



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO DE EQUILIBRIO
MAGNETOHIDRODINÁMICO EN UN PLASMA
CILÍNDRICO Y ESTUDIO DE LA DESTRUCCIÓN DE
SUPERFICIES MAGNÉTICAS ANTE
PERTURBACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

JESÚS RAFAEL VALVERDE CORIA

TUTOR

DR. JOSÉ JULIO EMILIO HERRERA VELÁZQUEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mis padres, por el cuidado incondicional que me han brindado siempre.

Al Dr. Julio Herrera, por haber contagiado en mí el interés en la física de plasmas. Sus ideas permitieron dar dirección a este trabajo.

Al Dr. Julio Martinell, quien ha contribuido importantemente con mi formación en el área.

A mis sinodales, por el tiempo y esfuerzo que dedicaron para revisar el texto. Sus comentarios fueron de gran valor.

A mi familia y amigos, por todo el apoyo y el cariño.

Resumen

Un plasma confinado mediante campos magnéticos se puede describir por la teoría magnetohidrodinámica a través de una ecuación diferencial que, en el caso de geometría toroidal, es denominada de Grad - Shafranov, la cual depende de parámetros como la corriente en el plasma, el campo magnético y la presión. Resolver esta ecuación permite encontrar las superficies de flujo magnético, que son aquellas en las que la presión es constante, y que sirven de base para el estudio de ciertos fenómenos que ocurren en el plasma.

Se puede demostrar que las líneas de campo magnético cumplen las ecuaciones de Hamilton considerando al flujo magnético como ‘el hamiltoniano’. Esto lleva a pensar que se puede aplicar la teoría clásica de perturbaciones para estudiar la estabilidad de las superficies de equilibrio.

En este trabajo se obtuvo la ecuación que describe el equilibrio de una columna cilíndrica de plasma como una aproximación a un plasma toroidal con razón de aspecto grande. Se planteó un algoritmo mediante esquemas de Runge Kutta para la solución numérica de esta ecuación y se compararon las soluciones obtenidas con el caso particular del campo libre de fuerzas, el cual tiene solución analítica y exhibe el comportamiento que se observa experimentalmente en dispositivos Z-Pinch de campo invertido (RFP). Las superficies de flujo obtenidas se utilizaron en el marco de la teoría canónica de perturbaciones como aquellas correspondientes a un hamiltoniano sin perturbar y, posteriormente, se agregó de forma analítica una perturbación para observar la aparición de islas magnéticas alrededor de superficies cuyo factor de seguridad fuera racional. Esto permite estimar el comportamiento de la anchura de las islas debido a la curvatura.

Índice general

Dedicatoria	II
Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Panorama General	1
1.2. Fusión Nuclear	3
1.3. Confinamiento Magnético	6
2. Modelado del Plasma	10
2.1. Aproximación Magnetohidrodinámica Ideal	10
2.2. Coordenadas de Flujo	12
2.2.1. Configuración Toroidal	12
2.2.2. Configuración Cilíndrica con Simetría Azimutal y Axial	14
3. Equilibrio Magnetohidrodinámico	17
3.1. Equilibrio con Geometría Toroidal	17
3.2. Equilibrio con Geometría Cilíndrica	18
4. Equilibrio en un Campo Libre de Fuerzas	20
5. Análisis Numérico del Problema de Equilibrio	25
5.1. Equilibrio como Problema de Condiciones Iniciales	25
5.2. Equilibrio como Problema de Condiciones de Frontera	26
5.3. Validación con el Caso del Campo Libre de Fuerzas	28
5.4. Resultados con Perfiles Polinomiales de Equilibrio	31
6. Formación de Islas Magnéticas en la Columna de Plasma	37
6.1. Naturaleza Hamiltoniana del Campo Magnético	37
6.2. Destrucción de Superficies Magnéticas	39
7. Conclusiones	45
Apéndice A. Algunas Identidades Útiles	47
Apéndice B. Interpretación Topológica de la Helicidad Magnética	47

Apéndice C. Métodos Numéricos	50
C.1. Esquema de Runge - Kutta de cuarto orden para Ecuaciones Diferenciales de Segundo Grado	50
C.2. Diferenciación Numérica	51
C.3. Integración: Teorema de Simpson	51
Apéndice D. Ejemplos de Códigos	52
Bibliografía	56

1 Introducción

1.1. Panorama General

Es innegable que a la fecha de escritura de este trabajo los efectos del cambio climático por el calentamiento global se observan más cercanos que nunca. En el informe titulado ‘Cambio Climático 2021: Bases Físicas’, el Grupo Intergubernamental de Expertos Sobre el Cambio Climático de la ONU (IPCC), afirma que este fenómeno, sin precedentes en cientos de miles de años, es generalizado, avanza rápidamente y se intensifica cada vez más. Dicho esto y dado que la influencia de la actividad humana es clara, en el informe se urge a las naciones a tomar medidas para frenar gradualmente las emisiones de carbono hasta neutralizarlas para el año 2050 y luego, limitar el aumento de la temperatura global a un máximo de 1.5 °C durante el resto del siglo. Sin embargo, se señala que este aumento límite en la temperatura, considerado el punto sin retorno, se podría alcanzar para 2040.

Mientras que una sección de la ciudadanía realiza las actividades que quedan a su alcance, como optar por el autoconsumo a través de paneles y/o calentadores solares, no debe olvidarse que se vive en una sociedad industrializada, con un modelo de consumo lineal. Esto coloca a la causa principal del problema de contaminación en la forma de generación de la energía eléctrica que alimenta a la industria, la cual es, en su mayoría, a base de la combustión del carbón, combustóleo o gas natural. Pensando en que los sustitutos de estos combustibles fósiles deben evitar la emisión de dióxido de carbono, entonces quedan los siguientes candidatos que, ya desde ahora y en mayor medida en un futuro cercano, se les observará trabajando en conjunto: la energía nuclear y las energías renovables.

Por el lado de las renovables, como la energía solar, eólica, hidroeléctrica o geotérmica, se han señalado algunas desventajas entre las que destacan su baja densidad e inestabilidad en la generación de energía. Esto las hace insuficientes ante la demanda requerida, sobre todo en complejos industriales, y les deja como soporte secundario de alguna otra fuente principal. Algunas razones se pueden describir cualitativamente y de forma simple en lo siguiente: el Sol no siempre calienta con la misma potencia ni por la misma cantidad de tiempo, el viento no siempre sopla igual y no en cualquier lugar del mundo se les puede encontrar. De todas estas, la uso más generalizable es la energía solar. Pero entonces se encuentran otras limitaciones propiamente físicas de las celdas solares, como su baja eficiencia que, en celdas comerciales, suele estar alrededor del 20 % [1]. Esto indica que de toda la energía que llega a un panel solar, solo el 20 % se convierte en energía eléctrica y lo demás se queda en el ambiente. Una

forma de compensar esta baja eficiencia es colocando una gran cantidad de paneles solares, lo cual provoca la ocupación de áreas considerablemente grandes y una alta invasión al medio en el que se ubican los parques solares. Algo parecido ocurre en el caso de las turbinas de viento para la generación eólica.

Para el segundo candidato, la energía nuclear, se tienen esencialmente dos tipos de reacciones: la fisión y la fusión nuclear. Solo en el caso de la fisión existe tecnología madura, como las centrales nucleares que operan de forma comercial en distintas partes del mundo para la generación de energía desde los años cincuenta. Estas no adolecen de una baja densidad de energía ni de la inestabilidad en su producción, pues la potencia de operación de las plantas es regulable y capaz de satisfacer la demanda energética requerida. Sin embargo, las desventajas de esta fuente son ya muy conocidas, como pueden ser, la producción de desechos radiactivos con vidas medias de miles de años, y el hecho de que el combustible naturalmente fisiónable, el uranio 238, no es inagotable. Ante estos obstáculos se tienen previstas varias opciones, pues para el problema de los residuos se propone, por un lado, su almacenamiento en cavidades geológicas profundas que no han mostrado actividad sísmica durante miles de años y por otro, aumentar la aplicación de los ya existentes reactores capaces de reutilizar el combustible gastado. Además, a partir del ^{238}U y el ^{232}Th se puede obtener el combustible fisiónable como ^{239}Pu y ^{233}U que alcanzaría para varios miles de años [1]. A pesar de esto, existe en la sociedad un miedo que estigmatiza todo lo que tenga que ver con la palabra "nuclear", que junto con otros fenómenos económicos y políticos, no permiten visualizar claramente el rol que la fisión nuclear terminará cumpliendo en el futuro. Considerando todo esto, se tiene que pensar en un candidato extra, uno que se pueda utilizar en el futuro y que solucione las desventajas anteriormente mencionadas, es decir, que tenga combustible virtualmente inagotable, capacidad de satisfacer la demanda energética creciente, sin problemas de desechos radiactivos de vida media larga y que además, sea libre de emisiones de CO_2 . Este candidato existe y son los reactores de Fusión Nuclear.

1.2. Fusión Nuclear

Bastante se ha escuchado, sobre todo en medios de divulgación científica, acerca del gran reto de "meter al Sol en una caja", haciendo referencia a que el ejemplo más notable que se encuentra en la naturaleza de un generador de energía a través de fusión nuclear, es el Sol. Esto ocurre por un proceso en el que dos núcleos atómicos ligeros se unen para formar un nuevo núcleo de masa menor que la suma de las masas de los átomos iniciales, de manera que la masa sobrante resulta en la emisión de otras partículas o de energía. Esto se puede ilustrar en la fig. 1.1, donde un núcleo de deuterio (D) se fusiona con otro de tritio (T), repartiendo las partículas que los componen, los neutrones y protones, en un nuevo núcleo de ${}^4\text{He}$ y un neutrón libre. Cada uno de estos núcleos portan 3.5MeV y 14.1MeV de energía que en total suma 17.6MeV que se manifiestan como energía cinética y que es la que se puede aprovechar para convertirla en calor, y luego, en energía eléctrica.

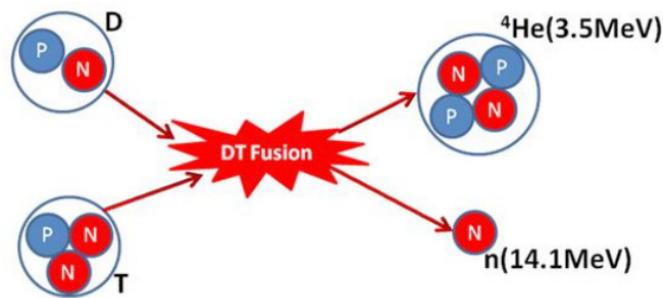


Figura 1.1: Reacción de fusión de núcleos de Deuterio y Tritio. Tomado de [1]

Para que ocurra la fusión de los núcleos, se debe vencer a la fuerza electrostática repulsiva que se da entre ellos debido a su carga. Una vez que se vence esta barrera eléctrica, y se juntan lo suficiente como para que empiece a actuar la fuerza nuclear fuerte, entonces ocurre la fusión. Se requiere entonces darles la energía suficiente a través de la transferencia de calor, es decir, aumentando su temperatura que, en el caso de una mezcla de D - T, es del orden de 10keV o 100 millones de grados Celsius [1]. En la Tierra ya se ha probado el efecto de la fusión nuclear de manera no controlada, en forma de explosiones termonucleares, aunque el gran reto es hacerlo de manera controlada, para lo que se han desarrollado diversos conceptos de dispositivos que se pueden clasificar en dos tipos: de confinamiento inercial y de confinamiento magnético. El primero consiste en calentar un blanco con el combustible fusionable en su interior por medio de láseres de alta potencia, para generar una fuerza de presión que obligue al material a comprimirse y lleve a los núcleos a fusionarse. Este método, por diversas razones, no es considerado el mejor en cuanto al desarrollo de una futura planta comercial de fusión, sin embargo, no se le ha dejado en el olvido debido a que permite el estudio de los procesos que ocurren en armas nucleares, evitando el uso de pruebas experimentales y los efectos que estas dejan en el ambiente. El segundo método, que es el que concentra la mayoría de los esfuerzos para desarrollar una planta de fusión, es el confinamiento magnético, en el cual el combustible fusionable

es calentado a altas temperaturas y, a través de campos magnéticos, se busca contener a las partículas y su energía para mantener la reacción por una determinada cantidad de tiempo. El combustible que se considera inicialmente en los dispositivos actuales de investigación es la mezcla de deuterio y tritio. Una de las razones de esto, es que los tamaños de los átomos de deuterio y tritio maximizan la probabilidad de que ocurran choques entre ellos, y por lo tanto, reacciones de fusión. Esto minimiza la temperatura que se requiere darle al combustible comparando con otras reacciones. Algunas de esas reacciones se muestran en la tabla siguiente entre distintas partículas y núcleos:

1.	D + T	→	${}^4\text{He}$ (3.5 MeV) + n (14.1 MeV)
2.	D + D	→	T (1.01 MeV) + p (3.02 MeV) (50%)
		→	${}^3\text{He}$ (0.82 MeV) + n (2.45 MeV) (50%)
3.	D + ${}^3\text{He}$	→	${}^4\text{He}$ (3.6 MeV) + p (14.7 MeV)
4.	T + T	→	${}^4\text{He}$ + 2 n + 11.3 MeV
5.	${}^3\text{He}$ + ${}^3\text{He}$	→	${}^4\text{He}$ + 2 p
6.	${}^3\text{He}$ + T	→	${}^4\text{He}$ + p + n + 12.1 MeV (51%)
		→	${}^4\text{He}$ (4.8 MeV) + D (9.5 MeV) (43%)
		→	${}^4\text{He}$ (0.5 MeV) + n (1.9 MeV) + p (11.9 MeV) (6%)
7.	D + ${}^6\text{Li}$	→	2 ${}^4\text{He}$ + 22.4 MeV
8.	p + ${}^6\text{Li}$	→	${}^4\text{He}$ (1.7 MeV) + ${}^3\text{He}$ (2.3 MeV)
9.	${}^3\text{He}$ + ${}^6\text{Li}$	→	2 ${}^4\text{He}$ + p + 16.9 MeV
10.	p + ${}^{11}\text{B}$	→	3 ${}^4\text{He}$ + 8.7 MeV

Figura 1.2: Reacciones de fusión de distintos núcleos atómicos. Tomado de [1]

El confinamiento, en principio, debe permitir que ocurran las reacciones necesarias para que se termine ganando más energía de la que se gasta en iniciar la reacción. Esto se puede cuantificar a través de la ganancia, la cual se define como el cociente entre la potencia de fusión de salida y la potencia de entrada:

$$Q = \frac{P_{\text{salida}}}{P_{\text{entrada}}}, \quad (1.1)$$

y que indica que para que se tenga ganancia de energía, entonces $Q > 1$. Existen varias razones por las que esta ganancia puede no ser favorable, por ejemplo, la radiación bremsstrahlung, pues los encuentros ion-ion y electrón-electrón producen radiación electromagnética en la longitud de onda de los rayos X por el frenado de las partículas, lo que lleva a la pérdida de energía. Así mismo, pueden ocurrir pérdidas por la radiación de sincrotrón que producen las partículas cargadas al seguir las líneas de campo magnético que las confina, o por la presencia de impurezas que no están completamente ionizadas.

Dado que las fugas de energía por radiación involucran sobre todo a los electrones, se puede encontrar la siguiente relación entre la densidad de estos n_e , su temperatura

T_e , el tiempo de confinamiento de la energía en el plasma τ_E y la ganancia Q :

$$n_e \tau_E = \frac{3k_B T_e}{\frac{\langle \sigma v \rangle E_\alpha (Q+5)}{4Q} - C_B T_e^{1/2}}, \quad (1.2)$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ es la sección eficaz promedio de las colisiones entre las especies del plasma, E_α la energía de los núcleos de helio, k_B la constante de Boltzmann y C_B la constante de radiación bremsstrahlung. De la expresión 1.2, cuya derivación puede encontrarse con detalle en [1], es importante puntualizar que el tiempo de confinamiento τ_E no se refiere al tiempo que el plasma permanece confinado, sino al tiempo en que su energía permanece en él sin dispersarse, ya que podría darse el caso en que, al igual que un líquido que se enfría mientras está contenido en un vaso, perdiendo calor, la energía térmica del plasma se escape aunque este siguiera contenido por el campo magnético.

La expresión 1.2 indica una condición para los parámetros del plasma para que, según la ganancia que se requiera, la energía cinética obtenida de las partículas alfa compense las pérdidas por radiación bremsstrahlung. Para que $Q > 1$, se obtiene el criterio de Lawson para un plasma 50/50 D-T a temperatura de 15 keV:

$$n_e T_e \tau_e > 1.5 \times 10^{21} \text{ keV} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}, \quad (1.3)$$

y de la misma expresión, haciendo tender Q a infinito, para un plasma con $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ a una temperatura de 30 keV, se obtiene

$$n_e T_e \tau_e > 8.1 \times 10^{21} \text{ keV} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (1.4)$$

Cuando se cumple este criterio, entonces se dice que el plasma se encuentra en un estado de ignición, donde las partículas alfa transfieren toda su energía cinética al plasma, manteniéndolo caliente y compensando por completo las pérdidas radiativas. En tal caso, la potencia de entrada tendería a cero y sería posible prescindir de las fuentes externas de energía.

1.3. Confinamiento Magnético

Como ya se describió en la sección anterior, las temperaturas a las que se desatan las reacciones de fusión y se compensan las pérdidas de energía por radiación son de cientos de millones de grados centígrados. A esas temperaturas, al igual que en un gas, las partículas que conforman al plasma generan una fuerza de presión contra el contenedor que puede provocar daños al dispositivo o fugas de energía. De entrada, es fácil imaginar lo absurdo que sería buscar algún material en el universo que sea capaz de soportar esas temperaturas y de contener la energía sin que se dañe. Es por esto que resulta más factible aprovechar una de las propiedades que poseen los plasmas, y es que al contener iones y electrones, partículas con carga, se pueden moldear las trayectorias que estas siguen con campos magnéticos, de manera que la presión ejercida hacia el exterior del dispositivo termine siendo anulada por la fuerza magnética. A esta idea en la que la compensación de fuerzas mantiene al plasma en una cierta zona definida se le conoce como confinamiento magnético y existen distintos dispositivos enfocados en realizar esta tarea. Algunos de estos son el tokamak, el stellarator, el tokamak esférico, el z - pinch o el theta-pinch. En estos dispositivos suele tenerse un conjunto de campos magnéticos generados por bobinas que ayudan a controlar la forma y estabilidad, más un campo magnético inducido por la corriente que se hace pasar a través del plasma. Aunque en el caso del stellarator, solamente se tienen los primeros, lo cual los hace ideales para estudiar algunos fenómenos que de otra forma sería imposible observar debido a las inestabilidades generadas por esas corrientes en el plasma. También se pueden encontrar en un plasma partículas neutras, las cuales no pueden ser confinadas magnéticamente precisamente por no poseer carga, y que, al colisionar con las paredes de los dispositivos, pueden producir daños e impurezas. Esto supone todo un campo de estudio, que es el de las interacciones plasma - pared, donde se buscan las formas y materiales óptimos de los dispositivos para minimizar las pérdidas de energía por las impurezas.

