UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA MATEMÁTICA DE DISPERSIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ÁNGEL CUAUHTÉMOC FUERTE PÉREZ

DIRECTOR
DR. IVAN PAVLOVICH NAUMKIN KAIKIN
(INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS)

CIUDAD DE MÉXICO, 2022.

Dedicado a
mi familia

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Agradezco a mi asesor Miguel Arturo Ballesteros Montero por su apoyo incondicional a lo largo de mi trayectoria académica, en especial por sus consejos, su experiencia y por siempre alientarme a dar lo mejor de mí en cada situación. A su vez agradezco a mi director de tesis Ivan Pavlovich Naumkin por su tiempo y dedicación para hacer de mí un mejor alumno y una mejor persona, por confiar en mi desempeño y apoyarme en las situaciones más difíciles durante la elaboración de este trabajo. Agradezco al doctor Luis Octavio Silva Pereyra por todo el tiempo dedicado a este trabajo y por ser la base del mismo; sus anotaciones y la experiencia brindadas fueron esenciales para la culminación de esta tesis. Gracias al doctor Francisco Javier Torres Ayala y al doctor Sergio Palafox Delgado por sus aportaciones y comentarios brindados a este trabajo.
Agradezco infinitamente a mi familia, especialmente a mi madre por apoyarme en todos mis proyectos y a mis hermanos porque son una inspiración para dar lo mejor de mi persona. Por último agradezco al IIMAS y a la UNAM por permitirme ser parte de esta gran comunidad.

Índice general

Introducción

El principio básico de la teoría de perturbación de operadores es que la información detallada de un operador en particular, digamos A_0, permite obtener información sobre otro operador, digamos A, bajo la premisa de que los operadores A_0 y A difieren entre sí por un operador que de una u otra forma se puede considerar "subordinado" al operador sin perturbar A_0. Usualmente, desde el punto de vista de los fenómenos modelados por los operadores A_0 y A, sucede que el operador A_0 describe al fenómeno libre de interacciones por lo que se conoce como operador libre, mientras que el operador A describe al fenómeno donde se han tomado en cuenta las interacciones y se conoce como operador perturbado.

La teoría matemática de dispersión se debe entender como una parte de la teoría de perturbación de operadores autoadjuntos. Aquí, el operador libre corresponde al modelo cuántico de una partícula libre de interacciones. Mientras que el operador perturbado corresponde al caso en donde el modelo cuántico ha tomado en cuenta las interacciones que la partícula tiene durante el experimento. Es importante notar que en la teoría de dispersión la interacción tiene lugar en una región pequeña del espacio mientras que el movimiento libre es el que predomina durante la mayor parte de tiempo del fenómeno observado. Esto es lo que sucede en la mayoría de los experimentos que se realizan en la física contemporánea como en la colisión de partículas elementales y el interés principal está en obtener información física de las partículas por medio del estudio del resultado de estas colisiones.

Así, la teoría matemática de dispersión trata el problema de obtener información de la evolución asintótica de una partícula descrita por el hamiltoniano completo (perturbado) del sistema a partir de la evolución dada por el hamiltoniano libre del sistema. Para esto, por razones que quedarán claras en el presente trabajo, es suficiente considerar únicamente la parte absolutamente continua de los operadores. Consideremos la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{du}{dt} = Hu\,, \quad u(0) = f\,,$$

donde H es el hamiltoniano completo del sistema y f describe el estado inicial. El comportamiento asintótico de las soluciones de esta ecuación cuando $t \to \pm\infty$ se estudia a través de las soluciones de la ecuación

$$i\frac{du}{dt} = H_0 u\,, \quad u(0) = f\,,$$

correspondiente al hamiltoniano libre de interacciones H_0. Estamos interesados en el comportamiento asintótico precisamente porque antes y después de la colisión (que tiene lugar en una región "pequeña" del espacio) esperamos un comportamiento asintóticamente libre. De esta forma, una parte complementaria al análisis asintótico de soluciones, es establecer las condiciones bajo las cuales las partes absolutamente continua de los operadores H y H_0 son unitariamente equivalentes.

Estos problemas fundamentales de la teoría de dispersión se tratan en este trabajo con todo detalle y considerando el caso más general posible. La idea de la tesis es abordar el problema matemático de manera constructiva de forma que se tengan todos los elementos matemáticos para entender la teoría matemática de dispersión. Así, la primera sección de la exposición contiene todos los elementos de la teoría de la medida que se requieren para el tratamiento del análisis avanzado de operadores por medio de medidas espectrales, las cuales también se introducen con todo detalle en la siguiente sección. Asimismo tratamos con todo detalle la construcción de la teoría de la integral directa de espacios de Hilbert. Esta teoría es fundamental en la teoría matemática de dispersión y no es tratada a detalle en la literatura avanzada de la teoría espectral de operadores. Habiendo introducido el concepto de medida espectral y la integral directa de espacios de Hilbert, procedemos a estudiar operadores compactos y en particular operadores de tipo traza. Esto es porque en la mayoría de los casos la diferencia entre las resolventes del operador libre y perturbado es un operador de clase traza. El siguiente capítulo comprende propiamente una introducción detallada a la teoría matemática de dispersión y es la parte central del trabajo. El primer capítulo sirve de fundamento teórico para la mayoría de los conceptos y demostraciones presentes en el Capítulo 2. Finalmente, los conceptos elementales de la teoría espectral de operadores están presentes en el Apéndice.

Los textos existentes sobre teoría matemática de dispersión carecen de una compilación sistemática, detallada y completa de los conceptos de la teoría de la medida, la teoría espectral de operadores y la teoría de funciones que son necesarios para abordar la teoría matemática de dispersión. El objetivo fundamental del presente texto es contribuir a saldar esta carencia en la literatura proporcionando al lector una introducción sistemática, detallada y completa a la teoría de dispersión.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Elementos de teoría de la medida

En este capítulo recolectamos una serie de resultados necesarios que no pertenecen propiamente a la teoría de dispersión. La teoría de dispersión requiere de una clasificación del espectro de un operador autoadjunto basado en teoría de la medida. Brevemente mencionaremos unos resultados básicos respecto a las medidas de Borel sobre la recta real $\mathbb{R}$.

Definición 1. *Sea X un conjunto. $\mathscr{A}^0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una álgebra de subconjuntos de X si*

i) $\emptyset \in \mathscr{A}^0, X \in \mathscr{A}^0$.

ii) Si $\delta_1, \delta_2 \in \mathscr{A}^0$ *entonces* $\delta_1 \cup \delta_2 \in \mathscr{A}^0$.

iii) Si $\delta_1, \delta_2 \in \mathscr{A}^0$ *entonces* $\delta_1 \setminus \delta_2 \in \mathscr{A}^0$.

Definición 2. *$\mathscr{A}$ es una σ-álgebra si es un álgebra que es cerrada respecto a uniones contables de elementos.*

Si X es un espacio métrico completo, denotamos por $\mathcal{B}_X$ a la mínima σ-álgebra que contiene a las bolas cerradas.

Definición 3. *Un espacio medible es una pareja $(X, \mathscr{A})$ en la que X es un conjunto no vacío y $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.*

Definición 4. *Sean $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \tilde{\mathscr{A}})$ espacios medibles. Decimos que $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \tilde{\mathscr{A}})$ es una función medible relativa a las σ-álgebras $\mathscr{A}$ y $\tilde{\mathscr{A}}$ si $f^{-1}(\tilde{\delta}) \in \mathscr{A}$, para todo $\tilde{\delta} \in \tilde{\mathscr{A}}$. Si $Y = \mathbb{R}$ (ó $Y = \mathbb{C}$) y $\tilde{\mathscr{A}} = \mathcal{B}_\mathbb{R}$ ($\tilde{\mathscr{A}} = (\mathcal{B}_\mathbb{C})$), entonces diremos que f es $\mathscr{A}$-medible si $f^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}$ ($f^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{C}) \subset \mathscr{A}$).*

En lo que resta de este trabajo, denotaremos a los siguientes conjuntos por

$$S(X, \mathscr{A}) := \{f : X \to \mathbb{C} | f \text{ es } \mathscr{A}\text{-medible}\},$$

$$S_+(X, \mathscr{A}) := \{f \in S(X, \mathscr{A}) | f \geq 0\}.$$

Definición 5. *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Una medida en $(X, \mathscr{A})$ es una función $\mu : X \to \bar{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) $\mu(\delta) \geq 0$ *para todo* $\delta \in \mathscr{A}$.

iii) μ *es* σ*-aditiva; i.e. Si* $\{\delta_n\}$ *es una sucesión de elementos ajenos entre sí de* $\mathscr{A}$*, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\delta_n).$$

Si $\mathscr{A} = \mathcal{B}_X$ (ó $\mathcal{B}_X \subset \mathscr{A}^0$) decimos que μ es una medida boreliana.

Definición 6. *$\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty)$ es una medida completa si para cada $\delta \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(\delta) = 0$, entonces para todo $\partial \subset \delta$ se tiene que $\partial \in \mathscr{A}$.*

Si $\mu^0 : \mathscr{A}^0 \to [0, \infty)$ es una función aditiva numerable definida en $\mathscr{A}^0$ un álgebra, entonces existen $\mathscr{A}$ σ-álgebra y μ medida sobre $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}^0 \subseteq \mathscr{A}$. Más aún, si construimos a μ con el teorema de extensión de Caratheodory entonces μ es completa.

Definición 7. *Sea $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty)$ una medida boreliana. Decimos que $Z \in \mathscr{A}$ es un soporte boreliano de μ si $\mu(Z^c) = 0$. Denotamos por* **supp**μ *al soporte boreliano más pequeño y cerrado.*

Definición 8. *Un espacio de medida es una terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$, en la que $(X, \mathscr{A})$ es un espacio medible y $\mu : \mathscr{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ es una medida. Haremos la identificación $(X, \mathscr{A}, \mu) \equiv (X, \mu)$.*

Definición 9. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $P(x)$ una proposición referente a X. Decimos que $P(x)$ es cierta casi seguramente (abreviado c.s.) si existe $\delta \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(\delta) = 0$ y $P(x)$ es cierta si $x \in X \setminus \delta$.*

En general, no es cierto que $\mu(\{x \in X | P(x) \text{ es falso}\}) = 0$, para que esto suceda hay que pedir que μ sea completa.

Definición 10. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, definimos*

$$\Pi(X, \mathscr{A}) := \left\{\varphi \in S(X, \mathscr{A}) | \varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{\delta_j}, \text{ donde } \{\delta_j\}_{j=1}^{n} \text{ es partición de } X \text{ y } \forall j, c_j \in \mathbb{C}\right\}.$$

Definición 11. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos*

$$\mathcal{L}_\infty(X, \mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) := \{\varphi \in S(X, \mu) | \varphi \text{ es acotada (c.s. rel. } \mu)\}.$$

Si f es una función real valuada, no decreciente y continua por la izquierda; podemos definir una medida μ en los conjuntos de la forma $\delta = [\alpha, \beta)$ con $\alpha < \beta$, de la siguiente manera

$$\mu(\delta) = f(\beta) - f(\alpha).$$

Definición 12. *Sean $(X, \mathscr{A})$ un espacio de medida y μ_1,μ_2 dos medidas definidas en $\mathscr{A}$. Decimos que μ_1 es absolutamente continua con respecto a μ_2 (denotado por $\mu_1 \prec \mu_2$) si y sólo si $\mu_2(\delta) = 0$ siempre que $\mu_1(\delta) = 0$.*

Con la definición anterior tenemos la siguiente equivalencia: $\mu_1 \prec \mu_2$ si y sólo si existe $\varphi \in S_+(X, \mathscr{A})$ tal que $\mu_1(\delta) = \displaystyle\int_\delta \varphi d\mu_2$.

Definición 13. *Sean $X_1, X_2 \subset X$ tales que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ y $X = X_1 \cup X_2$, decimos que μ_1 es singular (ortogonal) a μ_2 (denotado por $\mu_1 \perp \mu_2$) si y sólo si $\mu_1(X_1) = \mu_2(X_2) = 0$.*
En particular, si μ_1 y μ_2 son medidas borelianas con $Z_1 = \mathbf{supp}\boldsymbol{\mu_1}$ y $Z_2 = \mathbf{supp}\boldsymbol{\mu_2}$; se tiene que $\mu_1 \perp \mu_2$ si y sólo si $\mu_1(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$.

Definición 14. *Sea μ una medida en $(X, \mathscr{A})$. Se dice que μ es finita si no toma el valor extendido $+\infty$. Si es posible hallar una sucesión $\{\delta_n\}$ de elementos de $\mathscr{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$ y $\mu(\delta_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces diremos que μ es σ-finita. Claramente toda medida finita es automáticamente σ-finita.*

Teorema 15. ***[Descomposición de Lebesgue]****. Si $(X, \mathscr{A})$ es un espacio medible y μ_1 y μ_2 son medidas σ-finitas en $\mathscr{A}$, entonces existen dos únicas medidas σ-finitas μ_{1_a} y μ_{1_s} tales que $\mu_1 = \mu_{1_a} + \mu_{1_s}$; donde $\mu_{1_a} \prec \mu_2$ y $\mu_{1_s} \perp \mu_2$.*

Definición 16. *Decimos que Z^0 es un soporte boreliano minimal si y sólo si para todo Z soporte boreliano de μ se tiene que $\lambda(Z^0 \setminus Z) = 0$ donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.*

Un soporte boreliano minimal siempre existe, para ello, supongamos que existe Z un soporte boreliano de μ tal que $\lambda(Z) < \infty$. Sea $\zeta = \text{ínf}\, \lambda(Z)$ donde $Z \in \{Z \subset \mathbb{R} | \lambda(Z) < \infty \text{ con } Z \text{ soporte boreliano}\}$; sea $\{Z_n\}$ una sucesión de soportes borelianos tales que $\lambda(Z_n) \to \zeta$; tomamos $Z^0 = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$. Así, Z^0 es un soporte boreliano minimal con $\lambda(Z^0) = \zeta$.
Si tomamos $Z^0 \cup A$ con $\lambda(A) = 0$, también resulta ser un soporte boreliano minimal; por lo que el soporte boreliano minimal existe pero no está unívocamente determinado.
Sea G un conjunto abierto y $\mu = \lambda \restriction_G$ la medida de Lebesgue restringida a G. Aquí G es un soporte boreliano minimal pero $\mathbf{supp}\mu = \bar{G}$.
Sabemos que por el teorema de Lebesgue, una función monótona no decreciente $F(x)$ tiene derivada $f(x) = F'(x) > 0$ para casi toda $x \in \mathbb{R}$, y además, $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$; es decir, es integrable sobre cualquier intervalo finito.
Las definiciones de medida absolutamente continua y medida ortogonal de una medida μ pueden ser reformuladas de manera equivalente en términos de $f = f_\mu$. A saber, μ es absolutamente continua si

$$\mu(X) = \int_X f(\lambda) d\lambda$$

para cualquier intervalo (y por lo tanto para cualquier conjunto de Borel) de X. Una medida es ortogonal si $f(\lambda) = 0$ para λ c.s. De aquí se sigue que f coincide con la derivada de Radon-Nikodym de la parte absolutamente continua de la medida μ (relativa a la medida de Lebesgue). En otras palabras

$$\mu_a(X) = \int_X f(\lambda) d\lambda$$

y para λ c.s.

$$F_\mu(\lambda) = F'_{\mu_a}(\lambda)$$

Los conjuntos de Borel Z_δ y Z_a correspondientes a las componentes ortogonal μ_δ y absolutamente continua μ_a de μ pueden ser descritas en términos de la función f. De manera precisa, consideramos f la derivada simétrica; es decir,

$$f(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda - \varepsilon)}{2\varepsilon} \tag{1.1}$$

Entonces, Z_δ consiste de los puntos λ donde el límite (1.1) existe y es igual a $+\infty$. Denotamos por Z_0 el conjunto de puntos tales que el límite (1.1) no existe o es igual a cero. Resulta $\mu(Z_0) = 0$. Por lo tanto, la parte absolutamente continua está concentrada (i.e. $\mu_a = \mu_{Z_a}$) en el conjunto $Z_a = \mathbb{R} \setminus (Z_\delta \cup Z_0)$ donde la derivada simétrica existe, es finita y distinta de cero.

1.2. Medida Espectral

Definición 17. *Para todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ al conjunto de operadores lineales acotados que van de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$.*

Teorema 18. *Sea T un operador lineal sobre $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. T tiene función inversa acotada si y sólo si*

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad c > 0, \forall x \in D(T) \tag{1.2}$$

más aún, el máximo valor posible para c es $c = 1/\|T^{-1}\|$.

Demostración. Supongamos que se cumple (1.2); como $c > 0$ tenemos $\{x \in D(T) : Tx = 0\} = \{0\}$, por lo tanto T^{-1} existe. Sustituimos $Tx = y$ en (1.2) y tenemos

$$\|y\| \geq c\|T^{-1}y\| \quad \forall y \in D(T^{-1}) = ran(T)$$

por lo que $\|T^{-1}\| \leq c^{-1}$. Ahora, supongamos que T^{-1} existe y es acotada; por lo que

$$\frac{\|T^{-1}y\|}{\|y\|} \leq c^{-1} \Longrightarrow \|T^{-1}\| \leq c^{-1},$$

la igualdad se alcanza en $c^{-1} = \|T^{-1}\|$. Hacemos $x = T^{-1}y$; así

$$\frac{\|x\|}{\|Tx\|} \leq c^{-1} \Longrightarrow \|x\|c \leq \|Tx\|$$

por lo que cumple (1.2). □

Definición 19. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, sea T un operador lineal cerrado, denotamos por*

$$\hat{\rho}(T) := \{z \in \mathbb{C} | \exists C_z > 0, \forall f \in dom(T), \|(T - zI)f\| \geq C_z\|f\|\},$$

a este conjunto le llamamos el conjunto de puntos quasi-regulares de T.

