UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Subvariedades especiales Lagrangianas en variedades Calabi-Yau.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Oscar Aristidez Martínez Salas

DIRECTOR
Dr. Alejandro Betancourt de la Parra.
Cimat, A.C.

CIUDAD DE MÉXICO MARZO DE 2022.

Agradecimientos.

A mis sinodales,
por su tiempo y sugerencias para mejorar este trabajo.
Dr. Pierre Bayard.
Dr. Rafael Herrera.
Dr. Sergio Holguín.
Dr Omar Álvarez.
Dr. Gabriel Ruiz.
Y especialmente, al
Dr. Alejandro Betancourt,
por todas las enseñanzas,
sus clases y el tiempo dedicado a esta tesis.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

El presente trabajo basado en [6] y [7] tiene como propósito introducir las nociones primordialmente de *geometría calibrada* y alguna de sus aplicaciones, teoría hasta cierto punto muy reciente, y la cual abordaremos en el capítulo 5. Lo esencial en dicha geometría es que tiene su fundamento en cierta forma diferencial inherente en una variedad diferenciable llamada *forma de calibración*, dependiendo de dicha calibración se puede obtener información y clasificar a las variedades, más precisamente, la calibración opera sobre espacios vectoriales y en el caso de una variedad suave M sobre un subespacio de su espacio tangente T_pM en algún punto $p \in M$; la calibración nos dice entonces como es la subvariedad $S \subset M$ que tiene por espacio tangente el subspacio en el que opera la forma de calibración. Es por ello que resulta atractivo el estudio de dicha geometría. Otro aspecto importante que se abordara en esté capítulo será brevemente el de subvariedades mínimas, ya que una consecuencia de la teoría de calibraciones es que todas las subvariedades calibradas, son de hecho mínimas, lo cual ofrece una nueva herramienta para encontrar subvariedades mínimas.

En el capítulo 4 comenzaremos con una introducción a la teoría de los grupos de holonomía, estos se originan por medio de las nociones de curvatura y transporte paralelo a través de curvas cerradas en la variedad. Dado que el transporte paralelo preserva normas, es por tanto un subgrupo del grupo ortogonal $O(n)$, veremos entonces que se pueden clasificar las variedades en función de su grupo de holonomía, por ejemplo en el caso que dicho grupo sea un subgrupo de $SO(n)$ resultan variedades Riemanninas orientables, si damos el paso ahora cuando es un subgrupo de $U(n)$ se tiene el caso de las variedades *Kähler*, por mencionar algunos. La relación que existe entre la teoría de holonomía y la geometría calibrada se debe a que dependiendo del grupo de holonomía al que pertenezca la variedad se tiene una distinguida forma de calibración, y así por tanto algún tipo especial de subvariedades.

En este trabajo nos interesarán las calibraciones en las variedades *Calabi-Yau*, es por esto que en el capítulo 4 se verá principalmente la teoría básica de este tipo de variedades. Las variedades Calabi-Yau son un tipo particular de las variedades Kähler, las cuales a su vez son un caso de las variedades complejas, deben su nombre a la conjetura Calabi y su posterior demostración por Yau. El motivo de enfocarnos en estas variedades se debe a que como se mencionó en el párrafo anterior, las calibraciones nos arrojan algún tipo distinguido de subvariedades; partiendo del caso de las variedades meramente Riemannianas estas subvariedades resultan de nuevo variedades Riemannianas si ningún estructura adicional, lo mismo que en el caso de las variedades Kähler, es por tanto que la geometría calibarada no resulta tan interesante en estos casos, pero las variedades Calabi-Yau, las siguientes en el orden por su grupo de holonomía, son las primeras que si nos arrogan un tipo especial de subvariedades, en este caso las de las *especiales lagrangianas*.

Como se mencionó previamente las variedades Calabi-Yau son un tipo particular de las variedades Káhler, estás últimas son variedades complejas, es decir, sus mapeos de transición son biholomorfismos y por tanto son de dimensión real par, y que además tienen tres elementos distinguidos a saber una métrica hermitiana, una forma simpléctica y una estructura casi compleja. Dichos conceptos serán tratados en el capítulo 3, a su vez de la geometría intrínseca y distinguida dentro de este tipo de variedades.

En los primeros capítulos se introducirán algunas nociones básicas tales como formas diferenciales exactas y cerradas, los grupos de cohomología de De Rahm, y el operador *estrella* y como este da origen a la noción de volumen de una variedad.

Finalmente, en el último capítulo se exponen dos ejemplos que ilustran la teoría desarrollada, así como llevar a la práctica los teoremas expuestos.

Capítulo 2

Preliminares.

Comenzamos esta sección mencionando los conceptos y resultados básicos sobre la teoría de cohomología de de Rham, así como los conceptos que le dan origen, y que a la postre nos serán útiles para definir nuevos conceptos. Para tal propósito, sea M^n una variedad diferenciable, TM y T^*M sus haces vectoriales tangente y cotangente respectivamente, a sus secciones se les conoce como campos vectoriales en el caso del haz tangente y $1-$formas para el haz cotangente. Un *tensor* T en la variedad M es una sección del haz $\bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M$ en donde este último haz se compone del producto tensorial de los haces respectivos. Se denota por $\Omega^p(M)$ $(0 \leq p \leq n)$ o también como $\Lambda^p(T^*M)$ el espacio de las $p-$formas α en M^n. El operador lineal *derivada exterior* $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ satisface

$$d \circ d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+2}(M) = 0. \tag{2.1}$$

Es decir, para cualquier forma diferencial α, $d(d\alpha) = 0$.

Definición 2.0.1 *Una forma diferencial $\alpha \in \Omega^p(M)$ se dice* **cerrada** *si se tiene $d\alpha = 0$, por otro lado, si existe $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$ de tal forma que $d\beta = \alpha$ se dice que α es* **exacta**.

Notar que por **(2.1)** las formas exactas son también cerradas. Dos formas $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ para las cuales se tiene que $(\alpha - \beta)$ es una forma exacta se dice son *cohomologas.*

Definición 2.0.2 *Se definen los grupos de cohomología de de Rham por*

$$H^p_{dR}(M, \mathbb{R}) = \frac{formas \quad cerradas}{formas \quad exactas}.$$

En lo sucesivo solo se denotaran por $H^p(M)$ con el fin de economizar la notación.

Si V es un espacio vectorial con $dim\, V = n$ con una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ y producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\Lambda^p(V)$ es el $p-$ésimo producto exterior de V, se tiene un producto escalar en $\Lambda^p(V)$ dado por

$$\langle v_1 \wedge ... \wedge v_p, w_1 \wedge ... \wedge w_p \rangle = det\,(\langle v_i, w_j \rangle) \tag{2.2}$$

Así una base ortonormal para $\Lambda^p(V)$ está dada mediante

$$e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}, \qquad 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq n. \tag{2.3}$$

Definición 2.0.3 *Sea V un espacio vectorial orientado. Se define el operador lineal estrella $*$ como*

$$* : \Lambda^p(V) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(V), \qquad 0 \leq p \leq n,$$

$$*(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}}, \tag{2.4}$$

en los que $j_1, ..., j_{n-p}$ son de tal forma que $e_{i_1}, ..., e_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_{n-p}}$ es una base positiva de V.

Así entonces notar que

$$*(1) = e_1 \wedge ... \wedge e_n, \tag{2.5}$$

y recíprocamente

$$*(e_1 \wedge ... \wedge e_n) = 1. \tag{2.6}$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^5$ si se considera una base ortonormal como $(e_1, ..., e_5)$ se tendría $*(e_1 \wedge e_3) = -e_2 \wedge e_4 \wedge e_5$. Ya que

$$e_1 \wedge e_3 \wedge -e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5.$$

Dicho operador es tal que no depende de la base ortonormal positiva en V. Ahora, si $f_1, ..., f_n$ es una base positiva de V. Entonces

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{det\,(\langle f_i, f_j \rangle)}}\, f_i \wedge ... \wedge f_n,$$

ya que si $(e_1, ..., e_n)$ es una base ortonormal se tiene que $f_1 \wedge ... \wedge f_n = \sqrt{det\,(\langle f_i, f_j \rangle)}\, e_1 \wedge ... \wedge e_n$ sustituyendo **(2.5)** y despejando se sigue la igualdad.

Si consideramos ahora una variedad Riemanniana orientada (M^n, g) entonces se puede dar una orientación en cada uno de los espacios vectoriales tangente T_pM y cotangente T_p^*M y así se puede definir un operador estrella $* : \Omega^p(T_pM) \longrightarrow \Omega^{n-p}(T_pM)$. En vista que la métrica en el cotangente está dada por $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ por lo mencionado en el párrafo previo vemos que

$$*(1) = \sqrt{det\,(g_{ij})}\; dx_1 \wedge ... \wedge dx_n. \tag{2.7}$$

A esta ecuación **(2.7)** se le llama la *forma de volumen*. Se define el volumen de la variedad M como

$$vol(M) := \int_M *(1). \tag{2.8}$$

$$= \int_M \sqrt{det\,(g_{ij})}\; dx_1 \wedge ... \wedge dx_n. \tag{2.9}$$

2.1. Operador de Laplace

Definición 2.1.1 *Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ se define el producto L^2 mediante*

$$(\alpha, \beta) := \int_M \alpha \wedge *\beta.$$

Tal producto es bilineal y definido positivo.

Observemos que en relación a dicho producto se tiene

$$(\alpha, \alpha) = ||\alpha||^2_{L_2} = \int_M g(\alpha, \alpha)\; vol_g = \int_M |\alpha|^2_g\; vol_g.$$

Usando ahora las propiedades del operador derivada exterior si $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$, sabemos entonces que $d\alpha \in \Omega^k(M)$, y así operar $(d\alpha, \beta)$ que por definición se obtiene $(d\alpha, \beta) = \int_M d\alpha \wedge *\beta = \int_M g(d\alpha, \beta)\; vol_g$.

Definición 2.1.2 *Si $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$ se define el operador d^* como el adjunto a la derivada exterior d, con respecto al producto L_2, es decir,*

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta).$$

Con lo cual, $d^* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$.

Definición 2.1.3 *El operador de Laplace se define mediante*

$$\Delta : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

$$\Delta\alpha := \; d\, d^* \alpha + d^*\, d\alpha.$$

Una $k-$forma α se dice *armónica* si $\Delta\alpha = 0$.

Lema 2.1.1 *Una $k-$forma α es armónica si y sólo si $d\alpha = d^*\alpha = 0$.*

Demostración.
Primeramente, usando que el producto L_2 es definido positivo, si la forma α es armónica por definición se tiene que $\Delta\alpha = 0$, así entonces $0 = (\Delta\alpha, \alpha) = (d\, d^*\alpha + d^*\, d\alpha, \alpha)$ y ya que también es bilineal esto es igual a $(d\, d^*\alpha, \alpha) + (d^*\, d\alpha, \alpha)$, ahora en vista que d y d^* son adjuntos, lo anterior es $(d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha) = 0$ por lo tanto ambos $d^*\alpha = d\alpha = 0$.
Recíprocamente, si $d^*\alpha = d\alpha = 0$, entonces $\Delta\alpha := \; d\, d^*\alpha + d^*\, d\alpha = 0 + 0 = 0$.

C.Q.D.

Corolario 2.1.1 *En una variedad Riemanniana compacta toda función armónica es constante.*

Capítulo 3

Variedades Kähler.

3.1. Variedades complejas y semi complejas.

Comenzaremos este capítulo introduciendo la noción de variedad compleja, símil a la idea de una variedad suave un sistema de coordenadas holomorfas en M es una colección $\{z_\alpha : U_\alpha \longrightarrow z_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n\}$, en la que U_α es una cubierta para M y las funciones $z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ son holomorfas.

Definición 3.1.1 *Una* **variedad compleja** M^n *de dimensión compleja* n *es una variedad suave cuyo sistema coordenado es holomorfo.*

Asentando ideas si $\{(x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n)\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$ y $z_1(x_1, y_1, ..., x_n, y_n), z_2, ..., z_n$ un sistema coordenado holomorfo para M, entonces por las ecuaciones de Riemann-Cauchy $\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial z_\beta}{\partial y_i}$ y así para cada par de funciones z_α y z_β.

Definición 3.1.2 *Dada una variedad compleja* M^n*, una subvariedad real* $S^k \subset M^n$ *se dice una subvariedad compleja si en cada punto* $s \in S$ *existen coordenadas holomorfas* $\{z_\alpha\}$ *en una vecindad* U_s *de* s *tales que*

$$S \cap U_s = \{t \in U_s \ : z^{k+1}(t) = ... = z^n(t) = 0\}.$$

En tal caso la dimensión de la subvariedad es $k < n$ y desde luego, cada subvariedad compleja es en si misma una variedad compleja.

Definición 3.1.3 *Una estructura casi compleja J sobre una variedad M de dimensión real $2n$ es un endomorfismo $J \in End(TM)$ que satisface $J^2 = -Id$.*

Una variedad de dimensión par equipada con una estructura casi compleja J será llamada una **variedad casi compleja** denotada por (M, J). Además toda variedad casi compleja es orientada.

