



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

**CROMODINÁMICA Y ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO EN UNA TEORÍA DUAL
A UN AGUJERO DE GUSANO ATRAVESABLE**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
EDEL EFRAÍN GARCÍA HERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL: DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG
FACULTAD DE CIENCIAS

COMITÉ TUTORAL:
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, JULIO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Cromodinámica y entrelazamiento cuántico en una teoría dual a un agujero de gusano atravesable

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICAS) PRESENTA

Edel Efraín García Hernández

Comité tutorial: Dr. Mariano Chernicoff Minsberg (Tutor principal)
Dr. José David Vergara Oliver
Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Ciudad de México, México, Julio 2022

Resumen

En esta tesis obtenemos el potencial de un par quark-antiquark en una teoría dual a una solución de la teoría de gravedad de Gauss-Bonnet en 5 dimensiones, que corresponde a un agujero de gusano atravesable asintóticamente AdS. Esta solución se construye a partir de 4 soluciones de agujero negro asintóticamente AdS en gravedad de Gauss-Bonnet que son unidas entre sí mediante ciertas condiciones de juntura. Para ello, usamos la correspondencia AdS/CFT. En particular estudiaremos el dual holográfico a un par quark-antiquark en SYM $\mathcal{N} = 4$, que corresponde a una cuerda abierta en la teoría de gravedad dual, cuyos extremos se extienden hasta la frontera de AdS y representan las posiciones del quark y el antiquark. La correspondencia AdS/CFT indica que el potencial del par quark-antiquark se puede obtener minimizando el área generada por el perfil de la cuerda.

En el caso del agujero de gusano asintóticamente AdS en 5 dimensiones, tenemos dos fronteras, por lo que la configuración dual corresponde a dos copias de una cierta CFT. Encontramos que existen distintos perfiles de cuerdas, que pueden atravesar o no el agujero de gusano y que son duales a pares quark-antiquark, en donde cada una de las cargas puede encontrarse en cada una de las CFT's.

Específicamente, encontramos dos tipos de configuraciones. La primera de estas corresponde a una cuerda cuyos extremos se encuentran en la misma frontera del agujero de gusano, y que corresponde a un par quark-antiquark, con ambas cargas en la misma CFT. A este tipo de configuraciones de cuerdas les llamamos “cuerdas con forma de U”. La segunda configuración, corresponde a una cuerda que atraviesa al agujero de gusano y que tiene un extremo en una frontera, y el otro extremo en la otra frontera, y corresponde tener un par quark-antiquark en cada una de las CFT's.

El potencial se puede parametrizar en términos de L , la separación del par quark-antiquark. Los resultados para el potencial indican que para valores de L cercanos a 0, la configuración de energía mínima corresponde a una configuración en forma de U, por lo que solo existe interacción entre quarks y antiquarks que se encuentran en la misma CFT. Sin embargo, aumentando el valor de L , se alcanza una transición de fase, de manera que el estado de energía mínima corresponde a una cuerda LR. En el lenguaje de la CFT, esto significa que existe un valor de L para el cual aparece un potencial de interacción entre las dos copias de la CFT duales a nuestra configuración de agujero de gusano.

También estudiamos la entropía de entrelazamiento entre distintas regiones de las dos CFT's. Para esto utilizamos la generalización de la fórmula de Ryu-Takayanagi a teorías de gravedad con términos a mayor orden en la curvatura. Para la teoría de Gauss-Bonnet, la forma del funcional de entropía de entrelazamiento holográfica se conoce. En este trabajo, utilizamos la solución explícita de agujero de gusano para escribir este funcional. El cálculo explícito de la entropía de entrelazamiento es un trabajo en desarrollo.

Abstract

In this thesis we obtain the potential of a quark-antiquark pair in a dual theory to a solution of the Gauss-Bonnet theory of gravity in 5 dimensions, which corresponds to an AdS asymptotically traversable wormhole. This solution is built from 4 asymptotically AdS black hole solutions in Gauss-Bonnet gravity that are joined together by certain junction conditions. To reach this goal, we use the AdS/CFT correspondence. In particular we will study the holographic dual to a quark-antiquark pair in SYM $\mathcal{N} = 4$, which corresponds to an open string in dual gravity theory, whose ends extend to the AdS boundary, and represent the positions of the quark and the antiquark. The AdS/CFT correspondence tell us that the potential of the quark-antiquark pair can be obtained by minimizing the area generated by the profile of the string.

In the case of the AdS asymptotically wormhole in 5 dimensions, we have two boundaries, so the dual configuration corresponds to two copies of a certain CFT. We find that there are different profiles of strings, which may or may not go through the wormhole and which are dual to quark-antiquark pairs, where each of the charges can be found in each of the CFT's.

Specifically, we find two types of configurations. The first of these corresponds to a string whose ends are at the same boundary of the wormhole, and which corresponds to a quark-antiquark pair, with both charges at the same CFT. We call these types of string configurations “U-shaped”. The second configuration corresponds to a string that crosses the wormhole and has one end at one border, and the other end at the other border, and corresponds to having a quark-antiquark pair in each of the CFT's.

The potential can be parameterized in terms of L , the separation of the quark-antiquark pair. The results for the potential indicate that for values of L close to 0, the minimum energy configuration corresponds to a U-shaped configuration, so the interaction is only between quarks and antiquarks that are in the same CFT. However, by increasing the value of L , a phase transition is reached, so that the minimum energy state corresponds to an LR string. In the CFT language, this means that there is a value of L for which an interaction potential appears between the two CFT copies dual to our wormhole configuration.

We also study the entanglement entropy between different regions of the two CFT's. For this we use the generalization of the Ryu-Takayanagi formula to theories of gravity with higher order terms in the curvature. For the Gauss-Bonnet theory, the form of the holographic entanglement entropy functional is known. In this work, we use the explicit wormhole solution to write this functional. The explicit calculation of the entanglement entropy is a work in progress.

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	7
2.1. Teorías Cuánticas de Campo	7
2.1.1. Campos cuánticos.	7
2.1.2. QCD y Súper Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$	14
2.2. Teoría General de la Relatividad	18
2.2.1. Curvatura y Ecuaciones de Einstein	19
2.2.2. Teorías de Gravedad con correcciones en la curvatura de orden superior.	21
2.3. Teorías de Cuerdas y D-Branas	24
2.3.1. Cuerda bosónica	24
2.3.2. Teorías de supercuerdas	30
2.3.3. Solución de p-brana negra y D-branas	36
2.4. Correspondencia Norma Gravedad	40
2.4.1. Límite de ultra-bajas energías	40
2.4.2. Diccionario de AdS/CFT	42
2.5. Potencial de un par quark-antiquark	46
2.5.1. Lazos de Wilson	47
2.5.2. Dual holográfico de un par quark-antiquark	49
2.5.3. Energía de un par quark-antiquark en SYM $\mathcal{N} = 4$	50
2.6. Entropía de entrelazamiento holográfica	55
2.6.1. Entropía de entrelazamiento	56
2.6.2. Fórmula de Ryu takayanagi	58
2.6.3. Método de Lewkowycz-Maldacena	59
3. Antecedentes	69
3.1. Agujeros de gusano en teorías con términos superiores	69
3.2. Cuerdas y agujeros de gusano en AdS	71
3.3. HEE en agujeros de gusano en AdS	73
4. Cuerdas en agujeros de gusano AdS en Gauss-Bonnet	77
4.1. Dióptrica de cuerdas	77
4.1.1. Refracción de una cuerda a través del cascarón del agujero de gusano	79
4.2. Cuerdas en forma de U	80
4.2.1. Cuerdas en forma de U en la región exterior	81
4.2.2. Cuerdas refractadas con punto de retorno en la región interior	82
4.2.3. Cuerdas en forma de U estiradas	82
4.3. Cuerdas LR	84

5. HEE en agujeros de gusano AdS en Gauss-Bonnet	87
5.1. Funcional de HEE para un agujero de gusano planar	87
5.2. Superficies de entrelazamiento para la banda infinita	91
5.2.1. Superficies U-shaped en la métrica exterior	91
5.2.2. Superficies con punto de retorno en la métrica interior	92
5.2.3. Superficies que se estiran a través del radio de garganta	94
5.2.4. Superficies LR	94
5.3. Superficies de entrelazamiento para una esfera.	95
6. Conclusiones	97

Capítulo 1

Introducción

Las teorías¹ que pretenden describir el universo en que vivimos abarcan una inmensa gama de ramas del saber. En particular, en la física, tenemos teorías que modelan la realidad cuando observamos el universo cuando la escala de distancia es muy grande en comparación con el tamaño de un átomo, y que son comparables por ejemplo, a las galaxias. En otro caso, podemos pensar por ejemplo en un proyectil lanzado en la tierra. A este tipo de fenómenos los llamaremos macroscópicos. Por otro lado, tenemos teorías que sirven para modelar, por ejemplo, el comportamiento de un átomo, el decaimiento de los núcleos radioactivos, o calcular la masa del llamado bosón de Higgs. A este tipo de fenómenos, los denominamos microscópicos. En el universo microscópico, existe lo que en física llamamos partículas fundamentales. Este tipo de partículas, las entendemos como los ladrillos básicos de los que se constituye la materia. Las imaginamos como objetos de dimensión cero (es decir, no tienen largo, alto ni ancho) y no están hechas de algún otro tipo de partículas.

Muchas veces, cuando estudiamos las teorías que utilizamos para describir a las galaxias o a los planetas, nos olvidamos de lo que pasa en el interior de los átomos que constituyen dichos sistemas. Y viceversa; cuando, por ejemplo, calculamos una tasa de decaimiento de un núcleo no nos interesa lo que está sucediendo en la galaxia de Andrómeda. Este hecho se debe a que los diversos tipos de fenómenos suceden a diferentes escalas, que podemos cuantificar por ejemplo, con la energía necesaria para llevar a cabo dicho proceso. Mientras más escarbamos dentro del átomo, la energía necesaria para llevar a cabo nuestras observaciones es cada vez más grande. Por esta razón, cuando hablemos de fenómenos que involucran separaciones o distancias muy pequeñas en comparación al radio de un átomo, estaremos hablando de física de altas energías.

Ahora bien, si tuviéramos la energía suficiente para explorar lo que hay dentro de un átomo, encontraríamos que está constituido por un núcleo atómico y una nube de electrones, cuya configuración está determinada por las leyes de lo que los físicos llamamos teoría cuántica, y que fue desarrollada por Schrödinger, Heisenberg, entre otros, a principios del siglo XX. Esta teoría fue motivada principalmente para explicar ciertos experimentos desarrollados por en época, que demostraban que la física clásica no lograba explicar ciertos resultados contraintuitivos sobre el comportamiento de la materia a nivel microscópico. Desde los años posteriores a esta nueva formulación de la física a escalas atómicas, hemos podido entender y predecir lo que sucede, por ejemplo, dentro de un átomo, por ejemplo.

Hasta el momento en el que se descubrieron las leyes de la física cuántica, se sabía que

¹Esta sección tiene como propósito ofrecer una perspectiva de este trabajo a un nivel comprensible para la mayoría de los lectores, incluso si no se tiene conocimientos previos en física. Por esta razón, no se citarán aquí a los numerosos autores cuyo trabajo ha contribuido a ofrecer esta explicación.

el núcleo atómico estaba cargado positivamente. Posteriormente se descubrió que estaba compuesto con dos partículas, los neutrones (sin carga), y los protones (con carga eléctrica positiva). Surge entonces la pregunta de como es posible que los neutrones y los protones coexistan juntos en el núcleo del átomo, si las leyes básicas del electromagnetismo nos dicen que las partículas de cargas iguales se repelen entre sí. Una respuesta plausible, es que existe una gran fuerza que se encarga de mantener el núcleo unido, y a esta fuerza se le empezó a conocer como fuerza nuclear fuerte.

Los electrones son partículas elementales que se clasifican dentro del grupo de los *leptones*, que junto con el muón, el tauón, y tres partículas conocidas como *neutrinos* se caracterizan por ser partículas con masa carga eléctrica igual a cero. En física de partículas existen además partículas de masa cero que se llaman *bosones* y que son las partículas encargadas de transmitir la información de que una partícula está interactuando con otra. De esta manera, un electrón interactúa con otra partícula con carga electromagnética mediante el intercambio de bosones de fuerza electromagnética, también conocidos como *fotones*. Es decir, las partículas cargadas y los fotones interactúan para dar lugar a lo que conocemos como fuerza electromagnética.

Si tuviéramos la energía suficiente para explorar lo que hay dentro de los protones y de los neutrones, bajo ciertas condiciones, encontraríamos partículas que llamamos *quarks*. Los quarks son un tipo de ladrillo fundamental de la materia que puede poseer una carga, similar a la carga electromagnética. Sin embargo, a diferencia del caso electromagnético, donde la carga puede ser solamente positiva o negativa, en este caso tenemos tres tipos de carga distinta, a la que llamamos color, y los tres tipos de carga son rojo, verde y azul. De la misma manera en que los fotones median la interacción entre dos cargas electromagnéticas, existe un bosón de la fuerza fuerte, que llamamos *gluón*, y que se encarga de mediar interacción entre cargas de color. Además, dos gluones, pueden interactuar entre sí, aún sin la presencia de quarks. A la teoría que explica la dinámica de los quarks y los gluones se le llama *cromodinámica cuántica* y se abrevia como *QCD* por sus siglas en inglés

A cada una de las partículas que hemos mencionado, le acompaña su antipartícula correspondiente, que tiene carga opuesta. Por ejemplo, el electrón tiene una antipartícula que tiene carga eléctrica positiva y que se le denomina *positrón*. Del mismo modo un quark con carga de color azul tiene como antipartícula a una quark de color “antiazul”. Para terminar de enlistar las interacciones fundamentales que existen, debemos considerar a la fuerza responsable del decaimiento radiactivo en los elementos. Este hecho empírico se puede explicar si agregamos una tercera interacción a nuestra descripción de la física de partículas; la fuerza nuclear débil. Esta fuerza, es responsable de que los quarks tengan ahora otro tipo de carga a la que denominamos sabor. Existen 6 sabores que dividen a los quarks en 6 tipos (arriba, abajo, cima, fondo, encanto y extraño). La fuerza nuclear débil, en una cierta escala, resulta estar emparentada tanto con la fuerza electromagnética como con la fuerza nuclear fuerte, formando una teoría unificada, que llamamos *modelo estándar*, y ha logrado explicar de manera exitosa un gran número de procesos a nivel microscópico. Podemos poner a prueba experimentalmente esta teoría en los grandes aceleradores de partículas. Tenemos pues, tres fuerzas fundamentales que actúan sobre los componentes básicos de la materia, que incluyen a los leptones como el electrón y el muón, y a los hadrones (partículas compuestas por quarks) que a su vez pueden dividirse en bariones (compuestos por tres quarks con distintas cargas de color que forman una combinación neutra, como los protones y los neutrones) y mesones (compuestos de un quark y un antiquark).

Si tenemos a un quark y a su antipartícula, el antiquark, interactuando entre sí, notaremos un comportamiento inusual. Existe una diferencia importante respecto a la fuerza electromagnética, en donde la fuerza de atracción, o el potencial entre dos cargas

opuestas e iguales es mayor cuando las cargas se encuentran a menor distancia, y mayor cuando están a mayor distancia (comportamiento Coulombiano). En el caso de la fuerza nuclear fuerte, la fuerza con la que el par quark-antiquark interactúa es mayor mientras las cargas de color se alejan entre sí. El potencial de esta configuración, se dice que es lineal (crece con la distancia). Un caso cotidiano de un comportamiento de este tipo, es cualquier resorte u objeto elástico que sigue la ley de Hooke. En particular, las líneas que indican la dirección y la intensidad de la fuerza pueden visualizarse como una liga gruesa que une al quark con el antiquark. El hecho de que en la naturaleza solo observemos a conjuntos de tres quarks o de pares quark-antiquark, no es un hecho trivial.

Esta es una propiedad importante que tiene la fuerza fuerte, y es que los quarks se encuentran siempre en grupos de dos o más, que resultan ser combinaciones neutras de carga de color. A este comportamiento se le conoce como *confinamiento*, y hasta el momento no se ha logrado dar con una explicación totalmente satisfactoria del porqué se produce este fenómeno. El hecho de que podamos explicar el potencial del par quark-antiquark como una liga de la cual los quarks son los “extremos”, llevó a algunos físicos a aventurar que quizás la materia, o parte de ella, estaba compuesta de ligas fundamentales, que llamaron cuerdas. Los posteriores avances experimentales pronto deshecharon esta idea. Sin embargo, a la fecha, el modelo estándar no ha logrado describir de manera satisfactoria que es lo que sucede cuando la escala energética en la que la interacción fuerte es demasiado grande, y por lo tanto, limita las posibilidades de estudiar fenómenos como el confinamiento.

La idea de que tal vez las partículas tuvieran las propiedades de una cuerda, es decir, un objeto extendido, no fue del todo deshechada, si no que se observó desde una nueva perspectiva. En lugar de pensar en cuerdas a escalas comparables a la distancia entre un quark y un antiquark, podemos imaginar que son muchísimo más pequeñas. A una cierta escala, sería posible que lo que nosotros detectamos como partículas sean en realidad cuerdas diminutas de un solo tipo que se encargan de formar todas las partículas de materia que conocemos. A esta idea dio lugar a lo que eventualmente se le llamó *teoría de cuerdas*. Dicha teoría se encuentra aún en desarrollo, y a pesar de que no existe la tecnología suficiente para poner a prueba experimentalmente sus predicciones, existen varias razones por las que los físicos ven en esta teoría una herramienta potencialmente útil para estudiar a la física a escalas microscópicas. Una de estas, es que a diferencia del modelo estándar, donde necesitamos varios tipos de partículas o ladrillos fundamentales para construir la materia, en la teoría de cuerdas se necesita solo un tipo de cuerda, que dependiendo de la manera en que esta cuerda vibre, adquiere las propiedades de diferentes partículas que aparecen en el modelo estándar.

Existe otra ventaja de la teoría de cuerdas que la vuelve aún más interesante. Volvamos al principio de nuestra discusión, en donde diferenciamos los fenómenos microscópicos de los macroscópicos. El modelo estándar, como podemos darnos cuenta, se encarga de explicar procesos microscópicos. Pero a escala macroscópica, podemos observar una cuarta fuerza fundamental, que se encarga de atraer a los objetos masivos entre sí; la fuerza de gravedad. Esta fuerza se origina debido a la deformación del mismo espacio-tiempo provocada por un objeto masivo. Si este campo de fuerza existe a escalas macroscópicas, entonces debe estar constituido por ciertos bloques fundamentales al igual que el resto de las fuerzas fundamentales. Resulta que en el lenguaje del modelo estándar, no podemos añadir a la fuerza de gravedad de manera consistente, y por lo tanto surge un problema importante.

Es natural pensar que una teoría física consistente con todas las leyes de la naturaleza, tanto a escalas macroscópicas, como microscópicas, debería englobar a las cuatro fuerzas fundamentales conocidas. Sin embargo, hasta el momento no hemos encontrado dicha

teoría. La importancia del lenguaje de la teoría de cuerdas, es que además de las partículas similares a la materia que conocemos, producidas por los modos de vibración de la cuerda, aparece una partícula fundamental que tiene todas las propiedades necesarias para ser la mensajera de la fuerza gravitacional a escalas microscópicas. A esta partícula hipotética se le denomina gravitón.

A pesar de las ventajas que hemos mencionado, existe un panorama un poco desalentador respecto a la consistencia de la teoría de cuerdas con la física que conocemos. En primer lugar, además de las partículas del modelo estándar que conocemos, la teoría de cuerdas predice la existencia de partículas que no se observan en el modelo estándar. Otra desventaja, es que para hablar de cuerdas, necesitamos que las dimensiones espaciales de la teoría sean más que las dimensiones que observamos en nuestro universo. Ahora bien, la teoría de cuerdas, fue en principio motivada por entender la fuerza fuerte y el comportamiento de los quarks confinados. A pesar del rumbo radicalmente distinto que tomó dicha teoría (volviéndose una candidata a explicar las cuatro interacciones fundamentales), resulta que en los últimos años se ha logrado entender que al final la teoría de cuerdas nos brinda un cierto marco teórico que podría ayudar a entender mejor la dinámica de las partículas con carga de color (entre otras cosas).

Durante los años 90's, los teóricos de cuerdas descubrieron que la teoría de cuerdas, no incluye únicamente a las cuerdas como objetos fundamentales. Una cuerda es un objeto que no tiene ancho ni alto, solo largo. Por lo tanto es un objeto unidimensional. Nada nos detiene para pensar que podemos considerar objetos bidimensionales (como la membrana de un tambor), u objetos tridimensionales (como una gelatina) como componentes fundamentales de nuestra teoría. La teoría de cuerdas, resulta tener un verdadero zoológico de objetos multidimensionales que ineractúan entre sí y que pueden tener propiedades como masa, carga, etc. Esta diversidad da lugar a varios escenarios interesantes, y la libertad de extrapolar más allá de la física microscópica. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones, la teoría de cuerdas predice la existencia de ciertos objetos macroscópicos que se manifiestan deformando el espacio-tiempo a su alrededor en una manera muy específica, como lo hace por ejemplo, una estrella o un agujero negro. Cabe recordar que en teoría de cuerdas estamos trabajando con más dimensiones que las que observamos, por lo que esta analogía no significa que podamos observar objetos de esta naturaleza en nuestro universo. Gracias a este gran zoológico de objetos dinámicos la teoría de cuerdas presenta una particularidad.

Existen casos en los que un fenómeno físico puede explicarse en términos de otro fenómeno físico que pareciera no tener relación con el primero. De esta manera, toda la información acerca del primer sistema está contenido en el segundo, y viceversa, aunque no sea obvia la manera de pasar de un lenguaje al otro. Un caso relevante en el que observamos este hecho es en la equivalencia entre campos magnéticos y eléctricos en la teoría electromagnética. Esta equivalencia entre lenguajes es lo que llamamos una *dualidad*. La teoría de cuerdas, presenta varios tipos de dualidades, que nos permiten explicar la física de objetos de un cierto número de dimensiones en términos de un sistema que posee un número distinto de dimensiones. De entre todas las dualidades que existen en teoría de cuerdas, existe una en particular que nos acerca a la física de los quarks y de la fuerza fuerte. A esta dualidad le llamamos *correspondencia holográfica*, o correspondencia AdS/CFT.

El enunciado principal de la correspondencia AdS/CFT, es que existe una dualidad entre un universo con un cierto número de dimensiones, que se rige por las leyes microscópicas, es decir, la mecánica cuántica, y otro universo, con un número mayor de dimensiones, en el que predomina la física macroscópica, y en particular la fuerza de gravedad. En otras palabras, nos dice que podemos obtener información de la física de una teoría similar a QCD en un espacio-tiempo de 4 dimensiones a partir de la dinámica gra-

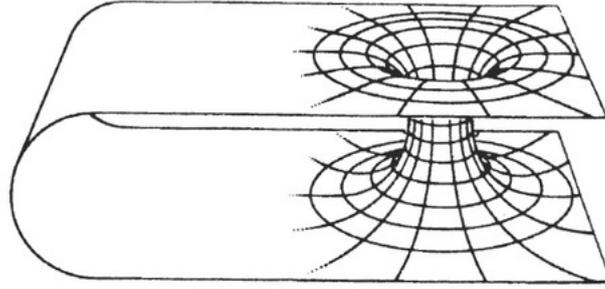


Figura 1.1: Representación de un espacio-tiempo curvado con dos regiones lejanas espacialmente conectadas mediante un agujero de gusano. Un agujero de gusano es una solución que combina una solución de agujero negro con una solución de agujero blanco para formar un túnel espacio-temporal, que podría conectar regiones arbitrariamente separadas.

vitatoria de un universo en particular que tiene una dimensión mas. La ventaja principal que nos ofrece esta herramienta es que podemos explorar un régimen de la teoría similar a QCD que hasta el momento no se ha podido estudiar con las técnicas más utilizadas en QCD.

Existe un escenario particular en el que se pueden poner a prueba las predicciones de la correspondencia AdS/CFT. Podemos calentar un gas de hadrones mediante colisiones de iones pesados a velocidades cercanas a la velocidad de la luz. A esta escala energética tan grande, aparece un nuevo estado de la materia formado por quarks y gluones interactuado débilmente, formando una especie de sopa o plasma. A esto se le conoce como el *plasma de quarks y gluones* o *QGP*. Usando la correspondencia AdS/CFT, se han logrado calcular propiedades como la viscosidad o entropía del plasma y comparar estas predicciones con los resultados empíricos obtenidos en experimentos de altas energías donde se ha logrado reproducir el QGP, como en el Large Hadron Collider en el CERN.

La correspondencia AdS/CFT es la herramienta principal con la cual desarrollaremos este trabajo, y con la cual estudiaremos una cantidad observables que ya hemos mencionado; el potencial par quark-antiquark. En particular, se ha descubierto recientemente, que en una cierta teoría de gravedad (que puede pensarse como una generalización de la gravedad de Einstein que conocemos) existe una solución que corresponde a un agujero de gusano atravesable.

Un agujero de gusano es una solución a las ecuaciones de la gravedad que puede ser considerada como un atajo entre regiones lejanas (o universos distintos) en el espacio-tiempo (Ver Figura 1.1). Gracias a la propiedad que tienen estos objetos, de conectar regiones lejanas en el espacio mediante una “garganta”, se ha especulado acerca de la posibilidad de utilizar estas soluciones (en caso de que se verificara su existencia) para viajar de un extremo del agujero al otro. Desafortunadamente la mayoría de este tipo de soluciones hipotéticas resultan ser físicamente no atravesables. Como veremos en este trabajo, la correspondencia AdS/CFT nos proporciona una manera de usar este escenario de gravedad para estudiar a dos teorías que contienen un par quark-antiquark y que se pueden o no interactuar entre sí. Dicho de otra manera, en este trabajo utilizaremos una teoría de gravedad que tiene por solución a un agujero de gusano en 5 dimensiones para tratar de entender como se comporta el par quark-antiquark en la teoría cuántica dual a cada una de las “bocas” del agujero de gusano.

En particular, podemos calcular la energía de interacción entre un quark y un antiquark que se encuentran en dos copias de una teoría cuántica similar a QCD. La correspondencia holográfica nos dice que esto es equivalente a calcular una cierta cantidad del

lado de la teoría de gravedad que tiene como solución al agujero de gusano. Esta cantidad es el área generada por una cuerda que puede tener sus extremos en la misma "boca" del agujero de gusano o en "bocas" distintas. Encontramos que a una cierta separación entre el quark y el antiquark, la configuración dominante corresponde en la teoría de gravedad dual a una cuerda que atraviesa el agujero de gusano, y que por tanto, domina la configuración que corresponde a un par-antiquark interactuando con otro par quark-antiquark que se encuentra en otra teoría cuántica.

Además del potencial de interacción, existen otras cantidades que podemos calcular a partir de este escenario. Las partículas cuánticas tienen la propiedad de entrelazarse, es decir, de guardar la información de una configuración que se encuentra espacialmente alejada de ella. En este sentido, las regiones espaciales de nuestra teoría similar a QCD se entrelazan, y existe una cantidad que se encarga de cuantificar este entrelazamiento. Esta cantidad le llamamos entropía de entrelazamiento. Como veremos en este trabajo, podemos realizar un cálculo para obtener esta cantidad en la configuración dual a nuestro agujero de gusano atravesable, y obtener aún mas información de dicha teoría dual.

La pregunta ahora es si dos teorías cuánticas, que se encuentran espacialmente separadas pueden comunicarse entre sí. La correspondencia holográfica parece indicar que en efecto estas dos teorías están interactuando. Se han estudiado otros escenarios de agujeros de gusano no atravesables y se ha encontrado que la entropía de entrelazamiento cuantifica únicamente el entrelazamiento entre regiones de la misma teoría. Nuestra conjetura, es que al tener un agujero de gusano atravesable, las dos teorías se pueden comunicar entre sí, y por tanto, puede existir entrelazamiento entre ambas.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 estudiaremos los fundamentos teóricos en los que se basa la teoría de cuerdas y la correspondencia holográfica, así como el trabajo previo realizado en torno al cálculo del potencial quark-antiquark en SYM $\mathcal{N} = 4$, así como el cálculo de la entropía de entrelazamiento holográfica en el contexto de teorías de gravedad de orden superior. En el Capítulo 3 se mencionan los antecedentes de este trabajo, y los resultados obtenidos realizando cálculos similares en otros escenarios de gravedad, así como la deducción de la solución que nosotros utilizaremos para este trabajo. En el Capítulo 4, mostraremos los cálculos realizados y los resultados obtenidos en los dos artículos que se elaboraron, así como un breve análisis de dichos resultados. En el Capítulo 5 se esboza el cálculo del funcional de entropía de entrelazamiento holográfica en el escenario en el que calculamos el potencial par quark-antiquark. Finalmente, en el Capítulo 6 se muestran las conclusiones del trabajo de investigación ya publicado, se discute su interpretación en términos de las teorías duales al agujero de gusano, y se comenta la relación de estos resultados con el trabajo de investigación en curso.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Teorías Cuánticas de Campo

Durante la primera mitad del siglo XX las ideas acerca de la naturaleza de las partículas que conforman la materia sufrieron una revolución con la introducción de la llamada teoría cuántica propuesta por Schrödinger y Heisenberg (entre otros), ver por ejemplo [4, 5]. A partir de dicho formalismo hemos logrado entender bastante bien la dinámica de procesos moleculares, atómicos y nucleares. Sin embargo, al considerar partículas que se mueven en el espacio-tiempo plano con velocidades cercanas a la de la luz, debemos considerar también la teoría de la relatividad especial. Gracias a la necesidad de incorporar esta teoría en la descripción de la física cuántica, es que ahora entendemos que, al menos a nivel perturbativo, la naturaleza está constituida por otro tipo de objeto fundamental, los campos, del cual las diferentes partículas no son más que sus excitaciones fundamentales. La tarea principal de la teoría cuántica de campos es encontrar los posibles campos que a nivel clásico representen magnitudes físicas (por ejemplo el campo eléctrico en electrodinámica), formular una acción que permita obtener ecuaciones de movimiento consistentes para estos campos, y promover la correspondiente teoría de campos clásica a una teoría cuántica, y así obtener, a partir del proceso de cuantización, partículas fundamentales. Comenzaremos con el caso más sencillo, esto es el campo escalar masivo libre real. Para ello revisaremos algunos conceptos fundamentales de la mecánica cuántica y de la relatividad especial.

2.1.1. Campos cuánticos.

En mecánica cuántica, la dinámica de una partícula está determinada por un elemento de un espacio de Hilbert que usualmente se denota como $|\psi\rangle$ y al cual llamamos el *estado* de la partícula. La amplitud de probabilidad de encontrar a una partícula en un cierto estado $|\psi\rangle$ sabiendo que está en un estado $|\phi\rangle$ se calcula mediante el producto interior de estos estados, que denotamos como $\langle\phi|\psi\rangle$ [7]. Las cantidades observables en una medición están representadas por operadores hermitianos (son iguales a su conjugado transpuesto) que al actuar sobre un estado determinan el valor esperado $\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$ del operador. En el llamado cuadro de Schrodinger (donde el estado depende del tiempo) la evolución temporal de un estado $|\psi\rangle$ está determinado por la ecuación de Schrodinger [4]:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \mathcal{H}|\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

donde \mathcal{H} es el operador correspondiente al Hamiltoniano y \hbar es la constante de Planck¹ dividida por 2π . Es posible describir a este mismo sistema en el cuadro de Heisenberg, donde ahora la dependencia temporal está en los operadores, y la ecuación de movimiento es [7]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O}(t) = [\mathcal{O}(t), \mathcal{H}], \quad (2.2)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ representa el conmutador de dos operadores definido como $[A, B] = AB - BA$. En el espacio de posiciones (donde la base está constituida por estados con posición definida), el estado contiene la información de la *función de onda*, que a su vez nos dice la distribución de probabilidad de encontrar a la partícula en un lugar del espacio a un tiempo dado. Gracias a estas herramientas podemos predecir un gran número de fenómenos a escalas atómicas y moleculares. A pesar del éxito de esta teoría para describir algunos procesos a escalas subatómicas, no es capaz de explicar un gran número de fenómenos que involucran velocidades cercanas a la de la luz o energías muy altas en comparación con la energía de los objetos macroscópicos con los que estamos familiarizados cotidianamente, por ejemplo, fenómenos como el confinamiento de los nucleones (las partículas que conforman el núcleo del átomo). Los primeros intentos de generalizar la ecuación de Schrödinger a una ecuación relativista para una partícula fracasaron, principalmente por el hecho de que se interpretaban como ecuaciones de una sola partícula cuántica. Ahora entendemos que una consecuencia de requerir que nuestra teoría sea cuántica y relativista, es que debemos considerar teorías de muchas partículas, que no son más que excitaciones cuánticas del objeto fundamental de nuestra teoría, es decir, el campo. En física clásica, un campo es una función de las coordenadas espaciales (o espacio-temporales, en teoría de la relatividad) que se clasifica de acuerdo a la manera en la que transforma al aplicar un cierto cambio de coordenadas. Cuando la imagen de esta función consiste de un único número, el campo permanece invariante ante transformaciones de coordenadas, y se le denomina campo escalar. Un ejemplo de un campo escalar es la temperatura en una habitación como función de la posición. Ejemplos de campos no escalares son el campo electro-magnético, o aquel que describe a un electrón, que no son invariantes ante cambios de coordenadas espacio-temporales. Cada uno de estos campos está representado por un conjunto de cuatro números que se organizan en un vector, por lo que se conocen como campos vectoriales. Para entender cómo clasificar a estos campos al aplicar un cambio de coordenadas en el espacio-tiempo debemos primero entender los fundamentos de la teoría de la Relatividad Especial.

Relatividad Especial

La idea principal de la Relatividad Especial[7] es suponer que en un universo homogéneo e isótropo, las tres dimensiones espaciales que observamos, así como la dimensión temporal, pueden ser descritas por un mismo espacio métrico, donde la distancia entre puntos (t, x, y, z) , $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ se mide de la siguiente manera en la signatura $(-, +, +, +)$:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.3)$$

que también abreviamos como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

siendo ds el elemento de longitud del arco de la trayectoria seguida por una partícula puntual masiva, y $\eta_{\mu\nu}$ la matriz 4×4 con $(-1, 1, 1, 1)$ en la diagonal y cero en otro caso.

¹La constante de Planck define la cantidad de energía que puede transportar un fotón, de acuerdo con la frecuencia de la onda en la que viaja y tiene un valor igual a $6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$.

A este espacio-tiempo lo conocemos como espacio-tiempo de Minkowski [8]. Este hecho es consecuencia de postular que las leyes de la física deben cumplirse en cualquier sistema de referencia inercial², y que la velocidad de la luz c , es la misma para cualquier sistema de referencia inercial. Además suponemos que en nuestro universo las mediciones en el espacio-tiempo hechas por relojes y barras son independientes de su historia pasada.

Así como en el espacio Euclidiano las rotaciones dejan invariantes la métrica Euclidiana, en el espacio-tiempo de Minkowski existe un conjunto de transformaciones con esta misma propiedad, que llamamos *transformaciones de Lorentz*, y en este trabajo denotamos como $L_{\mu\nu}$, donde μ, ν corren sobre las coordenadas espacio-temporales denotadas como (t, x, y, z) o (x_0, x_1, x_2, x_3) . Por ejemplo, con $D = 4$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Las transformaciones de Lorentz están constituidas por dos tipos de transformaciones; las rotaciones espaciales, que nos son familiares de la geometría Euclidiana, y los llamados *boosts de Lorentz*, que mezclan entre sí a las coordenadas espacio-temporales. Por ejemplo, una rotación por un ángulo θ del cuadvectores (t, x, y, z) alrededor del eje z corresponde a la siguiente transformación,

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L_{3,\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

mientras que un boost de Lorentz a lo largo del primer eje coordenado, puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L_{0,\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi & 0 & 0 \\ \sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

donde χ es el parámetro de la transformación, y está relacionado la velocidad de un observador en un marco de referencia inercial mediante $\beta = v/c = \tanh \chi$. Estas matrices cumplen con la propiedad:

$$L_\nu^\mu L_\sigma^\rho \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.7)$$

En conjunto con las rotaciones usuales del espacio Euclidiano, estas transformaciones forman un grupo, denominado *grupo de Lorentz* y que denotamos como $SO(1, 3)$. Si además consideramos traslaciones en el espacio-tiempo, obtenemos el llamado grupo de Poincarè. Como se estudia en un curso de teoría cuántica de campos, las partículas cuánticas pueden entenderse como objetos que pertenecen a (y transforman como) una cierta representación³ de este grupo[7].

Campo Escalar Real Masivo

Consideremos por simplicidad un campo escalar real masivo. La regla de transformación de este campo bajo una transformación de Lorentz $x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv L_\nu^\mu x^\nu$ es simplemente $\phi(x^\nu) \rightarrow \phi'(x^\nu) \equiv \phi(L_\mu^{\nu-1} x^\mu)$, donde μ y ν son los índices espacio-temporales. La dinámica

²Un sistema de referencia inercial se define como aquel que cumple con la propiedad de que una partícula masiva se mueve a velocidad constante siempre que no se aplique una fuerza sobre ella.

³En teoría de grupos, una representación es un objeto que conserva las propiedades del producto (es decir, un homeomorfismo) y de la transformación del grupo en cuestión. En el caso del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$, las matrices de Lorentz forman una representación vectorial, o fundamental de este grupo.

del campo escalar masivo $\phi(x, t)$ con masa m en espacio-tiempo plano está descrita por la llamada *acción de Klein-Gordon*[7, 9]:

$$S_{KG} = C \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad (2.8)$$

donde C es una constante. Esta acción proporciona, después de aplicar el principio variacional de Hamilton[9], la llamada *ecuación de Klein-Gordon*:

$$\square \phi - m^2 \phi = 0, \quad (2.9)$$

donde el símbolo \square denota el Laplaciano generalizado en el espacio-tiempo de Minkowski. Este es un campo libre, lo que significa que sus ecuaciones de movimiento son lineales. Clásicamente esta ecuación describe a un objeto que se extiende en 3 dimensiones espaciales, y que puede oscilar análogamente a como lo hace una membrana en 2 dimensiones, y a una cuerda en una dimensión. Para obtener una teoría de partículas cuánticas debemos *cuantizar* la teoría, lo cual significa promover el campo y las observables físicas a operadores cuánticos que obedecen ciertas reglas de conmutación. Una manera de hacer esto es seguir el procedimiento de la llamada *cuantización canónica*[7]. Definimos el *espacio de Fock* como el conjunto de estados de la forma $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$, siendo n el número de partículas del sistema. El i -ésimo elemento de este estado representa a una partícula con momento espacial \mathbf{p}_i . Definimos al vacío como el estado con menor energía dentro del espacio de Fock, y lo denotamos como $|0, 0, \dots, 0\rangle$. Denotamos como x y y a los cuadvectores (t, \mathbf{x}) y (t, \mathbf{y}) respectivamente. Así mismo denotamos como p al cuadvector $(E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$, donde $E_{\mathbf{p}}$ representa la energía de una partícula con momento espacial \mathbf{p} . Se puede demostrar, mediante la linealidad de la acción (2.8), que podemos realizar la siguiente descomposición en modos de Fourier del campo:

$$\phi(x^\mu) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (2.10)$$

donde definimos los operadores de ascenso y descenso $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ como aquellos que crean o destruyen partículas dado un estado en el espacio de Fock, es decir,

$$a_{\mathbf{p}_j}^\dagger |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+1}, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \quad (2.11)$$

y

$$a_{\mathbf{p}_j} |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \dots, \mathbf{p}_n\rangle, \quad (2.12)$$

El vacío cuántico o estado base cumple con la propiedad de que $a_{\mathbf{p}} |0, 0, \dots, 0\rangle = 0$ para todo \mathbf{p} . El factor $E_{\mathbf{p}}$ aparece en el denominador de (2.9) debido a que la expresión anterior debe ser invariante de Lorentz. Los operadores de ascenso y descenso generalizan al caso continuo el sistema de n osciladores armónicos, cada uno denotado por un índice j . En este caso, dichos operadores conmutan entre sí, a menos que sus índices coincidan. Para satisfacer la generalización de estas relaciones de conmutación sobre estos operadores en el caso continuo, $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 2\pi \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^4$, debemos imponer las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales sobre el campo y su momento conjugado $\hat{\pi}(x^\mu) \equiv \frac{\delta S_{KG}}{\delta \dot{\phi}}$, es decir [9]

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad [\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = 0. \quad (2.13)$$

Actuando con los operadores de ascenso y descenso sobre el estado base o vacío, podemos construir estados de varias partículas. El hecho de que esta teoría sea libre, implica que

⁴Usamos unidades en las que la constante de Planck es igual a uno.

ninguno de los términos en la acción representa una interacción, y la única constante que determina toda la dinámica es la masa del campo. Podemos calcular la amplitud de probabilidad de propagación de una partícula escalar desde un punto espacial \mathbf{x} a un punto \mathbf{y} , que es el tipo de cantidad que usualmente se mide en los experimentos. Para preservar causalidad, debemos considerar una cantidad que considere la amplitud de propagación hacia adelante y hacia atrás en el tiempo. Esto está dado por el *propagador de Feynman* [9]:

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.14)$$

que es una función de Green del operador de Klein-Gordon. Aquí T representa el orden temporal de operadores⁵. El término $i\epsilon$ en el denominador aparece porque debemos integrar sobre un contorno complejo C que rodea los polos $\pm E_{\mathbf{p}}$, lo cual es equivalente a integrar sobre el eje real desplazando los polos por una cantidad imaginaria, y después tomar el límite cuando esta cantidad tiende a cero. A pesar de que el caso del campo escalar se usa generalmente como modelo introductorio, existen casos importantes en los que es necesario considerar campos escalares en la teoría [9].

Campo de Dirac y QED.

Habiendo entendido la teoría libre de un campo escalar real masivo, podemos preguntarnos qué otras representaciones del grupo de Poincarè podemos construir. El siguiente caso en simplicidad es estudiar la llamada *representación espinorial*, que al cuantizar da lugar a partículas con masa y espín 1/2, por ejemplo los electrones. Para ello, debemos definir las matrices 4×4 γ^μ , con $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $i = 1, 2, 3$:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

donde σ^i son las matrices de Pauli⁶. Estas matrices satisfacen el *álgebra de Clifford* [9]:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (2.16)$$

donde el símbolo $\{ \}$ denota el anticonmutador. Si definimos $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, podemos probar que los operadores $M(\Lambda) = e^{iS^{\mu\nu}}$ satisfacen las reglas de conmutación del grupo de Poincarè y por lo tanto, forman una representación de este último. Estos operadores actúan sobre columnas de cuatro componentes complejas llamados *espinores de Dirac*, y que denotamos como $\psi(x, t)$ [9]. Definimos el conjugado de un espinor como $\bar{\psi} = \gamma_0\psi^\dagger$. La ecuación relativista que describe a un campo espinorial se obtiene de la Lagrangiana [9]

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (2.17)$$

La ecuación de movimiento resultante se puede escribir como:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (2.18)$$

que es conocida como *ecuación de Dirac* [9]. Siguiendo el método de cuantización canónica podemos deducir que las excitaciones de este campo aparecen como partículas de espín

⁵El orden temporal de operadores T se define como aquel que toma cualquier producto de operadores, donde cada operador se define a un tiempo dado, y cambia el orden de modo que cada operador tenga solo operadores posteriores a la izquierda y operadores anteriores a la derecha. [7]

⁶Las matrices de Pauli son un conjunto de matrices σ^i que representan al operador de momento angular intrínseco en la dirección i , y que están dadas por $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1/2. Además, estas excitaciones están cargadas eléctricamente, debido a la existencia de una simetría interna (que no está relacionada con la conservación de alguna observable espacio-temporal, sino con la fase del espinor) asociada al grupo $U(1)$ que nos permite hacer la transformación

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta}\psi(x), \quad (2.19)$$

donde θ es un parámetro arbitrario[7, 9]. La razón es que al nivel de la Lagrangiana, los factores con exponencial compleja se cancelan al cambiar el signo del coeficiente i en el conjugado complejo del espinor ψ . En virtud del teorema de Noether[7], esta simetría da lugar a una corriente conservada cuya carga correspondiente puede identificarse con la carga eléctrica, y que denotamos como e . El propagador para esta teoría es el *propagador de Dirac*,

$$S_D(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i(x-y)\cdot p}, \quad (2.20)$$

donde el símbolo \not{p} se define como $\not{p} \equiv \gamma_a p^a$, y hemos usado el mismo contorno de integración que en el caso del propagador de Feynman[9]. La simetría $U(1)$ es de carácter *global*. Esto quiere decir que el parámetro θ que determina la transformación (2.19) es independiente de la posición en el espacio-tiempo. Si promovemos este parámetro a una función del espacio-tiempo, la simetría $U(1)$ se pierde, a menos que consideremos un vector de cuatro componentes $A_\mu(x, t)$, que transforma en la representación fundamental de $SO(3, 1)$, y realicemos el cambio de variables conjunto:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\Theta(x)}\psi(x) \quad , \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Theta(x), \quad (2.21)$$

junto con la sustitución

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.22)$$

en la acción (2.17). El campo A_μ es conocido como *campo de Maxwell*, y su excitación fundamental es una partícula de espín 1, sin masa, que corresponde al fotón, partícula que es mediadora de la interacción electromagnética [7]. La Lagrangiana que describe al campo de Maxwell se define en términos de la *intensidad de campo* $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, y se conoce como Lagrangiana de la *electrodinámica clásica*[7]. Ahora podemos escribir una Lagrangiana que describe a los dos campos:

$$L_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \not{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

donde $\not{D} = \gamma_\mu D^\mu$. Las ecuaciones de movimiento que resultan de esta Lagrangiana corresponden a las ecuaciones de Maxwell con fuentes eléctricas junto con la ecuación de Dirac (2.18). La transformación (2.21) nos da una libertad adicional que nos permite redefinir el campo A_μ restando una derivada total de una función arbitraria $\Theta(x)$. A esta libertad se le conoce como *invariancia de norma* [9]. Esta redundancia en la definición de los campos ocasiona que al cuantizar, la teoría tenga estados que no son físicos, lo cual quiere decir que poseen una norma que no es definida positiva. Existen dos caminos para lidiar con esta ambigüedad en la definición de la teoría. El primero de ellos consiste en escoger una norma particular y después cuantizar canónicamente. Por otro lado, podemos cuantizar quedándonos con los estados no físicos y después imponer ciertas constricciones sobre los operadores de creación y aniquilación, de manera que se descarten los estados no físicos. A la teoría cuantizada se le conoce como —electrodinámica cuántica o *QED*, por sus siglas en inglés. Las teorías invariantes de norma son sumamente importantes en la naturaleza, ya que, por ejemplo, el modelo estándar de la física de partículas es una teoría de este tipo cuyo grupo de simetría se descompone en un producto de representaciones que dan

lugar a las tres fuerzas fundamentales que engloba dicho modelo (ver por ejemplo, [9, 10]).