Proposición 20. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y sea $z \in \hat{\rho}(T)$. T es cerrado si y sólo si $ran(T-zI)$ es cerrado.*

Demostración. Tenemos que existe $c > 0$ tal que $\|(T - zI)f\| \geq c\|f\|$ para toda $f \in D(T)$ por lo que $(T - zI)^{-1}$ existe y está acotada. Tenemos que $(T - zI)^{-1}$ es cerrado si y sólo si $D((T - zI)^{-1}) = ran(T - zI)$ es cerrado. Por lo tanto T es cerrado si y sólo si $ran(T - zI)$ es cerrado. □

Teorema 21. *Sea T un operador cerrado que satisface*

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad \forall x \in D(T)(c > 0) \tag{1.3}$$

supongamos también $D(T) \subset D(W)$ y

$$\|Wx\| \leq a\|Tx\|, \quad \forall x \in D(T)(a < 1) \tag{1.4}$$

entonces $T + W$ es cerrado sobre $D(T)$ y satisface (1.3) con $c_1 = (1 - a)c$ en lugar de c. Más aún, $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T + W)) = dim(\mathcal{H} \ominus ran(T))$.

Demostración. Como $\|Wx\| \leq a\|Tx\| \implies \|Wx\|^2 \leq a^2\|Tx\|^2$ para toda $x \in D(T)$ y para $a < 1$. De aquí se sigue que W es fuertemente dominada por T, entonces el operador $T + W$ definido en $D(T)$ es cerrado. Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}
\|(T + W)x\| &\geq \|Tx\| - \|Wx\| \\
&\geq \|Tx\| - a\|Tx\| && \text{(por (1.4))} \\
&\geq (1 - a)c\|x\| && \text{(por (1.3))}
\end{aligned}$$

por lo tanto $ran(T + W)$ es un subespacio. Supongamos $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T + W)) < dim(\mathcal{H} \ominus ran(T))$, entonces existe $f \in (\mathcal{H} \ominus ran(T))$, $f \neq 0$ tal que $f \perp (\mathcal{H} \ominus ran(T + W))$. Así, $f \in ran(T + W)$, es decir, $f = (T + W)y$ para alguna $y \in D(T)$. Como $f \perp ran(T)$ se sigue $\langle f, Ty\rangle = 0$, por lo que

$$\langle (T + W)y, Ty\rangle = 0 \implies \langle Ty, Ty\rangle = -\langle Wy, Ty\rangle,$$

análogamente, si $dim(\mathcal{H}\ominus ran(T+W)) > dim(\mathcal{H}\ominus ran(T))$, existe $f \in \mathcal{H}\ominus ran(T+W)$, $f \neq 0$ tal que $f = Ty$ para alguna $y \in D(T)$; por lo que $\langle Ty, Ty\rangle = -\langle Wy, Ty\rangle$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\|Ty\|^2 &\leq \|Wy\|\|Ty\| \\
&\leq a\|Ty\|^2 && \text{(por (1.4))}
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $a < 1$. Por lo tanto $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T + W)) = dim(\mathcal{H} \ominus ran(T))$. □

Corolario 22. *Sea $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\|W\| < c$ donde c es la constante en (1.3), entonces la conclusión del teorema 21 es válida para $T + W$.*

Demostración. Calculamos

$$\|Wx\| \leq \|W\|\|x\| \leq \|W\|c^{-1}\|Tx\|$$

donde la última desigualdad se da por (1.3). Como $\|W\| < c$ se sigue que $\|W\|c^{-1} < 1$, tomamos $a = \|W\|c^{-1}$, por el teorema 21 se sigue fácilmente el resultado con $c_1 = (1-a)c = c - \|W\|$. □

Teorema 23. *El conjunto $\hat{\rho}(T)$ es abierto, además $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T - \lambda I))$ es constante para cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$.*

Demostración. Veamos que $\hat{\rho}(T)$ es abierto. Sea $\lambda_0 \in \hat{\rho}(T)$, se tiene que existe $c_0 > 0$ tal que $\|(T - \lambda_0)x\| \geq c_0\|x\|$ para toda $x \in D(T)$. Sea λ tal que $|\lambda - \lambda_0| < c_0$; tenemos

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) + (\lambda_0 - \lambda)I$$

como $(T - \lambda_0 I)$ es cerrado y $(\lambda_0 - \lambda)I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $|\lambda_0 - \lambda| < c_0$, por el corolario 22 se sigue que $T - \lambda I$ es cerrado y satisface $\|T - \lambda I\| \geq c\|x\|$ para toda $x \in D(T)$ y para alguna $c > 0$, de aquí tenemos que la bola abierta con centro λ_0 y radio c_0 está contenida en $\hat{\rho}(T)$. Por lo tanto $\hat{\rho}(T)$ es un conjunto abierto; además $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T - \lambda_0 I)) = dim(\mathcal{H} \ominus ran(T - \lambda I))$. Ahora, cada subconjunto abierto se descompone en a lo más una cantidad numerable de componentes conexas. Si dos puntos corresponden a una sola componente, se pueden conectar mediante un camino poligonal. Cada punto del camino se puede considerar el centro de una bola abierta donde $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T - \lambda I))$ es constante. Esta cubierta admite una subcubierta finita; por lo tanto $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T - \lambda I))$ es constante. □

Corolario 24. *Si $dim(\mathcal{H} \ominus ran(T - \lambda I)) = 0$ para $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, entonces $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*

Demostración. Como $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, existe $c > 0$ tal que

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in D(T)$$

por el teorema 18, $(T - \lambda I)^{-1}$ existe y está acotada en $D((T - \lambda I)^{-1}) = ran((T - \lambda I)) = \mathcal{H}$, por lo tanto $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. □

Definición 25. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. Definimos al conjunto resolvente como*

$$\rho(T) := \{z \in \hat{\rho}(T) | dim(ran(T - zI)^{\perp}) = 0\}$$

A su complemento, $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ le llamaremos espectro de T, mientras que a $\hat{\sigma}(T) := \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T)$ le llamaremos núcleo espectral.

Definición 26. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. Definimos los siguientes conjuntos*

$$\sigma_c(T) := \{z \in \mathbb{C} | ran(T - zI) \neq \overline{ran(T - zI)}\}$$
$$\sigma_p(T) := \{z \in \mathbb{C} | ker(T - zI) \neq \{0\}\}$$

El conjunto $\sigma_c(T)$ se le conoce como espectro continuo de T. Al conjunto σ_p le llamamos espectro puntual de T y consiste de todos los eigenvalores de T, $ker(T - zI)$ corresponde al eigenespacio respectivo de z.

Teorema 27. *Para cada operador cerrado T se sigue*

$$\hat{\sigma}(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T).$$

Demostración. Es fácil ver que $\sigma_p(T) \subset \hat{\sigma}(T)$ y $\sigma_c(T) \subset \hat{\sigma}(T)$. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p \cup \sigma_c)$, entonces $ran(T - zI)$ es un subespacio y $(T - zI)^{-1}$ existe y está bien definido en $D((T - zI)^{-1}) = ran(T - zI)$. Como T es cerrado y $zI \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se sigue que $(T - zI)$ y $(T - zI)^{-1}$ son operadores cerrados. Así, $(T - zI)^{-1}$ es cerrado y $D((T - zI)^{-1})$ es un subespacio; se sigue que $(T - zI)^{-1}$ es continuo. Tenemos que $T - zI$ tiene función inversa continua, por el teorema 18 se sigue $\|(T - zI)f\| \geq c\|f\|$ para toda $f \in D(T)$ y para alguna $c > 0$; es decir, $z \in \hat{\rho}(T)$; por lo tanto $\hat{\sigma}(T) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. □

Definición 28. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador es simétrico si $A \subseteq A^*$; para estos operadores, $\langle f, Af \rangle \in \mathbb{R}$.*

Definición 29. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador A es semiacotado si $\langle f, Af \rangle \geq C\langle f, f \rangle$.*
Si $C \geq 0$ decimos que $A \geq 0$.
Si A y B son operadores tales que $A - B \geq 0$, decimos $A \geq B$.

Definición 30. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un proyector ortogonal P es un operador que satisface*

$$P = P^* = P^2.$$

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los proyectores ortogonales en $\mathcal{H}$ definidos en todo $\mathcal{H}$.

Proposición 31. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y P un proyector ortogonal; entonces $0 \leq P \leq I$.*

Definición 32. *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ el conjunto de proyectores ortogonales definidos sobre todo $\mathcal{H}$. Supongamos que $E : \mathscr{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ es una función que satisface:*

1. *Es aditiva numerable, es decir, si $\{\delta_n\} \subset \mathscr{A}$ es un conjunto finito o numerable de conjuntos ajenos con $\delta_n \in \mathscr{A}$ y $\delta = \bigcup_n \delta_n$, entonces $E(\delta) = s\text{-}\sum_n E(\delta_n)$.*

2. *Es completa, esto es, $E(X) = I$.*

Entonces E es una medida espectral sobre $\mathcal{H}$.

Cada medida espectral genera una familia de medidas escalares finitas en $\mathscr{A}$ de la siguiente forma: para cada $f \in \mathcal{H}$, hacemos $\langle f, E(\delta)f \rangle = \langle E(\delta)f, E(\delta)f \rangle = \|E(\delta)f\|^2 \geq 0$, de manera que $\mu_f(\delta) := \langle f, E(\delta)f \rangle$ define una medida finita pues $\mu_f(X) = \langle f, E(X)f \rangle = \|f\|^2$. Más aún, para $f, g \in \mathcal{H}$, $\mu_{f,g}(\delta) := \langle g, E(\delta)f \rangle$ define una medida compleja que cumple $\overline{\mu_{f,g}(\delta)} = \mu_{g,f}(\delta)$.

Definición 33. *Sea* $(X, \mathscr{A})$ *un espacio medible y* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Sea* $E : \mathscr{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ *y sea* $\delta \in \mathscr{A}$*. Decimos que* δ *es un conjunto de medida cero respecto de* E *si* $E(\delta) = 0$*. Si* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *es una función medible, denotamos*

$$E\text{-}\sup \varphi := \text{ínf}\left\{a \in \mathbb{R} | \varphi(x) \leq a \quad E\text{-c.s.}\right\},$$

si se cumple que $E\text{-}\sup |\varphi| < \infty$ *decimos que* φ *es acotada respecto de* E*.*

Definición 34. *Sea* $(X, \mathscr{A})$ *un espacio de medible y* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Sea* $E : \mathscr{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ *una medida espectral sobre* $\mathcal{H}$*. Sea* $\{\delta_j\}_{j=1}^n$ *una partición finita de* $\mathscr{A}$ *y sea* $\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{\delta_j}$*, con* $c_j \in \mathbb{C}$ *para* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, definimos:*

$$\int \varphi dE := \sum_{j=1}^{n} c_j E(\delta_j)$$

que cumple $\left\langle g, \left(\int \varphi dE\right) f\right\rangle = \int \varphi d\mu_{f,g}$ *puesto que*

$$\begin{aligned}\left\langle g, \left(\int \varphi dE\right) f\right\rangle &= \left\langle g, \left(\sum_{j=1}^{n} c_j E(\delta_j)\right) f\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \mu_{f,g}(\delta_j) \\ &= \int \varphi d\mu_{f,g}\end{aligned}$$

en particular, $\left\langle f, \left(\int \varphi dE\right) f\right\rangle = \int \varphi d\mu_f$*. A su vez, se cumple*

$$\left\|\int \varphi dE\right\| = E\text{-}\sup |\varphi|,$$

esto nos da una isometría $\Pi(X, \mathscr{A}) \xrightarrow{\int} \mathcal{B}(\mathcal{H})$*. Podemos extenderla por continuidad a* $\mathcal{L}_\infty(X, E)$ *(el conjunto de funciones medibles y acotadas con respecto a* E*, donde* $\|\varphi\|_\infty = E\text{-}\sup |\varphi|$*) de la siguiente manera*

$$\int \varphi dE := u\text{-}\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dE$$

donde $\{\varphi_n\}$ *es una sucesión arbitraria de funciones simples que convergen a* $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(X, E)$*.*

Definición 35. *Sea* $(X, \mathscr{A})$ *un espacio medible y* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert. Sea* $E : \mathscr{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ *una medida espectral. Sea* $\varphi \in S(X, \mathscr{A})$*, definimos*

$$D_\varphi := \left\{f \in \mathcal{H} \middle| \int |\varphi|^2 d\mu_f < \infty\right\}$$

Proposición 36. *El conjunto* D_φ *de la definición 35 es lineal y denso en* $\mathcal{H}$*.*

Demostración. Sean $f, g \in D_\varphi, \delta \in \mathscr{A}$, calculamos

$$\mu_{f+g}(\delta) = \|E(\delta)(f+g)\|^2 \leq 2\|E(\delta)f\|^2 + 2\|E(\delta)g\|^2 = 2\mu_f(\delta) + 2\mu_g(\delta)$$

por lo que D_φ es lineal. Ahora, definimos $\delta_n^\varphi := \{x \in X \big| |\varphi(x)| \leq n\}$. $E(X \setminus \bigcup_n \delta_n^\varphi) = 0$, como la sucesión $\{\delta_n^\varphi\}$ es creciente, se sigue que $s\text{-}\lim E(\delta_n^\varphi) = I$. Para cualquier $f \in \mathcal{H}$ definimos $f_n = E(\delta_n^\varphi)f$, así $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Para ver que D_φ es denso, basta probar $f_n \in D_\varphi$. Calculamos

$$\int |\varphi|^2 d\mu_{f_n} = \int |\varphi|^2 \chi^2_{\delta_n^\varphi} d\mu_f \leq n^2 \int d\mu_f = n^2 \|f\|^2$$

por lo tanto D_φ es denso. □

Proposición 37. *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $E : \mathscr{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ una medida espectral, sea $\varphi \in S(X, \mathscr{A})$. Sea $\delta_n^\varphi := \{x \in X \big| |\varphi(x)| \leq n\}$; definimos $\varphi_{[n]} := \varphi \chi_{\delta_n^\varphi}$. Tenemos que $\varphi_{[n]} \in \mathcal{L}_\infty(X, E)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además $\varphi_{[n]} \to \varphi$ c.s. rel. E.*

Demostración. Como $\varphi \in S(X, \mathscr{A})$ se sigue fácilmente que $\varphi \chi_{\delta_n^\varphi}$ es medible con respecto a E; además, $E\text{-}\sup |\varphi_{[n]}| \leq n$ por lo que $\varphi_{[n]} \in \mathcal{L}_\infty(X, E)$. Además, $E(X \setminus \bigcup_n \delta_n^\varphi) = 0$ por lo que, para cada $x \in \bigcup_n \delta_n^\varphi$, se sigue $\lim_{n\to\infty} \varphi \chi_{\delta_n^\varphi}(x) = \varphi(x)$. □

Definición 38. *Para $f \in D_\varphi$ tenemos que $\left\{\int \varphi_{[n]} dEf\right\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy; por lo que definimos la integral de $\varphi \in S(X, \mathscr{A})$ con respecto de E como*

$$\int \varphi dEf := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_{[n]} dEf.$$

Lo anterior define un operador normal y cerrado tal que dom $\left(\int \varphi dE\right) = D_\varphi$.

Proposición 39. *Supongamos que $\{\varphi_n\} \subset S(X, \mathscr{A})$ es una sucesión tal que*

i) $\varphi_n \in \mathcal{L}_\infty(X, E)$ para toda n, y $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ c.s. rel. E.

ii) $\exists C > 0$ tal que $|\varphi_n(x)|^2 \leq C(|\varphi(x)|^2 + 1)$, $\forall n$ c.s. rel. E

entonces $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dEf = \int \varphi Ef$ para toda $f \in D_\varphi$.

Demostración. Calculamos

$$\left\| \int \varphi_n f - \int \varphi_{[n]} f \right\|^2 = \int |\varphi_n - \varphi_{[n]}|^2 d\mu_f \to 0$$

por lo tanto, $\int \varphi dE$ no depende de la elección de la sucesión $\varphi_{[n]}$. □

Teorema 40. ***[Teorema espectral.]*** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador normal, entonces existe E_A medida espectral única tal que*

$$A = \int_{\mathbb{C}} z dE_A.$$

En particular, si $A = A^*$ entonces $A = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} s dE_A$ y dom$A = \left\{f \in \mathcal{H} \Big| \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |s|^2 d\mu_f < \infty\right\}$.

