



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES
UNIDAD MORELIA

INESTABILIDAD DE JEANS DEBIDO A FUERZAS DE
MAREA EN REGIONES DE FORMACIÓN ESTELAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN GEOCIENCIAS

P R E S E N T A :

RAFAEL ZAVALA MOLINA

TUTORES

DR. JAVIER BALLESTEROS PAREDES
DR. MARIO RODRÍGUEZ MARTÍNEZ

ESCUELA
NACIONAL
DE ESTUDIOS
SUPERIORES

UNIDAD MORELIA

MORELIA, MICHOACÁN

JUNIO, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES, UNIDAD MORELIA
SECRETARÍA GENERAL
SERVICIOS ESCOLARES

MTRA. IVONNE RAMÍREZ WENCE
DIRECTORA
DIRECCIÓN GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
PRESENTE

Por medio de la presente me permito informar a usted que en la **sesión ordinaria 08** del **H. Consejo Técnico** de la Escuela Nacional de Estudios Superiores (ENES) Unidad Morelia celebrada el día **27 de abril del 2022**, acordó poner a su consideración el siguiente jurado para la presentación del Trabajo Profesional del alumno **Rafael Zavala Molina** adscrito a la Licenciatura en **Geociencias** con número de cuenta 418128758, quien presenta la tesis titulada: "Inestabilidad de Jeans debido a fuerzas de marea en regiones de formación estelar", bajo la dirección como **tutor** del Dr. Javier Ballesteros Paredes y como **co-tutor** el Dr. Mario Rodríguez Martínez.

El jurado queda integrado de la siguiente manera:

Presidente:	Dr. Carlos Gerardo Román Zúñiga
Vocal:	Dra. Adriana Gazol Patiño
Secretario:	Dr. Javier Ballesteros Paredes
Suplente 1:	Dr. Sinhué Amos Refugio Haro Corzo
Suplente 2:	Dra. Aina Palau Puigvert

Sin otro particular, quedo de usted.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Morelia, Michoacán a 01 de junio del 2022.

DRA. YUNUEN TAPIA TORRES
SECRETARIA GENERAL

Agradecimientos Institucionales

En primer lugar debo agradecer a la magnífica institución donde cursé mis estudios de licenciatura: la Universidad Nacional Autónoma de México. En particular, gracias a la Escuela Nacional de Estudios Superiores Unidad Morelia, al Instituto de Geofísica Unidad Michoacán y al Instituto de Radioastronomía y Astrofísica por abrirme sus puertas; escuelas e institutos donde encontré amigos, grandes maestros, conocimiento y apoyo. También gracias a la licenciatura en Geociencias. Es todo un orgullo ser de sangre azul y piel dorada. ¡Goya!

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPPIIT) por el soporte financiero mediante sus proyectos UNAM-PAPIIT-IN-111-219: *Estructura y evolución de las nubes moleculares* y UNAM-PAPIIT-IN-114-422: *Estructura y evolución de las nubes moleculares y sus cúmulos estelares*, a cargo del Dr. Javier Ballesteros Paredes; y UNAM-PAPIIT IN 118119: *Estudio del comportamiento del vTEC ionosférico durante tormentas geomagnéticas intensas del ciclo solar 24*, a cargo del Dr. Mario Rodríguez Martínez. Agradezco también al Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) por el apoyo financiero brindado con el proyecto UNAM PE: 103419, *Fotografía Científica: una herramienta para el aprendizaje situado*, así como al proyecto de Infraestructura de CONACyT INFR-2015-253691: *Propuesta para equipar el Laboratorio de Ciencias GeoEspaciales de la ENES-UNAM Unidad Morelia*, ambos a cargo del Dr. Mario Rodríguez Martínez.

Así mismo, agradezco a los integrantes de mi comité sinodal: Carlos Román, Adriana Gazol, Javier Ballesteros, Sinhué Haro y Aina Palau. A todos, gracias por aceptar revisar mi trabajo y formar parte del comité sinodal. Sus comentarios y correcciones fueron invaluable.

Agradecimientos personales

En primer lugar, debo expresar mi infinita gratitud con mi tutor de tesis. Javier, gracias por haber accedido a dirigir mi proyecto de tesis. Pese a tener una agenda saturada, casi siempre encontraste tiempo para explicarme las dudas que me surgieron, revisar mi avance y proponerme nuevos retos. En estos casi dos años bajo tu tutela he aprendido bastante del medio interestelar y la formación estelar. Eres un ejemplo para cualquiera que aspira seguir una carrera científica: gran maestro, curioso investigador, dedicado con su trabajo y comprometido con las personas cercanas. Me siento muy afortunado de haber conocido a tan extraordinaria persona.

En segundo lugar agradezco a mi co-tutor de tesis. Mario, gracias por haber sido para mí un maestro, amigo y colega a lo largo de la licenciatura. En estos cinco años pude aprender bastante de ti, me diste la oportunidad de trabajar a tu lado y pudimos compartir juntos experiencias que recordaré por siempre. Tu apoyo y atenciones conmigo han sido inconmensurables.

Eternamente estaré en deuda con los profesores que conocí a lo largo de la licenciatura y de los que tanto aprendí. Sol, gracias no sólo por enseñarme a observar la naturaleza con otros ojos, sino también por las múltiples enseñanzas de vida que de ti aprendí a lo largo de mi tránsito por la universidad. Sinhué, no sólo revisaste esta tesis, sino que fuiste mi profesor desde el primer día de clases. Gracias por todas tus enseñanzas, por preocuparte por mí y cuidarme durante la licenciatura. Adriana, fuiste una gran maestra para mí. Te agradezco haber pasado un semestre mostrándome la belleza de la mecánica de fluidos, nunca pensé que mi tesis giraría entorno a esto y mira donde acabé. También gracias a Jane Arthur, Susana Lizano, Ernesto Aguilar, Daniele Colosi y Vladimir Escalante, sus cursos fueron siempre mis favoritos, de ustedes aprendí muchísimo. Gracias Yesenia Arredondo por tu apoyo y atenciones. Finalmente, expreso también mi total agradecimiento al Departamento de Servicios Escolares y Departamento de Apoyo de Psico-educativo por estar siempre dispuestos a brindarme su apoyo.

Sin embargo, fue fuera de la universidad que conté con los apoyos, contrafuertes y pilares más sólidos que me permitieron finalizar mis estudios y presentar esta tesis. En primer lugar debo agradecer a esa persona tan especial: mamá, gracias por luchar por mí y aferrarte a la vida para que yo pudiera cumplir mis sueños. Juntos salimos adelante y he aquí los resultados. No entiendes mucho de lo que yo hago, pero aún así estás dispuesta a escucharme hablar de estrellas y física. Estoy seguro que eres feliz viendo que tu hijo se dedica a aquello que tanto le apasiona, gracias por quererme y siempre darme tu apoyo incondicional. No podría pedir más de ti y en realidad me

hacen falta palabras para describir mis sentimientos hacia ti. ¡Te quiero mucho!

Hay veces que debemos salir a buscar nuestra familia y construirla. Gaby, Mela, Rigo y Riguín; gracias por decidir ser mi familia *putativa*, me siento infinitamente agradecido de contar con ustedes en mi vida. Gracias por esos magníficos momentos que hemos pasado juntos: los viernes de fútbol, los sábados en Umécuaro, las salidas y los festejos. He podido contar con su apoyo incondicional en los momentos que más lo he necesitado. Gavilán y Beto, gracias a ustedes también.

Afortunado aquel que tenga la dicha de contar con un amigo. Roberto, gracias por todos estos años de amistad. En verdad aprecio tu compañía en los conciertos de la sinfónica. A mis amigos de la licenciatura: Aranza, gracias por las enseñanzas, por tu confianza y por contar siempre con tu apoyo; siempre recordaré nuestras conversaciones. Felipe, nos conocimos en condiciones bastante peculiares y creo que ese es el adjetivo que describe nuestra amistad. Gracias por escuchar mis problemas y siempre darme ánimos. Raúl, además de amigo, tú también has sido maestro y colega. Siempre recordaré los momentos en el laboratorio y en el observatorio, así como todas las otras amenas experiencias que hemos pasado juntos. Me llena de orgullo contar con la amistad de todos ustedes.

Finalmente, debo agradecer a los compañeros más fieles y valientes: Rumina, Pucini y Patán, a ti te saludo hasta el Valhalla.

A ti, siempre valiente, infatigable y cariñosa;
sin ti esta tesis no hubiese sido lograda:
¡gracias mamá!

El rojo sol de un sueño en el Oriente asoma

El rojo sol de un sueño en el Oriente asoma.
Luz en sueños. ¿No tiembles, andante peregrino?
Pasado el llano verde, en la florida loma,
acaso está el cercano final de tu camino.
Tú no verás del trigo la espiga sazónada
y de macizas pomos cargado el manzanar,
ni de la vid rugosa la uva aurirroada
ha de exprimir su alegre licor en tu lagar.
Cuando el primer aroma exhalen los jazmines
y cuando más palpiten las rosas del amor,
una mañana de oro que alumbre los jardines,
¿no huirá, como una nube dispersa, el sueño en flor?
Campo recién florido y verde, ¿quién pudiera soñar aún
largo tiempo en esas pequeñitas
corolas azuladas que manchan la pradera,
y en esas diminutas primeras margaritas!

Antonio Machado

Resumen

En trabajos recientes se ha tratado de explicar el pico de la IMF mediante las interacciones de marea entre objetos proto-estelares dentro de las regiones densas de las nubes moleculares. La idea es que las proto-estrellas compiten entre sí para acretar masa de un reservorio común de material. Además, los grumos de densidad que originan a las proto-estrellas son provocados por turbulencia supersónica, de forma tal que la masa que puede ser acretada por una proto-estrella podría depender de que un grumo colapse o no.

Tradicionalmente se ha usado el criterio de Jeans para determinar si un grumo de densidad que ocurre dentro de un medio homogéneo e infinito es capaz de colapsar gravitacionalmente para formar una estrella. El análisis detallado mediante la introducción de perturbaciones en las ecuaciones de la hidrodinámica arroja el tamaño máximo de una parcela de gas auto-gravitante sostenida únicamente por el gradiente de presión interna, conocido como *longitud de Jeans*, λ_J , así como la masa mínima necesaria para que ocurra el colapso, conocida como *masa de Jeans*. Sin embargo, las nubes moleculares distan bastante de ser regiones homogéneas. Siguiendo trabajos recientes, proponemos incorporar las fuerzas de marea en el análisis clásico de Jeans. Para esto incluimos un potencial gravitacional externo en la ecuación de conservación de momento para derivar la longitud crítica de colapso. Posteriormente, utilizando el tensor de mareas, calculamos las fuerzas de marea debido a distribuciones de masa externa simples e introducimos el término correspondiente en el análisis de Jeans modificado por un potencial externo.

Con esta nueva herramienta estudiamos el colapso de grumos de densidad en la vecindad de un núcleo de Larson. Suponemos que el grumo se encuentra embebido dentro de la envolvente de densidad que rodea al núcleo de Larson y que la distribución radial de masa en dicha envolvente se encuentra descrita por una ley de potencias de la forma $\rho \propto r^{-\alpha}$. Concluimos que perfiles empinados ($\alpha > 1$) brindan soporte a los grumos. Para condiciones típicas de las nubes moleculares ($n_0 \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$, $T \sim 10 \text{ K}$), es poco probable que el grumo colapse, a menos que éste sea muy grande ($R \sim 0.5 \text{ pc}$). Sin embargo, encontramos que la fuerza de marea debido a la envolvente de densidad es capaz de fomentar el colapso de los grumos cuando el perfil es plano ($\alpha < 1$). Únicamente los grumos más pequeños ($R \leq 0.1 \text{ pc}$) que ocurren en las regiones más densas ($n_0 \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$) son capaces de colapsar.

Abstract

In recent works the IMF peak has tried to be explained by tidal interactions between proto-stellar objects embedded inside dense regions of molecular clouds. The main idea is that proto-stellar objects compete in order to accrete mass from a common mass reservoir. Besides, density clots that originate proto-stellar objects are generated by supersonic turbulence, such that the mass that can be accreted by a proto-star depends on whether or not a clot collapses.

Is a common practice to invoke the Jeans criterion to determine if a clot is prompt to gravitationally collapse inside a homogeneous and infinite medium. Commonly, the stability analysis is performed by introducing small perturbations into the hydrodynamical equations in order to obtain the maximum size of a stable self-gravitating gas parcel only supported by its thermal energy. We define this length as the *Jeans length*, λ_J . The minimum mass a clot must have in order to collapse is known as the *Jeans mass*, M_J . Nevertheless, molecular clouds are far from being homogeneous regions. Following recent works, we propose to include tidal forces in the Jeans classical analysis. In order to do this we include an external gravitational potential in the momentum conservation equation while deriving the critical collapse length. Then, we compute the tidal forces due to an external mass distribution using the gravitational stress tensor. Finally we introduce the corresponding term in the Jeans criterion that was previously modified.

With this new tool we study the collapse of density clots around a Larson core. We assume that the core is surrounded by a power-law density envelope $\rho \propto r^{-\alpha}$, and that the clot is embedded inside this radial mass distribution. We conclude that steep profiles ($\alpha > 1$) provide support to the clots. For typical conditions inside molecular clouds ($n_0 \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$, $T \sim 10 \text{ K}$), it is unlikely for the clot to collapse, unless it is big ($R \sim 0.5 \text{ pc}$). Nevertheless, we find that the tidal force due to the envelope is capable of promoting the collapse of the clots when the profile is shallow ($\alpha < 1$). Only the smallest clots ($R \leq 0.1 \text{ pc}$) that occur at the densest regions ($n_0 \sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$) are prompt to collapse.

Índice general

Agradecimientos Institucionales	III
Agradecimientos personales	V
Resumen	XI
Abstract	XIII
1. Introducción	1
1.1. Las componentes del medio interestelar	1
1.2. Nubes moleculares	2
1.3. Balance energético de las nubes moleculares	3
1.4. Turbulencia y dispersión de velocidades	6
1.5. Núcleos densos	8
1.6. Teorema del virial	10
2. Formación estelar	15
2.1. Longitud de Jeans	17
2.2. Esfera de Bonnor-Ebert	20
2.3. Esfera isotérmica	28
2.4. Modelo de Larson	30
3. Fuerzas de marea	35
3.1. Tensor de marea	36
3.1.1. Fuerza de marea debido a una masa puntual	37
3.1.2. Marea debido a una distribución esférica no homogénea	38
3.1.3. Caso ley de potencias	40
3.2. Criterio de Jeans modificado	41
4. Teoría de acreción competitiva por mareas	45
4.1. Desarrollo de Lee & Hennebelle 2018	48
4.1.1. Condiciones de colapso	48
4.1.2. Cálculo de la probabilidad de colapso	51
4.2. Desarrollo de Colman y Teyssier	52
4.3. Comentarios a L&H18	54
4.3.1. Cálculo de la masa del grumo	55

4.3.2. Masa mínima de colapso	55
4.3.3. Configuración estática	56
4.3.4. Aproximación de las fuerzas de marea	56
4.3.5. Empleo de la PDF	56
4.4. Comentarios a C&T20	57
4.4.1. Falta de presión térmica	58
4.4.2. Referente al sistema de referencia	58
4.4.3. Inconsistencia de la expresión para la masa de marea	58
5. Modificaciones a la teoría	61
5.1. Modificaciones a la teoría de disrupción de mareas	61
5.1.1. Calculo de la longitud y masa de Jog	61
5.1.2. Condiciones de colapso del grumo	66
5.2. Aplicaciones	76
5.2.1. Barnard 68	76
5.2.2. Regiones densas de formación estelar de estrellas de alta masa	77
5.3. Marea debido al núcleo de Larson	78
5.4. Comentarios finales	82
6. Conclusiones	83

1 Introducción

En el presente trabajo estudiaremos un problema muy particular en el proceso de la formación estelar. Es sabido que en la actualidad, todas las estrellas nacen dentro de las regiones más densas y frías del medio interestelar —ISM— conocidas como nubes moleculares. A su vez, se observa que las nubes moleculares se encuentran limitadas por regiones donde el gas es más caliente y también menos denso. Así, si se desea entender el proceso de formación estelar, es necesario comprender las propiedades del medio donde nacen las estrellas y su interacción con el gas que lo rodea. En ese sentido introducimos el modelo de componentes del medio interestelar.

1.1. Las componentes del medio interestelar

El medio interestelar se encuentra constituido por tres fases, cada una con temperaturas y densidades características distintas, pero en aproximado equilibrio de presión. En primer lugar se tiene al medio caliente ionizado —HIM— con una temperatura de 10^5 K a 10^6 K y densidad de partículas de 10^{-4} cm^{-3} a 10^{-2} cm^{-3} . La segunda fase se encuentra constituida por el medio ionizado tibio —WIM, por sus siglas en inglés— y por el medio neutro tibio —WNM— donde la temperatura es 6×10^3 K a 12×10^3 K y la densidad de partículas es 0.3 a 0.5 cm^{-3} . La tercera fase es el medio neutro frío —CNM— donde la temperatura es 50 K a 100 K y la densidad de partículas es 20 cm^{-3} a 60 cm^{-3} (ver p. ej., McKee & Ostriker, 1977; Dopita & Sutherland, 2003; Palla & Stahler, 2004).

De acuerdo al modelo propuesto por McKee y Ostriker (1977) estas fases se encuentran aproximadamente en equilibrio de presión. Si calculamos la presión de cada nube como $p/k = nT$ se observa que para el HIM, $nT \sim 10^{6.5} \cdot 10^{-3} \sim 3 \times 10^3$ K cm^{-3} , mientras que para el WIM y el WNM es $nT \sim 8 \times 10^3 \cdot 0.4 \sim 3.2 \times 10^3$ K cm^{-3} y la presión del CNM es $nT \sim 75 \cdot 40 \sim 3 \times 10^3$ K cm^{-3} . Por tanto, las fases se encuentran cercanas al equilibrio de presión.

Adicionalmente, en el medio interestelar se observa otra componente adicional, fuera del equilibrio de presión. Esta es la componente molecular, constituida precisamente por las nubes moleculares donde la temperatura es 10 K a 50 K y la densidad de partículas es 100 cm^{-3} a 500 cm^{-3} , lo que implica que $nT \sim 30 \cdot 300 \sim 10^4$ K cm^{-3} . De esto podemos concluir que las nubes moleculares tienen un exceso de presión en comparación con el resto del medio interestelar.

1.2. Nubes moleculares

Toda la formación estelar ocurre en las regiones más densas de las nubes moleculares. Estas estructuras del medio interestelar se caracterizan por ser autogravitantes, grandes, densas y frías; esto permite que el gas dentro de ellas se encuentre principalmente en forma molecular. Entonces, al estudiar las condiciones físicas de las nubes moleculares y procesos dinámicos relacionados a estas, es posible conocer las condiciones iniciales del proceso de formación estelar.

Tradicionalmente se ha categorizado a las nubes moleculares en nubes moleculares gigantes —GMC— y nubes oscuras. Dentro de las primeras se encuentra contenida la mayor parte de la masa molecular de la Galaxia. Se estima que en el interior de la Vía Láctea existen varios de miles de estas nubes. A las nubes más pequeñas se les llama nubes oscuras y son más numerosas. Internamente, se observa un patrón en el cual las estructuras más densas se encuentran embebidas dentro de estructuras de mayor tamaño pero menos densas y estas a su vez en regiones aún más grandes y todavía menos densas (Ballesteros-Paredes et al., 2020 y referencias ahí citadas).

Las GMC poseen un tamaño del orden de 50 pc (Palla & Stahler, 2004), pudiéndose extender incluso a escalas cercanas a 100 pc y tener una masas típicas de 200×10^3 a $500 \times 10^3 M_{\odot}$ (Stark & Blitz, 1978). El gas contenido en su interior se encuentra caracterizado por una densidad de partículas de 10^2 cm^{-3} a 10^4 cm^{-3} y en las regiones más densas, donde se forman las estrellas, incrementa hasta 10^5 cm^{-3} a 10^6 cm^{-3} . Por otro lado, las temperaturas son del orden de 10 K, aunque en regiones circundantes a los sitios de formación estelar o cerca de la frontera de la nube con el medio interestelar pueden ser de 30 K a 50 K (Dyson & Williams, 1997). Las nubes alcanzan estas bajas temperaturas por medio del enfriamiento por la excitación colisional de las transiciones rotacionales de las variantes isotópicas del CO[†]. Por otro lado, debido a que las nubes son opacas a la radiación estelar, el calentamiento de éstas es producido por los rayos cósmicos (ver p. ej., Dyson & Williams, 1997; Acero et al., 2016). En la tabla 1.1 mostramos con mayor detalle algunas propiedades físicas relevantes de las nubes moleculares.

En las nubes moleculares la emisión de la línea de 21 cm^{\ddagger} —que traza hidrógeno neutro— es débil, de donde se infiere que la mayoría de los átomos de hidrógeno se han combinado para formar moléculas de hidrógeno (H_2) (Dyson & Williams, 1997). La abundancia molecular del H_2 dentro de las nubes moleculares es $[\text{H}_2/(\text{H} + \text{H}_2) \simeq 0.9]$ (Kellermann & Verschuur, 1988). En estas regiones se encuentran casi todas las moléculas interestelares (Dyson & Williams, 1997) y su presencia es de gran ayuda, ya que el gas contenido dentro de las nubes moleculares —al ser muy frío— no emite radiación a longitudes de onda visibles, pero puede ser detectado por la emisión de sus moléculas en radiofrecuencias (ver p. ej., André et al., 2007; Teixeira et al., 2016).

[†]En particular la transición $\text{CO}(1 \rightarrow 0)$ es importante para determinar parámetros físicos de las nubes, así como para estudiar su estructura cinemática (p. ej., Larson, 1981; Kellermann & Verschuur, 1988; Heyer & Brunt, 2004)

[‡]La emisión de la línea de 21 cm es producida cuando el espín del electrón del átomo de hidrógeno pasa de una configuración paralela a antiparalela respecto al espín del protón en el núcleo (ver p. ej., Palla & Stahler, 2004).

Tabla 1.1: Propiedades físicas de las nubes moleculares, tabla reproducida de Palla y Stahler (2004).

Tipo de nube	A_v [mag]	n_{tot} [cm ⁻³]	L [pc]	T [K]	M [M _⊙]	Ejemplos
Difusa	1	500	3	50	50	ζOfiuco
Nube Molecular Gigante	2	100	50	15	10 ⁵	Orion
Nubes oscura						
Complejos	5	500	10	10	10 ⁴	Tauro-Auriga
Individuales	10	10 ³	2	10	30	B1
Núcleos densos/Glóbulos Bok	10	10 ⁴	0.1	10	10	TMC-1/B335

La radiación emitida por las moléculas en radiofrecuencias proviene únicamente de las transiciones rotacionales de éstas, no obstante, sólo las moléculas con momento dipolar no nulo —con distribución de carga asimétrica— presentan transiciones rotacionales. La molécula de H₂ es simétrica, por lo que ésta no puede ser detectada en radiofrecuencias, sin embargo, otras moléculas no simétricas —p. ej., H₂O, NH₃, CO y las variantes isotópicas de ésta última— si son detectables (ver p. ej., Estalella & Anglada, 1999).

Se ha estimado que las GMC viven unos 3×10^7 años antes de ser destruidas por los vientos de las estrellas OB formadas dentro de ellas (Blitz & Shu, 1980). Sin embargo, propuestas contemporáneas estiman edades mas cortas, de 5×10^6 a 10^7 años (Ballesteros Paredes, 1999; Ballesteros-Paredes & Hartmann, 2007; Chevance et al., 2020). Durante este periodo convierten alrededor del 3% de su masa en estrellas. Dado que la masa de H₂ en el disco galáctico es de $2 \times 10^9 M_{\odot}$ (Blitz & Shu, 1980; Palla & Stahler, 2004), la tasa de formación estelar a partir de nubes gigantes es alrededor de $6 M_{\odot}$ por año. Se observa formación de estrellas tipo OB en GMC pero esto rara vez ocurre en nubes con masas menores a $10^4 M_{\odot}$ (Estalella & Anglada, 1999).

1.3. Balance energético de las nubes moleculares

En astronomía es común definir cantidades representativas de las energías relacionadas con las nubes (ver p. ej., Shu, 1992). Definimos a la energía magnética \mathcal{M} como

$$\mathcal{M} \equiv \int_V \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} d^3x \quad (1.1)$$

donde \mathbf{B} es el campo magnético asociado a la nube, tal que $|\mathbf{B}|^2/8\pi$ se interpreta como la densidad de energía magnética que integrada sobre el volumen V y proporciona la energía relacionada con el campo magnético. También definimos una energía gravitacional E_g como

$$E_g \equiv -\frac{1}{2} \int_V \rho \Phi d^3x \quad (1.2)$$

donde ρ es la densidad media de la nube y Φ es el potencial gravitacional de la distribución de masa. Por otro lado, para un gas adiabático, podemos definir la energía interna \mathcal{U} como

$$\mathcal{U} \equiv \frac{3}{2} \int_V p d^3x \quad (1.3)$$

donde p es la presión térmica de la nube. Finalmente, definimos la energía cinética \mathcal{K} como

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho |\mathbf{u}|^2 d^3x \quad (1.4)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad de bulo. Por simplicidad se supone una esfera como volumen de integración V .

Según las definiciones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) las cantidades \mathcal{U} , \mathcal{M} y \mathcal{K} son cantidades positivas, mientras E_g es negativa. Además, las cuatro son escalares y representan energía, por lo que sumadas deberían dar la energía total asociada a la nube. Si las nubes se encuentran en estado de equilibrio, la suma de las cantidades positivas, o al menos una de ellas, debería ser comparable a E_g , de lo contrario las nubes colapsarían gravitacionalmente. Usando valores característicos de las nubes moleculares $T = 10$ K, $R = 25$ pc, $M = 10^5 M_\odot$, $|\mathbf{B}| = 20 \mu\text{G}$ y $\delta v = 4$ km s⁻¹; podemos calcular los cocientes de cada una de las energías con respecto al valor absoluto de la energía gravitacional.

Si suponemos un gas ideal, podemos escribir el integrando de la ec. (1.3) como $\rho \mathcal{R}T/\mu$, donde $\mu = 2.4$ es el peso molecular medio, T es la temperatura, ρ la densidad de masa y $\mathcal{R} = 8.315 \times 10^7$ erg K⁻¹ g⁻¹ es la constante de los gases ideales. Si la temperatura es constante, la integral depende únicamente de ρ , obteniéndose así la masa contenida dentro de V . Por lo tanto $\mathcal{U} = M\mathcal{R}T/\mu$. Suponiendo también —a primera aproximación— una nube esférica de densidad constante, la energía gravitacional (1.2) está dada por $3GM^2/5R$, donde G es la constante universal de gravitación, M es la masa de la nube esférica y R es el radio de ésta. Entonces, el cociente entre la energía interna y la energía gravitacional se escribe

$$\frac{\mathcal{U}}{|E_g|} \sim \frac{M\mathcal{R}T}{\mu} \left(\frac{GM^2}{R} \right)^{-1} \sim \frac{7 \times 10^{46}}{3 \times 10^{49}} \sim 2.3 \times 10^{-2}.$$

Lo que demuestra que la presión térmica de una GMC no es suficiente para contrarrestar el factor gravitacional. Procediendo de forma análoga con la energía magnética

$$\frac{\mathcal{M}}{|E_g|} \sim \frac{|\mathbf{B}|^2 R^3}{6\pi} \left(\frac{GM^2}{R} \right)^{-1} \sim \frac{1 \times 10^{49}}{3 \times 10^{49}} \sim 0.3.$$

Con este resultado se ve que el campo magnético, si bien no es un factor dominante, si se debe considerar al estudiar la estabilidad de nubes moleculares. Sin embargo, una discusión que incluya al campo magnético de las nubes moleculares excedería

Tabla 1.2: Parámetros energéticos típicos de las nubes moleculares.

Tipo de nube	R [pc]	M [M_\odot]	$ \mathbf{B} ^2$ [μG]	δv [km s^{-1}]	T [K]	$\mathcal{U}/ E_g $	$\mathcal{K}/ E_g $	$\mathcal{M}/ E_g $
Difusa	3	50	10	7	50	2	3×10^2	5×10^2
GMC	25	10^5	20	4	10	2×10^{-3}	0.4	2
Núcleos densos								
Masa alta	2	10^2	30	7	10	0.2	1.5×10^2	10^3
Masa baja	0.5	5	30	0.5	10	0.8	3	3.5×10^2

los alcances de este trabajo[†]. Siguiendo con el último término correspondiente a la energía cinética, es posible estimar su valor usando $\mathcal{K} = 1/2 M \delta v^2$, donde δv es la dispersión de velocidades de las moléculas de la nube, tenemos que

$$\frac{\mathcal{K}}{|E_g|} \sim \frac{1}{2} M \delta v^2 \left(\frac{GM^2}{R} \right)^{-1} = \frac{2.4 \times 10^{49}}{3 \times 10^{49}} = 0.8$$

de donde se ve que este término es comparable con la energía gravitacional, y por tanto, tradicionalmente se ha considerado suficiente para sostener a las nubes moleculares. En la tabla 1.2 se pueden ver estos cocientes calculados para nubes difusas (asociaciones aisladas constituidas por hidrógeno atómico y molecular), GMC, núcleos de masa baja y núcleos de masa alta.

Es costumbre definir el cociente

$$\alpha_{\text{vir}} \equiv \frac{2\mathcal{K}}{E_g}, \quad (1.5)$$

tal que $\alpha \sim 1$ implica equilibrio, coincidiendo con nuestro análisis previo.

En el análisis anterior utilizamos la dispersión de velocidades observada en las GMC para calcular la energía de bulto. Siendo la dispersión de velocidades, resultado de la superposición de los movimientos individuales de las moléculas —movimientos térmicos— y los movimientos de bulto de las parcelas macroscópicas de gas. La velocidad sónica de un gas monoespecie se calcula como

$$c_s = \left(\frac{\gamma k_B T}{m} \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

donde $\gamma = (f + 2)/f$ es el coeficiente de dilatación adiabática — f son los grados de libertad de la molécula—, $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ es la constante de Boltzmann, m es la masa de la molécula del gas y T es la temperatura. Para una nube molecular típica formada mayormente por H_2 , $\gamma = 7/5$ —las moléculas diatómicas tienen 5 grados de libertad—, $m = 2m_H = 2 \cdot (1.67 \times 10^{-24}) \text{ g}$ y $T = 10 \text{ K}$, con lo que obtenemos una velocidad sónica $c_s = 0.24 \text{ km s}^{-1}$; por lo que la dispersión de velocidades que mencionamos anteriormente —ver tabla 1.2— corresponde a movimientos

[†]En los desarrollos posteriores consideraremos un gas no magnetizado por lo que el resultado anterior se incluye únicamente por razones de completez. Shu (1992) brinda una mayor discusión sobre el papel que juegan los campos magnéticos en el soporte de nubes moleculares.

supersónicos. Este resultado es consistente con el hecho de que la energía térmica es despreciable respecto a la energía debida a movimientos de bulto. En otras palabras, los movimientos individuales de las parcelas de gas son responsables de la dispersión de velocidades observada y por tanto del ensanchamiento de las líneas de emisión. Ya que las velocidades presentan una cierta dispersión alrededor de un valor central, las líneas de emisión aparecen ensanchadas y se infiere que las nubes son turbulentas.

Dado que la energía cinética o de bulto es comparable con la energía gravitacional, tradicionalmente se ha pensado que la energía cinética de las nubes moleculares provee soporte a las nubes contra el colapso. Sin embargo, notemos que los movimientos individuales de las parcelas no necesariamente proveen soporte a la nube. Esto se debe a que la energía cinética brinda soporte solamente si el campo de velocidades no es convergente ($\nabla \cdot \mathbf{u} \geq 0$). En efecto, dada una nube en proceso de colapso gravitacional y habiendo transcurrido una fracción al tiempo de caída libre, la energía cinética será similar a la energía gravitacional, y sin embargo, la región —por construcción— no está soportada contra el colapso (Ballesteros-Paredes, 2006; Ballesteros-Paredes et al., 2018).

1.4. Turbulencia y dispersión de velocidades

Poco tiempo después del descubrimiento de las nubes moleculares (Wilson et al., 1970), la gente creyó que las GMC deberían encontrarse en un estado de colapso gravitacional sin soporte de ningún tipo, de forma tal que el movimiento del gas estaría descrito por un campo de velocidades supersónicas convergente (Goldreich & Kwan, 1974). Por otro lado, la turbulencia —debido a su naturaleza altamente disipativa— debería decaer rápidamente y no contribuir al ensanchamiento de las líneas (Liszt et al., 1974). Esto se desechó por Zuckerman y Palmer (1974), al mostrar que en tal escenario la tasa de formación estelar debería ser muy elevada. A su vez propusieron a la turbulencia a pequeña escala como explicación al ensanchamiento de las líneas y mecanismo de soporte de la nube. A esto se han sumado trabajos donde se sugiere que explosiones de supernova podrían estar inyectando energía al medio interestelar, fuertes vientos estelares y choques (ver p. ej., Elmegreen & Scalo, 2004); así como por los choques compresivos que deberían suceder durante la formación de las nubes (ver p. ej., Vázquez-Semadeni et al., 2006), evitando así que la turbulencia decaiga.

