



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

INTERACCIÓN ESTRUCTURA – SUELO FRICCIONANTE

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

VÍCTOR MICHEL MORALES ALEJANDRE

TUTOR

M. I. DEMENEGHI COLINA AGUSTÍN, DICyG

Dr. MAGAÑA DEL TORO ROBERTO, IINGEN
M. I. PADILLA VELÁZQUEZ RICARDO RUBÉN, DICyG

M. I. SANGINÉS GARCÍA HÉCTOR, DICyG
M. I. ZEA CONSTANTINO CARMELINO, DICyG

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., JUNIO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi esposa por darme todo su apoyo para lograr mis objetivos y enfocarme en lo que en verdad importa.

A mi madre por alentarme a continuar sin importar las dificultades de la vida laboral.

A mi director de tesis M. I. Agustín Demeneghi Colina por su incomparable dedicación y paciencia para la obtención de este trabajo.

A la Dirección de General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) por el apoyo a través del Proyecto PAPIME PE108522 en la realización del Software de análisis de Interacción Estática Suelo Estructura.

Resumen

Durante varias épocas se ha tenido la necesidad de mejorar la calidad de vida de la sociedad a la que se pertenece, para ello, la ingeniería civil se ha enfrentado a los distintos problemas para brindar seguridad, desarrollo y comodidad ante las distintas dificultades que impone el medio ambiente que rodea a la sociedad.

A través del mismo camino de la Ingeniería Civil, en los análisis estructurales de las cimentaciones se sintetizó el hecho de suponer que sobre estos actúan las fuerzas provenientes de la estructura, calculada a partir de la suposición de apoyos fijos, es decir a la parte de la estructura que se encuentra al interior del terreno, y que transmite las cargas al suelo o roca subyacente.

Los suelos donde se desplanta la construcción se comprimen produciendo principalmente deformaciones en el mismo. Dichos suelos son originados mediante distintos procesos, entre los cuales son intemperización, procesos gravitacionales y erosión. El intemperismo se divide en físico o mecánico, en el cual la roca madre se rompe en tamaños cada vez más pequeños sin afectar apreciablemente su composición, y químico, donde la roca se descompone originando un suelo cuya constitución mineralógica es distinta de la que tenía la roca madre.

Con lo anterior se puede mencionar que la interacción entre el suelo y la estructura puede variar dependiendo de las características litológicas del suelo donde se encuentre o se llegue a cimentar dicha estructura.

De esa manera el estudio de la interacción suelo estructura, generalmente inicial con la concepción del suelo que va a servir de cimiento, para esto el análisis de los suelos es muy extenso, ya que se tienen diversos tipos y comportamientos diferentes.

Por lo tanto, el proyecto estructural frente a diferentes acciones necesita conocer cuál es el movimiento de la base de la estructura o del terreno inmediatamente adyacente, el cual será distinto del movimiento de campo libre correspondiente; la presencia de la estructura modifica el movimiento de la superficie del terreno cimentado.

Además, la interacción suelo estructura, ha sido la solución para la disminución de las incertidumbres en los asentamientos y deformaciones en las edificaciones. Por lo que el trabajo presentará la resolución de un problema de cimentación de zapata corrida desplantado sobre suelo friccionante y modelado a través de un programa de computadora para la realización de una comparación.

Índice	página
Agradecimientos	2
Resumen	3
1. Introducción.....	7
1.1. Justificación	7
1.2. Alcances.....	8
1.3. Objetivos.....	8
2. Teoría de la elasticidad	9
2.1. Ley de Hooke	9
2.2. Ley de Hooke Generalizada.....	11
2.3. Relación entre propiedades elásticas.....	12
3. Cálculo de deformaciones en suelos friccionantes.....	16
3.1. Ecuaciones constitutivas cuando los incrementos de esfuerzo son proporcionales a la sobrecarga por una obra de ingeniería	16
3.2. Método no lineal para el cálculo de la deformación en suelos friccionantes.	20
3.3. Desplazamiento mediante fórmula de Schleicher	23
3.4. Desplazamiento mediante fórmula de Steinbrenner	25
4. Análisis Estructural.....	27
4.1. Método de rigideces	28
4.1.1. Elaboración de la matriz de rigidez	31
5. Interacción Estructura-Suelo Friccionante	39
5.1. Definición de Interacción Estructura-Suelo	40
5.2. Rigidez relativa del suelo	41
5.3. Interacción estática en zapata corrida	44
5.4. Deformación del suelo	47
6. Ejemplo de aplicación	50
6.1. Cálculo de esfuerzos normales sobre cimentación.....	50

6.2.	Cálculo de módulo de elasticidad.....	56
6.3.	Cálculo de valores de influencia.....	60
6.4.	Cálculo de deformaciones del suelo.....	66
6.5.	Cálculo de matriz de rigideces	68
6.6.	Desarrollo de ecuación general de equilibrio	71
6.7.	Modelado numérico del problema	75
7.	Conclusiones.....	82
8.	Bibliografía.....	84

1. Introducción

1.1. Justificación

Cuando se realiza un estudio geotécnico el cálculo de la deformación $\Delta\delta_z$ de un estrato de suelo friccionante de espesor Δz se lleva a cabo en la práctica empleando usualmente los resultados de ensayos de campo, como la prueba de penetración estándar o el ensaye de cono holandés.

Por otra parte, al llevar a cabo un análisis de interacción suelo-estructura, para el cómputo de la deformación $\Delta\delta_z$ del estrato se requieren las magnitudes de las propiedades mecánicas del material, *i e*, el módulo de deformación E_s y la relación de Poisson ν del suelo. Ahora bien, ¿cómo obtenemos estos parámetros a partir del valor de la deformación $\Delta\delta_z$ determinada con el estudio geotécnico?

En esta tesis se presenta un procedimiento para atacar el problema anterior, que consiste en determinar las propiedades E_s y ν de un estrato de suelo friccionante, a partir de la magnitud de la deformación $\Delta\delta_z$ encontrada con el estudio geotécnico y de la combinación de los incrementos de esfuerzo σ_z , σ_x y σ_y dentro del estrato.

Cabe señalar además que existen métodos de análisis de interacción suelo-estructura que establecen la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo, mientras que también se cuenta con modelado numérico para atacar el problema de la interacción suelo-estructura.

¿Qué tanta diferencia se presenta entre los resultados de estos dos enfoques? Dado que ambos están basados en los principios de la mecánica de sólidos, es de esperarse que los productos sean similares.

En esta tesis se muestra una comparación de estos dos enfoques para el caso de una zapata corrida desplantada en un depósito de suelos friccionantes, y se presentan conclusiones al respecto.

Así pues, se pretende analizar una zapata corrida, y obteniendo los elementos mecánicos a partir de métodos numéricos y analíticos. Posteriormente se comparan los métodos de interacción suelo-estructura por compatibilidad de deformaciones y el que emplea un método numérico.

1.2. Alcances

El procedimiento que se sigue consistente en:

- Planteamiento del problema.
- Recopilación bibliográfica sobre el tema.
- Modelación del problema a través del programa.
- Obtención de los desplazamientos de la estructura.
- Disminuir los tiempos de ejecución en la resolución de problemas de este tipo.
- Tratar los problemas de interacción con suelo friccionante.

1.3. Objetivos

- Presentar procedimientos para el análisis de la estructura y la determinación de las propiedades mecánicas del suelo, para ser utilizadas en la Interacción Suelo-Estructura.
- Comparar la interacción estructura-suelo friccionante realizada con un método tradicional y con la ejecutada empleando un modelado numérico.

2. Teoría de la elasticidad

Hasta los inicios de los años 1950, la mayoría de las soluciones de los problemas elásticos eran resueltas por métodos analíticos formulados, puesto que los problemas eran muy laboriosos.

Por lo que, si un material es sometido a tensión, es decir si el mismo es solicitado desde sus extremos en direcciones opuestas la longitud del mismo aumenta y eventualmente, si la fuerza es grande, el material puede romperse. Esta relación la notó primero Robert Hooke (1635-1703), un contemporáneo y rival de Newton. Esta expresión válida para una gran variedad de materiales, pero no de carácter universal.

Esta ley obedece cierta hipótesis, donde el material es isótropo, es decir, sus propiedades son diferentes en distintas direcciones, además de cumplir con la condición de homogeneidad. En los suelos se ha demostrado que la teoría de la elasticidad puede ser aplicable y tiene resultados aceptables para las aplicaciones en la geotecnia. Sin embargo, de acuerdo con los ensayos e investigaciones realizadas a lo largo de la historia, han demostrado que el suelo tiene un comportamiento elasto-plástico.

2.1. Ley de Hooke

El físico y astrónomo inglés Robert Hooke, establece la relación entre componentes de esfuerzo y los componentes de deformaciones. Sus experimentos mostraron que cuando se le aplica un esfuerzo a un rectángulo paralelepípedo con características isotrópicas, los esfuerzos normales no producen distorsión en los ángulos del elemento y se expresa como se muestra a continuación.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.1)$$

Donde:

ε_x , es la deformación lineal unitaria,

σ_x , esfuerzo horizontal de tensión simple en dirección "x",

E , es el módulo de elasticidad o módulo de Young.

Además de que la relación "1/E" es la constante de proporcionalidad.

Lo anterior se deriva del hecho de que la deformación unitaria es proporcional al esfuerzo aplicado. Ello se observa en la [Ilustración 1](#).

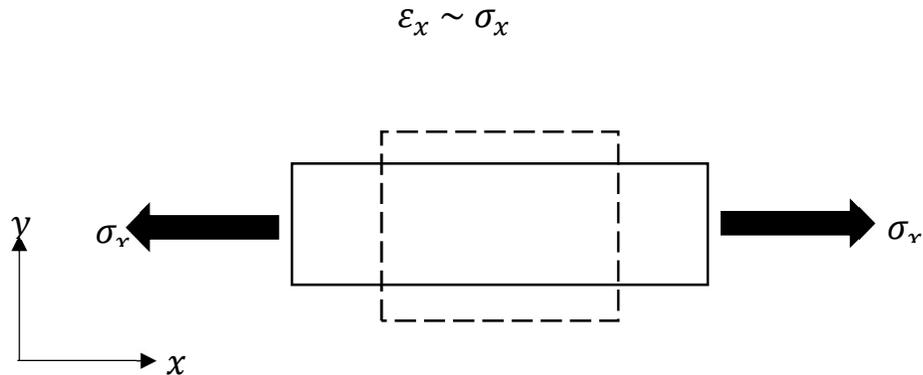


Ilustración 1. Cuerpo sometido a esfuerzo horizontal visto desde una superficie plana de ejes "xy". (Referencia 1)

Por otra parte, se debe de tomar en cuenta que el estrechamiento de la sección de un prisma de material elástico lineal e isótropo se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares, es decir, el cuerpo que se mostró en la ilustración anterior se alarga en dirección "x" pero se acorta en direcciones "y" y "z", a este fenómeno se denomina efecto Poisson. Por lo tanto, se observa que las deformaciones unitarias en dichos ejes son una fracción de la deformación unitaria en el eje "x", de tal forma que las deformaciones resultan:

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.3)$$

Ahora, si se supone que el mismo cuerpo se someta en forma simultánea a los esfuerzos σ_x , σ_y y σ_z , y con ello se valida el principio de superposición de causas y efectos, se puede establecer las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.6)$$

Esta suposición es válida cuando las deformaciones en el cuerpo son relativamente pequeñas. Con dichas ecuaciones se puede obtener las deformaciones totales producidas por fuerzas ortogonales en los tres sentidos. Esto nos lleva a que las fuerzas axiales producen solamente esfuerzos de tensión y compresión, sin embargo, tiene un efecto que produce una deformación en sentido angular.

2.2. Ley de Hooke Generalizada

Para este caso se considerará un cuerpo elástico lineal sometido a un estado de esfuerzo cortante, como se muestra en la [Ilustración 2](#).

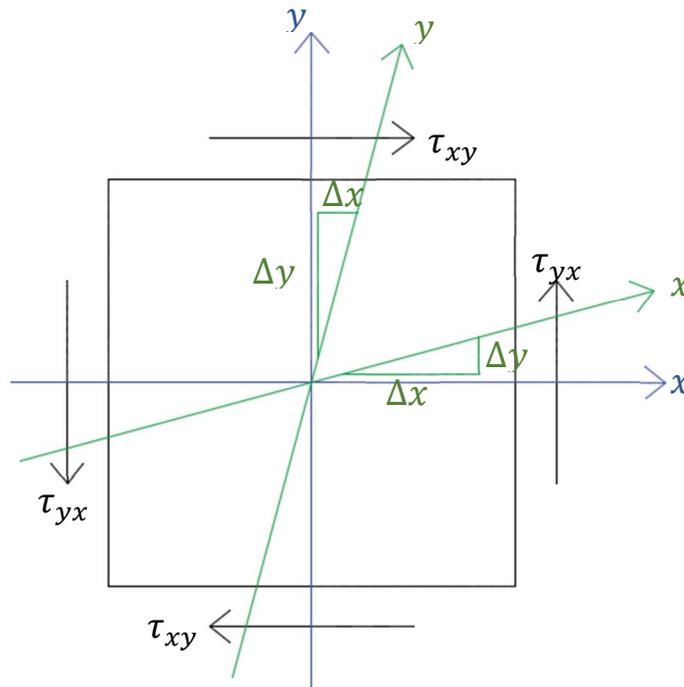


Ilustración 2. Cuerpo sometido a un estado de cortante puro (modificado de Referencia 1).

Tomando en cuenta que los nuevos ejes x' y y' con respecto a los ejes originales presentan un desplazamiento que se muestra como Δx y Δy . Además, tomando en cuenta que,

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} \doteq \frac{\Delta u}{\Delta y} \quad (2.7)$$

Con respecto a la ecuación (2.7), se puede afirmar que la deformación angular es proporcional al esfuerzo cortante.

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} \sim \tau_{xy}$$

Por lo tanto en un material elástico lineal se cumple la siguiente igualdad.

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{G'}\tau_{xy} \quad (2.8)$$

En donde nuevamente, $1/G'$ es la constante de proporcionalidad. En la misma ecuación, se procede a despejar γ_{xy} .

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{G'}\tau_{xy} \quad \rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{\frac{G'}{2}}\tau_{xy} \quad ; \quad G = \frac{G'}{2}$$

En donde "G" se le conoce como módulo de rigidez al cortante, de tal modo que la ecuación anterior resulta de la siguiente manera.

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (2.9)$$

Como se muestra en la ecuación (2.9), se presenta para una superficie "xy", por lo que se procede en forma análoga con las siguientes dos combinaciones de ejes.

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad (2.11)$$

Utilizando todas las ecuaciones anteriores, se procede a acomodarlas de manera matricial para obtener la Ley de Hooke Generalizada, como se muestra a continuación.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3. Relación entre propiedades elásticas

Se le considera como propiedades elásticas del material al módulo de elasticidad, módulo de rigidez y la relación de Poisson.

Si se considera un cuerpo elástico lineal sometido al estado de esfuerzo plano mostrado en la [Ilustración 3](#). Considerando que el esfuerzo en dirección "z" es igual a cero. A partir de dicha ilustración, se procede a calcular la deformación unitaria angular del vector " \underline{e} ", utilizando los siguientes procedimientos.

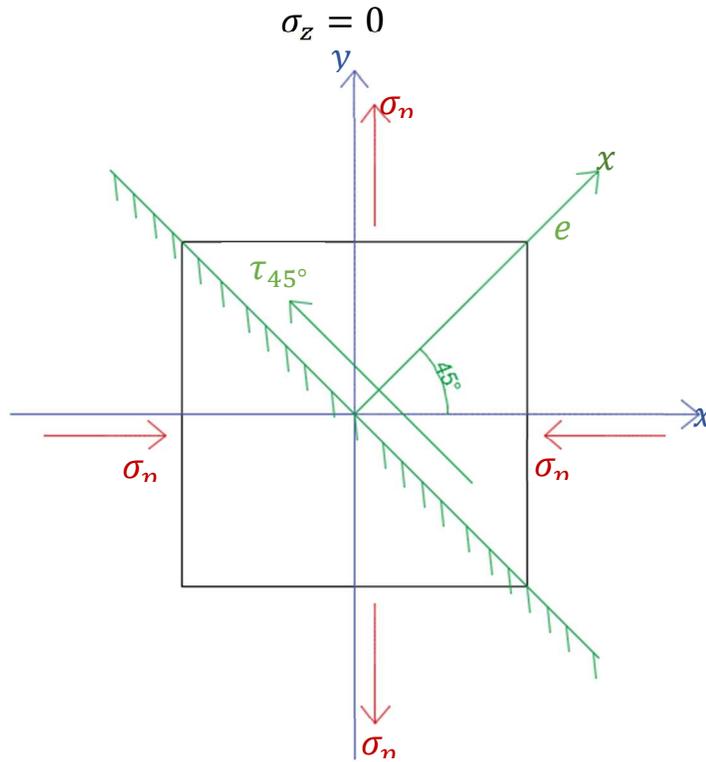


Ilustración 3. Cuerpo sometido a esfuerzos de compresión y tensión (modificado de Referencia 1).

- a) Se calcula el tensor de deformación aplicando la Ley de Hooke. Se procede a sustituir en la ecuación (2.4).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + 0)] \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y)] \\ &\rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [-\sigma_p - \nu(\sigma_p)] \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = -\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p \end{aligned}$$

Se procede a realizar la sustitución con la ecuación (2.5).

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + 0)] \rightarrow \varepsilon_y \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x)] \\ &\rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_p - \nu(-\sigma_p)] \rightarrow \varepsilon_y = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p\end{aligned}$$

Ahora con la ecuación (2.6).

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \rightarrow \varepsilon_z = \frac{1}{E} [0 - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \rightarrow \varepsilon_z \\ &= \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ &\rightarrow \varepsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_p - \sigma_p)] \rightarrow \varepsilon_z = 0\end{aligned}$$

Como se aprecia, se trata de un caso particular de esfuerzo plano y deformación plana. Para que esto sea representativo se muestra el vector "E".

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la ecuación (2.13) de deformación unitaria lineal angular del vector "e".

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (2.13)$$

Dado que $\alpha = 45^\circ$, por lo tanto, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Se sustituye en la ecuación (2.13).

$$\varepsilon_{45^\circ} = \left(-\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p - \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \left(-2 \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} [0] \rightarrow \varepsilon_{45^\circ} = -\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = -\frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_p \quad (2.14)$$

b) Se calcula el esfuerzo cortante en un plano de 45° a través de la siguiente ecuación.

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (2.15)$$

Se sustituye en la ecuación (15).

$$\begin{aligned} \tau &= (-\sigma_p - \sigma_p) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \tau_{xy} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) \rightarrow \tau \\ &= (-\sigma_p - \sigma_p) \frac{1}{2} + \tau_{xy}(0) \\ \tau_{45^\circ} &= -\sigma_p \end{aligned}$$

Se procede a sustituir en la ecuación (9).