Proposición 41. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *medible. Sea* $\mathcal{D}_f := \left\{x \in H \Big| \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} < \infty\right\}$, *entonces* $\mathcal{D}_f$ *es un subespacio denso de* H*. Si* $x, y \in H$ *se sigue:*

$$\int_\Omega |f| d|E_{x,y}| \leq \|y\| \Big(\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \Big)^{1/2}.$$

Demostración. Ver [4] Lema 13.23, Página 342. □

Teorema 42. *Sea* E *una resolución de la identidad sobre* Ω*.*

(a) Para cada función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *le corresponde un operador denso* $\Phi(f)$ *definido en* H*, con dominio* $\mathcal{D}(\Phi(f)) = \mathcal{D}_f$*, tal que*

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_\Omega f dE_{x,y} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \forall y \in H \tag{1.5}$$

y además satisface

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f. \tag{1.6}$$

(b) Si f *y* g *son funciones medibles, entonces*

$$\Phi(f)\Phi(g) \subset \Phi(fg) \text{ y } \mathcal{D}(\Phi(f)\Phi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}. \tag{1.7}$$

Además, $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(fg)$ *si y sólo si* $\mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$*.*

(c) Para cada función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\Phi(f)^* = \Phi(\bar{f}) \tag{1.8}$$

$$\Phi(f)\Phi(f)^* = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^*\Phi(f) \tag{1.9}$$

Demostración. Ver [4] Teorema 13.24, página 343. □

1.3. Integral directa de espacios de Hilbert

Definición 43. *Sea* A *un operador autoadjunto. Decimos que el operador* A *es simple si existe* $g \in \mathcal{H}$ *tal que*

$$\overline{span\{E_A(\delta)g | \delta \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}} = \mathcal{H},$$

donde E_A *es la medida del teorema espectral. A* g *se le conoce como generador.*

Definición 44. ***[Representación canónica de un operador simple]****. Consideremos* $\mu(\delta) := \langle g, E_A(\delta)g \rangle \quad \forall \delta \in \mathscr{A}$*, con* E_A *la medida del teorema espectral correspondiente al operador simple* A *y con* g *el generador. Sea* $\Phi : L_2(\mathbb{R}, \mu) \to \mathcal{H}$ *dada por* $\Phi(\varphi) = \int \varphi dE_A g$*. La representación canónica de un operador simple* A *está dada por* $A = \Phi M_x \Phi^{-1}$*.*

Definición 45. *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio separable con medida boreliana* σ*-finita. Definimos a la función* G *con* $dom(G) = X$ *tal que para cada* $x \in X, G(x)$ *es un espacio de Hilbert separable.*
Denotamos por $N(x) := dimG(x)$ *la dimensión de dicho espacio de Hilbert. Así,* $N : X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$*; asumiremos que* N *es* μ*-medible, es decir*

$$\{x \in X | N(x) = k\} \in \mathscr{A}, k \in [1, \infty].$$

Vamos a considerar a las funciones f definidas en $dom(f) = X$ y tales que $f(x) \in G(x)$, que cumplen ser μ-medibles en el siguiente sentido:
Suponiendo que tenemos un conjunto numerable Ω_0, se cumplen

$$\overline{\operatorname{span}\{g(x) | g \in \Omega_0\}} = G(x) \quad \text{para cada } \mu - c.s., x \in X \tag{1.10}$$

$$\langle g_1(x), g_2(x) \rangle_{G(x)} \quad \text{es una función } \mu\text{- medible} \tag{1.11}$$

Definición 46. *Sea* Ω *un conjunto de funciones que cumplen las propiedades (1.10) y (1.11) definidas previamente, y además, para cada* $h \in \Omega$, $h : X \to G(x)$ *se cumple* $\langle h(x), g(x) \rangle_{G(x)}$ *es una función medible para toda* $g \in \Omega_0$*. Llamamos a* Ω *el conjunto de funciones medibles. Así, a la familia de espacios de Hilbert* $G(x)$ *dotada con la estructura medible* Ω*, la denotamos por* $(G(\cdot), \Omega)$ *y le llamamos un sistema de Hilbert medible sobre el espacio de medida* $(X, \mathscr{A}, \mu)$*.*

Definición 47. *Sea* $(G(\cdot), \Omega)$ *un sistema de Hilbert medible sobre el espacio de medida* $(X, \mathscr{A}, \mu)$*. Consideremos a las funciones* $h \in \Omega$ *que satisfacen*

$$\int_X \|h(x)\|^2_{G(x)} d\mu(x) < \infty;$$

A este conjunto de funciones le podemos introducir la siguiente norma

$$\|h\|^2 = \int_X \|h(x)\|^2_{G(x)} d\mu(x),$$

dicha norma satisfsace la identidad del paralelogramo, por lo que es generada a partir de un producto interior, teniendo así que

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_X \langle h_1(x), h_2(x) \rangle_{G(x)} d\mu(x)$$

con lo cual, este conjunto de funciones es un espacio de Hilbert al cual lo denotamos por

$$\mathbb{H} := \int_X \oplus G(x) d\mu(x)$$

y le llamamos la integral directa de los espacios de Hilbert $G(x)$*.*

Teorema 48. *Sean* (G, Ω) *y* (G', Ω') *dos sistemas de Hilbert medibles generados por el mismo espacio* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *tales que* $N = N', \mu$*-c.s., entonces existe un mapa unitario entre* $\mathbb{H}$ *y* $\mathbb{H}'$*.*

De este resultado se sigue que μ y N determinan a la integral directa de espacios de Hilbert.

Definición 49. ***[Operador de múltiplicación de** $\mathbb{H}$**].*** *Sea $\mathbb{H}$ la integral directa de espacios de Hilbert determinada por μ y N, y sea $\varphi \in S(X, \mathscr{A})$. Definimos Q_φ con*

$$dom(Q_\varphi) := \left\{ g \in \mathbb{H} \middle| \int_X |\varphi(x)|^2 \|g(x)\|^2 d\mu(x) < +\infty \right\}$$

dada por $(Q_\varphi g)(x) = \varphi(x) g(x)$.

Con la definición previa, si $\partial \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ se tiene $\chi_\partial \in S(X, \mathscr{A})$. Calculamos

$$\langle g, Q_{\chi_\partial} f \rangle = \int_\partial \langle g(x), f(x) \rangle_{G(x)} d\mu(x),$$

con las propiedades de esta integral se puede demostrar que:

1. $Q_{\chi(\partial)}$ es un proyector.
2. $Q_{\chi(\cdot)}$ es aditiva numerable, es decir, si $\{\delta_n\} \subset \mathscr{A}$ es un conjunto finito o numerable de conjuntos ajenos con $\delta_n \in \mathscr{A}$ y $\delta = \bigcup_n \delta_n$, entonces $Q_{\chi(\delta)} = s\text{-}\sum_n Q_{\chi(\delta_n)}$.
3. $Q_{\chi(X)} = I$.

Con lo cual $Q_{\chi(\cdot)}$ es una medida espectral para cada $\partial \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

Teorema 50. *El operador $\int_X \varphi dQ_\varphi$ coincide con el operador Q_φ.*

Demostración. Tenemos que $dom(Q_\varphi) = dom(\int_X \varphi dQ_\varphi)$. Para cada $g \in dom(Q_\varphi)$ y para cada $h \in \mathbb{H}$ calculamos

$$\langle g, Q_\varphi h \rangle = \int_X \varphi(x) \langle g(x), h(x) \rangle_{G(x)} d\mu(x) = \int_X \varphi d\mu_{h,g} = \langle g, \int_X \varphi dQ_\varphi h \rangle$$

□

Definición 51. *Sea (G, Ω) un sistema de Hilbert medible y $t(x) \in \mathcal{B}(G(x))$ definida μ-c.s. sobre X. Decimos que $t(x)$ es μ-medible si la función*

$$\langle f(x), t(x) g(x) \rangle_{G(x)}$$

es medible para toda $f, g \in \Omega$.

Definición 52. *Sea $\mathbb{H}$ una integral directa de Hilbert; definimos a los operadores descomponibles como los operadores $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tales que dada $t : X \to \mathcal{B}(G(x))$ una función medible con*

$$\mu\text{-}\sup \|t(x)\|_{\mathcal{B}(G(x))} < +\infty,$$

la función T está definida por $T(h(x)) = t(x)h(x)$.

Teorema 53. *Sea* (G,Ω) *un sistema de Hilbert medible y* $t(x) \in \mathcal{B}(G(x))$ *una función medible tal que*

$$\mu\text{-}\sup \|t(x)\|_{\mathcal{B}(G(x))} < +\infty,$$

entonces el operador descomponible $T : h(x) \to t(x)h(x)$ *es un operador en* $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ *tal que*

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathbb{H})} = \mu\text{-}\sup \|t(x)\|_{\mathcal{B}(G(x))}$$

Teorema 54. *Sea* (G,Ω) *un sistema de Hilbert medible. El operador descomponible* $T : h(x) \to t(x)h(x)$ *(con* $t(x) \in \mathcal{B}(G(x))$*) medible tal que* μ*-sup* $\|t(x)\|_{\mathcal{B}(G(x))} < +\infty$ *conmuta con cualquier operador* Q_φ*, para* $\varphi \in (S,\mathscr{A})$*; en particular* T *conmuta con* $Q_{\chi(\delta)}$ *para toda* $\delta \in \mathscr{A}$*.*

Teorema 55. *Sea* (G,Ω) *un sistema de Hilbert medible y sea* $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$*. Si* T *conmuta con* $Q_{\chi(\delta)}$ *para toda* $\delta \in \mathscr{A}$ *entonces existe una función* μ*-medible*

$$t : X \to \mathcal{B}(G(x))$$

tal que $T(h(x)) = t(x)h(x)$*.*

Un caso particular de los operadores descomponibles es cuando $t(x) = \alpha(x)I$ μ-c.s.$x \in X$, donde I es la identidad en $G(x)$, en este caso $T = Q_\alpha$. En los teorema anteriores se identifican clases de operadores que conmutan entre sí. Además, la clase de operadores que conmutan con Q_φ es más amplia que ella misma (véase la figura de abajo).

Teorema 56. *Sea* $\mathbb{H}$ *una integral directa con* $N(x) \equiv 1$ *(*μ*-c.s.).* $T \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ *conmuta con* X *si y solo si* $T = Q_\varphi$ *para algún* $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(X,\mu)$*.*

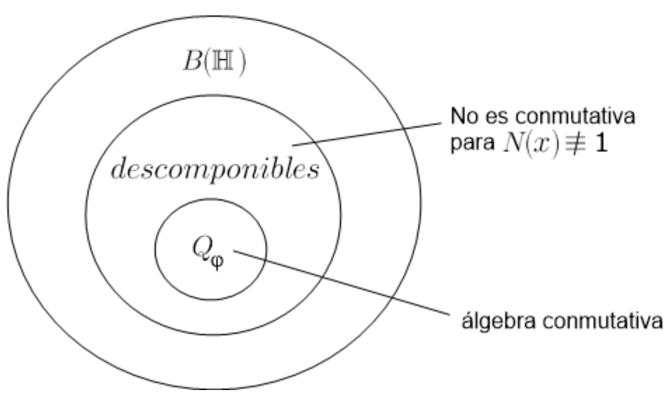
Teorema 57. *Sea* $\mathbb{H}$ *una integral directa. Si* $M \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ *conmuta con cualquier operador descomponible, entonces existe* $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(X,\mu)$ *tal que* $M = Q_\varphi$*.*

Proposición 58. *El conjunto de operadores descomponibles sobre una integral directa* $\mathbb{H}$ *es una subálgebra (no conmutativa si* $N(x) \not\equiv 1$*); además*

a) $T_1 + T_2 \mapsto t_1(x) + t_2(x)$*.*

b) $T_1T_2 \mapsto t_1(x)t_2(x)$*.*

c) $T^* \mapsto t^*(x)$*.*



Teorema 59. *El operador descomponible* T *es autoadjunto (unitario, normal, proyector) si y sólo si* t *es autoadjunto (unitario, normal, proyector)* μ*-c.s.* $x \in X$*.*

1.4. Operadores Compactos

Definición 60. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Decimos que un operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador lineal compacto si T es lineal y si para cada subconjunto acotado $M \subset \mathcal{H}$, la imagen $T(M)$ es relativamente compacto, es decir, $\overline{T(M)}$ es compacto.*
Denotamos por $S_\infty(\mathcal{H})$ a la clase de operadores compactos definidos en todo $\mathcal{H}$.

Como los operadores en $S_\infty(\mathcal{H})$ están acotados y definidos en toda $\mathcal{H}$, se sigue que son operadores cerrados; por lo que, si $T \in S_\infty(\mathcal{H})$, éste admite la representación polar, donde V es la isometría parcial tal que $T = V|T|$ con $|T| = (T^*T)^{1/2}$. Por lo que T y $|T|$ son operadores compactos.
De lo anterior, si tomamos $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ tendremos que $|T|$ es un operador autoadjunto compacto. Si $\{s_k\}$ es el conjunto de eigenvalores de $|T|$ ordenados de forma decreciente y contados con multiplicidad, y si $\{\varphi_k\}$ es la base ortonormal de $\mathcal{H}$ dada por los eigenvalores; por el teorema espectral para operadores autoadjuntos compactos aplicado a $|T|$ tenemos

$$|T| = \sum_k s_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \varphi_k$$

donde $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$; de aquí se sigue

$$\begin{aligned} T &= V|T| \\ &= \sum_k s_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle V\varphi_k \\ &= \sum_k s_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \psi_k \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde a (1.12) se le conoce como la representación canónica de operadores compactos, mientras que $\{s_k\}$ se les llama números singulares y $\{\psi_k\}$ también es una base ortonormal de $\overline{\operatorname{ran}(T)}$. Así, todo operador compacto admite una representación canónica. A su vez tenemos el siguiente resultado:

Teorema 61. *Sean $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ sistemas ortonormales de $\mathcal{H}$ con la misma cardinalidad, sea $\{s_k\}$ una sucesión decreciente, $s_k > 0, \lim_{k\to\infty} s_k = 0$. Entonces $T = \sum_k s_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \psi_k$ define un operador compacto.*

Demostración. Denotemos $T_n = \sum_{k=1}^{n} s_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \psi_k$; calculamos

$$\|(T_{n+q} - T_n)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+q} s_k^2 |\langle \varphi_k, x \rangle|^2 \leq s_{n+1}^2 \sum_k |\langle \varphi_k, x \rangle|^2 \leq s_{n+1}^2 \|x\|^2$$

por lo que $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy de operadores de rango finito, así $\{T_n\}$ converge uniformemente a un operador $T \in S_\infty(\mathcal{H})$; es decir, $\|T_n - T\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$

En la demostración previa, la igualdad en los cálculos se alcanza cuando $x = \varphi_{n+1}$, así

$$\|T - T_n\| = s_{n+1}(T). \tag{1.13}$$

Teorema 62. *Sea $A \in S_\infty(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto y sea $\{\lambda_n\}$ el conjunto de eigenvalores ordenados de manera decreciente y contados con multiplicidad. Entonces*

$$\lambda_n = \min_{\mathcal{L}} \max_{x \in \mathcal{L}\setminus\{0\}} \frac{\langle x, Ax\rangle}{\|x\|^2}$$

donde $dim(\mathcal{H} \ominus \mathcal{L}) \leq n-1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A > 0$. Sea $\mathcal{L}$ un subespacio de Hilbert con $dim(\mathcal{H} \ominus \mathcal{L}) \leq n-1$. Supongamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\langle x, Ax\rangle \leq (\lambda_n - \varepsilon_0)\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{L} \tag{1.14}$$

por lo que existe $x \neq 0$ con $x \in \overline{\operatorname{span}\{\xi_k | k = 1, \ldots, n\}}$ tal que $x \in \mathcal{L}$ y $x \in (\mathcal{H} \ominus \mathcal{L})^\perp$ (donde $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ es base ortonormal para $\mathcal{L}$). Como $x \in \mathcal{L}$ entonces $x = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k \xi_k$ con lo cual

$$\langle x, Ax\rangle \geq \lambda_n \langle x, x\rangle$$

lo cual contradice a (1.14). Por lo tanto $\lambda_n \leq \max_{x \in \mathcal{L}\setminus\{0\}} \frac{\langle x, Ax\rangle}{\|x\|^2}$ donde la igualdad se alcanza en $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{\xi_k\}_{k=1}^n$. □

Del teorema previo se sigue el siguiente resultado fundamental:

$$s_{n+1} = \min_{\mathcal{L}} \max_{x \in \mathcal{L}\setminus\{0\}} (\|Tx\|/\|x\|) \tag{1.15}$$

donde $\mathcal{L}$ es tal que $dim(\mathcal{H} \ominus \mathcal{L}) \leq n-1$.

De la ecuación (1.15) se obtiene que:

a) Si $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces $s_k(TR) \leq \|R\| s_k(T)$.

b) $s_{n+1}(T) = \min_K \|T - K\| \quad (rank K \leq n)$; más aún, sean $T_1, T_2 \in S_\infty(\mathcal{H})$, de la igualdad previa tenemos

$$s_{m+n-1}(T_1 + T_2) \leq s_m(T_1) + s_n(T_2)$$

suponiendo $T = T_1 + T_2$ entonces

$$|s_m(T) - s_m(T_1)| \leq \|T - T_1\| \tag{1.16}$$

lo cual muestra que los números singulares dependen de T continuamente.

1.4.1. Operadores traza

La clase $S_\infty(\mathcal{H})$ contiene una subclase importante de operadores.