Sin embargo, la turbulencia parece ser invariante a diferentes escalas dentro del gas molecular del medio interestelar, lo que nos sugiere que la contribución energética de fuentes internas —vientos estelares y regiones HII en expansión— es pequeña en comparación con fuentes externas (Heyer & Brunt, 2004). En este sentido, para explicar el ensanchamiento de las líneas y el aparente estado de equilibrio de las nubes, Ballesteros-Paredes et al. (2011) sugieren que las GMC se encuentran en un estado de colapso global, caótico y jerárquico responsable de inducir los movimientos supersónicos del gas. La energía cinética asociada con el colapso debería ser la causa del ensanchamiento observado en las líneas de emisión (Ballesteros-Paredes et al., 2020). En este modelo, el colapso produce estrellas rápidamente, las cuales calientan y disocian la nube molecular, evitando así una alta tasa de formación estelar (Vázquez-

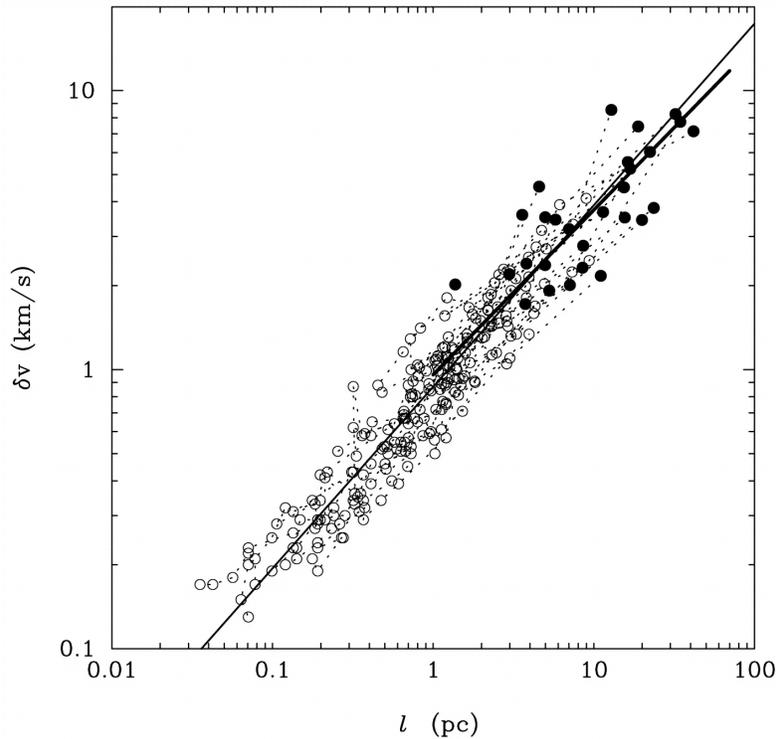


Figura 1.1: Imagen obtenida de Heyer y Brunt (2004). Se observa la relación de Larson entre la escala l y la dispersión de velocidades δv obtenida de la medición de la transición $J(1 \rightarrow 0)$ de las moléculas de ^{12}CO de 27 nubes moleculares. Los puntos negros representan la dispersión global de velocidad y el tamaño de cada nube.

Semadeni et al., (2007).

Por otro lado, se ha observado una relación entre la dispersión de velocidades δv y la escala l . Larson (1981) se percató que la dispersión interna de velocidades de cada región dentro de una nube se encuentra en relación con su tamaño siguiendo una ley de potencias, $\delta v \propto l^p$, donde $p \sim 0.38$. Esta relación es válida para alrededor de cuatro ordenes de magnitud ($0.05 \leq l \leq 100$ pc). Estudios posteriores (Solomon et al., (1987) Heyer & Brunt, (2004) arrojan un valor $p \sim 1/2$ que coincide con el valor teórico esperado para un campo de velocidades turbulento donde los choques dominan (Elmegreen & Scalo, (2004) McKee & Ostriker, (2007) Ballesteros-Paredes et al., (2020)), de forma tal que la ley de Larson puede enunciarse como

$$\delta v(l) = \delta v_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^p \quad (1.7)$$

donde $\delta v_0 = 1 \text{ km s}^{-1}$ y $l_0 = 1 \text{ pc}$. La relación obtenida por Heyer y Brunt puede verse graficada en la Fig. 1.1

Larson (1981) encontró que su muestra de nubes tenía básicamente la misma densidad columnar. Aunque en varios estudios esto fue atribuido a un sesgo observacional

en el sentido de que la sensibilidad mínima de los telescopios marca la cota inferior del rango dinámico de las observaciones y ésta está delimitada superiormente por la saturación de los detectores, la extinción visual y la profundidad óptica (Kegel, 1989; Scalo, 1990; Vázquez-Semadeni et al., 1997; Ballesteros-Paredes, 2006), en realidad, más que un problema de rango dinámico, las nubes moleculares muestran densidad columnar constante debido a una mezcla de la definición tradicional de nubes como aquellas regiones que están por arriba de cierto umbral de densidad columnar, y de que el factor de llenado de las regiones densas es extremadamente pequeño. Así, cuando en una muestra observacional se definen nubes con un mismo umbral de densidad columnar, la densidad promedio entre todas las nubes es similar a la densidad umbral elegida, simplemente porque las regiones con mayor densidad no son capaces de cambiar sustancialmente el promedio debido a su pequeño tamaño (Vázquez-Semadeni et al., 1997).

Es sabido que cuando las mediciones abarcan un conjunto amplio de nubes, la densidad columnar Σ no es constante y la dispersión de velocidad también depende de esta última (Heyer et al., 2009; Ballesteros-Paredes et al., 2011). La relación generalizada se enuncia

$$\delta v_{\text{NT}} = \sqrt{G\Sigma R} \quad (1.8)$$

donde sustituimos l por R para explicitar el uso del radio equivalente de la nube y con la etiqueta «NT» denotamos que se trata de la dispersión de velocidad debido a movimientos no térmicos. Cuando Σ es constante podemos ver que la relación original de Larson se cumple en automático. La relevancia de la ec. (1.8) se vuelve evidente al estudiar regiones densas de las nubes como son los núcleos de formación estelar, como veremos a continuación.

1.5. Núcleos densos

Las nubes moleculares distan mucho de ser regiones homogéneas. Poseen una estructura compleja constituida por regiones filamentosarias (Hartmann, 2002; Myers, 2009) organizadas en una estructura fractal (Falgarone et al., 1991). Dentro de las nubes también existen regiones densas — $n \sim 10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-3}$ — conocidas como núcleos densos o núcleos moleculares. Si son fuentes de radiación infrarroja, entonces se les considera como sitios donde hay estrellas ya formadas. Los núcleos donde no hay radiación infrarroja —porque aún no se forman estrellas— se llaman núcleos pre-estelares. En muchas ocasiones no se observa emisión en infrarrojo, pero si hay emisión o flujo de moléculas, también se considera que el núcleo es pre-estelar (ver p. ej., Liu et al., 2015). Un radio promedio de estas estructuras es 0.1 pc y la temperatura media ronda 10 K (Shu et al., 1987). En la tabla 1.3 presentamos los parámetros físicos relevantes con mayor detalle.

De la ec. (1.7) es posible obtener la escala a la cual la dispersión de velocidades deja de ser supersónica — $l \sim 0.1 \text{ pc}$ — lo que coincide con el radio promedio observado los núcleos de baja masa — $M \sim 1 M_{\odot}$ — donde la turbulencia es subsónica (p. ej., Fuller & Myers, 1987). Sin embargo se han identificado núcleos densos muy masivos

Tabla 1.3: Propiedades físicas de los núcleos densos, obtenida de Estalella y Anglada (1999)

	Masa [M_{\odot}]	Diámetro [pc]	Densidad [cm^{-3}]	Temperatura [K]
Masa baja (Nubes Oscuras)	0.3 – 10	0.1 – 0.5	$10^4 – 10^5$	10
Masa alta (NMG)	$10 – 10^3$	0.1 – 3	$10^4 – 10^6$	30 – 100

— $M \geq 10 M_{\odot}$ — y de tamaño bastante mayor — $R \geq 0.5$ pc— localizados dentro de las nubes moleculares gigantes (McKee & Tan, 2003; Garay et al., 2004). Dentro de estos también se observa formación estelar pese a que la turbulencia es supersónica (McKee & Tan, 2003), contradiciendo la idea tradicional de la turbulencia como agente de soporte.

Se ha creído que la anchura de la línea —al ser proporcional a la escala— debe ser grande cuando se consideran tamaños cercanos al de la nube molecular y pequeña en estructuras como los núcleos de formación estelar. Esto explicaría por qué no se observa un colapso a gran escala de las GMC mientras la formación estelar es un rasgo característico de los núcleos densos. Sin embargo, los movimientos turbulentos brindan soporte únicamente si el campo de velocidades no es convergente —como mencionamos con anterioridad— y se encuentran restringidos a escalas mucho menores al tamaño de la nube (Ballesteros Paredes, 1999). Por otro lado, si la energía cinética de las nubes proviene del colapso gravitacional jerárquico y caótico, entonces la dispersión de velocidades debemos obtenerla de igualar dos veces la energía cinética con la energía gravitacional[†]

$$\frac{\delta v^2}{R} = 2G\Sigma \quad (1.9)$$

donde $\Sigma = M/R^2$, discrepando por un factor $\sqrt{2}$ de la ec. (1.8) (Ballesteros-Paredes et al., 2011; Ballesteros-Paredes et al., 2018). Escribiendo la ec. (1.9) en la forma

$$\delta v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

y con $R = 1$ pc, $M \sim 10^{4.5} M_{\odot}$ —valores medios de las cantidades mostradas en la tabla 1.3— encontramos que $\delta v \sim 1.5 \text{ km s}^{-1}$. Por otro lado, utilizando los valores de la tabla 1.3 es posible obtener un límite superior suponiendo un núcleo donde $R = 0.1$ pc y $M = 10^3 M_{\odot}$, esto da $\delta v \sim 9 \text{ km s}^{-1}$ y $\Sigma = M/R^2 \sim 10^{24} \text{ cm}^{-2}$, lo que se ajusta razonablemente bien a las observaciones. Por ejemplo, Rathborne et al. (2006) encuentran núcleos densos donde $\delta v \gtrsim 5 \text{ km s}^{-1}$ y la densidad columnar promedio es 10^{23} cm^{-2} a 10^{25} cm^{-2} . Por lo tanto, las dispersiones de velocidades supersónicas a escalas pequeñas observadas en núcleos densos no implica soporte, todo lo contrario, puede ser resultado del colapso gravitacional de éstos (Ballesteros-Paredes et al., 2018), reforzando la hipótesis de un estado de colapso global dentro de las nubes moleculares.

[†]Ver la siguiente sección donde discutimos el teorema del virial.

1.6. Teorema del virial

Para entender el balance energético de una nube molecular de manera cuantitativa, así como obtener una descripción general de su estructura a partir de cantidades observables, comúnmente se utiliza el *teorema del virial*. Al no ser necesario considerar detalles sobre la dinámica interna, esta herramienta matemática proporciona una manera sencilla de determinar el estado energético de la nube (Shu, 1992; Ballesteros-Paredes, 2006).

El desarrollo clásico para la deducción del teorema del virial (p. ej., Chandrasekhar, 1960; Shu, 1992) parte de la ecuación de momento generalizada para una nube molecular con campo magnético

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.10)$$

donde $-\partial \Phi / \partial x_i$ es el término que representa la fuerza gravitacional y

$$T_{ik} = \frac{B_i B_k}{4\pi} - \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \delta_{ik}, \quad (1.11)$$

es el *tensor de esfuerzos de Maxwell* asociado con el campo magnético de la nube. Multiplicando la ec. (1.10) por la componente l del vector de posición (x_l), en integrando sobre un volumen fijo V obtenemos el *teorema del virial tensorial*. La traza de los tensores en la ecuación resultante proporciona la energía asociada con éstos, mientras que los elementos fuera de la diagonal contienen información sobre la conservación del momento angular (ver p. ej., Chandrasekhar, 1960). Aquí basta con trabajar con la traza, la cual se obtiene al multiplicar la ec. (1.10) por x_i , (la componente i del vector posición), sumar sobre los índices repetidos e integrar sobre el volumen V , entonces

$$\int_V \rho x_i \frac{du_i}{dt} d^3x = \int_V \left(-\rho x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \right) d^3x. \quad (1.12)$$

donde

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

es la derivada material de u_i .

Es conveniente escribir cada uno de los términos de la ecuación integral (1.12) como contribuciones volumétricas, más alguna posible contribución superficial. Comenzando con el lado derecho, el término correspondiente a la presión del gas se escribe como

$$-x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i p) + \frac{\partial x_i}{\partial x_i} p$$

e integrando sobre V

$$-\int_V x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} d^3x = \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_i} p d^3x - \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i p) d^3x.$$

Cabe notar en el primer término del lado derecho que $\partial x_i / \partial x_i = \delta_{ii} = 3$. El segundo término del lado derecho puede reescribirse usando notación vectorial $\partial(x_i p) / \partial x_i = \nabla \cdot (\mathbf{x}p)$, entonces

$$- \int_V x_i \frac{\partial p}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x} = 3 \int_V p d^3 x - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{x}p) d^3 x.$$

Recordando la ec. (1.3) para la energía interna del gas contenido en V y usando el *teorema de Gauss* obtenemos

$$- \int_V x_i \frac{\partial p}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x} = 2\mathcal{U} - \oint_S p \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (1.13)$$

El término correspondiente al campo magnético puede reescribirse como

$$\int_V x_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d^3 x = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i T_{ik}) d^3 x - \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_k} T_{ik} d^3 x.$$

Reescribiendo el primer término del lado derecho en notación vectorial y notando en el segundo término del lado derecho que $(\partial x_i / \partial x_k) T_{ik} = \delta_{ik} T_{ik} = T_{ii} = -|\mathbf{B}|^2 / 8\pi$ tenemos que

$$\int_V x_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d^3 x = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{x} \cdot \vec{T}) d^3 x + \int_V \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} d^3 x.$$

Empleando el teorema de Gauss en el primer término del lado derecho e identificando el segundo término del lado derecho con la ec. (1.1), la contribución magnética queda como

$$\int_V x_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d^3 x = \mathcal{M} + \oint_S \mathbf{x} \cdot \vec{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (1.14)$$

El gradiente de la función potencial admite el desarrollo

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = G \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' = G \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') (x_j - x'_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x', \quad (1.15)$$

multiplicando por ρx_i e integrando sobre un volumen \tilde{V} obtenemos la contribución gravitacional de la ec. (1.10)

$$W_{ij} \equiv - \int_{\tilde{V}} \rho x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 x = G \int_{\tilde{V}} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') x_i (x_j - x'_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' d^3 x. \quad (1.16)$$

Esta cantidad se define como el *tensor potencial-energía de Chandrasekhar* (Binney & Tremaine, 2008). Es posible intercambiar \mathbf{x} y \mathbf{x}' sin alterar la integral siempre y cuando los volúmenes de integración coincidan $\tilde{V} = V$, entonces

$$W_{ij} = G \int_V \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}) x'_i (x'_j - x_j)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} d^3 x d^3 x'. \quad (1.17)$$

Podemos intercambiar el orden de integración de la ec. (1.17) y sumar lo obtenido a la ec. (1.16) obteniendo

$$2W_{ij} = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')(x'_i - x_i)(x'_j - x_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x. \quad (1.18)$$

El tensor es simétrico, por lo que una compresión de la distribución a lo largo de un eje implicará una alargamiento a lo largo de uno o de ambos ejes restantes, de forma tal que la traza, $\delta_{ij}W_{ij} = W_{ii}$, sea invariante. Al contraer el tensor en el integrando se tiene que $(x_i - x'_i)(x_i - x'_i) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$. Definimos la cantidad obtenida como la energía auto-gravitacional del gas contenido dentro del volumen V :

$$E_g \equiv -\frac{1}{2}G \int_V \int_V \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' d^3x \quad (1.19)$$

e igualando esta cantidad con la def. (1.2)[†]

$$\mathcal{W} \equiv - \int_V \rho x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d^3x = E_g. \quad (1.20)$$

Habiendo ya desarrollado los términos del lado derecho de la ec. (1.12), se puede proceder con el lado izquierdo, el cual lo reescribimos como

$$\begin{aligned} \int_V \rho x_i \frac{du_i}{dt} d^3x &= \int_V \left(\rho \frac{d}{dt} (x_i u_i) - \rho u_i \frac{dx_i}{dt} \right) d^3x \\ &= \int_V \left(\rho \frac{d}{dt} \left(x_i \frac{dx_i}{dt} \right) - \rho \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right) d^3x. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(x_i \frac{dx_i}{dt} \right) d^3x &= \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(x_i \frac{dx_i}{dt} + x_i \frac{dx_i}{dt} \right) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} (x_i x_i) \right) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_V \rho x_i x_i d^3x. \end{aligned}$$

De esta manera, el lado izquierdo de la ec. (1.12) queda como

$$\begin{aligned} \int_V \rho x_i \frac{du_i}{dt} d^3x &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_V \rho x_i x_i d^3x - \int_V \rho \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} d^3x \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_V \rho |\mathbf{x}|^2 d^3x - \int_V \rho |\mathbf{u}|^2 d^3x, \end{aligned}$$

[†] \mathcal{W} es igual a la energía gravitacional solamente si las fuerzas de marea sobre la nube son despreciables.

donde $x_i x_i = |\mathbf{x}|^2$ y $u_i u_i = |\mathbf{u}|^2$. Definimos a la cantidad \mathcal{I}^\dagger como

$$\mathcal{I} = \int_V \rho |\mathbf{x}|^2 d^3x, \quad (1.21)$$

y recordando la definición (1.4)

$$\int_V \rho x_i \frac{du_i}{dt} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{I}}{dt^2} - 2\mathcal{K}. \quad (1.22)$$

Juntando las ecuaciones (1.13), (1.14), (1.20) y (1.22), usando la ec. (1.12) y definiendo la presión p sobre la superficie S como p_{ext} , finalmente podemos enunciar el *teorema virial escalar*

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{I}}{dt^2} - 2\mathcal{K} = \mathcal{W} + 2\mathcal{U} + p_{\text{ext}} \oint_S \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \mathcal{M} - \oint_S \mathbf{x} \cdot \vec{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (1.23)$$

Es necesario realizar algunas observaciones sobre el teorema virial.

- I. A partir de la ec. (1.15) hemos supuesto implícitamente que la masa externa al volumen de integración es despreciable, o bien, que el volumen de integración es infinito. Es común —mas no necesariamente válido— ignorar cualquier contribución gravitacional externa al volumen de integración V . Siempre que la temperatura del medio externo sea mucho mayor a la temperatura dentro del volumen de integración V , la densidad externa a V será mucho menor que la densidad interna y por tanto se puede suponer que el medio externo es gravitacionalmente despreciable en comparación con la masa interna al volumen de integración V (Shu, 1992), en concordancia con el modelo de fases para el medio interestelar. En el caso de una distribución con simetría esférica, la contribución de la fuerza debida a la masa externa a la nube es nula.
- II. Respecto a las integrales de superficie. Una suposición realizada comúnmente es que dentro del volumen de integración V se encuentre contenido todo el sistema físico, de forma tal que las variables p , ρ y \vec{T} se anulen sobre la superficie S (Chandrasekhar, 1960). Sin embargo Ballesteros-Paredes (2006) muestra que esto no es del todo preciso en un sistema realista, ya que los términos superficiales podrían ser comparables con los términos volumétricos y tener un papel relevante en la distorsión y soporte de las nubes.
- III. Normalmente se calcula el término gravitacional aproximándolo como la energía contenida dentro de una esfera embebida en un medio gravitacionalmente despreciable o donde al menos —por argumentos geométricos— es posible ignorar al medio externo; sin embargo esto no es del todo válido (Ballesteros-Paredes, 2006). Ballesteros-Paredes et al. (2020) señalan que al considerar la distribución de masa externa pueden aparecer efectos de marea importantes debido a la

[†]A esta cantidad \mathcal{I} erróneamente se le ha llamado momento de inercia, cuando en realidad el momento de inercia debe calcularse a partir del tensor de momento de inercia que se presenta en Binney y Tremaine (2008, pág. 796).

inhomogeneidad del ISM y en particular de las GMC. Por ejemplo, Ballesteros-Paredes et al. (2009) estudian las fuerzas de marea sobre las GMC producto del potencial gravitacional galáctico, así como las fuerzas de marea sobre un núcleo denso debido a su nube parental; mientras que Lee y Hennebelle (2018) estudian cómo la marea debida a un núcleo denso puede inhibir la formación de otros núcleos en la vecindad del primero.

- IV. Tradicionalmente, el equilibrio virial se considera sinónimo de equilibrio de fuerzas (ver p. ej., Chandrasekhar, 1960; Palla & Stahler, 2004). En sentido estricto, equilibrio de fuerzas implica que el lado derecho de la ec. (1.10) se anula. Entonces, la implicación matemática de equilibrio trasladada al teorema virial significa que $\dot{\mathcal{I}}/2 - 2\mathcal{K} = 0$, a diferencia de la habitual suposición $\mathcal{W} + 2\mathcal{K} = 0$, la cual únicamente expresa que la energía cinética es resultado de la energía gravitacional (Ballesteros-Paredes et al., 2020). Una manera de entender esto es la siguiente: el teorema del virial puede verse como una igualdad entre causas y consecuencias. Las causas vendrían siendo las fuerzas incluidas del lado derecho de la ecuación de momento, ec. (1.10), y las consecuencias el lado izquierdo. De forma tal que \mathcal{K} —obtenida de la derivada temporal de ec. (1.10)— es parte de la respuesta cinemática a las fuerzas, la otra parte es que cambia la distribución de masa.
- V. Es falso suponer —como comúnmente se hace— que $\ddot{\mathcal{I}} = 0$ implica una nube estática, $\ddot{\mathcal{I}} > 0$ una nube en expansión y $\ddot{\mathcal{I}} < 0$ una nube contrayéndose. Retomando el párrafo anterior, dentro de una nube con movimientos cinéticos turbulentos puede darse una redistribución de masa, con lo que la segunda derivada de \mathcal{I} difícilmente se anula. De hecho, la fragmentación turbulenta impide que las nubes alcancen el equilibrio al hacer que éstas no perduren por tiempos mayores a su tiempo dinámico (Ballesteros-Paredes, 2006; Ballesteros-Paredes et al., 2020).

2 Formación estelar

De las observaciones se ha concluido que toda la formación estelar actual está sucediendo en las regiones más densas de las nubes moleculares (ver p. ej., Krause et al., 2020). A primera aproximación es posible suponer que dentro de las nubes moleculares la presión térmica brinda todo el soporte en contra de la gravedad. En este sentido, podemos derivar el radio de una nube esférica cuya energía se encuentra equidistribuida entre la energía gravitacional y la energía térmica. Escribimos la energía gravitacional de una nube esférica, isotérmica, con índice politrópico $\gamma = 1$ y densidad constante como

$$\begin{aligned} E_{\text{grav}} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi dV = - \int_V \frac{GM}{r} \rho dV = - \int_0^R \frac{1}{r} G \left(\frac{4}{3} \pi \rho r^3 \right) (4\pi r^2 \rho dr) \\ &= - \frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr = - \frac{16}{15} G \pi^2 \rho^2 R^5 = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

y la energía interna debida únicamente a movimientos térmicos como

$$E_{\text{ther}} = \frac{3}{2} \int p dV = 3 \int \frac{\gamma p}{\rho} dm = 3c_s^2 M. \quad (2.2)$$

Suponiendo que la energía total se encuentra distribuida equitativamente entre la auto-gravedad y la energía interna, podemos sumar estas dos expresiones e igualar a cero; usando $M = 4\pi\rho R^3/3$ obtenemos

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = \frac{4}{5} G \pi R^2 = 3c_s^2 M.$$

Despejando R , obtenemos

$$R = \left(\frac{15c_s^2}{4\pi G\rho} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{c_s^2}{G\rho} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

ya que $\sqrt{15/4\pi} \sim 1$. Usando valores promedio dentro de una nube molecular, $c_s = 0.2 \text{ km s}^{-1}$ y $\rho = 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$, tenemos que $R \sim 2.5 \text{ pc}$. Una parcela de gas auto-gravitante de mayor tamaño no podrá ser sostenida únicamente por la presión interna.

Podemos estimar el tiempo mínimo necesario para que una parcela de fluido esférica colapse sobre su centro debido a su propia gravedad en ausencia de sustento de presión, conocido como tiempo de caída libre t_{ff} . Consideremos un elemento de

masa dm en reposo a distancia r_0 del centro de la distribución. Su energía potencial gravitacional está dada por

$$dU = -\frac{GM(r_0)}{r_0} dm, \quad (2.4)$$

donde $M(r_0)$ es la masa interna al radio r_0 . Usando el principio de conservación de la energía es posible expresar la velocidad del elemento fluido al caer hacia el centro de la distribución a partir del cambio en el potencial gravitacional

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GM(r_0)}{r} - \frac{GM(r_0)}{r_0}.$$

Si tenemos una esfera de gas en colapso, una partícula a radio r_0 sentirá la atracción gravitacional debido a la masa contenida dentro de este radio. En principio, esta masa no debería variar durante el colapso ya que la esfera está colapsando completamente[†]. Separando variables e integrando

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\text{ff}}} dt &= \int_0^{r_0} \left[2GM(r_0) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{-1/2} dr \\ &= \left(\frac{1}{2GM(r_0)} \right)^{1/2} \int_0^{r_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)^{-1/2} dr. \end{aligned}$$

Definiendo la variable adimensional $x = r/r_0$, reescribimos la integral del lado derecho como

$$\int_0^1 r_0^{3/2} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2} dx$$

entonces

$$t_{\text{ff}} = \left(\frac{r_0^3}{2GM(r_0)} \right)^{1/2} \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2} dx.$$

La integral da como resultado $\pi/2$, si definimos la densidad promedio como

$$\bar{\rho} \equiv \frac{M}{V} = \frac{3M(r_0)}{4\pi r_0^3}$$

entonces, el tiempo de caída libre se puede escribir como

$$t_{\text{ff}} = \left(\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}} \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Por lo que el colapso en regiones de las nubes moleculares donde $n \sim 10^2 \text{ cm}^{-3}$ debería durar aproximadamente 3×10^6 años, y en regiones mas densas — $n \sim 10^5 \text{ cm}^{-3}$ — ser mas corto, $t_{\text{ff}} \sim 10^5$ años.

[†]Notemos que esto no es necesariamente cierto si la distribución de masa no es esférica.

2.1. Longitud de Jeans

Podemos obtener un resultado bastante similar siguiendo un cálculo más detallado. Un análisis clásico para determinar si una parcela de gas es capaz de colapsar debido a su propia gravedad —y por tanto formar una estrella— fue propuesto por Jeans (1902). En éste se supone un medio homogéneo sobre el cual ocurre una perturbación de densidad muy pequeña en amplitud, y se evalúan las condiciones en las cuales esa perturbación es inestable. Supongamos una parcela aislada, constituida por un fluido no viscoso, sin conductividad térmica, no magnetizado, que puede ser considerado como un gas adiabático ideal y sujeto a su propia gravedad (ver Fig. 2.1). Bajo esta hipótesis la ecuación de continuidad se escribe como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.6)$$

y la ecuación de momento

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \rho \nabla \Phi. \quad (2.7)$$

Es posible obtener el potencial gravitacional Φ mediante la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.8)$$

Siguiendo la teoría de perturbaciones, introducimos pequeñas perturbaciones a las cantidades que describen al sistema

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t), \quad (2.9)$$

$$p = p_0 + p_1(\mathbf{x}, t), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t), \quad (2.11)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \quad (2.12)$$

donde las cantidades con etiqueta «0» indican los valores sin perturbar, constantes, y la etiqueta «1» identifica a las perturbaciones introducidas al sistema. Sustituyendo las ecs. (2.9) y (2.11) en la ec. (2.6) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho_1)(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1)] = 0,$$

despreciando los términos no lineales y recordando que ρ_0 y \mathbf{u}_0 son constantes tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (2.13)$$

Sustituyendo ahora las ecs. (2.9) y (2.11) en la ec. (2.7)

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) + (\rho_0 + \rho_1) (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot \nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \\ = -\nabla (p_0 + p_1) - (\rho_0 + \rho_1) \nabla \Phi, \end{aligned}$$

que al linealizarse queda como

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 - \rho_0 \nabla \Phi_1, \quad (2.14)$$

donde recordamos que Φ_0 es constante. Con la relación $p_1 = \gamma p_0 (\rho_1/\rho_0)$ podemos reescribir la ec. (2.14) como

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_1 = - \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right) \nabla \rho_1 - \rho_0 \nabla \Phi_1. \quad (2.15)$$

Ahora, diferenciamos la ec. (2.13) respecto al tiempo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_1 + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (2.16)$$

y calculamos el gradiente de la ec. (2.15)

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) = - \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right) \nabla^2 \rho_1 - \rho_0 \nabla^2 \Phi_1. \quad (2.17)$$

Restando la ec. (2.16) de la ec. (2.17) y usando la ecuación para el potencial, ec. (2.8) tenemos que

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right) \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0. \quad (2.18)$$

Proponemos soluciones oscilatorias en forma en ondas planas viajeras

$$\rho_1 = \hat{\rho}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.19)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda, \mathbf{x} es el vector de posición, ω es la frecuencia angular y t es el tiempo. La solución propuesta tiene las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 &= -i\omega \hat{\rho}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_1 &= -\omega^2 \hat{\rho}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \\ \nabla \rho_1 &= ik \hat{\rho}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), & \nabla^2 \rho_1 &= -k^2 \hat{\rho}_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación de onda (2.18) obtenemos

$$-\omega^2 + \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right) k^2 = 4\pi G \rho_0. \quad (2.20)$$

Despejando ω y escribiendo la velocidad del sonido como $c_s^2 = \gamma p_0/\rho_0$ encontramos la relación de dispersión

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (2.21)$$

De donde podemos calcular la velocidad de fase de las ondas

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \left(c_s^2 - \frac{4\pi G \rho_0}{k^2} \right)^{1/2}. \quad (2.22)$$

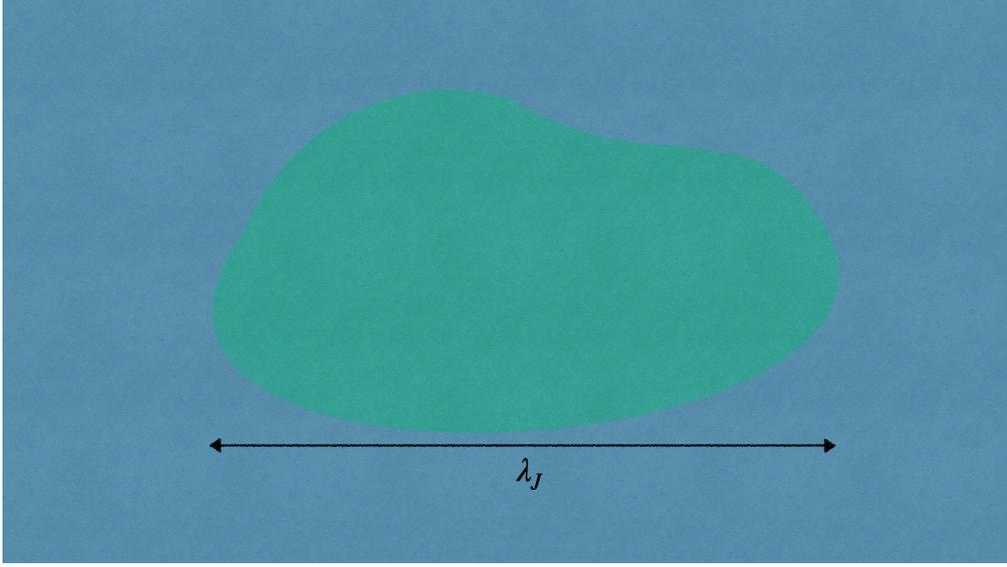


Figura 2.1: Esquema de la longitud de Jeans dentro de una nube molecular, la región verde representa una perturbación de densidad embebida dentro de un medio infinito y homogéneo.

Una inestabilidad puede ocurrir cuando hay un crecimiento exponencial ($\omega^2 < 0$) en la solución oscilatoria de la ec. (2.19). De la relación de dispersión tenemos que

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} < \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}, \quad (2.23)$$

donde hemos escrito el número de onda como $k = 2\pi/\lambda$. Por lo tanto, la longitud crítica para que exista una inestabilidad es

$$\lambda_J \equiv \left(\frac{\pi c_s^2}{G\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

La definimos como longitud de Jeans. Notemos que salvo un factor numérico, es un resultado bastante similar al obtenido en la ec. (2.3). Podemos definir la masa de Jeans como la masa contenida dentro de una esfera de densidad homogénea y radio $\lambda_J/2$

$$M_J \equiv \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{2} \right)^{3/2} = \frac{\pi}{6}\rho_0 \left(\frac{\pi c_s^2}{G\rho_0} \right)^{3/2}. \quad (2.25)$$

Vemos que la masa y la longitud de Jeans dependen del inverso de la raíz cuadrada de la densidad, por lo que en regiones densas la longitud de Jeans tiende a acortarse y la masa de Jeans a disminuir respecto al gas circundante. Además, la longitud y la masa de Jeans son proporcionales a la velocidad del sonido — con el cuadrado y con el cubo de la velocidad del sonido, respectivamente—, i.e., la parcela se encuentra sostenida contra su auto-gravedad debido a su temperatura interna. De acuerdo a la tabla 1.1, si $n \sim 100 \text{ cm}^{-3}$, entonces $\rho \sim 10^{-22} \text{ g cm}^{-3}$ y con $c_s \sim 0.2 \text{ km s}^{-1}$,

obtenemos $\lambda_J \sim 4.5$ pc y $M_J \sim 21 M_\odot$, por lo que dentro de las nubes moleculares la longitud y la masa de Jeans son ampliamente superadas

2.2. Esfera de Bonnor-Ebert

En la sección previa hemos inferido la longitud y masa de Jeans suponiendo que ocurre una perturbación dentro de un medio infinito y homogéneo. Una situación más realista sería considerar la estabilidad de una esfera de gas isotérmica en equilibrio entre la auto-gravedad de la esfera y el gradiente de presión siguiendo el análisis clásico de Bonnor (1956) y Ebert (1957), quienes plantearon este problema como una modificación a la ley de Boyle cuando la gravedad propia del gas no es despreciable. Suponiendo ausencia de otras fuerzas, así como equilibrio hidrostático entre la presión y la gravedad, escribimos la ecuación de momento como

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi = 0 \quad (2.26)$$

en una geometría esférica y considerando únicamente la coordenada radial tenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (2.27)$$

donde ρ es la densidad del gas en cada punto, p es la presión del gas también en cada punto y Φ es el potencial gravitacional debido al propio gas. En el caso isotérmico la ecuación de estado se escribe

$$p = \rho c_s^2 \quad (2.28)$$

donde c_s^2 es la velocidad del sonido característica, que suponemos constante. Sustituyendo la ec. (2.28) en la ec. (2.27) obtenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{c_s^2} \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (2.29)$$

Podemos fácilmente integrar esta última ecuación desde el centro de la esfera, donde $\rho(0) = \rho_c$ y $\Phi(0) = 0$, hasta los valores de la densidad y del potencial sobre la superficie

$$\int_{\rho_c}^{\rho} \frac{1}{\rho'} \frac{d\rho'}{dr} dr = -\frac{1}{c_s^2} \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi'}{dr} dr,$$

entonces

$$\ln \frac{\rho}{\rho_c} = -\frac{1}{c_s^2} \Phi$$

y de esta ecuación obtenemos

$$\rho(r) = \rho_c \exp\left(-\frac{\Phi}{c_s^2}\right). \quad (2.30)$$

Expresión que relaciona las densidades evaluadas en el centro y en la superficie de la esfera con la velocidad del sonido y el potencial gravitacional.

