



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“TEORÍAS DE COLAPSO Y SU EXTENSIÓN AL CONTEXTO GRAVITACIONAL”

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

TONATIUH MIRAMONTES PÉREZ

TUTOR PRINCIPAL:

DR. DANIEL E. SUDARSKY SAIONZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR:

DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR:

DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO DE 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estructura de esta Tesis . . . . .	7
<b>2. Antecedentes</b>	<b>9</b>
2.1. El problema de la medición . . . . .	10
2.1.1. La propuesta de Ghirardi, Rimini y Weber (GRW) . . . . .	12
2.1.2. Localización Espontánea Continua (CSL) . . . . .	14
2.1.3. Comentarios respecto a la viabilidad de las teorías de Colapso . . . . .	15
2.2. Gravedad semiclásica . . . . .	16
2.2.1. La Renormalización del Tensor de Energía-Momento . . . . .	18
<b>3. Gravedad Semiclásica con Colapso</b>	<b>25</b>
3.1. Definición del modelo . . . . .	26
3.1.1. Criterio de Regularidad . . . . .	28
3.2. Formulación de valores iniciales . . . . .	29
3.2.1. Modelo de escalares semiclásicos . . . . .	32
3.2.2. Datos Iniciales para gravedad semiclásica . . . . .	39
3.2.3. Configuraciones semiclásicas a partir de datos iniciales . . . . .	46
3.3. Discontinuidades debidas al colapso . . . . .	50
3.4. Implementación de teorías de colapso en el modelo de gravedad semiclásica	58
<b>4. Conclusiones y preguntas abiertas</b>	<b>59</b>
<b>A. Forma cuasilineal hiperbólica de las ecuaciones de Einstein</b>	<b>63</b>
A.1. Caso sin materia (vacío) . . . . .	63
A.2. Caso con materia. . . . .	65
<b>B. Renormalización del TEM: Ambigüedades.</b>	<b>69</b>
<b>C. Valores iniciales y funciones de Green</b>	<b>73</b>

<b>D. Desarrollo en serie de la solución de Hadamard.</b>	<b>77</b>
<b>E. Expansión de Hadamard, acoplamiento débil</b>	<b>79</b>
<b>F. Formalismo 3+1</b>	<b>83</b>
F.1. Foliaciones del espaciotiempo . . . . .	83
F.2. La descomposición tensorial 3 + 1 completa . . . . .	84
F.3. Operaciones sobre índices en el formalismo 3 + 1 . . . . .	88
F.4. Operaciones con derivadas . . . . .	92
F.5. Tensor de Riemann . . . . .	97
F.6. Derivada de Lie . . . . .	107
F.7. Formulación 3 + 1 y Relatividad General . . . . .	109
F.7.1. Modelo cosmológico isótropo y homogéneo. . . . .	110
F.7.2. Escalar de Klein-Gordon . . . . .	111
<b>G. La distancia geodésica y expansiones en <math>\Sigma</math></b>	<b>113</b>
G.1. La semidistancia geodésica al cuadrado . . . . .	113
G.2. Expansión 3 + 1 de $[\sigma_{a_k \dots a_0}]$ . . . . .	117
G.3. Aproximación de hipersuperficie para $\sigma$ . . . . .	122
G.4. Expansiones de hipersuperficie para las derivadas normales de $\sigma$ . . . . .	126
<b>H. Discontinuidades y formalismo 3 + 1.</b>	<b>129</b>

# Agradecimientos

- ★ Quiero agradecer especialmente a mis padres por todo el apoyo y amor que me han brindado y la paciencia que han tenido durante toda mi carrera.
- ★ A mis amigas y amigos, que me han acompañado a lo largo de toda mi carrera, que me han apoyado e incentivado a seguir adelante, y en gran medida me han proporcionado muchos motivos para sonreír. Es un gran honor que me consideren su amigo.
- ★ A mi asesor, Daniel Sudarsky, por todo su apoyo y las lecciones que me ha brindado, mucho más allá de lo meramente académico, así como por la calidez del trato que ha tenido conmigo y que en general guarda con todos los que colaboramos e interactuamos con él.
- ★ A los miembros de mi Comité Tutor, Marcelo Salgado y Pablo Barberis, quienes me han brindado comentarios y retroalimentación importantes.
- ★ A todos mis maestros, desde el nivel básico hasta el posgrado, porque de todos ellos aprendí, ya que afortunadamente considero que casi todos fueron buenos maestros, pero hasta de los que no lo fueron, a final de cuentas terminé aprendiendo algo.
- ★ Al *Doctor* Rafael Mendoza Cano y su escuela, donde me proporcionó las primeras bases para mi carrera.
- ★ A las instituciones públicas, el CECyT 9 y la ESFM del IPN, así como a la UNAM y el ICN que además de proporcionarme una excelente formación académica, de competencia internacional, fueron mi casa de estudios por muchos años, allí ha transcurrido mucho de mi vida y he conocido y convivido con muchas de las personas que más me importan. Todo esto no sería posible si no fuera por la gratuidad de la educación pública que ofrece el estado Mexicano y sus apoyos.
- ★ Agradezco al CONACYT por la beca que me brindó durante el posgrado.



# Capítulo 1

## Introducción

A menudo se piensa en la ciencia únicamente como una herramienta que arroja un cuerpo de reglas y conocimientos técnicos útiles para la sociedad, a través de su implementación en forma de bienes tecnológicos. Con esta perspectiva se llega a perder de vista que la ciencia no sólo es un método de construcción del conocimiento, sino que también coadyuva a entender el mundo: permite construir una cosmovisión. Esto resulta esencial para los seres humanos ya que somos seres conscientes de nosotros mismos y de nuestro entorno, lo que nos obliga a crear una imagen o modelo mental de la realidad, de donde parten el resto de nuestros pensamientos y acciones. Por ello, resulta fundamental, tanto para los individuos como para las sociedades humanas, entender qué es eso que llamamos realidad.

Más allá de su importancia social, la imagen que hacemos de la realidad es justamente aquello que guía la construcción de las hipótesis que dan lugar a teorías científicas. Sin embargo, no es raro que cuando un área del conocimiento alcanza un alto grado de tecnificación, se entienda la propia confección de teorías como una labor meramente lógico-matemática, llevándonos “de un punto A hacia un punto B”, parafraseando a Einstein, olvidándonos de por qué empezamos en “A”, o incluso del significado de “A”. Esta tendencia se ve favorecida por la presión que implica la demanda cada vez más exigente de obtener resultados para aplicaciones concretas en la sociedad que en última instancia sostiene la investigación científica, y que es cada vez más dependiente de la tecnología.

El resultado de estos factores dentro de la física teórica puede ejemplificarse en la alta prevalencia del “cállate y calcula”[1][2] entre quienes estudian la teoría cuántica. Ciertamente, esta *doctrina* ha permitido grandes avances en la confección y perfeccionamiento de teorías tan exitosas como el Modelo Estándar de Física de Partículas, una Teoría Cuántica de Campos que puede considerarse, junto a la Teoría de la Relatividad General de Einstein, como uno de los modelos físicos más exitosas que hemos construido hasta la fecha. Los cimientos de esta teoría son justamente la Relatividad Especial de Einstein y la propia Mecánica Cuántica, teorías que en su momento representaron una drástica ruptura con el paradigma de la mecánica Newtoniana, extremadamente exitosa durante más de 100 años.



Lo que esas teorías requirieron para formularse fue mucho más que un ejercicio de cálculo: implicaron dar un paso atrás para revisar las nociones fundamentales sobre las que yacía la mecánica newtoniana, como la noción absoluta de espacio, independiente del tiempo, en el caso de la Relatividad Especial, y de la propia conceptualización de la mecánica como un conjunto de reglas exactas que con total certidumbre describían el movimiento de los *objetos*, en el caso de la Mecánica Cuántica.

En el caso de la Relatividad Especial se propuso un nuevo marco conceptual en el cual formular la mecánica, destacando la introducción del espaciotiempo para reemplazar al espacio absoluto newtoniano, así como las Transformaciones de Lorentz, que están dotadas de un significado claro que conecta rápidamente con las nociones clásicas de posición y velocidad, reemplazando a las transformaciones de Galileo. Esto no quiere decir que todos los problemas fundamentales de la mecánica quedaran resueltos en la Relatividad Especial, ya que los cuestionamientos filosóficos sobre la naturaleza del espacio(tiempo) permanecieron sin cambiar radicalmente incluso ya en el marco de la Teoría de la Relatividad General de Einstein, donde fue necesario nuevamente, cuestionar los supuestos sobre el propio espaciotiempo.

Pero la Mecánica Cuántica se enfrentó a un problema conceptualmente mucho más complicado. Abandonar el paradigma tradicional de la mecánica misma obligó a introducir nociones radicalmente nuevas para dotar de significado a las reglas que se iban encontrando conforme se construía la teoría, siguiendo un camino estrechamente acoplado a los resultados de aquellos experimentos que habían motivado el nacimiento de la cuántica. Una fórmula creada inicialmente para describir un medio electromagnético, la Ecuación de Schrödinger [3], tuvo que ser reinterpretada para describir, de manera indirecta, las probabilidades de obtener cierto resultado en un experimento dado [4]. Esta visión *instrumental* o meramente *epistémica* permitió avanzar muchísimo en la construcción formal de la teoría, ya que no parecía necesario sustituir una noción de mundo con otra en concreto, bastaba establecer que el mundo no era como creíamos, ya que [5]

*Lo que observamos no es la naturaleza misma, sino la naturaleza expuesta a nuestro método de cuestionarla.*

(W. Heisenberg.)

Como resultado de esta visión, se volvió imprescindible el papel del experimento, de la *observación* como elemento entendido *a priori* para dotar de significado a la Mecánica Cuántica. Aunque la *función* (o vector) *de estado* parecieran tener un papel central en el formalismo, los verdaderos protagonistas de la teoría serían los resultados de las mediciones de los *observables*. El intrincado constructo conceptual que a menudo es llamado *interpretación de Copenhague* consta de predicados sobre justamente esos objetos básicos de la teoría, que no son las *partículas* que conformarían un sistema físico clásico, sino las observaciones que se hacen sobre ellas, rechazando la posibilidad de que exista una descripción *más fundamental* sobre dicho sistema.

No es de extrañar que la visión sostenida por buena parte de los padres fundadores de la Mecánica Cuántica se convirtiera en la *interpretación estándar* de la teoría, a pesar de dejar a más de uno insatisfecho. Más aún, esta visión fue aprovechada por los partidarios del *cállate y calcula*, pues les permitió argumentar que es innecesario buscar explicaciones más fundamentales a la teoría *para cualquier fin práctico*. Afortunadamente, a pesar del pragmatismo imperante, no faltaron quienes propusieran interpretaciones alternativas, como en el caso de la Mecánica de Bohm [6], inspirada en la teoría de Onda Piloto de De Broglie, o la interpretación de Muchos Mundos atribuida a Everett [7]. Sin embargo, más que la *interpretación* de la mecánica cuántica, a los físicos teóricos les ha resultado mucho más inquietante un problema llamado *Gravedad Cuántica*.

La teoría de la Relatividad General de Einstein permitió entender la gravedad como una manifestación de la *curvatura* del espaciotiempo, el cual pasaría a ser dinámico y no sólo una estructura fija como lo era en la Teoría de la Relatividad Especial. La relatividad general goza de un éxito innegable al haber predicho fenómenos como las lentes gravitacionales, la expansión del universo, los agujeros negros y las ondas gravitacionales, todos fenómenos de los cuales actualmente contamos con evidencia experimental contundente. Pero con todo lo exitosa y revolucionaria que es esta descripción de la gravitación, sigue siendo una teoría *clásica*, por lo que se plantea bajo una concepción ajena al paradigma de la Teoría Cuántica. Y sin embargo, construimos ambas teorías tratando de describir al mismo mundo.

El primer paso en la construcción de un posible puente entre tan disímiles aproximaciones a la realidad ha sido la Teoría Cuántica de Campos. Ésta comprende el resultado natural de incorporar los principios de la Relatividad Especial en una Teoría Cuántica, describiendo en consecuencia, campos relativistas y las interacciones entre ellos. Estas últimas aparecen como términos no lineales en las ecuaciones dinámicas del campo, que engendran *infinitos*, cuyo origen puede rastrearse hasta su representación formal como productos de distribuciones, objetos matemáticamente mal definidos. Una variedad de *trucos* permite obtener cantidades finitas, candidatas a representar propiedades físicas, a partir de estos infinitos. A este procedimiento se le denomina *renormalizar*.

La *cuantización* de la Gravedad comprende uno de los objetivos más codiciados de la física desde poco después de la formulación de la Relatividad General, ya que en 1916 el propio Einstein [8] predijo que la teoría cuántica tendría que modificar la teoría de la Relatividad General de una manera análoga a cómo había modificado el electromagnetismo. Siendo estrictos, la teoría de la relatividad general de Einstein describe un campo tensorial, la métrica, acoplado consigo mismo (y con la materia) de manera altamente no lineal. Aún así, no hay nada que en principio impidiera aplicar las técnicas que habían resultado tan exitosas en Teoría Cuántica de Campos. Desafortunadamente, y a pesar del enorme esfuerzo que se ha dedicado a este objetivo, la relatividad general no ha podido ser renormalizada; ni siquiera sus perturbaciones lineales.

Ante este *impasse*, no pocas sugerencias de solución se han propuesto, desde reformular la teoría completa de una manera más *amigable* con los esquemas de cuantización canónica, hasta proponer un esquema que va más allá de la teoría de campos para describir los objetos

fundamentales del universo mediante *cuerdas*, que en mundos de mayor dimensionalidad, parecerían poder describir exitosamente algo parecido a las perturbaciones del campo gravitacional. Aún así, estas propuestas se encuentran todavía en proceso de construcción, y sus resultados no permiten recuperar con toda generalidad la teoría de la gravitación de Einstein en algún límite. Las dificultades más importantes en estos programas suelen considerarse de tipo *técnico*.

Sin embargo, aunque es claro que existen problemas técnicos formidables en la cuantización de la gravedad, vale la pena cuestionarse si no se ha alcanzado, en cierta forma, un límite para la doctrina del “cállate y calcula”. Esta permite avanzar en el desarrollo del formalismo de las teorías, pero eventualmente, los aspectos conceptuales que se dejan de lado terminan saliendo a flote conforme se empujan sus límites. Se vuelve entonces imprescindible cuestionar si tiene sentido el objetivo que se busca: ¿Qué significado tendría un espaciotiempo cuántico? ¿Es la métrica, descrita por las ecuaciones de Einstein, un campo de la misma naturaleza que los campos cuantizados hasta ahora? ¿Qué pasaría si estas ecuaciones describieran únicamente el comportamiento emergente de una teoría verdaderamente fundamental del espaciotiempo?

En el formalismo de la Teoría Cuántica de Campos, una vez que se generaliza para Espaciotiempos Curvos (fijos), se obtienen resultados como la Radiación de Hawking: los agujeros negros *provocan* radiación con el espectro característico de un cuerpo negro. La radiación de Hawking sugiere dotar de una interpretación física a los resultados sospechosamente análogos que surgen de un análisis meramente clásico de espaciotiempos con agujeros negros: Es posible definir una Termodinámica de Agujeros Negros, en la que la masa  $M$  del agujero negro juega un papel análogo al de la energía, la gravedad superficial en el horizonte de eventos se relaciona con su temperatura, y se liga la entropía con el área del mismo horizonte.

A pesar de su elegancia formal, la Termodinámica de Agujeros Negros tiene diversos aspectos conceptuales que quedan pendientes de aclaración. Por ejemplo, el resultado de la radiación de Hawking se obtiene de analizar el estado de un campo cuántico sobre un espaciotiempo de fondo (fijo), mientras que los resultados clásicos de la Termodinámica de Agujeros Negros describen propiedades mecánicas del espaciotiempo en sí, sin entrar en detalles sobre la naturaleza de los campos de materia. ¿Cómo podemos justificar la identificación de estos resultados, procedentes de análisis conceptualmente tan diferentes? Además, si entendemos la termodinámica como una suerte de *resumen* del comportamiento estadístico de un sistema de muchos elementos sobre los que son válidos ciertos *primeros principios*, ¿cuáles serían los elementos cuya configuración se describe estadísticamente como la temperatura y entropía de un agujero negro? ¿cuáles serían dichos *primeros principios*?

Es muy probable que el entendimiento sobre la entropía de agujeros negros sólo sea totalmente claro una vez que se comprenda qué ocurre en un agujero negro en términos de una teoría cuántica de gravedad. Ante esta situación vale la pena preguntarse si es posible recurrir a un tratamiento semiclassical aproximado para describir la interacción entre materia cuántica y el espaciotiempo.

Los problemas de una teoría semiclásica de gravedad se hacen patentes cuando se toman en serio los principios de la mecánica cuántica. Por ejemplo, si se permite que el espaciotiempo *reaccione* a la radiación de Hawking, es de esperarse que la *masa* que un observador en infinito atribuiría al agujero negro disminuya conforme la radiación de Hawking se propaga hacia el infinito. En este caso esperaríamos que el horizonte de eventos del agujero negro se *reduzca*, es decir, que el agujero negro se *evapore* como consecuencia de esta radiación. El agujero negro continuaría reduciéndose hasta que el radio de su horizonte llegue a la escala de Planck, momento en el cual es razonable desconfiar de este esquema semiclásico. Si en verdad el espaciotiempo mismo posee una naturaleza fundamentalmente cuántica, podemos presumir que una teoría cuántica de la gravedad sería la más indicada para describir lo que ocurre en esa región del espaciotiempo. Lo preocupante entonces es que en este proceso, se parte de un estado cuántico inicialmente *puro* que evoluciona a un estado *térmico*, es decir, ocurre una evolución entre estados unitariamente inequivalentes, contrario a lo que demanda el formalismo cuántico estándar.

En una teoría cuántica de gravedad, se podría pensar que el estado completo que codifica en conjunto espaciotiempo y materia permanece puro, pero esto no es claro en general, ya que en ciertos acercamientos a la gravedad cuántica, como aquellos que consideran la existencia de un *remanente* tras la evaporación de un agujero negro, esto no ocurre, como se puede ver en recuentos como [9],[10]. Este problema, denominado a veces *paradoja* de la pérdida de *información* en la evaporación de un agujero negro, obliga a dar un paso atrás y reflexionar sobre los conceptos que nos condujeron a esta aparente contradicción.

En el análisis del origen de estructura en el modelo cosmológico inflacionario, las preguntas conceptuales juegan un papel tan o más importante que los propios resultados de los cálculos. En este modelo, se propone que un campo escalar llamado *inflatón* era el tipo de materia predominante durante las etapas más tempranas del universo. Si este campo cumple con ciertas propiedades, es capaz de originar una rápida expansión del espaciotiempo, efecto denominado *inflación*. Esto permite justificar *naturalmente* varios supuestos de la cosmología estándar: que el universo sea isótropo y homogéneo a gran escala, y que éste sea *plano* o de curvatura muy pequeña aún en nuestros días. El modelo inflacionario resulta ser tan efectivo para estos fines, que hace muy improbable la generación de la estructura que observamos en nuestro universo, únicamente partiendo de inhomogeneidades primigenias *clásicas*. Una posible solución es atribuir estas inhomogeneidades a las fluctuaciones cuánticas del propio campo del inflatón. Cálculos directos parecieron favorecer este modelo, por ejemplo [11], puesto que se obtiene algo *compatible* con la distribución inicial esperada para reproducir el espectro de potencias de la radiación de fondo de microondas. El problema con esta propuesta para el origen de estructura a partir del modelo inflacionario, además de que predice ondas gravitacionales que no han sido detectadas, es que recurre a una interpretación inconsistente de la mecánica cuántica [12].

Al respecto, John S. Bell se pronunció en [13], ironizando sobre la necesidad de la interpretación estándar de contar con observadores que realicen mediciones para materializar las predicciones de la mecánica cuántica. En el relato sobre el origen cuántico de estructura

resulta necesario considerar que el universo permaneció en una superposición de configuraciones que en conjunto conformaban un estado perfectamente isotrópico y homogéneo, hasta el momento en que fue *observado* para dar origen al universo con inhomogeneidades que conocemos. El aspecto paradójico es que la existencia de dichas inhomogeneidades es un prerrequisito para el surgimiento de galaxias, sistemas solares y planetas que sustenten a los posibles observadores que, de acuerdo al tratamiento estándar, serían capaces de realizar las mediciones correspondientes.

Esta paradoja sobre el origen de estructura hace muy clara la necesidad de entender los límites de la interpretación estándar de la Mecánica Cuántica, así como del significado de los conceptos que *para fines prácticos* parecen equivalentes, como el concepto de fluctuación estadística y fluctuación cuántica.

En este trabajo adoptaremos la Tesis de que muchos problemas concretos para nuestras teorías físicas, están estrechamente relacionados con los problemas fundamentales de la mecánica cuántica, en particular con el problema de la medición, como se plantea, por ejemplo, en [14] a partir de ideas de Diósi [15] y Penrose [16].

A falta de una teoría cuántica de la gravedad<sup>1</sup> lo suficientemente desarrollada para abordar estos problemas al día de hoy, optamos por un acercamiento más conservador. Aún sin conocer cómo podría ser semejante teoría cuántica de la gravedad, esperamos que exista algún límite de correspondencia con la teoría de la relatividad general de Einstein<sup>2</sup>. En ese contexto, es razonable esperar que lejos del régimen de curvaturas del orden de la distancia de Planck, una descripción del espaciotiempo en términos de una métrica suave sea válida, al menos aproximadamente. Propondremos que esto continúa siendo cierto aún sí los campos de materia exhiben propiedades típicamente identificadas con sistemas cuánticos.

Nuestra propuesta comprende un esquema semiclásico donde el espaciotiempo se considera totalmente *clásico*, descrito por una métrica Lorentziana que vive en una variedad de dimensión cuatro, mientras que se trata a los campos de materia como campos cuánticos construidos sobre dicho espaciotiempo, con la condición fundamental de ser una construcción auto consistente. Esto quiere decir que el campo debe encontrarse en un estado particular  $\psi$  y la métrica debe ser tal que en conjunto se satisfaga la ecuación semiclásica de Einstein,

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N \langle \psi | \hat{T}_{ab} | \psi \rangle. \quad (1.1)$$

El objetivo general del presente trabajo será estudiar la posibilidad de formular de manera rigurosa este modelo semiclásico, conservando una consistencia conceptual sobre la que no apliquen algunas de las objeciones que se han esgrimido contra este tipo de acercamientos a la interacción entre gravedad y materia cuántica. Al respecto, Eppley y Hannah [17] han argumentado que una teoría de este tipo podría emplearse para violar el principio de incertidumbre, así como involucrar potenciales violaciones a la conservación de la

<sup>1</sup>Destacamos que nuestra perspectiva ante las teorías cuánticas de Gravedad es totalmente agnóstica.

<sup>2</sup>En principio podríamos considerar teorías de gravedad modificadas, como aquellas con Torsión o bien teorías tipo  $f(R)$ . Pero en este trabajo nos restringimos a la versión más sencilla de gravedad semiclásica. Por lo tanto, no descartamos estudiar en el futuro modelos con otras teorías de gravedad.

energía como parte de los posibles efectos del colapso cuántico del sector de materia. Esta última posibilidad ha sido considerada por Page y Geilker [18] como una propiedad físicamente inadmisibles para una teoría semiclásica de gravedad, además de ser formalmente inconsistente. Ante semejante determinación han inferido que la única opción para la gravedad semiclásica sería recurrir a una interpretación de *muchos mundos* tipo Everett [7], en cuyo caso ellos mismos procedieron a realizar un experimento en el que se prepara un *gato de Schrödinger gravitacional* para mostrar que desde esa interpretación, la teoría es inconsistente con las observaciones. Esta cadena de razonamientos y observaciones les llevó a concluir que un tratamiento semiclásico de la gravedad es simplemente inviable, y que en consecuencia, todo efecto de interacción entre materia cuántica y el espaciotiempo debe entenderse en el contexto de una teoría cuántica de la gravedad.

Por lo tanto, nuestra propuesta constituye también una forma de responder a estas objeciones, pues consideramos, se han adelantado conclusiones demasiado fuertes. Para ello, recurriremos a un cambio de perspectiva, que empieza por considerar a la propia teoría semiclásica como un modelo únicamente aproximado o *efectivo*<sup>3</sup> (no como teoría fundamental) que ha de recuperar en un límite razonable a la propia teoría clásica de la relatividad general de Einstein, pero que logra abarcar algunos casos de interés donde materia cuántica interactúa con un espaciotiempo que conserva su descripción métrica *clásica*. Así mismo, adoptaremos la perspectiva de las teorías de colapso en Mecánica Cuántica, incrustando nuestro modelo en un marco conceptual consistente en el que además de poder rescatar la propuesta semiclásica como modelo efectivo, es posible solucionar de manera bastante minimalista problemas como la pérdida de información en agujeros negros [19][20][21], el origen de estructura sin contradicciones interpretativas [22][23][24], explicando también el por qué no observamos ondas gravitacionales de origen inflacionario [25], e incluso indagar sobre la posible naturaleza de la *energía oscura* [26], así como invitar a reflexionar sobre la necesidad de mantener principios tales como la *conservación de la energía* como pilares inamovibles de nuestra concepción del mundo [27].

## 1.1. Estructura de esta Tesis

El cuerpo principal de este trabajo se encuentra dividido en tres capítulos, siendo el presente capítulo de introducción el primero de ellos. En el capítulo 2 revisaremos los antecedentes pertinentes sobre el modelo de gravedad semiclásica que vamos a proponer. En la sección 2.1 abordamos el problema de la medición y las propuestas de solución más populares actualmente, y enunciaremos brevemente en qué consisten las teorías de colapso cuántico más paradigmáticas: la propuesta de colapsos *discretos* a menudo referida como *GRW*, y la propuesta de localización espontánea y continua (*CSL*). En la sección 2.2 presentamos el modelo de gravedad semiclásica que consideraremos como punto de partida para nuestra propuesta, así como las críticas que pesan sobre éste.

---

<sup>3</sup>Como un límite particular de alguna teoría cuántica de la gravedad, por ejemplo.

En el capítulo 3 introducimos el esquema propuesto para modelar el colapso cuántico en el contexto de gravedad semiclásica y abordamos los principales problemas que requieren solución dentro de este formalismo. En la sección 3.2 estudiamos el problema de valores iniciales para gravedad semiclásica y presentamos una propuesta para recuperar una construcción semiclásica auto consistente a partir de datos iniciales apropiados sobre una hipersuperficie. En la sección 3.3 abordamos el problema del acoplamiento de dos construcciones semiclásicas auto consistentes para modelar el colapso cuántico dentro de gravedad semiclásica, y su relación con las potenciales violaciones a la conservación de la energía como consecuencia del colapso.

Finalmente, en el capítulo 4 enunciamos algunas de las preguntas que quedan abiertas respecto a nuestra propuesta de gravedad semiclásica con colapso.

El texto se ha organizado de manera que la lectura del cuerpo principal sea lo más fluida posible, por lo que los desarrollos de la mayoría de los resultados se han incorporado como apéndices.

## Capítulo 2

# Antecedentes

Desde antes de que se consolidara la formulación relativista de la Teoría Cuántica de Campos, un posible problema entre la relatividad y la Mecánica Cuántica *estándar* fue señalado por Borís Podolski, Nathan Rosen y Albert Einstein en 1935 [28], al mostrar que podría existir una *violación de causalidad* llevando a cabo experimentos con sistemas *entrelazados*. El señalamiento de Einstein, Podolski y Rosen estaba encaminado hacia la posibilidad de que la formulación estándar estuviera incompleta, y que ese tipo de inconsistencias pudieran resolverse agregando variables que no están en la formulación estándar de la mecánica cuántica. Rápidamente se entendió que la infame *Fantasmagórica Acción a Distancia* no implicaba en realidad ninguna violación de causalidad, ya que no podía ser usada para transmitir información entre observadores causalmente desconectados, pues dentro de la interpretación estándar estos observadores sólo podrían verificar el efecto a través de comunicaciones causales. Aún así, en este artículo se manifiesta una incomodidad *intuitiva* respecto a una posible incompatibilidad entre la teoría cuántica y los principios de la relatividad general. Posteriormente, el célebre Teorema de Bell [29] concluiría que *una teoría cuántica con variables ocultas es necesariamente incompatible con la localidad*. Numerosas discusiones, comprobaciones y revisiones del Teorema de Bell se llevaron a cabo, pero al final el resultado no sólo se sostuvo, sino que resultó ser mucho más fuerte: *ninguna teoría que reproduzca las predicciones de la mecánica cuántica puede ser local* [30].

Pero la no-localidad implicada en el teorema de Bell no significa necesariamente que ocurrirán violaciones de causalidad. Sólo quiere decir que hay elementos en la teoría que no pueden ser descritos como variables locales. Esto no implica que puedan utilizarse dichos elementos para realizar *comunicación* superlumínica, pero sí obliga a establecer claramente qué papel pueden jugar cada uno de los elementos de la teoría. En otras palabras, se vuelve ineludible contar con una interpretación clara y consistente de la mecánica cuántica, sobre todo si pretendemos con ella dar cuenta del mundo fuera del laboratorio. En particular, es necesario definir qué entendemos exactamente por *medir* en mecánica cuántica.



## 2.1. El problema de la medición

El término *medición* aparece muy pronto en todas las formulaciones de la mecánica cuántica, como por ejemplo la de von Neumann [31]; en ninguna formulación puede faltar una referencia explícita o implícita a los resultados de mediciones realizadas sobre los sistemas físicos. Por lo general esto ocurre a la hora de definir la relación entre operadores y cantidades físicas en términos de *observables* (cantidades cuyo valor se puede *determinar* mediante una *medición*) o de los propios *valores de expectación* (en la práctica identificados con un promedio de mediciones), así como al introducir la regla de Born como prescripción para la *probabilidad* de obtener un resultado dado ante la *medición* de un observable, y más dramáticamente cuando se introduce un postulado de *colapso* en el que se describe el efecto de la medición de un observable sobre el propio sistema. Sin embargo, el significado mismo de realizar una medición casi siempre se asume como sobreentendido. Un problema surge entonces si se considera que la mecánica cuántica representa un modelo fundamental de la naturaleza, pues los procesos que se llevan a cabo en un laboratorio, incluyendo las propias mediciones, deberían poder describirse en términos cuánticos. Partiendo de este supuesto, el problema de la medición consiste en especificar, dentro de la teoría cuántica, de manera precisa y no tautológica, lo que en una formulación dada se refiere como *medición*, y cómo ésta se hace consistente con la propia formulación en cuestión.

Al respecto, el filósofo de la ciencia Tim Maudlin estableció en [32] que cualquier solución al problema de la medición debe cumplir con tres condiciones:

1. Resolver *el problema de los resultados*, es decir, explicar por qué, en nuestra experiencia, al realizar el proceso físico de la medición de un sistema cuántico utilizando otro sistema cuántico al que denominamos *aparato*, éste último siempre termina en un resultado definido, mientras que de acuerdo a la mecánica cuántica, lo que ocurre en este proceso es un enredamiento del aparato con el sistema que se *mide*, generando una superposición del conjunto completo aparato+sistema, es decir, en una superposición de resultados.
2. Debe cumplirse con la regla de Born.
3. El proceso de medición debe tener un efecto sobre las siguientes mediciones, recuperando la fenomenología que hace exitosa a la mecánica cuántica.

A continuación, Maudlin muestra que los siguientes enunciados son mutuamente inconsistentes:

- A. La función de onda de un sistema, directa o indirectamente especifica todas las propiedades físicas de un sistema.
- B. La función de onda evoluciona siempre de acuerdo a una ecuación dinámica lineal (determinista en sentido estadístico).

- C.* Las mediciones realizadas sobre un sistema siempre (o al menos, *frecuentemente*) tienen resultados bien definidos, y la estadística de los resultados realizados sobre sistemas con funciones de onda inicialmente idénticas cumplen (al menos aproximadamente) con la regla de Born.

Por lo tanto, cualquier solución al problema de la medición debe prescindir de al menos una de estas afirmaciones, y ello conlleva postular algo que sustituya dicha afirmación, es decir, cualquier solución al problema de la medición requiere *nueva física*. Aunque es válido negar más de una de estas afirmaciones, existen propuestas que intentan resolver el problema de la medición sin necesidad de negar más de una de las afirmaciones  $A-C$ , representando una modificación mínima al marco conceptual de la mecánica cuántica *estándar*. En lo siguiente denotamos por  $\neg A$  la negación del enunciado  $A$ ,  $\neg B$  la negación del enunciado  $B$  y  $\neg C$  la negación del enunciado  $C$ . A las posibles soluciones que niegan sólo una de las afirmaciones se les describe como sigue:

- $\neg A$ . **Teorías de variables adicionales**, a menudo referidas como *teorías de variables ocultas*. Un ejemplo es la teoría de Bohm [6, 33], en la que las partículas tienen posiciones definidas y se añade una ecuación dinámica que acopla sus trayectorias con la función de onda. Las variables adicionales son las posiciones de las partículas.
- $\neg B$ . **Teorías no lineales**, o *teorías de colapso*. La evolución de los sistemas es sustituida por una ecuación no lineal e indeterminista. Ejemplos emblemáticos son la teoría de localización espontánea de Ghirardi, Rimini y Weber (GRW) [34], y la teoría de localización espontánea y continua de Pearle (CSL) [35, 36].
- $\neg C$ . **Teorías multiverso/nuliverso**. En estas teorías, los resultados de las mediciones *coexisten* (de algún modo), o no hay resultados en absoluto. Un ejemplo muy popular es la interpretación de muchos mundos inspirada en las ideas de Everett [7].

El paradigma estándar al que se adscriben formulaciones ortodoxas como la de von Neumann, de hecho niega  $B$ , pero lo hace sin incluir una regla consistente para sustituir la ecuación lineal de evolución. En su lugar, se separa la evolución de los sistemas en una evolución lineal dada por la ecuación de Schrödinger, y un proceso de reducción o *colapso* cuando éstos son *observados*, sin especificar qué criterios cuantitativos debe cumplir un sistema para considerarse *observador*, lo que da origen al planteamiento original del problema de la medición.

En este sentido, las teorías de colapso dinámico representan una enmienda mínima respecto a la formulación estándar, ya que formalizan la manera en que ocurren estos colapsos, sin recurrir a nociones ambiguas o imprecisas. Por este motivo, en conjunción con su potencial utilidad para esclarecer los problemas mencionados en la introducción dentro del contexto de gravedad semiclassical como veremos más adelante, es que optamos por esta posible vía de solución al problema de la medición.

## Teorías de Colapso

Las teorías de colapso modifican el formalismo de la mecánica cuántica, en particular su ley de evolución temporal. Dicha modificación debe encargarse de que cuando en un laboratorio con aparatos de medición se realice un experimento, todo descrito en términos cuánticos, en efecto ocurra lo que observamos como un resultado definido en el aparato de medición. Es decir, que se recupere lo que *entendemos* por medición en un laboratorio, como consecuencia de la propia teoría, sin tener que hablar de *observadores* o *aparatos* como elementos externos. A este efecto de *romper* superposiciones y por ende reducir los posibles estados de un sistema es a lo que se refiere el término *colapso*, el cual a menudo se acompaña de un adjetivo como *espontáneo* u *objetivo*, debido a que no ocurre como efecto de la intervención de ningún sujeto o agente externo, sino que ocurre de manera fortuita de acuerdo con las reglas universales de la propia teoría.

Por otro lado, las teorías de colapso deben garantizar que la evolución sea lo suficientemente parecida a la evolución lineal y unitaria dada por la ecuación de Schrödinger, ya que ésta es capaz de describir con bastante precisión la estadística de los resultados entre mediciones sucesivas. Por lo tanto, estas teorías deben satisfacer dos criterios que en cierta forma se contraponen, sujetándolas a una tensión que se traduce en la posibilidad de verificarlas experimentalmente, buscando observar los posibles efectos que resultan de cambiar las reglas de evolución estándar.

Finalmente, vale la pena señalar que las teorías de colapso no determinan una ontología en particular, es decir, no nos dicen *qué es lo que se propone que realmente está allá afuera*. Sin embargo, tienen la ventaja de que permiten caracterizar de manera clara cada uno de estos posibles elementos [37]. En particular es posible separar la función de onda de lo que se denomina *Ontología Primitiva* [38], que se identifica como justamente *aquello de lo que están hechas las cosas*.

### 2.1.1. La propuesta de Ghirardi, Rimini y Weber (GRW)

Esta propuesta fue elaborada inicialmente por Giancarlo Ghirardi, Alberto Rimini, y Tullio Weber entre 1985 y 1986 [34]. Consiste de un modelo de colapso discreto, en el que se añade a la evolución lineal dada por la ecuación de Schrödinger, una prescripción de colapso espontáneo y cuya ocurrencia en el tiempo es aleatoria e independiente para cada partícula del sistema. Asimismo, los propios colapsos de una partícula son considerados como eventos independientes por lo que la distribución de estos *colapsos* obedece una distribución de Poisson caracterizada por una frecuencia característica de colapso  $\lambda$  que se introduce como un parámetro universal de la teoría.

El efecto de estos eventos discretos de colapso es equivalente a realizar una *medición imprecisa* de la posición de la partícula en cuestión<sup>1</sup>. Más específicamente, para una partícula,

---

<sup>1</sup>La formulación original en [34] fue planteada en términos de la evolución del operador estadístico. La reformulación aquí expuesta sigue la exposición de Bedingham [39], a su vez basada en la reseña de ésta

esto se modela mediante la acción de un operador de la forma

$$\hat{L}_{r_0} \equiv \frac{1}{(\pi R^2)^{3/2}} e^{-\frac{(\hat{r}-\vec{r}_0)^2}{2R^2}}, \quad (2.1)$$

donde  $R$  es otro parámetro universal de la teoría, y tiene una interpretación inmediata como *radio de localización* de los eventos de colapso. Así mismo,  $\hat{r}$  es el operador de posición de la partícula, y  $\vec{r}_0$  es el punto alrededor del cual se centra el operador de localización. Éste punto es determinado aleatoriamente en cada evento de colapso de acuerdo con la siguiente regla: la probabilidad de que el evento de colapso localice la función de onda de la partícula alrededor de la posición  $\vec{r}_0$  cuando la partícula se encuentra en el estado  $\psi$  al momento  $t$  está dada por

$$P(\vec{r}_0, t) = \frac{|\langle \vec{r}_0 | \psi(t) \rangle|^2}{|\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle|^2}. \quad (2.2)$$

En otras palabras, si al tiempo  $t_c$  ocurre un evento de colapso, la función de onda  $\psi$  de la partícula sufre una transformación espontánea, de modo que un instante después, al que denotamos por  $t_+$ , la función de onda es de la forma

$$\psi(\vec{r}, t_+) = \frac{1}{(\pi R^2)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{2R^2}} \psi(\vec{r}, t_c). \quad (2.3)$$

Como los eventos de colapso ocurren de manera independiente para cada partícula del sistema, la probabilidad de que en un sistema de  $n$  partículas ocurra un evento de colapso sobre cualquiera de estas partículas crece proporcionalmente con  $n$ . En la situación más general, un sistema puede encontrarse en una superposición de todos los posibles estados de todas las partículas, con diferentes pesos para cada combinación de estados. Cuando las partículas del sistema interactúan entre sí, dichos pesos están correlacionados, o en otras palabras, las partículas del sistema están *enredadas* entre sí. Luego, los pesos de los posibles estados de cada partícula se verán afectados por el evento de colapso de cualquiera de las partículas del sistema, ya que aquellos coeficientes que multipliquen estados de la partícula que sufrió el colapso, con mayor proyección sobre el estado localizado en  $\vec{r}_0$ , adquirirán mayor peso en relación a los otros estados. Esto quiere decir que aunque la ocurrencia de colapsos es independiente para cada partícula, una vez que en un sistema enredado colapsa una de estas partículas, la configuración del sistema completo se ve afectada. A su vez, esto implica que mientras más acopladas estén las posiciones de las partículas entre sí, mayor el efecto del colapso de una sola de las partículas sobre el resto.

Los parámetros de la teoría deben ajustarse de modo que los eventos espontáneos sean muy poco frecuentes para partículas individuales, recuperando así la dinámica cuántica lineal para sistemas de pocas partículas, pero deben ocurrir con la suficiente frecuencia para que sistemas *macroscópicos* se localicen rápidamente. En su artículo original [34], los

---

teoría por parte de Bell en [13].

autores proponen un valor aproximado para el radio de localización de  $R \simeq 10^{-7}m$  y para la frecuencia de colapso,  $\lambda \simeq 10^{-16}s^{-1}$ .

Una manera de constreñir esta teoría es probando la no-linealidad de un sistema cuántico, con lo que se imponen cotas a los posibles valores de la frecuencia de colapso y el radio de localización.

Para resolver el problema de los resultados, es necesario añadir una ontología que permita lidiar con estados en superposición, ya que aún después del colapso descrito en esta teoría, pueden seguir existiendo superposiciones, aunque con muy pequeña amplitud. Una posible solución es recurrir a una interpretación propuesta por John Bell [40][cap. 4] en la que los eventos de colapso (o *Flashes*) son los objetos que existen en la realidad, es decir, los puntos espaciotemporales  $(t, \vec{r}_0)$  donde ha ocurrido el colapso de una partícula. Sin embargo, esta interpretación introduce otros dilemas que habría que subsanar, principalmente con relación a las propiedades que se podrían atribuir a objetos que no tienen prevalencia temporal.

### 2.1.2. Localización Espontánea Continua (CSL)

El modelo propuesto por Philip Pearle [35] y posteriormente adaptado para campos no relativistas en [41], sustituye la prescripción discreta para los colapsos en el modelo *GRW*, por una evolución estocástica y continua en la que a la ley de evolución de un vector de estado se añade un término que rompe con la unitariedad de dicha evolución. Formalmente, en CSL la evolución del vector de estado de un sistema de  $N$  partículas está dada por

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{T} \exp \left( - \int_{t_0}^t dt' \left[ \frac{i}{\hbar} \hat{H}(t') + \frac{1}{4\lambda} (w(\vec{r}, t') - 2\lambda \hat{A}(\vec{r}))^2 \right] \right) |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.4)$$

en donde:

- $\mathcal{T}$  representa ordenamiento temporal, de modo que los operadores evaluados en tiempos posteriores se escriben a la derecha de operadores evaluados en tiempos más tempranos.
- $w(\vec{r}, t')$  es un campo estocástico con espectro de ruido blanco, es decir, de igual amplitud en todas las frecuencias, y que sigue una regla de probabilidad dada por la ecuación estocástica

$$P(w)dw = \frac{\langle \psi, t | \psi, t \rangle}{\langle \psi, t - dt | \psi, t - dt \rangle} \frac{dw(t)}{\sqrt{2\pi\lambda/dt}}, \quad (2.5)$$

que permite recuperar efectivamente la regla de Born para los vectores colapsados.

- $\lambda$  es una constante que modula la intensidad del colapso y se puede interpretar como una frecuencia efectiva de colapso. Típicamente se asigna el valor  $\lambda \simeq 10^{-16}s^{-1}$ , aunque se ha sugerido [42] que  $\lambda$  puede ser tan grande como  $10^{-8}s^{-1}$ .

- El operador de colapso,  $\hat{A}(\vec{r})$ , es un operador *esparcido* alrededor de un valor de posición  $\vec{r}$ , de manera semejante al operador  $\hat{L}$  de GRW, con la diferencia de que se utilizan los operadores  $\hat{\xi}^\dagger(\vec{r})$ ,  $\hat{\xi}(\vec{r})$  de creación y aniquilación de partículas centradas en la posición  $\vec{r}$ , de modo que

$$\hat{A}(\vec{r}) \equiv \frac{m}{M} \frac{1}{(\pi a^2)^{3/4}} \int d^3 r' e^{-\frac{1}{2a^2}[\vec{r}-\vec{r}']^2} \hat{\xi}^\dagger(\vec{r}') \hat{\xi}(\vec{r}'). \quad (2.6)$$

El parámetro  $a$  se interpreta como un radio efectivo de localización, y se le asigna un valor del orden de  $10^{-7}m$ . Así mismo,  $m$  es la masa del campo y  $M$  una masa de referencia, típicamente la masa del neutrón.

Esta teoría de colapso provee una ecuación explícita de evolución para los estados, y está mejor preparada que la teoría GRW para ser formulada bajo el formalismo de campos. De hecho, existen ya versiones relativistas de CSL, como la propuesta por Bedingham [43] o Tumulka [44], aunque no están libres de problemas, como campos auxiliares no dinámicos, y aún no cuentan con la capacidad de describir campos interactuantes.

Respecto a su ontología, una propuesta frecuentemente citada es la llamada *ontología de masa*, en la que la función de onda del sistema describe una distribución de materia que abarca todo el espacio, resultando en regiones con mayor y menor distribución de materia. Nuevamente, esta propuesta de interpretación engendra diversos problemas respecto a la manera en que se construye una distribución de masa en el espacio físico a partir de un objeto definido en el espacio de configuración, como es la función de onda, así como las posibles violaciones de conservación de energía y momento que se presentan si uno atribuye propiedades como masa y carga a esa distribución de materia, que evoluciona de manera estocástica.

### 2.1.3. Comentarios respecto a la viabilidad de las teorías de Colapso

Las teorías de colapso no reproducen exactamente los resultados de la Mecánica Cuántica, así que en principio, mediciones lo suficientemente precisas de la evolución de un sistema cuántico podrían hacer inviables o descartar por completo ciertas teorías de colapso como GRW o CSL. Hasta la fecha, ninguna observación ha permitido descartar de manera definitiva todas las teorías de colapso, aunque tampoco se han encontrado desviaciones respecto a los resultados predichos por la Mecánica Cuántica *estándar* que se puedan atribuir al colapso. Algunos de los últimos experimentos que buscan restringir el espacio de parámetros de las teorías de colapso se encuentran en [45, 46], mientras que continuamente surgen nuevas propuestas experimentales para continuar esta exploración, como por ejemplo [47, 48].

Aunque el espacio de parámetros aún permite la viabilidad de teorías de colapso como CSL, siguen pendientes diversos problemas respecto a la ontología de estas teorías, así como su posible papel en temas como las leyes de conservación de energía y momento. Es

de nuestro particular interés explorar la manera en que es posible incorporar las teorías de colapso dentro de un esquema de gravedad semiclásica, incluso a nivel newtoniano. Respecto a esta posibilidad existen propuestas como las de A. Tilloy para una versión de CSL [49], así como para una teoría tipo GRW [50], que ofrecen una alternativa al esquema de gravedad semiclásica que consideraremos en este trabajo. En esos casos se han propuesto acoplamientos entre la gravedad y la materia cuántica diferentes a la propuesta simple que trataremos en este trabajo, ya que en el primero se propone una interacción semejante a un *monitoreo continuo*, y en el caso del segundo modelo se propone una interacción discreta motivada por la ontología de Flashes. Éstos modelos no se han formulado de manera covariante aún, ni es claro cómo podría realizarse semejante generalización. Por lo tanto, estas propuestas no permiten extender las nociones del colapso al contexto de relatividad general en este momento, razón por la cual estudiaremos un esquema efectivo más sencillo.

## 2.2. Gravedad semiclásica

Cuando parte de un sistema tiene una configuración (un estado cuántico) cuyas propiedades están muy bien descritas por un sistema clásico, suele ser suficientemente buena la aproximación en que esa parte del sistema es considerada como *clásica*, mientras que al resto del sistema se le describe de acuerdo con la teoría cuántica. A un modelo donde una de las partes es descrita cuánticamente, mientras que otra parte es descrita clásicamente, se le denomina semiclásico. Esta distinción es en general arbitraria, sin un límite estricto para definir si un sistema *se comporta cuánticamente o clásicamente*, por lo que es necesario establecer criterios sobre su límite de aplicación en cada caso.

El átomo de hidrógeno es un ejemplo de sistema que se puede modelar mediante una aproximación semiclásica con bastante éxito, y la historia mostró la utilidad de este tratamiento, puesto que justo a partir de una aproximación semiclásica a este sistema es que se construyó parte sustancial de la teoría cuántica primitiva. Así mismo, los métodos de las teorías de campo medio (que promedian sobre fluctuaciones estocásticas dentro de un esquema estadístico) suelen ser aplicados sin mayor problema en el tratamiento de sistemas cuánticos de muchas partículas, recurriendo a la identificación de promedios cuánticos con promedios estadísticos. Los resultados así obtenidos resultan ser bastante exitosos en ciertos problemas de física molecular y ciencia de materiales [51, 52].

Un aspecto importante de cualquier modelo semiclásico es el régimen de aplicabilidad. En un modelo de campo medio, uno de sus requisitos de validez tiene que ver con la cantidad e intensidad de las fluctuaciones que exhibe el sistema, ya que las diferencias entre los resultados de mediciones individuales y el valor promediado de dichas mediciones debe volverse poco significativo, ya sea por la realización de una gran cantidad de mediciones o por la gran cantidad de elementos del sistema contribuyendo al resultado de cada medición. En estas condiciones, el promedio estadístico puede equipararse con promedios cuánticos. Sin embargo, un sistema como el átomo de hidrógeno depende directamente de la configuración

particular de sus elementos, y la validez de tratar clásicamente al campo electromagnético e incluso al protón, aún cuando al electrón se le trata de manera cuántica, depende de que el estado del campo electromagnético y del protón estén muy *cerca* de una configuración *clásica*, es decir, una configuración donde se reduce al mínimo la dispersión del estado respecto al valor de expectación de alguna de sus observables, como el valor del campo eléctrico para el campo electromagnético, y la dimensión del protón.

En el caso de gravedad con materia cuántica, el modelo relativista semiclásico más sencillo consiste en tomar al espaciotiempo y su métrica como objetos totalmente clásicos, y utilizar la ecuación semiclásica de Einstein,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R - \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N \langle \psi | \hat{T}_{ab} | \psi \rangle, \quad (2.7)$$

para establecer la relación entre los campos cuánticos de materia, representados aquí por el valor de expectación del tensor de energía momento  $\langle \psi | \hat{T}_{ab} | \psi \rangle$ , y la curvatura del espaciotiempo representada por la métrica  $g_{ab}$  y su curvatura en términos del tensor y el escalar de Ricci,  $R_{ab}$ ,  $R$ , respectivamente. Debemos suponer que esta ecuación es un resultado aproximado, probablemente de considerar un tratamiento de campo medio, sobre alguna teoría cuántica de la gravedad en cierto límite. Desafortunadamente, y a pesar de los avances de los diversos programas en busca de una teoría cuántica de la gravedad, aún no contamos con una teoría capaz de recuperar de manera general y precisa este límite. Aún así, podemos suponer que la aproximación semiclásica sólo puede ser válida cuando los valores esperados para los observables correspondientes a los escalares de curvatura se encuentren muy por debajo del orden de la escala de Planck, es decir,  $R \sim \ell_P^{-2}$ ,  $R_{abcd}R^{abcd} \sim \ell_P^{-4}$ , etc.

Notemos que en un modelo de gravedad semiclásica sin colapsos, en principio es posible incluir configuraciones del campo correspondientes a situaciones como superposiciones espaciales de objetos suficientemente masivos como para realizar mediciones con balanzas de torsión. Sin embargo, en la práctica realizar un experimento de gravedad semiclásica bajo una configuración de este tipo resultaría bastante difícil, puesto que de ser ciertas al menos las ideas generales de las teorías de colapso espontáneo, la construcción de un sistema en superposición macroscópica sería una proeza técnica inevitablemente efímera, ya que colapsaría espontáneamente tras un muy breve intervalo de tiempo debido al número de partículas involucradas.

En ese sentido, podemos considerar que la objeción experimental ofrecida por Page y Geilker [18] no se sostiene, puesto que, debido a las teorías de colapso, en realidad nunca se llegó a preparar la superposición macroscópica que describieron bajo la interpretación de muchos mundos.

Sin embargo, aún sin entrar en los detalles de las teorías de colapso y cómo podrían incluirse éstas en un contexto de gravedad semiclásica, parece que su mera consideración dentro del esquema implica que no cualquier estado para el campo es idóneo para ser considerado dentro del modelo. En este sentido, parece que lo ideal sería restringir nuestra propuesta de gravedad semiclásica a estados que resulten del colapso. Además, en consis-



cia con la fenomenología tanto de GRW como de CSL, este tipo de estados corresponderían a configuraciones aproximadamente *coherentes*, cuyos valores de expectación no divergen sustancialmente de lo descrito por las ecuaciones de movimiento clásicas. Es decir, las teorías de colapso dotan de *naturalidad* al tratamiento de gravedad semiclásica, al asegurar que la materia adopta espontáneamente configuraciones en las que la ecuación (2.7) es aproximadamente válida.

Notemos que tal como anticipábamos, caen dentro de las configuraciones aceptables para el modelo, aquellas que describen todos los experimentos que hemos realizado sobre gravitación hasta ahora. La validez de la gravedad semiclásica dentro de este régimen es consistente con el éxito de la teoría de la relatividad general de Einstein bajo el hecho de que la materia con la que hemos realizado dichas pruebas es *cuántica* a nivel fundamental. Aún así, reconocemos que su descripción en términos de un tensor de energía-momento es sólo efectiva.

Un aspecto sutil a considerar es que aún si se incorpora el colapso cuántico para otorgar naturalidad al modelo, el propio colapso no puede ser descrito dentro del modelo semiclásico puro: la ecuación (2.7) no puede ser válida durante un evento de colapso puesto que este tipo de eventos, en general no preservan los valores de expectación ni de la energía ni del momento. Esto implica que el valor esperado del tensor de energía-momento  $\langle \psi | \hat{T}_{ab} | \psi \rangle$ , tendría una discontinuidad justo cuando ocurre un evento de colapso. Ésto a su vez implica que su divergencia  $\nabla^a \langle \psi | \hat{T}_{ab} | \psi \rangle$  no estaría bien definida durante el colapso. Sin embargo, la divergencia del lado izquierdo en la ecuación 2.7 es idénticamente cero como resultado de la identidad de Bianchi, por lo que la ecuación (2.7) no es consistente si se intenta describir un evento de colapso cuántico. Ante esta situación es necesario adoptar la postura de que este modelo es sólo efectivo en ausencia de colapsos, y para incorporar el colapso cuántico es necesario recurrir a un modelo más robusto, como lo haremos en la sección (3), por lo que en el resto de esta sección nos restringiremos al régimen de gravedad semiclásica *sin colapsos* estándar, y analizaremos las dificultades formales que envuelven este tratamiento.