Definición 63. *Definimos al conjunto*

$$S_1(\mathcal{H}) := \left\{ T \in S_\infty(\mathcal{H}) | \sum_k s_k < +\infty \right\}.$$

Teorema 64. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Supongamos que existe $\{g_k\}$ base ortonormal tal que $\sum_k \|Tg_k\|^2 < +\infty$, entonces $T \in S_\infty(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente a 0. Calculamos

$$\|T^* x_n\|^2 = \sum_k |\langle g_k, T^* x_n \rangle|^2 = \sum_k |\langle Tg_k, x_n \rangle|^2,$$

debido a que $\langle Tg_k, x_n \rangle \to 0$ cuando $n \to 0$ y $\{x_n\}$ está acotada se sigue que existe $c > 0$ tal que $|\langle Tg_k, x_n \rangle|^2 \leq c\|Tg_k\|^2$. Luego, por la versión discreta del teorema de Lebesgue tenemos que $\|T^* x_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, con lo cual $T^* x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces T^* es un operador compacto y por lo tanto T es compacto. □

Teorema 65. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), T > 0$. Si existe $\{g_k\}$ una base ortonormal tal que $\sum_k \langle g_k, Tg_k \rangle < +\infty$ entonces $T \in S_1(\mathcal{H})$ y para toda $\{h_k\}$ base ortonormal se cumple*

$$\sum_k \langle h_k, Th_k \rangle = \sum_k s_k$$

Demostración. Por hipótesis $\displaystyle\sum_k \langle g_k, Tg_k \rangle = \sum_k \|T^{1/2} g_k\|^2 < +\infty$, por el teorema previo se sigue $T^{1/2} \in S_\infty(\mathcal{H})$ con lo cual $T \in S_\infty(\mathcal{H})$. Usando la representación canónica de operadores compactos $T = \sum_k s_k \langle \varphi_k, \cdot \rangle \psi_k$ donde $\varphi_k = \psi_k$ pues $T > 0$, calculamos

$$\sum_k \langle h_k, Th_k \rangle = \sum_k \sum_j s_j |\langle \varphi_j, \psi_k \rangle|^2 = \sum_k s_k.$$

□

Teorema 66. *Sean $T \in S_1(\mathcal{H})$ y $\{s_k\}, \{h_k\}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$, entonces*

$$\sum_k |\langle h_k, Tg_k \rangle| \leq \sum_k s_k$$

Demostración. Usamos la descomposición canónica de T y calculamos:

$$\begin{aligned}\sum_k \langle h_k, Tg_k\rangle &\leq \sum_k \sum_j s_j |\langle \varphi_j, g_k\rangle \langle h_k, \psi_j\rangle| \\ &\leq \sum_j s_j \left[\sum_k |\langle \varphi_j, g_k\rangle|^2\right]^{1/2} \left[\sum_k |\langle h_k, \psi_j\rangle|^2\right]^{1/2} \\ &= \sum_k s_k \|\varphi_k\| \|\psi_k\| \\ &= \sum_k s_k.\end{aligned}$$

□

Teorema 67. *Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y existe $\{g_k\}$ base ortonormal tal que $\sum_k \|Tg_k\| < +\infty$, entonces $T \in S_1(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad consideremos $T > 0$, como $\displaystyle\sum_k \langle g_k, |T|g_k\rangle \leq \sum_k \||T|g_k\|$ y $\displaystyle\sum_k \||T|g_k\| < +\infty$, por el teorema 65 se sigue $|T| \in S_1(H)$, por lo tanto $T \in S_1(H)$. □

Teorema 68. *El funcional $T \mapsto \displaystyle\sum_k s_k$ es una norma en $S_1(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sean $T_1, T_2 \in S_1(\mathcal{H})$ y $T = T_1 + T_2$; por el teorema 66 tenemos que para cualesquiera $\{g_k\}, \{h_k\}$ sistemas ortonormales

$$\sum_k |\langle h_k, Tg_k\rangle| \leq \sum_k |\langle h_k, T_1 g_k\rangle| + \sum_k |\langle h_k, T_2 g_k\rangle| \leq \sum_k s_k + \sum_k r_k$$

por lo que $T \in S_1(\mathcal{H})$. Las propiedades de la norma se siguen de la definición ya que los números singulares son no negativos, así

$$\|T\|_1 = \sum_k s_k(T).$$

□

Teorema 69. $(S_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_1$. Usando (1.13) concluimos que $\|T\| = s_1 \leq \|T\|_1$; así $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$, entonces $T_n \to T \in S_\infty(\mathcal{H})$.
Debido a que $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ para $m, n \gg 1$, se sigue

$$\sum_k s_k(T_n - T_m) \leq \varepsilon \quad \text{para } m, n \gg 1$$

usando la continuidad de los números singulares y haciendo $n \to \infty$, tenemos

$$\sum_k s_k(T - T_m) \leq \varepsilon$$

con lo cual $T - T_m \in S_1(\mathcal{H})$, sin embargo, $T_m \in S_1(\mathcal{H})$, por lo que $T \in S_1(\mathcal{H})$. Por último notemos que

$$\lim_{m\to\infty} \|T - T_m\| = 0.$$

□

Teorema 70. *$S_1(\mathcal{H})$ es separable.*

Demostración. Sea $T \in S_1(\mathcal{H})$ y sean $T_n = \sum_{k=1}^n s_k(T)$, se sigue que

$$\|T - T_n\| = \sum_{k>n} s_k(T),$$

puesto que $s_k(T_n) = s_k(T)$ para $n \leq k$ y $s_k(T_n) = 0$ para $k > n$. Por lo tanto

$$\|T - T_n\|_1 \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

□

Teorema 71. *Si $T \in S_1(\mathcal{H})$ entonces para toda base ortonormal $\{g_k\}$, $\sum_k \langle g_k, Tg_k \rangle$ es absolutamente convergente y la suma no depende de la elección de la base.*

Demostración. Usando la representación canónica de operadores compactos calculamos

$$\begin{aligned}
\sum_k \langle g_k, Tg_k \rangle &= \sum_k \sum_j s_j \langle \varphi_j, g_k \rangle \langle g_k, \psi_j \rangle \\
&= \sum_j s_j \sum_k \langle g_k, \psi_j \rangle \langle \varphi_j, g_k \rangle \quad \text{(por teo 66)} \\
&= \sum_j s_j \langle \varphi_j, \psi_j \rangle \\
&= \sum_j \langle \varphi_j, T\varphi_j \rangle
\end{aligned}$$

por el teorema 66 esto es absolutamente convergente y no depende de la elección de $\{g_k\}$. □

Definición 72. *Sea $T \in S_1(\mathcal{H})$, definimos la traza de T por*

$$TrT := \sum_k \langle g_k, Tg_k \rangle$$

la suma de los elementos de la diagonal de la matriz T en la base $\{g_k\}$.

Observemos que $|TrT| \leq \|T\|_1$, y en particular si $T > 0$ entonces $TrT = \|T\|_1$.

Capítulo 2

Teoría de dispersión

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, consideremos $\left\{f \in \mathcal{H} \middle| \|f\| = 1\right\}$; les llamaremos f-estados. La probabilidad de que el valor de una observable se encuentre en el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ cuando el sistema se encuentre en el estado f es:

$$\langle f, E_A(a, b) f \rangle = \int_{(a,b)} d\mu_f$$

La dinámica de estados está dada por un grupo continuo uniparamétrico de operadores unitarios

$$f_t = U(t) f_0.$$

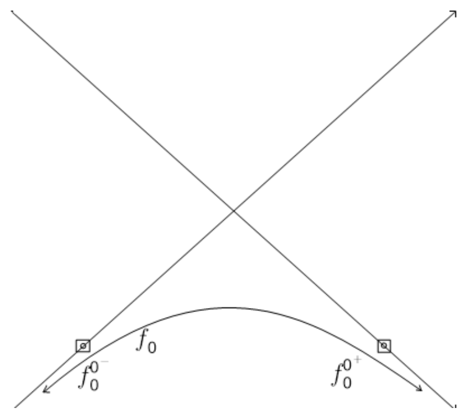
Existe un operador generador (del grupo de operadores) $A = A^*$; se conoce como Hamiltoniano del sistema.
Serán de nuestro interés

$$\begin{aligned} & i\frac{d}{dt} f_t = A f_t \text{ (Ecuación de Schrödinger)} \\ & i\frac{d}{dt} U(t) f_0 = A U(t) f_0. \end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} & i\frac{d}{dt} f_t = A f_t \\ & f_t = f_0 \qquad (t = 0) \end{aligned}$$

Tenemos dos operadores A, A_0 (este último libre de interacciones) y $f_t = e^{-iAt} f_0$, $f_t^0 = e^{-iA_0 t} f_0^0$.



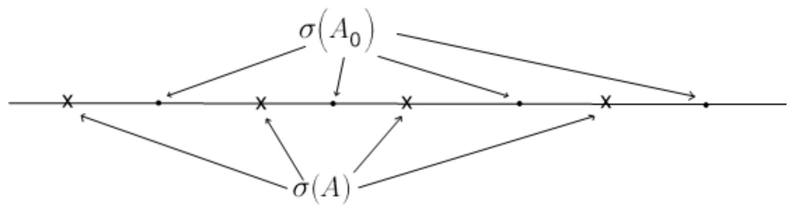
El problema fundamental de la teoría matemática de dispersión consiste en: dado un estado inicial f_0, encontrar estados iniciales para el Hamiltoniano libre $f_0^{0^\pm}$ tales que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|e^{-iAt}f_0 - e^{-iA_0t}f_0^{0^\pm}\| = 0.$$

Lo anterior es equivalente a

$$f_0 = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iAt}e^{-iA_0t}f_0^{0^\pm}.$$

Denotaremos $f_0 = W_\pm(A, A_0)f_0^{0^\pm}$ los operadores de onda.
Suponiendo que A es un operador tal que $\sigma(A) = \sigma_{\text{dis}}(A) = \sigma_p(A) \setminus \sigma_p^\infty(A)$. Si $\lambda \in \sigma_{\text{dis}}(A)$, $f \in \ker(A - \lambda I)$, entonces $e^{-iAt}f = e^{-i\lambda t}f$. Por otro lado, si $\sigma(A_0) = \sigma_{\text{dis}}(A_0)$ y $f \in \ker(A_0 - \lambda_0 I)$ entonces $e^{-iA_0t}f_0^0 = e^{-i\lambda_0 t}f_0^0$.
En este caso no siempre es posible encontrar un estado inicial $f_0^{0^\pm}$.



Definición 73. ***[Ecuación de onda generalizada.]*** *Usando la notación del inicio de este capítulo, la ecuación de onda generalizada se define por*

$$\frac{d^2}{dt^2}U + AU = 0, A > 0$$

con las condiciones iniciales $U(0) = f, U'(0) = h$. *Sean* $a(t) = \frac{d}{dt}U$ *y* $b(t) = \sqrt{A}U$, *definimos* $\widetilde{U} := \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$; *tenemos* $\frac{d}{dt}a = -\sqrt{A}b$, $\frac{d}{dt} = \sqrt{A}b$, $\frac{id}{dt}\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{A} \\ i\sqrt{A} & 0 \end{pmatrix} \widetilde{U}$.

Definición 74. *Sea* $f \in \mathcal{H}$, *decimos que* f *es absolutamente continua con respecto al operador* A *si* μ_f *es absolutamente continuo (con respecto a* λ *la medida de Lebesgue). Por otro lado, decimos que* f *es singular con respecto a* A *si* μ_f *es singular con respecto a* λ.

Definición 75. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador. Definimos los siguientes conjuntos*

$$\mathcal{H}^a := \{f \in \mathcal{H} | f \text{ es absolutamente continua c.r. } A\}$$
$$\mathcal{H}^s := \{f \in \mathcal{H} | f \text{ es singular c.r. } A\}$$

Teorema 76. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador. Entonces $\mathcal{H}^a \perp \mathcal{H}^s$.*

Demostración. Por el Teorema 15, a μ la podemos descomponer de la siguiente forma $\mu = \mu_a + \mu_s$. Existe $Z \subset \mathbb{R}$ tal que $\mu_a = \mu \restriction_{Z^c}$ y $\mu_s = \mu \restriction_Z$ con $\mu_s(\mathbb{R} \setminus Z) = \lambda(Z) = 0$. Sea $\delta = \delta_1 \cup \delta_2$ con $\delta_1 = \delta \cap Z$ y $\delta_2 = \delta \cap Z^c$. Sean $f \in \mathcal{H}^a$ y $g \in \mathcal{H}^s$, calculamos

$$\begin{aligned}
|\langle g, E(\delta)f\rangle| &= |\langle g, (E(\delta_1) + E(\delta_2))f\rangle| \\
&\leq |\langle g, E(\delta_1)f\rangle| + |\langle g, E(\delta_2)f\rangle| \\
&\leq |\langle f, E(\delta_1)f\rangle| \|g\|^2 + |\langle g, E(\delta_2)g\rangle| \|f\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces, para cualquier $\delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\langle g, E(\delta)f\rangle = 0$; en particular, $\langle g, f\rangle = 0$. $\square$

Teorema 77. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador. Entonces $\mathcal{H}^a$ y $\mathcal{H}^s$ son conjuntos lineales.*

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^a$, entonces

$$\langle f_1 + f_2, E(\delta)(f_1 + f_2)\rangle = \langle f_1, E(\delta)f_1\rangle + \langle f_1, E(\delta)f_2\rangle + \langle f_2, E(\delta)f_1\rangle + \langle f_2, E(\delta)f_2\rangle \tag{2.1}$$

ahora, calculamos

$$\begin{aligned}
|\langle f_1, E(\delta)f_2\rangle| &= |\langle E(\delta)f_1, E(\delta)f_2\rangle| \\
&\leq \|E(\delta)f_1\|^2 \|E(\delta)f_2\|^2 \\
&\leq \langle f_1, E(\delta)f_1\rangle \|f_2\|^2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

de (2.1) y (2.2) se sigue que $\mu_{f_1+f_2}$ es absolutamente continua. El caso con $\mathcal{H}^s$ es similar. $\square$

Teorema 78. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador. Para toda $h \in \mathcal{H}$ existen $f \in \mathcal{H}^a$ y $g \in \mathcal{H}^s$ tales que $h = f + g$.*

Demostración. Sea $\delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, consideremos $\mu_h(\delta) = \langle h, E(\delta)h\rangle$; por el Teorema 15, a μ_h la podemos descomponer en $\mu_h = \mu_h^a + \mu_h^s$, por lo que existe $Z \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda(Z) = \mu_h^s(Z^c) = 0$ (con λ la medida de Lebesgue). Definimos $f = E(Z^c)h$ y $g = E(Z)h$, calculamos

$$\begin{aligned}
\langle f, E(\delta)f\rangle &= \langle E(Z^c)h, E(\delta)E(Z^c)h\rangle \\
&= \langle h, E(\delta \cap Z^c)h\rangle \\
&= \mu_h(\delta \cap Z^c) \\
&= \mu \restriction_{Z^c} (\delta) \\
&= \mu_h^a(\delta)
\end{aligned}$$

y análogamente $\langle g, E(\delta)g\rangle = \mu_h^s(\delta)$. Entonces $f \in \mathcal{H}^a, g \in \mathcal{H}^s$ y

$$h = E(Z)h + (I - E(Z))h = E(Z)h + E(Z^c)h = f + g.$$

$\square$

Corolario 79. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador. Tenemos que $\mathcal{H} = \mathcal{H}^a \oplus \mathcal{H}^s$.*

Definición 80. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ subespacios de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ y sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. A $x \in \mathcal{H}$ lo podemos denotar por $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{H}_2$, donde, si P_i es el proyector sobre H_i, denotamos por $T_{jk} = P_jT \restriction_{\mathcal{H}_k}$, así*

$$Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Definición 81. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ subespacios de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ y sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Decimos que $\mathcal{H}_1$ reduce a T si $T\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$ y $T\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2$.*

Si T no es acotado y $\mathrm{dom}T \subsetneq \mathcal{H}$; pedimos que $\mathcal{H}_1 \cap \mathrm{dom}(T) = P_1\mathrm{dom}(T)$, como $\mathrm{dom}(T) = P_1\mathrm{dom}(T) + P_2\mathrm{dom}(T)$ entonces $\mathcal{H}_2 \cap \mathrm{dom}(T) = P_2\mathrm{dom}(T)$.

Definición 82. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y T un operador (no necesariamente acotado). Sea $\mathcal{H}_1$ un subespacio de Hilbert. Decimos que $\mathcal{H}_1$ es invariante respecto a T si*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \cap dom(T) = P_1 dom(T) \text{ y} \\ T(\mathcal{H}_1 \cap dom(T)) \subset \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

De la definición anterior, $\mathcal{H}_1 \cap dom(T) = P_1 dom(T)$ es equivalente a $dom(T) = (\mathcal{H}_1 \cap dom(T)) \oplus (\mathcal{H}_2 \cap dom(T))$ mientras que $T = T_1 \oplus T_2$, donde $T_k = T \restriction_{\mathcal{H}_k}$

Proposición 83. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ subespacios de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ y sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $T = T^*$ y $\mathcal{H}_1$ es invariante respecto a T, entonces $\mathcal{H}_1$ reduce a T.*

Proposición 84. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ subespacios de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador simétrico, cerrado, entonces $\mathcal{H}_1$ es invariante con respecto a T y por lo tanto $\mathcal{H}_1$ reduce a T.*

Teorema 85. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ subespacios de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ y sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea P_i el proyector en $\mathcal{H}_i$, entonces $\mathcal{H}_1$ reduce a T si y sólo si $P_1T = TP_1$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{H}_1$ reduce a T, entonces $P_k\mathrm{dom}(T) = H_k \cap \mathrm{dom}(T)$. Sea $x \in \mathrm{dom}(T)$ donde $P_1x, P_2x \in \mathrm{dom}(T)$, así $PTx = P_1TP_1x + P_2TP_2x$ por lo que se sigue que $P_1Tx = TP_1x$.
Ahora, supongamos que $P_1T = TP_1$. Sabemos que $P_1\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T), P_1(\mathrm{dom}(T)) \subset \mathcal{H}_1$, así $P_1\mathrm{dom}(T) = \mathcal{H}_1 \cap \mathrm{dom}(T)$, por lo tanto $\mathcal{H}_1$ resulta invariante respecto a T. $\square$

Teorema 86. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador autoadjunto. Si $\tilde{\mathcal{H}}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ ($\tilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}$), tenemos que $\tilde{\mathcal{H}}$ es invariante respecto a A si y sólo si $\tilde{\mathcal{H}}$ es invariante con respecto a $E_A(\tilde{\mathcal{H}})$.*

Demostración. Sea $f \in \operatorname{dom}(A)$, como

$$\begin{aligned}\mu_{E_A(\delta)f}(\partial) &= \langle E_A(\delta)f, E_A(\partial)E_A(\delta)f\rangle \\ &= \langle f, E_A(\partial)E_A(\delta)f\rangle \\ &= \mu_f \restriction_\delta (\partial) \\ &\leq \mu_f(\partial)\end{aligned}$$

se tiene que $E_A(\delta)f \in \operatorname{dom}(A)$. Sea P la proyección de $\tilde{\mathcal{H}}$ y $f \in \operatorname{dom}(A)$; calculamos

$$\begin{aligned}&\mu_{Pf}(\delta)\|E_A(\delta)Pf\|^2 \\ &\quad = \|PE_A(\delta)f\|^2 \\ &\quad \leq \|E_A(\delta)f\|^2 \\ &\quad = \mu_f(\delta)\end{aligned}$$

entonces $Pf \in \operatorname{dom}(A)$ y además, para $g \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left\langle \int \delta dE_A Pf, g\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \delta d\mu_{Pf,g} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta d\mu_{f,Pg} \\ &= \left\langle \left(\int \delta dE_A\right) f, Pg\right\rangle \\ &= \left\langle P\left(\int \delta dE_A\right) f, g\right\rangle,\end{aligned}$$

por lo que obtenemos $E_A(\delta)\mathcal{H}^a \subset \mathcal{H}^a$. Ahora, sea $f \in \mathcal{H}^a$, calculamos

$$\begin{aligned}\mu_{E_A(\delta)f}(\partial) &= \langle E(\delta)f, E(\partial)E(\delta)f\rangle \\ &= \langle f, E(\partial)E(\delta)f\rangle \\ &= \mu_f \restriction_\delta (\partial),\end{aligned}$$

entonces $\mu_{E_A(\delta)f} \prec \mu_f \restriction_\delta \prec \mu_f \prec \lambda$; por lo tanto $E_A(\delta)f \in \mathcal{H}^a$. $\square$