Teorema 3.1.1 *Sea (M, J) una variedad casi compleja y $X \in TM$. Entonces son equivalentes*

(1) $\mathcal{L}_X J = 0$

(2) $[X, JY] = J[X, Y], \quad Y \in TM.$

Donde $\mathcal{L}$ es la derivada de Lie y $[\cdot, \cdot]$ el corchete de Lie.

Demostración.
Supongamos que $\mathcal{L}_X J = 0$, entonces

$$[X, JY] = \mathcal{L}_X JY = (\mathcal{L}_X J)Y + J\mathcal{L}_X Y = (\mathcal{L}_X J)Y + J[X, Y],$$

en vista que el primer sumando es cero, se tiene $[X, JY] = J[X, Y]$.

C.Q.D.

Una variedad compleja siempre es casi compleja, para ver esto tomar una carta $z_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ y definir J como $d(z_\alpha^{-1} \circ i \circ z_\alpha)$. El converso no es cierto en general salvo una condición de integrabilidad.

Definición 3.1.4 *Una estructura casi compleja será compleja si proviene de una atlas holomorfo y en tal caso diremos que J es* **integrable**.

Vemos que dada una variedad casi compleja comprobar que esta es compleja requiere probar que cada mapeo de transición derivado de la estructura casi compleja sea un biholomorfismo, tarea que en principio parece no sencilla. Para tal efecto, existe otra obstrucción que permite comprobar cuando una variedad casi compleja es compleja, y esta se basa en la nulidad de cierto tensor llamado de *Nijenhuis.*

Definición 3.1.5 *Se define el tensor de Nijenhuis mediante*

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

Debido a un teorema de *Newlander-Nirenberg* dada una variedad casi compleja es condición suficiente y necesaria que el tensor de Nijenhuis se anule en todo $X, Y \in TM$ para que la variedad sea compleja.

Teorema 3.1.2 *(Newlander-Nirenberg 1957)*
Una estructura casi compleja J es integrable si y solo si el tensor de Nijenhuis $N_J(X,Y)$ se anula para todo $X, Y \in TM$.

Se define el haz tangente complejo por

$$TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong TM \oplus iTM. \tag{3.1}$$

Si (M, J) es una variedad compleja para cada punto $p \in M$ se puede extender la estructura J de manera $\mathbb{C}$-lineal a $J : T_p^{\mathbb{C}}M \longrightarrow T_p^{\mathbb{C}}M$. Dado que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado y en vista que $J^2 = -Id$ se sigue que J tiene eigenvalores $\{i, -i\}$. De lo cual descomponemos $TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$ de donde

$$T^{1,0} = \{X \in TM^{\mathbb{C}} \mid J(X) = iX\}, \tag{3.2}$$

$$T^{0,1} = \{X \in TM^{\mathbb{C}} \mid J(X) = -iX\}. \tag{3.3}$$

Y vemos que también los podemos expresar en la siguiente forma que nos será más útil posteriormente.

Lema 3.1.1

$$T^{1,0} = \{X - iJX \mid X \in TM\}, \tag{3.4}$$

$$T^{0,1} = \{X + iJX \mid X \in TM\}. \tag{3.5}$$

Demostración.
Será suficiente probarlo para $T^{1,0}$ ya que el otro caso es completamente análogo.

$$\begin{aligned} J(X - iJX) &= JX - iJ^2X && \text{De la linealidad de } J. \\ &= JX + iX && \text{Ya que } i^2 = -1. \\ &= iX - i^2JX \\ &= i(X - iJX) \end{aligned}$$

C.Q.D.

Dado que $TM^{\mathbb{C}}$ es la versión compleja de una espacio vectorial real, la noción de complejo conjugado tiene sentido, es decir, para $X, Y \in TM, \overline{X + iY} = X - iY$, por tanto si $Z = X - iY$ por **Lema 3.1.1** $Z \in TM^{\mathbb{C}}$.

Teorema 3.1.3 *Los campos vectoriales del tipo* $(1,0)$ *sobre una variedad casi compleja* (M, J) *son cerrados bajo el corchete de Lie si y sólo si el tensor de Nijenhuis se anula* $N_J = 0$*, es decir, si la variedad es compleja.*

Demostración.
Sean X, Y campos vectoriales en la variedad M. Hemos visto que los campos del tipo $(1,0)$ son de la forma $X - iJX$, entonces

$$[X - iJX, Y - iJY] = [X, Y] - [JX, JY] - i([JX, Y] + [X, JY]) \quad (1)$$

Este último campo vectorial es del tipo $(1,0)$ si es de la forma $U - iJU$. Sea $U = [X, Y] - [JX, JY]$, entonces $U - iJU$ se ve como

$$[X, Y] - [JX, JY] - i\,(J([X, Y] - [JX, JY])) \quad (2)$$

y $(1) = (2)$ si y sólo si

$$J([X, Y] - [JX, JY]) = [JX, Y] + [X, JY]$$

lo cual es equivalente a que $N_J = 0$.

C.Q.D.

Ahora, si $\{(z_\alpha, U_\alpha)\}$ es un sistema de coordenadas holomorfas se tiene que para cada α los mapeos se pueden escribir como $z_\alpha := x_\alpha + iy_\alpha$.

Se definen

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}) \end{cases} \tag{3.6}$$

y

$$\begin{cases} dz_\alpha := dx_\alpha + idy_\alpha, \\ d\overline{z}_\alpha := dx_\alpha - idy_\alpha. \end{cases} \tag{3.7}$$

Poniendo $J(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ y $J(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ vemos que se satisface $J^2 = -Id$ y más aún,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - iJ\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = 2\frac{\partial}{\partial z_\alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + iJ\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha}.$$

Por tanto vemos que localmente $T^{1,0} = \langle\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\rangle$ para así ser llamado el **haz tangente homolomorfo** y $T^{0,1} = \langle\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha}\rangle$ el **haz tangente anti-holomorfo**.

Ahora, si ponemos $V = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ se sigue que $\overline{V} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ así entonces

$$J(\overline{V}) = J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) + iJ\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

por otro lado

$$\overline{J(V)} = \overline{J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) - iJ\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)} = \overline{\frac{\partial}{\partial y_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Lo cual muestra que $\overline{T^{1,0}} = T^{0,1}$ y $\overline{T^{0,1}} = T^{1,0}$.

Siguiendo la misma idea en formas exteriores, notemos que podemos extender la estructura casi compleja J a T^*M, esto es, a 1-formas mediante $J\alpha(X) = \alpha(JX) \in \mathbb{R}$.

Se define el haz cotangente complejicado por

$$T^*M_{\mathbb{C}} := TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Nuevamente, ya que J tiene eigenvalores $\{i, -i\}$ el haz tangente complejicado se descompone mediante

$$T^*M_{\mathbb{C}} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}. \tag{3.9}$$

De donde,

$$\Lambda^{1,0} = \{\text{eigenespacio asociado a } i\} = \{\alpha \mid J\alpha(X) = i\alpha(X)\}, \tag{3.10}$$

y

$$\Lambda^{0,1} = \{\text{eigenespacio asociado a } -i\} = \{\alpha \mid J\alpha(X) = -i\alpha(X)\}. \tag{3.11}$$

Lema 3.1.2 *Una forma α es del tipo $(1,0)$, es decir, $\alpha \in \Lambda^{1,0}$ si y sólo si para cualquier campo vectorial $Z \in T^{0,1}$ $\alpha(Z) = 0$. Análogamente $\beta \in \Lambda^{0,1}$ si y sólo si $\beta(W) = 0$ para $W \in T^{1,0}$.*

Demostración.
De nuevo será suficiente probar un solo caso, ya que el otro es en esencia lo mismo.

Sabemos del **Lema 3.1.1** que un campo en $T^{0,1}$ es de la forma $X + iJ(X)$ luego para $\alpha \in \Lambda^{1,0}$ se tiene

$$\alpha(X + iJ(X)) = \alpha(X) + i\alpha(J(X)) = \alpha(X) + iJ\alpha(X) = \alpha(X) + i^2\alpha(X) = 0.$$

C.Q.D.

Notemos ahora que para las ecuaciones **(3.6)** y **(3.7)** se satisface

$$dz_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) = \delta_\alpha^\beta = d\overline{z}_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\beta}\right), \tag{3.12}$$

$$dz_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\beta}\right) = 0 = d\overline{z}_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right). \tag{3.13}$$

Así, $\Lambda^{1,0} = \langle dz_\alpha\rangle$ y $\Lambda^{0,1} = \langle d\overline{z}_\alpha\rangle$. Las formas de estos subhaces son llamadas formas del tipo $(1,0)$ o del tipo $(0,1)$ respectivamente.

Se denota la $k-$ésima potencia exterior del subhaz $\Lambda^{1,0}$ (análogamente $\Lambda^{0,1}$) por $\Lambda^{k,0}$ $(\Lambda^{0,k})$, y en general $\Lambda^{p,q}$ denota el producto tensorial $\Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,q}$, esto es, el conjunto de formas vistas como el producto cuña de p elementos en $\Lambda^{1,0}$ y q elementos en $\Lambda^{0,1}$. Se define su haz compleficado por

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}}M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M.$$

Las secciones de este haz son llamadas formas del tipo (p,q), y al conjunto de estas formas se denota por $\Omega^{p,q}M$.

Lo anterior nos da pie a extender por complejicación el operador real derivada exterior mediante

$$d : \Lambda^k_{\mathbb{C}}M \longrightarrow \Lambda^{k+1}_{\mathbb{C}}M. \tag{3.14}$$

Así, la derivada exterior d mapea $\Lambda^{p,q}M$ hacia $\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M$ y se descompone por tanto de la forma

$$d := \partial + \overline{\partial} \tag{3.15}$$

en donde

$$\partial : \Lambda^{p,q}M \longrightarrow \Lambda^{p+1,q}M,$$
$$\overline{\partial} : \Lambda^{p,q}M \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}M.$$

Ya que $0 = d^2 = (\partial + \overline{\partial})^2 = \partial^2 + (\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial) + \overline{\partial}^2$ y debido a que cada uno de los sumandos toma valor en distinto subhaz, se sigue cada uno de ellos es cero, dando como resultado

$$\partial^2 = 0, \qquad \overline{\partial}^2 = 0, \qquad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0. \tag{3.16}$$

Una $(p,0)$-forma α se dice holomorfa si $\overline{\partial}\alpha = 0$.

3.2. Variedades Kähler.

La geometría de la variedades Kähler se puede pensar como punto de intersección entre las geometrías compleja, riemanniana y simpléctica, esto debido a que las variedades Kähler en general consisten de una forma semi compleja integrable J, de una métrica hérmitiana g y una $2-$forma ω la cual es de hecho una forma simpléctica.

Definición 3.2.1 *Una métrica g en (M,J) una variedad casi compleja se dice* **hermitiana** *si*

$$g(X,Y) = g(JX,JY) \tag{3.17}$$

para todo X,Y.

Aunado a la definición anterior se asocia la 2-forma ω a la métrica hermitiana mediante

$$\omega(X,Y) := g \circ J = g(JX,Y). \tag{3.18}$$

Y vemos que efectivamente es una 2-forma ya que

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) = g(J^2X,JY) = -g(JY,X) = -\omega(Y,X).$$

En donde usamos que la métrica es hermitiana y simétrica. Con esto se tienen tres estructuras $\{g,J,\omega\}$ las cuales están relacionadas entre sí. A la 2-forma ω se le denomina la **forma de Kähler**. Una manera de definir una variedad Kähler es mediante estas tres estructuras, es decir, una variedad equipada con estos tres operadores y alguna condición adicional.

Definición 3.2.2 *Una* **variedad Kähler** *está dada por* (M, J, g, ω)*, en donde* J *es una estructura compleja,* g *una métrica hermitiana y* ω *una 2-forma de tal manera que se satisface:*

1. $g(JX, Y) = \omega(X, Y)$.
2. *w es cerrada y no degenerada.*
3. $N_J = 0$ *(Estructura compleja.)*

Es común que en ocasiones se use una definición alternativa y equivalente para definir una variedad Kähler, esta es, una variedad casi compleja (M, J) con métrica hermitiana g y en donde se tiene que J es **covariantemente constante o paralela**con respecto a la conexión de Levi-Civita de g, es decir, $\nabla J = 0$, o equivalentemente

$$\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y) \tag{3.19}$$

esto debido a que para cualesquiera X, Y se tiene $0 = (\nabla_X J)(Y) = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$. En ocasiones será muy útil hacer uso de esta propiedad de la estructura casi compleja, sobre todo al momento de trabajar con el tensor de curvatura y otras relaciones del tipo geométrico de la variedad de Kähler.

Es notable hacer notar que la estructura casi compleja bajo esta definición de variedades Kähler es necesariamente compleja, es decir, esta es integrable. Para ver esto recordar que es suficiente y necesario verificar que el tensor de Nijenhuis se anula, en efecto

$$\begin{aligned}
N_J(X, Y) &= \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX - J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX) \\
&\quad - J(\nabla_X JY - \nabla_{JY} X) - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\
&= -[J(\nabla_{JX} Y) - \nabla_{JX} JY] + [J(\nabla_{JY} X - \nabla_{JY} JX] \\
&\quad + [J(\nabla_Y JX) - \nabla_Y J(JX)] - [J(\nabla_X JY) - \nabla_X J(JY)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En donde, para la última igualdad se aplicó la ecuación **(3.19)**.