Por otro lado, la ecuación de Poisson en coordenadas esféricas se escribe como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho \quad (2.31)$$

y usando la ec. (2.30) para eliminar la densidad, obtenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho_c e^{-\Phi/c_s^2}, \quad (2.32)$$

la cual es la ecuación diferencial que describe al problema de la esfera isotérmica con densidad y tamaños infinitos, en equilibrio de fuerzas. Es conveniente adimensionalizar la ecuación antes de resolverla. Para esto se definimos el radio adimensional

$$\xi \equiv \left(\frac{4\pi G \rho_c}{c_s^2} \right)^{1/2} r \quad (2.33)$$

y el potencial adimensional

$$\psi \equiv \Phi/c_s^2, \quad (2.34)$$

con lo que la ecuación adimensionalizada se escribe

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi}, \quad (2.35)$$

conocida como la *ecuación isotérmica de Lane-Emden*. En el centro de la esfera, la densidad es igual al valor constante ρ_c y por lo tanto, la derivada de ésta evaluada en ese punto debe anularse,

$$\rho(0) = \rho_c \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{r=0} = 0.$$

Para expresar estas condiciones de frontera en términos de las variables adimensionales basta con notar en la ec. (2.30) que $\rho = \rho_c$ cuando $\Phi = 0$ por lo que el potencial adimensional enunciado en la ec. (2.34) debe anularse en el origen. La derivada de la ec. (2.30) es igual a cero sólo si la derivada del potencial es nula, por lo que la derivada de la ec. (2.34) evaluada en el centro de la esfera también debe ser cero, entonces

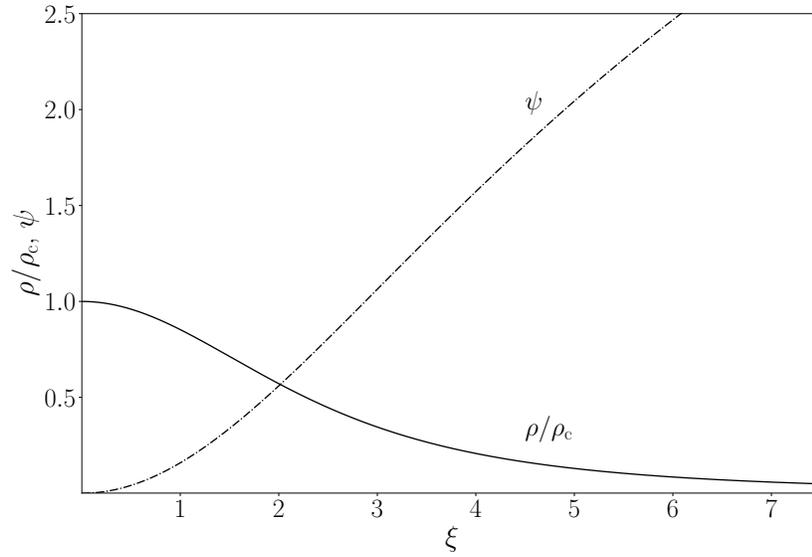
$$\psi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\psi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (2.36)$$

No se conoce solución analítica a la ecuación de Lane-Emden que satisfaga estas condiciones iniciales. La solución numérica la encontramos escribiendo la ec. (2.35) de la forma

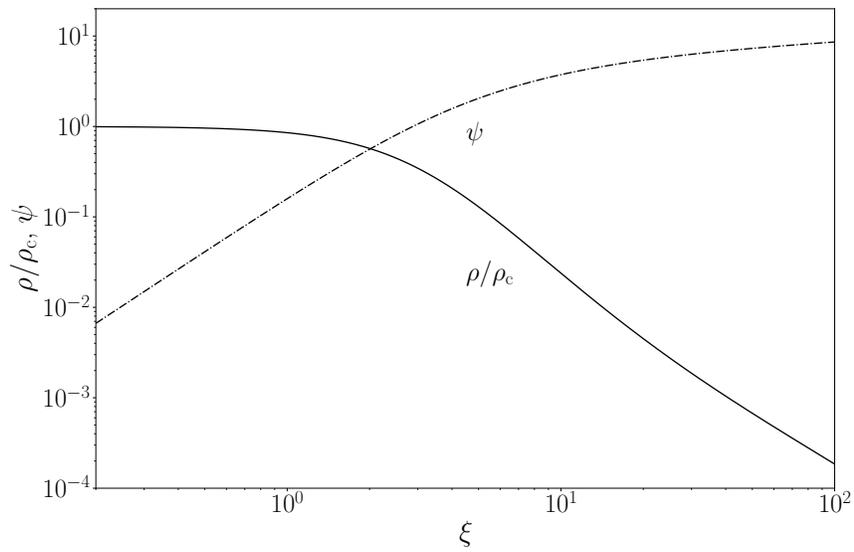
$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + e^{-\psi}. \quad (2.37)$$

Haciendo el cambio de variables

$$u = \psi \quad \text{y} \quad v = \frac{d\psi}{d\xi},$$



(a) Solución numérica de la ecuación de Lane-Emden.



(b) Solución numérica de la ecuación de Lane-Emden en escala logarítmica.

Figura 2.2: En el eje de las abscisas se encuentra graficado el radio adimensional ξ , en el eje de las ordenadas se grafica tanto el contraste de densidades ρ/ρ_c —línea continua— como el potencial adimensional ψ —línea discontinua—. Ambos se encuentran graficados como función del radio adimensional ξ .

obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} v &= \frac{du}{d\xi} \\ \frac{dv}{d\xi} &= \frac{-2}{\xi}v + \exp(-u) \end{aligned} \quad (2.38)$$

con condiciones iniciales

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad v(0) = 0. \quad (2.39)$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones de forma numérica, obteniendo la solución al potencial adimensional ψ graficada con línea punteada en la Fig. 2.2. En el panel (a) la solución se encuentra graficada en escala lineal y en el panel (b) se muestra en escala logarítmica. El potencial adimensional crece monótonicamente y es finito para todo radio. De la solución a la ecuación de la esfera isotérmica calculamos el cociente ρ/ρ_c usando el potencial adimensional ψ definido en la ec. (2.34) en la ec. (2.30), con lo que tenemos que $\rho/\rho_c = e^{-\psi}$. Este contraste está graficado en la Fig. 2.2 con la línea sólida. Notemos que a cada cociente le corresponde un único radio. Al expresar la solución de la ec. (2.35) como cociente de densidades obtenemos una familia infinita de soluciones que toma a la densidad central como parámetro. Puede verse como conforme el radio adimensional crece, el cociente de densidad decrece monótonicamente sin llegar a anularse nunca; por lo tanto, la densidad nunca se hace cero, tampoco la presión y la esfera isotérmica se extiende infinitamente.

La presión de las nubes nunca se hace cero y éstas tampoco se extienden infinitamente. En realidad, la presión de las nubes decae hasta que se iguala con la presión de medio externo. Generalmente conocemos la presión del medio en el cual una nube se encuentra embebida, con lo que podemos fijar el valor de la presión sobre la superficie de la nube, p_0 . Si se conoce la velocidad del sonido dentro de la nube, entonces, con la ec. (2.28) podemos calcular la densidad en la frontera de la nube, ρ_0 . Suponiendo que la nube se aproxima a una esfera y fijando el valor de la densidad en el centro de la distribución, es posible asociar un radio adimensional a la nube mediante la solución que se grafica en la Fig. 2.2, y usando la ec. (2.33) encontrar el radio físico de la nube.

Es conveniente expresar la masa dimensional M de la esfera isotérmica en términos de las variables adimensionales. Para lo cual calculamos la masa de una esfera de radio r y densidad ρ , sustituyendo a éstas por las relaciones de adimensionalización, ecs. (2.33) y (2.34), entonces,

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^{r_0} \rho r^2 dr = 4\pi \int_0^{\xi_0} \rho_c e^{-\psi} \xi^2 \left(\frac{c_s^2}{4\pi G \rho_c} \right)^{3/2} d\xi \\ &= 4\pi \rho_c \left(\frac{c_s^2}{4\pi G \rho_c} \right)^{3/2} \int_0^{\xi_0} e^{-\psi} \xi^2 d\xi \\ &= 4\pi \rho_c \left(\frac{c_s^2}{4\pi G \rho_c} \right)^{3/2} \int_0^{\xi_0} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) d\xi. \end{aligned}$$

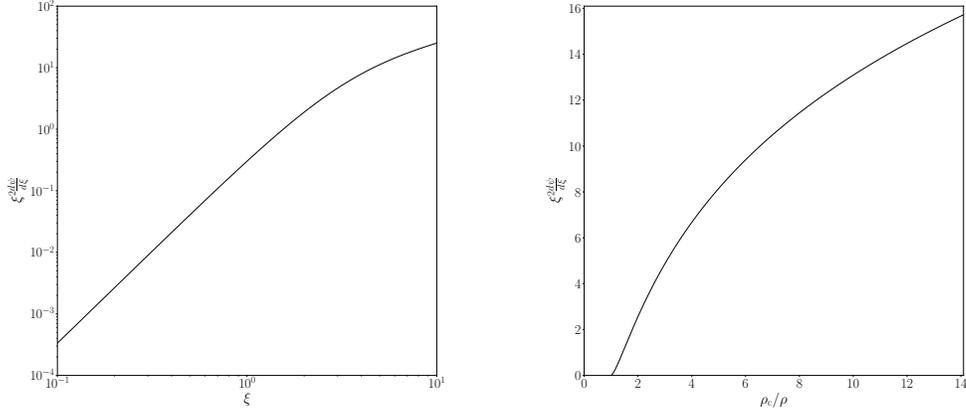
(a) Factor $\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$ en función de ξ .(b) Factor $\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$ en función de ρ_c/ρ .

Figura 2.3: En el eje de las abscisas se grafica el radio adimensional, en el eje ordenado —también adimensional— se grafica el factor $\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$. Ambas gráficas se obtienen al resolver numéricamente la ecuación de Lane-Emden (Fig. 2.2).

donde ξ_0 es el radio adimensional de la esfera. Podemos usar la ec. (2.35) para reescribir la integral de la última igualdad, con lo que la masa dimensional se expresa como

$$M = 4\pi\rho_c \left(\frac{c_s^2}{4\pi G\rho_c} \right)^{3/2} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi_0}. \quad (2.40)$$

Definimos una masa adimensional

$$m \equiv \frac{p_0^{1/2} G^{3/2} M}{c_s^4}, \quad (2.41)$$

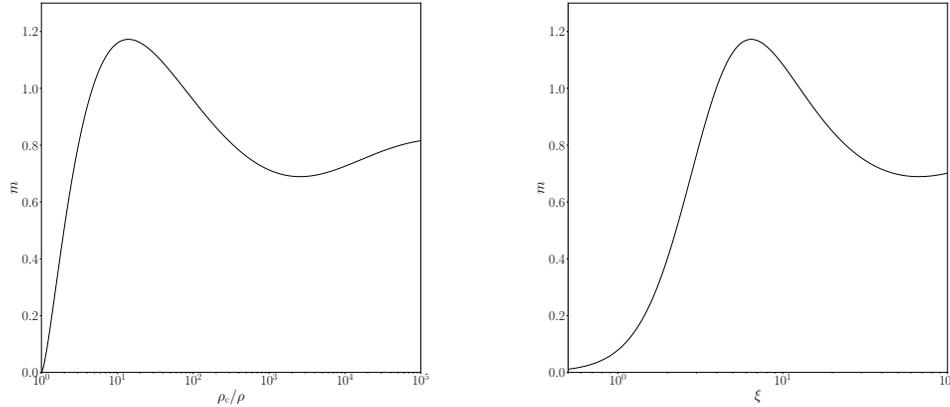
donde p_0 es la presión evaluada en ξ_0 . Empleándola en la ec. (2.40) para eliminar M , tenemos que

$$\frac{m c_s^4}{p_0^{1/2} G^{3/2}} = 4\pi\rho_c \left(\frac{c_s^2}{4\pi G\rho_c} \right)^{3/2} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi_0}. \quad (2.42)$$

Despejando m y usando la ec. (2.28) finalmente obtenemos

$$m = \left(4\pi \frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{-1/2} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi_0}, \quad (2.43)$$

donde el último factor puede obtenerse de la solución numérica, Fig. 2.3. En la Fig. 2.4 panel (a) se encuentra graficada la masa adimensional como función del contraste de densidad ρ_c/ρ y en el panel (b) como función de ξ . Podemos ver que cuando $\rho_c/\rho_0 = 1$,



(a) Masa adimensional de una esfera isotérmica en función de ρ_c/ρ . (b) Masa adimensional de una esfera isotérmica en función de ξ .

Figura 2.4: Tanto el eje de las abscisas como el de las ordenadas son adimensionales. En el panel (a) se grafica la masa adimensional como función del cociente de densidades ρ_c/ρ . Las nubes cuyo cociente de densidad se localice a la derecha del primer máximo — $\rho_c/\rho > 14.1$ — son gravitacionalmente inestables. En el panel (b) también se grafica la masa adimensional, pero como función del radio adimensional. Igualmente, las nubes que correspondan al lado derecho del primer máximo — $\xi = 6.5$ — son inestables. La masa alcanza un máximo valor $m = 1.18$.

$m = 0$, ya que en ese punto, $\xi = 0$. Al incrementarse el cociente de densidades, m crece hasta alcanzar el máximo $m = 1.18$ en $\rho_c/\rho = 14.1$ o, alternativamente, en $\xi = 6.5$. Después, la masa decrece hasta alcanzar un mínimo en $m = 0.695$, para finalmente oscilar alrededor de $m = 0.798$.

Como ya mencionamos, al resolver la ecuación de Lane-Emden obtenemos una familia de soluciones, sin embargo, no todas las soluciones son estables gravitacionalmente. Un incremento en la presión sobre la superficie causa una compresión de la nube y por lo tanto un aumento en la presión interna. Lo que a su vez ocasiona que la nube se reexpanda. Supongamos ahora una nube ubicada a la izquierda del primer máximo de la gráfica del panel (a) de la Fig. 2.4 y cuya masa es constante. Entonces, de acuerdo a la ec. (2.41), si p_0 aumenta, m crece y por lo tanto también ρ/ρ_c . Como la presión es directamente proporcional a la densidad y decrece monótonicamente hacia el exterior, la presión central y la presión promedio deben aumentar a valores superiores a p_0 .

Siguiendo el análisis de Palla y Stahler (2004), siempre que se aplica una perturbación sobre una nube en equilibrio aparecen oscilaciones normales en su interior. Una cantidad física que oscila en modo normal se encontrará en un instante oscilando con la misma frecuencia y fase en todos los puntos de la nube. Sin embargo, en general, la amplitud de la cantidad física que oscila medida en un punto no coincidirá

con la amplitud en otro punto. Es posible escribir cada variable física como la suma de su valor en equilibrio más una perturbación oscilatoria —como hicimos en la sección pasada—. Por ejemplo, para una nube isotérmica con oscilaciones esféricamente simétricas, la densidad es la parte real de

$$\rho(r, t) = \rho_0(r) + \delta\rho(r)e^{i\omega t} \quad (2.44)$$

donde $\rho_0(r)$ es la densidad sin perturbar evaluada en r , $\delta\rho(r)$ es la amplitud compleja y la frecuencia ω es idéntica en toda la nube en un instante t . Introduciendo perturbaciones de este tipo en la ecuación de estado, en la ecuación de Poisson y en la ecuación de momento, y conservando los términos lineales, es posible resolver para las eigen-funciones $\delta\rho_n(r)$ con eigen-valores ω_n^2 . Si $\omega_n^2 > 0$ las perturbaciones oscilarán. Por el contrario, si $\omega_n^2 < 0$, la amplitud de las oscilaciones crecerá exponencialmente. Para un sistema en equilibrio hay un número infinito de modos normales, cada uno caracterizado por el número de nodos asociados con ellos. El primer modo no tiene nodos y a su vez se encuentra relacionado con el valor mínimo de ω_n^2 . El primer armónico tiene un solo nodo y se encuentra asociado al siguiente ω_n^2 positivo.

Ahora, es posible analizar lo que sucede cuando una configuración isotérmica pasa por un punto de máximo. Para esto suponemos dos esferas con la misma masa m , pero ubicadas una a cada lado del punto de máximo, y fijamos p_0 y c_s , iguales para ambas esferas. Entonces, el radio y la densidad central de las esferas diferirá una de la otra. Debido a que la masa de ambas esferas es igual, podemos interpretar los pequeños desplazamientos que ligan a cada elemento de masa de una esfera con los elementos de masa de la otra como un modo normal de frecuencia cero. Entonces, al pasar por un mínimo o máximo a lo largo de la curva de masa, algún modo normal se somete a una transición de estabilidad. Las nubes con el menor contraste de densidad son estables, por lo que sus modos normales tienen valores positivos para ω^2 . Justo en el máximo de masa los modos fundamentales se hacen inestables y por lo tanto, los modos normales siguientes deben recorrer trayectorias sobre la curva de masa cada vez más largas para pasar por la transición de estabilidad. Las perturbaciones son inevitables en un ambiente interestelar realista, entonces, la presencia de al menos un modo de inestabilidad garantiza que la esfera isotérmica asociada no sea estable. Una nube inestable puede tanto expandirse como contraerse, sin embargo, en la realidad, ninguna nube es capaz de dispersarse infinitamente tras sufrir una compresión, por lo que la presencia de al menos un modo inestable es suficiente para causar un colapso gravitacional (ver p. ej., Palla & Stahler, 2004).

Usando la ec. (2.41) definimos la masa de Bonnor-Ebert

$$M_{\text{BE}} \equiv \frac{m_1 c_s^4}{p_0^{1/2} G^{3/2}}, \quad (2.45)$$

donde el límite $m_1 = 1.18$ se obtiene de la Fig. 2.4 Este límite establece la masa máxima que puede tener una nube isotérmica, aproximadamente esférica y en equilibrio. La masa de Bonnor-Ebert es el límite que establece cuándo el modo fundamental se hace inestable.

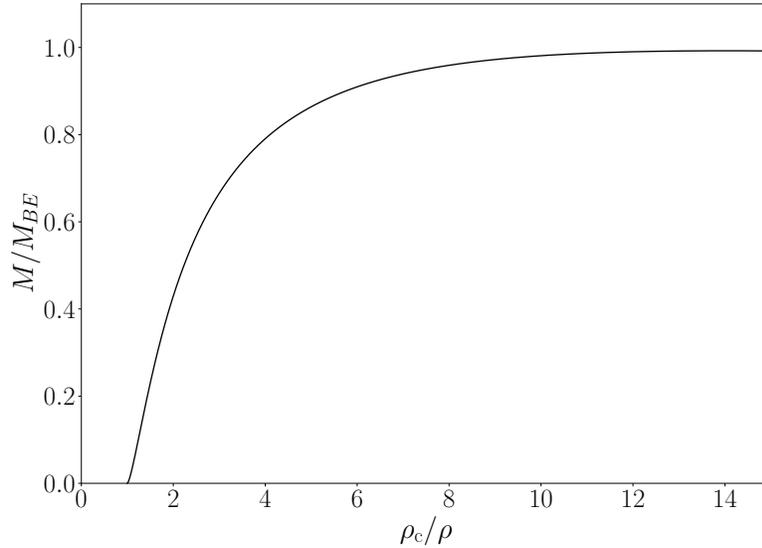


Figura 2.5: Cociente M/M_{BE} . Podemos ver como cuando el cociente de densidades se hace al límite $\rho/\rho_c = 14.1$, la masa de la esfera tiende a la masa de Bonnor-Ebert.

Al despejar la presión de la ec. (2.45) encontramos la presión crítica sobre la cual la esfera deja de ser estable

$$p_c = 1.4 \frac{c_s^8}{M^2 G^3}, \quad (2.46)$$

donde M es la masa de la nube. En la Fig. 2.5 se observa el cociente entre la masa de una esfera y la masa de Bonnor-Ebert como función del cociente de densidades. Cuando éste tiende al límite de estabilidad, el cociente de masas tiende a uno, por lo que en este punto se alcanza es que se alcanza la masa máxima.

Por otro lado, el radio crítico de la nube lo obtenemos despejando r de la ec. (2.33) y usando el límite de estabilidad del radio adimensional $\xi = 6.5$, que puede obtenerse de la Fig. 2.4

$$r_c = 1.83 \left(\frac{c_s^2}{G\rho_c} \right)^{1/2}. \quad (2.47)$$

Notemos que el cociente r_c/λ_J es prácticamente igual a uno. Usando la ec. (2.40) para eliminar ρ_c , podemos expresar el radio crítico en función de la masa de la nube

$$r_c = 6.48 \frac{GM}{c_s^2} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=6.5} = 0.41 \frac{GM}{c_s^2} \quad (2.48)$$

donde el último factor de la primera igualdad se puede obtener de la Fig. 2.3. Esta ecuación establece el radio mínimo para que una esfera isotérmica —soportada por la presión térmica contra su propia gravedad— sea estable.

Dentro de las nubes moleculares la presión p/k varía entre 10^4 K cm^{-3} a 10^5 K cm^{-3} , mientras que la velocidad del sonido es $\sim 0.24 \text{ km s}^{-1}$ entonces la masa de Bonnor-Ebert debe rondar entre 3 y $9 M_\odot$, coincidiendo con la masa típica de los núcleos de baja masa. Sin embargo, la masa de los núcleos densos masivos, es hasta tres ordenes de magnitud superior a la masa de los núcleos de baja masa, superando ampliamente la masa de Bonnor-Ebert[†]

Es posible reescribir la ec. (2.45) como

$$M_{\text{BE}} = \frac{m_1 c_s^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}}$$

donde se hemos usado la relación $p = \rho c_s^2$. Salvo por un factor numérico la masa de Jeans y la masa de Bonnor-Ebert son idénticas. Recordando que $m_1 = 1.18$, podemos calcular el cociente de la masa de Jeans respecto a la masa de Bonnor-Ebert $M_J/M_{\text{BE}} \sim 2.46$. Vemos que el resultado que obtuvimos suponiendo equipartición de energía al comienzo del capítulo, el resultado obtenido siguiendo el análisis de Jeans (sección 2.1) y el calculo numérico anterior arrojan resultados muy similares.

2.3. Esfera isotérmica

Obtenemos una solución particular de la ecuación de Lane-Emden haciendo el cambio de variable $x = 1/\xi$ de manera tal que $dx = -1/\xi^2 d\xi = -x^2 d\xi$, con lo que reescribimos la ec. (2.35) como

$$x^4 \frac{d^2 \psi}{dx^2} = e^{-\psi}. \quad (2.49)$$

Esta ecuación admite la siguiente solución singular en el origen (ver p. ej., Chandrasekhar, 1958)

$$e^{-\psi} = 2x^2, \quad (2.50)$$

de forma tal que la ecuación (2.30) se reescribe como

$$\frac{\rho}{\rho_c} = e^{-\psi} = 2x^2 = \frac{2}{\xi^2} = \frac{2c_s^2}{4\pi G \rho_c r^2}, \quad (2.51)$$

obtenemos así la solución dimensional

$$\rho = \frac{c_s^2}{2\pi G r^2}, \quad (2.52)$$

Esta solución se encuentra graficada en la Fig. 2.6 (línea continua). Aunque es singular en el origen y por lo tanto válida para $r > 0$, su amplio uso se encuentra justificado

[†]Los núcleos masivos al superar ampliamente la masa Jeans no pueden ser descritos por el modelo de Bonnor-Ebert; estos deberían fragmentarse en núcleos estables de menor masa. Se cree que los núcleos masivos se encuentran alimentados por flujos externos provenientes de escalas mayores (ver p. ej., Liu et al., 2015).

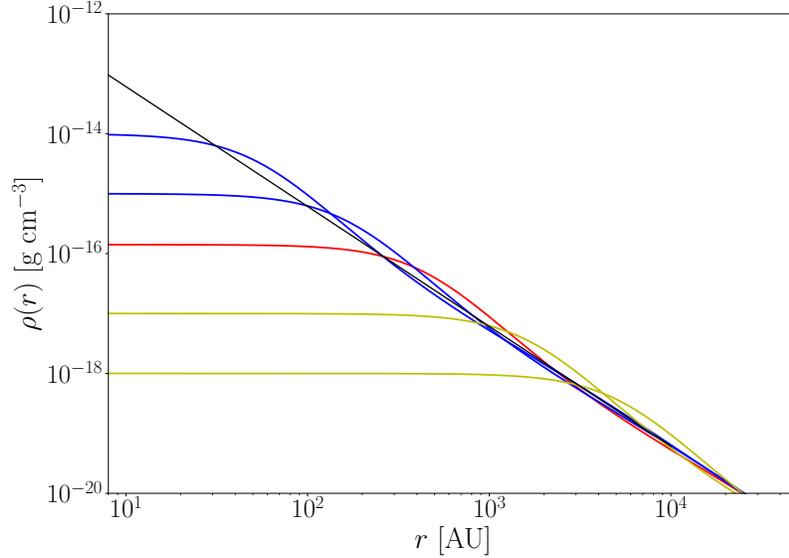


Figura 2.6: La línea continua negra es la solución singular dimensional a la ecuación de Lane-Emden. La línea roja marca el límite de estabilidad $\rho/\rho_c = 14.1$ suponiendo $\rho_c = 10^{-17}$. Las curvas azules que se encuentran sobre esta muestran configuraciones de densidad inestables, mientras que las curvas amarillas localizadas por debajo son configuraciones estables. En esta gráfica se puede apreciar la potencia del análisis adimensional de la ecuación de Lane-Emden, pese a que todas las curvas forman parte de una familia de soluciones, no todas son soluciones estables.

porque a grandes distancias la solución numérica y la solución singular convergen, como bien podemos observar en la gráfica de la Fig. 2.6. Tanto la densidad como la presión de la esfera isotérmica nunca se anulan, mas bien tienden asintóticamente a un valor constante. Así que es indiferente usar la solución singular o el perfil $\rho \sim r^{-2}$ además, aunque lejos del centro de la esfera la presión nunca se anula, ésta tiende a un valor equiparable a la presión del medio externo, tal que éste sea capaz de confinar a la esfera. La esfera isotérmica singular es inestable para todos los modos normales esféricamente simétricos. Si calculamos el radio que debería tener una esfera confinada por la presión de una nube molecular, obtenemos 0.07 a 0.24 pc, coincidiendo de nuevo con los núcleos de baja masa. La masa de una esfera de radio r con densidad descrita por la solución isotérmica es

$$M(r) = \int_0^r 4\pi \frac{c_s^2}{2\pi G r'^2} r'^2 dr' = \frac{2c_s^2}{G} r. \quad (2.53)$$

2.4. Modelo de Larson

Hoyle (1953) notó que si la masa de la nube se mantiene constante conforme el colapso progresa isotérmicamente, la densidad de la nube debe aumentar y la masa de Jeans disminuir. Consecuentemente, el número de masas de Jeans dentro de la nube aumentará, causando nuevos colapsos a escalas cada vez más pequeñas. Este proceso se detiene solo cuando el gas deja de ser isotérmico, lo cual ocurre cuando la densidad es suficientemente alta $\sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ como para volver al gas ópticamente grueso. Una vez que el gas es ópticamente grueso, deja de enfriarse, y el colapso se vuelve adiabático, de forma tal que la energía térmica aumenta más rápido, permitiendo que el colapso se detenga.

Posteriormente, Larson (1969) realizó simulaciones numéricas de una nube esférica gravitacionalmente inestable que colapsa. Por simplicidad ignoró la rotación de la nube, campos magnéticos y turbulencia interna. También supuso una densidad de masa superior a $10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ $\sim n > 10^4 \text{ cm}^{-3}$, necesaria para iniciar el colapso gravitacional de una protoestrella con aproximadamente una masa solar. Bajo estas condiciones el hidrógeno se encuentra en forma molecular. Con el propósito de mantener fija la frontera de la nube, Larson mantuvo el volumen de la esfera constante. Como condición inicial impuso que la nube se encontrara en reposo con densidad uniforme. Además, mantuvo la temperatura inicial de la nube $\sim 10 \text{ K}$ constante desde el inicio del colapso cuando la densidad de ésta era igual a $10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ $\sim n \sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$ hasta que el núcleo de la nube alcanzó una densidad de $10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$ $\sim n \sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, suficiente para que el gas pase a ser ópticamente grueso. Para calcular el radio inicial de la nube esférica usó la ec. (2.48) en la forma

$$R_c = 0.41 \frac{GM}{\mathcal{R}T}, \quad (2.54)$$

donde M es la masa de la nube, \mathcal{R} es la constante de los gases ideales y T la temperatura. Si $M = M_\odot$ y $T = 10 \text{ K}$ se tiene que $R_c = 1.63 \times 10^{17} \text{ cm}$ $\sim 0.2 \text{ pc}$ es suficientemente pequeño para asegurar que la nube colapse.

Los resultados encontrados por Larson, (1969) se pueden resumir de la siguiente manera:

- I. *Fase isotérmica inicial.* Debido a las condiciones de homogeneidad impuestas, inicialmente no existen gradientes de presión, por lo que el colapso de toda la nube se da en caída libre[†]. Entonces, tras iniciarse el colapso, la densidad aumenta alrededor del centro de la nube y disminuye cerca de la frontera. La rarefacción del material en esta región de la nube da origen a la aparición de un gradiente de presión. Éste se opone al colapso gravitacional, lo que ocasiona que el tiempo de colapso cerca de la frontera se alargue respecto a regiones más interiores de la nube, donde —pese al gradiente de presión— el colapso continua

[†]En ese escenario, una partícula localizada en la frontera de la esfera requerirá que transcurra el tiempo de caída libre completo para colapsar sobre el centro de la nube, mientras que una partícula más cercana al centro empleará solo una fracción de éste.

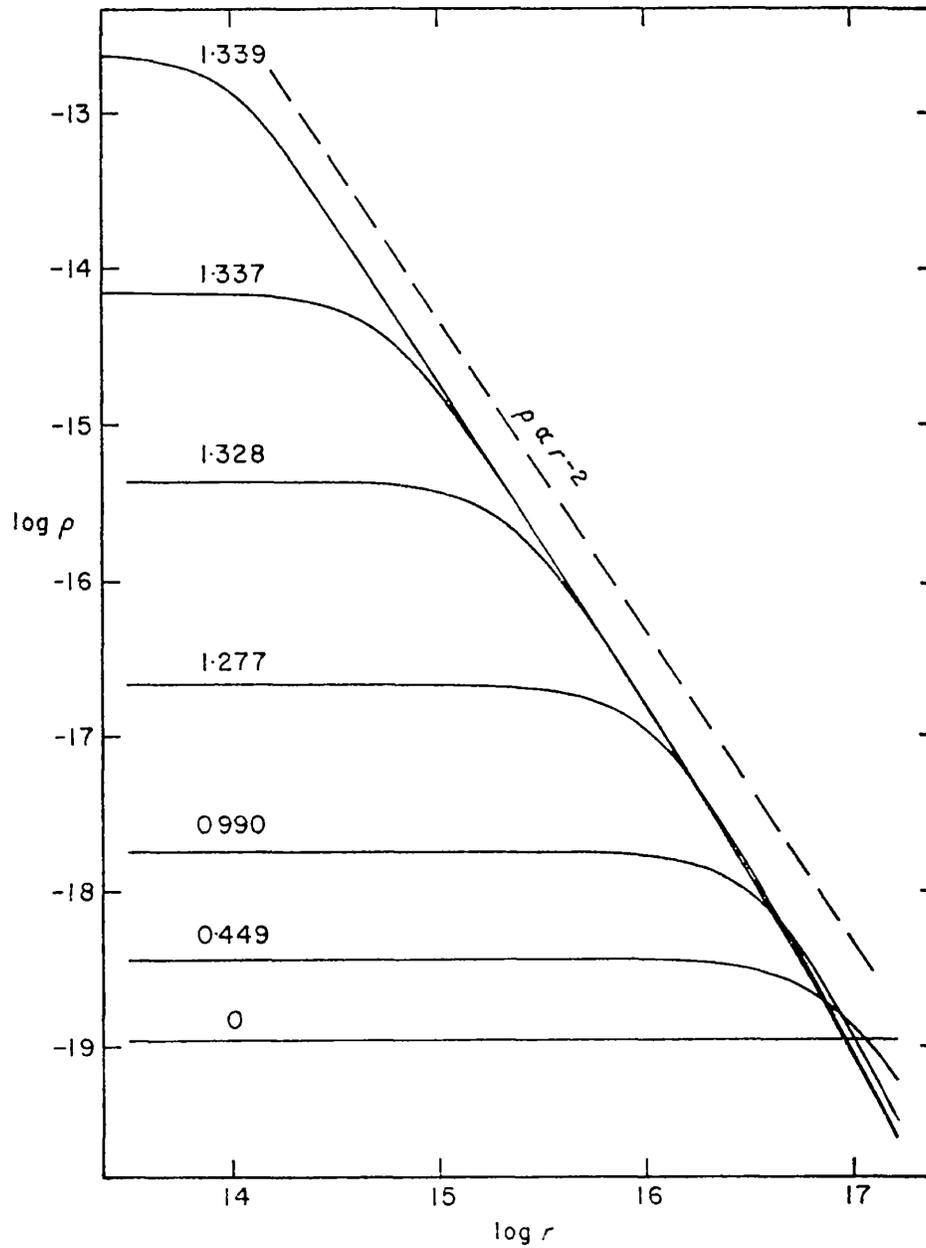


Figura 2.7: Gráfica obtenida de Larson (1969). Se muestra el perfil de densidad de la nube que colapsa. En el eje de las abscisas se grafica el radio [cm], mientras que en el eje de las ordenadas se grafica la densidad [g cm^{-3}]. Las curvas se encuentran identificadas con el tiempo transcurrido desde el inicio del colapso como múltiplos de 10^{13} s. Vemos como conforme avanza el tiempo, la distribución de densidad tiende a $\rho \propto r^{-2}$.

en caída libre. Consecuentemente, la distribución de densidad se ve alterada, apareciendo un pico en el centro de la esfera. Este aumento de densidad hace que el tiempo de caída libre cerca del centro disminuya respecto a las regiones externas —recordar que el tiempo de caída libre es inversamente proporcional a la densidad—, aumentando todavía más el pico de la distribución de densidad. A medida que procede el colapso, el aumento de densidad se da en regiones cada vez más pequeñas alrededor del centro y a lo largo de escalas de tiempo que también cada vez son más cortas, mientras que en las regiones más externas —debido al gradiente de presión y disminución del tiempo de caída libre— el gas permanece inerte[†]. La distribución de densidad tiende a una relación $\rho \propto r^{-2}$ tal como se muestra en la Fig. 2.7 obtenida de Larson (1969).