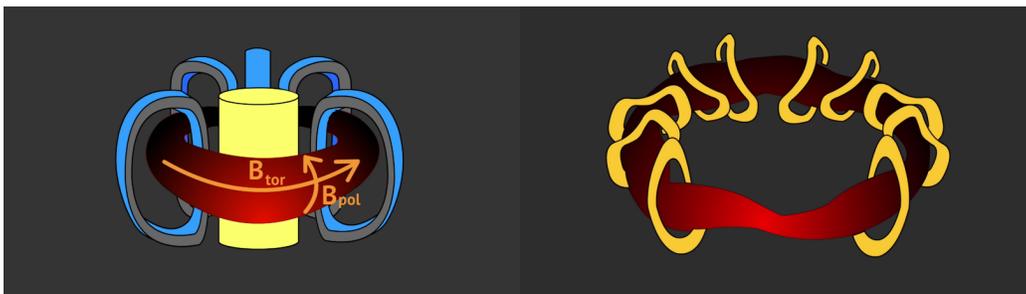


Figura 1.3: Esquema de la configuración de bobinas y campos magnéticos en un tokamak y un Stellarator. Recuperado de [2]

En los dispositivos de confinamiento, se busca que el perfil de presión que genera el plasma se vea como el de la figura 1.4 (b), donde puede notarse que la presión medida en el centro del dispositivo es máxima y nula en la pared del contenedor. El perfil 1.4 (c) corresponde justo al caso contrario en el que el plasma ejerce una mayor

presión en el muro y el perfil 1.4 (d) a un caso sin sentido físico, pues no hay presión negativa.

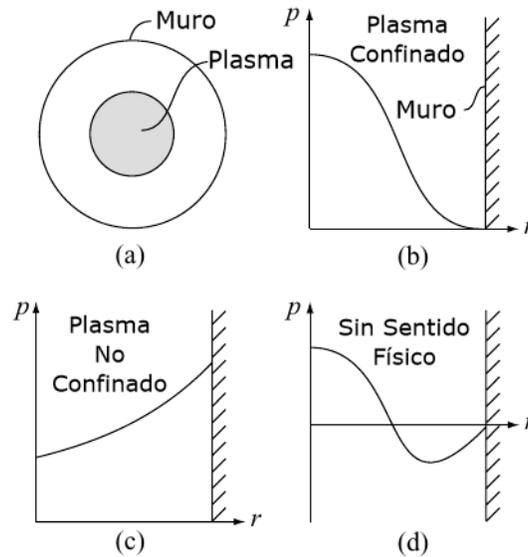


Figura 1.4: (a) Plasma confinado (b) Perfil de presión de un plasma confinado (c) Perfil de presión de un plasma no confinado. (d) Perfil sin sentido físico. Recuperada de [3]

Una manera de entender el proceso de confinamiento que se estudiará con mayor formalidad más adelante, es recordando lo que ocurre cuando se hace circular una corriente por dos cables rectos paralelos. Si las corrientes llevan el mismo sentido, el campo inducido alrededor del primer cable atrae a la segunda corriente, mientras que el campo del segundo cable atrae a la primera corriente (ver fig. 1.5). De esta forma, se genera una fuerza atractiva entre ambos cables. Si estas corrientes tuvieran sentido contrario, si fueran anti - paralelas, entonces la fuerza sería repulsiva.

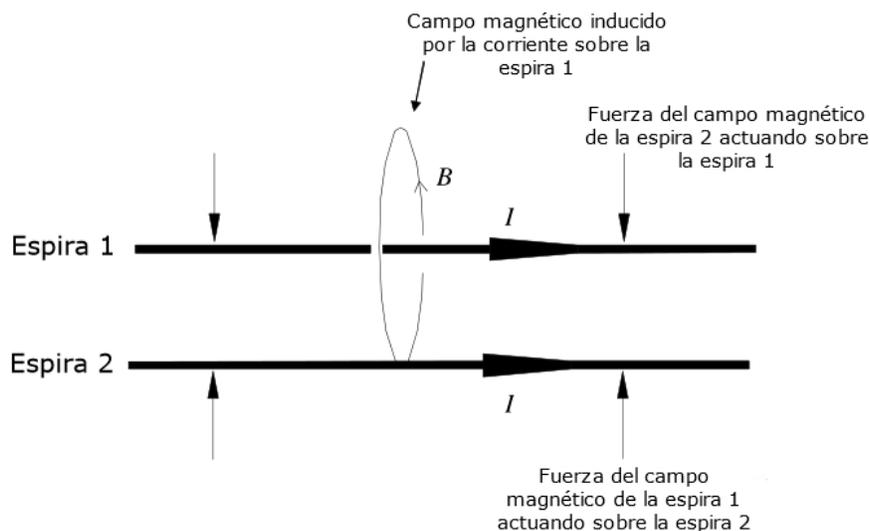


Figura 1.5: Atracción entre dos corrientes paralelas. Recuperado de [4].

El efecto se puede extender a un mayor número de cables paralelos, produciéndose una fuerza de atracción entre todos ellos que los comprime entre sí (ver fig. 1.6). Si ahora se piensa al plasma como un conjunto de cables infinitesimales paralelos y se hace pasar una corriente a través de él, aprovechando el hecho de que este se comporta como un buen conductor a altas temperaturas, entonces se producirá la fuerza que lo comprime y que se equilibra con la fuerza de presión [4].

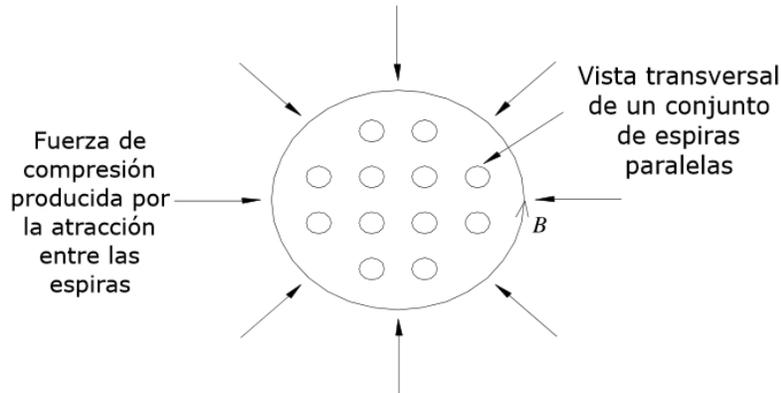


Figura 1.6: Conjunto de corrientes atrayéndose entre sí produciendo una fuerza efectiva radial interior. Recuperado de [4]

A la proporción entre la presión magnética y la presión del plasma se le denomina beta del plasma y se define matemáticamente por:

$$\beta = \frac{\langle nT \rangle}{B^2/2\mu_0}, \quad (1.5)$$

siendo n y T la densidad y temperatura del plasma, μ_0 la permeabilidad magnética en el vacío y B el campo de inducción magnética.

También es posible pensar en un efecto de confinamiento al hacer pasar una corriente en la dirección azimutal a través de una bobina que rodee al plasma (ver fig. 1.7). Esta corriente va a inducir un campo magnético en la dirección axial, denotado por B_z , que a su vez inducirá una corriente en el plasma pero con sentido contrario. El campo inducido por el campo original se opone al campo axial B_z , lo que hace que el campo debido a la corriente en la bobina se anule dentro del plasma y solo exista en la zona vacía, como se muestra en el diagrama. Lo que queda entonces es una corriente en la superficie del plasma, que al ser anti-paralela en cada segmento del círculo a la corriente de la bobina, produce una fuerza repulsiva entre ellas. Esta repulsión es la que tiende a comprimir al plasma, aunque solo existe de manera temporal, pues la corriente de la bobina debe variar en el tiempo y no se puede sostener de forma continua.

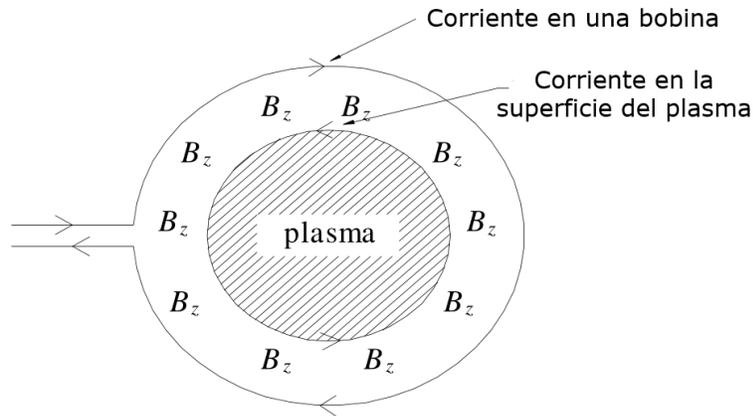


Figura 1.7: Efecto de compresión debido al campo magnético inducido por una bobina externa al plasma. Recuperado de [4].

Descritos estos dos distintos tipos de confinamiento con corrientes axiales y azimutales, en general, los dispositivos experimentales actuales utilizados para el estudio del confinamiento del plasma aprovechan la combinación de ambos conceptos, generando campos magnéticos con componentes en distintas direcciones. En este trabajo se hablará principalmente de los campo toroidal y poloidal, cuyas líneas direccionales pueden observarse en la figura 1.3. A la proporción entre las componentes de estos se le define como factor de seguridad de la siguiente manera

$$q(r) = \frac{r}{R_0} \frac{B_{tor}}{B_{pol}}, \quad (1.6)$$

con r la distancia medida respecto a un eje centrado en el toroide y R_0 la distancia de este eje al eje z (ver fig. 1.8). Este será un parámetro del plasma relevante en este texto.

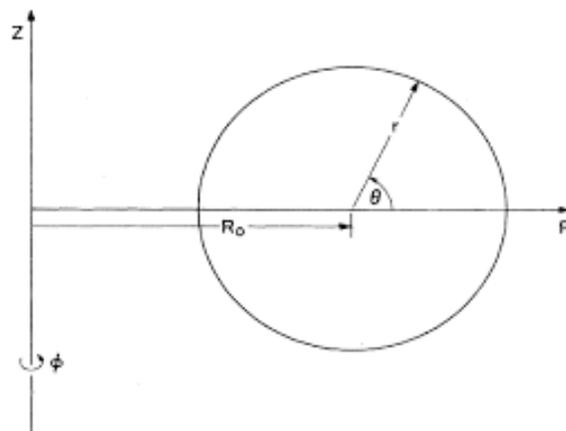


Figura 1.8: Sistema de coordenadas en un tokamak. Recuperado de [5].

2 Modelado del Plasma

2.1. Aproximación Magnetohidrodinámica Ideal

En plasmas como los que se encuentran en dispositivos de fusión, la densidad de iones y electrones oscila alrededor de órdenes de magnitud de $10^{14}cm^{-3}$ a $10^{17}cm^{-3}$ (en ITER o en dispositivos Z - Pinch densos) y de más de $10^{22}cm^{-3}$, en el caso de plasmas producidos por láser. Esto implica que si se pensara de forma tradicional, para predecir el comportamiento del plasma habría que resolver una cantidad de ecuaciones de movimiento que queda fuera del alcance humano y computacional por la gran cantidad de partículas involucradas, por lo que se requiere cambiar el enfoque para hallar soluciones o aproximaciones a estas. Por un lado, se puede pensar en el conjunto de partículas y sus características a través de funciones de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, como se menciona en [4], en las que se describe la densidad instantánea de partículas dependiendo de su posición y velocidad. Esto no daría información de las trayectorias individuales, pero sí sobre el conjunto de partículas que tienen los mismos valores de \mathbf{r} y \mathbf{v} . Este sería el enfoque más detallado que se puede tener en cuanto a las teorías que pretenden describir un plasma, pero también con más complicaciones de las necesarias para lo que interesa en este trabajo. Por el contrario, será más útil hacer una descripción del plasma basada en la teoría de fluidos. En particular, se utilizará la descripción *Magnetohidrodinámica* o teoría MHD, en la que se considera al plasma como un fluido cargado y no se hace distinción entre las diferentes partículas que lo conforman [6]. Ya que todas las teorías físicas tienen ciertas limitaciones, la teoría MHD no es la excepción, pues su rango de aplicación tiene sentido para tiempos largos respecto al periodo de ciclotrón, en las que domina la dinámica de los iones sobre la de los electrones.

En la descripción magnetohidrodinámica, la ecuación que describe un elemento infinitesimal de plasma de densidad de masa ρ y velocidad de fluido \mathbf{v} es la equivalente a la ecuación de Navier-Stokes con un término extra debido a la fuerza de Lorentz:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente, \mathbf{B} el campo magnético de inducción y p la presión cinética de las partículas del plasma. Se ha incluido en esta descripción la suposición de que el “fluido de plasma” es isotrópico, lo que permite escribir a la presión como un escalar. De no hacerlo así, habría que sustituir al término ∇p por $\nabla \cdot \mathbf{P}$ para describir el caso general, con \mathbf{P} el tensor de esfuerzos del fluido [7].

Los campos electromagnéticos deben satisfacer las leyes de Maxwell, que incluyen la ley de Gauss para el campo de inducción 2.2a, la ley de Ampère (ec. 2.2b) y la ley de Faraday (eq. 2.2c)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.2c)$$

donde se ha despreciado a la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère bajo la suposición de que la velocidad del plasma es mucho menor a la velocidad dada por l/t , con l la longitud característica y t el tiempo característico. Además, el campo magnético, la intensidad de campo magnético y la corriente, se relaciona por las ecuaciones constitutivas y la ley generalizada de Ohm, que es la ley estándar de electrodinámica clásica pero con el término extra $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.3a)$$

$$\eta \mathbf{J} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.3b)$$

Para completar el conjunto de ecuaciones que rigen la teoría magnetohidrodinámica, se tiene la ecuación de continuidad clásica de la teoría de fluidos y una ecuación de estado adiabática:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.4a)$$

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0. \quad (2.4b)$$

Aparte de la ya mencionada suposición sobre la isotropía del fluido que se hizo para la ec. 2.1, también se tiene otras dos suposiciones importantes para plasmas de gran escala de movimiento. En la ley de Ampère, ecuación 2.2b, se hizo omisión de la corriente de desplazamiento bajo la suposición de que el plasma se mantiene quasi - neutro, ignorando los efectos capacitivos que tienen lugar en escalas de tiempo cortas. Esto ocurre cuando la cantidad $\epsilon_0 B / \rho$ es pequeña, condición que se deriva al comparar el término convectivo $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ con la fuerza eléctrica, y que se cumple para la mayoría de plasmas de interés. Esto también justifica que se pueda prescindir de la divergencia del campo eléctrico en el conjunto de ecuaciones de la teoría MHD, ya que la densidad de carga eléctrica σ resulta tan pequeña como para ser de importancia. Por último, la ley de Ohm se escribió bajo la suposición de que el radio de Larmor de los iones es pequeño comparado con la escala del plasma [8].

2.2. Coordenadas de Flujo

Antes de empezar a establecer las ecuaciones que describen al equilibrio de un plasma en confinamiento, es necesario decidir el sistema de coordenadas que mejor se adapte. Esto depende de la geometría que tenga el dispositivo que lo contiene, y como se indica en el título de este trabajo, interesa hacerlo para una columna cilíndrica. Dado que la mayoría de dispositivos de investigación actuales son tokamaks, la literatura suele presentar los desarrollos en coordenadas toroidales. Por esa razón, en las siguientes dos secciones se presenta primero el conjunto de ecuaciones MHD para una geometría toroidal, y posteriormente, de forma análoga para una geometría cilíndrica. Como suele hacerse en los trabajos de física de plasmas, por diferentes razones y ventajas, se utilizarán las coordenadas definidas por el flujo de campo magnético.

2.2.1. Configuración Toroidal

Una forma de definir al sistema de coordenadas que sirve para un tokamak es mostrada por Ariola y Pironti (2016) [6], donde se utilizan las coordenadas cilíndricas de posición r, ϕ y z con los vectores unitarios \hat{e}_r, \hat{e}_ϕ y \hat{e}_z (ver fig. 2.1). Se entiende a cualquier dirección paralela a \hat{e}_ϕ como la dirección toroidal y al plano perpendicular a tal dirección, como la dirección poloidal. También se define a $\Gamma(r)$ como una circunferencia dada por la rotación del vector \mathbf{r} alrededor de $r = 0$ que delimita a la superficie $S(r)$.

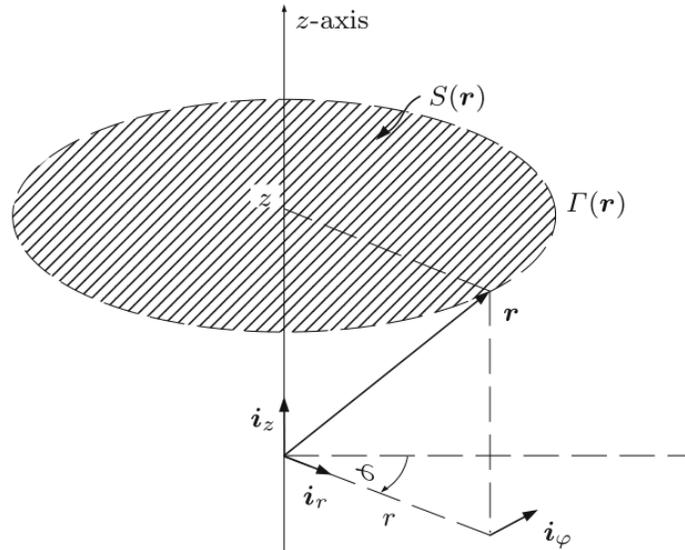


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cilíndricas usadas para un tokamak. Recuperado de [6].

Con esto, se puede definir a la función de flujo magnético poloidal como la medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesan la superficie $S(\mathbf{r})$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{S(\mathbf{r})} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.5)$$

de modo que, al ser paralelos en cada punto \hat{e}_z y \mathbf{dS} , entonces

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r r' B_z(r', z) dr'. \quad (2.6)$$

Por otro lado, haciendo uso de la ecuación 2.2a y la axisimetría del problema, la divergencia del campo magnético en coordenadas cilíndricas queda dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0. \quad (2.7)$$

Derivando la expresión 2.6 respecto a r y respecto a z , y combinando los resultados con la ecuación 2.7, se obtienen

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi = r B_z \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \psi = -r B_r, \quad (2.8)$$

que se pueden reescribir como

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi, \quad (2.9a)$$

$$B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi. \quad (2.9b)$$

Esto implica que el campo poloidal se puede expresar como

$$\mathbf{B}_p = B_r \hat{e}_r + B_z \hat{e}_z = \nabla \psi \times \nabla \varphi, \quad (2.10)$$

donde $\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_z$ y $\nabla \varphi = r^{-1} \hat{e}_\phi$. Además, se puede aplicar el hecho de que la divergencia del rotacional de un campo es cero a la ley de Ampère (ec. 2.2b), para obtener que

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (2.11)$$

lo que implica que, así como ocurrió con los campos 2.9a y 2.9b, y el flujo poloidal ψ en las expresiones 2.9, exista una función f tal que

$$J_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} f, \quad (2.12a)$$

$$J_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f. \quad (2.12b)$$

Desglosando la ley de Ampère en sus coordenadas:

$$-\frac{\partial}{\partial z} B_\varphi = \mu_0 J_r, \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_r - \frac{\partial}{\partial r} B_z = \mu_0 J_\varphi, \quad (2.13b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi = \mu_0 J_z. \quad (2.13c)$$

Al combinar las ecuaciones 2.12 con 2.13a y 2.13c, se obtiene que

$$B_\varphi = \mu_0 \frac{f}{r}, \quad (2.14)$$

y haciendo $F(r, z) = \mu_0 f(r, z)$, entonces

$$B_\varphi = F \nabla \varphi \cdot \hat{e}_\varphi, \quad (2.15)$$

con lo que el campo magnético total se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \varphi + F \nabla \varphi, \quad (2.16)$$

en términos de las funciones escalares ψ y F [6]. El primer término es la componente poloidal del campo mientras que el segundo, la componente toroidal.