### 2.2.1. La Renormalización del Tensor de Energía-Momento

#### Renormalización de Hadamard

La ecuación de Einstein semiclásica, tal cual está expresada en (2.7), es, estrictamente hablando, una expresión meramente formal. Esto, debido a que no hemos definido el término que se encuentra del lado derecho,  $\langle \psi | \hat{T}_{ab} | \psi \rangle$ . En el caso clásico, para un campo escalar de Klein Gordon  $\phi$ , la expresión del tensor de energía-momento incluye términos de la forma  $(\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi)$  y  $\phi^2$ , como veremos más abajo, por lo que al *promover* estos términos como *operadores* en una teoría cuántica del campo  $\hat{\phi}$ , es necesario renormalizar  $\langle \psi | \hat{T}_{ab} | \psi \rangle$ .

Esto ocurre porque en teoría cuántica de campos, los operadores poseen una naturaleza distribucional. Formalmente, no hay una manera no ambigua de definir productos de distribuciones. Esto se traduce en la presencia de términos *ambiguos* cuando se construyen

operadores no lineales, conocidos en la literatura física como *ambigüedades de renormalización*. Por ejemplo, aún en el espaciotiempo de Minkowski, para un campo  $\hat{\phi}$  que obedece una ecuación de Klein-Gordon de la forma

$$\partial^a \partial_a \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi} = 0, \quad (2.8)$$

el valor esperado de operadores como  $\hat{\phi}^2$ , calculado directamente, es problemático. En efecto, si partimos del desarrollo “usual” en términos de operadores de creación y aniquilación de *partículas* de momento constante  $\vec{k}$ , respecto al vacío de Minkowski  $\Omega_M$ ,

$$\hat{\phi}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left( e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \hat{a}_{\vec{k}} + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \right), \quad (2.9)$$

el cálculo directo del valor de expectación para  $\hat{\phi}^2$  es divergente en todo punto,

$$\langle \Omega_M | \hat{\phi}^2(\vec{r}, t) | \Omega_M \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{2\sqrt{k^2 + m^2}} \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

En general, las funciones de dos puntos como  $\langle \Omega_M | \hat{\phi}(\vec{r}, t) \hat{\phi}(\vec{r}', t') | \Omega_M \rangle$  y  $\langle \Omega_M | (\hat{\phi}(\vec{r}, t) \hat{\phi}(\vec{r}', t') + \hat{\phi}(\vec{r}', t') \hat{\phi}(\vec{r}, t)) | \Omega_M \rangle$  son bisoluciones distribucionales de la ecuación de onda, y pueden relacionarse con las funciones de Green del operador de Klein-Gordon,

$$P \equiv \partial^a \partial_a - m^2. \quad (2.11)$$

Particularmente,  ${}^{\Omega_M}G^+(\vec{r}, t, \vec{r}', t') \equiv \langle \Omega_M | \hat{\phi}(\vec{r}, t) \hat{\phi}(\vec{r}', t') | \Omega_M \rangle$  recibe el nombre de función de Wightman para el vacío de Minkowski, o simplemente función de Wightman. Puede verse que para puntos  $x = (\vec{r}, t)$ ,  $y = (\vec{r}', t')$ , con  $2\sigma(x, y) \neq 0$ , donde  $2\sigma(x, y)$  es el cuadrado de la pseudodistancia entre  $x$  y  $y$ , la función de Wightman para el vacío de Minkowski tiene la forma

$${}^{\Omega_M}G^+(x, y) = \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{2\sigma(x, y)}} K_1(m\sqrt{2\sigma(x, y)}), \quad (2.12)$$

donde  $K_1$  es la función de Bessel modificada del primer tipo.  ${}^{\Omega_M}G^+(x, y)$  admite una expansión en  $\sigma(x, y)$  de la forma

$$\begin{aligned} {}^{\Omega_M}G^+(x, y) = & \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{\sigma(x, y)} + \frac{m^2}{2} \log \left( \frac{\sigma(x, y)}{\ell^2} \right) + \frac{m^2}{2} \left[ \log \left( \frac{m^2 \ell^2}{2} \right) + 2\gamma - 1 \right] \right. \\ & \left. + \sigma(x, y) \frac{m^4}{16} \left[ 2 \log \left( \frac{\sigma(x, y)}{\ell^2} \right) + \log \left( \frac{m^4 \ell^4}{4} \right) + 4\gamma - 5 \right] + O(\sigma^2(x, y)) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde la constante  $\ell$  ha sido introducida para hacer adimensionales los argumentos de los logaritmos, resultando en (2.12) para cualquier valor de  $\ell$ , y  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni<sup>2</sup>.

En un espaciotiempo curvo, decimos que la función de dos puntos  $Z(x, y)$  *tiene la forma de Hadamard* si admite una expansión dentro de una vecindad normal convexa que contiene a  $x$  e  $y$  de la forma [53]

$$Z(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{U(x, y)}{\Sigma(x, y) + i2\epsilon(T(x) - T(y)) + \epsilon^2} + v(x, y) \log \left( \frac{\Sigma(x, y) + i2\epsilon(T(x) - T(y)) + \epsilon^2}{\ell^2} \right) + w(x, y) \right), \quad (2.14)$$

donde  $U$ ,  $v$  y  $w$  son funciones biescalares suaves y regulares en el límite  $x \rightarrow y$ , y  $T(x)$  es una función global de tiempo evaluada en  $x$ . Aquí,  $U$  y  $v$  están definidos formalmente por las relaciones de recurrencia de Hadamard que resultan de expandir estos biescalares en potencias de  $\sigma$ ,

$$U = U_0 + U_1\sigma + U_2\sigma^2 + \dots, \quad (2.15a)$$

$$v = v_0 + v_1\sigma + v_2\sigma^2 + \dots, \quad (2.15b)$$

y pedir que  $Z(x, y)$  satisfaga la ecuación de Klein-Gordon en la primera entrada. Estas condiciones determinan por completo a  $U$  y a  $v$ , que además son biescalares simétricos, pero no ocurre lo mismo con

$$w = w_0 + w_1\sigma + w_2\sigma^2 + \dots. \quad (2.15c)$$

Las ecuaciones de recurrencia de Hadamard permiten determinar los términos de la expansión de  $w$  con excepción del término  $w_0$  en (2.15c), ya que este término caracteriza en sí a la función de dos puntos  $Z(x, y)$ . Concretamente, en el caso de la función de Wightman  $\Omega_M G^+$  correspondiente al vacío de Minkowski, se tiene

$$\Omega_M w_{0,\ell} \equiv \frac{m^2}{16\pi^2} \left[ \log \left( \frac{m^2 \ell^2}{2} \right) + 2\gamma - 1 \right]. \quad (2.16)$$

En el apéndice D se incluyen detalles sobre las expansiones (2.15). En particular, se tiene que  $U = \Delta^{1/2}$ , donde a  $\Delta$  se le denomina *Determinante de Van Vleck-Morette* y está dado por

$$\Delta(x, y) = - \frac{\det(-(\nabla_x)_\mu (\nabla_y)_\nu \sigma(x, y))}{\sqrt{-g(x)} \sqrt{-g(y)}}. \quad (2.17)$$

En este punto formulamos la siguiente

---

2

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right] \approx 0.577215$$

**Definición 1: Estado de Hadamard** En una teoría cuántica para un campo  $\hat{\phi}$ , un estado  $\psi$  tal que su función de dos puntos  ${}^\psi G^+(x, y) = \langle \psi | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \psi \rangle$ , tiene la forma de Hadamard (2.14), se denomina estado de Hadamard.

La importancia de esta propiedad es que permite regularizar funciones como  ${}^{\Omega_M} G^+(x, y)$  sustrayéndoles *la parte singular* de (2.14),

$$H_\ell(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{U(x, y)}{\Sigma(x, y) + i2\epsilon(T(x) - T(y)) + \epsilon^2} + v(x, y) \log \left( \frac{\Sigma(x, y) + i2\epsilon(T(x) - T(y)) + \epsilon^2}{\ell^2} \right) \right), \quad (2.18)$$

de modo que en el límite de coincidencia  $y \rightarrow x$  se obtenga una función suave y finita.

Nótese que una elección diferente de  $\ell$  puede modificar el valor de dicha función suave, ya que

$$H_{\ell'} = H_\ell + \frac{1}{8\pi^2} v \log(\ell/\ell'). \quad (2.19)$$

A esto se le denomina *ambigüedad de escala*.

Aún más, se ha mostrado [54, 55] que las ambigüedades pueden ser funciones polinomiales  $C$  de los parámetros del campo así como escalares formados a partir de la métrica, los tensores de curvatura y sus derivadas, con la condición de que se transformen como  $C \rightarrow L^2 C$  ante reescalamientos de la forma  $m^2 \rightarrow L^2 m^2$ ,  $g^{ab} \rightarrow L^2 g^{ab}$ ,  $R_{abcd} \rightarrow L^{-2} R_{abcd}$ . Esto significa que para un campo de Klein-Gordon en un espaciotiempo curvo, los términos de ambigüedad son de la forma

$$C(x) = \beta_1 m^2 + \beta_2 R(x), \quad (2.20)$$

donde queda incluida la ambigüedad de escala  $\ell$ .

### Prescripción de Wald para el Tensor de Energía Momento

En el contexto de relatividad general semiclásica, Wald estableció [56] que una prescripción para el valor de expectación del tensor de energía-momento renormalizado  $\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}}$ , debería satisfacer los siguientes axiomas:

1. Para estados ortogonales  $\langle \Psi | \Omega \rangle = 0$ , las componentes de  $\langle \Psi | \hat{T}_{ab}(x) | \Omega \rangle_{\text{ren}}$  coinciden con las componentes obtenidas utilizando la expresión formal del desarrollo en términos de operadores de creación y aniquilación de modos del campo.
2.  $\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}}$  coincide con la expresión obtenida de utilizar ordenamiento normal en el caso del espaciotiempo de Minkowski.
3.  $\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}}$  es localmente conservado,  $\nabla^a \langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}} = 0$ .

4.  $\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}}$  respeta causalidad.
5.  $\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}}$  no incluye términos de curvatura de orden mayor a dos en derivadas de la métrica.

El propio Wald mostró [57] que existe una prescripción única salvo términos locales de curvatura, que cumple con los axiomas 1 – 4. Es decir, se puede partir de una expresión como la propuesta por Christensen [58] en la que se define un operador diferencial  $\mathbb{T}_{ab'}$  que actúa respecto a los puntos  $x, y$  y que depende sólo del espaciotiempo, y a continuación se aplica sobre una función de dos puntos regularizada,  ${}^\psi G^+(x, y) - H^\ell(x, y)$ , resultando en un bivector sobre el que se toma el límite  $y \rightarrow x$  a lo largo de la geodésica que va de  $y$  a  $x$  en una vecindad localmente convexa de  $x$ . En otras palabras, se tiene

$$\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{reg}} = \lim_{y \rightarrow x} \mathbb{T}_{ab'} [{}^\psi G^+(x, y) - H^\ell(x, y)]. \quad (2.21)$$

Sin embargo, los términos locales de curvatura que pueden agregarse a esta prescripción no pueden escogerse de modo que se cumpla el axioma 5, como consecuencia del tratamiento más general de los términos de ambigüedad [55, 59], por lo que resulta ineludible la inclusión de términos de orden superior en el tensor de energía momento semiclásico.

La prescripción de Wald no está limitada a un tipo de campo en particular, pero en este trabajo nos centraremos, por su simpleza, en un campo escalar  $\phi$  cuya teoría clásica está dada por la acción

$$S_\phi[\phi, g_{ab}] = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ g^{ab} (\nabla_a \phi) (\nabla_b \phi) + (m^2 + \xi R) \phi^2 \right]. \quad (2.22)$$

Anular la variación de (2.22) respecto al campo  $\phi$  resulta en la ecuación de Klein-Gordon para el campo,

$$(g^{ab} \nabla_a \nabla_b - m^2 - \xi R) \phi = 0, \quad (2.23)$$

mientras que anular la variación respecto a la métrica resulta en el tensor de momento energía *clásico*  $T_{ab}$  dado por

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = (\nabla_a \phi) (\nabla_b \phi) - \frac{1}{2} g_{ab} \left[ g^{cd} (\nabla_c \phi) (\nabla_d \phi) + m^2 \phi^2 \right] \\ &\quad + 2\xi \left[ -(\nabla_a \phi) (\nabla_b \phi) + g_{ab} g^{cd} (\nabla_c \phi) (\nabla_d \phi) - \phi \nabla_a \nabla_b \phi \right. \\ &\quad \left. + g_{ab} \phi \square \phi + \frac{\phi^2}{2} G_{ab} \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $\square \phi = g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi$ . En este caso, la ecuación clásica de Einstein queda

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \Lambda g_{ab} &= (1 - 2\xi) (\nabla_a \phi) (\nabla_b \phi) - 2\xi \phi \nabla_a \nabla_b \phi + \xi \phi^2 R_{ab} \\ &\quad + g_{ab} \left[ 2 \left( \xi - \frac{1}{4} \right) g^{cd} (\nabla_c \phi) (\nabla_d \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + 2\xi \phi \square \phi - \frac{\xi}{2} \phi^2 R \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Al cuantizar el campo  $\phi$ , fijar un estado  $\psi$  equivale a establecer todas las funciones de  $n$ -puntos  $\langle \psi | \hat{\phi}(x) | \psi \rangle$ ,  $\langle \psi | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x) | \psi \rangle$ , etc., que son consistentes con un *álgebra* de operadores para el campo. En este caso, la prescripción de Wald se condensa en la expresión

$$\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}} = \lim_{y \rightarrow x} \left( \mathbb{T}_{ab} \left[ G_{\psi}^{+}(x, y) - H^{\ell}(x, y) \right] - \frac{1}{8\pi} g_{ab} v_1(x, y) \right) + \Theta_{ab}(x), \quad (2.26)$$

donde  $\mathbb{T}_{ab}$  es un operador que se obtiene por *separación de punto* (*point-splitting*) a partir de (2.24) y que tiene la forma explícita

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{ab} = & (1 - 2\xi) g_a{}^{b'} (\nabla_a)(\nabla_{b'}) + \left( 2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{ab} g^{cd'} (\nabla_c)(\nabla_{d'}) - \frac{1}{2} g_{ab} m^2 \\ & + 2\xi \left[ -g_a{}^{a'} g_b{}^{b'} \nabla_{a'} \nabla_{b'} + g_{ab} g^{cd} \nabla_c \nabla_d + \frac{1}{2} G_{ab} \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

y  $G_{\psi}^{+}(x, y)$  es la función de Wightman para el campo  $\hat{\phi}$  en el estado  $\psi$ ,

$$G_{\psi}^{+}(x, y) = \langle \psi | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | \psi \rangle. \quad (2.28)$$

La función  $v_1(x, y)$  corresponde al término de orden 1 en el desarrollo en potencias de  $\sigma(x, y)$  en (2.15b). Su introducción en esta expresión garantiza la conservación de  $\langle \psi | \hat{T}_{ab}(x) | \psi \rangle_{\text{ren}}$ . Explícitamente, el límite de coincidencia para esta función [60],

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} v_1(y, x) = & \frac{1}{8} m^4 + \frac{1}{4} \left( \xi - \frac{1}{6} \right) m^2 R - \frac{1}{24} \left( \xi - \frac{1}{5} \right) \square R \\ & + \frac{1}{8} \left( \xi - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 - \frac{1}{720} R_{ab} R^{ab} + \frac{1}{720} R_{abcd} R^{abcd}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

introduce términos de orden superior en la métrica. Asimismo,  $\Theta_{ab}(x)$  es un tensor simétrico, conservado y construido a partir de términos locales de curvatura, que de la manera más general [55, 60] puede expresarse como

$$\begin{aligned} \Theta_{ab} = & \beta_1 \left( 2\nabla_a \nabla_b R - 2g_{ab} \square R - \frac{1}{2} g_{ab} R^2 + 2R R_{ab} \right) \\ & + \beta_2 \left( \nabla_a \nabla_b R - \frac{1}{2} g_{ab} \square R - \square R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R^{cd} R_{cd} + 2R^{cd} R_{cdab} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son parámetros numéricos de ambigüedad. Los términos en (2.30) pueden derivarse añadiendo términos a la acción de la forma

$$S_{\Theta} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \beta_1 R^2 + \beta_2 R^{ab} R_{ab} \right). \quad (2.31)$$

Nótese que en este caso ninguna elección de parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$  puede cancelar los términos de orden superior en (2.29) sin introducir a su vez otros términos de orden superior.

En la sección 3.2 veremos que esto implica que no es posible utilizar la formulación usual de valores iniciales de la relatividad general con campo escalar para el caso semiclásico, aunque a priori tampoco implica que no sea posible resolver el problema de valores iniciales para el sistema de orden superior. Sin embargo, la experiencia con sistemas que incluyen términos con derivadas *temporales* de orden mayor a dos sugiere la existencia de soluciones consideradas *no físicas*, como en el caso del problema de Abraham-Lorentz [61], donde existen soluciones mal comportadas, ya sea porque son altamente inestables o porque su evolución es divergente (*runaway*).

## Capítulo 3

# Gravedad Semiclásica con Colapso

La gravedad semiclásica podría, en principio, describir situaciones de interés físico como la evaporación de agujeros negros o el origen de estructura en el paradigma cosmológico inflacionario. Sin embargo, en ausencia de colapsos cuánticos, resulta incompatible con la evidencia experimental [18], al mismo tiempo que es formalmente imposible mantener el esquema de colapso dentro de un modelo de gravedad semiclásico definido únicamente por la ecuación semiclásica de Einstein. Por lo tanto, para incorporar el colapso cuántico dentro del esquema de gravedad semiclásica, es necesario definir un modelo más robusto.

La propuesta que presentamos a continuación para incluir una aproximación *a orden cero* del colapso dentro de la gravedad semiclásica se basa en una analogía con las ecuaciones de Navier-Stokes. Sabemos que éstas ecuaciones tienen validez en una gran cantidad de situaciones de relevancia hidrodinámica, incluso en presencia de turbulencia, mientras los fenómenos de frontera<sup>1</sup> y las interacciones moleculares no se vuelvan relevantes. Por ejemplo, al modelar el acercamiento de una *ola* hacia una costa, dichas ecuaciones describen perfectamente el comportamiento de la ola hasta justo antes de que ésta *rompa*, tras lo cual viene un intervalo en el que ocurren diversos fenómenos donde tanto efectos de frontera como la dinámica particular de las moléculas del fluido son relevantes (formación de espuma y atomización). Posteriormente, a partir de que el agua se retira de la costa, las ecuaciones de Navier Stokes vuelven a ser válidas para describir el estado del agua en las cercanías de la costa.

A partir de esta analogía, propondremos que la gravedad semiclásica en términos de soluciones auto consistentes de la ecuación semiclásica de Einstein, es válida en regiones del espaciotiempo en las que no ocurren colapsos, correspondientes a *épocas*, separadas entre sí por regiones *espacialoides* en las que no es válida la ecuación semiclásica de Einstein. En otras palabras, se propone que el espaciotiempo en su conjunto se puede ver como una sucesión de épocas que admiten una descripción aproximada dada por la ecuación

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, en la interfaz entre un gas y un líquido, o la interacción de un fluido con las paredes de un contenedor sólido.



semiclásica de Einstein, cronológicamente ordenadas y separadas entre sí por regiones en las que el colapso cuántico rompe con la posibilidad de describir el espaciotiempo con esa misma ecuación.

En las siguientes secciones describiremos este modelo y revisaremos las dificultades que surgen de esta propuesta.

### 3.1. Definición del modelo

En este modelo, expuesto inicialmente con detalle en [23], se rescata la noción de que si bien durante un colapso no es posible cumplir con la ecuación semiclásica de Einstein, estos eventos tienen una *duración* tan corta que se puede describir como un proceso *instantáneo*, es decir, que ocurre sobre una hipersuperficie espacial. En este momento, modelaremos únicamente un colapso. Ésto nos permite definir dos *épocas*, una previa al colapso y otra posterior al colapso. Las épocas consisten de configuraciones semiclásicas autoconsistentes, a las que llamamos SSC por sus siglas en inglés.

Una configuración semiclásica autoconsistente se define como el conjunto

$$\{M, g_{ab}, \mathcal{H}, \hat{\phi}_i, \psi\},$$

donde  $(M, g_{ab})$  es un espaciotiempo globalmente hiperbólico,  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert para una teoría cuántica para los campos de materia con operadores  $\hat{\phi}_i$  operando en  $\mathcal{H}$ , construida sobre dicho espaciotiempo *curvo*, y para el cual se satisface la ecuación de campo, por ejemplo, para un escalar de Klein-Gordon,

$$(g^{ab}\nabla_a\nabla_b - m^2 - \xi R)\hat{\phi} = 0, \quad (3.1)$$

y además se considera un estado distinguido  $\psi \in \mathcal{H}$  que permite obtener el valor de expectación renormalizado del observable tensor energía-momento  $\langle\psi|\hat{T}_{ab}[g_{ab}, \hat{\phi}_i]|\psi\rangle_{\text{ren}}$  tal que para la métrica  $g_{ab}$  se cumple la ecuación semiclásica de Einstein (2.7).

Una SSC se define para todo el espaciotiempo, ya que la construcción de la teoría cuántica de campos en el espaciotiempo curvo se hace de manera covariante. Asimismo, tomando como referencia una construcción semiclásica autoconsistente dada, tenemos que un estado  $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}$  con  $\tilde{\psi} \neq \psi$  en general no garantiza el cumplimiento de la ecuación semiclásica de Einstein. Por lo tanto, si deseamos modelar el colapso de la función de onda en el contexto de gravedad semiclásica, es necesario modelar una transición de toda una construcción semiclásica inicial  $SSC_I = \{M, g_{ab}^I, \mathcal{H}_I, \hat{\phi}_i, \psi_I\}$ , a una construcción semiclásica final  $SSC_{II} = \{M, g_{ab}^{II}, \mathcal{H}_{II}, \hat{\phi}_i, \psi_{II}\}$ , correspondientes a las épocas previa al colapso y posteriores al colapso.

En consecuencia, el espaciotiempo en el que se modela el colapso no corresponde a una SSC, sino una combinación (a la que llamaremos  $\mathcal{E}$ ) cuya construcción describimos a continuación.

Considérese la variedad  $M$  (común a ambas  $SSC$ ), e identifique una hipersuperficie  $\Sigma_c \in M$  con hipersuperficies de Cauchy  $\Sigma_I$  y  $\Sigma_{II}$  pertenecientes a los espaciotiempos de  $SSC_I$  y  $SSC_{II}$ , respectivamente. Es decir, se definen los difeomorfismos  $\Phi_I : M_{\mathcal{E}} \rightarrow M_I$ ,  $\Phi_{II} : M_{\mathcal{E}} \rightarrow M_{II}$  tales que

$$\Phi_I(\Sigma_c) = \Sigma_I, \quad (3.2a)$$

$$\Phi_{II}(\Sigma_c) = \Sigma_{II}. \quad (3.2b)$$

A partir de éstos se define en la construcción  $\mathcal{E}$  una *métrica efectiva* dada por

$$g_{ab}(x) = \begin{cases} g_{ab}^I(\Phi_I(x)) & : x \in J^-(\Sigma_c), \\ g_{ab}^{II}(\Phi_{II}(x)) & : x \in J^+(\Sigma_c) - \Sigma_c. \end{cases} \quad (3.3)$$

Luego, para  $x \in J^-(\Sigma_c) - \Sigma_c$  se cumple que

$$\Phi_I^* \left( R_{ab}^I - \frac{1}{2} g_{ab}^I R^I - \Lambda g_{ab}^I \right) = 8\pi G_N \Phi_I^* \left( \langle \psi^I | \hat{T}_{ab} \psi^I \rangle \right), \quad (3.4)$$

mientras que para  $x \in J^+(\Sigma_c) - \Sigma_c$  se cumple que

$$\Phi_{II}^* \left( R_{ab}^{II} - \frac{1}{2} g_{ab}^{II} R^{II} - \Lambda g_{ab}^{II} \right) = 8\pi G_N \Phi_{II}^* \left( \langle \psi^{II} | \hat{T}_{ab} \psi^{II} \rangle \right). \quad (3.5)$$

Justo sobre  $\Sigma_c$  se ha definido la métrica como aquella de la construcción  $SSC_I$ , y vamos a *imponer* la condición de que el pullback de la métrica de  $SSC_{II}$  sea igual a la métrica de  $SSC_I$  sobre  $\Sigma_c$ ,

$$\Phi_{II}^*(g_{ab}^{II})|_{\Sigma_c} = \Phi_I^*(g_{ab}^I)|_{\Sigma_c}, \quad (3.6)$$

es decir, requerimos que la métrica sea continua sobre la hipersuperficie de colapso.

La generalización de este modelo incluye tomar una foliación del espaciotiempo y establecer una manera de distribuir los colapsos sobre algunas de esas hipersuperficies de modo que su ocurrencia esté de acuerdo con un esquema de colapso como podría ocurrir en una versión *relativista* de GRW. Asimismo, dicha teoría de colapso podría establecer relaciones entre los objetos físicos de la construcción previa a un colapso y posterior al mismo, con lo que el esquema general de colapsos en gravedad semiclásica desarrollado a partir del modelo que estamos construyendo podría aportar también algunas pistas para contribuir a la construcción de dicha teoría cuántica con colapsos.

Sin embargo, hasta la fecha de la elaboración de este trabajo, no se cuenta con una teoría de colapso adecuada para este tratamiento, así es que nos limitaremos a suponer que los aspectos relacionados con los posibles *saltos* en el tensor de energía-momento debidos al colapso están dados por una teoría de colapso, y nuestro tratamiento deberá ser lo suficientemente general para poder incorporar múltiples propuestas de estas teorías.

### 3.1.1. Criterio de Regularidad

El modelo de colapso presentado en la sección anterior presenta una serie de dificultades, tanto conceptuales como formales. En el aspecto conceptual, una objeción inmediata es que rompe con el principio de covariancia al depender de la hipersuperficie de colapso  $\Sigma_c$ . Asimismo, al ser un colapso que se identifica con una hipersuperficie espacial, es necesario establecer qué tipo de colapsos se pueden permitir en este modelo efectivo, a modo de evitar que este tipo de cambios globales no puedan ser explotados para realizar comunicación superlumínica.

Si bien las teorías de colapso coinciden con el teorema de Bell en cuanto a la presencia de un aspecto no local en la física, el tipo de efectos no locales que pueden ocurrir dentro de una teoría de colapso en el contexto gravitacional amerita un análisis mucho más profundo y extendido, el cual escapa a los objetivos que hemos planteado dentro de este trabajo. En particular, parece improbable que estos posibles efectos dependan de la separación del espaciotiempo de acuerdo a una foliación particular. Por lo tanto, es lo más pertinente acotar los efectos no locales del evento de colapso de modo que no impliquen una violación detectable (al menos con los medios de los que disponemos actualmente) ni de causalidad ni de energía.

Este es un criterio que podría revocarse en el futuro, ya sea como resultado de un análisis de los posibles efectos no locales del colapso, o bien, si la propia prescripción para el colapso establece un criterio para seleccionar y pegar construcciones semiclásicas.

Nótese que este criterio no es una afirmación rigurosa sobre el modelo, sino una descripción de la *fenomenología* que esperamos se reproduzca en nuestro tratamiento. Formalmente, este criterio implica también una consideración sobre la configuración del espaciotiempo: ésta debe ser suficientemente regular al pasar de una configuración autoconsistente a otra como para poder realizar el pegado de las configuraciones a lo largo de la hipersuperficie de colapso. Por este motivo es que requerimos que al menos la métrica inducida sobre la hipersuperficie  $\Sigma_c$  sea continua al pasar de una configuración autoconsistente a otra, verificándose la ecuación (3.6). Por este motivo nos referiremos a esta propiedad como *condición de máxima regularidad*.

A partir de la condición de máxima regularidad, el problema se reduce a establecer formalmente los criterios que debe cumplir el colapso, es decir, la caracterización de los *saltos* tanto del sector gravitacional, como del sector de materia. En este punto cabe preguntarse si es posible recuperar una forma de la identidad de Bianchi durante el colapso, y si es posible acotar y dar sentido a las potenciales violaciones de momento-energía.

Además, aún si establecemos un criterio de regularidad y contamos con una teoría de colapso que en conjunto nos permitan determinar los *saltos* que pueden surgir de un evento de colapso, es vital que éstos nos permitan calcular datos iniciales para una y sólo una construcción semiclásica autoconsistente (salvo difeomorfismos). Así se tendría una manera de construir sucesivas configuraciones autoconsistentes después de cada colapso. En la sección (3.4) retomaremos este último punto y propondremos una vía para abordar este problema.

Por lo tanto, es necesario que exista una noción de formulación de datos iniciales para las ecuaciones de la gravedad semiclásica (sin colapsos). En la siguiente sección abordaremos este problema y posteriormente retornaremos al análisis de las discontinuidades.

### 3.2. Formulación de valores iniciales

Decimos que una teoría de campo  $\varphi$  sobre un espaciotiempo globalmente hiperbólico  $(M, g_{ab})$  tiene un problema de valores iniciales bien puesto cuando los datos sobre una hipersuperficie de Cauchy describen una solución única (módulo difeomorfismos) para las ecuaciones del campo en todo el espaciotiempo, y ésta solución depende de manera continua de los datos iniciales, de acuerdo con una topología adecuada definida en el espacio de soluciones.

Para la *relatividad general* en vacío, en que la ecuación de Einstein se reduce a

$$R_{ab} = 0, \quad (3.7)$$

la formulación de valores iniciales puede expresarse tal como lo hace Wald en el teorema 10.2.2 de su libro [62]:

**Teorema 1.** Sea  $\Sigma$  una variedad tridimensional  $C^\infty$ , sea  $h_{ab}$  una métrica riemanniana suave en  $\Sigma$  y sea  $K_{ab}$  un campo tensorial suave y simétrico en  $\Sigma$ . Suponga que  $h_{ab}$  y  $K_{ab}$  satisfacen las ecuaciones *de restricción*

$$D_a K - D_b K_a{}^b = 0, \quad (3.8)$$

$${}^{(3)}R + g^{ab} K_{ab} - K_{ab} K^{ab} = 0, \quad (3.9)$$

donde  $D_a$  es el operador derivada asociado a la métrica  $h_{ab}$  (tal que  $D_a h_{bc} = 0$ ) y  ${}^{(3)}R$  su escalar de Ricci asociado. Entonces, existe un único espaciotiempo  $C^\infty$   $(M, g_{ab})$ , llamado el desarrollo máximo de Cauchy de  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  que satisface las siguientes cuatro propiedades:

- (I)  $(M, g_{ab})$  es una solución de la ecuación de Einstein en el vacío,

$$R_{ab} = 0. \quad (3.10)$$

- (II)  $(M, g_{ab})$  es globalmente hiperbólico con superficie de Cauchy  $\Sigma$ .

- (III) La métrica inducida y la curvatura extrínseca en  $\Sigma$  son, respectivamente,  $h_{ab}$  y  $K_{ab}$ .

- (IV) Cualquier otro espaciotiempo que satisface las propiedades (I)-(III) puede mapearse isométricamente en un subconjunto de  $(M, g_{ab})$ . Más aún, suponga que  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  y  $(\Sigma', h'_{ab}, K'_{ab})$  son conjuntos de datos iniciales con desarrollos máximos  $(M, g_{ab})$  y  $(M', g'_{ab})$ , respectivamente. Suponga que existe un difeomorfismo entre  $S \subset \Sigma$  y

$S' \subset M'$  que lleva  $(h_{ab}, K_{ab})$  en  $S$  a  $(h'_{ab}, K'_{ab})$  en  $S'$ . Entonces el dominio de dependencia causal de  $S$  en  $(M, g_{ab})$  es isométrico al dominio de dependencia causal de  $S'$  en  $(M', g'_{ab})$ . Finalmente, la solución  $g_{ab}$  en  $M$  depende continuamente de los datos iniciales  $(h_{ab}, K_{ab})$  en  $\Sigma$ .

□

Este teorema se basa en los resultados sobre existencia y unicidad de soluciones para sistemas cuasilineales hiperbólicos en los que fue pionera Kovalévskaya [63], y en particular la generalización a datos suaves para abarcar el caso de la Relatividad General por parte de Choquet-Bruhat [64]. Abarcar el caso para datos suaves es de especial relevancia puesto que en relatividad también se busca asegurar que los datos se propagan causalmente, es decir, que la evolución de datos con soporte compacto ocurre dentro del futuro causal de su soporte. Pero este tipo de datos no están contenidos en el caso analítico, por lo que no basta el Teorema de Cauchy-Kovalévskaya.

La prueba de Choquet-Bruhat empieza por expresar las ecuaciones de Einstein en coordenadas  $x^\mu$  tales que

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b x^\mu = 0, \quad (3.11)$$

a las que se denomina coordenadas armónicas. Esta condición es suficiente para lidiar con la libertad que tenemos para representar los objetos geométricos de la teoría, es decir, la invariancia ante difeomorfismos. En esta *norma*, las ecuaciones de campo de Einstein (3.10) tienen la forma (Ver apéndice A.1)

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta} - F(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}) = 0. \quad (3.12)$$

Cuando un sistema de ecuaciones para un conjunto de campos  $\{\phi_i(x)\}$  es tal que éstas se pueden poner en la forma

$$g^{\mu\nu}(x, \phi_j, \partial_\rho\phi_j)\partial_\mu\partial_\nu\phi_i - \mathcal{F}(x, \phi_j, \partial_\rho\phi_j) = 0, \quad (3.13)$$

decimos que tenemos un sistema hiperbólico cuasilineal de segundo orden. El Teorema 1 requiere justamente que las ecuaciones de la relatividad general tengan la forma (3.13), que en efecto es el caso de las ecuaciones (3.12).

Este procedimiento se puede generalizar para la relatividad general con campos de materia siempre y cuando las ecuaciones para los campos también sean de la forma (3.13). En este caso, las ecuaciones de constricción quedan como

$$8\pi G_N h_a{}^c(-n^b)T_{cb} = D_a K - D_b K_a{}^b, \quad (3.14)$$

$$8\pi G_N n^a n^b T_{ab} = \frac{1}{2} \left( {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab}K^{ab} \right). \quad (3.15)$$

donde  $n^a$  es el vector normal a  $\Sigma$ .

En el contexto de este trabajo, es de especial interés el caso en el que la materia corresponde a un campo escalar  $\phi$  con acción (2.22), como el visto en la sección (2.2.1), tal que su ecuación de campo es

$$(g^{ab}\nabla_a\nabla_b - m^2 - \xi R)\phi = 0, \quad (3.16a)$$

y la ecuación de Einstein es

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G_N}{1 - 8\pi G_N \xi \phi^2} \left\{ (1 - 2\xi)(\nabla_a\phi)(\nabla_b\phi) - 2\xi\phi\nabla_a\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab} \left[ (1 - 4\xi)g^{cd}(\nabla_c\phi)(\nabla_d\phi) + m^2\phi^2 - 4\xi\phi\Box\phi \right] \right\}. \quad (3.16b)$$

En el apéndice A.2 mostramos que siguiendo un procedimiento análogo al utilizado por Noakes en [65] para el caso  $\xi = 1/6$ , el sistema (3.16) puede llevarse a la forma (3.13), por lo que ese sistema tiene una buena formulación de valores iniciales con datos  $(h_{ab}, K_{ab}, \phi|_\Sigma, n^a\nabla_a\phi|_\Sigma)$  en  $\Sigma$ .

En contraste, el sistema de ecuaciones que resulta para nuestro modelo de gravedad semiclásica no es hiperbólico cuasilineal de segundo orden. De hecho, es inevitable la presencia de términos de orden superior en la ecuación semiclásica de Einstein bajo cualquier prescripción para el tensor de energía momento renormalizado, como ha mostrado Wald [57]. Al promover el campo  $\phi$  a un campo cuántico  $\hat{\Phi}$ , la expresión completa para la ecuación semiclásica de Einstein, bajo la prescripción explícita (2.26), tiene la forma<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(2\pi)^2} \left[ -\dot{w}_{ab} + \frac{1}{2}(1 - 2\xi)\nabla_a\nabla_b\dot{w} + g_{ab} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) \Box\dot{w} + \xi\dot{w}R_{ab} \right] \\ & + (2\alpha_1 + \alpha_2)\nabla_a\nabla_b R - \frac{1}{2} \left( 4\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1 - 5\xi}{480\pi^2} \right) \Box R g_{ab} - \alpha_2 \Box R_{ab} \\ & + \frac{1}{2} \left( \alpha_2 + \frac{1}{2880\pi^2} \right) R^{cd} R_{cd} g_{ab} - \frac{1}{5760\pi^2} R^{cdef} R_{cdef} g_{ab} \\ & + \frac{1}{2} \left( \alpha_1 - \frac{(1 - 6\xi)^2}{1152\pi^2} \right) R^2 g_{ab} - 2\alpha_1 R R_{ab} - 2\alpha_2 R^{cd} R_{cabd} \\ & - \frac{1}{8\pi G_N} R_{ab} + \frac{G_N (\frac{1}{6} - \xi) m^2 + 2\pi}{32\pi^2 G_N} R g_{ab} + \frac{\Lambda}{8\pi G_N} g_{ab} = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\Lambda$  es una constante cosmológica efectiva en la que se han absorbido términos de ambigüedad relacionados con la masa del campo. Asimismo,  $G_N$  es una constante de Newton efectiva que absorbe otros términos de ambigüedad, y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes de ambigüedad **adimensionales** asociadas con las densidades lagrangianas  $R^2$  y  $R^{cd}R_{cd}$ , y que en principio deberían determinarse experimentalmente, por lo que en nuestro tratamiento las

---

<sup>2</sup>Ver Apéndice B

consideraremos parámetros libres. En esta expresión,  $\overset{2}{w}_{ab}$  y  $\overset{0}{w}$  son coeficientes de la expansión de Taylor de la parte regular de  $G^+(x, y)$  proveniente de la teoría del campo  $\hat{\Phi}$  (Ver ecuación (2.15c)).

Reiteramos que ninguna combinación de los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  puede cancelar todos los términos de orden superior.

### 3.2.1. Modelo de escalares semiclásicos

Ante la complejidad formal de la ecuación semiclásica de Einstein completa, (3.17), estudiamos un sistema análogo de escalares semiclásicos, en los que un campo escalar *clásico*  $\psi \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  es acoplado con un campo *cuántico*  $\hat{\Phi}$  a través de el valor de expectación del observable  $\hat{\Phi}^2$ , de manera muy parecida a como ocurre en gravedad semiclásica.

Para definir la dinámica del sistema clásico, partimos de la acción clásica  $S[\psi, \phi]$  donde  $\psi \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ , dada por

$$S[\psi, \phi] = \int_{\mathcal{M}} dx^4 \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}(\nabla_a \psi \nabla^a \psi + M^2 \psi^2) - \frac{1}{2}(\nabla_a \phi \nabla^a \phi + m^2 \phi^2) - \lambda \psi \phi^2 \right], \quad (3.18)$$

definida sobre un espaciotiempo  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  globalmente hiperbólico fijo y de sección espacial compacta, es decir, tal que sus hipersuperficies de Cauchy  $\Sigma$  son compactas. La variación respecto a los campos  $\phi, \psi$  resulta en las ecuaciones de movimiento

$$(g^{ab} \nabla_a \nabla_b - M^2) \psi = \lambda \phi^2, \quad (3.19a)$$

$$(g^{ab} \nabla_a \nabla_b - m^2 - 2\lambda \psi) \phi = 0. \quad (3.19b)$$

por lo que el campo  $\psi$  juega un papel análogo al de la métrica en relatividad general, mientras que el campo  $\phi$  juega un papel análogo al de un campo de materia. Esta analogía está formalmente representada en este sistema en la manera en que se acoplan los campos: para  $\psi$  el campo  $\phi$  juega el papel de *fuentes*, mientras que para el campo  $\phi$  el campo  $\psi$  actúa como un potencial, destacando la semejanza entre la ecuación (3.19b) y la ecuación (2.23). En este sentido, la ecuación (3.19a) juega un papel análogo al de la ecuación de campo de Einstein

$$G_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}. \quad (3.20)$$

El acoplamiento convierte al sistema en un problema no lineal, por lo que conserva parte de la estructura de la relatividad general, a pesar de tener únicamente dos campos y ser, por lo tanto, mucho más sencillo.

Éste sistema tiene la ventaja de que no posee simetrías de norma, además de estar gobernado por ecuaciones hiperbólicas cuasilineales para cada campo, lo que garantiza que poseen una buena formulación de valores iniciales.

La versión semiclásica de este sistema, análoga a gravedad semiclásica, implica cuantizar  $\phi$  promoviéndolo a un campo  $\hat{\Phi}$  para el que se construye una teoría cuántica de campo

sobre el espaciotiempo  $(\mathcal{M}, g_{ab})$ , mientras que el campo  $\psi$  se acopla al valor de expectación renormalizado de  $\hat{\Phi}^2$  en un estado de Hadamard  $\Psi$  particular, resultando en el sistema

$$(\square - M^2)\psi = \lambda \langle \Psi | \hat{\Phi}^2 \Psi \rangle_{\text{ren}}, \quad (3.21a)$$

$$(\square - m^2 - 2\lambda\psi)\hat{\Phi} = 0. \quad (3.21b)$$

Nótese que, aunque formalmente podríamos definir la construcción de la teoría cuántica para el campo  $\hat{\Phi}$  a partir de la ecuación de campo (3.21b), suponiendo a  $\psi$  como un *potencial arbitrario*, encontrar una solución particular involucra resolver simultáneamente el problema para el campo  $\psi$  y encontrar el estado  $\Psi$  que hace que el sistema (3.21) sea autoconsistente. Ahora veremos que es posible formular rigurosamente este sistema si recurrimos al esquema de renormalización de Hadamard, y lo replanteamos en términos de la bidistribución  ${}^\Psi G^+$  para el campo  $\hat{\Phi}$  en el estado  $\Psi$ ,

$${}^\Psi G^+(u, v) = \langle \Psi | \hat{\Phi}(u) \hat{\Phi}(v) | \Psi \rangle, \quad (3.22)$$

donde  $u, v \in C_0^\infty(\mathcal{M})$  son funciones de prueba de soporte compacto. Por ende, el kernel distribucional  ${}^\Psi G^+(x, x')$  de la bidistribución  ${}^\Psi G^+$  es justamente la función de Wightman para el campo  $\hat{\Phi}$  en el estado  $\Psi$ . De este modo, el sistema de escalares semiclásicos se intercambia por el sistema

$$(\square_x - M^2)\psi(x) = \lambda \langle \Psi | \hat{\Phi}^2(x) \Psi \rangle_{\text{ren}}, \quad (3.23a)$$

$$(\square_x - m^2 - 2\lambda\psi(x)) {}^\Psi G^+(x, x') = 0, \quad (3.23b)$$

$$(\square_{x'} - m^2 - 2\lambda\psi(x')) {}^\Psi G^+(x, x') = 0, \quad (3.23c)$$

donde

$$\langle \Psi | \hat{\Phi}^2(x) \Psi \rangle_{\text{ren}} = \beta_1 m^2 + \lambda \beta_2 \psi(x) + \beta_3 R(x) + \lim_{x' \rightarrow x} ({}^\Psi G^+(x, x') - H_\ell(x, x')). \quad (3.24)$$

Los datos iniciales definidos sobre una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma \subset \mathcal{M}$  estarán dados por

$$\begin{cases} \psi|_\Sigma = \varsigma, \\ \nabla_n \psi|_\Sigma = \varpi, \end{cases} \quad (3.25a)$$

$$\begin{cases} {}^\Psi G^+|_\Sigma = {}^\Psi G_{\varphi\varphi}^+, \\ (\nabla_n \otimes 1) {}^\Psi G^+|_\Sigma = {}^\Psi G_{\pi\varphi}^+, \\ (1 \otimes \nabla_n) {}^\Psi G^+|_\Sigma = {}^\Psi G_{\varphi\pi}^+, \\ (\nabla_n \otimes \nabla_n) {}^\Psi G^+|_\Sigma = {}^\Psi G_{\pi\pi}^+. \end{cases} \quad (3.25b)$$

donde los datos iniciales para  ${}^\Psi G^+$  definen bidistribuciones sobre  $\Sigma$  que cumplen con las relaciones canónicas de conmutación, es decir, para  $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma$ , sus núcleos distribucionales cumplen que



- (i)  $\Psi G_{\varphi\pi}^+(\underline{x}, \underline{y}) - \Psi G_{\pi\varphi}^+(\underline{y}, \underline{x}) = i\delta(\underline{x}, \underline{y})/\det(h_{\alpha\beta}(\underline{x}))$ ,
- (ii)  $\Psi G_{\varphi\varphi}^+(\underline{x}, \underline{y}) - \Psi G_{\varphi\varphi}^+(\underline{y}, \underline{x}) = 0$ ,
- (iii)  $\Psi G_{\pi\pi}^+(\underline{x}, \underline{y}) - \Psi G_{\pi\pi}^+(\underline{y}, \underline{x}) = 0$ .

donde  $h_{\alpha\beta}$  son las entradas de la métrica inducida en  $\Sigma$ . Asimismo, incluyen la condición de hermiticidad en la forma

$$\Psi G_{\pi\varphi}^+(\underline{x}, \underline{y}) = \overline{\Psi G_{\varphi\pi}^+(\underline{y}, \underline{x})}. \quad (3.26)$$

Por último, los datos iniciales también deben corresponder a funciones de Wightman para estados de Hadamard, por lo que deben verificar también que

$$\Psi G_{\varphi\varphi}^+ - H\ell|_{\Sigma} \in C^\infty(\Sigma \times \Sigma), \quad (3.27a)$$

$$\Psi G_{\pi\varphi}^+ - (\nabla_n \otimes 1)H\ell|_{\Sigma} \in C^\infty(\Sigma \times \Sigma), \quad (3.27b)$$

$$\Psi G_{\varphi\pi}^+ - (1 \otimes \nabla_n)H\ell|_{\Sigma} \in C^\infty(\Sigma \times \Sigma), \quad (3.27c)$$

$$\Psi G_{\pi\pi}^+ - (\nabla_n \otimes \nabla_n)H\ell|_{\Sigma} \in C^\infty(\Sigma \times \Sigma). \quad (3.27d)$$

Si en lugar del campo  $\psi$  se toma un campo fijo  $\vartheta$ , no dinámico, el problema representado por las ecuaciones (3.23b) y (3.23c) con datos iniciales (3.25b) puede resolverse utilizando funciones de Green, ya que entonces el problema se vuelve lineal y es posible expresar la solución en términos del Kernel distribucional<sup>3</sup>  $\Psi G_\epsilon^+[\vartheta](x, y)$  a partir de sus datos iniciales<sup>4</sup> de acuerdo a la expresión

$$\begin{aligned} \Psi G_\epsilon^+[\vartheta](x, y) &= \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}')d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\varphi\varphi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') \left( (\nabla_n)_{\underline{x}'} E_\vartheta(\underline{x}', x) \right) \left( (\nabla_n)_{\underline{y}'} E_\vartheta(\underline{y}', y) \right) \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}')d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\varphi\pi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') \left( (\nabla_n)_{\underline{x}'} E_\vartheta(\underline{x}', x) \right) E_\vartheta(\underline{y}', y) \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}')d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\pi\varphi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') E_\vartheta(\underline{x}', x) \left( (\nabla_n)_{\underline{y}'} E_\vartheta(\underline{y}', y) \right) \\ &\quad + \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}')d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\pi\pi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') E_\vartheta(\underline{x}', x) E_\vartheta(\underline{y}', y), \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde  $E_\vartheta = E_\vartheta^- - E_\vartheta^+$  es la *función de Green*<sup>5</sup> avanzada-menos-retardada para el operador  $(\square - m^2 - 2\lambda\vartheta)$ , siendo  $E_\vartheta^-$  y  $E_\vartheta^+$  los correspondientes operadores fundamentales de Green

<sup>3</sup>Se introduce el subíndice  $\epsilon$  para denotar que para cierto  $\epsilon > 0$ ,  $\Psi G_\epsilon^+[\vartheta](x, y)$  es regular en el límite  $y \rightarrow x$ , y que a nivel distribucional se recupera  $\Psi G^+[\vartheta](u, v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Psi G_\epsilon^+[\vartheta](x, y)$ .

<sup>4</sup>Ver apéndice C

<sup>5</sup>Abusamos de la nomenclatura pues formalmente una función de Green resuelve una ecuación inhomogénea de la forma (3.29).

avanzado y retardado, respectivamente. Sus Kernel distribucionales cumplen con la ecuación de Green

$$(\square_x - m^2 - 2\lambda\vartheta(x))E_{\vartheta}^{\pm}(x, x') = \delta_g(x, x'), \quad (3.29)$$

y están definidos unívocamente por sus propiedades de soporte,

$$\text{supp}(E_{\vartheta}^{\pm} f) \subset J^{\pm} \text{supp}(f), \quad (3.30)$$

para toda función de prueba  $f \in C_0^{\infty}$ . Nótese que la convergencia de las integrales en (3.28) está garantizada para  $\epsilon > 0$  gracias a que  $\Sigma$  es compacta y a que  $\Psi G_{\varphi\varphi\epsilon}^+$ ,  $\Psi G_{\pi\varphi\epsilon}^+$ ,  $\Psi G_{\varphi\pi\epsilon}^+$  y  $\Psi G_{\pi\pi\epsilon}^+$  son regulares en  $\Sigma \times \Sigma$ .

Sin embargo, no es posible aplicar esta expresión directamente en el sistema en cuestión puesto que  $\psi$  no es un campo fijo  $\vartheta$ , sino que depende precisamente de  $\Psi G^+$ , por lo que el operador  $(\square - m^2 - 2\lambda\psi[\Psi G^+])$  ya no es lineal.

Ante esta situación se incorpora la suposición de que el parámetro de acoplamiento adimensional  $\lambda$  es *pequeño*,  $\lambda \ll 1$ , por lo que el sistema se puede descomponer en un conjunto de sistemas acoplados sucesivamente en cada orden en  $\lambda$ , haciendo posible utilizar métodos de Green para resolver el problema orden por orden en  $\lambda$ .

Adicionalmente, el que se cumplan las relaciones (3.27) en la hipersuperficie  $\Sigma$  no garantiza que esto se siga cumpliendo en hipersuperficies  $\Sigma^+ \subset J^{\pm}\Sigma$  en general. Sin embargo, sabemos que para el caso desacoplado esto si se cumple [66], y más aún: la adición de términos suaves ya sea como fuentes o potenciales no introducen singularidades adicionales a las funciones de dos puntos sobre ninguna hipersuperficie en  $J^{\pm}\Sigma$ . Por lo tanto, intercambiamos el parámetro del acoplamiento por una función suave  $\lambda\chi(x)$  (no dinámica) que *enciende* y *apaga* la interacción entre los campos preservando la forma de Hadamard de las funciones de dos puntos. La función  $\chi$  cumple que  $\text{Supp}(\chi) \subsetneq J^{\pm}\Sigma$ . De ahora en adelante sustituimos  $\lambda$  por  $\Lambda(x) \equiv \lambda\chi(x)$ , de modo que los datos iniciales (3.25) corresponden a datos para el problema desacoplado, ya que en la hipersuperficie  $\Sigma$  se anula el acoplamiento debido a que ahí no tiene soporte la función  $\chi$ .

Empezamos por expandir  $\psi$ ,  $\Psi G^+$  y  $H_{\ell}^0$  en potencias de  $\lambda$  hasta un orden fijo  $n$ ,

$$\psi = \sum_{k=0}^n \psi_k \lambda^k + O(\lambda^{n+1}), \quad (3.31a)$$

$$\Psi G^+ = \sum_{k=0}^n \Psi G_k^+ \lambda^k + O(\lambda^{n+1}), \quad (3.31b)$$

$$H_{\ell}^0 = \sum_{k=0}^n H_{\ell,k}^0 \lambda^k + O(\lambda^{n+1}), \quad (3.31c)$$

Para el cálculo de los coeficientes  $\psi_k$  de la ecuación (3.31a), desarrollamos el lado derecho de (3.24) como una serie de potencias en  $\lambda$  hasta orden  $n$ , junto con el desarrollo (3.31a),

para escribir

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{\Phi}^2(x) | \Psi \rangle &= \lim_{x' \rightarrow x} \left[ {}^\Psi G_0^+(x, x') - H_{\ell,0}(x, x') \right] + \beta_1 m^2 + \beta_3 R(x) \\ &+ \sum_{k=1}^n \left( \lim_{x' \rightarrow x} \left[ {}^\Psi G_k^+(x, x') - H_{\ell,k}(x, x') \right] + \beta_2 \chi(x) \psi_{k-1}(x) \right) \lambda^k + O(\lambda^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sea  $\mathfrak{W}_{\ell,k}(x) \equiv \lim_{x' \rightarrow x} \left[ {}^\Psi G_k^+(x, x') - H_{\ell,k}(x, x') \right]$ . Sustituyendo (3.32) en (3.23a) obtenemos

$$(\square_x - M^2)\psi_0(x) = 0, \quad (3.33a)$$

$$(\square_x - M^2)\psi_1(x) = \mathfrak{W}_{\ell,0}(x) + \beta_1 m^2 + \beta_3 R(x), \quad (3.33b)$$

$$(\square_x - M^2)\psi_k(x) = \mathfrak{W}_{\ell,k-1}(x) + \beta_2 \chi(x) \psi_{k-2}(x), \quad k \in \{2, \dots, n\}. \quad (3.33c)$$

Nótese que en (3.33) cada coeficiente  $\psi_k$  depende sólo de coeficientes  ${}^\Psi G_{k-1}^+$ ,  $H_{\ell,k-1}$  y  $\psi_{k-2}$ , es decir, todos correspondientes a un orden inferior en  $k$ . Por lo tanto, el sistema (3.33), sujeto a los datos iniciales  $\psi_k$ ,

$$\begin{cases} \psi_0|_\Sigma = \varsigma, \\ (\nabla_n \psi_0)|_\Sigma = \varpi, \end{cases} \quad (3.34a)$$

$$\begin{cases} \psi_k|_\Sigma = 0, & k \in \{1, \dots, n\}, \\ (\nabla_n \psi_k)|_\Sigma = 0, & k \in \{1, \dots, n\}, \end{cases} \quad (3.34b)$$

define un conjunto de problemas de valor inicial con fuentes no triviales. Sin embargo, estas fuentes pueden considerarse *fijas* puesto que están dadas en términos de correcciones de orden inferior en  $\lambda$ , por lo que cada uno de estos problemas puede ser resuelto en términos de funciones de Green.