- II. *Formación del primer núcleo hidrostático.* Al alcanzarse una densidad central de $10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$ el gas del centro de la nube se hace ópticamente grueso. El calor generado por el colapso gravitacional no puede ser irradiado, por lo que la compresión deja de ser isotérmica y pasa a ser adiabática. Tanto la temperatura como la presión en el centro aumentan lo suficiente ($\gamma \geq 4/3$) como para detener el colapso y formar un primer núcleo en equilibrio hidrostático. La masa inicial del núcleo es de 10^{31} g ($\sim 0.01M_{\odot}$) y su radio es de $6 \times 10^{13} \text{ cm}$ ($\sim 800 R_{\odot}$), la temperatura es de 170 K y la densidad es de $2 \times 10^{-10} \text{ g cm}^{-3}$ ($n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$). En la región de la nube fuera del núcleo el colapso continúa en caída libre formándose un frente de choque sobre la superficie del núcleo, donde el material es frenado abruptamente.
- III. *Formación del segundo núcleo estelar.* Cuando la masa de núcleo se ha duplicado y el radio disminuido a la mitad, la temperatura alcanza un valor de $2 \times 10^3 \text{ K}$, suficiente para disociar la molécula de hidrógeno. El cociente de calores específicos γ toma valores menores a $4/3$ provocando que el material aproximadamente isotérmico se vuelva inestable y colapse gravitacionalmente. En forma análoga al primer colapso, aparece un pico en la distribución de densidad en el centro del núcleo ya formado. El colapso continúa hasta que las moléculas de hidrógeno se encuentran disociadas prácticamente en su totalidad, la presión en esta región central aumenta de nuevo, lo suficiente para detener el colapso. Un segundo núcleo, interno al primero, en equilibrio hidrostático entonces aparece con temperatura de $2 \times 10^4 \text{ K}$, densidad de $2 \times 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$ ($n \sim 10^{21}$), masa y radios iniciales de $3 \times 10^{30} \text{ g}$ ($1.5 \times 10^{-3} M_{\odot}$) y $9 \times 10^{10} \text{ cm}$ ($3 R_{\odot}$).
- IV. *Fase de acreción principal.* Por alrededor de 10 a 100 años ambos núcleos coexisten, cada uno con su propio frente de choque. Pasado esto, la masa del primer núcleo es completamente acretada por el núcleo más pequeño, desapareciendo el primer frente de choque. Debido a la opacidad de los granos de polvo del material que está siendo acretado, la nube permanece ópticamente gruesa hasta que la masa ha caído en su totalidad al núcleo, emitiendo principalmente en el infrarrojo. Posteriormente el núcleo se contrae, mientras esto sucede el flujo de

[†]Lo que justifica que como condición inicial la nube tenga una frontera fija.

energía cinética aumenta superando al flujo de energía proveniente del interior del núcleo. Con esto, el flujo radiativo que escapa del frente de choque es equivalente al flujo de energía cinética que entra a través del choque. El núcleo deja de contraerse, pero la masa crece y con esto la velocidad con la que el material cae sobre el núcleo, incrementado la temperatura superficial y la luminosidad.

- V. *Últimas etapas.* Cuando la mitad de la masa ha caído al núcleo, el flujo de energía cinética hacia el núcleo decrece y con esto la temperatura y la luminosidad. El máximo se alcanza cuando $T = 8300$ K, $L = 30 L_{\odot}$ y $M = 0.56 M_{\odot}$, 8×10^4 años después de la formación del primer núcleo. Después de 10^6 años la masa de la protoestrella ha sido en su totalidad acretada al núcleo por lo que la envoltura se hace transparente permitiendo que el núcleo sea visible y el flujo de energía cinética se haga despreciable comparado con el flujo radiativo proveniente del interior. Entonces, se puede afirmar que el flujo radiativo emitido por la superficie del núcleo proviene plenamente del interior de este cuando $R = 2 R_{\odot}$, $T = 4400$ K y $L = 1.3 L_{\odot}$.

3 Fuerzas de marea

La ley del cuadrado inverso de Newton es suficiente para explicar las interacciones gravitacionales entre masas puntuales bajo condiciones clásicas. Esta aproximación, claramente, no corresponde a la realidad física, en la cual los cuerpos distan mucho de ser masas puntuales. Supongamos un cuerpo inmerso dentro de un campo gravitacional y suficientemente alejado de la fuente del campo, tal que éste puede ser aproximado como el campo debido a una masa puntual. Nos percatamos fácilmente que la fuerza aplicada sobre una partícula de este cuerpo diferirá de la fuerza aplicada sobre otra partícula del mismo, siempre que las partículas se localicen a distancias distintas de la *masa puntual*. En otras palabras, suponiendo que el campo depende únicamente de la distancia a la fuente, las partículas del cuerpo, cercanas a la fuente, experimentarán un campo más intenso que aquellas más lejanas.

Esta discusión motiva a introducir el concepto de *fuerzas de marea gravitacionales*. Cuando dos cuerpos interactúan gravitacionalmente entre sí, se dice que uno de los cuerpos ejerce una fuerza de marea sobre el otro cuerpo como efecto de la variación — gradiente— de la fuerza —debido al primero— dentro del segundo. La fuerza de marea ejercida por el primer cuerpo sobre un punto del segundo será la diferencia entre la fuerza gravitacional debido al primero evaluada en ese sitio y la fuerza gravitacional media que actúa sobre la totalidad del segundo cuerpo (ver p. ej., French, 1971; Murray & Dermott, 1999; Masi, 2007), entonces

$$F_i^r = F_i(r_i) - \langle F_i \rangle. \quad (3.1)$$

La fuerza gravitacional media es equivalente a la fuerza aplicada sobre el centro de masa, por lo tanto

$$F_i^r = \Delta F_i = F_i(r_i) - F_i(r_i^{\text{cm}}), \quad (3.2)$$

si $r_i = r_i^{\text{cm}}$, entonces el objeto es una masa puntual y por lo tanto no habrá fuerzas de marea. El efecto de las mareas no es despreciable y generalmente se les relaciona con fenómenos disruptivos más que con compresiones. En la Tierra observamos cómo las posiciones de la Luna y el Sol provocan un aumento en el nivel del mar debido a la fuerza de marea ejercida por éstos sobre la Tierra. Si el gradiente de la fuerza es mayor a la gravedad propia de un cuerpo sobre el cual actúa el campo o, en general, a la fuerza que le da cohesión, éste se romperá acorde al conocido *límite de Roche*.

Los ejemplos pasados corresponden a casos de mareas disruptivas, sin embargo, en algunos casos las mareas también pueden ser compresivas. Esto lo podemos ver construyendo un modelo simple, ver Fig. 3.1. Suponemos una distribución homogénea

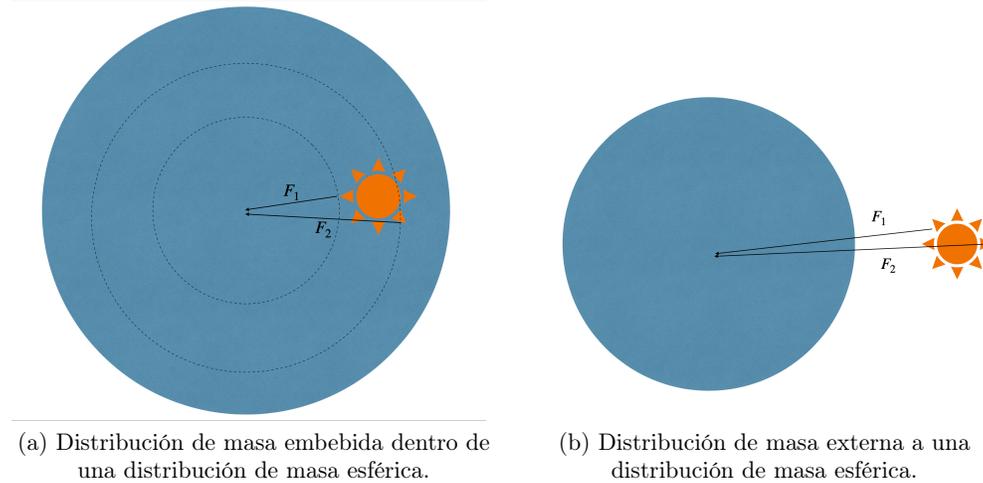


Figura 3.1: En el panel (a) observamos una distribución de masa embebida dentro de una distribución esférica. Debido a que la circunferencia externa encierra mayor masa que la circunferencia interna, la fuerza gravitacional F_2 que actúa sobre las partes más externas de la distribución interna es mayor que la fuerza F_1 que actúa sobre las partes más cercanas al centro de la distribución esférica. Como resultado, la distribución interna será comprimida. En el panel (b) F_2 es menor que F_1 ya que la masa de la distribución esférica permanece constante y la distancia al centro de masa aumenta. Como consecuencia, la distribución externa tenderá a ser desgarrada.

de radio R y masa $M = (4/3)\pi\rho_0 R^3$, donde ρ_0 es la densidad de la esfera. Si nos situamos fuera de la distribución, debemos calcular la fuerza por unidad de masa como si fuese producida por una masa puntual $F(r) = -GM(r)/r^2$, entonces $\partial F/\partial r = 2GM/r^3 > 0$ y obtenemos que la fuerza de marea en el exterior de la distribución es disruptiva. Supongamos ahora que dentro de la misma distribución se localiza una segunda distribución a una cierta distancia $r < R$ del centro de la primera, es decir, tenemos una distribución embebida dentro del potencial de otra. Como es el caso de una galaxia embebida en un halo de materia oscura. Dentro de la distribución tenemos que la fuerza por unidad de masa, en un punto arbitrario, es $F(r) = -4\pi G\rho_0 r/3$, por lo que $\partial F/\partial r = -4/3\pi G\rho_0 < 0$, y entonces la fuerza de marea que actúa sobre la segunda distribución resulta ser compresiva. Esto se debe a que $F = GM/r = G(4/3)\pi\rho_0 r^3/r^2 \propto r$, de manera tal que la fuerza incrementa con la distancia al centro, ya que al crecer el radio, éste cada vez se encierra más masa (Masi, 2007).

3.1. Tensor de marea

Para calcular la fuerza de marea ejercida por un cuerpo o distribución de masa sobre otro cuerpo es necesario definir un marco de referencia y un sistema coordenado. Por simplicidad hacemos que el centro de masa de la distribución de masa coincida con el origen. Además, suponemos que el potencial gravitacional debido al primer objeto

o distribución de masa es conocido, por lo que basta que calculemos el gradiente del potencial para obtener la fuerza de marea. Así, definimos la fuerza gravitacional por unidad de masa como el negativo del gradiente de la función potencial

$$F_i \equiv -\partial\Phi/\partial x_i,$$

por otro lado, definimos al *tensor de marea* como

$$\tau_{ik} \equiv -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_k} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad (3.3)$$

que es un tensor de segundo rango y donde $i, k = 1, 2, 3$. El tensor τ_{ik} es igual al operador Jacobiano aplicado sobre la fuerza gravitacional F_i y el negativo de la matriz Hessiana aplicada a la función potencial Φ

$$\tau_{ik} = J_k(F_i) = \partial F_i/\partial x_k = -H_{ik}(\Phi) = -\partial^2\Phi/\partial x_i\partial x_k.$$

Mientras que el negativo de la traza de τ_{ik}

$$-\delta_{ik}\tau_{ik} = -\tau_{ii} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} = 4\pi G\rho(x_i),$$

es la ecuación de Poisson, siendo ésta un invariante del tensor de mareas (Masi, 2007).

Por simplicidad elegimos un sistema coordenado esférico centrado en el origen[†] y suponemos un potencial que es únicamente función de la coordenada radial $\Phi(r)$. Entonces, en forma matricial, escribimos el tensor de marea como

$$\tau = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F_r}{r} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

En general, el tensor de mareas es simétrico debido al carácter conservativo de la fuerza gravitacional^{††} además, en este caso particular los términos fuera de la diagonal son nulos debido a simetría impuesta.

3.1.1. Fuerza de marea debido a una masa puntual

Supongamos el potencial debido a una masa puntual, por conveniencia usemos una geometría esférica, donde la masa se encuentra en el origen del sistema. Bajo estas suposiciones escribimos el potencial como $\Phi(r) = -GM/r$. Para los términos diagonales del tensor de marea obtenemos

$$\tau_{rr}^{\text{mp}} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = \frac{2GM}{r^3} \quad (3.5)$$

$$\tau_{\theta\theta}^{\text{mp}} = \tau_{\varphi\varphi}^{\text{mp}} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{GM}{r^3}. \quad (3.6)$$

[†]Sin embargo también es posible calcular el tensor de mareas en coordenadas cartesianas. Valluri (1993) lo utiliza de esta forma para estudiar el calentamiento por mareas compresivas.

^{††}Como se vio en la derivación del teorema virial en la introducción.

Por lo tanto, escribimos el tensor de marea debido a una masa puntual τ^{mp} como

$$\tau^{\text{mp}} = \begin{pmatrix} \frac{2GM}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GM}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GM}{r^3} \end{pmatrix} = \frac{GM}{r^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

El signo de los eigenvalores determina si hay disrupción —signo positivo— o compresión —signo negativo— en la dirección asociada. Entonces, dado un cuerpo sobre el que actúa la marea debido a una masa puntual, el cuerpo será estirado en la dirección radial y contraído en las direcciones angulares.

Las aplicaciones del tensor de mareas son variadas y completamente compatibles con los análisis clásicos. Un ejemplo es el *límite de Roche*, como lo muestra Masi (2007). Escribamos ahora la ec. (3.5) en forma diferencial

$$\tau_{rr} dr = -\frac{\partial F_r}{\partial r} dr = \frac{2GM}{r^3} dr$$

e igualémosla con el campo gravitacional en la superficie de un cuerpo —satélite— de masa \tilde{M} y radio Δr

$$\frac{2GM}{r^3} \Delta r = -\frac{G\tilde{M}}{\Delta r^2},$$

despejando Δr obtenemos el famoso límite de Roche

$$\Delta r_{\text{Roche}} = \left(\frac{\tilde{M}}{2M} \right)^{1/3} r_{\text{cm}}, \quad (3.8)$$

donde r_{cm} es la distancia entre los centros de masa de ambos cuerpos y Δr_{Roche} es el radio del satélite. Este límite establece la distancia mínima a la cual un satélite puede orbitar otro cuerpo tal que su propia gravedad evite que sea destruido por la marea inducida por el otro cuerpo.

3.1.2. Marea debido a una distribución esférica no homogénea

Para calcular el tensor de mareas dentro de una distribución esférica no homogénea en un punto localizado a distancia r del centro de la distribución debemos considerar tanto la masa contenida dentro de una esfera de radio r con centro en el centro de masa, como la masa externa a ésta esfera. El potencial debido a una distribución de masa heterogénea —que depende únicamente de la coordenada radial— en una geometría esférica es

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{esf}}(r) &= -\frac{G}{r} \int_0^r dM(r') - G \int_r^R \frac{dM(r')}{r'} \\ &= -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^R \rho(r') r' dr' \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde en la primera integral consideramos la aportación debido a la masa dentro del radio r y en la segunda integral tomamos en cuenta la distribución de masa fuera

de este radio (ver p. ej., Binney & Tremaine, 2008, cap. 2). Debido a esto, como límite inferior de la segunda integral elegimos r —donde se localiza el cuerpo sobre el que actúa la marea— y como límite superior R —que puede ser donde la distribución termina o se decide truncaarla—. Derivando el potencial esférico de la ec. (3.9) respecto a la coordenada radial tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{\text{esf}}}{\partial r} &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' - \frac{4\pi G}{r} \rho(r)r^2 + 4\pi G\rho(r)r \\ &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' = -\frac{GM(r)}{r^2},\end{aligned}\quad (3.10)$$

donde la integral es igual a la masa $M(r)$ contenida dentro de la esfera de radio r dividida por 4π , coincidiendo así con el campo newtoniano evaluado en r . Al volver a derivar respecto a r obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \right) = \frac{4\pi G}{r^2} \rho(r)r^2 - \frac{8\pi G}{r^3} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr', \quad (3.11)$$

entonces

$$\frac{\partial^2\Phi_{\text{esf}}}{\partial r^2} = -\frac{8\pi G}{r^3} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + 4\pi G\rho(r). \quad (3.12)$$

Por lo tanto

$$\tau_{rr}^{\text{esf}} = -\frac{\partial^2\Phi_{\text{esf}}}{\partial r^2} = \frac{2GM(r)}{r^3} - 4\pi G\rho(r), \quad (3.13)$$

donde el segundo término aparece por considerar la masa externa a la esfera de radio r . Las otras componentes

$$\tau_{\varphi\varphi}^{\text{esf}} = \tau_{\theta\theta}^{\text{esf}} = -\frac{4\pi G}{r^3} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' = -\frac{GM}{r^3}$$

también coinciden con el resultado para una masa puntual, pero en este caso debido a la simetría impuesta. Lo que confirma que siempre que el campo se evalúe en una región externa a la distribución de masa, podemos considerar que el campo es producido por una masa puntual. Finalmente, el tensor de mareas para una distribución de densidad esférica y no homogénea se escribe

$$\begin{aligned}\tau^{esf} &= \begin{pmatrix} \frac{2GM}{r^3} - 4\pi G\rho(r) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GM}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GM}{r^3} \end{pmatrix} \\ &= 4\pi G \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\langle\rho(r)\rangle - \rho(r) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\langle\rho(r)\rangle & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\langle\rho(r)\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.14)$$

donde hemos definido una densidad promedio, $\langle\rho\rangle = 3M(r)/4\pi r^3$, para escribir la segunda igualdad. Si ignoramos la parte externa de la distribución o ésta es despreciable, la fuerza de marea en la dirección radial es siempre disruptiva. Por otro lado si $2\langle\rho(r)\rangle/3 < 4\pi G\rho(r)$ entonces se da un cambio de signo y la fuerza de marea es también compresiva en la dirección radial.

3.1.3. Caso ley de potencias

En el caso de una esfera no homogénea descrita por la ley de potencias, escribimos la densidad como

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha} = \rho_0 \zeta^{-\alpha}, \quad (3.15)$$

donde hemos definido un radio adimensional $\zeta = r/r_0$. Podemos calcular la masa contenida en una esfera de radio r descrita por esta distribución de densidad

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r 4\pi \rho_0 \left(\frac{r_0}{r'} \right) r'^2 dr' = 4\pi \rho_0 r_0^\alpha \int_0^r r'^{2-\alpha} dr' \\ &= 4\pi r_0^3 \frac{\rho_0}{3-\alpha} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{3-\alpha} = 4\pi r_0^3 \frac{\rho_0}{3-\alpha} \zeta^{3-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La fuerza gravitacional por unidad de masa que esta distribución ejerce en la dirección radial es

$$F_r = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi}{3-\alpha} G \rho_0 r_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1-\alpha} = -\frac{4\pi}{3-\alpha} G \rho_0 r_0 \zeta^{1-\alpha}. \quad (3.17)$$

Por otro lado, usando la ec. (3.15) en la ec. (3.9), escribimos el potencial como

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\zeta) &= -4\pi G r_0^2 \frac{\rho_0}{3-\alpha} \zeta^{2-\alpha} - 4\pi G r_0^2 \rho_0 \int_\zeta^Z \zeta'^{1-\alpha} d\zeta' \\ &= -4\pi G r_0^2 \rho_0 \left[\frac{1}{3-\alpha} \zeta^{2-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha} \times \begin{cases} (Z^{2-\alpha} - \zeta^{2-\alpha}), & \alpha \neq 2 \\ (\ln Z - \ln \zeta), & \alpha = 2 \end{cases} \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $Z = R/r_0$ es el radio adimensional evaluado en el sitio donde la distribución externa termina o es truncada. Ahora calculemos la energía gravitacional. Primero reescribamos el potencial para una ley de potencias

$$\Phi_\alpha(r) = -\frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \left(\frac{r'}{r_0} \right)^{2-\alpha} \quad (3.19)$$

Ahora, usando la ecs. (3.15) y (3.19) en la ec. (1.2)

$$\begin{aligned} E_g &= -\frac{1}{2} \int_0^r 4\pi \rho \Phi r'^2 dr' = -\frac{1}{2} \int_0^r \left[4\pi \rho_0 \left(\frac{r'}{r_0} \right)^{-\alpha} \right] \left[-\frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \left(\frac{r'}{r_0} \right)^{2-\alpha} \right] \\ &= \frac{8\pi^2 G \rho_0^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \int_0^r \left(\frac{r'}{r_0} \right)^{2-2\alpha} r'^2 dr' = \frac{8\pi^2 G \rho_0^2 r_0^3}{(3-\alpha)(2-\alpha)(5-2\alpha)} \left(\frac{r'}{r_0} \right)^{5-2\alpha}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

obtenemos la energía gravitacional para una esfera cuya densidad se encuentra descrita por un perfil de ley de potencias.

Regresemos a las mareas, primero calculemos el término $\tau_{rr}^{(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial r^2} &= -\frac{8\pi G}{r^3} \int_0^r \rho_0 \left(\frac{r'}{r_0}\right)^{-\alpha} r'^2 dr' + 4\pi G \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} \\
&= -\frac{8\pi G}{r^3} \rho_0 r_0^\alpha \int_0^r r'^{2-\alpha} dr' + 4\pi G \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} = -\frac{8\pi G}{r^3} \rho_0 r_0^\alpha \frac{r^{3-\alpha}}{3-\alpha} + 4\pi G \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} \\
&= \left(-\frac{8\pi G}{3-\alpha} + \frac{(3-\alpha)4\pi G}{3-\alpha}\right) \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} = -4\pi G \frac{\alpha-1}{3-\alpha} \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

entonces

$$\tau_{rr}^{(\alpha)} = -\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial r^2} = \frac{\alpha-1}{3-\alpha} 4\pi G \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} = \frac{2GM}{r^3} - 4\pi G \rho(r), \tag{3.22}$$

donde hemos usado las ecs. (3.15) y (3.16) para escribir la última igualdad. Expresamos las otras dos componentes como

$$\tau_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \tau_{\theta\theta}^{(\alpha)} = -\frac{4\pi G}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = -\frac{4\pi G}{r^3} \int_0^r \rho_0 \left(\frac{r'}{r_0}\right)^{-\alpha} r'^2 dr' = -\frac{GM}{r^3}, \tag{3.23}$$

donde también hemos empleado a la ec. (3.16). Finalmente, escribimos el tensor como

$$\begin{aligned}
\tau^{(\alpha)} &= \begin{pmatrix} \frac{2GM}{r^3} - 4\pi G \rho(r) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GM}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GM}{r^3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4\pi G}{3-\alpha} \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Si $\alpha > 1$ entonces —al igual que en el caso de una distribución esférica no homogénea— habrá disrupción únicamente a lo largo de la coordenada radial. En particular, para una esfera isotérmica $\alpha = 2$, la disrupción a lo largo de la dirección radial será igual en magnitud a la compresión en las otras dos direcciones. Podemos suponer a esta distribución como límite superior, debido a que es la que se observa en una parcela en colapso gravitacional. Por otro lado, si $\alpha = 1$, entonces no habrá ni compresión ni disrupción a lo largo de la dirección radial, pero sí compresión en las direcciones tangenciales. Finalmente, si $\alpha < 1$, entonces la marea comprimirá al cuerpo en todas direcciones. Notamos que el caso $\alpha = 0$ coincide con un medio de densidad homogénea.

3.2. Criterio de Jeans modificado

En el desarrollo tradicional del criterio de Jeans presentado en el capítulo anterior se supone que la parcela de gas donde ocurre la perturbación se encuentra aislada, i.e.,

la contribución al potencial gravitacional, debido a la distribución externa de masa, es despreciable. Por lo tanto, en la ec. (2.7) únicamente se toma en cuenta el potencial debido a la masa interna a la distribución, ignorando cualquier potencial producido por la masa externa a la parcela de gas. Sin embargo, en muchos casos realistas se debe considerar la contribución externa al potencial total. Siguiendo esta discusión, Jog (2013) modificó el análisis clásico de Jeans introduciendo un término adicional a la ecuación de momento —correspondiente al potencial externo— tal que

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \rho \nabla (\Phi + \Phi^{\text{ext}}) \quad (3.25)$$

es la ecuación de momento que incluye el potencial externo $\Phi^{\text{ext}} = \Phi_0^{\text{ext}} + \Phi_1^{\text{ext}}$. Linealizando la ecuación modificada y aplicando el operador gradiente sobre ella, se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}_1}{\partial t} = - \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right) \nabla^2 \rho_1 - \rho_0 \nabla^2 (\Phi_1 + \Phi_1^{\text{ext}}). \quad (3.26)$$

Ahora, restando la ec. (2.16) de la ec. (3.26) y con la ec. (2.8) tenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_1 - c_s^2 \nabla^2 \rho_1 - \rho_0 (4\pi G \rho_1) - \rho_0 \nabla^2 \Phi_1^{\text{ext}} = 0. \quad (3.27)$$

Suponiendo que esta ecuación admite soluciones oscilatorias en la forma de la ec. (2.19), obtenemos la relación de dispersión modificada es

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 + \frac{\rho_0}{\rho_1} \nabla^2 \Phi_1^{\text{ext}} = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 \left(1 + \frac{\nabla^2 \Phi_1^{\text{ext}}}{4\pi G \rho_1} \right). \quad (3.28)$$

Procediendo análogamente a lo realizado en la sección 2.1 la longitud de Jeans modificada —que llamaremos *longitud de Jog*— queda como

$$\lambda_{\text{Jog}} = \left[\left(\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0} \right) \left(\frac{1}{1 - T_0/4\pi G \rho_1} \right) \right]^{1/2} = \lambda_J \frac{1}{(1 - T_0/4\pi G \rho_1)^{1/2}}, \quad (3.29)$$

donde

$$T_0 \equiv -\nabla^2 \Phi_1^{\text{ext}} = -4\pi G \rho_1^{\text{ext}} \quad (3.30)$$

es la fuerza de marea, completamente equivalente a la componente τ_{rr} [†] y ρ_{ext} es una densidad externa que puede ser tanto positiva como negativa dependiendo del potencial producido por la distribución de masa externa. La *masa de Jog* —de Jeans modificada— es

$$M_{\text{Jog}} = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(\frac{\lambda_{\text{Jog}}}{2} \right)^3 = M_J \frac{1}{(1 - T_0/4\pi G \rho_1)^{3/2}}. \quad (3.31)$$

A partir de la definición del término de marea T_0 que hemos dado, notamos que la longitud de Jog es mayor que la longitud de Jeans cuando $T_0 > 0$. En este caso — que llamaremos *caso disruptivo*— la marea se opone a la auto-gravedad de la parcela

[†]Jog (2013) emplea la notación T_0 y Colman y Teyssier (2020) τ_{rr} , sin embargo, ambas son completamente equivalentes.

de gas, resultando en la disrupción de la parcela y contribuyendo a aumentar la estabilidad de la parcela de gas en contra del colapso. Por el contrario, si $T_0 < 0$, entonces la fuerza de marea no se opone a la auto-gravedad de la parcela de gas, sino que actúa comprimiendola, favoreciendo el colapso de la región. Esto coincide con el hecho que la longitud de Jog resultante es menor que la longitud de Jeans original. A este escenario lo llamaremos *caso compresivo*. Finalmente, cuando la marea es despreciable, i.e., en el límite $T_0 \rightarrow 0$ recuperamos las expresiones clásicas de Jeans.

Vemos que es posible —utilizando la ecuación de Poisson— definir una *densidad efectiva* a partir del potencial externo

$$\rho_{\text{eff}} \equiv \frac{T_0}{4\pi G}. \quad (3.32)$$

Empleando esta densidad efectiva en lugar de la fuerza de marea en las ecs. (3.29) y (3.31), obtenemos en el denominador un cociente de densidades entre la densidad efectiva —correspondiente a la fuerza de marea— y la densidad perturbada[†]. Este cociente será el término que modifique el criterio original de Jeans. Tenemos que la longitud de Jog como función del contraste de densidad es

$$\lambda_{\text{Jog}} = \lambda_{\text{J}} \frac{1}{(1 - \rho_{\text{eff}}/\rho_1)^{1/2}}, \quad (3.33)$$

y la masa de Jog es

$$M_{\text{Jog}} = M_{\text{J}} \frac{1}{(1 - \rho_{\text{eff}}/\rho_1)^{3/2}}. \quad (3.34)$$

Debemos subrayar que la densidad efectiva puede ser tanto positiva como negativa. Será negativa en el caso compresivo $T_0 < 0$ y positiva en el caso disruptivo $T_0 > 0$. Si $|\rho_{\text{eff}}| > \rho_1$, tenemos dos casos posibles completamente análogos a la discusión pasada. Si la densidad efectiva es negativa, la longitud de Jog se acortará y la masa de Jog disminuirá en comparación con sus equivalentes tradicionales. En el segundo caso, la densidad es positiva, por lo que la longitud de Jeans se alargará y la masa de Jeans incrementará respecto a las expresiones de Jeans. En ambos casos, si densidad efectiva es chica —en comparación con la densidad de la perturbación— recuperamos la longitud y la masa de Jeans originales.

[†]En los capítulos siguientes esta densidad ρ_1 corresponderá a la densidad de un grupo inmerso en una distribución de masa descrita por una ley de potencias.

4 Teoría de acreción competitiva por mareas

A partir de trabajos como los de Salpeter (1955), Miller y Scalo (1979), Scalo (1986), Kroupa (2001), Chabrier et al. (2005) y Bastian et al. (2010) sabemos que la función de distribución que describe la masa con la que nacen las estrellas sigue un comportamiento muy particular, descrito mediante la función de masa inicial (IMF). Podemos ver la IMF graficada en la Fig. 4.1 (imagen tomada de Offner et al. (2014)). A altas masas, esta función de distribución describe una ley de potencias, con $dN/dm \propto m^{-2.3}$ (Salpeter, 1955). Adicionalmente, y es el tema de la presente tesis, la IMF presenta un máximo cercano a $0.2M_{\odot}$, esto es, la mayoría de las estrellas nacen con una masa cercana a este máximo (ver p. ej., Offner et al., 2014). Hacia bajas masas existe un problema de completez. Aunque las estrellas de baja masa son abundantes, no pueden observarse demasiado lejos, ya que son muy poco luminosas. Por otro lado, a un radio de 500pc alrededor de la Tierra únicamente existe una sola estrella en el intervalo $20 - 30M_{\odot}$, por lo que también a altas masas se presenta un problema de completez. Aún así, existe cierto consenso de que la IMF se encuentra mejor determinada hacia altas masas (ver p. ej., Bastian et al., 2010). De manera que, aunque la IMF se encuentra razonablemente bien descrita desde masas altas hasta el pico, hacia bajas masas no hay consenso acerca de su forma funcional.

Hasta ahora, encontrar un mecanismo que explique cómo es que las proto-estrellas adquieren la masa descrita por la IMF continúa siendo un problema abierto en la teoría de formación estelar. Autores como Padoan y Nordlund (2002), Hennebelle y Chabrier (2008) y Hopkins (2012) proponen mecanismos semideterministas en los cuales las condiciones imperantes dentro de la nube —temperatura, densidad— tienen una interrelación con las condiciones estocásticas definidas por el campo turbulento de densidad y velocidad, lo que termina definiendo la forma de la distribución de masa inicial.

Con el objetivo de entender el origen físico del máximo de la IMF (ver Fig. 4.1), Lee y Hennebelle (2018) —de ahora en adelante L&H18—, desarrollan un modelo analítico en el cual se estudia si las perturbaciones de densidad —que nosotros llamaremos *grumó*[†]— que ocurren alrededor de una proto-estrella son capaces de colapsar y formar nuevas proto-estrellas. A su vez, Colman y Teyssier (2020) —de ahora en adelante C&T20— han revisado esta teoría, proporcionando un modelo complementario. En

[†]Por perturbación entendemos una fluctuación infinitesimal, así que tratando de ser lo más general posible y en concordancia con el problema físico, nosotros usaremos el término grumo.

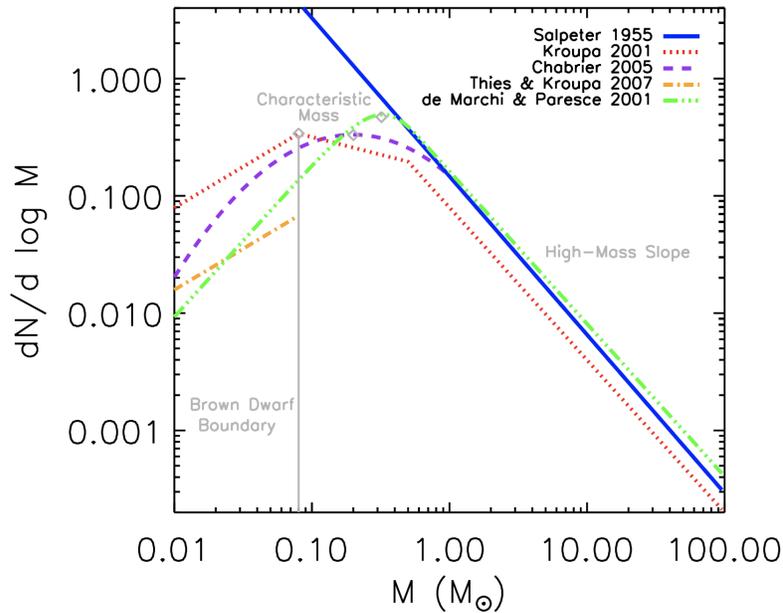


Figura 4.1: Función de masa inicial —IMF— determinada por varios trabajos. Imagen tomada de Offner et al. (2014)

ambos casos, la idea es que durante el colapso de un núcleo denso —para formar una proto-estrella— se forma un núcleo de Larson, rodeado por una envoltura cuyo perfil de densidad varía como $\rho \propto r^{-2}$. En estos modelos, la pregunta es: ¿qué tan factible es que los grumos de densidad que existen en esta envoltura puedan colapsar para formar nuevas estrellas? Tanto el enfoque de L&H18 como el de C&T20 involucran a las fuerzas de marea a fin de verificar las condiciones físicas en las que un grumo puede sobreponerse a estas fuerzas externas y proceder al colapso, o bien, si ese material será acretado por la proto-estrella central. Se espera que el gas externo a la región dominada por mareas pueda colapsar y formar nuevas proto-estrellas. Así, debido a que las estrellas comparten el mismo reservorio de gas, la formación de nuevas proto-estrellas debe limitar la cantidad de gas que es acretado por las estrellas ya existentes. En resumen, la masa que las proto-estrellas son capaces de acretar en su etapa previa a la incorporación a la secuencia principal, será determinada por la acreción competitiva de gas[†] con las estrellas vecinas.