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \rightarrow \gamma_{45^\circ} = \frac{1}{G} \tau_{45^\circ} \rightarrow \gamma_{45^\circ} = \frac{1}{G} (-\sigma_p) \rightarrow \gamma_{45^\circ} = -\frac{\sigma_p}{G}$$

Tomando en cuenta que la deformación lineal angular es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{45^\circ} &= \frac{1}{2} \gamma_{45^\circ} = -\frac{\sigma_p}{2G} \\ \varepsilon_{45^\circ} &= -\frac{\sigma_p}{2G} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.14) y (2.16) miden la deformación angular del vector " \underline{e} ", lo que indica que se pueden igualar, dando como resultado lo siguiente.

$$\begin{aligned} -\frac{(1+\nu)}{E} \sigma_p &= -\frac{\sigma_p}{2G} \rightarrow 2G = \frac{E}{(1+\nu)} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

De esta manera se puede demostrar que las relaciones entre las fuerzas cortantes y deformaciones angulares están también definidas por los parámetros de módulo de elasticidad y la relación de Poisson.

3. Cálculo de deformaciones en suelos friccionantes

Para el cálculo de los desplazamientos verticales de la estructura se presentarán a continuación distintas fórmulas para la obtención de dichos desplazamientos.

3.1. Ecuaciones constitutivas cuando los incrementos de esfuerzo son proporcionales a la sobrecarga por una obra de ingeniería

Los incrementos de esfuerzo en un elemento de suelo son proporcionales a la sobrecarga de una obra de ingeniería. Por ejemplo, cuando se construye un edificio, a cierta profundidad se producen incrementos de esfuerzo $\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ y τ_{xy} , los cuales son proporcionales a la sobrecarga "q" ocasionada por la presencia del inmueble (ver [Ilustración 4](#)).

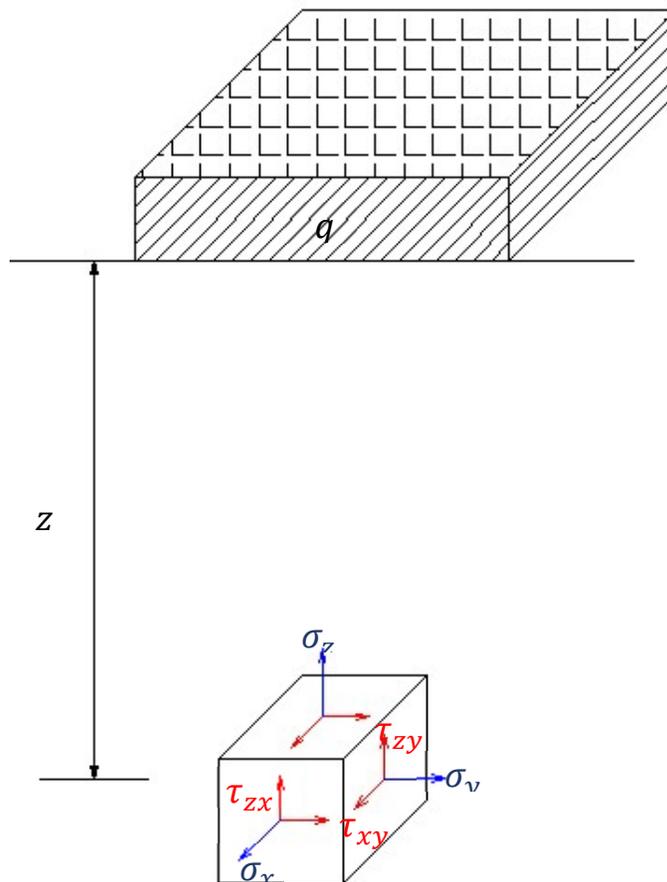


Ilustración 4. Incrementos de esfuerzo

Se considera un elemento de suelo a la profundidad "z" sujeto a incrementos de esfuerzo por una obra de ingeniería. Suponiendo que el espesor " Δz_0 " de dicho elemento es suficientemente pequeño para que la relación entre el incremento de esfuerzo horizontal y el incremento de esfuerzo vertical sea constante, se tiene lo siguiente:

$$a_1 = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \quad a_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_z}$$

Despejando las ecuaciones anteriores, los esfuerzos son los siguientes:

$$\sigma_x = a_1 \sigma_z \quad \sigma_y = a_2 \sigma_z \quad (3.1)$$

Se procede a sustituir en la ecuación (2.6).

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(a_1 \sigma_z + a_2 \sigma_z)] \rightarrow \varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z [1 - \nu(a_1 + a_2)]$$

Dado que $f = 1 - \nu(a_1 + a_2)$, por lo tanto,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z f \quad (3.2)$$

Así que la presión de confinamiento es la suma de la presión de confinamiento inicial más el incremento de esfuerzo normal en el plano octaédrico.

$$P_{be} = P_{be} + \sigma_c ; \text{ donde } \rightarrow \sigma_c = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Para que la ecuación anterior pueda ser utilizada de manera adecuada en el ejercicio práctico, se puede sustituir la cantidad de $\frac{1}{3}$ por coeficientes, de tal manera que resulta lo siguiente.

$$\sigma_c = \frac{1}{3} \sigma_z + \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y) \rightarrow \sigma_c = b_1 \sigma_z + b_2 (\sigma_x + \sigma_y)$$

Sustituyendo las ecuaciones (29) en la ecuación anterior.

$$\sigma_c = b_1 \sigma_z + b_2 (a_1 \sigma_z + a_2 \sigma_z) \rightarrow \sigma_c = [b_1 + b_2 (a_1 + a_2)] \sigma_z$$

Tomando en cuenta que $c = b_1 + b_2 (a_1 + a_2)$, se obtiene la siguiente ecuación.

$$\sigma_c = c\sigma_z \quad (3.3)$$

Siendo sustituido en la siguiente ecuación.

$$P_{be} = P_{be} + \sigma_c \rightarrow P_{be} = P_{be0} + c\sigma_z \quad (3.4)$$

Para el caso del esfuerzo cortante y sustituyendo en la ecuación (3.4) se define la siguiente ecuación.

$$a_3 = \frac{\tau_{zx}}{\sigma_z} \rightarrow \sigma_z = \frac{\tau_{zx}}{a_3} \quad (3.5)$$

Con los resultados anteriores, es posible plantear una ecuación constitutiva general, en la que la deformación unitaria longitudinal diferencial sea directamente proporcional a la variante de la ley de Hooke dada por la ecuación (3.2), e inversamente proporcional a la presión de confinamiento dada por la ecuación (3.4), lo que se representa en la siguiente ecuación (ver [Ilustración 5](#)).

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \left[\frac{\left(\frac{f\sigma_z}{Pa}\right)^r d\left(\frac{f\sigma_z}{Pa}\right)}{\left(\frac{P_{be0} + c\sigma_z}{Pa}\right)^s} \right] \quad (3.7)$$

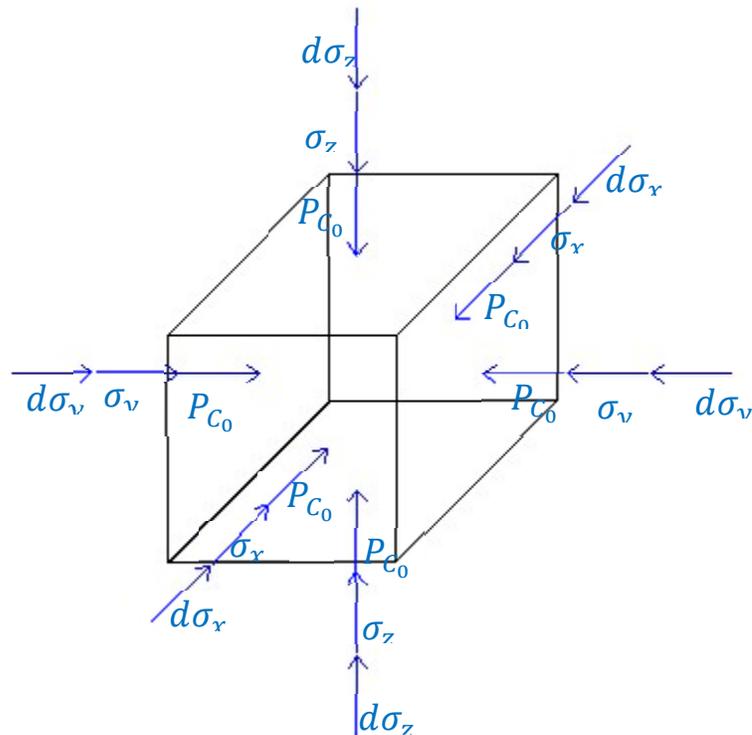


Ilustración 5. Elemento de suelo sometido por la presión del estrato como el esfuerzo diferencial (modificado de Demeneghi, 2008).

Sin embargo, la deformación de un elemento de suelo ocurre gradualmente, por lo que tomando en cuenta la deformación en sentido negativo, por lo tanto, la ecuación (3.7) resulta de la siguiente manera.

$$\frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = -\frac{1}{A} \left[\frac{\left(\frac{f\sigma_z}{P_a}\right)^r d\left(\frac{f\sigma_z}{P_a}\right)}{\left(\frac{P_{be0} + c\sigma_z}{P_a}\right)^s} \right] \quad (3.8)$$

Donde A es el módulo de rigidez del suelo, r y s son exponentes que dependen del tipo de suelo. La presión atmosférica p_a equivale a 101.3 kPa , que se introduce con el fin de que el módulo A sea adimensional.

Se propone la siguiente ecuación para la deformación angular.

$$d\gamma_{zy} = \frac{1}{\Gamma} \left[\frac{\left(\frac{\tau_{zx}}{P_a}\right)^r d\left(\frac{\tau_{zx}}{P_a}\right)}{\left(\frac{P_{be0} + \frac{c}{a_3}\tau_{zx}}{P_a}\right)^s} \right] \quad (3.9)$$

De manera homóloga, si en la parte superior de un elemento el desplazamiento horizontal ocurre gradualmente, por lo que la deformación angular diferencial es la siguiente.

$$d\gamma_{zy} = -\frac{d(\Delta u)}{\Delta z} \quad (3.10)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.9) resulta de la siguiente manera.

$$d\gamma_{zy} = -\frac{1}{\Gamma} \left[\frac{\left(\frac{\tau_{zx}}{P_a}\right)^r d\left(\frac{\tau_{zx}}{P_a}\right)}{\left(\frac{P_{be0} + \frac{c}{a_3}\tau_{zx}}{P_a}\right)^s} \right] \quad (3.11)$$

En la mayoría de los suelos se puede considerar que en la práctica profesional $r \approx 0$, por lo que la ecuación (3.11) se puede plantear de la siguiente manera (Demeneghi, 2008).

$$d\varepsilon_z = \frac{\frac{1}{A} \left[\frac{d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)}{P_a} \right]}{\left(\frac{P_{co} + \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}}{P_a} \right)^s} \quad (3.12)$$

Ley de Hooke

Confinamiento

3.2. Método no lineal para el cálculo de la deformación en suelos friccionantes.

Se considera un elemento suelo sometido a los esfuerzos mostrados en la Ilustración 6.

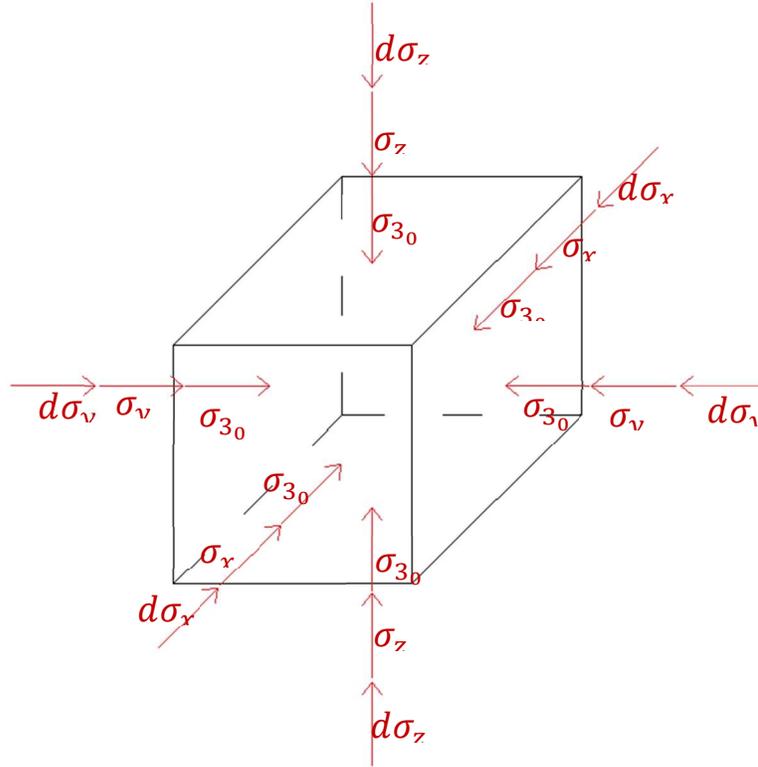


Ilustración 6. Estado de esfuerzo en un elemento de suelo (modificado de Demeneghi, 2008).

De acuerdo con la ecuación (3.12), se establece lo siguiente. Sea,

$$a_1 = \frac{d\sigma_x}{d\sigma_z} \doteq \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \text{constante} \quad ; \quad a_2 = \frac{d\sigma_y}{d\sigma_z} \doteq \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \text{constante}$$

$$d\sigma_x = a_1 d\sigma_z \quad d\sigma_y = a_2 d\sigma_z$$

$$\sigma_x = a_1 \sigma_z \quad \sigma_y = a_2 \sigma_z$$

Con lo anterior, se procede a sustituir en la ecuación (3.12), como se muestra a continuación.

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{A} \frac{\left[\frac{d\sigma_z - v(a_1 d\sigma_z + a_2 d\sigma_z)}{P_a} \right]}{\left[P_{co} + \frac{1}{3}(a_1 \sigma_z + a_2 \sigma_z + \sigma_z) \right]^s} P_a^s$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{AP_a^{1-s}} \frac{d\sigma_z - v(a_1 d\sigma_z + a_2 d\sigma_z)}{\left[P_{co} + \frac{1}{3}(a_1 \sigma_z + a_2 \sigma_z + \sigma_z) \right]^s}$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{AP_a^{1-s}} \frac{d\sigma_z [1 - v(a_1 + a_2)]}{\left[P_{co} + \frac{1}{3}(a_1 + a_2)\sigma_z + \frac{1}{3}\sigma_z \right]^s}$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{AP_a^{1-s}} \frac{d\sigma_z [1 - v(a_1 + a_2)]}{\left[P_{co} + \sigma_z \left(\frac{1}{3}(a_1 + a_2) + \frac{1}{3} \right) \right]^s}$$

Se toma en cuenta las siguientes ecuaciones y se procede a sustituir en la ecuación anterior.

$$f = 1 - v(a_1 + a_2)$$

$$c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(a_1 + a_2)$$

$$d\varepsilon_z = \frac{1}{AP_a^{1-s}} \frac{f d\sigma_z}{[P_{co} + c\sigma_z]^s} \quad (3.13)$$

Donde la deformación unitaria diferencial vale.

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta w)}{\Delta z}$$

Se procede a realizar la sustitución en la ecuación (3.13) como se muestra a continuación.

$$\frac{d(\Delta w)}{\Delta z} = \frac{1}{AP_a^{1-s}} \frac{f d\sigma_z}{[P_{co} + c\sigma_z]^s} \rightarrow \frac{d(\Delta w)}{\Delta z} = -\frac{1}{AP_a^{1-s}} \frac{f d\sigma_z}{[P_{co} + c\sigma_z]^s}$$

Se realiza la integración de la ecuación anterior.

$$\int_{\Delta z_0}^{\Delta z_f} \frac{d(\Delta w)}{\Delta z} = -\frac{1}{AP_a^{1-s}} \int_0^{\sigma_z} \frac{f d\sigma_z}{[P_{co} + c\sigma_z]^s}$$

$$\ln \Delta z \Big|_{\Delta z_0}^{\Delta z_f} = -\frac{f}{AP_a^{1-s} C} \left[\frac{(\sigma_{3_0} + C\sigma_z)}{-s+1} \right]_0^{\sigma_z}$$

$$\ln \frac{\Delta z_f}{\Delta z_0} = -\frac{f}{CAP_a^{1-s}} \left[\frac{(\sigma_{3_0} + C\sigma_z)^{1-s} - (\sigma_{3_0})^{1-s}}{1-s} \right]$$

$$\frac{\Delta z_f}{\Delta z_0} = e^{-\frac{f}{CAPa^{1-s}} \left[\frac{(\sigma_{30} + C\sigma_z)^{1-s} - (\sigma_{30})^{1-s}}{1-s} \right]} \quad (3.14)$$

De acuerdo con la [Ilustración 7](#), se obtiene lo siguiente.

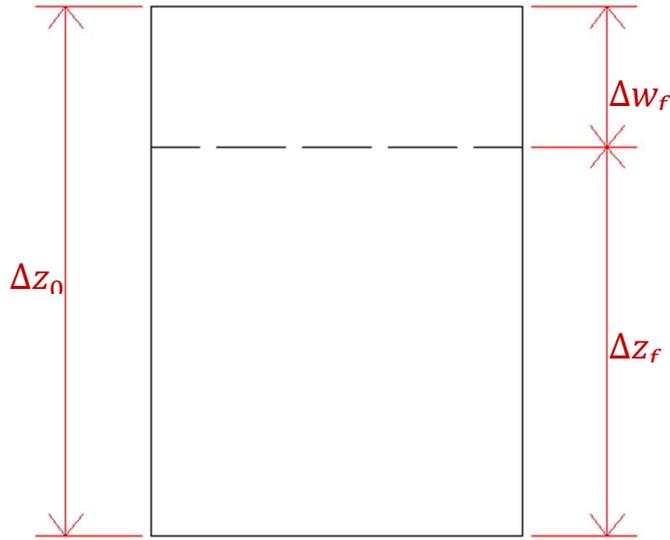


Ilustración 7. Deformación de un elemento de suelo.

$$\Delta z_f = \Delta z_0 + \Delta w_f \rightarrow \frac{\Delta z_f}{\Delta z_0} = 1 + \frac{\Delta w_f}{\Delta z_0} \rightarrow \frac{\Delta w_f}{\Delta z_0} = \frac{\Delta z_f}{\Delta z_0} - 1$$

$$\Delta w_f = \left(\frac{\Delta z_f}{\Delta z_0} - 1 \right) \Delta z_0$$

Sustituyendo la ecuación (3.14), en la ecuación anterior.

$$\Delta w_f = \left(e^{-\frac{f}{CAPa^{1-s}} \left[\frac{(\sigma_{30} + C\sigma_z)^{1-s} - (\sigma_{30})^{1-s}}{1-s} \right]} - 1 \right) \Delta z_0$$

Además de que $\Delta \delta_z = -\Delta w_f$, haciendo la sustitución, se llega a lo siguiente.

$$\Delta \delta_z = \left(1 - e^{-\frac{f}{CAPa^{1-s}} \left[\frac{(\sigma_{30} + C\sigma_z)^{1-s} - (\sigma_{30})^{1-s}}{1-s} \right]} \right) \Delta z_0 \quad (3.15)$$

Donde $s = 0.5$ en la práctica profesional, "A" es un módulo de rigidez que depende de la compacidad de la arena y el mismo es función del número de golpes de la prueba de penetración estándar (SPT). Con lo anterior se obtiene la ecuación constitutiva para suelos granulares.

