa. Entonces,  $M$  puede ser vista como  $M \simeq M_1 \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$ . En particular, si  $M$  es prima, entonces  $M \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ .*

*Demostración.* Dado que  $E$  no separa a  $M$ , entonces por la Observación 1.20 existe una curva simple cerrada  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  que interseca transversalmente a  $E$  en un solo punto. Consideremos  $L := \gamma([0, 1])$  y sea  $N$  una vecindad tubular de  $L \cup E$ . Tenemos que  $\partial N = \mathbb{S}^2 \# \mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2$ . Sea  $\tilde{N}$  la variedad obtenida al encapuchar  $N$  con una 3-bola. Luego  $\tilde{N}$  tiene la estructura de un fibrado de  $\mathbb{S}^2$  sobre  $L$ . Como  $M$  es orientable, este fibrado debe ser trivial. Por lo tanto,  $\tilde{N} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . Cortando a lo largo de  $\partial N$  se obtiene la descomposición deseada.  $\square$

La Definición 2.12 resultará de extrema importancia en la prueba de la unicidad pues el siguiente lema asegura que casi todas las variedades primas son irreducibles.

**Lema 2.14.** *A excepción de variedades isomorfas a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ , una 3-variedad es prima si y sólo si es irreducible.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ) Supongamos primero que  $M$  no es prima. Entonces existe una descomposición  $M \simeq M_1 \# M_2$  con  $M_1$  y  $M_2$  no triviales. Tenemos que

$$M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus i_1[\{0\}]) \cup_g (M_2 \setminus i_2[\{0\}]).$$

Consideremos  $E' := i_1(\partial\mathbb{B}^3) = i_1(\mathbb{S}^2)$  y  $E$  su imagen en la unión disjunta. Notemos que, según la Definición 1.21,  $E$  no sufre cambios a la hora del pegado. Además, es

fácil ver que  $E$  es una 2-esfera que separa a  $M$  en dos componentes conexas  $M'_1, M'_2$  con frontera homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  que son equivalentes a  $M_1$  y a  $M_2$ , respectivamente. Ahora bien,  $E$  sólo acota dos conjuntos,  $M'_1$  y  $M'_2$ . Claramente  $E$  no puede acotar una 3-bola, pues al pegar dos 3-bolas por su frontera obtenemos una variedad isomorfa a  $\mathbb{S}^3$  y  $M_1, M_2$  son no triviales. Por lo tanto,  $M$  no es irreducible.

$\Rightarrow$ ) Supongamos ahora que  $M$  es una variedad prima que no es irreducible. Queremos ver que  $M$  es isomorfa a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . Dado que  $M$  no es irreducible, existe una 2-esfera  $E$  en  $M$  tal que  $M$  no acota una 3-bola. Tenemos dos casos:

- 1) Supongamos que  $E$  separa a  $M$  en dos componentes conexas  $M_1$  y  $M_2$ . Como  $E$  no acota a una 3-bola, tenemos que  $M_1$  y  $M_2$  son no triviales. Además, es fácil ver que  $M \simeq M_1 \# M_2$ , lo cual contradice el hecho de que  $M$  es prima. Por lo tanto  $E$  no puede separar a  $M$ .
- 2) Supongamos ahora que  $E$  no separa a  $M$ . Luego, por el [Lema 2.13](#), se tiene que  $M \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ .

Concluimos que si  $M$  es prima y no es irreducible, entonces  $M \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ , justo como se quería probar.  $\square$

El siguiente es nuestro primer ejemplo de una variedad irreducible.

**Lema 2.15.** *La variedad  $\mathbb{S}^3$  es irreducible.*

*Demostración.* Recordemos que  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  es la compactación con un punto de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $S$  una 2-esfera en  $\mathbb{S}^3$ . Luego, podemos suponer, después de aplicar una pequeña isotopía, que  $S \cap \{\infty\} = \emptyset$ . Por lo tanto,  $S \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{S}^3$  y, por el [Teorema 2.10](#), tenemos que  $S$  acota una 3-bola y se concluye que  $\mathbb{S}^3$  es irreducible.  $\square$

El siguiente lema es importante, pues como consecuencia directa tiene la unicidad de la descomposición.

**Lema 2.16.** *Sea  $M$  una 3-variedad tal que  $M \simeq M_1 \# M_2$  y, al mismo tiempo,  $M \simeq P_1 \# \cdots \# P_k$ , donde cada  $P_i$  es una 3-variedad prima. Luego, los  $P_i$  pueden ser reenumerados de tal forma que*

$$M_1 \simeq P_1 \# \cdots \# P_r \quad \text{y} \quad M_2 \simeq P_{r+1} \# \cdots \# P_k.$$

*Demostración.* Al igual que en la prueba del [Lema 2.14](#) consideremos  $T$  la 2-esfera que separa a  $M$  en las variedades  $M'_1$  y  $M'_2$  equivalentes a  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Dado que la suma conexa es asociativa y conmutativa por el [Teorema 1.23](#), podemos suponer sin pérdida de generalidad que las primeras  $s$  variedades son irreducibles y las siguientes  $k - s$  son isomorfas a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  con  $s \in \{0, \dots, k\}$ . Tenemos así dos casos:

- 1)  $s \geq 0$ : Consideremos un conjunto  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{k-1}\}$  de 2-esferas en  $M$  disjuntas dos a dos que cumplan las siguientes dos condiciones:
  - a) Las intersecciones  $T \cap \Sigma_i$  consisten de curvas simples disjuntas.

- b) Si cortamos  $M$  a lo largo de todas las  $\Sigma_i$  obtenemos una variedad con frontera que tiene  $s$  componentes conexas  $B_1, \dots, B_s$  que son equivalentes a  $P_1, \dots, P_s$ , respectivamente.

Lo primero que hay que ver es que un conjunto de 2-esferas que cumplen estas condiciones existe. Podemos pensar a  $M$  como la variedad  $M' = P_1 \# \dots \# P_s$  a la cual se le agregan  $k - s$  asas. Sean  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{s-1}$  las 2-esferas que separan a los sumandos de  $M'$  y  $\Sigma_s, \dots, \Sigma_{k-1}$  2-esferas que corten a las  $k - s$  asas. Dado que  $\Sigma_s, \dots, \Sigma_{k-1}$  no separan a  $M$ , es claro que al cortar  $M$  bajo el conjunto  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{k-1}\}$  obtenemos  $s$  componentes conexas  $B_1, \dots, B_s$  cada una de ellas equivalente a  $P_1, \dots, P_s$ . Más aún, ocupando que las 2-esferas son subvariedades de  $M$  y transversalidad, es posible suponer que se cumple la condición **a**). Por ende  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{k-1}\}$  cumple ambas condiciones.

Queremos obtener un conjunto de 2-esferas que no intersequen a  $T$ . Para ello veamos que siempre que  $\Sigma_h \cap T \neq \emptyset$  podemos encontrar una 2-esfera  $\Sigma'_h$  cuya intersección con  $T$  tenga una curva menos. Para ello supongamos que  $\Sigma_h \cap T \neq \emptyset$ . Luego, consideremos una curva  $C \subset T \cap \Sigma_h$  tal que  $C$  acote a una 2-bola  $E \subset T$  y que no contenga en su interior ninguna otra curva de la intersección. Ahora bien, se tiene que  $E \subset B_i$  para algún  $i$ . Sea  $B_j$  la variedad del otro lado de  $\Sigma_h$ .

Notemos que, como  $B_i$  es equivalente a  $P_i$ , que es irreducible, entonces  $B_i$  es equivalente a una variedad irreducible. Por ende,  $E$  corta a  $B_i$  en dos variedades  $B'_i$  y  $B''_i$ , de las cuales una debe ser equivalente a  $\mathbb{S}^3$ . Sean  $E'$  y  $E''$  las 2-bolas de  $\Sigma_h$  que acota  $C$ , respectivamente. Notemos que  $i = j$  o  $i \neq j$ . Por lo tanto tenemos, nuevamente, dos casos:

- I)  $i \neq j$ : Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $B''_i$  es la variedad equivalente a  $\mathbb{S}^3$ . Consideremos  $\Sigma'_h$  la 2-esfera formada a partir de  $E \cup E'$  después de deformarla ligeramente hacia  $B'_i$ . Luego,  $\Sigma'_h \cap T$  tiene una curva menos que  $\Sigma_h \cap T$ . Más aún, al cortar  $M$  a lo largo de  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma'_h, \dots, \Sigma_{k-1}\}$  obtenemos variedades  $B_1, \dots, R_i, \dots, R_j, \dots, B_s$  donde las  $B_l$  son equivalente a  $P_l$ ;  $R_i$  es equivalente a  $B_i \setminus B''_i$  y, como ésta última es equivalente a  $\mathbb{S}^3$ ,  $R_i$  es equivalente a  $B_i$ ;  $R_j$  es equivalente a  $B_j \cup B''_i$  y, como esta última es equivalente a  $\mathbb{S}^3$ ,  $R_j$  es equivalente a  $P_j$ . Por lo tanto, seguimos teniendo  $s$  variedades que son equivalentes a  $P_1, \dots, P_s$  (ver [Figura 2.1](#)).
- II)  $i = j$ : Luego, una de las dos partes de  $B_i$ , digamos  $B'_i$ , debe contener el «otro lado» de  $\Sigma_h$ . Nuevamente sea  $\Sigma'_h$  la 2-esfera que se obtiene de  $E \cup E'$  al deformarla hacia  $B'_i$ . Si reemplazamos  $\Sigma_h$  con  $\Sigma'_h$  entonces el efecto a la hora de cortar  $M$  a lo largo de  $\Sigma_1, \dots, \Sigma'_h, \dots, \Sigma_{k-1}$  es de quitarle  $B''_i$  a  $B_i$  y luego agregárselo por otra componente de frontera. Esto, claramente, no altera las equivalencias de  $B_1, \dots, B_s$ . Por ende  $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma'_h, \dots, \Sigma_{k-1}\}$  aún cumple las condiciones **a**), **b**) pero teniendo una curva menos en la intersección (ver [Figura 2.2](#)).

De este modo, podemos eliminar una a una todas las curvas que se encuentren en la intersección  $(\bigcup_{i=1}^{k-1} \Sigma_i) \cap T$  hasta que ésta sea vacía (para esto es importante

la condición **a)** de que las intersecciones deben ser curvas simples cerradas).

Supongamos pues que

$$\left( \bigcup_{i=1}^{k-1} \Sigma_i \right) \cap T = \emptyset.$$

Entonces,  $T$  se encuentra dentro de alguna variedad  $B_i$  y la separa en  $B'_i$  y  $B''_i$ . Nuevamente alguna de ellas debe ser equivalente a  $\mathbb{S}^3$ . Supongase que ésta es  $B''_i$ . Más aún, supongamos que  $B_1, \dots, B'_i$  están del lado de  $M_1$  con respecto a  $T$  y que  $B''_i, \dots, B_s$  están del lado de  $M_2$  con respecto a  $T$ . Entonces, claramente tenemos que

$$M_1 \simeq P_1 \# \dots \# P_i \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \# \dots \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$$

y

$$M_2 \simeq P_{i+1} \# \dots \# P_s \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \# \dots \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2).$$

Después de reenumerar obtenemos el resultado deseado para el caso 1.

- 2)  $\underline{s = 0}$ : Se sigue de un argumento completamente similar pero ocupando  $k$  2-esferas  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  que cortan a las  $k$  asas y modificando la condición **b)** a «Si cortamos  $M$  a lo largo de todas las  $\Sigma_i$  obtenemos una variedad con frontera que es equivalente a  $\mathbb{S}^3$ ». Luego se quitan una por una las intersecciones de estas esferas con  $T$ , la esfera que separa a  $M'_1$  de  $M'_2$ . Así si del lado de  $M'_1$  hay  $r$   $\Sigma_i$  y del lado de  $M'_2$  hay  $k - r$   $\Sigma_i$ , y se tiene que

$$M_1 \simeq \underbrace{(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \# \dots \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)}_r, \quad M_2 \simeq \underbrace{(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \# \dots \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)}_{k-r}.$$

Esto completa la prueba del lema. □

Este lema nos permite demostrar por inducción la unicidad de la descomposición prima.

**Teorema 2.17** (Unicidad). *Toda 3-variedad no trivial y compacta  $M$  es isomorfa a una suma conexa  $P_1 \# \dots \# P_k$  de variedades primas. Los sumandos  $P_i$  están determinados únicamente salvo orden e isomorfismo.*

*Demostración.* Considérese una 3-variedad no trivial y compacta. Por el [Teorema 2.8](#) sabemos que  $M \simeq P_1 \# \dots \# P_k$  para variedades primas  $P_i$ . Supongamos que además  $M \simeq P'_1 \# \dots \# P'_l$ . Veamos que entonces  $k = l$  y que además existe un reordenamiento  $P_{j_1}, \dots, P_{j_k}$  de las variedades primas tal que  $P'_i \simeq P_{j_i}$ . Probaremos esta afirmación por inducción sobre el número de variedades primas  $k$ .

**Base de inducción:**  $k = 2$ .

Supongamos que  $M \simeq P_1 \# P_2$  y que  $M \simeq P'_1 \# \dots \# P'_l$ . Luego, por el [Lema 2.16](#), podemos reordenar las variedades  $P'_i$  de forma que

$$P_1 \simeq P'_{j_1} \# \dots \# P'_{j_r} \quad , \quad P_2 \simeq P'_{j_{r+1}} \# \dots \# P'_{j_l}.$$

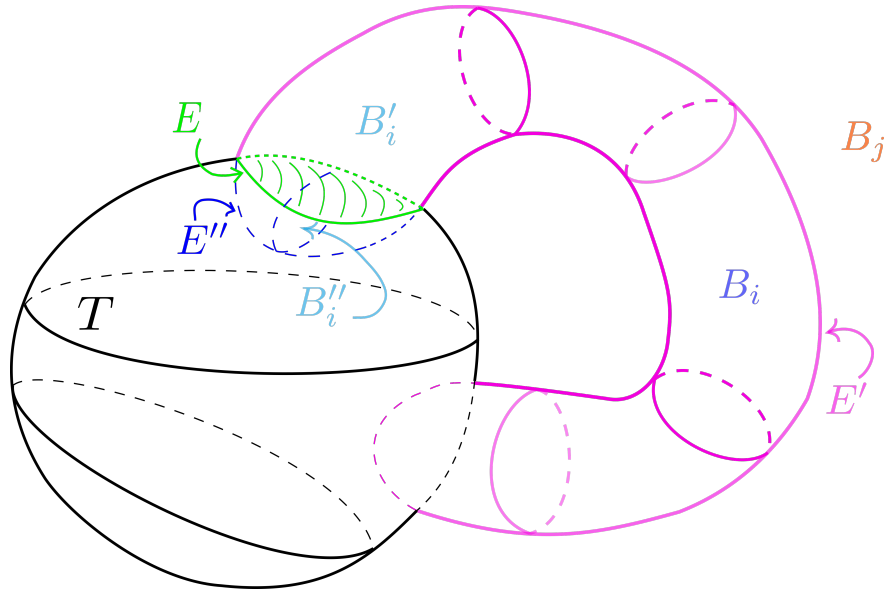


Figura 2.1

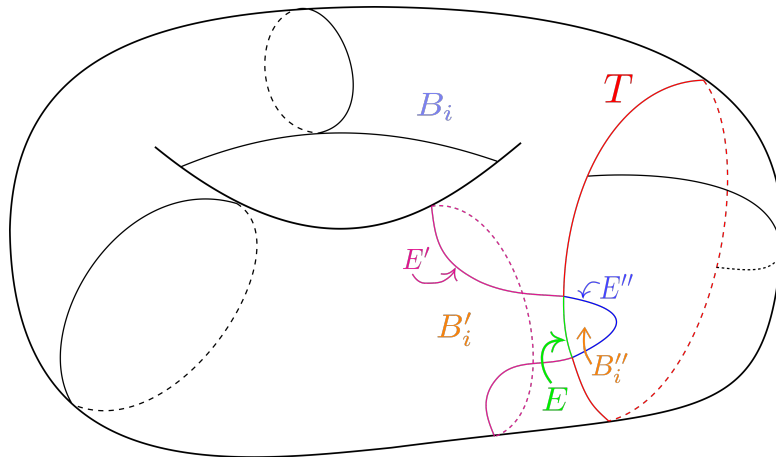


Figura 2.2

Sin embargo, como tanto  $P_i$  como  $P'_i$  son primas, se tiene enseguida que  $r = 1$  y  $l = 2$ . Esto prueba el resultado para  $k = 2$ .