En el presente capítulo exponemos tanto el desarrollo de L&H18 como de C&T20. En las secciones 4.3 y 4.4 señalaremos los puntos que nos parecen flojos o potencialmente erróneos y los discutiremos en detalle.

[†]No confundir con la acreción competitiva expuesta p.ej. en Bonnell y Bate (2006). Aunque similar, en el problema que nosotros estamos estudiando, la competencia se da entre un núcleo proto-estelar que se encuentra acretando masa y un grumo de densidad que se vuelve auto-gravitante en la vecindad del núcleo proto-estelar. En ningún momento consideramos los efectos de un potencial

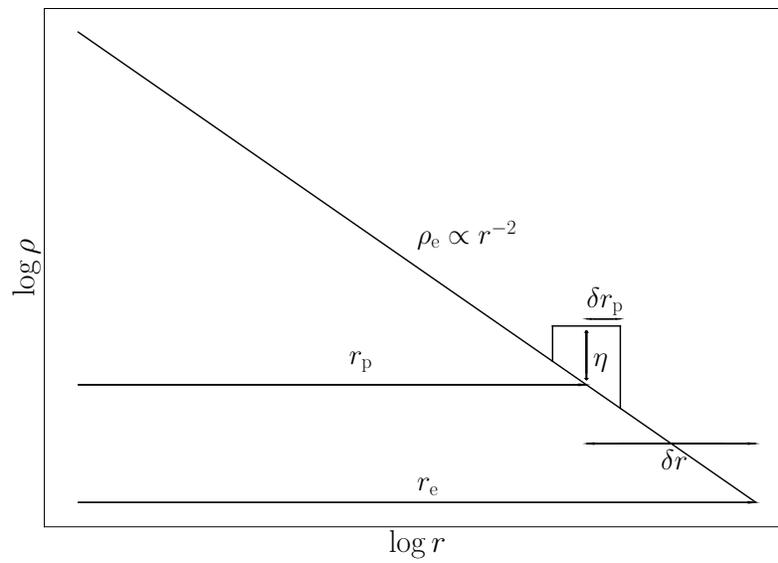


Figura 4.2: Mostramos un perfil de densidad isotérmico con $\rho \propto r^{-2}$, r_e es la distancia desde el centro de la distribución hasta la frontera de la envoltente, r_p es la distancia desde el centro de la distribución hasta el sitio donde ocurre el grumo, δr es la distancia entre el grumo y la frontera de la envoltente, δr_p es el radio del grumo y η es la amplitud de el grumo

4.1. Desarrollo de Lee & Hennebelle 2018

El desarrollo de L&H18 se divide en dos partes. En la primera se estudian las condiciones de colapso —o disrupción por marea— de grumos de densidad dentro de una envoltente que rodea una proto-estrella. La segunda parte consiste en estudiar de manera estadística cuándo es que estos grumos pueden colapsar.

4.1.1. Condiciones de colapso

Como vimos en la sección 2.4 —referente al modelo de Larson— al colapsar una nube proto-estelar, se forma un objeto compacto, mientras que la envoltente que lo rodea tiende al llamado perfil isotérmico, cuya estructura de densidad va como $\rho \propto r^{-2}$. Con esto en mente, L&H18 suponen que el núcleo de Larson es una masa puntual rodeada por una envoltente de gas descrita por el perfil de densidad

$$\rho_e = \frac{Ac_s^2}{2\pi Gr^2}, \quad (4.1)$$

donde ρ_e es la densidad de la envoltente y A es la amplitud del perfil de densidad. Después, suponen que un grumo esférico y de densidad uniforme ρ_p , aparece a distancia r_p de la masa puntual. La amplitud de densidad de este grumo es un factor η_{LH} veces la densidad de la envoltente en el punto r_p , es decir,

$$\delta\rho_p = \eta_{\text{LH}} \frac{Ac_s^2}{2\pi Gr_p^2}. \quad (4.2)$$

De forma tal que $\rho_p = \rho_e(r_p) + \delta\rho_p = (1 + \eta_{\text{LH}})\rho_e(r_p)$. Por ejemplo, si $\eta_{\text{LH}} = 0$ no hay grumo; en cambio, si la densidad del grumo vale el doble que la densidad de la envoltente evaluada en r_p , entonces $\eta_{\text{LH}} = 1$. Por otro lado, los autores imponen que el grumo se encuentre contenido por completo dentro de la envoltente de densidad. En la Fig. 4.2 mostramos un esquema simplificado de la configuración física del problema.

L&H18 encuentran que la masa del grumo es

$$M_p(r_p, \delta r_p, \eta_{\text{LH}}) = \frac{Ac_s^2}{G} r_p m_p(u_p, \eta_{\text{LH}}) \quad (4.3)$$

donde $u_p = \delta r_p / r_p$ es una distancia normalizada y $m_p(u_p, \eta_{\text{LH}})$ es una masa normalizada[†]

Lee y Hennebelle (2018) enuncian dos criterios de colapso:

- I. El primer criterio de colapso^{††} es que la masa del grumo M_p sea mayor o igual que la masa de Larson M_L

$$M_p(r_p, \delta r_p, \eta_{\text{LH}}) \geq M_L. \quad (4.4)$$

gravitacional total debido a una población de estrellas en la acreción de masa de dichas estrellas.

[†]En la sección 4.3, empleando las mismas hipótesis de L&H18, obtendremos una expresión alternativa para la masa M_p .

^{††}Notemos que no es un criterio estricto para determinar el colapso de una parcela de gas. En la sección 4.3 discutiremos este criterio.

- II. El segundo criterio consiste en indicar que el grupo está gravitacionalmente ligado, lo cual implica que su energía total —suma de la energía térmica y gravitacional— es negativa

$$E_{\text{vir}}(r_p, \delta r_p, \eta_{\text{LH}}) \leq 0. \quad (4.5)$$

Considerando como contenido gravitacional total tanto a la auto-gravedad del grupo y la energía de marea (Ballesteros-Paredes et al., 2009), E_{vir} está dada por

$$\begin{aligned} E_{\text{vir}}(r_p, \delta r_p, \eta_{\text{LH}}) &= E_g(r_p, \delta r_p, \eta_{\text{LH}}) + 2E_{\text{ther}} \\ &= \int_{V_p} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \delta \mathbf{r} dx^3 + 3M_p(r_p, \delta r_p, \eta_p) c_s^2 \\ &= \int_{V_p} (\rho_e + \rho_p) \left(\frac{\partial \Phi_L}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial r} \right) \cdot \delta \mathbf{r} dx^3 \\ &\quad + 3M_p(r_p, \delta r_p, \eta_{\text{LH}}) c_s^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde E_g es la energía gravitacional expresada en la ec. (1.20), E_{ther} es la energía térmica calculada en la ec. (2.2) y E_{vir} es la energía virial, suma de ambas. Vemos que la integración se realiza sobre el volumen V_p , que es el volumen de una esfera de radio δr_p centrada en r_p , i.e., el volumen del grupo.

Para calcular la marea sobre el grupo, Lee y Hennebelle (2018) eligen como origen del sistema el centro del grupo y calculan la fuerza de marea como la diferencia entre la fuerza evaluada en el centro del grupo y en los extremos del grupo a lo largo de la dirección radial[†]. Para esto, definen la distancia δr como la distancia medida sobre la dirección radial desde el centro del grupo r_p hasta el borde de la misma, siendo positiva cuando apunta en el sentido opuesto a la masa central. Entonces, la fuerza de marea debido al núcleo de Larson es

$$\Delta \frac{\partial \Phi_L}{\partial r} = - \left(\frac{GM_L}{(r_p + \delta r)^2} - \frac{GM_L}{r_p^2} \right), \quad (4.7)$$

donde se ha supuesto que el núcleo de Larson es una masa puntual. En la ec. (2.53) hemos calculado la masa de un perfil isotérmico de densidad, multiplicando esta ecuación por la constante A , tenemos que

$$M(r) = \frac{2Ac_s^2 r}{G}. \quad (4.8)$$

En coordenadas esféricas y suponiendo que la masa es únicamente función de la distancia radial, se cumple que $\partial \Phi(r)/\partial r = -GM(r)/r^2$, por lo tanto, para una envolvente isotérmica tenemos que

$$\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = - \frac{2Ac_s^2}{r}. \quad (4.9)$$

[†]En la sección 4.3 comentaremos la razón por la cual este enfoque no es el más indicado al momento de estudiar las mareas

Con este resultado podemos calcular la fuerza de marea debido a la envolvente en forma análoga al caso anterior

$$\Delta \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} = - \left(\frac{2Ac_s^2}{r_p + \delta r} - \frac{2Ac_s^2}{r_p} \right). \quad (4.10)$$

Finalmente, para calcular la auto-gravedad del grumo, integramos la densidad del grumo —ec. (4.2)— sobre una esfera de radio δr

$$M(r) = 4\pi \int_0^{\delta r} \eta_{\text{LH}} \frac{Ac_s^2}{2\pi Gr_p^2} r'^2 dr' = \eta_{\text{LH}} \frac{2Ac_s^2 \delta r^3}{3Gr_p^2}, \quad (4.11)$$

con lo que escribimos la auto-gravedad del grumo evaluada sobre la superficie de ésta como

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial r} = - \frac{GM}{r^2} = - \frac{G}{\delta r^2} \eta_{\text{LH}} \frac{2Ac_s^2 \delta r^3}{3Gr_p^2} = - \eta_{\text{LH}} \frac{2Ac_s^2}{3r_p^2} \delta r. \quad (4.12)$$

Por lo que la fuerza gravitacional relativa al centro del grumo a lo largo de la dirección radial es la suma de las tres componentes que acabamos de calcular,

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi(\delta r) = - \frac{GM_L}{(r_p + \delta r)^2} + \frac{GM_L}{r_p^2} - \frac{2Ac_s^2}{r_p + \delta r} + \frac{2Ac_s^2}{r_p} - \eta_{\text{LH}} \frac{2Ac_s^2}{3r_p^2} \delta r, \quad (4.13)$$

donde los primeros dos términos son debido al núcleo de Larson —ec. (4.7)—, el tercero y cuarto debido a la envolvente —ec. (4.10)— y el quinto es la auto-gravedad del grumo misma —ec. (4.12)—.

Para encontrar la amplitud del grumo los autores parten de la densidad total del grumo, i.e., la suma de la densidad del perfil isotérmico y del excedente de densidad,

$$\rho(\delta r) = \rho_e + \delta \rho_p = \frac{Ac_s^2}{2\pi G} \frac{1}{r_e^2} + \eta_{\text{LH}} \frac{Ac_s^2}{2\pi G} \frac{1}{r_p^2} = \frac{Ac_s^2}{2\pi G} \left(\frac{1}{(r_p + \delta r)^2} + \frac{\eta_{\text{LH}}}{r_p^2} \right) \quad (4.14)$$

donde η_{LH} es la amplitud del grumo sobre la densidad de fondo[†]. Despejando η_{LH} tenemos que

$$\eta_{\text{LH}} = r_p^2 \left(\frac{2\pi G \rho}{Ac_s^2} - \frac{1}{(r_p + \delta r)^2} \right). \quad (4.15)$$

Utilizando la forma funcional para la densidad expresada en la ec. (4.14), L&H18 integran la ec. (4.6) a lo largo de la dirección radial para encontrar una expresión para la energía. Al resolver simultáneamente la masa y energía del grumo para todo r_p y graficar como función de la distancia a la proto-estrella central el contraste de la densidad η_{LH} y el correspondiente tamaño del grumo, L&H18 muestran que al incrementar la distancia a la proto-estrella, la amplitud de densidad η_{LH} necesaria para que suceda el colapso decrece, mientras que el tamaño del grumo debe aumentar. Posteriormente, para considerar las direcciones no radiales, realizan la integración en tres dimensiones, llegando a la conclusión que únicamente grumos con densidad alrededor de diez veces mayor que el fondo son capaces de colapsar.

[†]Notemos que aquí además se debe suponer que el borde del grumo coincide con el límite de la envolvente, es decir, $r_e = r_p + \delta r$. Lo cual no necesariamente es cierto.

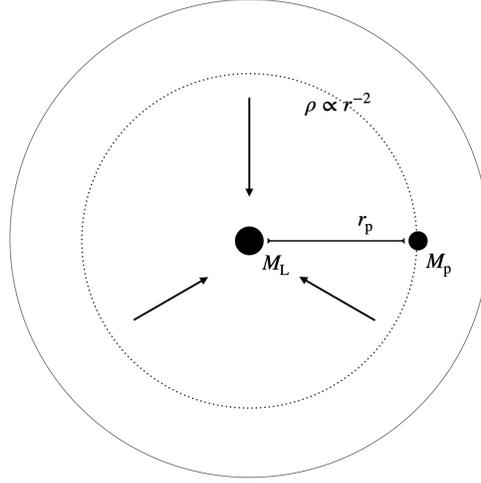


Figura 4.3: Ocurre una perturbación de densidad M_p a una distancia r_p de un núcleo de Larson M_L . El material contenido en la esfera de radio r_p será acretado por el núcleo de Larson para formar una estrella.

4.1.2. Cálculo de la probabilidad de colapso

Lee y Hennebelle (2018) se preguntan cuál es la probabilidad de que un grumo colapse. Para responder esto, utilizan la función de distribución de densidad (PDF) producida por turbulencia supersónica —sugerida por trabajos como los de Vazquez-Semadeni (1994) y Federrath et al. (2008)— para estimar la densidad típica de los grumos de densidad producidos por la turbulencia. Bajo este escenario, el número de Mach local \mathcal{M} define el ancho de la distribución de probabilidad, así como el punto en el cual se encuentra centrada. Para calcular el número de Mach, suponen que una fracción ϵ —por determinar[†]— de la energía de caída libre se convierte en turbulencia y que esta turbulencia es capaz de producir grumos de densidad, los cuales, eventualmente, podrían colapsar. Bajo esta hipótesis el número de Mach es

$$\mathcal{M} \equiv \frac{v}{c_s} = \frac{1}{c_s} \sqrt{\frac{G [M_L + M_e(r_p)]}{r_p}} \epsilon \quad (4.16)$$

donde M_L es la masa del núcleo de Larson, $M_e(r_p)$ la masa de la envolvente contenida dentro de r_p y $\epsilon \leq 1$. LH18 argumentan entonces que el colapso gravitacional es capaz de amplificar los grumos de densidad hasta que se alcance la equipartición local de la energía^{††}.

Dado que la PDF proporciona la probabilidad de que una fluctuación de densidad ocurra, L&H18 la emplean para estimar la probabilidad de que un grumo alcance la masa mínima necesaria para colapsar en presencia de mareas, y formar así un

[†]Los autores no llegan a determinar esta fracción de energía.

^{††}Esta hipótesis es cuestionable y la discutiremos en la sección 4.3.

núcleo de Larson. Entonces, a partir de este resultado, L&H18 estiman la distancia característica a la cual ocurren estos grumos. Finalmente, proponen que la masa contenida en una esfera de radio igual a esa distancia y centrada en el núcleo de Larson, será acretada por la estrella, como mostramos en el esquema de la Fig. 4.3. Dado que el pico y ancho de la PDF se encuentra definido por el número de Mach (ver p. ej., Vazquez-Semadeni, 1994; Federrath et al., 2008), se espera que los grumos ocurran a una cierta distancia característica, involucrando una masa característica que resulta cercana a $0.2M_{\odot}$. De esta manera L&H18 explican el pico de la IMF.

4.2. Desarrollo de Colman y Teyssier

Siguiendo un camino similar al de L&H18, el trabajo de C&T20 recurre al tensor de marea desarrollado por Masi (2007), pero con la configuración física propuesta por L&H18: un núcleo denso embebido en el centro de una envolvente de gas, descrita por un perfil de densidad de ley de potencias

$$\rho_e = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha} \quad (4.17)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 2$, de forma que si $\alpha = 0$, entonces la envolvente es una región de densidad homogénea, mientras que $\alpha = 2$ marca el límite superior de densidad, determinado de forma teórica (ver p. ej., Larson, 1969). Después suponen que aparece un grumo a una distancia r_p del núcleo, por simplicidad también suponen que la densidad del grumo ρ_p es homogénea y proporcional a la densidad de la envolvente evaluada en el sitio donde ocurre el grumo

$$\rho_p = \eta_{CT} \rho_e(r_p). \quad (4.18)$$

Notemos que, a diferencia de L&H18, η_{CT} es la amplitud de densidad y no el excedente de densidad.

Al igual que L&H18, C&T20 plantean que la condición de colapso estará dada por la suma de tres contribuciones gravitacionales: la proto-estrella central, la envolvente, y el grumo mismo. La primera está dada por la ec. (3.7)

$$\tau^L = \frac{GM_L}{r^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

donde M_L es la masa de la proto-estrella central. Se ha aproximado a la proto-estrella como una masa puntual, suposición válida ya que el tamaño del primer núcleo de Larson es del orden de unos cuantos radios estelares ($\sim 10^{10} - 10^{11}$ cm), mientras que el perfil isotérmico se extiende algunos cientos de unidades astronómicas ($1 \text{ au} = 1.5 \times 10^{13}$ cm), como mencionamos en la sección 2.4. Notemos que el signo en esta ecuación está invertido respecto a la ec. (36) de C&T20 debido a la manera en la que hemos definido al tensor de marea en la ec. (3.3).

En segundo lugar, el tensor de mareas debido a la envoltente lo obtenemos empleando la ec. (3.24)

$$\tau^e = \frac{4\pi G}{3-\alpha} \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha} \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{4\pi G}{3-\alpha} \rho_e \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Después, usando la ec. (3.24) con $\alpha = 0$ y $\rho = \rho_p = \text{cte.}$, tenemos que el tensor de mareas debido a el grupo se enuncia como

$$\tau^p = \frac{4\pi G}{3} \rho_p \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Notemos que implícitamente se ha supuesto que el origen del sistema coordinado se encuentra centrado en el grupo.

Al sumar las contribuciones debido a un objeto auto-gravitante —ec. (5.27)—, el perfil de densidad ρ_e —ec. (4.20)— y la gravedad propia de un grupo de densidad ρ_p —ec. (4.21)— se tiene que la primera componente en la diagonal del tensor resultante es

$$\tau_{rr} = \frac{2GM_L}{r_p^3} + \frac{4\pi(\alpha-1)}{(3-\alpha)} G \rho_e(r_p) - \frac{4\pi G}{3} \rho_p, \quad (4.22)$$

mientras que las otras dos componentes son[†]

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = -\frac{GM_L}{r_p^3} - \frac{4\pi G}{(3-\alpha)} \rho_e(r_p) - \frac{4\pi G}{3} \rho_p. \quad (4.23)$$

C&T20 argumentan que es necesario que las tres componentes diagonales del tensor sean cantidades negativas para que el grupo colapse. Vemos que además de ser iguales, $\tau_{\theta\theta}$ y $\tau_{\varphi\varphi}$ son siempre cantidades negativas si $0 \leq \alpha \leq 3$. Entonces, imponiendo $\tau_{rr} < 0$, habrá compresión a lo largo de las tres direcciones. Notemos que esta condición no necesariamente garantiza el colapso del grupo debido a que la presión térmica no ha sido incluida en el análisis. Ésta debe incluirse ya que actúa oponiéndose a la auto-gravedad del grupo, por lo tanto aunque haya compresión en las tres direcciones, el grupo no necesariamente colapsará gravitacionalmente. El desarrollo que realizaremos en la siguiente sección si incluye la presión térmica y por lo tanto es más adecuado.

Despejando ρ_p de la ec. (4.22) tenemos que el grupo es capaz de colapsar gravitacionalmente —si ignoramos el gradiente de presión térmica— únicamente si la densidad del grupo cumple la desigualdad

$$\rho_p > \frac{3M_L}{2\pi r_p^3} + \frac{3(\alpha-1)}{(3-\alpha)} \rho_e(r_p). \quad (4.24)$$

[†]Notemos que los últimos términos en ambas ecuaciones, correspondientes a la auto-gravedad del grupo, se encuentran calculados respecto a un marco de referencia distinto que el resto de la ecuación. Los primeros dos términos están calculados respecto al centro de la distribución, mientras que la auto-gravedad se encuentra calculada respecto al centro del grupo. Además hemos evaluado las ecs. (4.22) y (4.23) en $r = r_p$, cosa que C&T20 no realizan.

El primer término del lado derecho de esta desigualdad es la densidad que tendría una esfera de tamaño r_p si diluyéramos la masa del núcleo de Larson en ella. Cuando $\alpha = 1$, el término debido a la envolvente se anula y el criterio de colapso únicamente depende de la contribución de marea debido al núcleo de Larson. En cambio, cuando $\alpha < 1$, el segundo término de la ec. (4.24) —relativo a la envolvente— es negativo, por lo que la densidad necesaria para que el grumo colapse será menor que en el caso anterior. Finalmente, si $\alpha > 1$, la envolvente también será disruptiva, y para asegurar el colapso, el grumo deberá ser más densa que en los casos anteriores.

C&T20 definen el radio de marea r_τ como el radio para el cual la desigualdad de la ec. (4.24) es una igualdad estricta

$$\rho_p = \frac{3M_L}{2\pi r_\tau^3} + \frac{3(\alpha - 1)}{(3 - \alpha)} \rho_e(r_\tau), \quad (4.25)$$

de forma tal que si el grumo se localiza a una distancia menor que este radio, entonces éste no podrá colapsar y será acretada por el núcleo ya existente. Por otro lado, si el gas externo a r_τ es capaz de sobreponerse a la fuerza de marea, una perturbación originada en ese sitio posiblemente podrá colapsar para formar otro núcleo de Larson. Podemos calcular la masa contenida dentro de r_τ

$$M_\tau = M_e(r < r_\tau) = \int_0^{r_\tau} \rho_e(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 r_0^\alpha \frac{r_\tau^{3-\alpha}}{3-\alpha} = \frac{4\pi}{3-\alpha} \rho_e(r_\tau) r_\tau^3, \quad (4.26)$$

que no es otra cosa que la masa máxima que la estrella asociada al núcleo de Larson podrá acretar. Usando la relación entre la densidad de la envolvente con la densidad del grumo enunciada en la ec. (4.18) en la ec. (4.25)[†], C&T20 encuentran que la condición para que el grumo colapse es

$$\eta_{CT} > \frac{3(\alpha - 1)}{(3 - \alpha)}. \quad (4.27)$$

En el caso de un perfil isotérmico notamos que $\eta_{CT} > 3$. C&T20 eligen una amplitud arbitraria $\eta_{CT} = 4$, con lo que encuentran que la masa de marea es $M_\tau = 6M_L$. C&T20 presuponen que ésta es la masa máxima que la estrella central puede acretar.

Hasta aquí hemos revisado la teoría de acreción por mareas tal como originalmente fue propuesta L&H18, así como el tratamiento complementario realizado por C&T20. En el primero hemos notado algunas inconsistencias relacionadas principalmente con la manera de calcular las fuerzas de marea y con el empleo de una PDF log-normal para estimar la probabilidad de que un grumo sea propenso a colapsar cuando se encuentra sujeto a fuerzas de marea. En el segundo caso, notamos la omisión de la presión térmica en el tratamiento. Puntos que discutiremos a continuación.

4.3. Comentarios a L&H18

Nuestra crítica a L&H18 gira en torno a cinco puntos:

[†]También ignoran la contribución debida al núcleo de Larson, pero no lo mencionan de forma explícita.

- I. El cálculo de la masa del grumo en la ec. (4.3), donde se ignora que por hipótesis, la densidad del grumo es constante.
- II. La arbitrariedad del primer criterio de colapso referente a la masa del grumo, enunciado en la ec. (4.4).
- III. La sobresimplificación de las fuerzas de marea en la ec. (4.13), donde se calcula la marea sólo como una diferencia de la fuerza aplicada en el centro del grumo y en los extremos de éste.
- IV. Suponer que el grumo se encuentra en reposo respecto al núcleo de Larson.
- V. Suponer que la densidad se encuentra descrita por una PDF log-normal para estimar la distancia a la cual los grumos poseen la densidad suficiente para colapsar y así calcular la masa que el núcleo de Larson es capaz de acretar. Quizá el punto más flojo de la teoría de L&H18.

4.3.1. Cálculo de la masa del grumo

La primera crítica que realizamos al desarrollo propuesto por L&H18 se encuentra relacionada con la masa del grumo que ellos calculan. Al principio de su desarrollo, plantean como hipótesis de trabajo que la densidad del grumo sea homogénea. Sin embargo, para obtener la ec. (4.3), integran la densidad del grumo como la suma de la densidad de la envolvente y el grumo de densidad. Esta densidad no es constante, sino que sigue al perfil de densidad de la envolvente. En cambio, nosotros proponemos que la masa del grumo sea calculada de forma congruente como la masa de una esfera con centro en r_p , radio δr_p y con densidad $\rho_p = \rho_e(r_p) + \delta\rho_p$, obteniendo así la expresión

$$M_p = 4\pi \int_0^{\delta r_p} (\eta_{LH} + 1) \frac{Ac_s^2}{2\pi Gr_p^2} r'^2 dr' = \frac{2}{3} (\eta_{LH} + 1) \frac{Ac_s^2}{Gr_p^2} \delta r_p^3. \quad (4.28)$$

4.3.2. Masa mínima de colapso

Por otro lado, L&H18 justifican el primer criterio de colapso bajo el argumento que $M_L \sim 0.002 M_\odot$ es la masa mínima que un grumo debe tener para colapsar gravitacionalmente y formar un núcleo de Larson. Este criterio lo enuncian a partir de los resultados obtenidos de simulaciones numéricas (Lee & Hennebelle, 2018), donde se modela el colapso de nubes con masa inicial igual a $1000 M_\odot$ ignorando campos magnéticos y transporte radiativo. Sin embargo no existe un argumento teórico que motive a decir que esa es la masa de Larson. El primer núcleo de Larson ocurre cuando un centro de colapso se vuelve ópticamente grueso, y pasa de estado de colapso, a equilibrio hidrostático temporal. Que sea ópticamente grueso depende de que sea muy denso ($\sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$), lo cual puede ocurrir aún cuando la masa sea muy chica. En otras palabras, la teoría permite que se formen núcleos poco masivos, incluso con masas planetarias.

De forma arbitraria, podríamos decir que la masa del grumo debe ser por lo menos $\sim 0.075 M_\odot$, que es la masa que marca la diferencia entre enanas marrones

y estrellas M (ver p. ej., Bate et al., 2003). Por otro lado, a partir de simular el colapso y fragmentación de una nube con turbulencia a gran escala, Bate et al. (2003) encuentran una masa para el núcleo de Larson de $\sim 0.005 M_{\odot}$. Finalmente, Vaytet y Haugbølle (2017) simulan el colapso de esferas de Bonnor-Ebert con masas iniciales que van de 0.2 a $8M_{\odot}$ y encuentran que en promedio la masa mínima del primer núcleo de Larson es $\sim 0.04 M_{\odot}$ y del segundo núcleo de Larson $\sim 3 \times 10^{-3} M_{\odot}$. Respecto a este último punto, es posible tener nubes gravitacionalmente inestables menos masivas y obtener así resultados distintos para la masa del núcleo de Larson. En conclusión, fijar una masa mínima no es un buen criterio para determinar que ocurra el colapso gravitacional del grumo.

4.3.3. Configuración estática

Otra de las suposiciones que se hacen en este modelo, es que el grumo se encuentra en reposo respecto al núcleo de Larson, sin embargo, lo más probable es que el grumo posea un movimiento relativo al núcleo. De estar ligado a éste, lo correcto sería considerar un potencial efectivo en la ec. (4.13). Este potencial efectivo podría comprimir a la parcela de gas, acortando la longitud de Jeans. Un tratamiento detallado del potencial efectivo está fuera de los objetivos de la presente tesis, pero queremos abordarlo para un posible artículo de investigación (Zavala-Molina & Ballesteros-Paredes 2021, en preparación).

4.3.4. Aproximación de las fuerzas de marea

Es probable que calcular la fuerza de marea como la diferencia entre la fuerza gravitacional sobre el centro del grumo y la fuerza gravitacional sobre el extremo del grumo como se realiza en la ec. (4.13), no sea el enfoque más adecuado. En realidad, la ec. (4.13) es una suma de fuerzas aplicadas en distintos lugares, por lo que no puede representar un balance de fuerzas. En el modelo de L&H18 las fuerzas gravitacionales debido al núcleo de Larson, a la envolvente y al grumo poseen una forma funcional completamente analítica y por lo tanto es posible y preferible emplear el cálculo del tensor de mareas que hemos expuesto en la sección 3.1. Además, al calcular la marea como la diferencia en la fuerza gravitacional evaluada en los extremos, se debería dividir esta diferencia por el radio del grumo, para cuantificar el cambio en la fuerza por unidad de distancia, cosa que L&H18 no realizan. Cuando se emplea el análisis diferencial del tensor de marea, no es necesario realizar esto último.

4.3.5. Empleo de la PDF

Diferentes autores (ver p. ej., Vazquez-Semadeni, 1994; Ostriker et al., 2001) han mostrado mediante experimentos numéricos, que las cajas isotérmicas turbulentas poseen una PDF de la densidad cuya forma es una log-normal. Debido a que los choques supersónicos producen saltos en densidad que son proporcionales con el cuadrado del número de Mach del choque, tanto el ancho, como el pico de esta log-normal, se encuentran relacionados con el número de Mach turbulento. Bajo estas consideraciones,

L&H18 presuponen que durante el colapso, una parte de la velocidad de caída libre se convierte en turbulencia, es decir, en movimientos desordenados. El número de Mach de esta turbulencia es proporcional a la velocidad de caída libre, y por tanto, el campo de densidad que produce esta turbulencia sigue una función log-normal. Como consecuencia de que la caída libre tienda a la virialización, la turbulencia generada mediante este hipotético proceso permite generar grumos de densidad que son proporcionales a la velocidad de caída libre. Finalmente, L&H18 proceden a estimar la probabilidad de que uno de estos grumos se vuelva auto-gravitante.

En primer lugar, podemos enunciar ciertas críticas a la suposición que la PDF de la densidad tome la forma de una función log-normal en regiones turbulentas. A diferencia de las nubes moleculares, las cuales no se encuentran acotadas en volumen, la densidad log-normal ocurre en experimentos numéricos con volumen finito (ver p. ej., Vázquez-Semadeni, 1994), es decir, en cajas turbulentas. Por esta razón no es claro que la PDF sea log-normal a bajas densidades. Es más, observacionalmente, Alves et al. (2017) muestran que la aparente log-normalidad de las PDFs a baja densidad podría ser un simple efecto de incompletez del muestreo a densidades bajas en los mapas de densidad columnar de las nubes moleculares. Por otro lado, no se ha mostrado que el campo de densidad de una región en colapso sea descrito por una función log-normal. Todo lo contrario, diferentes trabajos muestran sistemáticamente que a altas densidades, la gravedad hace que la PDF adopte una forma de ley de potencias (ver p. ej., Kainulainen et al., 2009; Ballesteros-Paredes et al., 2011). Además, aunque el colapso en caída libre sea capaz de amplificar la turbulencia dentro de una nube (como se observa en simulaciones numéricas), la caída libre de un perfil suficientemente empinado difícilmente producirá movimientos turbulentos. Finalmente, es sabido que las fluctuaciones de densidad a un cierto tiempo son producidas por una combinación entre la turbulencia inicial y la acreción debida al colapso gravitacional. Sin embargo, las perturbaciones difícilmente son producidas exclusivamente por la turbulencia, y por tanto, que estén relacionadas exclusivamente con el número de Mach (ver p. ej., Guerrero-Gamboa & Vázquez-Semadeni, 2020).

4.4. Comentarios a C&T20

La crítica al artículo de C&T20 estará enfocada en discutir los puntos que consideramos poco satisfactorios, o simplemente, incorrectos. Éstos son:

- I. Ignorar la presión térmica y suponer que la gravedad es la única fuerza que interviene en el colapso gravitacional del grumo.
- II. Debido a la geometría del problema, las contribuciones de marea, tanto del núcleo de Larson —ec. (4.22)—, como de la envolvente —ec. (4.23)—, se encuentran calculadas empleando un sistema coordenado centrado en el núcleo de Larson. Sin embargo, en el caso del grumo, el sistema coordenado se encuentra centrado en el centro del grumo. C&T20 cometen el error de sumar estas contribuciones como si el origen de coordenadas fuese el mismo en los 3 casos. En consecuencia, la condición de colapso —ec. (4.24)— no es correcta.

- III. La ec. (4.27), que establece la amplitud mínima de densidad de los grumos capaces de colapsar, es consecuencia directa del error previo, es decir, de haber presupuesto erróneamente que los tensores de marea de Larson y de la envolvente tienen el mismo origen que el tensor de marea del grumo. Como consecuencia, esta condición no puede ser correcta.

4.4.1. Falta de presión térmica

El análisis de C&T20 ignora el aporte que brinda la presión térmica al suponer que es únicamente el balance entre la auto-gravedad del grumo y las fuerzas de marea lo que determina si el grumo es propenso a colapsar. Efectivamente, la auto-gravedad del grumo actuará atrayendo al gas del grumo hacia el centro de masa, sin embargo, la presión interna del grumo actuará en el sentido contrario. Tal como revisamos en las secciones 2.1 y 2.3, la presión interna no es despreciable y finalmente es lo que determina si una parcela de gas colapsa o no, de acuerdo al análisis clásico de Jeans. En este sentido, es posible que el criterio de C&T20 determine que una parcela es propensa a colapsar, cuando en realidad el soporte térmico sea suficiente para evitar el colapso de la parcela. En otras palabras, se podría concluir erróneamente que se están formando nuevas proto-estrellas alrededor del núcleo de Larson original, cuando en realidad las condiciones físicas imposibilitan que tal cosa suceda. En consecuencia, si no se forman nuevas proto-estrellas en la forma esperada, tanto el modelo de Colman y Teyssier (2020), como el de Lee y Hennebelle (2018) dejan de ser capaces de explicar el comportamiento de la IMF.