Al encender interacciones entre los campos mediante la adición de términos de acoplamiento a la Lagrangiana, como el término proporcional a e en (2.23), la descomposición en términos de operadores de ascenso y descenso de (2.8), que resuelve las ecuaciones de movimiento, ya no resulta válida debido a que dichas ecuaciones dejan de ser lineales, y de hecho resulta imposible encontrar el valor exacto de las amplitudes de dispersión de la teoría, salvo en casos excepcionales. Sin embargo, en muchos casos de interés podemos considerar a la teoría de campo como interactuante pero *débilmente acoplada*, lo que significa que el parámetro que determina la intensidad de las interacciones, conocido como *constante de acoplamiento* (por ejemplo, e en (2.23)), toma un valor pequeño cuando exploramos la teoría a escalas pequeñas de distancia. Para entender la manera en la que determinamos cómo interactúan dos campos distintos (también podemos considerar campos que interactúan con ellos mismos), nos conviene volver al caso más sencillo del campo escalar real masivo. La generalización del término cuadrático a una teoría interactuante con un término ϕ^3 resulta que no tiene un estado base estable. Consideramos entonces la teoría escalar ϕ^4 con constante de acoplamiento λ (que tiene unidades de kg^3ms), definida por la Lagrangiana:

$$L_{\phi^4} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.24)$$

Para analizar la contribución de las interacciones, podemos seguir el método de Feynman, Schwinger y Tomonaga, que consiste en hacer una expansión perturbativa del hamiltoniano en términos de propagadores de Feynman. Podemos definir un propagador ordenado en el tiempo, que está dado por

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}, \quad (2.25)$$

donde $|\Omega\rangle$ es el estado base de la teoría interactuante, que se define como el estado propio del operador Hamiltoniano que tiene el valor propio más pequeño. Se puede demostrar que en el caso libre esto equivale al propagador de Feynman. Podemos definir en general, el correlador de n puntos como el producto ordenado temporalmente de n operadores evaluados en posiciones espacio-temporales x_n en el cuadro de Heisenberg, y se representan por medio de [7]

$$G(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)) \equiv \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle. \quad (2.26)$$

Estas cantidades contienen toda la información física sobre las interacciones en la teoría, y nos permiten calcular las observables que se miden más frecuentemente en los experimentos, conocidas como *amplitudes de dispersión*, que se definen como la probabilidad de empezar un con un cierto conjunto de estados entrantes y terminar con un conjunto de estados salientes⁷ [7, 9]. Para calcular los correladores, usualmente seguimos el formalismo de *diagramas de Feynman*, que consiste en asignar líneas a los propagadores, y vértices a los términos de interacción, entre otras reglas que dependen de la teoría y que se denominan *reglas de Feynman*. Al final cada diagrama se traduce en una fórmula que nos permite calcular el correlador. La exactitud del cálculo depende del orden en la expansión perturbativa que consideremos. De esta manera, mientras consideremos procesos a mayor orden en el número de lazos de los diagramas de Feynman, el cálculo será más preciso [7].

⁷Estos estados, llamados estados asintóticos, se obtienen de considerar los estados en el cuadro de Heisenberg en el límite $t \rightarrow \pm\infty$.

Equivalentemente, podemos definir la integral de trayectoria [9]:

$$\langle \phi(x_1) | \phi(x_2) \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}, \quad (2.27)$$

donde la medida de integración se define como $\mathcal{D}\phi \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod_n \phi(x_n)$. Físicamente, esta definición nos dice que la amplitud de probabilidad de que las excitaciones cuánticas del campo se propaguen de un punto a otro del espacio-tiempo, puede calcularse sumando sobre todas las trayectorias clásicas, pesadas con el factor e^{iS} .

Para calcular las contribuciones a orden mayor o igual a dos, generalmente se requiere evaluar una integral en el rango de $-\infty$ a ∞ , dando lugar a una divergencia. La razón de esto se debe a que el vacío cuántico está fluctuando constantemente con infinitos grados de libertad, y por lo tanto su energía es infinita. Para obtener cantidades finitas en las amplitudes de dispersión, debemos redefinir los parámetros que aparecen en la Lagrangiana como parámetros desnudos, de manera que esta se separa en una parte renormalizada (libre de divergencias) y otra parte que incluye *contratérminos*, para absorber las divergencias en los correladores [10]. En términos de diagramas de Feynman, los contratérminos se representan por medio de diagramas que cancelan la parte divergente de los correladores. Los métodos de renormalización nos permiten deducir como las cantidades físicas de la teoría dependen de la escala energética μ que define estas cantidades físicas, conocida como *escala de renormalización*. Esta información está codificada en la *función beta*, y en la *dimensión anómala* definidas respectivamente como [9]

$$\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad \gamma = \frac{\mu}{2} \frac{\partial (\ln Z)}{\partial \mu}, \quad (2.28)$$

donde g es la constante de acoplamiento y Z es el factor que aparece en el contratérmino correspondiente. La forma en que la función beta depende de la escala energética está contenida en la *ecuación de Callan-Symanzyk*, que, por ejemplo, aplicando el formalismo de cuantización canónica al caso de QED, resulta [7]:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N\gamma \right) G_N(x; g_2, g_4, \mu) = 0. \quad (2.29)$$

Aquí $g_1(\mu)$ y $g_2(\mu)$ son funciones que se relacionan directamente con la constante de acoplamiento y la masa de los campos. Esta ecuación nos permite deducir que el acoplamiento o constante de estructura fina calculada a primer orden en la expansión perturbativa, definida como $\alpha_{QED} = e^2/4\pi$ depende de la escala energética dada por [9]:

$$\alpha_{QED}(\mu) = \frac{\alpha_{QED}(\mu_{ref})}{1 - \frac{2}{3\pi} \alpha_{QED}(\mu_{ref}) \ln(\mu/\mu_{ref})}, \quad (2.30)$$

donde μ_{ref} es una escala de referencia (equivalente a la masa del electrón) a la cual esta expresión deja de tener validez.

2.1.2. QCD y Súper Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$

La teoría que describe a la llamada fuerza fuerte, es la *cromodinámica cuántica* (o *QCD* por sus siglas en inglés), que es responsable entre otras cosas de que los protones y neutrones permanezcan confinados en el núcleo, es una teoría de norma *no-abeliana* con grupo de norma $SU(3)$ en 3+1 dimensiones [10]. Esto quiere decir que el campo de norma transforma en una representación matricial de este grupo, y que el producto definido en el

grupo no es conmutativo. Las partículas asociadas a esta representación son bosones sin masa de espín uno, llamados *gluones*. A diferencia de los fotones, estas partículas están cargadas con un tipo de carga llamada carga de *color*. En la sección anterior estudiamos el caso más familiar de una teoría de norma abeliana, y argumentamos que la densidad Lagrangiana corresponde al escalar formado por la contracción de dos tensores $F_{\mu\nu}$, es decir, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. La acción que generaliza esto a teorías no abelianas da lugar a las llamadas *teorías de Yang-Mills* [11];

$$S_{YM} = -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}\{F_{\mu\nu}^I F_I^{\mu\nu}\}, \quad (2.31)$$

donde $F_{\mu\nu}^I$ se define de manera análoga al caso de QED, pero ahora el campo A_μ^I es una matriz 3×3 hermitiana y sin traza que es un elemento del álgebra de $SU(3)$. El índice I corre sobre el número de generadores del grupo, es decir, $I = 1, \dots, 8$. La traza es sobre los índices matriciales y aparece porque en este caso la combinación $F_{\mu\nu}^I F_I^{\mu\nu}$ no es invariante de norma en contraste con QED, mientras que su traza sí lo es. Podemos agregar materia fermiónica en la representación fundamental de $SU(3)$ si definimos los espinores de Dirac y su regla de transformación bajo este grupo como:

$$\psi_c^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^{(s)}(x) \\ \psi_2^{(s)}(x) \\ \psi_3^{(s)}(x) \end{pmatrix} \rightarrow \psi_c'^{(s)} = U(x)\psi_c^{(s)}(x) = \exp(i\theta_I(x)t^I)\psi_c^{(s)}(x), \quad (2.32)$$

donde $\theta_I(x)$ es una matriz que parametriza la transformación, y t^I representa a los generadores del álgebra del grupo $SU(3)$. El índice c corre de 1 a 3, y corresponde a la carga fuerte o *color*. Estos fermiones aparecen en tres generaciones, denotadas por el índice (s) , que corresponden a la carga *electrodébil* o de *sabor* [7]. Esta carga conservada aparece debido a la acción que describe a la fuerza responsable de la interacción nuclear débil posee una simetría asociada al grupo $SU(2)$, que engloba también a la interacción electromagnética. Cuando consideramos la acción de Yang-Mills acoplada mediante un acoplamiento mínimo a la Lagrangiana de Dirac para los fermiones, obtenemos la teoría descrita por [9]:

$$L_{QCD} = \bar{\psi}_c ((i\not{D}) - m) \psi_c - \frac{1}{4} \text{Tr}\{(F_{\mu\nu}^I)^2\}. \quad (2.33)$$

A las partículas fermónicas que resultan de cuantizar esta teoría se les conoce como *quarks*. Análogamente al caso de QED, podemos deducir tanto las reglas de Feynman como los correspondientes contratérminos. De la misma forma podemos determinar la función beta a un lazo, y la forma en que la constante de acoplamiento depende de la escala energética en una teoría de Yang-Mills con grupo de norma $SU(3)$ [7]:

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}(11N_c - 2N_s) \ln(\mu/\Lambda_{QCD})}. \quad (2.34)$$

Aquí N_c es el número de colores, y N_s el número de sabores, mientras que $\Lambda_{QCD} \simeq 200 \text{ MeV}$ es una constante característica de la teoría, a la cual α_{YM} calculada a dos lazos diverge. En el caso del grupo de norma $SU(3)$ con 3 sabores esta función resulta negativa. Como consecuencia, en escalas energéticas cercanas a cero la teoría está fuertemente acoplada y resulta imposible hacer una expansión perturbativa en términos de un parámetro pequeño [7]. A esto se le conoce como *libertad asintótica*, y su descubrimiento fue la razón por la cual Gross, Politzer y Wilczek recibieron el Premio Nobel de física en 2004 [14]. Este fenómeno se ilustra en la Figura 2.1.2. Este hecho vuelve muy difícil la tarea de obtener predicciones experimentales en el régimen de bajas energías donde la teoría

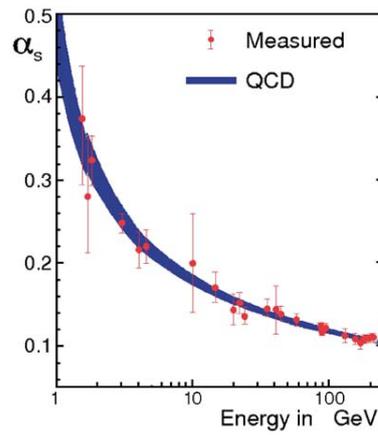


Figura 2.1: Libertad asintótica en QCD. La constante de estructura fina tiende a cero conforme vamos a energías grandes. En cambio, a energías pequeñas, el acoplamiento crece, y la teoría se vuelve confinada y fuertemente acoplada. Esto contrasta con el caso de QED donde la constante de acoplamiento tiende a cero cuando vamos a energías pequeñas. Imagen tomada de [7].

está fuertemente acoplada, y ha dado lugar a que se desarrollen nuevas estrategias para entender y describir la fuerza fuerte.

Los resultados experimentales muestran que a temperaturas comparables con Λ_{QCD} el acoplamiento se vuelve pequeño y los nucleones se desconfinan. Esto da lugar, durante un tiempo del orden de $1 \text{ fermi}/c$, a un estado de la materia formado por gluones y quarks que interactúan, formando una especie de plasma, conocido como *plasma de quarks y gluones* [7]. A altas temperaturas, la energía es tan grande que no notamos diferencia si hacemos cambios en la escala de renormalización en este régimen, y por lo tanto, podemos describir a esta teoría como una teoría aproximadamente conforme. Es posible crear el plasma de quarks y gluones en el laboratorio, acelerando, por ejemplo, núcleos de oro a velocidades ultrarelativistas y haciéndolos colisionar [15].

Teoría de Super Yang-Mills.

Una propiedad importante que presentan algunas teorías de norma es un tipo de simetría que no es espacio-temporal ni interna, sino que se encarga de mezclar los campos bosónicos y fermiónicos de manera que la acción quede invariante, y que a cada partícula de la teoría le corresponda una partícula con estadística opuesta (*superpareja*). A esto se le conoce como *supersimetría* [7]. Los generadores de la transformación se conocen como *supercargas*, y se denotan como Q_A , donde A corre sobre el número de transformaciones supersimétricas independientes, de forma que al actuar con ellas sobre los campos obtenemos las correspondientes superparejas. Pueden existir distintas formas de hacer una transformación de este tipo, y en ese caso tendremos más de una supercarga.

Existe un ejemplo importante de una teoría supersimétrica que puede considerarse como prima de QCD y que es útil como laboratorio teórico para explorar propiedades generales de las teorías de norma no-abelianas. A esta teoría le conocemos como *super Yang-Mills* $\mathcal{N} = 4$ en $(3 + 1)$ dimensiones, o simplemente *SYM* $\mathcal{N} = 4$. Esta denominación proviene del hecho de que tenemos 4 supercargas, o equivalentemente 4 formas distintas de mezclar los campos entre sí de manera que la teoría se quede invariante. El contenido de campos en una teoría de Yang-Mills con un número de supersimetrías $\mathcal{N} \leq 4$ arbitraria consiste principalmente de multipletes de componentes del campo de norma A_μ , fermiones de Weyl izquierdos ψ_a y λ_a , y campos escalares X y H . En particular para $\mathcal{N} = 4$, tenemos

el multiplete de norma $(A_\mu \lambda_a^A X^I)$, donde λ_a^A , $A = 1, 2, 3, 4$ son fermiones izquierdos de Weyl ⁸, y X^I con $I = 1, 2, \dots, 6$ son campos escalares reales. Bajo el grupo de supersimetrías $SU(4)_R$ el campo de norma A_μ es un singulete, los fermiones de Weyl se transforman en la representación fundamental **4**, y los escalares X^I bajo la representación **6**. Estos campos están contenidos en el multiplete de norma que escribimos como $(A_\mu, \lambda_a^A, X^I)$. Entonces la Lagrangiana de SYM está dada por [7]:

$$L_{N=4 \text{ SYM}} = Tr \left\{ \frac{-1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}_a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i D_\mu X^i D^\mu X^i \right. \\ \left. + \sum_{a,b,i} g_{YM} C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{i,j} [X^i, X^j]^2 \right\} \quad (2.35)$$

$$i = 1, 2, \dots, 6 \quad a, b = 1, \dots, 4$$

donde g_{YM} y θ_I son las constantes de acoplamiento de la teoría, mientras que las C_{ab}^i son las constantes de estructura ⁹ del álgebra de supersimetría.

Existe otra simetría que esta teoría presenta, lo cual puede comprobarse calculando la función beta, que es igual a cero. Cuando la función beta es igual a cero, la constante de acoplamiento es independiente de la escala energética, y por lo tanto, la teoría resulta ser invariante ante reescalamientos [7]. Esta simetría, es una de las que necesariamente se deben presentar para tener una propiedad que se conoce como *invariancia conforme*. Para finalizar esta sección, estudiaremos a continuación dicha simetría.

Invariancia conforme

Una variedad D -dimensional es llamada *conformalmente plana* si el elemento invariante de línea puede ser escrito en la forma [7]

$$ds^2 = e^{\omega(x^\mu)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.36)$$

El *grupo conforme* es el subgrupo del grupo general de transformaciones coordenadas que preserva la condición (2.36). Geométricamente, el grupo conforme preserva ángulos entre curvas mientras se reescalan las distancias. Además de los cambios de escala, las transformaciones conformes son, o incluyen rotaciones (considerando boosts de Lorentz) y traslaciones, además de un tipo de transformaciones más complicadas conocido como *transformaciones conformes especiales* [7].

Por ejemplo, si un campo escalar $\phi(z, \bar{z})$ transforma bajo el cambio de escala $z \rightarrow \lambda z$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $z = x_0 + ix_1$) de acuerdo a

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \lambda^h \lambda^{-\bar{h}} \phi(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}) \quad (2.37)$$

se dice que tiene dimensión conforme (h, \bar{h}) [7]. Si el campo campo en cuestión transforma bajo $z \rightarrow f(z)$ como

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad (2.38)$$

⁸Un fermion de Dirac ψ puede descomponerse en dos fermiones Weyl, que transforman de manera independiente bajo transformaciones de Lorentz, es decir, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix}$, donde ψ_I y ψ_D representan fermiones de Weyl izquierdo y derecho, respectivamente [7].

⁹Las constantes de estructura son aquellas constantes que satisfacen $[t_b, t_c] = i C_{b,c}^a t^a$, donde t^a son los generadores de un grupo, y por tanto, contienen toda la información de las reglas de multiplicación de dicho grupo. A este conjunto de relaciones de conmutación se le conoce como un *álgebra de Lie* [10].

es llamado campo *primario* de dimensión conforme (h, \bar{h}) [7], donde \bar{f} representa el conjugado de la función compleja f . Si restringimos f al subgrupo $SL(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, el campo ϕ se conoce como campo *cuasi-primario* [7]. Un resultado importante es que en algunas teorías de este tipo, en dos dimensiones, las funciones de correlación de n con $n \leq 3$ puntos pueden derivarse exactamente a partir de las simetrías de la teoría, incluso sin necesidad de conocer la acción [15]. En el caso de la función de dos puntos de dos campos cuasi-primarios en $D = 2$, la simetría conforme de $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ fija la función de correlación a la forma[7]:

$$\langle \phi_i(z) \phi_j(w) \rangle = \frac{d_{ij} \delta_{h_i, h_j}}{(z-w)^{2h_i}} \quad (2.39)$$

donde d_{ij} es una constante llamada *constante de estructura*. Para una función de correlación de tres puntos tenemos:

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} + z_{23}^{h_2+h_3-h_1} + z_{13}^{h_1+h_3-h_2}}, \quad (2.40)$$

donde $z_{ij} = z_i - z_j$ [15]. Cuando la teoría conforme tiene dimensión $D \geq 2$, es posible deducir expresiones similares para las funciones de correlación, imponiendo restricciones sobre estas a través de la invariancia bajo el grupo conforme [9].

En el caso de la teoría de *SYM* esta invariancia puede mezclarse con la supersimetría $\mathcal{N} = 4$, dando lugar a un grupo que engloba a estas dos simetrías, conocido como *grupo superconforme*, y nos brinda una manera de organizar los operadores de la teoría en términos de familias generadas por operadores primarios superconformes [15].

2.2. Teoría General de la Relatividad

En esta sección estudiaremos los conceptos más importantes dentro de la teoría de la Relatividad General y la llamada geometría Riemanniana, con énfasis en teorías de gravedad con correcciones a orden superior en la curvatura, escenarios que usaremos en gran parte de este trabajo.

En la sección anterior resumimos brevemente los fundamentos de la relatividad especial, la cual nos sirve para explicar la cinemática y dinámica de cuerpos que se mueven con velocidades cercanas a la de la luz. Aprendimos que bastaba con suponer ciertas propiedades del espacio-tiempo, además de dos postulados para formular esta teoría, la cual llevó a Einstein a conjeturar que el espacio y el tiempo formaban parte de una misma estructura. Para encontrar la teoría que relaciona la descripción de la estructura espacio-temporal con la fuerza de gravedad, Einstein tuvo que formular un tercer postulado, que se conoce como el *principio de equivalencia* [8]:

Los resultados de cualquier experimento local realizados en un marco de referencia que cae libremente en un campo gravitacional son independientes de la velocidad y de la posición de este.

Como veremos más adelante, dicho principio puede reformularse en términos de las trayectorias de partículas que minimizan la distancia propia en espacio-tiempos curvos. Este tipo de espacio-tiempos, al igual que el espacio de Minkowski, pertenecen al conjunto de variedades que se conocen como *variedades diferenciales*, concepto que definiremos a continuación.

2.2.1. Curvatura y Ecuaciones de Einstein

Una variedad diferencial D -dimensional es una estructura matemática que puede pensarse intuitivamente como un espacio suave que localmente se ve plano, en el mismo sentido en que la Tierra parece ser plana cuando recorremos distancias relativamente cortas respecto al radio terrestre. Formalmente, es un espacio topológico junto con una familia de pares $\{U_i, \phi_i\}$, donde ϕ_i es un homomorfismo del subconjunto abierto U_i a un subconjunto de \mathbb{R}^d , tal que estos subconjuntos abiertos cubren todo el espacio topológico [16]. Además debe cumplirse que para las intersecciones no vacías $U_i \cap U_j$ el mapeo $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sea infinitamente diferenciable. Consideremos una variedad descrita por un conjunto de coordenadas x^μ , con $\mu = 0, \dots, D-1$. La manera en que medimos distancias en esta variedad está determinada por la *métrica* $g_{\mu\nu}(x^\mu)$, un campo tensorial¹⁰ de rango (0,2) que nos permite escribir el elemento de línea ds^2 como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.41)$$

donde los índices μ y ν corren sobre las coordenadas espacio-temporales. El caso más sencillo en el que podemos estudiar la dinámica de este espacio-tiempo es considerar una partícula masiva que se mueve en dicha geometría. La acción de la partícula relativista libre puede escribirse considerando que de entre todas las trayectorias posibles, esta seguirá la que minimice la longitud de su trayectoria propia, definida por:

$$S = -m \int d^D x \sqrt{-ds^2} = -m \int d^D x \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} d\lambda, \quad (2.42)$$

donde λ es un parámetro afín (en este caso el llamado tiempo propio), m es la masa de la partícula y D es la dimensión espacio-temporal [17]. Podríamos intentar escribir la ecuación que rige el comportamiento de una partícula bajo la influencia de la gravedad en términos de un potencial gravitatorio, de manera análoga a como se procede en gravedad Newtoniana. Sin embargo, gracias al principio de equivalencia, sabemos que una partícula que cae bajo la influencia de este potencial gravitatorio es equivalente a una partícula que sigue una trayectoria *geodésica* en una variedad diferencial, es decir, una curva que extremiza la acción (2.40) de la partícula y cuya ecuación se escribe en términos de la métrica como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (2.43)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ es la *conexión de Levi-Civita*, o *símbolo de Christoffel*, que se define en términos de las primeras derivadas de la métrica como [16]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (2.44)$$

De esta manera, lo que antes entendíamos como una partícula bajo la acción de la fuerza de gravedad, se vuelve una partícula siguiendo una trayectoria que está determinada por las propiedades geométricas del espacio-tiempo.

Si una ecuación tiene sentido físico, entonces debe ser *covariante*, es decir, la dinámica debe ser independiente del sistema de referencia. Si una ecuación contiene, por ejemplo, un covector (tensor de rango (0,1), V_μ , proporcional a la derivada parcial ∂_μ , entonces esta ecuación no es covariante, dado que ∂_μ *no* transforma como un covector. La manera

¹⁰Si un objeto $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ que depende de las coordenadas satisface la regla de transformación $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(\bar{x}) = \frac{\partial x^{\bar{\mu}_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\bar{\mu}_2}}{\partial x^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x^{\bar{\mu}_n}}{\partial x^{\nu_n}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\bar{\mu}_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x^{\bar{\mu}_2}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x^{\bar{\mu}_n}} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(\bar{x})$, entonces se dice que es un campo tensorial de rango (n, n) . En particular la métrica es un tensor de rango (2,0).

de solucionar esto es definir una nueva versión de derivada que transforma de manera covariante [16]:

$$\nabla_\lambda V_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \partial_\lambda V_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu V_{\nu\dots}^{\rho\dots} + \dots - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho V_{\rho\dots}^{\mu\dots}, \quad (2.45)$$

donde los índices μ , ν , λ y ρ corren sobre las coordenadas espacio-temporales. Entonces dada una ecuación que involucra derivadas parciales, podemos volverla independiente del marco de referencia sustituyendo las derivadas parciales ordinarias por la *derivada covariante* que acabamos de definir y sustituyendo $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$. Esta sustitución es una manera de implementar lo que se conoce como *acoplamiento mínimo* [17], y es la manera más simple de agregar interacciones entre los diferentes campos de la teoría, incluyendo a la métrica.

Según la Relatividad General, la dinámica del espacio-tiempo está determinada por una ecuación tensorial que involucra ciertas cantidades que definimos a continuación. Estas cantidades se construyen a partir de la métrica. El llamado *tensor de Ricci* $R_{\mu\nu}$ y el *escalar de curvatura* R

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} g_{\rho\alpha} R_{\mu\lambda\nu}{}^\rho, \quad (2.46)$$

se definen como las únicas dos contracciones posibles del *tensor de Riemann* [16];

$$R_{\mu\lambda\nu}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\rho - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\rho. \quad (2.47)$$

La acción que proporciona la ecuación de movimiento se conoce como la *acción de Einstein-Hilbert* y está dada por [16]:

$$S = S_{EH} + S_M = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^D x (\sqrt{-g} R) + S_M, \quad (2.48)$$

donde g representa el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, y G_N es la constante de Newton en D dimensiones. La acción S_M representa los términos que involucran campos de materia, o fuentes del campo gravitacional. Definimos además el *tensor de energía-momento* como [16]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (2.49)$$

un tensor simétrico de rango 2, que contiene la información acerca de la densidad de energía y momento, así como de los esfuerzos para una configuración de materia descrita por la acción S_M .

Con las herramientas que hemos desarrollado, podemos escribir las llamadas ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R + 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2.50)$$

donde Λ es la *constante cosmológica*¹¹. Esta integral debe ser evaluada en la variedad diferencial \mathcal{M} que representa al espacio-tiempo. Si además esta variedad posee una frontera $\partial\mathcal{M}$, la presencia de las segundas derivadas de la métrica en las ecuaciones de movimiento

¹¹Valor numérico que representa la densidad de energía del vacío [7]. Está relacionada de manera inversamente proporcional con el radio de curvatura. De esta manera $\Lambda = 0$ para un espacio plano, es positiva para un espacio esférico y negativa para un espacio hiperbólico, suponiendo que estamos en un espacio homogéneo e isotrópico. Cantidad inicialmente introducida por Einstein para dar consistencia a su modelo estático del universo, antes de que fuese descartado por las observaciones de Hubble [17].

ocasiona que el principio variacional no proporcione las ecuaciones de movimiento correctas [16]. Para solucionar esto, debemos imponer, mediante la adición de un término de frontera en la acción gravitacional, condiciones de frontera sobre la métrica y su derivada. York, Gibbons y Hawking dedujeron la forma en que estas condiciones modifican la acción gravitacional [18]:

$$S = S_{EH} + S_M + S_{GHY}, \quad (2.51)$$

con el término de frontera de *Gibbons-Hawking-York* dado por:

$$S_{GHY} = \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} K, \quad (2.52)$$

donde h y K son respectivamente el determinante de la *métrica inducida* $h_{ab} = g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$, y la traza de la *curvatura extrínseca*, definida por $\mathcal{K}_{ab} = n_{\mu;\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$, donde n_μ es un vector normal a la hipersuperficie correspondiente. En una teoría de gravedad, debemos obtener e incluir estos términos de frontera en la acción para que el principio variacional esté bien definido.

Dada una solución a las ecuaciones de gravedad, frecuentemente es útil estudiar cuáles son las transformaciones de coordenadas, o *difeomorfismos* que dejan invariante la geometría del espacio-tiempo, es decir, cuáles son las simetrías de la métrica, también llamadas *isometrías*. Dado un tensor $g_{\mu\nu}$ y un campo vectorial ζ , definimos la *derivada de Lie*¹² como [8, 16]:

$$L_\zeta g_{\mu\nu} = \zeta^c \nabla_c g_{\mu\nu} + g_{\mu c} \nabla_\nu \zeta^c + g_{c\nu} \nabla_\mu \zeta^c = \nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu. \quad (2.53)$$

Esta operación recibe el nombre de derivada debido a que evalúa el cambio del tensor a lo largo del flujo del campo vectorial. Si existe un campo vectorial para el cual la derivada de Lie de la métrica a lo largo de este campo se anula, significa que la métrica es invariante cuando hacemos el cambio de coordenadas generado por el flujo del campo, es decir, existe una isometría asociada con este campo vectorial. A un campo de este tipo se le conoce como *campo vectorial de Killing*, y está definido por la ecuación [8, 16]:

$$L_\zeta g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.54)$$

2.2.2. Teorías de Gravedad con correcciones en la curvatura de orden superior.

La teoría de Einstein ha resultado exitosa en la predicción de fenómenos a escalas macroscópicas, e incluso en nuestros días se siguen comprobando sus predicciones. Un resultado que es consecuencia de esta teoría es lo que conocemos como ondas gravitacionales, las cuales han sido detectadas en los experimentos de LIGO [19]. Además de esto, recientemente se han obtenido imágenes que corroboran la existencia de los agujeros negros [20]. A pesar del tremendo éxito de esta teoría, existen razones para pensar que no proporciona una descripción completa de la teoría de la gravedad. Completa, en el sentido de ser válida a cualquier escala de distancia o equivalentemente, a cualquier escala de energía [7]. En particular, además sucede que si intentamos aplicar las técnicas de la Sección 2.1 para cuantizar la teoría de Einstein, la teoría resulta ser no renormalizable. En pocas palabras, este problema implica que al analizar la expansión perturbativa en términos de la

¹²En general, podemos definir una derivada de Lie para tensores de rango arbitrario. Aquí nos restringimos sólo al caso de un tensor de rango (0,2).

constante de acoplamiento existe una infinidad de términos para poder eliminar todas las divergencias. Esta dificultad conduce a la idea de que la acción de gravedad cuántica debe ser corregida con términos que cobren cada vez mayor relevancia al ir escalas de distancia que son mucho menores que el radio de curvatura de nuestro espacio-tiempo. También resultará útil más adelante pensar en teorías de gravedad en dimensión arbitraria, por lo que dejaremos de ahora en adelante la dimensión del espacio-tiempo, D , arbitraria. En el contexto de gravedad, este paso a dimensión arbitraria conlleva consecuencias topológicas no triviales. Existe un resultado conocido como el *teorema de Gauss-Bonnet* [16], que nos da una forma de calcular la llamada *característica de Euler*¹³ $\chi(M)$ asociada a una variedad M a partir de escalares formados con contracciones del tensor de Riemann. Por ejemplo, en 4 dimensiones espacio-temporales podemos escribir [16]:

$$\frac{\alpha}{8\pi^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2) + S_B = \chi(\mathcal{M}), \quad (2.55)$$

donde α es la constante de acoplamiento de la teoría, y S_B es un término que generaliza al término de frontera de GHY. La cantidad entre paréntesis en la ecuación (2.55) es un invariante topológico que puede entenderse como una generalización a segundo orden (en contracciones del tensor de Riemann) del escalar de Ricci que aparece en la acción de Einstein-Hilbert. En $D \leq 4$ las ecuaciones de movimiento resultan ser las ecuaciones de Einstein (2.49), así que este término no proporciona nueva información acerca de la física de la teoría. Sin embargo, podemos obtener una teoría en la que este término aporte una nueva dinámica, considerando esta misma acción en 5 dimensiones espacio-temporales, dando lugar a la teoría conocida como *gravedad de Gauss-Bonnet*. La acción de esta teoría está dada por [21]:

$$S_{GB} = S_{EH} + \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \alpha (R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}). \quad (2.56)$$

En contraste con el caso 4-dimensional, en esta teoría sí aparece una contribución no trivial a las ecuaciones de movimiento debido al segundo término en la acción. Las ecuaciones de movimiento toman la forma [22]:

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} - \alpha \left(\frac{1}{2} g_{ab} (R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}) - 2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c + 4R_{cd}R_{ab}^{cd} - 2R_{acde}R_b^{cde} \right) = 8\pi G_N T_{ab}, \quad (2.57)$$

donde los índices a, b corren sobre las coordenadas espacio-temporales. Esta teoría es interesante porque, entre otras cosas, las ecuaciones de movimiento siguen siendo de segundo orden en derivadas de la métrica [22]. Podemos generalizar esta identidad a dimensión arbitraria considerando extensiones dimensionales de un conjunto de invariantes topológicos, conocidos *invariantes de Chern-Weyl*, en el mismo sentido en que la acción de Einstein-Hilbert es la extensión dimensional de la característica de Euler. Estas extensiones, dan lugar a la *teoría de gravedad de Lovelock* [21, 22], definida por la acción:

$$S_L = \int_{\mathcal{M}} d^Dx \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k} \delta_{c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{a_1 b_1 \dots a_k b_k} \alpha_k R_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots R_{a_k b_k}^{c_k d_k} + I_B, \quad (2.58)$$

donde el símbolo $\lfloor \rfloor$ denota la parte entera de un número, y I_B corresponde a un término de frontera análogo al término de GHY (2.52), que escribiremos explícitamente en el Capítulo

¹³Número que determina la forma de una superficie independientemente de las deformaciones continuas que apliquemos sobre esta. Está relacionado con el *genus*, que representa el número de orificios que tiene dicha superficie.[22]

3. También definimos la delta de Kronecker generalizada como el producto antisimetrizado de las deltas de Kronecker usuales:

$$\delta_{a_1 b_1 \dots a_k b_k}^{c_1 d_1 \dots c_k d_k} = (2k)! \delta_{[c_1}^{a_1} \delta_{d_1}^{b_1} \dots \delta_{c_k}^{a_k} \delta_{d_k}^{b_k}]. \quad (2.59)$$

Aquí los índices a_k , b_k , c_k y d_k corren sobre las coordenadas espacio-temporales y k es el número de pares de índices en la delta de Kronecker generalizada, que en este caso corresponde al orden en la curvatura [22]. De hecho, la acción definida en (2.58) resulta ser la acción más general de gravedad pura sin torsión que proporciona ecuaciones de segundo orden en la métrica, y dadas por un tensor simétrico de rango 2 [22]. En $D > 4$, esta teoría es una generalización de la gravedad de Einstein con correcciones a orden $\mathcal{O}(R^k)$ en la curvatura, con $k \leq [(D-1)/2]$ [23]. Explícitamente hasta orden $k = 3$, la acción se escribe como:

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} [& a_0 + a_1 R + a_2 (R_{abcd} R^{abcd} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2) \\ & + a_3 (R^3 + 3R R^{abcd} R_{cdab} - 12R R_{ab} R^{ab} + 24R^{cdab} R_{ac} R_{bd} + 16R^{cd} R_{da} R_c^a \\ & + 24R^{cdab} R_{abde} R_c^e + 8R_{ae}^{cd} R_{df}^{ab} R_{cb}^{ef} + 2R_{abef} R^{cdab} R_{cd}^{ef}) + \dots], \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de orden superior en curvatura o términos de frontera y las cantidades a_0 , a_1 , a_2 , a_3 representan cuatro constantes de acoplamiento desde orden 0 hasta orden 3. Las ecuaciones de campo que obtenemos al variar esta acción, en ausencia de fuentes se pueden escribir como:

$$G_a^b = \sum_{k=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \frac{a_k}{2^{k+1}} \delta_{ab_1 b_2 \dots b_{2k}}^{ba_1 a_2 \dots a_{2k}} R^{b_1 b_2}{}_{a_1 a_2} \dots R^{b_{2k-1} b_{2k}}{}_{a_{2k-1} a_{2k}} = 0. \quad (2.61)$$

La teoría de Lovelock es una extensión de la teoría de Einstein que puede pensarse a un orden k fijo, como un truncamiento de una teoría fundamental de gravedad [22]. Es por esto, que las constantes de acoplamiento a_k que aparecen en la acción (2.58), a pesar de que son independientes entre sí, deben corresponder a una única escala de longitud. Cuando estudiemos más adelante las herramientas de la teoría de cuerdas, veremos que en ciertos modelos de gravedad cuántica aparecen correcciones a la acción de Einstein-Hilbert en la forma del término cuadrático en la acción (2.60). En este tipo de teorías también aparecen términos de orden superior en convolución con campos de materia en la acción.

En gravedad de Gauss-Bonnet existen soluciones de agujero negro y agujeros de gusano [23, 24]. Cabe preguntarnos, por ejemplo, cómo se ven afectadas las propiedades termodinámicas del agujero negro en este tipo de generalizaciones. Por ejemplo, para una teoría de gravedad cuya Lagrangiana $\mathcal{L}(R_{\mu\nu\lambda\rho})$ dependa de combinaciones del tensor de Riemann y de la métrica, la entropía de Bekenstein-Hawking se debe generalizar a la relación [16]:

$$S_W = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{h} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\lambda\rho}} \epsilon_{\mu\lambda} \epsilon_{\nu\rho}, \quad (2.62)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es el tensor binormal al horizonte de eventos y h es el determinante de la métrica inducida en el horizonte de eventos. A esta fórmula se le conoce como *entropía de Wald* [16].

2.3. Teorías de Cuerdas y D-Branas

A pesar de que la teoría cuántica de campos ha resultado exitosa para explicar en buena medida tres de las cuatro interacciones fundamentales a escalas cuánticas y en el régimen de acoplamiento débil, entre otras cosas, no proporciona una descripción satisfactoria al intentar describir a la gravedad como una teoría fundamental, dado que la relatividad general es una teoría no renormalizable [7]. Desde finales del siglo XX se conoce una alternativa que permite, bajo ciertas condiciones, incorporar a la gravedad como una teoría cuántica, al menos a nivel perturbativo. Esta es la llamada *teoría de cuerdas*. Si bien aún no provee evidencia experimental para ser corroborada, es una herramienta potencialmente útil que podemos utilizar para entender como formular una teoría cuántica de la gravedad que sea satisfactoria en ciertos regímenes. La idea principal de esta teoría consiste en suponer que a escalas de entre $10^{-18}m$ y la longitud de Planck, $l_P \sim 1,6 \times 10^{-35}m$, los componentes básicos de la materia consisten de objetos unidimensionales, es decir cuerdas, cuyos modos de vibración cuánticos dan lugar a las distintas partículas que conocemos, además de otra gran variedad de partículas y otros objetos elementales [7]. Debido a su importancia para el marco teórico donde se realizarán los cálculos de este trabajo, dedicaremos esta subsección a estudiar los temas más importantes de la teoría de cuerdas, comenzando con la descripción de la llamada cuerda bosónica relativista.

2.3.1. Cuerda bosónica

Imaginemos un objeto unidimensional que se mueve en un espacio-tiempo plano $d + 1$ -dimensional, con $d = 1, 2, \dots$, en la ausencia de fuerzas externas. Recordemos la acción para la partícula relativista (2.42). Al ser extremizada, esta acción proporciona la trayectoria que minimiza la longitud propia recorrida por la partícula. Una cuerda a su vez, describe una superficie bidimensional al moverse en el espacio-tiempo $d + 1$ -dimensional, conocida como *hoja de mundo*. En analogía con la partícula relativista, podemos deducir la dinámica clásica de la cuerda a partir de un principio variacional, exigiendo que el *área propia* de la hoja de mundo sea mínima [25, 26]. Equivalentemente a como hacemos con la partícula, podemos parametrizar la hoja de mundo con dos parámetros σ, τ y describir las coordenadas de esta misma en el espacio-tiempo a través de una función vectorial que llamaremos el *encaje* de la cuerda, y que denotaremos como $X^\mu(\sigma, \tau)$, con $\mu = 0, \dots, d$ (ver Figura 2.3.1). Cabe recalcar que la parametrización (τ, σ) es arbitraria y por lo tanto la acción de la cuerda es invariante bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo, lo que quiere decir que si τ' y σ' son funciones de τ y σ , se cumple que $X^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma)$ [26]. Existen dos tipos de cuerdas; abiertas y cerradas. En el primer caso, la cuerda tiene dos extremos, y la variable espacial σ se puede definir en el intervalo que va de 0 a π . En el segundo caso, la cuerda no tiene extremos, así que la variable σ es periódica. Por el momento, y por simplicidad, estudiaremos la dinámica de una cuerda abierta. La acción para la cuerda, o la llamada *acción de Nambu-Goto* [27] en el espacio-tiempo de Minkowski está dada por:

$$S_{NG} = -T \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X'; \sigma, \tau) = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{-h}, \quad (2.63)$$

donde definimos $\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau}$ y $X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ y h es el determinante de h_{ab} , la métrica inducida en la hoja de mundo, definida como $h_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$, donde los índices a, b toman los valores $a, b = 0, 1$. Además definimos a T como un coeficiente que representa a la tensión de la cuerda [27]. Esta acción presenta simetría de Lorentz en las coordenadas espacio-temporales para un espacio-tiempo plano, además de la ya mencionada invariancia

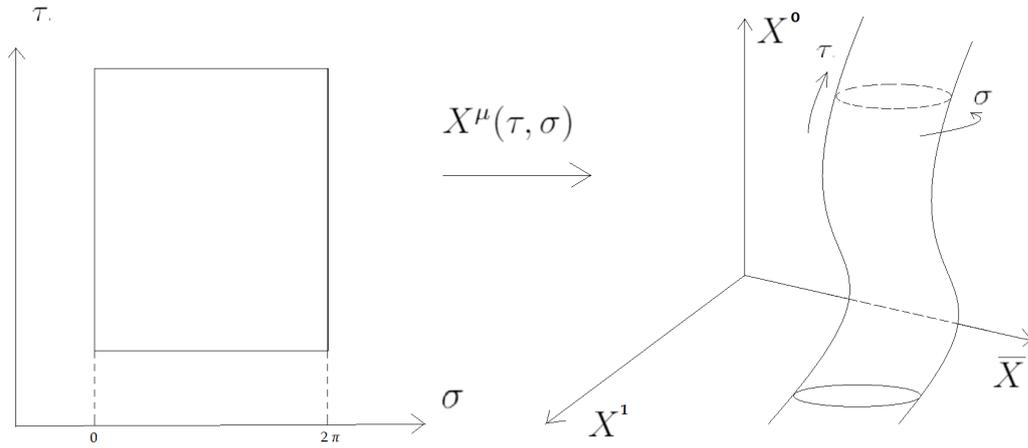


Figura 2.2: Derecha: Parametrización de un segmento en el espacio de la hoja de mundo 2 dimensional (σ, τ) . Izquierda: La función $X(\tau, \sigma)$ mapea este segmento a la hoja de mundo encajada en un espacio-tiempo $d + 1$ -dimensional.

bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo [27]. Tomando la variación de la acción de Nambu-Goto respecto al encaje de la cuerda, obtenemos las ecuaciones de la cuerda abierta [25],

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi. \quad (2.64)$$

Podemos escribir (2.64) en términos de los momentos a lo largo de la cuerda y transversos a ella, $P_\tau^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$ y $P_\sigma^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}$. Realizando el cálculo explícitamente se obtiene

$$P_\tau^\mu = T \frac{\dot{X}^\mu X'^2 - X'^\mu (\dot{X} \cdot X')}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \quad ; \quad P_\sigma^\mu = T \frac{X'^\mu \dot{X}^2 - \dot{X}^\mu (\dot{X} \cdot X')}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}. \quad (2.65)$$

A nivel clásico, es posible partir de una acción equivalente a la de Nambu-Goto introduciendo una métrica independiente en la hoja de mundo $\gamma_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$, con $\alpha, \beta = \sigma, \tau$. En este caso obtenemos la llamada *acción de Polyakov* [27, 25]:

$$S_P = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (2.66)$$

donde γ representa el determinante de γ_{ab} . Además de las simetrías que satisface la acción de Nambu-Goto, esta acción a nivel clásico presenta invariancia bajo transformaciones de Weyl, que son reescalamientos de la forma $e^{-\phi} h_{\alpha\beta}$, donde $\phi = \phi(\sigma, \tau)$, sobre el campo auxiliar $h_{\alpha\beta}$ [25, 26]. Esta simetría, junto con la invariancia bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo, pueden interpretarse como un conjunto de tres simetrías de norma, que pueden eliminarse fijando tres parámetros. En particular, podemos hacer una elección de norma que simplifique la forma de las ecuaciones de movimiento. Tomando la variación de la acción de Polyakov respecto a γ_{ab} , obtenemos la relación [25]

$$\gamma^{ab} h_{ab} = 2(-h)^{1/2} (-\gamma)^{-1/2}. \quad (2.67)$$

Si sustituimos (2.67) en la acción de Polyakov, recuperamos la acción de Nambu-Goto, S_{NG} . Variando la acción (2.66) respecto a X^μ obtenemos la siguiente ecuación de movimiento,

$$\partial_a \left((-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \right) = (-\gamma)^{1/2} \nabla^2 X^\mu = 0, \quad (2.68)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano, y en particular, para la cuerda abierta podemos imponer condiciones de frontera de Neumann

$$X'^{\mu}(\tau, 0) = X'^{\mu}(\tau, \pi) = 0, \quad (2.69)$$

o de Dirichlet

$$X^{\mu}(\tau, 0) = X_0^{\mu} \quad y \quad X^{\mu}(\tau, \pi) = X_{\pi}^{\mu}, \quad (2.70)$$

donde X_0^{μ} y X_{π}^{μ} son constantes. Las condiciones de Neumann representan físicamente a una cuerda en la cual no hay momento fluyendo a través de los extremos de la cuerda. Por otro lado, las condiciones de Dirichlet representan a una cuerda con sus extremos fijos en una o varias de las p coordenadas espaciales, con el resto de las coordenadas satisfaciendo condiciones de Neumann. Las condiciones de Dirichlet rompen con la invariancia de Poincaré y por lo tanto no serán consideradas por el momento. Sin embargo, más adelante, veremos que en realidad X_0^{μ} y X_{π}^{μ} representan las posiciones de objetos extendidos conocidos como Dp -branas [25, 7].