**Hipótesis de inducción:** Supongamos que el resultado se vale para  $k > 2$ .

**Paso inductivo:**  $k + 1$ .

Supóngase que  $M \simeq P_1 \# \cdots \# P_{k+1}$  y que  $M \simeq P'_1 \# \cdots \# P'_l$ . Podemos ver a  $M' = P_1 \# \cdots \# P_k$  como una sola variedad y, por el [Lema 2.16](#), tenemos que, después de reordenar las variedades,

$$M' = P_1 \# \cdots \# P_k \simeq P'_{j_1} \# \cdots \# P'_{j_r} \quad \text{y} \quad P_{k+1} \simeq P'_{j_{r+1}} \# \cdots \# P'_{j_l}.$$

Luego, por la hipótesis de inducción, tenemos que  $k = r$  y podemos volver a reordenar  $P'_{j_1}, \dots, P'_{j_r}$  de forma que

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} (P_i \simeq P'_{s_i}).$$

Más aún, como  $P_{k+1}$  es prima, entonces  $l = k + 1 = r + 1$  y por ende  $P_{k+1} \simeq P'_{j_{k+1}}$ . Por lo tanto  $l = k + 1$  y se tiene que  $P_i \simeq P'_{s_i}$  si  $i \in \{1, \dots, k\}$  y  $P_{k+1} \simeq P'_{j_{k+1}}$ . Esto completa la prueba de la unicidad.  $\square$



## 3 Orbifolds

En este capítulo presentaremos las definiciones básicas sobre orbifolds (en español, se puede llegar a usar el término orbidad para referirse a los orbifolds) para después dar algunos resultados básicos sobre su topología que serán necesarios para el capítulo próximo. Los orbifolds son similares a las variedades diferenciables, salvo que en vez de estar modelados localmente por abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , están modelados localmente por cocientes de abiertos de  $\mathbb{R}^n$  bajo acciones de grupos finitos. Los orbifolds fueron primeramente introducidos en la literatura por Satake en [Sat56] quien los llamó *V-variedades*. Sin embargo, fue Thurston quien escribió sobre ellos de manera más extensa en [Thu]. Para una historia más detallada del origen de la palabra “orbifold”, recomendamos ver el Capítulo 1 de [Dav]. En este capítulo seguiremos a [Thu], [Jr21], [MP97] y [ALR07].

### 3.1. Definiciones y Teoremas básicos

**Definición 3.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $n > 0$ .

- (1) Una **orbi-carta**  $(\tilde{U}, H, \varphi)$  de dimensión  $n$  para un abierto  $U \subset X$  consiste de un abierto conexo  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ , un grupo finito  $H$  actuando suavemente y efectivamente en  $\tilde{U}$  y una función  $\varphi : \tilde{U} \rightarrow X$   $H$ -invariante con imagen  $\varphi(\tilde{U}) = U$  que induce un homeomorfismo entre  $U$  y  $\tilde{U}/H$  (ver [Figura 3.1](#)).
- (2) Un **encaje**  $\lambda : (\tilde{U}, H, \varphi) \rightarrow (\tilde{V}, G, \phi)$  entre dos orbi-cartas es un encaje suave  $\lambda : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  que satisface  $\phi \circ \lambda = \varphi$ .
- (3) Un **orbi-atlas** para  $X$  es una familia  $\mathcal{U} = \{(\tilde{U}_i, H_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  de orbi-cartas tal que la familia  $\{\varphi_i(\tilde{U}_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  es una cubierta abierta de  $X$  y son localmente compatibles en el siguiente sentido: dadas dos cartas  $(\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1)$  y  $(\tilde{U}_2, H_2, \varphi_2)$  de  $U_1 := \varphi_1(\tilde{U}_1)$  y  $U_2 := \varphi_2(\tilde{U}_2)$  respectivamente y un punto  $x \in U_1 \cap U_2$ , existe un abierto  $U_j \subset U_1 \cap U_2$  que tiene a  $x$  y una carta  $(\tilde{U}_j, H_j, \varphi_j)$  de  $U_j$  con encajes  $(\tilde{U}_j, H_j, \varphi_j) \hookrightarrow (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1)$  y  $(\tilde{U}_j, H_j, \varphi_j) \hookrightarrow (\tilde{U}_2, H_2, \varphi_2)$ .
- (4) Decimos que un orbi-atlas  $\mathcal{U}$  **refina** a un orbi-atlas  $\mathcal{V}$  si para cada carta de  $\mathcal{U}$  existe un encaje en alguna carta de  $\mathcal{V}$ . Esto define una relación de equivalencia



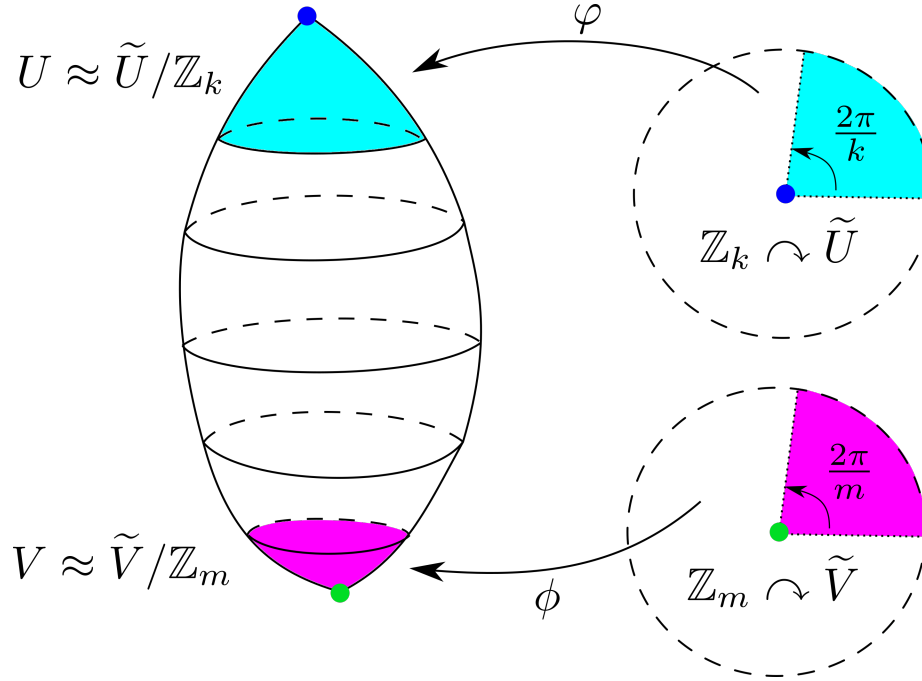


Figura 3.1: Cartas de un orbifold

como sigue, dos orbi-atlas  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  están relacionados si existe un orbi-atlas  $\mathcal{W}$  que refina a ambos.

**Definición 3.2.** Un **orbifold**  $\mathcal{X}$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable  $X$  equipado de una clase de equivalencia  $[\mathcal{U}]$  de orbi-atlas  $n$ -dimensionales.

De manera análoga, podemos definir un **orbifold con frontera** pidiendo que:  $\tilde{U} \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$  en la [Definición 3.1](#).

**Observación 3.3.** En la [Definición 3.1](#) inciso (1), tenemos una orbi-carta  $(\tilde{U}, H, \varphi)$  donde  $H$  es un grupo finito. Entonces,  $H$  es un grupo de Lie 0-dimensional (ver [Definición A.6](#)) con cartas  $\{x\} \rightarrow \mathbb{R}^0$ . La estructura de  $H$  realmente no importa pues  $H$  tiene la topología discreta y, por ende, cualquier función  $\psi: H \rightarrow H$  es continua. Más aún,  $H$  es compacto. En particular, la  $H$ -acción sobre  $\tilde{U}$  es propia (ver [Definición A.9](#)).

Al espacio topológico subyacente de un orbifold  $\mathcal{X}$ , lo denotaremos como  $|\mathcal{X}|$ . En la mayoría de los casos  $|\mathcal{X}|$  será homeomorfo a una variedad  $M$  a pesar de que  $\mathcal{X}$  no sea difeomorfo a  $M$ . Diremos que el orbifold  $\mathcal{X}$  es **conexo (compacto)** si  $|\mathcal{X}|$  es **conexo** (resp. **compacto**). A la pareja  $(\tilde{U}, H)$  de una orbi-carta la llamaremos **modelo local**. A continuación probamos una consecuencia importante de la definición de orbifold que será útil a la hora de estudiar los modelos locales de los orbifolds de dimensiones bajas.

**Proposición 3.4.** Una orbi-carta  $(\tilde{U}, H, \varphi)$  es **lineal** si se da que  $H < O(n)$ . Dado un orbifold  $\mathcal{X}$  y un orbi-atlas  $\mathcal{U} = \left\{ (\tilde{U}_i, H_i, \varphi_i) \right\}_{i \in \mathcal{I}}$  para  $|\mathcal{X}|$ , siempre podemos encontrar otro orbi-atlas  $\mathcal{V} = \left\{ (\tilde{V}_i, G_i, \psi_i) \right\}_{i \in \mathcal{I}}$  tal que cada orbi-carta es lineal.

*Demostración.* Sea  $(\tilde{U}, H, \varphi) \in \mathcal{U}$  una orbi-carta cualquiera. Por la [Observación 3.3](#) tenemos que  $H$  es un grupo de Lie finito tal que la  $H$ -acción en  $\tilde{U}$  es propia. Más aún,  $\tilde{U}$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  por ende es una variedad y tiene una métrica, la inducida por  $\mathbb{R}^n$ . Así, por la [Proposición A.11](#), existe una métrica  $H$ -invariante  $g$  en  $\tilde{U}$ . Ahora bien, sea  $\tilde{x} \in \tilde{U}$ . La función exponencial nos da un difeomorfismo (ver [Proposición 2.9](#) de [[Car92](#)]):

$$\exp_{\tilde{x}}: \tilde{U}_{\tilde{x}} \subseteq T_{\tilde{x}}\tilde{U} \rightarrow V \subset \tilde{U},$$

donde  $\tilde{U}_{\tilde{x}}$  es una vecindad abierta de 0 en  $T_{\tilde{x}}\tilde{U}$  y  $V$  es una vecindad abierta de  $\tilde{x}$  en  $\tilde{U}$ . Notemos que  $V$  es  $H_{\tilde{x}}$ -invariante, donde

$$H_{\tilde{x}} := \{h \in H \mid h\tilde{x} = \tilde{x}\}.$$

Para probar esto, es suficiente con probar que si  $h \in H$ , entonces

$$h \cdot \exp_{\tilde{x}}(u) = \exp_{\tilde{x}}(h \cdot u)$$

(esto se conoce como que  $\exp_{\tilde{x}}$  es  $H$ -equivariante). Utilizando la notación de la [Proposición A.11](#), esto último es equivalente a ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_{\tilde{x}}\tilde{U} & \xrightarrow{(d\mathcal{A}_h)_{\tilde{x}}} & T_{\tilde{x}}\tilde{U} \\ \exp_{\tilde{x}} \downarrow & & \downarrow \exp_{\tilde{x}} \\ \tilde{U} & \xrightarrow{\mathcal{A}_h} & \tilde{U} \end{array}$$

Esto se da, pues  $\mathcal{A}_h$  es una isometría, ya que la métrica es  $H$ -invariante (ver [Proposición 5.20](#) de [[Lee18](#)]). Se tiene así que  $\exp_{\tilde{x}}$  es  $H$ -equivariante con respecto a la acción de  $H_{\tilde{x}}$  en  $T_{\tilde{x}}\tilde{U}$  por diferenciales de  $\mathcal{A}_h$  para  $h \in H_{\tilde{x}}$ . Por lo tanto, esta acción también es isométrica y así  $H_{\tilde{x}} < O(T_{\tilde{x}}\tilde{U})$ . Esto nos da una orbi-carta lineal  $(\tilde{U}_{\tilde{x}}, H_{\tilde{x}}, \varphi \circ \exp_{\tilde{x}})$ . Haciendo esto para cada  $\tilde{x} \in \tilde{U}$  y cada orbi-carta  $(\tilde{U}, H, \varphi) \in \mathcal{U}$  obtenemos el orbi-atlas deseado.  $\square$

**Definición 3.5.** Un orbifold  $\mathcal{X}$  es **localmente orientable** si existe un orbi-atlas  $\mathcal{B} = \left\{ (\tilde{U}_i, H_i, \phi_i) \right\}_{i \in \mathcal{I}} \in [\mathcal{U}]$  tal que cada  $H_i$  actúa mediante difeomorfismos que preservan la orientación.

Requerimos de un resultado que es muy técnico y, por ende, no probaremos, para el estudio de los orbifolds (ver la [Proposición A.1](#) de [[MP97](#)]):

**Proposición 3.6.** Dados dos encajes de orbi-cartas  $\lambda, \lambda': (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1) \rightarrow (\tilde{U}_2, H_2, \varphi_2)$  existe un único  $h \in H_2$  tal que  $\lambda' = h \circ \lambda$ .

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 3.7.** *Todo encaje de orbi-cartas  $\lambda: (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1) \rightarrow (\tilde{U}_2, H_2, \varphi_2)$  induce un homomorfismo inyectivo  $\bar{\lambda}: H_1 \rightarrow H_2$ .*

*Demostración.* Si  $g \in H_1$ , entonces podemos verlo como un encaje

$$g: (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1) \rightarrow (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1)$$

dado por  $g(x) = g \cdot x$ . Es un encaje, pues  $\varphi_1$  es  $H_1$ -invariante y por lo tanto  $\varphi_1 \circ g = \varphi_1$ . Así, podemos considerar los dos encajes:

$$\lambda: (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1) \rightarrow (\tilde{U}_2, H_2, \varphi_2), \quad \lambda \circ g: (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1) \rightarrow (\tilde{U}_2, H_2, \varphi_2)$$

y por la [Proposición 3.6](#) tenemos que existe un único  $h \in H_2$  tal que  $\lambda \circ g = h \circ \lambda$ . Definimos  $\bar{\lambda}(g) = h$ . Esto nos da el homomorfismo requerido y la unicidad de la [Proposición 3.6](#) nos dice que es inyectivo.  $\square$

**Proposición 3.8.** *Si  $\lambda: (\tilde{U}_1, H_1, \varphi_1) \rightarrow (\tilde{U}_2, H_2, \varphi_2)$  es un encaje y  $h \in H_2$  tal que*

$$\lambda(\tilde{U}_1) \cap h \cdot \lambda(\tilde{U}_1) \neq \emptyset.$$

*Entonces,  $h \in \text{Im}(\bar{\lambda})$  y además  $\lambda(\tilde{U}_1) = h \cdot \lambda(\tilde{U}_1)$ .*

Nuevamente la prueba es muy técnica. Sin embargo, se puede consultar en el Lema A.2 de [\[MP97\]](#).