4.4.2. Referente al sistema de referencia

Vemos que los tensores de marea debidos al núcleo de Larson y la envolvente — ecs. (5.27) y (4.20) — se encuentran calculados localizando el origen del sistema de referencia en el núcleo de Larson. Por otro lado, el tensor de marea debido a la auto-gravedad del grumo — ec. (4.21) — se encuentra calculado suponiendo que el origen del sistema se localiza en r_p . Debido a que los primeros dos tensores comparten el mismo sistema coordenado, pero el tercero no, es incorrecto sumar estas tres contribuciones para escribir las ec. (4.22) y (4.23). De forma que el criterio de colapso enunciado en la ec. (4.24) es incorrecto, así como los cálculos posteriores concernientes a la amplitud mínima de una perturbación capaz de colapsar — ec. (4.27) — y la masa de marea. Escribir correctamente el tensor de auto-gravedad centrado en el núcleo de Larson se encuentra fuera de los objetivos de la presente tesis.

4.4.3. Inconsistencia de la expresión para la masa de marea

C&T20 emplean la relación entre la densidad de la fluctuación y la densidad de la envolvente, ec. (4.18) en la condición de colapso enunciada en la ec. (4.24) para encontrar, que en el caso de un perfil isotérmico, los grumos deben cumplir con la condición $\eta_{CT} > 3$ para ser capaces de colapsar. Con esto en mente, argumentan que si un grumo posee una amplitud $\eta_{CT} = 4$, entonces $M_\tau = 6M_L \sim 0.12M_\odot$,

valor cercano al pico de la IMF. Sin embargo, como ya revisamos, la ec. (4.24) no es correcta, y por lo tanto no es posible tomar las estimaciones hechas con ella como confiables. En efecto, derivemos una expresión para la masa de marea en el caso de un perfil isotérmico siguiendo las hipótesis de C&T20. Podemos usar la ec. (4.18) en la ec. (4.24) obteniendo

$$\eta_{\text{CT}}\rho_e(r_p) = \frac{3(\alpha - 1)}{(3 - \alpha)}\rho_e(r_p) + \frac{3M_L}{2\pi r_\tau^3}, \quad (4.29)$$

de donde podemos despejar la densidad de la envolvente

$$\rho_e(r_p) = \left(\frac{1}{\eta_{\text{CT}} - \frac{3(\alpha-1)}{(3-\alpha)}} \right) \left(\frac{3M_L}{2\pi r_\tau^3} \right). \quad (4.30)$$

Fijando nuestra atención en el caso de la esfera isotérmica singular ($\alpha = 2$), la última expresión se reduce a

$$\rho_e = \left(\frac{1}{\eta_{\text{CT}} - 3} \right) \left(\frac{3M_L}{2\pi r_\tau^3} \right) \quad (4.31)$$

y sustituyéndola en la expresión para la masa de marea, ec. (4.26), obtenemos

$$M_\tau(\eta_{\text{CT}}; \alpha = 2) = \frac{6M_L}{\eta_{\text{CT}} - 3}. \quad (4.32)$$

Ahora bien, la ec. (4.31) evidentemente no es la densidad de una esfera isotérmica singular. Haber empleado la ec. (4.25) ocasiona llegar a este resultado incorrecto. Por otro lado, la ec. (4.32), que C&T20 no escriben en su artículo, pero cuyas hipótesis si emplean para estimar el pico de la IMF, no puede ser correcta, ya que para $\eta_{\text{CT}} < 3$, se obtiene una masa negativa. Aún peor, si $\eta_{\text{CT}} = 3$ se obtiene una masa infinita. Finalmente, bajo ninguna justificación, C&T20 deciden emplear $\eta_{\text{CT}} = 4$ para calcular la masa de marea, pasando por alto la inconsistencia que acabamos de discutir. Su resultado, aunque cercano al pico de la IMF, no demuestra que la teoría sea correcta.

Además de estas observaciones realizadas a ambos tratamientos, dado que cualquier grupo difícilmente estará en reposo respecto al núcleo central de Larson, como discutiremos más adelante, un tratamiento más adecuado requerirá de la inclusión de un potencial centrífugo, el cual cancelaría en cierta medida al potencial de marea, y podría permitir el colapso de los grupos.

5 Modificaciones a la teoría

En el capítulo anterior vimos que tanto las aproximaciones de L&H18 como de C&T20 tienen algunos problemas e inconsistencias, los cuales también hemos discutido. En este capítulo retomamos el desarrollo de Jog visto en la sección 3.2, el cual incluye el balance de fuerzas entre la gravedad y el soporte térmico, y lo aplicaremos al problema de un grumo de densidad que ocurre en la vecindad de un núcleo de Larson, el cual está rodeado de una envolvente con perfil de ley de potencias. En este sentido, propondremos un primer tratamiento que consideramos más adecuado. Este tratamiento nos permite mostrar que en realidad, la única manera de generar colapso en la vecindad de un núcleo de Larson con una envolvente con perfil $\rho \propto r^{-2}$ es mediante la generación de un grumo necesariamente más grande que la envolvente misma.

5.1. Modificaciones a la teoría de disrupción de mareas

En esta sección mostraremos las modificaciones que hemos realizado a la teoría de disrupción por mareas. Primero, mostraremos el cálculo de la longitud y masa de Jog debidas a un perfil de ley de potencias. Posteriormente calcularemos el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$, con el cual mostraremos que no es posible que un grumo descrito por condiciones físicas realistas colapse embebido dentro del perfil de una esfera isotérmica. Concluiremos esta sección calculando la masa de Jog para algunos núcleos protoestelares embebidos en regiones densas.

5.1.1. Cálculo de la longitud y masa de Jog

En el capítulo anterior hemos visto que en los desarrollos de L&H18 y C&T20 han sido realizadas algunas aproximaciones no del todo convenientes. Una de estas aproximaciones se encuentra relacionada con la inclusión de la presión térmica como soporte contra el colapso gravitacional. Mientras que C&T20 omiten incluir la presión térmica por completo, L&H18 si lo hacen, pero a través de la ecuación virial (4.6). Un cálculo más apropiado debe hacer uso de la inestabilidad de Jeans modificada por un potencial gravitacional externo, sec. 3.2. Para esto partamos de la misma configuración y las mismas variables consideradas por L&H18, pero ignorando por ahora al núcleo de Larson. Entonces, tenemos una envolvente con perfil de ley de potencias $\rho_e = \rho_0 (r/r_0)^{-\alpha}$. Dentro de la envolvente ocurre un grumo de densidad, cuya am-

plitud es η veces el valor de la densidad de la envolvente en el lugar donde ocurre el grumo. Siguiendo las hipótesis de L&H18 y C&T20 suponemos que el grumo es esférico, con radio $\delta r/2$, y además que su densidad es homogénea (ver fig. 4.2).

Como vimos en la sección 3.2 al incluir un potencial externo en la ec. de momento, y hacer el análisis de perturbaciones para linealizar ésta y la ecuación de masa, obtenemos la longitud y la masa de Jog

$$\lambda_{\text{Jog}} = \lambda_{\text{J}} \frac{1}{(1 - \rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}})^{1/2}}, \quad (5.1)$$

y

$$M_{\text{Jog}} = M_{\text{J}} \frac{1}{(1 - \rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}})^{3/2}}, \quad (5.2)$$

donde ρ_{fluc} es la densidad del grumo,

$$\rho_{\text{eff}} = T_0/4\pi G \quad (5.3)$$

es una densidad efectiva correspondiente a la distribución de masa que ejercen las fuerzas de marea (la distribución de masa externa) y $T_0 = -\partial^2\Phi/\partial x^2$ es el término de marea definido en la ec. 3.30).

Antes de continuar, es importante realizar algunas notas sobre el potencial gravitacional a forma de recordatorio. Revisemos lo que sucede cuando la concavidad del potencial es negativa

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} < 0. \quad (5.4)$$

Con esto y de acuerdo a la definición del término de marea, $T_0 = -\partial^2\Phi/\partial r^2 > 0$, la marea es disruptiva y matemáticamente

$$\rho_{\text{eff}} > 0. \quad (5.5)$$

Entonces, el denominador de las ecs. (5.1) y (5.2) se hace menor que uno, y la longitud de Jog crece. Ahora, si $0 < \rho_{\text{eff}} < 1$ tenemos que

$$\frac{L_{\text{Jog}}}{L_{\text{J}}} \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \frac{M_{\text{Jog}}}{M_{\text{J}}} \rightarrow \infty, \quad (5.6)$$

conforme $\rho_{\text{eff}} \rightarrow \rho_{\text{fluc}}$. En el caso $\rho_{\text{eff}} \geq \rho_{\text{fluc}}$, la fuerza de marea disruptiva es tan grande que la longitud de Jog no se encuentra definida. En otras palabras, para ρ_{eff} suficientemente grandes, no hay manera de que ocurra el colapso del grumo. Por otro lado, si la concavidad es positiva, $T_0 < 0$, entonces $\rho_{\text{eff}} < 0$ y el numerador en las ecs. (5.1) y (5.2) es mayor a uno, de manera tal que la longitud de Jog decrece. En el límite cuando $T_0 \rightarrow -\infty$

$$\frac{L_{\text{Jog}}}{L_{\text{J}}} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{M_{\text{Jog}}}{M_{\text{J}}} \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

Esto es, para mareas muy compresivas, la longitud y la masa de Jog pueden volverse mucho menor que sus equivalentes clásicos de Jeans. Lo cual facilita el colapso de los grumos.

Como acabamos de mencionar, nosotros despreciaremos por ahora la contribución del núcleo de Larson a la marea. Usando la componente radial del tensor de marea debido a una ley de potencias, ec. (3.24)

$$\tau_{rr}^{(\alpha)} = \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} 4\pi G \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha}$$

y la definición de la densidad efectiva —ec. (5.3)—, podemos calcular la densidad efectiva correspondiente a la componente radial del tensor de marea debida a una distribución $\rho \propto r^{-\alpha}$

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{T_0}{4\pi G} = \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha}, \quad (5.8)$$

donde T_0 es el término de marea. Siguiendo la idea de L&H18 y C&T20, nos concentramos en un grupo del tipo

$$\rho_{\text{fluc}} = \eta \rho_0 \left(\frac{r_p}{r_0} \right)^{-\alpha}, \quad (5.9)$$

es decir, la densidad del grupo es constante y su valor es η veces la densidad de la envolvente evaluada en r_p —la posición del grupo— y además $\eta > 1$. Con esto, calculamos el cociente entre la densidad efectiva y la densidad del grupo evaluada en la posición donde ocurre el grupo como

$$\frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_{\text{fluc}}} = \frac{\alpha - 1}{\eta(3 - \alpha)}. \quad (5.10)$$

Notemos que la ec. (5.10) es independiente de la distancia y de la densidad del perfil de potencias evaluada en el sitio donde ocurre el grupo, y depende únicamente del exponente de la ley de potencias. Por otro lado, acabamos de revisar que si $\rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}} < 0$, la marea es compresiva, lo cual ocurre si $\alpha < 1$. Ahora bien, si $0 < \rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}} < 1$, la marea es disruptiva, lo cual ocurre siempre que $\alpha > 1$. Conforme $\rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}} \rightarrow 1$, la longitud y la masa de Jog crecen indefinidamente, y para

$$\frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_{\text{fluc}}} = \frac{\alpha - 1}{\eta(3 - \alpha)} > 1, \quad (5.11)$$

la longitud y la masa de Jog no se encuentran definidas. Esto ocurre si

$$\eta < \frac{\alpha - 1}{(3 - \alpha)}, \quad (5.12)$$

lo cual nos muestra que grupos suficientemente chicos nunca colapsarán. En particular, para $\alpha = 2$, fluctuaciones con $\eta \leq 1$, nunca colapsarán. Sin embargo, de acuerdo a la ec. (5.9), η es por definición siempre mayor a uno. Esto quiere decir, que dada una esfera isotérmica ($\alpha = 2$), potencialmente cualquier grupo es capaz de colapsar.

Esferas con perfiles más empinados que $\alpha = 2$, producen mareas que son cada vez mas importantes, llegando al límite $\alpha = 3$, donde no es posible que se forme un

grupo capaz de colapsar. Sin embargo, de acuerdo a los resultados obtenidos en la subsección 3.1.3 la masa de una esfera con $\alpha \geq 3$ es infinita, de manera que el caso no es realista. Aún más, la energía gravitacional de una esfera con $\alpha = 2.5$ es infinita, por lo que el caso $\alpha \geq 2.5$ ya no es realista. De hecho, cabe resaltar que no se observan perfiles de densidad de núcleos densos tal que $\alpha \geq 2.5$.

Insertando la ec. (5.10) en la ec. (5.1) tenemos que la longitud de Jog queda como

$$\frac{\lambda_{\text{Jog}}}{\lambda_{\text{J}}} = \left[1 - \left(\frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right) \frac{1}{\eta} \right]^{-1/2}. \quad (5.13)$$

Análogamente, usando la ec. (5.10) en la ec. (5.2) vemos que la masa de Jog es

$$\frac{M_{\text{Jog}}}{M_{\text{J}}} = \left[1 - \left(\frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right) \frac{1}{\eta} \right]^{-3/2}. \quad (5.14)$$

Primero notemos que si $\alpha = 1$, el cociente de la ec. (5.10) se anula, en la ec. (5.13) recuperamos la longitud original de Jeans y en la ec. (5.14) la masa original de Jeans, en otras palabras, una esfera con perfil de densidad $\rho \propto r^{-1}$ no ejerce mareas sobre perturbaciones embebidas en su interior (ver también Masi, 2007; Colman & Teyssier, 2020). Por otra parte, cuando $\alpha > 1$, el cociente $\rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}}$ —ec. (5.10)— es mayor a uno y la longitud y masa de Jog —ecs. (5.13) y (5.14)— son mayores que sus equivalentes de Jeans, ecs. (2.23) y (2.24). Esto significa que los perfiles muy empinados aumentan la estabilidad de los grupos que ocurren dentro de ellos. Finalmente, cuando $\alpha < 1$, el cociente de la ec. (5.10) es negativo y la longitud y masa de Jog disminuyen respecto a sus contrapartes de Jeans, aumentando la inestabilidad del grupo.

Para entender cómo se modifica la longitud de Jeans cuando se consideran las fuerzas de marea de un perfil de ley de potencias, en la Fig. 5.1 (a) hemos graficado el cociente entre la longitud de Jog y la longitud Jeans, y en el panel (b) de la misma figura, el cociente entre la masa de Jog y la masa de Jeans como función de la amplitud de densidad del grupo para distintos exponentes. Lo primero que notamos es que los criterios de Jeans y de Jog discrepan cuando la densidad de los grupos es chica en amplitud y son muy parecidos cuando la amplitud de densidad crece. Esto se debe a que, conforme mayor es la amplitud η del grupo, mayor es la importancia de su auto-gravedad respecto a las fuerzas de marea. Conforme η crece, el criterio de Jog tiende asintóticamente al criterio de Jeans, la ec. (5.10) tiende a cero y en las ecs. (5.13) y (5.14) recuperamos la longitud y masa de Jeans clásicas.

En la Fig. 5.1 también podemos distinguir un cambio en la concavidad del cociente $M_{\text{Jog}}/M_{\text{J}}$ cuando $\alpha = 1$, ya que como acabamos de revisar, una envolvente esférica cuya densidad varía como $\rho \propto r^{-1}$, no ejerce fuerzas de marea sobre los grupos inmersos en ella y por lo tanto recuperamos el criterio clásico de Jeans. Por otro lado, exponentes estrictamente menores a uno nos indican que la longitud y masa de Jog son menores que sus contrapartes de Jeans, es decir, la envolvente es compresiva y grupos cuya masa no alcanza la masa de Jeans son capaces de colapsar bajo nuestro criterio.

Finalmente, para grupos inmersos en envolventes con exponentes mayores a uno, la longitud y la masa de Jog son mayores que la longitud y la masa de Jeans, respectivamente, por lo que se vuelve más difícil que ocurra el colapso gravitacional del

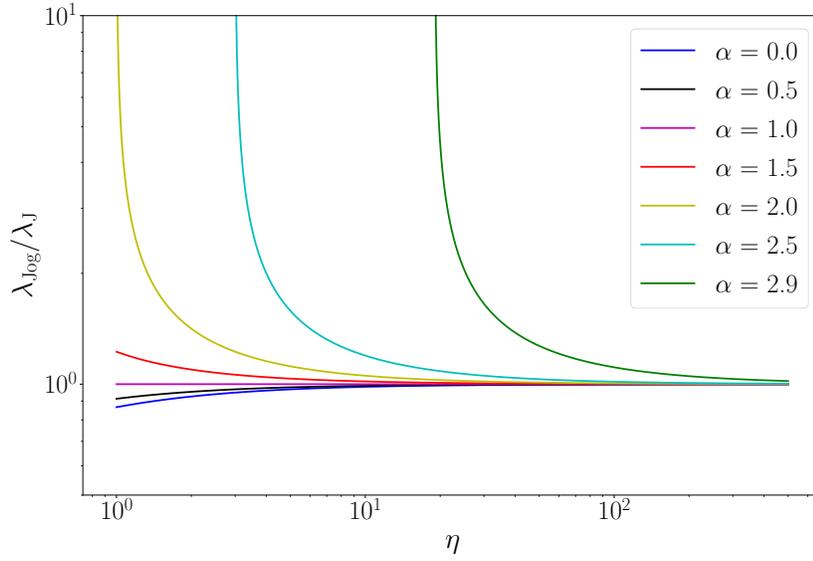
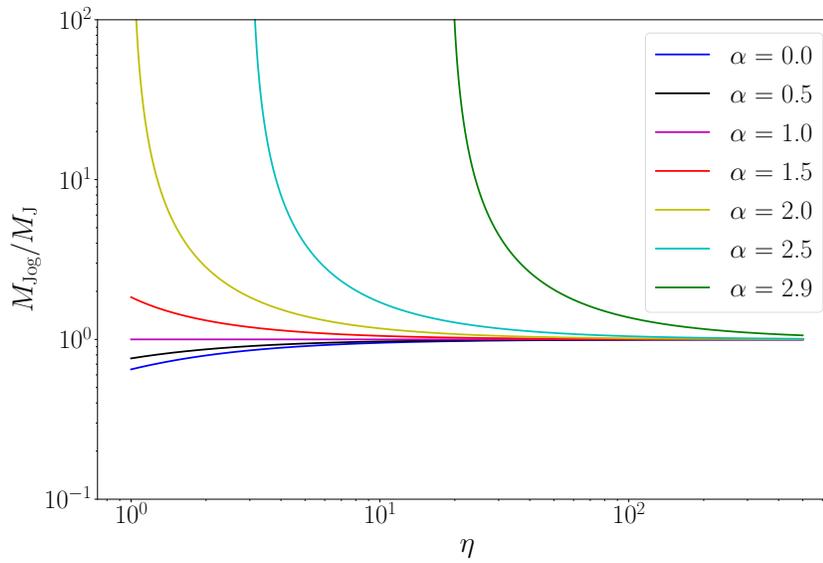
(a) Cociente $\lambda_{\text{Jog}}/\lambda_{\text{J}}$ como función de la amplitud del grupo η .(b) Cociente $M_{\text{Jog}}/M_{\text{J}}$ como función de la amplitud del grupo η .

Figura 5.1: para varios exponentes de la ley de potencias. Notamos que la diferencia entre el criterio que hemos derivado y el criterio tradicional de Jeans es pequeña cuando el grupo es grande, $\eta \gtrsim 1.5$ y también cuando α es cercano a uno. Sin embargo, cuando $\eta \rightarrow 1$, los criterios divergen, en particular cuando $\alpha \geq 2$.

grumo. En particular, para un grumo inmerso dentro de un perfil de densidad $\rho \propto r^{-2}$, vemos que las longitudes y masas de Jeans y de Jog difieren bastante cuando el grumo es pequeño. La longitud y masa de Jog tienden a infinito cuando $\eta \rightarrow 1$, de lo que se puede concluir que es sumamente complicado que grumos cuya densidad es ligeramente mayor que su vecindad, embebidos dentro de un perfil isotérmico, sean capaces de colapsar, aún cuando alcancen la longitud o masa de Jeans. Interpretamos este resultado como un escenario en el cual, la variación de la densidad de la envolvente con la distancia es tan brusca y la auto-gravedad del grumo tan chica, que la envolvente desgarrara al grumo. Nuevamente señalamos que esta discrepancia entre el criterio original y nuestro desarrollo es apreciable únicamente cuando el salto de la densidad del grumo es pequeño.

5.1.2. Condiciones de colapso del grumo

A partir de la subsección anterior, podríamos ingenuamente inferir que siempre que $\alpha < 3$, es factible que un grumo pueda proceder al colapso, pues la longitud de Jog y la longitud de Jeans convergen rápidamente al incrementar la amplitud del grumo. Sin embargo, la pregunta relevante es si un grumo con con amplitud de densidad η realmente alcanza su longitud o masa de Jog. Comencemos por calcular el cociente entre la masa del grumo $M_{\delta r}$ y la masa de Jog M_{Jog}

$$\frac{M_{\delta r}}{M_{\text{Jog}}} = \frac{M_{\delta r}/M_{\text{J}}}{M_{\text{Jog}}/M_{\text{J}}}.$$

Para esto, adoptando las suposiciones de L&H18, calculemos $M_{\delta r}$ como la masa de una esfera de radio $\delta r/2$ y densidad constante

$$\rho_{\text{p}} = \eta \rho_0 \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{-\alpha},$$

—que no es más que la ec. (5.9) evaluada en r_{p} —, entonces

$$M_{\delta r} \equiv M(\delta r/2) = 4\pi \int_0^{\delta r/2} \eta \rho_0 \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{-\alpha} r'^2 dr' = \frac{\pi}{6} \eta \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{-\alpha} \delta r^3 = \frac{\pi}{6} \rho_{\text{p}} \delta r^3. \quad (5.15)$$

Por su parte, la masa de Jeans —ec. (2.24)— del grumo será

$$\begin{aligned} M_{\text{J}}(\delta r) &= \frac{\pi}{6} \rho_{\text{p}} \left(\frac{\pi c_{\text{s}}^2}{G \rho_{\text{p}}} \right)^{3/2} = \frac{\pi}{6} \eta \rho_0 \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{-\alpha} \left(\frac{\pi c_{\text{s}}^2}{G \eta \rho_0} \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{\alpha} \right)^{3/2} \\ &= \frac{\pi}{6} (\eta \rho_0)^{-1/2} \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{\alpha/2} \left(\frac{\pi c_{\text{s}}^2}{G} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ahora, dividamos la masa del grumo entre su masa de Jeans

$$\begin{aligned} \frac{M_{\delta r}}{M_{\text{J}}} &= (\eta \rho_0)^{3/2} \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{-3\alpha/2} \delta r^3 \left(\frac{G}{\pi c_{\text{s}}^2} \right)^{3/2} \\ &= \left(\frac{\pi^{1/2} c_{\text{s}}}{G^{1/2}} \right)^{-3} (\eta \rho_0)^{3/2} \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0} \right)^{-3\alpha/2} \delta r^3. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Finalmente, el cociente entre la masa del grupo y la masa de Jog se obtiene calculando el cociente entre la ec. (5.17) y la ec. (5.14)

$$\frac{M_{\delta r}}{M_{\text{Jog}}} = \frac{M_{\delta r}/M_{\text{J}}}{M_{\text{Jog}}/M_{\text{J}}} = \left(\frac{\pi}{G}\right)^{-3/2} c_s^{-3} (\eta\rho_0)^{3/2} \left(\frac{r_{\text{p}}}{r_0}\right)^{-3\alpha/2} \delta r^3 \left(1 - \frac{\alpha - 1}{\eta(3 - \alpha)}\right)^{3/2}. \quad (5.18)$$

Esta expresión presenta dependencias relativamente simples con los parámetros de la nube —velocidad del sonido, exponente de la ley de potencias, tamaño del grupo—. Notemos además que podemos simplificar el análisis si elegimos como radio de normalización del perfil de densidad el sitio donde se localiza el grupo, es decir $r_{\text{p}} = r_0$. Escribimos el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ evaluado en $r_{\text{p}} = r_0$ y normalizado en unidades prácticas como

$$\frac{M_{\delta r}}{M_{\text{Jog}}} = 8.5 \times 10^{-2} \left(\frac{c_s}{0.2 \text{ km s}^{-1}}\right)^{-3} \left(\frac{n_0}{10^4 \text{ cm}^{-3}}\right)^{3/2} \left(\frac{\delta r}{0.1 \text{ pc}}\right)^3 \left(\eta - \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha}\right)^{3/2}, \quad (5.19)$$

donde también hemos reemplazado la densidad de masa por la densidad numérica n_0 utilizando $\rho = \mu m_{\text{H}} n$; siendo μ la masa molecular promedio —que en el caso de las nubes moleculares de la vecindad solar es del orden de 2.36— y $m_{\text{H}} = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$, la masa del átomo de hidrógeno.

Dentro de las nubes moleculares la turbulencia produce los saltos de densidad mediante choques típicamente isotérmicos, por lo que bien podemos expresar la relación anterior como

$$\frac{M_{\delta r}}{M_{\text{Jog}}} = 8.5 \times 10^{-2} \left(\frac{c_s}{0.2 \text{ km s}^{-1}}\right)^{-3} \left(\frac{n_0}{10^4 \text{ cm}^{-3}}\right)^{3/2} \left(\frac{\delta r}{0.1 \text{ pc}}\right)^3 \left(\mathcal{M}^2 - \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha}\right)^{3/2} \quad (5.20)$$

donde \mathcal{M} es el número de Mach, que se relaciona con el salto de densidad como $\eta = \mathcal{M}^2$ (ver p. ej., Dyson & Williams, 1997). Entonces, la ec. (5.20) nos proporciona el criterio para determinar si un grupo dentro de la envolvente del núcleo de Larson es capaz de colapsar. Si $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}} > 1$, la masa del grupo excede la masa de Jog, y el grupo puede proceder al colapso. Por el contrario, si es menor a uno, tanto la presión interna, como las mareas, son capaces de evitar que el grupo colapse.

En la ec. (5.20) vemos que la velocidad del sonido c_s actúa tal y como se espera, brindando soporte en contra del colapso del grupo. En otras palabras, a mayor velocidad del sonido, menor será el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ y el grupo poseerá mayor soporte térmico. Por otro lado, la densidad en el sitio donde ocurre el grupo, n_0 , actúa en sentido inverso: densidades ambientales elevadas facilitarán el colapso del grupo. De igual manera, perturbaciones con tamaños δr grandes también son más propensas a colapsar debido a la dependencia cúbica con el tamaño del grupo. Finalmente, es más sencillo que colapsen fluctuaciones producidas por números de Mach \mathcal{M} grandes, lo cual equivale a producir saltos en densidad η grandes. También podemos notar que en el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$, dado por la ec. (5.20), el factor que involucra al número de Mach \mathcal{M} y al exponente α , se encuentra elevado a la potencia 3/2. En primer lugar, este factor debe ser positivo y mayor a cero, de lo contrario, la masa del grupo jamás

podrá ser mayor que la masa de Jog, y en consecuencia, el grumo nunca colapsaría. Por lo tanto es necesario que $\mathcal{M}^2 > (\alpha - 1)/(3 - \alpha)$. Ahora bien, para $1 < \alpha < 2$, tenemos que $0 < (\alpha - 1)/(3 - \alpha) < 1$. Esto quiere decir que para cualquier $\mathcal{M} > 1$ —esto es, cualquier choque supersónico— el paréntesis final de la ec. (5.20) es positivo.

Dados los parámetros típicos de la ec. (5.20), podemos encontrar para cuales números de Mach dentro de una esfera isotérmica ($\alpha = 2$), la ec. (5.20) se vuelve mayor o igual a uno. En otras palabras

$$8.5 \times 10^{-2} (\mathcal{M}^2 - 1)^{3/2} \geq 1 \quad (5.21)$$

de donde

$$\mathcal{M} \geq \sqrt{\left(\frac{1}{8.5 \times 10^{-2}}\right)^{2/3} + 1} \sim 2.5. \quad (5.22)$$

Esto es, dentro de una esfera isotérmica, un grumo provocado por un choque con $\mathcal{M} = 2.5$ es capaz de alcanzar su masa de Jog si el tamaño de la región chocada es del orden 0.1 pc y la densidad ambiental es del orden de $n_0 \sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$. Aún más, cuando $\mathcal{M} > 3$, el término $(\alpha - 1)/(3 - \alpha)$ comienza a ser sustancialmente menor que \mathcal{M}^2 , de manera que el salto en densidad del choque comienza a dominar. Por ejemplo, si $\mathcal{M} \sim 3$ y $\alpha = 2$, el paréntesis vale 8, y elevado a la 3/2 tenemos un factor de 22, capaz de compensar al factor 8.5×10^{-2} de la ec. (5.20).

En principio, la ec. (5.20) parece indicarnos que es factible producir saltos en densidad capaces de colapsar mediante choques medianamente intensos, sin embargo, es importante no olvidar la configuración inicial: una región esférica cuya densidad sigue un perfil de ley de potencias, dentro de la cual ocurre un grumo de densidad. El tamaño físico del grumo δr , es sustancialmente menor que el tamaño de la esfera con perfil de ley de potencias. Dados los parámetros estándar empleados en la ec. (5.20), sería necesario pensar en una nube molecular con estructura de ley de potencias y radio de orden $R > 0.5$ pc para poder pensar en un grumo de 0.1 pc de tamaño. En general, las nubes moleculares son bastante irregulares a escalas mayores a 0.1 pc (Falgarone et al., 1992), y difícilmente tendrán una estructura esférica con densidad de ley de potencias.

En la fig. 5.2 —línea azul— hemos graficado el número de Mach \mathcal{M} como función del exponente α usando la ec. (5.20), suponiendo que $c_s = 0.2 \text{ km s}^{-1}$, $\delta r = 0.1 \text{ pc}$, $n_0 = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ y haciendo que $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}} = 1$. Con esto, tratamos de identificar —dados los parámetros típicos— el número de Mach necesario para que la masa del grumo alcance una masa de Jog y por lo tanto, que su colapso sea posible. Así mismo y usando los mismos valores típicos, también hemos graficado cuando la masa del grumo supera 10, 100 y 1000 la masa de Jog —líneas naranja, verde y roja, respectivamente—. De la ec. (5.20) podemos ver, por ejemplo que si δr es 10 veces menor que el valor estándar indicado de 0.1 pc, el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ disminuye un factor de 1000. Entonces, podemos usar la línea $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}} = 1000$ para darnos una idea de la magnitud del choque requerido para producir un grumo de tamaño $\delta r = 0.01 \text{ pc}$ capaz de colapsar, es decir, $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}} = 1$. Como puede verse, estos choques son poco realistas, pues se requieren números de Mach $\mathcal{M} \sim 70$.

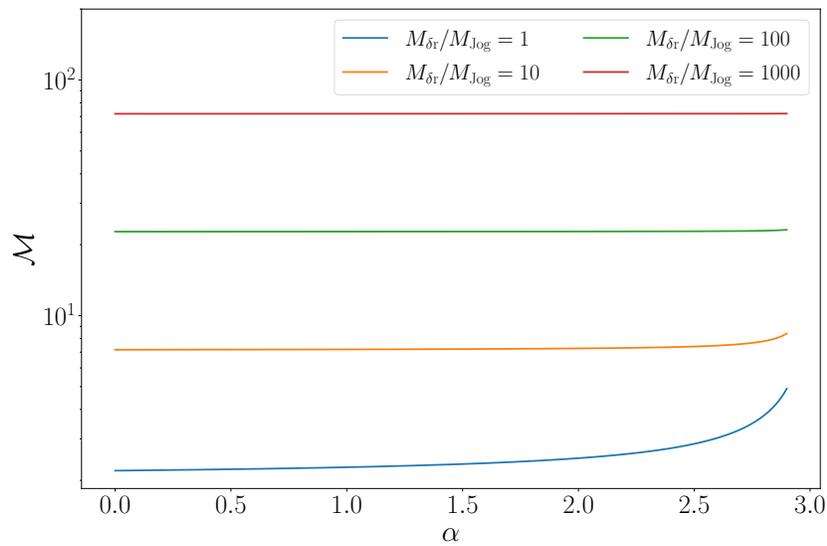


Figura 5.2: Usando la ec. (5.20), graficamos \mathcal{M} en función de α suponiendo los parámetros de la ec. (5.20) cuando la masa del grupo iguala a la masa de Jog, así como cuando la primera es 10, 100 y 1000 veces la masa de Jog — $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}} = 1, 10, 100$ y 1000 —. Dados los parámetros de la ec. (5.20), grupos producidos por choques con $\mathcal{M} \geq 2$ son capaces de colapsar, independientemente del perfil de densidad de la esfera.