2.2.2. Configuración Cilíndrica con Simetría Azimutal y Axial

Para efectos de este trabajo, se va a aproximar al aparato de confinamiento como un cilindro recto, ignorando los efectos debidos a la curvatura, lo que sería útil para observar lo que ocurre en una pequeña sección del toroide o en un tokamak con relación de aspecto grande. Dicho esto, se va a definir un nuevo sistema de coordenadas de manera análoga a la mostrada anteriormente para la configuración toroidal, pero adaptado a un plasma cilíndrico.

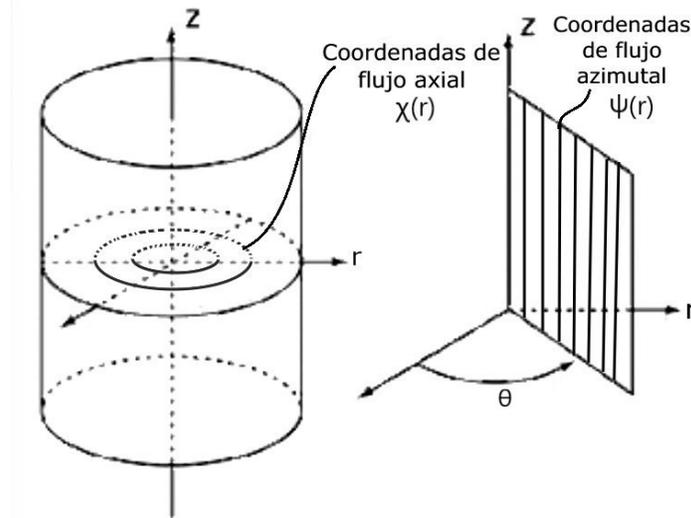


Figura 2.2: Sistema de coordenadas de flujo para una columna de plasma cilíndrica.

Se utilizará el sistema de coordenadas cilíndricas r, θ y z con vectores canónicos $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ y \hat{e}_z (ver fig. 2.2). Basados nuevamente en la divergencia nula del campo magnético (ecuación 2.2a), se define la función de flujo azimutal por

$$\psi = \psi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{S(r)} \mathbf{B}_\theta \cdot d\mathbf{S}_\theta, \quad (2.17)$$

que se entenderá como una medida de la cantidad de líneas de campo que atraviesan la sección transversal del cilindro ortogonal en cada punto a \hat{e}_θ , $d\mathbf{S}_\theta$. Por otro lado, el flujo axial queda definido por

$$\chi = \chi(\psi(r), z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}(r)} \mathbf{B}_z \cdot d\mathbf{S}_z, \quad (2.18)$$

como la cantidad de líneas de campo en la dirección z que atraviesan planos ortogonales a tal dirección $d\mathbf{S}_z$ (ver fig. 2.2).

Las definiciones anteriores serán convenientes para establecer un nuevo sistema de coordenadas generalizadas en términos de los flujos azimutal y axial. Otra cantidad que resulta útil definir ahora es el potencial vectorial \mathbf{A} que es tal que su rotacional devuelve el campo magnético:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.19)$$

Con el objeto de obtener un campo equivalente al de la ecuación 2.16, para el caso cilíndrico se definirá al potencial vectorial de una manera conveniente en términos de los flujos magnéticos axial y azimutal:

$$\mathbf{A} = \psi \nabla z + \chi \nabla \theta. \quad (2.20)$$

Luego, aplicando el rotacional a la expresión 2.20, y por la identidad vectorial A.1 y la ecuación 2.19, se sigue que

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla z + \psi (\nabla \times \nabla z) + \nabla \chi \times \nabla \theta + \chi (\nabla \times \nabla \theta), \quad (2.21)$$

donde $\nabla z = \hat{e}_z$, $\nabla \theta = r^{-1} \hat{e}_\theta$, $\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta$ y $\nabla \chi = \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \nabla \psi + \frac{\partial \chi}{\partial z} \hat{e}_z$. Dado que el rotacional del gradiente de cualquier campo escalar es nulo, entonces

$$\mathbf{B} = \underbrace{\nabla \psi \times \nabla z}_{B_\theta} + \underbrace{\nabla \chi \times \nabla \theta}_{B_z}, \quad (2.22)$$

que es la forma del campo a la que se esperaba llegar. Una motivación con más detalle del porqué se pide al campo expresado en este estilo puede leerse en el apéndice B, donde se deriva una expresión similar, la del caso toroidal, partiendo de un resultado topológico. Si ahora se supone la existencia de las simetrías axial y azimutal, es decir, que $\psi = \psi(r)$ y $\chi = \chi(\psi(r))$, entonces

$$\nabla \psi = \frac{d\psi}{dr} \hat{e}_r \quad \text{y} \quad \nabla \chi = \frac{d\chi}{d\psi} \nabla \psi = \frac{d\chi}{d\psi} \frac{d\psi}{dr} \hat{e}_r, \quad (2.23)$$

lo que hace que la componente axial del campo (ec. 2.22), sea

$$\mathbf{B}_z = \nabla \chi \times \nabla \theta = \frac{d\chi}{d\psi} \frac{d\chi}{dr} \hat{e}_r \times \frac{1}{r} \hat{e}_\theta = \frac{d\chi}{d\psi} \frac{d\psi}{dr} \frac{1}{r} \hat{e}_z. \quad (2.24)$$

Definiendo ahora al campo escalar

$$b(\psi) = \frac{d\chi}{d\psi} \frac{d\psi}{dr} \frac{1}{r}, \quad (2.25)$$

entonces la componente axial del campo es

$$\mathbf{B}_z = b(\psi)\hat{e}_z. \quad (2.26)$$

Sustituyendo la expresión 2.25 en la ecuación 2.22, se obtiene un campo magnético con una forma equivalente a la de 2.16 que se acople a la forma cilíndrica del plasma:

$$\mathbf{B} = \underbrace{\nabla\psi \times \nabla z}_{B_\theta} + \underbrace{b(\psi)\hat{e}_z}_{B_z}. \quad (2.27)$$

Las componentes del campo se resumen en:

$$B_\theta = \nabla\psi \times \nabla z = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (2.28a)$$

$$B_z = b(\psi). \quad (2.28b)$$

Para hacer cálculos de equilibrio se tendrán varios parámetros libres entre los que se incluye $b(\psi)$. Por eso conviene dar una expresión, resultante de 2.25, para recuperar el valor del flujo axial χ en términos de este parámetro y el flujo azimutal:

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{rb(\psi)}{\frac{\partial\psi}{\partial r}} = -r\frac{B_z}{B_\theta}, \quad (2.29)$$

donde se utilizaron las ecuaciones 2.28a y 2.28b para la tercer igualdad. De la definición del factor de seguridad dada por 1.6, podemos notar que

$$\frac{d\chi}{d\psi} = -R_0q(r), \quad (2.30)$$

para un radio que está normalizado. Esta cantidad será de interés para conocer sobre la estabilidad del sistema de confinamiento. Integrando a la ecuación 2.29, finalmente se obtiene que

$$\chi = \int_0^r r'b(\psi)dr'. \quad (2.31)$$

3 Equilibrio Magnetohidrodinámico

El equilibrio de un plasma mediante confinamiento magnético se puede describir con el modelo magnetohidrodinámico adoptado a través de la ecuación de movimiento 2.1. En el caso de dispositivos de confinamiento suele considerarse solamente equilibrio estático, es decir, que $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0}$ [4], además de que la densidad de los plasmas de laboratorio es generalmente baja, lo que permite ignorarle también el término convectivo de la ecuación 2.1. Así, la ecuación de movimiento para un plasma en equilibrio es:

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente, \mathbf{B} el campo de inducción y P el campo escalar de presión. Lo que toca enseguida, es acoplar el conjunto de ecuaciones MHD con las ecuaciones de la sección anterior para así obtener una ecuación diferencial que describa al equilibrio en términos de las coordenadas de flujo.

3.1. Equilibrio con Geometría Toroidal

Para la geometría definida en la sección 2.2.1, si se sustituye el campo magnético derivado en la ec. 2.16 en la ley de Ampère, se sigue

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times (\nabla \psi \times \nabla \varphi + F \nabla \varphi) \\ &= \nabla \times \nabla \times (\psi \nabla \varphi) + \nabla F \times \nabla \varphi \\ &= r^2 \nabla \cdot (r^{-2} \nabla \psi) + \nabla F \times \nabla \varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

De esta forma, si se define el operador laplaciano estrella Δ^* por

$$\Delta^* \psi = r^2 \nabla \cdot (r^{-2} \nabla \psi), \quad (3.3)$$

resulta lo siguiente

$$\mu_0 \mathbf{J} = \Delta^* \psi \nabla \varphi + \nabla F \times \nabla \varphi. \quad (3.4)$$

Sustituyendo la corriente dada por 3.4 y el campo magnético de 2.16 en la ec. 3.1, entonces se obtiene que

$$\nabla P = -\frac{1}{r} J_\varphi \nabla \psi - \frac{1}{\mu_0 r^2} F \nabla F. \quad (3.5)$$

Al considerar que la presión P y el parámetro F solo dependen de ψ , entonces

$$\nabla P = \frac{d}{d\psi} P \nabla \psi, \quad (3.6a)$$

$$\nabla F = \frac{d}{d\psi} F \nabla \psi, \quad (3.6b)$$

,por lo que

$$J_\varphi = -r \frac{d}{d\psi} P - \frac{1}{\mu_0 r} F \frac{d}{d\psi} F. \quad (3.7)$$

Sustituyendo la corriente azimutal en la proyección de la ecuación 3.4 sobre esa misma dirección, se obtiene entonces la denominada ecuación de Grad-Shafranov que describe el equilibrio del plasma:

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{d}{d\psi} P - F \frac{d}{d\psi} F. \quad (3.8)$$

3.2. Equilibrio con Geometría Cilíndrica

Con el fin de obtener un resultado como el de la sección anterior equivalente a la geometría presentada en la sección 2.2.2, se parte por reescribir el campo dado por la ecuación 2.27 en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\psi \hat{e}_z) + b(\psi) \hat{e}_z, \quad (3.9)$$

de donde se podrá despejar a la corriente a través de la ley de Ampère, obteniendo el rotacional de \mathbf{B} . Por la presencia del producto vectorial en el término izquierdo, es útil la identidad vectorial A.2, con lo que se sigue

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{B}, \\ &= \nabla \times [\nabla \times (\psi \hat{e}_z)] + \nabla b \times \hat{e}_z, \\ &= \nabla(\nabla \cdot \psi \hat{e}_z) - \nabla^2 \psi \hat{e}_z + \frac{db}{d\psi} \nabla \psi \times \hat{e}_z, \\ &= -\nabla^2 \psi \hat{e}_z + b' \nabla \psi \times \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tomando solo la componente sobre el eje z se obtiene

$$\mu_0 J_z = -\nabla^2 \psi, \quad (3.11)$$

que es la ecuación con la que se va a trabajar en resolver en las siguientes dos secciones del texto. Sustituyendo la componente axial de la corriente obtenida en 3.10 y el campo de inducción dado por 2.27 en la ecuación de equilibrio 3.1, resulta

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla P &= (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ &= (-\nabla^2 \psi \hat{e}_z) \times (\nabla \psi \times \hat{e}_z) + b b' (\nabla \psi \times \hat{e}_z) \times \hat{e}_z, \\ &= -\nabla^2 \psi \nabla \psi - b b' \nabla \psi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Fijándose de nuevo en la ecuación de equilibrio (3.1) notamos que por definición del producto vectorial, el gradiente de presión es perpendicular tanto a \mathbf{J} como a \mathbf{B} . Es decir que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{J} \cdot \nabla P = 0, \quad (3.13)$$

pero por definición ∇P es perpendicular a P , lo cual indica que tanto \mathbf{B} como \mathbf{J} descansan sobre superficies donde la presión es constante. Dicho de otra forma, la corriente y el campo fluyen sobre superficies de presión constante y no cruzan a través de estas. Esto permite escribir a la presión como una función de las coordenadas de flujo $P = P(\psi)$ y

$$\nabla P = \frac{dP}{d\psi} \nabla \psi = P' \nabla \psi, \quad (3.14)$$

con lo que se puede reescribir a la ec. 3.12 como

$$\mu_0 P' \nabla \psi = -\nabla^2 \psi \nabla \psi - bb' \nabla \psi, \quad (3.15)$$

de donde finalmente se obtiene la ecuación de equilibrio para un plasma con geometría cilíndrica:

$$\nabla^2 \psi + b(\psi)b'(\psi) = -\mu_0 P'(\psi). \quad (3.16)$$

Puede notarse que esta es una ecuación diferencial en general no lineal que requiere de los parámetros: $b(\psi)$ y $P(\psi)$. La manera en la que se va a resolver es proponiendo la forma particular de ellos o en general, de la corriente axial $J_z(\psi)$, según la ecuación 3.11. Para la solución, y debido a la no linealidad, se necesitará del uso de métodos numéricos para poder obtener algunas soluciones, aunque existe un caso particular en el cual se pueden obtener soluciones analíticas y que, además, va a servir para validar los algoritmos. Este es el caso del campo libre de fuerzas. Pero antes de continuar con la solución de la ecuación diferencial, es útil definir el siguiente sistema de coordenadas adimensionales para facilitar los cálculos computacionales:

$$\Psi = \frac{\psi}{\psi_0} \quad \text{y} \quad x = \frac{r}{R_0}, \quad (3.17)$$

donde ψ_0 se determinaría experimentalmente y R_0 representa el radio del aparato cilíndrico. Se puede reescribir a la ecuación 4.18 usando el laplaciano en coordenadas cilíndricas y las nuevas coordenadas como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -\mu_0 \frac{R_0^2}{\psi_0^2} P' - \frac{R_0^2}{\psi_0^2} bb', \quad (3.18)$$

o en términos de la corriente axial por

$$\frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -\frac{\mu_0 R_0^2}{\psi_0} J_z, \quad (3.19)$$

donde, para efectos demostrativos, se va a considerar simplemente que $\mu_0 = r_0 = \psi_0 = 1$.

4 Equilibrio en un Campo Libre de Fuerzas

Ahora que se ha determinado la forma general que describe el equilibrio en un segmento diferencial de plasma (ec. 3.1), así como su expresión en términos del flujo magnético, se puede hablar de un caso particular que permita obtener alguna solución analítica para la ec. 3.16, el caso del *Campo Libre de Fuerzas*, al que se hará referencia de ahora en adelante por las siglas CLF.

Algo que ocurre en plasmas de β pequeña, donde, según la expresión 1.5, la presión del campo magnético es mucho mayor a la presión del plasma, es que el gradiente de presión es despreciable, pues la presión se mantiene aproximadamente constante [8]. Dicho de otro modo,

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P = 0. \quad (4.1)$$

Esta relación también implica que en este caso particular, la corriente se mantiene paralela al campo magnético. Usando la ley de Ampère para sustituir la corriente de la expresión anterior, resulta que

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (4.2)$$

lo cual implica que el rotacional del campo es paralelo al mismo campo y por lo tanto, que existe algún escalar λ tal que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}. \quad (4.3)$$

Se puede llegar a este mismo resultado a partir de un principio, mostrado por Woltjer en [9] y discutido por Taylor en [10] y [11], que establece que los campos libres de fuerza representan un estado de energía magnética mínima. Esto tiene implicaciones físicas importantes, pues el resultado proviene de una cantidad conservada relacionada con la topología del plasma, denominada helicidad magnética, y produce que el campo no pueda producir movimiento sobre las partículas, haciendo que la fuerza de Lorentz se desvanezca. Para llegar a ello, primero debe hacerse la suposición de que el plasma sea perfectamente conductor, lo cual es válido para plasmas de alta temperatura. Así la resistividad sería nula y la ley de Ohm(ec. 2.3b) quedaría como

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

Calculando el rotacional de 4.4

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde en la segunda línea se utilizó la ley de inducción de Faraday. Si se escribe al campo magnético de la derivada parcial respecto al tiempo de 4.5 en términos del potencial vectorial, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \nabla F, \quad (4.6)$$

donde F es una norma arbitraria. Haciendo el producto escalar de la ec. 4.6 con el campo

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \nabla F, \quad (4.7)$$

se deduce que F tiene valores únicos solo si $\partial \mathbf{A} / \partial t$ tiene las constricciones

$$0 = \oint \frac{dl}{B} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \oint \frac{dS}{|\nabla \psi|} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Esta condición induce el invariante mencionado anteriormente si se expresa de la siguiente forma conveniente: *Para cada volumen V delimitado por líneas de campo, la cantidad*

$$K \equiv \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d\tau, \quad (4.9)$$

nombrada por helicidad magnética, es una constante de movimiento. Si se minimiza la energía de campo magnético

$$\frac{1}{8\pi} \int_V |\mathbf{B}|^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int_V |\nabla \times \mathbf{A}|^2 dV, \quad (4.10)$$

entonces se encuentra, bajo la condición de la conservación de la helicidad K , que

$$\int_V [2\nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} - \lambda(\delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A})] dV = 0, \quad (4.11)$$

donde se usó al multiplicador de Lagrange convenientemente denotado por λ . Integrando por partes 4.11, entonces

$$\int_V [\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \lambda \nabla \times \mathbf{A}] \cdot \delta \mathbf{A} dV = 0, \quad (4.12)$$

que bajo la consideración de que $\delta \mathbf{A}$ es arbitrario y que las integrales de superficie deben desvanecerse en un sistema cerrado, se reduce a

$$0 = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \lambda \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} - \lambda \mathbf{B}. \quad (4.13)$$

De 4.13 se obtiene, de nuevo, la expresión del campo libre de fuerzas 4.3 y se concluye que este, efectivamente, aparece como resultado de la relajación del campo magnético a su estado de mínima energía. De esto mismo además resulta que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \lambda = 0, \quad (4.14)$$

lo que implica que λ es constante sobre las superficies de campo magnético constante. Cabe notar que el invariante K es esencialmente topológico y representa la relación entre las líneas de fuerza. A través de este se entiende el mecanismo con el que un plasma se relaja mediante fenómenos de reconexión magnética, conservando la helicidad pero disipando energía magnética. Esto lo argumentó Taylor en [11] de la siguiente manera: *Si una línea cerrada de campo está inicialmente ligada a otra n veces en un plasma perfectamente conductor, entonces deberá permanecer así durante cualquier cambio posterior en el plasma*, que coincide con lo que ilustra Bellan [4] en la figura 4.1. En el diagrama se observan dos anillos inicialmente separados que representan las componentes del flujo de campo magnético en dos distintas direcciones. Luego se muestra un corte a los tubos de flujo que hace a los dos anillos terminar conectados. Este ‘corte’ representa el fenómeno de reconexión magnética, donde las líneas de campo se reconfiguran debido a un fenómeno de filamentación de las corrientes en el plasma, lo que produce el cambio en la topología. Posteriormente, se observa la deformación de los anillos mientras se mantiene la conexión entre las líneas, es decir, el argumento de Taylor.