Sean  $E_M^\pm$  las funciones de Green fundamentales avanzada y retardada para el operador  $(\square_x - M^2)$ , y sea  $E_M = E_M^- - E_M^+$ . Entonces, tendremos<sup>6</sup>

$$\psi_0(x) = \int_\Sigma d\Sigma(\underline{y}) \left[ E_M(x, \underline{y}) \varpi(\underline{y}) - \varsigma(\underline{y}) (\nabla_n)_{\underline{y}} E_M(x, \underline{y}) \right], \quad (3.35a)$$

para  $k = 0$  y

$$\psi_k(x) = \int_\Sigma d\Sigma(\underline{y}) \left[ \mathcal{J}_k(\underline{y}) (\nabla_n)_{\underline{y}} E_M(x, \underline{y}) - E_M(x, \underline{y}) \Pi_k(\underline{y}) \right] + E_M^+ J_k, \quad (3.35b)$$

para  $k \in \{1, \dots, n\}$ , donde

$$J_1 = \mathfrak{W}_{\ell,0}(x) + \beta_1 m^2 + \beta_3 R(x), \quad (3.36a)$$

$$J_k = \mathfrak{W}_{\ell,k-1}(x) + \beta_2 \chi(x) \psi_{k-2}(x), \quad k \in \{2, \dots, n\}, \quad (3.36b)$$

---

<sup>6</sup>Ver apéndice C

y

$$\mathcal{J}_k = (E_M^+ J_k)|_\Sigma, \quad (3.37a)$$

$$\Pi_k = (\nabla_n(E_M^+ J_k))|_\Sigma. \quad (3.37b)$$

Ahora procedemos a construir la solución perturbativa de  ${}^\Psi G^+$ , para lo que definimos los operadores  $E^\pm(x, x')$  por el desarrollo en potencias de  $\lambda$

$$E^\pm(x, x') = \sum_{k=0}^n E_k^\pm(x, x') \lambda^k + O(\lambda^{n+1}), \quad (3.38)$$

exigiendo que cumplan con la ecuación

$$(\square_x - m^2 - 2\lambda\chi(x)\psi(x))E^\pm(x, x') = \delta_g(x, x'), \quad (3.39)$$

así como con la propiedad

$$\text{supp}(E_k^\pm f) \subset J^\pm \text{supp}(f), \quad (3.40)$$

orden por orden en  $\lambda$ .

Sustituir el desarrollo (3.38) en (3.39) resulta en el sistema

$$(\square_x - m^2)E_0^\pm(x, x') = \delta_g(x, x'), \quad (3.41a)$$

$$(\square_x - m^2)E_k^\pm(x, x') = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j(x)\chi(x)E_{k-j-1}^\pm(x, x'), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.41b)$$

donde observamos que  $E_0^\pm(x, x')$  corresponden a las funciones de Green fundamentales avanzadas y retardadas para el problema desacoplado (3.41a). Tomando en cuenta la condición (3.40), se tiene que

$$E_k^\pm = 2E_0^\pm \left( \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j \chi E_{k-j-1}^\pm \right), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.42)$$

Nótese que en (3.42), para cada orden  $k$ , los términos  $E_k^\pm$  dependen sólo de  $\psi_j$  y  $E_j^\pm$  con  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ , es decir, a cada orden en  $\lambda$  los coeficientes  $E_k^\pm$  dependen sólo de coeficientes de orden inferior en  $\lambda$ . De este modo, los operadores  $E^\pm$

$$E_k^\pm = E_0^\pm + 2 \sum_{k=1}^n \lambda^k E_0^\pm \left( \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j \chi E_{k-j-1}^\pm \right) + O(\lambda^{n+1}), \quad (3.43)$$

admiten una construcción secuencial, por lo que a cada orden  $k$  en efecto representan funciones fundamentales de Green para el sistema acoplado a orden  $k$ .

Con este resultado, el cálculo de los coeficientes  $\Psi G_k^+$  en términos de los datos iniciales (3.25b) se simplifica haciendo uso del propagador *avanzado menos retardado*  $E = E^- - E^+$  aproximado a orden  $n$  en  $\lambda$ , con  $E^\pm$  dados por (3.43) y sustituyendo en (3.28). La expresión obtenida así es entonces

$$\begin{aligned}
\Psi G^+(x, y) &= \sum_{i=0}^n (\Psi G^+)_i(x, y) \lambda^i + O(\lambda^{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^n \lambda^i \sum_{j=0}^i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}') d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\varphi\varphi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') E_j(\underline{x}', x) E_{i-j}(\underline{y}', y) \right. \\
&\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}') d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\varphi\pi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') ((\nabla_n)_{\underline{x}'} E_j(\underline{x}', x)) E_{i-j}(\underline{y}', y) \\
&\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}') d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\pi\varphi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') E_j(\underline{x}', x) ((\nabla_n)_{\underline{y}'} E_{i-j}(\underline{y}', y)) \\
&\quad \left. + \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}') d\Sigma(\underline{y}') \Psi G_{\varphi\varphi\epsilon}^+(\underline{x}', \underline{y}') ((\nabla_n)_{\underline{x}'} E_j(\underline{x}', x)) ((\nabla_n)_{\underline{y}'} E_{i-j}(\underline{y}', y)) \right] \\
&\quad + O(\lambda^{n+1}). \tag{3.44}
\end{aligned}$$

La ecuación (3.44) revela que cada coeficiente  $\Psi G_k^+$  de la expansión (3.31b) depende en los coeficientes  $E_i^\pm$  con  $i \in \{0, \dots, k\}$ , y por lo tanto dependen únicamente en los coeficientes  $\psi_j$ ,  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ . Así mismo, se puede ver<sup>7</sup> que los coeficientes  $H_{\ell,k}$  incluyen una dependencia únicamente en términos de  $\psi_j$  con  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ , completando los requerimientos para realizar la construcción secuencial del sistema (3.23) sujeto a datos iniciales (3.25). Decimos entonces que  $\Psi G^+$  es una función de Wightman de orden  $n$  para  $\square - m^2 - 2\lambda\chi\psi$  definiendo un estado de Hadamard de orden  $n$ .

Recapitulando, encontramos que es posible recuperar una formulación de valores iniciales para el sistema semiclásico (3.23) si se realiza una expansión a un orden finito arbitrario en el parámetro  $\lambda$ . Esto nos ha permitido desacoplar el sistema orden por orden. El resultado es una sucesión de ecuaciones hiperbólicas lineales con fuentes, mismas que pueden resolverse con métodos de funciones de Green a partir de datos iniciales sobre una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$  para la función de dos puntos  $\Psi G^+(x, y)$  y sus derivadas normales  $\overset{x}{\nabla}_n \Psi G^+(x, y)$ ,  $\overset{y}{\nabla}_n \Psi G^+(x, y)$  y  $\overset{x}{\nabla}_n \overset{y}{\nabla}_n \Psi G^+(x, y)$ , así como  $\psi$  y su derivada normal  $\nabla_n \psi$ .

La principal diferencia entre el modelo de escalares y el problema de la gravedad semiclásica es que en la renormalización del observable  $\langle \Psi | \hat{\Phi}^2 \Psi \rangle_{\text{ren}}$ , la métrica del espaciotiempo es conocida, así como la distancia geodésica y funciones de ella. Por ende, los términos que aparecen en la forma de Hadamard pueden definirse sin mayor problema a cada orden, permitiendo el desacople total del sistema. Asimismo, en el caso de los escalares semiclásicos, se introdujo una función  $\chi$  con soporte compacto espaciotemporal que permite encender y apagar la interacción (en términos del parámetro  $\lambda$ ). Gracias a ella, el problema primero

<sup>7</sup>Ver apéndice E

se resolvió partiendo de datos para escalares libres que interactúan sólo en cierto intervalo temporal y se vuelven a desacoplar. Mostramos cómo suavizar este requerimiento y cómo es posible *corregir* datos iniciales libres para representar datos adecuados para el sistema interactuante, siempre y cuando ésta interacción sea *débil* ( $\lambda \ll 1$ ).

En gravedad semiclásica no es posible *apagar* la interacción en ninguna región del espaciotiempo, y la renormalización del Tensor de Energía-Momento requiere conocer la métrica del espaciotiempo de antemano para poder calcular la distancia geodésica y los términos de la solución de Hadamard. Ésto introduce una dificultad adicional cuando intentamos plantear el problema en términos de datos iniciales para el campo en conjunto con datos para la métrica  $h_{ab}$  inducida sobre  $\Sigma_c$ .

Una manera de ver esto es que la ecuación (3.17) es de cuarto orden en derivadas de la métrica, por lo que en principio su problema de valores iniciales requeriría datos hasta de tercer orden en *derivadas normales* de  $h_{ab}$ . Pero, como veremos en la siguiente sección, para calcular el tensor de energía-momento renormalizado es necesario conocer datos en la hipersuperficie inicial correspondientes a un cuarto orden en *derivadas normales* de  $h_{ab}$ .

### 3.2.2. Datos Iniciales para gravedad semiclásica

El problema de valores iniciales para gravedad semiclásica implica resolver simultáneamente el problema de valores iniciales para la métrica y para el campo cuántico, en términos de los datos iniciales sobre una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$  para cada uno de ellos.

Si no tomamos en cuenta la dinámica del espaciotiempo, tal como se realizó en el caso del modelo de escalares semiclásicos de la sección anterior, el problema de valores iniciales para el campo se traduce en una formulación de valores iniciales para el sistema de *segundo orden*

$$(\square_x - m^2 - \xi R(x)) \Psi G^+(x, y) = 0, \quad (3.45)$$

$$(\square_y - m^2 - \xi R(y)) \Psi G^+(x, y) = 0, \quad (3.46)$$

y por ende sus datos iniciales corresponden a  $\Psi G^+(x, y)$ ,  $\overset{x}{\nabla}_n \Psi G^+(x, y)$ ,  $\overset{y}{\nabla}_n \Psi G^+(x, y)$  y  $\overset{x}{\nabla}_n \overset{y}{\nabla}_n \Psi G^+(x, y)$  evaluados sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ .

Sin embargo, en nuestro modelo de gravedad semiclásica, es necesario que se cumpla de manera simultánea la ecuación (3.17) en términos de  $h_{ab}$ ,  $K_{ab}$  y sus derivadas. En dicha ecuación están incluidos los términos  $\overset{2}{w}_{ab}$ ,  $\nabla_a \nabla_b \overset{0}{w}$ ,  $\square \overset{0}{w}$  y  $\overset{0}{w}$ , que corresponden a los términos de la expansión covariante de Taylor para la parte regular  $w(x, y)$  de la función de Wightman  $G^+$ , tal como vimos en la sección (2.2.1), trabajando bajo la hipótesis de que el estado del campo cuántico tiene la estructura singular de Hadamard.

La primera dificultad que señalamos en este modelo es que para calcular la parte singular de  $\Psi G^+$ , es decir, la *parametriz* de Hadamard, es necesario calcular la distancia geodésica al cuadrado,  $2\sigma(x, y)$ , así como las funciones regulares  $\Delta^{1/2}(x, y)$  y  $v(x, y)$  que aparecen en la

expresión (2.14). Éstas funciones están determinadas por la métrica y el operador de Klein-Gordon. Los términos que involucran estas funciones se llevan al límite de coincidencia  $y \rightarrow x$  y se pueden expresar en términos de la curvatura del espaciotiempo y sus derivadas normales. Por lo tanto, los términos  $\overset{2}{w}_{ab}$ , así como  $\overset{0}{w}$  y sus derivadas en (3.17), en términos de  $\Psi G^+$ , incluyen varias derivadas de la métrica inducida sobre la superficie.

Veremos que para calcular los términos que aparecen en (3.17) basta con conocer sólo cierto número de términos de las expansiones covariantes de Taylor para las funciones  $\Delta^{1/2}(x, y)$  y  $v(x, y)$ , así como los límites de coincidencia de cierto número de derivadas de la distancia geodésica al cuadrado,  $2\sigma(x, y)$ . Por lo tanto, el primer paso para formalizar el planteamiento de este problema consiste en estimar el orden de aproximación necesario para cada una de estas funciones.

Para realizar la estimación del orden para cada función, suponemos que contamos con aproximaciones para cada una de las funciones que nos interesan, y que éstas son tales que permiten calcular de manera exacta el límite de coincidencia de un número  $r_B$  de las derivadas de las funciones de interés. Aquí  $B \in \{\Delta^{1/2}, v, \sigma\}$ .

A continuación, veamos que podemos centrarnos en un sólo término para conocer el orden de aproximación necesario para estas funciones. Notemos que la prescripción de *separación de punto* (2.26) para el tensor de energía momento requiere calcular derivadas de una función biescalar sobre puntos diferentes antes de tomar el límite de coincidencia, y se requiere hacer este proceso sobre diferentes combinaciones de derivadas y puntos. Sin embargo, la generalización del teorema de Synge dada por Christensen [58],

$$\lim_{y \rightarrow x} \overset{y}{\nabla}_c A_{a_1 \dots a_n b'_1 \dots b'_m}(x, y) = \overset{x}{\nabla}_c \left[ \lim_{y \rightarrow x} A_{a_1 \dots a_n b'_1 \dots b'_m}(x, y) \right] - \lim_{y \rightarrow x} \overset{x}{\nabla}_c A_{a_1 \dots a_n b'_1 \dots b'_m}(x, y), \quad (3.47)$$

permite calcular cualquier combinación de límites de coincidencia de derivadas en  $x$  e  $y$ , en términos de los límites de todas las derivadas de igual o menor orden en uno de los puntos. En (3.47) los índices *primados* hacen referencia a índices *evaluados* en  $y$ , mientras que los índices no primados se evalúan en  $x$ , es decir, que para cada par de puntos  $x$ ,  $y$  se tiene

$$A_{a_1 \dots a_n b'_1 \dots b'_m}(x, y) = \sum_k \overset{k_x}{\mathbf{A}}_{a_1 \dots a_n}(x) \overset{k_y}{\mathbf{A}}_{b'_1 \dots b'_m}(y), \quad (3.48)$$

para algunos tensores  $\overset{k_x}{\mathbf{A}}_{a_1 \dots a_n}$  y  $\overset{k_y}{\mathbf{A}}_{b'_1 \dots b'_m}$  evaluados en  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Por lo tanto, basaremos el resto de la determinación del orden de aproximación en el análisis del término de mayor orden en (2.26), es decir,

$$\overset{x}{\nabla}_a \overset{x}{\nabla}_b \left[ G_\psi^+(x, y) - H^\ell(x, y) \right], \quad (3.49)$$

ya que de este término se pueden derivar el resto de combinaciones.

Ahora formalizamos la noción de aproximación de una función biescalar que tomaremos para los fines de esta sección:

**Definición 1.** Sea  $x \in M$  e  $y \in \mathcal{D}_x \subset M$  con  $\mathcal{D}_x$  una vecindad normal convexa de  $x$ ,  $y$   $A(x, y) : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  una función biescalar. Decimos que  $B(x, y) : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una aproximación de orden  $2n$  de  $A(x, y)$  en  $\mathcal{D}_x$ , si y sólo si para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , con  $0 \leq k \leq 2n$ , se cumple que

$$\lim_{y \rightarrow x} \overset{x}{\nabla}_{a_k} \dots \overset{x}{\nabla}_{a_1} B(x, y) = \lim_{y \rightarrow x} \overset{x}{\nabla}_{a_k} \dots \overset{x}{\nabla}_{a_1} A(x, y). \quad (3.50)$$

Asimismo, dada una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , denotamos a la  $n$ -ésima derivada direccional en la dirección de  $w^a$  por

$$\overset{x}{\nabla}_w^n f(x) \equiv w^{b_n} \overset{x}{\nabla}_{b_n} \left( w^{b_{n-1}} \overset{x}{\nabla}_{b_{n-1}} \left( \dots \left( w^{b_1} \overset{x}{\nabla}_{b_1} f(x) \right) \dots \right) \right). \quad (3.51)$$

Una vez establecidos estos conceptos, estamos en posición de enunciar y probar el siguiente

**Teorema 2.** Sea  $\psi$  un estado de Hadamard<sup>8</sup> dentro de la teoría cuántica de un campo escalar de Klein-Gordon con función de dos puntos  $G_\psi^+(x, y) : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  y sean  $x \in M$ ,  $y \in \mathcal{D}_x - \{x\}$ ,

$$F(x, y) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^2} \left( \frac{U(x, y)}{\mathcal{S}(x, y)} + \tilde{v}(x, y) \log \left( \frac{\mathcal{S}(x, y)}{\ell^2} \right) + \tilde{w}(x, y) \right), \quad (3.52)$$

donde  $\mathcal{S}(x, y)$ ,  $U(x, y)$ ,  $\tilde{v}(x, y)$  y  $\tilde{w}(x, y)$  son las aproximaciones de orden  $2n_S$ ,  $2n_U$ ,  $2n_v$  y  $2n_w$  de las funciones biescalares  $\sigma(x, y)$ ,  $\Delta^{1/2}(x, y)$ ,  $v(x, y)$  y  $w(x, y)$  respectivamente, que aparecen en la expansión de Hadamard de  $G_\psi^+(x, y)$  en  $\mathcal{D}_x$ ,

$$G_\psi^+(x, y) \equiv \frac{1}{2(2\pi)^2} \left( \frac{\Delta^{1/2}(x, y)}{\sigma(x, y)} + v(x, y) \log \left( \frac{\sigma(x, y)}{\ell^2} \right) + w(x, y) \right), \quad (3.53)$$

con  $n_S \geq 3$ ,  $n_U \geq 2$ ,  $n_v \geq 1$  y  $n_w \geq 1$ . Entonces, el tensor de energía-momento obtenido mediante la prescripción de Wald (2.26) con  $G_\psi^+(x, y)$  reemplazado por  $F(x, y)$  coincide con el tensor obtenido según la prescripción original (2.26) con  $G_\psi^+(x, y)$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{Y}_{ab}(x, y) \equiv \mathcal{T}_{ab}(F(x, y)) - \mathcal{T}_{ab}(G_\psi^+(x, y))$ , con  $\mathcal{T}_{ab}$  dado por la ecuación (2.27). Por construcción de  $F(x, y)$ , los términos no singulares de  $\mathcal{Y}_{ab}(x, y)$  tienden a cero en el límite de coincidencia  $y \rightarrow x$ , dado que las primeras dos derivadas de  $\tilde{w}$  coincidirán con las correspondientes derivadas de  $w$ , y  $\mathcal{T}_{ab}$  incluye a lo mucho derivadas de segundo orden, por lo que también coincidirán los límites para términos con orden inferior de derivadas. Para los términos que podrían introducir una diferencia, definimos

$$\sigma \delta(x, y) \equiv \sigma(x, y) - \mathcal{S}(x, y), \quad (3.54a)$$

$$U \delta(x, y) \equiv \Delta^{1/2}(x, y) - U(x, y), \quad (3.54b)$$

$$v \delta(x, y) \equiv v(x, y) - \tilde{v}(x, y), \quad (3.54c)$$

<sup>8</sup>Hemos omitido el regulador  $i\epsilon(T(x) - T(y))$  ya que en este cálculo no tiene ningún efecto.



y notemos que por construcción, todas las derivadas hasta el orden  $2n$  de estos biescalares tienden a cero en el límite de coincidencia. A continuación despejamos  $\mathcal{S}$ ,  $U$  y  $\tilde{v}$  de (3.54) y sustituimos en (3.52).

En lo que sigue, omitimos la especificación de la dependencia del punto en pos de claridad tipográfica, dando por entendido que las derivadas se tomarán en  $x$ . Asimismo, se denotará por  $[ \ ]$  al límite de coincidencia y  $\rightarrow x$  sobre una trayectoria arbitraria que va de  $y$  a  $x$  y que tiene vector tangente unitario  $w^a$ .

Entonces, podemos escribir las componentes coordenadas de la segunda derivada de la diferencia de  $F$  y  $G_\psi^+$ ,

$$E_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu (F - G_\psi^+), \quad (3.55)$$

resultando en una expresión de la forma

$$E_{\mu\nu} = \mathcal{E}_{\mu\nu} + \left( \log \left( \frac{\sigma - (\sigma\delta)}{l^2} \right) - \log \left( \frac{\sigma}{l^2} \right) \right) \nabla_\mu \nabla_\nu v - \log \left( \frac{\sigma - (\sigma\delta)}{l^2} \right) \nabla_\mu \nabla_\nu ({}^v\delta), \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu\nu} = & \left\{ (\sigma\delta)^3 \left( -2\Delta^{1/2} \nabla_\mu \sigma \nabla_\nu \sigma - \sigma^2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \Delta^{1/2} + \nabla_\mu \sigma \nabla_\nu v + \nabla_\nu \sigma \nabla_\mu v + v \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sigma (\nabla_\mu \sigma \nabla_\nu \Delta^{1/2} + \Delta^{1/2} \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma + \nabla_\nu \sigma (\nabla_\mu \Delta^{1/2} + v \nabla_\mu \sigma)) \right) \right. \\ & + \sigma (\sigma\delta)^2 \left( \sigma^2 (\nabla_\mu \nabla_\nu ({}^\Delta\delta) + \nabla_\nu (\sigma\delta) (\nabla_\mu v - \nabla_\mu ({}^v\delta))) + \nabla_\mu (\sigma\delta) (\nabla_\nu v - \nabla_\nu ({}^v\delta)) \right. \\ & \left. + \nabla_\mu \sigma (\nabla_\nu ({}^v\delta) + 2\nabla_\nu v) + \nabla_\nu \sigma (\nabla_\mu ({}^v\delta) + 2\nabla_\mu v) \right. \\ & \left. + (v - ({}^v\delta)) \nabla_\mu \nabla_\nu (\sigma\delta) + (({}^v\delta) + 2v) \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Delta^{1/2} \right) \\ & \left. - 3\sigma (\nabla_\mu \sigma \nabla_\nu \Delta^{1/2} + \Delta^{1/2} \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma + \nabla_\nu \sigma (\nabla_\mu \Delta^{1/2} + v \nabla_\mu \sigma)) \right. \\ & \left. + 6\Delta^{1/2} \nabla_\mu \sigma \nabla_\nu \sigma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma^2(\sigma\delta) \left( -\sigma^2(2\nabla_\nu(\sigma\delta)(\nabla_\mu v - \nabla_\mu({}^v\delta)) + 2\nabla_\mu(\sigma\delta)(\nabla_\nu v - \nabla_\nu({}^v\delta)) \right. \\
& \quad + 2\nabla_\mu\nabla_\nu(\Delta\delta) + 2(v - ({}^v\delta))\nabla_\mu\nabla_\nu(\sigma\delta) \\
& \quad + \nabla_\mu\sigma(2\nabla_\nu({}^v\delta) + \nabla_\nu v) + \nabla_\nu\sigma(2\nabla_\mu({}^v\delta) + \nabla_\mu v) \\
& \quad + (2({}^v\delta) + v)\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma + \nabla_\mu\nabla_\nu\Delta^{1/2}) \\
& + \sigma(\nabla_\mu(\sigma\delta)(\nabla_\nu\Delta^{1/2} - \nabla_\nu(\Delta\delta)) + (\Delta^{1/2} - (\Delta\delta))\nabla_\mu\nabla_\nu(\sigma\delta) \\
& \quad + \nabla_\nu(\sigma\delta)(-\nabla_\mu(\Delta\delta) + (({}^v\delta) - v)(\nabla_\mu(\sigma\delta) - \nabla_\mu\sigma) + \nabla_\mu\Delta^{1/2}) \\
& \quad + \nabla_\nu\sigma(\nabla_\mu(\Delta\delta) + (v - ({}^v\delta))\nabla_\mu(\sigma\delta) + (({}^v\delta) + 2v)\nabla_\mu\sigma + 2\nabla_\mu\Delta^{1/2}) \\
& \quad + \nabla_\mu\sigma(\nabla_\nu(\Delta\delta) + 2\nabla_\nu\Delta^{1/2}) + ((\Delta\delta) + 2\Delta^{1/2})\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma) \\
& \quad \left. - 6\Delta^{1/2}\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma \right) \\
& + \sigma^3 \left( 2((\Delta\delta) - \Delta^{1/2})\nabla_\mu(\sigma\delta)(\nabla_\nu(\sigma\delta) - \nabla_\nu\sigma) \right. \\
& \quad + 2\nabla_\mu\sigma((\Delta^{1/2} - (\Delta\delta))\nabla_\nu(\sigma\delta) + (\Delta\delta)\nabla_\nu\sigma) \\
& + \sigma(\nabla_\mu(\sigma\delta)(\nabla_\nu(\Delta\delta) - \nabla_\nu\Delta^{1/2}) + ((\Delta\delta) - \Delta^{1/2})\nabla_\mu\nabla_\nu(\sigma\delta) \\
& \quad + \nabla_\nu(\sigma\delta)(\nabla_\mu(\Delta\delta) - (({}^v\delta) - v)(\nabla_\mu(\sigma\delta) - \nabla_\mu\sigma) - \nabla_\mu\Delta^{1/2}) \\
& \quad - \nabla_\nu\sigma(\nabla_\mu(\Delta\delta) + (v - ({}^v\delta))\nabla_\mu(\sigma\delta) + ({}^v\delta)\nabla_\mu\sigma) \\
& \quad - \nabla_\nu(\Delta\delta)\nabla_\mu\sigma - (\Delta\delta)\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma) \\
& + \sigma^2(\nabla_\mu\nabla_\nu(\Delta\delta) + \nabla_\nu(\sigma\delta)(\nabla_\mu v - \nabla_\mu({}^v\delta)) + \nabla_\mu(\sigma\delta)(\nabla_\nu v - \nabla_\nu({}^v\delta)) \\
& \quad + (v - ({}^v\delta))\nabla_\mu\nabla_\nu(\sigma\delta) + \nabla_\nu({}^v\delta)\nabla_\mu\sigma + \nabla_\mu({}^v\delta)\nabla_\nu\sigma \\
& \quad \left. + ({}^v\delta)\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma) \right) \Big/ \{\sigma^3(\sigma\delta - \sigma)^3\} \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Notemos que  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$  ya se encuentra arreglado de modo que su límite de coincidencia sea de la forma 0/0. Con la ayuda de la derivada direccional definida en (3.51), se obtiene en la décimo primera aplicación de la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{E}_{\mu\nu}] = & -\frac{1}{90} \left\{ 2[\nabla_w^6 \sigma\delta](g_{\mu\nu} - 6w_\mu w_\nu) + 24w_{(\mu}[\nabla_w^5 \nabla_{\nu)} \sigma\delta] - 15[\nabla_w^4 \nabla_\mu \nabla_\nu \sigma\delta] \right. \\
& - 15[\nabla_w^4 \Delta\delta](g_{\mu\nu} - 4w_\mu w_\nu) - 120w_{(\mu}[\nabla_w^3 \nabla_{\nu)} \Delta\delta] + 90[\nabla_w^2 \nabla_\mu \nabla_\nu \Delta\delta] \\
& \left. + 90[\nabla_w^2 {}^v\delta](g_{\mu\nu} - 2w_\mu w_\nu) + 360w_{(\mu}[\nabla_w \nabla_{\nu)} {}^v\delta] \right\}. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

que se anula dado que el numerador está compuesto de términos que multiplican límites de derivadas de las funciones  ${}^X\delta$  ( $X \in \{\sigma, U, v\}$ ) de orden  $6 \leq 2n_S$ ,  $4 \leq 2n_U$  y  $2 \leq 2n_v$ .

Si agrupamos los términos logarítmicos en (3.56) que multiplican a  $\nabla_\mu\nabla_\nu v$ , podemos verificar que

$$\left[ \log \left( \frac{\sigma - ({}^\sigma\delta)}{\sigma} \right) \nabla_\mu \nabla_\nu v \right] = \log \left( \left[ \frac{\sigma - ({}^\sigma\delta)}{\sigma} \right] \right) [\nabla_\mu \nabla_\nu v] = 0, \tag{3.59}$$

por aplicación directa de la regla de L'Hôpital sobre el argumento del logaritmo. El término logarítmico restante se anula dado que  $[\nabla_\mu\nabla_\nu({}^v\delta)]$  se anula. Por lo tanto,

$$[E_{\mu\nu}] = 0. \tag{3.60}$$

Los límites de coincidencia de los demás términos en  $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$  pueden escribirse en términos de  $[E_{\mu\nu}]$  (y términos de menor orden de derivadas con límites que se anulan) por medio de la regla de Sygne, y por lo tanto

$$[\mathcal{Y}_{\mu\nu}] = 0. \quad (3.61)$$

□

Nótese que los requisitos sobre el orden de aproximación de cada biescalar representan criterios suficientes, mas no necesarios para obtener el resultado  $[\mathcal{Y}_{\mu\nu}] = 0$ . Es decir, no se puede descartar que en algunos casos se obtengan expresiones exactas para el tensor de energía-momento, contando solamente con aproximaciones de menor orden. Un ejemplo inmediato se tendría en el caso de espaciotiempos que puedan foliarse con hipersuperficies de curvatura constante.

El siguiente lema nos permite aplicar directamente este resultado al caso de hipersuperficies de datos iniciales.

**Lema 3.** *Si  $x$  y  $y$  en el teorema 2 pertenecen a una misma hipersuperficie  $\Sigma$  y  $D_x \cap \Sigma$  es, de manera intrínseca en  $\Sigma$ , una región local convexa, uno puede escoger la única trayectoria geodésica que va de  $y$  a  $x$  para el cálculo del límite de coincidencia y  $\rightarrow x$ , de modo que las derivadas direccionales en la prueba del mismo teorema se convierten en los límites de derivadas tangentes, con  $w^a$  vector geodésico afín en  $\Sigma$  que va de  $y$  a  $x$ .*

*Demostración.* Procediendo por inducción, verificamos que se cumple la hipótesis para el caso  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_w^1 f &= w^{a_1} \nabla_{a_1} f \\ &= w^{a_1} D_{a_1} f. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la identidad para vectores geodésicos de  $\Sigma$ ,

$$w^a \nabla_a w^b = (K_{ac} w^a w^c) n^b, \quad (3.62)$$

verificamos que se cumple con la hipótesis inductiva en el caso  $n + 1$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_w^{n+1} f &= w^{a_{n+1}} \nabla_{a_{n+1}} (w^{a_n} w^{a_{n-1}} \dots w^{a_1} D_{a_n} D_{a_{n-1}} \dots D_{a_1} f) \\ &= (w^{a_{n+1}} \nabla_{a_{n+1}} w^{a_n}) w^{a_{n-1}} \dots w^{a_1} D_{a_n} D_{a_{n-1}} \dots D_{a_1} f \\ &\quad + w^{a_n} (w^{a_{n+1}} \nabla_{a_{n+1}} w^{a_{n-1}}) w^{a_{n-2}} \dots w^{a_1} D_{a_n} D_{a_{n-1}} \dots D_{a_1} f + \dots \\ &\quad + w^{a_n} w^{a_{n-1}} \dots w^{a_1} w^{a_{n+1}} \nabla_{a_{n+1}} D_{a_n} D_{a_{n-1}} \dots D_{a_1} f \\ &= (w^{a_{n+1}} K_{a_{n+1}b} w^c n^{a_n}) w^{a_{n-1}} \dots w^{a_1} D_{a_n} D_{a_{n-1}} \dots D_{a_1} f \\ &\quad + w^{a_n} (w^{a_{n+1}} K_{a_{n+1}c} w^c n^{a_{n-1}}) w^{a_{n-2}} \dots w^{a_1} D_{a_n} D_{a_{n-1}} \dots D_{a_1} f + \dots \\ &\quad + w^{a_{n+1}} w^{a_n} w^{a_{n-1}} \dots w^{a_1} \nabla_{a_{n+1}} D_{a_n} \dots D_{a_1} f \\ &= w^{a_{n+1}} w^{a_n} w^{a_{n-1}} \dots w^{a_1} D_{a_{n+1}} D_{a_n} \dots D_{a_1} f. \end{aligned}$$

□

**Corolario:** Para puntos  $x, y \in \Sigma$ , las derivadas direccionales que aparecen en el teorema 2 pueden reemplazarse por derivadas direccionales tangentes a la hipersuperficie  $\Sigma$ .

Notemos que para reconstruir el tensor de energía-momento según se plantea en el teorema 2 primero es necesario contar con las aproximaciones que satisfagan la condición (3.50) a los órdenes adecuados. Para  $\mathcal{S}(x, y)$  consideraremos una expansión en serie de Taylor sobre la hipersuperficie  $\Sigma$  en términos de  $D_a \mathbf{q}$ , donde  $\mathbf{q}(x, y)$  es un medio de la distancia geodésica intrínseca en  $\Sigma$ , al cuadrado. Sin embargo, una expansión de este tipo no basta para construir objetos como  $\nabla_a \nabla_b \mathcal{S}$ , ya que  $\mathbf{q}(x, y)$  no está definida para puntos que no se encuentran ambos sobre la misma hipersuperficie  $\Sigma$ . Entonces, es necesario plantear una serie nueva para términos de la formas  $\nabla_n \mathcal{S}(x, y)$  y  $\nabla_n^2 \mathcal{S}(x, y)$ , tales que cumplan con los límites de coincidencia para  $\nabla_n \Sigma$ ,  $\nabla_n^2 \Sigma$  así como sus derivadas tangentes hasta el orden que les corresponde. Este orden es 5 para  $\nabla_n \mathcal{S}(x, y)$  y 4 para  $\nabla_n^2 \mathcal{S}(x, y)$ , ya que así el número total de derivadas cuyos límites coinciden de manera exacta para la aproximación de  $\mathbf{q}$  es justamente 6, garantizando que  $[\mathcal{E}_{\mu\nu}]$  se anule. Estas expansiones se calculan explícitamente en el apéndice G.

Nuestro interés al realizar estas estimaciones es determinar el orden de *derivadas temporales* de la métrica involucrados en la formulación del problema de valores iniciales cuando se utiliza un objeto aproximado como regularizador de estados de Hadamard. Dichas derivadas temporales deben entenderse como la proyección tangente de la derivada de Lie de  $h_{ab}$  a lo largo del vector  $t^a$  según se define en el apéndice F. Esto se traduce, en términos numéricos, a que el conteo de *derivadas temporales* para la métrica inducida es justamente igual a uno más el número de derivadas de la curvatura extrínseca en la dirección normal,  $\dot{d} K_{a_1 a_0} = -n^b \nabla_b K_{a_1 a_0}$ .

El resultado de construir estas expansiones para  $\mathcal{S}$  explícitamente en el apéndice G hasta sexto orden en derivadas tangentes de  $\mathcal{S}$  es que el término de mayor orden es de la forma  $K_{a_1 a_2} K_{a_3 a_4} \dot{d} K_{a_5 a_6}$ . Esto quiere decir que la aproximación  $\mathcal{S}$  involucra, a lo más, segundas derivadas temporales de  $h_{ab}$ . De manera análoga, para  $\dot{d} \mathcal{S}$ , se obtiene que el término de mayor orden de derivadas temporales es  $\dot{d} K_{a_4 a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0}$ , correspondiente todavía a un orden dos en derivadas de la métrica. Por último, el término principal de la aproximación  $\dot{d}^2 \mathcal{S}$  es  $K_{a_3 a_2} \dot{d}^2 K_{a_1 a_0}$ , que representa una derivada de tercer orden en el tiempo para  $h_{ab}$ .

Es decir, una aproximación que permite calcular el tensor de energía-momento regularizado introduce, por parte de la aproximación de la distancia geodésica, hasta terceras derivadas temporales de la métrica inducida.

También es necesario estudiar las aproximaciones  $U(x, y)$  y  $\tilde{v}(x, y)$ . En estos casos no es necesario realizar expansiones en términos de la distancia geodésica de la hipersuperficie, sino que aprovechamos las expansiones en series de Taylor Covariantes calculadas por Décanini & Folacci [60], por lo que para fines de conteo nos basta con expandir los coeficientes de Taylor en cada caso en su forma 3 + 1 para ubicar los términos que involucran derivadas temporales de la métrica inducida.

En el caso de  $U$ , el cuarto coeficiente de su serie de Taylor en [60] es

$$u_{0a_3a_2a_1a_0} = \frac{3}{10}\nabla_{(a_3}\nabla_{a_2}R_{a_1a_0)} + \frac{1}{12}R_{(a_3a_2}R_{a_1a_0)} + \frac{1}{15}R_{b_1(a_3|b_0|a_2}R^{b_1}_{a_1}{}^{b_0}_{a_0)} \quad (3.63)$$

$$= \frac{3}{10}n_{(a_3}n_{a_2}\bar{d}^3K_{a_1a_0)} + \dots, \quad (3.64)$$

es decir, se involucra una derivada temporal de cuarto orden para  $h_{ab}$ . De manera similar para  $\tilde{v}$ , se tiene para el segundo coeficiente de Taylor de  $v_0$  es de la forma

$$\begin{aligned} v_{0a_1a_0} &= -\frac{1}{40}\left(\nabla_{a_1}\nabla_{a_0}R + \frac{1}{3}\square R_{a_1a_0}\right) + \dots \\ &= \bar{d}^3K_{a_1a_0} + 7n_{a_1}n_{a_0}\bar{d}^3K + \dots, \end{aligned} \quad (3.65)$$

es decir, se involucran cuartas derivadas temporales de la métrica inducida  $h_{ab}$ . Finalmente, el primer coeficiente para el coeficiente  $v_1$  incluye un término de la forma

$$\square R = -2\bar{d}^3K + \dots, \quad (3.66)$$

donde nuevamente se involucra a cuartas derivadas temporales de  $h_{ab}$ .

Por lo tanto, para definir una noción de estado de Hadamard aproximado a un orden suficiente para calcular el tensor de energía momento en una hipersuperficie inicial, a partir de datos iniciales, es necesario contar con cuartas derivadas normales de la métrica inducida sobre dicha hipersuperficie. Esto es un problema puesto que la ecuación semiclásica de Einstein es justamente de cuarto orden, lo que además implica la posibilidad de que exista una sobredeterminación de los datos iniciales.

En conclusión, aunque no contamos con una prueba definitiva, las dificultades que hemos señalado en esta sección sugieren que el problema general de gravedad semiclásica no tiene una formulación de valores iniciales bien puesta. Esto se debe en particular a que la ecuación semiclásica de Einstein no sólo es de cuarto orden en derivadas *temporales* de la métrica inducida sobre una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$ , sino que es necesario incluir en los propios datos iniciales, derivadas justamente de hasta cuarto orden en derivadas de la métrica para definir el problema de valor inicial sobre  $\Sigma$ . Concretamente, estos términos son necesarios para expresar los datos iniciales sobre  $\Sigma$  correspondientes a estados de Hadamard asociados a una solución semiclásica, en términos de la función de dos puntos y sus datos iniciales sobre una hipersuperficie.

Aún así, como se verá a continuación, conjeturamos que bajo ciertas condiciones, existen soluciones bien comportadas y definidas a partir de datos iniciales que representen las configuraciones físicas que se pueden abordar con este modelo.

### 3.2.3. Configuraciones semiclásicas a partir de datos iniciales

En la sección anterior señalamos que es posible que en el caso más general, no exista una buena formulación para el problema de valores iniciales de gravedad semiclásica. Aunque los

argumentos anteriores no descartan en automático la posibilidad de establecer un problema de valores iniciales bien puesto para gravedad semiclásica, en este trabajo no continuaremos sobre la vía de tratar de dar una respuesta definitiva a esa cuestión. En su lugar, nos limitaremos a proponer una manera de definir soluciones semiclásicas con un problema de valores iniciales bien puesto, a partir de un criterio de correspondencia con la teoría clásica.

Partimos de la observación de que si se restituye  $\hbar \neq 1$ ,  $c \neq 1$  en la convención de unidades, éstas constantes acompañarán a todos los términos de orden superior en derivadas de la métrica. Veamos que esto es así porque la dimensión de un objeto como  $\square R$  es  $L^{-4}$ . Si este término entra en la expresión de  $\langle T_{ab} \rangle_{\text{ren}}$ , al cambiar a unidades del SI debe anteponerse un término de la forma  $G_N^{\bar{\theta}} c^\theta \hbar^\gamma$  tal que el resultado tenga unidades de densidad de energía,  $L^{-1}MT^{-2}$ . Resolviendo el sistema lineal para los coeficientes, se encuentra  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\theta = \gamma = 1$ , es decir, estos términos van acompañados de  $\hbar c$ . Del mismo modo, el término  $m^2 R$  llevará antepuesto un factor  $c^3/\hbar$  para que el producto tenga las mismas unidades.

Para las expansiones del término regular del campo podemos escoger sus unidades de tal modo que  $\overset{2}{w}_{ab}$  y  $\square \overset{0}{w}$  tengan directamente unidades de densidad de energía. En este caso se tiene que  $[\overset{0}{w}] = LMT^{-2}$ . Consideramos una expansión de la parte regular de  $G^+$  en potencias de  $\hbar$ , de tal manera que se tiene la separación

$$\overset{0}{w} = \overset{0}{\mathbf{w}} + \hbar \overset{0}{\mathcal{W}}, \quad (3.67)$$

$$\overset{2}{w}_{ab} = \overset{2}{\mathbf{w}}_{ab} + \hbar \overset{0}{\mathcal{W}}_{ab}, \quad (3.68)$$

donde  $\overset{0}{\mathbf{w}}$  y  $\overset{2}{\mathbf{w}}_{ab}$  son los límites cuando  $\hbar \rightarrow 0$  de  $\overset{0}{w}$  y  $\overset{2}{w}_{ab}$ , respectivamente. Con estas suposiciones, la ecuación semiclásica de Einstein (3.17) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{c^4}{8\pi G_N} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \Lambda g_{ab} \right) &= \frac{c^3}{32\pi^2 \hbar} \left( \frac{1}{6} - \xi \right) m^2 R g_{ab} \\ &+ \frac{1}{2(2\pi)^2} \left[ -\overset{2}{\mathbf{w}}_{ab} + \frac{1}{2} (1 - 2\xi) \nabla_a \nabla_b \overset{0}{\mathbf{w}} + g_{ab} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) \square \overset{0}{\mathbf{w}} + \xi \overset{0}{\mathbf{w}} R_{ab} \right] \\ &+ \frac{\hbar}{2(2\pi)^2} \left[ -\overset{2}{\mathcal{W}}_{ab} + \frac{1}{2} (1 - 2\xi) \nabla_a \nabla_b \overset{0}{\mathcal{W}} + g_{ab} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) \square \overset{0}{\mathcal{W}} + \xi \overset{0}{\mathcal{W}} R_{ab} \right] \\ &+ \hbar c \left[ (2\alpha_1 + \alpha_2) \nabla_a \nabla_b R - \frac{1}{2} \left( 4\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1 - 5\xi}{480\pi^2} \right) \square R g_{ab} - \alpha_2 \square R_{ab} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \alpha_2 + \frac{1}{2880\pi^2} \right) R^{cd} R_{cd} g_{ab} - \frac{1}{5760\pi^2} R^{cdef} R_{cdef} g_{ab} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \alpha_1 - \frac{(1 - 6\xi)^2}{1152\pi^2} \right) R^2 g_{ab} - 2\alpha_1 R R_{ab} - 2\alpha_2 R^{cd} R_{cab} \right], \quad (3.69) \end{aligned}$$

Estamos interesados en recuperar de la ecuación (3.69) una parte que permita establecer una correspondencia en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  con la ecuación clásica de Einstein (3.20). Sin embargo, el término proporcional a  $m^2$  presenta un problema de divergencia en ese límite. Al respecto, notemos que la *constante*  $m$  puede suponerse dependiente de  $\hbar$ , de modo que por ejemplo, la longitud de onda de Compton asociada al campo  $\phi$ ,

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}, \quad (3.70)$$

permanezca constante en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ , es decir, podemos escribir  $m$  como

$$m = \hbar\mu, \quad (3.71)$$

tal que

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda_c c} \quad (3.72)$$

permanece constante conforme  $\hbar$  tiende a cero. La ecuación (3.69) en ese caso es

$$\begin{aligned} \frac{c^4}{8\pi G_N} \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \Lambda g_{ab} \right) = & \\ & \frac{1}{2(2\pi)^2} \left[ -\overset{2}{\mathcal{W}}_{ab} + \frac{1}{2} (1 - 2\xi) \nabla_a \nabla_b \overset{0}{\mathcal{W}} + g_{ab} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) \square \overset{0}{\mathcal{W}} + \xi \overset{0}{\mathcal{W}} R_{ab} \right] \\ & + \frac{\hbar}{2(2\pi)^2} \left[ -\overset{2}{\mathcal{W}}_{ab} + \frac{1}{2} (1 - 2\xi) \nabla_a \nabla_b \overset{0}{\mathcal{W}} + g_{ab} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) \square \overset{0}{\mathcal{W}} + \xi \overset{0}{\mathcal{W}} R_{ab} \right] \\ & + \hbar c \left[ \frac{c^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{6} - \xi \right) \mu^2 R g_{ab} + (2\alpha_1 + \alpha_2) \nabla_a \nabla_b R - \frac{1}{2} \left( 4\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1 - 5\xi}{480\pi^2} \right) \square R g_{ab} \right. \\ & \quad \left. - \alpha_2 \square R_{ab} + \frac{1}{2} \left( \alpha_2 + \frac{1}{2880\pi^2} \right) R^{cd} R_{cd} g_{ab} - \frac{1}{5760\pi^2} R^{cdef} R_{cdef} g_{ab} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left( \alpha_1 - \frac{(1 - 6\xi)^2}{1152\pi^2} \right) R^2 g_{ab} - 2\alpha_1 R R_{ab} - 2\alpha_2 R^{cd} R_{cabd} \right], \quad (3.73) \end{aligned}$$

En ese límite, la ecuación semiclásica de Einstein queda en la forma

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} - \Lambda g_{ab} = \frac{G_N}{\pi c^4} \left[ -\overset{2}{\mathcal{W}}_{ab} + \frac{1}{2} (1 - 2\xi) \nabla_a \nabla_b \overset{0}{\mathcal{W}} + g_{ab} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) \square \overset{0}{\mathcal{W}} + \xi \overset{0}{\mathcal{W}} R_{ab} \right] \quad (3.74)$$

que en lo que respecta a la métrica tiene una estructura semejante a la ecuación clásica de Einstein (2.25), en particular, es una ecuación de segundo orden en derivadas de la métrica. A (3.74) le denominaremos la ecuación de Einstein semiclásica de orden cero en  $\hbar$ . Esta

ecuación es formal ya que no es claro cómo evaluar los términos  $\overset{2}{w}_{ab}$  y  $\overset{0}{w}$  a partir de datos para la función de Wightman completa  $G^+$  puesto que sigue siendo necesario extraer de esas funciones la parte singular que sigue dependiendo de derivadas de orden superior.

Bajo la suposición de que el espaciotiempo es globalmente hiperbólico, siempre podemos fijar coordenadas Gaussianas adaptadas una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$  tales que  $x^0 = ct$  para la función  $t$  de la foliación a la que pertenece  $\Sigma$ . Considérese la siguiente

**Hipótesis 1:** Sean  $g_{\mu\nu}|_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t g_{\mu\nu})_{\Sigma} = \frac{1}{2}K_{\mu\nu}$  datos iniciales para la métrica tales que:

1. Es posible resolver de (3.74) evaluada sobre  $\Sigma$  a las derivadas *temporales* de la métrica  $(\partial_t^2 g_{\mu\nu})_{\Sigma}$  en términos de  $(\partial_t g_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $g_{\mu\nu}|_{\Sigma}$ ,  $\overset{2}{w}_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  y  $\overset{0}{w}|_{\Sigma}$ .
2. De las ecuaciones que resultan de calcular formalmente la derivada temporal de (3.74) y luego evaluar sobre  $\Sigma$  es posible resolver las derivadas  $(\partial_t^3 g_{\mu\nu})_{\Sigma}$ .
3. De la ecuación (3.69) evaluada sobre  $\Sigma$  es posible despejar  $(\partial_t^4 g_{\mu\nu})_{\Sigma}$  en términos de  $(\partial_t^3 g_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t^2 g_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t g_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t \overset{2}{w}_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t \overset{0}{w})_{\Sigma}$ ,  $\overset{2}{w}_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  y  $\overset{0}{w}|_{\Sigma}$ .

Si se cumple la hipótesis 1 para los datos iniciales  $g_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  y  $K_{\mu\nu}$ , en conjunto con los datos para la función de Wightman,  $G^+|_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t G^+)_{\Sigma}$ ,  $(\partial_{t'} G^+)_{\Sigma}$  y  $(\partial_t \partial_{t'} G^+)_{\Sigma}$  entonces se pueden resolver  $\Delta^{1/2}$  y  $v$  de la parametriz de Hadamard hasta los órdenes de aproximación necesarios (según lo estimado en la sección anterior) para calcular la parte regular  $W = G^+ - H_{\ell}$  y su expansión en coeficientes  $\overset{0}{w}$  y  $\overset{2}{w}_{\mu\nu}$ , al menos sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ . De aquí se pueden extraer directamente  $\overset{2}{w}_{\mu\nu}|_{\Sigma}$  y  $\overset{0}{w}|_{\Sigma}$  tomando el límite  $\hbar \rightarrow 0$ .

Por lo tanto, la hipótesis 1 implica la posibilidad de construir implícitamente datos iniciales para el problema de orden superior de gravedad semiclásica a partir de datos *clásicos*  $(g_{\mu\nu}|_{\Sigma}, K_{\mu\nu})$  para la métrica, así como los datos iniciales para el campo  $(G^+|_{\Sigma}, (\partial_t G^+)_{\Sigma}, (\partial_{t'} G^+)_{\Sigma}, (\partial_t \partial_{t'} G^+)_{\Sigma})$ , de tal modo que se cumpla independientemente la ecuación semiclásica de Einstein a orden cero en  $\hbar$ . La idea intuitiva detrás de este requerimiento es que los datos iniciales sean lo suficientemente *cercanos* a datos correspondientes a estados con propiedades que asociaríamos a sistemas *clásicos*, de modo que se satisfaga el límite de correspondencia  $\hbar \rightarrow 0$  de la ecuación semiclásica de Einstein.

Luego, planteamos las siguientes conjeturas:

**Conjetura 1:** Si se cumplen las hipótesis 1, a partir de los datos construidos implícitamente, es posible continuar, mediante derivación formal respecto a  $t$  sobre la ecuación semiclásica de Einstein y la ecuación de Klein-Gordon, el cálculo de los términos  $(\partial_t^5 g_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t^3 \overset{0}{w})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t^2 \overset{2}{w}_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $\dots$ ,  $(\partial_t^k g_{\mu\nu})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t^{k-2} \overset{0}{w})_{\Sigma}$ ,  $(\partial_t^{k-3} \overset{2}{w}_{\mu\nu})_{\Sigma}$  de manera secuencial hasta cualquier orden arbitrario  $k$ , en términos de los datos hasta el orden  $k - 1$ .



**Conjetura 2:** Los datos que cumplen la hipótesis 1, en adición a los datos que de estos se deducen implícitamente de la conjetura 1, determinan un *estado de Hadamard sobre  $\Sigma$*  en el sentido de que a cada orden en derivadas temporales de las funciones de dos puntos, éstas tienen la misma estructura singular que el término de la solución de Hadamard al orden correspondiente.

**Conjetura 3:** La buena formulación de valores iniciales de la ecuación de Klein-Gordon, en conjunto con la buena formulación de valores iniciales de relatividad general (clásica) garantizan que de cumplirse las hipótesis 1 y de ser ciertas las conjeturas 1 y 2, entonces una solución semiclásica particular está unívocamente determinada por los datos iniciales calculados implícitamente a partir de los datos para el problema de orden cero en  $\hbar$ , de modo que en todo el espaciotiempo el estado reconstruido es de Hadamard, se cumple la ecuación de Klein-Gordon del campo y la ecuación semiclásica de Einstein.

La conjetura 3 es lo más cercano al planteamiento de una formulación de valores iniciales para gravedad semiclásica que incluiremos en este trabajo. La posibilidad de que se satisfagan las hipótesis 1 y la prueba de las conjeturas 1 y 2 se deberá realizar en trabajos futuros. Estas conjeturas se incluirán en [67] (en elaboración), como puntos a resolver dentro del programa de gravedad semiclásica con colapso que proponemos. En este sentido, se trata de conjeturas en un estado muy prematuro y cuya forma específica probablemente cambie en el futuro.

En la sección (3.4) describiremos cómo se aprovecharán estas hipótesis y conjeturas para construir una solución semiclásica a partir de la ocurrencia de un colapso en la  $SSC_I$ , pero antes estudiaremos con detalle las discontinuidades que pueden resultar del colapso cuántico.

### 3.3. Discontinuidades debidas al colapso

El modelo semiclásico de colapso definido en la sección 3.1, y que se basa en el modelo introducido en [23], permite establecer un primer paso en la descripción de un espaciotiempo con colapsos. En este modelo, el colapso cuántico se representa como la transición completa de una configuración semiclásica autoconsistente *inicial*,  $SSC_I$  a una configuración semiclásica autoconsistente *poscolapso*,  $SSC_{II}$ . Éstas se acoplan sobre una hipersuperficie de colapso  $\Sigma_c$ , en la que la ecuación semiclásica de Einstein no se cumple.

Es conveniente estudiar una separación 3+1 adaptada a nuestro modelo. Consideremos funciones tiempo  ${}^I t$  y  ${}^{II} t$  en las construcciones  $SSC_I$  y  $SSC_{II}$ , respectivamente, tales que

$${}^I t(\Phi_I^{-1}(x)) = {}^{II} t(\Phi_{II}^{-1}(x)) = \text{const.} \quad : x \in \Sigma_c. \quad (3.75)$$

Estas funciones definen una foliación para el espaciotiempo de cada una de las construcciones  $SSC_I$  y  $SSC_{II}$ , permitiendo desarrollar en cada una de ellas el formalismo 3+1. Es

decir, quedan definidos el vector normal y la métrica inducida sobre cada hipersuperficie de la foliación de cada construcción, así como su curvatura extrínseca y la *aceleración* de sus observadores eulerianos, tal como se describe en el apéndice F.