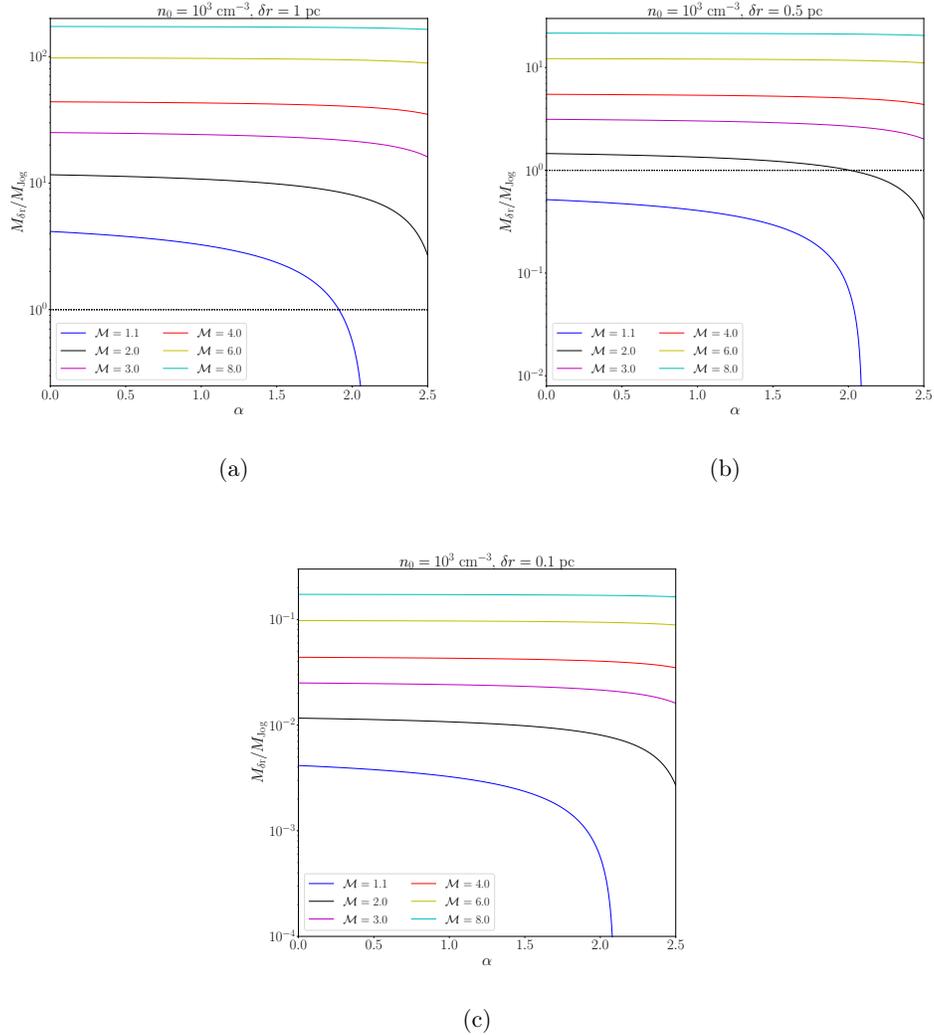


Figura 5.3: Cociente $M_{\delta r}/M_{Jog}$ para un grupo de amplitud de densidad η producido por un número de Mach $\mathcal{M} = \sqrt{\eta}$, embebido dentro de una envolvente de densidad descrita por una ley de potencias con exponente α , como función del exponente de la ley de potencias graficado para varios números de Mach. El gas en la vecindad del grupo tiene una densidad $n_0 = 10^3 \text{ cm}^{-3}$. En el panel (a) el grupo tiene un tamaño de 1 pc, en el panel (b) de 0.5 pc y en el panel (c) de 0.1 pc. Configuraciones por encima de la línea punteada son inestables. Podemos observar que grupos grandes (1 pc) embebidos dentro de medios poco densos $n_0 = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ son capaces de colapsar independientemente del tamaño del salto de densidad, mientras que para grupos más pequeños, se requieren choques más intensos.

Así mismo, en la Fig. 5.2 podemos notar que es más sencillo que los grupos colapsen si aumenta \mathcal{M} , ya que altos valores de \mathcal{M} producen mayores valores del cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$. En segundo lugar, podemos notar que para $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}} = 100, 1000$ —líneas verde y roja respectivamente— prácticamente no existe cambio en \mathcal{M} al variar α . Sin embargo, en la línea azul sí notamos un cambio en \mathcal{M} al variar el exponente, en especial cuando $\alpha > 2$, esto es, cuando el perfil de densidad es muy empinado.

Es sabido que las nubes poseen una estructura fractal en escalas mayores a 0.1 pc (Falgarone et al., 1992), de manera que no parece realista encontrar una nube esférica cuyo perfil de densidad sea una ley de potencias a escalas mucho mayores a 0.1 pc. Sin embargo, sabemos que la función de distribución de densidad de las nubes moleculares suele ser una función que decrece rápidamente con la densidad. En otras palabras, la mayoría de la masa de las nubes moleculares se encuentra en regiones de densidad baja, por lo que en primera aproximación, podemos considerarlas como perfiles de densidad razonablemente planos, es decir, $\alpha < 0.5$.

En este sentido, en la Fig. 5.3, hemos graficado el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ como función de α . En el panel (a) podemos ver que un grupo de 1 pc[†] de tamaño embebido en un medio cuya densidad ambiental es de 10^3 cm^{-3} , alcanza fácilmente su masa de Jog con números de Mach suficientemente bajos ($\mathcal{M} \geq 1.1$). Sin embargo, en el caso de un grupo rodeado por un medio con la misma densidad ambiental, pero de la mitad del tamaño, $\delta r = 0.5 \text{ pc}$ (panel (b)), son necesarios choques un poco más intensos ($\mathcal{M} \sim 2$) para poder alcanzar la masa de Jog. Manteniendo fija la densidad ambiental, en el panel (c) mostramos un grupo de tamaño $\delta r = 0.1 \text{ pc}$ (10 veces más chica que (a)). Notemos que es complicado que un grupo de este tamaño pueda alcanzar su masa de Jog.

En la Fig. 5.4 también mostramos el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ como función de α , pero ahora hemos aumentado la densidad del medio a $n_0 = 10^4 \text{ cm}^{-3}$. En el panel (a) notamos que si $\delta r = 0.5 \text{ pc}$, la masa del grupo puede superar hasta por tres órdenes de magnitud a la masa de Jog cuando $\mathcal{M} = 8$, garantizando el colapso de la parcela chocada. En el panel (b) de la fig. 5.4 reducimos el tamaño del grupo a $\delta r = 0.1 \text{ pc}$. Al tratarse de un grupo más pequeño, la masa que puede estar contenida dentro de él es menor, el cociente de la masa del grupo y la masa de Jog es menor que en el caso anterior, y por lo tanto, el grupo es más estable. Finalmente, en el panel (c) de la misma figura, hemos reducido el tamaño del grupo a $\delta r = 0.05 \text{ pc}$. Podemos observar que para este último caso es complicado que un grupo de densidad colapse de acuerdo a nuestro modelo analítico.

En la Fig. 5.5 nuevamente graficamos $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ como función de α . En el panel (a) mostramos el caso de un grupo de tamaño $\delta r = 0.1 \text{ pc}$ y densidad $n_0 = 10^5 \text{ cm}^{-3}$. El cociente entre la masa del grupo y la masa de Jog crece alrededor de un orden de magnitud si la comparamos con un grupo del mismo tamaño pero donde la densidad es $n_0 = 10^4 \text{ cm}^{-3}$, confirmando que el grupo tiende a hacerse inestable cuando la densidad en su vecindad crece, pero el tamaño del grupo permanece constante. En el

[†]Es poco realista pensar en un grupo de este tamaño. Hemos usado este valor únicamente para enriquecer la discusión del criterio de colapso.

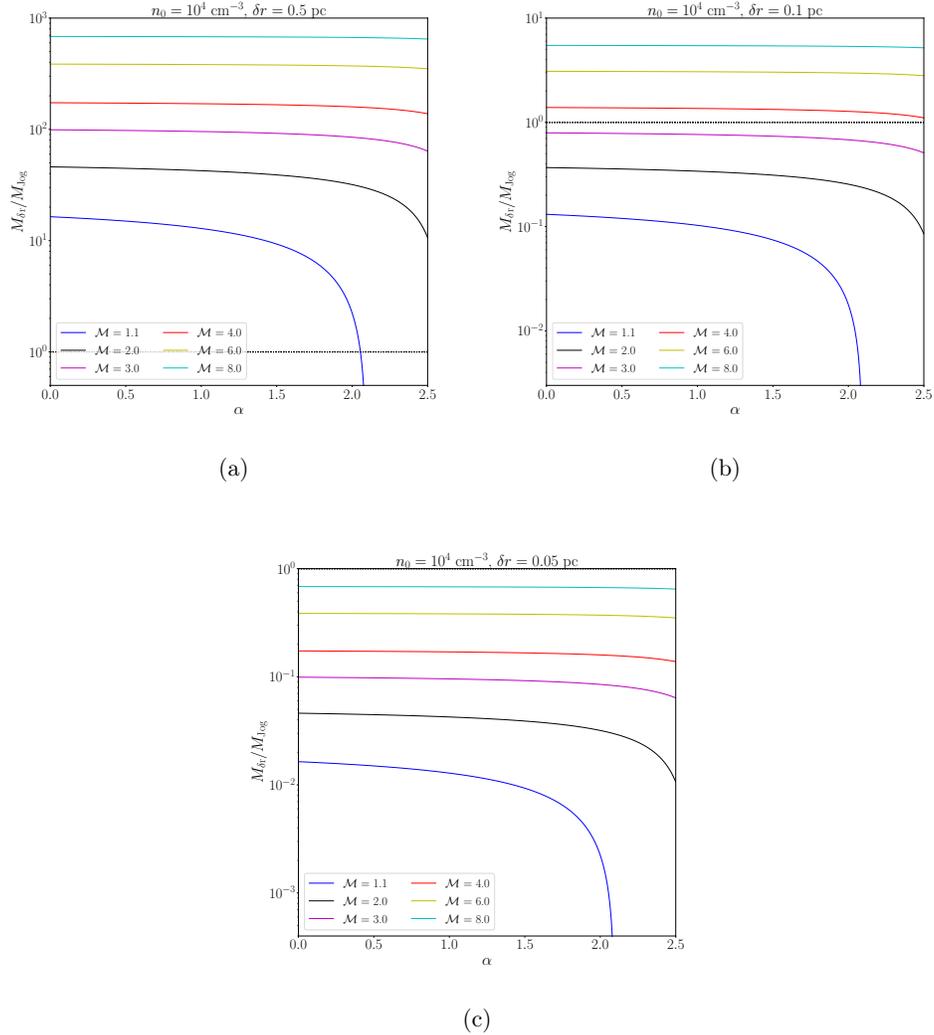


Figura 5.4: Análogamente a la Fig. 5.3, hemos graficado el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ como función de α . El gas en la vecindad del grupo tiene una densidad $n_0 = 10^4 \text{ cm}^{-3}$. En el panel (a) el grupo tiene un tamaño de 0.5 pc, en el panel (b) de 0.1 pc y en el panel (c) de 0.05 pc. Nuevamente notamos que se requieren choques más intensos para que grupos chicos colapsen.

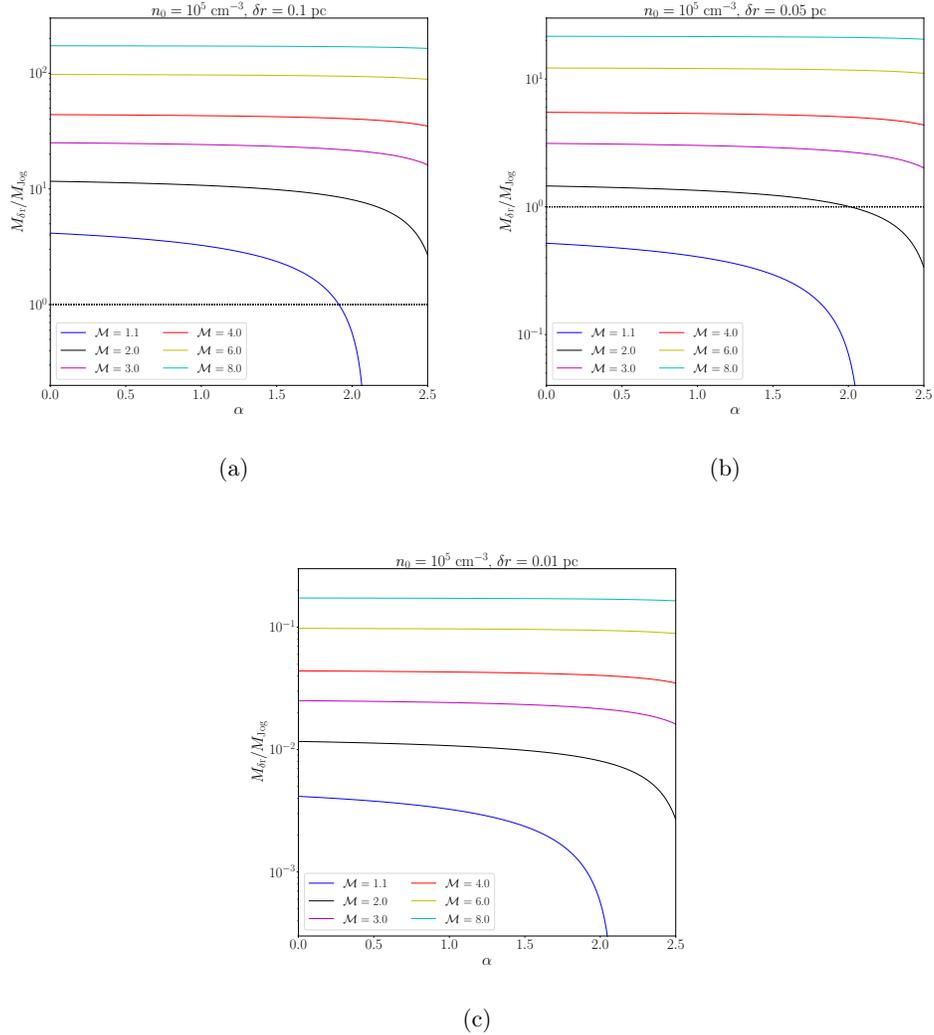


Figura 5.5: Similarmente a las Figs. 5.3 y 5.4 hemos graficado el cociente $M_{\delta r} / M_{Jog}$ como función del exponente de la ley de potencias. En este caso, la densidad ambiental es $n_0 = 10^5 \text{ cm}^{-3}$. En el panel (a) el grumo tiene un tamaño de 0.1 pc, en el panel (b) de 0.05 pc y en el panel (c) de 0.01 pc. Nuevamente notamos que al fijar la densidad, se requieren choques más intensos para que grumos más chicos colapsen.

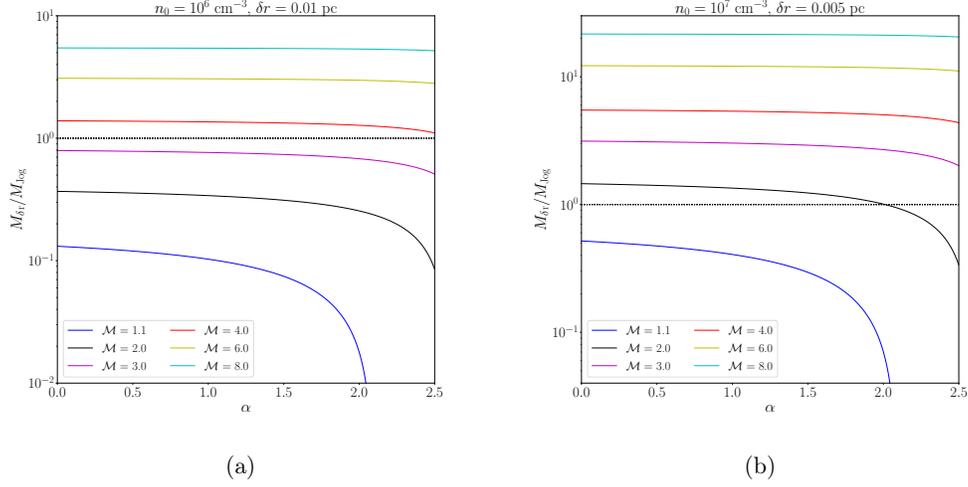


Figura 5.6: Nuevamente graficamos el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ como función de α , pero ahora para grupos de tamaño 0.01 pc y densidad ambiental de $n_0 = 10^6 \text{ cm}^{-3}$ —panel (a)—, y 0.005 pc y $n_0 = 10^7 \text{ cm}^{-3}$ —panel (b)—.

panel (b) de la Fig. 5.5 estudiamos un grupo aún más pequeño, $\delta r = 0.05 \text{ pc}$, pero con la misma densidad ambiental $n_0 = 10^5 \text{ cm}^{-3}$. En el panel (c) mantenemos la misma densidad ambiental, pero reducimos el tamaño del grupo a $\delta r = 0.01 \text{ pc}$; vemos que es imposible que un grupo con estas características ($\mathcal{M} \leq 8$) colapse. Cuando aumentamos la densidad a $n_0 = 10^5 \text{ cm}^{-3}$ es posible que grupos aún más pequeños colapsen. Por otro lado, podemos notar nuevamente, que al reducir el tamaño del grupo, la estabilidad de este aumenta, ya que el cociente de masas disminuye, esto es, el grupo contiene menos gas. Lo cual es consistente con lo que hemos venido discutiendo.

Como ya revisamos, el tamaño de la envolvente no es arbitrario, sino que se encuentra determinado por la estructura fractal de las nubes. Es debajo de escalas de 0.01 pc donde existe mayor posibilidad de encontrar perfiles de densidad $\rho \propto r^{-2}$. En estas regiones la densidad varía mucho, y se puede encontrar por encima de 10^6 cm^{-3} , por lo que como últimas configuraciones, en la Fig. 5.6 panel (a) graficamos el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ en función de α para un grupo de tamaño $\delta r = 0.01 \text{ pc}$ y densidad ambiental $n_0 = 10^6 \text{ cm}^{-3}$ y en el panel (b) para un grupo de tamaño $\delta r = 0.005 \text{ pc}$ y densidad ambiental $n_0 = 10^7 \text{ cm}^{-3}$. En el primer caso, es factible que el grupo colapse si $\mathcal{M} \gtrsim 4$ y en el segundo caso, si $\mathcal{M} \gtrsim 3$. Por lo que el colapso de grupos pequeños, es posible si la densidad ambiental es suficientemente elevada.

En la Fig. 5.7 hemos graficado $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ en función del número de Mach para distintas densidades y tamaños del grupo. En el panel (a) mostramos el caso cuando $\alpha = 0$, en el panel (b) cuando $\alpha = 1$ y en el panel (c) cuando $\alpha = 2$. En el panel (a) notamos que es posible que el grupo colapse para números de Mach relativamente pequeños ($\mathcal{M} \geq 1.5$) si $n_0 = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ y $\delta r = 0.5 \text{ pc}$ (línea roja); o si $n_0 = 10^3 \text{ cm}^{-3}$

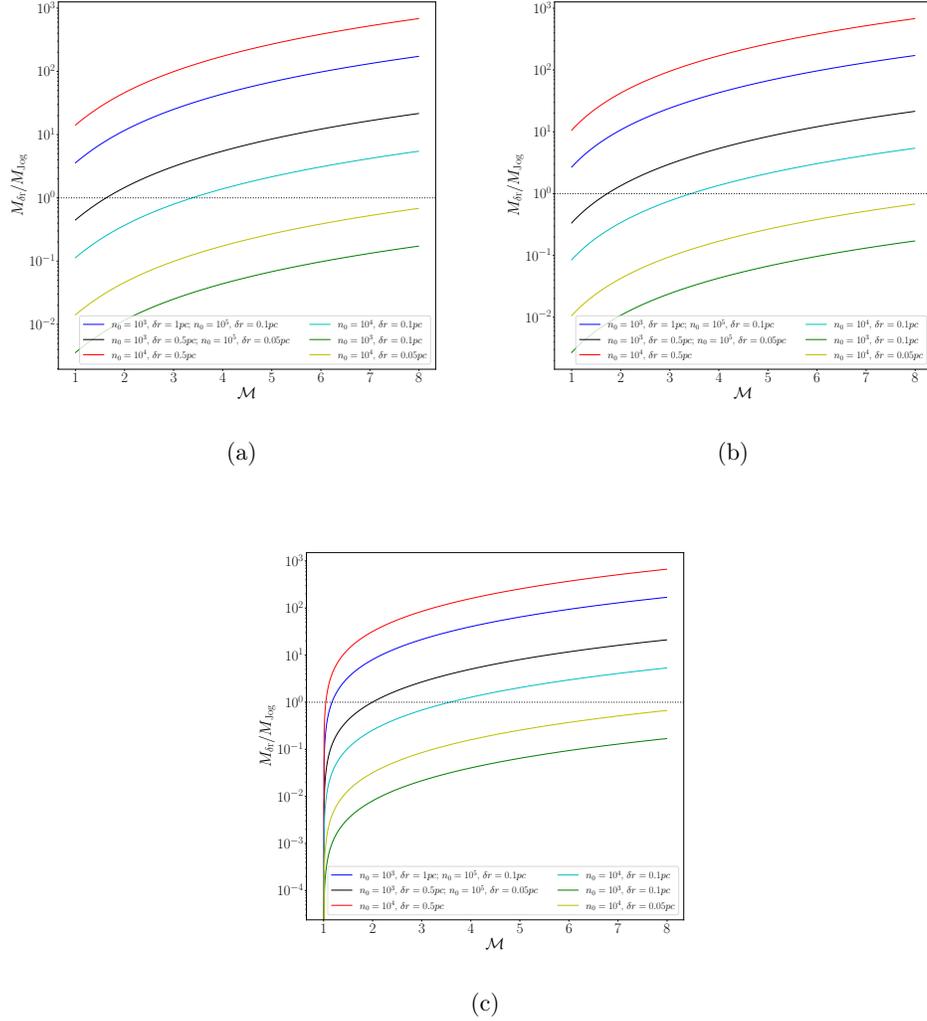


Figura 5.7: En el panel (a) mostramos el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ como función del número de Mach \mathcal{M} en el caso de un perfil de densidad plano ($\alpha = 0$), en el panel (b) se muestra una gráfica similar pero ahora para $\alpha = 1$ y finalmente, en el panel (c) para un perfil isotérmico ($\alpha = 2$). Se grafica el cociente para los distintos tamaños del grumo y densidades ambientales revisados en las Figs. [5.3](#), [5.4](#), [5.5](#) y [5.6](#). Configuraciones por encima de la línea punteada serán inestables, mientras que configuraciones por debajo de la línea serán estables.

y $\delta r = 1$ pc o $n_0 = 10^5$ cm $^{-3}$ y $\delta r = 0.1$ pc (línea azul); o también si $n_0 = 10^3$ cm $^{-3}$ y $\delta r = 0.5$ pc o $n_0 = 10^5$ cm $^{-3}$ y $\delta r = 0.05$ pc (línea negra). Para que un grumo con $n_0 = 10^4$ cm $^{-3}$ y $\delta r = 0.1$ pc (línea cian) colapse, se requiere que el choque $\mathcal{M} \geq 4.5$. Descartamos que los casos indicados con línea verde y amarilla puedan colapsar, ya que no alcanzan su masa de Jog. En el panel (b) notamos que únicamente es posible que las configuraciones indicadas con rojo, azul y negro colapsen con choques suaves, mientras que el caso indicado con la línea cian requerirá que $\mathcal{M} \geq 3.5$. Finalmente, en el panel (c) notemos que sólo las perturbaciones indicadas en color azul y rojo son capaces de colapsar cuando el choque es pequeño ($\mathcal{M} \geq 1.5$), mientras que la configuración indicada con la línea negra únicamente lo hará si $\mathcal{M} \geq 2.5$. La configuración en color cian requerirá que $\mathcal{M} \geq 5$ para poder alcanzar la masa de Jog. De esta discusión podemos concluir que es más complicado que los grumos colapsen en perfiles cada vez más empinados.

5.2. Aplicaciones

Ahora utilizaremos los resultados que hemos obtenido para estudiar el colapso de grumos a partir de observaciones. Podemos utilizar la ec. (5.20)

$$\frac{M_{\delta r}}{M_{\text{Jog}}} = 8.5 \times 10^{-2} \left(\frac{c_s}{0.2 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-3} \left(\frac{n_0}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{3/2} \left(\frac{\delta r}{0.1 \text{ pc}} \right)^3 \left(\mathcal{M}^2 - \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right)^{3/2},$$

para estudiar qué tan factible es que un grumo en un núcleo denso pueda colapsar utilizando datos observacionales. Si igualamos el lado derecho a uno, entonces estamos diciendo que el grumo alcanza su masa de Jog. Ahora, si conocemos la densidad, la temperatura, el tamaño del grumo y realizamos alguna suposición sobre la forma en la que varía la densidad de fondo con la distancia (valor que toma α), entonces es posible estimar el número de Mach necesario para que el grumo colapse. Por otro lado, si conocemos cuanto vale la densidad de fondo y la densidad del grumo, entonces podemos calcular el número de Mach $\mathcal{M} = \delta\rho/\rho$. Si también conocemos la temperatura, el tamaño del grumo y realizamos alguna suposición sobre la variación de la densidad de fondo, entonces podemos determinar si un grumo dado es capaz de alcanzar su masa de Jog y colapsar.

5.2.1. Barnard 68

Utilicemos la ec. (5.20) para estudiar al núcleo aislado Barnard 68. Este núcleo se encuentra caracterizado por un radio $R = 0.06$ pc, una masa $M = 2.1 M_{\odot}$, una densidad media $n_0 = 1.6 \times 10^4$ cm $^{-3}$ y una temperatura $T = 16$ K (Alves et al., 2001); de forma tal que podemos estimar $c_s = 0.3$ km s $^{-1}$ a partir de la ec. (1.6) Usando esto en la ec. (5.20), haciendo que $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}} = 1$ y recordando que este núcleo posee un perfil de densidad muy plano en su región más interna (supongamos, p. ej., $\alpha \sim 0.1$), podemos ver que se alcanza la masa de Jog dentro de Barnard 68 cuando

$$\mathcal{M} = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} + 323.29} \sim 17. \quad (5.23)$$

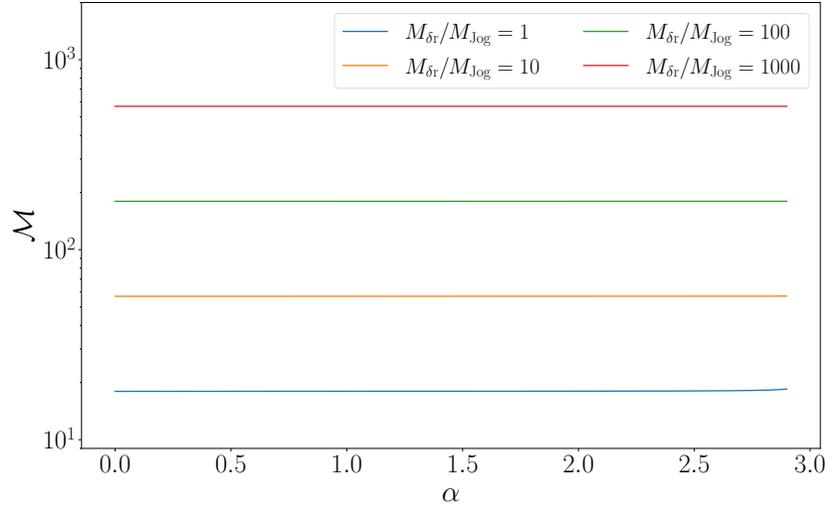


Figura 5.8: Análogamente a la Fig. 5.2 graficamos \mathcal{M} en función de α , pero ahora suponiendo los parámetros de Barnard 68 en la ec. (5.20). Notamos que se requieren choques con al menos $\mathcal{M} \sim 17$ para producir grupos capaces de colapsar.

En otras palabras, únicamente grupos producidos por choques con $\mathcal{M} \sim 17$ pueden colapsar dentro de Barnard 68. Dado que este núcleo tiene un tamaño pequeño y una alta densidad, el gas difícilmente será turbulento y será complicado tener choques con $\mathcal{M} \sim 17$. En la fig. 5.8 mostramos el número de Mach en función del exponente α cuando $M_{\delta r}/M_{Jog} = 1, 10, 100$ y 1000 , de donde concluimos que los choques turbulentos difícilmente provocaran el colapso gravitacional de parcelas de gas dentro de Barnard 68.

5.2.2. Regiones densas de formación estelar de estrellas de alta masa

Recientemente, Beuther et al. (2021) observaron dos regiones densas para estudiar la fragmentación en el proceso de formación de estrellas de alta masa. Se trata de las regiones ISOSS22478+6357 e ISOSS23053+5953. La primera se localiza a una distancia de ~ 3.23 kpc y tiene una masa total de $\sim 140 M_{\odot}$. La observación de la emisión del polvo a diferentes longitudes de onda indica que la región se encuentra a una temperatura promedio de 21 K y tiene una luminosidad total de $\sim 55 L_{\odot}$. La segunda se localiza a ~ 4.31 kpc, tiene una masa total de $\sim 610 M_{\odot}$ y una luminosidad total de $\sim 1313 L_{\odot}$. Igualmente, a partir de la emisión del polvo a diferentes longitudes de onda, se estimó que su temperatura promedio es de 22 K. Los objetos de interés dentro de las regiones son núcleos proto-estelares que se encuentran en una etapa evolutiva de objetos proto-estelares de alta masa. Las regiones se caracterizan por

poseer objetos compactos con masas entre 0.12 y 39.47 M_\odot , y tamaños que varían entre 1510 y 8063 au (0.007 – 0.04 pc), para mayores detalles, ver Beuther et al. (2021). A continuación, utilizaremos la ec. (5.19)

$$\frac{M_{\delta r}}{M_{\text{Jog}}} = 8.5 \times 10^{-2} \left(\frac{c_s}{0.2 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-3} \left(\frac{n_0}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{3/2} \left(\frac{\delta r}{0.1 \text{ pc}} \right)^3 \left(\eta - \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right)^{3/2},$$

para determinar si estos núcleos son capaces de alcanzar la masa de Jog o no.

En la Fig. 5.9 hemos graficado el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ para los núcleos estudiados por Beuther et al. (2021). En el panel (a) se muestra el cociente como función del tamaño del grumo y en el panel (b) en función del salto en densidad. En color rojo se indican los núcleos de ISOSS22478 y en azul los de ISOSS23053. En el panel (b) podemos notar que el salto en densidad η de los objetos densos respecto a resto de la región es muy alto $\eta \geq 60$. Ahora bien, en la Fig. 5.1, panel (b) vimos que, para saltos en densidad altos, la variación del cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ con el exponente α es mínima, por lo que únicamente mostramos el caso en el que los núcleos se encuentran embebidos en una envolvente cuya densidad se encuentra descrita por una ley de potencias donde $\alpha = 1$. En primer lugar, en el panel (a), notemos que los núcleos densos son capaces de alcanzar su masa de Jog cuando su radio es apenas mayor a ~ 0.012 pc, logrando superar la masa de Jog por un factor $\sim 10^2$ cuando el radio del núcleo es ~ 0.04 pc. Por otro lado, en el panel (b), podemos notar que grumos con $\eta \geq 80$ (o $\mathcal{M} \geq 9$) son capaces de alcanzar su masa de Jog, logrando superar a esta última hasta en un factor de 100 cuando $\eta \geq 300$, esto es, cuando $\mathcal{M} \geq 17$. En forma muy general, notamos que a más masivo y grande sea el grumo, es más probable que éste alcance su masa de Jog. Al menos 18 de los 29 núcleos estudiados por Beuther et al. (2021) superan la masa de Jog.

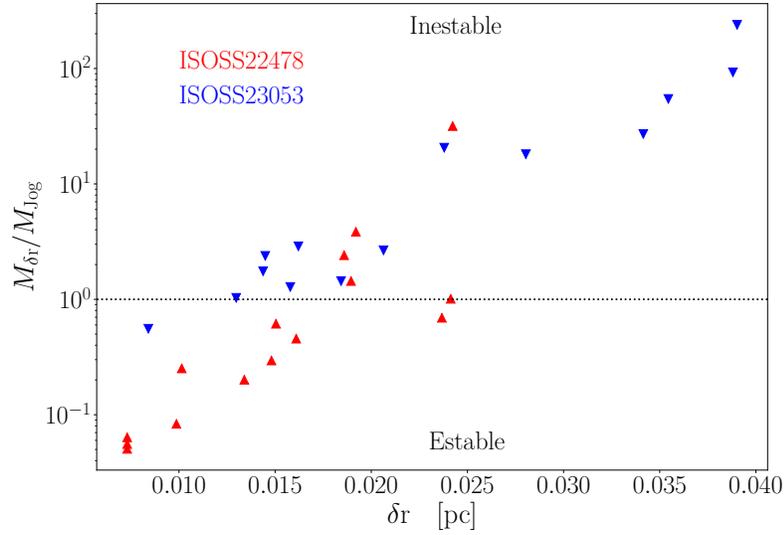
5.3. Marea debido al núcleo de Larson

Hasta el momento hemos estudiado y empleado el criterio de Jog incluyendo únicamente la contribución a la fuerza de marea debida a la envolvente de densidad. Ahora también incluiremos la contribución debida al núcleo de Larson. Podemos escribir la marea total debida al núcleo de Larson y a la envolvente con perfil de ley de potencias como

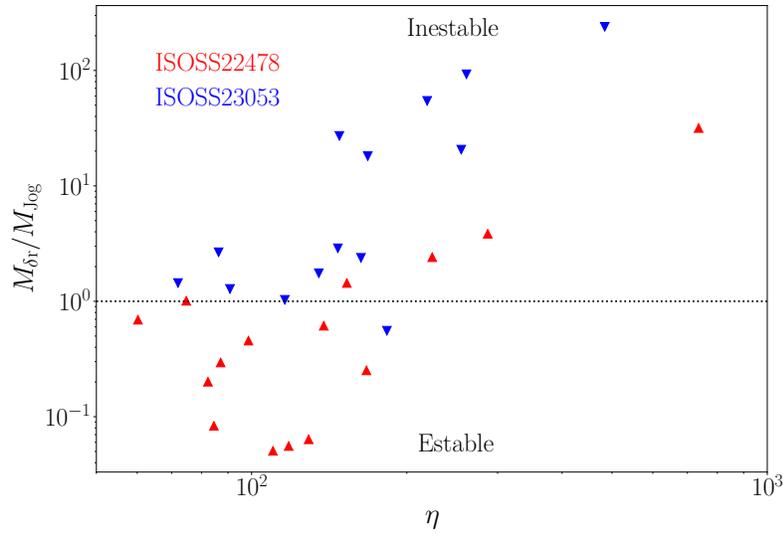
$$T_0 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{2GM_L}{r^3} + \frac{4\pi(\alpha - 1)}{(3 - \alpha)} G\rho_e(r), \quad (5.24)$$

para escribir el primer término hemos usado la ec. (3.5), que es la contribución radial debida a una masa puntual y para el enunciar el segundo término hemos empleado la ec. (3.21), que es la componente radial del tensor de marea debido a una distribución de ley de potencias. Recordemos que la densidad del grumo será la densidad de la envolvente en el lugar donde ocurre el grumo multiplicada un factor η . Suponiendo que el grumo ocurre en r_p , donde la densidad de la envolvente vale $\rho_e(r_p)$ y recordando la ec. (4.22), la densidad efectiva es

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{T_0}{4\pi G} = \frac{1}{2\pi} \frac{M_L}{r_0^3} + \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \rho_e(r_0) \quad (5.25)$$



(a)



(b)

Figura 5.9: Mostramos en el panel (a) el cociente $M_{\delta r}/M_{Jog}$ como función del tamaño del grupo δr y en el panel (b) el mismo cociente pero en función de η (calculado como el cociente entre la densidad del núcleo denso y la densidad de fondo) para los núcleos en las regiones ISOSS22478 y ISOSS23053, estudiados por Beuther et al. (2021). Hemos supuesto que la densidad en las regiones donde se encuentran embebidos los núcleos varía como $\rho \propto r^{-1}$.

y la densidad del grumo

$$\rho_{\text{fluc}}(r_0) = \eta \rho_e(r_0), \quad (5.26)$$

de manera que el cociente $\rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}}$ se escribe como

$$\frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_{\text{fluc}}} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{M_L}{\rho_e(r_0)r_0^3} + \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right]. \quad (5.27)$$

Entonces, insertando $\rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}}$ en la ec. (5.1), la longitud de Jog queda como

$$\frac{\lambda_{\text{Jog}}}{\lambda_J} = \left[1 - \left(\frac{1}{2\pi} \frac{M_L}{\rho_e(r_0)r_0^3} + \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right) \frac{1}{\eta} \right]^{-1/2}. \quad (5.28)$$

A su vez, sustituyendo $\rho_{\text{eff}}/\rho_{\text{fluc}}$ en la ec. (5.2), tenemos que la masa de Jog correspondiente es

$$\frac{M_{\text{Jog}}}{M_J} = \left[1 - \left(\frac{1}{2\pi} \frac{M_L}{\rho_e(r_0)r_0^3} + \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right) \frac{1}{\eta} \right]^{-3/2}. \quad (5.29)$$

Finalmente, para este caso, el cociente $M_{\delta r}/M_{\text{Jog}}$ queda como

$$\begin{aligned} \frac{M_{\delta r}}{M_{\text{Jog}}} &= 8.5 \times 10^{-2} \left(\frac{c_s}{0.2 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-3} \left(\frac{n_0}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{3/2} \left(\frac{\delta r}{0.1 \text{ pc}} \right)^3 \\ &\times \left[\mathcal{M}^2 - \left(\frac{1}{2\pi} \frac{M_L}{\rho_e(r_0)r_0^3} + \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha} \right) \right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

En la Fig. 5.10 hemos graficado $\rho_0 r_0^3$, denominador del primer término de la ec. (5.27), en unidades de masas de Larson ($M_L = 1.5 \times 10^{-3} M_\odot$), como función de la distancia entre el núcleo de Larson y el sitio donde ocurre el grumo (r_0). Las líneas punteadas paralelas son isoclinas para las cuales la densidad es constante, y señalan distintos valores de la densidad, $n_0 = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ y 10^7 cm^{-3} . La línea horizontal indica cuando $\rho_0 r_0^3 = M_L/2\pi$, esto es, cuando el término de marea debido al núcleo de Larson vale uno. En la ec. (5.30) vemos que cuando $\rho_0 r_0^3$ crece, entonces la contribución del núcleo de Larson a la fuerza de marea disminuye. Por lo tanto, para puntos localizados sobre la línea recta horizontal, la marea debida al núcleo de Larson es despreciable y ésta debe ser tomada en cuenta solamente para puntos por debajo de la línea recta horizontal. La isoclina de menor densidad ($n_0 = 10^2$) se cruza con la recta horizontal en $r_0 = 3 \times 10^{-2} \text{ pc}$, por lo que la marea debida al núcleo de Larson debe ser considerada a partir de distancias menores al radio de los grumos que hemos estudiado. Por ejemplo, recordemos que el tamaño de los núcleos observados por Beuther et al. (2021) es ~ 0.01 a 0.06 pc y en nuestros casos hipotéticos los grumos tenían un tamaño mínimo 0.05 pc . En otras palabras, la marea debida al núcleo es relevante a distancias menores al tamaño del grumo y esto permite ignorarla en nuestro desarrollo. Es más, las envolventes de las regiones densas de Beuther et al. (2021) tienen un diámetro cercano a 1 pc , escala muy grande para que la marea debida a los núcleos influya sobre los otros núcleos.