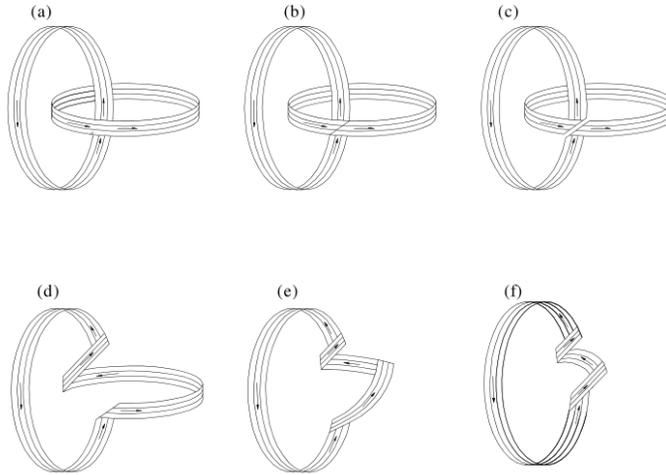


Figura 4.1: Proceso de conservación de la helicidad magnética. (a) Dos tubos de flujo ligados y sin torceduras están anidados entre sí; (b) corte en los tubos; (c) Reconexión de los tubos en el corte realizado; (d) deformación; (e) Más deformación; (f) Deformación que derivó en dos completas torciones del tubo de flujo que representa al campo magnético. Recuperado de [4].

Ahora, con el objeto de obtener los perfiles de flujo y campo magnético que se encuentran en un CLF, se debe volver a la expresión 4.3. Usando 2.27 y el último renglón de 3.10, 4.3 se convierte en

$$\lambda \mathbf{B} = \lambda (\nabla \psi \times \hat{e}_z + b(\psi) \hat{e}_z) = -\nabla^2 \psi \hat{e}_z + b' \nabla \psi \times \hat{e}_z, \quad (4.15)$$

lo que implica

$$b'(\psi) = \lambda. \quad (4.16)$$

Integrando la expresión anterior para el caso particular en que λ es una constante, resulta que

$$b(\psi) = \lambda\psi + \lambda_0, \quad (4.17)$$

lo que hace que $b(\psi)b'(\psi) = \lambda^2\psi$ y la ecuación 3.16 se vuelva

$$\nabla^2\psi + \lambda^2\psi = 0, \quad (4.18)$$

la cual no es más que la ecuación de Hemholtz, para la que se tiene una solución analítica bien conocida a la que se puede llegar por el método de separación de variables. Se consideró a λ_0 como una constante que simplemente se igualó a cero. Normalizando la ecuación con las unidades adimensionales definidas en la ec. 3.17, se llega a

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = -\left(\frac{\mu_0 r_0^2}{\psi_0}\right)\lambda^2\Psi, \quad (4.19)$$

y haciendo $\Lambda^2 = \left(\frac{\mu_0 r_0^2}{\psi_0}\right)\lambda^2$, entonces

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \Lambda^2\Psi = 0. \quad (4.20)$$

Suponiendo que la solución es de la forma $\Psi = R(r)\Theta(\theta)$ y sustituyendo esto en la ec. 4.18, se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(\Lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0, \quad (4.21a)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \nu^2\Theta = 0, \quad (4.21b)$$

donde ν es una constante de separación. Las soluciones a estas ecuaciones diferenciales son

$$\Theta(\theta) = C_1 e^{\pm i\nu\theta}, \quad (4.22a)$$

$$R(\Lambda x) = C_2 J_\nu(\Lambda x), \quad (4.22b)$$

donde $J_\nu(\Lambda x)$ es la función de Bessel de orden ν . Así, la solución completa de 4.20 es

$$\Psi(x, \theta) = J_\nu(\Lambda x) [A_\nu e^{i\nu\theta} + B_\nu e^{-i\nu\theta}]. \quad (4.23)$$

En el caso en el que hay simetría azimutal, donde la sección transversal del aparato es circular, se tiene que $\nu = 0$ y entonces

$$\Psi(x) = C J_0(\Lambda x), \quad (4.24)$$

con C constante. Entonces los campos magnéticos, por las ecuaciones 2.28a y 2.28b, son

$$B_\theta = -\Lambda C J_1(\Lambda x) \quad (4.25a)$$

$$B_z = \Lambda C J_0(\Lambda x). \quad (4.25b)$$

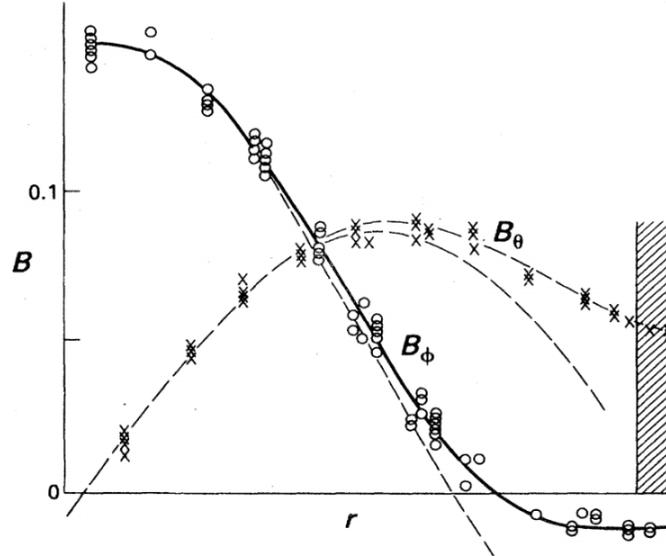


Figura 4.2: Perfiles magnéticos teóricos y experimentales de un reversed field pinch. B_ϕ representa el campo magnético toroidal, que se aproxima por el axial en geometría cilíndrica, y B_θ el poloidal, que se aproxima por el azimutal. Los puntos representan mediciones experimentales mientras que las líneas continuas, las soluciones teóricas. Recuperado de [11].

Puede notarse que las soluciones obtenidas para el campo (ver fig. 4.2) se aproximan razonablemente a las que ocurren experimentalmente en un reversed field pinch o un pinch de campo invertido (RFP). En estos dispositivos se aplica con bobinas externas un campo magnético toroidal B_0 y por algún proceso de ionización, se crea un plasma para luego introducir una corriente I que se encarga de crear el efecto de compresión. Durante este proceso, ocurren algunos fenómenos interesantes, ya que se ha observado que después de una fase inicial turbulenta, el plasma alcanza un estado más quieto en el que las fluctuaciones se reducen y en el que los perfiles de campo magnético son independientes del experimento en particular, dependiendo solo del parámetro $2I/RB_0$. Este parámetro, además, tiene un valor crítico que al excederse, el estado relajado del campo magnético es tal que su componente toroidal se invierte cerca de la pared [11].

5 Análisis Numérico del Problema de Equilibrio

Como ya se vio anteriormente, las ecuaciones de equilibrio de un plasma son de segundo orden y en general, no lineales, lo que hace necesario utilizar métodos numéricos para resolverlas. En este trabajo se analiza el problema desde dos puntos de vista distintos. Por un lado, el flujo magnético, así como la derivada de este, deben tener un valor finito en el origen, el cual se mide experimentalmente, volviéndose el hallarlo un problema de condiciones iniciales. Por otro lado, el hecho de que un plasma en confinamiento tiene un perfil de presión que se anula o se vuelve mínimo cerca de las paredes que lo contienen, como se observa en la figura 1.4(b), da una condición en la frontera para la ecuación de equilibrio, cuando la presión depende del flujo.

5.1. Equilibrio como Problema de Condiciones Iniciales

Tal y como se plantearon las ecuaciones de equilibrio del plasma, buscar una solución equivale a resolver el siguiente problema de segundo orden y de condiciones iniciales:

Sea $\psi(r)$ una función dos veces diferenciable, con $r \in [0, 1]$, $f(r, \psi, \psi')$ una función arbitraria y α y α' constantes reales, entonces para la ecuación

$$\psi''(r) = f(r, \psi, \psi'), \quad (5.1)$$

con condiciones iniciales $\psi(r = 0) = \alpha$, $\psi'(r = 0) = \alpha'$ se puede obtener una aproximación a su solución mediante el siguiente esquema de Runge - Kutta de cuarto

orden:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\psi'_n \\
l_1 &= hf(r_n, \psi_n, \psi'_n) \\
k_2 &= h(\psi'_n + (1/2)l_1) \\
l_2 &= hf(r_n + (1/2)h, \psi_n + (1/2)k_1h, \psi'_n + (1/2)l_1) \\
k_3 &= h(\psi'_n + (1/2)l_2) \\
l_3 &= f(r_n + (1/2)h, \psi_n + (1/2)k_2, \psi'_n + (1/2)l_2) \\
k_4 &= (\psi'_n + l_3) \\
l_4 &= f(r_n + h, \psi_n + k_3, \psi'_n + l_3) \\
\psi'_{n+1} &= \psi'_n + (h/6)(l_1 + 2l_2) + 2l_3 + l_4 \\
\psi_{n+1} &= \psi_n + (h/6)(k_1 + 2k_2) + 2k_3 + k_4,
\end{aligned}$$

el cual se observa implementado en la función de python del código (D.1). Tal y como se menciona en [12], este método a través de esquemas de Runge - Kutta (ver sección C.1) es una forma muy estable y precisa de resolver problemas como el presentado.

5.2. Equilibrio como Problema de Condiciones de Frontera

Ahora, considerando el equilibrio de un plasma como problema de condiciones a la frontera, el planteamiento sería de la siguiente manera:

Sean $\psi(r)$ la función de flujo, dos veces diferenciable, con $r \in [0, 1]$, $f(t, \psi, \psi')$ una función arbitraria y α y β constantes reales, entonces la ecuación de equilibrio es de la forma

$$\psi''(r) = f(r, \psi, \psi'), \quad (5.3)$$

con condiciones iniciales $\psi(0) = \alpha$ y $\psi(R) = \beta$. En este caso, lo que se conoce es el valor de la función de flujo en el centro del aparato, ya que por sentido físico, este debe tener un valor finito $\psi(r = 0) = \alpha$. Sin embargo, dado que en principio no se conoce $\psi'(0)$, se propone resolver el problema como uno de condiciones iniciales, dando una aproximación inicial de la derivada $\psi'(0) = t$ y luego utilizando RK. Luego procede ver si la solución obtenida cumple la condición esperada en la frontera $\psi(R) = \beta$, y si esto no se satisface, se puede suponer que el valor inicial escogido de t no era el correcto. En seguida, se modifica el valor de t y se vuelve a usar el esquema RK. Este proceso se repite hasta que se obtenga una solución que cumpla la condición en la frontera. Esto hace que el problema consista en encontrar un t tal que $\psi(R) - \beta = 0$, es decir, en un problema de búsqueda de raíces. Conviene escoger el método de Newton-Raphson, ya que se sabe, es uno de los más rápidos en converger a la solución [13]. Este proceso descrito, conocido por *método del disparo no lineal*, se analizará de manera más detallada a continuación.

Por cómo se propone t , se puede considerar que la solución final depende de este $\psi = \psi(r, t)$, volviéndose una variable más, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi''}{\partial t}(r, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(r, \psi, \psi'), \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}(r, \psi, \psi') \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \psi}(r, \psi, \psi') \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial \psi'}(r, \psi, \psi') \frac{\partial \psi'}{\partial t}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Con r y t independientes entre sí. Entonces $\partial r / \partial t = 0$ y

$$\frac{\partial \psi''}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \psi}(r, \psi, \psi') \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \psi'}(r, \psi, \psi') \frac{\partial \psi'}{\partial t}\tag{5.5}$$

es una ecuación con condiciones de frontera

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, t) = 0 \quad y \quad \frac{\partial \psi'}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial t}{\partial t} = 1\tag{5.6}$$

Definiendo $z(x, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(r, t)$ y sustituyendo esto en la ecuación 5.5,

$$z''(r, t) = \frac{\partial f}{\partial \psi}(r, \psi, \psi')z + \frac{\partial f}{\partial \psi'}z', \quad z(0, t) = 0, \quad z'(0, t) = 1,\tag{5.7}$$

con $0 \leq r \leq R$. De esta forma, para cada valor propuesto de t deben resolverse (5.3) y (5.7).

Sea $w = \psi'$, entonces 5.3 se convierte en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dr} &= v, & \psi(0) &= \alpha, \\ \frac{dv}{dr} &= f(r, \psi, \psi'), & v(0) &= t.\end{aligned}$$

De forma análoga, para 5.7 se tiene el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dr} &= w, & z(0) &= 0, \\ \frac{dw}{dr} &= g(r, \psi, \psi'), & w(0) &= 1.\end{aligned}$$

donde $g(r, \psi, \psi') = z \frac{\partial f}{\partial \psi}(r, \psi, \psi') + w \frac{\partial f(r, \psi, \psi')}{\partial \psi'}$. Ambos sistemas de ecuaciones se resuelven simultáneamente en cada iteración de t y para cada uno, se puede usar un esquema de RK como el de la sección C.1.

5.3. Validación con el Caso del Campo Libre de Fuerzas

El caso del campo libre de fuerzas discutido en la sección 4 es de interés al permitir poner a prueba los algoritmos realizados para resolver la ecuación de equilibrio. Para facilitar la escritura del código, se empezó por reescribir 4.20 bajo la suposición de que hay simetría azimutal,

$$f(x, \Psi, \Psi') = \Psi''(x) = -\frac{1}{x}\Psi'(x) - \Lambda^2\Psi(x), \quad (5.8)$$

donde $\Lambda = \lambda r_0 = 1$. Como se observa en 5.8, el primer término empezando por la izquierda de la función $f(x, \Psi, \Psi')$, contiene el factor $1/x$, el cual diverge en $x = 0$ y proviene del laplaciano en la geometría adoptada, lo que indica que el problema con el origen continuaría apareciendo para cualquier tipo de perfil. Esto implicó dar un tratamiento particular en el origen, pues en algunos casos, sobre todo cuando la derivada del flujo no tiende a cero a la misma velocidad que lo hace x , entonces los resultados devueltos por los métodos RK divergen. La técnica por la que se optó fue hacer una expansión en serie de Taylor a la ecuación de equilibrio alrededor del origen y obtener una solución analítica a tal ecuación, la que serviría en alguna vecindad del origen. Fuera de esa vecindad, el resto de la solución sería aproximada numéricamente, en una zona donde ya se encuentra el problema de la divergencia. En este caso particular del CLF, se utilizó a la ya conocida solución analítica dada por 4.24 en el intervalo $x \in [-0.05, 0.05]$ y se empató con la solución numérica.

Desde la perspectiva de condiciones iniciales, al código se le pasaron los valores de la solución analítica y su derivada en los extremos de la vecindad, es decir, $\Psi(0.05) = J_0(0.05 \cdot \Lambda)$ y $\Psi'(0.05) = \Lambda J_1(0.05 \cdot \Lambda)$. Con esas consideraciones, se obtuvieron los resultados para el flujo magnético de la fig. 5.1, donde se graficó también la solución analítica dada por 4.24 y el error absoluto de la aproximación.

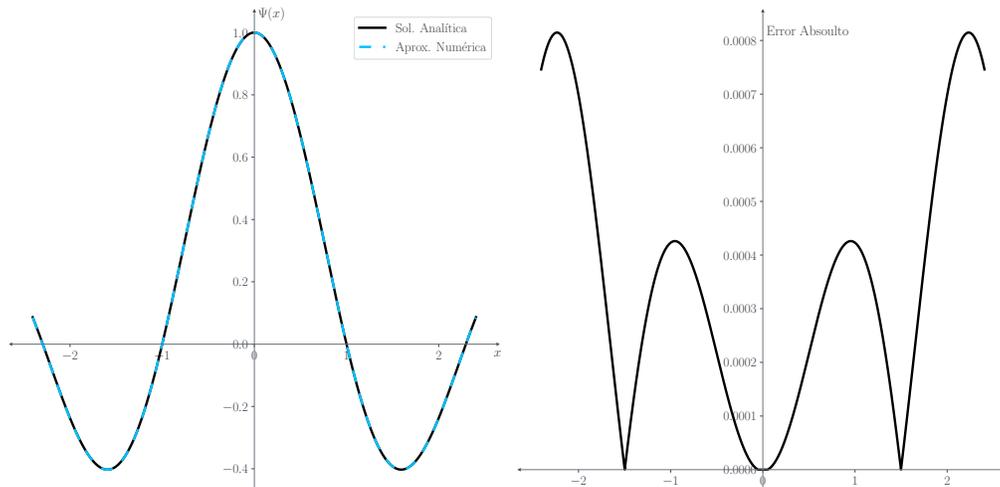


Figura 5.1: Flujo magnético del campo libre de fuerzas resuelto como un problema de condiciones iniciales con el código (D.2)

Desde la perspectiva de condiciones de frontera, se obtuvieron los resultados de la fig. 5.2 por el proceso descrito en la sección 5.2. Nuevamente, se le pasó por condición inicial el valor del flujo analítico en el extremo de la vecindad y como condición de frontera el valor de la ya conocida solución analítica en radio fijo de longitud 3. Es decir, se resolvió 5.8 con las condiciones $\Psi(0.05) = J_0(0.05 \cdot \Lambda)$ y $\Psi(3) = J_0(3\Lambda)$.

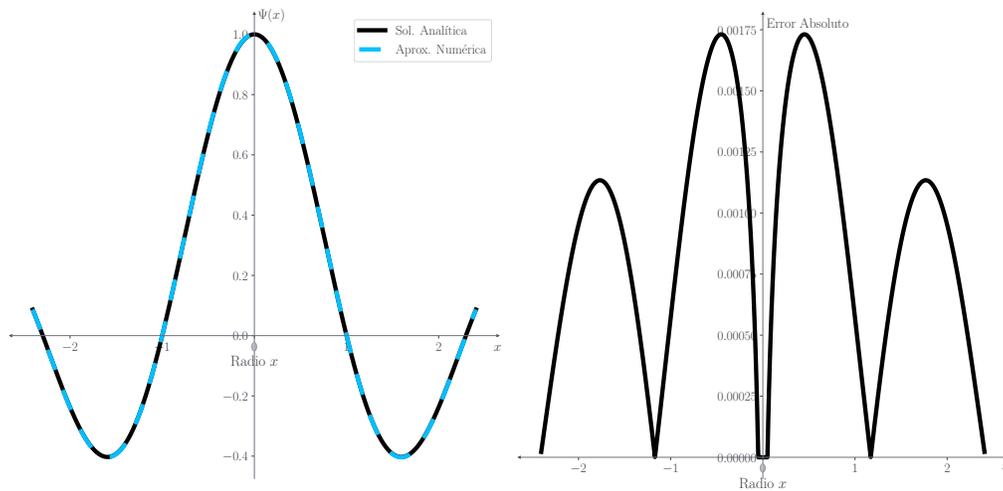


Figura 5.2: Flujo magnético del campo libre de fuerzas resuelto como un problema de frontera fija con el código (D.4).