Así como en Relatividad General en 4 dimensiones espacio-temporales podemos definir un tensor de energía-momento tomando la derivada funcional de la acción relativista respecto a la métrica, en 2 dimensiones definimos el tensor de energía-momento sobre la hoja de mundo como [26, 27]:

$$T^{ab}(\tau, \sigma) = -\frac{2\pi}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_P}{\gamma^{ab}} = -4\pi T \left\{ \partial^a X_{\mu} \partial^b X^{\mu} - \frac{1}{2} \gamma^{ab} \gamma_{cd} \partial^c X_{\mu} \partial^d X^{\mu} \right\}. \quad (2.71)$$

Debido a la invariancia de Weyl, es fácil demostrar que $T_a^a = \gamma_{ab} T^{ab} = 0$, y como consecuencia de la invariancia bajo reparametrizaciones, obtenemos $T^{ab} = 0$. Podemos ahora usar la simetría de Weyl y la invariancia bajo reparametrizaciones. Como la matriz γ^{ab} es simétrica en dos dimensiones, se necesitan tres parámetros independientes para definirla. Entonces, podemos fijar la norma de manera que la matriz γ^{ab} sea

$$\gamma^{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\phi}, \quad (2.72)$$

es decir, la métrica de Minkowski en dos dimensiones multiplicada por una función positiva que denominaremos *factor conforme* [25]. Usando este resultado, las ecuaciones de movimiento (2.68) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^{\mu}(\tau, \sigma) = 0. \quad (2.73)$$

Esto no es otra cosa que la ecuación de onda en dos dimensiones en espacio-tiempo plano. Por lo tanto, podemos construir la solución $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ como una superposición de modos de Fourier. Definimos como x^{μ} a la posición espacio-temporal del centro de masa de la cuerda y a p^{μ} como el momento espacio-temporal del centro de masa, con $\mu = 0, \dots, d$. La solución explícita para una cuerda abierta con condiciones de frontera de Neumann es [27]

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = x^{\mu} + l_s^2 p^{\mu} \tau + i l_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^{\mu} e^{-im\tau} \cos(m\sigma), \quad (2.74)$$

donde α_m^{μ} son los modos de Fourier de la descomposición, y $m \in \mathbb{Z}$. A partir de la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = -T(\partial_{\sigma} X^{\mu} \partial_{\sigma} X_{\mu} - \partial_{\tau} X^{\mu} \partial_{\tau} X_{\mu})$, podemos construir el momento conjugado $\Pi^{\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\tau} X^{\mu})} = 2T \dot{X}^{\mu}$. Los paréntesis de Poisson valores iguales de la coordenada τ satisfacen [27, 25]:

$$\{X^{\mu}(\sigma), \Pi^{\nu}(\sigma')\} = \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \{\Pi^{\mu}(\sigma), \Pi^{\nu}(\sigma')\} = 0, \quad (2.75)$$

que en términos de los modos de oscilación, implica que

$$\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad \{p^\mu, x^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (2.76)$$

Para la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} = \dot{X}^\mu \Pi_\mu - \mathcal{L}$, podemos construir el Hamiltoniano H integrando a lo largo de la longitud de la cuerda abierta:

$$H = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{H}(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.77)$$

donde definimos $\alpha_n \cdot \alpha_n = \eta_{\mu\nu} \alpha_n^\mu \alpha_n^\nu$. Podemos imponer la condición de que el tensor T_{ab} en (2.71) sea igual a cero modo por modo en la expansión de Fourier a nivel clásico de la siguiente manera. Es posible describir a la cuerda por medio de un par de parámetros en los que las condiciones sobre el tensor de energía momento tienen una forma simple. Definimos las *coordenadas del cono de luz* mediante la reparametrización $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$. Entonces $T_{\pm\pm}$ son las componentes del tensor de energía momento bidimensional escritas en las coordenadas σ^\pm . En estas coordenadas, las constricciones $T_{ab} = 0$ se escriben como $T_{++} = T_{--} = 0$. Sustituyendo la expansión en modos de (2.74) en la expresión para el tensor de energía-momento en las coordenadas del cono de luz, obtenemos [26]

$$T_{--} = 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-2im\sigma^-}, \quad (2.78)$$

donde

$$L_m = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\sigma} T_{--} d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.79)$$

Por lo tanto, la condición de nulidad sobre T_{--} se escribe como $L_m = 0$ para todo m [25]. Estas cantidades, denominados *modos de Virasoro* [25, 26, 27], satisfacen la llamada *álgebra de Virasoro*, que en términos de los paréntesis de Poisson, puede definirse como [25, 26]

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}. \quad (2.80)$$

El Hamiltoniano (2.77), se puede expresar en términos de los modos de Virasoro de la siguiente manera [25, 27]:

$$H = L_0, \quad (2.81)$$

donde L_0 corresponde al modo de Virasoro con cero modos de oscilación excitados. Notando que

$$L_0 = \frac{1}{4\pi T} p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = -\frac{1}{4\pi T} M^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.82)$$

y eligiendo $L_0 = 0$ (por la simetría residual que corresponde a invariancia bajo difeomorfismos [26]), deducimos una relación para el espectro de la cuerda abierta con condiciones de Neumann [25, 26]:

$$M^2 = 4\pi T \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (2.83)$$

donde M es la masa de la cuerda. Ahora podemos proceder a cuantizar canónicamente la cuerda abierta. Para esto, promovemos las relaciones (2.75) y (2.76), a relaciones de conmutación para los operadores X^μ y Π^μ , así como para los modos de oscilación, mediante la sustitución $\{, \} \rightarrow -i[,]$. Los modos de Virasoro y los modos de oscilación α_n son

promovidos a operadores de la manera usual, con la diferencia de que en la descomposición en términos de los modos de oscilación aparece el *orden normal* de operadores, que se denota como $::$. Por ejemplo, en el caso cuántico [26],

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n : . \quad (2.84)$$

Esta prescripción nos indica que los operadores α_{-n} con $n > 0$, aparecen a la derecha de los operadores α_n . El orden normal no afecta a los L_m con $m \neq 0$, pero el operador Hamiltoniano L_0 necesita una definición más cuidadosa, ya que en el caso cuántico los operadores α_n^μ y α_{-n}^μ no conmutan, debido a que $[\alpha_m^\mu, \alpha_{-m}^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{0,0}$ (ver ecuación (2.76)). Como consecuencia, aparecen estados de norma negativa, que no tienen sentido físico. Por lo tanto debemos encontrar una manera para removerlos del espectro. Como operador, tenemos

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.85)$$

La consecuencia de esto, es que L_0 difiere por una constante en todas las ecuaciones clásicas que involucren a L_0 [26]. De momento denotemos a dicha constante a . Para satisfacer a nivel cuántico las constricciones sobre el tensor de energía-momento bidimensional, $T_{++} = T_{--} = 0$, debemos imponer a nivel clásico las constricciones en términos de modos de Virasoro requiriendo que $L_m = 0$. A nivel cuántico, esto se convierte en un conjunto de constricciones que actúan sobre un estado físico arbitrario que denotamos como $|\phi\rangle$ [27], en términos de los operadores de Virasoro mediante [25, 27],

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = 0; \quad L_m |\phi\rangle = 0 \quad \text{para } m > 0. \quad (2.86)$$

El estado $|\phi\rangle$ pertenece a un espacio de Fock que se define en términos de todos los estados de la forma [29]

$$(\alpha_{-1}^{\mu_1})^{n_{\mu_1}} (\alpha_{-2}^{\mu_2})^{n_{\mu_2}} \dots |0; k\rangle \quad (2.87)$$

para la cuerda abierta, donde k es el momento del centro de masa de la cuerda. En el caso cuántico, el álgebra de Virasoro se modifica respecto al caso clásico. Usando las relaciones de conmutación para los α_m , obtenemos [25, 26]:

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n}, \quad (2.88)$$

donde $c = D$ es la dimensión espacio-temporal. El término proporcional a c es un efecto cuántico y es llamado una *extensión central*, mientras que la constante c se le conoce como *carga central*. La carga central puede interpretarse como una medida del número de grados de libertad de la teoría [7]. Si nuestro estado cuántico no tiene modos de oscilación encendidos (nivel 0), su dinámica está determinada únicamente por el momento de su centro de masa k^μ , donde $\mu = 0, \dots, d$, y por lo tanto denotamos a este estado como $|0; k\rangle$. Imponiendo la primera de las constricciones (2.86) a este estado, obtenemos una expresión para la masa; $M^2 = -\frac{a}{\alpha'}$. Este es un estado denominado *taquiónico*, lo que significa que el cuadrado de su masa es negativo. En el primer nivel, es decir, con un oscilador excitado, podemos especificar un vector de polarización ζ^μ para el estado $|\zeta, k\rangle$. Para vectores de polarización temporales obtenemos estados con norma negativa, llamados *fantasmas* [26], análogamente al caso de la teoría de QED. La presencia de estos estados no puede tener sentido en una teoría unitaria. La segunda de las constricciones (2.86) nos permite obtener estados que son ortogonales a todos los estados físicos y que además cumplen la primera de las constricciones (2.86). Es decir, satisfacen [26]

$$(L_0 - a) |\phi\rangle = 0, \quad \langle \phi | \psi \rangle = 0. \quad (2.89)$$

A estos estados se les conoce como estados *espurios*. Podemos considerar tres casos: $a > 1$, $a < 1$, y $a = 1$. En los primeros dos casos los estados espurios no pueden ser físicos, lo cual nos impide tener estados nulos y físicos. En el caso particular en que $a = 1$ ($M^2 = 0$), obtenemos un vector no masivo en el espacio-tiempo D -dimensional, con $D = d + 1$. Este vector, tiene asociada una invariancia de norma, debido a que los estados espurios son físicos y nulos, y por lo tanto, podemos sumárselo a un estado físico sin tener consecuencias físicas, definiendo una relación de equivalencia [25]:

$$|\phi\rangle \sim |\phi\rangle + \lambda|\psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad \zeta^\mu \sim \zeta^\mu + \lambda k^\mu. \quad (2.90)$$

Dicho estado, tiene exactamente las propiedades que el fotón de QED, por lo que obtenemos. En el segundo nivel obtenemos estados de cuerda físicos y masivos. La estrategia que hemos seguido para encontrar los valores de a y D , es buscar los estados de norma cero que satisfagan las condiciones de estado físico. En la frontera entre estados físicos con norma negativa y norma positiva encontramos que $a = 1$ y la dimensión espacio-temporal es $D = 26$ [25, 27, 26]. Este caso es lo llamamos una teoría de cuerdas *crítica*, que posee 24 estados de un vector no masivo A^μ , que tiene invariancia $U(1)$, un estado taquiónico y una torre infinita de estados masivos. Como veremos más adelante, los estados taquiónicos pueden removerse una vez que hayamos pasado al caso de supercuerdas [27].

Consideremos ahora el caso de la cuerda bosónica cerrada. La solución a la ecuación de onda (2.73) con condiciones periódicas, es decir [26],

$$X'^\mu(\tau, 0) = X'^\mu(\tau, \pi), \quad X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \pi), \quad \gamma_{ab}(\tau, 0) = \gamma_{ab}(\tau, \pi), \quad (2.91)$$

se escribe de la siguiente manera:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+), \quad (2.92)$$

donde

$$X_R^\mu(\sigma^-) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu \tau + \frac{1}{2}il_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-2im\sigma^-} \quad (2.93)$$

$$X_L^\mu(\sigma^+) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu \tau + \frac{1}{2}il_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \tilde{\alpha}_m^\mu e^{-2im\sigma^+}. \quad (2.94)$$

Ahora tenemos a dos tipos de modos de oscilación independientes, α_m y $\tilde{\alpha}_m$, que representan modos viajando a la derecha y a la izquierda, respectivamente. Los paréntesis de Poisson de los modos derechos e izquierdos, satisfacen

$$\{\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu\} = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad \{\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu\} = 0, \quad (2.95)$$

además de las relaciones (2.76). Podemos definir también modos de Virasoro asociados a los modos de oscilación izquierdos mediante [25, 26]

$$\bar{L}_m = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\sigma} T_{++} d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n. \quad (2.96)$$

Usando las relaciones (2.95), podemos ver que estos modos satisfacen las relaciones correspondientes al álgebra de Virasoro:

$$\{\bar{L}_m, \bar{L}_n\} = i(m-n)\bar{L}_{m+n}, \quad \{\bar{L}_m, L_n\} = 0, \quad (2.97)$$

mientras que los modos L_m satisfacen las relaciones de cuerda abierta (2.80) Ahora el Hamiltoniano se escribe como

$$H = \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{H}(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n), \quad (2.98)$$

y en términos de los modos cero de Virasoro obtenemos:

$$H = L_0 + \bar{L}_0. \quad (2.99)$$

La relación para la masa del espectro análoga a (2.83) es [25]

$$M^2 = 8\pi T \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \alpha_n). \quad (2.100)$$

Para cuantizar la teoría, definimos el espacio de Fock como aquellos estados de la forma

$$(\alpha_{-1}^{\mu_1})^{n_{\mu_1}} (\alpha_{-2}^{\mu_2})^{n_{\mu_2}} \dots (\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu_1})^{n_{\nu_1}} (\tilde{\alpha}_{-2}^{\nu_2})^{n_{\nu_2}} \dots |0; k\rangle, \quad (2.101)$$

donde los exponentes n_{μ_j} representan el número de osciladores encendidos en las coordenadas μ_j del j -ésimo modo de oscilación $\alpha_j^{\mu_j}$. En el caso cuántico, las relaciones de conmutación se generalizan al álgebra de Virasoro, por lo que [25, 26]

$$[L_m, \bar{L}_n] = 0, \quad [\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n}. \quad (2.102)$$

Debido a la periodicidad de la solución, debemos imponer la invariancia bajo traslaciones en la coordenada σ mediante la siguiente constricción [26]:

$$(L_0 - \bar{L}_0) |\phi\rangle = 0, \quad (2.103)$$

que resulta en la condición de igualdad de niveles $N = \bar{N}$, donde N, \bar{N} es el número de modos que se propagan a la derecha y a la izquierda, respectivamente. Para el caso de la cuerda cerrada, el espectro se construye de la siguiente manera. Sin ningún oscilador excitado obtenemos un estado taquiónico de cuerda cerrada con $M = -4/\alpha'$. En el primer nivel obtenemos 24^2 estados no masivos de la forma $\alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0; k\rangle$. La parte simétrica y sin traza de este estado está asociada a un campo que transforma en las coordenadas μ, ν bajo $SO(24)$ como una partícula no masiva con espín 2, que corresponde al cuanto del campo gravitatorio, o *gravitón* y que denotamos como $G_{\mu\nu}$. La parte antisimétrica, $B_{\mu\nu}$, es llamada *campo de Kalb-Ramond*, y transforma bajo $SO(24)$ como un tensor antisimétrico de segundo rango. La traza de este estado es el dilatón, Φ , un campo escalar que tiene la propiedad de controlar las interacciones de cuerdas en la hoja de mundo, y está relacionado con la constante de acoplamiento de cuerdas mediante $g_s = \exp(\Phi)$ [25]. Aumentando el número de niveles excitados, podemos usar la relación espectral para obtener una torre infinita de estados masivos. Más adelante, explicaremos en detalle el caso de cuerda abierta.

2.3.2. Teorías de supercuerdas

Las teorías de cuerdas bosónicas tienen al menos dos problemas graves para describir la física de nuestro universo. El primero es que existen taquiones en el espectro tanto de cuerda abierta como de cuerda cerrada. El segundo, aún más drástico, es que no aparecen

fermiones en el espectro de la cuerda. Existen tres formalismos para incorporar fermiones a la teoría, y todos requieren la presencia de supersimetría [26]. El primero de estos, que estudiaremos a continuación, se conoce como *formalismo Ramond-Neveu-Schwarz* o RNS, que consiste en introducir supersimetría a nivel de la hoja de mundo [26]. La segunda forma de construir una teoría de cuerdas supersimétricas, es hacer manifiesta la supersimetría en el espacio-tiempo, formalismo que se conoce como de *Green-Schwarz* o *GS* [26]. Existe un tercer formalismo, que no estudiaremos aquí pero que vale la pena mencionar y es el llamado *formalismo de Berkovitz*, una combinación de los formalismos mencionados anteriormente [25, 26].

Supercuerdas RNS

Recordemos que la acción de la cuerda bosónica en la norma conforme puede interpretarse como la acción de una teoría para D campos escalares libres no masivos en la hoja de mundo. Con esta idea en mente, podemos generalizar la acción de manera que incluya D fermiones de Majorana en la hoja de mundo que pertenecen a la representación vectorial del grupo de Lorentz $SO(D-1, 1)$. Las correspondientes matrices de Dirac ρ^α con $\alpha, \beta = 0, 1$ satisfacen el álgebra de Dirac en dos dimensiones [26]:

$$\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}. \quad (2.104)$$

La forma explícita de las matrices ρ^α es:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

Los fermiones ψ^μ , donde $\mu = 0, \dots, D$, que introduciremos en la hoja de mundo, están constituidos utilizando variables de Grassman¹⁴, es decir, a nivel clásico satisfacen las relaciones de anticonmutación $\{\psi^\mu, \psi^\nu\} = 0$. En dos dimensiones, el espinor tiene dos componentes reales: $\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_+^\mu \\ \psi_-^\mu \end{pmatrix}$. Si definimos $\beta = i\rho^0$, el conjugado del espinor es $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta$. La acción de cuerda en espacio-tiempo plano que incluye a D espinores de Majorana no masivos, se escribe como (con $\alpha' \equiv l_s^2 = \frac{1}{2\pi T} = 1/2$) [26]:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \left(\partial_\alpha X_\mu \partial^\alpha X^\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \right), \quad (2.106)$$

donde la hoja de mundo de la cuerda abierta es la banda $0 < \sigma < \pi$, $\infty < \tau < \infty$. El hecho de que los espinores ψ^μ sean de Majorana, significa que sus componentes son reales, es decir, $\psi_+^* = \psi_+$, $\psi_-^* = \psi_-$. En esta notación la parte fermiónica de la acción se puede reescribir como

$$S = \frac{i}{\pi} \int d^2\sigma (\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+), \quad (2.107)$$

donde ∂_\pm son las parciales en las coordenadas del cono de luz¹⁵ definidas previamente. La ecuación de Dirac se puede escribir como $\partial_\pm \psi_\mp = 0$, que en dos dimensiones representan

¹⁴Las variables de Grassmann, son un álgebra q_a de variables que actúan como números reales o complejos en un espacio de Hilbert, pero que satisfacen relaciones de anticonmutación, es decir, $\{q_a, q_b\} = 0$.

¹⁵Esto se debe a que las matrices definidas en (2.105) satisfacen $\rho^\alpha \partial_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 - \partial_0 \\ \partial_1 + \partial_0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -\partial_- \\ \partial_+ & 0 \end{pmatrix}$, y de la definición se sigue que $\bar{\psi} = i(\psi_+, -\psi_-)$. La acción (2.107) se obtiene llevando a cabo la multiplicación matricial correspondiente.

condiciones de Weyl¹⁶. Esto significa que los espinores ψ_{\pm} son espinores de Majorana-Weyl [25, 26]. La acción (2.106) es invariante bajo las transformaciones de supersimetría [26]

$$\delta X^{\mu} = \bar{\epsilon}\psi^{\mu}, \quad \delta\psi^{\mu} = \rho^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\mu}\epsilon, \quad (2.108)$$

donde $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{+} \\ \epsilon_{-} \end{pmatrix}$ es un parámetro infinitesimal que es a la vez un espinor de Majorana, y está compuesto de números de Grassman [26]. En estas componentes las transformaciones de supersimetría son

$$\delta X^{\mu} = i(\epsilon_{+}\psi_{-}^{\mu} - \epsilon_{-}\psi_{+}^{\mu}), \quad \delta\psi_{-}^{\mu} = -2\partial_{-}X^{\mu}\epsilon_{+}, \quad \delta\psi_{+}^{\mu} = 2\partial_{+}X^{\mu}\epsilon_{-}. \quad (2.109)$$

Esta es una supersimetría global de la teoría sobre la hoja de mundo. Podemos hacer manifiesta la supersimetría en el espacio-tiempo de la acción (2.106) mediante el formalismo del *super-espacio* [26]. Definimos las coordenadas de la *super-hoja de mundo* como $(\sigma^{\alpha}, \theta_A)$, donde $\theta_A = \begin{pmatrix} \theta_{+} \\ \theta_{-} \end{pmatrix}$ son coordenadas de Grassman que anticonmutan entre sí y que forman un espinor de Majorana con $A = 0, 1$. Los índices α representan a las coordenadas $\sigma^0 = \tau$, $\sigma^1 = \sigma$ de la cuerda bosónica. Consideremos una función $Y(\sigma^{\alpha}, \theta_A)$, que llamaremos el *super-campo*, y que definimos como [26]

$$Y(\sigma^{\alpha}, \theta_A) = X^{\mu}(\sigma^{\alpha}) + \bar{\theta}\psi^{\mu}(\sigma^{\alpha}) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta B^{\mu}(\sigma^{\alpha}), \quad (2.110)$$

donde $B^{\mu}(\sigma^{\alpha})$ es un campo bosónico auxiliar que no altera el contenido físico de la teoría, ya que se vuelve cero después de usar su ecuación de campo, y es necesario para hacer manifiesta la supersimetría espacio-temporal [26]. Los generadores de las transformaciones de supersimetría en la super-hoja de mundo, llamadas *supercargas*, se definen como [26]:

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial\theta_A} - (\rho^{\alpha}\theta)_A\partial_{\alpha}. \quad (2.111)$$

Las transformaciones generadas por $\bar{\epsilon}Q$ en el super-espacio son [26]

$$\delta\theta^A = [\bar{\epsilon}Q, \theta^A] = \epsilon^A, \quad \delta\sigma^{\alpha} = [\bar{\epsilon}Q, \sigma^{\alpha}] = \bar{\theta}\rho^{\alpha}\epsilon. \quad (2.112)$$

De la misma manera, la supercarga Q actúa sobre el super-campo de acuerdo a

$$\delta Y^{\mu} = [\bar{\epsilon}Q, Y^{\mu}] = \bar{\epsilon}Q Y^{\mu}. \quad (2.113)$$

La acción se puede escribir en términos del super-campo definiendo la *super-derivada covariante* [26]

$$D_A = \frac{\partial}{\partial\theta} + (\rho^{\alpha}\theta)_A\partial_{\alpha}, \quad (2.114)$$

y obtenemos

$$S = \frac{i}{4\pi} \int d^2\sigma d^2\theta \bar{D}Y^{\mu} D Y_{\mu}. \quad (2.115)$$

Esta acción tiene supersimetría manifiesta en el espacio-tiempo, como podemos ver calculando δS . El tensor de energía-momento en las coordenadas del cono de luz se escribe como

$$T_{++} = \partial_{+}X^{\mu}\partial_{+}X_{\mu} + \frac{i}{2}\psi_{+}^{\mu}\partial_{+}\psi_{+\mu}, \quad (2.116)$$

¹⁶Las condiciones de Weyl sobre un espinor, implican que sus componentes cumplen la propiedad de ser reales y además son invariantes ante conjugación de carga.

$$T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu}. \quad (2.117)$$

También podemos definir las *super-corrientes* [26]

$$J_+ = \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu, \quad J_- = \psi_-^\mu \partial_- X_\mu. \quad (2.118)$$

En conjunto, estas cantidades satisfacen en la teoría de cuerdas RNS las condiciones

$$J_+ = J_- = T_{++} = T_{--} = 0. \quad (2.119)$$

Al aplicar el principio variacional a la acción (2.106), debemos imponer dos tipos distintos de condiciones de frontera que dividen el espectro en cuatro sectores. Para el sector fermiónico de una supercuerda abierta, podemos tener [26]:

$$\psi_+^\mu(\tau, \pi) = +\psi_-^\mu(\tau, \pi) \quad (2.120)$$

$$\psi_+^\mu(\tau, \pi) = -\psi_-^\mu(\tau, \pi). \quad (2.121)$$

A la primera condición (2.120) se le conoce como condición de Ramond (R), mientras que la segunda (2.121) condición se le llama condición de Neveu-Schwarz (NS) [26, 27]. Para el sector R, podemos escribir la expansión en modos como [26, 27]

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (2.122)$$

donde los modos fermiónicos d_n^μ satisfacen la relación de Majorana $d_n^{\mu\dagger} = d_{-n}^\mu$ [26]. Para el sector NS tenemos [26, 27]

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}. \quad (2.123)$$

Para cuerdas cerradas, tenemos dos tipos posibles de condiciones periódicas. Estas son

$$\psi_\pm^\mu(\sigma, \tau) = \pm \psi_\pm^\mu(\sigma + \pi, \tau). \quad (2.124)$$

La expansión en modos corresponde a

$$\psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad o \quad \psi_-^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad (2.125)$$

para los modos derechos y

$$\psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad o \quad \psi_+^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \tilde{b}_r^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \quad (2.126)$$

para los modos izquierdos [26]. Una vez cuantizada la teoría, el espectro resultante se divide en cuatro sectores (NN, NR, RN, RR), que corresponden a las 4 combinaciones de condiciones de frontera sobre los modos de propagación fermiónicos izquierdos y derechos [25, 26]. Podemos cuantizar esta teoría imponiendo relaciones de anticonmutación canónicas sobre los modos de oscilación fermiónicos [25, 26]:

$$\{b_r, b_s\} = \{\bar{b}_r, \bar{b}_s\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s,0}, \quad \{d_m, d_n\} = \{\bar{d}_m, \bar{d}_n\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (2.127)$$

además de las relaciones de conmutación para los modos bosónicos (2.95). Definimos también el estado base en los sectores R y NS de la siguiente forma [26]:

$$\alpha_m^\mu |0\rangle_R = \alpha_m^\mu |0\rangle_R = 0, \quad \alpha_m^\mu |0\rangle_{NS} = b_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0, \quad (2.128)$$

para $r, m > 0$. En el sector NS el vacío es único y corresponde a un estado de espín cero en el espacio-tiempo [26]. En contraste, en el sector R el vacío es degenerado, debido a que los operadores d_0^μ conmutan con el operador de número N , y como consecuencia de la ecuación (2.127), estos estados forman una representación del álgebra de Dirac [26]. Por lo tanto el vacío en el sector R consiste de estados que son fermiones en el espacio-tiempo [26]. El álgebra de Virasoro incluye ahora a operadores asociados a los modos de oscilación fermiónicos, que denotamos como G_r , donde $r \in \mathbb{Z}$ para el sector R, y $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ para el sector NS. Las relaciones de (anti)conmutación son [25, 27]:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n} \quad (2.129)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r+s} \quad (2.130)$$

$$[L_m, G_r] = \frac{1}{2}(m - 2r)G_{m+r}, \quad (2.131)$$

donde

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_m : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_m : + \frac{1}{4} \sum_r (2r - m) : \psi_{m-r} \cdot \psi_r : + a\delta_{m,0} \quad (2.132)$$

$$G_r = \sum_n \alpha_n \cdot \psi_{r-n}, \quad (2.133)$$

y $::$ representa el orden normal de operadores. Las condiciones de estado físico en el sector NS son [26]

$$G_r |\phi\rangle = 0, \quad L_m |\phi\rangle = 0, \quad (L_0 - \alpha_{NS}) = 0, \quad r, m > 0, \quad (2.134)$$

mientras que para el sector R obtenemos [26]

$$G_n |\phi\rangle = 0, \quad L_m |\phi\rangle = 0, \quad (L_0 - \alpha_R) = 0, \quad n, m > 0. \quad (2.135)$$

Los valores de a y D se determinan análogamente al caso de la cuerda bosónica [25] y obtenemos $D = 10$ y $a = 0$ para el sector R mientras que $a = -1/2$ para el sector NS. La teoría de cuerdas RNS, resulta ser inconsistente por la presencia de taquiones [26, 28]. Para eliminar los taquiones y obtener supersimetría espacio-temporal, el espectro es proyectado con un operador que elimina a los estados con un número par de excitaciones en la expansión de ψ . A esto se le conoce como proyección GSO [25, 26, 28]. El espectro de supercuerdas resulta libre de taquiones, lo cual significa, entre otras cosas, que la teoría tiene un estado vacío estable. Además obtenemos un estado base bosónico no masivo. La proyección GSO además elimina del sector NS los estados bosónicos construidos con un número impar de campos anticonmutativos en el espacio-tiempo [28]. Los estados no masivos de partícula en 10 dimensiones en un espacio-tiempo de Minkowski se clasifican por su representación de $SO(8)$ bajo rotaciones de Lorentz. La proyección GSO elimina ciertos estados, y al final obtenemos dos representaciones equivalentes de $SO(8)$, $\mathbf{8}_c$ y $\mathbf{8}_s$. El estado base de la teoría es entonces $\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_s$, un multiplete vectorial con supersimetría espacio-temporal $\mathcal{N} = 1$, $D = 10$ [25].

El espectro de una cuerda cerrada corresponde al producto de dos copias del espectro de cuerda abierta [25]. En este último caso, teníamos dos diferentes representaciones para la proyección GSO que eran equivalentes, pero en el caso de cuerda cerrada debemos escoger dos copias de cada representación para obtener una cuerda cerrada. Tomando la misma proyección tanto para los modos derechos como para los modos izquierdos, obtenemos la llamada teoría de cuerdas *tipo IIB* [25]. Si tomamos dos distintas proyecciones, una para los modos derechos, y otra para los modos izquierdos, obtenemos la teoría tipo IIA [25]. Los sectores no masivos en cada caso, están dados por [25]:

$$\text{Tipo IIA} : (\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_s) \odot \mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_c \quad (2.136)$$

$$\text{Tipo IIB} : (\mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_s) \odot \mathbf{8}_v \oplus \mathbf{8}_s. \quad (2.137)$$

En este trabajo, nos enfocaremos solamente en la teoría de cuerdas tipo IIB. Esta teoría consiste de cuerdas cerradas supersimétricas que se propagan en un espacio-tiempo plano 10-dimensional. El nombre IIB, proviene del hecho de que hay $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías, que en 10 dimensiones corresponde a 32 componentes de los generadores de supercarga. El espectro de campos que producen los modos de oscilación de las cuerdas puede dividirse en los 4 sectores de supercuerdas descritos anteriormente. En el sector NS-NS, tenemos un campo escalar $\varphi(x)$ conocido como *dilatón*, que tiene una sola componente física [7]. Tenemos un bosón no masivo de espín 2 con 35 estados, que corresponde al campo simétrico sin masa del gravitón h_{MN} . Este campo es el responsable de que el propio espacio-tiempo sea dinámico. Además tenemos al campo de norma antisimétrico de *Kalb-Ramond*, $B_{MN}(x^L)$, una 2-forma, que contiene 28 estados. Por otro lado, tenemos 3 campos bosónicos en el sector R-R; $C(x^M)$, $C_{MN}(x^L)$, y $C_{MNP}^+(x^L)$, que son respectivamente el campo escalar *axión*, la 2-forma R-R, y la 4-forma autodual¹⁷ [7]. Estos tres campos, junto con el campo de Kalb-Ramond corresponden a generalizaciones del potencial electromagnético A_μ , y tienen una *carga R-R* asociada, y sus intensidades de campo son invariantes bajo las correspondientes transformaciones de norma. Por último, tenemos también las parejas supersimétricas del dilatón y del gravitón, que se denominan respectivamente *dilatino* y *gravitino*, y se pueden acomodar en los sectores R-NS y NS-R [7]. En total se tienen 256 estados no masivos de los cuales la mitad son bosones y la otra mitad son fermiones.

Como mencionamos anteriormente, podemos determinar la manera en que estos campos interactúan entre sí mediante las amplitudes de dispersión de la cuerda. Esta información puede resumirse en una acción efectiva para la teoría de cuerdas IIB [7, 1]. Si además suponemos que estamos en el régimen de energías bajas, donde $E \leq l_c^{-1}$, podemos despreciar los modos masivos y quedarnos solamente con los campos no-masivos. La teoría resultante se conoce como *supergravedad IIB* o *SUGRA IIB* [7, 15]. La acción efectiva para la parte bosónica de esta teoría se puede escribir en el llamado marco de cuerdas de la siguiente manera [7]:

$$\begin{aligned} S_{SUGRA} = & \frac{1}{16\pi G_N} \int dx^{10} \sqrt{-g} \left\{ e^{-2\varphi} \left(R + 4\partial_M \varphi \partial^M \varphi - \frac{1}{12} H^{MNP} H_{MNP} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \partial_M C \partial^M C - \frac{1}{12} G'_{MNP} G'^{MNP} - \frac{1}{480} G'^+_{MNP} G'^+{}^{MNP} \right\} \quad (2.138) \\ & - \frac{1}{32G_N} \int d^{10}x \frac{1}{4!3!2} \left(C_{0123}^+ H_{456} G_{789} \pm \text{permutaciones} \right) \end{aligned}$$

¹⁷La condición de autodualidad sobre esta 4-forma significa que $G_{MNPQR}^+ = *G_{MNPQR}^+$, donde $*$ representa al dual de Hodge: $*T_{M_1 \dots M_{D-n}} = \frac{\sqrt{-g}}{n!} \epsilon_{M_1 \dots M_{D-n}}^{N_1 \dots N_n} T_{N_1 \dots N_n}$, donde $\epsilon_{ijk\dots}^{lmn\dots}$ es el tensor de Levi-Civita.

donde $H_{MNP} = \frac{1}{2!}\partial_{[M}B_{NP]}$, $G_{MNP} = \frac{1}{2!}\partial_{[M}C_{NP]}$ y $G_{MNPQR}^+ = \frac{1}{4!}\partial_{[M}C_{NPQR}^+$ son las intensidades de campo asociadas a los campos tensoriales. También podemos escribir esta acción como [7]:

$$S_{SUGRA} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{10}x \sqrt{-g_E} \left\{ R_E - \frac{1}{2}(\partial_M \varphi)_E^2 - \frac{1}{12}e^{-\varphi} H_{MNP} H_E^{MNP} + \dots \right\}, \quad (2.139)$$

donde la etiqueta E indica que estos campos están calculados en el *marco de Einstein* [30, 7], que no es más que la redefinición de la métrica $g_{MN}(x) \rightarrow g_{MN}(x) = e^{\frac{\varphi(x)}{2}} g_{MN}^E(x)$ [7]. Los puntos suspensivos denotan acoplamientos de los otros campos de norma. Los términos que le siguen al escalar de Ricci, pueden interpretarse como correcciones de la teoría de cuerdas a la gravedad de Einstein [7].

2.3.3. Solución de p-brana negra y D-branas

Existen distintas soluciones a la teoría de supergravedad IIB, sin embargo aquí sólo examinaremos una de ellas, que corresponde a un fondo de gravedad conocido como *p-brana negra*. Este fondo es máximamente supersimétrico, lo cual quiere decir que se conservan las 32 supersimetrías de SUGRA IIB [30, 7]. Esta solución puede entenderse como una fuente de carga N bajo el campo de norma A_{p+1} (donde $p = -1, 1, 3, 5, 7, 9$ para la teoría IIB) que tiene como grupo de isometrías al grupo ISO(p). Si suponemos que la simetría de las $10 - p$ coordenadas en esta métrica es esférica cuando la fuente de carga R-R está en el origen, la carga del campo A_{p+1} está dada por la integral de la intensidad de campo, que corresponde a la $p + 2$ -forma F_{p+2}^* , sobre una esfera $(8 - p)$ dimensional \mathbb{S}^{8-p} . Esta integración nos permite separar la métrica en una parte espacial originada por la fuente $\sum_{i=1}^p dx^i dx^i$ y una solución con simetría esférica en las $10 - p$ coordenadas exteriores a esta fuente [7, 15]:

$$ds^2 = -\Delta_+(r)\Delta_-(r)^{-\frac{1}{2}} dt^2 + \Delta_-^{\frac{1}{2}}(r) dx^i{}^2 + \Delta_+^{-1}(r)\Delta_-^\gamma(r) dr^2 + r^2 \Delta_-^{\gamma+1}(r) d\Omega_{8-p}^2 \quad (2.140)$$

donde $d\Omega_{8-p}^2$ es la métrica en una esfera \mathbb{S}^{8-p} unitaria, y $\gamma = -\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}$. El campo del dilatón y las funciones Δ están dados por [7, 15]:

$$\Delta_\pm(r) = 1 - \left(\frac{r_\pm}{r}\right)^{7-p} \quad (2.141)$$

$$e^\Phi = 4\pi g_s \Delta_-(r)^{\frac{(3-p)}{4}} \quad (2.142)$$

$$A_{p+1} = g_s^{-1} [\Delta_-(r)^{-1} - 1] dx^0 \wedge \dots \wedge dx^p. \quad (2.143)$$

El nombre de *p-brana negra* hace referencia a que estas soluciones comparten la mayoría de las propiedades de los agujeros negros cargados, que como vimos anteriormente están descritos por la métrica de Reissner-Nördstrom. La topología del horizonte en este caso es de la forma $S^{8-p} \times \mathbb{R}^p$. Vemos que el horizonte de eventos en estas coordenadas está localizado en $r = r_+$ y para $p \geq 6$ además tiene una singularidad en $r = r_-$. La masa y la densidad de carga están dadas por [7]:

$$M = \frac{2}{(7-p)(2\pi)^7 d_p l_p^8} ((8-p)r_+^{7-p} - r_-^{7-p}) \quad , \quad Q = \frac{7-p}{2} (r_- r_+)^{\frac{7-p}{2}} \quad (2.144)$$

donde d_p es un factor numérico. Cuando $r_+ > r_-$ el horizonte de eventos cubre a la singularidad de la misma manera que en el caso del agujero de Schwarzschild. En el caso

crítico, $r_+ = r_-$ y si $p \neq 3$, el horizonte de eventos y la singularidad coinciden, originando una singularidad *nula* [7]. El dilatón puede diverger o anularse en $r = r_+$. Sin embargo, la singularidad en este caso puede tratarse más fácilmente que la singularidad en el régimen $r_+ < r_-$. Para el caso $p = 3$ el dilatón es constante y la superficie en $r = r_+$ es regular, por lo que la singularidad impone la condición $r_+ > r_-$ sobre la coordenada radial. Esta condición se transforma en la siguiente relación entre la masa y la carga, conocida como cota BPS¹⁸ [32]:

$$M \geq \frac{N}{(2\pi)^p dl_s^{p+1}} \quad . \quad (2.145)$$

Esta desigualdad determina los valores que puede tomar M una vez que fijamos la carga R-R dada por $N = Q\Omega_{8-p}$, donde Ω_n es el volumen de una esfera n -dimensional. Cuando se cumple la igualdad, M es la mínima masa que pueden tomar las branas dada la carga N , por lo que a las soluciones se les llama *p-branas negras extremales*. En este caso el área del horizonte de eventos se anula, y la mitad de las supersimetrías se conserva siempre y cuando estemos en el régimen donde la teoría es tratable con la acción de Einstein-Hilbert [7]. Esto sugiere que las *p-branas negras extremales* corresponden al estado base de las *p-branas negras* dada la carga Q [15, 7].

Las *p-branas* están estrechamente relacionadas con un tipo de objetos dinámicos que aparecen en teoría de cuerdas, y comparten con ellos la propiedad de ser objetos extendidos en varias dimensiones espaciales [25]. Una teoría de cuerdas abiertas tiene la posibilidad de tener condiciones de frontera en los extremos de la cuerda. Hasta el momento hemos considerado implícitamente condiciones de frontera sobre las velocidades de los extremos, llamadas condiciones de Neumann. Ahora podemos pensar en restringir el movimiento de los extremos a una superficie dada, esto es, imponer condiciones de Dirichlet en los extremos. En este caso surgen consecuencias interesantes para nuestra discusión. En primer lugar, la superficie sobre la cual se mueven los extremos puede considerarse a sí misma como un objeto dinámico de la teoría, que llamamos *Dp-brana* [25]. Esta superficie es un objeto dinámico extendido, que se describe bajo ciertas condiciones mediante la generalización de la acción de Nambu-Goto a objetos p -dimensionales (en lugar de objetos unidimensionales, como en el caso de la cuerda), donde p es la dimensión espacial de dicho objeto. Las branas son objetos de tipo solitónico¹⁹ [7], es decir, soluciones no perturbativas cuyas ecuaciones de movimiento son no lineales, que tienen una gran energía, y que producen excitaciones macroscópicas en forma de campos [7]. Una *Dp-brana* puede tener distintos tipos de excitaciones. Uno de estos corresponde a sus fluctuaciones y deformaciones en las direcciones normales o transversales. Estas están descritas por un conjunto de $d - p$ campos escalares no masivos ϕ^i con $i = p + 1, \dots, d$, los cuales solo dependen de las coordenadas x^μ tangenciales al volumen de mundo de la D-brana [7]. Otro tipo de excitaciones corresponde a las direcciones tangenciales a la brana, y está descrito por cuerdas abiertas con condiciones de Dirichlet, cuyos extremos representan un campo de norma abeliano A_μ con $\mu = 0, \dots, p$, cuyo grupo de simetrías es $U(1)$. Podemos explicar el origen de este campo, si consideramos al extremo de la cuerda como una carga que actúa como generador del campo de norma sobre el volumen de mundo. Es decir, el extremo de la cuerda genera un campo de Maxwell que vive en el volumen de mundo de la *Dp-brana*.

¹⁸Las cotas BPS se refieren a un conjunto de desigualdades que relacionan la masa de una solución tipo monopolo con su carga eléctrica y magnética. En supersimetría, esta cota es consecuencia de tener una representación unitaria del álgebra de supersimetría [31]. Los estados BPS son aquellos que saturan la cota BPS, formando representaciones cortas de un álgebra de supersimetría extendida [32].

¹⁹Un solitón es una gran excitación ondulatoria localizada de un campo, que se propaga a una velocidad constante mientras mantiene su forma ondulatoria inicial [7].

La Dp -brana puede describirse mediante un conjunto de $p+1$ parámetros σ en el volumen de mundo, similares a los parámetros de la cuerda en la hoja de mundo. Cuando el campo de norma no es muy intenso en comparación con la curvatura del espacio tiempo y la deformación externa de las branas es despreciable, la acción que resume estos dos tipos de excitaciones está dada por la acción de Dirac-Born-Infeld [7]:

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi l_s^2 F_{\mu\nu})}, \quad (2.146)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica inducida sobre el volumen de mundo, con $\mu, \nu = 0, \dots, d$, y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es la intensidad del campo de norma. T_{Dp} representa la tensión de la Dp -brana. Si no hay un campo de norma en el volumen de mundo, $F_{\mu\nu} = 0$ y la acción se reduce a [7]

$$S = -T_{Dp} \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = -T_{Dp} \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}, \quad (2.147)$$

que puede considerarse como una generalización de la acción de la cuerda para un objeto con p dimensiones espaciales. En el espacio-tiempo plano, la métrica inducida en la D-brana se puede aproximar por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (2\pi l_s^2)^2 \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i \quad (2.148)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en $(p+1)$ dimensiones.

Podemos volver ahora al caso en el que tenemos un valor distinto de cero para el campo de norma. Si realizamos una expansión en potencias de $\eta_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$, y nos quedamos solamente con los términos cuadráticos, la acción se transforma en:

$$S_{DBI} = \frac{1}{g_{YM}^2} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i + \dots \right) \quad (2.149)$$

donde (como quedará explicado posteriormente) introducimos la constante de acoplamiento g_{YM} [1, 7]:

$$g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_s. \quad (2.150)$$

La etiqueta YM quedará justificada en la siguiente sección, cuando derivemos la relación de esta acción con la teoría de Super Yang-Mills. (2.149) es la acción que describe un campo de norma junto con $d-p$ campos escalares no masivos.

Consideremos ahora el caso de n Dp -branas paralelas a lo largo de la dirección x_1 en el espacio de Minkowski. Sean x^i las posiciones de la i -ésima Dp -brana en la dirección x_1 , con $i = 1, 2$. Aquí x representa el conjunto de $9-p$ coordenadas normales. La separación entre las branas es $r = x^2 - x^1$. Existen 4 tipos de configuraciones en las cuales pueden estar los extremos de una cuerda abierta, y cada uno genera un campo de norma distinto [7, 33]. Estos campos de norma podemos denotarlos como $(A_\mu)_j^i$, donde $i, j = 1, 2$ denotan la Dp -brana en la que se encuentra cada extremo de la cuerda abierta. Si la cuerda tiene ambos extremos sobre la misma Dp -brana ($i = j$), el campo de norma correspondiente es no masivo, como se explicó anteriormente. Sin embargo, cuando una cuerda une a las dos Dp -branas, obtenemos estados masivos, donde el operador de masa está dado como $M = \frac{r}{2\pi\alpha'}$ [1, 7] donde r es la coordenada radial en la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas. Si tenemos dos Dp -branas separadas una distancia r , y las acercamos hasta que coincidan, tendremos $M = 0$, y como consecuencia, los 4 campos $(A_\mu)_j^i$ serán no masivos [7]. Entonces podemos ver a estos campos como componentes de matrices

de 2×2 que forman una representación del grupo de norma $U(2)$, que representa una configuración de 2 Dp -branas [7].

En un caso más general, podemos “apilar” un número arbitrariamente grande N_c de Dp -branas, en cuyo caso, obtendremos 2^{N_c} campos de norma no masivos, que forman matrices de $(N_c \times N_c)$ en la representación adjunta del grupo de norma $U(N_c)$ [7]. En particular, nos interesa considerar N_c $D3$ -branas en la teoría tipo IIB descrita anteriormente en el límite de bajas energías (comparadas con el inverso de la longitud de cuerdas) cuándo la teoría de cuerdas se reduce a SUGRA IIB. Estudiando las excitaciones no masivas de este sistema obtenemos un campo de norma A_μ , donde $\mu = 0, \dots, 3$, y seis campos escalares ϕ^i con $i = 1, \dots, 6$. Además aparecen cuatro fermiones de Weyl no masivos, con 16 componentes reales y que corresponden a 8 grados de libertad internos de la D-brana [7, 33]. Todos estos campos están en la representación adjunta de $U(N)$ [7]. A bajas energías (en comparación con el inverso de la longitud de la cuerda), podemos realizar una expansión perturbativa en términos de $\frac{1}{l_s}$ y la acción resultante está dada por (3.18), que resulta ser la parte bosónica de la acción de Yang-Mills en (3+1) dimensiones con supersimetría global $\mathcal{N} = 4$ (que abreviaremos $\mathcal{N} = 4$ SYM) [7]. La constante de acoplamiento de Yang-Mills corresponde a tomar $p = 3$ en la ecuación (2.150) y es [1, 7]:

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \quad (2.151)$$

El subgrupo diagonal $U(1)$ de $U(N)$ describe el movimiento del centro de masa del sistema de $D3$ -branas, por lo que los modos correspondientes a la dinámica intrínseca de estas se desacoplan de los modos correspondientes a $SU(N)$, que describen el movimiento relativo entre $D3$ -branas [7]. La teoría también incluye cuerdas cerradas propagándose en el espacio-tiempo 10-dimensional. A bajas energías (cuando $E \ll 1/l_s$), la intensidad de las interacciones entre cuerdas cerradas y abiertas es despreciable, y podemos concluir a partir de la acción (2.149) que la teoría en el volumen de mundo 4-dimensional de las $D3$ -branas se reduce a $\mathcal{N} = 4$ SYM en un espacio de Minkowski con 4 dimensiones, que está incrustado en el espacio-tiempo de cuerdas 10-dimensional.