3.3. Desplazamiento mediante fórmula de Schleicher

Con el uso de la fórmula de Schleicher se debe tomar en cuenta que se calcula de forma aproximada el desplazamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a una carga uniformemente repartida (ver [Ilustración 8](#)).

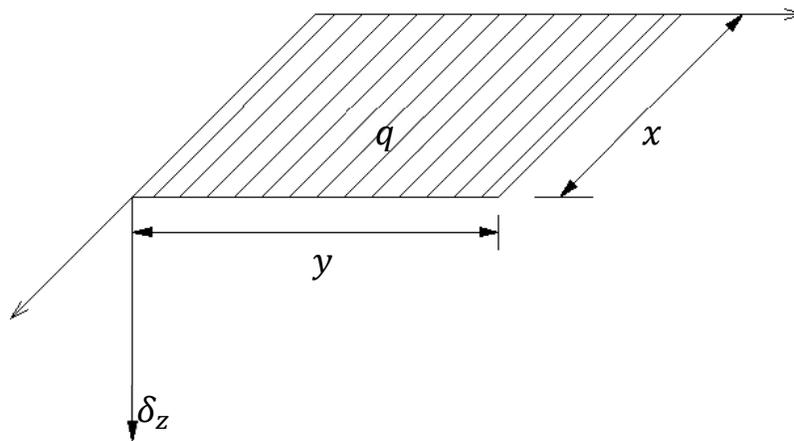


Ilustración 8. Desplazamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido con una carga uniformemente repartida.

Dicha fórmula es válida para un medio semi-infinito y linealmente elástico, la fórmula se presenta a continuación.

$$\delta_z = \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[y \ln \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} + x \ln \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \right] \quad (3.16)$$

De la ecuación (3.16), los elementos son los siguientes:

- x, y , dimensiones de la superficie a tratar
- E , módulo de deformación del suelo
- ν , relación de Poisson
- q , carga uniformemente repartida
- δ_z , desplazamiento en dirección "z"

De los elementos anteriores, el módulo de deformación del suelo se obtiene a través de la fórmula de Denver, dicha fórmula se presenta a continuación,

$$E_s = C\sqrt{N} \quad (3.17)$$

Por la ecuación anteriormente presentada, se debe tomar en cuenta que las propiedades de deformación de un estrato de arena pueden ser determinadas tanto en el laboratorio como *in situ*. Los diferentes procedimientos usados en los dos casos anteriores poseen diferentes ventajas. Las pruebas *in situ* no implican problemas de muestreo o dificultades relacionadas con la correcta determinación de la densidad, grado de saturación, el esfuerzo *in situ* y el historial de esfuerzos. Por otro lado, un mejor procedimiento de ensayo puede ser efectuado cuando una muestra es investigada en el laboratorio.

La mayoría de ensayos *in situ* darán resultados, los cuales no son directamente relacionados con los parámetros de deformación del suelo. Sin embargo, varios investigadores han desarrollado un expediente de relaciones empíricas para derivar las propiedades elásticas de lo comúnmente utilizado de los métodos de ensayo *in situ* y además han probado que estos métodos tendrán suficiente exactitud para todo uso práctico.

Adicionalmente, los resultados de los ensayos *in situ* pueden resultar más valiosos en la descripción general del suelo y un programa de investigación de campo cuidadosamente planeada que incluye una parte sustancial de métodos de ensayo *in situ* es en la mayoría de los casos una disposición económica (Denver, 1985).

Como se mostró previamente, una determinación empírica y único factor de corrección "C" que es una función de las dimensiones de las zapatas parece producir una excelente correlación entre los asentamientos calculados y los observados.

Como lo menciona Denver, las propiedades de deformación derivan de los ensayos *in situ*, en donde realizan la determinación del módulo de Young a partir de los ensayos de penetración estándar (SPT), cabe señalar que la realización de dichas pruebas fue en perfiles de suelo principalmente consistentes de capas homogéneas de arena.

Por lo tanto, para la estimación del módulo de Young se utiliza la ecuación (3.17) por medio de los valores del número de golpes "N" y con un factor de corrección igual a 7 MPa.

3.4. Desplazamiento mediante fórmula de Steinbrenner

Para el cálculo de desplazamientos inducidos por una carga uniformemente repartida, Steinbrenner resolvió el problema de cálculo de desplazamientos en un medio elástico, homogéneo e isótropo de espesor " h " (ver [Ilustración 9](#)).

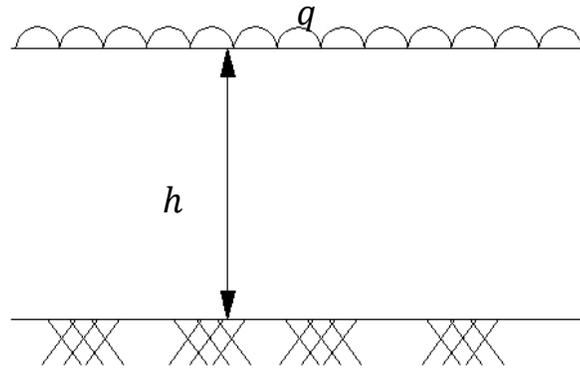


Ilustración 9. Estrato de espesor " h " con una carga uniformemente repartida sobre la superficie.

Para obtener dicha ecuación, se obtiene una aproximada solución la cual es suficientemente precisa para todo propósito práctico. Steinbrenner calculó el asentamiento δ_{z0} de las esquinas de un área rectangular con una carga uniformemente repartida sobre la superficie horizontal de una masa semi-infinita. Después calculó el desplazamiento vertical δ'_{z0} de los puntos localizados a una profundidad " h " debajo de las esquinas y asumiendo que el asentamiento δ_z de las esquinas del área cargada sobre la superficie de un estrato elástico de espesor " h " es igual a la diferencia que se presenta a continuación,

$$\delta_z = \delta_{z0} - \delta'_{z0} \quad (3.18)$$

A partir de la ecuación anterior, Steinbrenner procede a realizar la integración a partir de las dos ecuaciones siguientes. La primera literal de dicha ecuación representa el desplazamiento de la esquina de un área rectangular, la ecuación se presenta a continuación,

$$\delta_{z0} = qy \frac{1 - \mu^5}{E} \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{y} \log \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \log \left(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right) \right]$$

Donde,

x , longitud de un área rectangular.

y , ancho de un área rectangular.

q , carga unitaria.

μ , relación de Poisson.

E , módulo de elasticidad del suelo.

La segunda literal proporciona el desplazamiento vertical de una carga puntual, que para el caso dicha carga es N , como se muestra a continuación (ver [Ilustración 10](#)).

$$\delta'_{z0} = \frac{Q}{2\pi r} \frac{1 + \mu}{E} [2(1 - \mu) + \cos^2 \psi](\sin \psi)$$

Donde,

Q , carga puntual.

r , distancia radial horizontal.

ψ , ángulo entre el vector \overline{aN} y el eje vertical que atraviesa el punto de aplicación.

μ , relación de Poisson.

E , módulo de elasticidad del suelo.

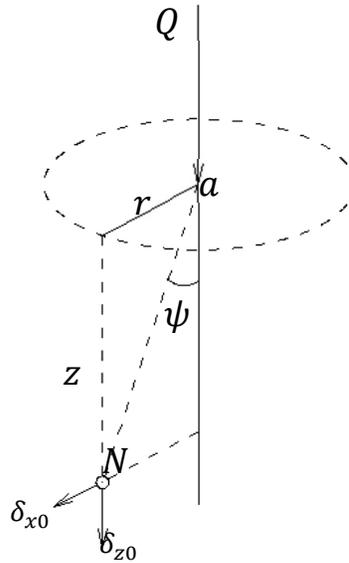


Ilustración 10. Desplazamientos del punto "N" en el interior del sólido semi-infinito (Terzaghi, 1943).

Al realizar dicha integración a partir de la ecuación (3.18), Steinbrenner procedió a obtener la fórmula que se presenta a continuación,

$$\delta_z = \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[y \ln \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{y^2+h^2}}{y(x+A)} + x \ln \frac{(y+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+h^2}}{x(y+A)} \right] + \frac{q(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} h \tan^{-1} \left(\frac{xy}{hA} \right) \quad (3.19)$$

Donde,

$$A = (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2} \quad (3.20)$$

4. Análisis Estructural

Teniendo en cuenta que el análisis estructural es el estudio de las estructuras que consiste en determinar los esfuerzos y las deformaciones a las que se expone la estructura por la acción de agentes externos.

Por lo anterior, las estructuras se definen como los sistemas que soportan las cargas, de esta manera los resultados del análisis se usan para determinar la forma de las estructuras deformadas y verificar si son adecuadas para soportar las cargas para las cuales se han diseñado.

En este capítulo se desarrolla el análisis estructural a través del método de rigideces, el cual se presenta a continuación, teniendo en cuenta que se trata de barras horizontales.

4.1. Método de rigideces

El método de la matriz de rigidez comienza en determinar los desplazamientos en ciertos puntos, más específicamente en los puntos nodales de la estructura y concluye con la obtención de las fuerzas internas. Para que lo anterior sea aplicable, se demuestra tomando como ejemplo un cuerpo elástico, como el mostrado en la [Ilustración 11](#), que se encuentra sometido a un conjunto de fuerza P_u aplicado de manera gradual partiendo desde cero y alcanzando su valor final linealmente.

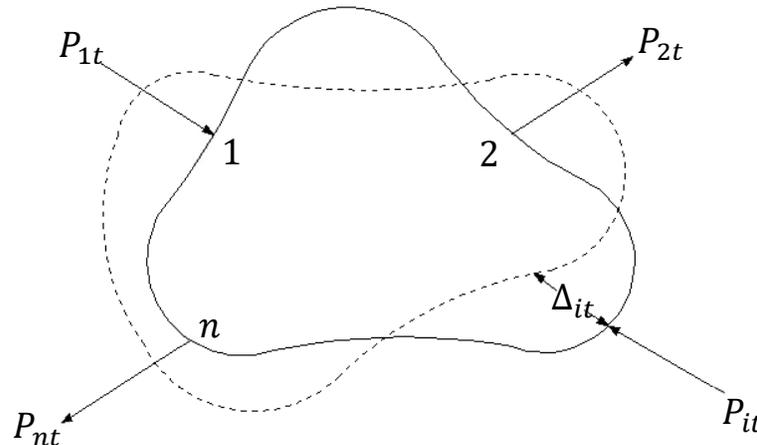


Ilustración 11. Elemento sometido a deformación debido a fuerzas P .

Se representa el desplazamiento del punto i en la dirección de P_u en el instante t por medio de Δ_{it} , por lo tanto, al finalizar el proceso de carga los valores de P_i y Δ_i son los resultados finales de las cargas y los desplazamientos, respectivamente. Lo que ocasiona que el trabajo realizado por dichas fuerzas durante la deformación del cuerpo es el siguiente.

$$U = \frac{1}{2} (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + \dots + P_n\Delta_n) \quad (4.1)$$

Teniendo en cuenta que se introduce una variación a uno de los desplazamientos, que para este caso se considera en Δ_1 ; mediante la regla de

variación en cadena, la variación de la energía de deformación total con respecto a Δ_1 es la siguiente.}

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{1}{2} \left[P_1 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} \Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \Delta_n \right) \right] \quad (4.2)$$

Tomando en cuenta el primer teorema *Castigliano*, el cual sirve para determinar los coeficientes de rigidez de una estructura, se muestra como la ecuación 4.3. Igualando a las ecuaciones (4.2) y (4.3), se obtiene la ecuación (4.4).

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = P_1 \quad (4.3)$$

$$P_1 = \left[\frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} \Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \Delta_n \right] \quad (4.4)$$

Al escribirse en forma matricial, resulta de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \\ \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

El primer miembro de la ecuación anterior representa las fuerzas externas aplicadas al sistema junto con las reacciones, y la matriz columna del segundo miembro representa los desplazamientos de los puntos nodales junto con los desplazamientos de los apoyos. En este caso, si se conocen los elementos $\partial P_i / \partial \Delta_j$ de la matriz cuadrada, la solución de esta ecuación proporciona los desplazamientos Δ_i de los nudos.

Se debe tener en cuenta que la matriz cuadrada de la ecuación (4.5) es simétrica, ello se demuestra utilizando nuevamente el primer teorema *Castigliano*, para que posteriormente se derive. Lo anterior se demuestra a continuación, utilizando dos miembros de la matriz cuadrada de manera general.

$$\frac{\partial P_i}{\partial \Delta_j} = \frac{\partial (\partial U / \partial \Delta_i)}{\partial \Delta_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i}$$

Se procede a realizar el mismo proceso para un segundo término.

$$\frac{\partial P_j}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial(\partial U / \partial \Delta_j)}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j}$$

Por lo anterior presenta una igualdad entre los miembros de la matriz cuadrada, lo que resulta en lo siguiente.

$$\frac{\partial P_i}{\partial \Delta_j} = \frac{\partial P_j}{\partial \Delta_i}$$

Por lo tanto, se demuestra que la matriz cuadra es simétrica, así mismo la ecuación (4.5) se puede reescribir de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

El término $\partial P_i / \partial \Delta_j$ representa la fuerza correspondiente desarrollada en el punto "i" para mantener el cuerpo en equilibrio cuando se introduce un desplazamiento unitario en el punto "j".

Se procede a introducir un desplazamiento Δ_1 en el punto 1, al mismo tiempo los demás puntos donde se aplican cargas se les impide desplazarse. Con respecto a la ecuación (4.6), la fuerza necesaria para introducir el desplazamiento en 1 y las fuerzas requeridas para mantener los otros puntos en su lugar son como se muestran a continuación.

$$P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} \Delta_1 \quad , \quad P_2 = \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} \Delta_1 \quad , \quad P_3 = \frac{\partial P_3}{\partial \Delta_1} \Delta_1 \quad , \dots$$

Para esta situación, si la deflexión Δ_1 introducida es igual a la unidad, este fenómeno se presenta en la [Ilustración 12](#). Las fuerzas presentadas en dicha figura son las de la primera columna de la matriz cuadrada de la ecuación (4.6). Por lo tanto, se designa al elemento $\partial P_i / \partial \Delta_j$ por K_{ij} , la ecuación matricial se reescribe a continuación.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{11} & K_{11} & \cdots & K_{11} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{11} & K_{11} & \cdots & K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A su vez, la ecuación matricial (4.7) se puede escribir de forma abreviada, de la siguiente forma.

$$P = K * \Delta \quad (4.8)$$

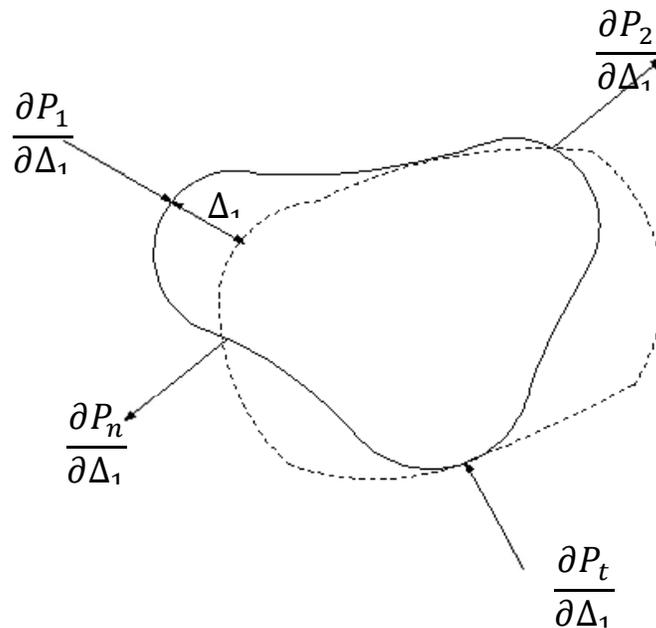


Ilustración 12. Elemento con desplazamiento en el punto 1 y restricción en los demás puntos.

Los elementos mostrados en la ecuación (4.8) son P , el vector de fuerza generalizada, K , la matriz de rigidez de la estructura y Δ , el vector generalizado del nudo. Con lo anteriormente presentado, la matriz de rigidez K está formado por las matrices de rigidez de los elementos individuales de la estructura.

4.1.1. Elaboración de la matriz de rigidez

Los elementos con los que está formada la matriz de rigidez son las rigideces de los nudos, las cuales representan los elementos de la diagonal principal de K y los elementos restantes representan las rigideces de los elementos individuales de dicha estructura. Por lo tanto, las rigideces de los

nudos son construidas a partir de las rigideces de los elementos unidos en ese nudo, por consiguiente, el ensamblaje de K es la colocación de las rigideces de los elementos en su correspondiente sitio una vez que han sido transformadas al sistema general de coordenadas.

Antes de proseguir es conveniente establecer la convención de signos, para el caso de una barra horizontal, por tanto, los giros se consideran positivos en sentido anti-horario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamientos horizontales son positivos si van hacia la izquierda, los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia arriba y las fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha.

Con lo anteriormente detallado, el método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait, 1970):

- 1) Se determinan los elementos mecánicos al momento de empotrar la estructura.
- 2) Se liberan los nudos de la estructura y se hallan los elementos mecánicos debidos a desplazamientos lineales y angulares.
- 3) Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nodos donde se encuentre desplazamientos diferentes de cero.
- 4) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura.
- 5) Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

La ecuación general de equilibrio de la estructura es

$$\underline{K}\delta + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (4.9)$$

Donde:

\underline{K} , es la matriz de rigideces de la estructura.

δ , es el vector de cargas de desplazamientos.

\underline{P}^e , es el vector de cargas empotradas.

\underline{P}^c , es el vector de cargas concentradas

Como se hizo mención, la matriz de rigideces de la estructura se obtiene mediante la suma de las matrices de rigidez de todos los elementos que conforman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de cada una de las barras de la estructura.