Se puede notar cualitativamente al comparar las curvas analítica y numérica, que los cálculos empatan congruentemente por ambos métodos. Usando estos resultados y las ecuaciones 2.28a y 2.28b, así como los campos analíticos dados por 4.25b, 4.25a y la ec. 1.6, se obtienen la configuración de campos magnéticos así como el factor de seguridad de la figura 5.3.

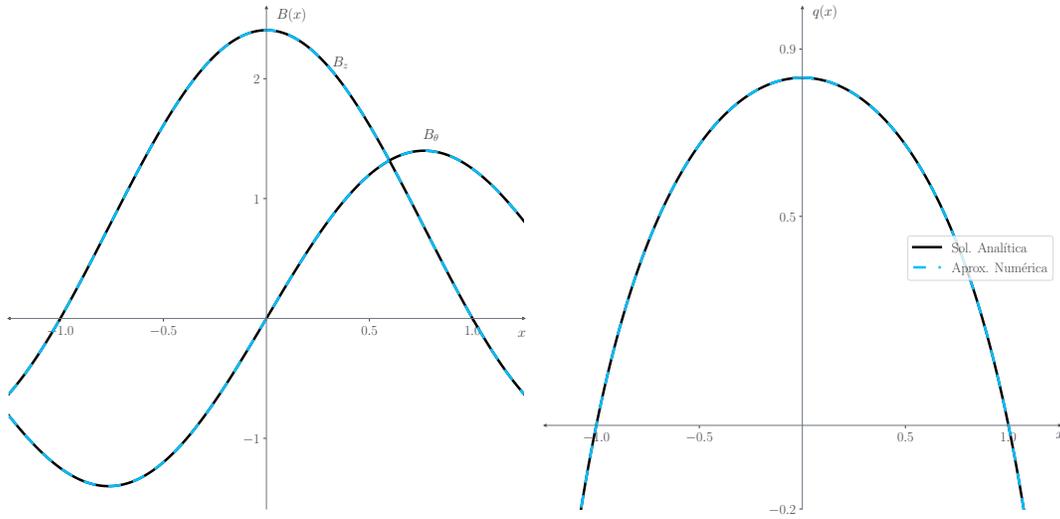


Figura 5.3: Perfiles de campo magnético y del factor de seguridad q . En líneas punteadas se muestran las soluciones analíticas mientras que en líneas continuas, las numéricas.

Teniendo ya la forma de los campos magnéticos, con la ecuación 2.31 se calculó el flujo axial, integrando numéricamente con la Regla de Simpson C.5, obteniéndose el flujo axial de la figura 5.4.

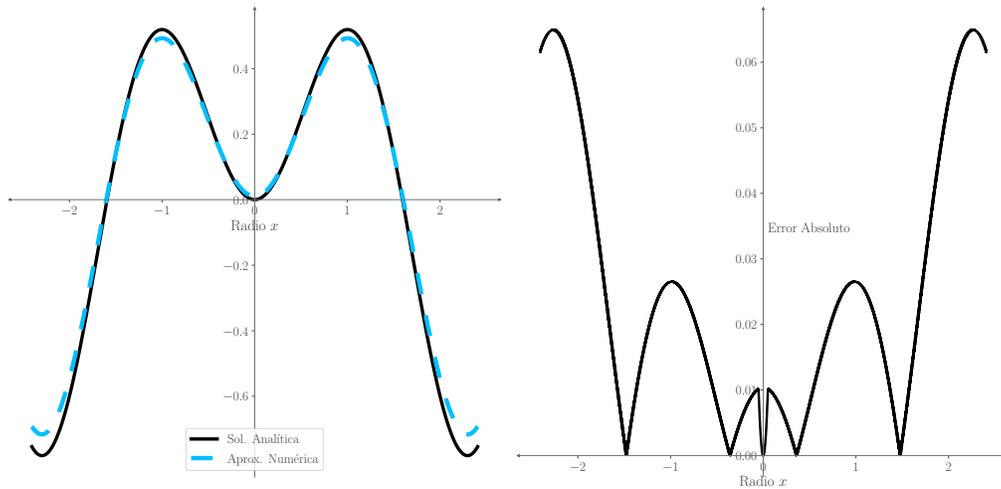


Figura 5.4: Perfil de flujo axial χ y error absoluto respecto de la solución analítica obtenida presentada en la ec.5.9.

En la misma figura 5.4 puede observarse la comparación con el flujo axial analítico que se obtuvo al integrar 2.31 como se presenta a continuación. De la ec. 4.25b se tiene $b(\psi) = B_z(x) = \Lambda C J_0(\Lambda x)$, de forma que, usando la identidad de las funciones

de Bessel A.3 y el cambio de variable $\Lambda x \rightarrow u$, se sigue

$$\begin{aligned}\chi(x) &= C \int_0^{\Lambda x} \Lambda x' J_0(\Lambda x') dx' \\ &= \frac{C}{\Lambda} u' J_1(u') \Big|_0^u \\ &= Cx J_1(\Lambda x).\end{aligned}\tag{5.9}$$

Luego, para comprobar que con la ec. 2.30 se reproduce el factor de seguridad mostrado en la figura 5.3, se aplicó la regla de la cadena para obtener

$$q(x) = \frac{d\chi}{d\psi} = \frac{d\chi}{dr} \frac{dr}{d\psi} = \frac{d\chi}{dr} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1},\tag{5.10}$$

y así calcular $q(x)$ en términos de las derivadas de los flujos magnéticos. Para la diferenciación numérica se utilizaron las reglas C.2 y C.3 para los extremos y C.4 para los puntos interiores. Se observó que al derivar el flujo axial respecto al flujo azimutal, como se indica en la ecuación 2.30, se recupera la curva del factor de seguridad obtenido previamente mediante la expresión 1.6. La congruencia entre los resultados obtenidos teóricamente ayudó a dar validez a los códigos utilizados, así como a los métodos escogidos, lo que permite aplicarlos para analizar perfiles de equilibrio distintos que pudieran no tener soluciones analíticas.

5.4. Resultados con Perfiles Polinomiales de Equilibrio

Habiendo probado el código, se pueden ahora analizar nuevas formas de la ecuación de equilibrio. Dado que en principio se requiere tener control de los perfiles de presión del plasma resultantes, se propone que la ecuación de equilibrio azimutal sea de la forma

$$\nabla^2 \Psi = \mu_0 J_z(\Psi) = \sum_{i=0}^n A_i \Psi^i = \sum_{i=0}^n (\alpha_i + \beta_i) \Psi^i, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n,\tag{5.11}$$

donde

$$A_i = \alpha_i + \beta_i, \quad \text{con } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R},\tag{5.12a}$$

$$\mu_0 P(\Psi) = - \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{i+1} \Psi^{i+1} - p_0 \quad \text{y}\tag{5.12b}$$

$$b(\Psi) = \pm \sqrt{-2 \left(\sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{i+1} \Psi^{i+1} + b_0 \right)},\tag{5.12c}$$

con p_0 y b_0 parámetros para controlar la altura de las curvas y asegurar que $b(\psi)$ solo tenga valores reales, por sentido físico. Se comenzó por analizar el problema como

uno de condiciones de frontera para $n = 1$ en las ecuaciones 5.12b y 5.12c, de forma que

$$-\mu_0 P = \alpha_1 \Psi^2 + \alpha_2 \Psi + \alpha_3, \quad (5.13a)$$

$$-\frac{1}{2} b^2 = \frac{\beta_1}{2} \Psi^2 + \beta_2 \Psi + \beta_3, \quad (5.13b)$$

con lo que la ecuación de equilibrio se ve como

$$\nabla^2 \Psi = (\alpha_1 + \beta_1) \Psi + (\alpha_2 + \beta_2), \quad \text{con } \Psi(x = 0) = \Psi_0, \Psi(x = R) = 0, \quad (5.14)$$

donde la condición de frontera se escogió para que se cumpla que $P(\Psi((r = R))) = 0$. Expandiendo el laplaciano en coordenadas cilíndricas, entonces la función $f(\Psi, \Psi', x)$ que se ingresa en el algoritmo de RK queda dada por

$$\Psi'' = f(\Psi, \Psi', x) = -(1/x) \Psi' + (\alpha_2 + \beta_2) \Psi^2 + (\alpha_1 + \beta_1) \Psi + (\alpha_0 + \beta_0). \quad (5.15)$$

De la aproximación obtenida mostrada en la fig. 5.5, se observa que con los parámetros escogidos se tienen soluciones parecidas a las del campo libre de fuerzas (ver fig. 5.1).

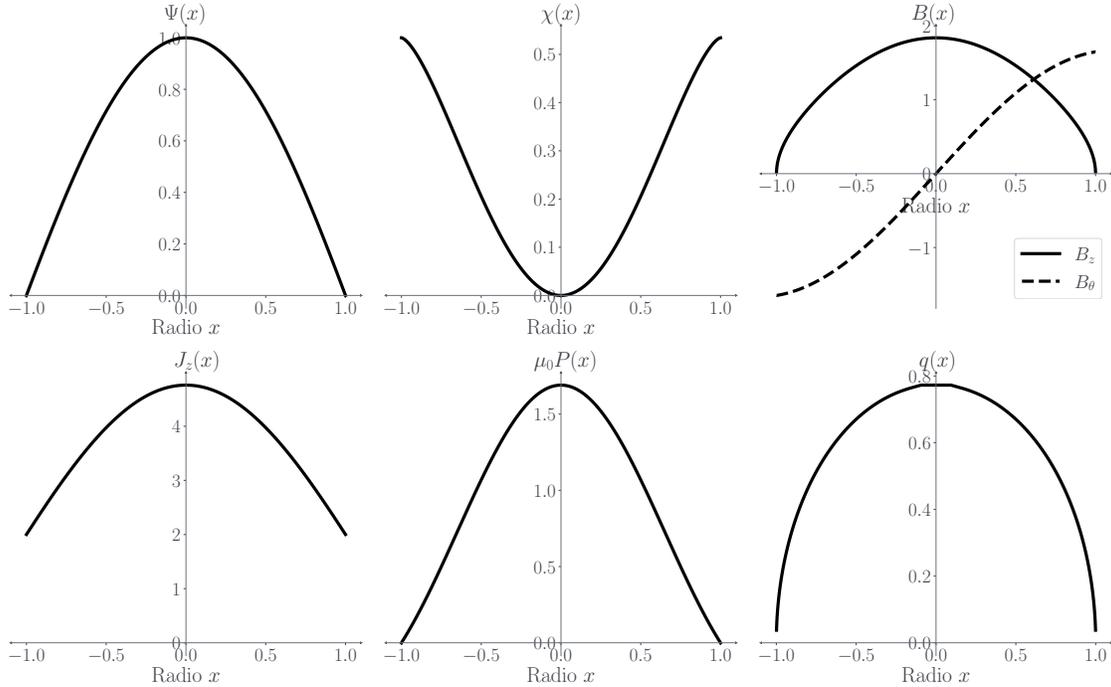


Figura 5.5: Curvas solución de la ecuación 5.14 con los parámetros: $\alpha_2 = -0.0$, $\beta_2 = -0.0$, $\alpha_1 = -1.38$, $\beta_1 = -1.38$, $\alpha_0 = -1.0$, $\beta_0 = -1.0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Se debe notar que debido a las condiciones de frontera impuestas, en realidad el flujo obtenido (ver. fig 5.5) no tiene sentido físico, pues por su definición debe ser no decreciente. Calculando numéricamente los campos magnéticos con (2.28b) y (2.28a) por diferencias finitas centrales para el caso del campo azimutal, se observó de nuevo

que se conserva la forma del campo libre de fuerzas. A pesar del problema con el flujo, con esta definición se pueden obtener perfiles de presión que no sean constantes e incluso, controlando los parámetros, que sean decrecientes, como los de un plasma confinado, aunque estos se mostrarán para el siguiente perfil a analizar.

Buscando perfiles el flujo con más sentido físico, se propuso que $P(\Psi)$ y $b(\Psi)$ tengan un término más:

$$-\mu_0 P = \frac{\alpha_2}{3}\psi^3 + \frac{\alpha_1}{2}\psi^2 + \alpha_0\psi + \alpha, \quad (5.16a)$$

$$-\frac{1}{2}b^2 = \frac{\beta_2}{3}\psi^3 + \frac{\beta_1}{2}\psi^2 + \beta_0\psi + \beta, \quad (5.16b)$$

$$(5.16c)$$

con lo que la ec. de equilibrio adquiere la forma

$$\nabla^2\Psi = (\alpha_2 + \beta_2)\Psi^2 + (\alpha_1 + \beta_1)\Psi + (\alpha_0 + \beta_0), \quad (5.17)$$

con las condiciones de frontera escogidas como $\Psi(x = 0) = \Psi_0$ y $\Psi(x = 1) = 0$. Luego de resolver el problema de la misma manera que con los anteriores, se observó el efecto de la singularidad antes mencionada, así que para poder tener la solución completa incluyendo el origen, se realizó una expansión en serie de Taylor del lado derecho de la ecuación 5.17, que a primer orden se convierte en

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Psi}{dx} = A_2x^2 + (2A_2 + A_1 + \Psi_0)x + (A_2\Psi_0^2 + A_1\Psi_0 + A_0), \quad (5.18)$$

donde $A_i = \alpha_i + \beta_i$, $i = 0, 1, 2$. Con la ecuación diferencial de esta manera, ya es posible obtener una solución que estará compuesta por una solución para el caso homogéneo Ψ_h más una solución particular Ψ_p para el caso general. En el primer caso, se tiene que

$$\frac{d^2\Psi_h}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Psi_h}{dx} = 0, \quad (5.19)$$

que se puede reescribir con el cambio de variable $u(x) = \Psi'_h(x)$ como

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \implies \ln(u) = -\ln(x) + C, \quad (5.20)$$

de manera que la solución homogénea es

$$\Psi_h(x) = a_1\ln(x) + b_1, \quad (5.21)$$

con a_1 y b_1 constantes. Por otro lado, se propone una solución para el caso no homogéneo de la forma

$$\Psi_p(x) = C_2x^4 + C_1x^3 + C_0x^2, \quad (5.22)$$

que al ser sustituida en la ecuación 5.18 y haciendo la comparación de términos para que se cumpla la igualdad se llega a que las constantes propuestas cumplen

$$C_2 = \frac{A_2}{16}, \quad (5.23a)$$

$$C_1 = \frac{(2A_2 + A_1 + \Psi_0)}{9}, \quad (5.23b)$$

$$C_0 = \frac{(A_2\Psi_0^2 + A_1\Psi_0 + A_0)}{4}, \quad (5.23c)$$

de manera que la solución general es

$$\Psi(x) = -a_1 \ln(x) + C_2 x^4 + C_1 x^3 + C_0 x^2 + C. \quad (5.24)$$

Las condiciones de frontera implican $a_1 = 0$ para eliminar la función $\ln(x)$ que diverge en el origen, por lo que

$$\Psi(x = 0) = \Psi_0 = C, \quad (5.25)$$

y la solución para la vecindad elegida alrededor del origen de $(-0.05, 0.05)$ es

$$\Psi(x) = C_2 x^4 + C_1 x^3 + C_0 x^2 + \Psi_0. \quad (5.26)$$

Con este método, se obtuvieron el flujo y la corriente axial de la fig.5.6. En este caso el flujo es una función creciente y el perfil de presión corresponde al de un plasma confinado, manteniendo valores positivos. Además, el factor de seguridad se puede tener en valores mayores que uno (fig. 5.6). Se puede notar una variación en el centro que en realidad se origina por la diferencia entre la aproximación analítica y los resultados numéricos.

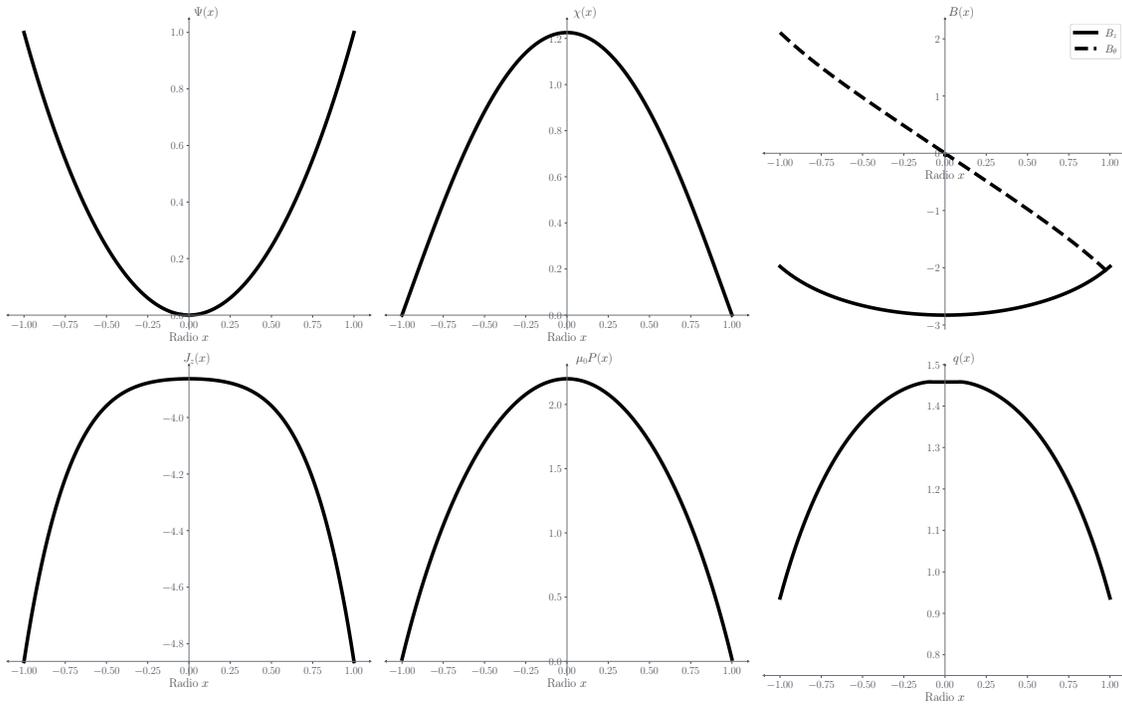


Figura 5.6: Curvas solución de la ecuación 5.17 con los parámetros $\alpha_2 = 0.4, \beta_2 = 0.4, \alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.1, \alpha_0 = 2.0, \beta_0 = 1.863, \alpha = -2.2, \beta = -4$.