Sea  ${}^I h_{ab}$  la métrica inducida sobre  $\Sigma_I$  por  ${}^I g_{ab}$ , y  ${}^{II} h_{ab}$  la métrica inducida sobre  $\Sigma_{II}$  por  ${}^{II} g_{ab}$ , así como  ${}^I K_{ab}$  y  ${}^{II} K_{ab}$  sus respectivas curvaturas extrínsecas, y sean  ${}^I n^a$  y  ${}^{II} n^a$  los vectores normales unitarios a  $\Sigma_I$  y  $\Sigma_{II}$ , respectivamente, y sean  $-{}^I u_a$  y  $-{}^{II} u_a$  sus aceleraciones eulerianas. Entonces, para cada construcción se tiene

$${}^I n_a = -\frac{{}^I \nabla_a {}^I t}{\sqrt{-{}^I g^{bc}({}^I \nabla_b {}^I t)({}^I \nabla_c {}^I t)}}, \quad {}^{II} n_a = -\frac{{}^{II} \nabla_a {}^{II} t}{\sqrt{-{}^{II} g^{bc}({}^{II} \nabla_b {}^{II} t)({}^{II} \nabla_c {}^{II} t)}}, \quad (3.76a)$$

$${}^I h_{ab} = {}^I g_{ab} + {}^I n_a {}^I n_b, \quad {}^{II} h_{ab} = {}^{II} g_{ab} + {}^{II} n_a {}^{II} n_b, \quad (3.76b)$$

$${}^I K_{ab} = {}^I D_a {}^I n_b, \quad {}^{II} K_{ab} = {}^{II} D_a {}^{II} n_b, \quad (3.76c)$$

$${}^I u_a = {}^I \tilde{d} {}^I n_a, \quad {}^{II} u_a = {}^{II} \tilde{d} {}^{II} n_a, \quad (3.76d)$$

donde  ${}^{I,II} D_a$  son las derivadas asociadas a las correspondientes métricas inducidas sobre cada hipersuperficie de las foliaciones, y  ${}^{I,II} \tilde{d}$  es el operador que proyecta la derivada normal sobre cada hipersuperficie, como se definen en el apéndice F.

Como resultado del colapso cuántico es de esperarse que algunos tensores experimenten un cambio abrupto al pasar de una configuración semiclásica a otra. Formalizaremos esta idea con ayuda de las siguientes definiciones:

**Definición 4.** Dado un campo tensorial sobre la construcción  $SSC_I$ ,  ${}^I A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ , y un campo tensorial definido sobre la construcción  $SSC_{II}$ ,  ${}^{II} A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ , asociados a la misma propiedad física o geométrica **A**, definimos el campo tensorial  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  en la construcción  $\mathcal{E}$  dado por

$$A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(x) = \begin{cases} \Phi_I^*({}^I A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})(x) & : x \in J^-(\Sigma_c), \\ \Phi_{II}^*({}^{II} A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})(x) & : x \in J^+(\Sigma_c) - \Sigma_c, \end{cases} \quad (3.77)$$

como el tensor asociado a la propiedad **A** sobre la construcción semiclásica con colapso.

**Definición 5.** La discontinuidad del campo  $A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  sobre la hipersuperficie de colapso  $\Sigma_c$  se define como

$$[A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}](x) \equiv \Phi_{II}^*({}^{II} A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})(x) - \Phi_I^*({}^I A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})(x), \quad (3.78)$$

para  $x \in \Sigma_c$ .

Nótese que la discontinuidad está bien definida siempre que  ${}^I A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  y  ${}^{II} A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  estén bien definidos sobre  $\Sigma_I$  y  $\Sigma_{II}$ , respectivamente. Notemos que

$$[\alpha X + \beta Y] = \alpha[X] + \beta[Y], \quad (3.79a)$$

$$[XY] = [X][Y] + X_1[Y] + [X]Y_1, \quad (3.79b)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $X, Y$  representan funciones, vectores, covectores o tensores definidos como en (3.77).

También nos interesa definir un operador derivada covariante  $\nabla_c$  en  $\mathcal{E}$ . Fuera de  $\Sigma_c$ , se puede definir la acción de  $\nabla_c$  según la regla

$$\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(x) = \begin{cases} \Phi_I^*({}^I\nabla_c {}^I A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})(x) & : x \in J^-(\Sigma_c) - \Sigma_c, \\ \Phi_{II}^*({}^{II}\nabla_c {}^{II} A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})(x) & : x \in J^+(\Sigma_c) - \Sigma_c, \end{cases} \quad (3.80)$$

pero justo sobre la hipersuperficie no podemos definir una derivada covariante puesto que, aunque la métrica efectiva pueda ser continua en  $\Sigma_c$ , ésta no será en general suave en  $\Sigma_c$ . Para ello partimos de la definición (3.78) y las propiedades de los operadores derivada en  $SSC_I$ ,  ${}^I\nabla_a$  y en  $SSC_{II}$ ,  ${}^{II}\nabla_a$ , para calcular las discontinuidades asociadas a las derivadas covariantes sobre  $\Sigma_c$ . Para una función escalar tendremos directamente

$$[\nabla_a \phi] = (\Phi_{II}^*({}^{II}\nabla_a {}^{II}\phi) - \Phi_I^*({}^I\nabla_a {}^I\phi))_{\Sigma_c}. \quad (3.81)$$

Si definimos el mapeo de la  $SSC_{II}$  a la  $SSC_I$  dado por (ver figura 3.1)

$$\Phi \equiv \Phi_I \circ \Phi_{II}^{-1}, \quad (3.82)$$

podemos importar en  $SSC_{II}$  la noción de derivada de  $SSC_I$ , definiendo

$${}^I\tilde{\nabla}_a {}^{II}\phi \equiv \Phi^*({}^I\nabla_a((\Phi^{-1})^* {}^{II}\phi)). \quad (3.83)$$

Sin embargo, éste operador cumplirá con las propiedades de un operador derivada, y por lo tanto tendremos que

$${}^I\tilde{\nabla}_a {}^{II}\phi = {}^{II}\nabla_a {}^{II}\phi. \quad (3.84)$$

Podemos sustituir (3.84) en (3.81) para obtener

$$\begin{aligned} [\nabla_a \phi] &= (\Phi_{II}^*(\Phi^*({}^I\nabla_a((\Phi^{-1})^* {}^{II}\phi))) - \Phi_I^*({}^I\nabla_a {}^I\phi))_{\Sigma_c} \\ &= (\Phi_I^*({}^I\nabla_a((\Phi^{-1})^* {}^{II}\phi - {}^I\phi))_{\Sigma_c}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

donde hemos aprovechado la linealidad del *pullback*  $\Phi_I^*$  y del operador  ${}^I\nabla_a$ , así como la identidad

$$\Phi^* = (\Phi_{II}^*)^{-1} \circ \Phi_I^*. \quad (3.86)$$

Esto quiere decir que podemos tomar el escalar  ${}^{II}\phi$ , llevarlo a la  $SSC_I$ , y ahí calcular la derivada de su diferencia con  ${}^I\phi$  y llevar el resultado a  $\mathcal{E}$  para calcular la discontinuidad asociada a la derivada de  $\phi$  sobre la hipersuperficie  $\Sigma_c$ . Para aprovechar este procedimiento, definiremos la siguiente generalización:

**Definición 6.**

$$\{A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}\}(x) \equiv (\Phi^{-1})^*({}^{II}A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})(x) - {}^I A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}(x), \quad (3.87)$$

para  $x \in M_I$ .

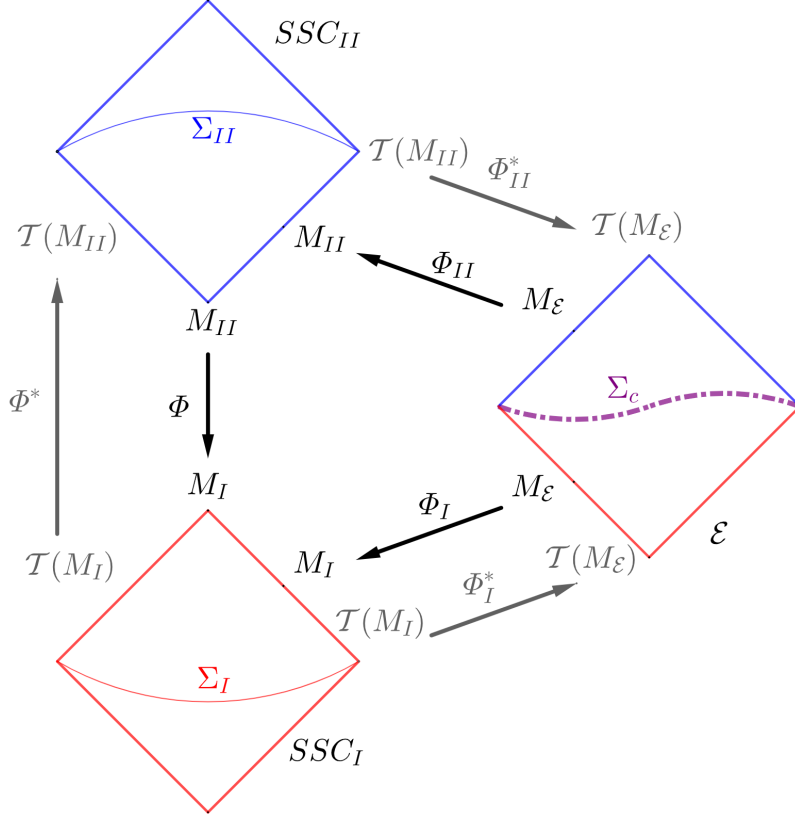


Figura 3.1: Construcciones semiclásicas autoconsistentes empleadas para modelar un colapso, y mapeos entre ellas.

Usando esta definición, la ecuación (3.85) se escribe como

$$[\nabla_a \phi] = (\Phi_I^* \nabla_a \{\phi\})_{\Sigma_c}. \quad (3.88)$$

De ahora en adelante, omitiremos escribir los *pullbacks* involucrados, quedando expresiones como (3.88) en la forma

$$[\nabla_a \phi] = (\nabla_a \{\phi\})_{\Sigma_c}. \quad (3.89)$$

Operativamente esto quiere decir que primero hay que calcular la derivada de la diferencia de los campos y luego evaluar en la hipersuperficie.

Para el caso de un vector  $v^a$ , podemos seguir un procedimiento análogo, con la excepción de que el operador derivada de la  $SSC_I$  se relaciona, una vez mapeado a la construcción de la  $SSC_{II}$ , mediante un tensor  $C^b_{ac}$  tal que

$${}^{II}\nabla_a {}^{II}v^b = {}^I\tilde{\nabla}_a {}^{II}v^b + C^b_{ac} {}^{II}v^c, \quad (3.90)$$

y donde

$$C^b{}_{ac} = \frac{1}{2} {}^{II}g^{bd} \left( {}^I\tilde{\nabla}_a {}^{II}g_{dc} + {}^I\tilde{\nabla}_c {}^{II}g_{ad} - {}^I\tilde{\nabla}_d {}^{II}g_{ac} \right). \quad (3.91)$$

Podemos escribir esto de una manera más conveniente en términos de

$$\gamma_{ab} = {}^{II}g_{ab} - {}^I g_{ab}, \quad (3.92)$$

definido en toda la  $SSC_{II}$ . Debido a la condición (3.6), tenemos que

$$\gamma_{ab}|_{\Sigma_{II}} = 0, \quad (3.93)$$

pero sus derivadas en la dirección normal serán distintas de cero en  $\Sigma_{II}$ . La ecuación (3.91) puede entonces reescribirse en términos de  $\gamma_{ab}$  como

$$C^b{}_{ac} = \frac{1}{2} {}^{II}g^{bd} \left( {}^I\tilde{\nabla}_a \gamma_{dc} + {}^I\tilde{\nabla}_c \gamma_{ad} - {}^I\tilde{\nabla}_d \gamma_{ac} \right). \quad (3.94)$$

Finalmente,

$$[\nabla_a v^b] = \left( {}^I\nabla_a \{v^b\} \right)_{\Sigma_c} + (C^b{}_{ac})_{\Sigma_c} ({}^I v^c + [v^c]). \quad (3.95)$$

Notemos que aún si  $v^a$  es *continuo* en  $\Sigma_c$ ,  $[\nabla_a v^b]$  no se anula. Esta expresión es válida también fuera de  $\Sigma_c$ , en la forma

$$\{\nabla_a v^b\} = {}^I\nabla_a \{v^b\} + C^b{}_{ac} ({}^I v^c + \{v^c\}). \quad (3.96)$$

Para un vector dual  $\omega_a$ , tendremos

$$[\nabla_a \omega_b] = \left( {}^I\nabla_a \{\omega_b\} \right)_{\Sigma_c} - (C^c{}_{ab})_{\Sigma_c} ({}^I \omega_c + [\omega_c]). \quad (3.97)$$

y análogamente

$$\{\nabla_a \omega_b\} = {}^I\nabla_a \{\omega_b\} - C^c{}_{ab} ({}^I \omega_c + \{\omega_c\}). \quad (3.98)$$

En general, para un tensor  $A^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$  tendremos

$$\begin{aligned} [\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}] &= \left( {}^I\nabla_c \{A^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}\} \right)_{\Sigma_c} \\ &+ \sum_{i=1}^k (C^{a_i}{}_{cd})_{\Sigma_c} \left( {}^I A^{a_1 \dots a_{i-1} d a_{i+1} \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} + [A^{a_1 \dots a_{i-1} d a_{i+1} \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}] \right) \\ &- \sum_{j=1}^l (C^d{}_{cb_j})_{\Sigma_c} \left( {}^I A^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{j-1} d b_{j+1} \dots b_l} + [A^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_{j-1} d b_{j+1} \dots b_l}] \right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

así como su generalización fuera de  $\Sigma_c$ .

Éstas herramientas permiten estudiar qué ocurre en nuestro modelo con expresiones que involucran derivadas justo sobre la hipersuperficie de colapso.

En el apéndice H calculamos algunas implicaciones de las condiciones de continuidad para este modelo y en particular la condición (3.93), de donde se sigue que es necesario imponer adicionalmente la condición

$$[h_{ab}] = 0, \quad (3.100)$$

que equivale también a pedir la continuidad del vector normal sobre la hipersuperficie de colapso,

$$[n_a] = 0. \quad (3.101)$$

Como resultado inmediato, la discontinuidad de la curvatura extrínseca puede relacionarse con la discontinuidad de la propia métrica como

$$[K_{ab}] = -\frac{1}{2}(\bar{d}\gamma^0_{ab})_{\Sigma_c}. \quad (3.102)$$

Así mismo, se calculó  $C^c{}_{ab}$  explícitamente, de donde es relevante el límite en  $\Sigma_c$ ,

$$(C^c{}_{ab})_{\Sigma_c} = (\bar{d}\gamma^0{}^c{}_{(a)}{}_{\Sigma_c}n_b) - \frac{1}{2}(\bar{d}\gamma^0_{ab})_{\Sigma_c}n^c + (\bar{d}\gamma^1{}^c)_{\Sigma_c}n_a n_b + \frac{1}{2}(\bar{d}\gamma^3)_{\Sigma_c}n^c n_a n_b. \quad (3.103)$$

Para continuar con el análisis explícito de las discontinuidades de  $[K_{ab}]$ , a partir de este momento definimos en ambas construcciones  $SSC_I$ ,  $SSC_{II}$  respectivos sistemas de coordenadas armónicas  ${}^{I,II}x^\mu$ , escogiendo  ${}^{I,II}x^0 = t$ , de tal modo que la función *lapse* sea  ${}^{I,II}N = 1$  en  $\Sigma_{I,II}$ , mientras que el vector *shift*  ${}^{I,II}N^a$  se toma como cero en  $\Sigma_{I,II}$ . Asociamos  $\Sigma_{I,II}$  con la condición  $t = 0$  en ambas construcciones. La expresión para las componentes de la métrica (utilizando notación de índices de componentes con convención de Einstein), queda entonces como

$$g_{\mu\nu} = h_{ij}(dx^i)_\mu(dx^j)_\nu - dt_\mu dt_\nu, \quad (3.104)$$

donde hemos etiquetado las coordenadas de los objetos definidos sobre la hipersuperficie  $\Sigma_c$  con índices latinos,  $i, j, \dots \in \{1, 2, 3\}$ , mientras que índices griegos etiquetan coordenadas del espaciotiempo  $\mu, \nu, \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Ahora estudiamos la discontinuidad de la curvatura extrínseca sobre  $\Sigma_c$  en términos de los *saltos* que presentan las componentes del tensor energía momento renormalizado. Concretamente, considerando la aproximación *a orden cero* para la ecuación semiclásica de Einstein (3.74), tomando el caso  $\xi = 0$  por simplicidad, se tiene que se cumplirán las constricciones (F.118) en ambas  $SSC$ , y de ahí que

$$[D_i K] - [D_j K^j{}_i] = 8\pi G_N [J_i], \quad (3.105a)$$

$$\frac{1}{2} \left( [K^2] - [K^{ij} K_{ij}] + [{}^{(3)}R] \right) = 8\pi G_N [\rho], \quad (3.105b)$$

donde

$$J_i \equiv \langle T_{0j} \rangle_{\text{ren},0}, \quad (3.106a)$$

$$\rho \equiv \langle T_{00} \rangle_{\text{ren},0}, \quad (3.106b)$$

$$(3.106c)$$

con  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{ren},0}$  el valor de expectación *a orden cero* del tensor de energía-momento renormalizado, dado por el lado derecho de la ecuación (3.74).

Nótese que el tensor de Riemann intrínseco carece de discontinuidades puesto que se construye a partir de la métrica inducida, que es continua, y sus derivadas tangentes, es decir,

$$[{}^{(3)}R_{ijk}{}^l] = 0, \quad (3.107)$$

y de aquí mismo se sigue que el *salto* para el tensor y el escalar de Ricci son nulos. Expandiendo (3.105b) según las reglas algebraicas para las discontinuidades se obtiene

$$K[K] - K^{ij}[K_{ij}] + \frac{1}{2}([K]^2 - [K^{ij}][K_{ij}]) = 8\pi G_N[\rho]. \quad (3.108)$$

Para las derivadas que aparecen en (3.105a), vale la pena notar que el proyector  $h_i{}^j$  es continuo en  $\Sigma_c$ , por lo que de la definición de derivada tangente se sigue en automático que

$$[D_{a_k} A_{a_{k-1} \dots a_0}] = h_{a_k}{}^{b_k} h_{a_{k-1}}{}^{b_{k-1}} \dots h_{a_0}{}^{b_0} [\nabla_{b_k} A_{b_{k-1} \dots b_0}], \quad (3.109)$$

que aunado a la expresión (3.103) para  $(C^c{}_{ab})_{\Sigma_c}$ , resulta en que **para tensores tangentes**

$$[D_{a_k} A_{a_{k-1} \dots a_0}] = D_{a_k}[A_{a_{k-1} \dots a_0}]. \quad (3.110)$$

Entonces, la ecuación (3.105a) queda

$$D_i[K] - D_j[K^j{}_i] = 8\pi G_N[J_i]. \quad (3.111)$$

A partir de las ecuaciones (3.108) y (3.111) podemos establecer cuán constreñidas están las discontinuidades de la curvatura extrínseca en este modelo específico de colapso. Empezamos por contar los *grados de libertad* de  $[K_{ij}]$ . Como el tensor de curvatura extrínseca es un 3-tensor simétrico, también  $[K_{ij}]$  debe ser un 3-tensor simétrico con un máximo de 6 componentes independientes. Luego, las 4 ecuaciones (3.108) y (3.111) reducirán el número de componentes independientes a dos.

Para estudiar qué grados de libertad fijan las ecuaciones de constricción (3.108) y (3.111), proponemos la siguiente descomposición<sup>9</sup> de  $[K_{ij}]$  como ,

$$[K_{ij}] = h_{ij}A + \left( D_i D_j - \frac{1}{3} h_{ij} D^2 \right) B + 2D_{(i} C_{j)} + F_{ij}, \quad (3.112)$$

---

<sup>9</sup>Basada en la descomposición original de la métrica hecha por Lifshitz en 1964 [68], como una generalización de la descomposición de Helmholtz.

donde  $D^2 \equiv h^{ij} D_i D_j$ ,  $A = \frac{1}{3}[K]$  y  $B$  son escalares,  $F_{ij}$  y  $C_i$  son un 3-tensor y un 3-covector, respectivamente, libres de divergencia, es decir

$$h^{ij} D_i C_j = 0, \quad (3.113)$$

$$h^{ij} D_i F_{jk} = 0. \quad (3.114)$$

Además,  $F_{ij}$  es simétrico y sin traza,

$$h^{ij} F_{ij} = 0. \quad (3.115)$$

Nótese que esta descomposición conserva el número de grados de libertad, pues  $F_{ij}$  tendrá 2 grados de libertad,  $C_i$  tendrá también 2 grados de libertad, y las funciones  $A$  y  $B$  representan cada una un grado de libertad, sumando en total 6 grados de libertad.

Sustituyendo la descomposición (3.112) en (3.108) y (3.111) se obtiene

$$8\pi G_N [J_i] = \left( 2D_i A - \left\{ \frac{2}{3} D_i D^2 + {}^{(3)}R_i{}^j D_j \right\} B - D^2 C_i \right), \quad (3.116a)$$

$$\begin{aligned} 8\pi G_N [\rho] = & (2K_I + 3A)A - \left( K_I^{ij} + \frac{1}{2} D^i D^j B + 2D^{(i} C^{j)} + F^{ij} \right) D_i D_j B \\ & + \frac{1}{6} (2K_I + D^2 B) D^2 B - 2(K_I^{ij} + D^{(i} C^{j)} + F^{ij}) D_{(i} C_{j)} \\ & - (K_I^{ij} + F^{ij}) F_{ij}. \end{aligned} \quad (3.116b)$$

El tensor  $F_{ij}$  no aparece en la ecuación (3.116a), que por lo tanto sólo relaciona 3 de las 4 funciones independientes  $A$ ,  $B$  y  $C_i$ . Luego, la ecuación (3.116b) sólo puede constreñir una función más. Esto significa que pueden fijarse ambas componentes de  $F_{ij}$ , y resolver para  $A$ ,  $B$  y  $C_i$ , o bien fijar una componente de  $F_{ij}$ , y una de las componentes de  $C_i$  o  $A$  o  $B$ , y resolver para el resto.

De este análisis podemos concluir que además de condiciones *de frontera* para las discontinuidades en la métrica extrínseca, existen dos grados de libertad que no están determinados por las condiciones de juntura.

Propondremos la condición de que a orden  $\hbar^0$  no hay generación de ondas gravitacionales, dejando la posibilidad de que éstas se generen a orden  $\hbar$ . En el análisis de los saltos que hemos realizado en esta sección, las ondas gravitacionales que podrían ser generadas debido al colapso estarían relacionadas con las componentes del tensor  $F_{ij}$ . Es decir, la condición de no generación de ondas gravitacionales a orden cero en  $\hbar$  equivale a fijar

$$F_{ij} = 0. \quad (3.117)$$

De este modo, el sistema (3.116) y la ecuación (3.113) constituye un sistema de 5 ecuaciones para las funciones  $A$ ,  $B$  y las tres componentes de  $C_i$ .



### 3.4. Implementación de teorías de colapso en el modelo de gravedad semiclásica

En el tratamiento estándar de las teorías de colapso, se introduce un mecanismo que describe la transición de un estado pre- a un estado poscolapso, de modo que es posible calcular el estado que resultará de acuerdo con una regla probabilista. En ese contexto, ambos estados pertenecen a la misma construcción de la teoría cuántica para la materia que colapsa, es decir, el estado se modela formalmente como una transición entre vectores que pertenecen al mismo espacio de Hilbert.

En el contexto de la gravedad semiclásica autoconsistente, hemos establecido que el colapso debe entenderse como la transición de una configuración semiclásica completa a otra, lo que implica que las teorías cuánticas de cada solución serán diferentes, y por lo tanto una teoría de colapso aplicable a nuestro modelo debe tomar en cuenta esta situación.

Esta labor se simplifica si suponemos que ya contamos con una teoría de colapso adaptada al formalismo de la teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos *fijos*, es decir, en la que no se consideran los efectos de los campos sobre el espaciotiempo. Actualmente, una propuesta para este tipo de teoría puede encontrarse en [69]. En lo siguiente denotaremos por QFT-CSTc a una teoría de este tipo.

A partir de esta suposición, tendremos que en la construcción  $SSC_I = \{M, g_{ab}^I, \mathcal{H}_I, \psi_I \in \mathcal{H}_I\}$ , existe un *estado objetivo*  $\psi_T \in \mathcal{H}_I$  al que colapsaría el estado  $\psi_I$  de acuerdo con la teoría QFT-CSTc que corresponda. A continuación aprovechamos que en la  $SSC_I$  contamos con los elementos para calcular el valor de expectación  $\langle \psi_T | T_{ab} | \psi_T \rangle_{\text{ren}}$ , siguiendo el procedimiento descrito en la sección 2.2.1.

El siguiente paso en este procedimiento es obtener el *valor de expectación a orden cero en  $\hbar$*  para el tensor de energía momento renormalizado en el estado  $\psi_T$ , que denotamos por  $\langle \psi_T | T_{ab} | \psi_T \rangle_{\text{ren},0}$ . Trabajaremos bajo la hipótesis de que este objeto se puede calcular a partir de la función de dos puntos del estado  $\psi_T$  mediante la expresión (3.74), aunque como mencionamos anteriormente, este procedimiento aún no ha sido establecido de manera rigurosa.

A continuación, propondremos que sobre la hipersuperficie  $\Sigma_I$  (tal como se definió en la sección 3.3),  $\langle \psi_T | T_{ab} | \psi_T \rangle_{\text{ren},0}$  coincide con el valor de expectación del tensor de energía momento renormalizado a orden cero, correspondiente al estado  $\psi_{II}$  perteneciente a la configuración semiclásica autoconsistente  $SSC_{II} = \{M, g_{ab}^{II}, \mathcal{H}_{II}, \psi_{II} \in \mathcal{H}_{II}\}$ , es decir, tomamos

$$\langle \psi_{II} | T_{ab} | \psi_{II} \rangle_{\text{ren},0}|_{\Sigma_c} = \Phi^*(\langle \psi_T | T_{ab} | \psi_T \rangle_{\text{ren},0})|_{\Sigma_c}. \quad (3.118)$$

A partir de este objeto, resolvemos (3.116) para las componentes del *salto*  $[K_{ij}]$ , y con ellas calculamos

$${}^{II}K_{ij}|_{\Sigma_c} = {}^I K_{ij}|_{\Sigma_c} + [K_{ij}], \quad (3.119)$$

que en conjunto con la condición (3.6), nos permite iniciar el procedimiento implícito descrito en la sección 3.2.3 para construir la  $SSC_{II}$ .

## Capítulo 4

# Conclusiones y preguntas abiertas

En este trabajo hemos abordado algunas de las dificultades más inmediatas a las que se enfrenta un modelo semiclásico de gravedad que incorpore colapsos cuánticos. En particular hemos descrito las dificultades que surgen al tratar de definir las configuraciones semiclásicas autoconsistentes en términos de un problema de valor inicial, así como un análisis sobre el tipo de *saltos* que parecen acoplarse mejor al modelo.

El estudio de las dificultades formales a las que se enfrenta el modelo nos llevó a la construcción de herramientas dentro del formalismo  $3+1$  útiles para entender lo que ocurre sobre una hipersuperficie de colapso. Un artículo [70] explicando nuestra particular implementación del formalismo  $3+1$  fue publicada en la Revista Mexicana de Física E.

Como primer acercamiento al problema de valores iniciales para un sistema semiclásico, estudiamos un modelo de escalares interactuantes, el cual, aunque carece del nivel de complejidad de la gravedad semiclásica, incorpora algunos aspectos comunes como el utilizar el mismo esquema de renormalización de Hadamard. Para este sistema obtuvimos una prescripción que desarrolla soluciones únicas a partir de valores iniciales adecuados para el caso de acoplamiento débil y espaciotiempos con sección espacial compacta. Las soluciones así obtenidas están en términos de series finitas de rango arbitrario en el parámetro de acoplamiento. Desafortunadamente éstos métodos no pueden aplicarse en general al contexto gravitacional, en el que no es posible modular la intensidad de la *interacción* por épocas a fin de entender la totalidad de la interacción de la materia con el espaciotiempo como un proceso de dispersión. Aún así, es posible que en un régimen *perturbativo* de gravedad semiclásica, se puedan implementar ideas de esa propuesta. Un artículo [71] que recopila esta parte del trabajo de mi doctorado ha sido publicado en la revista Journal of Mathematical Physics, siendo distinguido como *Editor's Pick*. Aún así, este sistema y la manera en que lo abordamos inspiró en cierta medida el acercamiento que hemos propuesto para lidiar con el problema de valores iniciales en gravedad semiclásica.

Calculamos una estimación explícita del orden de derivadas de la métrica necesario para reconstruir un tensor de energía momento renormalizado a partir de un conjunto de datos

iniciales sobre una hipersuperficie, llegando a la conclusión de que es ineludible el cuarto orden en derivadas de la métrica como parte de los datos iniciales para gravedad semiclásica, complicando el planteamiento del problema de valores iniciales. Un artículo sobre el conteo y determinación de los términos de orden superior se encuentra en preparación actualmente.

Como desarrollo preliminar ante el problema de valor inicial para gravedad semiclásica, postulamos una serie de conjeturas bajo las que se seleccionaría una solución semiclásica autoconsistente a partir de datos iniciales para el problema a orden cero en  $\hbar$ . Este procedimiento describe la construcción de los datos de cuarto orden de manera *implícita* a partir de la ecuación semiclásica de Einstein sobre una hipersuperficie. Aún así, se trata de conjeturas sin una prueba sólida hasta el momento. Un manuscrito [67] en el que abordaremos con mayor detalle la propuesta de solución implícita que referimos en este trabajo está siendo preparado.

Sobre los *saltos* ocasionados por el propio colapso, estudiamos las constricciones que resultan de los requisitos de consistencia y regularidad del modelo, con lo que llevamos a cabo un conteo de los grados de libertad que resultan ante nuestra prescripción de pegado. El resultado es que hay al menos un par de componentes *libres*, que probablemente permitan acoplar el modelo con una teoría de colapso general relativista.

Además, este trabajo nos ha permitido identificar varios problemas y cuestiones a resolver en trabajos a futuro. En ese sentido podemos señalar las siguientes interrogantes **conceptuales**:

- ¿Son la violación de la conservación de energía y de covariancia realmente problemas graves para una teoría de colapso en el contexto gravitacional? ¿Podría construirse una teoría que concilie la violación de estos principios tan paradigmáticos de la física moderna con nuestra evidencia empírica hasta la fecha?
- ¿Hay otra manera de modelar el colapso en gravedad semiclásica? ¿Tal vez suponiendo que ocurre sobre otro tipo de hipersuperficies o como *perturbaciones* que se propagan? ¿Será posible incluir este tipo de caracterizaciones dentro de un esquema como el propuesto en este trabajo?
- ¿Es inevitable atribuir una naturaleza cuántica al propio espaciotiempo? ¿Todo tratamiento semiclásico, no necesariamente como el aquí presentado, debe considerarse *a priori* como un tratamiento sólo aproximado y suplementario de una teoría fundamental, necesariamente *cuántica*?
- ¿Se puede relacionar este esquema con la noción de que están ligadas la naturaleza del espaciotiempo con el propio proceso de colapso, como ha sugerido Penrose [16]?

Además de las dudas conceptuales, en el propio esquema presentado aquí, permanecen abiertos muchos **problemas formales** en este modelo:

- Probar las conjeturas de la sección 3.2 o formular rigurosamente otro acercamiento al problema de valores iniciales para gravedad semiclásica.

- Generalizar el modelo para múltiples colapsos con la potencialidad de formular un tratamiento tipo CSL.
- Acoplar este modelo con una teoría de colapso adecuada para el contexto de gravedad semiclásica.
- Formular ejemplos concretos de interés físico dentro de este modelo, como podrían ser efectos de evaporación de agujeros negros y experimentos de pruebas de gravedad a escala mesoscópica.
- Extraer predicciones que permitan verificar o refutar esta propuesta de gravedad semiclásica de manera experimental.

Finalmente, hay aspectos en torno al programa de gravedad semiclásica con colapsos que pueden enriquecer o redirigir los esfuerzos del programa:

- Considerar otros esquemas semiclásicos, por ejemplo, basados en otras teorías de gravitación clásicas, como gravedad unimodular [72],[73], teorías  $f(R)$  [74], o teorías con torsión [75][76][77], de modo que se aprovechen algunas de sus características para facilitar la introducción de una teoría de colapso, para resolver algunas de las dificultades formales o conceptuales de nuestro modelo, o para estudiar posibles efectos que no se recuperarían en el marco basado en la Relatividad General de Einstein.
- Estudiar posibles relaciones, semejanzas y discrepancias entre nuestro esquema de gravedad semiclásica con colapsos, probablemente en una versión generalizada para colapsos múltiples, y el programa de gravedad estocástica [78].
- Estudiar el posible contacto con teorías de gravedad cuántica.



## Apéndice A

# Forma cuasilineal hiperbólica de las ecuaciones de Einstein

### A.1. Caso sin materia (vacío)

Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío (y con constante cosmológica igual a cero) se reducen a

$$R_{ab} = 0. \quad (3.10)$$

En general, esta ecuación no tiene una forma cuasilineal hiperbólica. Podemos ver esto considerando la expresión para la derivada covariante en términos de la derivada  $\partial_a$  asociada a un sistema de coordenadas cualquiera, es decir,

$$\nabla_a \omega_{b_k \dots b_1} \equiv \partial_a \omega_{b_k \dots b_1} - \sum_{j=1}^k \Gamma^c{}_{ab_j} \omega_{b_k \dots b_{j+1} c b_{j-1} \dots b_1}, \quad (A.1)$$

donde

$$\Gamma^c{}_{ab} = g^{cd} \left( \partial_{(a} g_{b)d} - \frac{1}{2} \partial_d g_{ab} \right). \quad (A.2)$$

Sustituyendo (A.1) en la definición del tensor de Riemann (F.85) se obtiene que

$$R_{abc}{}^d = 2 \left( \Gamma^e{}_{c[a} \Gamma^d{}_{b]e} - \partial_{[a} \Gamma^d{}_{b]c} \right). \quad (A.3)$$

Contrayendo los índices  $b$  y  $d$  obtenemos

$$R_{ac} = \Gamma^e{}_{ca} \Gamma^b{}_{be} - \Gamma^e{}_{cb} \Gamma^b{}_{ae} - \partial_a \Gamma^b{}_{bc} + \partial_b \Gamma^b{}_{ac}. \quad (A.4)$$

Notemos que los términos de segundo orden en derivadas de la métrica estarán incluidos en los últimos dos términos. Desarrollando las derivadas con ayuda de (A.2), tendremos que

$$R_{ac} = -\frac{1}{2} g^{bd} \left( \partial_b \partial_d g_{ac} + \partial_a \partial_c g_{bd} - 2 \partial_d \partial_{(c} g_{a)b} \right) + F_{ac}(g, \partial g), \quad (A.5)$$

donde  $F_{ac}(g, \partial g)$  es un tensor que sólo depende de  $g_{ab}$  y sus primeras derivadas  $\partial_a g_{bc}$ .

Estas ecuaciones se pueden llevar a una forma cuasilineal hiperbólica de segundo orden recurriendo a una elección particular de coordenadas. Sea  $H^\mu$  definida para cualquier sistema de coordenadas  $\{x^\mu\}$  como

$$H^\mu \equiv g^{ab} \nabla_a \nabla_b x^\mu. \quad (\text{A.6})$$

Con ayuda de (A.1) podemos verificar que<sup>1</sup>

$$H^\mu = -g^{ab} \Gamma^\mu_{ab}, \quad (\text{A.7})$$

y con ayuda de (A.2),

$$H^\mu = -g^{\mu a} g^{bc} \partial_b g_{ac} + \frac{1}{2} g^{ab} g^{\mu c} \partial_c g_{ab}. \quad (\text{A.8})$$

Calculando una derivada sobre esta función se obtiene

$$\partial_a H^\mu = -g^{\mu b} g^{de} \partial_a \partial_d g_{be} + \frac{1}{2} g^{bd} g^{\mu e} \partial_a \partial_e g_{bd} + \mathcal{H}^\mu{}_a(g, \partial g), \quad (\text{A.9})$$

con  $\mathcal{H}^\mu{}_a(g, \partial g)$  un covector que sólo depende de  $g_{ab}$  y sus primeras derivadas  $\partial_a g_{bc}$ . De aquí tenemos que

$$g_{\mu(c} \partial_a) H^\mu = -g^{bd} \partial_d \partial_{(a} g_{c)b} + \frac{1}{2} g^{bd} \partial_a \partial_c g_{bd} + g_{\mu(c} \mathcal{H}^\mu{}_a)(g, \partial g), \quad (\text{A.10})$$

donde comparando con (A.5), tenemos que

$$R_{ac} = -\frac{1}{2} g^{bd} \partial_b \partial_d g_{ac} - g_{\mu(a} \partial_c) H^\mu + g_{\mu(a} \mathcal{H}^\mu{}_c)(g, \partial g) + F_{ac}(g, \partial g). \quad (\text{A.11})$$

Entonces, de aquí se sigue que un sistema de coordenadas tales que

$$H^\mu = 0, \quad (\text{A.12})$$

inmediatamente lleva la ecuación (3.10) a la forma cuasilineal hiperbólica de segundo orden

$$g^{bd} \partial_b \partial_d g_{ac} - 2 \hat{H}_{ac}(g, \partial g) = 0, \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\hat{H}_{ac}(g, \partial g) \equiv g_{\mu(a} \mathcal{H}^\mu{}_c)(g, \partial g) + F_{ac}(g, \partial g). \quad (\text{A.14})$$

Nótese que siempre podemos escoger coordenadas armónicas a partir de datos sobre una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$ , ya que para un conjunto arbitrario de coordenadas  $\{y^\mu\}$  definidas en una vecindad de  $\Sigma$ , podemos expresar las soluciones  $\{x^\mu\}$  a la ecuación (A.12) tomando como datos  $\{y^\mu\}$  en  $\Sigma$ , y sus derivadas normales  $\{-n^a \nabla_a y^\mu\}$  sobre  $\Sigma$ . Al ser (A.12) una ecuación lineal hiperbólica, tiene buena formulación de valores iniciales. Es decir, la condición de usar coordenadas armónicas no represente ninguna pérdida de generalidad [56].

<sup>1</sup>Nótese que se está incurriendo en un abuso de notación al mezclar índices abstractos con índices numéricos, como es el caso de  $\mu$ . En este caso tenemos, por ejemplo, para un tensor  $T_{ab} = T_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b$ , que  $T_{\mu a} = T_{\mu\nu} (dx^\nu)_a$ , y de manera análoga para tensores de rango arbitrario.

## A.2. Caso con materia.

Para el caso con materia, la posibilidad de tener una buena formulación de valores iniciales depende de las ecuaciones que satisfacen los campos de materia, así como su tensor de energía-momento. Si se trata por ejemplo, de un campo escalar  $\phi$  que obedece una ecuación cuasilineal hiperbólica de la forma

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi + V(\phi, \partial\phi, g, \partial g) = 0, \quad (\text{A.15})$$

y su tensor de energía momento es de la forma  $T_{ab}(\phi, \partial\phi, g, \partial g)$ , entonces podemos tomar la traza de la ecuación de Einstein (3.20) para obtener

$$R = -8\pi G_N T(\phi, \partial\phi, g, \partial g), \quad (\text{A.16})$$

donde  $T = g^{ab}T_{ab}$ , y de este modo la ecuación de Einstein en coordenadas armónicas vuelve a ser cuasilineal hiperbólica de segundo orden,

$$g^{bd}\partial_b\partial_d g_{ac} - 2\hat{H}_{ac}(g, \partial g) + 4\pi G_N (T(\phi, \partial\phi, g, \partial g) - 2T_{ab}(\phi, \partial\phi, g, \partial g)) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Sin embargo, en el caso del sistema de campo escalar con acoplamiento no mínimo planteado en la sección (3.2), tenemos el sistema (3.16), que es de la forma

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi - m^2\phi - \xi R(g, \partial g, \partial^2 g) = 0, \quad (\text{A.18a})$$

$$R_{ab}(g, \partial g, \partial^2 g) - \frac{1}{2}R(g, \partial g, \partial^2 g)g_{ab} = 8\pi G_{eff}(\phi)T_{ab}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi), \quad (\text{A.18b})$$

donde

$$G_{eff}(\phi) \equiv \frac{G_N}{1 - 8\pi G_N \xi \phi^2}, \quad (\text{A.19})$$

y  $T_{ab}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi)$  está dado por

$$\begin{aligned} T_{ab}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi) &= (1 - 2\xi)(\nabla_a\phi)(\nabla_b\phi) - 2\xi\phi\nabla_a\nabla_b\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{ab} \left[ (1 - 4\xi)g^{cd}(\nabla_c\phi)(\nabla_d\phi) + m^2\phi^2 - 4\xi\phi\Box\phi \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Nótese que (A.18a) corresponde a la ecuación (3.16a) mientras que (A.18b) es la ecuación (3.16b) escrita de manera compacta.

Debido al término  $R$  en (A.18a), que en general incluye derivadas segundas de la métrica en la ecuación del campo, y de los términos  $\nabla_a\nabla_b\phi$  y  $\Box\phi$  en (A.18b), este sistema no está en forma cuasilineal hiperbólica ni aún en coordenadas armónicas. Por lo tanto, para llevar este sistema a una forma cuasilineal hiperbólica de segundo orden necesitamos realizar un procedimiento adicional. En [65], Noakes bosqueja un procedimiento para el caso particular  $\xi = 1/6$ , que aquí vamos a desarrollar explícitamente para  $\xi$  arbitrario.



Comenzamos con calcular la traza de (A.18b), de donde tenemos que

$$R(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi) = -8\pi G_{eff} T(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi), \quad (\text{A.21})$$

donde

$$T(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi) = g^{ab} T_{ab} = 6(\xi - 1/6)(\nabla^c\phi)(\nabla_c\phi) - 2m^2\phi^2 + 6\xi\phi\Box\phi. \quad (\text{A.22})$$

Por lo tanto, la ecuación (A.18b) se reescribe como

$$R_{ab} = 8\pi G_{eff} \tau_{ab}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi), \quad (\text{A.23})$$

donde

$$\tau_{ab}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi) = T_{ab}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi) - \frac{1}{2}T(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi)g_{ab}, \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} &= (1 - 2\xi)(\nabla_a\phi)(\nabla_b\phi) - 2\xi\phi\nabla_a\nabla_b\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{ab} (2\xi(\nabla^c\phi)(\nabla_c\phi) - m^2\phi^2 + 2\xi\phi\Box\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

De (A.24) se sigue que

$$\tau \equiv g^{ab}\tau_{ab} = -T. \quad (\text{A.26})$$

Hasta este punto hemos simplificado la parte izquierda de (A.18b) para que en coordenadas armónicas ésta adquiera una forma cuasilineal hiperbólica de segundo orden para las componentes de la métrica, sin embargo, aún tenemos términos de segundo orden en derivadas del campo en  $\tau_{ab}$ . Para eliminar el término  $\Box\phi$  lo intuitivo sería despejar este término de (A.18a), pero obtenemos una expresión de la forma

$$\Box\phi = (m^2 + \xi R(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi))\phi, \quad (\text{A.27})$$

donde tenemos a  $R(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi)$  dado por (A.21) en términos de  $T = -\tau$ . Por ende, primero es necesario sustituir (A.27) en (A.21) y sólo después, despejar  $R$ , obteniendo

$$R(\phi, \partial\phi) = 48\pi G_\phi(\phi) ((1/6 - \xi)(\nabla^c\phi)(\nabla_c\phi) + (1/3 - \xi)m^2\phi^2), \quad (\text{A.28})$$

$$\equiv R(\phi, \nabla^c\phi\nabla_c\phi), \quad (\text{A.29})$$

donde hemos definido

$$G_\phi(\phi) \equiv \frac{G_N}{1 + 48\pi G_N \xi (1/6 - \xi)\phi^2}. \quad (\text{A.30})$$

De este modo, la ecuación para el campo adquiere la forma

$$\Box\phi - (m^2 + \xi R(\phi, \nabla^c\phi\nabla_c\phi))\phi = 0. \quad (\text{A.31})$$

Aún tenemos que tratar con el término  $\nabla_a\nabla_b\phi$  en (A.24). Para ello, definimos el campo

$$v_a \equiv \nabla_a\phi, \quad (\text{A.32})$$

y tomamos una derivada de (A.31) para obtener una ecuación de movimiento para  $v_a$ ,

$$\square v_a - R_a{}^b v_b - m^2 v_a - \xi \phi \nabla_a R - \xi R v_a = 0, \quad (\text{A.33})$$

donde hemos empleado la relación

$$\nabla_a \nabla_b v_c = \nabla_b \nabla_a v_c + R_{abc}{}^d v_d, \quad (\text{A.34})$$

contraída en la forma

$$g^{bc} \nabla_a \nabla_b v_c = g^{bc} \nabla_b \nabla_c v_a - R_a{}^b v_b, \quad (\text{A.35})$$

donde  $R_{ab}$  es el correspondiente tensor de Ricci dado por la ecuación (A.23), evaluado en términos de  $v_a$ , es decir,

$$R_{ab}(\phi, v, \nabla v) \equiv 8\pi G_{eff}(\phi) \left\{ 2(1/2 - \xi) v_a v_b - 2\xi \phi \nabla_a v_b - \frac{1}{2} g_{ab} (2\xi v^c v_c - m^2 \phi^2 + 2\xi \phi^2 (m^2 + \xi R(\phi, v))) \right\}. \quad (\text{A.36})$$

De este modo, la ecuación (A.33) es en efecto cuasilineal hiperbólica puesto que  $R$  y su derivada  $\nabla_a R$  no involucran más que derivadas de primer orden en  $v_a$ , a saber,

$$R(\phi, v) = 48\pi G_\phi(\phi) \left\{ (1/6 - \xi) v^c v_c + (1/3 - \xi) m^2 \phi^2 \right\}, \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} (\nabla_a R)(\phi, v, \nabla v) &= \frac{\partial_\phi G_\phi}{G_\phi}(\phi) v_a R(\phi, v) \\ &+ 48\pi G_\phi(\phi) \left\{ 2(1/6 - \xi) v^c \nabla_c v_a + 2(1/3 - \xi) m^2 \phi v_a \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Luego, reescribimos la ecuación de Einstein (A.23) en términos de  $\phi$ ,  $v_a$  y  $\nabla_a v_b$ ,

$$R_{ab}(g, \partial g) = 8\pi G_{eff}(\phi) \left\{ 2(1/2 - \xi) v_a v_b - 2\xi \phi \nabla_a v_b - \frac{1}{2} g_{ab} (2\xi v^c v_c - m^2 \phi^2 + 2\xi \phi^2 (m^2 + \xi R(\phi, v))) \right\}. \quad (\text{A.39})$$

Finalmente, en coordenadas armónicas, tenemos que el sistema dado por las ecuaciones (A.31), (A.33) y (A.39) conforman un sistema cuasilineal hiperbólico de segundo orden para los campos  $\phi$ ,  $v_a$  y  $g_{ab}$ . Visto de este modo, no se incluye la ecuación (A.32) dentro del sistema. Sin embargo, a partir de datos iniciales adecuados para  $v_a$ , el problema de valores iniciales bien puesto garantiza que se cumpla la ecuación (A.32). Es decir, si tomamos como dato inicial

$$v_a|_\Sigma = (D_a \phi)_\Sigma - n_a \dot{\phi}|_\Sigma, \quad (\text{A.40})$$

tendremos que se cumple la ecuación (A.32) sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ , ya que el lado derecho es justamente la descomposición 3 + 1 de  $\nabla_a \phi$  evaluada en  $\Sigma$ . Por otro lado, de la ecuación (A.31), en su forma 3 + 1,

$$-\ddot{\phi} + K \dot{\phi} + (m^2 + \xi R(\phi, D\phi, \dot{\phi}) - D^b D_b) \phi = 0, \quad (\text{A.41})$$

se puede obtener el valor correspondiente a  $\ddot{\phi}$  en  $\Sigma$ . Por otro lado, si expandimos (A.32) en forma 3 + 1, y utilizamos la identidad (F.105) sobre (F.123) aplicada a  $v_a$ , tomando  $N = 1$  y  $N^a = 0$ , se obtiene

$$\dot{v}_a = D_a \dot{\phi} - n_a \ddot{\phi}. \quad (\text{A.42})$$

Es decir, tomando, con ayuda de (A.41), como segundo dato inicial para  $v_a$ ,

$$\dot{v}_a|_\Sigma = D_a \dot{\phi}|_\Sigma + n_a \left( K \dot{\phi}|_\Sigma + (m^2 + \xi R(\phi|_\Sigma, D\phi|_\Sigma, \dot{\phi}|_\Sigma) - D^b D_b) \phi|_\Sigma \right), \quad (\text{A.43})$$

entonces en efecto se cumplirá la ecuación (A.32) en todo el espaciotiempo.

De este modo, tenemos que el conjunto de datos iniciales para este sistema es la métrica inducida sobre  $\Sigma$ ,  $h_{ab}$ , el tensor tangente a  $\Sigma$  y simétrico,  $K_{ab}$ , el campo  $\phi$  sobre  $\Sigma$  y su derivada temporal  $\dot{\phi}$  sobre  $\Sigma$ .

## Apéndice B

# Renormalización del Tensor de Energía-Momento: Ambigüedades

De acuerdo con la prescripción de Wald [56],[57], la manera más general posible de expresar el valor de expectación del tensor de energía-momento renormalizado dado un estado de Hadamard  $\omega$ , es

$$\langle T_{ab} \rangle^{(\text{ren})} = \langle T_{ab} \rangle^{(\omega)} + T_{ab}^{(g)}, \quad (\text{B.1})$$

donde el término  $\langle T_{ab} \rangle^{(\omega)}$  depende explícitamente de los límites de coincidencia de la parte regular de la función de dos puntos del estado de Hadamard  $\omega$ . Por sí solo, este término falla en ser conservado por un factor  $[v_1]g_{ab}$  (el coeficiente que acompaña al logaritmo en la expansión de Hadamard de la función de dos puntos). Además de este término, el formalismo permite agregar términos de *ambigüedad* puramente geométricos, es decir, independientes del estado, y que se construyen a partir de escalares locales de curvatura con las dimensiones correctas, y que son de la forma<sup>1</sup>

$$H_{ab}^1 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ab}} \int_M d^4x \sqrt{-g} R^2 \quad (\text{B.2a})$$

$$= 2\nabla_a \nabla_b R - 2R R_{ab} - 2\Box R g_{ab} + \frac{1}{2} R^2 g_{ab}, \quad (\text{B.2b})$$

$$H_{ab}^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ab}} \int_M d^4x \sqrt{-g} R^{cd} R_{cd} \quad (\text{B.3a})$$

$$= \nabla_a \nabla_b R - \Box R_{ab} - 2R^{cd} R_{cabd} - \frac{1}{2} g_{ab} \Box R + \frac{1}{2} g_{ab} R^{cd} R_{cd}, \quad (\text{B.3b})$$

---

<sup>1</sup>Nótese que estos términos difieren de los indicados en Birrell & Davies [79] por el signo de  $g_{ab}$ ,  $\Box \equiv g^{ab} \nabla_a \nabla_b$ ,  $R_{abc}{}^d$ ,  $R_{ab}$ , etc., dado que en esa referencia se utiliza la signatura  $(1, -1, -1, -1)$ .

$$H_{ab}^3 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ab}} \int_M d^4x \sqrt{-g} R^{cdef} R_{cdef} \quad (\text{B.4a})$$

$$= 2\nabla_a \nabla_b R - 4\Box R_{ab} + 4R^c{}_a R_{cb} - 4R^{cd} R_{cadb} - 2R^{cde}{}_a R_{cdeb} + \frac{1}{2} R^{cdef} R_{cdef} g_{ab}, \quad (\text{B.4b})$$

así como términos proporcionales a  $G_{ab}$  y a  $m^4 g_{ab}$ , que corresponden a reescalamientos de la constante de Newton y de la constante cosmológica, respectivamente. En la ecuación (B.1) el término  $T_{ab}^{(g)}$  incorpora tanto el término necesario para garantizar la conservación de  $\langle T_{ab} \rangle^{(\text{ren})}$ , proporcional a  $[v_1]g_{ab}$ , así como los términos  $H^1, H^2, H^3$ .

En el caso de cuatro dimensiones, éstos términos no son independientes ya que la característica de Euler,

$$\mathfrak{E} = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left( R^2 - 4R^{cd} R_{cd} + R^{cdef} R_{cdef} \right) \quad (\text{B.5})$$

es un invariante topológico y por lo tanto

$$H_{ab}^1 - 4H_{ab}^2 + H_{ab}^3 = 0, \quad (\text{B.6})$$

es decir, sólo dos de estos tres términos son realmente independientes.