Por consiguiente, se procede a la obtención de la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos, sometido a una carga uniformemente repartida, como se muestra en la [Ilustración 13](#). Para ello, se procede a someter a la estructura a diferentes procesos en cada nudo.

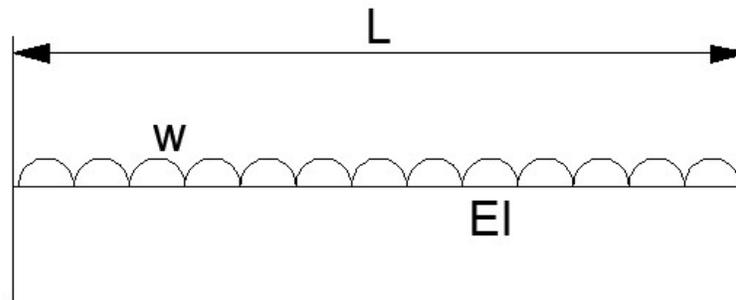
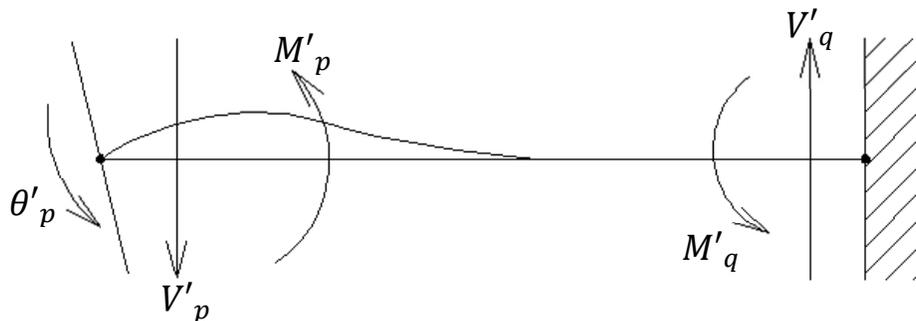


Ilustración 13. Barra "m" con carga uniformemente repartida.

En el extremo izquierdo de la barra "m" se aplica un giro θ'_p y la figura se empotra del lado derecho, en la [Ilustración 14](#) se presentan los elementos mecánicos ocasionados por dicho giro.



$$M'_p = \left(\frac{4EI}{L}\right) \theta'_p$$

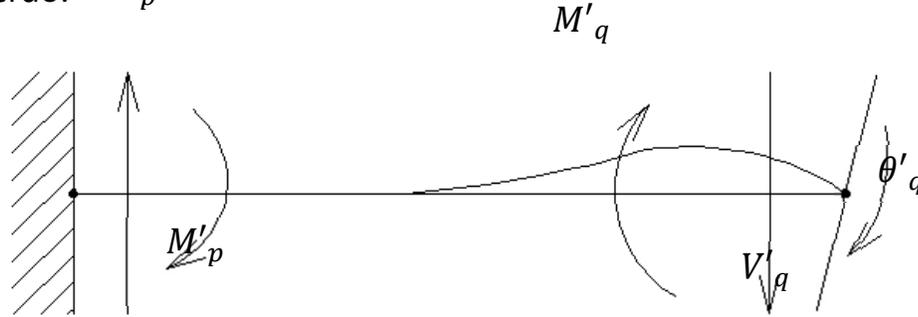
$$V'_p = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \theta'_p$$

$$M'_q = \left(\frac{2EI}{L}\right) \theta'_p$$

$$V'_q = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \theta'_p$$

Ilustración 14. Barra "m" con giro en el extremo izquierdo.

En la Ilustración 15 se muestra los elementos mecánicos que ocasiona un giro θ'_q en el extremo derecho de la estructura y que se encuentra empotrado del lado izquierdo. V'_p



$$M'_p = \left(\frac{2EI}{L}\right) \theta'_q$$

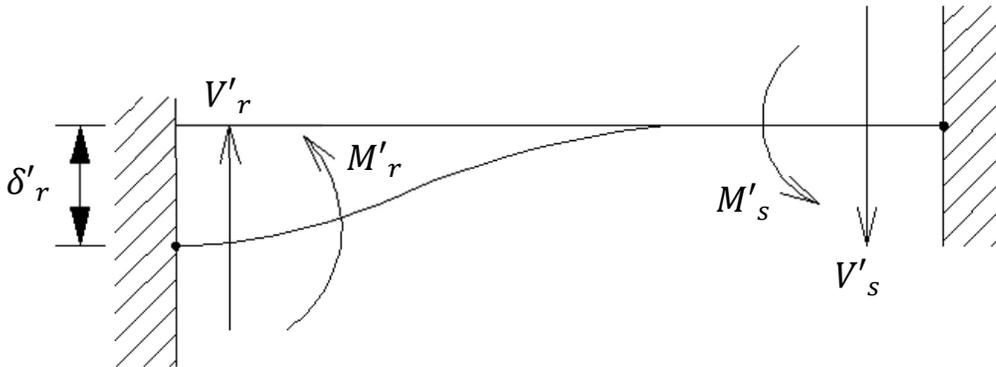
$$M'_q = \left(\frac{4EI}{L}\right) \theta'_q$$

$$V'_p = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \theta'_q$$

$$V'_q = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \theta'_q$$

Ilustración 15. Barra "m" con giro en el extremo derecho.

Se aplica un desplazamiento vertical δ'_r en el nudo izquierdo, los elementos mecánicos generados por dicho desplazamiento se presentan en la Ilustración 16.



$$M'_r = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \delta'_r$$

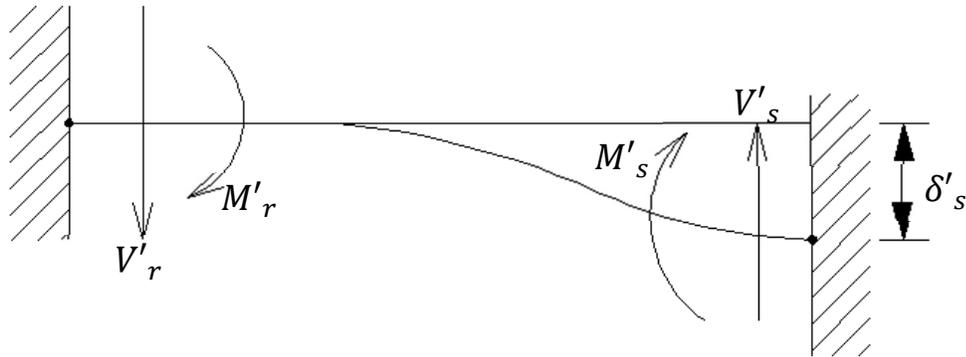
$$M'_s = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \delta'_r$$

$$V'_r = \left(\frac{12EI}{L^3}\right) \delta'_r$$

$$V'_s = \left(\frac{12EI}{L^3}\right) \delta'_r$$

Ilustración 16. Barra "m" con desplazamiento en extremo izquierdo.

Ahora, para el nudo derecho se aplica un desplazamiento vertical δ'_s , los respectivos elementos mecánicos se presentan en la [Ilustración 17](#).



$$M'_r = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \delta'_s$$

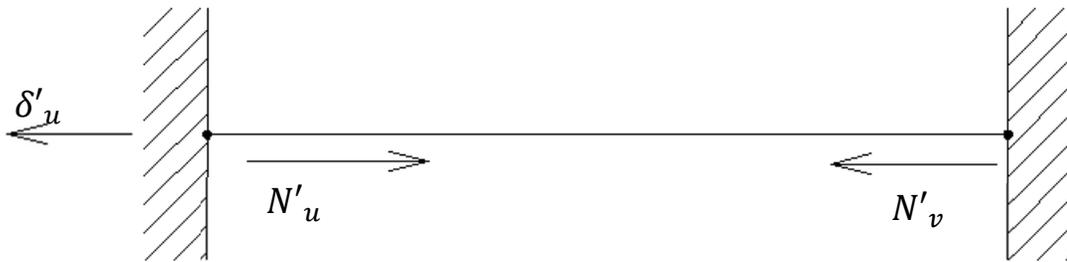
$$M'_s = \left(\frac{6EI}{L^2}\right) \delta'_s$$

$$V'_r = \left(\frac{12EI}{L^3}\right) \delta'_s$$

$$V'_s = \left(\frac{12EI}{L^3}\right) \delta'_s$$

Ilustración 17. Barra "m" con desplazamiento en extremo izquierdo.

Para la misma barra "m", se le aplica un desplazamiento horizontal δ'_u en el nudo izquierdo provocando los elementos mecánicos se presentan en la [Ilustración 18](#).



$$N'_u = \left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_u$$

$$N'_v = \left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_u$$

Ilustración 18. Barra "m" con desplazamiento en el nudo izquierdo.

Por consiguiente, se le aplica a la barra "m" un desplazamiento horizontal δ'_v , para este caso en el nudo derecho, obteniendo los elementos mecánicos mostrados en la [Ilustración 19](#).

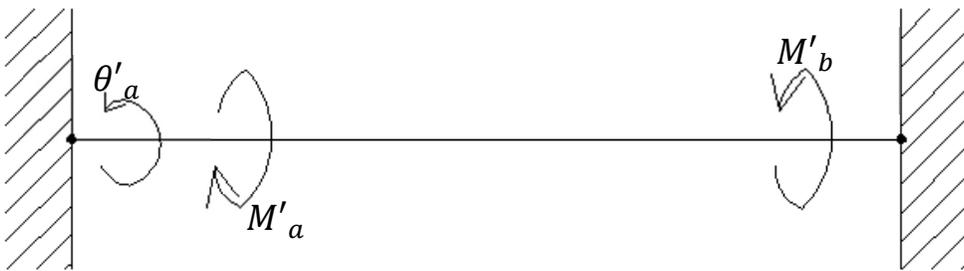


$$N'_u = \left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_v$$

$$N'_v = \left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_v$$

Ilustración 19. Barra "m" con desplazamiento en el nudo derecho.

Por último, en la [Ilustración 20](#) se presenta los elementos mecánicos ocasionados por un desplazamiento angular θ'_a para el lado izquierdo.



$$M'_a = \left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_a$$

$$M'_b = \left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_a$$

Ilustración 20. Barra "m" con desplazamiento en el nudo izquierdo.

De forma análoga, se aplica un desplazamiento angular θ'_b pero en el nudo derecho de la estructura, por lo que en la [Ilustración 21](#) se presentan los elementos mecánicos.



$$M'_a = \left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_b$$

$$M'_b = \left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_b$$

Ilustración 21. Barra “m” con desplazamiento en el nudo derecho.

Por lo tanto, una vez desarrollados los elementos mecánicos de la barra “m” individualmente en cada caso, se pueden representar en las siguientes ecuaciones.

$$M'_p = \frac{wL^2}{12} + \left(4 \frac{E^*I}{L}\right) \theta_p + \left(2 \frac{E^*I}{L}\right) \theta_q - \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \delta_r + \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \delta_s \quad (4.10)$$

$$M'_q = -\frac{wL^2}{12} + \left(2 \frac{E^*I}{L}\right) \theta_p + \left(4 \frac{E^*I}{L}\right) \theta_q - \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \delta_r + \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \delta_s \quad (4.11)$$

$$V'_r = -\frac{wL}{2} - \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \theta_p - \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \theta_q + \left(12 \frac{E^*I}{L^3}\right) \delta_r - \left(12 \frac{E^*I}{L^3}\right) \delta_s \quad (4.12)$$

$$V'_s = -\frac{wL}{2} + \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \theta_p + \left(6 \frac{E^*I}{L^2}\right) \theta_q - \left(12 \frac{E^*I}{L^3}\right) \delta_r + \left(12 \frac{E^*I}{L^3}\right) \delta_s \quad (4.13)$$

$$N'_u = \left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_u - \left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_v \quad (4.14)$$

$$N'_v = -\left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_u + \left(\frac{AE}{L}\right) \delta'_v \quad (4.15)$$

$$M'_a = \left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_a - \left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_b \quad (4.16)$$

$$M'_b = -\left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_a + \left(\frac{GI_t}{L}\right) \theta'_b \quad (4.17)$$

En las ecuaciones (4.16) y (4.17) se debe tener en cuenta que el cálculo del momento polar de inercia debido a la torsión, el cual se calcula como se presenta en la siguiente ecuación.

$$I_t = \frac{hb^3}{3} \left[1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left(\frac{b}{h}\right)^5 \right]$$

Para el caso de una viga de sección rectangular se debe de tomar en cuenta que $h \geq b$.

Con las ecuaciones anteriores, se procede a ensamblar la matriz de rigidez, como se presenta a continuación.

$$\underline{K} = \begin{matrix} & \theta'_p & \theta'_q & \delta'_r & \delta'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_p & \theta'_q & \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 4 \frac{E^*I}{L} & 2 \frac{E^*I}{L} & -6 \frac{E^*I}{L^2} & 6 \frac{E^*I}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \frac{E^*I}{L} & 4 \frac{E^*I}{L} & -6 \frac{E^*I}{L^2} & 6 \frac{E^*I}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 \frac{E^*I}{L^2} & -6 \frac{E^*I}{L^2} & 12 \frac{E^*I}{L^3} & -12 \frac{E^*I}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 \frac{E^*I}{L^2} & 6 \frac{E^*I}{L^2} & -12 \frac{E^*I}{L^3} & 12 \frac{E^*I}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & -\frac{GI_t}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & \frac{GI_t}{L} & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{array} \end{matrix} \quad (4.18)$$

Como se presentó en la ecuación (4.9), los elementos restantes son:

- Vector de desplazamientos en la barra.

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

- Vector de cargas empotradas.

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} \frac{wL^2}{12} - \left(\frac{11}{192}\right)L^2r_1 - \left(\frac{5}{192}\right)L^2r_2 \\ -\frac{wL^2}{12} + \left(\frac{5}{192}\right)L^2r_1 + \left(\frac{11}{192}\right)L^2r_2 \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{13}{32}\right)Lr_1 + \left(\frac{3}{32}\right)Lr_2 \\ -\frac{wL}{2} + \left(\frac{3}{32}\right)Lr_1 + \left(\frac{13}{32}\right)Lr_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

5. Interacción Estructura-Suelo Friccionante

Comúnmente se tienen contempladas las estructuras elaboradas sobre suelo lacustre o suelo cohesivo, sin embargo, ello no demerita el hecho de que la resolución de los problemas de interacción se limite. Por lo cual, el análisis de problemas debe atender los distintos efectos que presentan las construcciones en distintos tipos de sitio, ya que estos no se elaboran en sitios iguales, dado que el suelo a lo largo de su extensión y entendimiento no es el mismo en todo lugar, más si semejante. Con lo anterior, los problemas de interacción cuentan con relevancia en cualquier lugar donde la obra en cuestión se llegue a realizar.

En la unión de la estructura y el suelo con el que se llega a tratar se presentan desplazamientos debidos a las cargas que transmite la cimentación, por tanto, los esfuerzos y deformaciones en la superficie de contacto presentarán una cierta forma y esta dependerá de la rigidez de la estructura de cimentación, la deformabilidad del subsuelo y la distribución de cargas que se apliquen sobre dicha estructura.

Por tanto, la mayoría de los métodos de interacción estática se basan en el principio de que existe una compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el suelo, esto quiere decir que en el contacto cimiento-terreno los desplazamientos tanto de la subestructura como los del terreno son iguales.

Por ejemplo, en 1956 Samuel Chamecki, trata el caso de una viga con tres apoyos, desplantada sobre arcillas compresibles; Chamecki resuelve el problema al utilizar lo que llamó coeficientes de transferencia de carga, dichos coeficientes son equivalentes a la matriz de rigideces de la estructura, además de considerar una arcilla normalmente consolidada de la cual se conoce su índice de compresibilidad. Estableciendo la compatibilidad de deformaciones

entre viga y suelo, donde resuelve el problema en forma explícita (Demeneghi, 1991).

5.1. Definición de Interacción Estructura-Suelo

La interacción estructura-suelo es aquella que al calcular las deformaciones del terreno de cimentación toma en cuenta la rigidez de la estructura. Por tanto, esta metodología se basa en el principio de que el contacto cimiento-terreno, los desplazamientos de la subestructura como los del terreno son iguales, es decir, que existe compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo (Demeneghi *et al*, 2003).

El procedimiento de cálculo para la interacción estructura-suelo consiste en tres pasos:

- 1) Se calculan los desplazamientos de la estructura,
- 2) Se calculan los desplazamientos del terreno de cimentación y
- 3) Se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

Por lo anterior, se debe tomar en cuenta que los cimientos toman un papel importante en la construcción de la obra, debido a que estos son los que distribuyen las cargas de la estructura al suelo, además, los materiales que lo constituyen deben de tener la capacidad suficiente para soportarlas sin sufrir deformaciones importantes.

Lo que frecuentemente fue usado en el análisis de asentamientos es la suposición de que los soportes de estructuras estáticamente indeterminadas poseen infinita facilidad de adaptarse ellos mismos a las deformaciones de la cimentación. Con lo que continuamente ocasionaba que varios miembros le dieran considerable rigidez a la estructura, lo que ocasionó, en su momento, diferentes asentamientos de los calculados bajo la suposición anterior.

Se debe de tomar en cuenta que la estimación de los desplazamientos verticales y horizontales en la masa de suelo cuando se somete a un incremento de esfuerzo, se usa para la determinación de las propiedades de esfuerzo-deformación. De tal manera, en la interface de la estructura de cimentación y el suelo se originan desplazamientos debida a las cargas que

transmite la cimentación dando lugar a desplazamientos totales y diferenciales (Zeevaert 1980).

De tal manera, la interacción entre la estructura de cimentación y el suelo consistirá en encontrar un sistema de reacciones que, aplicadas simultáneamente a la estructura de cimentación y a la masa del suelo, produzcan la misma configuración de desplazamientos diferenciales entre los dos elementos. Para lograr lo anterior, será necesario basarse por un lado en las leyes físicas que rigen el comportamiento de la masa del suelo y por el otro en los procedimientos nominales de cálculo estructural en la determinación de fuerzas y deformaciones, tomando en cuenta las propiedades mecánicas del material en el que será construida la estructura de cimentación.

5.2. Rigidez relativa del suelo

La incertidumbre que existe cuando las estructuras de cimentación se construyen de concreto armado es conocer su módulo de deformación unitaria, el cual es bien sabido aumenta con el tiempo, (Zeevaert, 1973). Además, la transmisión de las cargas del edificio a la masa de suelo, plantea un complejo problema de interacción entre los tres elementos implicados: estructura, cimentación y masa de suelo. Por tales motivos, la rigidez de la estructura de cimentación y la contribución que ésta le pueda aportar a la superestructura es muy importante. Tal situación implica tener que conocer de antemano la geometría y las propiedades de los elementos que la conforman.