A partir de las amplitudes de propagación entre modos de cuerdas abiertas y cerradas podemos escribir una acción efectiva para los modos de supergravedad interactuando con los modos de cuerda abierta en la $D3$ -brana. Esto da lugar a una acción efectiva que nos dice que la $D3$ -brana se acopla un campo de norma, y por tanto posee una carga R-R, con T_{D3} igual a su densidad de carga. Por otro lado, sabemos de la forma de S_{DBI} sabemos que T_{D3} es la constante de acoplamiento para la propagación de gravitones. Esto hecho es relevante, ya que la misma cantidad determina la amplitud de propagación de cuerdas cerradas [7]. Más aún, si calculamos las amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas entre dos $D3$ -branas paralelas, con uno de los extremos de la cuerda en cada $D3$ -brana obtenemos exactamente el mismo valor que si consideramos la propagación de una cuerda cerrada de una $D3$ -brana a otra. Este resultado se conoce como *dualidad de cuerdas abiertas-cerradas* y nos permite deducir la manera en que la tensión depende de la constante de acoplamiento de cuerdas abiertas [7]:

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \quad (2.152)$$

Podemos conjeturar que la pila de N $D3$ -branas es la descripción, en un cierto límite, de otro tipo de objeto que ya hemos analizado. La masa y la carga R-R de la $D3$ -brana están dadas exactamente por la ecuación (2.144), y dicha masa satura la desigualdad (2.145), que corresponde a las condiciones para una 3-brana negra extremal. Esto nos

lleva a la conjetura de que los modos de cuerda cerradas generados por la pila de N $D3$ -branas (teoría de norma $SU(N)$) son exactamente iguales a los modos de cuerdas cerradas propagándose en el fondo de p -brana negra. De manera más precisa, la solución de 3-brana negra sólo es válida cuando $E \gg g_c N$, mientras que la expansión perturbativa para modos de cuerda abierta en la pila de $D3$ -branas requiere que consideremos $E \ll l_c N$. Podemos concluir que estas dos descripciones nos hablan de un mismo sistema, pero descrito a escalas energéticas mutuamente excluyentes.

2.4. Correspondencia Norma Gravedad

La discusión de la sección anterior ha hecho énfasis en la propiedad de que los dos escenarios descritos, son en realidad el mismo sistema, utilizando dos lenguajes diferentes que son válidos en diferentes regímenes. El objetivo de esto, ha sido brindar el marco teórico para la deducción de un resultado que provee las herramientas teóricas necesarias que utilizaremos en este trabajo. A este resultado se le conoce como *correspondencia AdS/CFT*, o *correspondencia holográfica*, o *norma/gravedad* [1, 7, 15, 33].

2.4.1. Límite de ultra-bajas energías

Regresemos a la solución de p -brana negra de la ecuación (2.140), cuya métrica puede escribirse para el caso extremal con $p = 3$ en la forma

$$ds^2 = H(r)^{-1/2}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + H(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (2.153)$$

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4, \quad L^4 = 4\pi g_s N l_s^4, \quad (2.154)$$

donde $d\Omega_5$ representa el elemento de línea de una métrica esférica en 5 dimensiones. En este caso el dilatón es constante, y su exponencial es igual a la constante de cuerdas [7]. El campo de norma se escribe como $C_{0123} = g_c^{-1}(1 - H(r)^{-1})$. La cantidad L representa el radio de curvatura del espacio-tiempo descrito por la solución (2.154), que pedimos que sea grande en comparación con la longitud de la cuerda l_s , de forma que podamos quedarnos con la solución de gravedad clásica. Esta condición implica, de la segunda de las ecuaciones (2.154), que la cantidad $g_c N$ igualmente debe ser grande mientras que la expansión perturbativa en modos de cuerda cerrada requiere que $g_c \ll 1$ [1]. Sabemos de la dualidad de cuerdas abiertas-cerradas que este sistema es equivalente una pila de N $D3$ -branas en espacio-tiempo plano con $E \ll g_c N$, con cuerdas abiertas interactuando débilmente [1, 7].

Ahora analicemos qué sucede si consideramos este sistema a energías ultrabajas, es decir, $E \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{L}$ o lo que es lo mismo, a escalas de distancia mucho mayores que la longitud de cuerdas y que el radio de curvatura del fondo. En el lado de la brana negra la condición $E \ll g_c N$ implica (por la ecuación (2.154)) que $E^{-1} \ll L$, por lo que los modos de cuerda cerrada resultan demasiado grandes para ser absorbidos por la brana, que tiene una sección eficaz proporcional a una potencia de L [7]. Los modos de oscilación de la cuerda cerrada se propagan entonces en un fondo plano, y están desacoplados por completo de los modos cercanos al horizonte de la brana negra²⁰. Del lado de las $D3$ -branas, la teoría igualmente se desacopla en modos de cuerda cerrada en espacio-tiempo plano dando lugar a una teoría de SUGRA libre, y modos de cuerda abierta en la pila de D -branas, que en

²⁰Recordemos que una 3-brana negra puede interpretarse como un agujero negro en (3+1) dimensiones, y por lo tanto posee un horizonte de eventos.

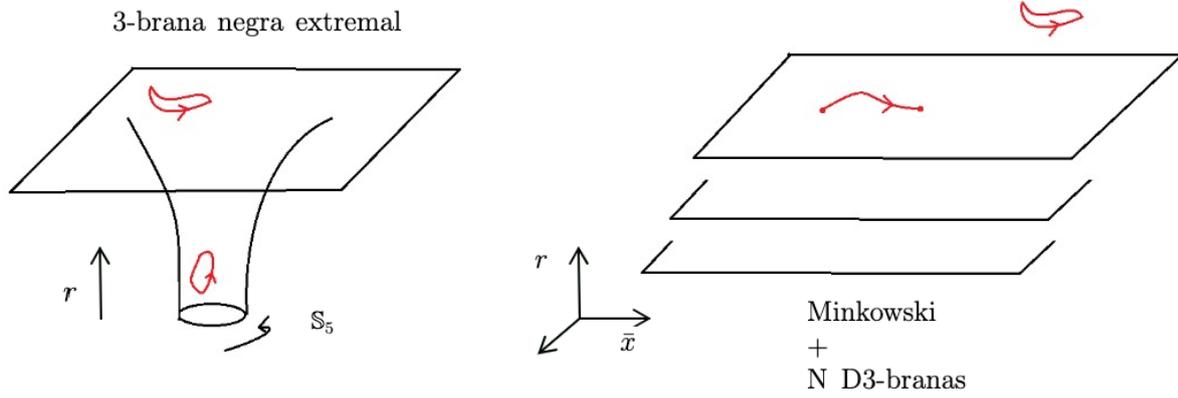


Figura 2.3: Dualidad entre el fondo gravitacional generado por el sistema de 3-brana negra extremal con carga R-R N (izquierda) y una pila de N $D3$ -branas encajadas en un espacio-tiempo plano-10 dimensional (derecha). En el lado izquierdo tenemos cuerdas cerradas que se pueden propagar cerca del horizonte donde el espacio-tiempo está muy curvado, o a distancias para las cuales $r \rightarrow \infty$, donde el espacio-tiempo es aproximadamente plano. Del lado derecho tenemos cuerdas abiertas propagándose en las $D3$'s y cuerdas cerradas en Minkowski 10-dim.

este límite corresponde a $SYM \mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $U(N)$ [1, 7].

En la brana negra además sucede un efecto de corrimiento al rojo, debido a que la componente temporal de la métrica (2.154), que determina la energía propia de un observador que se mueve bajo la geometría de la brana en términos de la energía de un observador en infinito a través de la fórmula $E_{prop} = \sqrt{-g_{tt}}^{-1} E_{\infty}$, depende de la coordenada radial r . El efecto de este corrimiento es que al imponer la condición $E \ll 1/L$ sobre la energía en infinito, la teoría tipo IIB se reduce a SUGRA IIB libre en un fondo plano siempre y cuando nos mantengamos en la región $r \geq L$. Sin embargo, en la región $r \ll L$, podemos tener E_{prop} arbitrariamente grande y aún satisfacer esta condición, debido a que [7, 1]

$$g_{tt} = H(r)^{-1/2} = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4}. \quad (2.155)$$

Además, en este régimen podemos aproximar $1 + \frac{L^4}{r^4} \sim \frac{L^4}{r^4}$ y obtenemos la siguiente geometría,

$$ds^2 = \left\{ \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \right\} + L^2 d\Omega_5^2, \quad (2.156)$$

donde $r \in (0, \infty)$, $t, x_i \in (-\infty, \infty)$. El término entre llaves corresponde a la métrica del espacio-tiempo conocido como *Anti-de Sitter 5-dimensional*, mientras que el otro término describe a una esfera 5-dimensional de radio L . Podemos visualizar nuestro punto de partida esquemáticamente en la Figura 2.5.2. Tenemos dos sistemas distintos, cada uno con su propia acción. En el lado de la pila de N $D3$ -branas tenemos una teoría de norma $SYM \mathcal{N} = 4$, cuyas excitaciones no masivas son modos de supergravedad IIB desacoplados propagándose en fondo plano. Entonces, podemos separar la acción en dos términos, uno para la teoría de norma en la $D3$ -brana, y otro para la teoría de cuerdas IIB en el límite de bajas energías:

$$S_{ND3} = S_{SYM \mathcal{N}=4} + S_{SUGRA IIB}. \quad (2.157)$$

Por otro lado, la acción que corresponde solución de p-brana negra se puede separar en la acción que describe el fondo $AdS_5 \times S^5$, y en los modos no masivos de cuerda cerrada

lejos de la p -brana, que corresponden a supergravedad IIB en fondo plano. De esta forma, la acción para la 3-brana negra se escribe como:

$$S_{3\text{-brananegra}} = S_{AdS_5 \times S^5} + S_{SUGRA \text{ IIB}}. \quad (2.158)$$

Claramente, si estos dos sistemas han de ser equivalentes en esta aproximación, las acciones (2.157) y (2.158) deben coincidir. Igualando el lado izquierdo de (2.157) y (2.158), vemos que en ambos lados aparece la acción de la teoría SUGRA IIB. Cancelando este término, llegamos a la conclusión de que

$$\{\mathcal{N} = 4 \text{ SYM en Minkowski } 4 - \text{dim}\} = \{\text{cuerdas tipo IIB en } AdS_5 \times S^5\} \quad (2.159)$$

Este es el enunciado principal y mejor entendido de la correspondencia norma/gravedad [1]. En el lado derecho de esta relación, las interacciones están controladas por la constante de t'Hooft $\lambda = g_c N$. En el límite de bajas energías $E \ll l_c N$, tenemos $\lambda \gg 1$, por lo que la teoría está fuertemente acoplada, mientras que en la 3-brana negra las interacciones están controladas por la constante de cuerdas g_c . En este mismo límite, la constante de cuerdas resulta ser comparable a uno, por lo que la teoría está débilmente acoplada. Este es un resultado importante, ya que nos permite obtener una dualidad entre una teoría débilmente acoplada y una teoría fuertemente acoplada. Usando este resultado, podemos realizar cálculos perturbativos usando las técnicas usuales de la teoría de campos para obtener información de una teoría en un régimen en donde es difícil calcular cantidades físicas, como las funciones de correlación. Debido a esta dualidad, todas las cantidades que aparecen en una de las teorías tiene su *dual holográfico* en la otra teoría. A esta biyección entre distintos lenguajes le llamamos el *diccionario de la correspondencia holográfica*. Gracias a los avances de los últimos años, ha sido posible deducir algunas de las entradas de este diccionario.

2.4.2. Diccionario de AdS/CFT

Antes de analizar las entradas más importantes del diccionario de la correspondencia AdS/CFT, estudiemos la geometría del fondo conocido como Anti-de Sitter. Este espacio-tiempo, se define en 5 dimensiones como la cubierta universal de un hiperboloide de radio L^2 encajado en un espacio plano con signatura (4,2) [7, 33]. Es un espacio-tiempo de curvatura constante negativa, hecho que se ve reflejado en el signo negativo de la constante cosmológica. En las *coordenadas globales* (τ, ρ, Ω) la métrica se escribe como:

$$ds^2 = L^2(d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\tau^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2), \quad (2.160)$$

donde $d\Omega_3^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta(d\phi^2 + \sin^2 \phi d\psi^2)$, con las coordenadas (θ, ϕ, ψ) periódicas. Si redefinimos la coordenada radial como $\tan \alpha = \sinh \rho$ y desechamos un factor conforme mediante una transformación de Weyl, podemos representar a este espacio-tiempo en una región finita [7, 33]. En la Figura 2.4.2 a) se muestra el correspondiente diagrama de Penrose [16], dado en coordenadas globales. Notemos que el infinito espacial es una superficie tipo tiempo, por lo que los rayos de luz pueden alcanzar esta región en un tiempo propio finito. En analogía con lo que sucede en el espacio-tiempo de Minkowski, donde un observador acelerado con una aceleración propia dada describe sólo una porción del espacio completo (coordenadas de Rindler), también podemos definir un conjunto de coordenadas asociadas a un observador acelerado en AdS. A ese conjunto se le conoce como coordenadas de Poincarè [7, 33], y cubren la porción sombreada en la Figura 2.4.2 b), también conocida como parche de Poincarè. En estas coordenadas la métrica se escribe como:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2), \quad (2.161)$$

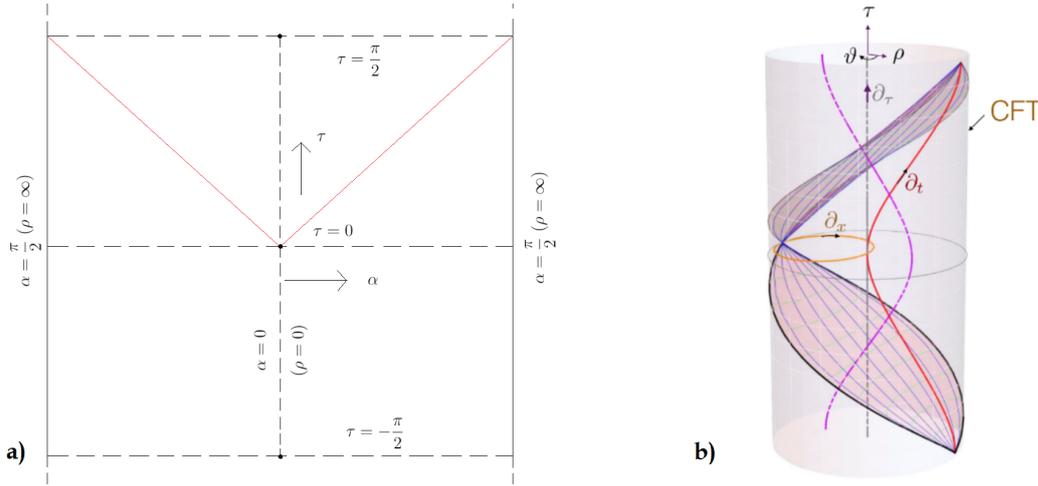


Figura 2.4: a) Sección transversal del diagrama de Penrose de AdS_5 cuando las coordenadas periódicas se toman como constantes. La coordenada radial α tiene un rango finito, por lo que el infinito espacial está localizado en $\alpha \pm \pi/2$. b) En el cilindro completo de AdS descrito por las coordenadas globales, podemos definir coordenadas que describen a un observador acelerado en AdS restringiendo el espacio al parche de Poincaré, representado como la región sombreada del diagrama.

donde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $z \in (0, \infty)$. Vemos que esta ecuación coincide con el primer término de (2.156), que determina la solución de p -brana negra extremal, por lo que las coordenadas espaciales del espacio plano en el que definimos la teoría $SYM_{\mathcal{N}=4}$, \bar{x} deben identificarse específicamente con las coordenadas del parche de Poincaré en AdS_5 .

Como primer potencial evidencia de la conjetura, veamos cómo se relacionan las simetrías espacio-temporales de las teorías en los dos lados de la correspondencia. El espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$ tiene, globalmente, al grupo conforme $SO(2,4)$ como grupo de isometrías [15, 33]. Este grupo actúa sobre la frontera de AdS_5 como el grupo de conforme 4-dimensional, por lo que la métrica resulta invariante bajo transformaciones conformes. En particular, para dilataciones de la forma $(\lambda(t, \bar{x}) \rightarrow \lambda(t, \bar{x}), z \rightarrow \lambda z)$ podemos comprobar fácilmente la invariancia de la métrica [7]:

$$ds'^2 = \frac{R^2}{(\lambda z)^2} (-d(\lambda t)^2 + d(\lambda \bar{x})^2) = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + d\bar{x}^2 + dz^2) = ds^2. \quad (2.162)$$

Del otro lado de la dualidad, $\mathcal{N} = 4 SYM$ es máximamente supersimétrica y tiene 32 supercargas dadas por los 4 generadores de supersimetría Q_α^A ($A = 1, \dots, 4$). Los generadores de supercarga transforman en la representación fundamental del grupo $SU(4)$. En esta teoría aparecen además seis campos escalares sin masa ϕ_i ($i = 1, \dots, 6$) que transforman en la representación fundamental de $SO(6) \simeq SU(4)$ [7, 33].

En la descripción de p -brana negra en cuerdas IIB, la solución también es máximamente supersimétrica con 32 espinores de Killing, que identificamos con los generadores de supercarga de $\mathcal{N} = 4 SYM$. La simetría rotacional de la S^5 -esfera está dada por el grupo $SO(6) \approx SU(4)$, que corresponde a la simetría-R de la teoría de Yang-Mills. Los seis campos escalares ϕ_i corresponden a las coordenadas de la S^5 -esfera, que son coordenadas extra en la formulación de gravedad. Las isometrías de este espacio compacto son duales, y están en relación uno a uno con las rotaciones internas de los supercampos y campos

escalares en $\mathcal{N} = 4$ SYM [7].

Cabe preguntarnos también a que corresponde el contenido de materia en ambos lados de la dualidad. Como ejemplo, recordemos que la constante de acoplamiento de la teoría de norma, g_{YM}^2 , se mapea a la constante de acoplamiento de cuerdas g_s mediante (2.151), que a su vez está definida como la exponencial del campo del dilatón Φ siempre y cuando identifiquemos a la CFT con la frontera de AdS $z \rightarrow 0$ en coordenadas de Poincarè. La forma en que se acoplan los operadores de la teoría de norma determina las condiciones de frontera de los campos en el bulto [7, 33].

De esta manera tenemos una correspondencia entre el contenido de materia de ambos lados de la dualidad. Veamos el ejemplo más simple, que corresponde a un campo escalar en AdS. La ecuación de movimiento para un campo escalar de masa m en el espacio-tiempo de Minkowski corresponde a la ecuación de Klein-Gordon. Realizando una transformada de Fourier, podemos describir al campo mediante su transformada $\phi_k(z)$, y de esta manera resolver la ecuación transformada cerca de $z = 0$. Suponiendo que $\phi_k(z) \sim z^\Delta$ para algún exponente Δ , encontramos que [15]

$$\Delta = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{d^2}{4} + L^2 m^2}, \quad (2.163)$$

donde d es la dimensión espacial. Por lo tanto, cerca de $z \sim 0$ tenemos un comportamiento de la forma

$$\phi_k(z) \simeq A(k)z^{d-\Delta} + B(k)z^\Delta, \quad (2.164)$$

por lo que la ecuación de Klein-Gordon tiene dos soluciones independientes que escribimos como $z^{d-\Delta}$ y z^Δ . A Δ le llamamos *dimensión conforme*. Realizando la transformada de Fourier inversa, obtenemos [15]

$$\phi(z, x) \sim A(x)z^{d-\Delta} + B(x)z^\Delta, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.165)$$

Δ es real únicamente cuando se satisface $m^2 \geq -(\frac{d}{2L})^2$, cota que se conoce como BF [7]. A partir de ahora, supondremos que se satisface esta cota. El término dominante cuando $z \rightarrow 0$ es entonces $z^{s-\Delta}$. Para, eventualmente regularizar la teoría, imponemos un corte con, de tal manera que la frontera se encuentre a un valor finito de z , $z = \epsilon$, y despreciemos los términos subdominantes. Entonces tenemos $\phi(z = \epsilon, x) \sim \epsilon^{d-\Delta} A(x)$. Por lo tanto, las condiciones de frontera consistentes con las ecuaciones de un campo escalar masivo en una geometría AdS_{d+1} implican que en el límite en el que nos acercamos a la frontera de AdS [15],

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Phi(x, z) \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Phi(x, \epsilon) = \epsilon^{d-\Delta} \phi(x)]. \quad (2.166)$$

Φ es una cantidad adimensional y ϵ es un corte con unidades de longitud, por lo que ϕ debe tener unidades de $(longitud)^{\Delta-d}$. La ecuación (2.166) nos dice que existe una correspondencia biunívoca entre los operadores invariantes de norma de la teoría de campo y los campos del bulto de AdS. Si $\mathcal{O}(x)$ es el operador dual a ϕ , la acción en la teoría de norma está dada por [15]

$$S_{CFT} \sim \int d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \phi(\epsilon, x) \mathcal{O}(\epsilon, x), \quad (2.167)$$

donde $\gamma_\epsilon = (\frac{L}{\epsilon})^{2d}$ es el determinante de la métrica inducida en la frontera $z = \epsilon$. Sustituyendo $\phi(\epsilon, x) = \epsilon^{d-\Delta} \phi(x)$ en la acción S_{CFT} , y requiriendo que S_{CFT} sea finita e independiente de ϵ al tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos la condición

$$\mathcal{O}(\epsilon, x) = \epsilon^\Delta \mathcal{O}(x). \quad (2.168)$$

Entonces, Δ debe interpretarse como la dimensión de escalamiento de masa del operador dual \mathcal{O} [15]. Además del ejemplo del campo escalar, otro caso importante es el campo del gravitón h_{ab} , que tiene como operador dual al tensor de energía-momento T_{ab} [7, 15].

Usando el resultado anterior podemos obtener una receta para calcular correladores en la teoría de norma. Si diferenciamos la función de partición de la teoría de norma sucesivamente respecto a ϕ tenemos [33, 7];

$$\left\langle \prod_i \mathcal{O}(x_i) \right\rangle = \prod_i \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \log Z_{QFT}[J]|_{J=0} . \quad (2.169)$$

Podemos ver que cada derivada involucra a algún operador \mathcal{O} que mapea un estado del campo ϕ dentro del bulto de AdS . El lado izquierdo de esta ecuación se puede calcular considerando el límite de N grande, donde la aproximación de punto silla permite usar la acción clásica de supergravedad en lugar de la acción completa de cuerdas IIB [7]. Entonces, para calcular las amplitudes de interacción entre partículas de la teoría de norma podemos realizar una expansión perturbativa en el lado de la teoría de gravedad, y calcular las funciones de correlación correspondientes a estos campos en el bulto. De esta manera, podemos deducir que las funciones de partición en ambos lados de la dualidad coinciden exactamente [7]. A esta entrada del diccionario se le conoce como la *correspondencia bulto/frontera*, y se escribe como [7, 15]:

$$\mathcal{Z}_{cuerda}[\phi] = \mathcal{Z}_{CFT}[\phi(x)] \simeq \exp(S^{(ren)}[\Phi_c^\epsilon]) \quad (2.170)$$

donde ϕ y Φ son duales bajo la correspondencia campo-operador, y donde $S^{(ren)}$ es la acción de supergravedad renormalizada²¹, que corresponde a una acción clásica evaluada en las soluciones Φ determinadas por la condición de frontera (2.166) [7].

La función de partición más general de la CFT puede incluir una fuente para cada operador invariante de norma, por lo que interpretamos a $\phi(x)$ como el conjunto de todas estas fuentes. Concluimos que las funciones de correlación, en el límite de N_c grande y λ constante en la teoría de norma están dadas simplemente como las derivadas funcionales de la acción clásica de gravedad [7]:

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n S^{(ren)}[\Phi_c^\epsilon]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} \Big|_{\phi=0}, \quad (2.171)$$

donde evaluamos en la frontera de AdS del campo sin fuentes, es decir, con $\phi = 0$. Gracias a este procedimiento es posible calcular observables en una teoría de norma similar a QCD que nos ayudan a entender ciertos aspectos del comportamiento de este tipo de teorías. Como un caso particular, podemos poner a prueba la dualidad mediante experimentos o modelos numéricos de QCD, por ejemplo, el cálculo de la energía potencial de un par quark-antiquark, que es el tipo de observable que queremos calcular en este trabajo.

Hasta el momento hemos considerado únicamente el estado base de la teoría SYM. Estudiemos ahora qué sucede si ahora nuestra teoría de norma se encuentra en un estado que podemos describir por medio de una matriz de densidad en un ensamble térmico con temperatura finita. La métrica del espacio de gravedad dual a esta configuración tiene la forma,

$$ds^2 = \frac{R^2}{r^2} (g_{\mu\nu}(x, r) dx^\mu dx^\nu + dr^2), \quad (2.172)$$

²¹La teoría renormalizada se obtiene sustrayendo los términos que ocasionan la divergencia, y tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$

donde $g_{\mu\nu}(x, r)$ es la métrica de la frontera espacial 4-dimensional del espacio AdS_5 . El tensor de energía momento es dual a la métrica de la CFT, $g_{\mu\nu}$, y por lo tanto podemos determinarla a partir del valor esperado en el vacío $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Si el fondo es asintóticamente AdS, podemos expandir la métrica en la forma

$$g_{\mu\nu}(x, r) \simeq \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{r^2}g^{(2)}(x, r) + \dots + \frac{1}{r^d}g^{(d)}(x, r) + \dots, \quad (2.173)$$

desarrollo conocido como *expansión de Fefferman-Graham* [7, 33]. Si escogemos el estado en el que el estado excitado es un plasma con temperatura T en reposo, tenemos $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \text{diag}(\epsilon, p, p, p)$ donde ϵ es la densidad de energía y p es la presión. El resultado, que obtenemos después de realizar la expansión de Fefferman-Graham de la métrica, es el siguiente:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_3^2. \quad (2.174)$$

Esto es exactamente la métrica de un agujero negro en un fondo asintóticamente AdS_5 [7], conocido como *AdS-Schwarzschild*, que ya habíamos presentado en la Sección 2.2. El horizonte del agujero negro se halla localizado en coordenadas de Schwarzschild en $r = r_0$. En las coordenadas de Poincaré, podemos escribir esto como

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \left(-\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)dt^2 + d\bar{x}^2\right) + \frac{R^2}{r^2\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)}dr^2. \quad (2.175)$$

Si la coordenada radial cumple $r \in (r_0, \infty)$, entonces, (2.175) corresponde a la región externa de un agujero negro de Schwarzschild en AdS_5 [7]. Como puede verificarse, este espacio-tiempo es invariante bajo traslaciones a lo largo de las coordenadas de la frontera tanto temporales como espaciales, e invariante rotacionalmente a lo largo de las coordenadas espaciales en la frontera AdS_5 . Por lo tanto, identificamos a las propiedades termodinámicas (como la temperatura) de un agujero negro en un espacio AdS_5 con aquellas de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM dual [7]. La temperatura de la CFT está dada por la temperatura de Hawking en AdS-Schwarzschild [7]. Para esto, debemos exigir que la continuación Euclidiana de la métrica (2.175) mediante la sustitución $t \rightarrow -it_E$

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (f dt_E^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{R^2}{r^2 f} dr^2, \quad (2.176)$$

donde $f = \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)$, sea no-singular en $r = r_0$. Esto implica que debemos tomar la coordenada temporal como periódica con periodo [7]

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{\pi}{r_0}. \quad (2.177)$$

Entonces, la temperatura de Hawking T es identificada con la temperatura de la CFT en la frontera, ya que la coordenada Euclidiana t_E coincide con la coordenada temporal en el lado de la teoría de norma [7, 15].

2.5. Potencial de un par quark-antiquark

En este trabajo nos interesa probar la geometría de un agujero de gusano que se construirá en la Sección 2.1 usando la correspondencia holográfica. Para esto, utilizaremos una entrada del diccionario de la correspondencia AdS/CFT que relaciona a un par quark-antiquark con una configuración de cuerda fundamental en la teoría dual. A continuación, veremos que existen ciertas configuraciones de cuerdas en la teoría de gravedad cuyos extremos representan quarks infinitamente pesados en la teoría de norma.

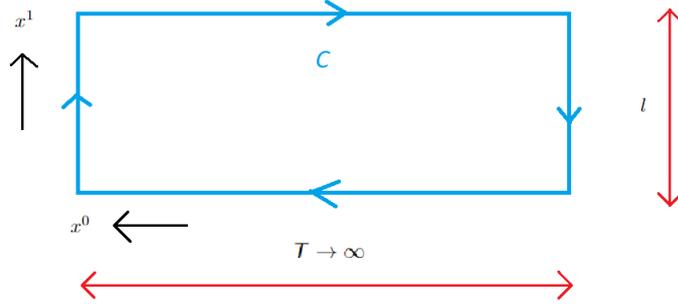


Figura 2.5: Lazo de Wilson rectangular extendido a lo largo de las coordenadas x^0 y x^1 . El ancho del rectángulo en la dirección x^1 es l . En la coordenada temporal, x^0 , tenemos un ancho T , y además tomamos el límite cuando T tiende a infinito. El lazo de Wilson es recorrido en sentido horario.

2.5.1. Lazos de Wilson

En las teorías cuánticas de campos, existen operadores invariantes de norma *no locales* que son de gran importancia. Para ejemplificar uno de dichos operadores, consideremos QED en $3 + 1$ dimensiones. Una partícula cargada eléctricamente puede describirse en términos de su *línea de mundo* a través de un parámetro τ y el encaje de la partícula puntual $x^\mu(\tau)$, con $\mu = 0, \dots, d$. La parte de la acción que describe a la parte interactuante de dicha teoría se denota como S_{int} . El campo electromagnético se acopla a la línea de mundo de una carga puntual a través de [7]

$$\exp(iS_{int}) = \exp\left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \partial_\tau x^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))\right], \quad (2.178)$$

donde A_μ es el campo de norma asociado al campo electromagnético y τ_1, τ_2 son los valores del parámetro que representan los extremos de la trayectoria en la línea de mundo. Una transformación de norma actúa sobre este campo como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)(A_\mu - i\partial_\mu)U^{-1}(x) = A_\mu - \partial_\mu\theta(x), \quad (2.179)$$

donde $U(x) = e^{i\theta(x)}$, y $\theta(x)$ representa el parámetro de norma local. Bajo una transformación como (2.179), la exponencial (2.178) transforma como

$$\begin{aligned} \exp(iS'_{int}) &= U(x_2)\exp(iS_{int})U^{-1}(x_1) \\ &= e^{i\theta(x_2)}\exp\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \partial_\tau x^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))\right]e^{-i\theta(x_1)}, \end{aligned} \quad (2.180)$$

donde $x(\tau_1) = x(\tau_2)$. Consideremos ahora el caso de un campo de norma no abeliano. Podemos pensar en una fuente puntual del campo que se acopla al campo de norma mediante

$$\exp(iS_{int}) = \mathcal{P} \exp\left[i \int_C d\tau \partial_\tau x^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))\right], \quad (2.181)$$

donde abreviamos A_μ como $A_\mu^I t_{c\bar{c}}^I$. $t_{c\bar{c}}^I$ son los generadores del grupo con índices de color c, \bar{c} en la representación que corresponde a la fuente [7] y \mathcal{P} representa el *orden de trayectoria*²². La trayectoria C es una trayectoria clásica, lo cual significa que nuestra fuente

²²La prescripción de orden de trayectoria nos indica que debemos ordenar los operadores de campo de manera que el parámetro τ aumente de derecha a izquierda. Por ejemplo, en la expansión en potencias de la exponencial (2.181), $1 + i \int_C d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) + \frac{i^2}{2} \int_C d\tau \int_C d\tilde{\tau} \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tilde{\tau}) \mathcal{P}\{A_\mu(x(\tau))A_\nu(x(\tilde{\tau}))\} + \dots$, el orden nos indica que el término entre llaves debe ser $A_\mu(x(\tau))A_\nu(x(\tilde{\tau}))$ si $\tau > \tilde{\tau}$.

debe ser infinitamente masiva. En el caso no abeliano, una transformación de norma actúa mediante el operador $U(x) = \exp(it^I \theta^I(x))$, y transforma a la exponencial (2.181) mediante $\exp(iS'_f) = U(x_2)\exp(iS_f)U^{-1}(x_1)$ [7]. Es decir, tanto en el caso abeliano como el no abeliano, la exponencial de la parte interactuante de la acción transforma únicamente por una fase, y a esta fase se le conoce como *línea de Wilson* [7]. Cuando consideramos una trayectoria arbitraria C :

$$W[C] = \mathcal{P} \exp \left[i \int_C d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) \right]. \quad (2.182)$$

Si identificamos los extremos, $x_1 = x_2$, obtenemos una trayectoria cerrada y si tomamos la traza de la fase correspondiente obtenemos el llamado *lazo de Wilson* [7]:

$$W[C] = \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \exp \left[i \int_C d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) \right] \right\}. \quad (2.183)$$

Los lazos de Wilson tienen una gran importancia dentro de las teorías de norma, ya que son operadores no locales e invariantes de norma. Si formamos productos de dichos operadores, obtenemos nuevos operadores, que junto con los lazos de Wilson originales, forman una base completa de operadores para el sector gluónico de la teoría de Yang-Mills [7]. El valor esperado en el vacío del lazo de Wilson, $\langle W[C] \rangle$ puede interpretarse como la amplitud de probabilidad para se cree un par quark-antiquark, que se propaga y es aniquilado después de un tiempo T [15]. Esta cantidad está directamente relacionada con la energía potencial de la fuente infinitamente masiva. Consideremos un contorno rectangular (como el de la Figura 2.5.1), donde uno de los lados coincide con la coordenada temporal, y tomamos el límite cuando el largo de este lado tiende a infinito. Recordemos que una partícula que viaja hacia atrás en el tiempo puede entenderse como la partícula dada pero con la carga opuesta. En el rectángulo que acabamos de describir, uno de los lados se recorre en una dirección hacia atrás en el tiempo, mientras que en el opuesto a este, el tiempo viaja hacia adelante. Por lo tanto, esta trayectoria representa a un par quark-antiquark. En QCD podemos calcular los correladores de los operadores invariantes de norma definidos como

$$\mathcal{O}(X_1, X_2) = \tilde{\psi}(X_2) W_{C_1}[X_1, X_2] \psi(X_1), \quad (2.184)$$

donde $\psi(x)$ es el campo de Dirac del quark y

$$W_{C_1}[X_1, X_2] = \mathcal{P} e^{i \int_{X_1}^{X_2} d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))}, \quad (2.185)$$

donde C_1 es la curva que une a los puntos X_1 y X_2 . Podemos evaluar el valor esperado en el vacío de la función de correlación invariante de norma $\langle 0 | \mathcal{O}(X_1, X_2) \mathcal{O}(X_3, X_4) | 0 \rangle$, donde $|0\rangle$ representa al estado vacío de QCD. Realizando un cierto cambio de variables, podemos expresar este correlador en términos de dos trayectorias C_1 y C_2 , que componen la trayectoria cerrada C , con longitud espacial L y longitud temporal T . Encontramos que el correlador $\langle 0 | \mathcal{O}^\dagger(T, L) \mathcal{O}(0, L) | 0 \rangle$ puede expresarse en términos del lazo de Wilson $W[C](T, L)$. Por otro lado, podemos usar el formalismo hamiltoniano para expresar este correlador en términos de un conjunto completo de estados en tiempo Euclidiano:

$$\langle 0 | \mathcal{O}^\dagger(T, L) \mathcal{O}(0, L) | 0 \rangle = \sum_n |\langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle|^2 e^{-\int dT E_n(T, L)}, \quad (2.186)$$

donde $|H_n\rangle$ representa a un elemento de la base completa de estados con energía $E_n(T, L)$. Para el quark y el antiquark en reposo, encontramos que en el límite $T \rightarrow \infty$,

$$|\langle 0 | \mathcal{O}^\dagger(T, L) \mathcal{O}(0, L) | 0 \rangle|_{T \rightarrow \infty} = |\langle 0 | \mathcal{O} | H \rangle|^2 e^{-\int dTV(T, L)} \quad (2.187)$$

donde $V(T, L)$ es la energía potencial, que depende de la longitud temporal T y de la longitud L de la coordenada espacial del rectángulo. De esta manera, obtenemos una relación para la energía potencial en términos del valor esperado del lazo de Wilson:

$$V(T, L) = -\frac{d}{dT} \ln \left[\left[\frac{W[C](T' + T, L)}{W[C](T', L)} \right]_{T' \rightarrow \infty} \right]. \quad (2.188)$$

Por lo tanto, encontramos que el valor esperado en el vacío del lazo de Wilson es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W(l, T) \rangle = \langle \text{Tr} \left(\mathcal{P} \exp \left[i \int_C d\tau \dot{x}_\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) \right] \right) \rangle = \exp(-iTV(L)). \quad (2.189)$$

Si nuestra fuente está en la representación fundamental del campo de norma, el potencial en (2.189), $V(L)$, es el potencial del par quark-antiquark separado una distancia L [7, 9].

2.5.2. Dual holográfico de un par quark-antiquark

En este trabajo nos interesa estudiar una teoría de norma no abeliana mediante la correspondencia holográfica. Cabe preguntarse entonces, cómo es que podemos calcular la energía potencial de una configuración de un par quark-antiquark en una teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ usando dicha correspondencia. Para responder esto, debemos encontrar un objeto de la teoría de cuerdas IIB que transforme en la representación fundamental de $SU(N)$. Antes de tomar el límite de Maldacena, podemos considerar $N + 1$ D3-branas, y consideramos a una de estas branas separada del resto de las N branas una distancia d_l a lo largo de una dirección espacial. Recordemos que el vacío para el campo Φ^I del lado de la teoría de norma tiene un vacío degenerado, en el que es posible encender ciertos valores esperados en el vacío distintos de cero. Entonces, del lado de gravedad, separar una brana significa encender un valor esperado en el vacío de uno de los Φ^I :

$$\langle \Phi^I \rangle = d_l \delta_1^I \text{diag}(0, 0, 0, \dots, 1), \quad (2.190)$$

lo cual corresponde a romper la invariancia $U(N) \rightarrow U(N) \times U(1)$. Esto es similar a la ruptura de la simetría $SU(2) \times U(1)$ mediante el mecanismo de Higgs en el modelo estándar. El análogo a los bosones W en este mecanismo, corresponde a estados excitados que son descritos por una cuerda que se extiende de la D3-brana aislada al resto de las D3-branas. La masa adquirida por estos estados excitados corresponde a $m = \frac{d_l}{2\pi l_s^2}$. El dual a la cuerda en la teoría de norma transforma en la representación fundamental de $U(N)$, que es lo que buscábamos. En el límite de Maldacena, obtenemos la siguiente entrada del diccionario de la correspondencia holográfica (Figura 2.5):

<i>Fuentes del campo</i>		<i>Cuerda infinita en</i>
A_μ en la representación		<i>teoría de cuerdas IIB</i>
<i>fundamental en SYM $\mathcal{N} = 4$</i>	=	<i>cuyo extremo traza</i>
<i>con trayectoria C.</i>		<i>la trayectoria C.</i>

Aplicando este principio a la dualidad bulto/frontera, obtenemos que el valor esperado del lazo de Wilson se puede escribir como

$$\langle W[C] \rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \dots e^{iS_{SYM}} W[C] = \int \mathcal{D}h_{mn} \dots e^{iS_{CIIB}} \int_{X(z=0)=C} \mathcal{D}X^\mu e^{iS_{NG}[X]}, \quad (2.191)$$

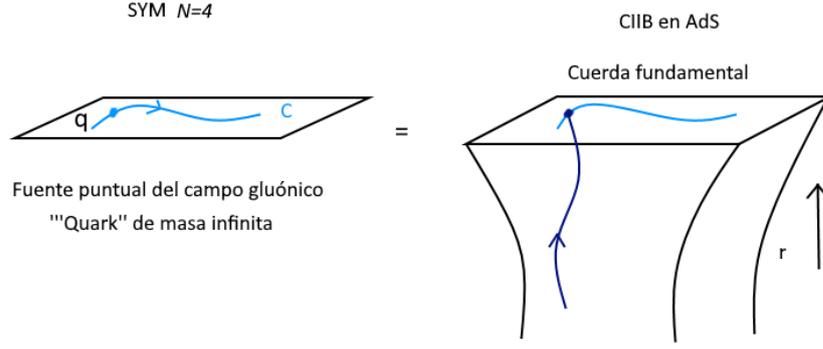


Figura 2.6: Dualidad entre una fuente puntual del campo gluónico en la CFT (izquierda) y una cuerda fundamental en la teoría de gravedad en AdS (derecha). Este resultado es consecuencia de separar una de las D3-branas hasta infinito, rompiendo la simetría $SU(N)$ y por tanto, adquiriendo las propiedades de un quark infinitamente masivo.

donde S_{NG} es la acción de Nambu-Goto de la cuerda, S_{CIIB} es la acción efectiva para la teoría de cuerdas tipo IIB y S_{SYM} es la acción de Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$. En el límite $N \gg 1$, $\lambda \gg 1$, (2.191) se escribe como

$$\langle W[C] \rangle \simeq \exp(iS_{NG}[X^{cl}[C]]), \quad (2.192)$$

donde $X^{cl}[C]$ es la solución clásica a las ecuaciones de la cuerda, que corresponde a minimizar el área en la hoja de mundo. A esta solución le llamamos *cuerda fundamental*, y su extremo en la frontera de AdS_5 se acopla como carga puntual al campo de norma $A_\mu(x)$. Además es también fuente puntual para el campo escalar Φ^e en la dirección específica x^{3+e} en que apunta la cuerda, que es transversal a las D3-branas. Concluimos que la cuerda infinita en AdS es dual a un quark que es fuente de A_μ y Φ^e . El operador correspondiente es entonces un *lazo de Wilson generalizado*, que considera los acoplamientos a ambos campos y se escribe como

$$W[C] \equiv Tr \left(\mathcal{P} \exp \left[i \int_C d\tau \left\{ \partial_\tau x^\mu A_\mu(x(\tau)) + |\partial_\tau x| \Omega_e(\tau) \Phi^e(x(\tau)) \right\} \right] \right), \quad (2.193)$$

donde $\Omega_e(\tau)$ representa a un conjunto de coordenadas que pueden interpretarse como las 6 coordenadas extra en la teoría 10-dimensional de Super-Yang Mills con $\mathcal{N} = 1$, de la cual SYM con \mathcal{N} es la versión dimensionalmente reducida [37].

2.5.3. Energía de un par quark-antiquark en SYM $\mathcal{N} = 4$

SYM $\mathcal{N} = 4$ a temperatura cero

Podemos considerar por simplicidad un par quark-antiquark con separación l descrito por un lazo de Wilson rectangular como el que consideramos anteriormente, en una teoría dual a AdS_5 . Eligiendo la norma $\tau = t$, $\sigma = z$ sobre la hoja de mundo, podemos escribir la acción de Nambu-Goto como

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi l_s^2} \int dt dz \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} T \int \frac{dz}{z^2} \sqrt{1 + X_1'^2}. \quad (2.194)$$

La ecuación de movimiento para $X_1(z)$ que se deduce a partir de la acción (2.194) es:

$$\partial_z \left(\frac{X_1'}{z^2 \sqrt{1 + X_1'^2}} \right) = 0. \quad (2.195)$$

Como S_{NG} no depende explícitamente de X_1 , la densidad de momento es constante,

$$\Pi = -\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X_1'} = \frac{X_1'}{z^2 \sqrt{1 + X_1'^2}} = \text{constante}, \quad (2.196)$$

y podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$X_1' = \pm \frac{\Pi z^2}{\sqrt{1 - \Pi^2 z^4}}. \quad (2.197)$$

Si $z = \frac{1}{\sqrt{\Pi}}$, el lado derecho diverge, lo que significa que en este punto la cuerda alcanza su máxima profundidad en el bulto y regresa hacia la frontera. A este punto lo llamamos *punto de retorno*, y lo denotamos en este caso como $z = z_{max}$. Reescribiendo (2.197) en términos de z_{max} , y usando $X_1(z = z_{max} = 0)$, $X_1(z = 0) = \pm \frac{l}{2}$, encontramos una expresión para la separación del par quark-antiquark en términos del punto de retorno [7]:

$$\frac{l}{2} = \int_0^{z_{max}} dz \frac{\partial X_1}{\partial z} = \int_0^{z_{max}} dx \frac{z^2}{\sqrt{z_{max}^4 - z^4}}. \quad (2.198)$$

Sustituyendo la solución (2.197) en la acción S_{NG} , obtenemos

$$S_{NG} = -T \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \int_0^{z_{max}} dz \frac{z_{max}^2}{z^2 \sqrt{z_{max}^4 - z^4}}. \quad (2.199)$$

En el límite de integración inferior, tenemos $z = 0$, y el lado derecho de (2.199) es divergente. Este hecho se debe a que la acción de Nambu-Goto representa el área de la hoja de mundo, y esta área es infinita en la frontera. A partir de las ecuaciones (2.189) y (2.192), podemos deducir que la energía de la cuerda está dada por [7, 37]

$$\Delta E(l) = \frac{-\Delta S_{NG}(l)}{T}, \quad (2.200)$$

donde T es el intervalo de tiempo en la frontera. Usando (2.199), encontramos la energía de la cuerda, que en nuestro ejemplo es

$$E(l) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \int_0^{z_{max}} dz \frac{z_{max}^2}{z^2 \sqrt{z_{max}^4 - z^4}}. \quad (2.201)$$

Esta ecuación indica que la energía tanto de la configuración de cuerdas como del par quark-antiquark es infinita, lo cual se debe al volumen infinito en la frontera de AdS. Podemos regularizar si integramos solo sobre el rango $0 \leq z < \epsilon$, donde ϵ es un parámetro infinitesimal. Entonces podemos sustraer E_{ss} , la energía infinita correspondiente a un par de cuerdas estáticas aisladas. Del lado de la teoría de norma, esta configuración corresponde a la energía del quark y el antiquark cuando no hay interacción entre ellos. La energía del estado ligado entre el quark y el antiquark es entonces [7, 37]

$$V_{q\bar{q}}(l) = E(l) - 2E_{ss} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{2}{z_{max}} \left\{ \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^4}} - 1 \right) - 1 \right\}. \quad (2.202)$$

Usando la relación (2.198), encontramos finalmente

$$V_{q\bar{q}}(l) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^4} \frac{\sqrt{\lambda}}{l}. \quad (2.203)$$

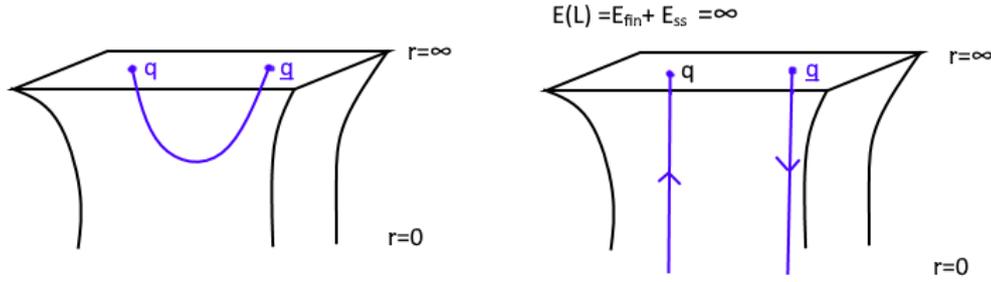


Figura 2.7: Representación de un par quark-antiquark en la frontera de AdS como extremos de una cuerda fundamental que se extiende a lo largo del bulto. El punto de retorno es aquel en el que la cuerda alcanza su máxima profundidad (izquierda). Configuración de un par de cuerdas estáticas aisladas, cuyos extremos son duales a un par quark-antiquark desligado. La energía de esta configuración es infinita debido al volumen infinito en la frontera. Podemos regularizar la energía sustrayendo la energía de esta configuración (derecha).