Siguiendo a Décanini & Folacci [60], la parte dependiente del estado  $\langle T_{ab} \rangle^{(\omega)}$  que se obtiene de la prescripción de separación de punto es

$$\langle T_{ab} \rangle^{(\omega)} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \left[ -\overset{2}{w}_{ab} + \frac{1}{2}(1 - 2\xi) \nabla_a \nabla_b \overset{0}{w} + g_{ab} \left( \xi - \frac{1}{4} \right) \Box \overset{0}{w} + \xi \overset{0}{w} R_{ab} \right], \quad (\text{B.7})$$

donde  $\overset{2}{w}_{ab}$  y  $\overset{0}{w}$  corresponden a los coeficientes de la expansión de Taylor para la función regular  $W$  definida en (2.14). En [60] también se establece que la forma explícita del término que se ha de añadir para garantizar la conservación del tensor renormalizado es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(2\pi)^2} g_{ab} [v_1] = \frac{1}{2(2\pi)^2} g_{ab} \left\{ \frac{1}{8} m^4 + \frac{1}{4} \left( \xi - \frac{1}{6} \right) m^2 R - \frac{1}{24} \left( \xi - \frac{1}{5} \right) \Box R \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left( \xi - \frac{1}{6} \right)^2 R^2 - \frac{1}{720} R^{cd} R_{cd} + \frac{1}{720} R^{cdef} R_{cdef} \right\}. \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

En conjunto con la identidad (B.6), esto implica que la expresión más general para  $\langle T_{ab} \rangle^{(\text{ren})}$ , que contiene todas las ambigüedades posibles pueden caracterizarse en términos

de dos de tres parámetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  como

$$\langle T_{ab} \rangle^{(\text{ren})} = \langle T_{ab} \rangle^{(\omega)} - \frac{1}{2(2\pi)^2} g_{ab} [v_1] + \alpha_1 H_{ab}^1 + \alpha_2 H_{ab}^2 + \alpha_{G_N} G_{ab} + \alpha_\Lambda m^4 g_{ab}, \quad (\text{B.9a})$$

$$= \langle T_{ab} \rangle^{(\omega)} - \frac{1}{2(2\pi)^2} g_{ab} [v_1] + \alpha_1 H_{ab}^1 + \alpha_3 H_{ab}^3 + \alpha_{G_N} G_{ab} + \alpha_\Lambda m^4 g_{ab}, \quad (\text{B.9b})$$

$$= \langle T_{ab} \rangle^{(\omega)} - \frac{1}{2(2\pi)^2} g_{ab} [v_1] + \alpha_2 H_{ab}^2 + \alpha_3 H_{ab}^3 + \alpha_{G_N} G_{ab} + \alpha_\Lambda m^4 g_{ab}. \quad (\text{B.9c})$$

A continuación absorberemos  $\alpha_{G_N}$  y  $\alpha_\Lambda$  en las constantes de Newton y Cosmológica, es decir,

$$G_N = \frac{G_N^{(\text{orig})}}{1 - 8\pi G_N^{(\text{orig})} \alpha_{G_N}}, \quad (\text{B.10a})$$

$$\Lambda = \frac{\Lambda^{(\text{orig})} - 8\pi G_N^{(\text{orig})} \alpha_\Lambda m^4}{1 - 8\pi G_N^{(\text{orig})} \alpha_{G_N}}. \quad (\text{B.10b})$$

Luego, el término geométrico  $T_{ab}^{(g)} = \langle T_{ab} \rangle^{(\text{ren})} - \langle T_{ab} \rangle^{(\omega)}$  está dado por

$$\begin{aligned} {}^{1,2}T_{ab}^{(g)} &= (2\alpha_1 + \alpha_2) \nabla_a \nabla_b R - \frac{1}{2} \left( 4\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1 - 5\xi}{480\pi^2} \right) \square R g_{ab} - \alpha_2 \square R_{ab} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \alpha_2 + \frac{1}{2880\pi^2} \right) R^{cd} R_{cd} g_{ab} - \frac{1}{5760\pi^2} R^{cdef} R_{cdef} g_{ab} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \alpha_1 - \frac{(1 - 6\xi)^2}{1152\pi^2} \right) R^2 g_{ab} - 2\alpha_1 R R_{ab} - 2\alpha_2 R^{cd} R_{cabd} \\ &\quad + \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{6} - \xi \right) m^2 R g_{ab} - \frac{1}{(8\pi)^2} m^4 g_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

si escogemos conservar los términos  $H_{ab}^1$  y  $H_{ab}^2$ , o

$$\begin{aligned} {}^{1,3}T_{ab}^{(g)} &= (2\alpha_1 + \alpha_3) \nabla_a \nabla_b R - \left( 2\alpha_1 + \frac{1 - 5\xi}{960\pi^2} \right) \square R g_{ab} - 4\alpha_3 \square R_{ab} \\ &\quad + \frac{1}{5760\pi^2} R^{cd} R_{cd} g_{ab} + \frac{1}{2} \left( \alpha_3 - \frac{1}{2880\pi^2} \right) R^{cdef} R_{cdef} g_{ab} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \alpha_1 - \frac{(1 - 6\xi)^2}{1152\pi^2} \right) R^2 g_{ab} - 2\alpha_3 R^{cde}{}_a R_{cdeb} - 2\alpha_1 R R_{ab} \\ &\quad + 4\alpha_3 R_a{}^c R_{bc} - 4\alpha_3 R^{cd} R_{cabd} \\ &\quad + \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{6} - \xi \right) m^2 R g_{ab} - \frac{1}{(8\pi)^2} m^4 g_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

si escogemos los términos  $H_{ab}^1$  y  $H_{ab}^3$ , o bien,

$$\begin{aligned}
{}^{2,3}T_{ab}^{(g)} = & (\alpha_2 + 2\alpha_3)\nabla_a\nabla_b R - \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + \frac{1-5\xi}{480\pi^2}\right)\square R g_{ab} - (\alpha_2 + 4\alpha_3)\square R_{ab} \\
& + \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + \frac{1}{2880\pi^2}\right)R^{cd}R_{cd}g_{ab} + \frac{1}{2}\left(\alpha_3 - \frac{1}{2880\pi^2}\right)R^{cdef}R_{cdef}g_{ab} \\
& - \frac{(1-6\xi)^2}{48^2\pi^2}R^2g_{ab} + 2\alpha_3 R^{cde}{}_a R_{cdeb} + 4\alpha_3 R_a{}^c R_{bc} - 2(\alpha_2 + 2\alpha_3)R^{cd}R_{cdb} \\
& + \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)m^2 R g_{ab} - \frac{1}{(8\pi)^2}m^4 g_{ab}, \tag{B.13}
\end{aligned}$$

si conservamos los términos  $H_{ab}^2$  y  $H_{ab}^3$  en (B.9). Nótese que también es posible modificar  $\alpha_\Lambda$  para que absorba el término  $\frac{1}{(8\pi)^2}m^4 g_{ab}$ , de modo que a su vez se reabsorba en  $\Lambda$ .

Si se calcula la traza de  $\langle T_{ab} \rangle^{(\text{ren})}$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle T^a{}_a \rangle^{(\text{ren})} = & \frac{3}{32\pi^2}m^4 + \frac{1}{8\pi^2}\left((3\xi - 1/2)\square - m^2\right)\overset{0}{w} - \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)m^2 R \\
& + \left(\frac{1-5\xi}{480\pi^2} - 2\beta\right)\square R + \frac{(1-6\xi)^2}{2(24\pi)^2}R^2 \\
& - \frac{1}{5(24\pi)^2}(R^{cd}R_{cd} - R^{cdef}R_{cdef}) \tag{B.14}
\end{aligned}$$

donde

$$\beta = 3\alpha_1 + \alpha_2, \tag{B.15}$$

si expresamos  $T_{ab}^{(g)}$  en términos de  $H_{ab}^1$  y  $H_{ab}^2$ ,

$$\beta = 3\alpha_1 + \alpha_3, \tag{B.16}$$

si lo hacemos en términos de  $H_{ab}^1$  y  $H_{ab}^3$ , o bien,

$$\beta = \alpha_2 + \alpha_3, \tag{B.17}$$

si escogemos  $H_{ab}^2$  y  $H_{ab}^3$ .

En el caso de un campo escalar sin masa con acoplamiento conforme ( $\xi = 1/6$ ), el tensor de energía-momento clásico se anula, pero en la expresión (B.14) no ocurre así; en su lugar se obtiene

$$\langle T^a{}_a \rangle_{(\text{conf})}^{(\text{ren})} = \left(\frac{1}{2880\pi^2} - 2\beta\right)\square R - \frac{1}{5(24\pi)^2}(R^{cd}R_{cd} - R^{cdef}R_{cdef}), \tag{B.18}$$

que suele denominarse *Anomalía Conforme*. Nótese que no es posible cancelar esta cantidad de manera general, aún escogiendo valores de  $\beta$  que, por ejemplo, cancelen la dependencia con  $\square R$ .

## Apéndice C

# Formulación de valores iniciales en términos de funciones de Green para operadores lineales e hiperbólicos

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  un espaciotiempo globalmente hiperbólico con sección espacial compacta. Sea  $P : C_0^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$  un operador lineal hiperbólico definido por su acción sobre funciones de prueba  $f \in C_0^\infty(\mathcal{M})$  como

$$Pf \equiv \square f - Uf, \quad (\text{C.1})$$

donde  $U \in C^\infty(\mathcal{M})$ . Entonces, existen operadores de Green distinguidos  $E^\pm : C_0^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ , tales que

$$PE^\pm f = E^\pm Pf = f, \quad (\text{C.2})$$

con la propiedad de soporte

$$\text{supp}(E^\pm f) \subset J^\pm \text{supp}(f). \quad (\text{SuppE})$$

Para cualquier  $f \in C_0^\infty$ . Éstos operadores están unívocamente definidos debido a la hiperbolicidad del espaciotiempo y a que el operador  $P$  es hiperbólico. A éstos operadores se les denomina operadores fundamentales de Green adelantado  $E^-$  y retardado  $E^+$ .

En términos distribucionales, tendremos que

$$(E^\pm f)(x) = \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(y), E^\pm(x, y) f(y), \quad (\text{C.3})$$

donde los biescalares  $E^\pm(x, y)$  son tales que

$$P_x E^\pm(x, y) = \delta(x, y) / (-\det g_{\mu\nu}(y)), \quad (\text{C.4a})$$

$$P_y E^\pm(x, y) = \delta(x, y) / (-\det g_{\mu\nu}(x)). \quad (\text{C.4b})$$



En esta notación, la ecuación (C.2) tiene la expresión

$$\int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(\underline{y}) P_{\underline{x}}[E^{\pm}(\underline{x}, \underline{y})f(\underline{y})] = \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(\underline{y}) E^{\pm}(\underline{x}, \underline{y})(Pf)(\underline{y}) = f(\underline{x}). \quad (\text{C.5})$$

Asimismo, se puede verificar la siguiente relación entre propagadores ante el intercambio de sus argumentos,

$$E^{-}(\underline{x}, \underline{y}) = E^{+}(\underline{y}, \underline{x}), \quad (\text{C.6})$$

que se deriva directamente de su unicidad.

Considere una región compacta  $D \subset \mathcal{M}$ , y funciones suaves (o suficientemente regulares)  $u, v \in C^{\infty}(M)$  definidas en  $D$ . La identidad de Green en nos dice que

$$\int_D \text{dvol}(\underline{y}) [u(\underline{y})P_{\underline{y}}v(\underline{y}) - v(\underline{y})P_{\underline{y}}u(\underline{y})] = \int_{\partial D} \text{dS}(\underline{y}) [u(\underline{y})(\nabla_n v)(\underline{y}) - v(\underline{y})(\nabla_n u)(\underline{y})], \quad (\text{C.7})$$

donde  $\nabla_n$  es la derivada normal *saliente* en la frontera de  $D$ ,  $\partial D$ . Siguiendo el argumento del Lema A.1 de Dimock [80], sean  $u$  una solución suave de  $Pu = 0$ ,  $v = E^{+}f$  para algún  $f \in C_0^{\infty}$  y consideremos la región  $D = D^{-} \equiv J^{-}(\Sigma) - \Sigma$ . Entonces, tendremos de (C.7) que

$$\begin{aligned} \int_{D^{-}} \text{dvol}(\underline{y}) u(\underline{y})f(\underline{y}) &= \int_{\Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{y}) [u(\underline{y})(\nabla_n[E^{+}f])(\underline{y}) - (E^{+}f)(\underline{y})(\nabla_n u)(\underline{y})] \\ &= \int_{\Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{y}) \left[ u(\underline{y})\nabla_{n\underline{y}} \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(\underline{z})E^{+}(\underline{y}, \underline{z})f(\underline{z}) - (\nabla_n u)(\underline{y}) \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(\underline{z})E^{+}(\underline{y}, \underline{z})f(\underline{z}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Nótese que  $E^{+}f$  no tiene soporte sobre la frontera al pasado infinito de  $D$ , por lo que dicho término de frontera no aparece en esta expresión. Análogamente, tómesese ahora  $v = E^{-}f$  y la región  $D^{+} = J^{+}(\Sigma) - \Sigma$ , de modo que ahora tendremos

$$\begin{aligned} \int_{D^{+}} \text{dvol}(\underline{y}) u(\underline{y})f(\underline{y}) \\ = - \int_{\Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{y}) \left[ u(\underline{y})\nabla_{n\underline{y}} \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(\underline{z})E^{-}(\underline{y}, \underline{z})f(\underline{z}) - (\nabla_n u)(\underline{y}) \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(\underline{z})E^{-}(\underline{y}, \underline{z})f(\underline{z}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Luego, dados los datos  $u_0 = u|_{\Sigma}$ ,  $\dot{u}_0 = \nabla_n u|_{\Sigma}$ , de la suma de (C.8) y (C.9) se obtiene

$$u(f) = \int_{\Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{y}) \left[ u(\underline{y})\nabla_{n\underline{y}} - (\nabla_n u)(\underline{y}) \right] \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(\underline{z}) [E^{+}(\underline{y}, \underline{z}) - E^{-}(\underline{y}, \underline{z})] f(\underline{z}). \quad (\text{C.10})$$

Sea ahora  $F(\underline{x}, \underline{x}') : C_0^{\infty}(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$  una bisolución a  $P$ , es decir,

$$P_{\underline{x}}F(\underline{x}, \underline{x}') = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$P_{\underline{x}'}F(\underline{x}, \underline{x}') = 0. \quad (\text{C.12})$$

Supongamos que  $F$  es  $L^1(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$  así que la bidistribución  $F$  puede definirse para cualesquiera  $f, g \in C_0^\infty(\mathcal{M})$  como

$$F(f, g) \equiv \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \text{dvol}(x) \text{dvol}(x') F(x, x') f(x) g(x'). \quad (\text{C.13})$$

Entonces, para cada  $g$ , haciendo uso de (C.10) tenemos

$$F(f, g) = \int_{\Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) [F(\underline{x}, g) \nabla_{n\underline{x}} - (\nabla_{n\underline{x}} F(\underline{x}, g))] \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(z) [E^+(\underline{x}, z) - E^-(\underline{x}, z)] f(z). \quad (\text{C.14})$$

Luego, para cada  $\underline{x} \in \Sigma$  también tendremos

$$F(\underline{x}, g) = \int_{\Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{y}) [F(\underline{x}, \underline{y}) \nabla_{n\underline{y}} - (\nabla_{n\underline{y}} F(\underline{x}, \underline{y}))] \int_{\mathcal{M}} \text{dvol}(z') [E^+(\underline{y}, z') - E^-(\underline{y}, z')] g(z'). \quad (\text{C.15})$$

Sustituyendo (C.15) en (C.14) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} F(f, g) &= \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \text{dvol}(z) \text{dvol}(z') f(z) g(z') \\ &\times \left\{ \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) F(\underline{x}, \underline{y}) [\nabla_{n\underline{x}} E(\underline{x}, z)] [\nabla_{n\underline{y}} E(\underline{y}, z')] \right. \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) (\nabla_{n\underline{y}} F(\underline{x}, \underline{y})) [\nabla_{n\underline{x}} E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) (\nabla_{n\underline{x}} F(\underline{x}, \underline{y})) \nabla_{n\underline{y}} [E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \\ &\quad \left. + \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) (\nabla_{n\underline{x}} \nabla_{n\underline{y}} F(\underline{x}, \underline{y})) [E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \right\}, \quad (\text{C.16}) \end{aligned}$$

donde hemos usado el propagador *avanzado menos retardado*,  $E = E^+ - E^-$ . La cantidad entre paréntesis cuadrados puede ser identificada de inmediato con  $F(x, y)$  de acuerdo con (C.13),

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) F(\underline{x}, \underline{y}) [\nabla_{n\underline{x}} E(\underline{x}, z)] [\nabla_{n\underline{y}} E(\underline{y}, z')] \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) (\nabla_{n\underline{y}} F(\underline{x}, \underline{y})) [\nabla_{n\underline{x}} E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) (\nabla_{n\underline{x}} F(\underline{x}, \underline{y})) \nabla_{n\underline{y}} [E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \\ &\quad + \int_{\Sigma \times \Sigma} \text{d}\Sigma(\underline{x}) \text{d}\Sigma(\underline{y}) (\nabla_{n\underline{x}} \nabla_{n\underline{y}} F(\underline{x}, \underline{y})) [E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')]. \quad (\text{C.17}) \end{aligned}$$

Ésto muestra como reconstruir explícitamente la bisolución  $F(x, x')$  definida en  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$  en términos de datos iniciales dados en  $\Sigma \times \Sigma$ , correspondientes a las funciones de dos puntos  $L^1(\Sigma \times \Sigma)$  definidas para puntos  $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma$  como

$$F_{00}(\underline{x}, \underline{y}) = F(\underline{x}, \underline{y}), \quad (\text{C.18})$$

$$F_{01}(\underline{x}, \underline{y}) = \nabla_{n\underline{y}} F(\underline{x}, \underline{y}) = \lim_{\underline{y} \rightarrow \underline{y}'} [\nabla_{n\underline{y}'} F(\underline{x}, \underline{y}')], \quad (\text{C.19})$$

$$F_{10}(\underline{x}, \underline{y}) = \nabla_{n\underline{x}} F(\underline{x}, \underline{y}) = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}'} [\nabla_{n\underline{x}'} F(\underline{x}', \underline{y})], \quad (\text{C.20})$$

$$F_{11}(\underline{x}, \underline{y}) = \nabla_{n\underline{x}} \nabla_{n\underline{y}} F(\underline{x}, \underline{y}) = \lim_{\substack{\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \\ \underline{y} \rightarrow \underline{y}'}} [\nabla_{n\underline{y}'} \nabla_{n\underline{x}'} F(\underline{x}', \underline{y}')]. \quad (\text{C.21})$$

Éstas funciones de dos puntos definen bidistribuciones en  $C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$ , que denotamos por  $F_{00} = F|_\Sigma$ ,  $F_{01} = (1 \otimes \nabla_n)F|_\Sigma$ ,  $F_{10} = (\nabla_n \otimes 1)F|_\Sigma$  y  $F_{11} = (\nabla_n \otimes \nabla_n)F|_\Sigma$ , en cuyos términos se puede expresar (C.16) en una forma mucho más compacta usando notación distribucional,

$$\begin{aligned} F(f, g) &= F_{00}(\nabla_n E f|_\Sigma, \nabla_n E g|_\Sigma) - F_{01}(\nabla_n E f|_\Sigma, E g|_\Sigma) \\ &\quad - F_{10}(E f|_\Sigma, \nabla_n E g|_\Sigma) + F_{11}(E f|_\Sigma, E g|_\Sigma). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Éstos resultados son válidos para funciones de dos puntos siempre y cuando sean regulares y suaves, pero también es posible recuperar funciones de dos puntos distribucionales a través de la prescripción de *integrar y después tomar el límite* de expresiones regularizadas  $F_{00\epsilon}$ ,  $F_{01\epsilon}$ ,  $F_{10\epsilon}$  y  $F_{11\epsilon}$ , es decir,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}) d\Sigma(\underline{y}) F_{00\epsilon}(\underline{x}, \underline{y}) [\nabla_{n\underline{x}} E(\underline{x}, z)] [\nabla_{n\underline{y}} E(\underline{y}, z')] \right. \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}) d\Sigma(\underline{y}) F_{01\epsilon}(\underline{x}, \underline{y}) [\nabla_{n\underline{x}} E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \\ &\quad - \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}) d\Sigma(\underline{y}) F_{10\epsilon}(\underline{x}, \underline{y}) \nabla_{n\underline{y}} [E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \\ &\quad \left. + \int_{\Sigma \times \Sigma} d\Sigma(\underline{x}) d\Sigma(\underline{y}) F_{11\epsilon}(\underline{x}, \underline{y}) [E(\underline{x}, z)] [E(\underline{y}, z')] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

## Apéndice D

# Desarrollo en serie de la solución de Hadamard.

La solución fundamental de Hadamard  $Z(x, y)$

$$Z(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{U(x, y)}{\sigma(x, y) + i\epsilon(T(x) - T(y))} + v(x, y) \log \left( \frac{\sigma(x, y) + i\epsilon(T(x) - T(y))}{\ell^2} \right) + w(x, y) \right), \quad (2.14)$$

está determinada en una región localmente convexa  $A$  con  $x \in A$ ,  $y \in A$  y  $2\sigma(x, y)$  el cuadrado de la distancia geodésica entre  $y$  y  $x$ , salvo una función regular en el límite  $y \rightarrow x$ , si se cumple que

1.  $Z(x, y)$  es una solución en  $x$  a la ecuación de Klein-Gordon (2.23).
2.  $Z(x, y)$  es de la forma (2.14) con  $U(x, y)$ ,  $v(x, y)$  y  $w(x, y)$  funciones suaves de dos puntos y regulares en el límite  $y \rightarrow x$ .

La construcción explícita de las funciones  $U$ ,  $v$ ,  $w$  se puede realizar desarrollándolas como potencias de  $\sigma(x, y)$ , es decir,

$$v(x, y) = \sum_{n=0}^N v_n(x, y) \sigma^n(x, y) + O(\sigma^{N+1}), \quad (D.1a)$$

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^N w_n(x, y) \sigma^n(x, y) + O(\sigma^{N+1}). \quad (D.1b)$$

y sustituyendo estas expansiones en la ecuación de Klein-Gordon para  $H$  en la primera entrada. El resultado son las ecuaciones de recurrencia de Hadamard, obteniendo

$$\square_x \sigma(x, y) = 4 - 2U^{-1}(x, y) \left( (\nabla_x)^a \sigma(x, y) \right) \nabla_a U(x, y), \quad (D.2)$$

donde  $U^2$  se identifica como el determinante de Van-Vleck-Morette,

$$\Delta(x, y) = -\frac{\det(-(\nabla_x)_\mu(\nabla_y)_\nu\sigma(x, y))}{\sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}}, \quad (2.17)$$

y los coeficientes  $v_n$  y  $w_n$  se relacionan con los coeficientes de orden inferior,  $v_{n-1}$  y  $w_{n-1}$ , para  $n > 0$ ,

$$(1 + [\nabla^a\sigma]\nabla_a - \Delta^{1/2}[\nabla_a\Delta^{1/2}][\nabla_a\sigma])v_0 = -\frac{(\square_x - m^2 - \xi R)}{2}\Delta^{1/2}, \quad (D.3a)$$

$$(n + 1 + [\nabla^a\sigma]\nabla_a - \Delta^{-1/2}[\nabla^a\sigma][\nabla_a\Delta^{1/2}])v_n = -\frac{(\square_x - m^2 - \xi R)}{2n}v_{n-1}, \quad (D.3b)$$

$$\begin{aligned} (n + 1 + [\nabla^a\sigma]\nabla_a - \Delta^{-1/2}[\nabla^a\sigma][\nabla_a\Delta^{1/2}])w_{n+1} = \\ -\frac{1}{2n} \left[ 2(2n - \Delta^{-1/2}[\nabla^a\sigma][\nabla_a\Delta^{1/2}] + \nabla^a\sigma\nabla_a)v_n + (\square_x - m^2 - \xi R)w_{n-1} \right], \end{aligned} \quad (D.3c)$$

Expandiendo a su vez cada  $v_n$  y cada  $w_n$  como series covariantes de Taylor en términos de derivadas de  $\sigma(x, y)$ , se pueden resolver explícitamente todos los términos  $v_n, w_n$  a orden arbitrario, con la excepción de  $w_0$ . No existe una ecuación para  $w_0$  así que éste término debe ser fijado por separado.

## Apéndice E

# Expansión perturbativa de la forma de Hadamard para acoplamiento débil

En éste apéndice comprobamos que en el desarrollo perturbativo del sistema de escalares acoplados de la sección 3.2.1, cada término de expansión para la forma de Hadamard  $H_{\ell k}^0$  tiene la misma dependencia funcional que el correspondiente término de expansión perturbativo para la función de Wightman  $G_k^+$  en cada orden del parámetro  $\lambda$ , en otras palabras, que  $H_{\ell k}^0$  depende a lo más de  $\psi_{k-1}$  y  $H_{\ell k-1}^0$  (o sus coeficientes del correspondiente orden).

Sean  $P = \square - m^2 - 2\lambda\psi$ ,  $\psi \in C^\infty(\mathcal{M})$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  un parámetro perturbativo,  $|\lambda| \ll 1$ . Suponga que  $\psi$  admite una expansión en el parámetro perturbativo  $\lambda$  de la forma

$$\psi = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \lambda^k \psi_k + O(\lambda^{\tilde{n}+1}). \quad (\text{E.1})$$

Sea  $Z_\ell$  la solución fundamental de Hadamard para  $P$ , es decir,

$$(\square_x - m^2 - 2\lambda\psi(x))Z_{\ell,k}(x, x') = 0, \quad (\text{E.2})$$

donde  $Z_\ell$  es de la forma (2.14). Considere la aproximación de orden  $\tilde{n}$  de  $Z_\ell$ ,

$$Z_\ell = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \lambda^k Z_{\ell k} + O(\lambda^{\tilde{n}+1}). \quad (\text{E.3})$$

Sustituyendo (E.1) y (E.3) en (E.2), y pidiendo que la ecuación se cumpla orden por orden

en  $\lambda$ , se obtiene

$$(\square_x - m^2)Z_{\ell,0}(x, x') = 0, \quad (\text{E.4a})$$

$$(\square_x - m^2)Z_{\ell,k}(x, x') = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j(x)Z_{\ell,k-j-1}(x, x'), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{E.4b})$$

Notamos que para cada orden  $k$ ,  $Z_{\ell,k}$  sólo depende explícitamente de  $\psi_{k-1}, \psi_{k-2}, \dots, \psi_0$ . Sin embargo, una dependencia funcional en  $\psi_k(x')$  no se descarta en primera instancia en el sistema (E.4) debido a que existen correlaciones entre los diferentes términos del desarrollo en potencias de  $\sigma$  para  $Z_{\ell}$ . A pesar de esto, los órdenes de expansión se mantienen separados (revisando el conjunto completo de relaciones de Hadamard), lo que permite seguir un algoritmo de reconstrucción secuencial orden por orden. Considerando las expansiones (D.1) para  $Z_{\ell,k}$ , se identifica  $\Delta^{1/2}$  como el determinante de Van-Vleck-Morette, que no tiene dependencia en  $\psi$ , y se tienen las relaciones de recurrencia para cada  $v_n$  y  $w_n$ , análogas a (D.3),

$$(1 + [\nabla^a \sigma] \nabla_a - \Delta^{1/2} [\nabla_a \Delta^{1/2}] [\nabla_a \sigma]) v_0 = -\frac{(\square_x - m^2 - 2\lambda\psi)}{2} \Delta^{1/2}, \quad (\text{E.5a})$$

$$(n + 1 + [\nabla^a \sigma] \nabla_a - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}]) v_n = -\frac{(\square_x - m^2 - 2\lambda\psi)}{2n} v_{n-1} : n > 0, \quad (\text{E.5b})$$

$$\begin{aligned} & \left( n + 2 - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}] + \nabla^a \sigma \nabla_a \right) w_{n+1} = \\ & -\frac{1}{2(n+1)} \left[ 2(2[n+1] - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}] + \nabla^a \sigma \nabla_a) v_{n+1} + (\square_x - m^2 - 2\lambda\psi) w_n \right], \end{aligned} \quad (\text{E.5c})$$

Ahora, expandimos cada  $v_n$  y  $w_n$  en  $\lambda$  hasta el orden- $\tilde{n}$ ,

$$v_n = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \lambda^k v_{n,i} + O(\lambda^{\tilde{n}+1}), \quad (\text{E.6a})$$

$$w_n = \sum_{k=0}^{\tilde{n}} \lambda^k w_{n,i} + O(\lambda^{\tilde{n}+1}), \quad (\text{E.6b})$$

y requiriendo que las relaciones de recurrencia se cumplan independientemente a cada orden

en  $\lambda$ , se obtiene el siguiente sistema para los coeficientes  $v_{n,i}$ ,

$$(1 + [\nabla^a \sigma] \nabla_a - \Delta^{1/2} [\nabla_a \Delta^{1/2}] [\nabla_a \sigma]) v_{0,0} = -\frac{(\square_x - m^2)}{2} \Delta^{1/2}, \quad (\text{E.7a})$$

$$(1 + [\nabla^a \sigma] \nabla_a - \Delta^{1/2} [\nabla_a \Delta^{1/2}] [\nabla_a \sigma]) v_{0,k} = \psi_{k-1} \Delta^{1/2}, \quad (\text{E.7b})$$

$$(n + 1 + [\nabla^a \sigma] \nabla_a - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}]) v_{n,0} = -\frac{(\square_x - m^2)}{2n} v_{n-1,0}, \quad (\text{E.7c})$$

$$(n + 1 + [\nabla^a \sigma] \nabla_a - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}]) v_{n,k} + \frac{(\square_x - m^2) v_{n-1,k}}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j v_{n-1,k-j-1}, \quad (\text{E.7d})$$

donde verificamos que cada  $v_{n,k}$  depende solamente de  $\psi_{k-1}, \psi_{k-2}, \dots, \psi_0$ . Para  $w_{n,k}$  se tiene

$$\begin{aligned} & \left( n + 1 - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}] + \nabla^a \sigma \nabla_a \right) w_{n,0} = \\ & -\frac{1}{2n} \left[ 2(2n - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}] + \nabla^a \sigma \nabla_a) v_{n,0} + (\square_x - m^2) w_{n-1,0} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.8a})$$

$$\begin{aligned} & \left( n + 1 - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}] + \nabla^a \sigma \nabla_a \right) w_{n,k} \\ & + \frac{1}{2n} \left[ 2(2n - \Delta^{-1/2} [\nabla^a \sigma] [\nabla_a \Delta^{1/2}] + \nabla^a \sigma \nabla_a) v_{n,k} + (\square_x - m^2) w_{n-1,k} \right] = \end{aligned} \quad (\text{E.8b})$$

$$- \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j w_{n-1,k-j-1} \right], \quad (\text{E.8c})$$

que nuevamente implica que a cada orden  $k > 0$  en  $\lambda$ , cada  $w_{n,k}$  depende explícitamente sólo de  $\psi_{k-1}, \psi_{k-2}, \dots, \psi_0$ . A continuación expandimos cada  $v_{n,k}, w_{n,k}$  como series covariantes de Taylor,

$$v_{n,k}(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} v_{n,k,a_1 \dots a_p}(x) \overset{x}{\nabla}^{a_1} \sigma(x, y) \cdots \overset{x}{\nabla}^{a_p} \sigma(x, y), \quad (\text{E.9a})$$

$$w_{n,k}(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} w_{n,k,a_1 \dots a_p}(x) \overset{x}{\nabla}^{a_1} \sigma(x, y) \cdots \overset{x}{\nabla}^{a_p} \sigma(x, y), \quad (\text{E.9b})$$



donde los coeficientes  $p$ -tensoriales  $v_{n,k,a_1\dots a_p}(x)$  están dados por

$$v_{n,k,0}(x) = \lim_{y \rightarrow x} v_{n,k}(x, y), \quad (\text{E.10a})$$

$$v_{n,k,a}(x) = \lim_{y \rightarrow x} \overset{x}{\nabla}_a v_{n,k}(x, y) - \overset{x}{\nabla}_a v_{n,k,0}(x), \quad (\text{E.10b})$$

$$v_{n,k,a_1 a_2}(x) = \lim_{y \rightarrow x} (\nabla_{a_1} \nabla_{a_2})_y v_{n,k}(x, y) - \overset{x}{\nabla}_{a_1} \overset{x}{\nabla}_{a_2} v_{n,k,0}(x) - 2 \overset{x}{\nabla}_{(a_1} v_{n,k,a_2)}(x), \quad (\text{E.10c})$$

$$\vdots \quad (\text{E.10d})$$

que pueden leerse directamente de (E.7) tras aplicar el correspondiente número de derivadas y considerar el límite  $y \rightarrow x$ . En este límite, el sistema de ecuaciones (E.7) se convierte en un sistema de ecuaciones algebraicas, con lo que se descarta cualquier posible dependencia de  $\psi_k$  para cada término  $v_{n,k,a_1\dots a_p}$ . El mismo procedimiento puede aplicarse a los coeficientes  $w_{n,k,a_1\dots a_p}(x)$ , aunque en general sólo es de nuestro interés la parte singular de  $Z_{\ell,k}^0, H_{\ell,k}^0$ .

Finalmente, en la reconstrucción de cada término de  $H_{\ell,k}^0$  tendremos

$$H_{\ell,0}^0(x, y) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{\Delta^{1/2}(x, y)}{\sigma(x, y)} + \sum_{n=0}^N \sigma^n(x, y) v_{n,0}(x, y) \ln \left( \frac{\sigma(x, y)}{\ell^2} \right) \right] + O(\sigma^{M+1}) \quad (\text{E.11a})$$

$$H_{\ell,k}^0(x, y) = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^N \sigma^n(x, y) v_{n,k}[\psi_{k-1}, \dots, \psi_0](x, y) \ln \left( \frac{\sigma(x, y)}{\ell^2} \right) + O(\sigma^{M+1}) \quad (\text{E.11b})$$

donde hemos anotado explícitamente la dependencia funcional de cada término, y hemos omitido el término  $i2\varepsilon(T(x) - T(y)) + \varepsilon^2$  para evitar hacer más engorrosa la notación. Nótese que  $Z_{\ell,0}^0$  corresponde a la solución fundamental de Hadamard para el sistema *desacoplado* con operador  $P_0 = \square - m^2$ , como era de esperarse. Los coeficientes de corrección,  $H_{\ell,k}^0$ , con  $k > 0$ , no tienen la forma de Hadamard, pero incluyen el comportamiento de las singularidades que depende de  $\psi_{k-1}, \dots, \psi_0$ , para el problema *acoplado*.

## Apéndice F

# Formalismo 3+1

### F.1. Foliaciones del espaciotiempo

Sea  $(M, g_{ab})$  un espaciotiempo globalmente hiperbólico. Esto quiere decir que existe una hipersuperficie ácrona  $\Sigma$  llamada hipersuperficie de *Cauchy* tal que para cada punto  $p$  en  $M$ , toda curva inextensible tipo tiempo que pasa por  $p$  interseca  $\Sigma$  exactamente una vez. Por lo tanto, es posible escoger una congruencia  $\mathfrak{L}$  de curvas tipo tiempo que cubren el espaciotiempo por completo. A una parametrización suave de dicha congruencia de curvas, que denotamos por  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $t(p) = t_0$  para todo  $p \in \Sigma$ , y que crece hacia el futuro de  $p$ , le denominamos *función tiempo*. Por construcción, cada hipersuperficie en que la función tiempo  $t$  es constante es una hipersuperficie de Cauchy, definiendo una familia uniparamétrica de hipersuperficies de Cauchy que en conjunto cubren todo el espaciotiempo.

Con esta construcción podemos identificar una y sólo una hipersuperficie de Cauchy con cada punto del espaciotiempo, y usar el flujo de la congruencia  $\mathfrak{L}$  para identificar puntos en diferentes hipersuperficies. Esto provee una noción particular de evolución temporal a través de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en  $M$  dados por

$$\phi_\tau(p) = \lambda_p(t_p + \tau), \quad (\text{F.1})$$

donde  $\lambda_p$  es la curva particular de la congruencia  $\mathfrak{L}$  que pasa por  $p$  y  $t_p$  es el valor de la parametrización por  $t$  tal que

$$\lambda_p(t_p) = p. \quad (\text{F.2})$$

De aquí se sigue que la estructura de un espaciotiempo globalmente hiperbólico se puede separar como

$$M = \Sigma \times \mathbb{R}. \quad (\text{F.3})$$

A esta construcción, que incluye la familia de hipersuperficies de Cauchy, la función tiempo y la identificación entre puntos de cualesquiera dos hipersuperficies por medio de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos es a lo que denominamos *foliación* del espaciotiempo.

Notemos que podemos comenzar esta construcción definiendo un campo vectorial  $t^a$  tipo tiempo que no se anule en ningún punto de la variedad. En un espaciotiempo globalmente hiperbólico, las curvas integrales de este campo pasarán por cada superficie de Cauchy en un solo punto. Por lo tanto, podemos definir la congruencia de curvas  $\mathcal{L}$  como el conjunto de curvas integrales de  $t^a$  bajo una parametrización particular dada por la función global de tiempo  $t$ . Haciendo la identificación  $t^a \nabla_a = \partial_t$ , tenemos que

$$t^a \nabla_a t = 1, \quad (\text{F.4})$$

expresión que será útil más adelante.

## F.2. La descomposición tensorial 3 + 1 completa

Definimos el espacio vectorial  $\Sigma$ -tangente o tangente de hipersuperficie a un punto  $p \in \Sigma$ , como el subespacio vectorial de  $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{V}_p$  generado por todos los vectores tangentes a las curvas contenidas en  $\Sigma$  que pasan por  $p$ . En conjunto con su espacio dual  $\mathcal{T}_p^*$ , podemos definir tensores de rango arbitrario en  $p$  mediante el producto tensorial. De este modo un campo vectorial  $\Sigma$ -tangente se define como la asignación de un vector  $\Sigma$ -tangente a cada punto de  $\Sigma$ . Esta noción se generaliza naturalmente a campos tensoriales  $\Sigma$ -tangentes, a los que denominaremos simplemente tensores tangentes.

A partir de la estructura que proporciona una foliación, y la métrica del espaciotiempo, es posible construir una división formal de los campos tensoriales según sus múltiples proyecciones respecto a las hipersuperficies de Cauchy de la foliación. Para ello, comencemos por notar que la derivada de la función tiempo,  $\nabla_a t$ , es un vector dual ortogonal a cada hipersuperficie  $\Sigma$  de la foliación. Por lo tanto, el campo vectorial dual unitario, ortogonal a cada hipersuperficie de la foliación está dado por

$$n_a = -\frac{\nabla_a t}{\sqrt{-g^{ab}(\nabla_a t)(\nabla_b t)}}, \quad (\text{F.5})$$

A un conjunto de observadores cuyo vector 4-velocidad es  $n^a$  se les denomina *observadores Eulerianos*.

Gracias a este campo podemos expresar el espacio vectorial tangente en cada punto  $p$  del espaciotiempo como el conjunto de vectores ortogonales a  $n^a$  en ese punto, es decir,

$$\mathcal{T}_p = \{v^a \in \mathcal{V}_p : v^a n_a = 0\}. \quad (\text{F.6})$$

Análogamente, el vector normal dirigido al futuro  $n^a \equiv g^{ab} n_b$  permite expresar el espacio vectorial dual  $\Sigma$ -tangente  $\mathcal{T}_p^*$ ,

$$\mathcal{T}_p^* = \{v_a \in \mathcal{V}_p^* : v_a n^a = 0\}. \quad (\text{F.7})$$

Los subespacios  $\mathcal{T}_p$  y  $\mathcal{T}_p^*$  pueden verse como el resultado de una ortogonalización de Gram-Schmidt parcial de los espacios  $\mathcal{V}_p$  y  $\mathcal{V}_p^*$ , respectivamente. Esto significa que en cada punto  $p \in M$ , el espacio vectorial tangente a  $p$  puede separarse como

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{T}_p \oplus \mathcal{N}_p, \quad (\text{F.8})$$

donde  $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{V}_p$  es el subespacio generado por  $n^a$ , y similarmente para el espacio vectorial dual,

$$\mathcal{V}_p^* = \mathcal{T}_p^* \oplus \mathcal{N}_p^*. \quad (\text{F.9})$$

Esto significa que cada vector y vector dual en cada punto  $p \in M$  puede expresarse como una combinación de la forma

$$v^a = \tilde{v}^a + v_\perp n^a, \quad (\text{F.10a})$$

$$\omega_a = \tilde{\omega}_a + \omega_\perp n_a, \quad (\text{F.10b})$$

respectivamente, donde  $\tilde{v}^a \in \mathcal{T}_p$  y  $\tilde{\omega}_a \in \mathcal{T}_p^*$ . La proyección normal  $v_\perp$  puede calcularse contrayendo la ecuación (F.10a) con  $n_a$  para obtener

$$v_\perp = -n_a v^a. \quad (\text{F.11})$$

Se sigue directamente que

$$\tilde{v}^a = v^a + n^a n_b v^b. \quad (\text{F.12})$$

Auxiliándonos de la identidad tensorial (espatiotemporal)  $\delta^a_b$ , podemos expresar el correspondiente proyectores  $\Sigma$ -tangente de vectores como

$$h^a_b = \delta^a_b + n^a n_b, \quad (\text{F.13})$$

de modo que  $\tilde{v}^a = h^a_b v^b$ . Asimismo, el proyectores correspondiente para vectores duales está dado por

$$h_a^b = \delta_a^b + n_a n^b. \quad (\text{F.14})$$

Nótese que debido a la independencia lineal entre proyecciones tangentes y proyecciones ortogonales, se sigue que la separación (F.10) es única.

Distinguimos de la separación del propio vector  $t^a$ ,

$$t^a = N^a + n^a N, \quad (\text{F.15})$$

el denominado vector *Shift*, correspondiente a la proyección tangente  $N^a$ , y la función *Lapse*, correspondiente a la componente de la proyección normal  $N$  [62],[81].

Se sigue de las ecuaciones (F.4) y (F.5) que

$$N = \frac{1}{\sqrt{-g^{ab}(\nabla_a t)(\nabla_b t)}}, \quad (\text{F.16})$$

y

$$n_a = -N\nabla_a t. \quad (\text{F.17})$$

Si ahora consideramos el producto tensorial del espacio vectorial dual en  $p$  consigo mismo, de (F.8) se sigue que

$$\mathcal{V}_p^* \otimes \mathcal{V}_p^* = (\mathcal{T}_p^* \otimes \mathcal{T}_p^*) \oplus (\mathcal{T}_p^* \otimes \mathcal{N}_p^*) \oplus (\mathcal{N}_p^* \otimes \mathcal{T}_p^*) \oplus (\mathcal{N}_p^* \otimes \mathcal{N}_p^*), \quad (\text{F.18a})$$

lo que significa que un tensor de rango  $(0, 2)$ , sea éste  $T_{a_1 a_0}$ , se expande en la forma

$$T_{a_1 a_0} = T_{a_1 a_0}^0 + T_{a_1}^1 n_{a_0} + T_{a_0}^2 n_{a_1} + T_{n_{a_1} n_{a_0}}^3, \quad (\text{F.19})$$

donde cada término  $T_{a_{i_k} \dots a_{i_0}}^m$  es un vector tangente que hemos identificado por una etiqueta numérica  $m$ . Llamamos a (F.19) la expansión 3+1 completa del tensor  $T_{a_1 a_0}$ . Nótese que esta expansión es única en el sentido de que cada término es linealmente independiente entre sí: dos de los términos de la expansión (F.19) nunca pueden anularse entre sí. Naturalmente, un difeomorfismo que mapea puntos en cada hipersuperficie de la foliación a puntos en la misma hipersuperficie (es decir, un difeomorfismo *espacial*) puede modificar las componentes de cada término  $T_{a_{i_k} \dots a_{i_0}}^m$ , pero no mezclará términos entre sí.

Un caso de interés de este tipo de tensores es

$$h_{a_1 a_0} \equiv g_{a_0 b} h_{a_1}{}^b, \quad (\text{F.20})$$

$$= g_{a_1 a_0} + n_{a_1} n_{a_0}. \quad (\text{F.21})$$

Puede mostrarse<sup>1</sup> que este tensor es la representación 4– dimensional de la métrica *espacial* (euclídea) inducida sobre cada hipersuperficie  $\Sigma$  de la foliación por la métrica del espaciotiempo  $g_{ab}$ , dado que satisface las siguientes propiedades:

- A. Es simétrica.
- B. Es un tensor  $(0, 2)$   $\Sigma$ –tangente.
- C.  $h_{b_1 b_0} \tilde{v}^{b_1} \tilde{w}^{b_0} = g_{b_1 b_0} \tilde{v}^{b_1} \tilde{w}^{b_0}$  para cualesquiera  $\tilde{w}^{b_1}, \tilde{v}^{b_0} \in \mathcal{T}$ .

Vemos que A se satisface por construcción. Para mostrar B verificamos que

$$\begin{aligned} h_{a_0 b_0} n^{b_0} &= g_{a_0 b_0} n^{b_0} + n_{a_0} n_{b_0} n^{b_0} \\ &= n_{a_0} + n_{a_0}(-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Ver [62], secc. 9.2 y 10.2.

La propiedad C se verifica directamente,

$$\begin{aligned} h_{b_1 b_0} \tilde{v}^{b_1} \tilde{w}^{b_0} &= g_{b_1 b_0} \tilde{v}^{b_1} \tilde{w}^{b_0} + n_{a_1} n_{a_0} \tilde{v}^{b_1} \tilde{w}^{b_0} \\ &= g_{b_1 b_0} \tilde{v}^{b_1} \tilde{w}^{b_0}. \end{aligned}$$

Nótese que podemos invertir (F.21) para expresar la métrica del espaciotiempo en su expansión 3 + 1 completa,

$$g_{a_1 a_0} = h_{a_1 a_0} + (-1)n_{a_1} n_{a_0}, \quad (\text{F.22})$$

es decir,

$$g_{a_1 a_0}^0 = h_{a_1 a_0}, \quad (\text{F.23})$$

$$g_{a_1}^1 = 0, \quad (\text{F.24})$$

$$g_{a_0}^2 = 0, \quad (\text{F.25})$$

$$g^3 = -1, \quad (\text{F.26})$$

siguiendo el mismo etiquetado que se definió en (F.19).

En general, el desarrollo 3+1 del producto de un número arbitrario de espacios vectoriales duales da como resultado que todo tensor *covariante* se puede expresar como la suma de un conjunto de términos linealmente independientes formados por el producto de un tensor  $\Sigma$ -tangente con un producto de covectores normales  $n_{a_i}$  tal que el número total de índices libres de cada término sea siempre el mismo. Es decir, para un tensor  $(0, k)$  tendremos que

$$\begin{aligned} T_{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0} &= T_{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0}^0 + T_{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1}^1 n_{a_0} + T_{a_{k-1} a_{k-2} a_0}^2 n_{a_1} \\ &+ \dots + T_{a_0}^{2^{k-2}} n_{a_{k-1}} n_{a_{k-2}} \dots n_{a_1} + T^{2^{k-1}} n_{a_{k-1}} n_{a_{k-2}} \dots n_{a_1} n_{a_0}, \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

donde las etiquetas  $m$  para los tensores tangentes están dados por los índices de los covectores normales que están en producto con el correspondiente término de proyección, de acuerdo con el *ordenamiento de índices*  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0$ . Llamemos  $\zeta_m$  al conjunto que contiene las etiquetas numéricas de todos los covectores normales de un término  $m$  dado, es decir, sea

$$\zeta_m = \{j_1 \dots j_r\}, \quad (\text{F.28})$$

con los elementos  $j_i$  tales que la correspondiente componente  $m$  se escribe como

$$T_{a_{\rho_1} \dots a_{\rho_{(k-r)}}}^m n_{a_{j_1}} n_{a_{j_2}} \dots n_{a_{j_r}}. \quad (\text{F.29})$$

Entonces, se cumple que

$$m = \sum_{j \in \zeta_m} 2^j = \sum_{s=1}^r 2^{j_s}. \quad (\text{F.30})$$

De aquí que esta sea una manera natural de enumerar las componentes  $\Sigma$ -tangentes de cada proyección, puesto que corresponde a la representación en binario de  $m$  dada por asignar el valor 1 a los índices de los covectores normales de la correspondiente proyección, y 0 a los demás índices, todo respecto a la posición que ocupan estos índices en el tensor *no proyectado* de acuerdo al orden de índices establecido anteriormente. Así mismo, la base 2 surge directamente del hecho de que bajo esta separación se consideran únicamente dos posibilidades para cada índice; o es parte de la componente tangente de la proyección o corresponde a un covector normal.

Notemos que para un tensor  $(0, k)$  existen  $2^k$  proyecciones posibles en su expansión  $3 + 1$ . Consideremos por ejemplo ahora un tensor  $(0, 4)$ ,  $T_{a_3 a_2 a_1 a_0}$ . Su expansión contará con  $2^4 = 16$  proyecciones, que se numeran del 0 al 15. De acuerdo con esta numeración de proyecciones podemos advertir que, por ejemplo, la proyección 11 tendrá índices *normales*  $a_3$ ,  $a_1$  y  $a_0$ , dado que  $11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$ . Entonces, la componente tangente de la proyección 11 estará dada por

$$T_{a_2}^{11} = h_{a_2}{}^{b_2} (-n^{b_3}) (-n^{b_1}) (-n^{b_0}) T_{b_3 b_2 b_1 b_0}. \quad (\text{F.31})$$

Destacamos que la separación  $3 + 1$  no es más que una representación completa de tensores 4-dimensionales en términos de tensores 3-dimensionales, de acuerdo con una separación particular del espaciotiempo en hipersuperficies de Cauchy. Por lo tanto, en conjunto, la foliación y las  $2^k$  componentes tangentes de las proyecciones  $3 + 1$  de cualquier tensor  $(0, k)$  definido en el espacio tensorial tangente del espaciotiempo, contienen toda la información asociada a dicho tensor, y por ende, es posible reconstruirlo a partir de dichos términos definidos en el espacio tensorial  $\Sigma$ -tangente.

Las nociones hasta ahora expuestas para tensores  $(0, k)$  se generalizan directamente para tensores de rango arbitrario  $(l, k)$ , siguiendo el ordenamiento de índices sin distinguir índices *covariantes* y *contravariantes*.

### F.3. Operaciones sobre índices en el formalismo 3 + 1

Ya que hemos definido la manera de expresar cualquier tensor en de acuerdo a la separación  $3 + 1$ , es de interés revisar las expansiones para tensores sujetos a simetrización, antisimetrización y cuando se contraen dos de sus índices, en términos de las proyecciones originales. Por ejemplo, para un tensor de la forma (F.19), uno puede calcular directamente

$$T_{(a_1 a_0)} = \frac{1}{2!} (T_{a_1 a_0} + T_{a_0 a_1}) \quad (\text{F.32})$$

para obtener

$$T_{(a_1 a_0)} = \frac{1}{2!} \left\{ \left( T_{a_1 a_0}^{(0)} + T_{a_0 a_1}^{(0)} \right) + \left( T_{a_1}^{(1)} + T_{a_1}^{(2)} \right) n_{a_0} + n_{a_1} \left( T_{a_0}^{(2)} + T_{a_0}^{(1)} \right) \right\} + T n_{a_1} n_{a_0}. \quad (\text{F.33})$$

Asimismo, ante la antisimetrización de sus índices,

$$T_{[a_1 a_0]} = \frac{1}{2!} (T_{a_1 a_0} - T_{a_0 a_1}), \quad (\text{F.34})$$

obtenemos

$$T_{[a_1 a_0]} = \frac{1}{2!} \left\{ \left( T_{a_1 a_0}^0 - T_{a_0 a_1}^0 \right) + \left( T_{a_1}^1 - T_{a_1}^2 \right) n_{a_0} + n_{a_1} \left( T_{a_0}^2 - T_{a_0}^1 \right) \right\}. \quad (\text{F.35})$$

Para obtener estas expresiones es necesario realizar el etiquetado de las componentes tangentes de proyección del tensor  $T_{a_1 a_0}$  antes de intercambiar los índices.

Para la contracción de sus índices,

$$T^b{}_b = g^{b_1 b_0} T_{b_1 b_0}, \quad (\text{F.36})$$

obtenemos

$$T^b{}_b = h^{b_1 b_0} T_{b_1 b_0}^0 - T^3. \quad (\text{F.37})$$

Para expresar las fórmulas generales para la simetrización y antisimetrización arbitraria de tensores de rango arbitrario, es útil introducir otros conjuntos de etiquetas de índices en adición a  $\zeta_m$ ;

$$I_k \equiv \{k-1, k-2, \dots, 1, 0\}, \quad (\text{F.38})$$

$$Y_m^k \equiv I_k - \zeta_m. \quad (\text{F.39})$$

El conjunto  $I_k$  contiene las etiquetas de todos los índices de un tensor de rango  $(0, k)$ , mientras que  $Y_m^k$  contiene los índices correspondientes a la componente tangente de la proyección con etiqueta  $m$  del mismo tensor. Asimismo, usaremos las siguientes convenciones de notación; dado un conjunto ordenado  $Q = \{j_1, \dots, j_l\}$  de etiquetas de índices, y un tensor  $A_{a_{l-1} \dots a_0}$ , escribimos

$$A_{a_Q} \equiv A_{a_{j_1} \dots a_{j_l}}. \quad (\text{F.40})$$

Denotamos por  $\mathcal{P}(Q)$  al conjunto de permutaciones de un conjunto ordenado  $Q$ , y denotamos por  $\mathcal{P}_i(Q)$  a sus elementos, es decir,  $\mathcal{P}_i(Q)$  corresponde a la  $i$ -ésima permutación de los elementos de  $Q$ . No es necesario especificar qué fórmula se emplea para enumerar estas permutaciones siempre y cuando sea consistente. Decimos que la permutación es par si ésta resulta de realizar un número par de intercambio binarios de índices, e impar si esta resulta de un número impar de intercambios binarios de índices. El signo de la permutación  $\mathcal{P}_i(Q)$  lo denotamos por  $\mathcal{S}\mathcal{P}_i(Q)$ , y es igual a 1 si la permutación es par e igual a  $-1$  si la permutación es impar. Para cada permutación  $\mathcal{P}_i(Q)$  existe una permutación  $\mathcal{P}_i^{-1}$  tal que  $\mathcal{P}_i^{-1}(\mathcal{P}_i(Q)) = Q$ . Sea  $P_i^Q$  el operador correspondiente a la transformación de índices dado por la regla

$$P_i^Q : Q \mapsto \mathcal{P}_i(Q). \quad (\text{F.41})$$



Convencionalmente consideraremos que  $P_1(Q) = Q$ , por lo que  $P_1^Q$  es la transformación trivial que deja inalterados los índices.