Junto con la rigidez de la cimentación, la propia rigidez de la estructura a cimentar inducirá también restricciones al movimiento y a la respuesta asociada de la masa de suelo. En el caso más general, cuando el suelo se tienda a asentar por efecto de la presión aplicada, la estructura, en función de su rigidez, redistribuirá sus esfuerzos, modificando a su vez las solicitaciones sobre los cimientos y el suelo. La situación de equilibrio final dependerá por tanto de la rigidez relativa del conjunto suelo-cimiento-estructura.

La transmisión de las cargas del edificio al terreno de cimentación plantea un problema complejo entre los tres elementos implicados: estructura, cimentación y suelo. Los principales factores a considerar en dicho proceso de

interacción serán el tipo y características del terreno, la forma y dimensiones de la cimentación y, la rigidez relativa suelo-estructura y suelo-cimentación.

Cuando el terreno tienda a asentarse a causa de las presiones aplicadas, la estructura, en función de su rigidez, redistribuirá los esfuerzos modificando con ello las solicitaciones sobre los cimientos y el suelo, esto aplica para el caso general. Se debe tomar en cuenta que la rigidez de la estructura a cimentar inducirá también restricciones al movimiento y a la respuesta asociada del terreno.

Al tomarse en cuenta una cimentación infinitamente flexible, tomando en cuenta que dicho cimiento se encuentra apoyado directamente sobre un suelo cohesivo totalmente saturado, sobre la cual se aplica una carga uniforme. Por la aplicación de la carga, tanto en el suelo como en la cimentación experimentan un asentamiento que se extiende más allá del área cargada hacia ambos lados de la misma hasta una cierta distancia; en este caso la reacción es uniforme, es decir, el diagrama de reacción del terreno será igual al de la carga (ver [Ilustración 22](#)).

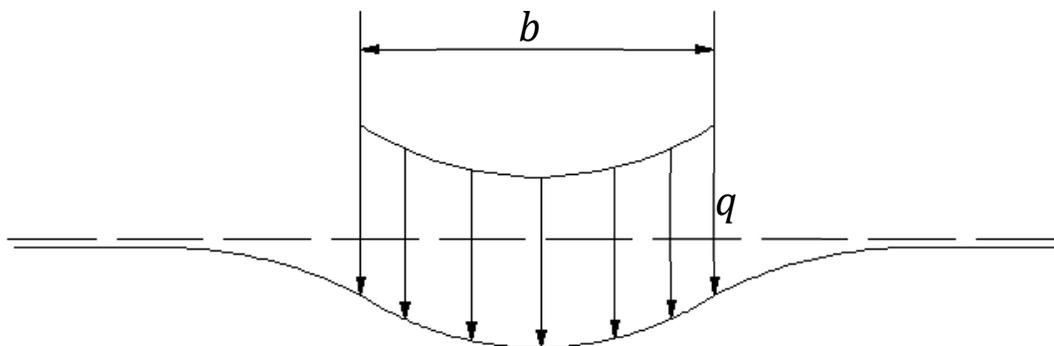


Ilustración 22. Asentamiento debido a una carga uniforme sobre suelos cohesivos (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003).

Si ahora el mismo cimiento se apoya sobre un suelo friccionante, el asentamiento se distribuye de tal manera que la reacción del suelo es uniforme y de la misma forma, el diagrama de reacción del terreno es igual al de la carga, debido a que la cimentación es infinitamente flexible (ver [Ilustración 23](#)).

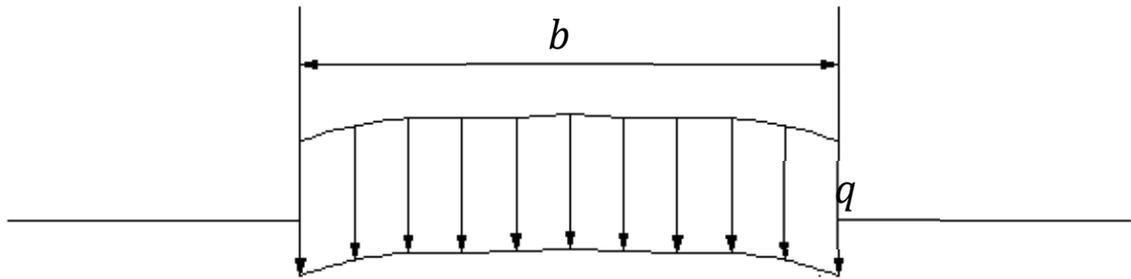


Ilustración 23. Asentamiento debido a una carga uniforme sobre suelos friccionantes (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003).

Si por el contrario, la zapata fuera infinitamente rígida, igualmente apoyada sobre una arcilla totalmente saturada, el asentamiento sería uniforme como se muestra en la [Ilustración 24](#), además el diagrama de reacción del suelo a largo plazo toma la forma indicada en dicha ilustración. Si el mismo cimiento se apoya sobre un suelo friccionante, el diagrama de reacción del suelo tendrá la forma de la [Ilustración 25](#).

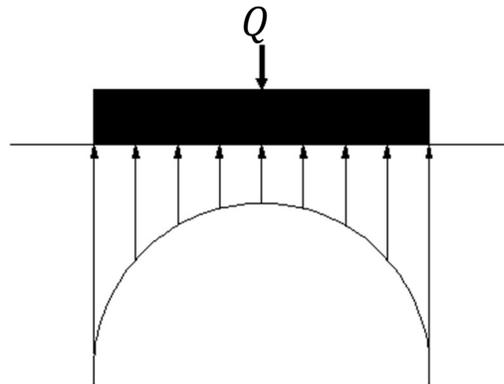


Ilustración 24. Presión de contacto en la base de una cimentación totalmente rígida en la superficie de una masa de arcilla totalmente saturada (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003).

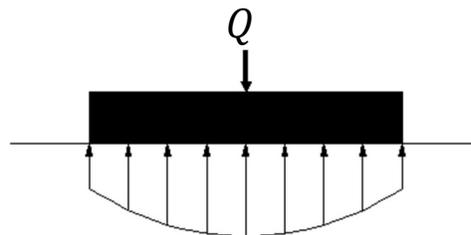


Ilustración 25. Presión de contacto en la base de una cimentación totalmente rígida en la superficie de una masa de suelo friccionante (Sowers, 1962 citado por Demeneghi, 2003).

Por lo tanto, el asentamientos y de reacciones del terreno dependen de la clase de suelo y de la rigidez de la estructura. De manera práctica, una cimentación puede quedar entre los dos casos extremos señalados, pues su rigidez no necesariamente es nula o infinita.

5.3. Interacción estática en zapata corrida

Para la evaluación de una zapata corrida en el ámbito de la interacción estructura-suelo friccionante se procede a considerar un marco estructural con dicha cimentación que se presenta en la [Ilustración 26a](#), en el cual se trata de obtener los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno de cimentación (ver [Ilustración 26, b y c](#)).

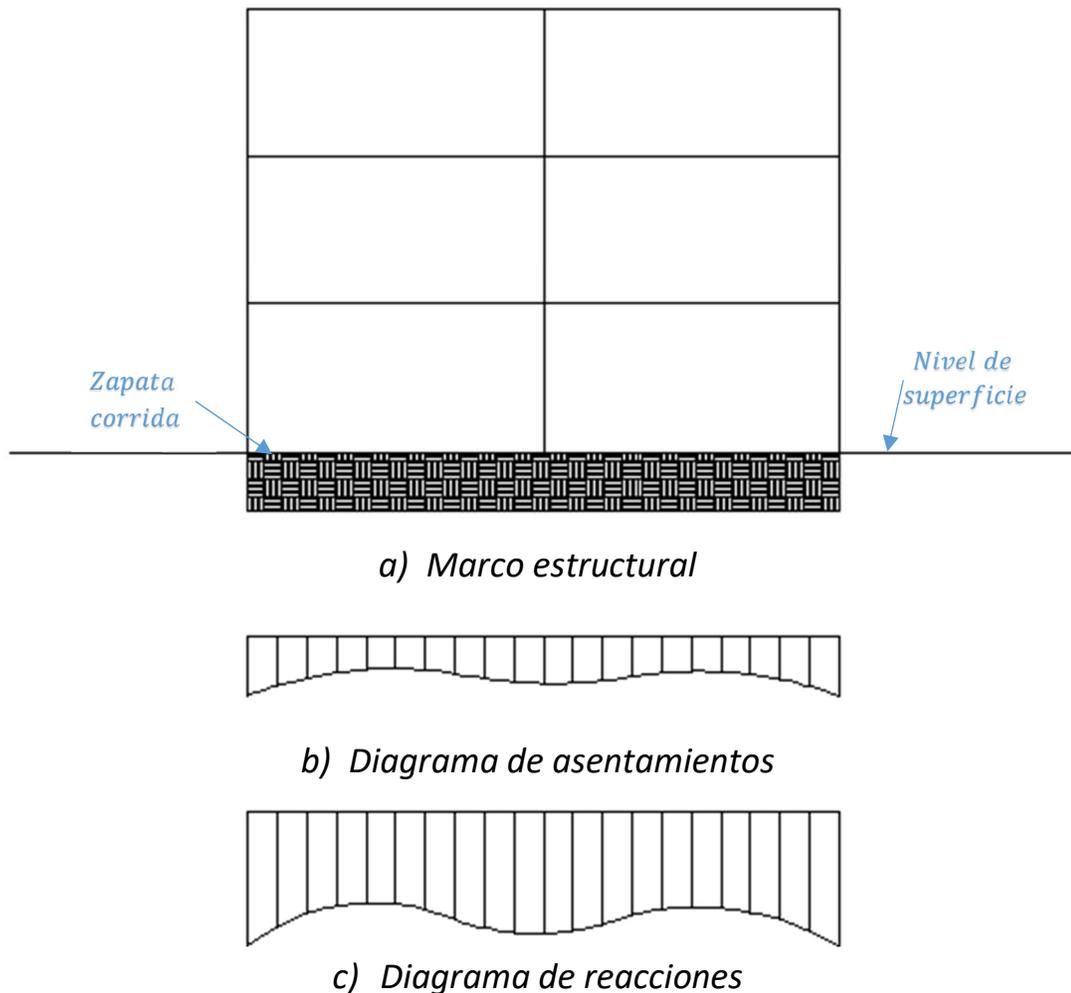
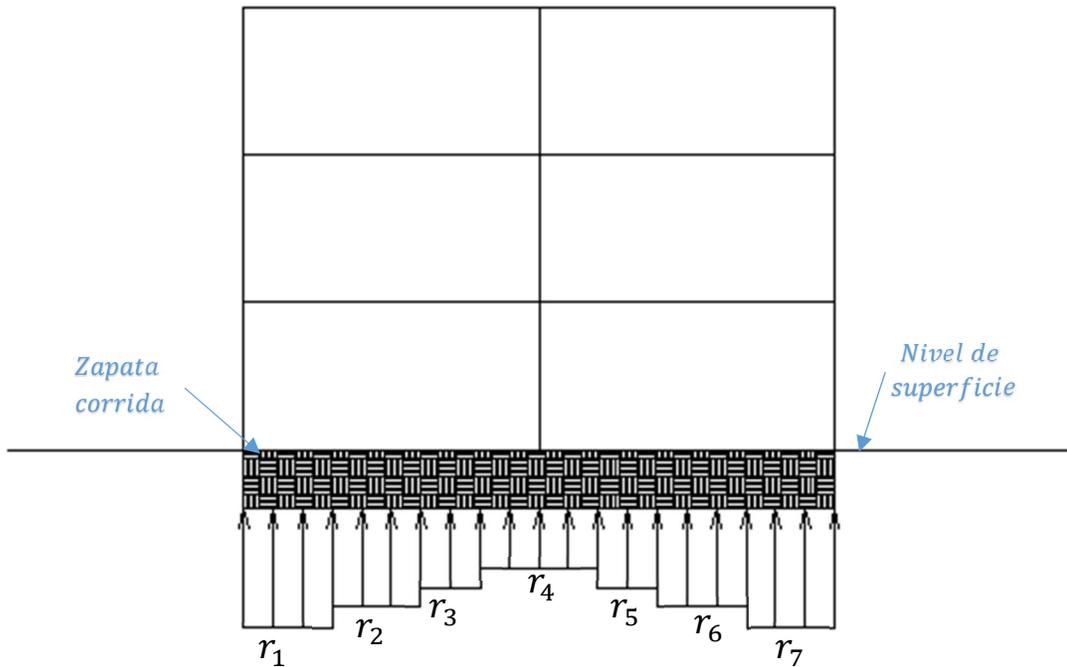


Ilustración 26. Marco estructural con cemento a base de zapata corrida (Demeneghi, 2003).

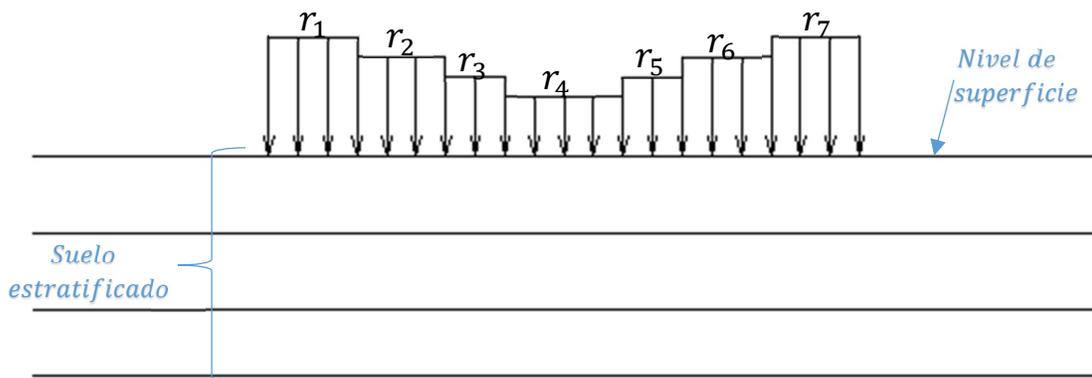
Para el caso general la forma del diagrama de reacciones del suelo es diferente de una reacción uniforme, como se muestra en la ilustración anterior en el

inciso c. Para simplificar el problema se procede a sustituir la curva de reacción del terreno por una serie de reacciones uniformes r_1, r_2, \dots, r_n , como se representa en la [Ilustración 27a](#). Por lo tanto, el análisis estructural se lleva a cabo utilizando el método de rigideces descrito anteriormente, considerando las reacciones r_i como incógnitas.

Para proceder a ejecutar la tercera ley de Newton, se aplican las cargas r_i sobre el terreno como se muestra en la [Ilustración 27b](#), y se obtienen los hundimientos de éste en función de las reacciones r_i . El problema de interacción se resuelve al establecer la compatibilidad de deformaciones entre suelo y estructura, es decir, al estar el suelo en contacto con la estructura de cimentación, las deformaciones de ambos medios deben ser iguales.



a) Reacciones del terreno



b) Cargas sobre el terreno

Ilustración 27. Cargas sobre la estructura y el terreno (Demeneghi, 2003).

5.4. Deformación del suelo

En el cálculo de las deformaciones en el suelo se asume que las cargas que transmite la estructura al terreno de cimentación son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, como se ha comentado, por la tercera ley de Newton (Demeneghi, 1996).

Por lo tanto, el cálculo de deformaciones del terreno se realiza por medio de dichas cargas. Para ello, se procede a considerar una reacción r_k por unidad de longitud, en kN/m , la presión vertical vale $\frac{r_k d_k}{a_k}$, donde d_k y a_k son la longitud y el área en las que actúa dicha carga respectivamente (ver [Ilustración 28](#)).

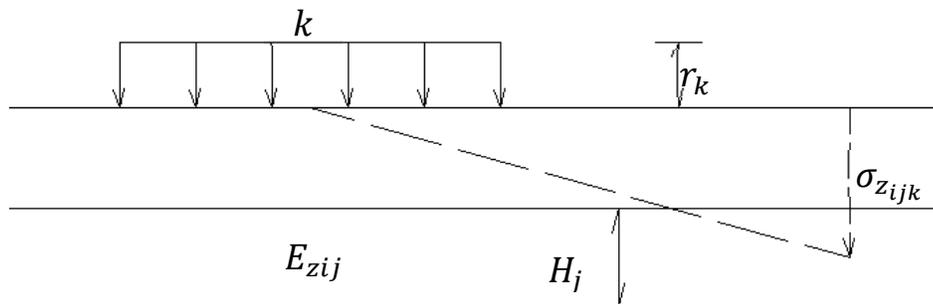


Ilustración 28. Cálculo de deformaciones mediante la aplicación de reacciones (Demeneghi, 2003).

Por consiguiente, se calculan los esfuerzos normales ocasionados por la carga r_k . De tal forma la carga vertical vale,

$$\sigma_{zijk} = I_{zijk} \frac{r_k d_k}{a_k}$$

Donde el término I_{zijk} , es el valor de influencia vertical, el cual es igual al esfuerzo normal vertical en el punto ij , producida por una presión unitaria actuando en el área a_k . De tal forma, el esfuerzo normal vertical debido a todas las cargas r_k que trabajan en la superficie se definen mediante la siguiente ecuación,

$$\sigma_{zij} = \sum_{k=1}^{n_r} I_{zijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (5.1)$$

Cabe aclarar que la ecuación anterior atiende a la componente vertical, por lo que de forma análoga, los esfuerzos horizontales para las cargas restantes se resuelve con las siguientes ecuaciones,

$$\sigma_{xij} = \sum_{k=1}^{n_r} I_{xijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (5.2)$$

Los valores de influencia son los que se presentan como I_{xijk} y I_{yijk} , los cuales son los esfuerzos horizontales en el punto (i, j) , producidos por la carga r_k actuando en la superficie. Además, sumando la deformación bajo el punto i de un estarto de suelo de espesor H_j , la cual se obtiene mediante la siguiente ecuación (ver [Ilustración 29](#)),

$$\delta_{ij} = \left(\frac{H_j}{E_{ij}} \right) [\sigma_{zij} - \nu(\sigma_{xij} + \sigma_{yij})] \quad (5.4)$$

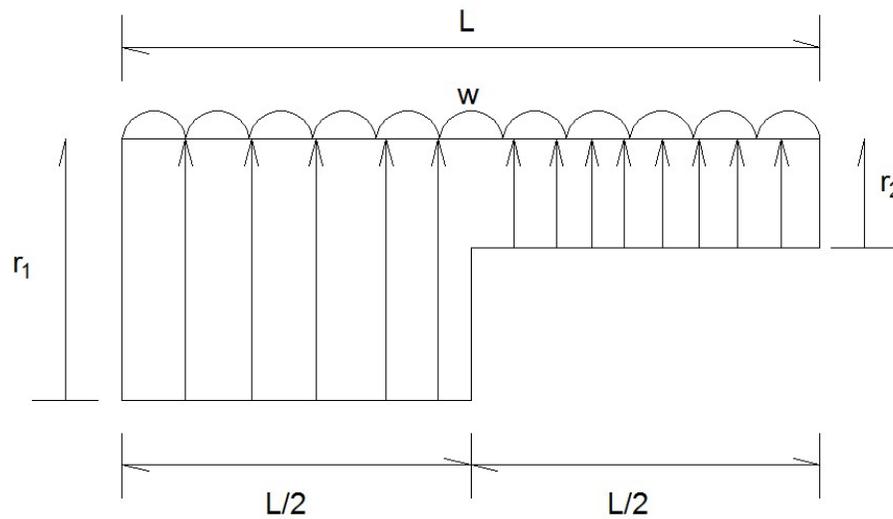


Ilustración 29. Barra de cimentación con dimensiones y cargas (Demeneghi, 2003).