Una métrica hermitiana g sobre una variedad casi compleja (M, J) se dice una **métrica Kähler** si J es una estructura compleja y la forma asociada ω es cerrada.

Proposición 3.2.1 *Sea* g *es una métrica hermitiana,* ω *la 2-forma asociada y* J *una estructura casi compleja paralela respecto a la conexión de Levi-Civita de* g*. Entonces la forma* ω *es cerrada.*

Demostración.
Bastará con probar que la forma ω es paralela en vista que la derivada exterior se expresa en términos de la conexión mediante

$$d\omega(X_0, ..., X_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i (\nabla_{X_i}\omega)(X_0, ..., \tilde{X}_i, ..., X_p),$$

así

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(Y,Z) &= X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z)\\ &= X(g(JY,Z)) - g(J(\nabla_X Y), Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\ &= X(g(JY,Z)) - g(\nabla_X(JY), Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\ &= (\nabla_X g)(JY, Z) = 0.\end{aligned}$$

Para la igualdad en el segundo renglón se usó de nueva cuenta la ecuación **(3.19)**.

C.Q.D.

Teorema 3.2.1 *Una métrica hermitiana g sobre una estructura casi compleja es Kähler si y sólo si J es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita.*

Una dirección está dada por la proposición previa, la otra dirección se puede consultar en [10], con lo cual las equivalencias para una variedad Kähler se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2 *Sea (M, J) una variedad casi compleja, g una métrica hermitiana con conexión de Levi-Civita ∇ y forma de Kähler ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) J es una estructura compleja y g una métrica Kähler, con forma de Kähler ω cerrada.

(ii) J es paralela con respecto a ∇, es decir, $\nabla J = 0$,

Así, para la forma cerrada ω se define la clase de cohomología real

$$[\omega] \in \mathbb{H}^{1,1}_{\mathbb{R}}(M, \mathbb{R}),$$

llamada **la clase de Kähler** de ω.

3.3. Tensor de curvatura en variedades Kähler.

Si (M, J, g, w) es una variedad Kähler de dimensión compleja n con conexión de Levi-Civita ∇ y como se hizo anteriormente sean z_α un sistema coordenado holomorfo local, en donde $\alpha \in \{1, ..., n\}$, así entonces la base asociada para el haz tangente complijicado está dada por

$$Z_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \qquad Z_{\bar{\alpha}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}.$$

Se denotan los componentes de la métrica g con base en las coordenadas locales anteriores por

$$g_{\alpha\beta} := g(Z_\alpha, Z_\beta), \qquad g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} := g(Z_{\bar{\alpha}}, Z_{\bar{\beta}}). \tag{3.20}$$

Y $g^{\alpha\bar{\beta}}$ los coeficientes de la matriz inversa. Ya que la métrica es hermitiana se tienen las siguientes igualdades

$$g_{\alpha\beta} = g(Z_\alpha, Z_\beta) = g(JZ_\alpha, JZ_\beta) = g(iZ_\alpha, iZ_\beta) = i^2 g(Z_\alpha, Z_\beta) = -g_{\alpha\beta}.$$

Análogamente para $g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$, por tanto se sigue

$$g_{\alpha\beta} = g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0. \tag{3.21}$$

Así, se tiene que sólo no se anulan los términos de la forma $g_{\alpha\overline{\beta}}$ y $g_{\overline{\alpha}\beta}$. De lo anterior también se deduce para la 2-forma ω

$$\omega_{\alpha\beta} = w(Z_\alpha, Z_\beta) = g(JZ_\alpha, Z_\beta) = ig_{\alpha\beta} = 0.$$

De manera similar $\omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = -ig_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0$, $\omega_{\overline{\alpha}\beta} = ig_{\overline{\alpha}\beta}$, $\omega_{\alpha\overline{\beta}} = -ig_{\alpha\overline{\beta}}$. Lo cual muestra que la forma ω es del tipo $(1,1)$. Y en coordenadas locales toma la forma

$$\omega = ig_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta. \tag{3.22}$$

En donde estamos usando la notación de la **convención de Einstein**, es decir, sumar sobre los indices repetidos inferior y superiormente.

Algunas de las razones por las que en ocasiones resultan más sencillas las variedades Kähler vienen del hecho que la métrica está dada localmente por una función real. Para ver esto el siguiente teorema resultará fundamental.

Teorema 3.3.1 ($i\partial\overline{\partial}$)**.** *Sea $\omega \in \Omega(M)$ una 2-forma cerrada en una variedad Kähler. Entonces en cada punto $x \in M$ existe una vecindad U_x de M tal que ω restringido a U toma la forma*

$$\omega = i\partial\overline{\partial}u$$

para alguna función real u en U.

La demostración de teorema se puede consultar en [10]. Y derivado de esto se tiene la siguiente implicación.

Teorema 3.3.2 *Sobre una variedad Kähler, la métrica se expresa localmente de la forma*

$$g_{\alpha\overline{\beta}} = \partial\overline{\partial}\Phi_{\alpha\overline{\beta}}. \tag{3.23}$$

Demostración.
Valiéndose de la forma de Kähler ω, sabemos que esta es cerrada, es decir, $d\omega = 0$, con lo cual del **Teorema 3.3.1**, localmente $\omega_{\alpha\overline{\beta}} = i\partial\overline{\partial}\Phi_{\alpha\overline{\beta}}$ para alguna función real Φ. También, $\omega_{\alpha\overline{\beta}} = \omega(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}) = g(J\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}) = ig(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}) = ig_{\alpha\overline{\beta}}$. Derivado de las igualdades anteriores se llega a

$$i\partial\overline{\partial}\Phi_{\alpha\overline{\beta}} = \omega_{\alpha\overline{\beta}} = ig_{\alpha\overline{\beta}} \quad \therefore \quad g_{\alpha\overline{\beta}} = \partial\overline{\partial}\Phi_{\alpha\overline{\beta}.}$$

C.Q.D.

Una función Φ como en el teorema anterior se le llama **potencial de Kähler**.

Proposición 3.3.1 *Sea (M, J, g, ω) una variedad Kähler, entonces se satisface la siguiente igualdad*

$$\frac{\partial}{\partial z_k} g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} g_{k\bar{\beta}}. \tag{3.24}$$

Demostración.
Usaremos la siguiente notación para economizar el lenguaje, $\partial_k := \frac{\partial}{\partial z_k}$ con k corriendo sobre $(1, ..., n)$ y análogamente para el caso conjugado. Así,

$$\partial_k\, g_{\alpha\bar{\beta}} = g(\nabla_{\partial_k}\partial_\alpha, \partial_{\bar{\beta}}) + g(\partial_\alpha, \nabla_{\partial_k}\partial_{\bar{\beta}}),$$

y

$$\partial_\alpha\, g_{k\bar{\beta}} = g(\nabla_{\partial_\alpha}\partial_k, \partial_{\bar{\beta}}) + g(\partial_k, \nabla_{\partial_\alpha}\partial_{\bar{\beta}}).$$

ya que el subhaz $T^{1,0}$ es paralelo, los segundos miembros en los sumandos se hacen cero. Por otro lado,

$$\nabla_{\partial_k}\partial_\alpha - \nabla_{\partial_\alpha}\partial_k = [\partial_k, \partial_\alpha] = 0$$

$$\therefore \quad \partial_k g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha g_{k\bar{\beta}}.$$

C.Q.D.

La igualdad anterior es ocasionalmente llamada la **identidad de Kähler**, esta es muy útil para calcular los símbolos de Christoffel del tensor de curvatura, una de las cualidades más relevantes de las variedades Kähler es que dicho tensor toma una forma mucho más simple que en el caso Riemanniano, ya que varios de los términos se anulan.

En términos generales los símbolos de Christoffel en coordenadas holomorfas se ven en la forma

$$\nabla_{\partial_A}\partial_B := \Gamma^{\gamma}_{AB}\partial_\gamma + \Gamma^{\bar{\gamma}}_{AB}\partial_{\bar{\gamma}}$$

donde nuevamente usamos la notación de suma sobre lo indices repetidos inferior y superiormente y A, $B \in \{1, ...n, \bar{1}, ..., \bar{n}\}$. Calculando cada uno de los símbolos vemos que:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\{\partial_\alpha\, g_{\beta\eta} + \partial_\beta\, g_{\eta\alpha} - \partial_\eta\, g_{\alpha\beta}\}\, g^{\eta\bar{\gamma}} + \ \{\partial_\alpha\, g_{\beta\bar{\eta}} + \partial_\beta\, g_{\bar{\eta}\alpha} - \partial_{\bar{\eta}}\, g_{\alpha\beta}\}\, g^{\bar{\eta}\bar{\gamma}} \\
&= \frac{1}{2}\{2\ \partial_\alpha\, g_{\beta\bar{\eta}}\}g^{\bar{\eta}\bar{\gamma}} = \{\partial_\alpha\, g_{\beta\bar{\eta}}\}\, g^{\bar{\eta}\bar{\gamma}} = 0.
\end{aligned}$$

En donde los tres primeros sumandos en la llave se anulan por **(3.21)**, así como el último en la segunda llave y los dos restantes son iguales debido a **(3.24)**. De manera similar se tiene

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\{\partial_\alpha\, g_{\beta\eta} + \partial_\beta\, g_{\eta\alpha} - \partial_\eta\, g_{\alpha\beta}\}\, g^{\eta\gamma} + \ \{\partial_\alpha\, g_{\beta\bar{\eta}} + \partial_\beta\, g_{\bar{\eta}\alpha} - \partial_{\bar{\eta}}\, g_{\alpha\beta}\}\, g^{\bar{\eta}\gamma} \\
&= \frac{1}{2}\{2\ \partial_\alpha\, g_{\beta\bar{\eta}}\}g^{\bar{\eta}\gamma} = \{\partial_\alpha\, g_{\beta\bar{\eta}}\}\, g^{\bar{\eta}\gamma} \\
&= g(\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta,\, \partial_{\bar{\eta}}) + g(\partial_\beta, \nabla_{\partial_\alpha}\partial_{\bar{\eta}})\, g^{\bar{\eta}\gamma} = g(\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta,\, \partial_{\bar{\eta}})\, g^{\bar{\eta}\gamma}.
\end{aligned}$$

En este caso el sumando que se anula es debido a que el subhaz $T^{1,0}$ es paralelo. Finalmente, se concluye que los únicos símbolos de Christoffel que no se anulan son aquellos que tienen todos sus índices sin conjugado o todos sus indices conjugados. Más aún podemos observar que se tiene la identidad

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}. \tag{3.25}$$

Retomando algunos conceptos; la curvatura de una conexión ∇ es la 2-forma $R^{\nabla} \in \Omega(End\, E)$, donde E es una haz vectorial, dada por

$$R^{\nabla}(X,Y)\sigma := \nabla_X(\nabla_Y \sigma) - \nabla_Y(\nabla_X \sigma) - \nabla_{[X,Y]}\sigma, \tag{3.26}$$

para todos campos vectoriales X, Y y sección σ. Para la conexión de Levi-Civita se define el tensor de curvatura riemanniana por

$$Rm(X,Y,Z,W) := g(R(X,Y)Z, W), \tag{3.27}$$

expresado en coordenadas locales

$$Rm = R_{ijkl}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l.$$

Una métrica se dice **plana** si el tensor de curvatura se anula. Dicho tensor define las nociones de **curvatura de Ricci**,

$$Ric(X,Y) := Tr\{Z \mapsto R(Z,X)Y\}, \tag{3.28}$$

o equivalentemente

$$Ric(X,Y) = \sum Rm(e_k, X, Y, e_k),$$

donde e_k es una base para TM.
Visto en coordenadas locales como $R_{ij} = \sum R_{kijl}$.

Extendemos ahora las nociones de los tensores de curvatura a variedades Kähler por extensiones lineales. Con lo cual, el tensor de curvatura en coordenadas holomorfas está definido por

$$R_{\mathbb{C}}(Z_A, Z_B)Z_C := R^D_{ABC} Z_D,$$

a su vez

$$Rm_{\mathbb{C}}(Z_A, Z_B, Z_C, Z_D) := R_{ABCD} = g_{DE} R^E_{ABC}.$$

3.4. Forma de Ricci y la primera clase de Chern.

Otra de las cualidades de las variedades complejas, es la introducción de una forma diferencial por medio del tensor de Ricci, y a partir de la cual se puede extraer información sobre la variedad. Para ver esto primero veamos algunas de las características que cumplen el tensor de curvatura y de Ricci en una variedad Kähler.

Proposición 3.4.1 *Sea (M, J, g, ω) una variedad Kähler. Entonces*

(i) $Rm(X, Y, Z, W) = Rm(JX, JY, Z, W) = Rm(X, Y, JZ, JW)$

(ii) $Ric(X, Y) = Ric(JX, JY)$.