Para estudiar la topología de un orbifold  $\mathcal{X}$  podemos dividir a los puntos en  $|\mathcal{X}|$  según el subgrupo que lo deja fijo. Definamos este concepto con más claridad. Para ello, primero veamos que este grupo no depende de la carta que escojamos.

**Proposición 3.9.** *Sean  $\mathcal{X}$  un orbifold y  $x \in |\mathcal{X}|$ . Si  $(\tilde{U}, H, \phi)$ ,  $(\tilde{V}, G, \varphi)$  son dos cartas de  $x$ , entonces se cumple lo siguiente:*

- (a) *Si  $\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)$  y  $\tilde{y} \in \varphi^{-1}(x)$ , entonces  $H_{\tilde{x}} \cong G_{\tilde{y}}$ .*
- (b) *Si  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \phi^{-1}(x)$ , entonces  $H_{\tilde{x}} \cong H_{\tilde{y}}$ .*

*Demostración.* (a) Por la definición de orbi-atlas, podemos encontrar una carta  $(\tilde{W}, K, \mu)$  y encajes

$$\lambda_1: (\tilde{W}, K, \mu) \rightarrow (\tilde{U}, H, \psi), \quad \lambda_2: (\tilde{W}, K, \mu) \rightarrow (\tilde{V}, G, \varphi).$$

Por el [Corolario 3.7](#), estos inducen homomorfismos inyectivos

$$\bar{\lambda}_1: K \rightarrow H, \quad \bar{\lambda}_2: K \rightarrow G,$$

que a su vez inducen homomorfismos inyectivos:

$$K_{\tilde{x}} \hookrightarrow H_{\tilde{x}}, \quad K_{\tilde{y}} \hookrightarrow G_{\tilde{y}}. \tag{3.1}$$

Más aún, notemos que  $\tilde{x} \in \lambda_1(\tilde{U}) \cap h \cdot \lambda_1(\tilde{U})$  y  $\tilde{y} \in \lambda_2(\tilde{U}) \cap g \cdot \lambda_2(\tilde{U})$  para cada  $h \in H_{\tilde{x}}$  y  $g \in G_{\tilde{y}}$ . Por lo tanto, por la [Proposición 3.8](#) se tiene que los homomorfismos [\(3.1\)](#) son suprayectivos. Concluimos que

$$H_{\tilde{x}} \cong K_{\tilde{x}} \cong G_{\tilde{y}}.$$

- (b) Como  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \phi^{-1}(x)$ , entonces existe un  $h \in H$  tal que  $h \cdot \tilde{x} = \tilde{y}$ . Esto implica que si  $g \in H$  es tal que  $g \cdot \tilde{x} = \tilde{x}$ , entonces  $(hgh^{-1}) \cdot \tilde{y} = \tilde{y}$ . Por ende,  $H_{\tilde{y}} = hH_{\tilde{x}}h^{-1}$ . Es decir  $H_{\tilde{x}}$  es conjugado a  $H_{\tilde{y}}$ . □

**Definición 3.10.** Sean  $\mathcal{X}$  un orbifold y  $x \in |\mathcal{X}|$ . Dada una carta  $(\tilde{U}, H, \phi)$  alrededor de  $x$ , definimos el **grupo local** de  $\mathcal{X}$  en  $x$  como

$$\Gamma_x := H_{\tilde{x}},$$

donde  $\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)$ .

La [Proposición 3.9](#) nos asegura que el grupo  $\Gamma_x$  está bien definido salvo isomorfismo de grupos. Si  $\Gamma_x$  es el grupo trivial, entonces decimos que  $x$  es un punto **regular**, de lo contrario decimos que  $x$  es un punto **singular**. Definimos el **conjunto singular** como el conjunto

$$\Sigma_{\mathcal{X}} := \{x \in |\mathcal{X}| : \Gamma_x \neq \{1\}\}$$

**Observación 3.11.** Notemos que  $\mathcal{X}$  es una variedad diferenciable si y sólo si  $\Sigma_{\mathcal{X}} = \emptyset$ .

## 3.2. Orbifolds de dimensiones bajas

En esta sección exploraremos los modelos locales de los orbifolds de dimensiones bajas. En el caso de dimensión 3 sólo nos preocuparemos por los localmente orientables.

Recordemos la definición del grupo ortogonal:

**Definición 3.12** (Grupo Ortogonal). Para  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$O(n) := \{A \in GL(n) : A^T A = I\}.$$

Sabemos que un orbifold  $\mathcal{X}$  de dimensión 1, 2 o 3 es localmente homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  bajo la acción de un subgrupo finito de  $O(1)$ ,  $O(2)$  o  $SO(3)$  (ver [Definición 3.1](#)). Más aún, todo abierto de  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfo a  $\mathring{\mathbb{B}}^n$ , la bola abierta unitaria de dimensión  $n$ . Por ende, podemos suponer que el abierto es  $\mathring{\mathbb{B}}^n$ .

Notemos que si  $A \in GL(1)$ , entonces  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $A^T = A$ . Así, la ecuación  $A^T A = I$  nos dice que:

$$O(1) = \{1, -1\}. \tag{3.2}$$

Esto prueba la siguiente proposición:

**Proposición 3.13.** Los únicos subgrupos de  $O(1)$  son  $\{1\}$  y  $\{1, -1\}$ .

Así, claramente si  $\mathcal{X}$  es un orbifold de dimensión 1 y  $x \in |\mathcal{X}|$ , entonces:

$$H_x = \{1\} \quad \text{o} \quad H_x = \{1, -1\},$$

donde  $-1$  actúa como reflexión en  $\mathbb{R}$ , es decir, actúa como  $t \in \mathbb{R} \mapsto -t \in \mathbb{R}$  y  $1$  actúa como la identidad. Por ende, sólo existen, salvo homeomorfismo, dos 1-orbifolds

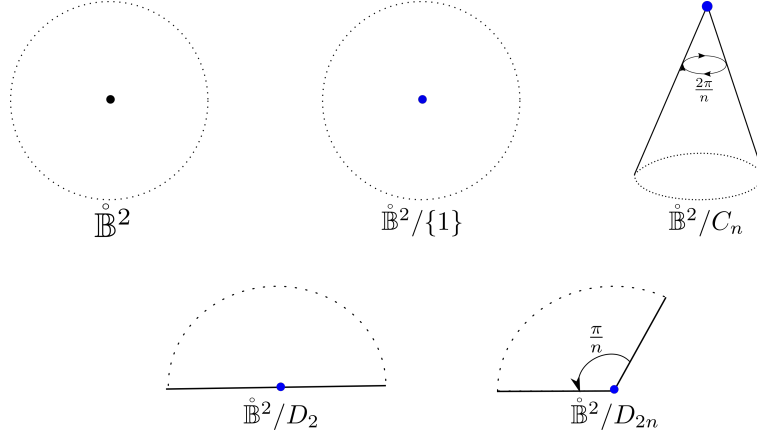


Figura 3.2: Modelos locales para orbifolds de dimensión 2

cerrados. El círculo  $\mathbb{S}^1$ , que es orientable, y el orbifold no orientable  $\mathbb{S}^1//\mathbb{Z}_2$  (cuyo espacio subyacente es el intervalo unitario  $[0, 1]$  y sus dos puntos singulares son los extremos).

Para el caso de dimensión 2 tenemos el siguiente teorema (ver Teorema 19.1 de [Arm88]).

**Teorema 3.14.** *Todo subgrupo finito de  $O(2)$  es isomorfo a un grupo cíclico  $C_n$  o a un grupo diédrico  $D_{2n}$ .*

Se sigue que si  $\mathcal{X}$  es un 2-orbifold y  $x \in |\mathcal{X}|$ , entonces hay cuatro tipos distintos de grupos locales:

- (1)  $H_x = \{1\}$ ,
- (2)  $H_x = C_n$  para alguna  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ,
- (3)  $H_x = D_2 = \mathbb{Z}_2$  y
- (4)  $H_x = D_{2n}$  para alguna  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

Los cocientes  $\mathbb{B}^2/H_x$  se pueden apreciar en la Figura 3.2. Más aún, podemos ver que los cocientes  $\mathbb{B}^2/\{1\}$  y  $\mathbb{B}^2/C_n$  son homeomorfos a  $\mathbb{B}^2$ , mientras que los cocientes  $\mathbb{B}^2/D_2$  y  $\mathbb{B}^2/D_{2n}$  son homeomorfos a  $\mathbb{R}_+^2$ . Por lo tanto,  $|\mathcal{X}|$  es homeomorfo a una 2-variedad posiblemente con frontera (ver Definición 1.1). Si nos restringimos a 2-orbifolds orientables, entonces  $H_x = C_n$  o  $H_x = \{1\}$ . Por lo tanto, el conjunto singular de un 2-orbifold orientable es un conjunto discreto. Los puntos  $x \in |\mathcal{X}|$  tales que  $H_x = C_n$  los llamaremos **puntos cono**.

En el caso de dimensión 3, los subgrupos finitos de  $SO(3)$  están caracterizados por el siguiente teorema (ver Teorema 19.2 de [Arm88]):

**Teorema 3.15.** *Todo subgrupo finito de  $SO(3)$  es isomorfo a un grupo cíclico  $C_n$ , un grupo diédrico  $D_{2n}$ , o al grupo de simetrías rotacionales del tetraedro, octaedro o icosaedro, que denotaremos como  $T_{12}$ ,  $O_{24}$ ,  $I_{60}$ , respectivamente.*

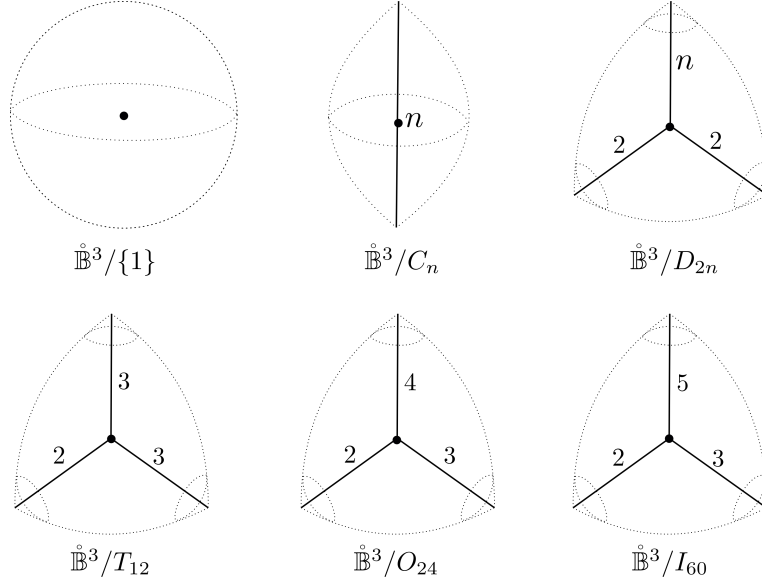


Figura 3.3: Modelos locales para orbifolds de dimensión 3

Se sigue que si  $\mathcal{X}$  es un 3-orbifold y  $x \in \mathcal{X}$ , entonces hay 6 tipos distintos de grupos locales:

- (1)  $H_x = \{1\}$ ,
- (2)  $H_x = C_n$  para alguna  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ,
- (3)  $H_x = D_{2n}$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (4)  $H_x = T_{12}$ ,
- (5)  $H_x = O_{24}$  y
- (6)  $H_x = I_{60}$ .

Los cocientes se pueden apreciar en la [Figura 3.3](#). Más aún, podemos observar que todos son homeomorfos a  $\mathbb{B}^3$ . Por lo tanto,  $|\mathcal{X}|$  es homeomorfo a una 3-variedad sin frontera. El conjunto singular de  $\mathcal{X}$  está formado por una gráfica encajada en  $|\mathcal{X}|$  en la que en todo vértice, si es que tiene, inciden tres aristas. Los grupos locales de las aristas son cíclicos y los de los vértices son del tipo  $D_{2n}$ ,  $T_{12}$ ,  $O_{24}$  o  $I_{60}$ . El orden de los grupos locales de las aristas que concurren en un vértice determina el grupo local del vértice. Notemos que si consideramos un 3-orbifold con frontera, entonces los cocientes en la [Figura 3.3](#) nos dicen que el conjunto singular de  $\mathcal{X}$  debe ser transversal a  $\partial|\mathcal{X}|$ .

De esta forma, podemos decir que un 2-orbifold localmente orientable y compacto  $\mathcal{X}$  consiste de una superficie compacta  $|\mathcal{X}|$  junto con una colección finita  $\Sigma_{\mathcal{X}}$  de puntos en el interior de  $|\mathcal{X}|$ , los **puntos cono**, cada uno con un cierto **orden** en  $\{p \in \mathbb{N} : p \geq 2\}$ .

De forma similar, un 3-orbifold compacto y orientable  $\mathcal{X}$  está dado por una 3-variedad compacta  $|\mathcal{X}|$  junto con su conjunto singular  $\Sigma_{\mathcal{X}}$ , donde  $\Sigma_{\mathcal{X}}$  es un conjunto

de círculos y gráficas encajadas en  $|\mathcal{X}|$  con los vértices univalentes en la intersección con  $\partial|\mathcal{X}|$ . Más aún, cada componente de  $\Sigma_{\mathcal{X}}$  menos los vértices carga un orden en  $\{p \in \mathbb{N} : p \geq 2\}$ , con la restricción que las tres aristas incidentes en cada vértice deben tener órdenes  $(2, 2, p)$  para  $p$  arbitrario o  $(2, 3, p)$  para  $p \in \{3, 4, 5\}$ .

Dado un punto  $x \in |\mathcal{X}|$ , sabemos que éste tiene una vecindad  $U_x$  homeomorfa al cociente de la 3-bola bajo alguno de los grupos en el [Apartado 3.2](#). A esta vecindad  $U_x$  le llamaremos **vecindad regular** de  $x$ . Así, si tenemos  $A \subset |\mathcal{X}|$ , una vecindad regular de  $A$  en  $\mathcal{X}$  será un abierto  $U_A$  tal que  $U_A$  sea homeomorfo a  $\bigcup_{x \in A} U_x$ .

### 3.3. Orbifolds buenos y malos

Brevemente introduciremos el concepto de cubierta de orbifolds para poder definir lo que es un orbifold bueno y uno malo. Estos conceptos son importantes pues, como veremos en el próximo capítulo, para la descomposición de orbifolds hay que suponer que nuestros 3-orbifolds no tienen 2-suborbifolds malos.

**Definición 3.16.** Una *cubierta* de un orbifold  $\mathcal{X}$  es un orbifold  $\widehat{\mathcal{X}}$  junto con una función continua  $p: |\widehat{\mathcal{X}}| \rightarrow |\mathcal{X}|$ , llamada **función cubriente**, tal que cada  $x \in |\mathcal{X}|$  tiene una vecindad  $U$  que cumple la siguiente propiedad: para cada componente  $V$  de  $p^{-1}(U)$  existe una carta  $(\widetilde{V}, H, \phi)$  tal que  $(\widetilde{V}, H, p \circ \phi)$  es una carta de  $x$ .

**Proposición 3.17.** Supongamos que un grupo de Lie  $G$  actúa propia, efectiva y casi libremente en una variedad diferenciable  $M$ . Entonces, el espacio cociente  $M/G$  tiene una estructura de orbifold tal que la función  $\pi: M \rightarrow M/G$  es una cubierta en el sentido de orbifolds.