Donde E_{ij} es el módulo de deformación del suelo y ν la relación de Poisson. De tal forma se procede a sustituir las ecuaciones 5.1, 5.2 y 5.3 en la ecuación anterior, se obtiene lo siguiente,

$$\delta_{ij} = \left(\frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{n_r} [I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk})] \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (5.5)$$

Donde n_r es el número total de cargas r_k . Para esta situación se tiene la siguiente ecuación,

$$I_{ijk} = I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk}) \quad (5.6)$$

Por lo tanto, al sustituir la ecuación anterior en la ecuación 5.5, se obtiene lo siguiente,

$$\delta_{ij} = \left(\frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (5.7)$$

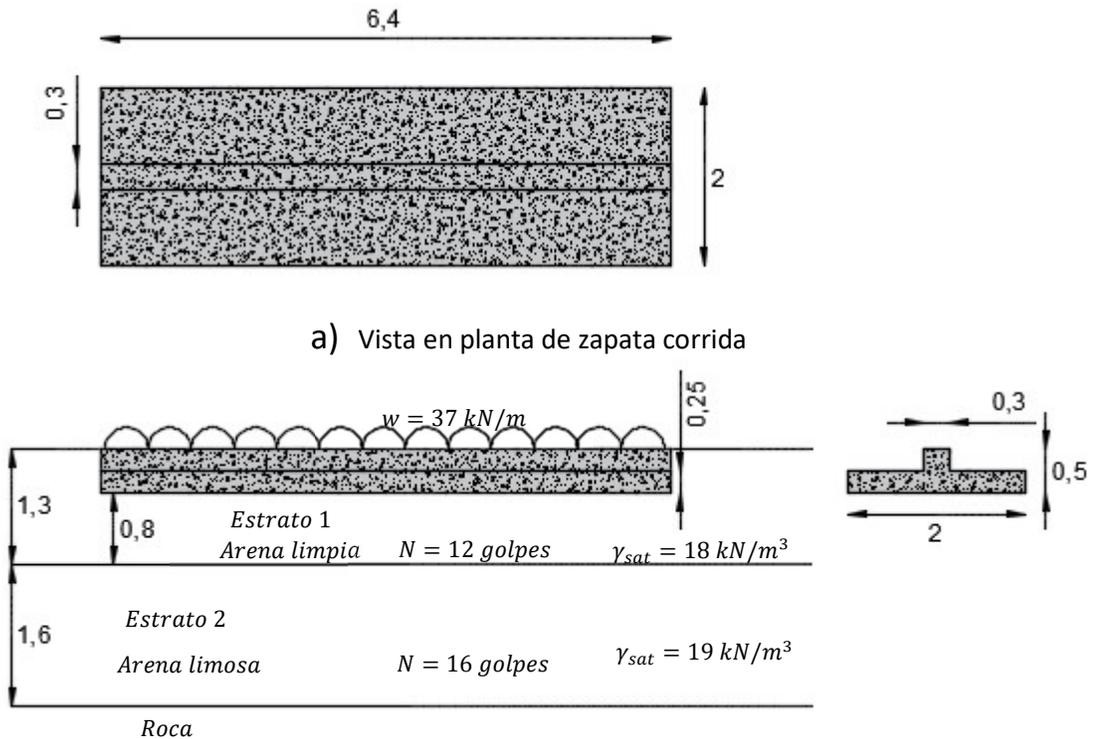
Tomando en cuenta todos los estratos de subsuelo, y una posible deformación previa denominada δ_{0i} , la deformación del punto i se obtiene por medio de la ecuación siguiente,

$$\delta_{ij} = \delta_{0i} + \sum_{j=1}^{n_e} \left(\frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} \frac{r_k d_k}{a_k} \quad (5.8)$$

Donde n_e es el número de estratos donde dicha cimentación se ubica. Por lo tanto, los hundimientos del terreno resultan en función de las cargas r_k .

6. Ejemplo de aplicación

Para el ejemplo de aplicación se procede a tomar en cuenta una cimentación a base de una zapata corrida, como se presenta a continuación, ver [Ilustración 30](#).



a) Vista en planta de zapata corrida

b) Vistas de perfil y frontal respectivamente de zapata corrida, con estratificación de subsuelo [Ilustración 30. Zapata corrida, las dimensiones se encuentran en metros.](#)

6.1. Cálculo de esfuerzos normales sobre cimentación

El cálculo de esfuerzos se realiza mediante la ecuación siguiente de Dany (1985) para el esfuerzo en dirección z junto con las ecuaciones de Dashkó y Kagán (1980) para los ejes restantes x y y .

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{x^2+z^2} + \frac{1}{y^2+z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right] \quad (6.1)$$

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{xyz}{(y^2+z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1-2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{xB}{yz} \right) \right] \quad (6.2)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{xyz}{(x^2+z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1-2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right] \quad (6.3)$$

$$B = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.4)$$

Donde,

q , es la suma de fuerzas verticales entre el área de la cimentación.

x ; y , son las dimensiones de la cimentación, como se presenta en la [Ilustración 31](#).

z , es la profundidad a la que se calcula dicho esfuerzo.

ν , es la relación de Poisson para cada estrato.

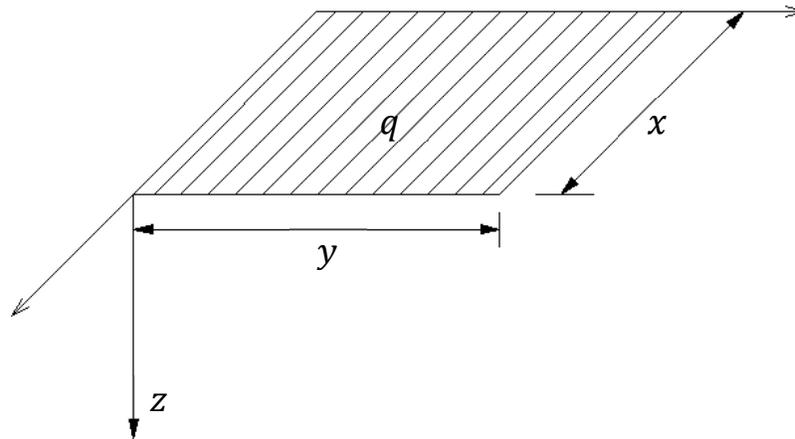


Ilustración 31. Representación de dimensiones sobre una cimentación cualquiera.

Primeramente se obtiene la suma de fuerzas verticales sobre la cimentación, las cuales para el problema dado se presentan a continuación (ver [Ilustración 32](#)).

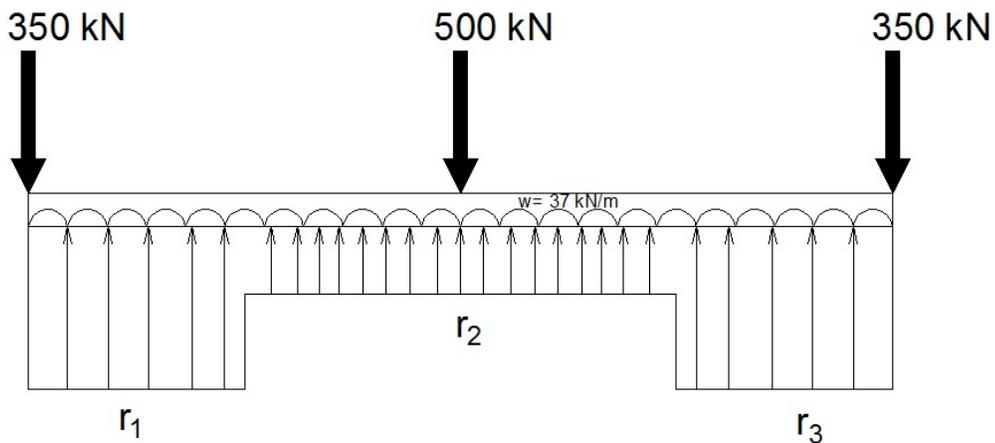


Ilustración 32. Cargas insertadas en la zapata corrida.

Por lo tanto,

$$\sum F_v = 350 + 350 + 500 + (37 * 6.4) = 1437 \text{ kN}$$

De tal manera que la carga q resulta de la siguiente forma,

$$q = \frac{\sum F_v}{\text{Area de cimentación}} = \frac{1437 \text{ kN}}{2 \text{ m} * 6.4 \text{ m}} = 112.3 \text{ kPa}$$

Las ecuaciones 6.1, 6.2 y 6.3 se emplean en una esquina cargada de un rectángulo, por lo que las dimensiones que se emplean corresponden a lo establecido en la [Ilustración 31](#),

$$x = 1.0 \text{ m}$$

$$y = 3.2 \text{ m}$$

$$z_1 = 0.4 \text{ m}$$

$$z_2 = 1.6 \text{ m}$$

La literal z varía por el estrato donde se pretende obtener los esfuerzos. Se procede a obtener B con la ecuación 6.4, para ambos estratos,

$$B_1 = 3.376 \text{ m}$$

$$B_2 = 3.715 \text{ m}$$

Se procede a obtener la relación de Poisson, para iniciar con ello se debe obtener el ángulo de fricción de cada material. Para la obtención de los parámetros requeridos, se tiende a recurrir a correlaciones con ensayos de penetración estándar (SPT).

Dichas correlaciones se toman de los trabajos realizados por Meyerhof (1956), para la arena limpia el ángulo de fricción interna se obtiene de la siguiente ecuación,

$$\phi = 25.74 + 0.395N - 0.0019N^2 \quad (6.5)$$

Para la arena limosa se utiliza lo siguiente,

$$\phi = 27.33 + 0.225N - 0.000833N^2 \quad (6.6)$$

Sustituyendo los correspondientes números de golpes en cada ecuación, se obtiene los siguientes resultados,

$$\phi_{arena\ limpia} = 25.74 + 0.395(12) - 0.0019(12)^2 = 30.206^\circ$$

$$\phi_{arena\ limosa} = 27.33 + 0.225(16) - 0.000833(16)^2 = 30.716^\circ$$

Con los respectivos ángulos de fricción interna se procede a hacer uso de una variante de la ecuación del coeficiente de presión en reposo, que se muestra a continuación,

$$K_0 = (1 - \sin \phi)(OCR)^{\sin \phi} \quad (6.7)$$

Para finalizar, se hace uso de la siguiente ecuación para la obtención de la relación de Poisson en función del coeficiente de presión en reposo,

$$\nu = \frac{K_0}{1+K_0} \quad (6.8)$$

Los datos que se obtienen al sustituir en las respectivas ecuaciones anteriores, son las siguientes,

$$K_{0\ arena\ limpia} = (1 - \sin 30.206^\circ)(1)^{\sin 30.206^\circ} = 0.497$$

$$K_{0\ arena\ limosa} = (1 - \sin 30.716^\circ)(1)^{\sin 30.716^\circ} = 0.489$$

$$\nu_{arena\ limpia} = \frac{(0.497)}{1 + (0.497)} = 0.332$$

$$\nu_{arena\ limosa} = \frac{(0.489)}{1 + (0.489)} = 0.329$$

Por lo tanto solo queda realizar la sustitución de los elementos obtenidos en las ecuaciones 6.1 a 6.3, recordando multiplicar cada esfuerzo por cuatro. Los resultados obtenidos para cada estrato son los que se presentan a continuación:

Para el primer estrato:

$$\sigma_z = \frac{112.25}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{(1)^2 + (0.4)^2} + \frac{1}{(3.2)^2 + (0.4)^2} \right) \frac{(1)(3.2)(0.4)}{3.376} + \tan^{-1} \frac{(1)(3.2)}{(0.4)(3.376)} \right]$$

$$\sigma_{z\ arena\ limpia} = (4)(27.418) = 109.67\ kPa$$

$$\sigma_x = \frac{112.25}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{(1)(3.2)(0.4)}{[(3.2)^2 + (0.4)^2]3.376} - \tan^{-1} \frac{(0.4)(3.376)}{(1)(3.2)} \right. \\ \left. + [1 - 2(0.332)] \left(\tan^{-1} \frac{1}{3.2} - \tan^{-1} \frac{(1)(3.376)}{(3.2)(0.4)} \right) \right]$$

$$\sigma_{x \text{ arena limpia}} = (4)(14.839) = 59.356 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = \frac{112.25}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{(1)(3.2)(0.4)}{[(1)^2 + (0.4)^2]3.376} - \tan^{-1} \frac{(0.4)(3.376)}{(1)(3.2)} \right. \\ \left. + [1 - 2(0.332)] \left(\tan^{-1} \frac{3.2}{1} - \tan^{-1} \frac{(3.2)(3.376)}{(1)(0.4)} \right) \right]$$

$$\sigma_{y \text{ arena limpia}} = (4)(13.493) = 53.971 \text{ kPa}$$

Para el segundo estrato:

$$\sigma_z = \frac{112.25}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{(1)^2 + (1.6)^2} + \frac{1}{(3.2)^2 + (1.6)^2} \right) \frac{(1)(3.2)(1.6)}{3.715} \right. \\ \left. + \tan^{-1} \frac{(1)(3.2)}{(1.6)(3.715)} \right]$$

$$\sigma_{z \text{ arena limosa}} = (4)(17.663) = 70.654 \text{ kPa}$$

$$\sigma_x = \frac{112.25}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{(1)(3.2)(1.6)}{[(3.2)^2 + (1.6)^2]3.715} - \tan^{-1} \frac{(1.6)(3.715)}{(1)(3.2)} \right. \\ \left. + [1 - 2(0.329)] \left(\tan^{-1} \frac{1}{3.2} - \tan^{-1} \frac{(1)(3.715)}{(3.2)(1.6)} \right) \right]$$

$$\sigma_{x \text{ arena limosa}} = (4)(4.909) = 19.638 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = \frac{112.25}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{(1)(3.2)(1.6)}{[(1)^2 + (1.6)^2]3.715} - \tan^{-1} \frac{(1.6)(3.715)}{(1)(3.2)} \right. \\ \left. + [1 - 2(0.329)] \left(\tan^{-1} \frac{3.2}{1} - \tan^{-1} \frac{(3.2)(3.715)}{(1)(1.6)} \right) \right]$$

$$\sigma_{y_{arena\ limosa}} = (4)(0.871) = 3.482\ kPa$$

6.2. Cálculo de módulo de elasticidad

Para la obtención de los módulos de deformación de los estratos, se procede a obtenerlos a partir de la ecuación constitutiva para suelos granulares, por lo anterior se procede a obtener el módulo de rigidez del suelo, empezando con un módulo promedio el cual se obtiene a partir de un análisis estadístico que involucra una probabilidad del 50 % (Demeneghi, 2003), dicha ecuación es la siguiente:

$$A_m = 26.25 * N^{1.125} \quad (6.9)$$

A su vez, dicho módulo promedio se debe disminuir a través de un coeficiente estadístico que dependa directamente del número de golpes obtenido por medio del ensayo de penetración estándar y el nivel de confianza impuesto por la experiencia del ingeniero, la ecuación que representa dicho coeficiente es el siguiente,

$$C = e^{-0.784 * t_\alpha \sqrt{1.00758 + 0.0152(\ln N - 2.976)^2}} \quad (6.10)$$

Para complementar al coeficiente anterior, se tiene el nivel de confianza propuesto por el maestro Demeneghi (2003), el cual se toma entre un 15 % a 25 % dependiendo del riesgo que se tome, y con ello, qué nivel de seguridad se estima tener para la solución del problema. Para la obtención de t_α , esta se encuentra en función del nivel de confianza y con ello se cuenta con la [Tabla 1](#).

Tabla 1. Obtención de t_α por medio del nivel de confianza.