En $\mathcal{N} = 4$ SYM para distancias pequeñas, por invariancia conforme, el potencial entre dos cargas infinitamente masivas tiene un comportamiento Coulombiano ($V(l) \sim \lambda/l$), mientras que para separaciones grandes, se comporta linealmente ($V(l) \sim \sigma l$). Este es precisamente el comportamiento que encontramos. Cuando $\lambda \geq 1$, la dependencia perturbativa de $V_{q\bar{q}} \propto \lambda$ se reemplaza por $\sqrt{\lambda}$. Este resultado es genérico para las distintas configuraciones de lazo de Wilson. En resumen, la correspondencia AdS/CFT nos dice que los extremos de la cuerda son duales al par quark-antiquark, mientras que el perfil de la cuerda representa al campo gluónico generado por dicho par. Veamos otro ejemplo.

SYM $\mathcal{N} = 4$ a temperatura finita

Consideremos a nuestra teoría de norma en un baño térmico a temperatura T . Según la correspondencia AdS/CFT este escenario es dual a una geometría que tiene un horizonte de eventos, o un agujero negro. La temperatura de Hawking del agujero negro coincide con la temperatura de la teoría de norma. Para SYM $\mathcal{N} = 4$, la métrica de la geometría dual es [15]

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[f(z) dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right], \quad (2.204)$$

donde

$$f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_0^4}, \quad (2.205)$$

y z_0 representa la posición del horizonte de eventos. Podemos parametrizar el encaje de la cuerda mediante $z = z(x)$. Entonces, la métrica inducida es

$$dh^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[f dt^2 + \left(1 + \frac{z'^2}{f} \right) dx^2 \right]. \quad (2.206)$$

Sustituyendo en la acción de Nambu-Goto, obtenemos

$$S = \frac{\tau L^2}{2\pi\alpha'} \int dx \frac{\sqrt{f(z(x)) + z'^2(x)}}{z^2(x)}. \quad (2.207)$$

De manera análoga al caso con temperatura cero, podemos integrar la ecuación de movimiento para obtener [15]:

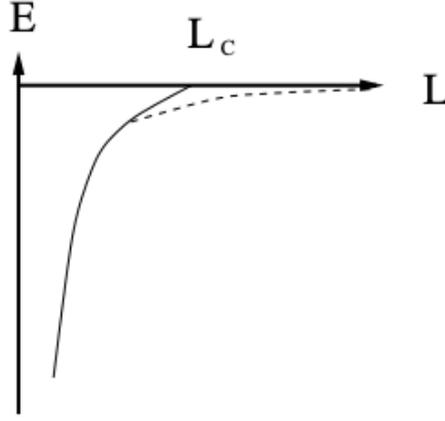


Figura 2.8: Gráfica de la energía de un par quark-antiquark en una teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ a temperatura finita contra la separación del par. A una longitud finita el par quark-antiquark se desliga debido al apantallamiento térmico. Figura tomada de [39].

$$\frac{z^2 \sqrt{f(z) + z'^2}}{f(z)} = \text{constante} = \frac{z_*^2}{\sqrt{f(z_*)}}, \quad (2.208)$$

donde z_* es el punto de retorno. El valor de z' es entonces

$$z' = \pm \sqrt{\frac{f(z)}{f(z_*)} \frac{\sqrt{z_*^4 - z^4}}{z_*}}. \quad (2.209)$$

Definiendo la constante $\rho = \left(\frac{z_0}{z_*}\right)^4$, podemos escribir

$$x = \pm z_* \sqrt{\rho - 1} \int_1^{\frac{z}{z_*}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1 - y^4)(\rho - y^4)}}, \quad (2.210)$$

por lo que la distancia entre quark-antiquark \bar{L} está dada por

$$\bar{L} = 2z_* \sqrt{\rho - 1} \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1 - y^4)(\rho - y^4)}}. \quad (2.211)$$

Cuando la temperatura tiende a cero, tenemos $\rho \rightarrow \infty$, y recuperamos el resultado del apartado anterior. Invertiendo la relación anterior podemos escribir a la energía como función de la separación:

$$E = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{L^2}{z_*} \int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{y^4 - \rho}}{\sqrt{y^4 - 1}} - 1 \right) - \frac{L^2}{z_*} + U_T \right\}, \quad (2.212)$$

donde $U_T^4 = \rho \left(\frac{L}{z_*}\right)^4$. En la Figura 2.5.3, se observa la gráfica de la energía como función de la separación del par quark-antiquark. Variando ρ , encontramos que hay un valor máximo de \bar{L} y el par quark-antiquark se desliga debido al apantallamiento térmico, en acuerdo con los resultados para una teoría de norma a temperatura distinta de cero [15].

Teoría confinante

Consideremos ahora la geometría de agujero negro en AdS, donde regresamos a la signatura de Minkowski mediante la sustitución $x_3 \rightarrow it$. Llamando u al tiempo Euclideo

original, obtenemos la siguiente métrica [15]:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + f(z)du^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right], \quad (2.213)$$

donde $f(z)$ está dado por la ecuación (2.206). En este caso, z_0 representa el valor de la coordenada z para la cual el espacio-tiempo termina. Consideremos una cuerda fundamental en la versión Euclidiana de la métrica anterior, y usemos (t, x) como coordenadas del volumen de mundo. La métrica inducida es entonces

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[dt^2 + \left(1 + \frac{z'^2}{f}\right) dx^2 \right]. \quad (2.214)$$

La acción de Nambu-Goto para la cuerda se escribe entonces como

$$S = \frac{\tau L^2}{2\pi\alpha'} \int dx \frac{\sqrt{1 + \frac{z'^2(x)}{f(z(x))}}}{z^2(x)}, \quad (2.215)$$

donde hemos definido $\tau = \int dt$. El punto de retorno se obtiene mediante la primera integral de la acción de Nambu-Goto, y obtenemos

$$\frac{z^2}{\sqrt{f(z)}} \sqrt{f(z) + z'^2} = z_*^2, \quad (2.216)$$

por lo que

$$z' = \pm \sqrt{f(z)} \frac{\sqrt{z_*^4 - z^4}}{z^2}. \quad (2.217)$$

Integrando esta ecuación:

$$x = \pm z_* \sqrt{\rho} \int_1^{\frac{z}{z_*}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^4)(\rho-y^4)}}. \quad (2.218)$$

Por lo tanto, encontramos que la separación del par quark-antiquark \bar{L} , se escribe como

$$\bar{L} = 2z_* \sqrt{\rho} \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{(1-y^4)(\rho-y^4)}}. \quad (2.219)$$

A diferencia del caso a temperatura finita, \bar{L} puede crecer indefinidamente mientras el punto de retorno se acerca a z_0 . Cuando \bar{L} es grande, el perfil de la cuerda resulta ser aproximadamente rectangular. La energía correspondiente a la parte vertical de este rectángulo puede identificarse con la masa de los quarks estáticos, que sustraemos para regularizar la energía potencial. Por lo tanto, el potencial de interacción corresponde únicamente a la parte horizontal de este perfil. La acción en esta sección horizontal, puede aproximarse considerando que z es aproximadamente constante e igual a z_0 . Se obtiene [15]

$$S_{horizontal} = \frac{\tau L^2 \bar{L}}{2\pi\alpha' z_0^2}, \quad (2.220)$$

que da lugar a un potencial de tipo confinante, es decir:

$$V = \sigma_s \bar{L}, \quad (2.221)$$

donde σ_s representa la tensión efectiva de cuerda, y está dada por $\sigma_s = \frac{L^2}{2\pi\alpha' z_0^2}$.

Es posible también calcular funciones de correlación de uno o más puntos de operadores locales $\mathcal{O}(x)$, lo que nos proporciona una manera de obtener el perfil del campo gluónico dual en la teoría de norma. Por ejemplo, considerando el valor esperado del operador $Tr F^2(t, \bar{x}) + \dots$, donde F^2 representa la contracción del campo $F_{\mu\nu}$ asociado a A_μ , y los puntos suspensivos denotan el resto de campos que aparecen en la acción de Dirac-Born-Infeld. Para el caso de un quark aislado y estático [38],

$$\langle Tr \{ F^2(t, \bar{x}) + \dots \} \rangle_q = \frac{\sqrt{\lambda}}{32\pi^2 |\bar{x}|^4}, \quad (2.222)$$

que tiene un comportamiento Coulombiano, como habría de esperarse. En cambio en el caso de un par quark-antiquark obtenemos un resultado que difiere de la dependencia dipolar esperada, es decir [40]:

$$\langle Tr \{ F^2(t, \bar{x}) + \dots \} \rangle_q = \frac{\sqrt{\lambda}}{32\pi^2 |\bar{x}|^4}, \quad (2.223)$$

En otros escenarios posibles, se ha calculado la energía de un quark acelerado [40], y la energía de un quark con trayectoria arbitraria [41, 43], que involucra efectos de radiación gluónica. Este resultado es importante ya que estamos estudiando teorías de campo fuertemente acopladas.

En los últimos años se ha despertado un gran interés por una resultad de la correspondencia holográfica que relaciona cantidades geométricas en el bulto con una observable que cuantifica el entrelazamiento cuántico. Por esta razón, y por el hecho de que algunos resultados de este trabajo lo exigen, a continuación veremos un breve repaso de esta entrada del diccionario.

2.6. Entropía de entrelazamiento holográfica

Es bien sabido que en la mecánica cuántica existen predicciones que parecen contradecir el principio de localidad del espacio-tiempo. Este hecho fue notado por Einstein, Podolsky y Rosen en su famoso artículo de 1935 [6], donde se argumenta que, bajo la suposición de localidad y realidad de las teorías físicas, la mecánica cuántica debía ser una teoría incompleta, debido a que predice que un observador B puede conocer, por ejemplo, el espín de una partícula en dos direcciones simultáneamente, contradiciendo el principio de incertidumbre, si se tiene un canal de comunicación con un observador A que mide el espín de otra partícula que estuvo inicialmente en interacción con la primera. Esto se debe a que el estado que describe a ambas partículas no puede separarse como un producto tensorial de estados. A un estado de este tipo se le conoce como estado *enredado*, o *entrelazado*. Posteriormente, en 1964 Bell [3] demostró que si se asume la suposición de EPR, es posible deducir una desigualdad que debe cumplirse en caso de que la mecánica cuántica sea una teoría incompleta que debe incluir variables que están ocultas, o que no están siendo consideradas en nuestra descripción. Experimentalmente, la evidencia indica que en ciertos sistemas es posible violar estas desigualdades, demostrando que la mecánica cuántica *no* es una teoría de variables ocultas, y que podemos considerarla como la descripción correcta a escalas en las que la constante de Planck cobra relevancia. La existencia de estados entrelazados es probablemente la característica más importante que distingue a los sistemas clásicos de los cuánticos. Por esta razón resulta crucial cuantificar la manera en que un subconjunto de estos estados se entrelazan con el resto, cuando están distribuidos sobre una región dada. Una observable que codifica esta información es la *entropía de*

entrelazamiento. La importancia de esta cantidad para este trabajo yace en el hecho de que si la teoría cuántica en la que definimos a la entropía de entrelazamiento tiene un dual holográfico, la correspondencia AdS/CFT nos brinda una manera sencilla de calcularla en términos de cantidades geométricas en el bulto. Más aún, cuando esta teoría consiste de un ensamble térmico, el dual de gravedad corresponde a la métrica de un agujero negro, y la entropía de entrelazamiento calculada en esta métrica está estrechamente relacionada con la correspondiente entropía de Bekenstein-Hawking. En cierto sentido, la primera resulta ser una versión cuántica corregida de la segunda. Esto nos brinda un escenario en el que podemos aplicar las nociones básicas de la termodinámica para extraer información acerca de cómo se acomodan las correcciones cuánticas al considerar teorías de gravedad cuántica, y por otro lado, entender con qué tipo de teoría estamos tratando del lado de la teoría de campos.

2.6.1. Entropía de entrelazamiento

Consideremos una teoría cuántica, que vive en una variedad d -dimensional. Por ejemplo, una cadena de espín puede considerarse como una variedad unidimensional, o una superficie semiconductora puede modelarse en una variedad bidimensional. En sistemas de muchos cuerpos la distribución de estados en los que es posible encontrar al sistema está codificada en la *matriz de densidad* [50]:

$$\rho = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n|, \quad (2.224)$$

donde $\{|\Psi_n\rangle\}$ son los posibles estados del sistema, y el factor p_n determina el peso probabilístico de cada uno de estos estados. En el caso en el que solo hay un posible estado, con probabilidad 1 de que el sistema se encuentre en este, se dice que es un estado *puro*. Un estado que no es puro se le llama estado *mezclado*.

En general, este tipo de sistemas puede extenderse indefinidamente en el espacio, y frecuentemente sólo tenemos posibilidad de realizar mediciones en un subconjunto del total de estados de la teoría. Supongamos que el conjunto de estados al que tenemos acceso se encuentra localizado en una región A del espacio. Si llamamos B a la región complementaria a A , podemos definir una nueva noción de matriz de densidad, que responde a la pérdida de información que resulta del hecho de que sólo podemos realizar mediciones en la región A . A este operador le conocemos como *matriz de densidad reducida* [50, 51]:

$$\rho_A \equiv Tr_B(\rho) \equiv \sum_{n_B} p_{n_B} |\langle \Psi_{n_B} | \Psi_{n_B} \rangle|^2, \quad (2.225)$$

donde $\{\Psi_{n_B}\}$ representa el subconjunto de estados de $\{\Psi_n\}$ que se encuentran en la región B . La información acerca del sistema total que se pierde cuando separamos los subsistemas está codificada en la intensidad del entrelazamiento entre las dos regiones, por lo que una cuantificación del entrelazamiento cuántico nos dará información acerca de cómo responde el subsistema A cuando modificamos el estado de B . En analogía con la definición estadística de la entropía como el logaritmo del número de grados de libertad, podemos definir a la entropía de entrelazamiento como la entropía de Von Neumann de la matriz de densidad reducida del sistema A [50]:

$$S_A = -Tr(\rho_A \log(\rho_A)) \quad (2.226)$$

Ahora podemos deducir algunas propiedades básicas de esta observable. Supongamos que el sistema se encuentra en un estado puro. Sustituyendo la matriz de densidad reducida

(2.225) , podemos escribir

$$S_A = -Tr(\rho_A \log(\rho_A)) = \sum_{n=1}^D |\lambda_n|^2 \log(|\lambda_n|^2) = -Tr(\rho_B \log(\rho_B)) = S_B. \quad (2.227)$$

Por lo tanto, en un estado puro la entropía de entrelazamiento es simétrica entre las dos regiones. La entropía de entrelazamiento de una región sólo puede anularse si la correspondiente matriz de densidad reducida es una matriz diagonal, por cuál el mismo estado del subsistema debe ser un estado puro. Si el sistema se encuentra en un estado mezclado, podemos representar el ensamble en términos de la densidad de Gibbs en lugar de la suma en (2.224), y en este caso no se satisface esta igualdad [?].

Existe otro conjunto de propiedades que relacionan de forma general la entropía de entrelazamiento de varios subsistemas, a través de una serie de desigualdades. Si A , B , y C son tres subsistemas que no se intersectan entre sí, entonces se cumple que:

$$S_{A+B+C} + S_B \geq S_{A+B} + S_{B+C}, \quad (2.228)$$

$$S_A + S_C \geq S_{A+B} + S_{B+C}. \quad (2.229)$$

A estas desigualdades se les conoce en conjunto como condición de *subaditividad fuerte*. Bajo ciertas condiciones, esta relación puede interpretarse como una generalización de la segunda ley de la termodinámica para sistemas cuánticos. Si tomamos a B como el conjunto vacío, obtenemos la condición de *subaditividad débil*:

$$S_{A+C} \geq S_A + S_C \quad (2.230)$$

Esta desigualdad nos permite definir una cantidad definida positiva, llamada *información mutua* [50, 51]:

$$I(A, B) = S_{A+C} - S_A + S_C. \geq 0 \quad (2.231)$$

Esta otra observable codifica la correlación total entre los grados de libertad de las regiones A y B . La información mutua es un concepto importante en teoría de la información, ya que presenta algunas ventajas respecto a la entropía de entrelazamiento, como ser finita y proporcional a la entropía de entrelazamiento de cada subsistema.

Una teoría cuántica de campos es ciertamente una teoría cuántica, por lo que es igualmente válido definir la entropía de entrelazamiento en estos escenarios. Sin embargo, en este caso surge una dificultad que resulta del enorme número de grados de libertad en la teoría. Aunque por ahora no estudiaremos la manera calcular la entropía de entrelazamiento en QFT, cabe mencionar que los casos en los que se puede calcular esta cantidad de manera analítica y aún numéricamente son escasos. La entropía de entrelazamiento en una QFT es infinita por definición, ya que es proporcional al número de grados de libertad, que en una teoría cuántica de campos son infinitos y densamente distribuidos. Para lidiar con estos infinitos, es necesario llevar a cabo un procedimiento de regularización. Si imaginamos a la teoría como una retícula discreta, con un parámetro de corte en distancia ϵ , podemos integrar hasta este límite y expandir en términos de un parámetro chico, y obtenemos un resultado conocido como la *ley de Área* para entropía de entrelazamiento[50]:

$$S_A = c_o \frac{\text{Área}\{A\}}{\epsilon^{d-1}} + \{Divergencias\ subdominantes\} + S_{finita}. \quad (2.232)$$

Este resultado nos dice que la contribución dominante a las divergencias en la entropía de entrelazamiento proviene de los grados de libertad que están distribuidos a lo largo de

la región que separa los dos subsistemas. Si tomamos el corte ϵ como proporcional a la longitud de Planck, e identificamos la constante c_o con π , entonces el primer término en esta identidad corresponde exactamente a la entropía de Bekenstein-Hawking, que es otro ejemplo de una ley de Área. Cuando estudiamos esta relación bajo la interpretación de la correspondencia holográfica surgen consecuencias interesantes que parecen relacionar a las correcciones cuánticas de la entropía clásica con modificaciones a la acción de la teoría de gravedad en el bulto. Para adentrarnos en más en esta relación, pasaremos ahora a la prescripción holográfica para obtener la entropía de entrelazamiento, fórmula que se ha convertido en uno de los resultados más importantes de la correspondencia AdS/CFT.

2.6.2. Fórmula de Ryu takayanagi

Consideremos ahora que la teoría cuántica definida sobre la variedad Σ tiene una teoría dual de gravedad, definida sobre una variedad \mathcal{M} , de la cual Σ es frontera en el infinito de la coordenada radial r . Una cierta región A en Σ define a su vez toda una familia de superficies de codimensión 2 encajadas en el bulto, bajo la condición de que la frontera de cada una de estas superficies coincida con la frontera de A en Σ . El siguiente resultado, nos dice que la entropía de entrelazamiento de la región A , es proporcional al elemento de esta familia que tiene área mínima [50]:

$$S_A = \frac{\text{Área}(\Sigma_{min})}{4G_N^{(d+1)}}. \quad (2.233)$$

A este resultado se le conoce *fórmula de Ryu-Takayanagi*. Notemos que el lado derecho de esta ecuación está bien definido siempre que la teoría de gravedad viva en una variedad con una frontera, por lo que esta relación tiene sentido aún cuando la teoría cuántica no esté necesariamente bien definida. Al lado izquierdo de esta ecuación se le conoce en general como *entropía de entrelazamiento holográfica*, que abreviaremos como HEE por sus siglas en inglés. Esta relación es sorprendente desde el punto de vista tradicional, ya que relaciona cantidades que parecieran no tener ninguna relación *a priori*. Del lado de la teoría de campo tenemos una cantidad que depende completamente de la dinámica cuántica del sistema, mientras que en la teoría de gravedad tenemos una cantidad que depende únicamente de la geometría y extensión de la partición inducida por la CFT en el bulto de la teoría dual. Notemos además que este es un ejemplo de un cálculo puramente clásico nos permite obtener información de una teoría cuántica fuertemente acoplada. Dada una solución a la ecuación de Einstein, podemos calcular el área de la superficie Σ en el bulto que comparte frontera con A , en términos de la métrica inducida en Σ , h_{ab} [50, 51]:

$$\text{Área} = \int_{\Sigma_{min}} d^{d-1}y \sqrt{h}. \quad (2.234)$$

En los casos en los que se conoce la expresión analítica para la entropía de entrelazamiento en la teoría de campos ²³, la fórmula de Ryu-Takayanagi reproduce exactamente estos resultados, aún cuando la teoría cuántica se encuentra en el régimen de acoplamiento fuerte. La ecuación (2.233) resulta válida siempre y cuando la teoría de gravedad sea la teoría de Einstein, y puede incluir acoplamientos con campos de materia siempre que el acoplamiento sea de tipo mínimo [52].

Como ya mencionamos anteriormente, para lidiar con las divergencias en la entropía

²³Un ejemplo en el caso de un intervalo de longitud L en una CFT₂ con dual holográfico en AdS_3 , donde la entropía de entrelazamiento toma la forma $S_A = c/3 \log[L/a]$, siendo a un parámetro de corte y c la carga central de la CFT. La fórmula de R-T reproduce exactamente este resultado.

de entrelazamiento se debe regularizar la integración del lado de la teoría de campos, idealizando a la teoría de campo como una retícula con espaciamiento a . En el lado de la teoría de gravedad, vemos que la métrica de AdS en coordenadas globales diverge cuando $\rho \rightarrow \infty$, por lo que, para regular la correspondiente divergencia en la integral (2.234) es necesario imponer un radio de corte ρ_0 y restringir el espacio a la región acotada por $\rho \geq \rho_0$. Entonces es natural relacionar esta cantidad con un parámetro de corte UV en la CFT mediante la correspondencia AdS/CFT. Si definimos el parámetro adimensional de corte UV δ , encontramos la relación holográfica $e^{\rho_0} \sim \delta^{-1}$. Por ejemplo, en el caso de una teoría cuántica definida sobre una variedad unidimensional, podemos escoger A como un segmento finito de longitud L . En una CFT con espaciamiento reticular a encontramos explícitamente:

$$e^{\rho_0} \sim \delta^{-1} = \frac{L}{a} \quad (2.235)$$

Es posible deducir las propiedades básicas de la entropía de entrelazamiento a partir de la fórmula de Ryu-Takayanagi de una manera geométrica y elegante. Por ejemplo, en un estado puro, que corresponde del lado de gravedad al vacío máximamente simétrico de Anti-de Sitter, es la misma superficie la que minimiza el área de la familia de superficies que terminan en A o en su complemento, demostrando la fórmula (2.227) [52].

En general podemos tener más de una superficie que sea candidata a proporcionar la HEE, bajo la única condición de que las superficies de entrelazamiento en el bulto y en la frontera sean *homólogas*. Esto quiere decir que la unión de la superficie Σ y la región A en nuestra definición de HEE, debe formar una superficie de codimensión uno en el bulto de AdS. Si la métrica corresponde a la de un agujero negro, debido la periodicidad de las coordenadas angulares, existen siempre dos superficies homólogas a una región dada A en la frontera $r \rightarrow \infty$. La condición de minimalidad nos indica que debemos elegir entre estas dos superficies, a la superficie que tenga la menor área [82].

2.6.3. Método de Lewkowycz-Maldacena

Truco de réplica para EE

En el formalismo de la integral de trayectoria la traza de la matriz de densidad reducida está representada mediante una integral que suma sobre todas las trayectorias asociadas a los estados que viven en una región A . La definición (2.226) requiere que calculemos la traza de $\rho_A \ln(\rho_A^n)$, de manera que la integral de trayectoria ahora involucra un logaritmo en el integrando que dificulta el cálculo. Para solucionar este problema, podemos notar que si definimos la *n-ésima entropía de Renyi* como [55]:

$$S_n = \frac{1}{1-n} \ln \text{Tr}[\rho_A^n], \quad (2.236)$$

entonces la entropía de entrelazamiento puede obtenerse a partir de esta cantidad tomando el límite $n \rightarrow 1$:

$$S_{EE} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\text{Tr}[\rho_A^n] - 1}{1-n} = -\frac{\partial}{\partial n} \ln \text{Tr}_A[\rho_A^n] \Big|_{n=1} = \lim_{n \rightarrow 1} S_n. \quad (2.237)$$

Por tanto podemos reemplazar el problema de calcular la traza de $\rho_A \ln(\rho_A^n)$ sobre todos los grados de libertad de la teoría de campos, por el de tomar la traza del producto de n matrices de densidad reducidas, cada una correspondiendo a una de las n copias de la teoría. Este último problema parecería en principio más complejo que el original, sin embargo, notemos que este truco permite deshacernos del logaritmo en (2.226), facilitando

el cálculo. A este resultado se le conoce como el *truco de réplica* [52].

Para hacer más explícito el procedimiento para obtener la entropía de entrelazamiento, consideremos como caso particular una teoría de campo definida sobre una variedad D -dimensional Ω con un campo escalar real $\phi(x)$. La acción entonces está dada por $S_E[\phi] = \int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}[\phi(x)]$ donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana. En el formalismo del grupo de renormalización, idealizamos nuestra QFT como una retícula de espaciamiento finito a e identificamos a cada punto de la retícula con el parámetro discreto x . En un espacio-tiempo Euclídeo, el tiempo está representado por la coordenada imaginaria $\tau = it$ la cual es periódica con periodo $\beta = 1/kT$. Entonces podemos visualizar al espacio-tiempo Ω como un cilindro de circunferencia β . Si consideramos un sistema con temperatura T la matriz de densidad está dada por la ecuación ref, por lo que la función de partición corresponde a una integral funcional [55].

En la métrica Euclídea operador de evolución temporal es $U(\tau) = e^{(-\tau\hat{H})}$, donde \hat{H} es el operador hamiltoniano del sistema cuántico. Mientras τ crece, el sistema tiende a regresar al estado de mínima energía, por lo que el operador $U(\tau)$ proyecta cualquier función de onda en el estado base para $\tau \rightarrow \infty$. Utilizando esto, podemos escribir el funcional de onda del vacío como [55]

$$\Psi_0[\phi] = \langle \phi|0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-\int_{\Sigma} d^D x \mathcal{L}[\phi]} \quad (2.238)$$

Aquí la variedad Σ corresponde a una superficie tal que su frontera se haya en $\tau = 0$, y se encuentra en el estado definido por las configuraciones de campo $|\phi\rangle$ de nuestra teoría. Tomar el límite $\tau \rightarrow \infty$ es equivalente a hacer el tamaño de la dimensión temporal infinito, es decir $\beta \rightarrow \infty$, por lo que el funcional de onda representa a un sistema que está a temperatura cero.

En el espacio réplica, tenemos n de estos funcionales de onda, cada uno evaluado sobre una réplica de la variedad s y debemos tomar la traza del producto de estos n funcionales. Esto es equivalente a hacer una sola integral de trayectoria de los campos sobre el producto de n funcionales como el de (2.238), imponiendo las siguientes condiciones de frontera sobre los campos, que nos permiten integrar solamente a lo largo de los grados de libertad en A [55]:

$$\begin{aligned} \phi_j(0^+, x) &= \phi_{j+1}(0^-, x) \quad x \in A \\ \phi_j(0^+, x) &= \phi_j(0^-, x) \quad x \in B' \end{aligned} \quad (2.239)$$

donde las etiquetas \pm significan evaluar tomando el límite por la izquierda (-) o por la derecha (+). Con estas condiciones, podemos escribir el funcional para una de las réplicas como:

$$[\rho_A]_{\phi_+\phi_-} = \frac{1}{Z} \int_{t=-\infty}^{t=\infty} D\phi e^{-S[\phi]} \prod_x \delta(\phi_+(x, \tau = 0) - \phi_+(x)) \prod_x \delta(\phi_-(x, \tau = \beta) - \phi_-(x)), \quad (2.240)$$

de manera que la traza $Tr[\rho_A^n]$ puede calcularse tomando el producto de estos funcionales,

$$[\rho_A]_{\phi_1+\phi_{1-}} [\rho_A]_{\phi_2+\phi_{2-}} \cdots [\rho_A]_{\phi_n+\phi_{n-}}, \quad (2.241)$$

e integrando sobre todas las configuraciones de campo sujetas a las condiciones (2.239).

En términos de la integral de trayectoria (2.240), podemos definir una función de partición Z_n para la n -ésima réplica de manera que podemos reescribir la traza que aparece en la entropía de Renyi de manera compacta [55]:

$$Z[n, A] = \text{Tr}_A \rho_A^n = \frac{1}{(Z)^n} \int_{(t,x) \in \mathcal{R}_n} D\phi e^{S_n[\phi]} \equiv \frac{Z_n}{(Z)^n}, \quad (2.242)$$

y por lo tanto la entropía de entrelazamiento se puede calcular como:

$$S = - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} (\ln Z_n - n \ln(Z_1)^n) \quad (2.243)$$

Como un caso particular en donde podemos evaluar la integral consideremos una teoría de campo conforme en (1+1) dimensiones. En las coordenadas complejas $u = x + it$, $w = x - it$, las condiciones de frontera ref pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \phi_i(e^{2\pi i}(w-u)) &= \phi_{i+1}(w-u) \\ \phi_i(e^{2\pi i}(w-u)) &= \phi_{i-1}(w-u) \end{aligned} \quad (2.244)$$

El conjunto de variedades en el espacio réplica presenta simetría bajo el intercambio de las réplicas. Si existen campos locales que obedecen esta invariancia entonces son denominados *campos de torsión*. Entonces la condición de frontera (2.244) puede ser interpretada como la inserción de dos de estos campos de torsión $\Psi_n^{+(k)}$ y $\Psi_n^{-(k)}$ en los puntos $w = u$ y $w = v$ para cada una de las k -superficies Riemannianas unidimensionales. Estos operadores de campo mapean las distintas copias de nuestra teoría a lo largo de los cortes en la región A [55]. De (2.242), la matriz de densidad reducida está dada como la función de partición con un corte en los puntos frontera entre las regiones A y B . En el método de réplica, esto corresponde a insertar los operadores de torsión en los puntos frontera u y v . Entonces la traza de la matriz de densidad puede expresarse en términos de estos campos como [55]

$$\text{Tr}_A \rho_A^n = \prod_{k=0}^{n-1} \langle \Psi_n^{+(k)}(u) \Psi_n^{-(k)}(v) \rangle \quad (2.245)$$

Por tanto, para este método general basta con conocer una expresión para el valor esperado de los operadores de torsión de la teoría considerada.

Dual de gravedad del truco de réplica

Ahora podemos hacer uso del diccionario de la correspondencia AdS/CFT para intentar traducir el método anterior al lenguaje gravitacional. Para teorías con un dual holográfico podemos construir una solución en el bulto B_n , cuya frontera sea M_n . Entonces, la correspondencia bulto/frontera (??) nos permite relacionar la función de partición calculada en M_n con la acción del bulto en la capa de masa en B_n , en el límite de N grande [55]:

$$Z_n \equiv Z[M_n] = e^{-I[B_n]} + \dots, \quad (2.246)$$

donde los puntos suspensivos denotan contribuciones a orden mayor que $1/N$. Notemos que nuestra definición inicial de n como un número natural que etiqueta a las réplicas es de hecho incompatible con la operación de límite, que se extiende sobre todos los reales. Para que este límite tenga sentido, debemos hacer una continuación analítica de n hacia todos los reales. Del lado de campos, este procedimiento resulta difícil de realizar en

general, sin embargo, un hecho clave es que el lado dual brinda una mucho mejor manera de hacer esta continuación analítica, debido a que podemos extender fácilmente una variedad compacta, u *orbifold* (*orbifold* en inglés) de B_n a configuraciones en el bulto definidas con n distinto de un número entero. Veamos cómo podemos definir esta nueva configuración. La frontera M_n para un número n entero presenta simetría \mathbb{Z}_n que nos permite permutar cíclicamente las réplicas. Supongamos que esta simetría se puede extender hacia el bulto para la solución tipo punto silla dominante. Por lo tanto, basta con considerar la orbifold [55]:

$$\hat{B}_n = \frac{B_n}{\mathbb{Z}_n} \quad (2.247)$$

Los puntos que la simetría \mathbb{Z}_n deja invariantes forman una superficie de codimensión 2 con un defecto cónico en el bulto, que terminan en la región ∂A en la frontera, como puede entenderse a partir del siguiente argumento. En la orbifold \hat{B}_n , la frontera corresponde a la variedad $M_n/\mathbb{Z}_n = M_1$. Como la simetría de réplica actúa sobre la coordenada periódica τ como $\tau \rightarrow \tau + 2\pi/n$, en la frontera ∂A esto corresponde a un desplazamiento por $2\pi/n$, dejando invariantes estos puntos. Podemos extender la definición de la coordenada temporal periódica hacia el bulto, de manera que los puntos fijos forman una superficie de codimensión 2, que llamaremos C_n . La solución en el bulto B_n debe ser regular en todos sus puntos, por lo que los puntos invariantes bajo $\tau \rightarrow \tau + 2\pi/n$ deben tener un defecto cónico en C_n con apertura $2\pi/n$, o de manera equivalente con ángulo de déficit $(2\pi - 2\pi/n)$. Sabemos también por construcción que la acción en el espacio réplica es idénticamente igual a la acción en la orbifold con el periodo τ recorrido por $2\pi/n$, de manera que [55]:

$$I[B_n] = nI[\hat{B}_n]. \quad (2.248)$$

Notemos que a diferencia del método de Gibbons-Hawking, en este caso no necesitamos de un término de frontera tipo GHY. La razón de esto es que $I[B_n]$ por sí sola no contiene ninguna contribución en C_n , y por lo tanto debemos incluir tanto el término de GHY junto con los contratérminos correspondientes en la definición de $I[B_n]$.

Lo último que nos resta por hacer es continuar analíticamente el parámetro n , y para ello debemos escoger una forma particular de la métrica a partir de la simetría \mathbb{Z}_n en la superficie de codimensión 2 C_n . Si logramos hacer esto, podemos calcular la entropía de Rényi fácilmente, sustituyendo (2.248) en (2.243), y notando que

$$S_n = \frac{n}{n-1} \left(I[\hat{B}_n] - I[\hat{B}_1] \right). \quad (2.249)$$

Después de hacer la continuación analítica, podemos calcular la entropía de entrelazamiento a partir de la sencilla fórmula:

$$S = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{n-1} \left(I[\hat{B}_n] - I[\hat{B}_1] \right) = \partial_n I[\hat{B}_n] \Big|_{n=1}. \quad (2.250)$$

Conos aplastados regularizados

Ahora que tenemos una expresión para la entropía en términos de la acción Euclídea, podemos entender cómo hacer la continuación analítica en una manera que enfatice que la contribución proviene del horizonte. Identificando a la coordenada τ como periódica con periodo 2π , podemos escribir la entropía como:

$$S = -n \partial_n [\ln Z_n - \ln Z_1^n]_{n=1}, \quad (2.251)$$

o bien, podemos definir el parámetro pequeño ϵ como [55]:

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{n}, \quad (2.252)$$

con la intención de posteriormente hacer una expansión perturbativa en términos de este. Entonces podemos reescribir nuestra fórmula para la entropía como

$$S = -\partial_\epsilon I[\hat{B}_n] \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.253)$$

Recordemos que $I[\hat{B}_n]$ no tiene ninguna contribución proveniente de la singularidad cónica, por lo que podemos definirla en términos de una pequeña región alrededor de C_n . Para el presente caso, consideremos que esta región está definida por $\rho < a$, donde a puede tomarse como un parámetro de corte. Entonces podemos calcular la acción Euclídea integrando sobre la región $\rho > a$ y tomando el límite $\rho \rightarrow 0$ al final de los cálculos [55]. Antes de tomar este límite, resulta natural cerrar la variedad definida por la frontera $\rho = a$ llenando la región que sustrajimos, $\rho < a$, por una geometría regular. A esta geometría le llamaremos geometría del *cono aplastado regularizado*, o simplemente *cono regularizado* cuando la solución tenga simetría $U(1)$ [55].

Una manera más formal de definir esta geometría es considerar (2.243), y sumar y restar la acción correspondiente a una geometría suave, que es la misma que la del cono con la singularidad lejos del origen, y un cono aplastado regularizado cerca de este. Esta geometría no es una solución de las ecuaciones de gravedad y por tanto es una configuración *off-shell*, o fuera de la capa de masa, cuya función de partición denotamos como Z_n^{off} [55]. Entonces podemos escribir la fórmula para la entropía como:

$$S = -n\partial_n [(\ln Z_n - \ln Z_n^{off}) - (\ln Z_n^{off} - \ln Z_1^n)]_{n=1} \quad (2.254)$$

Cada geometría correspondiente a cada término que aparece en esta acción se representa gráficamente en la Figura ???. Es posible escoger la configuración fuera de la capa de masa de manera que difiera de una solución a las ecuaciones de movimiento únicamente por una cantidad a primer orden en ϵ . Por lo tanto, al considerar variaciones al orden más bajo, el primer paréntesis en (2.254) da lugar a una variación a primer orden respecto a la solución con periodo n , que justo corresponde al lado izquierdo de las ecuaciones de gravedad con coordenada τ periódica, y por lo tanto es cero.

Entonces, falta calcular solamente el segundo paréntesis de (2.254), que contiene la diferencia entre la acción de un cono con una singularidad y un cono regularizado. Por lo tanto, la única contribución proviene de la región cercana a la singularidad, que es extensiva en el área del horizonte $\rho = a$. En gravedad de Einstein con campos de materia acoplados de manera minimal, esto nos permite calcular la contribución correspondiente haciendo la integral $\int d^2x \sqrt{g} R$ a lo largo de las coordenadas paralelas al cono. Esta integral la evaluaremos en la siguiente sección una vez que hayamos obtenido la expansión perturbativa de la métrica y el resultado es:

$$\int_{\text{Cono Regularizado}} d^2x \sqrt{g} R \sim 4\pi(1 - n), \quad (2.255)$$

por lo que el resultado final toma la forma esperada:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} (\text{Área}) \left(-n\partial_n \int_{\text{Cono Regularizado}} d^2x \sqrt{g} R \right) = \frac{\text{Área}}{4G_N} \quad (2.256)$$

Aún no queda cuál es la localización de la superficie C_n donde debemos evaluar este funcional. Para resolver este problema, ahora haremos uso de la periodicidad 2π de la coordenada τ en la geometría de la orbifold \hat{B}_n , y escribiremos la métrica como una expansión perturbativa regularizada alrededor de la $\rho = 0$ por una función que suaviza la singularidad cónica [55].

$$ds^2 = e^{2A}[dzd\bar{z} + e^{2A}T(\bar{z}dz - zd\bar{z})^2] + (g_{ij} + 2K_{aij}x^a + Q_{abij}x^ax^b)dy^i dy^j + 2ie^{2A}(U_i + V_{ai}x^a)(\bar{z}dz - zd\bar{z})dy^i + \dots, \quad (2.257)$$

donde la función reguladora se define con el valor particular siguiente:

$$A = -\frac{\epsilon}{2} \ln(\rho^2 + a^2) \quad (2.258)$$

Esta parecería ser una elección completamente arbitraria que escogemos para simplificar los cálculos, pero como veremos más adelante, el resultado final no depende del esquema de regularización como es de esperarse. La deducción de esta fórmula se explica más detalladamente en [55], y puede escribirse en la forma más simple:

$$ds^2 = \rho^{-2\epsilon}(d\rho^2 + \rho^2 d\tau^2) + (g_{ij} + 2K_{aij}x^a)dy^i dy^j + \dots \quad (2.259)$$

Con esta expansión podemos evaluar los términos que aparecen en la acción, y extraer aquellos que dependan linealmente en ϵ , que son los únicos que no se anulan después de derivar y evaluar en $\epsilon = 0$. Por otro lado, podemos localizar la superficie de codimensión 2 notando que al sustituir la expansión perturbativa (2.257) en las ecuaciones de movimiento, aparecen términos que contienen divergencias en las coordenadas complejas z y \bar{z} . Estos términos deben anularse, debido a que podemos suponer que el tensor de energía-momento para los campos no diverge en ningún punto. Estas constricciones determinan una ecuación que nos permite encontrar cuál es la superficie C_n sobre la cual debemos evaluar el funcional de HEE. Podemos también listar las componentes del tensor de Riemann que tienen una contribución a orden lineal en ϵ y que aparecen en la expansión de escalar de curvatura. Esto corresponde a las componentes $R_{z\bar{z}z\bar{z}}$, R_{zizj} , $R_{\bar{z}i\bar{z}j}$ a orden cuadrático en z y \bar{z} :

$$R_{z\bar{z}z\bar{z}} \sim -\epsilon\pi e^{2A}\delta^{(2)}(x^1, x^2), \quad (2.260)$$

$$R_{zizj} \sim -\frac{\epsilon}{2z}K_{zij}, \quad (2.261)$$

$$R_{\bar{z}i\bar{z}j} \sim -\frac{\epsilon}{2\bar{z}}K_{\bar{z}ij}. \quad (2.262)$$

Además, con el objetivo de analizar las divergencias en las ecuaciones de movimiento listamos el resto de las componentes componentes que contienen divergencias a orden más bajo en z o \bar{z} . Esto corresponde únicamente a las componentes z y \bar{z} del símbolo de Christoffel.

$$\Gamma_{zz}^z \sim -\frac{\epsilon}{z} \quad (2.263)$$

$$\Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} \sim -\frac{\epsilon}{\bar{z}} \quad (2.264)$$

Prueba de la fórmula de Ryu-Takayanagi

Armados con la expansión (2.257), podemos proceder a aplicar el método de Lewkowycz-Maldacena a la obtención del término de área a partir del método de términos de frontera

discutido en la sección anterior. Recordemos que la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica toma la forma:

$$I[g, \phi] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + I_{mat}, \quad (2.265)$$

donde en término I_{mat} incluye posibles acoplamientos de tipo minimal con campos de materia, denotados conjuntamente como ϕ . Podemos ver que este término, al igual que la contribución de la constante cosmológica no contribuye al funcional de entropía, dado que los únicos términos proporcionales a ϵ son los que aparecen en las ecuaciones ref-ref, y los acoplamientos de este tipo no contienen al tensor de Riemann y sus contracciones. Por lo tanto, la única contribución que podría aparecer, proviene de los símbolos de Christoffel. Sin embargo, notemos que la potencia proporcional a ϵ , en este caso viene acompañado por una divergencia en $z(\bar{z})$. Como detallaremos más adelante, al integrar un término de este tipo respecto a la coordenada temporal periódica τ , obtenemos cero, ya que podemos escribir $z = e^{-i\tau} \rho$, y la integral sobre la exponencial se anula al evaluar en $\tau = \tau + 2\pi$ [55].

Por lo tanto, la única contribución a la entropía de entrelazamiento proviene de los términos a orden más bajo (distinto de cero) en z y \bar{z} que son proporcionales a ϵ en la expansión del escalar de curvatura. Escribamos la acción explícitamente en términos del tensor de Riemann:

$$I = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{g} (g^{ab} g^{cd}) R_{abcd} + \dots \quad (2.266)$$

Como el escalar de curvatura contribuye a primer orden en z y \bar{z} , el resto de las cantidades que aparecen en este producto deben tomarse al orden más bajo en la expansión perturbativa:

$$g^{z\bar{z}} = 2e^{-2A} + \dots, \quad \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{h} e^{2A} + \dots \quad (2.267)$$

Sustituyendo estas expresiones en la acción, junto con la expansión para la componente $z\bar{z}z\bar{z}$ del tensor de Riemann, obtenemos:

$$S = \frac{2\pi}{16\pi G_N} \int d^{D-2} y d\tau d\rho \delta^{(2)}(x^1, x^2) = \frac{1}{4G_N} \int d^{D-2} y \sqrt{h} = \frac{\text{Área}}{4G_N} \quad (2.268) \quad \text{La superficie}$$

C_n puede determinarse en principio resolviendo las ecuaciones de movimiento para la geometría del cono regularizado, sin embargo notemos que la expansión en términos de las coordenadas complejas contiene divergencias a orden lineal, que deben anularse para asegurar que la parte que sólo depende de los campos de materia sea no-divergente. En concreto, sabemos que las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) + \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N T_{ab} \quad (2.269)$$

Consideremos la componente zz de estas ecuaciones. De la expansión (2.257), podemos ver que las componentes zz no contienen términos divergentes, por lo que basta considerar la contribución proveniente del tensor de Ricci:

$$R_{zz} \sim 2K_z \frac{\epsilon}{z} \quad (2.270)$$

Como el lado derecho de las ecuaciones de Einstein debe estar libre de divergencias, la contribución que da lugar a esta divergencia debe anularse:

$$K_z = 0, \quad (2.271)$$

que justo es la ecuación de una superficie de área mínima. La condición que obtenemos si consideramos la componente $z\bar{z}$ es exactamente la misma. Por lo tanto, podemos concluir esta sección con el enunciado de Ryu-Takayanagi, válido en gravedad de Einstein con campos acoplados minimalmente [55]:

$$S = \frac{\text{Área}\{C_{\min}\}}{4G_N} \quad (2.272)$$

Para resaltar la conexión entre el método de Lewkowycz-Maldacena y la fórmula de Ryu-Takayanagi, notemos que el primero está bien definido para cualquier solución a las ecuaciones de Einstein con una frontera. En cambio la fórmula holográfica de R-T es una conjetura en el contexto de la correspondencia AdS/CFT, donde identificamos la CFT con la frontera de AdS , y por lo tanto resulta ser un caso particular del método L-M.