*Demostración.* Sea  $\psi: G \times M \rightarrow M \times M$  la acción. Por la [Proposición A.12](#) tenemos que  $\psi$  es una función cerrada. Definamos

$$R := \{(x, y) \in M \times M : Gx = Gy\}.$$

Es claro que  $\psi[G \times M] = R$ , y como  $\psi$  es cerrada, entonces  $R$  es cerrado. Más aún, por la [Proposición A.8](#) sabemos que  $\pi: M \rightarrow M/G$  es una función abierta. Luego, la función

$$f := \pi \times \pi: M \times M \rightarrow M/G \times M/G$$

también es abierta. Dado que  $R = f^{-1}[f[R]]$ , se tiene que

$$(M \times M) \setminus R = f^{-1}[(M/G \times M/G) \setminus f[R]].$$

Usando que  $f$  es sobre, tenemos que

$$f[(M \times M) \setminus R] = (M/G \times M/G) \setminus f[R].$$

Como  $f$  es abierta, entonces  $(M/G \times M/G) \setminus f[R]$  es abierto y por lo tanto  $f[R]$  es cerrado. Concluimos que  $M/G$  es Hausdorff, pues la diagonal  $f[R]$  es cerrada en  $M/G \times M/G$  (ver Teorema 1.2 del Capítulo VII de [\[Dug66\]](#)).

Ahora bien, sea  $x_0 \in M$ . Por el Teorema de la Rebanada (ver Teorema 3.49 de [AB15]), después de promediar la métrica en  $M$  para obtener una nueva métrica que sea  $G_{x_0}$ -invariante, existe una rebanada

$$S_{x_0} := \exp_{x_0}^\perp(B_\varepsilon(0))$$

que es  $G_{x_0}$ -invariante, donde  $B_\varepsilon(0) \subset N_{x_0}Gx_0$  (nótese que  $Gx_0$  es una subvariedad de  $M$ , ver Proposición 3.41 de [AB15]). Definimos ahora

$$\text{Tub}(Gx_0) := G \cdot S_{x_0}$$

y por el Teorema de la Vecindad Tubular (ver Teorema 3.57 de [AB15]) tenemos que  $\text{Tub}(Gx_0)/G$  es difeomorfo a  $S_{x_0}/G_{x_0}$ . Por ende  $(B_\varepsilon(0), G_{x_0}, \pi \circ \exp_{x_0}^\perp)$  es una orbi-carta de  $\pi(x_0)$  (aquí estamos considerando la acción de  $G_{x_0}$  en  $B_\varepsilon(0)$  mediante la representación isotrópica  $G_{x_0} < GL(T_{x_0}S_{x_0})$ , ver página 125 de [Hel78]). De la expresión de la carta es claro que la función  $\pi: M \rightarrow M/G$  es una cubierta en el sentido de orbifolds.  $\square$

Siguiendo a [Jr21] denotaremos por  $M//G$  al **orbifold cociente** resultante de la Proposición 3.17 y a  $M/G$  su espacio subyacente. Esto es:

$$|M//G| = M/G$$

**Definición 3.18.** Decimos que un orbifold  $\mathcal{X}$  difeomorfo a un orbifold cociente  $M//G$  con  $G$  un grupo de Lie es **bueno** si  $G$  es discreto y **muy bueno** si  $G$  es finito. De otra forma diremos que  $\mathcal{X}$  es **malo**.

Introducimos notación para los siguientes orbifolds que serán importantes más adelante:

- $\mathbb{D}_o^3 := \mathbb{B}^3(0)$ , la **orbi-bola ordinaria**.
- $\mathbb{D}_c^3(p) := \mathbb{B}^3(0)//C_p$ , la **orbi-bola cíclica** de orden  $p$ .
- $\mathbb{D}_v^3(p, q, r) := \mathbb{B}^3(0)//G$ , donde  $G = D_{2n}$  o  $G = T_{12}$  o  $G = O_{24}$  o  $G = I_{60}$ , la **orbi-bola con vértice** de orden  $(p, q, r)$ .
- $\mathbb{S}_o^2 := \mathbb{S}^2$ , la **2-orbi-esfera ordinaria**.
- $\mathbb{S}_c^2(p) := \mathbb{S}^2//C_p$ , la **2-orbi-esfera cíclica** de orden  $p$ .
- $\mathbb{S}_v^2(p, q, r) := \mathbb{S}^2//G$ , donde  $G = D_{2n}$  o  $G = T_{12}$  o  $G = O_{24}$  o  $G = I_{60}$ , la **2-orbi-esfera con vértice** de orden  $(p, q, r)$ .
- $\mathbb{S}_o^3 := \mathbb{S}^3$ , la **3-orbi-esfera ordinaria**.
- $\mathbb{S}_c^3(p) := \mathbb{S}^3//C_p$ , la **3-orbi-esfera cíclica** de orden  $p$ .
- $\mathbb{S}_v^3(p, q, r) := \mathbb{S}^3//G$ , donde  $G = D_{2n}$  o  $G = T_{12}$  o  $G = O_{24}$  o  $G = I_{60}$ , la **3-orbi-esfera con vértice** de orden  $(p, q, r)$ .



En ocasiones, denotaremos a una 2- o 3-orbi-esfera con orden genérico como  $\mathbb{S}_*^2$  y  $\mathbb{S}_*^3$ .

**Definición 3.19.** *En general, llamaremos a un orbifold una **orbi-esfera** (respectivamente **orbi-bola**) si es el cociente de una esfera (respectivamente una bola) bajo la acción de un grupo discreto de isometrías.*

Llamaremos a un orbifold  $\mathcal{X}$  una **orbi-bola agujerada** si es una orbi-bola a la que se le han quitado una cantidad finita de vecindades regulares  $U_x$ .

Finalizamos con un lema importante que nos dice quiénes son los únicos 2-orbifolds malos (ver Teorema 2.3 de [Sco83]):

**Lema 3.20.** *Los únicos 2-orbifolds malos son  $(\mathbb{S}^2; p)$ , la 2-esfera con un punto cono de orden  $p$ , y  $(\mathbb{S}^2; p, q)$ , la 2-esfera con dos puntos cono de órdenes  $p \neq q$ .*

### 3.4. 2-suborbifolds y 3-orbifolds irreducibles

**Definición 3.21.** *Decimos que un 2-orbifold  $\Sigma$  es un **suborbifold** de un 3-orbifold  $\mathcal{X}$  si  $|\Sigma|$  está encajado en  $|\mathcal{X}|$  tal que  $|\Sigma|$  interseca  $\Sigma_{\mathcal{X}}$  transversalmente (en particular, no interseca los vértices) y más aún,  $\Sigma_{\Sigma}$  está dado precisamente por  $|\Sigma| \cap \Sigma_{\mathcal{X}}$  coincidiendo los órdenes.*

**Definición 3.22.** *Un 2-suborbifold  $\Sigma$  de un 3-orbifold  $\mathcal{X}$  se dice **esencial** si no acota en  $\mathcal{X}$  una 3-orbi-bola*

**Definición 3.23.** *Un 3-orbifold  $\mathcal{X}$  se dice **irreducible** si no contiene 2-suborbifolds malos y todo 2-suborbifold esférico (es decir, toda 2-orbi-esfera en  $\mathcal{X}$ ) es no esencial (en particular, separa).*

Si un 3-orbifold  $\mathcal{X}$  tiene componentes de frontera 2-orbi-esferas, podemos asociarle, de forma canónica, un 3-orbifold cerrado  $\widehat{\mathcal{X}}$  pegando en cada componente de frontera la 3-orbi-bola apropiada. Decimos que  $\widehat{\mathcal{X}}$  se obtiene **encapuchando**  $\mathcal{X}$ .

## 4 Descomposición de Orbifolds

En el [Capítulo 2](#) presentamos la demostración de la descomposición prima siguiendo a [\[Mil62\]](#). En este capítulo seguiremos el artículo de Carlo Petronio [\[Pet07\]](#) sobre descomposición prima de orbifolds localmente orientables de dimensión 3 que sigue la demostración original de Kneser (ver [\[Kne29\]](#)).

Los pasos principales para probar la existencia de la descomposición prima de 3-variedades, siguiendo la demostración original de Kneser son los siguientes (ver el [Capítulo 5](#) de [\[Sch14\]](#) o el [Capítulo 7](#) de [\[FM97\]](#)):

- (a) Probar que si  $M$  es una 3-variedad que contiene una esfera que no separa, entonces  $M$  se puede expresar como

$$M = M' \# (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \quad \text{o} \quad M = M' \# (\mathbb{S}^1 \tilde{\times} \mathbb{S}^2)^1$$

donde  $M'$  es una 3-variedad tal que  $\rho(\pi_1(M)) \geq \rho(\pi_1(M'))$ . Deducir de esto que uno puede restringirse a las 3-variedades  $M$  en las que toda esfera separa. (Ver el [Lema 2.13](#))

- (b) Definir el concepto de **familia esencial** de esferas  $\mathcal{S} \subset M$ : si ninguna componente de  $M \setminus \mathcal{S}$  es equivalente a una bola (ver [Definición 2.9](#)). Probar que cualquier familia esencial  $\mathcal{S}$  puede ser remplazada por otra familia esencial  $\mathcal{S}'$  que tiene el mismo número de componentes y que sea **normal**, es decir que su intersección con los tetraedros de cualquier triangulación dada de  $M$  está en posición general y es una unión de discos que intersecan cada arista en a lo más un punto e intersecan al menos una arista de cada tetraedro (ver [Capítulo 5](#) de [\[Sch14\]](#)). Deducir que todas las familias esenciales maximales de esferas son finitas.
- (c) Probar que si  $\mathcal{S}$  es una familia esencial maximal de esferas, entonces al encapuchar las componentes conexas de  $M \setminus \mathcal{S}$  se obtienen 3-variedades conexas.

Ninguno de estos puntos se puede probar de forma análoga en el caso de orbifolds. En particular, el inciso (a) tiene la siguiente restricción:

- (¬a) La existencia de una 2-orbi-esfera que no separe no asegura la existencia de una 2-orbi-esfera que sí separe. En particular, existe una cantidad infinita de 3-orbifolds que contienen 2-orbi-esferas que no separan y ninguna 2-orbi-esfera esencial que separe (ver el [Apartado 4.5](#)).

---

<sup>1</sup>Sólo existen dos fibrados con fibra  $\mathbb{S}^2$  y base  $\mathbb{S}^1$ , el fibrado producto  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  y el fibrado torcido  $\mathbb{S}^1 \tilde{\times} \mathbb{S}^2$  (ver Sección 6 de [\[Ste44\]](#)).

A pesar de esto, se puede probar un teorema que nos dice que todo 3-orbifold cerrado y localmente orientable, con ciertas condiciones sobre sus 2-suborbifolds, puede ser reconstruido a partir de ciertas piezas más sencillas en cierto sentido. El objetivo principal de este capítulo es probar el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.** *Sea  $\mathcal{X}$  un 3-orbifold cerrado y localmente orientable. Supongamos que  $\mathcal{X}$  no contiene ningún 2-suborbifold malo y que todo 2-suborbifold esférico encajado en  $\mathcal{X}$  separa. Entonces,  $\mathcal{X}$  contiene una familia finita  $\mathcal{S}$  de 2-orbi-esferas tales que:*

- *Ninguna componente de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  es una orbi-bola agujerada.*
- *Si  $Y$  es el orbifold obtenido a partir de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  al encapuchar las componentes de frontera con 3-orbi-bolas, entonces las componentes conexas de  $Y$  son irreducibles.*

## 4.1. Suma conexa de Orbifolds

Sen  $X_1$  y  $X_2$  dos 3-orbifolds y  $x_i \in |X_i|$  puntos en los espacios topológicos subyacentes tales que alguna de las siguientes condiciones se cumpla:

1. Ambos  $x_1$  y  $x_2$  son puntos no singulares.
2. Ambos  $x_1$  y  $x_2$  son puntos singulares pero no son vértices y pertenecen a aristas del mismo orden  $p$ .
3. Ambos  $x_1$  y  $x_2$  son puntos singulares y vértices y las triadas  $(p, q, r)$  de los órdenes de las aristas incidentes coinciden para  $x_1$  y  $x_2$ .

Podemos entonces remover de  $|X_i|$  una vecindad regular de  $x_i$  y pegar los orbifolds resultantes por medio de un homeomorfismo que haga coincidir los conjuntos singulares. El resultado es un 3-orbifold  $X$  que llamamos la **suma conexa** de  $X_1$  y  $X_2$ . Dependiendo de cuál de las condiciones se cumpla decimos que es una suma conexa de **tipo ordinario**, **tipo cíclico** (de orden  $p$ ) o de **tipo vértice** (de orden  $(p, q, r)$ ).

**Observación 4.2.** *El único elemento neutro de la suma conexa ordinaria (respectivamente de la suma conexa cíclica de orden- $p$  y de la suma conexa de vértices de orden- $(p, q, r)$ ) es  $\mathbb{S}_o^3$  (respectivamente  $\mathbb{S}_c^3(p)$  y  $\mathbb{S}_v^3(p, q, r)$ ).*

Así, decimos que una operación de suma conexa es trivial si es una suma conexa con su respectivo elemento neutro.

## 4.2. Triangulación de Orbifolds

En el [Capítulo 1](#) definimos lo que es una triangulación para una variedad. A continuación definiremos el mismo concepto para 3-orbifolds. Esto nos permitirá definir superficies normales y con ello probar la existencia de la descomposición prima de

3-orbifolds. Es importante hacer notar que la prueba original de la descomposición prima de 3-variedades dada por Kneser utiliza también triangulaciones de 3-variedades y superficies normales para probar el Teorema de Finitud de Haken–Kneser que demuestra la existencia de la descomposición prima de 3-variedades. Para saber más sobre superficies normales y su uso en problemas de decisión se puede consultar los Capítulos 3 y 4 de [Mat07].

**Definición 4.3.** *Sea  $\mathcal{X}$  un 3-orbifold. Una **triangulación**  $(K, h)$  de  $\mathcal{X}$  es una triangulación de la 3-variedad subyacente  $|\mathcal{X}|$  tal que  $\Sigma_{\mathcal{X}}$  es un subcomplejo del 1-esqueleto,  $K^1$ , y cada 3-simplejo interseca  $\Sigma_{\mathcal{X}}$  en un vértice, una arista o el conjunto vacío.*

Diremos que un 2-suborbifold  $\Sigma$  (ver Definición 3.21) de un 3-orbifold  $\mathcal{X}$  está en **posición general** con respecto a una triangulación  $(K, h)$  de  $\mathcal{X}$  si la 2-variedad subyacente  $|\Sigma|$  no interseca el 0-esqueleto,  $K^0$ , e interseca transversalmente el 1- y 2-esqueleto,  $K^1, K^2$ .

También, diremos que un 2-suborbifold  $\Sigma$  de un 3-orbifold es **normal** si  $|\Sigma|$  está en posición general con respecto a su triangulación  $(K, h)$  y para cada 3-simplejo  $\sigma$  de  $K$  se cumple que  $h(\sigma) \cap |\Sigma|$  es una unión de discos que intersecan cada arista de  $\sigma$  en a lo más un punto y e intersecan al menos una arista de  $\sigma$ .

Finalmente, diremos que dos 2-suborbifolds orientables  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  están en **posición general** si  $\Sigma_{\mathcal{F}_1} \cap \Sigma_{\mathcal{F}_2} = \emptyset$  y  $\mathcal{F}_1 \setminus \Sigma_{\mathcal{F}_1}$  interseca a  $\mathcal{F}_2 \setminus \Sigma_{\mathcal{F}_2}$  transversalmente (ver Definición 1.10). Dados dos 2-suborbifolds localmente orientables  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ , se sigue del Teorema 1.13 que siempre podemos deformarlos para suponer sin pérdida de generalidad que se encuentran en posición general. Esto nos permite probar teoremas sobre 2-suborbifolds de forma inductiva sobre el número de componentes conexas de su intersección con los 3-simplejos de su triangulación.

Terminamos esta sección definiendo una región producto en un 3-orbifold y en un 3-simplejo  $\sigma$ .