Por ejemplo, si  $Q = I_2$ , tendremos

$$\mathcal{P}(I_2) = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}, \quad (\text{F.42})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} P_1^{I_2}(\{2, 1, 0\}) &= \{2, 1, 0\}, \\ P_2^{I_2}(\{2, 1, 0\}) &= \{2, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Definimos  $\mathbf{m}_m^{P_i(Q)}$  como la etiqueta de componente dada por

$$\mathbf{m}_m^{P_i(Q)} \equiv \sum_{r \in P_i^Q(\zeta_m)} 2^r, \quad (\text{F.43})$$

por lo que se tiene que

$$P_i^Q(\zeta_m) = \zeta_{\mathbf{m}_m^{P_i(Q)}}. \quad (\text{F.44})$$

Sea  $T_{a_{I_k}}$  un tensor de rango  $(0, k)$ , y sea  $Q \subset I_k$  con  $s \leq k$  elementos, denotamos por  $(\text{Sym}_Q T)_{a_{I_k}}$  (respectivamente  $(\text{Asym}_Q T)_{a_{I_k}}$ ) a la (anti)simetrización de los índices  $a_i$  de  $T_{a_{I_k}}$ , con  $i \in Q$ . Entonces, la componente tangente de la proyección con etiqueta  $m$  de  $\text{Sym}_Q T_{a_{I_k}}$  ( $\text{Asym}_Q T_{a_{I_k}}$ ) está dada por:

$${}^m(\text{Sym}_Q T)_{a_{Y_m^k}} = \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^{s!} \tilde{m} T_{a_{P_i^Q(Y_m^k)}}, \quad (\text{F.45a})$$

$${}^m(\text{Asym}_Q T)_{a_{Y_m^k}} = \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^{s!} (\mathcal{S}P_i(Q)) \tilde{m} T_{a_{P_i^Q(Y_m^k)}}, \quad (\text{F.45b})$$

donde

$$\tilde{m} \equiv \mathbf{m}_m^{P_i^{-1}(Q)}. \quad (\text{F.46})$$

Nótese que en cada término,  $P_i^Q(Y_m^k)$  es una permutación de  $Y_m^k$ .

Cuando realizamos la contracción de un tensor,  $T_{a_1 a_0}$ , podemos calcular el escalar que resulta  $T_a^a$  en términos de sus proyecciones tangentes como

$$T_a^a = \overset{0}{T}_a^a - \overset{3}{T}_a^a, \quad (\text{F.47})$$

y para el cálculo de la contracción de dos índices de un tensor  $T_{a_2 a_1 a_0}$ , tendremos que

$$T_{a_0}^b{}^b = \left( \overset{0}{T}_{a_0}^b{}^b - \overset{3}{T}_{a_0}^b{}^b \right) + n_{a_0} \left( \overset{4}{T}_b^b - \overset{7}{T}_b^b \right). \quad (\text{F.48})$$

En general, para calcular una contracción de dos índices,  $i, j \in I_k$  de un tensor  $T_{a_{I_k}}$ , es decir

$$C_{a_{k-1} \dots a_{i+1} a_{i-1} \dots a_{j+1} a_{j-1} \dots a_0} \equiv g^{bc} T_{a_{k-1} \dots a_{i+1} b a_{i-1} \dots a_{j+1} c a_{j-1} \dots a_0}, \quad (\text{F.49})$$

tendremos que volver a etiquetar los índices para conservar la consistencia de nuestra convención; en (F.49) tendremos que aplicar la transformación

$$\begin{aligned} j+1 &\mapsto j, \\ j+2 &\mapsto j+1, \\ &\dots, \\ i-1 &\mapsto i-2, \\ i+1 &\mapsto i-1, \\ &\dots, \\ k-1 &\mapsto k-3. \end{aligned}$$

Llamemos  $\tau_{ij}$  a esta transformación. Entonces, la componente tangente de la  $m$ -ésima proyección del tensor contraído estará dada por

$$C_{a_{Y_m^{k-2}}}^m = h^{b_i b_j} T_{a_{Y_m^{k-2}}}^{m_0 (b_i, b_j)} - T_{a_{Y_m^{k-2}}}^{m_0+2^j+2^k} a_{Y_m^{k-2}}, \quad (\text{F.50})$$

donde  $a_A^{(b_i, b_j)}$  es el conjunto de índices  $a_A$  con  $b_i$  y  $b_j$  insertados en las posiciones  $i+1$  y  $j$  respectivamente, y

$$m_0 = \sum_{l \in \tilde{\zeta}_m} 2^l, \quad (\text{F.51})$$

con  $\tilde{\zeta}_m$  el conjunto de etiquetas de índices que no incluye a  $i$  y  $j$  y que bajo la transformación  $\tau_{ij}$  resulta en el conjunto  $\zeta_m$ , o formalmente,

$$\tilde{\zeta}_m = \tau_{ij}^{-1} \zeta_m. \quad (\text{F.52})$$

Para el caso más general del producto tensorial de dos tensores, sean estos  $A_{a_{I_k}}$  y  $B_{a_{I_q}}$ , las componentes tangentes de proyección del tensor resultante estarán dadas por

$${}^m (A \otimes B)_{a_{Y_m^{k+q}}} = \tilde{A}_{a_{Y_m^k+2^q}}^{\tilde{m}} B_{a_{Y_n^q}}^{\tilde{n}}, \quad (\text{F.53})$$

donde

$$\tilde{m} = 2^{-q}(m - \tilde{n}), \quad (\text{F.54a})$$

$$\tilde{n} = \sum_{i \in \zeta_m \cap I_q} 2^i. \quad (\text{F.54b})$$

Es relativamente sencillo implementar estas expresiones en un programa de computadora como *Mathematica* para realizar manipulaciones de índices y componentes totalmente dentro del formalismo 3 + 1.

## F.4. Operaciones con derivadas

La métrica inducida sobre cada hipersuperficie de la foliación permite definir un operador derivada asociado a esta métrica,  $D_a$ . Se trata de una aplicación de tensores  $(l, k)$  a tensores  $(l, k + 1)$ , que es lineal, satisface la regla de Leibniz para el producto, conmuta con contracciones, y es consistente con la noción de derivada direccional en el caso de *vectores tangentes* a las hipersuperficies de la foliación. Así mismo, se define libre de torsión, por lo que  $D_a D_b f = D_b D_a f$  para todo campo escalar  $f$ , y es compatible con la métrica  $h_{ab}$ , es decir

$$D_{a_2} h_{a_1 a_0} = 0. \quad (\text{F.55})$$

Este operador se puede expresar en términos del operador derivada covariante del espacio-tiempo en términos de su acción sobre tensores  $(l, k)$ ,

$$D_{a_{k+l}} T^{a_{k+l-1} \dots a_k}_{a_{k-1} \dots a_0} = h_{a_{k+l}}^{b_{k+l}} h^{a_{k+l-1}}_{b_{k+l-1}} \dots h^{a_k}_{b_k} h_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \dots h_{a_0}^{b_0} \nabla_{b_{k+l}} T^{b_{k+l-1} \dots b_k}_{b_{k-1} \dots b_0}, \quad (\text{F.56a})$$

o lo que es lo mismo,

$$D_{a_{k+l}} T^{a_{k+l-1} \dots a_k}_{a_{k-1} \dots a_0} = {}^0 (\nabla_{a_{k+l}} T^{a_{k+l-1} \dots a_k}_{a_{k-1} \dots a_0}). \quad (\text{F.56b})$$

Nótese que

$$D_{a_{k+l+1}} D_{a_{k+l}} T^{a_{k+l-1} \dots a_k}_{a_{k-1} \dots a_0} \neq {}^0 (\nabla_{a_{k+l+1}} \nabla_{a_{k+l}} T^{a_{k+l-1} \dots a_k}_{a_{k-1} \dots a_0}). \quad (\text{F.57})$$

El operador  $D_a$  no será un operador derivada covariante (en el sentido definido por ejemplo en el libro de Wald [62], secc. 3.1), ya que no es compatible con la noción de derivada direccional para tensores que no sean tangentes. De aquí que en general no existirá un campo tensorial  $C^c_{ab}$  tal que

$$D_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - C^c_{ab} \omega_c. \quad (\text{F.58})$$

En su lugar, es posible definir un nuevo operador derivada  $\vec{d}$  por su acción sobre un tensor  $(l, k)$  como

$$\vec{d} T^{a_{k+l-1} \dots a_k}_{a_{k-1} \dots a_0} \equiv - h^{a_{k+l-1}}_{b_{k+l-1}} \dots h^{a_k}_{b_k} h_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \dots h_{a_0}^{b_0} n^c \nabla_c T^{b_{k+l-1} \dots b_k}_{b_{k-1} \dots b_0}, \quad (\text{F.59a})$$

$$= {}^0 \left( -n^b \nabla_b T^{a_{k+l-1} \dots a_k}_{a_{k-1} \dots a_0} \right). \quad (\text{F.59b})$$

Entonces, la derivada covariante de un campo escalar  $f$  se expresa como

$$\nabla_a f \equiv D_a f + n_a \vec{d} f. \quad (\text{F.60})$$

Para proceder con la construcción de la representación 3 + 1 de las derivadas covariantes, es conveniente introducir primero la *curvatura extrínseca*. Considere una congruencia geodésica ortogonal a una hipersuperficie  $\Sigma_t$  de la foliación, y sea  $\xi^a$  el campo vectorial tangente a la congruencia bajo parametrización afín, es decir, se cumple que

$$g_{ab}\xi^a\xi^b = -1, \quad (\text{F.61a})$$

$$\xi^b\nabla_b\xi^a = 0. \quad (\text{F.61b})$$

De las ecuaciones (F.61) se sigue que el tensor

$$B_{ab} \equiv \nabla_a\xi_b, \quad (\text{F.62})$$

es ortogonal a  $\xi^a$  en ambos índices. El teorema de Frobenius garantiza que en este caso,  $B_{ab}$  es simétrico. Entonces, sobre  $\Sigma_t$  el vector  $\xi^a$  coincide con  $n^a$ , por lo que también su derivada en una dirección ortogonal a  $\xi^a$  coincidirá con la derivada de  $\xi^a$  en esa dirección, es decir

$$K_{ab} \equiv h_a{}^c\nabla_c n_b = B_{ab}|_{\Sigma_t}. \quad (\text{F.63})$$

De aquí se sigue que  $K_{ab}$  es simétrico y tangente a  $\Sigma_t$ . Como  $K_{ab}$  es tangente, podemos reescribir (F.63) añadiendo un proyector tangente sobre el índice  $b$ ,

$$K_{ab} = h_b{}^{b'}h_a{}^c\nabla_c n_{b'}, \quad (\text{F.64})$$

y notar que esto coincide justamente con la definición de derivada tangente (F.56a) aplicada a  $n^a$ , es decir,

$$K_{ab} = D_a n_b. \quad (\text{F.65})$$

Geoméricamente, este tensor codifica cómo cambia el campo vectorial normal ante desplazamientos infinitesimales sobre la hipersuperficie.

A diferencia del vector  $\xi^a$ , el campo  $n^a$  de nuestra foliación no es (necesariamente) geodésico, por lo que su derivada normal no se cancelará en general. A partir de esta consideración, definiremos el vector *aceleración* como

$$\mathbf{a}^a \equiv n^b\nabla_b n^a, \quad (\text{F.66})$$

el cual es tangente a  $\Sigma$  puesto que  $n^a$  es de norma constante. El sentido de llamar *aceleración* a este vector viene de que coincide con la 4-aceleración de un conjunto de observadores Eulerianos. Entonces, la derivada covariante de  $n^a$  se expande en forma 3 + 1 completa como

$$\nabla_{a_1} n_{a_0} = K_{a_1 a_0} - n_{a_1} \mathbf{a}_{a_0}. \quad (\text{F.67a})$$

Con el único fin de ahorrar signos y conservar una notación consistente, reescribimos esta expresión como

$$\nabla_{a_1} n_{a_0} = K_{a_1 a_0} + n_{a_1} u_{a_0}, \quad (\text{F.67b})$$

donde

$$u_a \equiv \vec{d}n_a = -\mathbf{a}_a. \quad (\text{F.68})$$

Notemos que este objeto está determinado también por la propia estructura que hemos definido a partir de la foliación y la métrica del espaciotiempo. Siguiendo a Gourgoulhon [81], de la condición de *no-torsión* de la derivada covariante aplicada a  $t$ ,

$$\nabla_a \nabla_b t = \nabla_b \nabla_a t, \quad (\text{F.69})$$

se sustituye a cada lado

$$\nabla_a t = -\frac{n_a}{N}, \quad (\text{F.70})$$

que se ha calculado a partir de la ecuación (F.17). Se obtiene

$$-\frac{n_b}{N} \nabla_a N + n_a u_b = -\frac{n_a}{N} \nabla_b N + n_b u_a. \quad (\text{F.71})$$

Contrayendo esta expresión con  $n^a h_c{}^b$ , se llega a que

$$u_a = -\frac{1}{N} D_a N = -D_a \ln N. \quad (\text{F.72})$$

De aquí se sigue también que

$$D_{a_1} u_{a_0} = D_{a_0} u_{a_1}. \quad (\text{F.73})$$

La expresión (F.67b) es particularmente útil pues permite expandir las derivadas de cualquier tensor en forma 3+1. Para ello conviene primero calcular el desarrollo 3+1 de la derivada covariante de  $h_{ab}$ . Para ello recurrimos a la propiedad de compatibilidad métrica de la derivada covariante del espaciotiempo,

$$\begin{aligned} \nabla_{a_2} g_{a_1 a_0} &= \nabla_{a_2} (h_{a_1 a_0} - n_{a_1} n_{a_0}) \\ 0 &= \nabla_{a_2} h_{a_1 a_0} - n_{a_0} \nabla_{a_2} n_{a_1} - n_{a_1} \nabla_{a_2} n_{a_0} \\ &= \nabla_{a_2} h_{a_1 a_0} - n_{a_0} K_{a_2 a_1} - n_{a_0} n_{a_2} u_{a_1} - n_{a_1} K_{a_2 a_0} - n_{a_1} n_{a_2} u_{a_0}, \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\nabla_{a_2} h_{a_1 a_0} = n_{a_0} K_{a_2 a_1} + n_{a_1} K_{a_2 a_0} + n_{a_2} n_{a_0} u_{a_1} + n_{a_2} n_{a_1} u_{a_0}. \quad (\text{F.74})$$

Nótese que de aquí es inmediato que

$$\vec{d} h_{a_1 a_0} = 0, \quad (\text{F.75})$$

por lo que, operacionalmente,  $h_{a_1 a_0}$  *conmuta* con  $\vec{d}$ .

Para el caso de un covector

$$\omega_{a_0} \equiv \omega_{a_0}^0 + n_{a_0}^1 \omega, \quad (\text{F.76})$$

tomemos su derivada covariante  $\nabla_{a_1}\omega_{a_0}$  y apliquemos el desarrollo  $g_{ac}g^{cb} = h_a{}^b - n_a n^b$  sobre los índices  $a_0$  y  $a_1$  para obtener una separación 3 + 1 completa,

$$\nabla_{a_1}\omega_{a_0} = \left(h_{a_1}{}^{b_1} - n_{a_1}n^{b_1}\right) \left(h_{a_0}{}^{b_0} - n_{a_0}n^{b_0}\right) \nabla_{b_1} \left(\overset{0}{\omega}_{b_0} + n_{b_0}\overset{1}{\omega}\right).$$

Pasando el término  $h_{a_0}{}^{b_0} - n_{a_0}n^{b_0}$  dentro de la derivada, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{a_1}\omega_{a_0} &= \left(h_{a_1}{}^{b_1} - n_{a_1}n^{b_1}\right) \nabla_{b_1} \left(h_{a_0}{}^{b_0}\overset{0}{\omega}_{b_0} + n_{a_0}\overset{1}{\omega}\right) \\ &= \left(h_{a_1}{}^{b_1} - n_{a_1}n^{b_1}\right) \left(\overset{0}{\omega}_{b_0}\nabla_{b_1}h_{a_0}{}^{b_0} + h_{a_0}{}^{b_0}\nabla_{b_1}\overset{0}{\omega}_{b_0} + \overset{1}{\omega}\nabla_{b_1}n_{a_0} + n_{a_0}\nabla_{b_1}\overset{1}{\omega}\right) \\ &= \overset{0}{\omega}_{b_0}h_{a_1}{}^{b_1}\nabla_{b_1}h_{a_0}{}^{b_0} - n_{a_1}\overset{0}{\omega}_{b_0}n^{b_1}\nabla_{b_1}h_{a_0}{}^{b_0} + h_{a_0}{}^{b_0}h_{a_1}{}^{b_1}\nabla_{b_1}\overset{0}{\omega}_{b_0} \\ &\quad - n_{a_1}h_{a_0}{}^{b_0}n^{b_1}\nabla_{b_1}\overset{0}{\omega}_{b_0} + \overset{1}{\omega}h_{a_1}{}^{b_1}\nabla_{b_1}n_{a_0} - n_{a_1}\overset{1}{\omega}n^{b_1}\nabla_{b_1}n_{a_0} \\ &\quad + n_{a_0}h_{a_1}{}^{b_1}\nabla_{b_1}\overset{1}{\omega} - n_{a_1}n_{a_0}n^{b_1}\nabla_{b_1}\overset{1}{\omega} \\ &= n_{a_0}\overset{0}{\omega}_{b_0}K_{a_1}{}^{b_0} + n_{a_1}n_{a_0}\overset{0}{\omega}_{b_0}u^{b_0} + D_{a_1}\overset{0}{\omega}_{a_0} + n_{a_1}\overset{0}{d}\omega_{a_0} + \overset{1}{\omega}K_{a_1 a_0} \\ &\quad + n_{a_1}\overset{1}{\omega}u_{a_0} + n_{a_0}D_{a_1}\overset{1}{\omega} + n_{a_1}n_{a_0}\overset{1}{d}\omega, \end{aligned}$$

Es decir, nombrando  $F_{a_1 a_0} \equiv \nabla_{a_1}\omega_{a_0}$ ,

$$\overset{0}{F}_{a_1 a_0} = D_{a_1}\overset{0}{\omega}_{a_0} + K_{a_1 a_0}\overset{1}{\omega}, \quad (\text{F.77a})$$

$$\overset{1}{F}_{a_1} = D_{a_1}\overset{1}{\omega} + K_{a_1}{}^{b_0}\overset{0}{\omega}_{b_0}, \quad (\text{F.77b})$$

$$\overset{2}{F}_{a_0} = \overset{0}{d}\omega_{a_0} + u_{a_0}\overset{1}{\omega}, \quad (\text{F.77c})$$

$$\overset{3}{F} = u^{b_0}\overset{0}{\omega}_{b_0} + \overset{1}{d}\omega. \quad (\text{F.77d})$$

Este procedimiento ilustra la estrategia general a seguir para expresar la derivada covariante de un tensor de rango arbitrario. Con este fin, incorporamos la notación abreviada siguiente,

$$h_{a_A}{}^{b_A} \equiv \prod_{j \in A} h_{a_j}{}^{b_j} = h_{a_{A_1}}{}^{b_{A_1}} h_{a_{A_2}}{}^{b_{A_2}} \dots h_{a_{A_n}}{}^{b_{A_n}}, \quad (\text{F.78})$$

donde  $A \equiv \{A_1 \dots A_n\}$  es un conjunto de etiquetas de índices. A continuación, notemos que un tensor  $T_{a_{k-1} \dots a_k}$  pueden expresarse en la forma

$$T_{a_{k-1} \dots a_k} = \sum_{m=0}^{2^k-1} n_{a_{\zeta_m}} h_{a_{\gamma_m^k}}{}^{b_{\gamma_m^k}} T_{b_{\gamma_m^k}}, \quad (\text{F.79})$$

por lo que procedemos a calcular la derivada de esta expresión tal como se hizo con  $\omega_{a_0}$ :

$$\begin{aligned}\nabla_{a_k} T_{a_{k-1} \dots a_k} &= \sum_{m=0}^{2^m-1} \nabla_{a_k} \left( n_{a_{\zeta_m}} h_{a_{Y_m^k}} b_{Y_m^k}^m T_{b_{Y_m^k}}^m \right) \\ &= \sum_{m=0}^{2^m-1} \left( h_{a_{Y_m^k}} b_{Y_m^k}^m T_{b_{Y_m^k}}^m \nabla_{a_k} n_{a_{\zeta_m}} + n_{a_{\zeta_m}} T_{b_{Y_m^k}}^m \nabla_{a_k} h_{a_{Y_m^k}} b_{Y_m^k}^m \right. \\ &\quad \left. + n_{a_{\zeta_m}} h_{a_{Y_m^k}} b_{Y_m^k}^m \left\{ h_{a_k} b_k \nabla_{b_k} - n_{a_k} n^{b_k} \nabla_{b_k} \right\} T_{b_{Y_m^k}}^m \right)\end{aligned}\quad (\text{F.80})$$

donde en la última línea se ha introducido el desarrollo 3 + 1 para el índice  $a_k$ . Notemos que al desarrollar las derivadas de los productos en la primera línea,

$$\nabla_{a_k} n_{a_{\zeta_m}} = \sum_{j \in \zeta_m} n_{a_{\zeta_m - \{j\}}} (K_{a_k a_j} + n_{a_k} u_{a_j}), \quad (\text{F.81a})$$

$$\nabla_{a_k} h_{a_{Y_m^k}} b_{Y_m^k}^m = \sum_{j \in Y_m^k} h_{a_{Y_m^k - \{j\}}} b_{Y_m^k - \{j\}}^m \left( n^{b_j} K_{a_k a_j} + n_{a_j} K_{a_k} b_j + n_{a_k} n^{b_j} u_{a_j} + n_{a_k} n_{a_j} u^{b_j} \right), \quad (\text{F.81b})$$

de modo que se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla_{a_k} T_{a_{k-1} \dots a_k} &= \sum_{m=0}^{2^k-1} \left( T_{a_{Y_m^k}}^m \sum_{j \in \zeta_m} n_{a_{\zeta_m - \{j\}}} (K_{a_k a_j} + n_{a_k} u_{a_j}) \right. \\ &\quad \left. + n_{a_{\zeta_m}} T_{b_{Y_m^k}}^m \sum_{j \in Y_m^k} h_{a_{Y_m^k - \{j\}}} b_{Y_m^k - \{j\}}^m \left( n_{a_j} K_{a_k} b_j + n_{a_k} n_{a_j} u^{b_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + n_{a_{\zeta_m}} \left\{ D_{a_k} T_{b_{Y_m^k}}^m + n_{a_k} \bar{d} T_{b_{Y_m^k}}^m \right\} \right).\end{aligned}\quad (\text{F.82})$$

Lo necesario ahora es acomodar los términos por componente de proyección, obteniendo

$$\begin{aligned}\nabla_{a_k} T_{a_{k-1} \dots a_k} &= \sum_{m=0}^{2^{k+1}-1} n_{a_{\zeta_m}} \left( D_{a_k} T_{a_{Y_m^k}}^m + \bar{d} T_{a_{Y_m^k}}^{m-2^k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in \zeta_m \cap I_k} \left\{ K_{a_k} a_j \frac{m-2^j}{T_{a_{Y_m^k}}^{m-2^j}} + u^{a_j} \frac{m-2^j-2^k}{T_{a_{Y_m^k}}^{m-2^j-2^k}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in Y_m^k} \left\{ K_{a_k a_j} \frac{m+2^j}{T_{a_{Y_m^k}}^{m+2^j}} + u_{a_j} \frac{m+2^j-2^k}{T_{a_{Y_m^k}}^{m+2^j-2^k}} \right\} \right).\end{aligned}\quad (\text{F.83})$$

Lo que está entre paréntesis en (F.83) es la expresión general para el cálculo de la  $m$ -ésima componente de proyección tangente de la derivada de  $\nabla_{a_k} T_{a_{k-1} \dots a_1}$ . Utilizando esta expresión tendremos que para  $\mathcal{T}_{a_2 a_1 a_0} \equiv \nabla_2 T_{a_1 a_0}$ ,

$$\mathcal{T}_{a_2 a_1 a_0}^0 = D_{a_2} T_{a_1 a_0}^0 + K_{a_2 a_0}^1 T_{a_1}^1 + K_{a_2 a_1}^2 T_{a_0}^2, \quad (\text{F.84a})$$

$$\mathcal{T}_{a_2 a_1}^1 = K_{a_2}^{b_0} T_{a_1 b_0}^0 + D_{a_2} T_{a_1}^1 + K_{a_2 a_1}^3 T_{a_0}^3, \quad (\text{F.84b})$$

$$\mathcal{T}_{a_2 a_0}^2 = K_{a_2}^{b_1} T_{b_1 a_0}^0 + D_{a_2} T_{a_0}^2 + K_{a_2 a_0}^3 T_{a_1}^3, \quad (\text{F.84c})$$

$$\mathcal{T}_{a_2}^3 = K_{a_2}^{b_1} T_{b_1}^1 + K_{a_2}^{b_0} T_{b_0}^2 + D_{a_2} T_{a_0}^3, \quad (\text{F.84d})$$

$$\mathcal{T}_{a_1 a_0}^4 = \dot{d} T_{a_1 a_0}^0 + T_{a_1}^1 u_{a_0} + u_{a_1} T_{a_0}^2, \quad (\text{F.84e})$$

$$\mathcal{T}_{a_1}^5 = u^{b_0} T_{a_1 b_0}^0 + \dot{d} T_{a_1}^1 + u_{a_1} T_{a_0}^3, \quad (\text{F.84f})$$

$$\mathcal{T}_{a_0}^6 = u^{b_1} T_{b_1 a_0}^0 + \dot{d} T_{a_0}^2 + u_{a_0} T_{a_1}^3, \quad (\text{F.84g})$$

$$\mathcal{T}^7 = u^{b_1} T_{b_1}^1 + u^{b_0} T_{b_0}^2 + \dot{d} T_{a_0}^3. \quad (\text{F.84h})$$

## F.5. Tensor de Riemann

El tratamiento que hemos introducido en las secciones anteriores permite realizar una descomposición  $3 + 1$  completa del Tensor de Riemann a partir de su definición y sus propiedades. En ausencia de torsión, definimos el tensor de Riemann a partir de su acción sobre un campo  $\omega_{a_0}$  como [62]

$$R_{a_2 a_1 a_0}{}^b \omega_b = \nabla_{a_2} \nabla_{a_1} \omega_{a_0} - \nabla_{a_1} \nabla_{a_2} \omega_{a_0}. \quad (\text{F.85})$$

El Tensor de Riemann codifica la curvatura de una variedad, lo que le hace fundamental en Relatividad General. A partir de esta definición se siguen las siguientes propiedades:

$$R_{a_3 a_2 a_1}{}^{a_0} = -R_{a_2 a_3 a_1}{}^{a_0}, \quad (\text{F.86a})$$

$$R_{[a_3 a_2 a_1]}{}^{a_0} = 0, \quad (\text{F.86b})$$

$$R_{a_3 a_2 a_1 a_0} = -R_{a_3 a_2 a_0 a_1}, \quad (\text{F.86c})$$

$$\nabla_{[a_4} R_{a_3 a_2] a_1 a_0} = 0, \quad (\text{F.86d})$$

donde el índice  $a_0$  se ha bajado en (F.86c) con ayuda de la métrica del espaciotiempo. A (F.86d) se le denomina identidad de Bianchi. Un resultado útil que se sigue directamente de (F.86) es

$$R_{a_3 a_2 a_1 a_0} = R_{a_1 a_0 a_3 a_2}. \quad (\text{F.87})$$



De aquí se sigue que el tensor de Ricci<sup>2</sup>, que resulta de calcular la contracción de dos índices no antisimétricos del tensor de Riemann, sea simétrico,

$$R_{a_1 a_0} \equiv R_{a_1 b a_0}{}^b. \quad (\text{F.88})$$

A su vez, por medio de la métrica inversa podemos calcular el escalar de Ricci como

$$\mathcal{R} \equiv g^{b_1 b_0} R_{b_1 b_0}. \quad (\text{F.89})$$

La identidad de Bianchi tiene una consecuencia directa para  $R_{a_1 a_0}$  y  $R$ , a la que suele denominarse identidad de Bianchi contraída,

$$\nabla_b R_{a_0}{}^b - \frac{1}{2} \nabla_{a_0} R = 0. \quad (\text{F.90})$$

De aquí que el tensor de Einstein,

$$G_{a_1 a_0} \equiv R_{a_1 a_0} - \frac{1}{2} R g_{a_1 a_0}, \quad (\text{F.91})$$

obedezca la identidad

$$\nabla^b G_{a_0 b} = 0, \quad (\text{F.92})$$

que encarna parte importante de la física detrás de la ecuación de Einstein, pues implica el requerimiento de que el tensor de energía-momento obedezca una regla de *conservación*,

$$\nabla^b T_{a_0 b} = 0. \quad (\text{F.93})$$

En la hipersuperficie  $\Sigma$ , la métrica inducida  $h_{a_1 a_0}$  determina un tensor de Riemann intrínseco, al que denotamos por  ${}^{(3)}R_{a_3 a_2 a_1}{}^{a_0}$  y que nos será de utilidad en el desarrollo 3+1 del tensor de Riemann del espaciotiempo. El tensor de Riemann intrínseco cumple con definición y propiedades análogas a las del Riemann del espaciotiempo, ecs. (F.85)-(F.86), sólo que en términos de la derivada  $D_a$  asociada a  $h_{a_1 a_0}$ , y siendo  $\omega_{a_0}$  un tensor tangente a  $\Sigma$ .

Empecemos por tomar  $T_{a_1 a_0} = \nabla_{a_1} \omega_{a_0} = F_{a_1 a_0}$  en (F.84), y sustituir las componentes de  $F_{a_1 a_0}$  dadas en (F.77), obteniendo así las componentes tangentes de proyección de  $\mathcal{W}_{a_2 a_1 a_0} \equiv$

---

<sup>2</sup>En esta sección se asignarán símbolos distintos al tensor de Ricci y al escalar de Ricci para evitar confusión con las diferentes componentes tangentes de proyección del tensor de Riemann.

$$\nabla_{a_2} \nabla_{a_1} \omega_{a_0},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{a_2 a_1 a_0}^0 &= D_{a_2} D_{a_1} \omega_{a_0}^0 + \overset{1}{\omega} D_{a_2} K_{a_1 a_0} + K_{a_1 a_0} D_{a_2} \overset{1}{\omega} + K_{a_2 a_0} D_{a_1} \overset{1}{\omega} \\ &\quad + K_{a_2 a_0} K_{a_1}{}^{b_0} \omega_{b_0}^0 + K_{a_2 a_1} \overset{0}{d} \omega_{a_0}^0 + K_{a_2 a_1} u_{a_0} \overset{1}{\omega}, \end{aligned} \quad (\text{F.94a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{a_2 a_1}^1 &= K_{a_2}{}^{b_0} D_{a_1} \omega_{b_0}^0 + K_{a_2}{}^{b_0} K_{a_1 b_0} \overset{1}{\omega} + D_{a_2} D_{a_1} \overset{1}{\omega} + \omega_{b_0}^0 D_{a_2} K_{a_1}{}^{b_0} \\ &\quad + K_{a_1}{}^{b_0} D_{a_2} \omega_{b_0}^0 + K_{a_2 a_1} u^{b_0} \omega_{b_0}^0 + K_{a_2 a_1} \overset{1}{d} \omega, \end{aligned} \quad (\text{F.94b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{a_2 a_0}^2 &= K_{a_2}{}^{b_1} D_{b_1} \omega_{a_0}^0 + K_{a_2}{}^{b_1} K_{b_1 a_0} \overset{1}{\omega} + D_{a_2} \overset{0}{d} \omega_{a_0}^0 + \overset{1}{\omega} D_{a_2} u_{a_0} \\ &\quad + u_{a_0} D_{a_2} \overset{1}{\omega} + K_{a_2 a_0} u^{b_0} \omega_{b_0}^0 + K_{a_2 a_0} \overset{1}{d} \omega, \end{aligned} \quad (\text{F.94c})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{a_2}^3 &= K_{a_2}{}^{b_1} D_{b_1} \overset{1}{\omega} + K_{a_2}{}^{b_1} K_{b_1}{}^{b_0} \omega_{b_0}^0 + K_{a_2}{}^{b_0} \overset{0}{d} \omega_{b_0}^0 + K_{a_2}{}^{b_0} u_{b_0} \overset{1}{\omega} \\ &\quad + \omega_{b_0}^0 D_{a_2} u^{b_0} + u^{b_0} D_{a_2} \omega_{b_0}^0 + D_{a_2} \overset{1}{d} \omega, \end{aligned} \quad (\text{F.94d})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{a_1 a_0}^4 &= \overset{0}{d} D_{a_1} \omega_{a_0}^0 + \overset{1}{\omega} \overset{0}{d} K_{a_1 a_0} + K_{a_1 a_0} \overset{1}{d} \omega + u_{a_0} D_{a_1} \overset{1}{\omega} \\ &\quad + K_{a_1}{}^{b_0} \omega_{b_0}^0 u_{a_0} + u_{a_1} \overset{0}{d} \omega_{a_0}^0 + u_{a_1} u_{a_0} \overset{1}{\omega}, \end{aligned} \quad (\text{F.94e})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{a_1}^5 &= u^{b_0} D_{a_1} \omega_{b_0}^0 + u^{b_0} K_{a_1 b_0} \overset{1}{\omega} + \overset{0}{d} D_{a_1} \overset{1}{\omega} + \omega_{b_0}^0 \overset{0}{d} K_{a_1}{}^{b_0} \\ &\quad + K_{a_1}{}^{b_0} \overset{0}{d} \omega_{b_0}^0 + u_{a_1} u^{b_0} \omega_{b_0}^0 + u_{a_1} \overset{1}{d} \omega, \end{aligned} \quad (\text{F.94f})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{a_0}^6 &= u^{b_1} D_{b_1} \omega_{a_0}^0 + u^{b_1} K_{b_1 a_0} \overset{1}{\omega} + \overset{0}{d}^2 \omega_{a_0}^0 + \overset{1}{\omega} \overset{0}{d} u_{a_0} \\ &\quad + u_{a_0} \overset{1}{d} \omega + u_{a_0} u^{b_0} \omega_{b_0}^0 + u_{a_0} \overset{1}{d} \omega, \end{aligned} \quad (\text{F.94g})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^7 &= u^{b_1} D_{b_1} \overset{1}{\omega} + u^{b_1} K_{b_1}{}^{b_0} \omega_{b_0}^0 + u^{b_0} \overset{0}{d} \omega_{b_0}^0 + u^{b_0} u_{b_0} \overset{1}{\omega} \\ &\quad + \omega_{b_0}^0 \overset{0}{d} u^{b_0} + u^{b_0} \overset{0}{d} \omega_{b_0}^0 + \overset{0}{d}^2 \omega. \end{aligned} \quad (\text{F.94h})$$

Utilizando la expresión (F.45b), podemos notar que se anulan las componentes 6 y 7 de  $W_{[a_2 a_1] a_0}$ , ya que la antisimetrización cancela combinaciones simétricas como  $n_{a_2} n_{a_1}$ . El

resto de componentes son

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{[a_2 a_1] a_0}^0 &= (D_{a_2} D_{a_1} - D_{a_1} D_{a_2}) \omega_{a_0}^0 + \left( K_{a_2 a_0} K_{a_1}{}^b - K_{a_1 a_0} K_{a_2}{}^b \right) \omega_b^0 \\ &\quad - (D_{a_1} K_{a_2 a_0} - D_{a_2} K_{a_1 a_0}) \omega^1, \end{aligned} \quad (\text{F.95a})$$

$$\mathcal{W}_{[a_2 a_1]}^1 = \left( D_{a_2} K_{a_1}{}^b - D_{a_1} K_{a_2}{}^b \right) \omega_b^0 - (D_{a_1} D_{a_2} - D_{a_2} D_{a_1}) \omega^1, \quad (\text{F.95b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{[a_2 \not{a}_1] a_0}^2 &= \left( K_{a_2 a_0} u^b - u_{a_0} K_{a_2}{}^b \right) \omega_b^0 + \left( D_{a_2} \bar{d} + K_{a_2}{}^b D_b - u_{a_2} \bar{d} - \bar{d} D_{a_2} \right) \omega_{a_0}^0 \\ &\quad - \left( u_{a_2} u_{a_0} + \bar{d} K_{a_2 a_0} - K_{a_2}{}^b K_{b a_0} - D_{a_2} u_{a_0} \right) \omega^1, \end{aligned} \quad (\text{F.95c})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{[a_2 \not{a}_1]}^3 &= \left( K_{a_2}{}^{b_1} K_{b_1}{}^{b_0} - u_{a_2} u^{b_0} - \bar{d} K_{a_2}{}^{b_0} + D^{b_0} u_{a_2} \right) \omega_{b_0}^0 \\ &\quad - \left( u_{a_2} \bar{d} + \bar{d} D_{a_2} - D_{a_2} \bar{d} - K_{a_2}{}^b D_b \right) \omega^1, \end{aligned} \quad (\text{F.95d})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{[\not{a}_2 a_1] a_0}^4 &= \left( K_{a_1}{}^b u_{a_0} - K_{a_1 a_0} u^b \right) \omega_b^0 - \left( D_{a_1} \bar{d} + K_{a_1}{}^b D_b - u_{a_1} \bar{d} - \bar{d} D_{a_1} \right) \omega_{a_0}^0 \\ &\quad + \left( u_{a_1} u_{a_0} + \bar{d} K_{a_1 a_0} - K_{a_1}{}^b K_{b a_0} - D_{a_1} u_{a_0} \right) \omega^1, \end{aligned} \quad (\text{F.95e})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{[\not{a}_2 \not{a}_1] a_1}^5 &= - \left( K_{a_1}{}^{b_1} K_{b_1}{}^{b_0} - u_{a_1} u^{b_0} - \bar{d} K_{a_1}{}^{b_0} + D^{b_0} u_{a_1} \right) \omega_{b_0}^0 \\ &\quad + \left( u_{a_1} \bar{d} + \bar{d} D_{a_1} - D_{a_1} \bar{d} - K_{a_1}{}^b D_b \right) \omega^1, \end{aligned} \quad (\text{F.95f})$$

donde, al comparar con la expansión 3 + 1 de  $\mathcal{R}_{a_2 a_1 a_0} \equiv R_{a_2 a_1 a_0}{}^b \omega_b$ ,

$$\mathcal{R}_{a_2 a_1 a_0}^0 = R_{a_2 a_1 a_0}{}^b \omega_b^0 - R_{a_2 a_1 a_0}^1 \omega^1 \quad (\text{F.96a})$$

$$\mathcal{R}_{a_2 a_1}^1 = R_{a_2 a_1}{}^b \omega_b^0 - R_{a_2 a_1}^1 \omega^1, \quad (\text{F.96b})$$

$$\mathcal{R}_{a_2 a_0}^2 = R_{a_2 a_0}{}^b \omega_b^0 - R_{a_2 a_0}^1 \omega^1, \quad (\text{F.96c})$$

$$\mathcal{R}_{a_2}^3 = R_{a_2}{}^b \omega_b^0 - R_{a_2}^1 \omega^1, \quad (\text{F.96d})$$

$$\mathcal{R}_{a_1 a_0}^4 = R_{a_1 a_0}{}^b \omega_b^0 - R_{a_1 a_0}^1 \omega^1, \quad (\text{F.96e})$$

$$\mathcal{R}_{a_1}^5 = R_{a_1}{}^b \omega_b^0 - R_{a_1}^1 \omega^1, \quad (\text{F.96f})$$

$$\mathcal{R}_{a_0}^6 = R_{a_0}{}^b \omega_b^0 - R_{a_0}^1 \omega^1, \quad (\text{F.96g})$$

$$\mathcal{R}^7 = R^b \omega_b^0 - R^1 \omega^1, \quad (\text{F.96h})$$

podemos deducir directamente las siguientes proyecciones (ya que estas relaciones se deben

cumplir independientemente para cualquier  $\omega_a^0$  y  $\omega^1$ ),

$${}^0 R_{a_3 a_2 a_1}{}^{a_0} = {}^{(3)} R_{a_3 a_2 a_1}{}^{a_0} + K_{a_3 a_1} K_{a_2}{}^{a_0} - K_{a_2 a_1} K_{a_3}{}^{a_0}, \quad (\text{F.97a})$$

$${}^1 R_{a_3 a_2 a_1} = D_{a_2} K_{a_3 a_1} - D_{a_3} K_{a_2 a_1}, \quad (\text{F.97b})$$

$${}^2 R_{a_3 a_2}{}^{a_0} = D_{a_3} K_{a_2}{}^{a_0} - D_{a_2} K_{a_3}{}^{a_0}, \quad (\text{F.97c})$$

$${}^3 R_{a_3 a_2} = 0, \quad (\text{F.97d})$$

$${}^5 R_{a_3 a_1} = u_{a_3} u_{a_1} + \bar{d} K_{a_3 a_1} - K_{a_3}{}^b K_{b a_1} - D_{a_3} u_{a_1}, \quad (\text{F.97e})$$

$${}^6 R_{a_3}{}^{a_0} = K_{a_3}{}^{b_1} K_{b_1}{}^{b_0} - u_{a_3} u^{a_0} - \bar{d} K_{a_3}{}^{a_0} + D^{a_0} u_{a_3}, \quad (\text{F.97f})$$

$${}^9 R_{a_2 a_1} = K_{a_2}{}^b K_{b a_1} + D_{a_2} u_{a_1} - u_{a_2} u_{a_1} - \bar{d} K_{a_2 a_1} \quad (\text{F.97g})$$

$${}^{10} R_{a_2}{}^{a_0} = \bar{d} K_{a_2}{}^{a_0} - K_{a_2}{}^{b_1} K_{b_1}{}^{a_0} + u_{a_2} u^{a_0} - D^{a_0} u_{a_2}, \quad (\text{F.97h})$$

$${}^{12} R_{a_1}{}^{a_0} = {}^{13} R_{a_1} = {}^{14} R_{a_0} = {}^{15} R = 0. \quad (\text{F.97i})$$

Para el resto de las componentes, aprovechamos las propiedades de simetría del tensor de Riemann, por ejemplo, la propiedad (F.86c) se lee en términos de su separación 3 + 1 como

$${}^0 R_{a_3 a_2 (a_1 a_0)} = 0, \quad (\text{F.98a})$$

$${}^1 R_{a_3 a_2 a_1} = -{}^2 R_{a_3 a_2 a_1}, \quad (\text{F.98b})$$

$${}^3 R_{a_3 a_2} = 0, \quad (\text{F.98c})$$

$${}^4 R_{a_3 (a_1 a_0)} = 0, \quad (\text{F.98d})$$

$${}^5 R_{a_3 a_1} = -{}^6 R_{a_3 a_1}, \quad (\text{F.98e})$$

$${}^7 R_{a_3} = 0, \quad (\text{F.98f})$$

$${}^8 R_{a_2(a_1 a_0)} = 0, \quad (\text{F.98g})$$

$${}^9 R_{a_2 a_1} = -{}^{10} R_{a_2 a_1}, \quad (\text{F.98h})$$

$${}^{11} R_{a_2} = 0, \quad (\text{F.98i})$$

$${}^{12} R_{(a_1 a_0)} = 0, \quad (\text{F.98j})$$

$${}^{13} R_{a_1} = -{}^{14} R_{a_1}, \quad (\text{F.98k})$$

$${}^{15} R = 0, \quad (\text{F.98l})$$

donde se verifica que estas propiedades son satisfechas por las componentes encontradas en (F.97), pero adicionalmente tenemos que  ${}^7 R_{a_3} = 0$  y  ${}^{11} R_{a_2} = 0$ . Así mismo, la propiedad (F.86a) se expande como

$${}^0 R_{(a_3 a_2) a_1}{}^{a_0} = 0, \quad (\text{F.99a})$$

$${}^1 R_{(a_3 a_2) a_1} = 0, \quad (\text{F.99b})$$

$${}^2 R_{(a_3 a_2)}{}^{a_0} = 0, \quad (\text{F.99c})$$

$${}^3 R_{(a_3 a_2)} = 0, \quad (\text{F.99d})$$

$${}^4 R_{a_3 a_1 a_0} = -{}^8 R_{a_3 a_1 a_0}, \quad (\text{F.99e})$$

$${}^5 R_{a_3 a_1} = -{}^9 R_{a_3 a_1}, \quad (\text{F.99f})$$

$${}^6 R_{a_3 a_0} = -{}^{10} R_{a_3 a_0}, \quad (\text{F.99g})$$

$${}^7 R_{a_3} = {}^{11} R_{a_3}, \quad (\text{F.99h})$$

$${}^{12} R_{a_1 a_0} = 0, \quad (\text{F.99i})$$

$${}^{13} R_{a_1} = 0, \quad (\text{F.99j})$$

$${}^{14} R_{a_0} = 0, \quad (\text{F.99k})$$

$${}^{15} R = 0, \quad (\text{F.99l})$$

que solamente nos permite obtener una relación entre las componentes 4 y 8 que aún no

conocemos, a través de la ecuación (F.99e). La propiedad (F.87),

$${}^0 R_{a_3 a_2 a_1 a_0} = {}^0 R_{a_1 a_0 a_3 a_2}, \quad (\text{F.100a})$$

$${}^1 R_{a_3 a_2 a_1} = {}^4 R_{a_1 a_3 a_2}, \quad (\text{F.100b})$$

$${}^2 R_{a_3 a_2 a_0} = {}^8 R_{a_0 a_3 a_2}, \quad (\text{F.100c})$$

$${}^3 R_{a_3 a_2} = {}^{12} R_{a_3 a_2}, \quad (\text{F.100d})$$

$${}^5 R_{[a_3 a_1]} = 0, \quad (\text{F.100e})$$

$${}^6 R_{a_3 a_0} = {}^9 R_{a_0 a_3}, \quad (\text{F.100f})$$

$${}^7 R_{a_3} = {}^{13} R_{a_3}, \quad (\text{F.100g})$$

$${}^{10} R_{[a_2 a_0]} = 0, \quad (\text{F.100h})$$

$${}^{11} R_{a_2} = {}^{14} R_{a_2}, \quad (\text{F.100i})$$

nos proporciona la relación faltante, la ecuación (F.100b), de donde tenemos

$${}^4 R_{a_3 a_1 a_0} = -{}^8 R_{a_3 a_1 a_0} = {}^1 R_{a_1 a_0 a_3} = D_{a_0} K_{a_3 a_1} - D_{a_1} K_{a_0 a_3}. \quad (\text{F.101})$$

Como hemos visto, las propiedades del tensor de Riemann hacen que sus componentes se encuentren acopladas entre sí, de modo que, de las componentes que no se anulan, realmente sólo son independientes las componentes tangentes de las proyecciones 0, 1, y 5 (escogiéndolas por el menor valor de su etiqueta). De hecho, se denomina *primera relación de Gauss-Codazzi* a la ecuación (F.97a) pues relaciona la proyección tangente del tensor de Riemann del espaciotiempo con la curvatura extrínseca y el tensor de Riemann intrínseco de la hipersuperficie, a veces invirtiéndola en la forma

$${}^{(3)} R_{a_3 a_2 a_1}{}^{a_0} = {}^0 R_{a_3 a_2 a_1}{}^{a_0} + K_{a_2 a_1} K_{a_3}{}^{a_0} - K_{a_3 a_1} K_{a_2}{}^{a_0}. \quad (\text{F.102})$$

Notemos que las componentes 4 y 7 no se pudieron deducir directamente de las ecuaciones (F.95) debido a que no aparecen como contracciones con  $\overset{0}{\omega}_a$  o multiplicando directamente a  $\overset{1}{\omega}$ , respectivamente, sino que aparecen como operadores diferenciales de segundo orden actuando sobre estos objetos. Para entender esto, veamos que si tomamos un campo escalar  $\phi$  definido sobre el espaciotiempo, y tomamos su segunda derivada  $W_{a_1 a_0} \equiv \nabla_{a_1} \nabla_{a_2} \phi$ , utilizando la expresión (F.77) sobre (F.60), obtenemos las proyecciones tangentes siguientes,

$$\overset{0}{W}_{a_1 a_0} = K_{a_1 a_0} \overset{\cdot}{d} \phi + D_{a_1} D_{a_0} \phi, \quad (\text{F.103a})$$

$$\overset{1}{W}_{a_1} = D_{a_1} \overset{\cdot}{d} \phi + K_{a_1}{}^b D_b \phi, \quad (\text{F.103b})$$

$$\overset{2}{W}_{a_0} = u_{a_0} \overset{\cdot}{d} \phi + \overset{\cdot}{d} D_{a_0} \phi, \quad (\text{F.103c})$$

$$\overset{3}{W} = \overset{\cdot}{d}^2 \phi + u^b D_b \phi. \quad (\text{F.103d})$$

Como no hay torsión, tendremos que  $W_{[a_1 a_0]} = 0$ , que al recurrir a (F.35) se traduce en las identidades

$$D_{a_1} D_{a_0} \phi - D_{a_0} D_{a_1} \phi = 0, \quad (\text{F.104a})$$

$$\left( \overset{\cdot}{d} D_a - D_a \overset{\cdot}{d} + u_a \overset{\cdot}{d} - K_a{}^b D_b \right) \phi = 0. \quad (\text{F.104b})$$

La ecuación (F.104a) es la propiedad de no torsión *intrínseca* sobre la hipersuperficie, mientras que la ecuación (F.104b) es el término que aparece en la ecuación (F.95d) que corresponde a la componente  $\overset{7}{R}_a$ , el cual según acabamos de mostrar a partir de las simetrías del tensor de Riemann, es cero. No es un accidente, puesto que la ausencia de torsión está detrás de la propiedad (F.86a).

Es útil escribir (F.104b) como

$$\overset{\cdot}{d} D_a \phi = \left( D_a \overset{\cdot}{d} - u_a \overset{\cdot}{d} + K_a{}^b D_b \right) \phi, \quad (\text{F.105})$$

puesto que esto nos permite calcular la *derivada normal de la derivada tangente* de  $\phi$  en términos de la *derivada tangente de  $\overset{\cdot}{d} \phi$* . Es decir, si conocemos  $\phi|_\Sigma = \varphi$  y  $\overset{\cdot}{d} \phi|_\Sigma \equiv -\varpi$  como campos definidos intrínsecamente sobre la hipersuperficie, podemos sustituir expresiones que implicarían tomar la derivada *normal* de  $D_a \phi$  directamente en términos de objetos definidos intrínsecamente sobre la hipersuperficie,

$$(-\overset{\cdot}{d} D_a \phi)_\Sigma = D_a \varpi - u_a \varpi - K_a{}^b D_b \varphi. \quad (\text{F.106})$$

La propia definición del tensor de Riemann nos permite calcular una relación análoga para vectores tangentes a la hipersuperficie. Concretamente, en la ecuación (F.95c) sabemos que el término que opera sobre  $\overset{0}{\omega}_a$  debe corresponder a la entrada  $\overset{4}{R}_{a_2 a_0}{}^b \overset{0}{\omega}_b$ , calculado en (F.101), por lo que igualando ambos términos, tenemos que

$$\begin{aligned} & \left( D^b K_{a_2 a_0} - D_{a_0} K_{a_2}{}^b \right) \overset{0}{\omega}_b = \\ & \left( K_{a_2 a_0} u^b - u_{a_0} K_{a_2}{}^b \right) \overset{0}{\omega}_b + \left( D_{a_2} \overset{\cdot}{d} + K_{a_2}{}^b D_b - u_{a_2} \overset{\cdot}{d} - \overset{\cdot}{d} D_{a_2} \right) \overset{0}{\omega}_{a_0}, \end{aligned} \quad (\text{F.107})$$

y reacomodando,

$$(\tilde{d}D_{a_1} - D_{a_1}\tilde{d} + u_{a_1}\tilde{d} - K_{a_1}{}^b D_b)\overset{0}{\omega}_{a_0} = (K_{a_1 a_0} u^b - u_{a_0} K_{a_1}{}^b + D_{a_0} K_{a_1}{}^b - D^b K_{a_1 a_0})\overset{0}{\omega}_b. \quad (\text{F.108})$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (F.104b), ya que se trata del mismo operador diferencial actuando sobre diferentes objetos. Siguiendo por esta vía, la fórmula

$$(\nabla_{a_{k+1}} \nabla_{a_k} - \nabla_{a_k} \nabla_{a_{k+1}}) T_{a_{k-1} \dots a_0} = \sum_{j=0}^{k-1} R_{a_{k+1} a_k a_j}{}^b T_{a_{k-1} \dots a_{j+1} b a_{j-1} \dots a_0}, \quad (\text{F.109})$$

implicará la relación

$$\begin{aligned} (\tilde{d}D_{a_k} - D_{a_k}\tilde{d} + u_{a_k}\tilde{d} - K_{a_k}{}^b D_b)\overset{0}{T}_{a_{k-1} \dots a_0} = \\ \sum_{j=1}^{k-1} (K_{a_k a_j} u^b - u_{a_j} K_{a_k}{}^b + D_{a_j} K_{a_k}{}^b - D^b K_{a_k a_j})\overset{0}{T}_{a_{k-1} \dots a_{j+1} b a_{j-1} \dots a_0}. \end{aligned} \quad (\text{F.110})$$

Podemos tomar nuevamente esta fórmula como una manera de *conmutar* las derivadas  $\tilde{d}$  y  $D_a$ , es decir,

$$\begin{aligned} (\tilde{d}D_{a_k} - D_{a_k}\tilde{d})\overset{0}{T}_{a_{k-1} \dots a_0} = (K_{a_k}{}^b D_b - u_{a_k}\tilde{d})\overset{0}{T}_{a_{k-1} \dots a_0} \\ + \sum_{j=1}^{k-1} (K_{a_k a_j} u^b - u_{a_j} K_{a_k}{}^b + D_{a_j} K_{a_k}{}^b - D^b K_{a_k a_j})\overset{0}{T}_{a_{k-1} \dots a_{j+1} b a_{j-1} \dots a_0}. \end{aligned} \quad (\text{F.111})$$

Este enfoque será particularmente útil para abordar los problemas de valor inicial.

Para terminar de revisar las implicaciones que tienen las propiedades del tensor de Riemann en el contexto del formalismo 3 + 1 estudiamos la identidad de Bianchi (F.86d). Utilizando la expresión (F.45b) y (F.83) para calcular la expansión 3+1 de (F.86d), tomando en cuenta las identidades que hemos obtenido, el resultado es que todas las componentes de proyección se cancelan idénticamente con excepción de la componente con índice  $m = 16$ , quedando

$$\begin{aligned} \tilde{d}{}^{(3)}R_{a_3 a_2 a_1 a_0} = 2 \left( K_{b[a_3}{}^{(3)}R^b{}_{a_2]a_1 a_0} - 2u_{[a_3} K_{a_2][a_1} u_{a_0]} + 2(D_{[a_1} K_{a_0][a_3]} u_{a_2]} \right. \\ \left. + 2D_{[a_3} (K_{a_2][a_1} u_{a_0]}) + D_{a_3} D_{[a_1} K_{a_0]a_2} - D_{a_2} D_{[a_1} K_{a_0]a_3} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.112})$$

En otras palabras, la identidad de Bianchi implica que la *derivada normal* del tensor de Riemann intrínseco está determinada enteramente en términos del propio tensor de Riemann intrínseco, el vector  $u^a$ , la curvatura extrínseca y derivadas tangentes de estos objetos, es decir, en términos de datos sobre la superficie. Esto está relacionado con el hecho de que la



derivada de Lie a lo largo del campo normal  $n^a$  de la métrica inducida es proporcional a la curvatura extrínseca, como se verá más adelante.