Aplicación a teorías de Gauss-Bonnet y de Lovelock

Como primera aplicación del método de L-M en un caso distinto al de la teoría de Einstein, veamos como obtener la entropía de entrelazamiento holográfica en las teorías de Gauss-Bonnet y Lovelock [56, 57]. Estas teorías resultan ser un caso particular de un conjunto de teorías donde la Lagrangiana depende de manera arbitraria en el tensor de Riemann y sin embargo sus ecuaciones siguen siendo de segundo orden en derivadas. En este caso, se logró demostrar la forma del funcional en [56], mientras que aquí solo esbozaremos la prueba y aplicaremos la fórmula general a las teorías que nos interesan. Podemos escribir la acción de manera general como:

$$S = \int d^D x \sqrt{g} \mathcal{L}(R_{abcd}). \quad (2.273)$$

La tarea principal consiste en deducir todas las posibles combinaciones de tensores de Riemann que dan lugar a términos lineales en ϵ una vez que sustituimos la expansión (2.257). Como sabemos, cuándo aparece un sólo tensor de Riemann en la acción tenemos un término proporcional a ϵ que proviene de la componente $R_{z\bar{z}z\bar{z}}$. Notemos que esta expansión de Taylor se realiza en términos de las coordenadas complejas z y \bar{z} , mientras que aquí debemos hacer la expansión en Taylor de la Lagrangiana alrededor de $\epsilon = 0$ [56]:

$$\mathcal{L}(R_{abcd}) = \mathcal{L}(R_{abcd})|_{\epsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{abcd}}|_{\epsilon=0} R_{abcd} + \dots \quad (2.274)$$

El término a orden cero no contribuye al funcional, ya que toda esta expresión al final debe ser derivada respecto a ϵ (por la fórmula (2.253)). Entonces, nos quedamos solamente con el segundo término en esta expansión, que incluye sólo a un tensor de Riemann. Por lo tanto, la contribución en este caso proviene de:

$$R_{z\bar{z}z\bar{z}} \sim -\frac{1}{2} e^{2A} \nabla^2 A = -\pi \epsilon e^{2A} \delta^{(2)}(x^1, x^2). \quad (2.275)$$

Esto implica que el único término en la acción que contribuye a este orden es:

$$I^{(1)} = -4 \int d^D x \left(\frac{1}{2} \sqrt{h} e^{2A} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \Big|_{\epsilon=0} \pi \epsilon e^{2A} \delta^{(2)}(x^1, x^2). \quad (2.276)$$

Integramos respecto a las coordenadas transversales, con ayuda de la delta de Dirac:

$$I^{(1)} = -2\pi \epsilon \int d^{D-2} y \sqrt{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \Big|_{\epsilon=0} \quad (2.277)$$

Ahora que tenemos una expresión para el único término proporcional a ϵ en la acción $I^{(1)}$, podemos aplicar la fórmula (2.286) para obtener el funcional de entropía de entrelazamiento [56, 57]:

$$S_{EE} = -\partial_\epsilon I^{(1)}|_{\epsilon=0} = 2\pi \int d^{D-2}y \sqrt{h} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \quad (2.278)$$

Comparando esta fórmula con (??), vemos que este término corresponde a la entropía de Wald. Para el tipo de teorías que estamos considerando, existe además otra posible contribución a orden lineal en ϵ cuando consideramos el producto de dos tensores de Riemann, el primero de ellos contribuyendo en la componente

$$R_{zizj} \sim 2K_{zij} \nabla A, \quad (2.279)$$

y el otro tensor de Riemann en su forma conjugada, $R_{\bar{z}\bar{z}j\bar{i}}$. Podría parecer que este término (así como todos los términos de orden superior al lineal) no contribuye debido a la dependencia cuadrática en ϵ . Sin embargo, como demostraremos, al integrar respecto a ρ , esta dependencia se ve promovida a una potencia lineal de ϵ que sí contribuye al funcional. También puede verse que este es el único término posible que se ve promovido después de realizar la integración. Por lo tanto, el último término que nos falta considerar es:

$$I^{(2)} = 4^2 \int d^D x \sqrt{g} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial R_{zizj} \partial \bar{z}k\bar{z}l} (2K_{zij} \nabla_z A) (2K_{\bar{z}ij} \nabla_{\bar{z}} A), \quad (2.280)$$

donde incluimos un factor de simetría de 4 por cada tensor de Riemann. Si separamos la integral respecto a ρ del resto de la integral, podemos ver que toma la forma

$$\int \rho d\rho (\nabla_z A) (\nabla_{\bar{z}} A) e^{-\beta A}, \quad (2.281)$$

donde hemos agrupado todos los factores e^{2A} provenientes de la métrica y de los Riemann en el factor $e^{-\beta A}$. Si ahora insertamos la forma de A a partir de la geometría del cono regularizado que estamos utilizando, podemos escribir [56]:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (\nabla_z A) (\nabla_{\bar{z}} A) e^{\beta A} - (a \rightarrow 0) \\ &= \frac{\epsilon^2}{4} \int_0^\infty \rho^3 d\rho (\rho^2 + a^2)^{\frac{\beta}{2}\epsilon - 2} - (a \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (2.282)$$

donde el segundo término corresponde a la sustracción del término sin regularizar, que llevamos a cabo para obtener un resultado finito, en analogía con el procedimiento de renormalización en teoría de campos. La integral puede resolverse analíticamente, y obtenemos:

$$\frac{\epsilon^2}{4} \left[(\rho^2 + a^2)^{\frac{\beta}{2}\epsilon} \left(\frac{1}{\beta\epsilon} - \frac{a^2}{(\rho^2 + a^2)(\beta\epsilon - 2)} \right) \Big|_0^\infty - (a \rightarrow 0) \right] \quad (2.283)$$

Como podemos ver, el primer término aquí da cambio la potencia cuadrática de ϵ a un factor a una potencia lineal, que sí contribuye a la entropía. Quedándonos sólo con el primer término y haciendo la integración respecto a ρ obtenemos

$$\int \rho d\rho (\nabla_z A) (\nabla_{\bar{z}} A) e^{-\beta\epsilon} = -\frac{\epsilon}{4\beta}. \quad (2.284)$$

El factor de β depende de la teoría de gravedad, y se obtiene contando las potencias de e^A que aparecen en $I^{(2)}$, las cuáles pueden provenir de el determinante de la métrica, la métrica inversa y los tensores de Riemann. Sabemos que \sqrt{g} contribuye con un término

e^{2A} , mientras que las dos métricas inversas contribuyen e^{-2A} cada una. Las contribuciones de los tensores de Riemann se obtienen a partir de la métrica a orden cuadrático en ρ , y puede demostrarse que por cada Q_{zzij} y $Q_{\bar{z}\bar{z}ij}$ debemos asociar un factor de e^{-2A} , así como un factor e^{-A} por cada V_{ai} y K_{aij} , y ningún factor exponencial al resto de los tensores en la expansión (T, U_i, Q_{zzij} y $rikjl$). Si definimos que el índice α corra sobre todos los términos en la expansión de los tensores de Riemann, el término en el integrando se vuelve una suma sobre α . Sea q_α el número total de Q_{zzij} y $Q_{\bar{z}\bar{z}ij}$ más un medio del total de V_{ai} y K_{aij} en el α -ésimo término. Entonces el producto de todos los e^A se escribe (considerando tanto el determinante como las métricas inversas) como

$$e^{2A}(e^{-2A})^2 e^{-2(q_\alpha+1)A}, \quad (2.285)$$

de donde obtenemos $\beta = 2(q_\alpha + 1)$. Por lo tanto el resultado final para esta contribución a la acción se puede escribir como [56]

$$S_{EE}^{(2)} = 16\pi \int d^d y \sqrt{h} \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} \right)_\alpha \frac{K_{zij} K_{\bar{z}kl}}{q_\alpha + 1}. \quad (2.286)$$

Juntando esto con la primera contribución que habíamos obtenido, podemos escribir el funcional completo de entropía de entrelazamiento holográfica para una teoría general dependiente del tensor de Riemann [57, 56]:

$$S_{EE} = 2\pi \int d^{D-2} y \sqrt{h} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} \right)_\alpha \frac{K_{zij} K_{\bar{z}kl}}{q_\alpha + 1} \right\}. \quad (2.287)$$

Notemos que la deducción de este funcional no implica nada acerca de la forma de la superficie de codimensión 2 donde debe ser evaluada. En principio, esto se puede obtener resolviendo las ecuaciones de movimiento en la geometría del cono regularizado, cálculo que puede resultar bastante complicado en general. Sin embargo se conjetura que esta superficie debe ser la que *extremiza* el funcional de HEE. Como esto no está demostrado, tendremos que probar esta afirmación para cada caso que estudiemos.

Como primer ejemplo, veamos cómo aplicar la fórmula (2.286) al tipo de teorías cuya Lagrangiana tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{R^2} = \lambda_1 R^2 + \lambda_2 R_{ab} R^{ab} + \lambda_3 R_{abcd} R^{abcd}, \quad (2.288)$$

que incluyen a la teoría de Gauss-Bonnet cuando tomamos los acoplamientos como $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_2/4 = \lambda$. Al considerar también un término de Einstein-Hilbert debemos agregar un término de área entra $4G_N$ al funcional de HEE. Evaluando la derivada de la Lagrangiana obtenemos el funcional de entropía de entrelazamiento:

$$S_{EE} = -4\pi \int d^{D-2} y \sqrt{y} \left[2\lambda_1 R + \lambda_2 \left(R^a{}_a - \frac{1}{2} K_a K^a \right) + 2\lambda_3 (R^{ab}{}_{ab} - K_{aij} K^{aij}) \right] \quad (2.289)$$

En el caso de gravedad de Gauss-Bonnet esto se reduce al funcional de Jacobson-Myers cite:

$$S_{EE} = \frac{1}{4G_N} \int d^3 y \sqrt{h} (1 + \lambda R) \quad (2.290)$$

Para determinar la superficie en la cual hay que evaluar este funcional, debemos insertar la expansión (2.257) en las ecuaciones de movimiento, y extraer los términos divergentes. pueden obtenerse todos los productos de tensores de Riemann que contienen divergencias. por lo cual concluimos que la ecuación que satisface la superficie de codimensión 2 que aparece en el funcional de HEE, es la misma que la de la superficie que minimiza el funcional S_{EE} , como habíamos conjeturado en un inicio.

Capítulo 3

Antecedentes

Dado que nuestro interés es caracterizar una cierta teoría de campo mediante el cálculo de ciertas observables como el potencial quark-antiquark y la entropía de entrelazamiento, es necesario explorar algunos resultados similares que se han elaborado en otros escenarios de gravedad. Además de esto, debemos entender la solución de agujero de gusano que usaremos a lo largo de este trabajo. Por lo tanto, en este capítulo resumiremos tres de los principales trabajos en los cuales nos fundamentaremos para realizar los cálculos de los Capítulos 4 y 5.

3.1. Agujeros de gusano en teorías con términos superiores

A continuación revisaremos el trabajo de [68], en donde se deduce la existencia de una solución de agujero de gusano en gravedad de Gauss-Bonnet, construido a través de la unión de 4 variedades mediante las condiciones de Israel. Debido a la importante propiedad de que este agujero es geodésicamente atravesable, servirá de escenario de gravedad para explorar la interacción entre las dos teorías de campo duales a las fronteras del agujero. En gravedad de Gauss-Bonnet se conocen soluciones explícitas de agujero negro [23, 24]. En particular, si consideramos una teoría tipo Gauss-Bonnet con carga eléctrica, cuya acción se escribe como

$$S = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \alpha (R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd})) + I_B, \quad (3.1)$$

donde I_B representa el término de frontera correspondiente (que generaliza al de GHY para el caso de gravedad Gauss-Bonnet), existen soluciones de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + (f(r))^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.2)$$

donde $d\Omega$ es la métrica en una geometría 3-dimensional con curvatura $k = 0, \pm 1$. Si resolvemos las correspondientes ecuaciones de movimiento, obtenemos la siguiente forma para la función $f(r)$:

$$f(r) = k + \frac{r^2}{4\alpha} \left(1 + \zeta \sqrt{1 + \frac{16\alpha M}{r^4} - \frac{8\alpha Q^2}{3r^6} + \frac{4\alpha\Lambda}{3}} \right), \quad (3.3)$$

donde $\zeta = \pm 1$. En esta ecuación M es la masa y Q es la carga del agujero. La solución con $k = 1$, $\zeta = -1$ y $\Lambda = 0$ corresponde en el límite de r grande a la solución de Reissner-Nordstrom en la teoría de Einstein-Maxwell. En el caso particular de geometrías

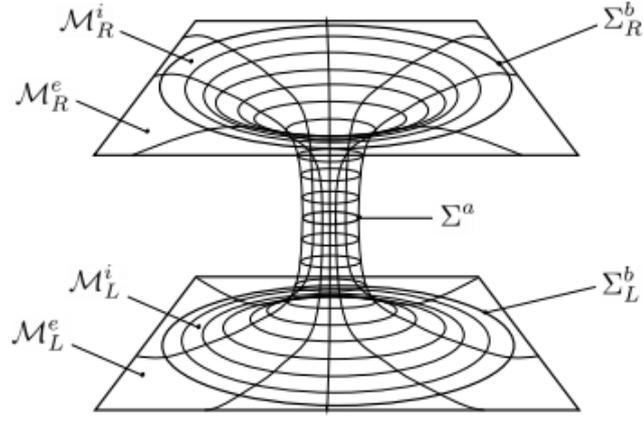


Figura 3.1: Representación pictórica de la geometría de agujero de gusano 5-dimensional en un fondo asintóticamente Anti de Sitter. Esta, consiste de cuatro parches unidos entre sí por tres superficies que satisfacen las condiciones de borde adecuadas. Imagen tomada de [59]

asintóticamente planas, tenemos una singularidad en $r = r_s$, cubierta por dos horizontes para $|Q| < Q_c = \sqrt{3}|M - \alpha|$, y con un solo horizonte en $Q = Q_c$.

Gracias a esta solución, podemos construir un agujero de gusano atravesable en un fondo que puede ser en particular del tipo AdS [59]. En cinco dimensiones, esta solución se construye a partir de 4 regiones del bulto unidas entre si por tres 4-superficies. Las cuatro regiones se denotan por \mathcal{M}_L^e , \mathcal{M}_R^e , \mathcal{M}_L^i y \mathcal{M}_R^i . Matemáticamente, podemos escribir

$$\mathcal{M}_L^e = x_L^\alpha |r_L \geq b, \quad \mathcal{M}_L^i = x_L^\alpha |b \geq r_L \geq a, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{M}_R^e = x_R^\alpha |r_R \geq b, \quad \mathcal{M}_R^i = x_R^\alpha |b \geq r_R \geq a, \quad (3.5)$$

y por lo tanto la variedad completa se escribe como $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L^e \cup \mathcal{M}_R^e \cup \mathcal{M}_L^i \cup \mathcal{M}_R^i$. Las tres superficies se localizan dos de estas en $r_L = r_R = b$, y la otra en $r_L = r_R = a$. Las funciones métricas en cada una de estas regiones se denotan $f_e(r_{L,R})$ para métricas exteriores y $f_i(r_{L,R})$ para las métricas interiores, y se diferencian entre sí por el hecho de que $\zeta_e = -1$ y $\zeta_i = 1$. Exigiendo que el tensor de energía momento sea cero, podemos tener un agujero de gusano que no viole la condición de energía nula, y esto sucede cuando la localización de las superficies de unión entre los cuatro parches esté determinada por las cuatro ecuaciones [59]:

$$f_i(a) = 3\left(k + \frac{a^2}{4\alpha}\right), \quad (3.6)$$

$$f_i(a) = \chi(a) - k, \quad (3.7)$$

$$\sqrt{f_i(b)}\sqrt{f_e(b)} = 3\left(k + \frac{b^2}{4\alpha}\right) - f_e(b) - f_i(b), \quad (3.8)$$

$$\sqrt{f_i(b)}\sqrt{f_e(b)} = -\chi(b) + k, \quad (3.9)$$

donde $\chi(\rho) = \frac{Q^2}{3\rho^4} + \frac{\rho^2\Lambda}{3}$.

Estas cuatro ecuaciones determinan las condiciones para tener cascarones vacíos, es decir, un tensor de energía-momento inducido en las hipersuperficies igual a cero. Estas condiciones se ven radicalmente simplificadas en el caso $k = 0$, y cuando nos paramos en el punto de Chern-Simons $L = -3/\ell^2$. Después de aplicar las condiciones de juntura, cuatro

de los parámetros en la función métrica quedan fijos, mientras que los otros dos pueden variar. Podemos escribir la métrica explícita del agujero de gusano, descrita en términos del radio de garganta a y del radio de AdS ℓ ; esto es

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\vec{x}^2, \quad (3.10)$$

donde

$$f = \begin{cases} f_i(r) = \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{2a^2}{\ell^2} \sqrt{3 - \frac{2a^2}{r^2}} \text{ en } \mathcal{M}_{L,R}^i \\ f_e(r) = \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{2a^2}{\ell^2} \sqrt{\bar{\mu} - \frac{2a^2}{r^2}} \quad (\bar{\mu} \simeq 1,81) \text{ en } \mathcal{M}_{L,R}^e \end{cases}, \quad (3.11)$$

con las correspondientes coordenadas en cada parche. Los parámetros de las funciones métricas originales, que obtenemos mediante las condiciones de juntura, son

$$M_i = \frac{3a^4}{\ell^2}, \quad Q = \frac{2\sqrt{3}a^3}{\ell} \quad (3.12)$$

$$M = \frac{\bar{\mu} a^4}{\ell^2} (\bar{\mu} \simeq 1,81), \quad b = \sqrt{\delta} \quad (\sqrt{\delta} \simeq 1,40) \quad (3.13)$$

con el valor exacto de δ dado por la raíz positiva del polinomio $P(\delta) = 9\delta^7 - 21\delta^6 + 4\delta^5 + \delta^4 + 16(\delta^3 - \delta^2 - \delta - 1)$, y con $\bar{\mu} = 10/\delta - 3 - 4/\delta^4$. EL parámetro de masa de la métrica interior, y la carga eléctrica del agujero de gusano, se obtienen a partir de las ecuaciones para la juntura en la garganta [59]. Insertando estos parámetros en las condiciones sobre el cascarón, obtenemos el radio externo de los cascarones, así como la masa de la métrica exterior. De estas ecuaciones, se obtiene que no existen soluciones que tengan tanto carga como constante cosmológica igual a cero.

En particular nos interesa estudiar este tipo de soluciones cuando Λ es distinta de cero y negativa, de manera que nuestra solución viva en un fondo asintóticamente AdS. En este caso tenemos que el posible fondo conecta dos regiones AdS_5 con una constante cosmológica efectiva dada por:

$$\Lambda_{eff} = \frac{3}{2\alpha} (\sqrt{1 + \lambda} - 1). \quad (3.14)$$

En [59] se concluye que para la mayoría de los valores de λ las soluciones deben ser excluidas debido a cotas de causalidad. Una excepción es el caso $\lambda = -1$. En este caso, parece existir un dual holográfico al agujero de gusano atravesable, que consiste de dos CFT_4 interactuando entre sí.

3.2. Cuerdas y agujeros de gusano en AdS

En esta sección resumiremos los resultados de [62], que describen el perfil de las distintas configuraciones de una cuerda clásica en agujeros de gusano AdS en una teoría de Gauss-Bonnet.

Consideremos una teoría con la acción de la forma:

$$S = \kappa \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{12}{l^2} + R + \alpha l^2 (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) + \dots \right]. \quad (3.15)$$

Una solución tipo agujero de gusano para esta teoría puede describirse mediante la métrica [69]:

$$ds^2 = l^2 (\cosh^2(\rho - \rho_0) dt^2 + d\rho^2 + \cosh^2 \rho d\Sigma_3^2). \quad (3.16)$$

La variedad Σ_3 puede ser un espacio hiperbólico H_3/Γ o $s_1 \times H_2/\Gamma$, donde Γ es el subgrupo discreto adecuado para describir al agujero de gusano como un cociente.

La dinámica de una cuerda en un fondo gravitacional con métrica $G_{\mu\nu}$ está descrita por la acción de Nambu-Goto. Para un mapeo $X^\mu(\sigma, \tau)$ de la hoja de mundo al espacio tiempo, tenemos al determinante de la métrica inducida correspondiente:

$$-h = (\dot{X} \cdot X')^2 - (X')^2(\dot{X})^2. \quad (3.17)$$

Aquí, \prime significa derivar respecto a σ , y $\dot{}$ es derivada respecto a τ . Consideraremos una cuerda que está localizada en un punto en H_2 y se mueve a lo largo de la dirección S_1 , que etiquetamos como x . Eligiendo una norma estática donde $\sigma = \rho$ y $\tau = t$, encontramos que la ecuación de movimiento para una cuerda en la la métrica de fondo anterior viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\cosh^2(\rho - \rho_0) \cosh^2(\rho) x'}{\sqrt{-g}} \right) - \cosh^2(\rho) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{-g}} \right) = 0. \quad (3.18)$$

En la norma alternativa $\sigma = x$, $\tau = t$, dicha ecuación toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cosh^2(\rho - \rho_0) \rho'}{\sqrt{-g}} \right) - \cosh^2(\rho) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{\rho}}{\sqrt{-g}} \right) = & \cosh(\rho) \cosh(\rho - \rho_0) \sinh(2\rho - \rho_0) - \\ & \cosh(\rho) \sinh(\rho) \dot{\rho}^2 + \cosh(\rho - \rho_0) \sinh(\rho - \rho_0) \rho'^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Las expresiones generales para las densidades de momento canónico de la cuerda son

$$\pi_0^\mu = -T_0 \frac{G_{\mu\nu}(X' \cdot \dot{X})(X^\nu)' - (X')^2(\dot{X}^\nu)}{\sqrt{-h}}, \quad (3.20)$$

$$\pi_1^\mu = -T_0 \frac{G_{\mu\nu}(X' \cdot \dot{X})(\dot{X}^\nu) - (X')^2(X^\nu)'}{\sqrt{-h}}. \quad (3.21)$$

A partir de estas expresiones, podemos obtener la energía y el momento total de la cuerda como [62, 63]:

$$E = - \int d\sigma \pi_t^0 \quad p = \int d\sigma \pi_x^0. \quad (3.22)$$

La solución más simple a las ecuaciones (3.18) y (3.19) es una cuerda estática con $x = x_0$. El momento total resulta ser cero, y la energía toma la siguiente forma:

$$E = T_0 l^2 (\sinh(\rho_2 - \rho_0) + \sinh(\rho_1 + \rho_0)). \quad (3.23)$$

Considerando ahora el caso de una cuerda con ambos extremos en la misma frontera, que representan a dos partículas con carga del mismo tipo, podemos obtener la distancia entre los extremos resolviendo la ecuación de movimiento para x :

$$L = 2 \cosh(\rho_t - \rho_0) \cosh(\rho_t) \int_{\rho_t}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\cosh(\rho) \sqrt{\cosh(\rho - \rho_0) \cosh(\rho) - \cosh^2(\rho_t - \rho_0) \cosh^2(\rho_t)}}, \quad (3.24)$$

donde ρ_t es el punto de retorno de la cuerda. Mediante un análisis simple, se puede determinar que existe un punto de inflexión en el cual la cuerda deja de extenderse hacia menores valores de ρ , y empieza a extenderse hacia la dirección creciente en ρ (ver Figura 5.1).

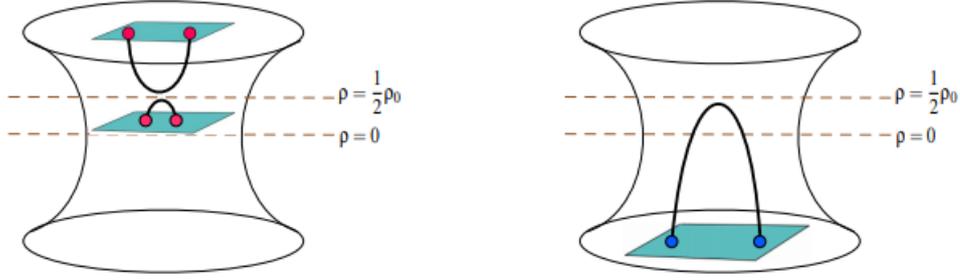


Figura 3.2: Dos posibles escenarios en los que una cuerda tiene a sus dos extremos en una misa brana. Imagen tomada de [62]

Considerando una cuerda curva con puntos finales en lados opuestos del agujero de gusano, la distancia entre los puntos finales de la cuerda en la dirección x es

$$L = C \int_{-\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\cosh(\rho) \sqrt{\cosh(\rho - \rho_0) \cosh(\rho) - C^2}}, \quad (3.25)$$

En el límite de separaciones pequeñas, podemos calcular la constante de fuerza efectiva k , que se puede escribir como

$$k = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(\int_{-\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\cosh^2(\rho) \cosh(\rho - \rho_0)} \right)^{-1}. \quad (3.26)$$

La constante de fuerza efectiva disminuye monótonicamente con los parámetros de masa ρ_1 y ρ_2 [62] [63]. También se puede considerar una cuerda que se mueve en una de las direcciones de la brana. Se puede obtener para este caso, la velocidad propia y la distancia entre los extremos de la cuerda, tanto para curvas rectas, como para cuerdas curvas.

Este tipo de análisis, se ha realizado también en [62], para otro agujero de gusano en Gauss-Bonnet 5-dimensional, con métrica

$$ds^2 = l^2(e^{2\rho} dt^2 + d\rho^2 + \cosh^2(\rho) d\Sigma_3^2). \quad (3.27)$$

También en el trabajo referenciado, se estudia el comportamiento de una cuerda en un orbifoldo multi-frontera de AdS:

$$ds_3^2 = l^2(dt^2 + dx^2 2 \sinh(2\rho) dt dx + d\rho^2). \quad (3.28)$$

En este trabajo se planea realizar el mismo análisis para los agujeros de gusano descritos en la última sección del Capítulo 3.

3.3. HEE en agujeros de gusano en AdS

En esta sección exploraremos el trabajo de [89], dónde se calcula la entropía de entrelazamiento holográfica en una solución interesante de agujero de gusano asintóticamente AdS, que se obtiene de considerar una cierta modificación a el fondo $AdS_5 \times \mathbb{Z}_2$ en la teoría de supergravedad IIB. Después de una reducción dimensional a cinco dimensiones, la acción gravitacional toma la forma

$$S_5 = \int dx^5 \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{4}{l^2} (5e^{16\alpha\varphi/5} - 2e^{8\alpha\varphi}) \right), \quad (3.29)$$

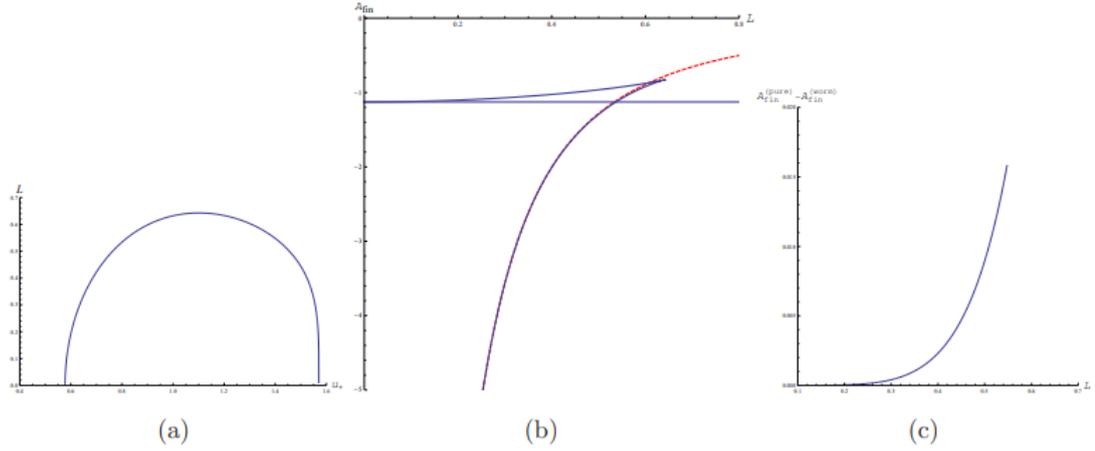


Figura 3.3: En la Figura a) se muestra la separación de la banda L como función del punto de retorno en la superficie de entrelazamiento, u^* . En b), se muestra la parte finita de la entropía de entrelazamiento holográfica, S_{fin} , como función de la separación L . En c) se muestra la HEE obtenida por sustracción de fondo. [89]

mientras que el elemento de línea asociado a la métrica es

$$ds^2 = \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{10}{3}} \left[\frac{a^2 du^2}{16 \cos^2 u} \left(\frac{H(u)}{\cos u}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{H(u)^{\frac{1}{3}}}{(\cos u)^{\frac{5}{6}}} (\cos v (-dt^2 + dz^2) + 2 \sin v dt dz + dx_1^2 + dx_2^2) \right] \quad (3.30)$$

Debido a que los términos que aparecen en esta acción reducida corresponden a gravedad de Einstein con acoplamiento mínimo, la entropía de entrelazamiento se puede calcular a partir de la fórmula de Ryu-Takayanagi:

$$S_A = \frac{Area(\gamma_A)}{4G} \quad (3.31)$$

Podemos escoger dos tipos de regiones en la frontera para calcular su entropía de entrelazamiento. En el primer caso, podemos tomar una banda de longitud infinita extendida en dos de las direcciones espaciales y con un ancho L a lo largo de la otra coordenada, esto es:

$$A = \{(x_1, x_2, z) | -\infty < x_1, z < \infty, -L/2 < x_2 < L/2\} \quad (3.32)$$

Escogiendo la parametrización de la superficie de entrelazamiento como $t = t(u)$ y $x_2 = x_2(u)$, podemos obtener el funcional de área y calcular la entropía de entrelazamiento holográfica. Por la simetría de la región A , sabemos que la superficie de entrelazamiento posee un punto en el que la derivada respecto a la coordenada radial es infinita. A este punto de retorno lo llamaremos u^* . En términos de este parámetro, podemos entonces obtener el comportamiento del ancho de la banda infinita. De manera análoga, podemos evaluar el funcional de área en esta superficie para obtener la HEE como función de u^* . De esta manera, podemos obtener la HEE como función de la separación de la banda. En las siguientes gráficas se muestran los resultados obtenidos en [89].

Recordemos que la HEE es genéricamente infinita, por lo que debe llevarse a cabo algún procedimiento de regularización. Por ejemplo, podemos poner un corte UV ϵ y graficar únicamente la parte finita de la HEE, S_{fin} . También se muestran los resultados para la parte de la HEE que se obtiene de sustraer el fondo de AdS puro, que se escribe como

$$\Delta S = S_{fin} - S_{AdS}.$$

Analizamos la gráfica de S_{fin} como función del ancho de la banda infinita L . Cualitativamente, este comportamiento es similar al obtenido para duales de gravedad de ciertas teorías de norma confinantes, en donde se observa una transición de fase análoga que corresponde a una transición confinamiento/desconfinamiento. Este comportamiento también se puede reproducir mediante cálculos en teorías de norma en la retícula. Esto implica que la teoría conforme dual presenta una brecha de masa, la cual probablemente corresponderá a alguna teoría de norma confinante. En efecto, es claro de la gráfica de ΔL como función de la separación L , que la entropía de entrelazamiento holográfica para este agujero de gusano en AdS es menor que la del fondo AdS puro. Esto es gracias a la brecha de masa mencionada anteriormente.

Este análisis se realizó también considerando una banda extendida en otra de las direcciones espaciales:

$$A = \{(x_1, x_2, z) | -\infty < x_1, x_2 < \infty, -L/2 < z < L/2\} \quad (3.33)$$

En este caso se obtiene un comportamiento similar cualitativamente. En resumen, de nuevo encontramos el comportamiento característico de una teoría de norma confinante. Para separaciones grandes, la entropía de entrelazamiento holográfica es menor que la de AdS puro, lo que de nuevo sugiere que esta teoría posee una brecha de masa. Debido a la geometría de agujero de gusano, es natural pensar que las dos teorías de campo están entrelazadas. Sin embargo, para que esto sea cierto, es necesario que la entropía de entrelazamiento holográfica sea mayor que la del espacio AdS puro. Este comportamiento se puede obtener para agujeros de gusano geodésicamente atravesables, como el que estudiaremos más adelante.

Sin embargo, la métrica que estamos estudiando no puede ser obtenida en gravedad de Einstein sin violar las condiciones de energía nula que estudiamos en la introducción. Esta teoría dual, considerando la solución de agujero de gusano AdS, solo puede obtenerse en supergravedad IIB. Este análisis también revela que la HEE entre las dos teorías en la frontera es cero. Esto significa, que la presencia de las dos fronteras no provoca que haya entrelazamiento cuántico entre las teorías duales.

Capítulo 4

Cuerdas en agujeros de gusano AdS en Gauss-Bonnet

El objetivo de esta parte del trabajo es caracterizar el comportamiento del potencial para un par quark-antiquark en una de las teorías duales al agujero de gusano. Para esto, usaremos la correspondencia holográfica, y por lo tanto analizaremos el perfil de una cuerda en la geometría del agujero de gusano AdS 5-dimensional construido a partir de los cascarones en los radios de juntura [59]. Podemos escribir la función métrica como:

$$f(r) = \begin{cases} f_+(r) & \text{si } r \geq b \\ f_-(r) & \text{si } b \geq r \geq a \end{cases}, \quad (4.1)$$

donde

$$f_{\pm}(r) = k + \frac{r^2}{4\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\alpha M}{r^4} - \frac{8\alpha Q^2}{3r^6} - \frac{4\alpha}{3}} \right), \quad (4.2)$$

y las cantidades que aparecen en esta ecuación se han definido en la Sección 3.1. El elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.3)$$

Debido a que existen dos funciones métricas, una en cada región del agujero de gusano, una cuerda pasando a través de la juntura cambia su derivada justo en este radio, de manera que se presenta un fenómeno análogo a la refracción. Exploraremos esta refracción en la siguiente sección.

4.1. Dióptrica de cuerdas

Consideremos la métrica inducida h_{mn} (con m y n corriendo sobre las coordenadas x , y y z) en las hipersuperficies tipo tiempo que usamos para construir nuestra geometría. Estos son Σ_L^b y Σ_R^b para los cascarones izquierdo y derecho y Σ^a para la garganta. Estas variedades están descritas por las coordenadas intrínsecas $\xi^m = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ que a su vez están dadas por las ecuaciones de encaje. Las ecuaciones de $x = x(\xi^m)$ en la hipersuperficie. Definimos la métrica inducida a través de los vectores $e_m = x/\xi^m$, que son tangentes a las curvas de la hipersuperficie correspondiente; explícitamente, $h_{mn} = e_m e_n G$. También definimos el tensor de proyección:

$$h \equiv h^{mn} e_m e_n, \quad (4.4)$$

El elemento de línea de la métrica inducida en un cascarón a radio $r = v$ está dado por

$$dh_{\pm}^2 = -f_{\pm}(v) dt_{\pm}^2 + v^2 d\vec{x}_{\pm}^2, \quad (4.5)$$

donde $f_{\pm}(v)$ representa el comportamiento de las funciones métricas en ambos lados de la juntura, es decir, $v = a$ p, para la garganta y $v = b$ para los dos cascarones. La métrica inducida en $r = v$ es única, y las coordenadas tangenciales en ambos lados se relacionan a través de la primera forma fundamental, de la cual se deduce la siguiente transformación diagonal:

$$\mathbb{L}^+_- = \text{diag} \frac{t_+}{t_-}, \frac{r_+}{r_-}; \frac{\vec{x}_+}{\vec{x}_-}, \quad (4.6)$$

con

$$\frac{t_+}{t_-} = \sqrt{\frac{f_-(v)}{f_+(v)}}, \quad \frac{\vec{x}_+}{\vec{x}_-} = (1, 1, 1), \quad (4.7)$$

que se obtuvo de (4.5).

Como se ha mencionado anteriormente, estamos interesados en probar esta geometría a partir de la dinámica de cuerdas fundamentales. En el contexto de la correspondencia AdS/CFT, existen dos posibles configuraciones de cargas de color en la CFT con un dual holográfico descrito por dos escenarios de cuerdas estáticas. El primer caso representa a un par quark-antiquark infinitamente pesado, en cuyo caso la cuerda tiene ambos extremos en la misma frontera, por lo que le llamaremos “en forma de U”, o “U-shaped”. También existen configuraciones que representan a un quark aislado infinitamente pesado en una de las teorías que interactúa con un quark en la otra teoría de campo. Estas últimas configuraciones son duales a una cuerda fundamental que tiene sus extremos en dos fronteras distintas del agujero de gusano. A estas configuraciones les llamaremos “LR”. La manera de estudiar la dinámica de la cuerda en este fondo, es mediante la acción de Nambu-Goto:

$$S = -\mathcal{T}_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det\{g_{\alpha\beta}\}}, \quad (4.8)$$

donde $g_{\alpha\beta} \equiv G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$ es la métrica inducida en la hoja de mundo de la cuerda, con $\sigma^\alpha \equiv (\tau, \sigma)$, $G_{\mu\nu}$ es la métrica espaciotemporal, y $\mathcal{T}_0 = (2\pi\alpha')^{-1}$ es la tensión de la cuerda fundamental. La proyección de los vectores tangentes a la hoja de mundo $\partial_\alpha X^\mu \equiv X/\sigma^\alpha$ sobre una hipersuperficie con métrica inducida h_{mn} , dada por $h_\alpha X_\nu$, son únicas. Esta proyección debe ser la misma vista desde ambos lados de la hipersuperficie que define el cascarón, así que tenemos

$$h_\alpha X_\nu^\pm = 0, \quad (4.9)$$

donde \pm indica a que lado del cascarón nos referimos. Evaluando la condición de continuidad en los cascarones para $\sigma^{(1)} \equiv \tau$ obtenemos la condición en $r = v$ para las proyecciones temporales de la hoja de mundo, que es

$$h^{t_+}_{t_+} \dot{t}_+ = \mathbb{L}^{t_+}_{t_-} h^{t_-}_{t_-} \dot{t}_-. \quad (4.10)$$

En particular, para el agujero de gusano obtenemos

$$\sqrt{f_+(v)} \dot{t}_+ = \sqrt{f_-(v)} \dot{t}_-. \quad (4.11)$$

Para $\sigma^{(2)} \equiv \sigma$, el resultado análogo es

$$x'_+ = x'_-. \quad (4.12)$$

4.1.1. Refracción de una cuerda através del cascarón del agujero de gusano

Eligiendo la norma estática, donde $X^\mu(\tau, \sigma) = (t(\tau), r(\sigma), x(\sigma), 0, 0)$, la métrica inducida en la hoja de mundo está dada por

$$g = \begin{pmatrix} -f(r) \dot{t}^2 & 0 \\ 0 & \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 x'^2 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

y la correspondiente acción de Nambu-Goto toma la siguiente forma

$$S = -\mathcal{T}_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{\dot{t}^2 r'^2 + f(r) r^2 x'^2}. \quad (4.14)$$

Esta acción es estática y tampoco depende de la coordenada x ; esto último implica que Π_x^σ (el momento canónico en la dirección σ) se conserva, y podemos escribir

$$C = -\frac{\Pi_x}{\mathcal{T}_0} = \frac{|\dot{t}| f(r) r^2 x'}{\sqrt{r'^2 + f(r) r^2 x'^2}}, \quad (4.15)$$

con C una constante de integración. Evaluando el momento canónico en la dirección x en $r_L(\sigma_a) = a$, obtenemos

$$\left. \frac{|\dot{t}_L| f_i(a) a^2 x'_L}{\sqrt{r'_L{}^2 + f_i(a) a^2 x'_L{}^2}} \right|_a = \left. \frac{|\dot{t}_R| f_i(a) a^2 x'_R}{\sqrt{r'_R{}^2 + f_i(a) a^2 x'_R{}^2}} \right|_a, \quad (4.16)$$

donde ahora los subíndices L y R , representan el lado izquierdo y derecho del agujero de gusano y por (4.11) y (4.12), obtenemos

$$|r'_L| = |r'_R|. \quad (4.17)$$

Análogamente, situándonos en las posiciones de los correspondientes cascarones, $r_{L,R}(b) = b$, obtenemos

$$\left. \frac{|\dot{t}_i| f_i(b) b^2 x'_i}{\sqrt{r'_i{}^2 + f_i(b) b^2 x'_i{}^2}} \right|_b = \left. \frac{|\dot{t}_e| f_e(b) b^2 x'_e}{\sqrt{r'_e{}^2 + f_e(b) b^2 x'_e{}^2}} \right|_b, \quad (4.18)$$

donde los subíndices i y e representan las partes interior y exterior de la geometría, y por (4.11) y (4.12), obtenemos la condición de refracción en los cascarones:

$$\frac{r'_e}{\sqrt{f_e(b)}} = \frac{r'_i}{\sqrt{f_i(b)}}. \quad (4.19)$$

También tenemos que $x'(\sigma)$ está dada por (4.15), y usando el parche coordenado para cada una de las cuatro regiones en el agujero de gusano, obtenemos

$$x'(\sigma) = \begin{cases} \mp \frac{r'}{r \sqrt{f_e(r)}} \frac{C}{\sqrt{\dot{t}^2 r^2 f_e(r) - C^2}} \Big|_{L,e} & \text{para } \mathcal{M}_L^e \\ \mp \frac{r'}{r \sqrt{f_i(r)}} \frac{C}{\sqrt{\dot{t}^2 r^2 f_i(r) - C^2}} \Big|_{L,i} & \text{para } \mathcal{M}_L^i \\ \pm \frac{r'}{r \sqrt{f_i(r)}} \frac{C}{\sqrt{\dot{t}^2 r^2 f_i(r) - C^2}} \Big|_{R,i} & \text{para } \mathcal{M}_R^i \\ \pm \frac{r'}{r \sqrt{f_e(r)}} \frac{C}{\sqrt{\dot{t}^2 r^2 f_e(r) - C^2}} \Big|_{R,e} & \text{para } \mathcal{M}_R^e. \end{cases} \quad (4.20)$$

Eligiendo la norma estática para las coordenadas temporales, $t_e(\tau) = \tau$ en las regiones exteriores $\mathcal{M}_{L,R}^e$ y $t_i(\tau) = \tau \Lambda_{t_e}^{t_i} |_{r=b} = \tau \sqrt{f_e(b)/f_i(b)}$ para las regiones interiores $\mathcal{M}_{L,R}^i$.

4.2. Cuerdas en forma de U

Recordemos la fórmula (3.59) para la energía del par quark-antiquark en términos de la acción de la cuerda:

$$\Delta E(L) = -\Delta S(L)/T, \quad (4.21)$$

donde T es el intervalo de tiempo infinito en la frontera, $\Delta E(L) = E - E_{ss}$, $\Delta S(L) = S - S_{ss}$, con E_{ss} y S_{ss} siendo la energía y la acción on-shell de una cuerda recta que va de un lado de la geometría al otro, respectivamente, y donde L es la distancia espacial en el lazo de Wilson, o de manera equivalente, la separación entre los extremos de la cuerda. Esta está dada por:

$$L = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} d(\ell x), \quad (4.22)$$

con ℓ el radio efectivo de AdS.

Empecemos considerando una cuerda recta LR. La constante de integración para esta configuración es $C = 0$, de manera que la cuerda entra perpendicularmente en el radio de garganta, es decir, $x'(\sigma) = 0$. La densidad de área para esta configuración está dada por $|\dot{t}(\tau) r'(\sigma)|$, y la acción on-shell toma la forma,

$$S_{ss} = -\mathcal{T}_0 \left(2 \int_i d\tau |\dot{t}_i| d|r'_i| + 2 \int_e d\tau |\dot{t}_e| d|r'_e| \right) = -\frac{\sqrt{\lambda} T}{\pi \ell^2} \left(N_i \int_a^b dr + \int_b^\infty dr \right), \quad (4.23)$$

donde el factor de es $N_i \equiv (t_i/t_e)|_b$, y la coordenada temporal exterior está identificada con el tiempo en la frontera. Usaremos energía normalizada

$$\Delta \bar{E} \equiv -\frac{\Delta S/T}{a \mathcal{T}_0}, \quad (4.24)$$

con a el radio de garganta, y $\mathcal{T}_0 = \sqrt{\lambda}/(2\pi \ell^2)$. La energía normalizada \bar{E}_{ss} asociada a la configuración de cuerda abierta es

$$\bar{E}_{ss} = 2 \left(N_i \int_1^{z_b} dz + \int_{z_b}^\infty dz \right), \quad (4.25)$$

con $z_b \equiv b/a \simeq 1,40$ la posición de los cascarones en términos de la variable $z = r/a$. La razón entre los valores de la métrica en el radio de juntura está dado por

$$N_i \equiv \frac{t_i}{t_e} \Big|_b = \frac{\sqrt{f_e(z_b)}}{\sqrt{f_i(z_b)}} \simeq 0,20, \quad (4.26)$$

con

$$\bar{f}_i(z) \equiv z^2 + 2\sqrt{3 - 2/z^2}, \quad \bar{f}_e(z) \equiv z^2 - 2\sqrt{\bar{\mu} - 2/z^2}, \quad (4.27)$$

y $\bar{\mu} \simeq 1,81$. Analizaremos el comportamiento de la energía adimensionalizada $\Delta \bar{E}$, usaremos una cantidad normalizada adimensional \bar{L} definida como

$$\bar{L} \equiv \frac{a L}{\ell^2}, \quad (4.28)$$

que representa la separación entre los extremos de la cuerda.

Las cuerdas U-shaped pueden caracterizarse por el punto de retorno $r_u = r(\sigma_u)$, que puede encontrarse, en principio, en la región exterior o en la región interior de la geometría. Para evaluar el valor de la constante C para estas configuraciones, debemos notar que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_u} x'(\sigma) = \mp \infty, \quad (4.29)$$

y por lo tanto, usando (4.20),

$$C = r_u \dot{t} \sqrt{f(r_u)} = \begin{cases} C_e = r_u \dot{t}_e \sqrt{f_e(r_u)} & \text{si } r_u \text{ está en } \mathcal{M}^e \\ C_i = r_u \dot{t}_i \sqrt{f_i(r_u)} & \text{si } r_u \text{ está en } \mathcal{M}^i, \end{cases} \quad (4.30)$$

donde hemos escogido C positiva. A partir del radicando en (4.20) vemos que las soluciones U-shaped deben tener $r \geq r_u$, debido a que $t^2 r^2 f(r)$ tiene un mínimo en la garganta y crece con r , como está dado por las funciones $f_i(r)$ y $f_e(r)$ en los intervalos $a < r \leq b$ y $b \leq r$, respectivamente. Esto significa que una cuerda U-shaped con el punto de retorno en un solo lado del agujero debe tener sus extremos en la misma frontera. Veremos más adelante que podemos encontrar tres diferentes tipos de configuraciones. Calcularemos la separación entre los extremos de la cuerda \bar{L} , dada por

$$\bar{L} = \frac{2a}{\ell} \int_u^\infty dx'(\sigma), \quad (4.31)$$

con una parametrización tal que $r(=\infty) = \infty$, y la energía regularizada \bar{E} , obtenida al sustraer \bar{E}_{ss} a la correspondiente energía normalizada, escrita como

$$\bar{E} = \frac{1}{aT} \int d\tau d|t| \sqrt{r'^2 + f(r) r^2 x'^2}. \quad (4.32)$$

Los valores de \bar{L} y \bar{E} nos permiten comparar las diferentes configuraciones.