**Definición 4.4.** *Sea  $\mathcal{X}$  un 3-orbifold y  $F_0, F_1 \subset \mathcal{X}$  dos 2-suborbifolds. Decimos que  $F_0, F_1$  son **paralelos** si acotan en  $\mathcal{X}$  un 3-suborbifold  $F \times [0, 1] \subset \mathcal{X}$ , llamado **región producto**, tal que  $F \times \{0\} = F_0$  y  $F \times \{1\} = F_1$ .*

**Definición 4.5.** *Sea  $\sigma$  un 3-simplejo en un 3-orbifold  $\mathcal{X}$ . Una **región producto** en  $\sigma$  es una 3-bola  $(\mathbb{B}^2 \times I, \partial\mathbb{B}^2 \times I) \subset (\sigma, \partial\sigma)$  que evita los vértices y tal que  $\mathbb{B}^2 \times \{0\}$  y  $\mathbb{B}^2 \times \{1\}$  están propiamente encajadas.*

### 4.3. Teorema de finitud para 2-suborbifolds normales

El objetivo de esta sección es probar que el número de 2-suborbifolds no paralelos en un 3-orbifold está acotado. Iniciamos con una observación importante sobre 3-simplejos.

Dado un 3-orbifold  $\mathcal{X}$  y un subconjunto  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  de 2-suborbifolds de  $\mathcal{X}$ , denotamos por  $|\mathcal{S}| := \{|S_1|, \dots, |S_k|\}$ .

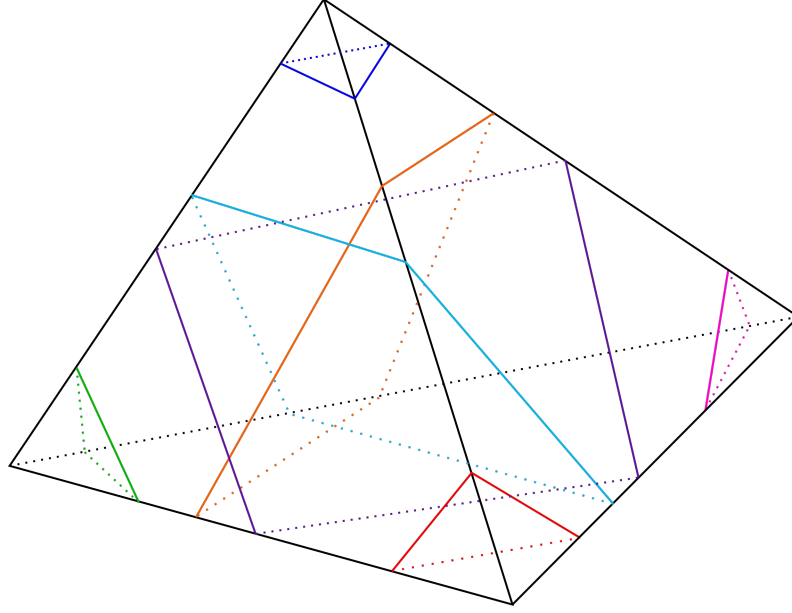


Figura 4.1: Los 7 tipos distintos de cortes para un 3-simplejo  $\sigma$

**Observación 4.6.** Sea  $(\mathcal{X}, K, h)$  un 3-orbifold triangulado y compacto y  $\mathcal{S}$  un subconjunto de 2-suborbifolds normales de  $\mathcal{X}$ . Sea  $\sigma$  un 3-simplejo de  $K$ . Entonces  $\sigma \setminus |\mathcal{S}|$  tiene a lo más 6 componentes conexas que no son regiones producto.

*Demostración.* El conjunto  $|\mathcal{S}|$  está en posición general con respecto a su triangulación  $(K, h)$ , por ende  $|\mathcal{S}|$  interseca transversalmente  $K^p$  para  $p \in \{0, 1, 2\}$ . Así, podemos suponer que para cada  $|S_i| \in |\mathcal{S}|$  su intersección  $|S_i| \cap \sigma$  es un conjunto de triángulos o cuadriláteros (ver Figura 4.1). Por otro lado, en un tetraedro hay a lo más 4 tipos distintos de triángulos que no son paralelos y 3 tipos distintos de cuadriláteros que no son paralelos (ver Figura 4.1). Sin embargo, todos los elementos de  $\mathcal{S}$  son disjuntos por pares, por lo tanto  $\bigcup |\mathcal{S}| \cap \sigma$  sólo puede tener a lo más un tipo de cuadrilátero. Así, si  $\sigma \setminus |\mathcal{S}|$  tiene más de 6 componentes conexas, entonces alguna debe ser una región producto.  $\square$

**Lema 4.7.** Sea  $(\mathcal{X}, K, h)$  un 3-orbifold triangulado y compacto. Sea  $t$  el número de 3-simplejos en  $K$ . Sea  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  un conjunto de 2-suborbifolds normales de  $\mathcal{X}$  y  $u = |\pi_0(|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|)|$ . Supongamos que  $u > 6t$ . Entonces, a excepción de a lo más  $6t$  componentes conexas de  $|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|$ , las demás son regiones producto entre dos de los elementos de  $\mathcal{S}$  o un  $I$ -fibrado torcido<sup>2</sup>.

*Demostración.* Recordemos que por la Observación 4.6, para cada 3-simplejo  $\sigma \in K$  se tiene que  $\sigma \setminus |\mathcal{S}|$  tiene a lo más 6 componentes conexas que no son regiones producto. Dado que  $K$  tiene  $t$  3-simplejos, entonces a excepción de a lo más  $6t$  componentes conexas de  $|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|$ , cada componente conexas  $X$  interseca a los 3-simplejos de  $K$  en

<sup>2</sup>Es decir, un fibrado con fibra el intervalo unitario  $I = [0, 1]$ , base una variedad y que no sea trivial.

regiones producto. Las estructuras de fibrado de estas regiones coinciden, y por lo tanto estas componentes conexas son fibrados con fibra  $I$ . Si  $X$  es un fibrado trivial, entonces es una región producto entre dos elementos de  $\mathcal{S}$ . De otra forma,  $X$  es un fibrado no trivial y se puede ver como una vecindad tubular de una superficie  $T$  que no separa. Por ende, a excepción de  $6t$  componentes conexas de  $|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|$ , las demás son regiones producto entre dos de los elementos de  $\mathcal{S}$  o un  $I$ -fibrado torcido (fibrado no trivial con fibra  $I$ ).  $\square$

**Lema 4.8.** *Sea  $\mathcal{X}$  un 3-orbifold compacto y  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  un subconjunto de 2-suborbifolds de  $\mathcal{X}$ . Entonces,  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  tiene al menos  $k + 1 - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2))$  componentes que no son  $I$ -fibrados torcidos.*

*Demostración.* Podemos dividir al conjunto  $\mathcal{S}$  en dos:  $\mathcal{S}' = \{S_1, \dots, S_n\}$  y  $\mathcal{S}'' = \{S_{n+1}, \dots, S_{n+k}\}$  de tal forma que  $\mathcal{S}'$  sean los 2-suborbifolds que no separan  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{S}''$  los 2-suborbifolds que sí separan  $\mathcal{X}$ . Sea  $u = |\pi_0(|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|)|$ . Es claro que  $u = k + 1 - n$ . Ahora bien, supongamos que  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  tiene  $m$   $I$ -fibrados torcidos. Cada uno de ellos es la vecindad tubular de un 2-suborbifold  $T_i$  que no separa. Luego, el conjunto  $\mathcal{A} = \{|S_1|, \dots, |S_n|, |T_1|, \dots, |T_m|\}$  forma un conjunto linealmente independiente de elementos en  $H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)$ , pues de lo contrario, de existir una combinación lineal entre ellos, se tendría que un subconjunto de ellos forma una 2-suborbifold que separa, lo cual es una contradicción por construcción. Por lo tanto

$$n + m \leq \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)).$$

Finalmente, recordemos que el número de componentes conexas de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  que no son  $I$ -fibrados torcidos es igual a  $u - m$  y tenemos la siguiente desigualdad

$$u - m = k + 1 - n - m > k + 1 - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2))$$

justo como queríamos.  $\square$

**Teorema 4.9.** *Sea  $(\mathcal{X}, K, h)$  un 3-orbifold compacto y triangulado. Entonces, existe un número natural  $m > 0$  tal que si  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  es un conjunto de 2-suborbifolds normales de  $\mathcal{X}$  con más de  $m$  elementos, entonces alguna componente conexa de  $|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|$  es una región producto entre dos de los elementos de  $\mathcal{S}$ .*

*Demostración.* Sea  $t$  el número de 3-simplejos de  $K$ . Fijemos

$$m = 6t + \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)) \quad \text{y} \quad u = |\pi_0(|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|)|.$$

Supongamos que  $k > m$ , esto en particular nos dice que

$$\begin{aligned} k + 1 &> m, \\ k + 1 &> 6t + \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)), \\ k + 1 - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)) &> 6t. \end{aligned}$$

Notemos que, si denotamos por  $n$  el número de elementos de  $\mathcal{S}$  que sí separan, entonces éste está acotado por

$$n \geq k - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)).$$

Luego, tenemos una cota para  $u$ , dada por

$$u = n + 1 \geq k + 1 - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)) > 6t. \quad (4.1)$$

Así, por el [Lema 4.7](#) tenemos que a excepción de a lo más  $6t$  componentes conexas, el resto son regiones producto entre dos elementos de  $\mathcal{S}$  o  $I$ -fibrados torcidos. Sin embargo, notemos que por el [Lema 4.8](#) sabemos que hay al menos  $k + 1 - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2))$  componentes conexas que no son  $I$ -fibrados torcidos. Por (4.1) sabemos que  $k + 1 - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2)) - 6t > 0$ . Por lo tanto hay componentes conexas de  $|\mathcal{X}| \setminus |\mathcal{S}|$  que son regiones producto entre elementos de  $\mathcal{S}$  (pues a lo más  $6t$  no son regiones producto o  $I$ -fibrados torcidos y además al menos  $k + 1 - \dim(H_2(|\mathcal{X}|, \mathbb{Z}_2))$  no son  $I$ -fibrados torcidos).  $\square$

## 4.4. Existencia de la descomposición

Durante lo que resta de este capítulo clasificaremos a las 2-orbi-esferas por su complejidad como sigue: la 2-orbi-esfera con vértice,  $\mathbb{S}_v^2(p, q, r)$ , es más complicada que la 2-orbi-esfera cíclica,  $\mathbb{S}_c^2(p)$ , que a su vez es más complicada que la 2-orbi-esfera ordinaria,  $\mathbb{S}_o^2$ .

**Lema 4.10.** *Sea  $\mathcal{F}$  una 3-orbi-bola agujerada y  $\Sigma$  una componente de  $\partial\mathcal{F}$ . Supongamos que ninguna otra componente de  $\partial\mathcal{F}$  es más complicada que  $\Sigma$ . Entonces, al encapuchar todas las componentes de  $\partial\mathcal{F}$ , salvo  $\Sigma$ , obtenemos una 3-orbi-bola.*

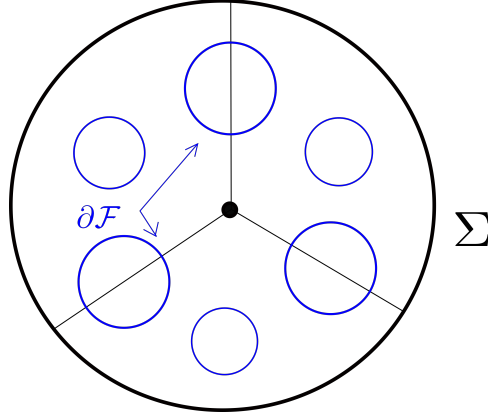
*Demostración.* Si  $\Sigma$  es de tipo ordinaria, entonces debe ser la única componente de  $\partial\mathcal{F}$  y por ende  $\mathcal{F}$  es una 3-orbi-bola agujerada. Si  $\Sigma$  es de tipo cíclica, entonces todas las otras componentes de  $\partial\mathcal{F}$  son de tipo ordinario y, al encapucharlas con 3-orbi-bolas ordinarias, obtenemos una 3-orbi-bola de tipo cíclico. Similarmente, si tenemos que  $\Sigma$  es tipo con vértice, entonces el resto de las componentes de  $\partial\mathcal{F}$  son de tipo cíclico u ordinario y las podemos ver como frontera de vecindades regulares de puntos de tipo cíclico u ordinario que fueron eliminadas de  $\mathcal{F}$ . Por ende, al encapuchar todas las componentes de  $\partial\mathcal{F}$  menos  $\Sigma$ , recuperamos la 3-orbi-bola a la que se le quitaron las vecindades regulares. Por lo tanto obtenemos una 3-orbi-bola con vértice (ver [Figura 4.2](#)).  $\square$

De ahora en adelante, fijaremos un 3-orbifold cerrado y localmente orientable que no contiene ningún 2-suborbifold malo y tal que todo 2-suborbifold esférico separa.

**Proposición 4.11.** *Sea  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  un conjunto de 2-suborbifolds esféricos esenciales de  $\mathcal{X}$ . Sea  $Y$  una componente de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  y  $\mathcal{F}$  un 2-suborbifold esférico de  $Y$ . Supongamos, además, que:*

- $\mathcal{F}$  es esencial en  $\widehat{Y}$ .
- Todo elemento de  $\mathcal{S}$  es a lo más tan complicado como  $\mathcal{F}$ .

*Entonces,  $\mathcal{S} \cup \{\mathcal{F}\}$  es un conjunto de 2-suborbifolds esenciales de  $\mathcal{X}$ .*

Figura 4.2: 3-orbi-bola agujerada  $\mathcal{F}$ 

*Demostración.* Supongamos que, por el contrario, existe una componente conexa  $Z$  de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S} \cup \{\mathcal{F}\}$  que es una 3-orbi-bola agujerada. Entonces, como  $\mathcal{S}$  es esencial (es decir, ninguna componente de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  es una 3-orbi-bola agujerada) y además  $\mathcal{F}$  separa (por hipótesis de nuestro 3-orbifold  $\mathcal{X}$ ), entonces  $Z \subseteq Y$  y  $\mathcal{F}$  es frontera de  $Z$ . Ahora bien, por el [Lema 4.10](#) y la segunda suposición, tenemos que al encapuchar todas las componentes conexas de  $\partial Z$  menos  $\mathcal{F}$  obtenemos una 3-orbi-bola, lo cual implica que  $\mathcal{F}$  acota una 3-orbi-bola en  $\widehat{Y}$ , es decir  $\mathcal{F}$  es inesencial en  $\widehat{Y}$ , lo cual contradice la primera suposición.  $\square$

**Proposición 4.12.** *Fijemos una triangulación  $(K, h)$  de  $\mathcal{X}$ . Sea  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  un conjunto de 2-suborbifolds esféricos esenciales de  $\mathcal{X}$  normales con respecto a  $(K, h)$ . Sea  $Y$  una componente conexa de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  y  $\mathcal{F}$  un 2-suborbifold esférico de  $Y$ . Supongamos, además, que:*

- $\mathcal{F}$  es esencial en  $\widehat{Y}$ .
- Todo 2-suborbifold esférico de  $\widehat{Y}$  estrictamente menos complicado que  $\mathcal{F}$  es inesencial en  $\widehat{Y}$ .