Demostración.
De **(3.19)** extraemos la igualdad $R(X, Y)JZ = J(R(X, Y)Z)$.
Ahora, de la definición del tensor de curvatura, sus simetrías y la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} Rm(JX, JY, Z, W) &= -g(R(JX, JY)Z, W) = -g(R(Z, W)JX, JY)) \\ &= -g(J(R(Z, W)X, JY) = -g(R(Z, W)X, Y) \\ &= Rm(X, Y, Z, W). \end{aligned}$$

En donde la penúltima igualdad se debe a que la métrica es hermitiana. Finalmente la segunda igualdad se sigue casi directo de las simetrías del tensor de Ricci.

C.Q.D.

El tensor de Ricci en coordenadas locales $R_{\alpha\beta} = Ric(Z_\alpha, Z_\beta)$, análogo a lo que sucedía con la métrica hermitiana se tiene que $R_{\alpha\beta} = R_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0$, y sólo los términos de la forma $R_{\alpha\overline{\beta}}$ pueden ser distintos de cero. Así, el tensor de Ricci da pie a definir una 2-forma mediante

$$Ric(JX, Y) := \rho(X, Y) \tag{3.29}$$

llamada la **forma de Ricci** y vista en coordenadas locales como $\rho_{\alpha\overline{\beta}} = iR_{\alpha\overline{\beta}}$, la cual por lo mencionado al comienzo del párrafo anterior es de hecho una $(1, 1)-$forma, y además cumple con ser real y cerrada. Para ver esto último, de la **Proposición 3.4.1** y de nueva cuenta las simetrías del tensor de Ricci se sigue que para campos X, Y

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= Ric(JX,Y) = Ric(JY,J^2X)\\ &= -Ric(JY,X) = -\rho(Y,X)\end{aligned}$$

más aún,

$$\begin{aligned}\rho(JX,JY) &= Ric(J^2X,JY) = -Ric(X,JY) = -Ric(JY,X)\\ &= -\rho(Y,X) = \rho(X,Y).\end{aligned}$$

Esto es, $\rho(JX,JY) = \rho(X,Y)$. Y así vemos que la forma de Ricci es efectivamente una $(1,1)-$forma difereciable real.

Un teorema muy importante sobre la forma de Ricci, y en el que no abundaremos ahora, dice que localmente dicha forma se puede ver en la forma siguiente

$$\rho = -i\partial\overline{\partial}\,log(\det(g_{\alpha\overline{\beta}})). \tag{3.30}$$

Finalmente, podemos ver que la cerradura de ρ se sigue de la igualdad anterior y recordando que $d = \partial + \overline{\partial}$. Se sigue de **(3.16)**,

$$d(-i\partial\overline{\partial}) = -i(\partial+\overline{\partial})\partial\overline{\partial} = -i(\partial^2\overline{\partial} - \partial\overline{\partial}^2) = -i0 = 0.$$

En otro orden de ideas, las clases de Chern son un cierto tipo de invariantes que suelen ser muy importantes tanto en geometría como en topología, estos se definen sobre haces vectoriales complejos, y para variedades complejas las clases de Chern se definen como las de su haz tangente. Nos interesara sobre todo la primer de estas clases, ya que esta está íntimamente relacionada en las variedades Kähler con su forma de Ricci.

Definición 3.4.1 *Sea (E, M) una haz vectorial complejo se define la clase de cohomología $c_1(M) \in H^2(M,\mathbb{Z})$, llamada la primer clase de Chern satisfaciendo los siguientes axiomas:*

i) Si $f : M \longrightarrow N$ es un mapeo suave entre variedades y (E, N) es un haz vectorial complejo, se tiene $f^*(c_1(E)) = c_1(f^*E))$.

ii) Si E, F son haces vectoriales sobre M, entonces

$$c_1(E \otimes F) = c_1(E) + c_1(F),$$

en donde $E \otimes F$ es la suma de Whitney sobre haces.

iii) La primer clase de Chern del haz tautológico de $\mathbb{C}P^1$ *es* -1 *en* $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z})$.

Si M es una variedad compleja, la primer clase de Chern $c_1(M)$ se define como la primer clase de Chern de su haz tangente TM, es decir,

$$c_1(M) = c_1(TM).$$

Definición 3.4.2 *Se define la* **primera clase de Chern** *de la variedad compleja* M*, como la clase de cohomología real*

$$c_1(M) := \frac{1}{2\pi}[\rho] \in \mathbb{H}^{1,1}_{\mathbb{R}}(M) \tag{3.31}$$

en donde ρ es la forma de Ricci. Más aún, dicha clase es tal que sólo depende de la estructura compleja en M, es decir, es independiente de la elección de la métrica.

3.5. Geometría simpléctica.

En este capítulo se introducirán los nociones básicas de la geometría simpléctica, lo necesario para poder definir lo que es una variedad *Lagrangiana*. Esencialmente, la geometría simpléctica consiste de una forma bilineal distinguida en una variedad Riemanniana (M, g), y las isometrías que la preservan.

Definición 3.5.1 *Sea* V *un espacio vectorial real de dimensión* n*. Una forma simpléctica es una forma bilineal no degenerada y antisimétrica*

$$\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

es decir, para todo $v \in V$

$$\omega(v, u) = 0 \quad \forall u \in V \Longleftrightarrow v = 0.$$

Para todos $u, v \in V$

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u).$$

A la pareja (V, ω) se le llama un **espacio vectorial simpléctico**. Debido a la antisimétria de la forma simplectica se tiene que necesariamente la dimensión real de V es par $dim(V) = 2m$. Lo cual nos dice que estos espacios encajan bien dentro del mundo complejo. Uno de los teoremas básicos del álgebra simpléctica nos dice que en (V, ω) existe una base $\{x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m\}$ de V tal que $\omega(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ y $\omega(x_i, x_j) = \omega(y_i, y_j) = 0$.

Si $W \subset V$ es un subespacio de V, llamamos el **complemento simpléctico** de W con respecto a ω al subespacio

$$W^{\perp} = \{v \in V \quad | \quad \omega(v, u) = 0 \quad \forall u \in W\}.$$

Así entonces decimos que $W \subset V$ se dice

(i) **Isotrópico** si $W \subset W^{\perp}$.

(ii) **Coisotrópico** si $W^{\perp} \subset W$.

(iii) **Simpléctico** si $W^{\perp} \cap W = \{0\}$.

(iv) **Lagrangiano** si $W = W^{\perp}$.

Notar que con base en lo anterior es equivalente para W ser isotrópico si $\omega|_W \equiv 0$, simpléctico si $\omega|_W$ es no degenerada y Lagrangiana si es ambas isotrópica y coisotrópica, por tanto también $\omega|_W \equiv 0$.

Lema 3.5.1 *Para todo $W \subset V$ se satisface*

$$dim\, W + dim\, W^{\perp} = dim\, V.$$

Demostración.
Para ver esto, notemos que $W^{\perp}$ es el anulador de W en V, por lo tanto tienen dimensión complementaria y se sigue el lema.

C.Q.D.

Se tiene del lema anterior que si W es un subespacio Lagrangiano entonces $dim\, W = \frac{1}{2}\, dim\, V$, es decir, la dimensión de W es la mitad de la dimensión total del espacio V. Conjuntando resultados se tiene que en un espacio vectorial Lagrangiano se satisface

$$\omega|_W \equiv 0, \quad W = W^{\perp} \quad \text{y} \quad dim\, W = \frac{1}{2}\, dim\, V. \tag{3.32}$$

Definición 3.5.2 *Sea M una variedad suave y $p \in M$. Una 2-forma $\omega \in \Omega(M)$ se dice simpléctica si ω es cerrada y para cada $p \in M$, ω_p es simpléctica.*

Al par (M,ω) se le llama **variedad simpléctica**. Ahora, si (M,ω) es simpléctica y $L \subset M$ es una subvariedad en M, esta se dice **Lagrangiana** si para cada $q \in L$ se tiene que $T_qL \subset T_qM$ es un espacio vectorial Lagrangiano.[1]

Ejemplos.
I. El caso más sencillo de variedad simpléctica consiste de $M = \mathbb{R}^{2n}$ y la forma simpléctica canónica ω_{can} dada mediante

$$\omega_{\text{can}} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

II. Veamos ahora que la sección cero del haz cotangente es una subvariedad Lagrangiana. Si M es una variedad $n-$dimensional, sabemos que su haz cotangente T^*M es una variedad $2n-$dimensional. Luego, si $N \subset M$ tiene coordenadas locales $\{x_1, ..., x_n\}$ y con coordenadas asociadas a T^*N $\{x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n\}$ se define la $1-$forma canónica en T^*M mediante

$$\alpha = \sum_i \xi_i \, dx_i$$

se tiene que

$$d\alpha = d\left(\sum_i \xi_i \, dx_i\right) = \sum_i (d\xi_i \wedge dx_i + \xi_i \wedge d(dx_i)) = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i$$

y así la $2-$forma canónica está dada mediante

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha = \sum_i dx_i \wedge d\xi_i.$$

Ahora, la sección cero del cotangente se define como

$$\sigma_0 = \{(x,\xi) \in T^*M \mid \xi = 0 \text{ en } T_p^*M\}.$$

Sobre la intersección $\sigma_0 \cap T^*N$ se tiene que $\xi_1 = \xi_2 =, ..., \xi_n = 0$. Por tanto, $\alpha|_{\sigma_0 \cap T^*N} \equiv 0$. Luego, si $i_0 : \sigma_0 \hookrightarrow T^*M$ es la inclusión de la sección cero en el haz cotangente, tenemos las igualdades

$$i_0^*\alpha = 0 \Longrightarrow i_0^* d\alpha = i_0^*\omega_{\text{can}} = 0.$$

Es decir, $\omega|_{\sigma_0} \equiv 0$, de lo cual se sigue que σ_0 es Lagrangiana.

[1] De la misma manera se puede definir una subvariedad simpléctica, isotrópica y coisotrópica.

Anteriormente se definió una variedad Kähler como el vector (M, J, g, ω), donde M es una variedad suave, J una estructura compleja, g una métrica hermitiana y finalmente ω la forma de Kähler dada por $\omega = g \circ J$, es decir, dos estructuras bastaban para conocer la tercera, más aún, así definida la forma de Kähler satisface con ser una forma simpléctica, por tanto podemos definir una variedad de Kähler en términos de una variedad simpléctica.

Definición 3.5.3 *Una variedad Kähler es una variedad simpléctica* (M, ω) *equipada con una estructura compleja* J*. En tal caso, la forma simpléctica* ω *es la forma de Kähler.*

Capítulo 4

Variedades Calabi-Yau.

El siguiente tipo de variedades de interés respecto a las Kähler, es el de las variedades Calabi-Yau, nombradas así debido a una famosa conjetura postulada por Calabi y posteriormente probada por Yau. Estas son un tipo de variedades Kähler más una condición adicional, la cual puede ser formulada de distintas maneras. De forma geométrica por medio de su grupo de holonomía o algebraica por medio de la primer clase de Chern.

4.1. Introducción a holonomía.

Sea $\pi : E \longrightarrow M$ es un haz vectorial sobre M con conexión ∇ y $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una trayectoria suave (a trozos), entonces el transporte paralelo es el mapeo entre espacios vectoriales $P_\gamma : E_{\gamma(0)} \longrightarrow E_{\gamma(1)}$, en el que para cada $e \in E_{\gamma(0)}$ existe una única familia suave $e_t \in E_{\gamma(t)}$ con $t \in [0,1]$ de tal forma que $\nabla_{\partial_t} e_t = 0$ donde $e_0 = e$ y $P_\gamma(e) = e_1$. Y dicho mapeo es un isomorfismo lineal.

En el caso cuando $E = TM$ y ∇ es la conexión de Levi-Civita de g se tiene que en cada $\gamma(t)$ existe un único vector $X(t)$, con $X \in TM$ para el cual entonces $\nabla X = 0$. Más aún, $\frac{d}{dt} g(X(t), X(t)) = 2g(\nabla X(t), X(t)) = 0$, se sigue entones que $||X(t)||^2 = c$, con c una constante, y así se tiene que $P_\gamma : T_{\gamma(0)} \longrightarrow T_{\gamma(0)}$ preserva norma.

Consideremos dos vectores tangentes $v, w \in T_pM$ y dos campos paralelos V, W a los largo de la trayectoria γ de tal forma que $V(0) = v$ y $W(0) = w$. Se tiene entonces que $V + W$ es un campo paralelo y que $(V + W)(0) = v + w$. Con lo cual $P_\gamma(v + w) = P_\gamma(v) + P_\gamma(w)$. De igual manera $P_\gamma(cv) = cP_\gamma(v)$ con

$c \in \mathbb{R}$, lo cual prueba que el transporte paralelo es un isomorfismo lineal.

Ahora, si γ, $\delta : [0,1] \longrightarrow M$ son dos trayectorias suaves de tal forma que $\gamma(0) = \delta(1)$ se definen las trayectorias $\delta \cdot \gamma : [0,1] \longrightarrow M$ mediante

$$\delta \cdot \gamma = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si} \quad t \in [0,1/2] \\ \delta(2t-1) & \text{si} \quad t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

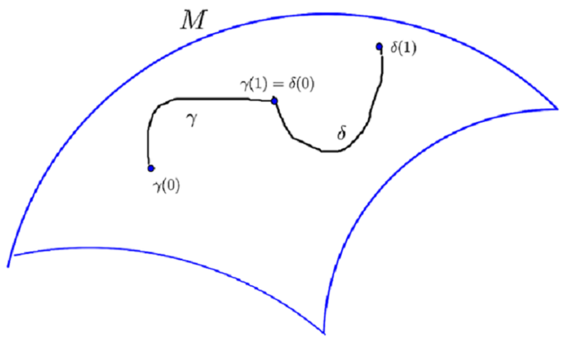

Figura 4.1: Producto de trayectorias $\delta \cdot \gamma$.