Nivel de Confianza α %	t_α
2.5	1.978
5	1.657
10	1.288
15	1.041
20	0.844
25	0.676
30	0.526
40	0.254
50	0

Para el problema propuesto se estima un nivel de confianza α del 20 %, lo que a su vez proporciona un t_α de 0.844, por tanto se procede a la obtención de los módulos de rigidez promedio para ambos estratos con la ecuación 6.9,

$$A_{m_{arena\ limpia}} = 26.25 * (12)^{1.125} = 429.74$$

$$A_{m_{arena\ limosa}} = 26.25 * (16)^{1.125} = 593.97$$

Junto con los coeficientes con la ecuación 6.10,

$$C_{arena\ limpia} = e^{-0.784*(0.844)\sqrt{1.00758 + 0.0152(\ln 12 - 2.976)^2}} = 0.514$$

$$C_{arena\ limosa} = e^{-0.784*(0.844)\sqrt{1.00758+0.0152(\ln 16-2.976)^2}} = 0.515$$

Por lo tanto, los módulos de rigidez se obtienen multiplicando el módulo promedio por el coeficiente estadístico, los datos obtenidos son los siguientes,

$$A_{arena\ limpia} = 220.915$$

$$A_{arena\ limosa} = 305.644$$

Con lo visto en el capítulo tres, se hace uso de un coeficiente f el cual se obtiene al realizar la suposición de que el espesor del elemento es lo suficientemente pequeño para que la relación entre esfuerzos sea constante, la ecuación es la siguiente:

$$f = 1 - \nu \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \right) \quad (6.11)$$

A su vez, se cuenta con un segundo coeficiente c que se encuentra en el incremento de esfuerzo normal en el plano octaédrico, que además toma en cuenta el esfuerzo de confinamiento, por tanto la ecuación es la siguiente,

$$c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z} \right) \quad (6.12)$$

Por lo tanto, los respectivos resultados para cada estrato son los que se muestran a continuación

$$f_{arena\ limpia} = 1 - (0.332) \left(\frac{59.356 + 53.971}{109.670} \right) = 0.657$$

$$f_{arena\ limosa} = 1 - (0.329) \left(\frac{19.638 + 3.482}{70.654} \right) = 0.893$$

Para el coeficiente c , son los siguientes,

$$c_{arena\ limpia} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{59.356 + 53.971}{109.670} \right) = 0.678$$

$$c_{arena\ limosa} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{19.638 + 3.482}{70.654} \right) = 0.442$$

Todos los valores obtenidos anteriormente, se utilizan para obtener un resultado en específico que es la ecuación constitutiva para el cálculo de deformaciones en suelos friccionantes (ecuación 3.15). Cabe resaltar que en dicha ecuación resta obtener los esfuerzos efectivos de cada estrato como la presión de confinamiento, por lo que la obtención de los valores se muestra a continuación (ver [Ilustración 33](#)),

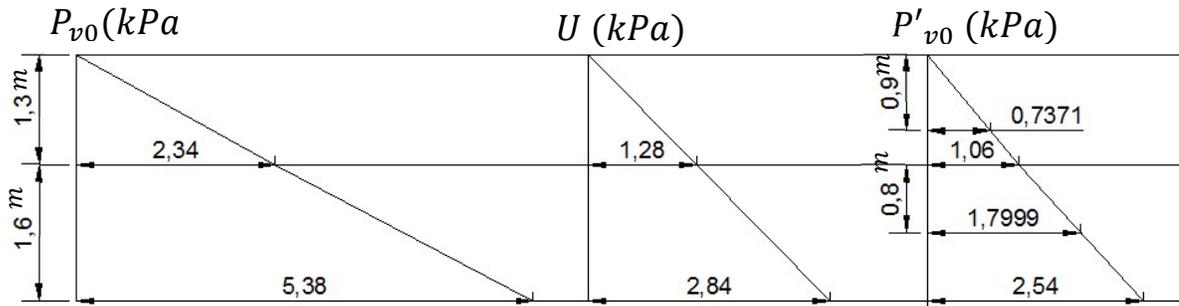


Ilustración 33. Obtención de esfuerzos efectivos en escala 1:10

Por lo mostrado en la imagen anterior, los esfuerzos efectivos que se requieren son los esfuerzos efectivos a la mitad del estrato. Para el primer estrato se debe de tomar en cuenta que la profundidad de desplante de la zapata corrida es a 0.5 m, lo que implica que dicho esfuerzo se debe obtener de la media del espesor restante del estrato, por esta razón dicha imagen muestra el esfuerzo efectivo obtenido a 0.9 m de profundidad. Los valores que resultan de la [Ilustración 33](#) son los siguientes,

$$P'_{v0\ arena\ limpia} = 7.371\ kPa$$

$$P'_{v0\ arena\ limosa} = 17.999\ kPa$$

Como último término, se procede a la obtención de la presión de confinamiento inicial, debida al peso propio del suelo en cuestión, la ecuación es la siguiente,

$$P'_{c0} = \frac{1+2K_0}{3} P'_{v0} \quad (6.13)$$

Los resultados obtenidos son los siguientes,

$$P'_{c0 \text{ arena limpia}} = \frac{1 + 2(0.497)}{3} (7.371) = 4.899 \text{ kPa}$$

$$P'_{c0 \text{ arena limosa}} = \frac{1 + 2(0.489)}{3} (17.999) = 11.870 \text{ kPa}$$

Por consiguiente, se sustituyen los valores anteriores en la ecuación 3.15, tomando en cuenta que los valores de Δz_0 son los espesores de estrato inicial y la presión atmosférica se toma con un valor de 101.3 kPa, obteniendo como resultados lo siguiente,

$$\Delta\delta_z = \left\{ 1 - e^{\left\{ \frac{-f[(P'_{c0} + c\sigma_z)^{1-s}(P'_{c0})^{1-s}]}{(1-s)cA \frac{1}{a}^{1-s}} \right\}} \right\} \Delta z_0$$

$$\Delta\delta_{z \text{ arena limpia}} = \left\{ 1 - e^{\left\{ \frac{-0.657[(4.899 + (0.678)(109.67))^{1-0.5}(4.899)^{1-0.5}]}{(1-0.5)(0.678)(220.915)(101.3)^{1-0.5}} \right\}} \right\} \quad (0.8)$$

$$\Delta\delta_{z \text{ arena limpia}} = 0.004651 \text{ m}$$

$$\Delta\delta_{z \text{ arena limosa}} = \left\{ 1 - e^{\left\{ \frac{-0.893[(11.87 + (0.442)(70.654))^{1-0.5}(11.87)^{1-0.5}]}{(1-0.5)(0.442)(305.644)(101.3)^{1-0.5}} \right\}} \right\} \quad (1.6)$$

$$\Delta\delta_{z \text{ arena limosa}} = 0.006538 \text{ m}$$

Ahora es posible proceder a obtener el módulo de elasticidad del suelo mediante una variante de las ecuaciones de la ley de Hooke, por lo tanto se tiene lo siguiente

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Nuevamente se toma la deformación unitaria diferencial y tomando en cuenta que $\Delta\delta_z = -\Delta w_f$, la sustitución de la misa es la que se muestra a continuación,

$$d\varepsilon_z = -\frac{d(\Delta w)}{\Delta z} \rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta\delta_z}{\Delta z}$$

Y sustituyendo en la variante de la ley de Hooke en dirección z , se obtiene lo siguiente,

$$E_s = \frac{\Delta z}{\Delta\delta_z} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (6.14)$$

De tal forma se obtienen los siguientes módulos de elasticidad para cada estrato con la respectiva sustitución de valores,

$$\begin{aligned} E_{s_{arena\ limpia}} &= \frac{0.8}{0.004651} [109.67 - 0.332(59.356 + 53.971)] \\ &= 12392.39\ kPa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{s_{arena\ limosa}} &= \frac{1.6}{0.006538} [70.654 - 0.329(19.638 + 70.654)] \\ &= 15431.88\ kPa \end{aligned}$$

6.3. Cálculo de valores de influencia

Para el cálculo de los valores de influencia se utilizan las ecuaciones para el cálculo de esfuerzos, con la variación de tomar la carga como unitaria. Realizando dicho cambio, las ecuaciones 6.1, 6.2 y 6.3 se muestran a continuación,

$$I_z = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{x^2+z^2} + \frac{1}{y^2+z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right] \quad (6.15)$$

$$I_x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2+z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1-2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{xB}{yz} \right) \right] \quad (6.16)$$

$$I_y = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2+z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1-2\nu) \left(\tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right] \quad (6.17)$$

Para esta situación la ecuación 6.4 vuelve a utilizarse. Como tal, los valores de influencia calculan dicha influencia en la esquina de un área rectangular. Para este problema la influencia que debe de calcularse son de las cargas verticales que se imponen, así mismo la cimentación se toma como una barra que

posteriormente se divide en tres, que se relaciona con la posición de cada una de las cargas (ver [Ilustración 34](#)).

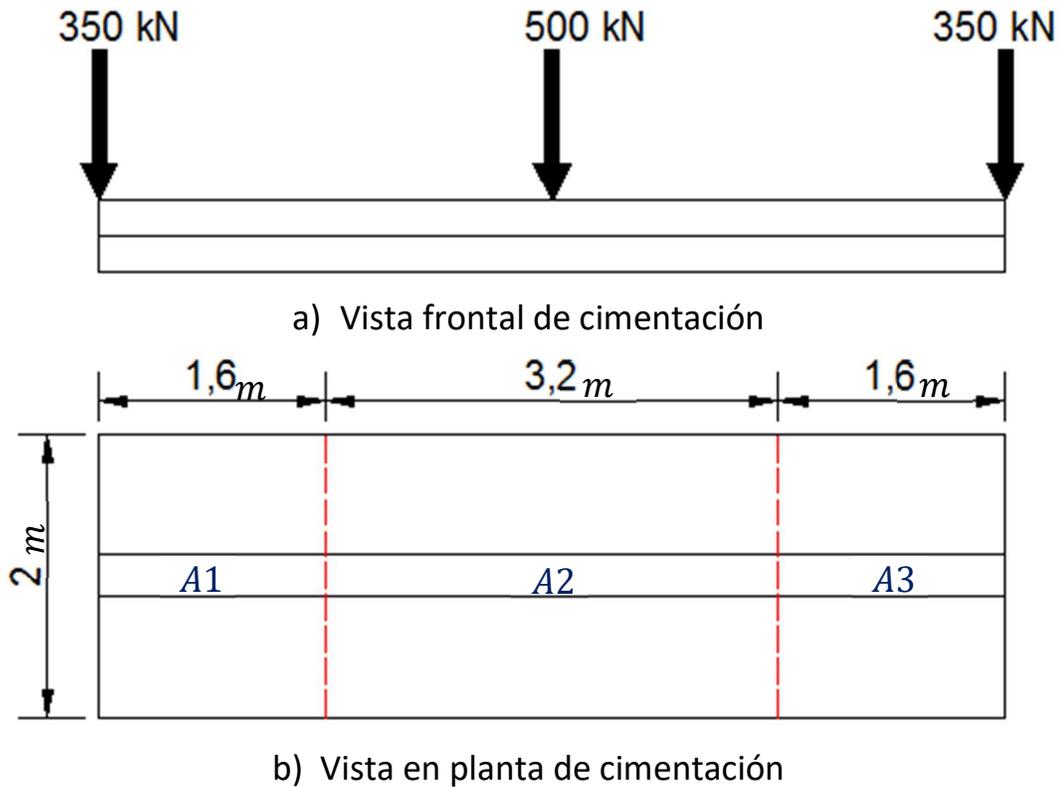


Ilustración 34. Muestra de división con respecto a las cargas en cimentación.

Con las respectivas áreas, se procede a obtener los valores de influencia correspondientes a las tres secciones propuestas. Se inicia con la sección izquierda (A1), con solo la respectiva carga en dicha sección. Por lo tanto, se le llama por posición 1 (C1) donde se calcula la influencia, se presenta en [Ilustración 35](#).

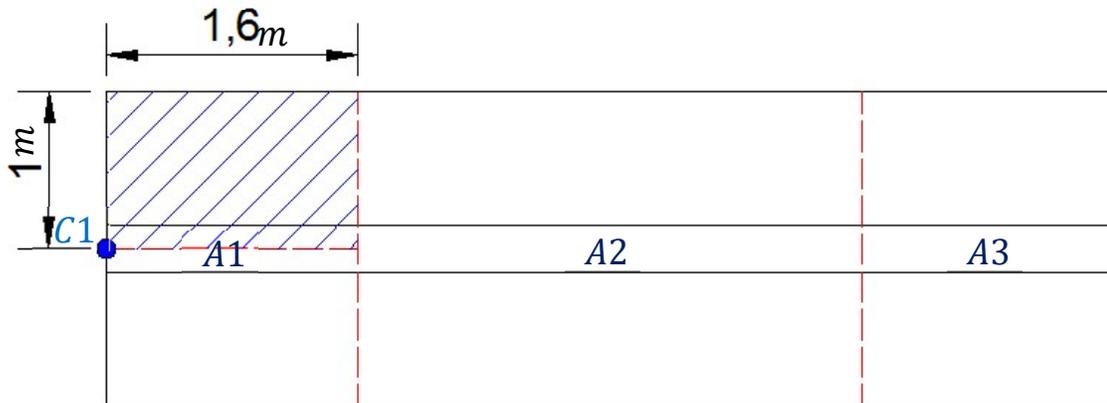


Ilustración 35. Área 1 de análisis de influencia con posición 1.

Por lo tanto las dimensiones a utilizar son:

$$x = 1 \text{ m} ; y = 1.6 \text{ m} ; z = 0.4 \text{ m}$$

Cabe aclarar que las relaciones de Poisson son las mismas que se utilizaron en la obtención de los esfuerzos normales y las influencias obtenidas son para el estrato 1, lo que indica que para obtener las influencias en el estrato dos solo se debe cambiar la relación de Poisson y la profundidad a la media del estrato. Al calcularse la influencia de la carga en la posición 1, en el área 1 por medio de las ecuaciones 6.15, 6.16 y 6.17, como se muestra en la imagen anterior, esta debe de multiplicarse por dos para abarcar toda la sección izquierda (A1).

Se procede a calcular la influencia de la carga en la posición 1 junto con el área central (A2), por lo que las dimensiones se toman como se presenta en la [Ilustración 36](#).

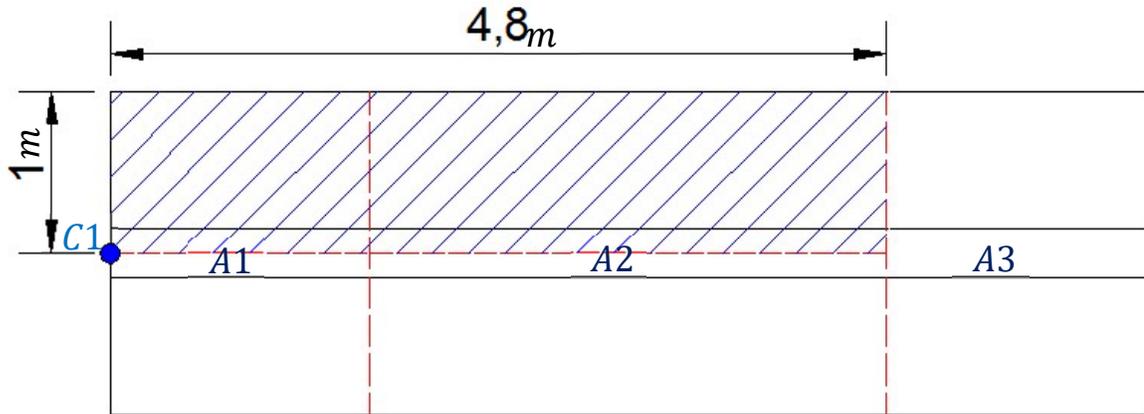


Ilustración 36. Áreas 1 y 2 de análisis de influencia con posición 1.

Dado que dicha influencia no es específicamente la que compete al área 2, se debe restar la influencia obtenida del área 1 y con ello se obtiene la influencia de la carga sobre la posición 1, en el área 2 para el estrato 1.

De tal forma que para obtener la influencia de la carga en la posición 1 sobre el área 3, se toma la longitud completa de la zapata corrida ($y = 6,4\text{ m}$), se calcula la influencia sobre las tres áreas como se muestra en la [Ilustración 37](#) y se resta las influencias separadas de las dos primeras áreas o la influencia en conjunto de las mismas áreas obtenida previamente para el área 2.

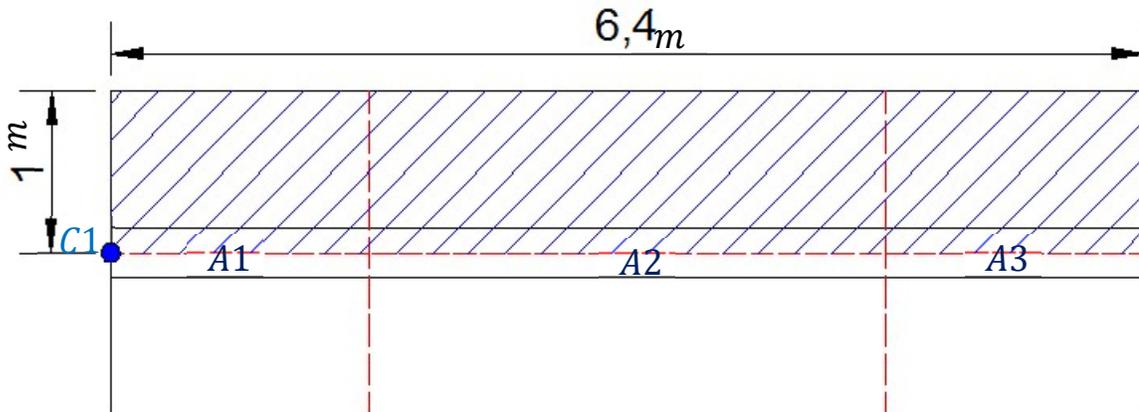


Ilustración 37. Áreas 1, 2 y 3 de análisis de influencia con posición 1.

Se procede a realizar el análisis sobre la posición 2 ($C2$). Para este análisis es conveniente empezar por obtener la influencia en el área 2 dado que es donde se encuentra posicionada la carga (ver [Ilustración 38](#)), la diferencia se

encuentra cuando se obtiene la influencia, esta debe de multiplicarse por cuatro por la posición donde se encuentra.

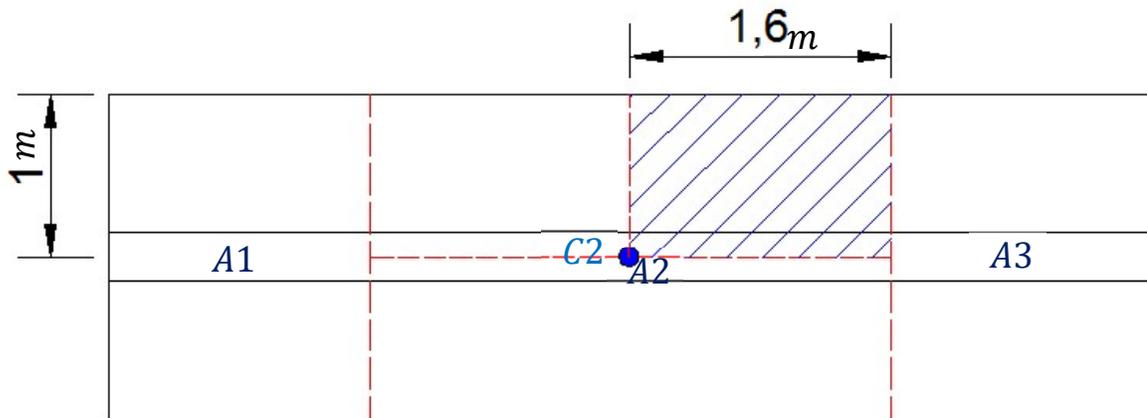


Ilustración 38. Área 3 de análisis de influencia con posición 2 (C2).

Para obtener la influencia sobre el área 1, se calcula la influencia tanto del área 1 como la mitad del área 2 (ver [Ilustración 39](#)), además de que al tener la influencia de aquella área se debe multiplicar por dos, nuevamente por donde se localiza la carga.

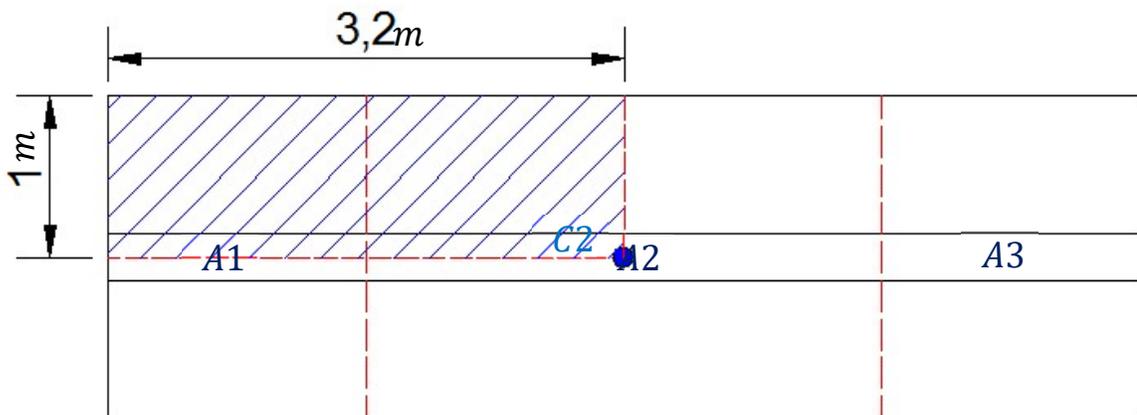


Ilustración 39. Análisis de la influencia de carga en las áreas 1 y 2.