De los resultados obtenidos considerando al problema de equilibrio como uno de condiciones de frontera, se observó que los perfiles que mantienen el sentido físico de las curvas tienen $\Psi'(x) \approx 0$ y además, en los resultados de la fig. 5.6 se encontró que estos eran muy sensibles al cambio de los parámetros α y β , por lo que se optó por

cambiar el enfoque del problema tomando desde un inicio que $\Psi'(x = 0) = 0$, lo cual lo vuelve el problema de condiciones iniciales

$$\nabla^2 \psi = \sum_{i=0}^n A_i \Psi^i, \quad \Psi(0) = \Psi_0, \quad \Psi'(0) = 0, \quad (5.27)$$

con $A_i = \alpha_i + \beta_i$, para $i = 0, \dots, n$. Aplicando entonces el esquema de Rungge - Kutta mostrado en el apéndice para ecuaciones diferenciales de segundo grado, se obtuvieron los resultados de la fig. 5.7 para el caso $n = 3$. Los campos magnéticos se calcularon de la misma forma que se hizo con los casos anteriores mientras que $P(\Psi)$ y $b(\Psi)$ con

$$-\mu_0 P(\Psi) = \frac{\alpha_3}{4} \Psi^4 + \frac{\alpha_2}{3} \Psi^3 + \frac{\alpha_1}{2} \Psi^2 + \alpha_0 \Psi + \alpha, \quad (5.28a)$$

$$-\frac{1}{2} b(\Psi)^2 = \frac{\beta_3}{4} \Psi^4 + \frac{\beta_2}{3} \Psi^3 + \frac{\beta_1}{2} \Psi^2 + \beta_0 \Psi + \beta, \quad (5.28b)$$

$$(5.28c)$$

Del flujo anteriormente obtenido se encuentra que el término cúbico de la ec. 5.11

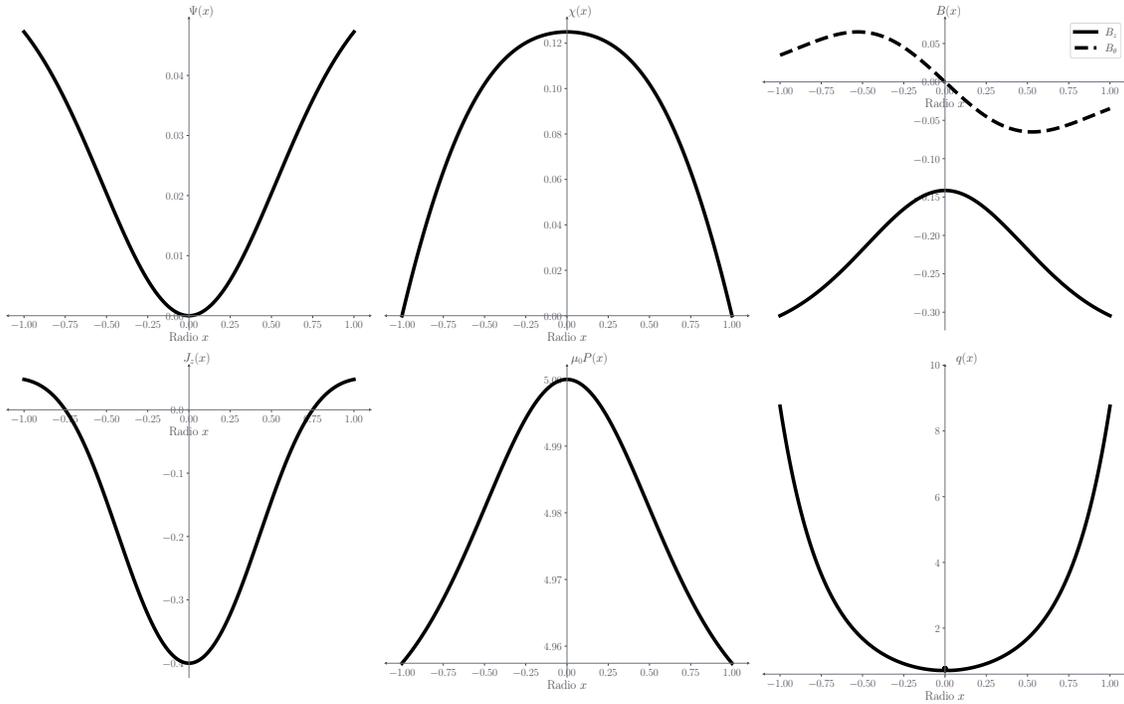


Figura 5.7: Curvas solución de la ec. 5.1 con $n = 3$, $\alpha_3 = 1000$, $\beta_3 = 1000$, $\alpha_2 = -10$, $\beta_2 = -10$, $\alpha_1 = -5$, $\beta_1 = -8$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = -0.6$, $\alpha = -5$ y $\beta = -0.01$.

tiene un efecto menor respecto a los demás términos, pues su factor $A_3 = \alpha_3 + \beta_3$ es, en el caso mostrado, dos órdenes de magnitud mayor. Para explorar lo que ocurre cuando este término se vuelve aún más grande, se hicieron los cálculos para $A_3 = 4400$ (ver figs. 5.8). Estos resultados permiten observar que el término cúbico hace que la

corriente tiende a ahuecarse así como que el factor de seguridad alcance máximos locales cerca de 1, en el caso de los resultados de la fig. 5.8. Para todos los resultados de las figuras 5.7 y 5.8 de nuevo fue necesario usar una aproximación a la solución analítica en una vecindad del origen que se empató con la solución numérica y que se obtuvo de la misma forma en que se calculó 5.26. La expresión está dada, para este caso, por

$$\Psi(x) = \left(\frac{6A_3\Psi_0 + 2A_2}{32} \right) x^4 + \left(\frac{3A_3\Psi_0^2 + 2A_2\Psi_0 + A_1}{9} \right) x^3 + \left(\frac{A_3\Psi_0^3 + A_2\Psi_0^2 + A_2\Psi_0 + A_0}{4} \right) x^2 + \Psi_0, \quad (5.29)$$

y se utilizó en el intervalo $x \in (-0.05, 0.05)$.

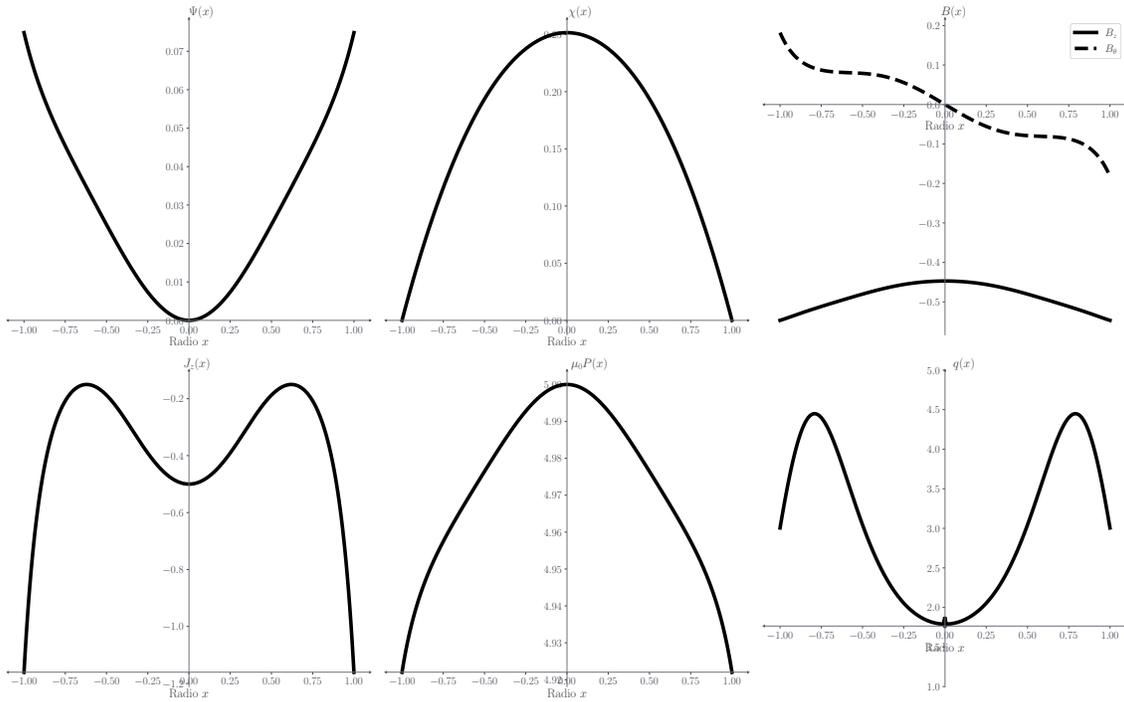


Figura 5.8: Curvas solución de la ec. 5.1 para $n = 3$, $\alpha_3 = 2200$, $\beta_3 = 2200$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = -10$, $\alpha_1 = -5$, $\beta_1 = -10$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = -0.5$, $\alpha = -5$ y $\beta = -0.1$.

6 Formación de Islas Magnéticas en la Columna de Plasma

Ya en el capítulo 3 se discutió cómo el campo magnético y la corriente descansan en superficies de presión constante y resultó también que ésta se puede ver como función del flujo magnético. En general, una superficie magnética definida por la función $f(\mathbf{r}) = \text{constante}$ es aquella que cumple $\mathbf{B} \cdot \nabla f = 0$ para cualquier punto en las líneas de campo. Esto es de interés pues es indispensable la existencia de estas superficies para lograr el confinamiento del plasma, aunque en la realidad lo que se encuentra es una aproximación a ellas en los plasmas o en una pequeña parte del volumen de estos cuando existe simetría [14]. De acuerdo al teorema de KAM ([15]), al hacer una pequeña perturbación en el caso simétrico, las superficies magnéticas se mantendrán casi constantes y bien definidas excepto en un espacio proporcional a la raíz cuadrada de la perturbación. En este espacio, ocurriría un cambio en la topología del campo, apareciendo islas magnéticas e incluso, comportamientos caóticos dentro de ellas. Para analizar este fenómeno, conviene hacer uso del formalismo hamiltoniano en los plasmas que se comenta en la siguiente sección.

6.1. Naturaleza Hamiltoniana del Campo Magnético

De las distintas formas que existen para representar un campo magnético, se ha escogido por conveniencia la propuesta por White (2014) en [14]. En este texto primero se mostrará la representación en las coordenadas toroidales originales utilizadas por White $\mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$ y después se presentará la forma equivalente en coordenadas cilíndricas.

Sea el potencial vectorial

$$A = A_r \nabla r + A_\theta \nabla \theta + A_\varphi \nabla \varphi,$$

y G una función tal que $\partial_i G = A_i$ para $i = r, \theta, \varphi$, entonces

$$\mathbf{A} = \nabla G + (A_\theta - \partial_\theta G) \nabla \theta + (A_\varphi - \partial_\varphi G) \nabla \varphi. \quad (6.1)$$

Definiendo a los flujos toroidal y poloidal por

$$\Phi = A_\theta - \partial_\theta G \quad \text{y} \quad \psi = -(A_\varphi - \partial_\varphi G), \quad (6.2)$$

entonces

$$\mathbf{A} = \nabla G + \Phi \nabla \theta - \psi \nabla \varphi, \quad (6.3)$$

y por lo tanto el campo magnético es

$$\mathbf{B} = \nabla \Phi \times \nabla \theta - \nabla \psi \times \nabla \varphi. \quad (6.4)$$

Con esta expresión, las líneas de campo quedan definidas por

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\varphi} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \Phi}{\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi} \\ &= - \frac{(\nabla \psi \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \Phi}{(\nabla \Phi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi} \\ &= - \frac{(\nabla \varphi \times \nabla \Phi) \cdot \nabla \psi}{(\nabla \varphi \times \nabla \Phi) \cdot \nabla \theta} \\ &= - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Y

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi} \\ &= - \frac{(\nabla \psi \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \theta}{(\nabla \Phi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi} \\ &= - \frac{(\nabla \varphi \times \nabla \theta) \cdot \nabla \psi}{(\nabla \theta \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \Phi} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} \end{aligned} \quad (6.6)$$

De esta forma se obtienen las ecuaciones para las líneas de campo que se pueden considerar equivalentes a las ecuaciones de Hamilton

$$- \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{d\Phi}{d\varphi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} = \frac{d\theta}{d\varphi}, \quad (6.7)$$

donde ψ equivale al Hamiltoniano, Φ al momento canónico conjugado, θ a la coordenada generalizada y φ al tiempo. Con la forma del campo de la expresión 6.4 se tiene entonces que Φ y ψ son superficies de flujo si $\Phi(\psi = \psi(\Phi))$, pues así se cumple que $\mathbf{B} \cdot \nabla \Phi = \mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$. Ya con estas expresiones, se puede pasar a ilustrar cómo se rompen estas superficies magnéticas al introducir pequeñas perturbaciones al "Hamiltoniano" del sistema, es decir, a la función de flujo poloidal ψ . Pero antes, es mejor hacer la analogía con las coordenadas cilíndricas definidas anteriormente.

Dado que el flujo poloidal se definió como una medida de la cantidad de líneas que cruzan las superficies formadas al fijar la coordenada θ , entonces ψ es equivalente al flujo azimuthal definido por ψ en la geometría cilíndrica mientras que las superficies de flujo toroidal, Φ , formadas al fijar φ , se corresponden con las superficies con z fijo,

es decir, con el flujo axial χ . De esta forma, en geometría cilíndrica las ecuaciones que muestran el carácter Hamiltoniano de las líneas de campo son

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = \frac{d\chi}{d\varphi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\chi} = \frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{1}{q}, \quad (6.8)$$

donde se utilizó la definición del factor de seguridad de la sección 2.2.2. Análogamente, también se define el factor de seguridad para el caso toroidal por

$$\frac{d\psi}{d\Phi} = \frac{1}{q}. \quad (6.9)$$

Debe notarse que las coordenadas escogidas θ y φ pueden no ser las usualmente utilizadas variables geométricas. Lo único que se requiere es que estas sean periódicas, tengan periodo 2π y que el volumen definido por ellas sea topológicamente toroidal. Nuevamente, se hace mención de que el caso cilíndrico se considera como una aproximación del caso toroidal con razón de aspecto grande, por lo que tiene sentido asumir la periodicidad en la coordenada z cilíndrica.

6.2. Destrucción de Superficies Magnéticas

Ya que se ha mostrado que las líneas de campo magnético siguen las ecuaciones de Hamilton, entonces se puede ilustrar cómo es que las superficies magnéticas se destruyen al perturbar el "hamiltoniano", es decir, el flujo poloidal. Descomponiendo la perturbación como una transformación de Fourier y considerando un solo armónico se tiene

$$\psi = \int \frac{d\Phi}{q} + V \cos(n\varphi - m\theta), \quad (6.10)$$

con lo que las líneas de campo quedan dadas por

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = -Vm \sin(n\varphi - m\theta) \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{q(\Phi)}. \quad (6.11)$$

De esta forma se aprecia cómo es que $q(\Phi)$, el factor de seguridad, es lo que define la helicidad del campo sobre la superficie Φ . Suponiendo a ésta como una constante, entonces al integrar las ecuaciones 6.11 se encuentra que

$$\theta = \frac{\varphi}{q} + \theta_0 \quad \text{y} \quad \Phi = \frac{V \cos(n\varphi - m\theta)}{(n - \frac{m}{q})} + \Phi_0. \quad (6.12)$$

Se observa entonces que las superficies de flujo se distorsionan, pero aun así permanecen anidadas siempre y cuando, q no esté cerca del número racional m/n . Sin embargo, si esto ocurre, el denominador tiende a cero, haciendo que Φ crezca indeterminadamente. Esto hace necesario desarrollar a $q(\Phi)$ alrededor de Φ_0 cuando $q(\Phi_0) = m/n$. Despejando el coseno de la expresión 6.12, y sea $Q = n\varphi - m\theta$, entonces

$$\cos(Q) = \frac{\Phi - \Phi_0}{V} \left(\frac{n}{m} - q^{-1} \right), \quad (6.13)$$

que al derivar de ambos lados respecto a φ da

$$-\sin(Q)\frac{dQ}{d\varphi} = \frac{\Phi - \Phi_0}{V} \frac{dq}{q^2}, \quad (6.14)$$

que al acomodar los términos se convierte en

$$dQ = \frac{\Phi - \Phi_0}{-Vm \sin(Q)} \left(\frac{mq'}{q^2} \right) d\varphi. \quad (6.15)$$

Pero, de las ecuaciones 6.11, se sigue que

$$d\Phi = -mV \sin(Q) d\varphi, \quad (6.16a)$$

$$dQ = (\Phi - \Phi_0) \left(\frac{mq'}{q^2} \right) d\varphi; \quad q' = \frac{dq}{d\Phi} \Big|_{\Phi=\Phi_0}. \quad (6.16b)$$

Dividiendo las ecuaciones y separando las variables:

$$-m \sin(Q) dQ = (\Phi - \Phi_0) \left(\frac{mq'}{q^2} \right) d\Phi, \quad (6.17)$$

que al integrar se obtiene la expresión que describe a las islas magnéticas:

$$(\Phi - \Phi_0)^2 = \frac{2q^2 V}{q'} [\cos(Q) + k], \quad (6.18)$$

con k una constante de integración que representa una condición inicial. Una forma de observar estas islas es fijar $q = m/n$ y encontrar la superficie de flujo ψ_0 que produce ese valor. Entonces se hace variar Q para una k fija y, en el caso de un gráfico de Poincaré, se hace $\varphi = 0$.