Y la trayectoria $-\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ como $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$. Notar entonces que el transporte paralelo para estas trayectorias satisface

$$P_{\delta\cdot\gamma} = P_\delta \circ P_\gamma \quad \text{y} \quad P_{-\gamma} = P_\gamma^{-1}. \tag{4.1}$$

Definición 4.1.1 *Una trayectoria γ se dice un lazo basado en p si $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ para un punto fijo $p \in M$.*

Se define el **grupo de holonomía** como

$$Hol_p(\nabla) = \{P_\gamma : \gamma : [0,1] \longrightarrow M \ : \ \gamma \ \text{ es una lazo suave basado en}\, p\}.$$

Observemos que $Hol_p(\nabla) \subseteq Aut(T_pM)$, se sigue de **(4.1)** que $Hol_p(\nabla)$ es un subgrupo de $Aut(T_pM)$.

Veamos ahora que el grupo de Holonomía no depende del punto fijado, sean $p \neq q$ dos puntos distintos en M, entonces si M es conexa, lo es por trayectorias, luego existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y

$\alpha(1) = q$, así $P_\alpha : T_pM \longrightarrow T_qM$ y $Hol_p(\nabla) = P_\alpha^{-1} Hol_q(\nabla) P_\alpha$. En tal caso se dice que Hol_p y Hol_q son conjugados, por tanto el grupo de holonomía en una variedad es único salvo conjugados, esto es, no depende del punto.

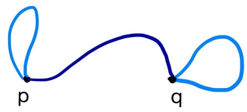

Figura 4.2: Hol_p y Hol_q son conjugados.

Definición 4.1.2 *Un tensor T sobre una variedad M tal que $\nabla T = 0$ se dice es un* **tensor covariantemente constante**, *ocasionalmente llamado solamente tensor constante o paralelo.*

Sean $p, q \in M$ dos puntos distintos y γ una trayectoria en M de p a q, si T es un tensor constante en M, entonces $P_\gamma(T_p) = T_q$. De lo que se sigue que los tensores constantes son invariantes bajo el transporte paralelo, es decir, estos están determinados por el grupo de holonomía $Hol(\nabla)$. Se tiene entonces el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1 *(Principio de holonomía.)*
Sea M una variedad y ∇ una conexión en su haz tangente TM. Para $p \in M$ fijo se tiene que $Hol_p(\nabla)$ actúa sobre el producto tensorial $\bigotimes^r T_pM \otimes \bigotimes^s T_p^*M$. Más aún, si T es un tensor constante, entonces $T|_p$ es fijado por la acción de $Hol_p(\nabla)$, y conversamente, si $T|_p$ es fijado por $Hol_p(\nabla)$ entonces existe un tensor constante T.

Para una variedad Riemanniana (M, g) con conexión de Levi-Civita ∇, el **grupo de holonomía Riemannina** $Hol_p(g)$ se define como el grupo de holonomía $Hol_p(\nabla)$. Ya que la métrica g es un tensor constante $\nabla g = 0$ por lo mencionado en el párrafo anterior se tiene que esta es invariante bajo su grupo de holonomía, así entonces $Hol_p(g)$ es un subgrupo de $Aut(T_pM)$ que preserva la métrica g. De nueva cuenta, $Hol_p(g)$ es único salvo conjugación y por tanto independiente del punto $p \in M$ así tiene sentido escribir solamente $Hol(g)$.

Sobre $\mathbb{R}^n$, en vista que la conexión es la plana usual, el transporte paralelo a lo largo de cualquier lazo en un punto es el mapeo identidad, se tiene entonces que $Hol(\nabla) = \{0\}$.

Veamos el caso para la esfera S^2. Si ∇ es la conexión usual y en vista que S^2 es una variedad orientada se tiene que su grupo de Holonomía es un subgrupo del especial ortogonal, es decir, $Hol(\nabla) \subset SO(2)$. Transportanto paralelamente un vector tangente en N a través de un lazo basado en N dado por un triángulo esférico como en la figura, dos semi-meridianos y una porción de la circunferencia principal, vemos que el resultado es una rotación por α, con $\alpha \in [0, 2\pi]$. Se tiene que de hecho $Hol(\nabla) = SO(2)$.

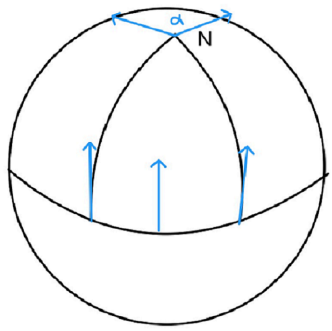

Figura 4.3: Holonomía en S^2.

Marcel Berger en 1955 hace una clasificación para las distintas holonomías de variedades irreducibles. Enumeramos los primeros casos posibles.

Clasificación de Berger en función de la Holonomía.		
$Hol(M, g)$	Geometría.	Observaciones.
$O(n)$	Variedades diferenciables	Métricas Riemannianas genéricas.
$SO(n) \subseteq O(n)$	Variedades diferenciables.	Orientables.
$U(n) \subseteq SO(n)$	Variedades Kähler.	
$SU(n) \subseteq U(n)$	Variedades Calabi-Yau.	Ricci planas.
$Sp(n)$	HiperKähler.	Ricci planas.
$Sp(n) \cdot Sp(1)$	Quaternionic Kähler.	Variedades Einstein, pero no Ricci planas. $Ric = \lambda g,\ \lambda \neq 0$.
$Spin(7)$	Holonomia excepcional.	Ricci planas.
$G_2 \subset SO(7)$	Ricci plana	Geometría G_2.

Tabla 4.1: Clasificación de Berger.

4.2. Variedades Calabi-Yau.

Las variedades Calabi-Yau suelen ser definidas de varias maneras, las cuales se comprenden mejor según el campo en el que se estén estudiando, es decir, aunque todas sus formulaciones son equivalentes, esta equivalencia no suele ser apreciable a simple vista, lo cual podría hacer creer que se trata de objetos distintos. Dentro de la geometría algebraica, en donde es usual trabajar con haces vectoriales, la forma más común de entender una variedad Calabi-Yau, es a través del haz canónico de la variedad ambiente $\Lambda^{n,0}$, y considerando la forma de Ricci ρ, la cual es de hecho su tensor de curvatura, se formula una Calabi-Yau como aquella cuya primer clase de Chern es cero $c_1(M) = 0$, se sigue de esto que la variedad es Ricci plana. Por otro lado, también se suele encontrar la definición de una Calabi-Yau, como aquella cuyo grupo de holonomía $Hol(g)$ es un subgrupo de especial unitario $SU(n)$, en donde n es la dimensión compleja de la variedad. Por último, la definición más acorde al propósito de este trabajo, está dada por una variedad Kähler (M, J, g, ω) junto con una $(n, 0)-$forma Ω, llamada forma de volumen holoformo.

En lo subsecuente consideraremos variedades Riemannianas compactas de dimensión $2n$ real. Definidas en $\mathbb{C}^n$ la métrica g y 2-forma ω dadas por

$$g = |dz_1|^2 + \cdots + |dz_n|^2, \qquad \omega = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\overline{z}_1 + \cdots + dz_n \wedge d\overline{z}_n), \tag{4.2}$$

vemos que el subgrupo del general lineal $GL(2n, \mathbb{R})$ preservando g y ω es el especial unitario $SU(n)$, más aún, si definimos la $(n, 0)-$ forma Ω mediante

$$\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n, \tag{4.3}$$

llamada la **forma de volumen holomorfa**, y la cual también se preserva bajo $SU(n)$ se sigue del **Teorema 4.1.1** que existen formas ω y Ω constantes bajo la conexión de Levi-Civita de la variedad, las cuales se pueden escribir como arriba en cada punto de la variedad. De esto se concluye que cada $2n-$variedad Riemanniana cuyo grupo de Holonomía sea $SU(n)$ admite una forma de Kähler ω y una forma de volumen holomorfo Ω constantes. Y conversamente, si (M, g, J, ω) es una variedad Kähler y admite una forma de volumen holomorfo Ω constante, entonces la holonomía de la variedad es $SU(n)$.

Voltemos la mirada ahora al haz canónico de la variedad M, $\Lambda^{n,0} = K_M$, el cual es un haz de líneas holomorfo; ya que la variedad tiene una métrica Kähler g, esta induce una métrica en el haz, y así se tiene una conexión ∇^K en K_M. La curvatura de esta conexión es una 2-forma cerrada, la cual es de hecho la forma de Ricci ρ de la variedad.

Ahora, si suponemos que la variedad (M, g, J, ω) es Ricci plana, implica que $\rho \equiv 0$ y por consiguiente $c_1(M) = 0$. En vista que ρ es la curvatura de la conexión ∇^K en K_M, se tiene también que ∇^K es plana, lo cual nos dice que el haz canónico admite secciones constantes localmente, y debido a que la forma de volumen holomorfo es una sección que no se anula de K_M. Dicha forma de volumen existe, si y solo si el haz es trivial. Concluimos que una variedad Kähler (M, g, J, ω) con $Hol(g) \subseteq SU(n)$ tiene haz canónico K_M trivial.

Proposición 4.2.1 *Sea (M, g, J, ω) un variedad Kähler simplemente conexa. Entonces $Hol(g) \subseteq SU(n)$ si y sólo si g es Ricci plana.*

Definición 4.2.1 *Sea (M, g, J) variedad Kähler conexa. Una variedad Calabi-Yau se define por alguna de las siguientes equivalencias:*

i.- $Hol(g) \subseteq SU(n)$.

ii.- Haz canónico K_M trivial.

iii.- M admite una forma de volumen holomorfa Ω.

Como se mencionó en párrafos arriba, como consecuencia de las definición ii se tiene también que la variedad es ricci plana con $c_1(M) = 0$.

El nombre de *variedades Calabi-Yau* deriva de la combinación de los nombres de los matemáticos Eugenio Calabi, el cual conjeturó en 1956 que variedades con primera clase de Chern igual a cero admitían una métrica cuya curvatura de Ricci era también cero; posteriormente el matemático Shin-Tung Yau en 1977 probó dicha conjetura en un teorema. Destacar que fue gracias a este teorema que Yau recibió la medalla Fields en 1982.

Teorema 4.2.1 (Yau - 1977.) *Sea (M, g, J, ω) variedad Kähler compacta con forma de Ricci ρ. Para cada 2-forma $\tilde{\rho} \in 2\pi c_1(M)$ existe una única 2-forma $\tilde{\omega}$ con $[\omega] = [\tilde{\omega}]$ y tal que la forma de Ricci de $\tilde{\omega}$ es $\tilde{\rho}$.*

Corolario 4.2.1 *Sea (M, g, J, ω) variedad Kähler cerrada con $c_1(M) = 0$. Entonces M admite una única métrica con $Ric = 0$ y clase de Kähler $[\omega]$.*

El teorema anterior afirma que cada forma $\tilde{\rho} \in 2\pi c_1(M)$ puede ser la forma de Ricci para una métrica Kähler y que además las clases de Kähler son iguales $[\omega] = [\tilde{\omega}]$.

Capítulo 5

Geometría calibrada.

La teoría de la geometría calibrada fue desarrollada por Harvey y Lawson en [8] publicación de 1982, lo cual nos dice que dicha teoría es muy reciente. En esencia, la geometría calibrada consta de subvariedades en una variedad Riemanniana determinadas por una forma diferencial cerrada, dichas subvariedades se encuentran inmersas dentro del estudio de las subvariedades complejas, más en concreto de las variedades Kähler. Parte de lo interesante del estudio de las subvariedades calibradas es que resultan ser un caso particular de las subvariedades mínimas. En general, las subvariedades mínimas son los puntos críticos del funcional de volumen, y para verificar que sean minimizantes implica resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Veremos a su vez que las subvariedades calibradas se determinan por una ecuación diferencial parcial de primer orden, lo cual resulta una herramienta muy útil, ya que además son minimizantes no sólo puntos críticos. También existe una relación estrecha entre las subvariedades calibradas y el grupo de holonomía de la variedad ambiente, ya que variedades con grupo de holonomia especial garantiza la existencia de subvariedades calibradas.

5.1. Introducción a las subvariedades mínimas.

Dada una variedad Riemanniana (M, g), se tiene definida en esta un funcional de volumen, los puntos críticos para dicho funcional se conocen como subvariedades mínimales. Otra manera de entenderlo es, dada $N \subset M$, esta será mínima si su volumen se mantiene bajo variaciones pequeñas $F : N \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ de la inmersión $i : N \longrightarrow M$, es decir, si $\frac{d}{dt} vol(F(s,t))|_{t=0} = 0$. Notar que en el caso cuando la subvariedad es de dimensión 1, esta resultará ser mínima si es una geodésica.