*Entonces,  $\mathcal{F}$  puede ser remplazado por un 2-suborbifold esférico que satisface las mismas propiedades y tal que todo elemento de  $\mathcal{S} \cup \{\mathcal{F}\}$  es normal con respecto a  $(K, h)$ .*

*Demostración.* Siguiendo a [[Mat07](#), página 128] tenemos ciertos movimientos que nos ayudan a cambiar una 2-esfera por otra 2-esfera en posición normal con respecto a la triangulación  $(K, h)$ . Más aún, después de describir estos movimientos, queda claro que estos no cambian el tipo de puntos singulares y, por ende, cambian a una 2-orbi-esfera por otra del mismo tipo pero normal con respecto a la triangulación  $(K, h)$ . Estos movimientos son los siguientes:

- (a) El primer movimiento consiste en considerar un tetraedro  $\sigma \in K$  y la superficie  $E = |\mathcal{F}| \cap h(\sigma)$ . Si existe un disco  $D$  encajado en  $h(\sigma)$  tal que  $D \cap E = \partial D$  y  $\partial D$  sea una curva trivial en  $E$ , entonces nos fijamos en una vecindad tubular de  $D$  y la cortamos. Obtenemos así dos 2-orbi-esferas  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}''$ , escogemos una y la otra la olvidamos (ver (1) de la [Figura 4.3](#)).



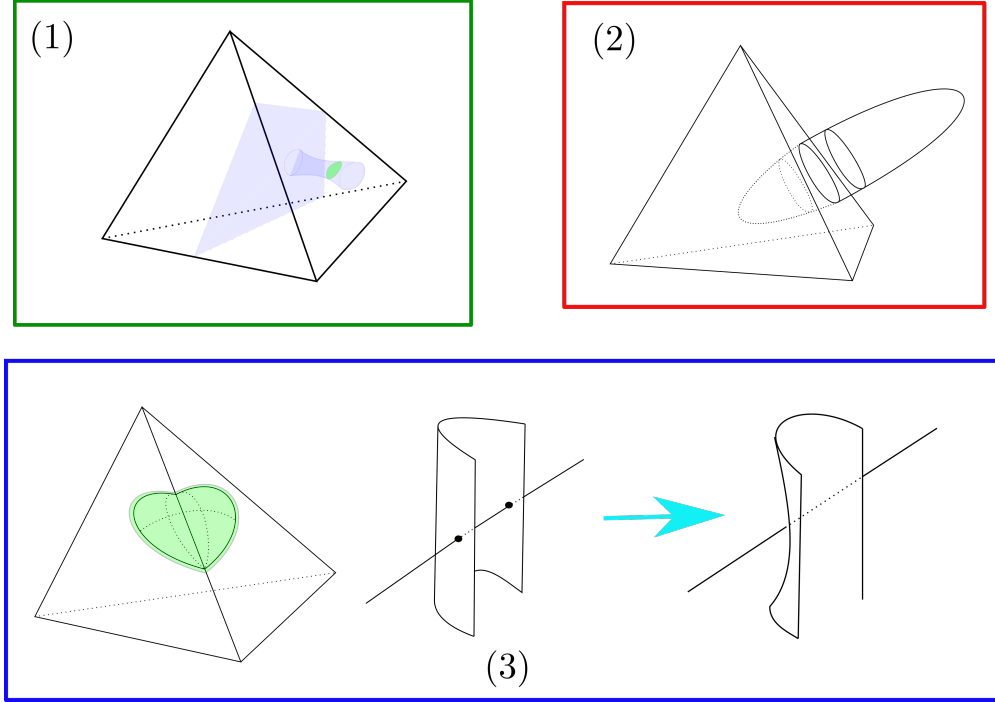


Figura 4.3: Movimientos para normalizar una 2-orbi-esfera

- (b) El segundo movimiento se da cuando para algún triángulo  $\sigma \in K$  se tiene que  $h(\sigma) \cap |\mathcal{F}|$  es un círculo  $\Gamma$  en el interior de  $h(\sigma)$ . En este caso, nuevamente consideremos una vecindad tubular del disco que acota  $\Gamma$  y cortamos. Obtenemos así dos 2-orbi-esferas  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}''$ , escogemos una y nos olvidamos de la otra (ver (2) de [Figura 4.3](#)).
- (c) El tercer movimiento sirve para eliminar las dobles intersecciones de la 2-orbi-esfera con una arista de la triangulación. Para ello, si tenemos una doble intersección, entonces por medio de una isotopía la eliminamos siguiendo como referencia el caso (3) de la [Figura 4.3](#). Esto lo podemos ver como la identificación de un disco  $D$  tal que  $D \cap |\mathcal{F}| = \partial D$  y tomando una vecindad tubular de él, cortando, obteniendo dos 2-orbi-esferas  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}''$  y escogiendo una. Notemos que una de las dos 2-orbi-esferas que se obtienen es la frontera de la vecindad regular de un punto en la arista en la que se da la doble intersección.

De la descripción de estos movimientos vemos que todos consisten en identificar un disco  $D$  que es disjunto del 1-esqueleto,  $K^1$ , tal que  $D \cap |\mathcal{F}| = \partial D$  y eliminando una vecindad tubular de él para obtener dos 2-orbi-esferas  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}''$  y escoger una de ellas. Ahora bien, como topológicamente  $|\mathcal{F}|$  es una 2-esfera y  $\partial D$  una curva en  $|\mathcal{F}|$ , entonces  $\partial D$  acota dos discos  $D'$  y  $D''$  tales que

$$|\mathcal{F}'| = D \cup D' \quad \text{y} \quad |\mathcal{F}''| = D \cup D''.$$

Ahora bien, recordemos que  $\mathcal{X}$  no contiene 2-suborbifolds malos y que  $D$  es un disco ordinario (pues  $\partial D \cap h(K^1) = \emptyset$ ), por ende, alguna de las dos 2-orbi-esferas debe ser ordinaria. Supondremos sin pérdida de generalidad que es  $\mathcal{F}''$ .

Afirmamos que alguna de  $\mathcal{F}'$  o  $\mathcal{F}''$  debe ser esencial en  $\widehat{Y}$ . Supongamos por el contrario que ambas acotan una 3-orbi-bola en  $\widehat{Y}$ . Como  $\mathcal{F}''$  es ordinaria, entonces tenemos que  $\mathcal{F}$  acota en  $\widehat{Y}$  una 3-orbi-bola a la cual se le pega una 3-orbi-bola ordinaria a través de un disco  $D$  en la frontera de la 3-orbi-bola. Por ende,  $\mathcal{F}$  no es esencial en  $\widehat{Y}$ , lo cual es una contradicción.

Ahora bien, dado que  $\mathcal{F}''$  es ordinaria, entonces  $\mathcal{F}'$  es del mismo tipo que  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}'$  es esencial, ya acabamos, pues reemplazamos a  $\mathcal{F}$  con  $\mathcal{F}'$ , que es normal con respecto a la triangulación, es esencial en  $\widehat{Y}$  y como además los movimientos de normalización se pueden hacer sin tocar a  $\mathcal{S}$ , entonces la segunda propiedad de  $\mathcal{F}$  se conserva. Si, por otro lado,  $\mathcal{F}'$  no es esencial, entonces  $\mathcal{F}''$  es ordinaria y esencial y por la segunda propiedad de  $\mathcal{F}$  se debe tener que  $\mathcal{F}$  era ordinaria. Por lo tanto, basta cambiar los papeles de  $\mathcal{F}'$  y  $\mathcal{F}''$  y acabamos. □

Las [Proposiciones 4.11 y 4.12](#) nos dicen que siempre podemos llevar a cabo el procedimiento dado en el siguiente corolario pidiendo que el conjunto de 2-orbi-esferas  $\mathcal{S}$  esté en posición normal con respecto a una triangulación  $(K, h)$  de  $\mathcal{X}$ .

**Corolario 4.13.** *Si  $(\mathcal{X}, K, h)$  es un 3-orbifold triangulado, entonces uno puede llevar a cabo el siguiente procedimiento; donde definimos  $\mathcal{S} = \emptyset$  y  $Y = X$ :*

1. *Si todas las 2-orbi-esferas ordinarias de  $Y$  son no esenciales, entonces pasar al paso 2. De otra forma, escoger  $\mathcal{F}$  una de las 2-orbi-esferas ordinarias esenciales, redefinir  $\mathcal{S}$  como  $\mathcal{S} \cup \{\mathcal{F}\}$  y  $Y$  como el 3-orbifold  $\widehat{Y \setminus \mathcal{F}}$ . Repetir el paso 1.*
2. *Si todas las 2-orbi-esferas cíclicas de  $Y$  son no esenciales, entonces pasar al paso 3. De lo contrario, escoger  $\mathcal{F}$  una de las 2-orbi-esferas cíclicas esenciales, redefinir  $\mathcal{S}$  y  $Y$  como en el paso 1. Repetir el paso 2.*
3. *Si todas las 2-orbi-esferas con vértice de  $Y$  son no esenciales, entonces termina el procedimiento con salida  $\mathcal{S}$  y  $Y$ . De lo contrario, escoger  $\mathcal{F}$  una de las 2-orbi-esferas con vértice esenciales, redefinir  $\mathcal{F}$  y  $Y$  como en el paso 1. Repetir el paso 3.*

*Durante este proceso todos los elementos de  $\mathcal{S}$  son normales con respecto a  $(K, h)$  en cada paso del procedimiento.*

*Demostración.* Es claro utilizando la [Proposición 4.12](#). □

Si  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  es un conjunto finito de 2-suborbifolds esféricos de  $\mathcal{X}$ , diremos que  $\mathcal{S}$  es un **sistema finito eficiente de corte** si ninguna componente conexa de  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}$  es una 3-orbi-bola agujerada y si toda componente conexa de  $\widehat{\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}}$  es irreducible.

El [Corolario 4.13](#), junto con el [Teorema 4.9](#) y la [Proposición 4.11](#) demuestran el siguiente corolario:

**Corolario 4.14.** *Todo 3-orbifold cerrado, localmente orientable que no contiene ningún 2-suborbifold malo y en el que todo 2-suborbifold esférico separa admite un sistema finito eficiente de corte.*

Esto prueba el [Teorema 4.1](#) y con ello la existencia de la descomposición prima de 3-orbifolds. Existe también un resultado de unicidad para esta descomposición, sin embargo su prueba es mucho más complicada que el caso de 3-variedades y por ello no la incluimos en esta tesis. Si se quiere ver, se puede consultar la sección 4 de [\[Pet07\]](#).

**Observación 4.15.** *Notemos que requerimos que todo 2-suborbifold esférico de  $\mathcal{X}$  separe para poder probar la [Proposición 4.11](#), sin la cual no sería posible probar el [Teorema 4.1](#).*

## 4.5. 3-orbifolds primos no irreducibles

**Definición 4.16** (3-orbifold primo). *Decimos que  $\mathcal{X}$  es un 3-orbifold **primo** si no puede ser expresado como suma conexa no trivial de 3-orbifolds. Equivalentemente,  $\mathcal{X}$  es primo si todo 2-suborbifold esférico que separa en  $\mathcal{X}$  acota una 3-orbi-bola.*

Es claro de la definición de 3-orbifold irreducible ([Definición 3.23](#)) que todo 3-orbifold irreducible es primo. Esto es análogo al caso de 3-variedades. Sin embargo, en el caso de las 3-variedades, se tiene que la única 3-variedad prima y no irreducible es  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . En el caso de 3-orbifolds esto no se da. En esta sección probaremos que existe una cantidad infinita de 3-orbifolds primos que no son irreducibles. Esta es una diferencia clara entre los orbifolds y las variedades.

**Proposición 4.17.** *Sea  $\mathcal{X}$  un 3-orbifold con frontera homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  con cuatro puntos como del mismo orden  $p$ . Supongamos que:*

- $\mathcal{X}$  es irreducible.
- $\mathcal{X}$  no es la 3-bola con conjunto singular 2 aristas paralelas que no se intersecan.
- En  $\mathcal{X}$  no hay ninguna esfera con 3 puntos singulares  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F} \cap \partial\mathcal{X}$  sea un disco con 2 puntos singulares.

*Consideremos el 3-orbifold con espacio topológico subyacente  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  y conjunto singular dos círculos de orden  $p$  paralelos al factor  $\mathbb{S}^1$ . Quitemos de este espacio una vecindad regular de una curva que una los dos círculos de orden  $p$  y que esté contenida en una esfera de nivel (esto es, que la curva esté contenida en  $\mathbb{S}^2 \times \{\star\}$  para algún  $\star \in \mathbb{S}^1$ ). Llamemos  $\mathcal{Y}$  al 3-orbifold resultante. Finalmente, sea  $\mathcal{Z}$  el 3-orbifold que se obtiene al pegar las fronteras de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  haciendo coincidir los puntos singulares. Entonces,  $\mathcal{Z}$  es primo pero no es irreducible.*

*Demostración.* Primero, notemos que si  $L = \mathbb{S}^2 \times \{p\}$  para algún  $p \in \mathbb{S}^1$ , entonces  $L$  es un 2-suborbifold de  $\mathcal{Z}$  que no separa a  $\mathcal{Z}$ . Por ende,  $\mathcal{Z}$  no es irreducible.

Observemos, además, que  $\mathcal{Y}$  no es irreducible. Sin embargo, toda 2-orbi-esfera en  $\mathcal{Y}$  que no sea paralela a una 2-orbi-esfera de la forma  $\mathbb{S}^2 \times \{p\}$  para algún  $p \in \mathbb{S}^1$  acota una 3-orbi-bola.

Veamos ahora que  $\mathcal{Z}$  es primo; esto es, que todo 2-suborbifold que separa en  $\mathcal{Z}$  acota una 3-orbi-bola. Sea  $\mathcal{F}_0$  la 2-orbi-esfera que separa a  $\mathcal{X}$  de  $\mathcal{Y}$ . Así, consideremos una 2-orbi-esfera,  $\mathcal{F}$ , en  $\mathcal{Z}$  que sí separe. Notemos que si  $|\mathcal{F}| \cap |\mathcal{F}_0| = \emptyset$ , entonces  $|\mathcal{F}| \subset |\mathcal{X}|$  o  $|\mathcal{F}| \subset |\mathcal{Y}|$ . Dado que  $\mathcal{X}$  es irreducible y la observación hecha en el párrafo anterior, es claro que  $\mathcal{F}$  acota una 3-orbi-bola. Ahora, supongamos que  $|\mathcal{F}| \cap |\mathcal{F}_0| \neq \emptyset$ . Sabemos que podemos asumir sin pérdida de generalidad que esta intersección es transversal y que además es mínima en el sentido de la cantidad de componentes conexas.

Como tenemos que  $|\mathcal{F}| \cap |\mathcal{F}_0|$  es transversal, entonces todas las componentes conexas son círculos. Más aún, en  $|\mathcal{F}|$  cada disco  $D$  tal que  $D \cap |\mathcal{F}| = \partial D$  cumple que acota un disco en  $|\mathcal{F}|$ . Así, podemos encontrar al menos un círculo en  $|\mathcal{F}| \cap |\mathcal{F}_0|$  tal que éste acota un disco en  $|\mathcal{F}_0|$  (pues en una esfera, todo círculo acota un disco) y este disco a su vez acota un disco en  $|\mathcal{F}|$ . Ahora bien,  $\mathcal{F}$  tiene a lo más 3 puntos singulares (ver [Figura 3.3](#)) y por ende, podemos encontrar un disco  $D \subset |\mathcal{F}|$  que tenga  $i \leq 1$  puntos singulares. Notemos que  $D \subset |\mathcal{X}|$  o  $D \subset |\mathcal{Y}|$ . Además, si consideramos el círculo  $\partial D \subset |\mathcal{F}_0|$  éste debe encerrar a  $e \leq 2$  puntos singulares. Lo que probaremos es que sin importar si  $D \subset |\mathcal{X}|$  o  $D \subset |\mathcal{Y}|$ , las condiciones  $i \leq 1$  y  $e \leq 2$  son imposibles.