Las ecuaciones anteriores se escribieron utilizando coordenadas apropiadas para una geometría toroidal. Usando las respectivas equivalencias de cada una de estas con las coordenadas cilíndricas, entonces tendríamos la perturbación sobre el flujo azimutal dada por:

$$\psi = \int \frac{d\chi}{q} + V \cos(nz - m\phi). \quad (6.19)$$

Análogamente, las ecuaciones de las líneas de campo quedan definidas por

$$\frac{d\chi}{dz} = -Vm \sin(nz - m\phi) \text{ y } \frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{q(\chi)}, \quad (6.20)$$

que al integrarse, se convierten en la expresión que describe a las islas magnéticas

$$(\chi - \chi_0)^2 = \frac{2q^2 V}{q'} [\cos(Q) + k], \quad (6.21)$$

con $Q = nz - m\phi$ y k una constante de integración. De 6.21 se observa que habrá puntos periódicos dados por $\cos(Q) = 1$ cuando $k = -1$ y $\cos(Q) = -1$ cuando $k = 1$. Para hacerse una idea de la forma de las trayectorias, se puede expandir en serie de

Taylor y a primer orden al $\cos(Q)$ alrededor de estos puntos, por ejemplo, utilizando la aproximación $\cos(Q) \approx 1 - Q^2/2$ cuando $\cos(Q) \approx 1$, con lo que 6.21 se vuelve

$$(\chi - \chi_0)^2 \approx \frac{2Vq^2}{q'} \left(1 - \frac{Q^2}{2} + k\right), \quad (6.22)$$

que al reescribirse de la siguiente manera

$$\frac{q'}{2Vq^2}(\chi - \chi_0)^2 + \left(\frac{Q^2}{2} - k\right) \approx 1, \quad (6.23)$$

toma la forma de la ecuación de una curva cónica. Esto permite predecir que las figuras dibujadas por la perturbación, las islas magnéticas, serán precisamente de forma de una cónica. Cuando $\cos(Q)$ este cerca de uno, los puntos formarán variedades elípticas alrededor de los puntos periódicos, y similarmente, cuando $\cos(Q) \approx -1$, las variedades serán hiperbólicas. Se formará entonces una cadena de trayectorias hiperbólicas y elípticas separadas por una línea separatriz definida por $k = 1$ que cruza por los puntos periódicos. Esta línea también define el ancho de las islas, y al sustituir su valor de k en 6.21 se obtiene

$$(\chi - \chi_0)^2 = \delta\chi = \sqrt{4 \frac{q^2 V}{q'}}. \quad (6.24)$$

Algunos de los resultados para el campo libre de fuerzas con las expresiones obtenidas se muestran en la siguiente figura:

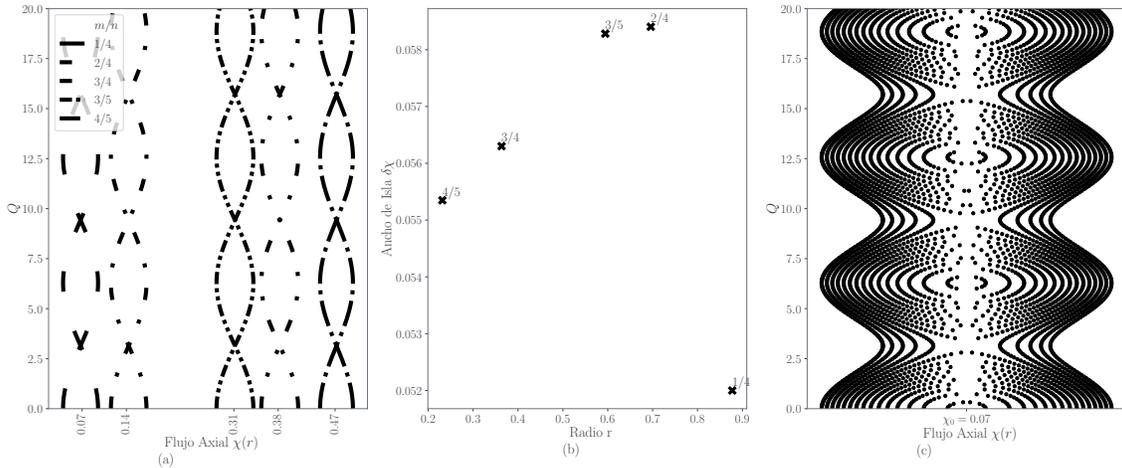


Figura 6.1: (a)Islas magnéticas formadas por la perturbación cosenoidal del flujo azimutal producido por el campo libre de fuerzas de la fig. 5.3 para distintas superficies racionales con $k = 1$. (b)Ancho de las islas en función del radio para diferentes superficies racionales. (c)Trayectorias formadas al variar k desde -2 a 2 para la superficie racional $4/5$ alrededor del flujo axial $\chi_0 = 0.46$. En todos los casos se utilizó $V = 0.0005$ como amplitud de la perturbación.

En la figura 6.1(a) se observan diferentes cadenas de flujo centradas alrededor de distintos valores de χ . Cada una de estas cadenas se obtuvo de forma aislada, escogiendo un valor racional de $m/n = q(\psi_0(r_0))$ y obteniendo su respectiva coordenada radial asociada r_0 . Con esta coordenada radial se obtuvo, a su vez, el valor del flujo axial $\chi_0 = \chi(r_0)$ sobre el que se aplicó la ec. 6.23. En un experimento real esto no ocurriría así, sino que se tendría una sola perturbación que, como fue mostrado por Fourier, estaría formada por una suma de distintas ondas, sus modos de Fourier. Cada uno de estos modos puede entenderse como estas perturbaciones aisladas, pues solo producirían islas en las superficies con las que entrarán en resonancia, sin afectar a las demás. El comportamiento de la anchura de estas islas en función del radio del cilindro se observa en la figura 6.1(b). En la figura 6.1(c), se puede notar la aparición de las trayectorias elípticas o hiperbólicas que se esperaba según lo mostrado por la ecuación 6.23 al variar k alrededor de una misma superficie racional. Se observan un conjunto de trayectorias que oscilan sin cerrarse y que rodean a las otras trayectorias elípticas cerradas, ambos tipos de trayectorias separadas por una línea separatriz, la cual representa un punto de equilibrio inestable.

Ya que se ha mostrado lo que ocurre en el caso del campo libre de fuerzas, donde el factor de seguridad es decreciente, se puede continuar con mostrar los resultados obtenidos con los ejemplos de perfiles de las figuras 5.7 y 5.8:

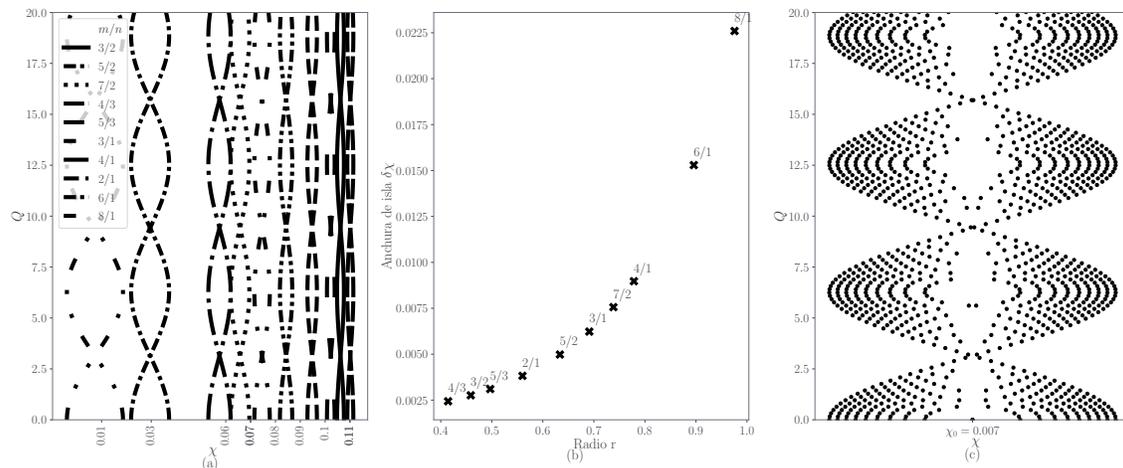


Figura 6.2: (a)Islas magnéticas formadas por la perturbación cosenoidal del flujo azimutal de la fig. 5.7 para distintas superficies racionales. (b)Ancho de las islas en función del radio para diferentes superficies racionales. (c)Trayectorias formadas al variar la condición inicial k para la superficie racional 6/8 alrededor del flujo axial $\chi_0 = 0.001$. En todos los casos se utilizó $V = 5 \times 10^{-9}$ como amplitud de la perturbación.

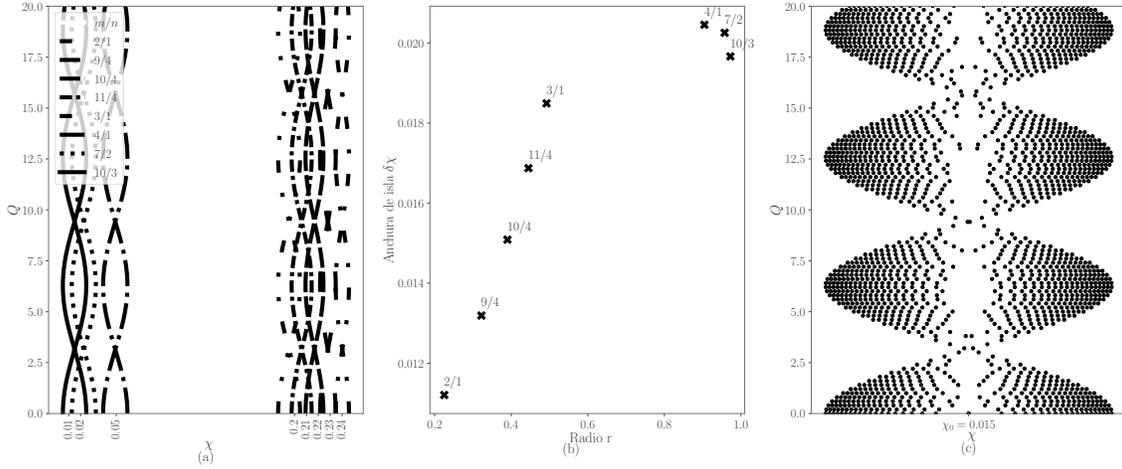


Figura 6.3: (a) Islas magnéticas formadas por la perturbación cosenoidal del flujo azimutal producido de la fig. 5.8 para distintas superficies racionales. (b) Ancho de las islas en función del radio para diferentes superficies racionales. (c) Trayectorias formadas al variar la condición inicial k para la superficie racional 9/4 alrededor del flujo axial $\chi_0 = 0.02$. En todos los casos se utilizó $V = 1 \times 10^{-7}$ como amplitud de la perturbación.

En ambos casos resulta que la anchura de la isla crece con el radio, aunque en el segundo, se observa que en un punto ésta cae y luego vuelve a subir. Esto tiene sentido al observar en la gráfica del factor de seguridad de la figura 5.8, en la que éste crece, y luego, empieza a decrecer.

Se puede observar en la literatura que estas cadenas de islas y la estructura que las forma es equivalente a la de un péndulo exacto, con una separatriz bien definida, así como el interior perturbado y el exterior sin perturbar y cuyo hamiltoniano estaría dado por:

$$H = -\frac{p^2}{2} + V \cos(Q). \quad (6.25)$$

Sin embargo, como deriva White en [14], si ocurre una perturbación adicional en el sistema, la separatriz ya no será exacta, sino que se formará una banda de trayectorias caóticas. El ancho de esta banda se podría estimar con la adición de una pequeña perturbación al hamiltoniano de este ‘péndulo’

$$H = \frac{p^2}{2} + V \cos(Q) - \epsilon \cos(aQ - t - t_0), \quad (6.26)$$

luego usar una órbita sin perturbar cerca de la separatriz como $Q = 4a \tan(e^{\sqrt{V}t}) - \pi$ donde $\sqrt{V} \ll 1$ y calcular los cambios debidos a ϵ al integrar:

$$\Delta H = \int_{-\infty}^t \partial_t H dt \sim \frac{\epsilon}{\sqrt{V}} \sin(t_0) e^{\frac{\pi}{2\sqrt{V}}} + \text{términos oscilatorios}. \quad (6.27)$$

Así es como las órbitas cerca de la separatriz sufren un desfase en su posición dentro del intervalo limitado por ΔH . Cuando V se incrementa, la separatriz se ensancha y se produce la pérdida de aquellas superficies magnéticas que retienen la topología del

campo original sin perturbar, o también llamadas superficies KAM debido a Kolmogorov, Arnold y Moser. Estas superficies son importantes debido a que las líneas de campo magnético no pueden cruzar a través de ellas y previenen al campo de difundirse. Si la amplitud V se incrementa lo suficiente, entonces las distintas cadenas de islas se traslapan, hecho que fue establecido por Chirikov(1957) como un criterio para que se produzca la pérdida de la última superficie KAM y ocurra la difusión caótica del campo magnético. Se ha mostrado que esta aproximación al comportamiento caótico o estocástico a través de sistemas hamiltonianos deterministas, exhibe un comportamiento aproximadamente universal independientemente de la forma del hamiltoniano, lo que llevó a Chirikov a dar su criterio estudiando al sistema más simple, el mapeo estándar. De forma parecida, Escande en [15] realiza este tipo de análisis través del hamiltoniano que describe el movimiento de una partícula en la presencia de dos ondas longitudinales. Profundizar en el proceso mediante el cual ocurre la transición al caos con este tipo de sistemas hamiltonianos se deja como trabajo futuro.

7 Conclusiones

Se desarrolló el marco teórico para describir un plasma confinado mediante campos magnéticos a través de la teoría MHD. En el capítulo 2 se establecieron las coordenadas que mejor se ajustaran a la forma del plasma. Por la utilidad que tendría en los cálculos de equilibrio, tales coordenadas fueron determinadas en términos de los flujos de campo magnético toroidal - poloidal para un plasma toroidal, y axial - azimutal para un plasma cilíndrico. Hecho esto, en el capítulo 3, se combinaron las ecuaciones MHD con las coordenadas establecidas en el capítulo 2 para derivar a la ecuación de equilibrio de un plasma para ambos casos. Estas ecuaciones de equilibrio resultaron ser dependientes de parámetros del plasma como la corriente, la presión y el campo inducido y sus soluciones permitieron ver si estos parámetros producen, o no, escenarios en los que la fuerza de presión sea anulada por el campo magnético.

En el capítulo 4 se trató el problema particular de un campo libre de fuerzas. Se discutieron los fenómenos físicos que lo producen, como la relajación de la energía magnética a través de fenómenos de reconexión bajo la conservación de la helicidad magnética definida por 4.9, en plasmas de baja o nula resistividad y alta temperatura. Esto llevó a un caso particular en el que la ecuación de equilibrio 3.19 se convirtió en la ecuación de Helmholtz cuya solución analítica fue derivada y quedó dada por 4.24. A través de las relaciones definidas en 2 se obtuvieron los campos magnéticos analíticos del caso CLF y se observó que estos mismos se pueden encontrar aproximadamente en experimentos de confinamiento toroidales como el pinch de campo invertido.

En el capítulo 5 se discutieron métodos para resolver la ecuación de equilibrio 3.19 como un problema de condiciones iniciales y de condiciones de frontera para perfiles en general, lineales o no lineales, y bajo la suposición de simetrías azimutal y axial. Se presentaron los algoritmos basados en esquemas de Runge-Kutta de cuarto orden que permiten llegar a aproximaciones de las soluciones y se utilizó el caso del CLF y la solución 4.24 para poner a prueba su funcionamiento así como la programación realizada en lenguaje python. Se encontró que los algoritmos tenían problemas para aproximar cerca del origen, por lo que se propuso obtener de forma analítica una aproximación a la solución en series de Taylor en una vecindad del origen y utilizar los algoritmos fuera de esa vecindad, de manera que se librara el problema. Solo en el caso del CLF se utilizó la misma solución 4.24 en lugar de la aproximación en serie de Taylor y se observó que las aproximaciones numéricas resultaron muy cercanas a las analíticas, cuantificando esto con el error absoluto.

Habiendo aplicado los algoritmos al CLF, se propusieron formas más específicas y polinomiales para los parámetros de corriente, presión y el campo azimutal que se

sustituyeron en la ecuación de equilibrio. Esto permitió observar las soluciones numéricas del equilibrio en distintos escenarios, aunque en todos los casos fue necesario usar la aproximación de Taylor mencionada. Se observó que los casos cuya derivada del flujo magnético en el origen era distinta de cero, solían devolver aproximaciones sin sentido físico, con perfiles de presión que se volvían negativos o perfiles no deseados, como perfiles de corriente huecos. Por otro lado, se encontró que la mayoría de casos que devolvían soluciones con sentido físico o más próximas a las observadas experimentalmente eran aquellos donde la derivada inicial del flujo era cero. Eso determinó a resolver los perfiles consecutivos con las condiciones iniciales $\psi(0) = \psi_0$ y $\psi'(0) = 0$, ya no como un problema de condiciones de frontera formalmente, aunque buscando perfiles de presión que se anularan en el origen.

En el capítulo 6 se mostró, a través de la relación 6.20 para los flujos azimutal y axial, que las líneas del campo magnético cumplen las ecuaciones de Hamilton si se considera al flujo azimutal como el hamiltoniano. Luego se propuso que, al igual que se hace en teoría clásica de perturbaciones, este podía ser perturbado senoidalmente según la ecuación 6.19. Se mostró analíticamente que las superficies cuyo factor de seguridad fuera racional producen cambios importantes al perturbar el flujo azimutal y se derivó un forma de medir el tamaño de estas perturbaciones dada por 6.24. Se seleccionaron algunos de los perfiles de presión, corriente y campo utilizados en el capítulo 5, así como sus respectivas soluciones obtenidas de la ecuación de equilibrio, incluyendo el caso CLF, para aplicarles las perturbaciones mostradas. De esta forma, se observó la aparición de islas magnéticas debidas a la perturbación del hamiltoniano, así como la variación de su anchura respecto a la coordenada radial de la columna de plasma.

A Algunas Identidades Útiles

Sean φ un campo escalar y \mathbf{U} un campo vectorial, entonces se cumple lo siguiente:

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{U}) = \nabla \varphi \times \mathbf{U} + \varphi (\nabla \times \mathbf{U}), \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U} \quad (\text{A.2})$$

Sea $J_n(x)$ la función de Bessel de orden n , entonces se cumplen las siguientes identidades:

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (\text{A.4})$$

B Interpretación Topológica de la Helicidad Magnética

De la definición de la helicidad magnética se tiene que esta cantidad, que es conservada en magnetohidrodinámica ideal, para los flujos de volúmenes V_1 y V_2 de la figura B.1, queda dada por

$$K = \underbrace{\int_{V_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r}_{K_1} + \underbrace{\int_{V_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r}_{K_2}. \quad (\text{B.1})$$

Expresando al elemento de volumen por $dr^3 = d\mathbf{l} \cdot \hat{B} dS$, con $d\mathbf{l}$ un elemento longitudinal infinitesimal del contorno que delimita al tubo y dS la sección transversal de este, entonces

$$K_1 = \int_{V_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{l} \cdot \hat{B} dS = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \int_{S_1} \mathbf{B} dS \quad (\text{B.2})$$

pero, dado que el tubo 1 está ligado al tubo 2, C_1 es un contorno que rodea al tubo 2, entonces se puede utilizar el teorema de Stokes y la definición del potencial vectorial respecto al campo magnético para ver que $\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{A} dS = \int_{S_2} \mathbf{B} dS = \phi_2$. Luego, la helicidad magnética queda dada por

$$K_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} dS \int_{S_1} \mathbf{B} dS = \phi_1 \phi_2. \quad (\text{B.3})$$

Análogamente, la helicidad asociada al tubo 2 es $K_2 = \phi_2 \phi_1$, de manera que la helicidad del conjunto completo es

$$K = K_1 + K_2 = 2\phi_1 \phi_2. \quad (\text{B.4})$$

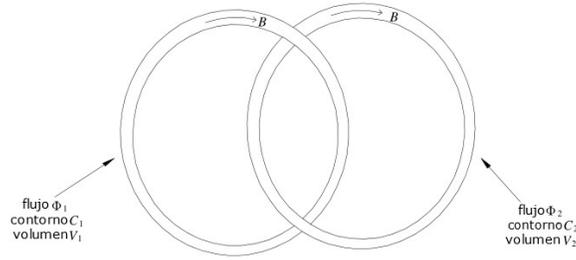
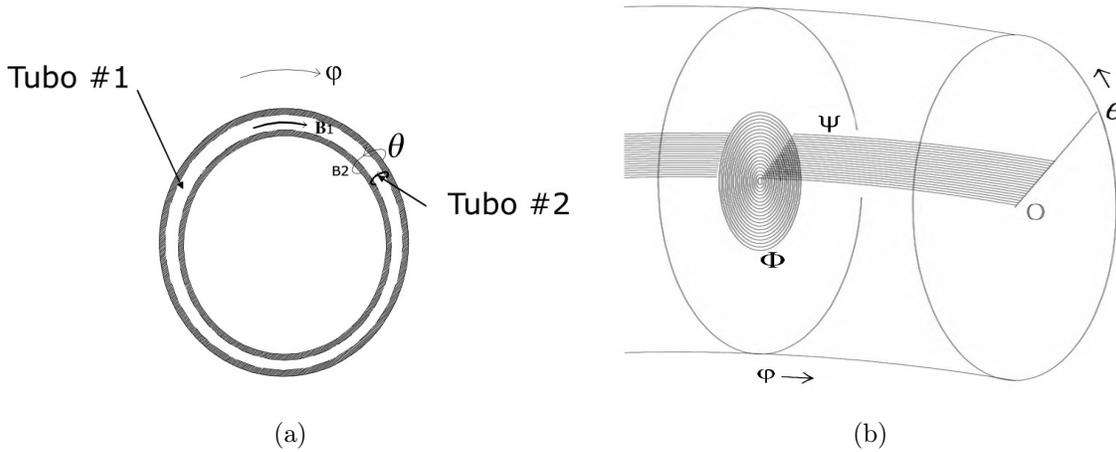


Figura B.1: Dos tubos delgados de flujo ligados. Recuperado de [4].