De manera intrínseca se puede entender a las subvariedades mínimas por medio de la teoría de ecuaciones diferenciales, para ver esto, si k denota el vector de curvatura media de la subvariedad N, entonces esta es mínima sí y sólo si $k = 0$[1], lo cual es una condición local, más aún si N viene dada por la inmersión $i : N \longrightarrow M$, se tiene que la curvatura media depende de la primer y segunda derivadas de i, con esto se tiene que la ecuación $k = 0$ resulta ser una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Observar que el ser subvariedad mínima no necesariamente implica ser volumen minimizante.

5.2. Subvariedades calibradas

Sea (M^n, g) variedad Riemanniana. Un *k-plano tangente orientado V* en M es un subespacio vectorial V para algún T_pM con $dim\, V = k$, $k \leq n$ equipado con una orientación. Si N es una subvariedad orientada de M tal que $dim\, N = k$, entonces para cada $p \in N$, T_pN es una k-plano tangente orientado.

Definición 5.2.1 *Sea (M, g) variedad Riemanniana, una k-forma η se dice una calibración en M si*

1. *Es cerrada, i.e, $d\eta = 0$.*
2. *Si para todo $e_1, ..., e_k$ vectores tangentes unitarios en M, $\eta(e_1, ..., e_k) \leq 1$.*

Notar que cualquier forma diferencial en $\mathbb{R}^n$ constante y distinta de cero puede ser rescalada para ser una calibración, lo cual por principio nos arroja una gran cantidad de calibraciones η. El punto interesante de las calibraciones se vuelve entonces si existen planos orientados P para los cuales $\eta|_P = 1$, más aún, si existen subvariedades N para las cuales T_pN en cada punto $p \in N$ se tenga que $\eta|_{T_pN} = 1$.

Definición 5.2.2 *Sea N es una subvariedad orientada de M con dimensión k, esta se dice calibrada por η si $\eta(e_1, ..., e_k) = 1$, con $\{e_1, ..., e_k\}$ cualquier base ortonormal orientada de T_pN, o en otras palabras si $\eta|_{T_pN} = vol_{T_pN}$ para todo $p \in N$. En tal caso N se llama subvariedad calibrada o η-subvariedad.*

[1]Los detalles de este resultado se pueden consultar en [9]

Una de las bondades que ofrecen las subvariedades calibradas se debe a que estas tienen una condición algebraica sobre los vectores tangentes a la subvariedad, esto es, una ecuación diferencial de primer orden; ahora si volteamos la mirada hacia las subvariedades minimales, estás responden a una ecuación diferencial de segundo orden, lo cual es generalmente algo muy difícil de resolver. El siguiente teorema nos asegura que toda subvariedad calibrada es minimal.

Teorema 5.2.1 *Sea (M, g) Riemanniana, η una calibración en M y N una subvariedad compacta en M calibrada por η. Entonces N es volumen minimizante en su clase de homología.*

Demostración.
Primeramente veamos que N es minimal. Sea $dim\, N = k$, con clase de homología $[N] \in H_k(M, \mathbb{R})$ y $[\eta] \in H^k(M, \mathbb{R})$ su clase de cohomología. Calculando y usando el hecho que por ser η-calibrada $\eta|_{T_pN} = vol_{T_pN}$

$$[\eta] \cdot [N] = \int_{p \in N} \eta|_{T_pN} = \int_{p \in N} vol_{T_pN} = vol_N.$$

Luego, sea N' una subvariedad k-dimensional compacta en M en la misma clase de homología de N, así $\eta|_{T_pN'} \leq vol_{T_pN'}$ y calculando

$$[\eta] \cdot [N] = [\eta] \cdot [N'] = \int_{p \in N'} \eta|_{T_pN'} \leq \int_{p \in N'} vol_{T_pN} = vol'_N.$$

Por tanto de las dos ecuaciones anteriores se tiene que N es minimizante en su clase de homología.

C.Q.D.

Fijémonos ahora en el grupo de holonomía de una variedad Riemanniana (M, g) con conexión de Levi-Civita ∇. Si $G \subset O(n)$ es dicho grupo de holonomía, entonces G actúa sobre k-formas en $\mathbb{R}^n$ y así se tienen k-formas G-invariantes en $\mathbb{R}^n$. Considerando una k-forma no cero η_0 G-invariante y reescalando de ser necesario para que en cada k-plano orientado $P \subset \mathbb{R}^n$ se satisfaga que $\eta_0|_P \leq vol_P$, con igualdad $\eta_0|_P = vol_P$ en al menos un k-plano. Dado que η_0 es G-invariante se sigue que para cada $\gamma \in G$ las condiciones anteriores se satisfacen también para $\gamma \cdot \eta_0$, lo cual nos dice que hay bastantes calibraciones.
Ahora, por teoría de holonomía **Teorema 4.1.1** se tiene que para una $k-$forma $G-$invariante existe una $k-$forma constante, es decir, existe una k-forma η en

M correspondiente a η_0 tal que $\nabla\eta = 0$, de lo cual $d\eta = 0$, lo que nos dice que hay una k-forma cerrada, por tanto una calibración en M. Más aún, ya que habían bastantes calibraciones $\gamma \cdot \eta_0$, se puede pensar que hay bastantes subvariedades calibradas. El paso siguiente es ver como se ven dichas subvariedades calibradas en función del respectivo grupo de holonomía de la variedad ambiente M.

Consideremos primordialmente los grupos de holonomía $U(m)$ para variedades Kähler y $SU(m)$ para el caso Calabi-Yau. En una variedad Kähler (M, J, ω) , con ω una $2-$forma simpléctica, un resultado importante es que la forma definida por $\omega^k/k!$ es una calibración y las subvariedades calibradas correspondientes son simplemente subvariedades complejas k-dimensionales. Lo cual nos dice que en el caso Kähler las subvariedades que se obtienen no arrogan nada nuevo.

Teorema 5.2.2 *Sea (M, J, ω) una variedad Kähler. Entonces $\omega^k/k!$ es una calibración con subvariedades calibradas subvariedades complejas $k-$dimensionales.*

Para la demostración se auxiliará del siguiente teorema.

Teorema 5.2.3 *Sean $\{e_1, ..., e_{2k}\} \in \mathbb{C}^n$ vectores unitarios arbitrarios. Entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$\frac{\omega^k}{k!} \leq 1.$$

Y la igualdad se cumple si y sólo si $\langle e_1, ..., e_{2k}\rangle$ es un k-plano complejo.

La demostración se puede consultar en [9].

Demostración Teorema 5.2.2.
Notar que $d\omega^k = kd\omega \wedge \omega^{k-1} = 0$, ya que ω es cerrada. Luego del teorema anterior se sigue que $\frac{\omega^k}{k!}$ es una calibración.

C.Q.D.

5.3. Especiales Lagrangianas

El caso siguiente de grupo de holonomía dentro de la clasificación de Berger es $Hol_g = SU(m)$, el grupo de matrices complejas unitarias con determinante

1, esto es, de las variedades Calabi-Yau. Nuevamente tomando la identificación de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas complejas $(z_1, ..., z_n)$, entonces se puede definir una métrica g, una forma de Kähler ω y una forma de volumen holomorfa Ω como en **(4.2)** y **(4.3)** por

$$g = |dz_1|^2 + \cdots + |dz_n|^2, \qquad \omega = \frac{i}{2}\sum_i dz_i \wedge d\tilde{z}_i,$$

$$\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

Esto es, una métrica hermitíana y una forma simpléctica de Darboux. Lo interesante del caso Calabi-Yau es que al venir equipadas con una forma de volumen holomorfo Ω entonces se tiene que $Re(\Omega)$ y $Im(\Omega)$ son $n-$formas reales en $\mathbb{C}^n$, la cual resulta además ser una calibración. Para ver esto, y dado que se ha visto que $d\Omega = 0$, resta ver ver la otra condición de calibración. Sea $e_1, ..., e_n$ una base para $\mathbb{R}^n$ y sea $P \in \mathbb{C}^n$ un $n-$plano. Así, se tiene que existe una transformación $A \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que si $u_1, ..., u_n$ es una base ortonormal para P entonces $u_i = A(e_i)$, luego por teorema del determinante $\Omega(A(e_1), ..., A(e_n)) = det_{\mathbb{C}}(A)$. Por tanto

$$\begin{aligned} |\Omega(u_1, ..., u_n)|^2 = |det_{\mathbb{C}}(A)|^2 = |det_{\mathbb{R}}(A)| &= |u_1 \wedge iu_1 \wedge ... \wedge u_n \wedge iu_n| \\ &\leq |u_1||iu_1| \cdots |u_n||iu_n| = 1. \end{aligned}$$

Más aún, se tiene que la desigualdad última se hace igualdad si y sólo si los $\{u_1, iu_1, ..., u_n, iu_n\}$ son ortonormales, lo cual implica que P es un plano lagrangiano, es decir, $\omega|_P \equiv 0$. Con lo cual se tiene que Ω es una calibración.

Definición 5.3.1 *Dada una subvariedad $N \subset M$, se le llama* **especial lagrangiana** *si es calibrada respecto a $Re(\Omega)$.*

Del hecho que $\omega|_N \equiv 0$ y $Re(\Omega) = vol_N$ se tiene también la condición $Im(\Omega) = 0$. Retomando de la geometría simpléctica que una subvariedad se dice Lagrangiana si precisamente $\omega|_N \equiv 0$, es por tanto que las especiales lagrangianas son lagragianas con la condición adicional que $Im(\Omega) = 0$. Por todo lo anterior se sigue que las subvariedades especiales lagrangianas tienen la mitad de dimensión de la variedad ambiente.

Proposición 5.3.1 *Sea $N \subset \mathbb{C}^n$ una subvariedad de dimensión real n. Entonces N admite una orientación con la cual es especial lagrangiana si y sólo si $\omega|_N \equiv 0$ y $Im(\Omega) = 0$.*

Ejemplo 4.1. En el caso $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ se tiene coordenada compleja $z = x + iy$, forma de Kähler $\omega = \frac{i}{2} dz \wedge d\tilde{z} = dx \wedge dy$ y forma de volumen holoformo $\Omega = dz = dx + idy$. Por tanto, $Re(\Omega) = dx$ y $Im(\Omega) = dy$. Así, para que una subvariedad $N \subset \mathbb{C}$ sea especial lagrangiana debe satisfacer $dx(N) = 1$ y $dy(N) = 0$, y ya que ω es una $2-$forma se sigue que esta se anula sobre cualquier curva. Con lo cual se tiene que las especiales lagrangianas en $\mathbb{C}$ son de la forma $N = \{x + t \mid t \in \mathbb{R}\}$, es decir, rectas paralelas al eje x, lo cual es congruente con la noción de subvariedades mínimas.

Ejemplo 4.2. Consideremos ahora $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, con coordenadas complejas estándares $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, forma simpléctica y de volumen homolorfa

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\tilde{z}_1 + dz_2 \wedge d\tilde{z}_2) = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 \\ &= \frac{1}{2}[dx_1 \otimes dy_1 - dy_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dy_2 - dy_2 \otimes dx_2],\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= dz_1 \wedge dz_2 = (dx_1 + idy_1) \wedge (dx_2 \wedge idy_2) \\ &= dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2 + i(dy_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dy_2).\end{aligned}$$

Luego entonces

$$Re(\Omega) = dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2 \quad \text{y} \quad Im(\Omega) = dy_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dy_2. \tag{5.2}$$

Con base en el **Teorema 5.3.1** veamos que planos $P \subset \mathbb{C}^2$ satisfacen con ser especiales lagrangianos, y ya que deben ser lagrangianos estos deben ser 2-dimesional real. Consideremos primero $P = \langle x_1, y_1 \rangle = ax_1 + by_1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}Im(\Omega)|_P = \frac{1}{2}&[dy_1 \otimes dx_2(ax_1 + by_1) - dx_2 \otimes dy_1(ax_1 + by_1) \\ &+ dx_1 \otimes dy_2(ax_1 + by_1) - dy_2 \otimes dx_1(ax_1 + by_1)] \\ &= \frac{1}{2}[0 - 0b + a0 - 0] = 0.\end{aligned}$$

Pero de **(5.1)** vemos que $\omega|_{\langle x_1, y_1 \rangle} \neq 0$, es de hecho ab. Prosiguiendo de manera análoga vemos que $\omega|_P = 0$, si P es alguno de los generados por

$$\{\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle\}.$$

Y distinto de cero en $\{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle\}$. Por otro lado, se ve de **(5.2)** que $Im(\Omega)$ se anula en

$$P = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \langle y_1, y_2 \rangle\}.$$

Por tanto ambas formas se anulan en los planos generados por $\{\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle\}$. Y así, estos son los planos que admiten una orientación para cual resultan subvariedades especiales lagrangianas.