El tensor de Ricci  $R_{a_1 a_0}$  se puede calcular con ayuda de la fórmula (F.49), obteniendo<sup>3</sup>

$${}^0 R_{a_1 a_0} = {}^{(3)}R_{a_1 a_0} + K K_{a_1 a_0} + D_{a_1} u_{a_0} - u_{a_1} u_{a_0} - \bar{d} K_{a_1 a_0}, \quad (\text{F.113a})$$

$${}^1 R_{a_1} = {}^2 R_{a_1} = D_{a_1} K - D_b K^b{}_{a_1}, \quad (\text{F.113b})$$

$${}^3 R = \bar{d} K + u^2 - K^{b_1 b_0} K_{b_1 b_0} - D_b u^b, \quad (\text{F.113c})$$

donde se han definido

$$K \equiv K^b{}_b, \quad (\text{F.114a})$$

$$u^2 \equiv u^b u_b. \quad (\text{F.114b})$$

A la ecuación (F.113b) se le denomina segunda relación de Gauss-Codazzi.

A partir de (F.113), recurriendo a la fórmula (F.49) en su forma explícita (F.47), se puede calcular el escalar de Ricci  $\mathcal{R}$  en términos de los objetos del formalismo 3 + 1 como

$$\mathcal{R} = {}^{(3)}\mathcal{R} + K^2 + K^{b_1 b_0} K_{b_1 b_0} + 2 \left( D_b u^b - u^2 - \bar{d} K \right). \quad (\text{F.115})$$

La identidad de Bianchi implica también una relación para las derivadas normales de  ${}^{(3)}R_{a_1 a_0}$  y  ${}^{(3)}\mathcal{R}$ , que se pueden calcular contrayendo directamente (F.112),

$$\begin{aligned} \bar{d} {}^{(3)}R_{a_1 a_0} = & u^2 K_{a_1 a_0} + K u_{a_1} u_{a_0} + D^b D_b K_{a_1 a_0} - K D_{a_1} u_{a_0} + D_{a_1} D_{a_0} K - K_{a_1 a_0} D_b u^b \\ & + 2 \left( K_{(a_1}{}^b {}^{(3)}R_{a_0) b} - u_{(a_1} K_{a_0)}{}^b u_b - u_{(a_1} D_{a_0)} K + u^b D_{(a_1} K_{a_0) b} \right. \\ & \left. - u^b D_b K_{a_1 a_0} + u_{(a_1} D^b K_{a_0) b} + K_{b(a_1} D^b u_{a_0)} - D_b D_{(a_1} K_{a_0)}{}^b \right), \end{aligned} \quad (\text{F.116a})$$

$$\begin{aligned} \bar{d} {}^{(3)}\mathcal{R} = & 2 \left( K^{b_1 b_0} {}^{(3)}R_{b_1 b_0} + K u^2 - K^{b_1 b_0} u_{b_1} u_{b_0} + D^b D_b K - 2 u^b D_b K \right. \\ & \left. + 2 u_{b_1} D_{b_0} K^{b_1 b_0} - K D_b u^b + K^{b_1 b_0} D_{b_1} u_{b_0} - D_{b_1} D_{b_0} K^{b_1 b_0} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.116b})$$

El tensor de Einstein se puede calcular directamente a partir de (F.113) y (F.115), obteniendo

$$\begin{aligned} {}^0 G_{a_1 a_0} = & {}^{(3)}G_{a_1 a_0} + \left\{ \bar{d} K - D_b u^b - \frac{1}{2} \left( K^{b_1 b_0} K_{b_1 b_0} + K^2 - 2u^2 \right) \right\} h_{a_1 a_0} \\ & - \bar{d} K_{a_1 a_0} + K K_{a_1 a_0} + D_{a_1} u_{a_0} - u_{a_1} u_{a_0}, \end{aligned} \quad (\text{F.117a})$$

$${}^1 G_{a_1} = {}^2 G_{a_0} = D_{a_1} K - D_b K^b{}_{a_1}, \quad (\text{F.117b})$$

$${}^3 G = \frac{1}{2} \left( K^2 - K^{b_1 b_0} K_{b_1 b_0} + {}^{(3)}\mathcal{R} \right). \quad (\text{F.117c})$$

---

<sup>3</sup>Nótese que  $D_a u_b$  es simétrico, en consistencia con la ecuación (F.73).

En [62] se muestra que es posible obtener las ecuaciones (F.117b) y (F.117c) partiendo de las relaciones de Gauss-Codazzi, lo que no ocurre con la proyección (F.117a), a menudo referida como la *ecuación dinámica* pues justamente contiene las derivadas de orden dos para la métrica en forma de las derivadas  $\bar{d}K$  y  $\bar{d}K_{a_1 a_0}$ . En el tratamiento hamiltoniano de Arnowitt, Deser y Misner (ADM) [82], que también puede verificarse en el apéndice E de [62], sí se recuperan las ecuaciones *dinámicas* correspondientes, aunque en ese tratamiento es necesario introducir el vector *shift*  $N^a$ , así como el *lapse*  $N$ , y sus derivadas en lugar de  $u_a$ . Al ser éstas variables no dinámicas, dan origen a ecuaciones de constricción que incluyen del lado derecho a (F.117b) y (F.117c), y del lado izquierdo las correspondientes proyecciones del tensor de energía-momento, es decir,

$$D_a K - D_b K^b{}_a = 8\pi G_N J_a, \quad (\text{F.118a})$$

$$\frac{1}{2} \left( K^2 - K^{b_1 b_0} K_{b_1 b_0} + {}^{(3)}\mathcal{R} \right) = 8\pi G_N \rho, \quad (\text{F.118b})$$

donde

$$J_a \equiv \bar{T}_a = -n^{b_0} h_a{}^{b_1} T_{b_1 b_0}, \quad (\text{F.119a})$$

$$\rho \equiv \bar{T} = n^{b_1} n^{b_0} T_{b_1 b_0}, \quad (\text{F.119b})$$

y  $T_{ab}$  es el tensor de energía-momento.

Intuitivamente, la presencia de constricciones es reflejo de que no se están considerando únicamente los grados de libertad *legítimos* en la teoría. Cuando se toma como espacio de configuración al espacio de clases de equivalencia de métricas espaciales (dada una foliación) tales que estas pueden mapearse entre sí a través de difeomorfismos (*superespacio*), es posible evitar la constricción de *momentum* (F.117b) pero no así la constricción *hamiltoniana* (F.117c). En ese caso, no se ha eliminado por completo la *libertad* que proviene de la propia elección de foliación del espacio-tiempo que se escoge desde el principio de este tratamiento.

## F.6. Derivada de Lie

Dado un grupo uniparamétrico de difeomorfismos  $\Phi_\tau$  generado por un campo vectorial  $v^a$  (es decir, que las líneas de flujo de  $\Phi_\tau$ , parametrizadas por  $\tau$ , tienen como vector tangente a  $v^a$ ), se define [62] la derivada de Lie respecto a  $v^a$  de un tensor  $T^{b_{l-1} \dots b_0}{}_{a_{k-1} \dots a_0}$  como

$$\mathcal{L}_v T^{b_{l-1} \dots b_0}{}_{a_{k-1} \dots a_0} \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Phi_{-\tau}^* T^{b_{l-1} \dots b_0}{}_{a_{k-1} \dots a_0} - T^{b_{l-1} \dots b_0}{}_{a_{k-1} \dots a_0}}{\tau} \right\}, \quad (\text{F.120})$$

por lo que este objeto encarna la noción de *derivada respecto al parámetro*  $\tau$ . En términos de coordenadas adaptadas al flujo de  $v^a$ , donde por ejemplo  $x^0 = \tau$ , se tiene que

$$\mathcal{L}_v T^{\mu_{l-1} \dots \mu_0}{}_{\nu_{k-1} \dots \nu_0} = \frac{\partial}{\partial \tau} T^{\mu_{l-1} \dots \mu_0}{}_{\nu_{k-1} \dots \nu_0}. \quad (\text{F.121})$$

Nótese que el que la derivada de Lie de un tensor se anule nos indica que este tiene una simetría de invariancia ante el difeomorfismo generado por  $v^a$ , o en términos de coordenadas adaptadas al flujo de  $\Phi_\tau$ , que sus componentes no dependen de  $x^0 = \tau$ .

En términos de la derivada covariante se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v T^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_0} &= v^c \nabla_c T^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_0} - \sum_{i=0}^{l-1} T^{b_{l-1} \dots c \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_0} \nabla_c v^{b_i} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} T^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots c \dots a_0} \nabla_{a_j} v^c. \end{aligned} \quad (\text{F.122})$$

Por lo tanto, con el formalismo 3 + 1 aquí desarrollado es posible expresar de inmediato las componentes de proyección de este objeto. Por ejemplo, para una función  $f$  se tiene simplemente la expansión (F.60), mientras que para un covector  $\omega_a$  se tendrá

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \omega_{a_0} &= -\dot{v} \dot{d}^0 \omega_{a_0} + \dot{v} K_{a_0}{}^b \omega_b - \dot{v} \omega u_{a_0} + \omega_b D_{a_0}{}^0 v^b - \dot{\omega} D_{a_0}{}^1 v + \dot{v}{}^b D_b \omega_{a_0} \\ &\quad + n_{a_0} \left( -\dot{v} \dot{d}^1 \omega + \omega_b \dot{d}^0 v^b + K^{b_1 b_0} v_{b_1} \omega_{b_0} - \dot{\omega} \dot{d}^1 v - \dot{\omega} u_b v^b + \dot{v}{}^b D_b \omega \right). \end{aligned} \quad (\text{F.123})$$

Nuestro interés será hacer contacto con la noción de *derivada respecto al tiempo*. Esta noción es propia de una foliación particular, en la que se definen tensores tangentes a la hipersuperficie que de acuerdo con una noción particular de evolución, cambian en función de un parámetro  $t$ , por lo que la derivada temporal de un tensor tangente es también un tensor tangente. Por lo tanto, para un tensor tangente  $T_{a_{k-1} \dots a_k}$  definimos

$$\dot{T}^{b_{k-1} \dots b_k}_{a_{k-1} \dots a_k} \equiv h^{b_{l-1}}{}_{d_{l-1}} \dots h^{b_0}{}_{d_0} h_{a_{k-1}}{}^{c_{k-1}} \dots h_{a_0}{}^{c_0} \mathcal{L}_t T^{d_{k-1} \dots d_k}_{c_{k-1} \dots c_k}, \quad (\text{F.124})$$

donde  $t^a$  es el vector tangente al flujo del difeomorfismo que identifica hipersuperficies de la foliación, y cuya expansión 3 + 1 (F.15) da origen al *shift*  $N^a = t^{0a}$  y al *lapse*  $N = t$ . Denotemos por  $\tilde{\mathcal{L}}_v$  a la proyección tangente de la derivada de Lie respecto a  $v^a$ . De inmediato se obtiene que

$$\dot{T}^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_k} = N \tilde{\mathcal{L}}_n T^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_k} + \tilde{\mathcal{L}}_N T^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_k}. \quad (\text{F.125})$$

El segundo término se calcula mediante (F.122) sustituyendo la derivada covariante por la derivada  $D_a$  de la métrica inducida  $h_{ab}$ , mientras que para el primer término tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_n T^{b_{l-1} \dots b_k}_{a_{k-1} \dots a_k} &= -\dot{d} T^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_k} - \sum_{i=0}^{l-1} T^{b_{l-1} \dots c \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_0} K_c{}^{b_i} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} T^{b_{l-1} \dots b_0}_{a_{k-1} \dots c \dots a_0} K_{a_j}{}^c. \end{aligned} \quad (\text{F.126})$$

Por lo tanto, tendremos

$$\begin{aligned} \dot{T}^{b_l \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_k} &= -N \dot{d} T^{b_l \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_k} + N^c D_c T^{b_l \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_k} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{l-1} T^{b_l \dots c \dots b_0}_{a_{k-1} \dots a_0} \left( N K_c^{b_i} + D_c N^{b_i} \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} T^{b_l \dots b_0}_{a_{k-1} \dots c \dots a_0} \left( N K_{a_j}^c + D_{a_j} N^c \right). \end{aligned} \quad (\text{F.127})$$

Por ejemplo, para la propia métrica inducida tendremos

$$\dot{h}_{a_1 a_0} = 2 \left( N K_{a_1 a_0} + D_{(a_1} N_{a_0)} \right). \quad (\text{F.128})$$

Sin necesidad de proyectar, directamente aplicando (F.122) se tiene que

$$\mathcal{L}_n h_{a_1 a_0} = 2 K_{a_1 a_0}. \quad (\text{F.129})$$

Esta relación motiva la idea *intuitiva* de que la derivada *temporal* de  $h_{a_1 a_0}$  es la curvatura extrínseca, aunque rigurosamente esa derivada esté dada por (F.128). Pero en general, para tensores diferentes de  $h_{ab}$ , el orden de derivadas  $\dot{d}$  coincidirá con el orden de derivadas *temporales*.

Como ejemplo adicional, la relación (F.112) puede interpretarse también como una expresión para la derivada temporal del tensor de Riemann de la hipersuperficie, tomando  $N^a = 0$ ,

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\dot{R}_{a_3 a_2 a_1 a_0} &= 2N \left( {}^{(3)}R_{a_3 a_2 [a_1}{}^b K_{|b|a_0]} + 2u_{[a_3} K_{a_2][a_1} u_{a_0]} - 2(D_{[a_1} K_{a_0][a_3]} u_{a_2]} \right. \\ &\quad \left. - 2D_{[a_3} (K_{a_2][a_1} u_{a_0]}) - D_{a_3} D_{[a_1} K_{a_0]a_2} + D_{a_2} D_{[a_1} K_{a_0]a_3} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.130})$$

## F.7. Formulación 3 + 1 y Relatividad General

El lado izquierdo de la ecuación de Einstein

$$G_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}, \quad (3.20)$$

está dado por las ecuaciones (F.117), mientras que el lado derecho requiere que se proporcione una expresión concreta para el tensor de energía-momento  $T_{ab}$ . Consideremos un par de ejemplos.

### F.7.1. Modelo cosmológico isótropo y homogéneo.

Consideremos un fluido perfecto con tensor de energía-momento

$$T_{ab} = (\rho + P)U_a U_b + P g_{ab}, \quad (\text{F.131})$$

con  $U_a$  la 4-velocidad del fluido. Si uno considera una foliación dada por el tiempo cosmológico de modo que el fluido siempre va en la dirección normal a las hipersuperficies de tiempo cósmico constante, tendremos que  $U_a = n_a$ . Es decir, el fluido se encuentra en reposo respecto a los observadores Eulerianos de la foliación, y tenemos

$$T_{a_1 a_0} = P h_{a_1 a_0} + \rho n_a n_b. \quad (\text{F.132})$$

La ecuación de conservación  $\nabla^b T_{ab} = 0$  en forma 3 + 1 tiene la forma

$$D_{a_0} P = (P + \rho) u_{a_0}, \quad (\text{F.133a})$$

$$\dot{\rho} = (P + \rho) K. \quad (\text{F.133b})$$

y al considerar homogeneidad, tenemos que  $D_a P = 0$ , por lo que automáticamente  $u_a = 0$ . En general, vamos a considerar que las hipersuperficies de la foliación son homogéneas por lo que las derivadas tangentes de la curvatura extrínseca también se anulan,  $D_a K_{bc} = 0$ . Supondremos que la curvatura tiene la forma

$$K_{ab} = \frac{\kappa}{3} h_{ab}, \quad (\text{F.134})$$

donde  $\kappa$  es un escalar que sólo depende del tiempo. Con estas suposiciones, las ecuaciones de Einstein en forma 3 + 1 se convierten en

$${}^{(3)}R_{a_1 a_0} = \frac{2}{3} \left( 12\pi G_N (P + \rho) - \dot{\kappa} \right) h_{a_1 a_0}, \quad (\text{F.135a})$$

$${}^{(3)}R = \frac{2}{3} (-\kappa^2 + 24\pi G_N \rho). \quad (\text{F.135b})$$

Podemos trazar sobre la primera ecuación para eliminar  ${}^{(3)}R$  y convertir el sistema en una ecuación diferencial para  $\kappa$ , haciendo la sustitución  $\dot{\kappa} \mapsto -\dot{\kappa}$ , obteniendo

$$3\dot{\kappa} + \kappa^2 + 12\pi G_N (3P + \rho) = 0. \quad (\text{F.136})$$

Si se propone una ecuación de estado para el fluido de la forma  $P = \sigma \rho$ , con  $\sigma \neq -1$ , de (F.133b) se tiene que

$$\kappa = - \left( \frac{1}{1 + \sigma} \right) \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (\text{F.137})$$

Al sustituir en (F.136) se obtiene una ecuación para  $\rho$ ,

$$3(1 + \sigma)\rho\ddot{\rho} - (4 + 3\sigma)\dot{\rho}^2 - 12\pi G_N (1 + \sigma)^2 (1 + 3\sigma)\rho^3 = 0. \quad (\text{F.138})$$

Si  $\sigma = -1$ , de (F.133b) obtenemos que  $\rho$  es constante (sea ésta  $\rho_0$ ), y la ecuación (F.136) se simplifica a

$$\dot{\kappa} + \frac{1}{3}\kappa^2 = 8\pi G_N \rho_0. \quad (\text{F.139})$$

La solución en este caso es de la forma

$$\kappa(t) = \sqrt{24\pi G_N \rho_0} \tanh\left(\sqrt{\frac{8\pi G_N \rho_0}{3}} t\right). \quad (\text{F.140})$$

En este formalismo hemos obtenido las ecuaciones dinámicas para la densidad y para la *curvatura extrínseca* sin recurrir a un ansatz para la métrica intrínseca, únicamente partiendo de las condiciones de isotropía y homogeneidad, así como un ansatz para la curvatura extrínseca. Invirtiendo el ansatz para la curvatura, podemos calcular también la métrica intrínseca, pues

$$\dot{h}_{a_1 a_0} = 2K_{a_1 a_0} = \frac{2}{3}\kappa h_{a_1 a_0}, \quad (\text{F.141})$$

que podemos resolver formalmente como

$$h_{ab}(t) = h_{ab} e^{\frac{2}{3} \int_{t_0}^t dt' \kappa(t')}, \quad (\text{F.142})$$

con  $h_{ab} \equiv h_{ab}(t_0)$ .

### F.7.2. Escalar de Klein-Gordon

Consideremos ahora el caso de un escalar de Klein-Gordon  $\phi$  que satisface la correspondiente ecuación de campo

$$(g^{ab}\nabla_a\nabla_b - m^2)\phi = 0. \quad (\text{F.143})$$

Usando las ecuaciones (F.103) y (F.47), esta misma ecuación se escribe en términos del formalismo 3 + 1 como

$$-\dot{\phi}^2 + D^b D_b \phi + K \dot{\phi} - u^b D_b \phi - m^2 \phi = 0. \quad (\text{F.144})$$

Análogamente, la expresión para el Tensor de Energía momento que le corresponde está dada por (2.24) con  $\xi = 0$ ,

$$T_{a_1 a_0} = (\nabla_{a_1} \phi)(\nabla_{a_0} \phi) - \frac{1}{2} g_{a_1 a_0} \left[ g^{b_1 b_0} (\nabla_{b_1} \phi)(\nabla_{b_0} \phi) + m^2 \phi^2 \right], \quad (\text{F.145})$$

y tiene las componentes de proyección

$$T_{a_1 a_0}^0 = (D_{a_1} \phi)(D_{a_0} \phi) - \frac{1}{2} h_{a_1 a_0} \left[ -(\dot{\phi})^2 + (D^b \phi)(D_b \phi) + m^2 \phi^2 \right], \quad (\text{F.146a})$$

$$T_a^1 = T_a^2 = (\dot{\phi})(D_a \phi), \quad (\text{F.146b})$$

$$T^3 = \frac{1}{2} \left[ (\dot{\phi})^2 + (D^b \phi)(D_b \phi) + m^2 \phi^2 \right]. \quad (\text{F.146c})$$

Si de nueva cuenta tomamos una foliación asociada a un conjunto de observadores geodésicos con cuadrivelocidad  $n^a$ , e imponemos isotropía y homogeneidad, es decir, imponemos las condiciones  $u^a = 0$ ,  $K_{ab} = \frac{\kappa}{3}h_{ab}$ ,  $D_a\kappa = 0$ ,  $D_a\phi = 0$ , entonces las ecuaciones de Einstein quedan

$${}^{(3)}R_{a_1a_0} - \frac{1}{6} \left( 3 {}^{(3)}R + 4\dot{\kappa} + 2\kappa^2 \right) h_{ab} = 4\pi G_N \left( \dot{\phi}^2 - m^2\phi^2 \right) h_{a_1a_0}, \quad (\text{F.147a})$$

$$\frac{1}{6} \left( 3 {}^{(3)}R + 2\kappa^2 \right) = 4\pi G_N (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) \quad (\text{F.147b})$$

Al contraer los índices en (F.147a) y sustituir (F.147b) para cancelar  ${}^{(3)}R$ , obtenemos

$$\dot{\kappa} + \frac{1}{3}\kappa^2 = 8\pi G_N \left( \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \dot{\phi}^2 \right). \quad (\text{F.148})$$

En este caso, existe una solución consistente si se pide que

$$\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \dot{\phi}^2 = \rho_0, \quad (\text{F.149})$$

ya que en este caso la ecuación de Klein-Gordon (F.144) nos da

$$\phi^2 = \frac{2\kappa\rho_0}{|9m^2 - 2\kappa^2|m^2}, \quad (\text{F.150})$$

con  $\kappa$  dado por (F.140). Este resultado es un modelo de juguete de *inflación* con un campo escalar.

## Apéndice G

# La distancia geodésica y expansiones de hipersuperficie

Consideremos un espaciotiempo globalmente hiperbólico  $(M, g_{ab})$ , y sea  $\mathcal{D} \subset M$  una vecindad normal convexa tal que para cada par de puntos  $x, y \in \mathcal{D}$ , existe una única geodésica que contiene a  $x$  e  $y$ .

### G.1. La semidistancia geodésica al cuadrado

En lo que sigue, nos basamos en el procedimiento descrito por DeWitt y Brehme en [83]. Denotamos por  $s(x, y)$  a la distancia geodésica entre puntos  $x, y \in \mathcal{D}$ . Si se fija  $y = y_0 \in \mathcal{D}$ , se puede definir un campo  $s_{y_0}(x) \equiv s(x, y_0)$  sobre  $\mathcal{D}$ . Con excepción del cono de luz de  $y_0$ , el campo vectorial  $g^{ab}\nabla_b s_{y_0}$  es unitario, dado que  $s_{y_0}$  parametriza de manera afín a cada geodésica que emana de  $y_0$ , es decir,

$$g^{ab}\nabla_a s_{y_0}\nabla_b s_{y_0} = \pm 1, \quad (\text{G.1})$$

donde el signo positivo aplica para geodésicas tipo espacio y el signo negativo para geodésicas tipo tiempo. Veremos que es conveniente definir la semidistancia geodésica al cuadrado por

$$\sigma(x, y) \equiv \pm \frac{1}{2}s^2(x, y), \quad (\text{G.2})$$

donde nuevamente usamos el signo positivo para puntos  $x, y$  relacionados espacialmente, y el signo menos para puntos  $x, y$  relacionados temporalmente. Notemos que  $\sigma$  se anula cuando la distancia geodésica entre  $x$ ,  $y$  se anula, en particular en el límite de coincidencia,

$$\sigma(x, x) = 0. \quad (\text{G.3})$$

Nuevamente, si fijamos  $y = y_0$ , podemos definir un campo escalar en  $\mathcal{D}$  dado por  $\sigma_{y_0}(x) \equiv \sigma(x, y_0)$ . De ahora en adelante, omitimos la referencia explícita a  $x$  y  $y$ , sobreentendiendo



que todas las derivadas covariantes se aplican en  $x$ . Derivando (G.2) obtenemos

$$\nabla_a \sigma = \pm s \nabla_a s. \quad (\text{G.4})$$

De aquí se sigue que

$$\lim_{y \rightarrow x} \nabla_a \sigma = 0. \quad (\text{G.5})$$

De (G.4), (G.2) y (G.1) se obtiene que  $\sigma$  cumple con la ecuación diferencial

$$g^{ab} (\nabla_a \sigma) (\nabla_b \sigma) = 2\sigma. \quad (\text{G.6})$$

Esta ecuación nos permite obtener información sobre las derivadas de  $\sigma$ . Definimos la notación<sup>1</sup> simplificada  $\sigma_a \equiv \nabla_a \sigma$ ,  $\sigma_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \sigma$ , etc. Entonces,

$$\sigma_a = \sigma^b \sigma_{ab}, \quad (\text{G.7})$$

$$\sigma_{ba} = \sigma_b^c \sigma_{ac} + \sigma^c \sigma_{bac}, \quad (\text{G.8})$$

de modo que al tomar el límite de coincidencia sobre (G.8) se obtiene

$$\lim_{y \rightarrow x} \sigma_{ba} = \lim_{y \rightarrow x} \sigma_b^c \sigma_{ac}, \quad (\text{G.9})$$

y de aquí se infiere que

$$\lim_{y \rightarrow x} \sigma_{ab} = g_{ab}. \quad (\text{G.10})$$

En lo que sigue calcularemos los límites de coincidencia hasta de orden seis en derivadas covariantes para  $\sigma$  con ayuda de la ecuación (G.6) y los límites (G.3), (G.5) y (G.10), reproduciendo el método de DeWitt y Brehme [83]. De ahora en adelante usamos la notación de paréntesis cuadrados [ ] para indicar que se toma el límite de coincidencia  $y \rightarrow x$ .

Si tomamos la derivada covariante de (G.8), se obtiene

$$\sigma_{cb}^d \sigma_{ad} + \sigma_b^d \sigma_{cad} + \sigma_c^d \sigma_{bad} + \sigma^d \sigma_{cbad} = \sigma_{cba}, \quad (\text{G.11})$$

y en el límite de coincidencia,

$$[\sigma_{cba}] + [\sigma_{cab}] + [\sigma_{bac}] = [\sigma_{cba}]. \quad (\text{G.12})$$

Al sustituir la condición de *no torsión*,

$$\nabla_a \nabla_b \phi - \nabla_b \nabla_a \phi = 0, \quad (\text{G.13})$$

---

<sup>1</sup>Nótese que esta notación es semejante a la notación con (;) para derivadas covariantes, aunque siguen un orden inverso, es decir,

$$\nabla_a \nabla_b \phi = \phi_{ab} = \phi_{;ba}$$

obtenemos

$$[\sigma_{cba}] + [\sigma_{bca}] = 0. \quad (\text{G.14})$$

La definición del tensor de Riemann aplicada a  $\sigma_{ab}$ ,

$$\sigma_{bca} = R_{bca}{}^d \sigma_d + \sigma_{cba}, \quad (\text{G.15})$$

implica que en el límite de coincidencia,

$$[\sigma_{bca}] = [\sigma_{cba}], \quad (\text{G.16})$$

que al sustituir en (G.14) finalmente nos arroja el límite

$$[\sigma_{cba}] = 0. \quad (\text{G.17})$$

En general, al calcular  $m$  derivadas de (G.6), y tomar el límite de coincidencia se obtiene una ecuación que contiene una combinación de términos de la forma  $[\sigma_{a_m \dots a_0}]$  con los índices intercambiados. A esta ecuación la denominamos la *ecuación maestra de orden  $m$*  para  $\sigma$ . Para poder *intercambiar* esos índices es necesario recurrir a la regla general de intercambio de derivadas en términos del tensor de Riemann,

$$\nabla_{a_n} \nabla_{a_{n-1}} \omega_{a_{n-2} \dots a_1} - \nabla_{a_{n-1}} \nabla_{a_n} \omega_{a_{n-2} \dots a_1} = \sum_{k=1}^{n-2} R_{a_n a_{n-1} a_k}{}^b \omega_{a_{n-2} \dots a_{k+1} b a_{k-1} \dots a_1}, \quad (\text{G.18})$$

en cada orden  $2 < n \leq m$ , y tomar  $m - n$  derivadas más, resultando en  $m - 2$  ecuaciones de intercambio de índices (nótese que los primeros dos índices de derecha a izquierda siempre conmutan gracias a la condición de no torsión). A continuación se calcula el límite de coincidencia para cada ecuación de intercambio de índices, obteniendo un conjunto de reglas para el intercambio de cada dos índices adyacentes para los términos  $[\sigma_{a_m \dots a_0}]$ . Estas reglas de intercambio en el límite de coincidencia ya se pueden utilizar para despejar  $[\sigma_{a_m \dots a_0}]$  de la ecuación maestra de orden  $m$ .

Entonces, al calcular la cuarta derivada de (G.6) obtenemos,

$$\sigma_{dcb}{}^e \sigma_{ae} + \sigma_{cb}{}^e \sigma_{dae} + \sigma_{db}{}^e \sigma_{cae} + \sigma_b{}^e \sigma_{dcae} \quad (\text{G.19})$$

$$+ \sigma_{dc}{}^e \sigma_{bae} + \sigma_c{}^e \sigma_{dbae} + \sigma_d{}^e \sigma_{cbae} + \sigma^e \sigma_{dcbae} = \sigma_{dcba}, \quad (\text{G.20})$$

donde al tomar el límite de coincidencia se obtiene la ecuación maestra de orden 4 para  $\sigma$ ,

$$[\sigma_{dcba}] + [\sigma_{dbca}] + [\sigma_{cbda}] = 0. \quad (\text{G.21})$$

Veamos que la regla de intercambio para los últimos dos índices es

$$\sigma_{abcd} = \sigma_{bacd} + R_{abc}{}^e \sigma_{ed} + R_{abd}{}^e \sigma_{ce}. \quad (\text{G.22})$$

Al tomar el límite de coincidencia, los términos que van contraídos con el tensor de Riemann tendrán simplemente el efecto de bajar el índice correspondiente de sus respectivos tensores de Riemann, resultando en una suma simetrizada de los tensores de Riemann. Éstos se cancelarán entre sí, resultando en la regla de intercambio

$$[\sigma_{abcd}] = [\sigma_{bacd}]. \quad (\text{G.23})$$

La regla de intercambio faltante es no trivial, y se obtiene calculando una derivada de (G.15),

$$\sigma_{dcba} = \sigma_{dbca} + (\nabla_d R_{cba}{}^e) \sigma_e + R_{cba}{}^e \sigma_{de}. \quad (\text{G.24})$$

Al tomar el límite de coincidencia, la regla de intercambio de índices buscada es

$$[\sigma_{dcba}] = [\sigma_{dbca}] + R_{cbad}. \quad (\text{G.25})$$

Utilizando (G.23) y (G.25) en (G.21) obtenemos

$$\begin{aligned} R_{cbad} + 2[\sigma_{dbca}] + [\sigma_{bcd a}] &= 0 \\ R_{cbad} + 2[\sigma_{dbca}] + R_{cdab} + [\sigma_{bdca}] &= 0 \\ [\sigma_{dbca}] &= \frac{1}{3} (R_{dcab} + R_{bcad}). \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

Siguiendo este procedimiento, obtenemos los siguientes límites,

$$[\sigma_{edcba}] = \frac{1}{2} (\nabla_e R_{bcd a} + \nabla_d R_{bec a} + \nabla_c R_{bdea}) \quad (\text{G.27})$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}] = \frac{1}{45} & \left[ \left( R_{a_6 a_1 a_2}{}^b + R_{a_6 a_2 a_1}{}^b \right) (5R_{a_5 a_4 a_3 b} - 4R_{a_5 a_3 a_4 b}) \right. \\
& - 4R_{a_6 a_1 a_3}{}^b (R_{a_5 a_2 a_4 b} + R_{a_5 a_4 a_2 b}) - 4R_{a_6 a_1 a_4}{}^b (R_{a_5 a_2 a_3 b} + R_{a_5 a_3 a_2 b}) \\
& - 4R_{a_6 a_1 a_5}{}^b (R_{a_4 a_2 a_3 b} + R_{a_4 a_3 a_2 b}) - 4R_{a_6 a_2 a_3}{}^b (R_{a_5 a_1 a_4 b} + R_{a_5 a_4 a_1 b}) \\
& - 4R_{a_6 a_2 a_4}{}^b (R_{a_5 a_1 a_3 b} + R_{a_5 a_3 a_1 b}) - 4R_{a_6 a_2 a_5}{}^b (R_{a_4 a_1 a_3 b} + R_{a_4 a_3 a_1 b}) \\
& + R_{a_6 a_3 a_1}{}^b (5R_{a_5 a_4 a_2 b} - 4R_{a_5 a_2 a_4 b}) + R_{a_6 a_3 a_2}{}^b (5R_{a_5 a_4 a_1 b} - 4R_{a_5 a_1 a_4 b}) \\
& - 4R_{a_6 a_3 a_4}{}^b (R_{a_5 a_1 a_2 b} + R_{a_5 a_2 a_1 b}) - 4R_{a_6 a_3 a_5}{}^b (R_{a_4 a_1 a_2 b} + R_{a_4 a_2 a_1 b}) \\
& + R_{a_6 a_4 a_1}{}^b (5R_{a_5 a_3 a_2 b} - 4R_{a_5 a_2 a_3 b}) + R_{a_6 a_4 a_2}{}^b (5R_{a_5 a_3 a_1 b} - 4R_{a_5 a_1 a_3 b}) \\
& + 5R_{a_6 a_4 a_3}{}^b (R_{a_5 a_1 a_2 b} + R_{a_5 a_2 a_1 b}) - 4R_{a_6 a_4 a_5}{}^b (R_{a_3 a_1 a_2 b} + R_{a_3 a_2 a_1 b}) \\
& + R_{a_6 a_5 a_1}{}^b (5R_{a_4 a_3 a_2 b} - 4R_{a_4 a_2 a_3 b}) + R_{a_6 a_5 a_2}{}^b (5R_{a_4 a_3 a_1 b} - 4R_{a_4 a_1 a_3 b}) \\
& + 5R_{a_6 a_5 a_3}{}^b (R_{a_4 a_1 a_2 b} + R_{a_4 a_2 a_1 b}) + 5R_{a_6 a_5 a_4}{}^b (R_{a_3 a_1 a_2 b} + R_{a_3 a_2 a_1 b}) \\
& - 9 \left( \nabla_{a_4} \nabla_{a_3} (R_{a_2 a_5 a_1 a_6} + R_{a_2 a_6 a_1 a_5}) + \nabla_{a_5} \nabla_{a_3} (R_{a_2 a_4 a_1 a_6} + R_{a_2 a_6 a_1 a_4}) \right. \\
& + \nabla_{a_5} \nabla_{a_4} (R_{a_2 a_3 a_1 a_6} + R_{a_2 a_6 a_1 a_3}) + \nabla_{a_6} \nabla_{a_3} (R_{a_2 a_4 a_1 a_5} + R_{a_2 a_5 a_1 a_4}) \\
& \left. + \nabla_{a_6} \nabla_{a_4} (R_{a_2 a_3 a_1 a_5} + R_{a_2 a_5 a_1 a_3}) + \nabla_{a_6} \nabla_{a_5} (R_{a_2 a_3 a_1 a_4} + R_{a_2 a_4 a_1 a_3}) \right) \Big].
\end{aligned} \tag{G.28}$$

## G.2. Expansión 3 + 1 de $[\sigma_{a_k \dots a_0}]$ .

En esta sección utilizaremos el formalismo 3+1 para desarrollar en términos de cantidades definidas sobre la hipersuperficie, todas las componentes de los límites de las derivadas de  $\sigma$ .

Para la primer derivada, tenemos (G.5),

$$[\sigma_{a_0}] = 0, \tag{G.29}$$

y de (F.60) podemos deducir

$$[D_a \sigma] = 0, \tag{G.30a}$$

$$[\dot{d} \sigma] = 0. \tag{G.30b}$$

Para la derivada de segundo orden, de (F.103), (G.30a), (G.30b), (G.10) y (F.21),

$$[\sigma_{a_1 a_0}] = h_{a_1 a_0} + n_{a_0} n_{a_1} (-1), \tag{G.31}$$

es decir,

$$[D_a D_b \sigma] = h_{ab}, \quad (\text{G.32a})$$

$$[D_a \dot{\sigma}] = [\dot{D}_a \sigma] = 0, \quad (\text{G.32b})$$

$$[\dot{\sigma}^2] = -1. \quad (\text{G.32c})$$

En general, el procedimiento que se sigue para calcular las componentes de proyección del límite de las derivadas de orden  $k > 2$  es el siguiente:

1. Se calcula la expansión  $3 + 1$  de las derivadas covariantes de  $\sigma_{a_{k-1} \dots a_0}$ .
2. Se evalúa el límite de dicha expansión y se reemplazan los límites de las expansiones que se han encontrado previamente para los límites de las derivadas de orden igual o menor a  $k - 1$ , es decir,  $[D_{a_{k-1}} \dots D_{a_0} \sigma]$ ,  $[D_{a_{k-1}} \dots D_{a_1} \dot{\sigma}]$ ,  $[D_{a_{k-1}} \dots D_{a_2} \dot{D}_{a_0} \sigma]$ ,  $\dots$ ,  $[\dot{\sigma}^{k-1}]$ .
3. Se identifica cada componente de proyección con la correspondiente componente de proyección de la expansión  $3 + 1$  completa del límite  $[\sigma_{a_k \dots a_0}]$  calculado en la sección anterior.
4. Se despejan los límites  $[D_{a_k} \dots D_{a_0} \sigma]$ ,  $[D_{a_k} \dots D_{a_1} \dot{\sigma}]$ ,  $\dots$ ,  $[\dot{\sigma}^k]$  de las ecuaciones para las componentes de proyección con índice  $0, 1, \dots, 2^k - 1$ , respectivamente.

Para  $k = 3$ , tenemos el límite  $[\sigma_{abc}] = 0$ , por lo que las proyecciones en este caso son

$$[D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] = 0, \quad (\text{G.33a})$$

$$[D_{a_2} D_{a_1} \dot{\sigma}] = -K_{a_2 a_1}, \quad (\text{G.33b})$$

$$[D_{a_2} \dot{D}_{a_0} \sigma] = 0, \quad (\text{G.33c})$$

$$[D_{a_2} \dot{\sigma}^2] = -u_{a_2}, \quad (\text{G.33d})$$

$$[\dot{D}_{a_1} D_{a_0} \sigma] = K_{a_1 a_0}, \quad (\text{G.33e})$$

$$[\dot{D}_{a_1} \dot{\sigma}] = 0, \quad (\text{G.33f})$$

$$[\dot{\sigma}^2 D_{a_0} \sigma] = u_{a_0}, \quad (\text{G.33g})$$

$$[\dot{\sigma}^3] = 0. \quad (\text{G.33h})$$

En  $k = 4$  tenemos un límite de coincidencia no trivial, combinación de tensores de Riemann índices intercambiados, dado por la ecuación (G.26). Utilizando todas las herramientas del formalismo  $3 + 1$  que introducimos en el apéndice F podemos continuar con el algoritmo<sup>2</sup>,

---

<sup>2</sup>El algoritmo fue programado en Mathematica junto a algunas reglas operativas del formalismo  $3 + 1$  para poder realizar estas expansiones.

obteniendo

$$[D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] = \frac{1}{3} \left( {}^{(3)}R_{a_3 a_1 a_0 a_2} + {}^{(3)}R_{a_3 a_0 a_1 a_2} + K_{a_3 a_0} K_{a_2 a_1} + K_{a_3 a_1} K_{a_2 a_0} + K_{a_3 a_2} K_{a_1 a_0} \right) \quad (\text{G.34a})$$

$$[D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} \dot{\sigma}] = -\frac{2}{3} (D_{a_1} K_{a_3 a_2} + D_{a_2} K_{a_3 a_1} + D_{a_3} K_{a_2 a_1}) \quad (\text{G.34b})$$

$$[D_{a_3} D_{a_2} \dot{\sigma} D_{a_0} \sigma] = \frac{1}{3} (3K_{a_3 a_2} u_{a_0} - 2D_{a_0} K_{a_3 a_2} + D_{a_2} K_{a_3 a_0} + D_{a_3} K_{a_2 a_0}) \quad (\text{G.34c})$$

$$[D_{a_3} D_{a_2} \dot{\sigma}^2] = \frac{1}{3} \left( 2K_{a_3}{}^b K_{b a_2} - 2u_{a_3} u_{a_2} - 2\dot{\sigma} K_{a_3 a_2} - 4D_{a_3} u_{a_2} \right) \quad (\text{G.34d})$$

$$[D_{a_3} \dot{\sigma} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] = \frac{1}{3} (3u_{a_3} K_{a_1 a_0} + D_{a_0} K_{a_3 a_1} + D_{a_1} K_{a_3 a_0} + D_{a_3} K_{a_1 a_0}) \quad (\text{G.34e})$$

$$[D_{a_3} \dot{\sigma} D_{a_1} \dot{\sigma}] = \frac{1}{3} \left( u_{a_3} u_{a_1} - K_{a_3}{}^b K_{b a_1} - 2\dot{\sigma} K_{a_3 a_1} - D_{a_3} u_{a_1} \right) \quad (\text{G.34f})$$

$$[D_{a_3} \dot{\sigma}^2 D_{a_0} \sigma] = \frac{1}{3} \left( 4u_{a_3} u_{a_0} - K_{a_3}{}^b K_{b a_0} + \dot{\sigma} K_{a_3 a_0} + 2D_{a_3} u_{a_0} \right) \quad (\text{G.34g})$$

$$[D_{a_3} \dot{\sigma}^3] = -\dot{\sigma} u_{a_3} \quad (\text{G.34h})$$

$$[\dot{\sigma} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] = \frac{1}{3} (D_{a_2} K_{a_1 a_0} + D_{a_1} K_{a_2 a_0} + D_{a_0} K_{a_2 a_1}) \quad (\text{G.34i})$$

$$[\dot{\sigma} D_{a_2} D_{a_1} \dot{\sigma}] = \frac{1}{3} \left( u_{a_2} u_{a_1} - 4K_{a_2}{}^b K_{b a_1} - 2\dot{\sigma} K_{a_2 a_1} - D_{a_1} u_{a_2} \right) \quad (\text{G.34j})$$

$$[\dot{\sigma} D_{a_2} \dot{\sigma} D_{a_0} \sigma] = \frac{1}{3} \left( u_{a_2} u_{a_0} - K_{a_2}{}^b K_{b a_0} + 2D_{a_2} u_{a_0} \right) \quad (\text{G.34k})$$

$$[\dot{\sigma} D_{a_2} \dot{\sigma}^2] = -K_{a_2}{}^b u_b - \dot{\sigma} u_{a_2} \quad (\text{G.34l})$$

$$[\dot{\sigma}^2 D_{a_1} D_{a_0} \sigma] = \frac{1}{3} \left( 2K_{a_1}{}^b K_{b a_0} - 2u_{a_1} u_{a_0} + 4\dot{\sigma} K_{a_1 a_0} + 2D_{a_1} u_{a_0} \right) \quad (\text{G.34m})$$

$$[\dot{\sigma}^2 D_{a_1} \dot{\sigma}] = -K_{a_1}{}^b u_b \quad (\text{G.34n})$$

$$[\dot{\sigma}^3 D_{a_0} \sigma] = 2\dot{\sigma} u_{a_0} \quad (\text{G.34ñ})$$

$$[\dot{\sigma}^4] = -u^b u_b. \quad (\text{G.34o})$$

El límite del orden  $k = 5$ , dado por (G.27), involucra una combinación de derivadas del tensor de Riemann entre sus  $2^5 = 32$  combinaciones de límites de derivadas. No es útil presentar aquí los límites obtenidos por lo que reproducimos únicamente los límites que

serán utilizados posteriormente:

$$[D_{a_4}D_{a_3}D_{a_2}D_{a_1}D_{a_0}\sigma] = \frac{1}{2} \left( D_{a_4} {}^{(3)}R_{a_1a_2a_3a_0} + D_{a_3} {}^{(3)}R_{a_1a_4a_2a_0} + D_{a_2} {}^{(3)}R_{a_1a_3a_4a_0} \right) + 5K_{(a_4a_3}D_{a_2}K_{a_1a_0)}, \quad (\text{G.35})$$

$$\begin{aligned} [D_{a_4}D_{a_3}D_{a_2}D_{a_1}\dot{\sigma}] &= K_{(a_4a_3}\dot{d}K_{a_2a_1)} - 3D_{(a_4}D_{a_3}K_{a_2a_1)} - K_{(a_4a_3}D_{a_2}u_{a_1)} \\ &\quad - 2K_{b(a_4}K^b{}_{a_3}K_{a_2a_1)} + K_{(a_4a_3}u_{a_2}u_{a_1)} \\ &\quad + \frac{1}{6} \left( -K_{a_4}{}^b [2 {}^{(3)}R_{a_3ba_2a_1} + {}^{(3)}R_{a_3a_2a_1b}] \right. \\ &\quad + K_{a_3}{}^b [5 {}^{(3)}R_{a_4ba_2a_1} + 4 {}^{(3)}R_{a_4a_2a_1b}] \\ &\quad + K_{a_2}{}^b [{}^{(3)}R_{a_4ba_3a_1} - 4 {}^{(3)}R_{a_4a_3a_1b}] \\ &\quad \left. - 2K_{a_1}{}^b [{}^{(3)}R_{a_4ba_3a_2} + 2 {}^{(3)}R_{a_4a_3a_2b}] \right), \quad (\text{G.36}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D_{a_4}D_{a_3}D_{a_2}\dot{\sigma}^2] &= -\frac{3}{2}D_{(a_4}\dot{d}K_{a_3a_2)} - 3u_{(a_4}D_{a_3}u_{a_2)} - \frac{3}{2}D_{a_4}D_{a_3}u_{a_2} \\ &\quad + \frac{1}{6} \left( {}^{(3)}R_{a_3a_2a_4}{}^b + 2 {}^{(3)}R_{a_4a_3a_2}{}^b \right) u_b + K_{b(a_4}D^bK_{a_3a_2)} \\ &\quad + 2K_{(a_4}{}^bD_{a_3}K_{a_2)b} - K_{(a_4a_3}K_{a_2)}{}^b u_b. \quad (\text{G.37}) \end{aligned}$$

El límite de coincidencia para la derivada covariante de  $\sigma$  de orden 6 está dado por

(G.28). En este caso tenemos que el límite de la derivada totalmente tangente es

$$\begin{aligned}
[D_{a_5} D_{a_4} D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] &= \frac{1}{15} \left( 11K_{a_2 a_3} K_{a_4 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_1} - K_{a_3 a_4} K_{a_1 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_2} - K_{a_1 a_4} K_{a_3 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_2} \right. \\
&\quad - K_{a_1 a_3} K_{a_4 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_2} - K_{a_3 a_4} K_{a_0 a_5} \dot{d} K_{a_1 a_2} - K_{a_0 a_4} K_{a_3 a_5} \dot{d} K_{a_1 a_2} \\
&\quad - K_{a_0 a_3} K_{a_4 a_5} \dot{d} K_{a_1 a_2} - K_{a_1 a_2} K_{a_4 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_3} - K_{a_0 a_2} K_{a_4 a_5} \dot{d} K_{a_1 a_3} \\
&\quad - K_{a_1 a_4} K_{a_0 a_5} \dot{d} K_{a_2 a_3} - K_{a_0 a_4} K_{a_1 a_5} \dot{d} K_{a_2 a_3} - K_{a_0 a_1} K_{a_4 a_5} \dot{d} K_{a_2 a_3} \\
&\quad - 7K_{a_2 a_3} K_{a_1 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_4} - 7K_{a_1 a_2} K_{a_3 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_4} - 7K_{a_2 a_3} K_{a_0 a_5} \dot{d} K_{a_1 a_4} \\
&\quad - 7K_{a_0 a_2} K_{a_3 a_5} \dot{d} K_{a_1 a_4} - K_{a_1 a_3} K_{a_0 a_5} \dot{d} K_{a_2 a_4} - K_{a_0 a_3} K_{a_1 a_5} \dot{d} K_{a_2 a_4} \\
&\quad - K_{a_0 a_1} K_{a_3 a_5} \dot{d} K_{a_2 a_4} - K_{a_1 a_2} K_{a_0 a_5} \dot{d} K_{a_3 a_4} - K_{a_0 a_2} K_{a_1 a_5} \dot{d} K_{a_3 a_4} \\
&\quad - 7K_{a_2 a_3} K_{a_1 a_4} \dot{d} K_{a_0 a_5} - 7K_{a_1 a_2} K_{a_3 a_4} \dot{d} K_{a_0 a_5} - 7K_{a_2 a_3} K_{a_0 a_4} \dot{d} K_{a_1 a_5} \\
&\quad - 7K_{a_0 a_2} K_{a_3 a_4} \dot{d} K_{a_1 a_5} - K_{a_1 a_3} K_{a_0 a_4} \dot{d} K_{a_2 a_5} - K_{a_0 a_3} K_{a_1 a_4} \dot{d} K_{a_2 a_5} \\
&\quad - K_{a_0 a_1} K_{a_3 a_4} \dot{d} K_{a_2 a_5} - K_{a_1 a_2} K_{a_0 a_4} \dot{d} K_{a_3 a_5} - K_{a_0 a_2} K_{a_1 a_4} \dot{d} K_{a_3 a_5} \\
&\quad + 11K_{a_1 a_2} K_{a_0 a_3} \dot{d} K_{a_4 a_5} + 11K_{a_0 a_2} K_{a_1 a_3} \dot{d} K_{a_4 a_5} \\
&\quad + K_{a_2 a_5} [11K_{a_3 a_4} \dot{d} K_{a_0 a_1} - K_{a_1 a_4} \dot{d} K_{a_0 a_3} - K_{a_0 a_4} \dot{d} K_{a_1 a_3} \\
&\quad \quad - 7K_{a_1 a_3} \dot{d} K_{a_0 a_4} - 7K_{a_0 a_3} \dot{d} K_{a_1 a_4} - K_{a_0 a_1} \dot{d} K_{a_3 a_4}] \\
&\quad + K_{a_2 a_4} [11K_{a_3 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_1} - K_{a_1 a_5} \dot{d} K_{a_0 a_3} - K_{a_0 a_5} \dot{d} K_{a_1 a_3} \\
&\quad \quad - 7K_{a_1 a_3} \dot{d} K_{a_0 a_5} - 7K_{a_0 a_3} \dot{d} K_{a_1 a_5} - K_{a_0 a_1} \dot{d} K_{a_3 a_5}] \\
&\quad \left. + 11K_{a_0 a_1} K_{a_2 a_3} \dot{d} K_{a_4 a_5} \right) + {}^0 F_{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} \tag{G.38}
\end{aligned}$$

donde  ${}^0 F_{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$  es un tensor tangente que no involucra derivadas normales de la curvatura extrínseca.