Supóngase ahora, que se comprime el radio mayor del tubo dos hasta que queda ajustado al tubo 1 y luego se le extiende sobre toda el área del primero. El tubo 2 quedará como una capa de pintura sobre el tubo 1 y la ec. B.4 representa la helicidad de un elemento diferencial de este arreglo, que al denotar al flujo del tubo 2 por $d\psi$ y al del tubo 1 simplemente por Φ , entonces $dK = 2\Phi d\psi$.



Si luego se extiende al tubo 1 y se incrusta otra capa de pintura, entonces aumentarán ambos flujos y se podrá expresar la dependencia entre ellos por $\psi = \psi(\Phi)$ (ver

fig. B.2b). Esto permite escribir $d\psi = \psi' d\Phi$, con lo que $dK = 2\Phi\psi' d\Phi$ y la helicidad sobre el volumen de todas las capas será

$$K = 2 \int_0^\Phi \Phi\psi' d\Phi. \quad (\text{B.5})$$

Bajo esta configuración se puede encontrar para el flujo Φ que:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi}{2\pi} \oint d\theta \\ &= \frac{\Phi}{2\pi} \int_{C_2} \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \Phi \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} \nabla \times \Phi \nabla\theta \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

lo que permite dar cuenta de que $\nabla \times \Phi \nabla\theta$ tiene que ser el campo magnético a través de la sección transversal del tubo 1, \mathbf{S}_1 , es decir, que el campo en este tubo se puede escribir como

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \Phi \nabla\theta = \frac{1}{2\pi} \nabla\Phi \times \nabla\theta. \quad (\text{B.7})$$

Análogamente, el campo en el tubo 2 se puede representar por

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \psi \nabla\varphi = \frac{1}{2\pi} \nabla\psi \times \nabla\varphi, \quad (\text{B.8})$$

y haciendo el cambio de variable $\nabla\Phi/2\pi \rightarrow \nabla\Phi$ y $\nabla\psi/2\pi \rightarrow \nabla\psi$, entonces el campo total es de la forma

$$\mathbf{B} = \nabla\Phi \times \nabla\theta + \nabla\psi \times \nabla\varphi. \quad (\text{B.9})$$

Con estas coordenadas, los desplazamientos en las direcciones φ y θ quedan dados por $d\mathbf{l}_\varphi = d\varphi/|\nabla\varphi|$ y $d\mathbf{l}_\theta = d\theta/|\nabla\theta|$. Y si $d\mathbf{l}$ es un incremento a lo largo de una línea de campo magnético, entonces $\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0$, de donde se sigue que $B_\varphi d\mathbf{l}_\theta - B_\theta d\mathbf{l}_\varphi = 0$, y luego que

$$\frac{B_\varphi d\theta}{|\nabla\theta|} = \frac{B_\theta d\varphi}{|\nabla\varphi|}, \quad (\text{B.10})$$

es decir que

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{|\nabla\theta|B_\theta}{|\nabla\varphi|B_\varphi} = \frac{|\nabla\theta||\nabla\psi||\nabla\varphi|}{|\nabla\varphi||\nabla\Phi||\nabla\theta|} = \frac{|\nabla\psi|}{|\nabla\Phi|}. \quad (\text{B.11})$$

La ec. B.11 es una medida del número de veces que una línea de campo va alrededor de la dirección θ por cada vez que rodea la dirección φ , es decir, mide qué tan torcida está la línea de campo. Dado que $\psi = \psi(\Phi)$, entonces $\nabla\psi = \frac{d\psi}{d\Phi} \nabla\Phi = \psi' \nabla\Phi$ y se define a la torsión por

$$T(\Phi) = \psi' = \frac{d\psi}{d\Phi} = \frac{d\theta}{d\varphi}. \quad (\text{B.12})$$

Puede notarse que esta definición coincide con las definiciones del factor de seguridad como la derivada del flujo axial (o toroidal) respecto al flujo azimutal (o poloidal) de los casos cilíndrico y toroidal dadas por las ecuaciones 6.8 y 6.9, pues de hecho, son lo mismo. Finalmente, sustituyendo B.12 en B.5, la helicidad magnética se calcula por la expresión

$$K = 2 \int \Phi T(\Phi) d\Phi. \quad (\text{B.13})$$

C Métodos Numéricos

C.1. Esquema de Runge - Kutta de cuarto orden para Ecuaciones Diferenciales de Segundo Grado

Sean $y = y(t)$ una función de clase dos y $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en el conjunto abierto Ω y $(t_0, y_0, v_0) \in \Omega$ los valores iniciales de f , entonces la ecuación diferencial ordinaria de segundo grado:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(t, y(t), v(t)),$$

con $y'(t) = v(t)$ y de condiciones iniciales $y(t = t_0) = y_0$ y $y'(t = t_0) = v(t = t_0) = v_0$, tiene una aproximación a la solución dada por el esquema

$$\begin{aligned} k_1 &= h v_n \\ l_1 &= h f(y_n, v_n, t_n) \\ k_2 &= h(v_n + (1/2)l_1) \\ l_2 &= h f(y_n + (1/2)k_1 h, v_n + (1/2)l_1, t_n + (1/2)h) \\ k_3 &= h(v_n + (1/2)l_2) \\ l_3 &= h f(y_n + (1/2)k_2, v_n + (1/2)l_2, t_n + (1/2)h) \\ k_4 &= h(v_n + l_3) \\ l_4 &= h f(y_n + k_3, v_n + l_3, t_n + h) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2) + 2l_3 + l_4 \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2) + 2k_3 + k_4 \end{aligned}$$

C.2. Diferenciación Numérica

Sean $f \in C^2[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, $h = (b - a)/n$ y $x_0 \in (a, b)$. La derivada de la función f en x_0 se puede obtener mediante las siguientes expresiones con su término de error

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_1), \quad (\text{C.2})$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_1), \quad (\text{C.3})$$

y

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h} + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi_2), \quad (\text{C.4})$$

para algunas ξ_1 entre $(x_0 - h, x_0 + h)$ y ξ_2 entre $(x_0 - 2h, x_0 + 2h)$.

C.3. Integración: Teorema de Simpson

Sean $f \in C^4[a, b]$, n par, $h = (b - a)/n$ y $x_j = a + jh$ para cada $j = 1, \dots, n$. Existe $\mu \in (a, b)$ tal que la regla compuesta de Simpson puede escribirse con su término de error como

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right) - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu). \quad (\text{C.5})$$

D Ejemplos de Códigos

```
2def rungek_2nd(f, a=0, b=1, y0 = 1., v0 = 0., N=1000):
3     h = (b-a)/N ;
4     y = y0
5     v = v0
6
7     X = np.linspace(a,b,N);
8     Y = [y0]
9     V = [v0]
10    for i in range(N-1):
11        k1 = h*V[i]
12        l1 = h*f(X[i], Y[i], V[i])
13        k2 = h*(V[i]+(0.5)*l1)
14        l2 = h*f(X[i]+(0.5)*h, Y[i]+(0.5)*k1, V[i]+(0.5)*l1)
15        k3 = h*(V[i]+(0.5)*l2)
16        l3 = h*f(X[i]+(0.5)*h, Y[i]+(0.5)*k2, V[i]+(0.5)*l2)
17        k4 = h*(V[i]+ l3)
18        l4 = h*f(X[i]+h, Y[i]+k3, V[i]+l3)
19        #####
20        y = Y[i] + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*(1/6)
21        v = V[i] + (l1 + 2*l2 + 2*l3 + l4)*(1/6)
22        Y.append(y)
23        V.append(v)
24
25    X = np.array(X); Y = np.array(Y); V = np.array(V)
26    return X,Y,V,h
```

Figura D.1: Código al Problema de Condiciones Iniciales

```

#Definición de Constantes
λ = 1; μ0 = 1.; r0 = 3.; ψ0 = 1.

#Definición de constantes y solución analítica
Λ2 = (λ**2)*( μ0 * r0**2)/ψ0 )
Λ = mt.sqrt(Λ2)
sol_analitica = lambda x: sp.j0(Λ*x)

#Definición de funciones que conforman el esquema RK
f = lambda x, ψ, ψ1: -(1/x)*ψ1 - Λ2*ψ # ψ1 es la derivada de ψ
fψ = lambda x, ψ, ψ1: -Λ2 #derivada de f respecto a ψ
fψ1 = lambda x, ψ, ψ1: -(1/x) #derivada de f respecto a ψ1

#Generación de la solución analítica en una vecindad del origen
r1 = np.array(np.linspace(0,0.05,100))
ψ1 = np.array(sol_analitica(r1))

#Condiciones de frontera para el algoritmo
a = r1[-1]; b = r0
α = ψ1[-1]; β = sol_analitica(b)
N = 2000 #Número de puntos para discretizar el problema

#Llamada de la función que resuelve el equilibrio por el método del disparo no lineal
r2, ψ2, h = nonlinshoot(f, fψ, fψ1, a=a, α=α, b=b, β=β, sol=sol_analitica, N=N)

#Unión de la solución analítica en la vecindad del origen y la solución numérica
r = np.concatenate((r1,r2))
ψ = np.concatenate((ψ1,ψ2))

#Reflexión de la solución bajo la suposición de simetría radial
r = np.concatenate((np.sort(-r),r))
ψ = np.concatenate((ψ[::-1],ψ))

#Cálculo del error absoluto de la aproximación respecto a la sol. analítica
error_porcentual = abs(sol_analitica(r) - ψ)

#Graficación de los resultados
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize= (30,15), dpi=100)
ax=axs[0]
ax.plot(r, sol_analitica(r), label=r'Sol. Analítica')
ax.plot(r, ψ, label=r'Aprox. Numérica', dashes = dash_espacio)
ax.spines["bottom"].set_position(("data", 0))
ax.spines['left'].set_position(("data", 0))
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.plot(1, 0, ">k", transform=ax.get_yaxis_transform(), clip_on=False)
ax.plot(0, 0, "k<", transform=ax.get_yaxis_transform(), clip_on=False)
ax.plot(0, 1, "^k", transform=ax.get_xaxis_transform(), clip_on=False)
ax.text(0.04, 1.05, r'$\Psi(x)$')
ax.text(3.27, -0.04, r'$x$')
ax.legend()

```

Figura D.2: Código Ejemplo de Solución de Equilibrio por Condiciones Iniciales

```

def nonlinshoot(f, fy, fy1, sol=0, a=0.01, alpha=0.0, b=1.0, beta=1.0, max_iter=100, N=200):

    tolerancia = 1/N
    h = (b-a)/N
    tk = (beta-alpha)/(b-a)

    sol_numericax = [a]
    sol_numericay = [alpha]

    y = sol

    k = 1

    while k <= max_iter:
        w1 = [alpha]
        w2 = [tk]
        u1 = 0.0
        u2 = 1.0
        for i in range(1, N+1):
            x = a + (i-1)*h
            # Definición de términos de Runge-Kutta
            k11 = h*w2[i-1]
            k12 = h*f(x, w1[i-1], w2[i-1])
            k21 = h*(w2[i-1]+(0.5)*k12)
            k22 = h*f(x+(0.5)*h, w1[i-1]+(0.5)*k11, w2[i-1]+(0.5)*k12)
            k31 = h*(w2[i-1]+(0.5)*k22)
            k32 = h*f(x+(0.5)*h, w1[i-1]+(0.5)*k21, w2[i-1]+(0.5)*k22)
            k41 = h*(w2[i-1]+(0.5)*k32)
            k42 = h*f(x+h, w1[i-1]+(0.5)*k31, w2[i-1]+(0.5)*k32)
            #####
            w1y = w1[i-1] + (k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)*(1/6)
            w2y = w2[i-1] + (k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)*(1/6)
            w1.append(w1y)
            w2.append(w2y)
            c11 = h*u2
            c12 = h*(fy(x, w1[i-1], w2[i-1])*u1 +
                    fy1(x, w1[i-1], w2[i-1])*u2)
            c21 = h*(u2+(0.5)*c12)
            c22 = h*(fy(x+(0.5)*h, w1[i-1], w2[i-1])*(u1+(0.5)*c11) +
                    fy1(x+(0.5)*h, w1[i-1], w2[i-1])*(u2+(0.5)*c21))
            c31 = h*(u2+(0.5)*c22)
            c32 = h*(fy(x+(0.5)*h, w1[i-1], w2[i-1])*(u1+(0.5)*c21) +
                    fy1(x+(0.5)*h, w1[i-1], w2[i-1])*(u2+(0.5)*c22))
            c41 = h*(u2+c32)
            c42 = h*(fy(x+(0.5)*h, w1[i-1], w2[i-1])*(u1+c31) +
                    fy1(x+(0.5)*h, w1[i-1], w2[i-1])*(u2+c32))
            u1 = u1 + (1/6)*(c11+2*c21+2*c31+c41)
            u2 = u2 + (1/6)*(c12+2*c22+2*c32+c42)

        if abs(w1[-1]-beta) <= tolerancia:
            for i in range(1, N+1):
                x = a + i*h
                sol_numericax.append(x)
                sol_numericay.append(w1[i])
            break
        else:
            tk = tk - (w1[N]-beta)/u1
            k = k + 1

    return np.array(sol_numericax), np.array(sol_numericay), h

```

Figura D.3: Código al Problema de Condiciones de Frontera

```

#Definición de Constantes
λ = 1; μ0 = 1.; r0 = 3.; ψ0 = 1.

#Definición de constantes y solución analítica
Λ2 = (λ**2)*(μ0 * r0**2)/ψ0 )
Λ = mt.sqrt(Λ2)
sol_analitica = lambda x: sp.j0(Λ*x)

#Definición de funciones que conforman el esquema RK
f = lambda x, ψ, ψ1: -(1/x)*ψ1 - Λ2*ψ # ψ1 es la derivada de ψ
fψ = lambda x, ψ, ψ1: -Λ2 #derivada de f respecto a ψ
fψ1 = lambda x, ψ, ψ1: -(1/x) #derivada de f respecto a ψ1

#Generación de la solución analítica en una vecindad del origen
r1 = np.array(np.linspace(0,0.05,100))
ψ1 = np.array(sol_analitica(r1))

#Condiciones de frontera para el algoritmo
a = r1[-1]; b = r0
α = ψ1[-1]; β = sol_analitica(b)
N = 2000 #Número de puntos para discretizar el problema

#Llamada de la función que resuelve el equilibrio por el método del disparo no lineal
r2, ψ2, h = nonlinshoot(f, fψ, fψ1, a=a, α=α, b=b, β=β, sol=sol_analitica, N=N)

#Unión de la solución analítica en la vecindad del origen y la solución numérica
r = np.concatenate((r1,r2))
ψ = np.concatenate((ψ1,ψ2))

#Reflexión de la solución bajo la suposición de simetría radial
r = np.concatenate((np.sort(-r),r))
ψ = np.concatenate((ψ[::-1],ψ))

#Cálculo del error absoluto de la aproximación respecto a la sol. analítica
error_porcentual = abs(sol_analitica(r) - ψ)

#Graficación de los resultados
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(30,15), dpi=100)
ax=axs[0]
ax.plot(r, sol_analitica(r), label=r'Sol. Analítica')
ax.plot(r, ψ, label=r'Aprox. Numérica', dashes = dash_espacio)
ax.spines["bottom"].set_position(("data", 0))
ax.spines['left'].set_position(("data", 0))
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.plot(1, 0, ">k", transform=ax.get_yaxis_transform(), clip_on=False)
ax.plot(0, 0, "k<", transform=ax.get_yaxis_transform(), clip_on=False)
ax.plot(0, 1, "^k", transform=ax.get_xaxis_transform(), clip_on=False)
ax.text(0.04, 1.05, r'$\Psi(x)$')
ax.text(3.27, -0.04, r'$x$')
ax.legend()

```

Figura D.4: Código ejemplo de Solución de Equilibrio por Condiciones de Frontera

Bibliografía

- [1] K. Kikuchi, M. Lacner and M. Quan, *Fusion Physics*. IAEA, 2012.
- [2] M. Izquierdo, *La energía nuclear de fusión: conceptos básicos y estado actual*.
- [3] J. Freidberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] P. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2008.
- [5] O. Sauter and Y. Medvedev, *Tokamak Coordinate Conventions: COCOS*. Computer Physics Communications 184(2013) 293, 2013.
- [6] M. Ariola and A. Pironti, *Magnetic Control of Tokamak Plasmas*. Springer, 2016.
- [7] F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer, 2016.
- [8] R. Goldston and P. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1995.
- [9] L. Woltjer, “A theorem on force free magnetic fields,” *National Academy of Sciences*, vol. 44, no. 6, pp. 489–491, 1958.
- [10] J. B. Taylor, “Relaxation of toroidal plasmas and generation of reverse magnetic fields,” *Physical Review Letters*, vol. 33, no. 19, pp. 1139–1141, 1974.
- [11] J. B. Taylor, “Relaxation and magnetic reconnection in plasmas,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 58, no. 3, pp. 741–763, 1986.
- [12] R. Espejel and A. Calles, *Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales*. Las Prensas de Ciencias, 2019.
- [13] L. Burden, *Análisis Numérico*. Thomson Learning, 2001.
- [14] R. White, *The Theory of Toroidally Confined Plasmas*. Imperial College Press, 2014.
- [15] D. Escande, “From thermonuclear fusion to hamiltonian chaos,” *The European Physical Journal H*, vol. 43, pp. 397–420, 2018.