Ejemplo 4.3. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave, su gráfica es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^{2n}$, es decir, si consideramos $N = \text{graf }(f) = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ tiene sentido preguntarse cuando es N especial Lagrangiana. Lo cual depende enteramente de los vectores tangentes a N, los cuales, si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$, vienen dados por $e_1 + i\nabla_{e_1} f, ..., e_n + i\nabla_{e_n} f$. Entonces la condición ser lagrangiana $\omega|_N \equiv 0$ implica que

$$\omega(e_j + i\nabla_{e_j} f, e_k + i\nabla_{e_k} f) = 0$$

para todos j, k. Ya que la forma ω es simpléctica y que la función se ve en la forma $f = (f_1, ..., f_n)$ se sigue que $\nabla_{e_j} f = (\nabla_{e_j} f_1, ..., \nabla_{e_j} f_n)$ y así entonces

$$\begin{aligned}\omega(e_j + i\nabla_{e_j} f, e_k + i\nabla_{e_k} f) &= \omega(e_j, e_k) + i\omega(e_j, \nabla_{e_k} f) + i\omega(\nabla_{e_j} f, e_k) - \omega(\nabla_{e_j} f, \nabla_{e_k} f) \\ &= \nabla_{e_k} f_j - \nabla_{e_j} f_k. \qquad (5.3)\end{aligned}$$

Por tanto, pedir que la gráfica sea una subvariedad lagrangiana implica la condición $\nabla_{e_k} f_j - \nabla_{e_j} f_k = 0 \; \forall j, k$. Dado que dicha subvariedad está encajada en un espacio euclideano, condición **(5.3)** se produce si y solo si f tiene un potencial, es decir, si existe una función H, tal que $f = \nabla H$.

Lo siguiente es ver que condición adicional debe cumplir para ser especial lagrangiana. Por teorema del determinante se tiene que

$$\Omega(e_1 + i\nabla_{e_1} \nabla H, ..., e_n + i\nabla_{e_n} \nabla H) = det(I + iHess\, H).$$

Para el caso de dimensión 2, con coordenadas (x, y) dicho determinante toma la forma

$$\begin{aligned}det(I + iHess\, H) &= \begin{vmatrix} I + iH_{xx} & iH_{xy} \\ iH_{yx} & I + iH_{yy} \end{vmatrix} \\ &= I - H_{xx}H_{yy} + H_{xy}^2 + i(H_{xx} + H_{yy})\end{aligned}$$

En donde H_x denota la parcial de la función H respecto de la variable x y respectivamente para H_y. Por tanto $Im(\Omega)|_N = H_{xx} + H_{yy}$, pedir que dicha forma se anule se traduce en que el potencial H sea armónico. Así entonces la condición para que la gráfica de una función sea espacial lagrangiana en dimensión 2 se cumple si y solo si $\Delta H = 0$.

Procediendo de manera similar se llega que para el caso $n = 3$ se tiene que N es especial lagrangiana si y solo si el potencial H de f satisface $\Delta H = H_{xx} + H_{yy} + H_{zz} = det\; Hess\, H$.

Definición 5.3.2 *Una variedad* **real analítica***, es una variedad diferenciable cuya estructura diferenciable es real analítica.*

En vista que las subvariedades especial Lagrangianas en $\mathbb{C}^n$ son calibradas, y por tanto subvariedades mínimas, otra consecuencia importante es que también estas resultan ser real analíticas[2].

Teorema 5.3.1 *Sea N una subvariedad especial Lagrangiana en $\mathbb{C}^n$. Se tiene entonces que N es real analítica en donde quiera que sea no singular.*

También, como resultado de la real analiticidad se tienen los siguientes resultados.

Teorema 5.3.2 *Sea P una $(n-1)-$subvariedad real analítica de $\mathbb{C}^n$ tal que $\omega|_P \equiv 0$. Entonces existe localmente una única subvariedad especial Lagrangiana N de $\mathbb{C}^n$ conteniendo a P.*[3]

5.4. Mapeo momento

Una herramienta muy útil y practica dentro de la geometría compleja y simpléctia es la noción de mapeo momento[4], el cual puede ser usado para construir nuevas variedades a partir de una variedad simpléctica ambiente.

En $\mathbb{C}^n$ con la métrica g y forma de Kähler ω canónicas, se tiene que el grupo preservando ambos es $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$, con $\mathbb{C}^n$ actuando por traslaciones. Sea $G \subset U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(T\mathbb{C}^n)$ acción de $\mathfrak{g}$ en $\mathbb{C}^n$.

Definición 5.4.1 *Un mapeo momento para la acción de G en $\mathbb{C}^n$ es un mapeo suave $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, que satisface*

(i) $\iota(\phi(X))\omega = \omega(\phi(X), \cdot) = \langle d\mu, X\rangle$.

[2]Este resultado lo muestran Harvey y Lawson en [8]

[3]Las pruebas de estos teoremas expuestas por Harvey y Lawson en [8] hacen uso de alguna teoría extensa y no expuesta en el presente trabajo ya que nos aleja de los propósitos y lo extendería demasiado.

[4]La noción de mapeo momento involucra algunos conceptos que se pueden revisar en el apéndice, además que aplica para variedades simplécticas en general, aquí la definiremos solo para el caso $\mathbb{C}^n$.

(ii) μ *es* $G-$*equivariante con respecto a la acción coadjunta de* $\mathfrak{g}^*$*.*

$$\mu(g \cdot p) = Ad^*(g) \cdot \mu(p).$$

Con $g \in G$ y $p \in M$.

Nos interesaran los mapeos momentos cuando el grupo de Lie G es compacto, ya que en entre otras cosas los mapeos momento no siempre existen, pero si el grupo de Lie es compacto se garantiza la existencia del mapeo.

El mapeo momento se hace relevante en el estudio de las subvariedades Lagrangianas de $\mathbb{C}^n$, debido a que estas subvariedades se encuentran en subconjuntos de nivel del mapeo momento, $\mu^{-1}(c) = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, \mu(z) = c\}$, con $c \in \mathfrak{g}^*$. Convirtiendo al mapeo en una herramienta muy útil para encontrar Lagrangianas especiales.

Si $Z(\mathfrak{g}^*)$ es el centro para la acción coadjunta de G, entonces de la ecuación **(5.4)** podemos ver que el conjunto de nivel $\mu^{-1}(c)$ es G-invariante si y sólo si $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$. Más todavía, si $\mathcal{O}$ es una órbita para la acción de G, entonces el siguiente resultado nos da una condición de cuando dicha órbita es una subvariedad Lagrangiana, es decir, se cumple que $\omega|_{\mathcal{O}} \equiv 0$.

Proposición 5.4.1 *Sea* G *es un grupo de Lie conexo de* $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$ *con álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *y mapeo momento* μ*. Sea* $\mathcal{O}$ *una órbita para la acción de* G *en* $\mathbb{C}^n$*. Entonces* $\mathcal{O}$ *es isotrópica, i.e.,* $\omega|_{\mathcal{O}} \equiv 0$ *si y sólo si* $\mathcal{O} \subset \mu^{-1}(c)$ *para alguna* $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$*.*

Demostración.
Sean $x, y \in \mathfrak{g}$ y X, Y los campos vectoriales respectivos inducidos por la acción de λ. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \omega(X,Y) &= \langle Y \cdot (\langle x, d\mu \rangle) \rangle \qquad \text{(Definición de mapeo momento (2))} \\ &= \langle x \cdot (\langle Y, d\mu \rangle) \rangle = \langle x, d\mu(Y) \rangle \\ &= \langle x, \mathcal{L}_Y \mu \rangle. \qquad \text{(Derivada de Lie)} \end{aligned}$$

De lo cual se tiene la igualdad

$$\omega(X,Y) = \langle x, \mathcal{L}_Y \mu \rangle. \tag{5.4}$$

Luego, ya que $\mathcal{O}$ es una órbita para la acción de G, se tiene que para $x \in \mathfrak{g}$, los campos $X = \lambda(x)$ le son tangentes a dicha órbita y su espacio tangente se compone por estos campos X. Con lo cual $\mathcal{O}$ es isotrópica, $\omega|_{\mathcal{O}} \equiv 0$ si y sólo si

$\omega(X,Y) = 0 \; \forall x, y \in \mathfrak{g}$. De **(5.5)** se sigue que $0 \equiv \langle x, \mathcal{L}_Y \mu \rangle$, y esto se satisface si y solo si $\mathcal{L}_Y \mu = 0$ para toda $y \in \mathfrak{g}$. De la conexidad de G se sigue entonces que μ es constante sobre $\mathcal{O}$, así entonces $\mathcal{O} \subset \mu^{-1}(c)$ para alguna $c \in \mathfrak{g}^*$.
Ya que $\mathcal{O}$ es G-invariante, por definición de mapeo momento, por lo mencionado en el párrafo previo a la proposición se sigue que c es $Ad^*(G)$-invariante, es decir, $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$.

C.Q.D.

Proposición 5.4.2 *Sea N una subvariedad lagrangiana conexa de $\mathbb{C}^n$, G un subgrupo de Lie conexo de $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$ preservando N, y álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces N admite un mapeo momento μ, y $N \subset \mu^{-1}(c)$ para alguna $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$.*

Demostración.
Sea $x \in \mathfrak{g}$ y X el campo vectorial asociado a la acción del grupo. Ya que $\iota(X)\omega = \omega(X, \cdot)$ es una 1-forma cerrada, se tiene que existe $f_x \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ tal que

$$df_x = \iota(X)\omega = \omega(X, \cdot). \tag{5.5}$$

Como N es lagrangiana, $\omega|_N \equiv 0$, y X tangente a N, se sigue que $df_x|_N = \omega(X, \cdot) = 0$. De la conexidad se tiene entonces que f_x es constante en N.

Tomando f_x de tal forma que $f_x|_N = 0$, y debido a que esta es lineal en x, existe un único mapeo $\mu_0 : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ de tal manera que

$$\langle x, \mu_0 \rangle = f_x \tag{5.6}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Luego entonces $df_x = d\langle x, \mu_0 \rangle = \langle x, d\mu_0 \rangle$ y de la ecuación **(5.6)** se obtiene finalmente que

$$\omega(X, \cdot) = \langle x, d\mu_0 \rangle.$$

C.Q.D.

Observación. La acción de $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ es hamiltoniana. Luego, el momento que se considera asociado a G es la restricción del momento de $U(n)$ de lo que se sigue que el mapeo momento sea $G-$equivariante.

Algunos tipos de subvariedades especiales Lagrangianas son aquellas de **cohomogeidad uno**; las cuales vienen dadas por aquellas cuyas órbitas de su grupo simétrico G tienen codimensión uno respecto a la especial Lagrangiana. Sumado a este tipo de especiales Lagrangianas a la **Proposición 5.4.2** se tiene el siguiente teorema.

Teorema 5.4.1 *Sea G un subgrupo de Lie conexo de $SU(n) \ltimes \mathbb{C}^n$ con su respectiva álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y mapeo momento $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Si $\mathcal{O}$ es una órbita orientada de G en $\mathbb{C}^n$ con dim $\mathcal{O} = n-1$ y $\mathcal{O} \subset \mu^{-1}(c)$ para $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$. Entonces existe localmente una única subvariedad especial Lagrangiana $G-$invariante N en $\mathbb{C}^n$ conteniendo a la órbita $\mathcal{O}$ y $N \subset \mu^{-1}(c)$. También N esta fibrada por G-órbitas, esto es, N es localmente difeomorfa a $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{O}$.*

Demostración.

Ya que $SU(n) \subset U(n)$ y por hipótesis G es un subgrupo conexo de $SU(n)$, por **Proposición 5.4.1** se tiene que $\omega|_{\mathcal{O}} \equiv 0$ si y sólo si $\mathcal{O} \subset \mu^{-1}(c)$ para algún elemento $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$, ya que este último se tiene por hipótesis se sigue que la forma de Kähler se anula en la órbita $\mathcal{O}$, es decir, es una subvariedad isotrópica. Más aún, como esta es una $G-$órbita resulta ser también una subvariedad real analítica.

Ahora, ya que la órbita $\mathcal{O}$ es real analítica de dimensión $n-1$ en $\mathbb{C}^n$ y $\omega|_{\mathcal{O}} \equiv 0$ se tiene así que por **Proposición 5.3.2** existe localmente una única subvariedad especial Lagrangiana N de $\mathbb{C}^n$ que contiene a $\mathcal{O}$.

Finalmente, en vista que $\mathcal{O}$ es $G-$invariante y $G \cdot N \supseteq \mathcal{O}$ es lagrangiana tenemos por unicidad que $G \cdot N \subset N$, entonces N es localmente $G-$invariante, luego por **Proposición 5.4.2** $N \in \mu^{-1}(c)$ para alguna $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$

C.Q.D.

Capítulo 6

Ejemplos.

En este capítulo presentaremos un par de ejemplos de subvariedades especiales Lagrangianas que ilustren los teoremas del capítulo previo. La variedad ambiente es $\mathbb{C}^3$ en ambos casos.

6.1. Ejemplo 1.

Considerando al grupo $G = T^2$ de matrices ortogonales dentro de $SU(3)$, explícitamente

$$G := \{\gamma = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix} \mid \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0,\ \theta_j \in \mathbb{R}\}.$$

Notar entonces que G es $2-$dimensional, ya que si se multiplican los elementos en la diagonal nos queda la identidad, esto es, $det\, \gamma = e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} = e^{i0} = 1$ por tanto γ es una matriz ortogonal. De lo cual el centro de G se ve como un T^2 y hay dos elementos libres $(-\theta_3 = \theta_1 + \theta_2)$. También se puede ver esto debido a que G es de hecho abeliano se sigue que su centro es ella misma, y así $Z(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^*$. Con $\mathfrak{g}^*$ el espacio dual del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ las matrices de traza cero.