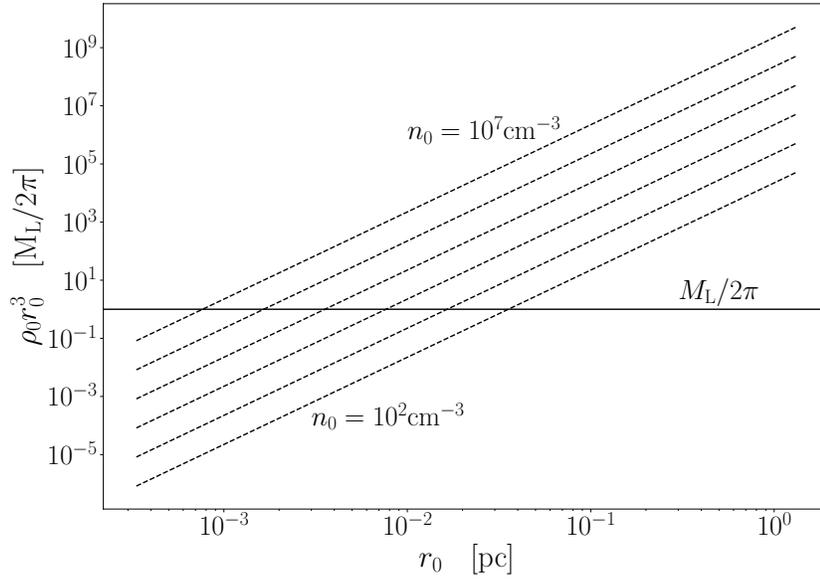


Figura 5.10: Supongamos que el grupo ocurre a una distancia del núcleo de Larson $r_p = r_0$, si evaluamos la densidad ambiental en r_0 tenemos que $\rho_e(r_0) = \rho_0$. Podemos graficar el producto $\rho_0 r_0^3$, que aparece en el denominador del término de marea debida al núcleo de Larson en la ec. (5.30), como función de r_0 para determinar la densidad y distancia para las cuales la marea debida al núcleo de Larson debe ser tomada en cuenta. Las rectas paralelas punteadas son isoclinas que marcan densidades típicas de las nubes moleculares ($n_0 = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ y 10^7 cm^{-3}). La línea horizontal marca el límite en el cual $\rho_0 r_0^3 = M_L/2\pi$, esto es, la densidad del medio y la distancia al núcleo de Larson para las cuales la marea debida al núcleo de Larson comienza a ser relevante. Siguiendo a Lee y Hennebelle (2018) hemos supuesto $M_L = 1.5 \times 10^{-3} M_\odot$. Si $\rho_0 r_0^3 > M_L/2\pi$, entonces el término la marea debido al núcleo de Larson en la ec. (5.30) es menor a uno y si $\rho_0 r_0^3 < M_L/2\pi$, éste es mayor a uno y la marea es relevante. Por lo tanto, puntos por encima de la línea horizontal indican configuraciones para las cuales la marea es despreciable y puntos por debajo configuraciones para las cuales la marea es relevante.

5.4. Comentarios finales

En una primera aproximación, la ec. (5.20) parece indicarnos que grumos embebidos dentro de esferas isotérmicas y producidas por choques suaves ($\mathcal{M} \sim 2.5$) son capaces de colapsar. Sin embargo, para que esto ocurra, dado los parámetros de normalización de la ec. (5.20), se requirieron grumos cuyo tamaño sea ≥ 0.5 pc. Inicialmente, planteamos que el grumo ocurre dentro de una esfera isotérmica y que el tamaño de esta última es sustancialmente menor al tamaño de la esfera isotérmica. La esfera no puede extenderse a escalas mayores a 0.1 pc debido al comportamiento fractal de las nubes moleculares. Por lo que suponer grumos de tamaño ≥ 0.5 pc viola nuestra hipótesis de trabajo inicial, en la cual suponemos que el grumo es sustancialmente menor que la envolvente en la cual ocurre. A pesar de esto, el colapso de grumos de tamaño ~ 0.01 a 0.005 pc dentro de esferas isotérmicas es posible siempre que la densidad sea suficientemente elevada, $n_0 \sim 10^6$ a 10^7 pc. Por otro lado, los resultados de L&H18 y C&T20 parecen reproducir el pico de la IMF. Esto podría ser resultado de que sus simulaciones son detenidas justo en el momento en el que las pro-estrellas alcanzan el pico de la IMF. Ellos argumentan que es en este momento cuando el feedback detiene la acreción de más masa. Si las simulaciones no fuesen detenidas, las proto-estrellas bien podrían continuar acretando masa, y el pico de la IMF no podría ser reproducido. De esta breve discusión concluimos que la teoría de acreción por mareas no es completamente satisfactoria para explicar el pico de la IMF.

6 Conclusiones

Comenzamos la introducción de este trabajo revisando algunas de las propiedades físicas de las nubes moleculares, sitio donde actualmente ocurre toda la formación estelar. Posteriormente, comparamos las energías térmica, magnética y cinética con la energía gravitacional dentro de las nubes moleculares, de donde concluimos que únicamente la energía cinética es comparable con la energía gravitacional. En el pasado, este resultado motivó a creer que la turbulencia relacionada con el ensanchamiento observado en las líneas de emisión era la responsable de sostener a la nube contra su propia gravedad (Zuckerman & Palmer, 1974). Propuestas actuales (ver p. ej., Vázquez-Semadeni et al., 2007; Ballesteros-Paredes et al., 2020) en cambio proponen que los movimientos turbulentos observados son resultado del colapso gravitacional de las nubes moleculares. Finalizamos la introducción demostrando el teorema del virial y realizando algunos comentarios sobre su empleo en el estudio del colapso de nubes moleculares.

En el segundo capítulo, revisamos algunos modelos de formación estelar. En primer lugar estimamos el radio que debe tener una esfera homogénea para colapsar gravitacionalmente, suponiendo equipartición de energía entre la gravedad y la presión térmica. Posteriormente, explicamos detalladamente el modelo analítico de colapso gravitacional propuesto por Jeans (1902). En este modelo, el colapso gravitacional sucede cuando la nube tiene un tamaño mayor o igual a la llamada longitud de Jeans y su masa supera a la conocida longitud de Jeans. Posteriormente, discutimos la esfera de Bonnor-Ebert siguiendo el análisis clásico de Bonnor (1956) y Ebert (1957). De este desarrollo se obtiene la ecuación de Lane-Emden, la cual modela a una esfera isotérmica con densidad y tamaño finitos en equilibrio de fuerzas. Presentamos soluciones numéricas esta ecuación para encontrar el tamaño y masa que una esfera isotérmica soportada por su presión térmica debe tener para ser estable. Estos tres desarrollos arrojan resultados muy similares, $R \sim 5$ pc y $M \sim 20 M_{\odot}$.

En el capítulo 3 discutimos las fuerzas de marea. Primero, definimos la fuerza de marea como la variación espacial de la fuerza gravitacional y posteriormente definimos el tensor de marea, que no es más que la generalización del laplaciano del potencial gravitacional. Este objeto nos permite calcular la fuerza de marea debida a distintas distribuciones de masa en una geometría conveniente. A continuación, presentamos el cálculo del tensor para una masa puntual usando coordenadas esféricas. Posteriormente, suponiendo que la distribución de masa varía únicamente en la dirección radial, encontramos la forma de este tensor para una distribución esférica de masa no homogénea y también para una distribución de densidad de ley de potencias. Fi-

nalmente, presentamos la modificación de Jog (2013) a la longitud de Jeans. La cual consiste en incluir un potencial gravitacional externo en el desarrollo clásico de Jeans.

En el capítulo 4 introdujimos la teoría propuesta por L&H18 —y después revisada por C&T20— para explicar el pico de la IMF. Ésta nos dice que el colapso gravitacional de grumos ocasionados por turbulencia supersónica son capaces de limitar la cantidad de masa que un núcleo de Larson es capaz de acretar. Posteriormente, revisamos y discutimos algunas de las inconsistencias que presenta tanto el desarrollo de L&H18, como el de C&T20. En particular, el empleo de una distribución log-normal por parte de L&H18 para calcular la probabilidad de colapso. Además, L&H18 calculan la marea como la diferencia en la fuerza evaluada en dos puntos distintos, sin embargo esto no es lo más óptimo, en especial teniendo una herramienta como el tensor de marea. Por otro lado, C&T20 utilizan al tensor de marea en su desarrollo, sin embargo olvidan incluir el soporte contra el colapso gravitacional que brinda la presión térmica del grumo. Pese a estos errores e inconsistencias, en ambos trabajos se utilizan las simulaciones numéricas del colapso de nubes moleculares para justificar que sus desarrollos analíticos son razonablemente consistentes con los resultados numéricos. Sin embargo, no es clara la aplicabilidad de las simulaciones numéricas, ya que no queda claro que, en efecto, las hipótesis de trabajo de la parte analítica se cumplan en las simulaciones numéricas.

Para complementar los trabajos de L&H18 y C&T20, en el capítulo 5 hemos retomado el desarrollo de Jog (2013) para aplicarlo al problema de un grumo de densidad que ocurre en la vecindad de un núcleo de Larson, éste a su vez rodeado de una envolvente con perfil de ley de potencias. Para esto, hemos incorporado el formalismo de C&T20 en el criterio de Jog (2013). Primero, calculamos el tensor de marea debido a una envolvente de material cuya densidad se encuentra descrita por una ley de potencias $\rho \propto r^{-2}$. Notamos que a lo largo de la dirección de las componentes tangenciales de la diagonal del tensor siempre habrá compresión, mientras que el comportamiento de la componente radial del tensor τ_{rr} depende del exponente de la ley de potencias. Es decir, esta componente determina si la perturbación es comprimida en todas direcciones o es comprimida únicamente en las dos direcciones tangenciales y desgarrada en la dirección radial, por lo cual, hemos fijado nuestra atención en esta última componente. Para incluir la fuerza de marea en la dirección radial en el desarrollo de Jog (2013) hemos calculado una densidad efectiva correspondiente a la componente τ_{rr} y posteriormente la hemos incluido en la longitud y en la masa modificadas de Jog (2013).

Para el problema que hemos estudiado, las expresiones modificadas de Jog dependen únicamente del exponente de la ley de potencias de la densidad, así como de la amplitud de la densidad del grumo, y son independientes tanto de la densidad del medio como de la distancia a la que ocurre el grumo. Observamos que para un perfil de densidad de ley de potencias, el criterio de Jog y el criterio clásico de Jeans convergen cuando la amplitud de la densidad del grumo η es grande, ya que el efecto debido a las mareas se hace despreciable cuando el grumo es muy masivo. Por otro lado, vemos que $\alpha = 1$ además de ser el límite en el que recuperamos la expresión clásica de Jeans, marca la transición entre un régimen compresivo y uno disruptivo. Si $\alpha > 1$, la envolvente desgarrará al grumo, y la longitud y masa de Jog serán mayores que

sus equivalentes de Jeans. Es decir, una marea disruptiva brinda soporte al grumo. Por el contrario, si $\alpha < 1$, la envolvente comprimirá al grumo, y la longitud y la masa de Jog serán menores a la longitud y a la masa de Jeans. Es decir, es más sencillo que los grumos alcancen su longitud o masa críticas si se encuentran embebidos en perfiles planos.

Del análisis de la masa modificada de Jog podemos concluir que en general, la energía interna brinda soporte contra el colapso gravitacional. Por el contrario, al aumentar la densidad ambiental, es más sencillo que ocurra el colapso de los grumos. Esto debido a que el grumo contendrá mayor masa, en forma similar a lo que ocurre en el criterio clásico de Jeans. De igual manera, grumos grandes colapsarán con mayor facilidad debido a que contienen mayor masa que los grumos más pequeños. Por otro lado, la masa modificada de Jog muestra que grumos provocados por números de Mach altos son más inestables que grumos producidos por choques suaves. Debido a que el salto en densidad es proporcional a \mathcal{M} , es más probable que colapsen grumos con amplitudes de densidad grandes. Por otro lado, concluimos que existe poca variación entre el criterio de masa y el exponente de la ley de potencias de la envolvente, salvo cuando $\alpha \rightarrow 2$.

En el caso isotérmico es complicado que grumos producidas por choques suaves sean capaces de colapsar. Por ejemplo, si $\mathcal{M} = 2.5$, entonces el grumo debe tener un tamaño ~ 0.1 pc. Esto es poco realista, ya que nuestra configuración inicial es una esfera isotérmica, dentro de la cual ocurre un grumo de densidad con tamaño sustancialmente menor al radio de la esfera. Debido al comportamiento fractal de las nubes moleculares, es difícil pensar en una estructura con densidad descrita por una ley de potencias de suficiente tamaño como para contener en su interior un grumo tan grande. Sin embargo, a escalas menores a 0.01 pc es posible encontrar perfiles de densidad $\rho \propto r^{-2}$. En estas escalas la densidad es mayor a 10^5 cm^{-3} . Encontramos que dadas estas condiciones, grumos producidos por choques con $\mathcal{M} \gtrsim 4$ son capaces de colapsar dentro del perfil de densidad de una esfera isotérmica. A su vez, perfiles de densidad más empinados que el de la esfera isotérmica ($\alpha = 2$) producen mareas cada vez más intensas, hasta que se alcanza el límite $\alpha = 3$, para el cual es imposible que un grumo sea capaz de colapsar. Sin embargo, sabemos que para una esfera con $\alpha = 2.5$, la energía gravitacional es infinita, por lo que este caso no es realista.

Posteriormente, hemos usado nuestras nuevas expresiones para estudiar algunas regiones densas dentro de nubes moleculares. Primero estudiamos el núcleo Barnard 68. Podemos concluir que únicamente grumos de densidad producidos por choques donde $\mathcal{M} \sim 17$ pueden colapsar dentro de este núcleo. Es poco probable que esto suceda debido a la alta densidad y pequeño tamaño de Barnard 68. Después, revisamos los núcleos proto-estelares estelares observados por Beuther et al. (2021). Hemos calculado la masa de Jog de estos objetos suponiendo que la densidad de fondo se comporta como $\rho \propto r^{-1}$. Concluimos que los núcleos de estas regiones deben tener un radio mayor a 0.012 pc y un contraste de densidad $\eta \geq 80$ para poder alcanzar su masa de Jog.

Hemos encontrado que para el problema abordado, es posible despreciar la marea que ejercen los núcleos de Larson sobre los grumos, por lo que el único factor de relevancia en el estudio de las mareas gravitacionales es la variación del perfil de

densidad.

Finalmente, en este trabajo no hemos estimado la probabilidad de colapso del grumo debido a que no contamos con una estadística confiable para hacerlo, razón por la cual, tampoco damos un estimado del pico de la IMF. L&H18 y C&T20 parecen reproducir el pico de la IMF en sus simulaciones numéricas, sin embargo, esto puede ser una mera consecuencia de detener las simulaciones justo en el momento en el que las estrellas alcanzan la masa indicada. Si las simulaciones no fuesen detenidas, es probable que las estrellas podrían continuar acretando masa y el pico de la IMF no sería reproducido. En conclusión, la teoría de acreción por mareas no es satisfactoria para explicar el pico de la IMF.

Bibliografía

- Acero, F., Ackermann, M., Ajello, M., Albert, A., Baldini, L., Ballet, J., Barbierini, G., Bastieri, D., Bellazzini, R., Bissaldi, E., Bloom, E. D., Bonino, R., Bottacini, E., Brandt, T. J., Bregeon, J., Bruel, P., Buehler, R., Buson, S., Caliandro, G. A., . . . Zimmer, S. (2016). Development of the Model of Galactic Interstellar Emission for Standard Point-source Analysis of Fermi Large Area Telescope Data., *223*(2), 26. <https://doi.org/10.3847/0067-0049/223/2/26>
- Alves, J., Lombardi, M. & Lada, C. J. (2017). The shapes of column density PDFs. The importance of the last closed contour., *606*, L2. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731436>
- Alves, J. F., Lada, C. J. & Lada, E. A. (2001). Internal structure of a cold dark molecular cloud inferred from the extinction of background starlight., *409*(6817), 159-161.
- André, P., Belloche, A., Motte, F. & Peretto, N. (2007). The initial conditions of star formation in the Ophiuchus main cloud: Kinematics of the protocluster condensations., *472*(2), 519-535. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20077422>
- Ballesteros Paredes, J. (1999). *Propiedades físicas y estadísticas de las nubes en simulaciones numéricas del medio interestelar*. (Tesis doctoral). Instituto de Astronomía, UNAM. Ap. Postal 70-264, México 04510 D. F., México.
- Ballesteros-Paredes, J. & Hartmann, L. (2007). Remarks on Rapid vs. Slow Star Formation. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, *43*, 123-136.
- Ballesteros-Paredes, J. (2006). Six myths on the virial theorem for interstellar clouds., *372*(1), 443-449. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10880.x>
- Ballesteros-Paredes, J., André, P., Hennebelle, P., Klessen, R. S., Kruijssen, J. M. D., Chevance, M., Nakamura, F., Adamo, A. & Vázquez-Semadeni, E. (2020). From Diffuse Gas to Dense Molecular Cloud Cores., *216*(5), 76. <https://doi.org/10.1007/s11214-020-00698-3>
- Ballesteros-Paredes, J., Gómez, G. C., Pichardo, B. & Vázquez-Semadeni, E. (2009). On the gravitational content of molecular clouds and their cores., *393*(4), 1563-1572. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14278.x>
- Ballesteros-Paredes, J., Hartmann, L. W., Vázquez-Semadeni, E., Heitsch, F. & Zamora-Avilés, M. A. (2011). Gravity or turbulence? Velocity dispersion-size relation., *411*(1), 65-70. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17657.x>
- Ballesteros-Paredes, J., Vázquez-Semadeni, E., Palau, A. & Klessen, R. S. (2018). Gravity or turbulence? - IV. Collapsing cores in out-of-virial disguise., *479*(2), 2112-2125. <https://doi.org/10.1093/mnras/sty1515>

- Bastian, N., Covey, K. R. & Meyer, M. R. (2010). A Universal Stellar Initial Mass Function? A Critical Look at Variations., *48*, 339-389. <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082708-101642>
- Bate, M. R., Bonnell, I. A. & Bromm, V. (2003). The formation of a star cluster: predicting the properties of stars and brown dwarfs., *339*(3), 577-599. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06210.x>
- Beuther, H., Gieser, C., Suri, S., Linz, H., Klaassen, P., Semenov, D., Winters, J. M., Henning, T., Soler, J. D., Urquhart, J. S., Syed, J., Feng, S., Möller, T., Beltrán, M. T., Sánchez-Monge, Á., Longmore, S. N., Peters, T., Ballesteros-Paredes, J., Schilke, P., ... Ahmadi, A. (2021). Fragmentation and kinematics in high-mass star formation. CORE-extension targeting two very young high-mass star-forming regions., *649*. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202040106>
- Binney, J. & Tremaine, S. (2008). *Galactic dynamics*. Princeton Series in Astrophysics.
- Blitz, L. & Shu, F. (1980). The origin and lifetime of giant molecular cloud complexes., *238*, 148-157. <https://doi.org/10.1086/157968>
- Bonnell, I. A. & Bate, M. R. (2006). Star formation through gravitational collapse and competitive accretion., *370*(1), 488-494. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10495.x>
- Bonnor, W. B. (1956). Boyle's Law and gravitational instability., *116*, 351. <https://doi.org/10.1093/mnras/116.3.351>
- Chabrier, G., Baraffe, I., Allard, F. & Hauschildt, P. H. (2005). Review on low-mass stars and brown dwarfs. *arXiv e-prints*, astro-ph/0509798.
- Chandrasekhar, S. (1960). The virial theorem in hydromagnetics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *1*(2), 240-252. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(60\)90025-1](https://doi.org/10.1016/0022-247x(60)90025-1)
- Chandrasekhar, S. (1958). *An introduction to the study of stellar structure*. Dover.
- Chevance, M., Kruijssen, J. M. D., Vazquez-Semadeni, E., Nakamura, F., Klessen, R., Ballesteros-Paredes, J., Inutsuka, S.-i., Adamo, A. & Hennebelle, P. (2020). The Molecular Cloud Lifecycle., *216*(4), 50. <https://doi.org/10.1007/s11214-020-00674-x>
- Colman, T. & Teyssier, R. (2020). On the origin of the peak of the stellar initial mass function: exploring the tidal screening theory., *492*(4), 4727-4751. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa075>
- Dopita, M. A. & Sutherland, R. S. (2003). *Astrophysics of the diffuse universe*. Springer.
- Dyson, J. E. & Williams, D. A. (1997). *The physics of the interstellar medium* (2.^a ed.). IOP Publishing.
- Ebert, R. (1957). Zur Instabilität kugelsymmetrischer Gasverteilungen. Mit 2 Textabbildungen., *42*, 263.
- Elmegreen, B. G. & Scalo, J. (2004). Interstellar Turbulence I: Observations and Processes., *42*(1), 211-273. <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.41.011802.094859>
- Estalella, R. & Anglada, G. (1999). *Introducción a la Física del Medio Interestelar* (2.^a ed.). Edicions de la Universitat de Barcelona.

- Falgarone, E., Phillips, T. G. & Walker, C. K. (1991). The Edges of Molecular Clouds: Fractal Boundaries and Density Structure., *378*, 186. <https://doi.org/10.1086/170419>
- Falgarone, E., Puget, J. -L. & Perault, M. (1992). The small-scale density and velocity structure of quiescent molecular clouds., *257*, 715-730.
- Federrath, C., Klessen, R. S. & Schmidt, W. (2008). The Density Probability Distribution in Compressible Isothermal Turbulence: Solenoidal versus Compressive Forcing., *688*(2), L79. <https://doi.org/10.1086/595280>
- French, A. P. (1971). *Newtonian Mechanics*. M.I.T. Introductory physics series.
- Fuller, G. A. & Myers, P. C. (1987). Dense cores in dark clouds. En G. E. Morfill & M. Scholer (Eds.), *Physical Processes in Interstellar Clouds* (pp. 137-160).
- Garay, G., Faúndez, S., Mardones, D., Bronfman, L., Chini, R. & Nyman, L.-Å. (2004). Discovery of Four New Massive and Dense Cold Cores., *610*(1), 313-319. <https://doi.org/10.1086/421437>
- Goldreich, P. & Kwan, J. (1974). Molecular Clouds., *189*, 441-454. <https://doi.org/10.1086/152821>
- Guerrero-Gamboa, R. & Vázquez-Semadeni, E. (2020). Nonadiabatic Turbulence Driving during Gravitational Collapse., *903*(2), 136. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abba1f>
- Hartmann, L. (2002). Flows, Fragmentation, and Star Formation. I. Low-Mass Stars in Taurus., *578*(2), 914-924. <https://doi.org/10.1086/342657>
- Hennebelle, P. & Chabrier, G. (2008). Analytical Theory for the Initial Mass Function: CO Clumps and Prestellar Cores., *684*(1), 395-410. <https://doi.org/10.1086/589916>
- Heyer, M. H. & Brunt, C. M. (2004). The Universality of Turbulence in Galactic Molecular Clouds., *615*(1), L45-L48. <https://doi.org/10.1086/425978>
- Heyer, M., Krawczyk, C., Duval, J. & Jackson, J. M. (2009). Re-Examining Larson's Scaling Relationships in Galactic Molecular Clouds., *699*(2), 1092-1103. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/699/2/1092>
- Hopkins, P. F. (2012). The stellar initial mass function, core mass function and the last-crossing distribution., *423*(3), 2037-2044. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20731.x>
- Hoyle, F. (1953). On the Fragmentation of Gas Clouds Into Galaxies and Stars., *118*, 513. <https://doi.org/10.1086/145780>
- J Jeans, J. H. (1902). The Stability of a Spherical Nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, *199*, 1-53. <https://doi.org/10.1098/rsta.1902.0012>
- Jog, C. J. (2013). Jeans instability criterion modified by external tidal field., *434*, L56-L60. <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt077>
- Kainulainen, J., Beuther, H., Henning, T. & Plume, R. (2009). Probing the evolution of molecular cloud structure. From quiescence to birth., *508*(3), L35-L38. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200913605>
- Kegel, W. H. (1989). The interpretation of correlations between observed parameters of molecular clouds., *225*(2), 517-520.

- Kellermann, K. I. & Verschuur, G. L. (1988). *Galactic and Extragalactic Radio Astronomy* (2.^a ed.). Springer-Verlag.
- Krause, M. G. H., Offner, S. S. R., Charbonnel, C., Gieles, M., Klessen, R. S., Vázquez-Semadeni, E., Ballesteros-Paredes, J., Girichidis, P., Kruijssen, J. M. D., Ward, J. L. & Zinnecker, H. (2020). The Physics of Star Cluster Formation and Evolution., *216*(4), 64. <https://doi.org/10.1007/s11214-020-00689-4>
- Kroupa, P. (2001). On the variation of the initial mass function., *322*(2), 231-246. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04022.x>
- Larson, (1981). Turbulence and star formation in molecular clouds., *194*, 809-826. <https://doi.org/10.1093/mnras/194.4.809>
- Larson, R. B. (1969). Numerical calculations of the dynamics of collapsing proto-star., *145*, 271. <https://doi.org/10.1093/mnras/145.3.271>
- Lee, Y.-N. & Hennebelle, P. (2018). Stellar mass spectrum within massive collapsing clumps. II. Thermodynamics and tidal forces of the first Larson core. A robust mechanism for the peak of the IMF., *611*, A89. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731523>
- Liszt, H. S., Wilson, R. W., Penzias, A. A., Jefferts, K. B., Wannier, P. G. & Solomon, P. M. (1974). CO and CS in the Orion Nebula., *190*, 557-564. <https://doi.org/10.1086/152910>
- Liu, H. B., Galván-Madrid, R., Jiménez-Serra, I., Román-Zúñiga, C., Zhang, Q., Li, Z. & Chen, H.-R. (2015). ALMA Resolves the Spiraling Accretion Flow in the Luminous OB Cluster-forming Region G33.92+0.11., *804*(1), 37. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/804/1/37>
- Masi, M. (2007). On compressive radial tidal forces. *American Journal of Physics*, *75*(2), 116-124. <https://doi.org/10.1119/1.2366736>
- McKee, C. F. & Ostriker, J. P. (1977). A theory of the interstellar medium: three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate., *218*, 148-169. <https://doi.org/10.1086/155667>
- McKee, C. F. & Ostriker, E. C. (2007). Theory of Star Formation., *45*(1), 565-687. <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.45.051806.110602>
- McKee, C. F. & Tan, J. C. (2003). The Formation of Massive Stars from Turbulent Cores., *585*(2), 850-871. <https://doi.org/10.1086/346149>
- Miller, G. E. & Scalo, J. M. (1979). The Initial Mass Function and Stellar Birthrate in the Solar Neighborhood., *41*, 513. <https://doi.org/10.1086/190629>
- Murray, C. D. & Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University Press.
- Myers, P. C. (2009). Filamentary Structure of Star-forming Complexes., *700*(2), 1609-1625. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/700/2/1609>
- Offner, S. S. R., Clark, P. C., Hennebelle, P., Bastian, N., Bate, M. R., Hopkins, P. F., Moraux, E. & Whitworth, A. P. (2014). The Origin and Universality of the Stellar Initial Mass Function. En H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond & T. Henning (Eds.), *Protostars and Planets VI* (p. 53). https://doi.org/10.2458/azu_uapress_9780816531240-ch003

- Ostriker, E. C., Stone, J. M. & Gammie, C. F. (2001). Density, Velocity, and Magnetic Field Structure in Turbulent Molecular Cloud Models., *546*(2), 980-1005. <https://doi.org/10.1086/318290>
- Padoan, P. & Nordlund, Å. (2002). The Stellar Initial Mass Function from Turbulent Fragmentation., *576*(2), 870-879. <https://doi.org/10.1086/341790>
- Palla, F. & Stahler, S. W. (2004). *The Formation of Stars*. Wiley.
- Rathborne, J. M., Jackson, J. M. & Simon, R. (2006). Infrared Dark Clouds: Precursors to Star Clusters., *641*(1), 389-405. <https://doi.org/10.1086/500423>
- Salpeter, E. E. (1955). The Luminosity Function and Stellar Evolution., *121*, 161. <https://doi.org/10.1086/145971>
- Scalo, J. M. (1986). The Stellar Initial Mass Function., *11*, 1-278.
- Scalo, J. (1990). Perception of interstellar structure - Facing complexity. En R. Capuzzo-Dolcetta, C. Chiosi & A. di Fazio (Eds.), *Physical Processes in Fragmentation and Star Formation* (pp. 151-176). https://doi.org/10.1007/978-94-009-0605-1_12
- Shu, F. H. (1992). *The physics of astrophysics. Volume II: Gas dynamics*. University Science Books.
- Shu, F. H., Adams, F. C. & Lizano, S. (1987). Star formation in molecular clouds: observation and theory., *25*, 23-81. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.25.090187.000323>
- Solomon, P. M., Rivolo, A. R., Barrett, J. & Yahil, A. (1987). Mass, Luminosity, and Line Width Relations of Galactic Molecular Clouds., *319*, 730. <https://doi.org/10.1086/165493>
- Stark, A. & Blitz, L. (1978). On the masses of giant molecular cloud complexes., *225*, L15-L19. <https://doi.org/10.1086/182783>
- Teixeira, P. S., Takahashi, S., Zapata, L. A. & Ho, P. T. P. (2016). Two-level hierarchical fragmentation in the northern filament of the Orion Molecular Cloud 1., *587*, A47. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526807>
- Valluri, M. (1993). Compressive Tidal Heating of a Disk Galaxy in a Rich Cluster., *408*, 57. <https://doi.org/10.1086/172569>
- Vaytet, N. & Haugbølle, T. (2017). A grid of one-dimensional low-mass star formation collapse models., *598*. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628194>
- Vázquez-Semadeni, E. (1994). Hierarchical Structure in Nearly Pressureless Flows as a Consequence of Self-similar Statistics., *423*, 681. <https://doi.org/10.1086/173847>
- Vázquez-Semadeni, E., Ballesteros-Paredes, J. & Rodríguez, L. F. (1997). A Search for Larson-type Relations in Numerical Simulations of the ISM: Evidence for Nonconstant Column Densities., *474*(1), 292-307. <https://doi.org/10.1086/303432>
- Vázquez-Semadeni, E., Gómez, G. C., Jappsen, A. K., Ballesteros-Paredes, J., González, R. F. & Klessen, R. S. (2007). Molecular Cloud Evolution. II. From Cloud Formation to the Early Stages of Star Formation in Decaying Conditions., *657*(2), 870-883. <https://doi.org/10.1086/510771>

- Vázquez-Semadeni, E., Ryu, D., Passot, T., González, R. F. & Gazol, A. (2006). Molecular Cloud Evolution. I. Molecular Cloud and Thin Cold Neutral Medium Sheet Formation., *643*(1), 245-259. <https://doi.org/10.1086/502710>
- Wilson, R. W., Jefferts, K. B. & Penzias, A. A. (1970). Carbon Monoxide in the Orion Nebula., *161*, L43. <https://doi.org/10.1086/180567>
- Zuckerman, B. & Palmer, P. (1974). Radio radiation from interstellar molecules., *12*, 279-313. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.12.090174.001431>