Definición 87. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador. Definimos los siguientes operadores: $A_{ac} := A \restriction_{H^a}$ y $A_s := A \restriction_{H_s}$. De esta definición se sigue inmediatamente que $A = A_{ac} \oplus A_s$; además, definimos los siguientes conjuntos:*

$$\sigma_{ac}(A) := \sigma(A_c), \qquad \sigma_s(A) := \sigma(A_s)$$

$$\mathcal{H}^{pp} := \overline{span\{\lambda(\mathbb{R})|\lambda \text{ es eigenvector de } A\}}$$

Proposición 88. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador autoadjunto. Tenemos que $\mathcal{H}^{pp}$ reduce a A y $\mathcal{H}^{pp} \subset \mathcal{H}^{s}$.*

Definición 89. *De la proposición 88, como $\mathcal{H}^{pp} \subset \mathcal{H}^{s}$, definimos $\mathcal{H}^{sc} := \mathcal{H}^{s} \ominus \mathcal{H}^{pp}$. Asimismo, definimos $A_{sc} := A \restriction_{\mathcal{H}^{sc}}, A_{pp} := A \restriction_{\mathcal{H}^{pp}}, \sigma_{sc}(A) := \sigma(A_{sc})$ y $\sigma_{pp}(A) := \sigma(A_{pp})$.*

Definición 90. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert; decimos que $h \in \mathcal{H}$ es un elemento maximal si para toda $f \in \mathcal{H}, \mu_f \prec \mu_h$.*

Teorema 91. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $\mathcal{H}$ es separable entonces para cualquier operador autoadjunto A existe un elemento de tipo maximal.*

Proposición 92. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $h \in \mathcal{H}$ un elemento maximal. Sea $\partial \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tenemos que $E_A(\partial) = 0$ si y sólo si $\mu_h(\partial) = 0$. Como consecuencia inmediata se sigue $suppE_A = supp\mu_h$.*

Teorema 93. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y A un operador autoadjunto, entonces existe $Z^a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $P^a = E(Z^a)$ (donde P^a es el proyector sobre $\mathcal{H}^a$).*

Demostración. Sea $h \in \mathcal{H}$ un elemento maximal, por lo que existe Z^s tal que $\mu_h^s((Z^s)^c) = 0 = \lambda(Z^s)$; así, el conjunto buscado es $Z^a = (Z^s)^c$. Sean $f \in \mathcal{H}$ y $E(Z^s) = I - E(Z^a)$, calculamos

$$\begin{aligned} \mu_{E(Z^s)f}(\partial) &= \langle f, E(\partial \cap Z^s)f \rangle \\ &= \mu_f(\partial \cap Z^s) \\ &= \mu_f \restriction_{Z^s} (\partial), \end{aligned}$$

así, supp$\mu_{E(Z^s)f} \subseteq Z^s$ y en consecuencia $\lambda(\text{supp}\mu_{E(Z^s)f}) = 0$, entonces $\mu_{E(Z^s)f} \perp \lambda$, por lo tanto $E(Z^c)f \in \mathcal{H}^s$.
Ahora, supongamos $\lambda(\partial) = 0$, se sigue

$$\mu_h \restriction_{Z^a} (\partial) = \mu_{E(Z^a)h}(\partial) = 0$$

por lo que $\mu_{E(Z^a)f} \prec \lambda$, como $\mu_{E(Z^a)f} = \mu_f \restriction_{Z^a} \prec \mu_h \restriction_{Z^a} \prec \lambda$, entonces $E(Z^a)f \in \mathcal{H}^a$. Por lo tanto $P^a = E(Z^a)$ y $P^s = E(Z^s)$ (con P^s el proyector sobre $\mathcal{H}^s$). □

En el teorema previo, Z^a y Z^s no están unívocamente determinados. Además, $\sigma(A) = \text{supp}\mu_h$ donde h es de tipo maximal; tenemos que $\mu_{P^a h} = \mu_h \restriction_{Z^a} = \mu_h^{ac}$ y para toda $f \in \mathcal{H}, \mu_f \prec \mu_h$, entonces $\mu_f^{ac} \prec \mu_h^{ac}$ y $\mu_f^s \prec \mu_h^s$, entonces $P^a h = E(Z^a)h$ es de tipo maximal con respecto a A_s. Con esto $\sigma_{ac}(A) = \text{supp}\mu_h^a$ y $\sigma_s(A) = \text{supp}\mu_h^s$.

Definición 94. *Z^0 es un soporte boreliano minimal si es soporte boreliano de E y para cualquier soporte boreliano E, $\lambda(Z^0 \setminus Z) = 0$.*

Corolario 95. *Z^0 es soporte boreliano minimal de E si y solo si Z^0 es soporte boreliano minimal de μ_h, donde h es de tipo maximal.*

Definición 96. *Todo soporte boreliano minimal de E contenido en $\sigma(A)$, es llamado spectral core de A.*

En lo que resta de este trabajo diremos que A tiene espectro absolutamente continuo (ac), (sc),(pp) en $\partial \subset \mathbb{R}$ si $E(\partial)A$ tiene espectro absolutamente continuo (ac), (sc), (pp) en el espacio $E(\partial)\mathcal{H}$.

2.1. Multiplicidad Espectral

Definición 97. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador autoadjunto. Decimos que A es simple si existe $g \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\overline{span\{E(\partial)g| \quad \partial \text{ es un intervalo}\}} = \mathcal{H}.$$

A g se le conoce como elemento generador.

Definición 98. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert Y A un operador autoadjunto simple tal que existe $f \in dom(A^m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y que además cumple*

$$\overline{span\{A^m f | m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = \mathcal{H},$$

a f se le conoce como elemento cíclico.

Si A es simple, entonces A admite representación canónica dada por

$$\begin{aligned} L_2(\mathbb{R}, \mu_g) &\to \mathcal{H} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(A)g \end{aligned}$$

en general, existe $G \subset \mathcal{H}$ tal que

$$\overline{\text{span}\{E(\partial)G| \ \partial \text{ es un intervalo}\}} = \mathcal{H}.$$

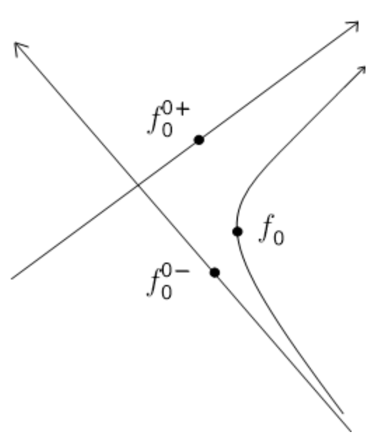
Definición 99. *Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y A un operador autoadjunto simple. Si $G \subset \mathcal{H}$ con $dimG = m$ tal que*

$$\overline{span\{E(\partial)G| \ \partial \text{ es un intervalo}\}} = \mathcal{H}$$

decimos que A tiene multiplicidad m.
La multiplicidad espectral de A en $\partial \subseteq \mathbb{R}$ es la multiplicidad de $E(\partial)A$ en el espacio $E(\partial)\mathcal{H}$.
λ tiene multiplicidad espectral si $m = \lim_{n\to\infty} multiplicidad E(\lambda - 1/n, \lambda + 1/n)A$.

Para cualquier medida boreliana μ, $\sigma(A_\mu) = \text{supp}\mu$ donde A_μ es operador de multiplicación en el dominio maximal.

Proposición 100. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador autoadjunto simple. $h \in \mathcal{H}$ es un elemento generador si y sólo si es de tipo maximal.*



Dado f_0 buscamos f_0^{0+} y f_0^{0-} tales que

$$f_0 = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iAt}e^{-iA_0t}f_0^{0\pm}. \tag{2.3}$$

Para $f_0 \in \mathcal{H}_A^{ac}$ se tiene que existen $f_0^{0\pm} \in \mathcal{H}_{A_0}^{ac}$ tales que satisfacen (2.3). Denotamos por

$$W_\pm(A, A_0) = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} e^{iAt}e^{-iA_0t}.$$

Definición 101. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea A un operador autoadjunto simple. Decimos que $W_\pm(A, A_0)$ son completos si $ranW_\pm(A, A_0) = \mathcal{H}_A^{ac}$.*

Definición 102. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador autoadjunto simple. Definimos el operador dispersión por $s : f_0^{0-} \to f_0^{0+}$ dado por $s := W_+^* W_-$.*

2.2. Definición y propiedades de los operadores de onda

Definición 103. *Sean A y A_0 operadores autoadjuntos que actúan sobre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ respectivamente. Sea $J : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ un operador acotado. Definimos*

$$W_\pm(A, A_0) := \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} e^{iAt}e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}$$

$$W_\pm(A, A_0, J) := \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} e^{iAt}Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}$$

si además J es unitario, con $J \neq I$, denotamos por $\tilde{A}_0 = JA_0J^{-1}$.

Proposición 104. *Sean A y A_0 operadores autoadjuntos que actúan sobre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ respectivamente. Sea $J : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ un operador unitario y acotado. Tenemos*

$$e^{iAt}Je^{-iA_0t} = e^{-iAt}e^{-i\tilde{A}_0t}J$$

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}
\langle g, Je^{-iA_0t}J^{-1}f\rangle &= \langle J^{-1}g, e^{-iA_0t}J^{-1}f\rangle \\
&= \int e^{-ist}d\langle J^{-1}g, E(\delta)J^{-1}f\rangle \\
&= \int e^{-ist}d\langle g, JE(\delta)J^{-1}f\rangle \\
&= \int e^{-ist}d\langle g, E_{\tilde{A}_0}(\delta)f\rangle
\end{aligned}$$

de aquí tenemos

$$e^{iAt}Je^{-iA_0t} = e^{iAt}Je^{-iA_0t}J^{-1}J = e^{-iAt}e^{-i\tilde{A}_0t}J.$$

Notemos también que $\|e^{iAt}Je^{-iA_0t}\| \leq \|J\|$ y por lo tanto $\|\lim_{t\to\pm\infty} e^{iAt}Je^{-iA_0t}\| \leq \|J\|\|f\|$. $\square$

Con lo anterior, para demostrar la existencia de $W_\pm$, basta demostrar la existencia en un conjunto denso en $\mathcal{H}_0^a$.

Teorema 105. *Sea $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert y sea A_0 un operador autoadjunto. Tenemos*

$$w\text{-}\lim_{|t|\to\infty} e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = 0.$$

Demostración. Calculamos

$$\langle g, e^{-iA_0t}f\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}d\langle g, E(\delta)f\rangle \tag{2.4}$$

como $E(\delta)$ es no decreciente y continua por la izquierda se sigue

$$\langle g, E(\delta)f\rangle = \mathcal{E}_{fg}(\delta), \tag{2.5}$$

por lo que, de (2.4) y (2.5) tenemos

$$\langle g, e^{-iA_0t}f\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\mathcal{E}'_{fg}(\delta)ds \underset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Teorema 106. *Si K es compacto entonces $s\text{-}\lim_{t\to\infty} Ke^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = 0$.*

Teorema 107. *$W_\pm$ es isométrico en $\mathcal{H}_0^a$ si y sólo si para toda $f \in \mathcal{H}_0^a$, $\lim_{t\to\pm\infty} \|Je^{-iA_0t}f\| = \|f\|$.*

Demostración. Calculamos

$$\|W_\pm f\| = \lim_{t\to\pm\infty} \|e^{iAt}Je^{-iA_0t}f\| = \lim_{t\to\pm\infty} \|Je^{-iA_0t}f\|.$$

□

Teorema 108. *$W_\pm$ es isométrico a $\mathcal{H}_0^a$ si $s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty}(J^*J - I)e^{-iA_0t} = 0$.*

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}
\|Je^{-iA_0t}f\|^2 &= \langle Je^{-iA_0t}f, Je^{-iA_0t}f\rangle \\
&= \langle (J^*J - I)e^{-iA_0t}f, e^{-iA_0t}f\rangle + \|e^{-iA_0t}f\|^2 \\
&= \langle (J^*J - I)e^{-iA_0t}f, e^{-iA_0t}f\rangle + \|f\|^2
\end{aligned}$$

si $s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty}(J^*J - I)e^{-iA_0t} = 0$ entonces $\lim_{t\to\pm\infty} \|Je^{-iA_0t}f\| = \|f\|$, y por el teorema (107) se sigue que $W_\pm$ es isométrico a $\mathcal{H}_0^a$. □

Teorema 109. *Si $W_\pm$ es isométrico a $\mathcal{H}_0^a$ y $\|J\| \leq 1$ entonces $s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty}(J^*J - I)e^{-iA_0t} = 0$.*

Demostración. Tenemos $W_\pm$ es isométrico a $\mathcal{H}_0^a$ si y sólo si

$$\langle (J^*J - I)e^{-iA_0t}f, e^{-iA_0t}f\rangle \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$

como J^*J es autoadjunto y positivo, y como $I - J^*J$ es positivo tenemos

$$\langle (J^*J - I)e^{-iA_0t}f, e^{-iA_0t}f\rangle = -\|(I - J^*J)^{1/2}e^{-iA_0t}f\|^2 \to 0$$

por lo que $\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(I - J^*J)e^{-iA_0t} = 0$. $\square$

Teorema 110. *Si $(J^*J - I)$ es compacto entonces $W_\pm$ es isométrico a $\mathcal{H}_0^a$.*

Teorema 111. *Si $(J^*J - I)E_{A_0}(\Delta)$ es compacto para Δ un intervalo finito, entonces $W_\pm$ es isométrico a $\mathcal{H}_0^a$.*

Teorema 112. *Para $\varphi \in S(\mathbb{R}, E_A) \cap S(\mathbb{R}, E_{A_0})$ se tiene*

$$\varphi(A)W_\pm(A, A_0, J) = W_\pm(A, A_0, J)\varphi(A_0)$$

Demostración. Tenemos $\varphi(s) = e^{-isw}$, calculamos

$$\begin{aligned} e^{-iAw}W_\pm(A, A_0, J) &= e^{-iAw}\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} e^{iAt}Je^{-iA_0t} \\ &= \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} e^{iA(t-w)}Je^{-iA_0t} \\ &= \underset{\tau\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} e^{iA\tau}Je^{-iA_0(\tau+w)} \\ &= \underset{\tau\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} e^{iA\tau}Je^{-iA_0\tau}e^{-iA_0w} \\ &= W_\pm(A, A_0, J)e^{-iA_0w}. \end{aligned}$$

Sean $g, f \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\langle g, e^{-iAw}W_\pm(A, A_0, J)f\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-isw}d\langle g, E(\delta)W_\pm(A, A_0, J)f\rangle$$

y también

$$\begin{aligned} \langle g, W_\pm(A, A_0, J)e^{-iA_0w}f\rangle &= \langle W_\pm^*(A, A_0, J)g, e^{-iA_0w}f\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-isw}d\langle W_\pm^*(A, A_0, J)g, E_{A_0}(\delta)f\rangle, \end{aligned}$$

por la unicidad de la medida de integrales de Fourier-Stieltjes tenemos

$$\langle g, E_A(\delta)W_\pm(A, A_0, J)f\rangle = \langle g, W_\pm(A, A_0, J)E_{A_0}(\delta)f\rangle$$

entonces $E_A(\delta)W_\pm(A, A_0, J) = W_\pm(A, A_0, J)E_{A_0}(\delta)$. $\square$

Por lo anterior, $AW_\pm(A, A_0, J) = W_\pm(A, A_0, J)A_0$, por lo que

$$W_\pm(A, A_0, J) : \mathrm{dom}(A_0) \to \mathrm{dom}(A)$$

y a su vez, como $\big(\varphi(A)W_\pm(A, A_0, J)\big)^* = \big(W_\pm(A, A_0, J)\varphi(A_0)\big)^*$, se sigue

$$W_\pm^*(A, A_0, J)\bar{\varphi}(A) = \bar{\varphi}(A_0)W_\pm^*(A, A_0, J).$$

Definición 113. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ espacios de Hilbert, sean A y A_0 operadores autoadjuntos que actúan sobre los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ respectivamente. Definimos*

$$\mathcal{H}_0^\pm := \mathcal{H}_0 \ominus ker(W_\pm)$$
$$\mathcal{H}^\pm := \overline{ran(W_\pm)}$$

Teorema 114. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ espacios de Hilbert, sean A y A_0 operadores autoadjuntos que actúan sobre los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0$ respectivamente.*

a) $\mathcal{H}_0^\pm$ reduce al operador A_0,

b) $\mathcal{H}^\pm$ reduce al operador A.

Demostración. Para probar a), sea $f \in \ker(W_\pm)$, así $W_\pm f = 0$, entonces $W_\pm E_{A_0}(\Delta)f = E_A(\Delta)W_\pm f = 0$, por lo que $E_{A_0}(\Delta)f \in \ker(W_\pm)$. Tenemos que $\ker(W_\pm)$ es invariante con respecto a E_{A_0}, entonces $\ker(W_\pm)$ es invariante con respecto a A_0; por lo tanto $\mathcal{H}_0^\pm$ reduce a A_0. Para b), como $\mathcal{H} = \ker(W_\pm^*) \oplus \overline{\mathrm{ran}(W_\pm)}$, bastará con demostrar que $\ker(W_\pm^*)$ es invariante con respecto a E_A. Sea $f \in \ker(W_\pm^*)$, calculamos

$$W_\pm^* E_A(\Delta)f = E_A(\Delta)W_\pm^* f = 0$$

entonces $E_A(\Delta)f \in \ker(W_\pm^*)$; de manera análoga concluimos que $\mathcal{H}^\pm$ reduce a A. □

Gracias al resultado previo, podemos considerar a los siguientes operadores

$$A^\pm := A \restriction_{\mathcal{H}^\pm} \quad \text{y} \quad A_0^\pm := A_0 \restriction_{\mathcal{H}_0^\pm},$$

por la definición del operador de onda tenemos que $\mathcal{H}_0^s \subseteq \ker(W_\pm)$, entonces $\mathcal{H}_0^\pm \subseteq \mathcal{H}_0^a$ por lo que $A_0^\pm$ es absolutamente continuo.