Al menos dos proyecciones más serán de interés:

$$\begin{aligned}
[D_{a_5} D_{a_4} D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} \dot{d} \sigma] &= \frac{1}{5} (\dot{d} K_{a_5 a_1}) D_{a_2} K_{a_4 a_3} - \frac{16}{45} (\dot{d} K_{a_4 a_1}) D_{a_2} K_{a_5 a_3} + (\dot{d} K_{a_4 a_2}) D_{a_3} K_{a_5 a_1} \\
&\quad + \frac{19}{15} (\dot{d} K_{a_5 a_4}) D_{a_3} K_{a_2 a_1} - \frac{2}{5} (\dot{d} K_{a_5 a_2}) D_{a_3} K_{a_4 a_1} - \frac{2}{9} (\dot{d} K_{a_5 a_1}) D_{a_3} K_{a_4 a_2} \\
&\quad + \frac{4}{9} (\dot{d} K_{a_4 a_1}) D_{a_3} K_{a_5 a_2} - \frac{41}{45} (\dot{d} K_{a_2 a_1}) D_{a_3} K_{a_5 a_4} + \frac{2}{3} (\dot{d} K_{a_5 a_3}) D_{a_4} K_{a_2 a_1} \\
&\quad + \frac{2}{3} (\dot{d} K_{a_5 a_2}) D_{a_4} K_{a_3 a_1} - \frac{14}{45} (\dot{d} K_{a_5 a_1}) D_{a_4} K_{a_3 a_2} + \frac{4}{45} (\dot{d} K_{a_3 a_1}) D_{a_4} K_{a_5 a_2} \\
&\quad + \frac{22}{45} (\dot{d} K_{a_2 a_1}) D_{a_4} K_{a_5 a_3} + \frac{2}{3} (\dot{d} K_{a_4 a_3}) D_{a_5} K_{a_2 a_1} + \frac{5}{3} (\dot{d} K_{a_4 a_2}) D_{a_5} K_{a_3 a_1} \\
&\quad + \frac{46}{15} (\dot{d} K_{a_3 a_2}) D_{a_5} K_{a_4 a_1} - \frac{28}{45} (\dot{d} K_{a_4 a_1}) D_{a_5} K_{a_3 a_2} - \frac{20}{9} (\dot{d} K_{a_3 a_1}) D_{a_5} K_{a_4 a_2} \\
&\quad - \frac{113}{45} (\dot{d} K_{a_2 a_1}) D_{a_5} K_{a_4 a_3} + {}^1 F_{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} \tag{G.39}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
[D_{a_5}D_{a_4}D_{a_3}D_{a_2}\vec{d}^2\sigma] = & \frac{29}{10}K_{a_5a_4}\vec{d}^2K_{a_3a_2} + \frac{5}{2}K_{a_5a_3}\vec{d}^2K_{a_4a_2} + \frac{1}{10}K_{a_4a_3}\vec{d}^2K_{a_5a_2} \\
& + \frac{1}{2}K_{a_5a_2}\vec{d}^2K_{a_4a_3} + \frac{1}{2}K_{a_4a_2}\vec{d}^2K_{a_5a_3} + \frac{11}{10}K_{a_3a_2}\vec{d}^2K_{a_5a_4} \\
& + \frac{8}{45}{}^{(3)}R_{a_4a_3a_5}{}^b\vec{d}K_{ba_2} + \frac{52}{45}{}^{(3)}R_{a_5a_4a_3}{}^b\vec{d}K_{ba_2} - \frac{1}{5}{}^{(3)}R_{a_3a_2a_5}{}^b\vec{d}K_{ba_4} \\
& + \frac{3}{5}{}^{(3)}R_{a_5a_3a_2}{}^b\vec{d}K_{ba_4} + K_{a_4}{}^bK_{ba_3}\vec{d}K_{a_5a_2} + K_{a_5}{}^bK_{ba_2}\vec{d}K_{a_4a_3} \\
& + K_{a_4}{}^bK_{ba_2}\vec{d}K_{a_5a_3} + 3K_{a_5}{}^bK_{ba_3}\vec{d}K_{a_4a_2} - \frac{509}{90}K_{a_5}{}^bK_{a_4a_3}\vec{d}K_{ba_2} \\
& - \frac{167}{99}K_{a_4}{}^bK_{a_5a_3}\vec{d}K_{ba_2} - \frac{329}{90}K_{a_3}{}^bK_{a_5a_4}\vec{d}K_{ba_2} - \frac{39}{10}K_{a_5}{}^bK_{a_4a_2}\vec{d}K_{ba_3} \\
& - \frac{5}{6}K_{a_4}{}^bK_{a_4a_2}\vec{d}K_{ba_3} - \frac{97}{30}K_{a_5}{}^bK_{a_5a_4}\vec{d}K_{ba_3} - \frac{37}{10}K_{a_5}{}^bK_{a_3a_2}\vec{d}K_{ba_4} \\
& - \frac{49}{30}K_{a_3}{}^bK_{a_5a_2}\vec{d}K_{ba_4} - \frac{91}{30}K_{a_2}{}^bK_{a_5a_3}\vec{d}K_{ba_4} - \frac{21}{10}K_{a_4}{}^bK_{a_3a_2}\vec{d}K_{ba_5} \\
& - \frac{31}{30}K_{a_3}{}^bK_{a_4a_2}\vec{d}K_{ba_5} - \frac{13}{30}K_{a_2}{}^bK_{a_4a_3}\vec{d}K_{ba_5} + \frac{29}{5}K_{a_5}{}^bK_{ba_4}\vec{d}K_{a_3a_2} \\
& - \frac{1}{3}K_{a_4}{}^bK_{ba_5}\vec{d}K_{a_3a_2} + \frac{5}{3}K_{a_5}{}^bK_{ba_3}\vec{d}K_{a_4a_2} - \frac{17}{15}K_{a_4}{}^bK_{ba_3}\vec{d}K_{a_5a_2} \\
& - \frac{1}{3}K_{a_5}{}^bK_{ba_2}\vec{d}K_{a_4a_3} - \frac{1}{3}K_{a_4}{}^bK_{ba_2}\vec{d}K_{a_5a_3} + \frac{11}{5}K_{a_3}{}^bK_{ba_2}\vec{d}K_{a_5a_4} \\
& - \frac{1}{3}K_{a_3}{}^bK_{ba_2}\vec{d}K_{a_5a_4} + {}^3F_{a_5a_4a_3a_2} \tag{G.40}
\end{aligned}$$

donde  ${}^1F_{a_5a_4a_3a_2a_1}$  y  ${}^3F_{a_5a_4a_3a_2}$  son tensores tangentes que no involucran derivadas normales de la curvatura extrínseca. Nótese que tanto el límite de la derivada tangente de sexto orden de  $\sigma$  como la derivada tangente de quinto orden de  $\vec{d}\sigma$  involucran derivadas normales de la curvatura extrínseca  $K_{ab}$  de primer orden, es decir, de segundo orden en derivadas de Lie sobre la dirección normal de la métrica inducida  $h_{ab}$ . Sin embargo, el límite de las derivadas tangentes de orden cuatro de  $\vec{d}^2\sigma$  incluye derivadas normales de segundo orden de  $K_{ab}$ , es decir, un tercer orden en derivadas de Lie de la métrica inducida  $h_{ab}$  en la dirección normal.

### G.3. Aproximación de hipersuperficie para $\sigma$

Sea  $\mathcal{Q}_y \subset \Sigma \cap \mathcal{D}_y$  una vecindad normal convexa *espacial* de  $y \in \Sigma$ , es decir, una región tal que para cada  $x \in \mathcal{Q}_y$  existe sólo una geodésica contenida en la *hipersuperficie*  $\mathcal{Q}_y$  yendo de  $y$  a  $x$ . Denotamos por  $\mathfrak{q}(x,y)$  a la semidistancia geodésica cuadrática sobre la hipersuperficie que va de  $y$  a  $x$  en  $\mathcal{Q}_y$ . Este biescalar sólo está definido para pares de puntos contenidos dentro de  $\mathcal{Q}_x$ .

El biescalar  $\sigma(x,y)$  restringido a puntos  $x,y \in \mathcal{Q}_y$  puede expandirse en serie de Taylor

$\mathcal{S}(x, y)$  sobre  $\mathcal{Q}_y$ , es decir, una expansión de la forma

$$\sigma(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A \begin{matrix} k \\ b_{k-1} \cdots b_0 \end{matrix} (x) \mathfrak{q}_{b_{k-1}}(x, y) \cdots \mathfrak{q}_{b_0}(x, y) + \mathcal{O}(\underline{s}^{n+1}), \quad (\text{G.41})$$

donde

$$\mathfrak{q}_a(x, y) \equiv \overset{x}{D}_a \mathfrak{q}(x, y), \quad (\text{G.42})$$

y  $A \begin{matrix} k \\ b_{k-1} \cdots b_0 \end{matrix} (x)$  son  $k$ -tensores tangentes en  $x$ , completamente simétricos a los que denominamos coeficientes de Taylor de orden  $k$ . En (G.41),  $\underline{s}$  representa la distancia geodésica sobre la hipersuperficie, de tal modo que

$$\mathfrak{q}(x, y) = \frac{1}{2} \underline{s}^2(x, y). \quad (\text{G.43})$$

En lo que sigue omitimos la dependencia explícita en los puntos  $x, y$ . La expansión (G.41) tiene propiedades análogas a las de una expansión en serie covariante de Taylor, gracias al hecho de que  $\mathfrak{q}$  satisface una ecuación diferencial en  $\mathcal{Q}_x$  que es análoga a (G.6),

$$h^{ab} \mathfrak{q}_a \mathfrak{q}_b = 2\mathfrak{q}, \quad (\text{G.44})$$

y por lo tanto hereda los límites de coincidencia  $y \rightarrow x$  análogos a aquellos de  $\sigma$ ,

$$[\mathfrak{q}] = 0, \quad (\text{G.45a})$$

$$[\mathfrak{q}_{a_0}] = 0, \quad (\text{G.45b})$$

$$[\mathfrak{q}_{a_1 a_0}] = h_{a_1 a_0}, \quad (\text{G.45c})$$

$$[\mathfrak{q}_{a_2 a_1 a_0}] = 0, \quad (\text{G.45d})$$

$$[\mathfrak{q}_{a_3 a_2 a_1 a_0}] = \frac{1}{3} \left( {}^{(3)}R_{a_3 a_1 a_0 a_2} + {}^{(3)}R_{a_2 a_1 a_0 a_3} \right), \quad (\text{G.45e})$$

y así sucesivamente. Esto implica que los coeficientes de Taylor de mayor orden que aparecen en el límite de coincidencia de la serie, derivada tangencialmente  $k$  veces en  $x$  incluye los coeficientes de Taylor de hasta el orden  $k$ , es decir,  $A \begin{matrix} k \\ b_{k-1} \cdots b_0 \end{matrix} (x)$ .

Esto nos permite calcular los coeficientes de Taylor siguiendo un procedimiento análogo al que se sigue para calcular los coeficientes de una serie covariante de Taylor tal como en [83]. En este caso, calcularemos sucesivamente las derivadas tangentes de la expansión (G.41) en  $x, y$  en cada orden tomaremos el límite de coincidencia  $y \rightarrow x$  y sustituiremos los límites para las correspondientes derivadas de  $\sigma$  y sus proyecciones, los límites de  $\mathfrak{q}$  (G.45) y los límites que por este mismo método vayamos encontrando para los términos  $[D_{a_k} \cdots D_{a_0} \sigma]$ .

Nótese que los únicos términos que quedan al tomar límites de coincidencia son aquellos que multiplican límites de las derivadas de  $\mathfrak{q}$  que no se anulan en dicho límite, es decir, se descartan aquellos términos multiplicados por  $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_a$  y  $\mathfrak{q}_{a_2 a_1 a_0}$ .

De acuerdo con el algoritmo, el primer paso es calcular directamente el límite de coincidencia de (G.41), en el que el límite  $[\mathfrak{q}_{b_k}] = 0$  cancela todos los términos de la serie excepto a  $\overset{0}{A}$ , obteniendo

$$\overset{0}{A} = [\sigma], \quad (\text{G.46})$$

que resulta en

$$\overset{0}{A} = 0. \quad (\text{G.47})$$

A continuación, tomamos una derivada tangente en  $x$  sobre (G.41) y calculamos el límite de coincidencia para obtener

$$[D_a \sigma] = \overset{0}{A} + D_a \overset{1}{A} \underbrace{[\mathfrak{q}_b]}_0 + \overset{1}{A} \underbrace{[\mathfrak{q}_{ab}]}_{h_{ab}} + \underbrace{[\mathfrak{q}_b]}_0 (\dots), \quad (\text{G.48})$$

de donde se tiene

$$\overset{1}{A}_a = 0. \quad (\text{G.49})$$

La segunda derivada de (G.41) es

$$\begin{aligned} D_{a_1} D_{a_0} \sigma = \frac{1}{2} & \left( D_{a_1} D_{a_0} \overset{2}{A} \overset{b_1 b_0}{\mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{b_0}} \right. \\ & + D_{a_0} \overset{2}{A} \overset{b_1 b_0}{(\mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{a_1 b_0} + \mathfrak{q}_{a_1 b_1} \mathfrak{q}_{b_0})} + D_{a_1} \overset{2}{A} \overset{b_1 b_0}{(\mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{a_0 b_0} + \mathfrak{q}_{a_0 b_1} \mathfrak{q}_{b_0})} \\ & \left. + \overset{2}{A} \overset{b_1 b_0}{(\mathfrak{q}_{a_1 a_0 b_1} \mathfrak{q}_{b_0} + \mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{a_1 a_0 b_0} + \mathfrak{q}_{a_1 b_1} \mathfrak{q}_{a_0 b_0} + \mathfrak{q}_{a_0 b_1} \mathfrak{q}_{a_1 b_0})} \right) + \mathcal{O}(\underline{\varepsilon}). \quad (\text{G.50}) \end{aligned}$$

En el límite de coincidencia esto implica que

$$\overset{2}{A}_{a_1 a_0} = h_{a_1 a_0}, \quad (\text{G.51})$$

donde hemos aprovechado la propiedad de simetría de  $\overset{2}{A}_{a_1 a_0}$ . Haciendo uso de la ecuación (G.44), notemos que el primer término en la serie (G.41) es justamente  $\mathfrak{q}$ .

Al aplicar por tercera ocasión una derivada tangente en (G.41) y calcular el límite obtenemos

$$\overset{3}{A}_{a_2 a_1 a_0} = [D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] - [\mathfrak{q}_{a_2 a_1 a_0}], \quad (\text{G.52})$$

es decir,

$$\overset{3}{A}_{dcb} = 0. \quad (\text{G.53})$$

Hasta este punto, tenemos que la expansión para  $\sigma$  es explícitamente

$$\begin{aligned} \sigma = \mathfrak{q} + \frac{1}{4!} A^{b_3 b_2 b_1 b_0} \mathfrak{q}_{b_3} \mathfrak{q}_{b_2} \mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{b_0} + \frac{1}{5!} A^{b_4 b_3 b_2 b_1 b_0} \mathfrak{q}_{b_4} \mathfrak{q}_{b_3} \mathfrak{q}_{b_2} \mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{b_0} \\ + \frac{1}{6!} A^{b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0} \mathfrak{q}_{b_5} \mathfrak{q}_{b_4} \mathfrak{q}_{b_3} \mathfrak{q}_{b_2} \mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{b_0} + \mathcal{O}(\underline{s}^7), \end{aligned} \quad (\text{G.54})$$

Luego, al despejar el coeficiente de cuarto orden a partir del límite de coincidencia de la cuarta derivada tangente de (G.41) tenemos

$$A_{a_3 a_2 a_1 a_0}^4 = [D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] - [\mathfrak{q}_{a_3 a_2 a_1 a_0}], \quad (\text{G.55})$$

en donde sustituyendo, (G.45e) y (G.34a) se obtiene

$$A_{a_3 a_2 a_1 a_0}^4 = \frac{1}{3} (K_{a_3 a_0} K_{a_2 a_1} + K_{a_3 a_1} K_{a_2 a_0} + K_{a_3 a_2} K_{a_1 a_0}) = K_{(a_3 a_2} K_{a_1 a_0)}. \quad (\text{G.56})$$

Sustituyendo en (G.54) se tiene

$$\sigma = \mathfrak{q} + \frac{1}{4!} K^{(b_3 b_2} K^{b_1 b_0)} \mathfrak{q}_{b_3} \mathfrak{q}_{b_2} \mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{b_0} + \frac{1}{5!} A^{b_4 b_3 b_2 b_1 b_0} \mathfrak{q}_{b_4} \mathfrak{q}_{b_3} \mathfrak{q}_{b_2} \mathfrak{q}_{b_1} \mathfrak{q}_{b_0} + \mathcal{O}(\underline{s}^6). \quad (\text{G.57})$$

Derivando 5 veces (G.57) y tomando el límite de coincidencia junto a las expresiones (G.35) y el análogo para  $\mathfrak{q}$  de (G.27), se obtiene

$$A_{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}^5 = [D_{a_4} D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] - [\mathfrak{q}_{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}] - 5D_{(a_4} A_{a_3 a_2 a_1 a_0)}^4, \quad (\text{G.58})$$

es decir,

$$A_{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}^5 = -5K_{(a_4 a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0)}. \quad (\text{G.59})$$

Para el sexto orden, tenemos

$$\begin{aligned} S_{(a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)}^6 = [D_{a_5} D_{a_4} D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \sigma] - [\mathfrak{q}_{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}] \\ - 15D_{(a_5} D_{a_4} A_{a_3 a_2 a_1 a_0)}^4 - 6D_{(a_5} A_{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)}^5, \end{aligned} \quad (\text{G.60})$$

Sustituyendo (G.56), (G.59), la versión de (G.28) para  $\mathfrak{q}$  y el límite (G.38), se obtiene

$$\begin{aligned} A_{(a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)}^6 = -3K_{(a_5 a_4} K_{a_3 a_2} \bar{d} K_{a_1 a_0)} + 9K_{(a_5 a_4} D_{a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0)} \\ + 8(D_{(a_5} K_{a_4 a_3})(D_{a_2} K_{a_1 a_0)}) + 3K_{(a_5 a_4} K_{a_3 a_2} D_{a_1} u_{a_0)} \\ + 4K_{(a_5 a_4} K_{a_3 a_2} K_{a_1}{}^b K_{b a_0)} - 3K_{(a_5 a_4} K_{a_3 a_2} u_{a_1} u_{a_0)} \end{aligned} \quad (\text{G.61})$$

#### G.4. Expansiones de hipersuperficie para las derivadas normales de $\sigma$

Como un campo definido en una región normal convexa del espaciotiempo  $\mathcal{D}_y$ , tiene todo el sentido calcular objetos como  $\nabla_a \sigma$ , en donde se incluye la derivada normal de  $\sigma$ , es decir,

$$\nabla_a \sigma = D_a \sigma + n_a \dot{\sigma}. \quad (\text{G.62})$$

Sin embargo, aún si contamos con la expansión de hipersuperficie de  $\sigma$  sobre cualquier hipersuperficie con registro en la vecindad  $\mathcal{D}_y$ , no podemos calcular ninguna derivada normal de la expansión de  $\sigma$  porque  $\mathfrak{q}$  no está definida para puntos que se encuentran sobre hipersuperficies diferentes, imposibilitando realizar el límite del proceso de derivación. Por lo tanto, las derivadas normales como  $\dot{\sigma}$  requieren ser expandidas como series de Taylor completamente independientes. Sólo entonces podemos calcular un objeto como  $\nabla_a \sigma$  a partir de expansiones de Taylor sobre la hipersuperficie para  $\sigma$  y  $\dot{\sigma}$ .

Por lo tanto, se plantea una expansión para  $\dot{\sigma}$  de la forma

$$\dot{\sigma} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \mathbb{A}^{b_{k-1} \cdots b_0} \mathfrak{q}_{b_{k-1}} \cdots \mathfrak{q}_{b_0} + \mathcal{O}(\underline{s}^{n+1}). \quad (\text{G.63})$$

Siguiendo un procedimiento completamente análogo al que se siguió para  $\sigma$ , se obtiene

$$\mathbb{A}^0 = 0, \quad (\text{G.64})$$

debido a (G.30b). Similarmente, de (G.32b) se tiene

$$\mathbb{A}_a^1 = 0. \quad (\text{G.65})$$

Luego, el primer coeficiente no nulo es

$$\mathbb{A}_{a_1 a_0}^2 = -K_{a_1 a_0}, \quad (\text{G.66})$$

debido a (G.33b). Para el tercer coeficiente, tomando el límite de la tercer derivada de (G.63) y sustituyendo (G.34b) se tiene

$$\mathbb{A}_{a_2 a_1 a_0}^3 = D_{(a_2} K_{a_1 a_0)}. \quad (\text{G.67})$$

El límite de coincidencia de la cuarta derivada de (G.63) es

$$\mathbb{A}_{a_3 a_2 a_1 a_0}^4 = [D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \dot{\sigma}] - 6D_{(a_3} D_{a_2} \mathbb{A}_{a_1 a_0)}^2 - 4D_{(a_3} \mathbb{A}_{a_2 a_1 a_0)}^3, \quad (\text{G.68})$$

Tomando en cuenta (G.39) así como (G.66) y (G.67) en (G.68), tenemos

$$\begin{aligned} \overset{4}{\mathbf{A}}_{a_3 a_2 a_1 a_0} = & K_{(a_3 a_2} \overset{\cdot}{d} K_{a_1 a_0)} - 3D_{(a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0)} - K_{(a_3 a_2} D_{a_1} u_{a_0)} \\ & - 2K_{b(a_3} K^b{}_{a_2} K_{a_1 a_0)} + K_{(a_3 a_2} u_{a_1} u_{a_0)}. \end{aligned} \quad (\text{G.69})$$

En el orden 5 se tiene para el límite de coincidencia de la quinta derivada de (G.63) ,

$$\begin{aligned} \overset{5}{\mathbf{A}}_{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = & [D_{a_4} D_{a_3} D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \overset{\cdot}{d} \Sigma] - 10D_{(a_4} D_{a_3} D_{a_2} \overset{2}{\mathbf{A}}_{a_1 a_0)} - 10D_{(a_4} D_{a_3} \overset{3}{\mathbf{A}}_{a_2 a_1 a_0)} \\ & - 5D_{(a_4} \overset{4}{\mathbf{A}}_{a_3 a_2 a_1 a_0)}, \end{aligned} \quad (\text{G.70})$$

y sustituyendo (G.66), (G.67) y (G.69),

$$\begin{aligned} \overset{5}{\mathbf{A}}_{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = & -2K_{(a_4 a_3} D_{a_2} \overset{\cdot}{d} K_{a_1 a_0)} - \frac{7}{3} \overset{\cdot}{d} K_{(a_4 a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0)} + D_{(a_4} D_{a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0)} \\ & + 2K_{(a_4 a_3} D_{a_2} D_{a_1} u_{a_0)} + \frac{16}{3} K_{(a_4} {}^b K_{|b|a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0)} - \frac{5}{3} K_{(a_4 a_3} K_{a_2} {}^b D_{|b|} K_{a_1 a_0)} \\ & + \frac{26}{3} K_{(a_4 a_3} K_{a_2} {}^b D_{a_1} K_{a_0)b} + \frac{7}{3} (D_{(a_4} u_{a_3})(D_{a_2} K_{a_1 a_0)}) - \frac{7}{3} u_{(a_4} u_{a_3} D_{a_2} K_{a_1 a_0)} \\ & - 4K_{(a_4 a_3} u_{a_2} D_{a_1} u_{a_0)}. \end{aligned} \quad (\text{G.71})$$

Nótese que por construcción, es posible calcular hasta cinco derivadas tangentes de la expansión (G.63) de tal modo que sus límites de coincidencia coinciden exactamente con los de  $\overset{\cdot}{d}\sigma$ . Esto implica que una vez que las expansiones (G.41) y (G.63) se sustituyen en (G.62), la aproximación para  $\sigma_a$  coincide en el límite de coincidencia de derivadas tangentes hasta de orden 5.

Para calcular la segunda derivada covariante de  $\sigma$ , tenemos de (F.103),

$$\begin{aligned} \sigma_{a_1 a_0} = & (K_{a_1 a_0} \overset{\cdot}{d} \sigma + D_{a_1} D_{a_0} \sigma) + n_{a_0} \left( D_{a_1} \overset{\cdot}{d} \sigma + K_{a_1} {}^b D_b \sigma \right) \\ & + n_{a_1} (u_{a_0} \overset{\cdot}{d} \sigma + \overset{\cdot}{d} D_{a_0} \sigma) + n_{a_0} n_{a_1} \left( \overset{\cdot}{d}{}^2 \sigma + u^b D_b \sigma \right). \end{aligned} \quad (\text{G.72})$$

De (F.111) tenemos

$$\overset{\cdot}{d} D_a \sigma = D_a \overset{\cdot}{d} \sigma + K_a {}^b D_b \sigma - u_a \overset{\cdot}{d} \sigma, \quad (\text{G.73})$$

de donde vemos que el único término que no podemos calcular a partir de las expansiones de Taylor sobre la hipersuperficie es  $\overset{\cdot}{d}{}^2 \sigma$ , para el cual necesitamos una nueva serie,

$$\overset{\cdot}{d}{}^2 \sigma = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \overset{k}{\mathbf{B}}^{b_{k-1} \dots b_0} \mathfrak{q}_{b_{k-1}} \dots \mathfrak{q}_{b_0} + \mathcal{O}(\underline{\xi}^{n+1}). \quad (\text{G.74})$$

En esta ocasión, el primer término es

$$\overset{0}{\mathbf{B}} = -1, \quad (\text{G.75})$$

debido a (G.32c). El siguiente coeficiente involucra el límite (G.33d), quedando

$$\overset{1}{\mathbb{B}}_a = -u_a. \quad (\text{G.76})$$

El coeficiente de Taylor de segundo orden se calcula con ayuda de (G.34d),

$$\overset{2}{\mathbb{B}}_{a_1 a_0} = \frac{2}{3} \left( -\overset{\cdot}{d} K_{a_1 a_0} + K_{a_1}{}^b K_{b a_0} - u_{a_1} u_{a_0} + D_{a_1} u_{a_0} \right). \quad (\text{G.77})$$

Tomando el límite de coincidencia de la siguiente derivada, obtenemos

$$\overset{3}{\mathbb{B}}_{a_2 a_1 a_0} = [D_{a_2} D_{a_1} D_{a_0} \overset{\cdot}{d}{}^2 \Sigma] - 3D_{(a_2} D_{a_1} \overset{1}{\mathbb{B}}_{a_0)} - 3D_{(a_2} \overset{2}{\mathbb{B}}_{a_1 a_0)}, \quad (\text{G.78})$$

y sustituyendo (G.76), y (G.37),

$$\begin{aligned} \overset{3}{\mathbb{B}}_{a_2 a_1 a_0} &= \frac{1}{2} D_{(a_2} \overset{\cdot}{d} K_{a_1 a_0)} - \frac{1}{2} D_{(a_2} D_{a_1} u_{a_0)} + u_{(a_2} D_{a_1} u_{a_0)} + (D_b K_{(a_2 a_1)}) K^b{}_{a_0)} \\ &\quad - 2K^b{}_{(a_2} D_{a_1} K_{a_0) b} - K_{(a_2 a_1} K^b{}_{a_0)} u_b. \end{aligned} \quad (\text{G.79})$$

Al cuarto orden finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \overset{4}{\mathbb{B}}_{a_3 a_2 a_1 a_0} &= \frac{17}{5} K_{(a_3 a_2} \overset{\cdot}{d}{}^2 K_{a_1 a_0)} + \frac{12}{5} D_{(a_3} D_{a_2} \overset{\cdot}{d} K_{a_1 a_0)} - \frac{17}{5} K_{(a_3 a_2} D_{a_1} \overset{\cdot}{d} u_{a_0)} + \frac{24}{5} K_{b(a_3} K^b{}_{a_2} \overset{\cdot}{d} K_{a_1 a_0)} \\ &\quad - \frac{214}{15} K_{(a_3 a_2} K_{a_1}{}^b \overset{\cdot}{d} K_{a_0) b} + \frac{51}{5} K_{(a_3 a_2} u_{a_1} \overset{\cdot}{d} u_{a_0)} + 28 K_{(a_3}{}^{b_1} K_{a_2}{}^{b_2} R_{a_1|b_1|a_0)b_0}^{(3)} \\ &\quad - \frac{72}{5} K_{(a_3}{}^b D_{a_2} D_{a_1} K_{a_0) b} + \frac{48}{5} K_{b(a_3} D^b D_{a_2} K_{a_1 a_0)} - \frac{48}{5} (D_{(a_3} K_{a_2}{}^b) (D^{a_1} K_{a_0) b}) \\ &\quad + \frac{24}{5} (D_{(a_3} K_{a_2}{}^b) (D_{|b|} K_{a_1 a_0)}) + \frac{46}{5} K_{(a_3 a_2} u^b D_{|b|} K_{a_1 a_0)} - \frac{41}{5} K_{(a_3 a_2} u^b D_{a_1} K_{a_0) b} \\ &\quad + 2K_{b(a_3} u^b D_{a_2} K_{a_1 a_0)} - \frac{12}{5} D_{(a_3} D_{a_2} D_{a_1} u_{a_0)} + \frac{24}{5} u_{(a_3} D_{a_2} D_{a_1} u_{a_0)} \\ &\quad + \frac{24}{5} (D_{(a_3} u_{a_2}) (D_{a_1} u_{a_0)}) - \frac{24}{5} K_{b(a_3} K^b{}_{a_2} D_{a_1} u_{a_0)} + \frac{61}{15} K^b{}_{a_3} k_{a_2 a_1} D_{|b|} u_{a_0)} \\ &\quad - 4K^b{}_{(a_3} K_{a_2|b|} R^{(3)}{}_{a_1 a_0)} + \frac{24}{5} K^b{}_{(a_3} K_{a_2|b|} u_{a_1} u_{a_0)} - \frac{61}{15} K^b{}_{(a_3} K_{a_2 a_1} u_{a_0)} u_b \\ &\quad - \frac{17}{5} u^2 K_{(a_3 a_2} K_{a_1 a_0)} + \frac{28}{5} K^{b_1}{}_{b_0} K_{b_1(a_3} K^{b_0}{}_{a_2} K_{a_1 a_0)} - \frac{48}{5} K^{b_1}{}_{(a_3} K_{|b_1|a_2} K^{b_0}{}_{a_1} K_{|b_0|a_0)} \\ &\quad + \frac{20}{3} K K^b{}_{a_3} K_{a_2 a_1} K_{a_0) b} \end{aligned} \quad (\text{G.80})$$

donde la presencia de términos de la forma  $\overset{\cdot}{d}{}^2 K_{ab}$  implican la presencia de derivadas de tercer orden en derivadas de Lie de la métrica inducida en la dirección normal.

Con ayuda de (G.72) podemos reconstruir una aproximación para la derivada de segundo orden de  $\sigma$  en términos de las series (G.41), (G.63) y (G.74), tal que satisface la propiedad de que el límite de coincidencia de sus derivadas tangentes de hasta cuarto orden coinciden exactamente con aquellos de  $\sigma_{ab}$ .

Esto quiere decir que con estas aproximaciones, es posible calcular todas las derivadas de orden 6 para  $\sigma$  que son necesarias para estimar el tensor de energía momento, de acuerdo a lo determinado en el Teorema 2 de la sección 3.2.2.

## Apéndice H

# Discontinuidades y formalismo $3 + 1$ .

En este apéndice utilizamos el formalismo introducido en la sección 3.3 para calcular los saltos de objetos de interés para el análisis  $3 + 1$  sobre la hipersuperficie de colapso. De aquí en adelante las funciones y campos tensoriales hacen referencia a la construcción  $SSC_I$ , pudiendo recuperar los objetos  ${}^I A$  de la construcción  $SSC_{II}$  en términos de su correspondiente objeto  ${}^I A$  en  $SSC_I$  y su *diferencia*  $\{A\}$ .

Empezamos por señalar que recurrimos a una condición de *sincronización*: dado que tenemos la libertad para hacer una traslación por una constante al parámetro tiempo  $t$  de una foliación, entonces se puede imponer sin pérdida de generalidad que

$$[t] = \{t\}_{\Sigma_c} = 0. \quad (\text{H.1a})$$

Para una vecindad de  $\Sigma_c$  definimos  $\tau \equiv \{t\}$ , de modo que (H.1a) se escribe

$$\tau|_{\Sigma_c} = 0. \quad (\text{H.1b})$$

Fuera de  $\Sigma_c$ ,  $\tau$  es una función escalar que debe satisfacer (H.1b). Respecto a las derivadas de  $\tau$ , se sigue en primera instancia que

$$(D_a \tau)_{\Sigma_c} = 0. \quad (\text{H.2})$$

Consideremos ahora un campo tangente  $\zeta_a$  y un campo escalar  $\eta$  tales que

$$\{n_a\} \equiv \zeta_a + n_a \eta. \quad (\text{H.3})$$

Utilizando las propiedades de las diferencias, así como la relación

$$n_a = -N \nabla t, \quad (\text{H.4})$$

en conjunto con la proyección normal de (F.70),

$$N = -\frac{1}{\dot{d}t}, \quad (\text{H.5})$$



la identidad

$$\left\{ n_a - \frac{\nabla_a t}{\dot{d}t} \right\} = 0, \quad (\text{H.6})$$

se reescribe como

$$2(N((1 + \eta)\dot{d}\tau - \zeta^b D_b \tau) - \eta)\zeta_a + \frac{2N((1 + \eta)\dot{d}\tau - \zeta^b D_b \tau) - (1 + 2\eta)}{(1 + \eta)(N\dot{d}\tau - 1) - N\zeta^b D_b \tau} N D_a \tau + 2n_a(1 + \eta)(N((1 + \eta)\dot{d}\tau - \zeta^b D_b \tau) - \eta) = 0, \quad (\text{H.7})$$

de donde la parte normal implica de inmediato que

$$\eta = N \frac{\zeta^b D_b \tau - \dot{d}\tau}{N\dot{d}\tau - 1}, \quad (\text{H.8a})$$

o, en términos directamente de  $\dot{d}t$ ,

$$\eta = \frac{(\zeta^b D_b \tau)/\dot{d}t - \dot{d}\tau/\dot{d}t}{\dot{d}\tau/\dot{d}t + 1}. \quad (\text{H.8b})$$

Al sustituir (H.8a) de vuelta en la parte tangente de (H.7) se obtiene

$$D_a \tau = 0. \quad (\text{H.9})$$

Por lo tanto  $\eta$  está dada en términos de  $\dot{d}\tau$  y  $\dot{d}t$  (alternativamente en términos de  $N$ ) por

$$\eta = -\frac{\dot{d}\tau}{\dot{d}t + \dot{d}\tau} = \frac{N\dot{d}\tau}{1 - N\dot{d}\tau}. \quad (\text{H.10})$$

Veamos ahora lo que ocurre directamente con las condiciones de continuidad de la métrica y la métrica inducida. Tendremos,

$$\{h_{ab}\} = \{g_{ab}\} + \{n_a n_b\}, \quad (\text{H.11})$$

de donde definiendo  $\mathcal{S} \equiv \{h_{ab}\}$  y sustituyendo (H.3) tendremos que

$$\mathcal{S} = \gamma_{ab} + \zeta_a \zeta_b + n_b(\eta + 1)\zeta_a + n_a(\eta + 1)\zeta_b + \eta(\eta + 2)n_a n_b. \quad (\text{H.12})$$

De aquí que la condición de continuidad de la métrica (3.93) no implica automáticamente la continuidad del vector normal; es necesario incluir una condición adicional de continuidad, explícitamente

$$\mathcal{S}|_{\Sigma_c} = [h_{ab}] = 0. \quad (\text{H.13})$$

Esto equivale a imponer las condiciones

$$\zeta_a|_{\Sigma_c} = 0, \quad (\text{H.14a})$$

$$\eta|_{\Sigma_c} = 0. \quad (\text{H.14b})$$

Recíprocamente, si se hubiera considerado (H.13) en lugar de (3.93), en la ecuación (H.12) tendríamos la expansión 3 + 1 de  $\gamma_{ab}|_{\Sigma_c}$ .

Combinando (H.10) y (H.14b), tenemos que

$$(\vec{d}\tau)_{\Sigma_c} = 0. \quad (\text{H.15})$$

Para el vector dual  $u_a$ , tendremos de (F.72),

$$\{u_a\} = \left\{ \frac{D_a \vec{d}t}{\vec{d}t} \right\}, \quad (\text{H.16})$$

que desarrollando resulta en

$$\begin{aligned} \{u_a\} = & \frac{1}{(1+\eta)(\vec{d}t + \vec{d}\tau)\vec{d}t} \\ & \left( (1+2\eta)(\vec{d}t)^2 D_a \eta + (1+\eta)\vec{d}\tau(2\vec{d}\tau D_a \eta + (1+2\eta)D_a \vec{d}t + 2(1+\eta)D_a \vec{d}\tau) \right. \\ & \left. + \vec{d}t((3+4\eta)\vec{d}\tau D_a \eta + (1+\eta)(D_a \vec{d}\tau + 2\eta(D_a \vec{d}t + D_a \vec{d}\tau))) \right), \end{aligned} \quad (\text{H.17})$$

y al sustituir (H.10) esto se simplifica a

$$\{u_a\} = 0. \quad (\text{H.18})$$

Esto implica automáticamente la continuidad de  $u_a$ ,

$$[u_a] = 0. \quad (\text{H.19})$$

Este resultado simplifica el cálculo de  $\{K_{ab}\}$ . Partiendo de (F.67b), así como de (3.98), se tiene

$$\{K_{ab}\} + \{n_a\}u_b = \nabla_a \{n_b\} - C^c{}_{ab}(n_c + \{n_c\}), \quad (\text{H.20})$$

donde el primer término del lado derecho además debemos desarrollarlo usando (F.77), además de sustituir (H.3), obteniendo

$$\begin{aligned} \{K_{ab}\} + \zeta_a u_b + n_a \eta u_b = & D_a \zeta_b + K_{ab} \eta + n_b (D_a \eta + K_a{}^c \zeta_c) \\ & + n_a (\vec{d}\zeta_b + u_b \eta) + n_a n_b (u^c \zeta_c + \vec{d}\eta) \\ & - C^c{}_{ab} ((\eta + 1)n_c + \zeta_c). \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

Recurriendo a (H.14), sobre la hipersuperficie de colapso esto se reduce a

$$[K_{ab}] = n_a (\vec{d}\zeta_b)_{\Sigma_c} + n_a n_b (\vec{d}\eta)_{\Sigma_c} - n_c (C^c{}_{ab})_{\Sigma_c}. \quad (\text{H.22})$$

Para estudiar a  $C^c{}_{ab}$  primero notemos que la forma general 3 + 1 de  $\gamma_{ab}$  es

$$\gamma_{ab} = \mathfrak{h}_{ab} + n_a \kappa_b + n_b \kappa_a + \mathfrak{t} n_a n_b, \quad (\text{H.23})$$

donde  $\mathfrak{h}_{ab} = \overset{0}{\gamma}_{ab}$  es un tensor tangente (según la foliación en  $SSC_I$ ) y simétrico,  $\kappa_a = \overset{1}{\gamma}_a$  es un vector dual tangente en el mismo sentido y  $\mathfrak{t} = \overset{3}{\gamma}$  es un escalar. Ahora desarrollamos  $C_{cab}$  a partir de (3.94), obteniendo las componentes de proyección 3 + 1 siguientes:

$$\overset{0}{C}_{a_2 a_1 a_0} = \kappa_{a_2} K_{a_1 a_0} + \frac{1}{2} D_{a_0} \mathfrak{h}_{a_2 a_1} + \frac{1}{2} D_{a_1} \mathfrak{h}_{a_2 a_0} - \frac{1}{2} D_{a_2} \mathfrak{h}_{a_1 a_0}, \quad (\text{H.24a})$$

$$\overset{1,2}{C}_{a_2 a_1} = K_{[a_1}{}^b \mathfrak{h}_{a_2]b} + D_{[a_1} \kappa_{a_2]} + u_{(a_2} \kappa_{a_1)} + \frac{1}{2} \overset{1}{d} \mathfrak{h}_{a_2 a_1}, \quad (\text{H.24b})$$

$$\overset{3}{C}_{a_2} = u_{a_2} \mathfrak{t} + u^b \mathfrak{h}_{b a_2} - K_{a_2}{}^b \kappa_b + \overset{1}{d} \kappa_{a_2} - \frac{1}{2} D_{a_2} \mathfrak{t}, \quad (\text{H.24c})$$

$$\overset{4}{C}_{a_1 a_0} = \mathfrak{t} K_{a_1 a_0} - \overset{1}{d} \mathfrak{h}_{a_1 a_0} + K^b{}_{(a_1} \mathfrak{h}_{a_0)b} - u_{(a_1} \kappa_{a_0)} + D_{(a_1} \kappa_{a_0)}, \quad (\text{H.24d})$$

$$\overset{5,6}{C}_a = K_a{}^b \kappa_b + \frac{1}{2} D_a \mathfrak{t}, \quad (\text{H.24e})$$

$$\overset{7}{C} = u^b \kappa_b + \frac{1}{2} \overset{1}{d} \mathfrak{t}. \quad (\text{H.24f})$$

Al aplicar las condiciones de continuidad sobre la hipersuperficie, obtenemos

$$(C^c{}_{ab})_{\Sigma_c} = (\overset{1}{d} \mathfrak{h}^c{}_{(a} n_{b)})_{\Sigma_c} - \frac{1}{2} (\overset{1}{d} \mathfrak{h}_{ab})_{\Sigma_c} n^c + (\overset{1}{d} \kappa^c)_{\Sigma_c} n_a n_b + \frac{1}{2} (\overset{1}{d} \mathfrak{t})_{\Sigma_c} n^c n_a n_b. \quad (\text{H.25})$$

Sustituyendo en (H.22) finalmente se obtiene

$$[K_{ab}] = -\frac{1}{2} (\overset{1}{d} \mathfrak{h}_{ab})_{\Sigma_c} + n_a n_b \left( (\overset{1}{d} \eta)_{\Sigma_c} + \frac{1}{2} (\overset{1}{d} \mathfrak{t})_{\Sigma_c} \right). \quad (\text{H.26})$$

En esta expresión no aparece el término  $n_a (\overset{1}{d} \zeta_b)_{\Sigma_c}$  puesto que los saltos conservan la simetría de los tensores, y dado que la componente simétrica correspondiente de  $[K_{ab}]$  se anula en el límite al pasar de (H.21) a (H.22), esto implica que

$$(\overset{1}{d} \zeta_a)_{\Sigma_c} = 0. \quad (\text{H.27})$$

Asimismo, la continuidad de  $n_a$  implica que objetos tangentes permanecen tangentes sobre  $\Sigma_c$ , así que la componente normal de  $[K_{ab}]$  debe cancelarse. Esto se traduce en la relación

$$(\overset{1}{d} \eta)_{\Sigma_c} = -\frac{1}{2} (\overset{1}{d} \mathfrak{t})_{\Sigma_c}. \quad (\text{H.28})$$

Por lo tanto, el *salto* de la curvatura extrínseca es de la forma

$$[K_{ab}] = -\frac{1}{2} (\overset{1}{d} \mathfrak{h}_{ab})_{\Sigma_c}. \quad (\text{H.29})$$

# Bibliografía

- <sup>1</sup>D. Kaiser, «History: Shut up and calculate!», *Nature* **505**, 153-155 (2014).
- <sup>2</sup>N. David Mermin, «What's Wrong with this Pillow?», *Physics Today* **42**, 9-11 (1989).
- <sup>3</sup>E. Schrödinger, «An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules», *Phys. Rev.* **28**, 1049-1070 (1926).
- <sup>4</sup>M. Born, «Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge», *Zeitschrift für Physik* **37**, 863-867 (1926).
- <sup>5</sup>W. Heisenberg, *Physics and Philosophy: The Revolution in Modern Science*. (Harper Torchbooks, 1958).
- <sup>6</sup>D. Bohm, «A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. I», *Physical Review* **85**, 166 (1952).
- <sup>7</sup>H. Everett, «“Relative State” Formulation of Quantum Mechanics», *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454-462 (1957).
- <sup>8</sup>A. Einstein, «Approximative integration of the field equations of gravitation», *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916**, 1 (1916).
- <sup>9</sup>S. Hossenfelder y L. Smolin, «Conservative solutions to the black hole information problem», *Phys. Rev. D* **81**, 064009 (2010).
- <sup>10</sup>P. Chen, Y. Ong y D.-h. Yeom, «Black hole remnants and the information loss paradox», *Physics Reports* **603**, Black hole remnants and the information loss paradox, 1-45 (2015).
- <sup>11</sup>C. Kiefer y D. Polarski, «Why do Cosmological Perturbations Look Classical to Us?», *Advanced Science Letters* **2**, 164-173 (2009).
- <sup>12</sup>D. Sudarsky, «Shortcomings in the understanding of why cosmological perturbations look classical», *International Journal of Modern Physics D* **20**, 509-552 (2011).
- <sup>13</sup>J. S. Bell, «Are there quantum jumps?», en *Schrödinger. Centenary celebration of a polymath*, ed. por C. W. Kilmister (Cambridge University Press, 1987), págs. 41-52.
- <sup>14</sup>E. Okon y D. Sudarsky, «Benefits of objective collapse models for cosmology and quantum gravity», *Foundations of Physics* **44**, 114-143 (2014).

- <sup>15</sup>L. Diósi, «Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations», *Phys. Rev. A* **40**, 1165-1174 (1989).
- <sup>16</sup>R. Penrose, «On Gravity's role in Quantum State Reduction», *General Relativity and Gravitation* **28**, 581-600 (1996).
- <sup>17</sup>K. Eppley y E. Hannah, «The necessity of quantizing the gravitational field», *Foundations of Physics* **7**, 51-68 (1977).
- <sup>18</sup>D. N. Page y C. D. Geilker, «Indirect Evidence for Quantum Gravity», *Phys. Rev. Lett.* **47**, 979-982 (1981).
- <sup>19</sup>S. K. Modak, L. Ortíz, I. Peña y D. Sudarsky, «Black hole evaporation: information loss but no paradox», *Gen. Rel. Grav.* **47**, 120 (2015).
- <sup>20</sup>D. J. Bedingham, S. K. Modak y D. Sudarsky, «Relativistic collapse dynamics and black hole information loss», *Phys. Rev. D* **94**, 045009 (2016).
- <sup>21</sup>E. Okon y D. Sudarsky, «Black holes, information loss and the measurement problem», *Foundations of Physics* **47**, 120-131 (2017).
- <sup>22</sup>A. Perez, H. Sahlmann y D. Sudarsky, «On the quantum origin of the seeds of cosmic structure», *Classical and Quantum Gravity* **23**, 2317 (2006).
- <sup>23</sup>A. Diez-Tejedor y D. Sudarsky, «Towards a formal description of the collapse approach to the inflationary origin of the seeds of cosmic structure», *JCAP* **1207**, 045 (2012).
- <sup>24</sup>P. Cañate, P. Pearle y D. Sudarsky, «Continuous spontaneous localization wave function collapse model as a mechanism for the emergence of cosmological asymmetries in inflation», *Phys. Rev.* **D87**, 104024 (2013).
- <sup>25</sup>G. León, A. Majhi, E. Okon y D. Sudarsky, «Expectation of primordial gravity waves generated during inflation», *Phys. Rev. D* **98**, 023512 (2018).
- <sup>26</sup>T. Josset, A. Perez y D. Sudarsky, «Dark energy as the weight of violating energy conservation», (2016).
- <sup>27</sup>T. Maudlin, E. Okon y D. Sudarsky, «On the status of conservation laws in physics: Implications for semiclassical gravity», *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **69**, 67-81 (2020).
- <sup>28</sup>A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, «Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?», *Physical review* **47**, 777 (1935).
- <sup>29</sup>J. S. Bell, «On the Einstein Podolsky Rosen paradox», *Physics Physique Fizika* **1**, 195-200 (1964).
- <sup>30</sup>T. Maudlin, «What Bell proved: A reply to Blaylock», *American Journal of Physics* **78**, 121-125 (2010).
- <sup>31</sup>J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Investigations in physics (Princeton University Press, 1955).

- <sup>32</sup>T. Maudlin, «Three measurement problems», *Topoi* **14**, 7-15 (1995).
- <sup>33</sup>X. Oriols y J. Mompart, «Overview of Bohmian mechanics», arXiv preprint arXiv:1206.1084, Capítulo 1 del libro “Applied Bohmian Mechanics: From Nanoscale Systems to Cosmology” Editorial Pan Stanford Publishing Pte. Ltd (2012). (2012).
- <sup>34</sup>G. C. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber, «Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems», *Physical Review D* **34**, 470 (1986).
- <sup>35</sup>P. Pearle, «Combining Stochastic Dynamical State Vector Reduction With Spontaneous Localization», *Phys. Rev.* **A39**, 2277-2289 (1989).
- <sup>36</sup>P. Pearle, «Collapse Miscellany», en *Quantum Theory: A Two-Time Success Story: Yakir Aharonov Festschrift*, ed. por C. D. Struppa y M. J. Tollaksen (Springer Milan, Milano, 2014), págs. 131-156.
- <sup>37</sup>V. Allori, «Primitive ontology and the structure of fundamental physical theories», *The wave function: Essays on the metaphysics of quantum mechanics*, 58-75 (2013).
- <sup>38</sup>V. Allori, S. Goldstein, R. Tumulka y N. Zanghì, «On the Common Structure of Bohmian Mechanics and the Ghirardi–Rimini–Weber Theory: Dedicated to GianCarlo Ghirardi on the occasion of his 70th birthday», *The British Journal for the Philosophy of Science* **59**, 353-389 (2008).
- <sup>39</sup>D. J. Bedingham, «Relativistic state reduction model», *Journal of Physics: Conference Series* **306**, 012034 (2011).
- <sup>40</sup>J. Bell y A. Aspect, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy*, Collected papers on quantum philosophy (Cambridge University Press, 2004).
- <sup>41</sup>G. C. Ghirardi, P. Pearle y A. Rimini, «Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles», *Phys. Rev. A* **42**, 78-89 (1990).
- <sup>42</sup>A. Bassi, D.-A. Deckert y L. Ferialdi, «Breaking quantum linearity: Constraints from human perception and cosmological implications», *EPL (Europhysics Letters)* **92**, 50006 (2010).
- <sup>43</sup>D. J. Bedingham, «Relativistic state reduction dynamics», *Found. Phys.* **41**, 686-704 (2011).
- <sup>44</sup>R. Tumulka, «A Relativistic Version of the Ghirardi–Rimini–Weber Model», *Journal of Statistical Physics* **125**, 821-840 (2006).
- <sup>45</sup>S. L. Adler, A. Bassi, M. Carlesso y A. Vinante, «Testing continuous spontaneous localization with Fermi liquids», *Phys. Rev. D* **99**, 103001 (2019).
- <sup>46</sup>A. Vinante, M. Carlesso, A. Bassi, A. Chiasera, S. Varas, P. Falferi, B. Margesin, R. Mezzena y H. Ulbricht, «Narrowing the Parameter Space of Collapse Models with Ultracold Layered Force Sensors», *Phys. Rev. Lett.* **125**, 100404 (2020).

- <sup>47</sup>S. Forstner, M. Zych, S. Basiri-Esfahani, K. E. Khosla y W. P. Bowen, «Nanomechanical test of quantum linearity», *Optica* **7**, 1427-1434 (2020).
- <sup>48</sup>H. Tong, S. Liu, M. Zhao y K. Fang, «Observation of phonon trapping in the continuum with topological charges», *Nature communications* **11**, 1-7 (2020).
- <sup>49</sup>A. Tilloy y L. Diósi, «Sourcing semiclassical gravity from spontaneously localized quantum matter», *Physical Review D* **93**, 024026 (2016).
- <sup>50</sup>A. Tilloy, «Ghirardi-Rimini-Weber model with massive flashes», *Phys. Rev. D* **97**, 021502 (2018).
- <sup>51</sup>A. Wipf, «Mean Field Approximation», en *Statistical Approach to Quantum Field Theory: An Introduction* (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013), págs. 119-148.
- <sup>52</sup>L. P. Kadanoff, «More is the Same; Phase Transitions and Mean Field Theories», *Journal of Statistical Physics* **137**, 777 (2009).
- <sup>53</sup>B. S. Kay y R. M. Wald, «Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon», *Physics Reports* **207**, 49-136 (1991).
- <sup>54</sup>S. Hollands y R. M. Wald, «Quantum fields in curved spacetime», *Physics Reports* **574**, Quantum fields in curved spacetime, 1-35 (2015).
- <sup>55</sup>I. Khavkine y V. Moretti, «Algebraic QFT in Curved Spacetime and Quasifree Hadamard States: An Introduction», en *Advances in Algebraic Quantum Field Theory*, ed. por R. Brunetti, C. Dappiaggi, K. Fredenhagen y J. Yngvason (Springer International Publishing, Cham, 2015), págs. 191-251.
- <sup>56</sup>R. M. Wald, «The back reaction effect in particle creation in curved spacetime», *Communications in Mathematical Physics* **54**, 1-19 (1977).
- <sup>57</sup>R. M. Wald, «Trace anomaly of a conformally invariant quantum field in curved spacetime», *Phys. Rev. D* **17**, 1477-1484 (1978).
- <sup>58</sup>S. M. Christensen, «Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method», *Phys. Rev. D* **14**, 2490-2501 (1976).
- <sup>59</sup>S. Hollands y R. M. Wald, «Local Wick Polynomials and Time Ordered Products of Quantum Fields in Curved Spacetime», *Communications in Mathematical Physics* **223**, 289-326 (2001).
- <sup>60</sup>Y. Décanini y A. Folacci, «Hadamard renormalization of the stress-energy tensor for a quantized scalar field in a general spacetime of arbitrary dimension», *Phys. Rev. D* **78**, 044025 (2008).
- <sup>61</sup>J. L. Jiménez e I. Campos, «A critical examination of the Abraham–Lorentz equation for a radiating charged particle», *American Journal of Physics* **55**, 1017-1023 (1987).
- <sup>62</sup>R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).

- <sup>63</sup>S. V. Kovalevskaja, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (1874).
- <sup>64</sup>Y. Fourès-Bruhat, «Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires», *Acta Mathematica* **88**, 141-225 (1952).
- <sup>65</sup>D. R. Noakes, «The initial value formulation of higher derivative gravity», *Journal of Mathematical Physics* **24**, 1846-1850 (1983).
- <sup>66</sup>M. J. Radzikowski, «Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time», *Communications in Mathematical Physics* **179**, 529-553 (1996).
- <sup>67</sup>B. A. Juárez-Aubry, B. S. Kay, T. Miramontes y D. Sudarsky, «On the initial value problem for semiclassical gravity without and with quantum state collapses», [10.48550/ARXIV.2205.11671](https://arxiv.org/abs/2205.11671) (2022).
- <sup>68</sup>E. M. Lifshitz, «On the gravitational stability of the expanding universe», *J. Phys. (USSR)* **10**, 116-129 (1946).
- <sup>69</sup>B. A. Juárez-Aubry, B. S. Kay y D. Sudarsky, «Generally covariant dynamical reduction models and the Hadamard condition», *Phys. Rev. D* **97**, 025010 (2018).
- <sup>70</sup>T. Miramontes y D. Sudarsky, «El formalismo  $3+1$  en relatividad general y la descomposición tensorial completa», *Revista Mexicana de Física E* **64**, 108-126 (2018).
- <sup>71</sup>B. A. Juárez-Aubry, T. Miramontes y D. Sudarsky, «Semiclassical theories as initial value problems», *Journal of Mathematical Physics* **61**, 032301 (2020).
- <sup>72</sup>S. C. Tiwari, «A note on the unimodular theory of gravitation», *Journal of Mathematical Physics* **34**, 2465-2467 (1993).
- <sup>73</sup>Y. J. Ng y H. van Dam, «Unimodular theory of gravity and the cosmological constant», *Journal of Mathematical Physics* **32**, 1337-1340 (1991).
- <sup>74</sup>A. De Felice y S. Tsujikawa, « $f(R)$  Theories», *Living Reviews in Relativity* **13**, 3 (2010).
- <sup>75</sup>S. Jensen, *General Relativity with Torsion*, 2005.
- <sup>76</sup>F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick y J. M. Nester, «General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects», *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393-416 (1976).
- <sup>77</sup>É. Cartan, «Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces torsion», *CR Acad. Sci.(Paris)* **174**, 2 (1922).
- <sup>78</sup>B. L. Hu y E. Verdaguer, «Stochastic Gravity: Theory and Applications», *Living Reviews in Relativity* **11**, 3 (2008).
- <sup>79</sup>N. D. Birrel y P. C. W. Davies, *Quantum Theory in Curved Spaces*, 1982.
- <sup>80</sup>J. Dimock, «Scalar quantum field in an external gauge field», *Journal of Mathematical Physics* **20**, 1791-1796 (1979).
- <sup>81</sup>E.ourgoulhon, «3+1 formalism and bases of numerical relativity», (2007).



- <sup>82</sup>R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, «Republication of: The dynamics of general relativity», *General Relativity and Gravitation* **40**, 1997-2027 (2008).
- <sup>83</sup>B. S. DeWitt y R. W. Brehme, «Radiation damping in a gravitational field», *Annals of Physics* **9**, 220-259 (1960).