Supongamos primero que  $D \subset |\mathcal{X}|$ . Como  $\mathcal{X}$  es irreducible, los casos  $i = e = 0$  e  $i = e = 1$  son imposibles pues podemos isotopar  $\mathcal{F}$  para eliminar la intersección sin cambiar la configuración de los puntos singulares. Los casos  $e = 0, i = 1$  y  $e = 1, i = 0$  nos dan un 2-suborbifold con un único punto singular; éste es malo, lo cual contradice la suposición de que  $\mathcal{X}$  no tiene 2-suborbifolds malos. Si  $i = 0$  y  $e = 2$ , entonces podemos utilizar que  $\mathcal{X}$  es irreducible para notar que  $\mathcal{X}$  debe ser la 3-bola con conjunto singular dos aristas paralelas que no se intersecan (ver [Figura 4.5](#)). Si  $i = 1$  y  $e = 2$ , este caso tampoco es posible pues  $\mathcal{X}$  no contiene 2-orbi-esferas con 3 puntos singulares cuya intersección con  $\partial\mathcal{X}$  sea un disco con 2 puntos singulares.

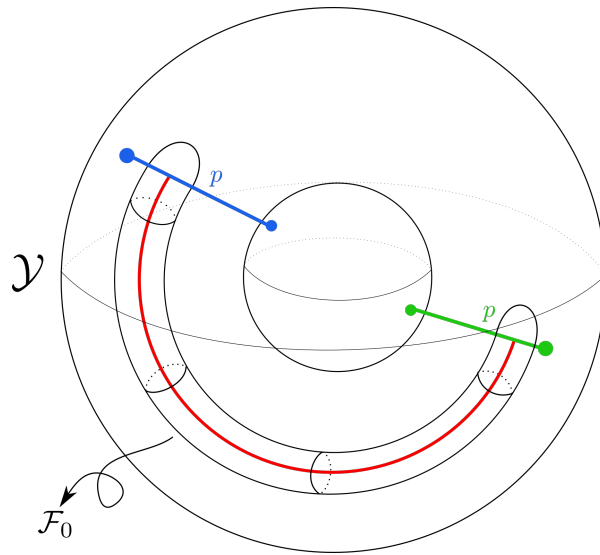
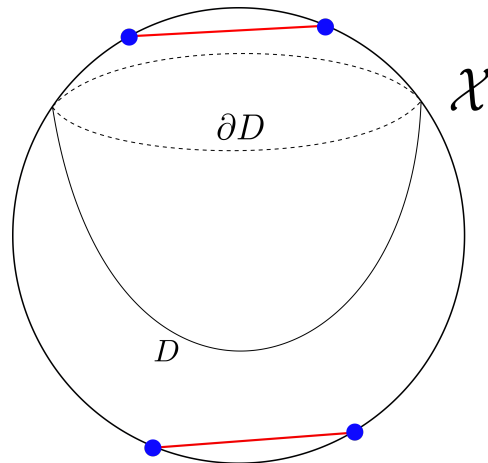
Supongamos ahora que  $D \subset |\mathcal{Y}|$ . Nuevamente, los casos  $e = i = 0$  y  $e = i = 1$  contradicen la minimalidad de la intersección. El caso  $e = 2, i = 1$  implica que por medio de una homotopía podemos llevar uno de los arcos singulares de  $\mathcal{Y}$  a  $\partial\mathcal{Y}$  lo cual no se puede (ver [Figura 4.4](#)). Los otros casos son absurdos por razones similares.

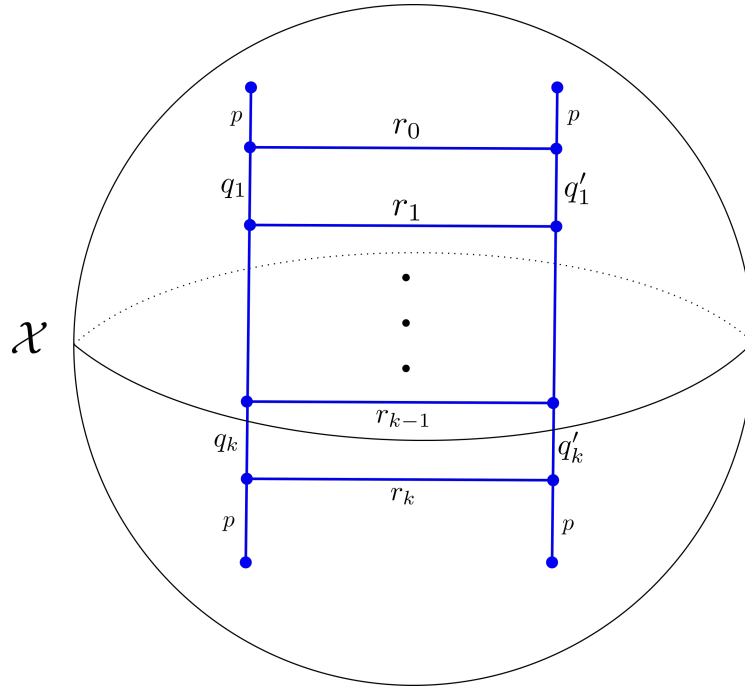
Así, toda 2-orbi-esfera en  $\mathcal{Z}$  que separa acota una 3-orbi-bola y por lo tanto  $\mathcal{Z}$  es primo. □

La [Proposición 4.17](#) nos dice cómo encontrar un 3-orbifold  $\mathcal{Z}$  que es primo pero no es irreducible siempre y cuando tengamos un 3-orbifold  $\mathcal{X}$  que cumple las condiciones ahí establecidas. A continuación presentamos una cantidad infinita de 3-orbifolds  $\mathcal{X}$  que cumplen esas características:

**Ejemplo 3.** Para  $k \geq 1$  generamos las tercias

$$\begin{aligned} & (p, r_k, q_k), (p, r_k, q'_k), (q_k, q_{k-1}, r_{k-1}), (q'_k, q'_{k-1}, r_{k-1}) \\ & \quad , \quad \dots \quad , \\ & (q_2, q_1, r_1), (q'_2, q'_1, r_1), (p, r_0, q_1), (p, r_0, q'_1), \end{aligned}$$

Figura 4.4: El 3-orbifold  $\mathcal{Y}$ Figura 4.5:  $\mathcal{X}$  es la 3-bola con conjunto singular 2 aristas paralelas que no se intersecan

Figura 4.6: Ejemplo de un 3-orbifold  $\mathcal{X}$ 

donde cada una de ellas es igual a  $(2, 2, l)$  para  $l \in \mathbb{N}$  o  $(2, 3, l)$  para  $l \in \{3, 4, 5\}$ . Ahora, construimos el 3-orbifold  $\mathcal{X}$  como la 3-bola,  $\mathbb{B}^3(0)$ , con conjunto singular una escalera en la que los órdenes están dados por las tercias generadas arriba (ver [Figura 4.6](#)).

Notemos que, en esta clase de ejemplos,  $|\mathcal{X}|$  es  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . Así, como 3-variedad  $|\mathcal{X}|$  también es prima pero no irreducible.



## 5 Comentarios finales

Como mencionamos en la introducción de este trabajo, las descomposiciones primas son una técnica que se utiliza para simplificar el estudio de ciertos objetos matemáticos. En este trabajo presentamos los resultados para 3-variedades cerradas y para 3-orbifolds cerrados y localmente orientables. Sin embargo, existen resultados similares para otro tipo de espacios de dimensión 3. En [Gro69], Jonathan L. Gross prueba el siguiente resultado:

**Teorema 5.1.** *Sea  $M$  una 3-variedad orientable, conexa y compacta con frontera conexa y no vacía. Si  $M$  es distinta de la 3-bola, entonces  $M$  es homeomorfa a una suma de disco*

$$P_1 \Delta \cdots \Delta P_n,$$

donde cada  $P_i$  es una 3-variedad  $\Delta$ -prima. Los sumandos  $P_i$  son únicos salvo homeomorfismo y orden.

Este teorema da una descomposición en factores primos para las 3-variedades orientables, conexas y compactas con frontera conexa y no vacía utilizando la suma de disco, la cual definimos a continuación.

**Definición 5.2** (Suma de disco). *Sean  $M$  y  $M'$  dos 3-variedades con frontera conexa y no vacía. Definimos la **suma de disco** de  $M$  y  $M'$ , denotada como  $M \Delta M'$  como sigue: se escogen dos encajes de la 2-bola en las fronteras de  $M$  y  $M'$*

$$i_1 : \mathbb{B}^2(0) \rightarrow \partial M, \quad i_2 : \mathbb{B}^2(0) \rightarrow \partial M'$$

y se define

$$M \Delta M' := (M \sqcup M') /_{f(x) \sim x},$$

donde  $f : i_1(\mathbb{B}^2(0)) \rightarrow i_2(\mathbb{B}^2(0))$  es un homeomorfismo que invierte la orientación.

Posteriormente, en [Gro70], Jonathan L. Gross generaliza este resultado pero ahora para 3-variedades orientables, conexas y compactas con frontera no vacía (esta vez permite que la frontera tenga varias componentes conexas). Para ello define la suma multidisco de dos 3-variedades.

**Definición 5.3.** *Sean  $M$  y  $N$  dos 3-variedades con frontera. Sean  $D_1, \dots, D_n$  2-bolas en  $\partial M$  tal que ningún par de ellos están en la misma componente conexa de  $\partial M$ . Sean  $E_1, \dots, E_n$  2-bolas en  $\partial N$  tal que ningún par de ellos están en la misma componente conexa de  $\partial N$ . La 3-variedad que se obtiene de  $M \sqcup N$  identificando  $D_i$  con  $E_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  mediante un homeomorfismo que invierte la orientación se le llama **suma multidisco** de  $M$  y  $N$ .*



Con esta definición Gross prueba el siguiente teorema.

**Teorema 5.4.** *Una 3-variedad  $M$  orientable, conexa y compacta con frontera no vacía tiene una descomposición prima bajo la suma multidisco.*

Estos dos teoremas nos dan una forma de descomponer en pedazos más sencillos a las 3-variedades con frontera, sin embargo, éstas deben ser orientables. Posteriormente, Józef Henryk Przytycki generalizó estos resultados a 3-variedades conexas y compactas con frontera no vacía en [Prz79], es decir, quitó la condición de ser orientables.

Finalmente, en 2021, en trabajo conjunto con Fernando Galaz García, José Carlos Gómez Larrañaga, Luis Guijarro y Wolfgang Heil, generalizamos, entre otros resultados de 3-variedades, la descomposición prima al caso de espacios de Alexandrov de dimensión 3 [Fra+22]. Un espacio de Alexandrov de dimensión 3 es un espacio métrico de longitud, geodésico, con dimensión de Hausdorff 3, que tiene curvatura acotada por debajo. Al no necesariamente haber diferenciabilidad, la cota inferior de la curvatura se define de una manera distinta al caso de las variedades Riemannianas, en términos de triángulos de comparación. Los espacios de Alexandrov juegan un papel fundamental en el estudio de las variedades Riemannianas, pues si se consideran sucesiones de variedades Riemannianas compactas  $n$ -dimensionales con curvatura seccional acotada inferiormente por  $k \in \mathbb{R}$  que convergen en la métrica de Gromov–Hausdorff, entonces su límite es un espacio de Alexandrov con curvatura acotada inferiormente por  $k$ . Los espacios de Alexandrov incluyen espacios que no necesariamente son variedades, tales como los orbifolds Riemannianos. Para una buena introducción a este tema se sugiere leer [BBI01], [Pla02].

Aunque los espacios de Alexandrov no suelen tener una estructura tan regular como en el caso de las 3-variedades, en dimensión 3 se tiene que todo espacio de Alexandrov es una 3-variedad no orientable con un número par de planos proyectivos como componentes de frontera a la cual se le han pegado conos sobre el plano proyectivo (ver [GG14, Sección 1] y [Gal16]). Los vértices de estos conos son los puntos singulares del espacio y son los únicos puntos que tienen una vecindad homeomorfa al cono sobre el plano proyectivo, en particular todo 3-espacio de Alexandrov es homeomorfo a un orbifold de dimensión 3, no necesariamente orientable. Si notamos que el cono sobre la esfera es homeomorfo a la 3-bola, entonces podemos generalizar la suma conexa para 3-variedades al caso de espacios de Alexandrov de dimensión 3 como sigue.

**Definición 5.5.** *Sean  $X$  y  $Y$  3-espacios de Alexandrov cerrados y  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Por el Teorema de la Vecindad Cónica de Perelman [Per93], existen vecindades abiertas  $U_x, U_y$  de  $x$  y  $y$  respectivamente que son homeomorfas a una 3-bola o a un cono sobre el plano proyectivo. Si  $U_x \approx U_y$ , entonces definimos su **A-suma conexa** como sigue:*

$$X \#_A^{x,y} Y = ((X \setminus U_x) \sqcup (Y \setminus U_y)) /_{w \sim \varphi(w)} \quad (5.1)$$

donde

$$\varphi: \partial(X \setminus U_x) \rightarrow \partial(Y \setminus U_y)$$

es un homeomorfismo.

En este caso diremos que un 3-espacio de Alexandrov es *primo* si al expresarse como A-suma conexas de dos 3-espacios de Alexandrov  $X \#_A^{x,y} Y$  pasa que:

- Si  $x, y$  son no singulares, entonces  $X \approx \mathbb{S}^3$  o  $Y \approx \mathbb{S}^3$ .
- Si  $x, y$  son singulares, entonces  $X \approx \text{Susp}(\mathbb{R}P^2)$  o  $Y \approx \text{Susp}(\mathbb{R}P^2)$ .

Usando esta definición obtenemos el siguiente teorema de descomposición prima para espacios de Alexandrov de dimensión 3.

**Teorema 5.6.** *Todo 3-espacio de Alexandrov cerrado tiene una descomposición en factores primos.*

La prueba de este teorema utiliza un teorema de Haken (ver Proposición 1.7 de [Hat]) similar al Teorema 4.9. Este teorema, nos dice que solo puede existir una cantidad finita de subvariedades incompresibles (es decir, si  $F \subset M$  es una subvariedad, entonces la inclusión  $\iota: F \rightarrow M$  induce un monomorfismo de los grupos fundamentales) tal que entre ellas no exista una región producto.

Es posible generalizar la noción de irreducibilidad al caso de 3-espacios de Alexandrov (ver [GGN20]). Usando esta definición, demostramos en [Fra+22] que ser un espacio de Alexandrov primo no necesariamente implica ser irreducible, a diferencia del caso de 3-variedades (ver Lema 2.14) y similarmente al caso de 3-orbifolds (ver Apartado 4.5). Para ello se encontró una familia infinita de 3-espacios de Alexandrov primos y no irreducibles.

Queda aún por determinar si existe algún tipo de unicidad bajo la descomposición en factores primos dada en Teorema 5.6.



# A Grupos

## A.1. Definiciones básicas

**Definición A.1** (Acción de grupo). Una **acción de grupo** de un grupo  $G$  en un conjunto  $X$  es una función

$$\varphi: G \times X \rightarrow X$$

que satisface las siguientes dos condiciones:

- Para todo  $g, h \in G$  y todo  $x \in X$  se tiene que

$$\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x). \quad (\text{A.1})$$

- Para todo  $x \in X$  se cumple

$$\varphi(e, x) = x. \quad (\text{A.2})$$

En este caso, diremos que  $G$  **actúa** en  $X$ .

En general, omitiremos la función  $\varphi$  y escribiremos  $g \cdot x := \varphi(g, x)$ . Así, las condiciones (A.1),(A.2) quedarán escritas como

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad (\text{A.1}')$$

$$e \cdot x = x \quad (\text{A.2}')$$

Si definimos  $x \sim y$  si y sólo si existe  $g \in G$  tal que  $y = g \cdot x$ , entonces es fácil ver que ésta es una relación de equivalencia, a las clases de equivalencia

$$Gx := [x] = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

las llamamos **órbitas**.