2.3. Descomposición polar de $W_\pm$.

En esta sección, recordemos que dado T un operador cerrado y densamente definido entonces $T^*T \geq 0$, como consecuencia de esto tenemos por el teorema espectral que

$$(T^*T)^{1/2} = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\delta} dE_{T^*T}(\delta)$$

sea $|T| := (T^*T)^{1/2}$, así $\mathrm{dom}(|T|) = \mathrm{dom}(T)$ y $\||T|f\| = \|Tf\|$ para toda $f \in \mathrm{dom}(T)$, por lo que $\ker(|T|) = \ker(T)$.
A su vez, se puede demostrar que existe una isometría (unitaria) $V : \overline{\mathrm{ran}(T^*)} \to \overline{\mathrm{ran}(T)}$ tal que $V|T| = T$; el operador unitario V se extiende a $\ker(T)$ teniendo así V una isometría parcial. Además $\overline{\mathrm{ran}(T^*)} = \overline{\mathrm{ran}(|T|)}$.

Definición 115. *[Descomposición polar de* $W_\pm$*]. Tenemos que* $W_\pm = V_\pm |W_\pm|$ *donde* $V_\pm$ *se le llama función signo y es tal que* $V\pm = sgn(W_\pm)$.

Teorema 116. *Para todo* $\varphi \in S(\mathbb{R}, E_A) \cap S(\mathbb{R}, E_{A_0})$ *se tiene*

$$\varphi(A)V_\pm = V_\pm \varphi(A_0).$$

Demostración. Por el teorema (112) tenemos $W_\pm^*(A, A_0, J)\bar{\varphi}(A) = \bar{\varphi}(A_0)W_\pm^*(A, A_0, J)$, así

$$\begin{aligned}
&W_\pm^*(A, A_0, J)\bar{\varphi}(A)W_\pm(A, A_0, J) = \bar{\varphi}(A_0)W_\pm^*(A, A_0, J)W_\pm(A, A_0, J)\\
\Longrightarrow &W_\pm^*(A, A_0, J)W_\pm(A, A_0, J)\bar{\varphi}(A_0) = \bar{\varphi}(A_0)W_\pm^*(A, A_0, J)W_\pm(A, A_0, J)\\
\Longrightarrow &|W_\pm^*(A, A_0, J)|\bar{\varphi}(A_0) = \bar{\varphi}(A_0)|W_\pm(A, A_0, J)|\\
\Longrightarrow &V_\pm|W_\pm(A, A_0, J)|\bar{\varphi}(A_0) = V_\pm\bar{\varphi}(A_0)|W_\pm(A, A_0, J)|\\
\Longrightarrow &\bar{\varphi}(A)V_\pm|W_\pm(A, A_0, J)| = V_\pm\bar{\varphi}(A_0)|W_\pm(A, A_0, J)|
\end{aligned}$$

también tenemos que $\ker(|W_\pm|) = \ker(W_\pm)$. Sea $h \in \mathcal{H}_0$, entonces $h = f + g$ con $g \in \mathcal{H}_0^\pm$ y $g \in \ker(W_\pm)$, como $\overline{\operatorname{ran}(|W_\pm|)} = \overline{\operatorname{ran}(W_\pm^*)} = \mathcal{H}_0^\pm$ entonces $\varphi(A)V_\pm = V_\pm\varphi(A_0)$. □

De este teorema se sigue como caso particular que $AV_\pm = V_\pm A_0$ y $A^\pm V_\pm = V_\pm A_0^\pm$ lo cual está bien definido, por lo tanto $A^\pm$ y $A_0^\pm$ son uniformemente equivalentes. Además, $A_0^\pm$ es absolutamente continuo por lo que $A^\pm$ es absolutamente continuo, entones $\mathcal{H}^\pm \subset \mathcal{H}^a$.
Si $ker(W_\pm) = \mathcal{H}_0^s$ se sigue que $\mathcal{H}^\pm$ es unitariamente equivalente a $\mathcal{H}_0^\pm$, por lo que $\mathcal{H}^\pm$ es unitariamente equivalente a $\mathcal{H}_0^a$, y por lo tanto $\mathcal{H}_0^\pm = \mathcal{H}_0^a$.

Definición 117. *El operador* $W_\pm = W_\pm(A, A_0, J)$ *se dice completo si* $ker(W_\pm) = \mathcal{H}_0^s$ *y* $ran(W_\pm) = \mathcal{H}^a$.

Notemos que si se satisface que $ker(W_\pm) = \mathcal{H}_0^s$ entonces $W_\pm \restriction_{\mathcal{H}^a}$ tiene núcleo trivial, por lo que existe $\left(W_\pm \restriction_{\mathcal{H}_0^a}\right)^{-1} : ranW_\pm \to \mathcal{H}_0$ de tal forma que si $ran(W_\pm) = \overline{ran(W_\pm)}$ entonces $\left(W_\pm \restriction_{\mathcal{H}_0^a}\right)^{-1}$ es acotado; por lo que si $W_\pm$ es completo, entonces $W_\pm \restriction_{\mathcal{H}_0^a}$ es continuamente invertible.

Teorema 118. *Supongamos que los operadores de onda* $W_\pm(A_1, A_0, J_0)$ *y* $W_\pm(A, A_1, J_1)$ *existen y son completos; sea* $J = J_1J_0$*, entonces el operador de onda* $W_\pm(A, A_0, J)$ *existe y es tal que*

$$W_\pm(A, A_0, J) = W_\pm(A, A_1, J_1)W_\pm(A_1, A_0, J_0).$$

Demostración. Como $J = J_1J_0$ calculamos

$$\begin{aligned}
e^{iAt}Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} &= e^{iAt}J_1J_0e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}\\
&= e^{iAt}J_1e^{-iA_1t}e^{iA_1t}J_0e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}\\
&= e^{iAt}J_1e^{-iA_1t}(P_{\mathcal{H}_1^a} + (I - P_{\mathcal{H}_1^a}))e^{iA_1t}J_0e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

por otro lado, notemos que $\overline{ran(W_\pm)} \subset \mathcal{H}_1^a$, por lo que

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(I - P_{\mathcal{H}_1^a})e^{iA_1t}J_0e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = 0,$$

usando la ecuación (2.6) y el límite previo tenemos

$$e^{iAt}Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = e^{iAt}J_1e^{-iA_1t}P_{\mathcal{H}_1^a}e^{iA_1t}J_0e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a},$$

recordemos que si $T_n \xrightarrow{s} T$ y $S_n \xrightarrow{s} S$ entonces $T_nS_n \xrightarrow{s} TS$ con lo cual se cumple la igualdad. □

Definición 119. *Supongamos que los operadores de onda $W_\pm(A, A_0, J)$ y $W_\pm(A, A_0, \widetilde{J})$ existen. Decimos que J y $\widetilde{J}$ son equivalentes (y lo denotamos por $J \sim \widetilde{J}$) si*

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-lím}}(J - \widetilde{J})e^{-iA_0t}P_0 = 0$$

Observemos que de la definición previa, si $J \sim \widetilde{J}$ entonces los operadores de onda coinciden pues

$$\|e^{iAt}(J - \widetilde{J})e^{-iA_0t}P_0f\| \leq \|e^{iAt}\|\|(J - \widetilde{J})e^{-iA_0t}P_0f\| \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

y por lo tanto

$$\|W_\pm(A, A_0, J)f - W_\pm(A, A_0, \widetilde{J})f\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } t \to \pm\infty.$$

Si $J \sim \widetilde{J} \in S_\infty$ entonces $J \sim \widetilde{J}$ para cualquier A_0 con lo cual obtenemos el siguiente criterio: Sea $\partial \subset \mathbb{R}$ un intervalo, si $(J - \widetilde{J})E_{A_0}(\partial) \in S_\infty$ entonces $J \sim \widetilde{J}$ para A_0.

Teorema 120. *Si $W_\pm(A, A_0, J)$ existe, entonces*

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-lím}}(W_\pm(A, A_0, J) - J)e^{-iA_0t}P_0 = 0$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}_0^a$ entonces

$$\begin{aligned} W_\pm(A, A_0, J)e^{-iA_0\tau}f - Je^{-iA_0\tau}f &= e^{-iA\tau}W_\pm(A, A_0, J)f - Je^{-iA_0\tau}f \\ &= e^{-iA\tau}(-e^{iA\tau}Je^{-iA_0\tau} + W_\pm), f \end{aligned} \tag{2.7}$$

como $\|e^{-iA\tau}\| = 1$ y $\|(-e^{iA\tau}Je^{-iA_0\tau} + W_\pm)f\| \longrightarrow 0$ cuando $\tau \to \pm\infty$, se sigue que la ecuación (2.7) converge a cero cuando $\tau \to \pm\infty$. □

Con este teorema obtenemos que $W_\pm(A, A_0, J) \sim J$.

Definición 121. *Definimos el operador de onda débil como*

$$\widetilde{W}_\pm(A, A_0, J) := \underset{t\to\pm\infty}{w\text{-lím}}P_{\mathcal{H}^a}e^{iAt}Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}$$

De la definición previa, como $T_n \xrightarrow{w} T$ implica que $T_n^* \xrightarrow{w} T^*$, se sigue que si $\widetilde{W}_\pm(A, A_0, J)$ existe, entonces $\widetilde{W}_\pm^*(A, A_0, J) = \widetilde{W}_\pm(A, A_0, \widetilde{J})$.
Una de las importancias de los operadores de onda débiles es que nos permiten tener criterios de existencia para los operadores de onda fuertes.

Teorema 122. *La existencia de los operadores de onda $W_{\pm}(A, A_0, J)$ es equivalente a la existencia de los operadores de onda débiles $\widetilde{W}_{\pm}(A, A_0, J), \widetilde{W}_{\pm}(A_0, A_0, J^*J)$ y la igualdad*

$$\widetilde{W}_{\pm}^*(A, A_0, J)\widetilde{W}_{\pm}(A, A_0, J) = \widetilde{W}_{\pm}(A_0, A_0, J^*J) \tag{2.8}$$

Demostración. Supongamos que el operador de onda $W_{\pm}(A, A_0, J)$ existe; calculamos

$$\begin{aligned}\|(e^{iAt}Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} - \widetilde{W}_{\pm})f\|^2 = \langle e^{iA_0t}J^*Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}f, P_{\mathcal{H}_0^a}f\rangle + \|\widetilde{W}_{\pm}(A, A_0, J)f\|^2 \\ - 2\mathrm{Re}\langle P_{\mathcal{H}^a}e^{iAt}Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}f, \widetilde{W}_{\pm}f\rangle\end{aligned} \tag{2.9}$$

como $\widetilde{W}_{\pm} = P\widetilde{W}_{\pm}$, se sigue que $\mathrm{Re}\langle P_{\mathcal{H}^a}e^{iAt}Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}f, \widetilde{W}_{\pm}f\rangle \to \|\widetilde{W}_{\pm}f\|^2$ cuando $t \to \pm\infty$; por lo tanto, la congruencia a cero del lado izquierdo de la igualdad (2.9) es equivalente a la existencia del operador de onda $\widetilde{W}_{\pm}(A_0, A_0, J^+J)$ y a la igualdad a cero del límite del lado derecho. La última igualdad tiene la forma

$$\langle\widetilde{W}_{\pm}(A_0, A_0, J^*J)f, f\rangle = \|\widetilde{W}_{\pm}(A, A_0, J)f\|^2$$

y es equivalente a (2.8). $\square$

Corolario 123. *Si el operador de onda $\widetilde{W}_{\pm}(A, A_0, J)$ existe y se cumple que*

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(J^*J - I)e^{-iA_0t}P_0 = 0$$

entonces el operador de onda débil $\widetilde{W}_{\pm}(A, A_0, J)$ existen y es isométrico a $W_{\pm}(A, A_0, J)$ en $\mathcal{H}_0^a$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}$, calculamos

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{W}_{\pm}(A_0, A_0, J^*J) - P_{\mathcal{H}_0^a})f\| &= \|\lim_{t\to\pm\infty} e^{iA_0t}J^*Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}f - P_{\mathcal{H}_0^a}f\| \\ &= \|\lim_{t\to\pm\infty} e^{iA_0t}(J^*J - I)e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}f\| \\ &= \lim_{t\to\infty}\|e^{iA_0t}\|\|(J^*J - I)e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}f\| \\ &= 0\end{aligned}$$

entonces $\widetilde{W}_{\pm}(A_0, A_0, J^*J) = P_{\mathcal{H}_0^a}$, con lo cual

$$\widetilde{W}_{\pm}^*(A, A_0, J)\widetilde{W}_{\pm}(A, A_0, J) = P_{\mathcal{H}_0^a}.$$

$\square$

Teorema 124. *Si los operadores de onda débiles $\widetilde{W}_{\pm}$ existen y son isométricos sobre $\mathcal{H}_0^a$ y $\|J\| \leq 1$, entonces existen $W_{\pm}$.*

Demostración. La prueba es análoga al teorema 122, donde $\|J\| \leq 1$ implica que $J^*J - I$ es negativo. $\square$

Definición 125. *El operador de onda local para A_0, A, J y un conjunto de Borel $\Delta \subset \mathbb{R}$ es el operador*
$$W_\pm(A, A_0, J, \Delta) := \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} \left(e^{iAt} J e^{-iA_0 t} P_{\mathcal{H}_0^a} E_{A_0}(\Delta) \right),$$
a su vez, para $\Delta_0, \Delta \subset \mathbb{R}$ conjuntos de Borel el operador de onda local se define por
$$\widetilde{W}_\pm(A, A_0, J, \Delta, \Delta_0) := \underset{t\to\pm\infty}{w\text{-}\lim} E_A(\Delta) P_{\mathcal{H}^a} e^{iAt} J e^{-iAt} P_{\mathcal{H}_0^a} E_{A_0}(\Delta_0).$$

Como $P_{\mathcal{H}_0^a}$ se puede escribir en términos de E_{A_0}, tenemos que $P_{\mathcal{H}_0^a}$ y $E_{A_0}(\Delta)$ conmutan; por lo que si $\widetilde{J} = JE_{A_0}(\Delta)$ tenemos
$$W_\pm(A, A_0, J, \Delta) = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim} (e^{iAt} J E_{A_0}(\Delta) e^{-iA_0 t} P_{\mathcal{H}_0^a}) = W_\pm(A, A_0, \widetilde{J});$$

análogamente
$$\widetilde{W}_\pm(A, A_0, J, \Delta, \Delta_0) = W_\pm(A, A_0, E_A(\Delta) J E_{A_0}(\Delta_0)).$$
Si tomamos φ de manera que $\varphi(A) = E_A(\tilde{\Delta})$ y $\varphi(A_0) = E_{A_0}(\tilde{\Delta})$, calculamos
$$\begin{aligned} &\underset{t\to\pm\infty}{w\text{-}\lim} \left(E_A(\Delta) P_{\mathcal{H}^a} e^{iAt} J e^{-iA_0 t} P_{\mathcal{H}_0^a} E_{A_0}(\Delta) \right) E_{A_0}^2(\Delta) = \\ &\qquad = E_A(\Delta_0) \underset{t\to\pm\infty}{w\text{-}\lim} \left(E_A(\Delta) P_{\mathcal{H}^a} e^{iAt} J e^{-iA_0 t} P_{\mathcal{H}_0^a} E_{A_0}(\Delta) \right) E_{A_0}(\Delta) \\ &\qquad = \underset{t\to\pm\infty}{w\text{-}\lim} E_A(\Delta \cap \Delta_0) P_{\mathcal{H}^a} e^{iAt} J e^{-iA_0 t} P_{\mathcal{H}_0^a} E_{A_0}(\Delta \cap \Delta_0) \end{aligned}$$

por lo tanto $\widetilde{W}_\pm(A, A_0, J, \Delta, \Delta_0) = \widetilde{W}_\pm(A, A_0, J, \Delta \cap \Delta_0)$.

2.4. Completitud del operador de onda

En esta subsección asumiremos la existencia del operador de onda, a su vez, si $f \in \operatorname{ran}(W_\pm)$, entonces existe $f_0^0 \in \mathcal{H}_0$ (con $f = W_\pm f_0$) tal que cumple
$$\lim_{t\to\pm\infty} \| e^{-iAt} f_0 - J e^{-iA_0 t} f_0^0 \| = 0$$

Recordemos que un operador de onda $\underline{W_\pm(A, A_0}, J)$ es completo si $\ker(W_\pm) = \mathcal{H}_0^s$ y $\operatorname{ran}(W_\pm) = \mathcal{H}^a$. Si además $\operatorname{ran}(W_\pm) = \overline{\operatorname{ran}(W_\pm)}$ entonces $W_\pm \restriction_{\mathcal{H}_0^a}$ es continuamente invertible.

Proposición 126. *Si ker$(W_\pm) = \mathcal{H}_0^s$ y $\overline{ran(W_\pm)} = \mathcal{H}^a$, entonces A_0^a es unitariamente equivalente a A^a.*

Proposición 127. *Si $W_\pm$ son isométricos y $ran(W_\pm) = \overline{ran(W_\pm)}$ entonces*
$$W_\pm^* W_\pm = P_{\mathcal{H}_0^a} \quad y \quad W_\pm W_\pm^* = P_{\mathcal{H}^\pm};$$

si además $W_\pm$ es completo se sigue $W_\pm W_\pm^* = P_{\mathcal{H}^a}$.

Teorema 128. *Si $W_\pm(A_1, A_0, J_0)$ y $W_\pm(A, A_1, J_1)$ son completos entonces $W_\pm(A, A_0, J_1J_0)$ es completo.*

Teorema 129. *Sea $J_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ tal que*

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-lím}}(J_1J - I)e^{-iA_0t}P_0 = 0,$$

entonces para toda $f \in \mathcal{H}_0$

$$\|P_0 f\| \leq \|J_1\|\|W_\pm f\|.$$

Teorema 130. *Supongamos que $J_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ tal que*

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-lím}}(J_1J - I)e^{-iA_0t}P_0 = 0.$$

$W_\pm(A, A_0, J)$ es completo si y sólo si existe $W_\pm(A_0, A, J_1)$ y satisface

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-lím}}(JJ_1 - I)e^{-iAt}P_{\mathcal{H}^a} = 0, \tag{2.10}$$

en este caso $W_\pm(A_0, A_1, J_1)$ también es completo.