Se define una acción de G en $\mathbb{C}^3$ mediante

$$\gamma : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2, e^{i\theta_3} z_3)$$

Y notar que

$$\begin{aligned}\gamma\cdot(e^{i\theta_1}z_1,e^{i\theta_2}z_2,e^{i\theta_3}z_3)&\mapsto(e^{i\theta_1}e^{i\theta_1}z_1,e^{i\theta_2}e^{i\theta_2}z_2,e^{i\theta_3}e^{i\theta_3}z_3)\\&=(e^{i(\theta_1+\theta_2)}z_1,e^{i(\theta_2+\theta_2)}z_2,e^{i(\theta_3+\theta_3)}z_3)\end{aligned}$$

También, si llamamos γ' a la matriz

$$\gamma'=\begin{pmatrix}e^{i(\theta_1+\theta_1)}&0&0\\0&e^{i(\theta_2+\theta_2)}&0\\0&0&e^{i(\theta_3+\theta_3)}\end{pmatrix}$$

se tiene que $det\,(\gamma')=e^{i(\theta_1+\theta_1+\theta_2+\theta_2+\theta_3+\theta_3)}=e^{2i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=e^0=1$. Y así procediendo sucesivamente se tiene que las órbitas son copias de $G=T^2$.

Luego, G admite un mapeo momento. Para hallar el campo generador infinitesimal $\tilde{X}$ derivar

$$(e^{it\theta_1}z_1,\,e^{it\theta_2}z_2,\,e^{it\theta_3}z_3)$$

en $t=0$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\tilde{X}&=\frac{d}{dt}\left(e^{it\theta_1}z_1,\,e^{it\theta_2}z_2,\,e^{it\theta_3}z_3\right)|_{t=0}\\&=(i\theta_1z_1,\,i\theta_2z_2,\,i\theta_3z_3).\end{aligned}$$

Podemos considerar los elementos $\theta_1=1,\theta_2=0,\theta_3=-1$ así entonces

$$\tilde{X}=(iz_1,0,-iz_3).$$

Con forma de Kähler dada por

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_j(dz_j\wedge d\overline{z}_j),$$

y evaluando

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{X})&=\frac{i}{2}\sum_j(dz_j\otimes d\overline{z}_j)(\tilde{X},\cdot)-(d\overline{z}_j\otimes dz_j)(\tilde{X},\cdot)\\&=\frac{i}{2}\sum_j[(dz_j(iz_1,0,-iz_3)d\overline{z}_j]\\&=-\frac{1}{2}\sum_j\,(z_1,0,z_3)d\overline{z}_j.\end{aligned}$$

Integrando podemos hallar la aplicación de momento, expresada mediante

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_3|^2).$$

Análogamente, podemos considerar ahora los elementos $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1, \theta_3 = -1$ y así

$$\omega(\tilde{X}) = -\frac{1}{2}\sum_j (0, z_2, -z_3)d\overline{z}_j.$$

Y aplicación de momento expresada por

$$\mu_2 = -\frac{1}{2}(|z_2|^2 - |z_3|^2).$$

Ahora sean a_1, a_2 y b números reales, se define el subconjunto $L_{a_1,a_2,b} \in \mathbb{C}^3$ mediante

$$L_{a_1,a_2,b} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,:\, |z_1|^2 - |z_3|^2 = a_1,\ |z_2|^2 - |z_3|^2 = a_2,\ Im(z_1 z_2 z_3) = b\}.$$

Y para el cual se cumple que

$$|e^{i\theta_1} z_1|^2 - |e^{i\theta_3} z_3|^2 = |e^{i\theta_1}|^2 |z_1|^2 - |e^{i\theta_3}|^2 |z_3|^2 = |z_1|^2 - |z_3|^2 = a_1.$$

Enteramente lo mismo para $|e^{i\theta_2} z_2|^2 - |e^{i\theta_3} z_3|^2 = a_2$.
Luego, ya que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$ se tiene que

$$Im(e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} z_1 z_2 z_3) = Im(e^{i\,0} z_1 z_2 z_3) = Im(z_1 z_2 z_3) = b.$$

Es decir, $L_{a_1,a_2,b}$ es $G-$ invariante.

Salvo los casos en los que alguno de a_1, a_2 y b son distintos de cero se tiene que $L_{a_1,a_2,b}$ es difeomorfa a $\mathbb{R} \times G$.

Así, se tiene que el conjunto $L_{a_1,a_2,b}$ es una $3-$ variedad especial Lagrangiana.

6.2. Ejemplo 2.

Consideremos ahora a G el subgrupo $U(1) \times \mathbb{R} \subseteq SU(3) \times \mathbb{C}^3$. Retomando que $U(1)$ consiste de los números complejos cuyo valor absoluto es la unidad. Con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{A \in \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C}) \mid \overline{A} + A^t = 0\}$.

Actuando mediante

$$(e^{i\theta}, x) \cdot (z_1, z_2, z_3) \mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{-i\theta} z_2, x + z_3),$$

en donde $\theta \in [0, 2\pi)$ y $x \in \mathbb{R}$.

Y así notar que las órbitas

$$(e^{i\theta}, x) \cdot \gamma' = (e^{2i\theta} z_1, e^{-2i\theta} z_2, 2x + z_3)$$

se ven como esferas unitarias cruz la recta real.

Hallando el generador infinitesimal derivando la expresión

$$(e^{i\theta t} z_1, e^{-i\theta t} z_2, xt + z_3), \qquad \text{en } t = 0,$$

se obtiene el campo vectorial

$$(i\theta z_1, -i\theta z_2, x) = \tilde{X}.$$

Simplificando un poco las expresiones se llega a

$$\omega(\tilde{X}) = \frac{i}{2} \sum_j (dz_j \otimes d\overline{z}_j)(i\theta z_1, -i\theta z_2, x).$$

Eligiendo los elementos $X_1 = (1, 1, 0)$ y $X_2 = (0, 0, x)$ la expresión se ve en la forma

$$-\frac{1}{2} \sum_j \; dz_j(z_1, -z_2, 0) d\overline{z}_j.$$

Para así obtener la aplicación

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2).$$

Y en el caso de X_2

$$\frac{1}{2} \sum_j (dz_j(0, 0, x) d\overline{z}_j, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Con aplicación momento

$$\mu_2 = \frac{1}{2} Im(z_3).$$

Similarmente al **Ejemplo 1** para $a, b, c \in \mathbb{R}$ se define el conjunto

$$N_{a,b,c} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C} \,:\, |z_1|^2 - |z_2|^2 = a, Re(z_1 z_2) = b, Im(z_3) = c\}.$$

Veamos que dicho conjunto es $G-$ invariante

$$\begin{aligned}
&|e^{i\theta} z_1|^2 - |e^{-i\theta} z_2|^2 = |e^{i\theta}|^2 |z_1|^2 - |e^{-i\theta}|^2 |z_2|^2 = |z_1|^2 - |z_2|^2 = a. \\
&Re(e^{i\theta} z_1 e^{-i\theta} z_2) = Re(e^{i\theta - i\theta} z_1 z_2) = Re(z_1 z_2) = b \\
&Im(x + z_3) = Im(z_3) = c
\end{aligned}$$

Notar salvo el caso en el que $a = b = 0$, se tiene entonces que $N_{a,b,c}$ es difeomorfa a una esfera producto $\mathbb{R}^2$.

Se sigue entonces que $N_{a,b,c}$ es una $3-$ variedad especial Lagrangiana.

Apéndice A

Acciones Hamiltonianas.

A través de este apéndice consideraremos en todo momento estar trabajando con una variedad simpléctica (M, ω), y $\mathfrak{X}(M)$ denota el conjunto de los campos suaves en la variedad. El propósito primordial será definir en que consisten los campos simplécticos y hamiltonianos, así como la relación que guardan entre así, finalmente dar una definición más general de lo que es un mapeo momento.

Definición A.0.1 *Un simpléctomorfismo en* (M, ω) *es un difeomorfismo* φ *que preserva la forma simpléctica, es decir,*

$$\omega = \varphi^* \omega.$$

Se denota al grupo de simpléctomorfismos por $Symp(M, \omega)$, o ya que consideramos variedades simplécticas solo por $Symp(M)$.
En vista que la forma simpléctica es no degenerada se tiene un isomorfismo $T_pM \longrightarrow T_p^*M : X \longrightarrow \iota_X \omega_p$, en donde ι_X denota el producto interior de X. Por tanto se tiene una correspondencia entre campos vectoriales y $1-$formas.

Definición A.0.2 *Un campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *se dice simpléctico si* $\iota_X \omega$ *es una forma cerrada.*

También se denominan a los campos simplécticos como aquellos cuyo flujo φ_t preserva la forma simplectica ω, es decir, si son simpléctomorfismos.

Ahora, si $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suave en la variedad, se tiene que su diferencial dH es una $1-$forma. Por lo mencionado arriba, existe un único campo vectorial $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\iota(X_H)\omega = dH$. Dicho campo vectorial X_H es llamado **campo vectorial Hamiltoniano** con función Hamiltoniana H.

Definición A.0.3 *Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice Hamiltoniano si $\iota_X\omega$ es una forma exacta.*

Notar que de la igualdad $dH(X_H) = (\iota(X_H)\omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$ se sigue que el campo X_H es tangente a los conjuntos de nivel.

Siguiendo la misma idea, se pueden definir las nociones de acciones simplécticas y hamiltonianas.

Consideremos ahora G un grupo de Lie compacto y $\mathfrak{g}$ su respectiva álgebra de Lie, dicho grupo de Lie actúa sobre (M, ω) por simpléctomorfismos, es decir, existe un homomorfismo $G \longrightarrow Symp(M) : g \mapsto \varphi_g$, lo cual implica que cada $\varphi_g : M \longrightarrow M$ es un simpléctomorfismo en cada $g \in G$. Ahora, la acción infinitesimal determina un homomorfismo de álgebras

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M) : \xi \mapsto X_\xi$$

en donde

$$X_\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \varphi_{exp(t\xi)}$$

para cada $\xi \in \mathfrak{g}$. Dado que por lo mencionado previamente cada φ_g es un simpléctomorfismo se sigue que X_ξ es un campo vectorial simpléctico, es decir, la $1-$forma $\iota(X_\xi)\omega$ es cerrada.

Definición A.0.4 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, una acción simpléctica es un acción suave φ que preserva la forma ω, es decir:*

$$\varphi_g^*(\omega) = \omega, \quad \textit{para toda } g \in G, \ y\ \varphi_g \in Sympl(M, \omega)$$

Definición A.0.5 *La acción se dice Hamiltoniana si el campo vectorial X_ξ es Hamiltoniano, es decir, si $\iota(X_\xi)\omega$ es una forma exacta y el mapeo*

$$\mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M) : \xi \mapsto H_\xi$$

es G-equivariante con respecto a la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$.

El que la acción sea Hamiltoniana implica entonces que para $\xi \in \mathfrak{g}$ existe un función Hamiltoniana H_ξ.

Si la acción de G en M es hamiltoniana, se define un **mapeo momento** para dicha acción como un mapeo suave $G-$equivariante

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

en la cual los campos vectoriales Hamiltonianos X_ξ correspondientes a las funciones Hamiltonianas $H_\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas mediante

$$H_\xi(p) := \langle \mu(p), \xi \rangle$$

generan la acción. Y el cual satisface la condición

$$\iota(X_\xi)\omega = \omega(X_\xi(p), \cdot\ ) = \langle d\mu(p), \xi \rangle,$$

para todos $\xi \in \mathfrak{g}$ y $p \in M$.

Fijando $p \in M$, la aplicación $g \mapsto \xi(g)p$ es lineal de $\mathfrak{g}$ hacia $\mathbb{R}$, con lo cual la definición del mapeo momento está bien definida.

Bibliografía

[1] Cannas, Da Silva Ana, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer-Verlag, Berkeley, 1988.

[2] Chow, Bennett; Chu, Sun-Chi; Glickenstein, David; and others, *The Ricci Flow: Techniques and Applications*, American Mathematical Society, 2007.

[3] McDuff, Dusa; Salamon, Dietmar, *Introduction to Symplectic Topology*, Third Edition, Oxford University Press, 2017.

[4] Jost, Jürgen, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Fourth Edition, Springer-Verlag, 2005.

[5] Joyce, Dominic D., *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford University Press, 2000.

[6] Joyce, Dominic D., *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*, Oxford University Press, 2007

[7] Joyce, Dominic D., *Special Lagrangian $m-$folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries.*, Oxford, Lincoln college, 2001

[8] Harvey, R and Lawson, H.B., *Calibrated Geometries*, Acta Mathematica 148, 1982, 47-157.

[9] Lotay, Jason D., *Calibrated submanifolds*, University College London, 2018.

[10] Moroianu, Andrei, *Lectures on Kähler Geometry*, Cambridge University Press, 2007.

[11] Berndt, Rolf, *An Introduction to Symplectic Geometry*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics v. 26.