4.2.1. Cuerdas en forma de U en la región exterior

Estudiaremos primero cuerdas U-shaped con punto de retorno r_u en una región exterior del agujero de gusano \mathcal{M}^e (izquierda o derecha). En este caso la coordenada radial en la norma estática es $r(\sigma) = \sigma$. Usando la expresión para $x'(\sigma)$ dada en (4.20) y la constante de curvatura C_e como en (4.30), la separación entre los extremos de la cuerda puede escribirse como:

$$\bar{L} = \frac{2}{z_u \sqrt{f_e(z_u)}} \int_{z_u}^\infty dz \frac{\bar{\beta}_e}{\sqrt{1 - \bar{\beta}_e}}, \quad (4.33)$$

donde $z_u = r_u/a$ puede tomar valores en la región exterior, es decir, $z_u \in [z_b; \infty]$ con $z_b \equiv b/a \simeq 1,40$, y donde la función auxiliar es

$$\bar{\beta}_e = \frac{z_u^2 \bar{f}_e(z_u)}{z \bar{f}_e(z)}. \quad (4.34)$$

Usando ahora la correspondencia AdS/CFT, mediante la entrada dada por la fórmula (4.32), la energía $\Delta \bar{E}(\bar{L})$ de un par quark-antiquark correspondiente a la cuerda U-shaped con su punto de retorno en r_u en una de las regiones exteriores del agujero es

$$\Delta \bar{E} = 2 \left(\int_{z_u}^\infty dz \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\beta}_e}}{\sqrt{1 - \bar{\beta}_e}} - (z_u - z_b) - N_i(z_b - 1) \right). \quad (4.35)$$

Esta configuración es similar a las estudiadas en escenarios de agujero negro [62, 63], sin embargo aquí no hay temperatura, y la región exterior corresponde a una métrica con un valor supracrítico de la carga Q . Notemos que, para separaciones pequeñas, correspondientes a los puntos de retorno con $z_u \gg z_b$, tenemos $\bar{e} \sim (z_u/z)^4$ y, como esperamos, recuperamos el comportamiento Coulombiano $\Delta\bar{E} \sim -1/\bar{L}$ dictado por la invariancia conforme en la región UV de la teoría de campo dual. La energía $\Delta\bar{E}$ como función de \bar{L} para un par quark-antiquark dual a estas configuraciones de cuerdas U-shaped con punto de retorno en la región exterior se grafica como la curva azul en la figura 5.2.

4.2.2. Cuerdas refractadas con punto de retorno en la región interior

Si el punto de retorno r_u se encuentra en una región interior \mathcal{M}^i , la ley de refracción de la cuerda está caracterizada por (4.19) en el cascarón, y una parametrización explícita en la norma estática puede escribirse como

$$r() = \begin{cases} -(b - r_u) \frac{\sqrt{f_e(b)}}{\sqrt{f_i(b)}} (+1) + b & \in (-\infty; -1], \text{ para } \mathcal{M}_{L,R}^e \\ -(b - r_u) + r_u & \in [-1; \sigma_u = 0], \text{ para } \mathcal{M}_{L,R}^i \\ (b - r_u) + r_u & \in [\sigma_u = 0; 1], \text{ para } \mathcal{M}_{L,R}^i \\ (b - r_u) \frac{\sqrt{f_e(b)}}{\sqrt{f_i(b)}} (-1) + b & \in [1; +\infty), \text{ para } \mathcal{M}_{L,R}^e. \end{cases} \quad (4.36)$$

Usando la expresión correspondiente para $x'(\sigma)$ en cada región, como en (4.20), y la constante C_i de (4.30), la distancia \bar{L} entre los extremos de la cuerda refractada es

$$\bar{L} = \frac{2}{z_u N_i \sqrt{\bar{f}_i(z_u)}} \left(N_i \int_{z_u}^{z_b} dz \frac{\bar{\beta}_i}{\sqrt{1 - \bar{\beta}_i}} + \int_{z_b}^{\infty} dz \frac{\bar{\beta}_{ie}}{\sqrt{1 - \bar{\beta}_{ie}}} \right), \quad (4.37)$$

con las funciones auxiliares definidas como

$$\bar{\beta}_i = \frac{z_u^2 \bar{f}_i(z_u)}{z \bar{f}_i(z)}, \quad \bar{\beta}_{ie} = \frac{z_u^2 \bar{f}_i(z_u)}{z f_e(z)} N_i^2, \quad (4.38)$$

y con $z_u = r_u/a$ los puntos de retorno en la región interior, tomando los valores $z_u \in [1; z_b]$. La energía correspondiente $\Delta\bar{E}$ para estas configuraciones de cuerdas es

$$\Delta\bar{E} = 2N_i \int_{z_u}^{z_b} dz \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\beta}_i}}{\sqrt{1 - \bar{\beta}_i}} + \int_{z_b}^{\infty} dz \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\beta}_{ie}}}{\sqrt{1 - \bar{\beta}_{ie}}} - N_i(z_u - 1). \quad (4.39)$$

La figura 4.2 muestra la separación \bar{L} y la energía $\Delta\bar{E}$ como función de r_u/a para cuerdas U-shaped con punto de retorno en las regiones interiores y exteriores. Podemos apreciar el cambio discontinuo de la derivada cuando en punto de retorno corresponde al radio de junta b .

4.2.3. Cuerdas en forma de U estiradas

Existe un tercer tipo de solución que no hemos considerado: configuraciones de cuerdas que se sumergen en la región interior y que poseen un segmento de cuerda paralelo a una de las coordenadas espaciales a un radio $r = a$.

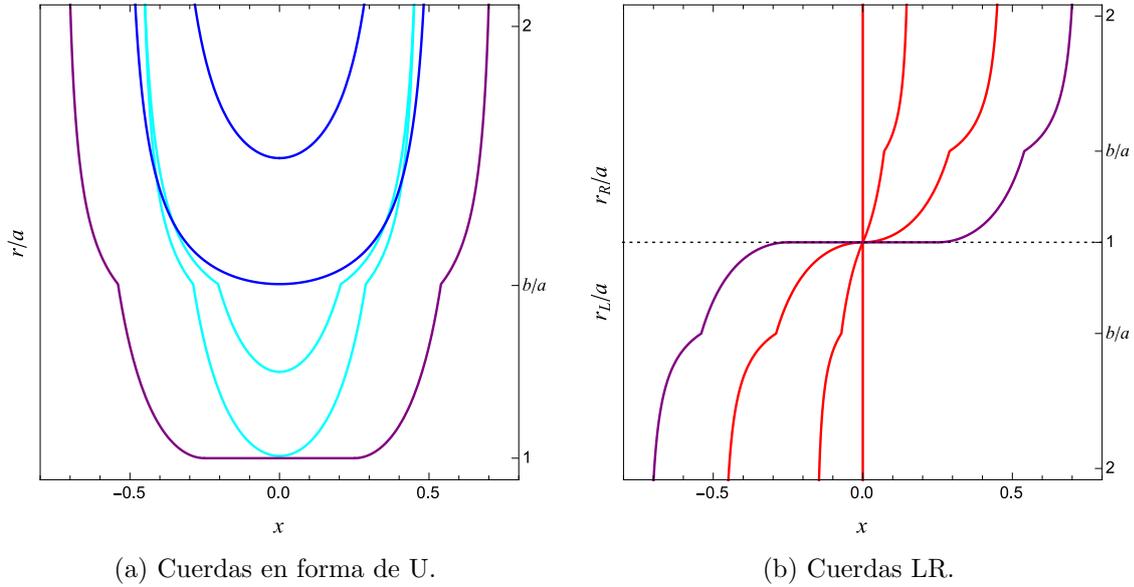


Figura 4.1: Dióptrica de cuerdas en el agujero de gusano.

Este segmento de la cuerda que se extiende a lo largo de la dirección x puede estirarse hasta una longitud arbitraria x_{str} . De esta manera, la separación entre los extremos de la cuerda se convierte en

$$\bar{L} = \frac{a}{\ell} \left(\int_{-\infty}^{\sigma_a} d\sigma x'(\sigma) + x_{str} + \int_a^{\infty} d\sigma x'(\sigma) \right) = \bar{L}^{th} + \bar{L}^{str}, \quad (4.40)$$

donde hemos llamado $\bar{L}^{str} \equiv a x_{str}/\ell$, y

$$\bar{L}^{th} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\int_1^{z_b} dz \frac{\bar{\beta}_i}{\sqrt{1-\bar{\beta}_i}} \Big|_{z_u=1} + \frac{1}{N_i} \int_{z_b}^{\infty} dz \frac{\bar{\beta}_{ie}}{\sqrt{1-\bar{\beta}_{ie}}} \Big|_{z_u=1} \right), \quad (4.41)$$

es equivalente a la separación entre los extremos de una cuerda U-shaped con punto de retorno justo en el radio de garganta. La energía $\Delta\bar{E}$ asociada a esta configuración de cuerda estirada es entonces

$$\Delta\bar{E} = \Delta\bar{E}^{th} + \bar{E}^{str}, \quad (4.42)$$

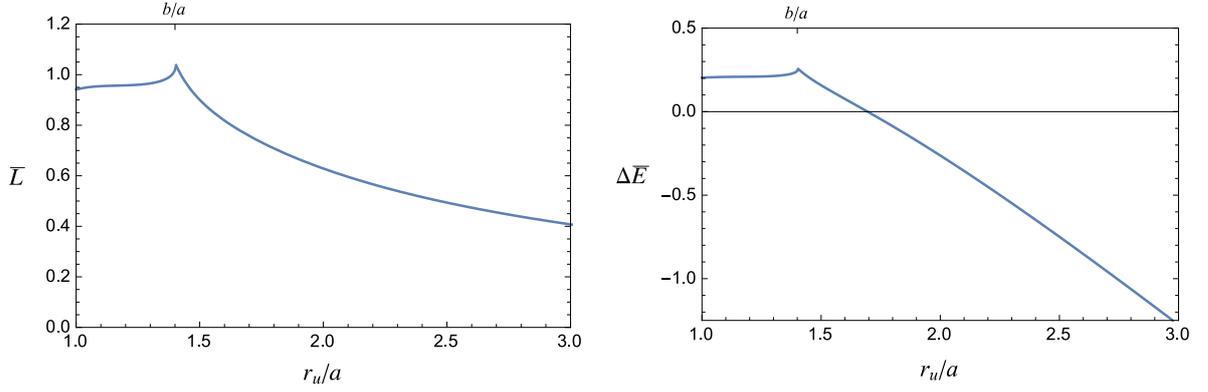
con

$$\bar{E}^{str} = \frac{1}{aT} \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}|_{r=a} = \sqrt{3} N_i \bar{L} - \bar{L}^{th}, \quad (4.43)$$

donde hemos usado $\sqrt{f_i(a)} = a\sqrt{3}/\ell$, y

$$\Delta\bar{E}^{th} = 2N_i \int_1^{z_b} dz \frac{1-\sqrt{1-\bar{\beta}_i}}{\sqrt{1-\bar{\beta}_i}} \Big|_{z_u=1} + \int_{z_b}^{\infty} dz \frac{1-\sqrt{1-\bar{\beta}_{ie}}}{\sqrt{1-\bar{\beta}_{ie}}} \Big|_{z_u=1}. \quad (4.44)$$

La energía $\Delta\bar{E}$ como función de la separación del par quark-antiquark \bar{L} para todas las configuraciones U-shaped, incluyendo las analizadas en las secciones previas, se muestra en la Figura 5.2. Las configuraciones energéticamente desfavorables están representadas con una línea punteada; dentro de las configuraciones U-shaped, las configuraciones de par quark-antiquark son energéticamente favorables para separaciones $\bar{L} \leq \bar{L}^{s2} \simeq 0,97$, y mientras aumenta la separación entre los extremos de la cuerda dual a esta configuración, las cuerdas U-shaped estiradas poseen la menor área. Sin embargo, la configuración de un par de cargas de color sin interacción entre ellas en cada una de las teorías de campo


 Figura 4.2: \bar{L} and \bar{E} como funciones del punto de retorno r_u/a .

usada en la regularización, es la configuración preferida para $\bar{L} \geq \bar{L}^{sc} \simeq 0,76$. A pesar del hecho de que las configuraciones U-shaped estiradas son desfavorables energéticamente comparadas con aquellas que atraviesan la garganta, notemos que para estas soluciones, que exploran el IR de la teoría de norma, la energía $\Delta\bar{E}$ incrementa linealmente como función de \bar{L} . Específicamente, esta linealidad se caracteriza por una tensión efectiva dada por $\sqrt{3} N_i \mathcal{T}_0 a^2 / \ell^2$, como se obtuvo en (4.42) y (4.43).

4.3. Cuerdas LR

Así como en la situación de la cuerda con ambos extremos en la misma frontera aparecen distintos tipos de configuraciones de cuerdas, lo mismo sucede cuando consideramos cuerdas que atraviesan de un lado del agujero de gusano al otro. En concreto aparecen dos configuraciones, que corresponden a cuerdas que atraviesan el origen en el cascarón interno y cuerdas que se extienden horizontalmente a lo largo del radio de garganta. Comenzamos caracterizando estas configuraciones en la norma estática:

$$r(\sigma) = \begin{cases} -(b-a) \frac{\sqrt{f_e(b)}}{\sqrt{f_i(b)}} (\sigma+1) + b & \sigma \in (-\infty; -1], \text{ para } \mathcal{M}_L^e \\ -(b-a) \sigma + a & \in [-1; \sigma_a=0], \text{ para } \mathcal{M}_L^i \\ (b-a) + a & \in [a=0; 1], \text{ para } \mathcal{M}_R^i \\ (b-a) \frac{\sqrt{f_e(b)}}{\sqrt{f_i(b)}} (-1) + b & \sigma \in [1; +\infty), \text{ para } \mathcal{M}_R^e. \end{cases} \quad (4.45)$$

A diferencia del caso anterior, todas estas configuraciones se ven refractadas en el radio $r_{L,R} = b$. La separación entre los extremos en la dirección x tanto para la frontera derecha como para la frontera izquierda, se denota como L_{LR} , y se calcula de manera análoga al caso anterior. La separación para estas configuraciones, normalizada con el radio de curvatura l , es

$$\bar{L}_{LR} \equiv \frac{a}{\ell} \left(\int_{-\infty}^{\sigma_a^-} d\sigma x'(\sigma) + \int_{\sigma_a^+}^{+\infty} d\sigma x'(\sigma) \right), \quad (4.46)$$

de donde podemos obtener $L_{LR} = \ell^2 \bar{L}_{LR} / a$. Explícitamente:

$$\bar{L}_{LR} = \frac{2\bar{C}}{\sqrt{3}} \left(\int_1^{z_b} dz \frac{\bar{\varphi}_i}{\sqrt{1-\bar{C}^2 \bar{\varphi}_i}} + \frac{1}{N_i} \int_{z_b}^{\infty} dz \frac{\bar{\varphi}_{ie}}{\sqrt{1-\bar{C}^2 \bar{\varphi}_{ie}}} \right), \quad (4.47)$$

donde $z_b = b/a$, además usamos el hecho de que $\bar{f}_i(1) = 3$, y definimos las funciones auxiliares como

$$\bar{\varphi}_i = \frac{1^2}{z} \frac{3}{\bar{f}_i(z)}, \quad \bar{\varphi}_{ie} = \frac{1^2}{z} \frac{3 N_i^2}{\bar{f}_e(z)}. \quad (4.48)$$

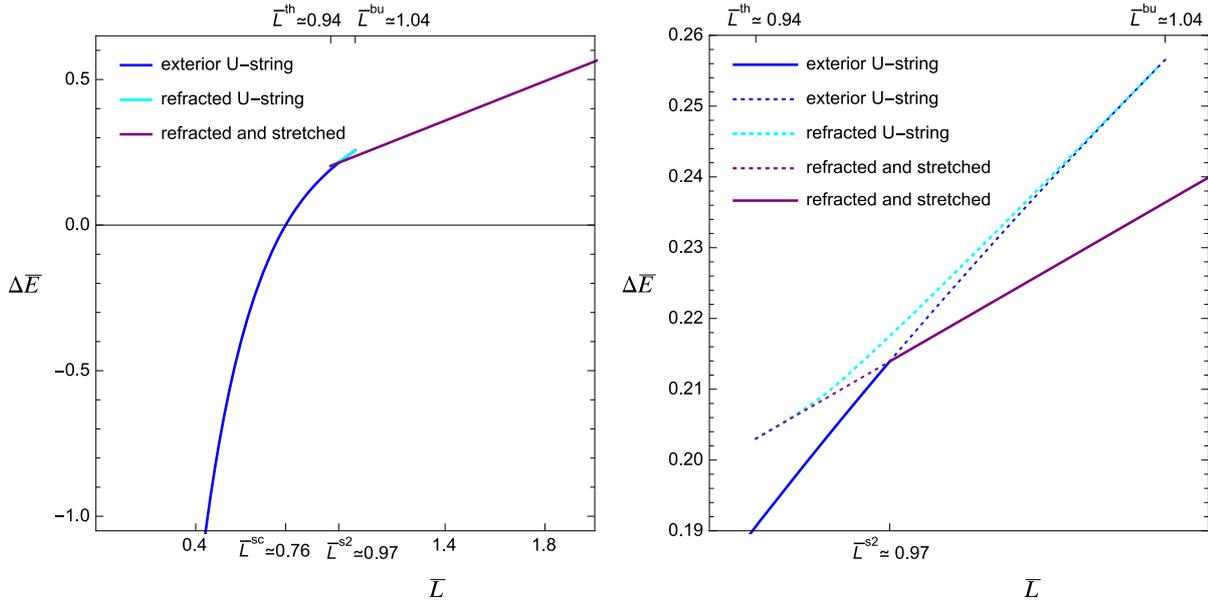


Figura 4.3: La energía \bar{E} de un par quark-antiquark como función de su separación \bar{L} . Configuraciones en la misma frontera, duales a cuerdas U-shaped, están graficadas en azul, azul claro y morado.

La constante adimensional \bar{C} de (4.47) se obtiene de normalizar la constante de integración C , de la misma manera que en (4.15). El significado de este nuevo parámetro está relacionado con la manera en que se deforma la cuerda. Los valores de esta constante obedecen $\bar{C} \in [0; 1]$. De esta manera, el caso $\bar{C} = 0$ corresponde a la cuerda recta con la que regularizamos la energía, mientras que $\bar{C} = 1$ corresponde a la configuración de curvatura máxima que presenta un punto de inflexión en el radio de garganta. Esta configuración, es equivalente bajo simetría de reflexión a la configuración U-shaped con punto de retorno igual al radio de garganta. La energía $\Delta\bar{E}$ para estas cuerdas extendidas a lo largo del agujero parametrizada por \bar{C} se escribe como

$$\Delta\bar{E} = 2N_i \int_1^{z_b} dz \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{C}^2 \bar{\varphi}_i}}{\sqrt{1 - \bar{C}^2 \bar{\varphi}_i}} + \int_{z_b}^{\infty} dz \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{C}^2 \bar{\varphi}_{ie}}}{\sqrt{1 - \bar{C}^2 \bar{\varphi}_{ie}}}. \quad (4.49)$$

Podemos analizar cómo se comporta el área de la hoja de mundo de la cuerda para separaciones pequeñas de sus extremos en distintas fronteras expandiendo estas expresiones con $\bar{C} \ll 1$, es decir

$$\Delta\bar{E} = \bar{C}^2 N_i \int_1^{z_b} dz \bar{\varphi}_i + \int_{z_b}^{\infty} dz \bar{\varphi}_{ie} + \mathcal{O}(\bar{C}^3), \quad (4.50)$$

$$\bar{L}_{LR} = \bar{C} \frac{2}{\sqrt{3} N_i} N_i \int_1^{z_b} dz \bar{\varphi}_i + \int_{z_b}^{\infty} dz \bar{\varphi}_{ie} + \mathcal{O}(\bar{C}^3). \quad (4.51)$$

Combinando estas expresiones obtenemos

$$\Delta\bar{E} \simeq \frac{1}{2} \bar{K} \bar{L}_{LR}^2, \quad (4.52)$$

con

$$\bar{K} = \frac{1}{2} N_i \int_1^{z_b} \frac{dz}{z^2 N_i^2 \bar{f}_i(z)} + \int_{z_b}^{\infty} \frac{dz}{z^2 \bar{f}_e(z)}^{-1} \simeq 0,88. \quad (4.53)$$

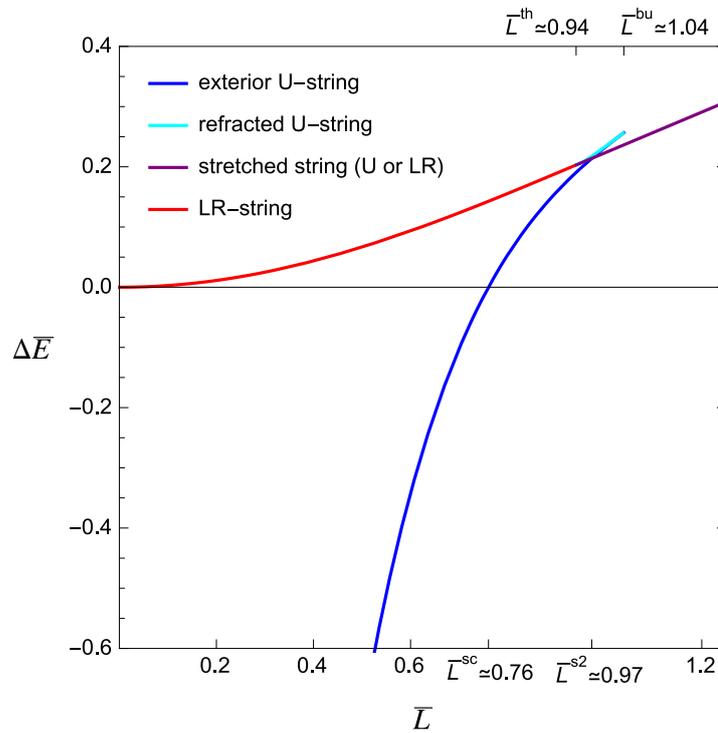


Figura 4.4: La energía \bar{E} de un par quark-antiquark como función de su separación \bar{L} . Las configuraciones duales a un par quark antiquark en la misma frontera, están graficadas en azul, celeste y púrpura. Las configuraciones LR aparecen en rojo y morado.

A partir de la Figura 6.4 podemos entender el comportamiento del potencial del par quark-antiquark de este sistema. Empezando con el par, podemos empezar aumentando su separación. Para valores pequeños de L , la configuración dominante es la de un par quark-antiquark con ambas cargas en la misma teoría de norma dual. Sin embargo, a un valor finito de L ocurre una transición de fase en la cual la configuración dominante pasa ahora a ser la de un par quark-antiquark en la misma teoría tal que las dos cargas no se comunican entre sí, pero tal que cada carga individual interactúa con otra carga en la otra teoría de norma. Esta situación está representada holográficamente por dos cuerdas rectas con extremos en distintas fronteras del agujero de gusano. Esto refleja un comportamiento típico de las transiciones confinamiento/desconfinamiento.

Capítulo 5

HEE en agujeros de gusano AdS en Gauss-Bonnet

Como se mencionó en la Sección 3.3, una entrada importante del diccionario de la correspondencia holográfica es la fórmula de Ryu-Takayanagi para la entropía de entrelazamiento. Esto nos sugiere una manera diferente de probar la geometría del agujero de gusano, es decir, tomar distintas regiones en la frontera planar del agujero de gusano. Entonces la pregunta, es ¿De qué manera se entrelaza dicha región con su región complementaria (que puede estar constituida por regiones en ambos lados del agujero de gusano)? En particular, un escenario hipotético importante es en el que existe entrelazamiento cuántico entre dos regiones en diferentes fronteras. En [66], se sugiere que esto es lo que sucede cuando consideramos la correspondencia holográfica sobre agujeros de gusano que son geodésicamente atravesables. Una característica de estos escenarios, es que la HEE regularizada de estos fondos debe ser mayor a la del fondo de AdS puro. Otro punto a favor de este argumento se sigue de los resultados de la sección anterior, donde se demostró que en algún régimen del espacio fase existe un término de interacción relacionando a las dos teorías de norma.

5.1. Funcional de HEE para un agujero de gusano planar

El agujero de gusano 5-dimensional que nos interesa estudiar es una solución particular a la teoría de Gauss-Bonnet. Como estudiamos anteriormente, cuando la teoría de gravedad no es la teoría de gravedad de Einstein, el funcional que reemplaza la fórmula de Ryu-Takayanagi se verá modificado. La manera en que esto sucede se explicó detalladamente en la Sección 3.3.3. Ahí aprendimos que el funcional de entropía de entrelazamiento holográfica debe ser

$$S_A = \frac{1}{4G} \int_{\Sigma} dx^{d-1} \sqrt{h} (1 + \alpha R) + \frac{\alpha}{2G} \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\gamma} K, \quad (5.1)$$

donde h es el determinante de la métrica inducida en Σ , R es la curvatura intrínseca de Σ , K es la traza de la curvatura extrínseca en Σ , y γ es el determinante de la métrica inducida en la frontera $\partial\Sigma$. Consideremos un elemento de línea de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.2)$$

Así, la parte planar 3-dimensional, que corresponde a la métrica de la teoría de norma en la frontera. Podemos considerar, por simplicidad, dos regiones de entrelazamiento que

por su simetría esperamos faciliten los cálculos y a su vez nos proporcionen la información fundamental del comportamiento del entrelazamiento cuántico en este sistema. Usando la fórmula (5.1) calcularemos el funcional de entropía de entrelazamiento holográfica para cada una de las regiones que consideraremos a continuación.

Banda infinita de ancho L

Consideremos primero una región rectangular que se extiende hasta infinito en dos de las direcciones planares, y que tiene un ancho finito. Así, dicha región A , puede definirse como una banda que se extiende hasta infinito en las coordenadas y y z , y ancho L a lo largo de la coordenada x , es decir:

$$A = \{(x, y, z) \mid -L/2 < x < L/2, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}. \quad (5.3)$$

Como se ha explicado anteriormente, la HEE es una cantidad infinita, debido a que es necesario integrar hasta la región $r = \infty$ en el espacio AdS, donde el volumen se vuelve infinito. Para evitar estas divergencias de la métrica en $r = \infty$, escogemos un corte UV $r = r_c$. Por simetría, la coordenada radial en Σ es independiente de las coordenadas y y z . Entonces, podemos parametrizar la superficie de entrelazamiento como una función $r(x)$. La métrica inducida puede leerse a partir del siguiente elemento de línea:

$$h_{ab} dx^a dx^b = \left(r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))} \right) dx^2 + r^2(x)(dy^2 + dz^2). \quad (5.4)$$

El elemento de línea correspondiente a la métrica inducida en la superficie de entrelazamiento puede escribirse como $ds^2 = ds_X^2 + e^{2F} ds_Y^2$, con $ds_X^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2$, y $e^{2F} = r^2$. Podemos entonces construir el escalar de curvatura R en términos de las dos partes de la métrica por separado, esto es:

$$R = R^X + e^{-2F} R^Y - 4\nabla^2 F - 6(\partial F)^2, \quad (5.5)$$

con:

$$R^X = R^Y = 0, \quad \nabla^2 F = \frac{1}{\sqrt{h_{xx}}} \partial_x (\sqrt{h_{xx}} h^{xx} \partial_x F), \quad (\partial F)^2 = h^{xx} (\partial_x F)^2. \quad (5.6)$$

Aquí los primeros dos términos de (5.5) se anulan debido a que la variedad etiquetada por X es bidimensional, y por el teorema de Gauss-Bonnet, su curvatura intrínseca es cero. Por otro lado, es claro que el escalar de curvatura de una métrica euclídea planar siempre es cero. De la forma de la métrica inducida, vemos que $F(x) = \ln r(x)$, así que obteniendo las derivadas correspondientes, y sustituyendo esto en (5.6), así como $h_{xx} = r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}$, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\nabla^2 F = \left\{ -\frac{r'^2(x)}{r^2(x) \sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} + \frac{r''(x)}{r(x) \sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} - \frac{r'(x) \left(2r(x)r'(x) - \frac{f'(r(x))r'^3(x)}{f^2(r(x))} + \frac{2r'(x)r''(x)}{f(r(x))} \right)}{2 \left(r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))} \right)^{3/2}} \right\} \frac{1}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}}, \quad (5.7)$$

y

$$(\partial F)^2 = \frac{r'^2(x)}{r^2(x) \sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}}. \quad (5.8)$$

Definiendo el vector normal unitario que apunta hacia afuera de la superficie en la frontera como $n_a = -\sqrt{h_{xx}} \delta_a^x$, donde a corre sobre las coordenadas (x, y, z) , la traza del tensor de curvatura extrínseca puede escribirse como:

$$K = h^{ab} \nabla_a n_b|_{x=x_i} = [h^{xx} \nabla_x n_x + g^{ik} \nabla_i n_k]|_{x=x_i} = -\frac{2(\partial_x F) e^{2F}}{\sqrt{h_{xx}}}|_{x=x_i}. \quad (5.9)$$

En (6.62) hemos usado la identidad $2 \frac{\partial_x(\det \sqrt{h_{ab}})}{\det \sqrt{h_{ab}}} = h^{ab} \partial_x h_{ab}$, y los índices i, k corren sobre las coordenadas (y, z) . La región en la frontera correspondiente está definida como $x = x_i$. Así, obtenemos el resultado

$$K = (h_{xx})^{-1/2} \partial_x (e^{2F})|_{x=x_i} = -\frac{2r(x)r'(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}}|_{x=x_i}. \quad (5.10)$$

Usando $h = r^4(x)(r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))})$, y sustituyendo las ecuaciones (5.7), (5.8) y (5.10) en (5.1), obtenemos:

$$S_A = \frac{L_\perp}{4G} \int_{x_i}^{x_f} dx \left(r^2(x) \sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}} + \alpha \left\{ -2 \frac{r'^2(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} - \frac{4r(x)r''(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} + \frac{2r'(x)r(x)(2r(x)r'(x) - \frac{f'(r(x))r'^3(x)}{f^2(r(x))} + \frac{2r'(x)r''(x)}{f(r(x))})}{(r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))})^{3/2}} \right\} \right) - \frac{\alpha}{G} L_\perp \frac{r(x)r'(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}}|_{x=x_i}, \quad (5.11)$$

donde L_\perp representa la longitud de la banda a lo largo de las coordenadas y y z (en principio infinita) perpendicular a la coordenada x . Integrando por partes, el resultado es:

$$S_A = \frac{L_\perp}{4G} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[\left(r^2(x) \sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}} + \alpha \left\{ -2 \frac{r'^2(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} + 4 \frac{r'^2(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} \right\} \right) \right]. \quad (5.12)$$

Finalmente, el funcional de HEE resulta ser:

$$S_A = \frac{L_\perp}{4G} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[r^2(x) \sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}} + 2\alpha \left(\frac{r'^2(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} \right) \right]. \quad (5.13)$$

Para poder trabajar con una cantidad finita, a partir de este punto consideraremos la cantidad adimensional normalizada

$$\bar{S}_A = \frac{G S_A}{L_\perp}. \quad (5.14)$$

A partir de ahora, trabajaremos también en unidades en las que $G = 1$.

Esfera de radio ρ_R

El segundo caso de interés consiste en una región finita en la frontera que corresponde a una 2-esfera de radio finito ρ_R encajada en la métrica euclídea tres dimensional, esto es:

$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = \rho_R\}. \quad (5.15)$$

Para este caso nos conviene mejor trabajar con coordenadas esféricas, de manera que la región en la frontera es

$$A = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \rho = \rho_R, 0 < \theta < 2\pi, -\pi < \phi < \pi\}, \quad (5.16)$$

y entonces la métrica del agujero de gusano planar puede escribirse como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.17)$$

La métrica inducida que obtenemos para este caso es:

$$h_{ab}dx^a dx^b = \left(r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))} \right) d\rho^2 + r^2(\rho)(\rho^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + \rho^2 d\phi^2). \quad (5.18)$$

Notemos que la forma de la métrica inducida se ve modificada de manera sustancial respecto al caso de la banda infinita, primero debido a que el factor que aparece enfrente de la métrica 2-dimensional es en este caso $r^2(\rho)\rho^2$, y además la curvatura intrínseca de esta parte bidimensional es distinta de cero. Así, obtenemos $R^Y = \frac{6}{l^2}$ con l^2 el radio de AdS. En este caso tenemos,

$$F = \ln(r(\rho)\rho), \quad \partial_\rho F = \frac{\rho r'(\rho) + r(\rho)}{r(\rho)\rho}, \quad h_{\rho\rho} = r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}, \quad (5.19)$$

de manera que el segundo término en (5.5) es diferente de cero, y tenemos

$$e^{-2F} R^Y = \frac{2}{r^2(\rho)\rho^2}. \quad (5.20)$$

Además, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 F = & \left\{ -2 \frac{(\rho r(\rho) + r'(\rho))^2}{\rho^2 r^2(\rho) \sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}}} + \frac{2r'(\rho) + \rho r''(\rho)}{\rho r(\rho) \sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}}} - \right. \\ & \left. \frac{\rho r(\rho) + r'(\rho) (2r(\rho)r'(\rho) - \frac{f'(r(\rho))r'^3(\rho)}{f^2(r(\rho))} + \frac{2r'(\rho)r''(\rho)}{f(r(\rho))})}{2\rho r(\rho) (r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))})^{3/2}} \right\} \frac{1}{\sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

y

$$(\partial F)^2 = \frac{(\rho r'(\rho) + r(\rho))^2}{\rho^2 r^2(\rho) \sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}}}. \quad (5.22)$$

Definiendo el vector normal unitario como en el caso anterior, podemos obtener la traza del tensor de curvatura extrínseca:

$$K = (h_{xx})^{-1/2} \partial_x (e^{2F}) \Big|_{x=x_i} = - \frac{2 \rho r(\rho) (r(\rho) + \rho r'(\rho))}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} \Big|_{x=x_i}. \quad (5.23)$$

Sustituyendo esta última expresión, así como (5.20), (5.21), (5.22) en la integral (5.1) e integrando por partes de manera similar al caso de la banda infinita, obtenemos la siguiente expresión:

$$S_A = \frac{1}{4G} \int d\rho d\theta d\phi \sin(\phi) \left((r^2(\rho)\rho^2 + 2\alpha) \sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}} + 2\alpha \frac{(\rho r'(\rho) + r(\rho))^2}{\sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}}} \right), \quad (5.24)$$

que se puede reescribir como:

$$S_A = \frac{\pi}{G} \int_0^{\rho_R} d\rho \left[(r^2(\rho)\rho^2 + 2\alpha) \sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}} + 2\alpha \frac{(\rho r'(\rho) + r(\rho))^2}{\sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}}} \right]. \quad (5.25)$$

Como prueba de consistencia, podemos comparar este resultado con el funcional de entropía de entrelazamiento holográfica correspondiente a una superficie de curvatura positiva encajada en una variedad 3-dimensional que tiene curvatura positiva, para una superficie de entrelazamiento parametrizada en términos del ángulo de apertura en la frontera, $r(\theta)$. En aquel caso [112], la HEE toma la forma

$$S_A = \frac{\pi}{G} \int_0^{\theta_0} d\theta \left((r^2(\theta) \sin^2(\theta) + 2\alpha) \sqrt{r^2(\theta) + \frac{r'^2(\theta)}{f(r(\theta))}} + 2\alpha \frac{(\sin(\theta)r'(\theta) + \cos(\theta)r(\theta))^2}{\sqrt{r^2(\theta) + \frac{r'^2(\theta)}{f(r(\theta))}}} \right). \quad (5.26)$$

Podemos notar que este funcional, se reduce al caso que acabamos de calcular si realizamos la sustitución $\theta \rho$ y consideramos el caso $\rho \ll 1$ de manera que tenemos $\sin(\rho) \rightarrow \rho$ y $\cos(\rho) \rightarrow 1$. Esto es consistente con el hecho de que considerar ángulos pequeños en un espacio de curvatura positiva es equivalente a considerar una apertura finita y reducir el radio de curvatura, lo que nos lleva al caso del agujero de gusano planar.

5.2. Superficies de entrelazamiento para la banda infinita

En este caso, estamos estudiando como se entrelazan entre sí distintas regiones extendidas, a diferencia de [68], donde se estudió la interacción entre cargas de color puntuales. Sin embargo, al igual que en el caso de del par quark-antiquark teníamos dos configuraciones posibles para las cuerdas duales, en este caso tendremos dos posibles configuraciones para las superficies de entrelazamiento. En el primer caso, aparecerán superficies cuya frontera corresponde a dos líneas rectas paralelas a lo largo de la dirección y y z . En este caso tendremos entrelazamiento entre una banda infinita A y su región complementaria en una misma teoría de campo. En el otro caso, tendremos configuraciones de superficies de entrelazamiento de tipo LR, que corresponde a "láminas" extendidas desde una de las teorías de norma a la otra, cruzando a través de la garganta. Esta situación corresponde a entrelazamiento entre una región en una de las teorías de campo y una región en la otra teoría de campo. Nuestra tarea es encontrar las superficies que minimizan el funcional de HEE (5.1), y que a su vez satisfacen las condiciones de frontera correspondientes en las superficies de juntura $r_L = r_R = b$ y en $r_L = r_R = a$.

5.2.1. Superficies U-shaped en la métrica exterior

Como primer escenario, consideremos superficies de entrelazamiento que tienen como frontera a dos planos paralelos en una de las teorías de campo. Llamemos r_0 al radio mínimo que alcanza la superficie, es decir, el punto de retorno, que satisface $r_0 = r(0)$. Este número, caracteriza a las superficies de entrelazamiento U-shaped, y sirve como parámetro para obtener una relación entre la entropía de entrelazamiento y el ancho de la banda infinita.

Consideremos el funcional (6.66) y realicemos la sustitución $f \rightarrow f_e$ con f_e dada por la ecuación (6.2). Efectuando la variación de este funcional, $\delta S_A = 0$, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden en $r(x)$, que resulta altamente complicada y es necesario resolverla numéricamente. Las condiciones de frontera para el caso de las configuraciones U-shaped con punto de retorno en la métrica exterior se escriben de la siguiente manera:

$$r(0) = r_0, \quad r'(0) = 0. \quad (5.27)$$

Resolviendo numéricamente esta ecuación diferencial, obtenemos la solución $r_e(x)$. Para esto, fijamos primero un corte UV $r = R_{max}$, e integramos hasta que $r(\theta)$ alcanza este valor. En este punto, registramos el valor de la coordenada x , y obtenemos el valor de la separación entre los extremos de la banda para un radio de garganta arbitrario, $L(a, r_0)$.

La entropía de entrelazamiento holográfica se obtiene calculando la integral

$$\bar{S}_A = \frac{1}{2} \int_0^{L/2} dx \left[\left(r_e^2(x) \sqrt{r_e^2(x) + \frac{r_e'^2(x)}{f(r_e(x))}} \right) + 2\alpha \left(\frac{r_e'^2(x)}{\sqrt{r_e^2(x) + \frac{r_e'^2(x)}{f(r_e(x))}}} \right) \right]. \quad (5.28)$$

Podemos regularizar esta configuración escogiendo la configuración análoga a la que utilizamos para regularizar la energía de un par quark-antiquark; esto corresponde a una superficie de entrelazamiento que se extiende de un lado de la geometría hasta la otra teoría de campo. La entropía de entrelazamiento correspondiente a esta configuración se denota como \bar{S}_A^{ss} . De esta manera, la entropía regularizada se escribe como:

$$\bar{S}_{reg} = \bar{S}_A - \bar{S}_A^{ss}. \quad (5.29)$$

Además de esta regularización, también podemos considerar el comportamiento de la HEE con respecto al caso de AdS vacío [50], para lo cual podemos realizar el procedimiento de sustracción de fondo. Denotando como \bar{S}_{AdS} a la entropía de entrelazamiento de AdS vacío, la entropía regularizada con sustracción de fondo es:

$$\Delta \bar{S} = \bar{S}_{reg} - \bar{S}_{AdS}. \quad (5.30)$$

5.2.2. Superficies con punto de retorno en la métrica interior

En este caso, la integral que calcula la HEE sufre una discontinuidad en la superficie de unión entre las dos geometrías. La superficie de entrelazamiento, consiste entonces en una parte con $r_L(r_R) \geq b$ y otra con $r_L(r_R) \leq b$. Parametrizando esta superficie con una función de la dirección x únicamente, llamamos a la primera parte $r_{ext}(\theta)$ y a la segunda $r_{in}(\theta)$. Entonces el área de la superficie mínima se puede escribir como la suma del área de la superficie r_{ext} que minimiza el funcional de la métrica en $\mathcal{M}_{L,R}^e$ y la de la superficie r_{in} que minimiza el funcional de la métrica en $\mathcal{M}_{L,R}^i$:

$$\begin{aligned} \bar{S}_A = \frac{1}{2} & \left[\int_0^{x_b} dx \left[r_{in}^2(x) \sqrt{r_{in}^2(x) + \frac{r_{in}'^2(x)}{f(r_{in}(x))}} + 2\alpha \left(\frac{r_{in}'^2(x)}{\sqrt{r_{in}^2(x) + \frac{r_{in}'^2(x)}{f(r_{in}(x))}}} \right) \right] \right. \\ & \left. + \int_{x_b}^{L/2} dx \left(r_{ext}^2(x) \sqrt{r_{ext}^2(x) + \frac{r_{ext}'^2(x)}{f(r_{ext}(x))}} + 2\alpha \left(\frac{r_{ext}'^2(x)}{\sqrt{r_{ext}^2(x) + \frac{r_{ext}'^2(x)}{f(r_{ext}(x))}}} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde x_b representa el valor de x en el que la coordenada r es igual al radio del cascarón entre las métricas interior y exterior, y se define por:

$$r_{ext}(x_b) = r_{in}(x_b) = b. \quad (5.32)$$

Las condiciones de frontera sobre la primera derivada cuando $r = b$, son no triviales, y a continuación explicaremos brevemente la manera de obtenerlas.

Condiciones de frontera sobre los cascarones

Las superficies de entrelazamiento que atraviesan los cascarones del agujero de gusano tienen que satisfacer ciertas condiciones de frontera en $r = b$, debido a las condiciones de junta. Para obtener dichas condiciones tomamos la variación de S_A respecto a X^μ . Las condiciones de minimización del funcional se obtienen a partir de las ecuaciones de movimiento de la superficie Σ , es decir, $\frac{\delta S_A}{\delta X^\mu} = 0$. Estas condiciones se escriben como

$$K + 2\alpha(RK - 2R_{ij}K^{ij}) = 0, \quad (5.33)$$

donde K es la traza del tensor de curvatura extrínseca K^{ij} y R_{ij} es el escalar de curvatura inducido en la superficie. Denotamos a \mathcal{H} como la hipersuperficie de radio b que separa a la región exterior de la región interior. Esta superficie se intersecta con Σ en la frontera $\partial\sigma$. Podemos definir los vectores normales a los cascarones que son transversales a la superficie de entrelazamiento como η^μ . De la misma manera, definimos los vectores normales unitarios \tilde{n}^μ , que son tangenciales a Σ . Considerando variaciones arbitrarias $\delta X^\mu|_{\mathcal{H}}$, podemos obtener las condiciones de frontera sobre los cascarones. Estas condiciones se traducen en la igualdad de los momentos conjugados en ambos lados del cascarón, es decir

$$\bar{\Pi}^+ = -\bar{\Pi}^-, \quad (5.34)$$

donde

$$\bar{\Pi}^\pm = \left(-I_n^{ab} \mathcal{K}_{ab}^\eta - \tilde{n}^i \tilde{n}^j G_{ij} \tilde{n}^\mu \eta_\mu \right)^\pm. \quad (5.35)$$

En (5.35), hemos definido $I^{ab} = \mathcal{K}^{ab} - \gamma^{ab} \mathcal{K}$, mientras que G_{ij} es el tensor de Einstein inducido. El superíndice \pm indica la región en la que se calcula $\bar{\Pi}$. Una vez que escogemos la parametrización $r(x)$, obtenemos un funcional que depende de esta función y de su primera derivada, es decir, $\bar{\Pi}\{r(x), r'(x), x\}$. Podemos despejar a la primera derivada del lado derecho de la ecuación (5.34), de manera que obtenemos $r_{ext}(x) = \mathcal{G}\{r_{int}(x), r'_{int}(x), x\}$. Evaluando en $x = x_b$ obtenemos las condiciones de frontera que necesitamos. De esta manera, r_{ext} es la solución a la ecuación diferencial que se obtiene de la variación $\delta S_A = 0$, con, $f \rightarrow f_e$, y con las condiciones de frontera

$$r_{ext}(0) = 0, \quad r'_{ext}(x_b) = \mathcal{G}\{r_{int}(x_b), r'_{int}(x_b), x_b\}. \quad (5.36)$$

El valor de x_b se obtiene resolviendo numéricamente esta ecuación diferencial y registrando el valor de x en el que $r = b$. Para obtener la solución interior, entonces sustituimos este valor en la ecuación diferencial que se obtiene de $(\delta S_A, f \rightarrow f_i)$ con las siguientes condiciones de frontera:

$$r_{in}(x_b) = 0, \quad r'_{in}(0) = 0. \quad (5.37)$$

Registrando el valor al cual se alcanza el valor de corte en la solución de esta ecuación diferencial, obtenemos la separación entre las dos fronteras de la banda, $L(a, r_0)$. Una vez obtenida la superficie de entrelazamiento, podemos calcular HEE mediante la integral que escribimos anteriormente, y después regularizamos con la entropía de entrelazamiento de una superficie planar entre los dos lados del agujero. Para esta configuración, tendremos superficies que presentan una refracción al atravesar el radio del cascarón entre las métricas interior y exterior.

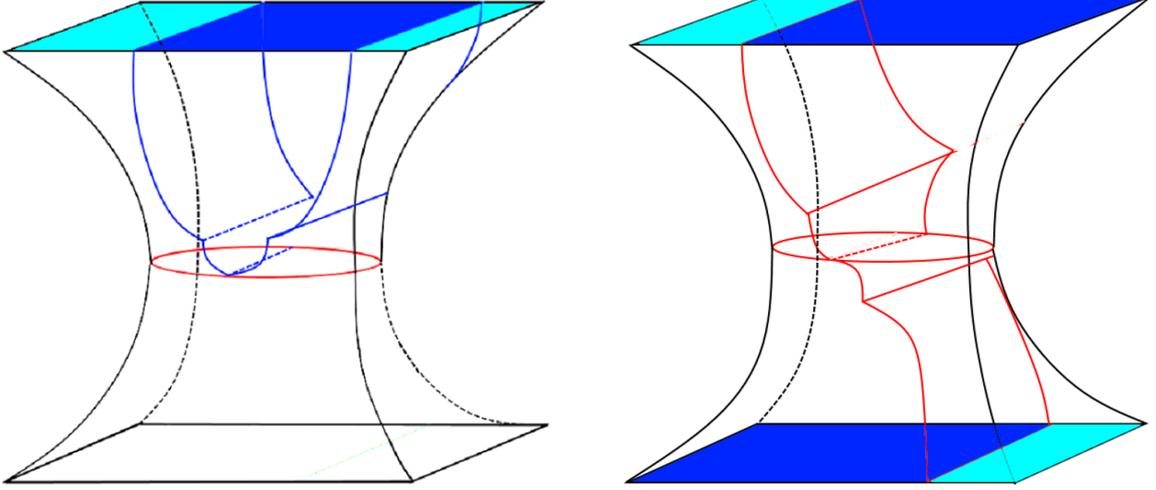


Figura 5.1: Representación pictórica de las superficies de entrelazamiento para la banda infinita de ancho L para configuraciones U-shaped (izquierda) y LR (derecha). Las regiones en azul están entrelazadas con las regiones azul claro.