Demostración. Supongamos que $W_\pm(A_0, A_1, J_1)$ existe y se cumple (2.10), por el teorema 128 $\|P_{\mathcal{H}^a} f\| \leq \|J\|\|W_\pm(A_0, A, J_1)\|$, entonces $W_\pm(A_0, A, J_1)$ es continuamente invertible y $\operatorname{ran}(W_\pm(A_0, A, J_1)) = \overline{\operatorname{ran}(W_\pm(A_0, A, J_1))}$, por lo que $\ker(W_\pm(A_0, A, J_1)) = \{0\}$ y $\overline{\ker(W_\pm(A_0, A, J_1)) = \mathcal{H}^s}$.
Como $\overline{\operatorname{ran}(W_\pm(A, A_0, J_1))} \subset \mathcal{H}^a$, basta probar que $\ker(W_\pm^*(A, A_0, J)) \subset \mathcal{H}^s$. Tenemos $W_\pm(A, A_0, J)W_\pm(A_0, A, J_1) = W \pm (A, A, JJ_1)$, como

$$W_\pm(A, A, JJ_1) = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-lím}} e^{iAt}JJ_1e^{-iAt}P_{\mathcal{H}^a}$$

y por (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned}
&W_\pm(A, A, JJ_1) = P_{\mathcal{H}^a} \\
\Longrightarrow &W_\pm(A, A_0, J)W_\pm(A_0, A, J_1) = P_{\mathcal{H}^a} \\
\Longrightarrow &W_\pm^*(A_0, A, J_1)W_\pm^*(A, A_0, J) = P_{\mathcal{H}^a},
\end{aligned}$$

si $f \in \ker(W_\pm^*(A, A_0, J))$ entonces $P_{\mathcal{H}^a} f = 0$, con lo cual $f \in \mathcal{H}^s$ y por lo tanto $\overline{\operatorname{ran}(W_\pm(A, A_0, J))} = \mathcal{H}^a$.
Análogamente $W_\pm(A, A_0, J)$ existe, así $W_\pm(A_0, A, J_1)$ es completo.
Supongamos ahora que $W_\pm(A, A_0, J)$ es completo, si $f \in \mathcal{H}^a$, entonces

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|e^{-iAt}f - Je^{-iA_0t}P_0 f\| = 0$$

por lo que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|e^{iA_0t}J_1e^{-iAt}f - e^{iA_0t}J_1Je^{-iA_0t}P_0 f\| = 0,$$

entonces $e^{iA_0t}J_1Je^{-iA_0t}P_0f \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} P_0f$. Así, $e^{iA_0t}J_1e^{-iAt}f \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} P_0f$ si y solo si existe $W_\pm(A_0, A, J_1)$. Ahora veamos

$$\begin{aligned} &\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(J_1J - I)e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = 0 \\ \Longrightarrow &\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(J_1J - I)Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = 0, \end{aligned}$$

como $\|Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a}f - e^{-iAt}f\| \to 0$ cuando $t \to \pm\infty$ entonces

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\|(JJ_1 - I)e^{-iAt}f\| = 0.$$

□

Si tenemos dos operadores $J_1, \tilde{J}_1$ que satisface (2.10) entonces $J_1J \sim I$ con respecto a A_0 y $\tilde{J}_1J \sim I$ con respecto a A_0. Con lo anterior tenemos que $J_1J \sim \tilde{J}_1J$ con respecto a A_0, es decir,

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(J_1J - \tilde{J}_1J)e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(J_1 - \tilde{J}_1)Je^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = 0,$$

entonces

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(J_1 - \tilde{J}_1)e^{-iAt}P_{\mathcal{H}^a} = 0.$$

Por lo tanto $J_1 \sim \tilde{J}_1$ con respecto a A.
Supongamos que J es continuamente invertible y tomamos $J_1 := J^{-1}$, bajo la hipótesis (2.10) podemos ver que $W_\pm(A, A_0, J)$ es completo si y sólo si $W_\pm(A_0, A, J^{-1})$ es completo.

Teorema 131. *Supongamos que $W_\pm(A, A_0, J)$ existe y satisface*

$$\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(J^*J - I)e^{-iA_0t}P_{\mathcal{H}_0^a} = 0. \tag{2.11}$$

$W_\pm(A, A_0, J)$ es completo si y solo si $W_\pm(A_0, A, J^*)$ existe y $\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}(JJ^* - I)e^{-iAt}P_{\mathcal{H}^a} = 0$.

Demostración. Si se satisface la ecuación (2.11) entonces $W_\pm(A, A_0, J)$ es isométrico, así

$$W_\pm^*(A, A_0, J)W_\pm(A, A_0, J) = P_{\mathcal{H}^a} \quad \text{y} \quad W_\pm^*(A, A_0, J)W^*(A, A_0, J) = P_{\mathcal{H}^\pm}.$$

Si $W_\pm(A_0, A, J^*)$ existe, entonces $W_\pm(A_0, A, J^*) = W_\pm^*(A, A_0, J)$; la condición $\ker(W_\pm) = \mathcal{H}_0^s$ es equivalente a $\overline{\operatorname{ran}(W_\pm^*)} = \mathcal{H}_0^a$, mientras que la condición $\overline{\operatorname{ran}(W_\pm)} = \mathcal{H}^a$ es equivalente a $\ker(W_\pm^*) = \mathcal{H}^s$; por lo que si existen $W_\pm(A, A_0, J)$ y $W_\pm(A_0, A, J^*)$, entonces $W_\pm(A, A_0, J)$ es completo si y solo si $\overline{\operatorname{ran}(W_\pm(A_0, A, J^*))} = \mathcal{H}_0^a$ y $\ker(W_\pm(A_0, A, J^*)) = \mathcal{H}^s$. □

2.4.1. Operador de dispersión

Definición 132. *Si los operadores de onda $W_\pm$ existen, definimos el operador de dispersión*

$$S := W_+^*(A, A_0, J)W_-(A, A_0, J)$$

En la definición previa tenemos $\mathcal{H}_0^s \subset \ker(W_-)$ y $\mathcal{H}_0^a \supset \overline{\operatorname{ran}(W_+^*)}$, entonces $S(\mathcal{H}_0^a) \subset \mathcal{H}_0^a$.

Teorema 133. *S conmuta con A_0.*

Demostración. Como $AW_\pm = W_\pm A_0$ y $W_\pm^* A = A_0 W_\pm^*$ entonces

$$SA_0 = W_+^* W_- A_0 = W_+^* A W_- = A_0 W_+^* W_- = A_0 S.$$

Sabemos que $\|W_\pm f\| \leq \|J\| \|P_{\mathcal{H}_0^a} f\|$, entonces $\|S\| \leq \|J\|^2$, por lo que S es un operador acotado que conmuta con A_0. □

Teorema 134. *Sean $W_\pm$ isométricos. S es isométrico si y sólo si ran$(W_-) \subset$ ran(W_+).*

Demostración. Para un operador isométrico W_-, la igualdad $\|Sf\| = \|f\|$ sucede si y solo si $\|W_+^* g\| = \|g\|$ para cualquier $g \in \operatorname{ran}(W_-)$. Por otra parte, W_+ es isométrico si y sólo si $\|W_+^* g\| = \|g\|$ para toda $g \in \operatorname{ran}(W_+)$. Como $\operatorname{ran}(S) = \mathcal{H}_0^a$ entonces para cada $g \in \mathcal{H}_0^a$ este se puede representar como $g = W_+^* W_- f$ o $W_+ g = P_+ W_- f$ donde $P_+ = W_+ W_+^*$ es la proyección ortogonal sobre $\operatorname{ran}(W_+)$. Por lo tanto $\operatorname{ran}(S) = \mathcal{H}_0^a$ si y sólo si para cualquier $h_+ \in \operatorname{ran}(W_+)$ existe $h_- \in \operatorname{ran}(W_-)$ tal que $h_+ = P_+ h_-$. □

Vamos a considerar la descomposición del subespacio $\mathcal{H}_0^a$ en una integral directa de la forma

$$\mathcal{H}_0^a \leftrightarrow \int_{\hat{\sigma}_0} \bigoplus G(\lambda) d\lambda, \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}(\mathcal{H}_0).$$

Dado que el operador de dispersión S conmuta con A_0, si S es un operador que puede descomponerse, entonces $S(\lambda) = S(\lambda, A, A_0, J)$ lo llamamos matriz de dispersión.

Criterio de Cook

En la prueba de la existencia del operador de onda se considera de manera sistemática que es suficiente verificar la convergencia en 103 para un subconjunto denso en $\mathcal{H}_0$ o en $\mathcal{H}_0^a$. La siguiente condición es suficiente para demostrar la existencia de los operadores de onda y es conocida como el criterio de Cook.

Teorema 135. *Supongamos que el operador J toma el dominio dom(A_0) y es tal que $J(\text{dom}(A_0)) = \text{dom}(A)$. Si existe $D_0 \subset \text{dom}(A_0) \cap \mathcal{H}_0^a$ denso en $\mathcal{H}_0^a$ tal que para toda $f \in D_0$*

$$\int_0^{\pm\infty} \|(AJ - JA_0)e^{-iA_0 t} f\| dt < +\infty,$$

entonces $W_\pm(A, A_0, J)$ existe.

Demostración. Sean $w_\pm(t) = e^{iAt} J e^{-iA_0 t}$ y $w'_\pm(t) = e^{iAt}(AJ - JA_0)e^{-iA_0 t}$ donde estamos ocupando que $J(\operatorname{dom}(A_0)) = \operatorname{dom} A$ y $e^{iAt} = \varphi(A)$ con $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, E)$; entonces $\displaystyle\int_0^{\pm\infty} \|w'_\pm(t)\| dt < +\infty$ por lo que $\displaystyle\int_\alpha^{\pm\infty} \|w'_\pm(t)\| dt \to 0$ cuando $\alpha \to \pm\infty$, entonces

$$\left\| \int_\alpha^{\pm\infty} w' \pm (t) dt \right\| \to 0 \quad \text{cuando } \alpha \to \pm\infty,$$

por lo tanto $\|w_\pm(\alpha) - c\| \to 0$ cuando $\alpha \to \pm\infty$. □

Para aplicar el criterio anterior se debe conocer la evolución dada por el operador libre A_0. La ventaja es que no necesitamos conocer la evolución temprana dada por el operador A.

Definición 136. *Sean $A = A^*$, denotamos por $R(\mathcal{H}) := \left\{ f \in \mathcal{H}^a | \lambda\text{-}\sup \dfrac{d\mu_f}{d\lambda} < \infty \right\}$ donde $\mu_f(\partial) = \langle f, E(\partial) f \rangle$. Definimos*

$$r_f := \lambda\text{-}\sup \frac{d\mu_f}{d\lambda}.$$

Teorema 137.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\langle g, e^{-iAt} f \rangle|^2 dt \leq r_f \|P_a g\|^2.$$

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle g, e^{-iAt} f \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} d\mu_{f,g}(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} \frac{d\mu_{f,g}}{ds}(s) ds \end{aligned}$$

por la identidad de Parseval tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\langle g, e^{-iAt} f \rangle|^2 dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d\mu_{f,g}(\lambda)}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_f(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\mu_g(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \\ &\leq r_f \|P_a g\|^2, \qquad f \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

□

Teorema 138. $\overline{R(\mathcal{H})} = \mathcal{H}^a$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}^a$, consideramos a los siguientes conjuntos $X_N := \left\{ x \in \mathbb{R} | \dfrac{d\mu_f}{d\lambda}(x) < N \right\}$, $Y_N := \mathbb{R} \setminus X_N$ y $Y_\infty := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} Y_N$. Sea $f_N := E(X_N) f$; dado que

$$\mu_{f_N}(\partial) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{X_N} d\mu_f \Rightarrow \frac{d\mu_{f_N}}{d\lambda} = \chi_{X_N} \frac{d\mu_f}{d\lambda},$$

se sigue que $f_N \in R(\mathcal{H})$. Calculamos

$$\|f_N - f\| = \|E(X_N) f - I f\| = \|(E(X_N) - I) f\| = \|E(Y_N) f\|,$$

como f es absolutamente continua entonces μ_f es absolutamente continua, por lo que $\lambda(Y_N) \to 0$ cuando $N \to \infty$; por lo tanto $\|E(Y_N) f\| \to 0$ cuando $N \to \infty$. □

Principio de Invarianza de Birman

Sea $(X, \mathscr{A}, E)$ un espacio medible y E una medida espectral, sea $\varphi : X \to \mathbb{C}$ una función y $Z = \varphi(X)$, tomamos

$$\mathscr{A}' := \left\{\partial \subset Z | \varphi^{-1}(\partial) \in \mathscr{A}\right\};$$

como $E : \mathscr{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$, tomamos $E'(\partial) = E(\varphi^{-1}(\partial))$; entonces el espacio $(Z, \mathscr{A}, E')$ es un espacio con medida espectral y

$$\psi \in S(Z, E') \Longleftrightarrow (\psi \circ \varphi) \in S(X, E).$$

Además se cumple que

$$\int_Z \psi dE' = \int_X \psi \circ \varphi dE.$$

Supongamos que $T = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi dE$ y sea E_T su descomposición espectral, entonces $E_T(\partial) = E(\varphi^{-1}(\partial))$. Sea M un soporte boreliano de E, esto es, $E(\mathbb{R} \setminus M) = 0$; sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un subconjunto abierto tal que $\lambda(M \setminus \Omega) = 0$ y $\lambda(\varphi(M \setminus \Omega)) = 0$ (con φ medible).

Supongamos $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ donde Ω_n son intervalos ajenos. Sea $\Omega_0 := M \setminus \Omega$, definimos $\mathcal{H}^n := E(\Omega_n)(\mathcal{H})$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como Ω_n son ajenos se sigue que $\mathcal{H}^n$ reduce a A. Si $A^n = A \restriction_{\mathcal{H}^n}$ se tiene que

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus A^n, \qquad \mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus \mathcal{H}^n, \qquad \varphi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus \varphi(A^n).$$

Teorema 139. *Sea $\varphi \in S(X, E_{A_0}) \cap S(X, E_A)$ tal que*

1. *φ es absolutamente continua.*
2. *$\varphi'(\lambda) > 0$ λ-c.s. o $\varphi'(\lambda) < 0$ λ-c.s.*
3. *φ es tal que para un soporte boreliano M y Ω un conjunto abierto, se satisfacen $\lambda(\varphi(M \setminus \Omega)) = 0$ y $\lambda(M \setminus \Omega) = 0$*

entonces $\mathcal{H}_A^a = \mathcal{H}_{\varphi(A)}^a$.

Demostración. Sea Γ un intervalo en Ω_n, entonces

$$\lambda(\varphi(\Gamma)) = \left| \int_\Gamma \varphi'(\lambda) d\lambda \right| = \int_\Gamma |\varphi'(\lambda)| d\lambda$$

ya que φ cuenta con 1 y 2 de las hipótesis. Si $\lambda(\Gamma) = 0$ entonces $\lambda(\varphi(\Gamma)) = 0$. Además, si $\lambda(\varphi(\Gamma)) = 0$ entonces $\displaystyle\int_\Gamma |\varphi'(\lambda)| d\lambda = 0$, por lo que se sigue fácilmente que $\varphi'(\lambda) = 0$ λ-c.s. en Γ, es decir, $\lambda(\Gamma) = 0$ (porque se cumple la condición 2 de las hipótesis). De lo anterior tenemos que $\lambda(\Gamma)=0$ si y sólo si $\lambda(\varphi(\Gamma))=0$. Dado $\partial\subset\Omega_n$ se sigue que $\lambda(\partial)=0$ si y sólo si $\lambda(\varphi(\partial))=0$. Si $f\in\mathcal{H}_A^a$ entonces $\langle f,E_A(\cdot)f\rangle$ es absolutamente continua; también tenemos

$$\langle f,E_A(\partial)f\rangle=\langle f,E_{\varphi(A)}(\varphi^{-1}(\partial))f\rangle,\qquad \partial\subset\Omega_n.$$

Suponiendo $\lambda(\varphi(\Omega))=0$ se sigue que $\langle f,E_A(\varphi^{-1}(\partial))f\rangle=0$ y por lo tanto $f\in\mathcal{H}^a_{\varphi(A)}$. Análogamente se puede probar que si $f\in\mathcal{H}^a_{\varphi(A)}$ entonces $f\in\mathcal{H}^a_A$. $\square$

Teorema 140. *Supongamos que A y A_0 son operadores autoadjuntos y $\varphi\in S(\mathbb{R},E_A)\cap S(\mathbb{R},E_{A_0})$. Supongamos además que φ satisface las tres condiciones del teorema 139 donde M es un soporte boreliano para E_A y E_{A_0}. Si existe $W_\pm(A,A_0,J,\Omega_\nu)$ entonces existe $W_\pm(\varphi(A),\varphi(A_0),JE_{A_0}(\Omega_\nu))$ donde $\nu=" + "$ o $\nu=" - "$ y $\Omega_+=\bigcup_{n:\varphi'>0}\Omega_n$, $\Omega_-=\bigcup_{n:\varphi'<0}\Omega_n$; además $W_\pm(A,A_0,J,\Omega_+)=W_\pm(\varphi(A),\varphi(A_0),JE_{A_0}(\Omega_+))$ y $W_\pm(A,A_0,J,\Omega_-)=W_\mp(\varphi(A),\varphi(A_0),JE_{A_0}(\Omega_-))$ si y sólo si*

$$s\text{-}\lim_{t\to\pm\nu\infty}(W_\pm(A,A_0,J,\Omega_\nu)-J)e^{-i\varphi(A_0)t}E_{A_0^a}(\Omega_\nu)=0. \tag{2.12}$$

Demostración. Como $e^{-i\varphi(A)t}W_\pm(A,A_0,J,\Omega_\nu)=W_\pm(A,A_0,J,\Omega_\nu)e^{-i\varphi(A_0)t}$ la ecuación (2.12) es equivalente a

$$s\text{-}\lim_{t\to\pm\nu\infty}(W_\pm(A,A_0,J,\Omega_\nu)-e^{i\varphi(A)t}Je^{-i\varphi(A_0)t})E_{A_0^a}(\Omega_\nu)=0.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}(W_\pm(A,A_0,J,\Omega_+)e^{-i\varphi(A_0)t}-Je^{-i\varphi(A_0)t})E_{A_0^a}(\Omega_+)&=\\ &=(e^{-i\varphi(A)t}W_\pm(A,A_0,J,\Omega_+)-Je^{-i\varphi(A_0)t})E_{A_0^a}(\Omega_+)\\ &=e^{-i\varphi(A)t}(W_\pm(A,A_0,J,\Omega_+)-e^{i\varphi(A)t}Je^{-i\varphi(A_0)t})E_{A_0^a}(\Omega_+)\end{aligned}$$

tomando el límite tenemos que $s\text{-}\lim_{t\to\infty}(W_\pm(A,A_0,J,\Omega_+)-e^{i\varphi(A)t}Je^{-i\varphi(A_0)t})E_{A_0^a}(\Omega_+)=0$, entonces $s\text{-}\lim_{t\to\infty}(e^{i\varphi(A)t}Je^{-i\varphi(A_0)t})E_{A_0^a}(\Omega_+)=W_\pm(A,A_0,J,\Omega_+)$. $\square$

Apéndice

2.5. Espacios de Hilbert

En esta sección asumiremos que el campo escalar es $\mathbb{C}$ a menos que se especifique lo contrario.