Se puede ver también que el conjunto

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

es un subgrupo de  $G$ , lo llamaremos el **estabilizador** de  $x$  o también el **grupo de isotropía** de  $x$  en  $G$ .

**Definición A.2.** Sean  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto tal que  $G$  actúa en  $X$ . Decimos que la acción es:

- (a) **libre** si para todo  $g, h \in G$  tales que exista un  $x \in X$  que cumpla que  $g \cdot x = h \cdot x$ , entonces  $g = h$ ,
- (b) **transitiva** si para todo  $x, y \in X$  existe un  $g \in G$  tal que  $y = g \cdot x$ ,
- (c) **regular** si es libre y transitiva,
- (d) **efectiva** si para todo  $g \in G \setminus \{e\}$  existe un  $x \in X$  que cumple que  $g \cdot x \neq x$ .

**Definición A.3.** Sean  $X, Y$  conjuntos,  $H$  un grupo actuando en  $X$  y  $\varphi: X \rightarrow Y$  una función. Decimos que  $\varphi$  es  $H$ -invariante si para todo  $x \in X$  y todo  $h \in H$  se cumple que

$$\varphi(h \cdot x) = \varphi(x)$$

**Definición A.4** (Grupo topológico). Un **grupo topológico** es un conjunto  $G$  con dos estructuras:  $G$  es un grupo y  $G$  es un espacio topológico. Estas estructuras son compatibles en el sentido que las funciones:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto gh \\ G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son continuas.

Si  $G$  es compacto como espacio topológico, entonces diremos que  $G$  es un **grupo compacto**.

**Observación A.5.** Todo grupo finito es compacto con la topología discreta.

## A.2. Grupos de Lie

**Definición A.6.** Un **grupo de Lie** es un conjunto  $G$  con dos estructuras:  $G$  es un grupo y  $G$  es una variedad diferenciable. Ambas estructuras son compatibles en el sentido que las funciones:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto gh \\ G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son  $C^\infty$ .

**Definición A.7.** Sean  $G$  un grupo y  $M$  una variedad diferenciable tal que  $G$  actúa en  $M$ . Decimos que la acción es **suave** si la función:

$$\varphi: G \times M \rightarrow M, \quad \varphi(g, x) = g \cdot x$$

es  $C^\infty$ .

La siguiente proposición nos ayudará a probar que el cociente de una variedad bajo la acción de un grupo es un espacio Hausdorff. La prueba es sencilla y se puede consultar en el Lema 21.1 de [Lee12]

**Proposición A.8.** Para cualquier acción continua de un grupo de Lie  $G$  en una variedad diferenciable  $M$ , la función cociente  $\pi: M \rightarrow M/G$  es una función abierta.

### A.3. Acciones Propias

**Definición A.9.** Si  $G$  es un grupo de Lie y  $M$  una variedad diferenciable en la que actúa  $G$ , decimos que la acción es **propia** si la función

$$\begin{aligned}\psi: G \times M &\longrightarrow M \times M \\ (g, m) &\mapsto (m, g \cdot m)\end{aligned}$$

es propia, esto es para cada  $K \subset M \times M$  compacto,  $\psi^{-1}[K] \subset G \times M$  es compacto.

**Observación A.10.** Las acciones de grupos compactos siempre son propias.

Dada una variedad Riemanniana  $(M, g)$  y una  $H$ -acción, decimos que  $g$  es una **métrica  $H$ -invariante** si la función:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_h: (M, g) &\rightarrow (M, g) \\ m &\mapsto h \cdot m\end{aligned}$$

es una isometría par cada  $h \in H$ . Esto es,

$$g_x(v, w) = g_{\mathcal{A}_h(x)}((d\mathcal{A}_h)_x(v), (d\mathcal{A}_h)_x(w))$$

para cada  $x \in M$ ,  $h \in H$  y  $v, w \in T_x M$ . Obsérvese que si  $x \in M$ , entonces  $(d\mathcal{A}_h)_x: T_x M \rightarrow T_x M$  es una función lineal para cada  $h \in H$ . Más aún, esto induce una acción de grupo de  $H$  en  $T_x M$ , que podemos denotar como:  $h \cdot_{T_x M} v := (d\mathcal{A}_h)_x(v)$ .

**Proposición A.11.** Si  $(M, g)$  es una variedad Riemanniana y  $G$  un grupo finito tal que  $G \times M \rightarrow M$  sea una acción propia, entonces existe una métrica  $G$ -invariante en  $M$ .

*Demostración.* Definimos en  $M$  una nueva métrica como sigue: para  $m \in M$  y  $v, w \in T_m M$

$$\tilde{g}_m(v, w) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} g_m(h \cdot_{T_m M} v, h \cdot_{T_m M} w). \quad (\text{A.3})$$

Ésta es una métrica porque  $g$  lo es y, más aún, es  $G$ -invariante. Si  $x \in M$ ,  $\sigma \in H$  y  $v, w \in T_x M$ , entonces:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\sigma \cdot x}((d\mathcal{A}_\sigma)_x(v), (d\mathcal{A}_\sigma)_x(w)) &= \tilde{g}_{\sigma \cdot x}(\sigma \cdot_{T_x M} v, \sigma \cdot_{T_x M} w) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} g_x(h \cdot_{T_x M} \sigma \cdot_{T_x M} v, h \cdot_{T_x M} \sigma \cdot_{T_x M} w) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} g_x(h \cdot_{T_x M} v, h \cdot_{T_x M} w) \\ &= \tilde{g}_x(v, w).\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\tilde{g}$  es una métrica  $G$ -invariante. □

Las acciones propias son también cerradas como lo afirma la siguiente proposición:

**Proposición A.12.** *Si  $\psi: G \times M \rightarrow M \times M$  es una acción propia, entonces  $\psi$  es una función cerrada.*

*Demostración.* Recordemos que por la [Proposición 1.6](#)  $M$  es localmente compacta y por ende  $M \times M$  también lo es. Además,  $G$  y  $M$  son espacios Hausdorff, por ende  $G \times M$  es Hausdorff. Sea  $C \subset G \times M$  cerrado. Queremos ver que  $\psi[C] \subset M \times M$  también lo es. Esto es equivalente a que  $V := (M \times M) \setminus \psi[C]$  sea abierto. Así, sea  $y \in V$ . Como  $M \times M$  es localmente compacta, entonces existe  $V_y \subset M \times M$  abierto tal que  $\overline{V_y}$  es compacto. Luego,  $\psi^{-1}[\overline{V_y}] \subset G \times M$  es compacto, pues  $\psi$  es propia. Se sigue que  $C \cap \psi^{-1}[\overline{V_y}]$  también es compacto y por ende

$$\psi[C \cap \psi^{-1}[\overline{V_y}]] = \psi[C] \cap \overline{V_y} \subset M \times M$$

también lo es ( $\psi$  es continua). Dado que  $M \times M$  es Hausdorff, se sigue que  $\psi[C] \cap \overline{V_y}$  es cerrado en  $M \times M$ . Así, definimos:

$$U_y := (M \times M) \setminus (\psi[C] \cap \overline{V_y}) = (M \times M) \setminus \psi[C]$$

es un abierto en  $M \times M$  tal que  $y \in U_y$  y  $U_y \cap \psi[C] = \emptyset$ . Por lo tanto,  $V$  es abierto.  $\square$

# Referencias

- [AB15] Marcos M. Alexandrino y Renato G. Bettiol. *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer, 2015.
- [Ale24a] J. W. Alexander. «An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 10.1 (1924), págs. 8-10.  
DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.10.1.8>.
- [Ale24b] J. W. Alexander. «On the subdivision of 3-space by a polyhedron». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 10.1 (1924), págs. 6-8.  
DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.10.1.6>.
- [ALR07] Alejandro Adem, Johann Leida y Yongbin Ruan. *Orbifolds and Stringy Topology*. Vol. 171. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2007.
- [Arm88] M. A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1988.
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago y Sergei Ivanov. *A Course in Metric Geometry*. Vol. 33. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2001.
- [Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Vol. 139. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1993.
- [Car92] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, 1992.
- [Cas03] Carlos Prieto de Castro. *Topología básica*. Texto Científico Universitario. Fondo de Cultura Económica, 2003.
- [Dav] Michael W. Davis. *Lectures on orbifolds and reflection groups*. Accessed: 2021-12-23.  
URL: <https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/08-05-MRI-preprint.pdf>.
- [Dug66] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon series in advanced mathematics. Allyn and Bacon, 1966. ISBN: 9780205002719.



- [FM97] A. T. Fomenko y S. V. Matveev.  
*Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*.  
Mathematics and Its Applications. Springer, 1997.
- [Fra+22] Luis Atzin Franco Reyna, Fernando Galaz-García,  
José Carlos Gómez-Larrañaga, Luis Guijarro y Wolfgang Heil.  
«Decompositions of 3-Dimensional Alexandrov Spaces». 2022.  
En preparación.
- [Gal16] Fernando Galaz-García.  
«A glance at three-dimensional Alexandrov spaces».  
En: *Front. Math. China* 11.5 (2016), págs. 1189-1206. ISSN: 1673-3452.  
DOI: [10.1007/s11464-016-0582-3](https://doi.org/10.1007/s11464-016-0582-3).  
URL: <https://doi.org/10.1007/s11464-016-0582-3>.
- [GG14] Fernando Galaz-García y Luis Guijarro.  
«On Three-Dimensional Alexandrov Spaces». En: *International  
Mathematics Research Notices* 2015.14 (jun. de 2014), págs. 5560-5576.  
ISSN: 1073-7928. DOI: [10.1093/imrn/rnu101](https://doi.org/10.1093/imrn/rnu101).  
eprint: [https://academic.oup.com/imrn/article-  
pdf/2015/14/5560/2340103/rnu101.pdf](https://academic.oup.com/imrn/article-pdf/2015/14/5560/2340103/rnu101.pdf).  
URL: <https://doi.org/10.1093/imrn/rnu101>.
- [GGN20] Fernando Galaz-García, Luis Guijarro y Jesús Núñez-Zimbrón.  
«Sufficiently collapsed irreducible Alexandrov 3-spaces are geometric».  
En: *Indiana Univ. Math. J.* 69.3 (2020), págs. 977-1005. ISSN: 0022-2518.  
DOI: [10.1512/iumj.2020.69.7879](https://doi.org/10.1512/iumj.2020.69.7879).  
URL: <https://doi.org/10.1512/iumj.2020.69.7879>.
- [GP74] Victor Guillemin y Alan Pollack. *Differential Topology*. Vol. 370.  
AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society, 1974.
- [Gro69] Jonathan L. Gross. «A Unique Decomposition Theorem for 3-Manifolds  
with Connected Boundary». En: *Transactions of the American  
Mathematical Society* 142 (1969), págs. 191-199.  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1995352>.
- [Gro70] Jonathan L. Gross.  
«The decomposition of 3-manifolds with several boundary components».  
En: *Transactions of the American Mathematical Society* 147.2 (1970),  
págs. 561-572. DOI: <https://doi.org/10.2307/1995211>.
- [Hat] Allen Hatcher. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*.  
Accessed: 2021-12-23.  
URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf>.
- [Hel78] Sigurdur Helgason.  
*Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Vol. 80.  
Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1978.
- [Hir76] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Vol. 33.  
Graduate Studies in Mathematics. Springer, 1976.

- [Joh63] Michel A. Kervaire y John W. Milnor.  
«Groups of Homotopy Spheres: I».  
En: *Annals of Mathematics* 77.3 (1963), págs. 504-537.  
DOI: <https://doi.org/10.2307/1970128>.
- [Jr21] Francisco C. Caramello Jr. *Introduction to orbifolds*. 2021.  
arXiv: [1909.08699](https://arxiv.org/abs/1909.08699) [[math.DG](https://arxiv.org/abs/1909.08699)].
- [Kne29] Hellmuth Kneser.  
«Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.»  
En: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 38 (1929),  
págs. 248-259. URL: <http://eudml.org/doc/145838>.
- [Kos92] Antoni Kosinski. *Differential Manifolds*. Vol. 138.  
Pure and Applied Mathematics. Elsevier, 1992.
- [Kur56] A. G. Kurosh. *Theory of Groups, Volume 2*. Vol. 109.  
AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society, 1956.
- [Lac] Marc Lackenby. *Incompressible Surfaces*. Accessed: 2022-06-22.  
URL: <https://homepages.warwick.ac.uk/~masgar/Articles/Lackenby/thrmans3.pdf>.
- [Lee09] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry*. Vol. 107.  
Graduate Studies in Mathematics.  
American Mathematical Society, 2009.
- [Lee11] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Vol. 202.  
Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2011.
- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Vol. 218.  
Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.
- [Lee18] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Vol. 176.  
Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2018.
- [Mat07] Sergei Matveev. *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*.  
Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, 2007.
- [Mil62] J. Milnor. «A unique decomposition theorem for 3-manifolds».  
En: *American Journal of Mathematics* 84.1 (1962), págs. 1-7.  
DOI: <https://doi.org/10.2307/2372800>.
- [MP97] I. Moerdijk y D. A. Pronk. «Orbifolds, sheaves and groupoids».  
En: *K-Theory* 12.1 (1997), págs. 3-21. ISSN: 09203036.
- [MT07] John Morgan y Gang Tian. *Ricci flow and the Poincaré conjecture*.  
Vol. 3. Clay Mathematics Monographs. American Mathematical Society,  
Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007,  
págs. xlii+521. ISBN: 978-0-8218-4328-4.  
DOI: [10.1305/ndjfl/1193667709](https://doi.org/10.1305/ndjfl/1193667709).  
URL: <https://doi.org/10.1305/ndjfl/1193667709>.

- [Per93] G. Ya. Perelman. «Elements of Morse theory on Aleksandrov spaces». En: *St. Petersburg Math. J.* 5 (1 1993), págs. 232-241.
- [Pet07] Carlo Petronio. «Spherical splitting of 3-orbifolds». En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 142.2 (2007), págs. 269-287. DOI: [10.1017/S0305004106009807](https://doi.org/10.1017/S0305004106009807).
- [Pla02] Conrad Plaut. «Metric spaces of curvature  $\geq k$ ». En: *Handbook of geometric topology*. North-Holland, Amsterdam, 2002, págs. 819-898.
- [Prz79] Józef H. Przytycki. «A unique decomposition theorem for 3-manifolds with boundary». En: *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics* 27.2 (1979), págs. 209-215.
- [Rot95] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Vol. 148. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [Sat56] I. Satake. «On a Generalization of the Notion of Manifold». En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 42.6 (1956), págs. 359-363. ISSN: 00278424. URL: <http://www.jstor.org/stable/89787>.
- [Sch14] Jennifer Schultens. *Introduction to 3-Manifolds*. Vol. 151. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2014.
- [Sco83] Peter Scott. «The Geometries of 3-Manifolds». En: *Bulletin of the London Mathematical Society* 15.5 (1983), págs. 401-487. DOI: <https://doi.org/10.1112/blms/15.5.401>.
- [Sil08] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Vol. 1764. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2008.
- [Ste44] N. E. Steenrod. «The Classification of Sphere Bundles». En: *Annals of Mathematics* 45.2 (1944), págs. 294-311. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1969267> (visitado 21-06-2022).
- [Thu] William P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Accessed: 2021-12-23. URL: <http://library.msri.org/books/gt3m/PDF/Thurston-gt3m.pdf>.
- [Whi40] J. H. C. Whitehead. «On C1-Complexes». En: *Annals of Mathematics* 41.4 (1940), págs. 809-824. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1968861> (visitado 16-06-2022).