5.2.3. Superficies que se estiran a través del radio de garganta

A pesar de que en la geometría que estamos estudiando, el valor de la coordenada radial no puede ser menor que el radio de garganta a por construcción, sí podemos considerar soluciones para la superficie de entrelazamiento en las que el punto de retorno es $r = a$ y la longitud de separación de la banda aumenta de manera lineal con respecto a un cierto parámetro. En este caso, la nueva superficie consta de un segmento curvo similar a los de la superficie con punto de retorno en $r \neq a$, y otro segmento paralelo a las direcciones espaciales transversales a la garganta del agujero de gusano. En este caso, para calcular la HEE, debemos integrar el funcional de entropía de entrelazamiento sobre cada uno de estos segmentos. Este hecho es totalmente análogo a lo que sucede con el perfil de la cuerda correspondiente a un par quark-antiquark. El resultado se puede escribir como:

$$S_A = \left(\int_{x_b}^L dx \mathcal{F}[r_{ext}(x), r'_{ext}(x), x] + \int_l^{x_b} dx \mathcal{F}[r_{in}(x), r'_{in}(x), x] + \int_0^l dx \mathcal{F}[a, 0, x] \right), \quad (5.38)$$

donde la cantidad l es una cantidad arbitraria y representa la longitud del segmento paralelo a la garganta. Aquí, abreviamos la Lagrangiana del funcional (6.66) mediante \mathcal{F} . Entonces, el comportamiento de la entropía de entrelazamiento, mientras hacemos más grande la separación de la banda se debe comportar de manera lineal, como esperaríamos para una fase desconfiada en la CFT [66].

Si consideramos ahora la misma configuración en la otra teoría de campo, las dos superficies de entrelazamiento podrían interpretarse en cierta situación como una sola superficie que cruza el agujero de gusano y que podría entrelazar a regiones en distintas teorías de campo.

5.2.4. Superficies LR

Consideremos ahora superficies de entrelazamiento que atraviesan de un lado a otro del agujero de gusano. En este caso tendremos dos tipos de configuraciones, aquellas que pasan por el origen en el radio de garganta y aquellas que se estiran a lo largo de este. En el primer de los casos, la condición de frontera sobre la coordenada r está fija, y las

superficies solución están parametrizadas por una constante de integración, que puede entenderse como el valor de la derivada $r'(x)$ en el origen de la coordenada x . Esta constante representa, al igual que en el caso de la cuerda que representa un par quark-antiquark, cada uno en distintas fronteras, la curvatura de la superficie de entrelazamiento. Para superficies que pasan por el origen en el radio de garganta, la HEE está dada como

$$\begin{aligned} \bar{S}_A = \frac{1}{2} \left[\int_0^{x_b} dx \left[r_{in}^2(x) \sqrt{r_{in}^2(x) + \frac{r_{in}'^2(x)}{f(r_{in}(x))}} + 2\alpha \left(\frac{r_{in}'^2(x)}{\sqrt{r_{in}^2(x) + \frac{r_{in}'^2(x)}{f(r_{in}(x))}}} \right) \right] \right. \\ \left. + \int_{x_b}^{L/2} dx \left(r_{ext}^2(x) \sqrt{r_{ext}^2(x) + \frac{r_{ext}'^2(x)}{f(r_{ext}(x))}} + 2\alpha \left(\frac{r_{ext}'^2(x)}{\sqrt{r_{ext}^2(x) + \frac{r_{ext}'^2(x)}{f(r_{ext}(x))}}} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde ahora tenemos dos soluciones que corresponden a cada lado de la geometría. En el primer de los casos, resolvemos la ecuación diferencial correspondiente a extremizar la acción de la entropía de entrelazamiento holográfica para la función métrica interior con las condiciones de frontera

$$r(0) = a, \quad r'(0) = \frac{1-c}{c}. \quad (5.40)$$

La manera en la que hemos escogido la constante en la derivada, es consistente con configuraciones que forman un plano entre las dos fronteras del agujero de gusano para $c = 0$ y la superficie LR que es equivalente bajo simetría de reflexión a la configuración U-shaped para $c = 1$.

Calculando el valor de x en el que los valores de r son iguales al radio del cascarón entre la métrica exterior e interior, podemos obtener la solución para la parte exterior de esta solución. Entonces debemos resolver las ecuaciones diferenciales que resultan de extremizar el funcional con la función métrica exterior, y con las condiciones de frontera

$$r(x_b) = b, \quad r'(x_b) = \mathcal{G}\{r(x_b), r'_{int}(x_b), x_b\}, \quad (5.41)$$

donde \mathcal{G} es el mismo funcional que se obtiene imponiendo condiciones de frontera sobre el cascarón. Análogamente al caso U-shaped, existen configuraciones que se estiran a lo largo del radio de garganta.

Al intergrar las soluciones obtenidas dentro del funcional de entropía de entrelazamiento holográfica, podemos obtener gráficas de la HEE como función de separación L . A pesar de que este cálculo aún se encuentra en desarrollo, podemos esperar que el comportamiento de la HEE refleje una transición confinamiento/desconfinamiento, similar a lo que sucede con el potencial del par quark-antiquark.

5.3. Superficies de entrelazamiento para una esfera.

Para el caso en el que la región de entrelazamiento en la frontera tiene la geometría de una esfera, podemos minimizar y evaluar análogamente el funcional (5.26). La simetría de las regiones de entrelazamiento nos permite visualizar la geometría de las superficies de entrelazamiento. Si hacemos un corte transversal del espacio AdS en las direcciones espaciales $x_2 y x_3$, obtendremos una gráfica en dos dimensiones que se asemeja al perfil de las superficies de entrelazamiento para el caso de la banda finita. Se espera que las superficies presenten el mismo efecto de refracción debido a las superficies que atraviesan los cascarones. Por lo tanto, esperamos que el diagrama de fase de la HEE graficada contra el radio del disco en la frontera refleje una transición de fase que conecte las dos fronteras

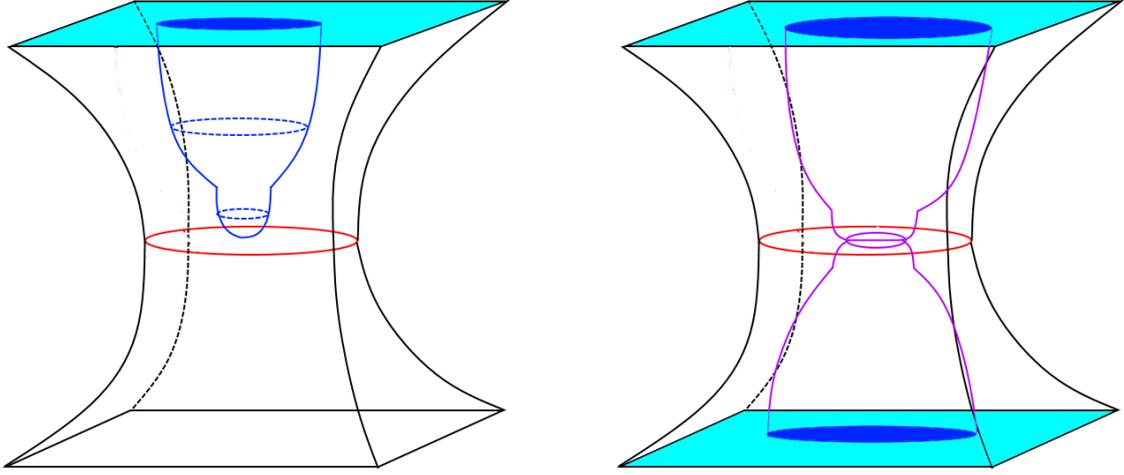


Figura 5.2: Representación pictórica de las superficies de entrelazamiento para la esfera en la frontera de radio ρ_R para configuraciones U-shaped (izquierda) y LR (derecha). Las regiones en azul están entrelazadas con las regiones azul claro.

mediante una superficie de entrelazamiento a un radio finito. La superficie que elegimos para regularizar S_A , en este caso corresponde a un cilindro que tiene como fronteras a dos discos del mismo radio. El entrelazamiento entre estas dos regiones puede deberse tanto al término relevante de interacción entre las dos teorías de norma que ya hemos estudiado en el caso del potencial par quark-antiquark, como a entrelazamiento puro entre estados de ambas teorías. Se ha propuesto [66], que se puede determinar si existe entrelazamiento puro entre las teorías duales a las fronteras de un agujero de gusano, si calculamos la entropía de entrelazamiento regularizada con la HEE correspondiente al fondo de AdS puro, es decir, si se cumple

$$\Delta S = S_A - S_{AdS} < 0 \quad (5.42)$$

, existe entrelazamiento cuántico entre ambas teorías. Este cálculo se encuentra actualmente en desarrollo. Esperamos que los resultados muestren un comportamiento cualitativamente similar al caso de la banda infinita. En la Figura 5.2 se muestra pictóricamente esta situación para los dos tipos de configuración análogas al caso anterior. Podemos esperar entonces que a partir de un cierto radio finito la configuración de entrelazamiento dominante es aquella en la que un cilindro atraviesa el agujero de gusano conectando ambas teorías de campo. Una vez finalizados los cálculos que se han mencionado, se espera que este trabajo esté terminado y publicado para la segunda mitad del 2022.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis estudiamos el dual holográfico a una solución de gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet que representa a un agujero de gusano atravesable. Esta geometría fue propuesta en [59]. En este trabajo, se explora por primera vez esta solución desde la perspectiva de la correspondencia AdS/CFT. Nuestro interés principal ha sido caracterizar la teoría de norma dual a este agujero de gusano. Se había conjeturado anteriormente, en escenarios de agujero de gusano no atravesable (por ejemplo en [66, 69]), que el dual holográfico a estos escenarios, corresponde a dos CFT's idénticas que se encuentran espacialmente separadas. Uno de los objetivos principales de este trabajo fue probar la geometría de [59] utilizando cuerdas fundamentales para, en particular, estudiar el comportamiento del potencial par quark-antiquark en las CFT's duales.

Para esto, estudiamos las bases teóricas de la correspondencia AdS/CFT. Para entender las ideas principales de esta correspondencia, comenzamos repasando ciertos conocimientos básicos de teoría cuántica de campos, teoría de la relatividad y teoría de cuerdas. Encontramos, que gracias a ciertos resultados de dichos formalismos, podemos construir un diccionario que nos traduce de la teoría de norma SYM $\mathcal{N} = 4$ en (3+1) dimensiones a una teoría de gravedad que es asintóticamente AdS en 5 dimensiones.

En particular, una de las entradas de este diccionario que nos interesa, involucra cargas infinitamente pesadas en la teoría de norma. Se dedujo que un quark infinitamente pesado en SYM $\mathcal{N} = 4$ es dual al extremo de una cuerda fundamental que se extiende en el bulto de la teoría de gravedad. El perfil de la cuerda que se extiende representa al campo gluónico. Si tenemos un par quark-antiquark, la correspondencia holográfica nos dice que el campo gluónico que hace interactuar al quark con el antiquark es dual a una cuerda que tiene ambos extremos en la frontera de AdS. Más aún, una de las maneras de calcular el potencial quark-antiquark, es minimizando la acción de Nambu-Goto de la cuerda en el lado de gravedad. Usando esta receta, podemos probar distintas geometrías, cuyo dual holográfico corresponde a nuestra teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ en un estado diferente al vacío. Como un ejemplo se calculó el potencial quark-antiquark en una teoría de norma a temperatura finita, cuya geometría dual es un agujero negro de Schwarzschild en AdS.

También se han estudiado en este contexto, soluciones de agujero de gusano en AdS. Un antecedente de este trabajo se encuentra en [62, 63], donde se calculó el potencial par quark-antiquark en una teoría dual a la geometría de agujero de gusano descrita en [69], como función de la separación del par. En este trabajo encontró un comportamiento similar a una transición de fase para un cierto valor de la separación, en el cual la configuración dominante pasa de ser la de una cuerda con ambos extremos en la misma teoría, a un par de cuerdas rectas que se extienden entre las dos fronteras del agujero de gusano.

Un primer objetivo de este trabajo fue probar la geometría de agujero de gusano 5-dimensional de [59] mediante el cálculo del potencial quark-antiquark en la teoría dual.

El agujero de gusano de [59], se construye mediante cuatro copias de una solución de agujero negro en gravedad de Gauss-Bonnet. Estas cuatro copias, se unen entre sí por medio de tres hipersuperficies, sobre las cuales imponemos condiciones de borde. Estos agujeros de gusano pueden tener curvatura positiva, negativa, o nula. Si la constante cosmológica es negativa, tenemos una solución asintóticamente AdS. Si además su valor es tal que nos encontramos en el punto de Chern-Simons $L^2 = \frac{-3}{\Lambda}$, la teoría se simplifica considerablemente. Elegimos trabajar con agujeros de gusano con curvatura cero, ya que esto nos permite usar la correspondencia holográfica para encontrar una CFT dual en espacio-tiempo plano. Las condiciones de juntura exigen que las observables como la masa y la carga eléctrica estén determinadas por el radio de garganta a .

Los agujeros de gusano tienen dos fronteras asintóticamente AdS. La interpretación del dual holográfico a esta configuración es que tenemos dos copias distintas de la misma teoría de norma. Podemos notar que existen dos configuraciones posibles. Si tenemos un par quark-antiquark en una de las teorías de norma, el campo gluónico es dual a una cuerda en forma de U, que se extiende dentro del bulto sin llegar al radio de garganta, y que regresa a la misma frontera después de alcanzar el punto de retorno. Por otro lado, podemos colocar dos pares quark-antiquark, uno en cada teoría de norma. El par se acopla al antiquark mediante el campo gluónico dual al perfil de la cuerda. Como tenemos dos fronteras, podemos colocar un extremo de una cuerda fundamental en una frontera, y el otro extremo en la otra (cuerdas LR). Por lo tanto, podemos acoplar a un quark con un antiquark, cada uno en una teoría de norma distinta. Si seguimos separando al par quark-antiquark, aparecen cuerdas con una sección horizontal que se extiende en las direcciones planas a un valor constante de la coordenada radial (en específico, el radio de garganta).

Además, dos de las hipersuperficies que usamos para construir el agujero de gusano pueden considerarse como cascarones de radio b , que dividen al espacio en dos regiones exteriores y dos regiones interiores. La presencia de estos cascarones delgados produce una refracción de las configuraciones de cuerdas, lo que, como podemos concluir en este trabajo, conlleva a la presencia de cúspides en el diagrama de espacio de fase. Por lo tanto, podemos considerar cuerdas en forma de U que no atraviesan estos cascarones, y cuyo perfil está totalmente contenido en una región exterior. Este caso se diferencia de la cuerda refractada; si el punto de retorno se encuentra a un valor de la coordenada radial que es menor al radio b del cascarón, el perfil de la cuerda presenta una cúspide, que puede interpretarse como un efecto de refracción debido a la presencia del cascarón. En el caso de cuerdas LR, también observamos esta refracción en el perfil de la cuerda. Dichos resultados se encuentran resumidos en la Figura 4.4.

Para calcular la energía, debemos considerar por separado estos casos. Como la energía de dichas configuraciones se vuelve infinita al acercarnos a la frontera de AdS, podemos regularizar sustrayendo la energía de una configuración que corresponde a dos cuerdas rectas que atraviesan el agujero de gusano. Los resultados indican que esta configuración es la que tiene energía mínima en el diagrama de espacio fase. En el caso en el que tenemos una cuerda en forma de U que tiene el punto de retorno localizado en la región exterior, la energía del par quark-antiquark dual se calcula mediante (4.35), donde z_u es el punto de retorno en las coordenadas z , y z_b es el radio b de los cascarones.

Si ahora el punto de retorno se encuentra en la región interior, la energía se separa en dos términos correspondientes a la fracción de la energía asociada a las regiones exterior e interior, y está dada por la ecuación (4.39). Si seguimos aumentando la separación del par quark-antiquark aún cuando el punto de retorno ya ha alcanzado al radio de garganta, obtenemos que la energía crece linealmente a su separación. La energía de dichas configuraciones está dada por la ecuación (4.44).

En el caso de cuerdas LR, no tenemos punto de retorno, pero podemos usar la cons-

tante de integración \bar{C} como un parámetro que está entre cero y uno. Cuando vale cero, la configuración de superficies de entrelazamiento coincide con la configuración de un par de planos que atraviesan el espacio entre las dos fronteras. La energía en este caso está dada por (4.49). La energía resulta ser proporcional al cuadrado de la separación, es decir,

$$\Delta\bar{E} = \frac{1}{2}K\bar{L}^2. \quad (6.1)$$

Por lo tanto, presenta un comportamiento similar al de un potencial elástico, que actúa como un resorte que une al quark y al antiquark. Encontramos que la constante del resorte está dada por la ecuación (4.53).

Los resultados para el espacio completo de soluciones se resumen en el diagrama de fase la Figura 4.4. Ahí se muestra la gráfica de $\Delta\bar{E}$ en función de la separación de los extremos de la cuerda \bar{L} : las configuraciones en forma de U en la región exterior y la configuración de cuerda refractada son representados en azul y celeste, respectivamente. Las configuraciones de cuerdas LR que atraviesan la garganta están en rojo, y las configuraciones de cuerdas que se estiran a lo largo de la garganta están en púrpura. Observamos que existe una longitud crítica \bar{L}_c para estas configuraciones donde tiene lugar una transición de fase. Para separaciones $\bar{L} < \bar{L}_c$, las configuraciones de pares quark-antiquark que se encuentran en la misma teoría de norma son energéticamente favorables, produciendo configuraciones de cuerdas en forma de U. Si un segundo par está presente en la teoría de norma dual a la otra frontera del agujero, las cargas en la misma teoría de norma pueden ser apantalladas mediante la transición de fase a configuraciones LR que conectan diferentes fronteras. En otras palabras, se lograron reproducir las mismas características cualitativas observadas en [62, 63]. Sin embargo, a diferencia de este último escenario, en el caso de los agujeros de gusano de [59], encontramos varias configuraciones subdominantes que producen una cúspide en el diagrama de fase y que corresponden a cuerdas refractadas a través de los cascarones de radio b , para el caso en el que la teoría de norma se formula en $\mathbb{R}(1, 3)$. Este es un comportamiento típico de las transiciones de fase en termodinámica. Podemos concluir que en la teoría de norma, existe una transición al nivel de la acción. A un valor \bar{L}_c , se enciende un término relevante en las dos copias de la CFT que acopla a ambas teorías.

Antes de mostrar los avances de nuestro segundo objetivo, comparemos nuestros resultados con los obtenidos en [62] donde se consideraron cuerdas fundamentales en un fondo de agujero de gusano que conecta dos regiones asintóticamente AdS_5 . Dichas geometrías se obtuvieron en [69] y también son soluciones de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet en 5 dimensiones; la métrica está dada por

$$ds^2 = l^2 \left(-\cosh^2(\rho - \rho_0) dt^2 + d\rho^2 + \cosh^2(\rho) d\Sigma_3^2 \right), \quad (6.2)$$

donde $d\Sigma_3^2$ ahora corresponde a la métrica de un espacio tridimensional de curvatura constante negativa, localmente equivalente a $\Sigma_3 = S^1 \times \mathbb{H}_2$, con $\rho \in \mathbb{R}$, y donde ρ_0 es una constante arbitraria que parametriza la asimetría del agujero de gusano: la configuración es \mathbb{Z}_2 -simétrica para $\rho_0 = 0$. Siguiendo el mismo procedimiento descrito para las cuerdas en el agujero de gusano de [59], podemos calcular $\Delta\bar{E}$ en estos fondos en función de \bar{L} . Los resultados correspondientes se muestran en la Figura 6.1. Por conveniencia, hemos elegido $\rho_0 = 0$ en (6.2).

Se ha observado un comportamiento cualitativamente similar para las configuraciones de cuerdas estudiadas en otras geometrías de agujeros de gusano asintóticamente AdS. Por ejemplo, en [66], la entropía de entrelazamiento holográfica fue calculada en un espacio-tiempo descrito por la métrica

$$ds^2 = l^2 \left[(1 + \rho^2)(-dt^2 + d\bar{x} \cdot d\bar{x}) + d \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} \right]. \quad (6.3)$$

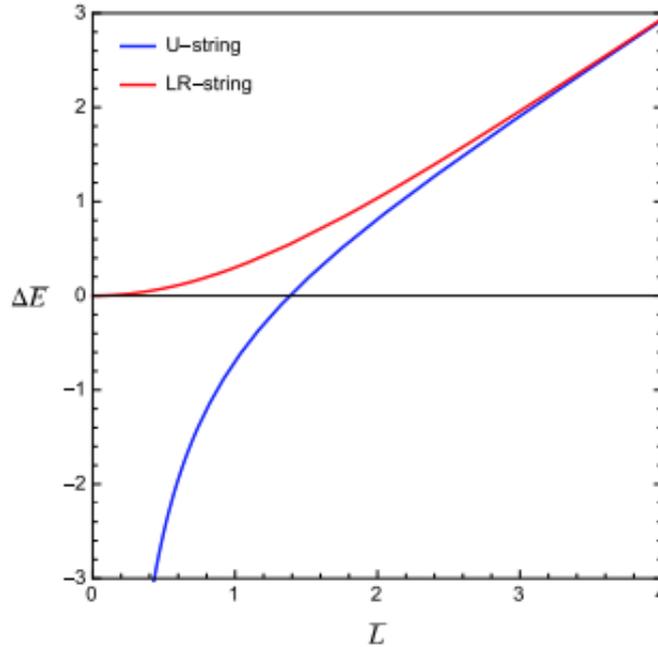


Figura 6.1: Diagrama de fase para la energía como función de la separación para un par quark-antiquark en una teoría de norma dual a la geometría propuesta en [69]. Se observa un comportamiento similar a una transición de fase en el que la configuración energéticamente favorable resulta ser la de dos cuerdas rectas conectando las dos fronteras.

No es difícil ver que, en el caso particular cuando la región entrelazada en el frontera es una franja infinita (equivalente al lazo de Wilson rectangular que hemos considerado en el cálculo del potencial par quark-antiquark), el comportamiento de la entropía de entrelazamiento holográfica es similar a la representada en la Figura 6.1: Para \bar{L} cercana a cero, el comportamiento es el mismo que para el espacio AdS puro, mientras que para \bar{L} grande, la HEE aumenta linealmente. Nuestras soluciones de agujeros de gusano exhiben una tendencia similar, con la diferencia de que aparece una cúspide en el espacio fase debido a los efectos de refracción producidos cuando las cuerdas pasan a través de los cascarones de radio b . Vale la pena mencionar que, como en [66], la geometría del agujero de gusano (6.3) fue también considerada como un escenario interesante para estudiar la entropía de entrelazamiento holográfica. Se pueden realizar cálculos similares en agujeros de gusano con términos de orden superior en la curvatura, como el que se construyó en [59].

Por tanto, el segundo objetivo de este trabajo fue calcular la entropía de entrelazamiento holográfica en dicha geometría de agujero de gusano. Como vimos en la Sección 2.6, la HEE es otra cantidad que se puede calcular utilizando el diccionario de la correspondencia AdS/CFT. En la teoría de gravedad de Einstein, la fórmula de Ryu-Takayanagi nos dice que la HEE equivale al área de la superficie de codimensión 2 con área mínima. Como la teoría de gravedad en este caso es Gauss-Bonnet, la fórmula de Ryu-Takayanagi no resulta válida para calcular la HEE. Sin embargo, estudiamos en la Sección 2.6.3 la generalización de dicha prescripción para teorías con términos de orden superior en la curvatura. En el fondo de agujero de gusano planar en AdS_5 , podemos considerar dos tipos de regiones. La primera de estas es una banda infinita que tiene un ancho finito L_{\perp} . Podemos parametrizar las superficies de entrelazamiento con una función $r(x)$. Encontramos que el

funcional de HEE se escribe como:

$$S_A = \frac{L_\perp}{4G} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[r^2(x) \sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}} + 2\alpha \left(\frac{r'^2(x)}{\sqrt{r^2(x) + \frac{r'^2(x)}{f(r(x))}}} \right) \right], \quad (6.4)$$

donde $f(x)$ representa a la función métrica $f_e(x)$ si el punto de retorno está en la región exterior, y a $f_i(x)$ en el otro caso. Las superficies de entrelazamiento tienen como frontera la frontera de la banda. Podemos tener ahora dos casos. El primero ocurre cuando ambas fronteras se encuentran en la misma teoría de norma. En el segundo caso, una de las fronteras puede hallarse en una de las fronteras del agujero de gusano, y la otra frontera de la superficie, en la otra frontera del agujero de gusano. Elegimos regularizar la HEE mediante la sustracción de la HEE de una configuración de superficies que corresponde a dos planos que se extienden entre las dos fronteras planas. Las condiciones de Israel en los cascarones de radio b imponen condiciones de frontera no triviales sobre la superficie de entrelazamiento. En particular, la derivada radial de la superficie de entrelazamiento en el radio de cascarón b en una región externa, está determinada por el valor de la derivada en la región interior correspondiente. Por esta razón, la derivada es discontinua en ese punto y esperamos un efecto de refracción similar al encontrado en [68].

El segundo tipo de región de codimensión 2 en la frontera de AdS que se pretende estudiar es una región cuya frontera en el plano es un disco de radio ρ . La simetría esférica de las superficies de entrelazamiento nos permite describirlas mediante una parametrización $(\rho, r(\rho))$ en coordenadas esféricas. El funcional de HEE en este caso está dado como

$$S_A = \frac{1}{4G} \int d\rho d\theta d\phi \sin(\phi) \left((r^2(\rho)\rho^2 + 2\alpha) \sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}} + 2\alpha \frac{(\rho r'(\rho) + r(\rho))^2}{\sqrt{r^2(\rho) + \frac{r'^2(\rho)}{f(r(\rho))}}} \right). \quad (6.5)$$

De la misma manera que en el caso de la banda, podemos tener configuraciones que tienen sus dos fronteras en la misma frontera del agujero de gusano o en distintas fronteras de este. La configuración que utilizamos para regularizar la entropía de entrelazamiento holográfica corresponde a un cilindro recto que atraviesa el agujero de gusano. El interés principal en cumplir este segundo objetivo es que existen conjeturas bajo las cuales podemos decidir si la correlación entre estados que cuantifica la HEE es debida a la sola interacción entre las teorías de campo, o si tenemos entrelazamiento cuántico [66]. Este trabajo se encuentra próximo a su conclusión. Debido a la similitud entre los perfiles de la cuerda, y los perfiles de las superficies de entrelazamiento, esperamos que la HEE escale con la separación de manera análoga a como lo hace la energía en [68].

En esta tesis se estudiaron diversos aspectos de ciertas teorías de norma duales a geometrías de agujero de gusano. La teoría de norma dual al agujero de gusano, representa dos copias de una misma teoría, que puede considerarse como similar a SYM $\mathcal{N} = 4$, o emparentada con la teoría de la QCD. Más allá de los tecnicismos matemáticos y los cálculos de los últimos dos capítulos, la intención de este trabajo fue mostrar al lector diversos aspectos de la correspondencia AdS/CFT que hasta el momento han sido poco estudiados cuando la teoría de gravedad dual tiene por solución a un agujero de gusano. Otro propósito de este trabajo, ha sido dar un panorama para intentar explicar el significado de un sistema constituido por dos teorías de norma interactuando entre sí, cada una de las cuales es dual a una frontera de un agujero de gusano. Además, quisiéramos tener clara la interpretación de dicho sistema en términos del entrelazamiento cuántico. Desde

luego, falta un gran camino para llegar a responder estas interrogantes, por lo que aún hay una gran cantidad de trabajo por hacer para terminar de entender el significado de la correspondencia AdS/CFT en este contexto.

Bibliografía

- [1] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 231 (1998) [*Int. J. Theor. Phys.* 38 , 1113 (1999)] [[arXiv:hep-th/9711200](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200)].
- [2] Leonard Susskind. “The World as an Hologram.”, *J. Math. Phys.* 36, 6377 (1995) [[arXiv:hep-th/9409089](https://arxiv.org/abs/hep-th/9409089)].
- [3] J. S. Bell, “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”, *Physics* 1, 195 (1964).
- [4] Schrödinger, E. “Quantisierung als Eigenwertproblem” (Erste Mitteilung) *Annalen Phys.* 384 361
- [5] W. Heisenberg, “Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen”, *Z. Phys.* 33, 879-893 (1925).
- [6] A. Einstein, B.Podolsky and N.Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Can Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* 47, (1935).
- [7] A. Güijosa. “Notas del curso de correspondencia holográfica”, <http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice>
- [8] Misner. W.Charles, K. Thorne, S. Wheeler, A. John. (1973), “Gravitation”, W. H. Freeman, ISBN 978-0-7167-0344-0.
- [9] M. Peskin and D.Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory”, First edition, Perseus Books, U.S.A, (1995).
- [10] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields, Vol. I and II”, *Found.Phys.*10:301-304, (1997).
- [11] C.N. Yang, R. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”. *Physical Review.* 96 (1): 191–195, (1954).
- [12] M. Blau, “General Relativity Lecture Notes” <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>
- [13] R. M. Wald, “Black Hole entropy is Noether Charge”, *Phys. Rev. D* 48, 3427 (1993) [[arXiv:gr-qc/9307038](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9307038)].
- [14] Reichenbach, “T. Violation of remaining Lorentz symmetry in the approach of time-ordered perturbation theory to space–time noncommutativity”. *Physics Letters.* (2005) 606(3–4), 403–407
- [15] A. V. Ramallo, “Introduction to the AdS/CFT correspondence” *Springer Proc. Phys.* 161, 411 (2015) [[arXiv:1310.4319](https://arxiv.org/abs/1310.4319) [hep-th]].

- [16] R. M. Wald, “Black Hole entropy is Noether Charge”, Phys. Rev. D 48, 3427 (1993) [arXiv:gr-qc/9307038].
- [17] M. Blau, “General Relativity Lecture Notes” <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.htm>
- [18] Gibbons, G. W., Hawking, S. W. (1977). “Action integrals and partition functions in quantum gravity”, Physical Review D. 15 (10): 2752. (1977) DOI:10.1103/PhysRevD.15.2752.
- [19] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. 116, 241103 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.241103 [arXiv:1606.04855 [gr-qc]]
- [20] K. Akiyama et al. “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole.” *Astrophys. J.*, 875(1):L1, (2019).
- [21] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations”, *J. Math. Phys.* 12 (1971) 498.
- [22] D. Lovelock, “The four-dimensionality of space and the einstein tensor”, *J. Math. Phys.* 13 (1972) 874.
- [23] C. Garraffo and G. Giribet, “The Lovelock Black Holes”, *Mod. Phys. Lett. A* 23, 1801 (2008) doi:10.1142/S0217732308027497 [arXiv:0805.3575 [gr-qc]].
- [24] J. R.G. Cai, “Gauss-Bonnet Black Holes in AdS Spaces”, *Phys. Lett.* 582, 237 (2004)
- [25] C. V. Johnson, “D-Branes”. Cambridge University Press, (2002).
- [26] K. Becker, M. Becker, J.H. Schwarz, “String theory and M-theory: A modern introduction”. Cambridge University Press, (2006).
- [27] J. Polchinski, “String Theory, Vol. I and II”. Cambridge University Press, (1998).
- [28] J. Edelstein, “String Theory Lecture Notes”, <https://igfae.usc.es/edels/Strings/>
- [29] D. Tong, “Lectures on String Theory”, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>
- [30] R.S. Halbersma, (2002). “Geometry of strings and branes”, (2002) <https://pure.rug.nl/ws/portalfiles/portal/14522449/c1.pdf>
- [31] D.M. Figueroa-O’Farrill, “Electromagnetic Duality for Children”, <https://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf>
- [32] E. Witten, D. Olive, “Supersymmetry algebras that include topological charges”. *Physics Letters B*, (1998), 78(1), 97–101. doi:10.1016/0370-2693(78)90357-x
- [33] V.E. Hubeny, “The AdS/CFT Correspondence” [arXiv:1501.00007].
- [34] H. Wu. “Historical development of the Gauss-Bonnet theorem.” *Science in China Series A*, (2007) DOI:10.1007/s11425-008-0029-8
- [35] P. Calabrese and J. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory,” *J. Stat. Mech.* 0406, P002 (2004) [arXiv:hep-th/0405152].

- [36] S.W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes.” Cambridge U. Aug 1975. 22 pp. Published in Commun.Math.Phys. 43 (1975) [Erratum-ibid.46, 206 (1976)].
- [37] Drukker, N., Gross, D. J., Ooguri, H. “Wilson Loops and Minimal Surfaces”. Phys. Rev. D 60, (1999), [arXiv:9904191 [hep-th]]
- [38] Danielsson, U.H., Keski-Vakkuri, E. and Kruczenski, M. “Vacua, Propagators, and Holographic Probes in AdS/CFT” (1999) JHEP, 9901, 002. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/01/002>
- [39] S.Rey, S.Theisen, J. Yee, “Wilson-Polyakov loop at finite temperature in large-N gauge theory and anti-de Sitter supergravity.” Nuclear Physics 527, (1998).
- [40] Callan, C. , Guijosa, A. , “Undulating Strings and Gauge Theory Waves”, Nucl.Phys.B 565 (2000) 157-175, DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00630-6, hep-th/9906153.
- [41] M. Chernicoff, J. A. García and A. Guijosa, “The energy of a moving quark-antiquark pair in an $N = 4$ SYM plasma”, JHEP 0609 (2006) 068 [arXiv:hep-th/0607089].
- [42] M. Chernicoff and A. Guijosa, “Acceleration, Energy Loss and Screening in Strongly-Coupled Gauge Theories”, JHEP 06, 005 (2008), arXiv:0803.3070 [hep-th].
- [43] A. Mikhailov, “Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence,” arXiv:hep-th/0305196.
- [44] Chernicoff, M., Guijosa, A., Pedraza, J., “The Gluonic Field of a Heavy Quark in Conformal Field Theories at Strong Coupling”, JHEP 10 (2011) 041, [arXiv:1111.0872 [hep-th]].
- [45] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, “Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions,” Cambridge University Press 2014, [arXiv:1101.0618 [hep-th]].
- [46] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” Phys. Rev. D7, 2333 (1973).
- [47] B. J. Carr, S.W. Hawking, “Black holes in the early Universe.” Cambridge U., Inst. of Astron. and Cambridge U., DAMTP. Feb 1974. 17 pp. Published in Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 168 (1974)
- [48] H. Casini and M. Huerta, “Entanglement entropy in free quantum field theory,” [arXiv:hep-th/09052562].
- [49] M. Srednicki, “Entropy and area”, Phys. Rev. Lett. 71, 666 (1993), [arXiv:hep-th/9303048]
- [50] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT”, Phys. Rev. Lett. 96, 181602 (2006) [arXiv:hep-th/0603001].
- [51] S. Ryu and T. Takayanagi, “Aspects of holographic entanglement entropy”, JHEP 0608 (2006) 045 [arXiv:hep-th/0605073].
- [52] D. V. Fursaev, “Proof of the holographic formula for entanglement entropy”, JHEP 0609 (2006) 018 [arXiv:hep-th/0606184].

- [53] T. Hirata and T. Takayanagi, “AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy”, JHEP 0702 (2007) 042 [arXiv:hep-th/0608213].
- [54] V. G. Knizhnik, “Analytic Fields On Riemannian Surfaces,” Phys. Lett. B 180, 247 (1986); “Analytic Fields On Riemann Surfaces. 2,” Commun. Math. Phys. 112, 567 (1987).
- [55] A. Lewkowycz and J. Maldacena, “Generalized gravitational entropy”, JHEP 1308 (2013) 090, [arXiv:1304.4926 [hep-th]].
- [56] X. Dong, “Holographic entanglement entropy for general higher derivative gravity.” Journal of High Energy Physics 2014, (2014), [arXiv:1411.5579 [hep-th]]
- [57] J. Camps, “Gravity duals of boundary cones”, Journal of High Energy Physics 2016, (2016): 1-33., [arXiv:1605.08588 [hep-th]]
- [58] H. Casini and M. Huerta, “A finite entanglement entropy and the c-theorem,” Phys. Lett. B 600, 142 (2004) [arXiv:hep-th/0405111].
- [59] G. Giribet, E. Rubin de Celis, C. Simeone “Higher curvature wormholes”, Phys. Rev. D 100, 044011 (2019) [1906.02407]
- [60] X. O. Camanho and J. D. Edelstein, “Causality in AdS/CFT and Lovelock theory”, JHEP 06, 099 (2010) [arXiv:0912.1944 [hep-th]].
- [61] Y. Sun, H. Xu and L. Zhao, “Thermodynamics and holographic entanglement entropy for spherical black holes in 5D Gauss-Bonnet gravity”, JHEP 1609 (2016) 060
- [62] M. Ali, F. Ruiz, C. Saint-Victor and J. F. Vazquez-Poritz, “Strings on AdS wormholes”, J. Phys. Conf. Ser. 462, no. 1, 012058 (2013).
- [63] M. Ali, F. Ruiz, C. Saint-Victor and J. F. Vazquez-Poritz, “Strings on AdS Wormholes”, Phys. Rev. D 80, 046002 (2009) [arXiv:0905.4766 [hep-th]].
- [64] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker and S. Yaida, “Viscosity Bound Violation in Higher Derivative Gravity”, Phys. Rev. D 77, 126006 (2008) [arXiv:0712.0805 [hep-th]].
- [65] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker and S. Yaida, “The Viscosity Bound and Causality Violation”, Phys. Rev. Lett. 100, 191601 (2008) [arXiv:0802.3318 [hep-th]].
- [66] M. Fujita, Y. Hatsuda, and T. Takayanagi, “Probing AdS Wormholes by Entanglement Entropy”, JHEP 06 (2011) 141, 1104.4907.
- [67]] J. Maldacena, A. Milekhin and F. Popov, “Traversable wormholes in four dimensions”, 2018, [arXiv:1807.04726 [hep-th]].
- [68] M. Chernicoff, E. Garcia, G. Giribet, E. Rubin de Celis “Thin-shell wormholes on AdS and string dioptrics”, JHEP 10 (2020) 019 [2006.07428]
- [69] G. Dotti, J. Oliva and R. Troncoso, “Static wormhole solution for higher-dimensional gravity in vacuum”, Phys. Rev. D 75, 024002 (2007) [arXiv:hep-th/0607062].
- [70] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility Of The Flux Of The Renormalization Group In A 2-D Field Theory”, JETP Lett. 43, 730 (1986)

- [71] J. M. Maldacena and A. Strominger, “Black hole grey body factors and d-brane spectroscopy” *Phys.Rev. D*55 (1997) 861–870, [arXiv:hep-th/9609026].
- [72] Nayak, G.C., “Correct Definition of The QCD Potential From The Wilson Loop.” *General Physics* (2019), 20pp, [arXiv:1912.08048 [hep-th]]
- [73] R. E. Arias, M. Botta Cantcheff and G. A. Silva, “Lorentzian AdS, Wormholes and Holography,” *Phys. Rev. D* 83 (2011), 066015 [arXiv:1012.4478 [hep-th]].
- [74] J. Zanelli, “Introductory lectures on Chern-Simons theories,” *AIP Conf. Proc.* 1420, no.1, 11-23 (2012)
- [75] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” *Nucl. Phys. B*360 (1991) 197–209.
- [76] S. Hawking, J. M. Maldacena and A. Strominger, “DeSitter entropy, quantum entanglement and AdS/CFT,” *JHEP* 0105, 001 (2001).
- [77] Aharony, Ofer; Bergman, Oren; Jafferis, Daniel Louis; Maldacena, Juan (2008). “N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals”. *Journal of High Energy Physics* 2008.
- [78] S. W. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics Of Black Holes In Anti-De Sitter Space,” *Commun. Math. Phys.* 87, 577 (1983).
- [79] H. Osborn and G. M. Shore, “Correlation functions of the energy momentum tensor on spaces of constant curvature,” *Nucl. Phys. B* 571, 287 (2000) [arXiv:hep-th/9909043].
- [80] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, “A Covariant holographic entanglement entropy proposal” ,*JHEP* 07 (2007) 062, [arXiv:hep-th/07050016].
- [81]] X. Dong, A. Lewkowycz, and M. Rangamani, “Deriving covariant holographic entanglement”, *JHEP* 11 (2016) 028, [arXiv:1607.07506].
- [82] V. E. Hubeny, H. Maxfield, M. Rangamani and E. Tonni, “Holographic entanglement plateaux”, *JHEP* 1308, 092 (2013), [arXiv:1306.4004]
- [83] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.M. Polyakov, “Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory”, *Phys.Lett.B*428:105-114,1998 [arXiv:hep-th/9802.109]
- [84] E. Witten, A. Strominger, “Quantum gravity in de Sitter space”, [arXiv:hep-th/0106109] , *JHEP* 0110, 034 (2001).
- [85] R. A. Janik, ”The Dynamics of Quark-Gluon Plasma and AdS/CFT”, *L ect.Notes Phys.* 828, 147 (2011).
- [86] D. G. Boulware and S. Deser, “String Generated Gravity Models”, *Phys. Rev. Lett.* 55, 2656 (1985)
- [87] D. V. Fursaev and S. N. Solodukhin, “On the description of the Riemannian geometry in the presence of conical defects”, *Phys. Rev. D* 52, 2133 (1995) [arXiv:hep-th/9501127].
- [88] T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic Entanglement Entropy: An Overview”, *J. Phys. A* 42 (2009) 504008 [arXiv:hep-th/09050932].

- [89] T. Takayanagi, “Entanglement Entropy from a Holographic Viewpoint”, *Class. Quant. Grav.* 29 (2012) 153001 [arXiv:1204.2450 [gr-qc]].
- [90] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Black hole in three-dimensional space-time”, *Physical Review Letters* 69 (1992), no. 13 1849, [hep-th/9204099].
- [91] N. Graham and K. D. Olum, “Achronal averaged null energy condition”, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 064001 [0705.3193].
- [92] A. C. Wall, “Proving the Achronal Averaged Null Energy Condition from the Generalized Second Law”, *Phys. Rev. D* 81 (2010) 024038 [0910.5751].
- [93] M. S. Morris and K. S. Thorne, “Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity”, *Am. J. Phys.* 56, 395 (1988).
- [94] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yurtsever, “Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition”, *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) 1446
- [95] P. Gao, D. L. Jafferis and A. Wall, “Traversable Wormholes via a Double Trace Deformation”, *JHEP* 12 (2017) 151 [1608.05687].
- [96] E. Cáceres, A.S. Misobuchi, M. Xiao, “Rotating traversable wormholes in AdS”, *JHEP* 12 (2018) 005 [1807.07239].
- [97] J. Maldacena, D. Stanford and Z. Yang, “Diving into traversable wormholes”, *Fortsch. Phys.* 65 (2017) 1700034 [1704.05333].
- [98] K. Skenderis and B. C. van Rees, “Holography and wormholes in 2+ 1 dimensions”, *Communications in Mathematical Physics* 301 (2011), no. 3 583–626, [arXiv:0912.2090].
- [99] V. Balasubramanian, P. Hayden, A. Maloney, D. Marolf and S. F. Ross, “Multi-boundary Wormholes and Holographic Entanglement”, *Class. Quant. Grav.* 31 (2014) 185015 [1406.2663].
- [100] D. R. Brill, “Multi-black-hole geometries in (2+ 1)-dimensional gravity”, *Physical Review D* 53 (1996), no. 8 R4133, [gr-qc/9511022].
- [101] S. Aminneborg, I. Bengtsson, D. Brill, S. Holst, and P. Peldan, “Black holes and wormholes in 2+1 dimensions”, *Class. Quant. Grav.* 15 (1998) 627–644, gr-qc/9707036.
- [102] D. M. Hofman, “Higher Derivative Gravity, Causality and Positivity of Energy in a UV complete QFT”, *Nucl. Phys. B* 823, 174-194 (2009) [arXiv:0907.1625 [hep-th]].
- [103] Y. Li, S. Wu and G. Yang, “Gauss-Bonnet correction to Holographic thermalization: two-point functions, circular Wilson loops and entanglement entropy”, *Phys. Rev. D* 88, 086006 (2013) [arXiv:1309.3764 [hep-th]].
- [104] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, “The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma”, *Phys. Rev. Lett.* 87, 081601 (2001) [arXiv:hep-th/0104066 [hep-th]].
- [105] H. Liu, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, “An AdS/CFT calculation of screening in a hot wind”, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 182301 [arXiv:hep-ph/0607062].

- [106] A. Brandhuber, N. Itzhaki, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, “Wilson loops in the large N limit at finite temperature”, *Phys. Lett. B* 434, 36 (1998) [arXiv:hep-th/9803137].
- [107] X. O. Camanho and J. D. Edelstein, “Causality constraints in AdS/CFT from conformal collider physics and Gauss-Bonnet gravity”, *JHEP* 04, 007 (2010) [arXiv:0911.3160 [hep-th]].
- [108] A. Mikhailov, “Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence”, arXiv:hep-th/0305196.
- [109] M. Chernicoff, J. Garcia and A. Guijosa, “Generalized Lorentz-Dirac Equation for a Strongly Coupled Gauge Theory”, *Phys. Rev. Lett.* 102, 241601 (2009) [arXiv:0903.2047 [hep-th]].
- [110] M. Chernicoff, J. Garcia and A. Guijosa, “A Tail of a Quark in $N=4$ SYM”, *JHEP* 09, 080 (2009) [arXiv:0906.1592 [hep-th]].
- [111] E. Caceres, M. Chernicoff, A. Guijosa and J. F. Pedraza, “Quantum Fluctuations and the Unruh Effect in Strongly-Coupled Conformal Field Theories”, *JHEP* 06 (2010), 078 doi:10.1007/JHEP06(2010)078 [arXiv:1003.5332 [hep-th]].
- [112] Y. Sun, H. Xu, L. Zhao, “Thermodynamics and holographic entanglement entropy for spherical black holes in 5D Gauss-Bonnet gravity”, *JHEP* 1609, 060 (2016) doi:10.1007/JHEP09(2016)060 [arXiv:1606.06531 [gr-qc]].