Definición 141. ***[Espacios con producto interno].*** *Un espacio complejo con producto interno es un espacio vectorial L con campo escalar $\mathbb{C}$ y con un producto interno definido sobre todo L; donde un producto interno sobre L es una función definida sobre $L \times L$ a $\mathbb{C}$, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que cumple:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \to \mathbb{C}$$

(IP1) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \quad (\forall f, g \in L)$

(IP2) $\langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle \quad (\forall \alpha \in \mathbb{C})$

(IP3) $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle \quad (\forall f, g_1, g_2 \in L)$

(IP4) $\langle f, f \rangle \geq 0 \quad (\forall f \in L)$

(IP5) $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$

la igualdad en (IP1) se le conoce como la propiedad Hermitiana del producto interior, además, por (IP2) y (IP3) el producto interior es lineal respecto a la segunda variable. De (IP1), (IP2) y (IP3) se sigue que el producto interior es anti linear con respecto a la primera variable, es decir

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \bar{\alpha_1} \langle f_1, g \rangle + \bar{\alpha_2} \langle f_2, g \rangle \quad (\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C})(\forall f_1, f_2, g \in L)$$

Lema 142. ***[Desigualdad de Schwarz].*** *Sea L un espacio vectorial con producto interno complejo; tenemos*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \tag{2.13}$$

Demostración. Sean $f, g \in L$ y $\beta, \alpha \in \mathbb{C}$, tenemos

$$0 \leq \|\alpha f - \beta g\|^2 = |\alpha| \langle f, f \rangle - \bar{\alpha} \beta \langle f, g \rangle + \alpha \bar{\beta} \overline{\langle f, g \rangle} + |\beta|^2 \langle g, g \rangle$$

en particular, si $\alpha = \overline{\langle f, g \rangle}$ y $\beta = \langle f, f \rangle$ se sigue

$$\langle f, f \rangle \left[\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle - |\langle f, g \rangle|^2 \right] \geq 0,$$

por (IP4) y (IP5) tenemos $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$. $\square$

Proposición 143. *Un producto interior sobre L define una norma sobre L dada por*

$$\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

Demostración. Por la propiedad $(IP4)$ se sigue $\|f\| \geq 0$ para toda $f \in L$; más aún, de las propiedades (IP4) y (IP5) se sigue $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f \in L$, como el producto interior es antilinear y por (IP2) tenemos $\langle \lambda f, \lambda f\rangle = |\lambda|^2\langle f, f\rangle$, así $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$. Finalmente, para demostrar la desigualdad del triángulo calculamos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\
&= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f, g\rangle + \|g\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g\rangle| + \|g\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + |g\|^2 \qquad \text{(por 2.13)} \\
&= (\|f\| + \|g\|)^2
\end{aligned}$$

por lo que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. □

Definición 144. ***[Espacio de Hilbert].*** *Un espacio vectorial con producto interno tal que es completo bajo la norma definida en la proposición 143 se le llama espacio de Hilbert. A un espacio de Hilbert lo denotaremos de manera usual por $\mathcal{H}$. A menos que se indique lo contrario, trabajaremos con espacios de Hilbert separables.*

Definición 145. *Sea H un espacio de Hilbert y $M \leq H$ un subespacio. Definimos $M^{\perp} = \{x \in H | \langle x, m\rangle = 0 \ \forall m \in M\}$.*
Denotamos por $x \perp y$ si $\langle x, y\rangle = 0$ con $x, y \in H$.

Definición 146. *Sea H un espacio de Hilbert y T un operador lineal definido en su dominio $\mathcal{D}(T)$, que es un subespacio de H. Un operador T en H se dice no acotado si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ y un escalar $M > 0$ tales que $\|x_n\| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pero $\|Tx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.*

Definición 147. *La gráfica $\mathcal{G}(T)$ de un operador T en H es el subespacio de $H \times H$ que consiste de todas las parejas ordenadas $\{x, Tx\}$, donde $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Definición 148. *S es una extensión de T (esto es $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ y $Sx = Tx \, \forall x \in \mathcal{D}(T)$) si y sólo si $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$. Lo denotamos por*

$$T \subset S.$$

Definición 149. *Un operador cerrado en H es un operador cuya gráfica es un subespacio cerrado de $H \times H$.*

Definición 150. *Sea $T : \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal definido densamente en H un espacio de Hilbert (esto es, $\mathcal{D}(T)$ es denso en H). Denotamos por $\mathcal{D}(T^*)$ al conjunto de todos los $y \in H$ tales que $\langle Tx, y\rangle$ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{D}(T)$. El adjunto T^* de T es el operador dado por*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad (x \in \mathcal{D}(T), y \in \mathcal{D}(T^*)).$$

Definición 151. *Un operador T en H es simétrico si*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \text{con } x \in \mathcal{D}(T), y \in \mathcal{D}(T).$$

Si $T = T^*$, entonces a T se le llama autoadjunto.

Definición 152. *El conjunto resolvente de un operador T en H es el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ es un mapeo inyectivo de $\mathcal{D}(T)$ hacia H cuya función inversa pertenece a $\mathcal{B}(H)$.*

Definición 153. *El espectro de T es el complemento del conjunto resolvente de T, el cual lo denotaremos por $\sigma(T)$.*

Teorema 154. *Supongamos que E es una resolución de la identidad sobre Ω, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ medible y $\omega_\alpha = \{p \in \Omega | f(p) = \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, entonces:*

(a) Si α está en el rango esencial de f y $E(\omega_\alpha) \neq 0$, entonces $\Phi(f) - \alpha I$ no es inyectiva.

(b) Si α está en el rango esencial de f pero $E(\omega_\alpha) = 0$, entonces $\Phi(f) - \alpha I$ es un mapeo inyectivo de $\mathcal{D}_f$ sobre un subespacio propio de H que a su vez es denso; y existen vectores $x_n \in H$ con $\|x_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi(f)x_n - \alpha x_n] = 0.$$

(c) $\sigma(\Phi(f))$ es el rango esencial de f.

Demostración. Ver [4] Teorema 13.27, página 346. $\square$

Definición 155. *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador lineal T en H (no necesariamente acotado) se dice normal si T es cerrado, está densamente definido en H y cumple*

$$T^*T = TT^*.$$

Definición 156. *Sea N un operador normal en H. Decimos que N es maximal normal si dada M una extensión de N $(N \subset M)$ con M normal, entonces $M = N$.*

Teorema 157. *Si N es un operador normal en H, entonces:*

(a) $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*)$

(b) $\|Nx\| = \|N^*x\|$ para cada $x \in \mathcal{D}(N)$ y

(c) N es maximal normal.

Demostración. Ver [4] Teorema 13.32, página 350. $\square$

2.6. El adjunto de un operador

Teorema 158. *(El adjunto de un operador). Dado $T \in \mathcal{B}(H)$, existe un único $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \, \forall\, x, y \in H$. Además $\|T\| = \|T^*\|$; a T^* se le llama el operador adjunto de T.*

Demostración. Sea $f(x, y) = \langle Tx, y\rangle$. Claramente f es sesquilineal y además, si $\|x\| = \|y\| = 1$ entonces $|f(x, y)| \leq \|Tx\|\|y\| = \|Tx\|$. Como $\|x\| = 1$ se tiene también que $\|Tx\| \leq \|T\|$, por lo tanto f está acotada. Por el Teorema de Riesz existe una única $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Concluimos

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle| \,\big|\, \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, T^*y\rangle| \,\big|\, \|x\| = \|y\| = 1\} = \|T^*\|.\end{aligned}$$

□

Proposición 159. *Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. Entonces se cumple lo siguiente:*

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*, (ST)^* = T^*S^*, (T^*)^* = T, \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Demostración. $\langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)^*y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$ por lo que debido a la unicidad $(ST)^* = T^*S^*$.
Sea y con $\|y\| = 1$, calculamos:

$$\begin{aligned}\|Ty\|^2 = |\langle Ty, Ty\rangle| &= |\langle y, T^*Ty\rangle| \\ &\leq \|y\|\|T^*Ty\| \\ &= \|T^*Ty\| \\ &\leq \|T^*T\|.\end{aligned}$$

Entonces $\|Ty\| \leq \sqrt{\|T^*T\|}\, \forall y \in H$ con $\|y\| = 1$. Tomando el supremo sobre y obtenemos:

$$\|T\| \leq \sqrt{\|T^*T\|} \text{ o bien } \|T\|^2 \leq \|T^*T\|. \tag{2.14}$$

Por otro lado, para toda y con $\|y\| = 1$, $\|T^*Ty\| \leq \|T^*\|\|Ty\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$, tomando nuevamente el supremo sobre y tenemos que:

$$\|T^*T\| \leq \|T\|^2. \tag{2.15}$$

De (2.14) y (2.15) obtenemos $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
Las propiedades restantes se comprueban fácilmente. □

Proposición 160. *Para todo $A, B \in \mathcal{B}(H), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

Demostración. $\|AB(x)\| \leq \|A\|\|B(x)\| \leq \|A\|\|B\|\|x\| \,\forall x \in H$, por lo tanto $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. □

Teorema 161. *Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ n operadores normales no acotados que conmutan entre sí (es decir, $B_iB_j \subset B_jB_i \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ con $i \neq j$) definidos en un espacio de Hilbert H. Supongamos que sus resoluciones de la identidad son $E_1, E_2, \ldots, E_n$ respectivamente. Sea $\lambda_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ la j-ésima proyección de $\zeta \in \mathbb{C}^n$ (si $\zeta = (z_1, z_2, \ldots, z_j, \ldots, z_n)$, entonces $\lambda_j(\zeta) = z_j$). Entonces, existe una resolución de la identidad $E \equiv E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{B}(H)$ tal que:*

$$\langle B_i x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle$$

para toda $i \in \{1,\ldots,n\}, \forall y \in H, \forall x \in Dom(B_i)$; en donde estamos considerando $\langle E(\cdot)x, y\rangle : \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ tal que $\omega \longmapsto \langle E(\omega)x, y\rangle$.

Demostración. Como $Dom(B_iB_j) \subset Dom(B_jB_i)$ y $B_iB_jx = B_jB_ix \; \forall x \in Dom(B_iB_j)$, $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ con $i \neq j$ se sigue que sus resoluciones de la identidad conmutan entre sí. Proponemos la resolución de la identidad. Para todo $x, y \in Dom(B_i)$; por la identidad de polarización tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big[\int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x+y), x+y\rangle \\ - \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x-y), x-y\rangle + i\Big(\int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x+iy), x+iy\rangle \\ - \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x-iy), x-iy\rangle\Big)\Big]\end{aligned}$$

La ecuación anterior es igual a

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}\Big[\int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x+y), x+y\rangle - \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + i\Big(\int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x+iy), x+iy\rangle - \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x-iy), x-iy\rangle\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{4}\big[\langle B_i(x+y), x+y\rangle - \langle B_i(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + i(\langle B_i(x+iy), x+iy\rangle - \langle B_i(x-iy), x-iy\rangle)\big] \\ &= \langle B_i x, y\rangle\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x \in Dom(B_i), y \in H$. Como $Dom(B_i)$ es denso en H, existe una sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset Dom(B_i)$ que converge a y. Entonces

$$\begin{aligned}\langle B_i x, y\rangle &= \lim_{m\to\infty} \langle B_i x, y_m\rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y_m\rangle.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Supongamos también que g es medible y acotada con dominio $\mathbb{C}^n$ y rango los complejos.

Definimos un operador tal que $\Big\langle \int_{\mathbb{C}^n} gdEx, y\Big\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} gd\langle E(\cdot)x, y\rangle$. Entonces se cumple:

$$\Big|\Big\langle \int_{\mathbb{C}^n} gdEx, y\Big\rangle\Big| = \Big|\int_{\mathbb{C}^n} gd\langle E(\cdot)x, y\rangle\Big| \leq \Big\|\int_{\mathbb{C}^n} gdEx\Big\|\|y\|$$

$$\text{y también } \Big\|\int_{\mathbb{C}^n} gdEx\Big\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |g|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \text{ (por el Teorema ??).}$$

Por lo tanto $\Big|\int_{\mathbb{C}^n} gd\langle E(\cdot)x, y\rangle\Big| \leq \|y\|\Big(\int_{\mathbb{C}^n} |g|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2}$.

Sea $\nu_R = \mathrm{Re}(\langle E(\cdot)x, y\rangle)$ y sea $\nu_I = \mathrm{Im}(\langle E(\cdot)x, y\rangle)$. Sean C_R y D_R los conjuntos ν_R-positivo y ν_R-negativo de la descomposición de Hahn[1] de la medida con signo ν_R y sean C_I y D_I los equivalentes para la medida ν_I.

Sea f una función medible con dominio $\mathbb{C}^n$ y rango los complejos y cuadrado integrable con respecto a la medida $\langle E(\cdot)x, x\rangle$, sea $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones acotadas y medibles que converge a f y tal que $|f_m| \leq f$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Calculamos

$$\begin{aligned}\Big|\int \chi_{C_R}|f_m|d\nu_R\Big| &= \Big|Re\Big(\int \chi_{C_R}|f_m|d\langle E(\cdot)x, y\rangle\Big)\Big| \leq \Big|\int \chi_{C_R}|f_m|d\langle E(\cdot)x, y\rangle\Big| \\ &= \Big|\Big\langle \int \chi_{C_R}|f_m|dEx, y\Big\rangle\Big| \leq \Big\|\int \chi_{C_R}|f_m|dEx\Big\|\|y\| \\ &= \|y\|\Big(\int |f_m|^2\chi_{C_R} d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2} \leq \|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

De manera análoga se tiene

- $\Big|\int \chi_{D_R}|f_m|d\nu_R\Big| \leq \|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2}$
- $\Big|\int \chi_{C_I}|f_m|d\nu_I\Big| \leq \|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2}$
- $\Big|\int \chi_{D_I}|f_m|d\nu_I\Big| \leq \|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2}$

De forma que

$$\begin{aligned}\int |f_m|d\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\| &\leq 4\|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2} \\ &\leq 4\|y\|\Big(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

donde $\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\|$ es la variación de la medida compleja $\langle E(\cdot)x, y\rangle$. Por el Lema de Fatou[2] y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue[3] se sigue que:

$$\lim_{m\to\infty}\int |f_m|d\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\| = \int |f|d\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\| \leq 4\|y\|\Big(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle\Big)^{1/2}$$

[1] Libro [?], Teorema A, Página 121.
[2] Libro [13], Corolario 4.17, página 51
[3] Libro [13] Teorema 5.6, página 62

así, $f \in L_1(\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\|)$ y $\Big| \int f d\langle E(\cdot)x, y\rangle \Big| \leq 4\|y\| \Big(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \Big)^{1/2}$. Ahora, si $x \in Dom(B_i)$ entonces λ_i es el cuadrado integrable con la medida $\langle E(\cdot)x, x\rangle$, de manera que λ es el cuadrado integrable con respecto a la medida $\langle E(\cdot)x, x\rangle$. Si $\{y_m\}$ es como en (2.16), tenemos

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle - \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y_m\rangle \Big| \\ &\qquad = \Big| \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y - y_m\rangle \Big| \leq 4\|y - y_m\| \Big(\int_{\mathbb{C}^n} |\lambda_i|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \Big)^{1/2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

De esto último y de (2.16) concluimos

$$\langle B_i x, y\rangle = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y_m\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle \forall y \in H \forall x \in Dom(B_i)$$

quedando demostrada la existencia de la resolución de la identidad. $\square$

Bibliografía

[1] F., Riesz and , B. Sz. Nagy, *Functional Analysis*, from second french edition, BLACKIE & SON LIMITED, LONDON AND GLASGOW, 1956.

[2] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, First edition, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1970.

[3] Barry Simon and Michael Reed, *Methods of Modern Mathematical Physics, III: Scattering Theory*, First edition, Academic Press, Inc; London, 1979.

[4] Rudin Walter, *Functional Analysis*, First edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1921.

[5] D., R., Yafaev, *Mathematical Scattering Theory, General Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rode Island, 1991.

[6] M., S., Birman and M., Z., Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, first edition, D. Reidel Publishing Company; Dordrecht, Holland, 1987.

[7] Rudin Walter: ”Principles of Mathematical Analysis”, third edition, McGraw-Hill, Inc, New York, 1976.

[8] Rudin Walter: ”Real and complex analysis”, second edition, McGraw-Hill, Inc, New York, 1974.

[9] Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert: ”Introduction to real analysis”, second edition, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1982.

[10] Ola Bratteli, Derek William Robinson: ”Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1”, Springer, New York, 1987.

[11] Jean Dieudonné: ”History of Functional Analysis”, North-Holland, Amsterdam, New York, and Oxford, 1981.

[12] John B. Conway: ”A Course in Functional Analysis”, Springer, New York, 1985.

[13] Guillermo Grabinsky: ”Teoría de la medida”, segunda reimpresión, UNAM, Facultad de Ciencias, México, 2013.

[14] H. L. Royden: "Real Analysis", third edition, Mcmillan Publishing Company, New York, 1988.

[15] H.R. Dowson: "Spectral theory of linear operators", Academic Press Inc, London, 1978.