Se procede a calcular el área de influencia de la mitad restante del área 2 (ver [Ilustración 38](#)), que de igual forma se multiplica por dos. Con ambas influencias, se procede a sumarlas para posteriormente restar la influencia calculada del área 1, ello ocasiona que solo quede el valor de influencia del área 1. Dado que es simétrica la figura de la cimentación en planta, se realiza el mismo proceso para la obtención del valor de influencia del área 3.

Con todo lo visto para obtener los valores de influencia se presenta la [Tabla 2](#), con los valores de influencia que se obtienen de ambos estratos, por lo que en dicha tabla se presenta los puntos donde se obtuvieron dichos valores. Los puntos se presenta con las siguientes literales (i, j, k) , i respresenta la posición, j representa el estrato y k representa el área donde se aplica la carga.

Dado que las ecuaciones utilizadas para obtener los esfuerzos normales, manteniendo unitaria la carga (q), se obtuvieron los valores de influencia, por lo que para obtener la relación entre dichos valores se hace uso de la ecuación 5.6 (ecuación que se presenta a continuación), los resultados obtenidos como los valores utilizados se presentan en la [Tabla 2](#).

$$I = I_z - v(I_x + I_y)$$

Tabla 2. Valores de influencia en zapata corrida acorde con las cargas propuestas.

Punto (i,j,k)	I_x	I_y	I_z	v	I
(1,1,1)	0.2441397	0.2199593	0.4868722	0.332	0.33281664
(1,1,2)	0.0203977	0.0289405	0.0017431	0.332	-0.01463444
(1,1,3)	-0.0015256	0.0046485	0.0000189	0.332	-0.00101776
(1,2,1)	0.0350486	0.0107038	0.2791376	0.329	0.26410789
(1,2,2)	0.0719920	0.0084712	0.0402186	0.329	0.01378629
(1,2,3)	0.0075079	0.0026713	0.0009920	0.329	-0.00235187
(2,1,1)	0.0202525	0.0204443	0.0016360	0.332	-0.01187313
(2,1,2)	0.4882795	0.4399186	0.9737443	0.332	0.66563327
(2,1,3)	0.0202525	0.0204443	0.0016360	0.332	-0.01187313
(2,2,1)	0.0524237	0.0048074	0.0355776	0.329	0.01677714
(2,2,2)	0.0700971	0.0214077	0.5582752	0.329	0.52821577
(2,2,3)	0.0524237	0.0048074	0.0355776	0.329	0.01677714
(3,1,1)	-0.0015256	0.0046485	0.0000189	0.332	-0.00101776
(3,1,2)	0.0203977	0.0289405	0.0017431	0.332	-0.01463444
(3,1,3)	0.2441397	0.2199593	0.4868722	0.332	0.33281664
(3,2,1)	0.0075079	0.0026713	0.0009920	0.329	-0.00235187
(3,2,2)	0.0719920	0.0084712	0.0402186	0.329	0.01378629
(3,2,3)	0.0350486	0.0107038	0.2791376	0.329	0.26410789

6.4. Cálculo de deformaciones del suelo

Al tomar en cuenta los valores de influencia resultantes de las cargas sobre la zapata corrida es posible realizar el cálculo de deformaciones de cada estrato de suelo. Por lo tanto, la ecuación 5.8 se expresa correspondiendo a cada estrato, para ello se designa como deformación de arena limpia al subíndice número 1 y como deformación de arena limosa al subíndice número 2, lo que da como resultado las siguientes expresiones:

$$\delta_1 = \left(\frac{H_1}{E_{11}}\right) \left(\frac{I_{111}r_1d_1}{a_1} + \frac{I_{112}r_2d_2}{a_2} + \frac{I_{113}r_3d_3}{a_3}\right) + \left(\frac{H_2}{E_{12}}\right) \left(\frac{I_{121}r_1d_1}{a_1} + \frac{I_{122}r_2d_2}{a_2} + \frac{I_{123}r_3d_3}{a_3}\right)$$
$$\delta_2 = \left(\frac{H_1}{E_{11}}\right) \left(\frac{I_{211}r_1d_1}{a_1} + \frac{I_{212}r_2d_2}{a_2} + \frac{I_{213}r_3d_3}{a_3}\right) + \left(\frac{H_2}{E_{12}}\right) \left(\frac{I_{221}r_1d_1}{a_1} + \frac{I_{222}r_2d_2}{a_2} + \frac{I_{223}r_3d_3}{a_3}\right)$$

En la [Ilustración 40](#), se puede observar que las reacciones r_1 y r_3 son iguales por la simetría que presenta la cimentación. Los valores de influencia que se utilizan son los plasmados en la tabla 2, los valores restantes son los siguientes,

Para el estrato 1:

- $E_{11} = 12392.39 \text{ kPa}$
- $H_1 = 0.8 \text{ m}$

Para el estrato 2:

- $E_{12} = 15431.88 \text{ kPa}$
- $H_2 = 1.6 \text{ m}$

Donde E se refiere al módulo de elasticidad obtenido previamente en la sección 6.2, H es el espesor del estrato correspondiente, a es el área correspondiente a cada posición (ver [Ilustración 34](#)) y d es la distancia longitudinal de cada posición. Por lo tanto, las dimensiones para cada posición son:

$$a_1 = 3.2 \text{ m}^2 \quad ; \quad a_2 = 6.4 \text{ m}^2 \quad ; \quad a_3 = 3.2 \text{ m}^2$$

$$d_1 = 1.6 \text{ m} \quad ; \quad d_2 = 3.2 \text{ m} \quad ; \quad d_3 = 1.6 \text{ m}$$

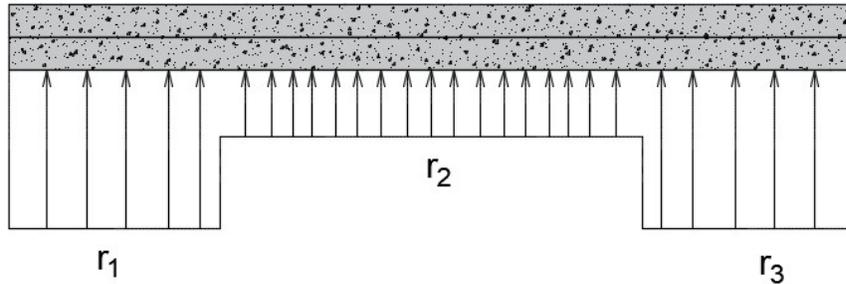


Ilustración 40. Representación de las reacciones generadas en la zapata corrida.

Realizando la correspondiente sustitución, se tiene lo siguiente,

$$\delta_1 = \left(\frac{0.8}{12392.39} \right) \left[\frac{(0.332816635)(1.6)r_1}{3.2} + \frac{(-0.014634437)(3.2)r_2}{6.4} + \frac{(-0.001017764)(1.6)r_3}{3.2} \right] + \left(\frac{1.6}{15431.88} \right) \left[\frac{(0.264107887)(1.6)r_1}{3.2} + \frac{(0.013786293)(3.2)r_2}{6.4} + \frac{(-0.002351866)(1.6)r_3}{3.2} \right]$$

$$\delta_2 = \left(\frac{0.8}{12392.39} \right) \left[\frac{(-0.01187313)(1.6)r_1}{3.2} + \frac{(0.66563327)(3.2)r_2}{6.4} + \frac{(-0.01187313)(1.6)r_3}{3.2} \right] + \left(\frac{1.6}{15431.88} \right) \left[\frac{(0.016777145)(1.6)r_1}{3.2} + \frac{(0.528215775)(3.2)r_2}{6.4} + \frac{(0.016777145)(1.6)r_3}{3.2} \right]$$

Se simplifican operaciones,

$$\delta_1 = 2.44342 \times 10^{-5} r_1 + 2.42323 \times 10^{-7} r_2 - 1.54774 \times 10^{-7} r_3$$

$$\delta_2 = 4.865 \times 10^{-7} r_1 + 4.88683 \times 10^{-5} r_2 + 4.865 \times 10^{-7} r_3$$

Por último, se toma en cuenta que $r_1 = r_3$,

$$\delta_1 = 2.42794 \times 10^{-5} r_1 + 2.42323 \times 10^{-7} r_2$$

$$\delta_2 = 9.73 \times 10^{-7} r_1 + 4.88683 \times 10^{-5} r_2$$

De esta manera se obtienen las ecuaciones de desplazamiento en función de las reacciones del suelo.

6.5. Cálculo de matriz de rigideces

Para el cálculo de la matriz se debe tener en cuenta el módulo de elasticidad de la estructura de cimentación, la cual para este problema se estima de 11300000 kPa . Para la correcta ejecución, se debe obtener la inercia del perfil de la zapata corrida. El cálculo de ella se presenta a continuación.

En la [Ilustración 41](#) se muestra las dimensiones del perfil de la zapata corrida, por lo que el momento de inercia de la figura mostrada resulta $I = 0.00707 \text{ m}^4$. Con los datos anteriores, se procede a obtener la matriz de rigidez por secciones, en este caso es conveniente dividir el perfil de la zapata en dos elementos por la distribución de las cargas.

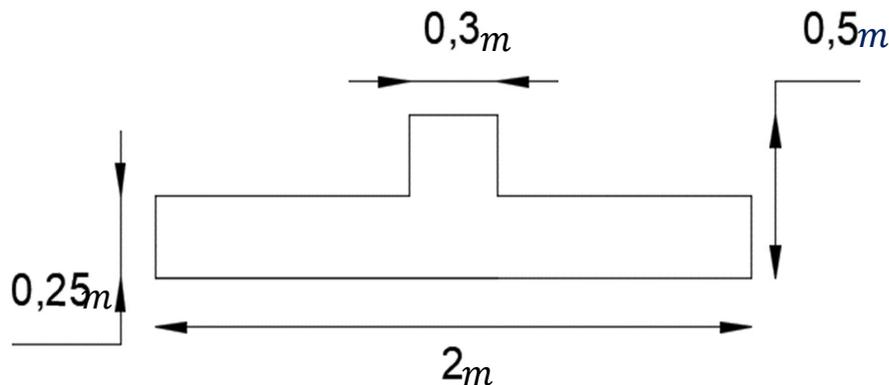


Ilustración 41. Perfil de la zapata corrida.

Así mismo, al dividir al elemento es posible percibir los movimientos que puede tener por la acción de las cargas y esfuerzos a los que se ve sometido la cimentación. Por lo que es conveniente mostrar los grados de libertad, que se presentan en la [Ilustración 42](#). Cabe mencionar que los grados de libertad se empiezan enumerando de izquierda a derecha por conveniencia al momento de elaborar los cálculos pertinentes.

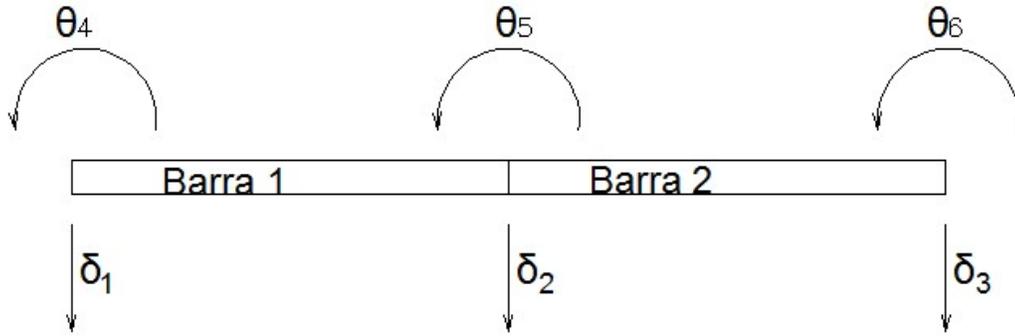


Ilustración 42. Grados de libertad y número de barras en la zapata corrida (modificado de Demeneghi, 2008).

Se hace uso de las ecuaciones 4.10 a 4.13, no se toma en cuenta la torsión para la simplificación del modelo. Por tanto, la matriz resulta de la siguiente forma,

$$\begin{array}{cccc}
 \theta p & \theta q & \delta r & \delta s \\
 4 \frac{E * I}{L} & 2 \frac{E * I}{L} & -6 \frac{E * I}{L^2} & 6 \frac{E * I}{L^2} & \theta p \\
 2 \frac{E * I}{L} & 4 \frac{E * I}{L} & -6 \frac{E * I}{L^2} & 6 \frac{E * I}{L^2} & \theta q \\
 -6 \frac{E * I}{L^2} & -6 \frac{E * I}{L^2} & 12 \frac{E * I}{L^3} & -12 \frac{E * I}{L^3} & \delta r \\
 6 \frac{E * I}{L^2} & 6 \frac{E * I}{L^2} & -12 \frac{E * I}{L^3} & 12 \frac{E * I}{L^3} & \delta s
 \end{array}$$

Aplicando la matriz a cada barra, con los datos vistos anteriormente, se obtiene lo siguiente,

Barra 1:

$$\begin{array}{cccc}
 \theta_4 & \theta_5 & \delta_1 & \delta_2 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 99876.16 & 49938.08 & -46816.95 & 46816.95 \\
 49938.08 & 99876.16 & -46816.95 & 46816.95 \\
 -46816.95 & -46816.95 & 29260.59 & -29260.59 \\
 46816.95 & 46816.95 & -29260.59 & 29260.59
 \end{array} \right] & \theta_4 & \theta_5 & \delta_1 & \delta_2
 \end{array}$$

Barra 2:

$$\begin{bmatrix} \theta_5 & \theta_6 & \delta_2 & \delta_3 \\ 99876.16 & 49938.08 & -46816.95 & 46816.95 \\ 49938.08 & 99876.16 & -46816.95 & 46816.95 \\ -46816.95 & -46816.95 & 29260.59 & -29260.59 \\ 46816.95 & 46816.95 & -29260.59 & 29260.59 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

Con las matrices de las barras, se procede a unificar ambas matrices pero respetando el orden numérico, además de realizarlo de izquierda a derecha, la matriz de rigidez de la cimentación completa es la que se muestra a continuación,

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ 29260.59 & -29260.59 & 0 & -46816.95 & -46816.95 & 0 \\ -29260.59 & 58521.19 & -29260.59 & 46816.95 & 0 & -46816.95 \\ 0 & -29260.59 & 29260.59 & 0 & 46816.95 & 46816.95 \\ -46816.95 & 46816.95 & 0 & 99876.16 & 49938.08 & 0 \\ -46816.95 & 0 & 46816.95 & 49938.08 & 199752.32 & 49938.08 \\ 0 & -46816.95 & 46816.95 & 0 & 49938.08 & 99876.16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

Se procede a obtener el vector de cargas empotradas (vector 4.20), de la misma manera se calcula el vector para cada barra y por último se suman ambos vectores para obtener el vector de empotramiento de la cimentación completa, los resultados son los siguientes,

Barra 1:

$$\underline{P}_1^e = \begin{bmatrix} 31.5733 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 \\ -31.5733 + 0.26667r_1 + 0.58667r_2 \\ -59.2 + 1.3r_1 + 0.3r_2 \\ -59.2 + 0.3r_1 + 1.3r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Barra 2:

$$\underline{P}_2^e = \begin{bmatrix} 31.5733 - 0.58667r_2 - 0.26667r_3 \\ -31.5733 + 0.26667r_2 + 0.58667r_3 \\ -59.2 + 1.3r_2 + 0.3r_3 \\ -59.2 + 0.3r_2 + 1.3r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

El resultado de la suma, con acomodo previo de los grados de libertad, de ambos vectores es la siguiente,

$$\underline{P^e} = \begin{bmatrix} -59.2 + 1.3r_1 + 0.3r_2 \\ -118.4 + 0.3r_1 + 2.6r_2 + 0.3r_3 \\ -59.2 + 0.3r_2 + 1.3r_3 \\ 31.5733 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 \\ 0.26667r_1 - 0.26667r_3 \\ -31.5733 + 0.26667r_2 + 0.58667r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

Lo que indica que el vector de cargas concentradas, de acuerdo con lo visto en la sección 4.1.1, es como se presenta a continuación,

$$\underline{P^c} = \begin{bmatrix} -350 \\ -500 \\ -350 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se debe de tomar en cuenta que las cargas provocan en parte el desplazamiento, por ello son colocadas donde provocan dicho desplazamiento. Con todos los vectores recabados, lo que procede es llevar a cabo la suma de vectores.

$$\underline{K}\delta + \underline{P^e} + \underline{P^c} = 0$$

6.6. Desarrollo de ecuación general de equilibrio

Se procede a desarrollar la ecuación general a partir de los resultados obtenidos. Ejecutando la suma de las matrices se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$(\delta_1): 29260.59\delta_1 - 29260.59\delta_2 - 46816.95\theta_4 - 46816.95\theta_5 - 59.2 + 1.3r_1 + 0.3r_2 - 350 = 0$$

$$(\delta_2): -29260.59\delta_1 + 58521.19\delta_2 - 29260.59\delta_3 + 46816.95\theta_4 - 46816.95\theta_6 - 118.4 + 0.3r_1 + 2.6r_2 + 0.3r_3 - 500 = 0$$

$$(\delta_3): -29260.59\delta_2 + 29260.59\delta_3 + 46816.95\theta_5 + 46816.95\theta_6 - 59.2 + 0.3r_2 + 1.3r_3 - 350 = 0$$

$$(\theta_4): -46816.95\delta_1 + 46816.95\delta_2 + 99876.16\theta_4 + 49938.08\theta_5 + 31.5733 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 = 0$$

$$(\theta_5): -46816.95\delta_1 + 46816.95\delta_3 + 49938.08\theta_4 + 199752.32\theta_5 + 49938.08\theta_6 + 0.26667r_1 - 0.26667r_3 = 0$$

$$(\theta_6): -46816.95\delta_2 + 46816.95\delta_3 + 49938.08\theta_5 + 99876.16\theta_6 - 31.5733 + 0.26667r_2 + 0.58667r_3 = 0$$

Nuevamente, por simetría se tiene en cuenta que $\delta_3 = \delta_1$ y $\theta_6 = -\theta_4$ (ver [Ilustración 42](#)), además ña reacción $r_3 = r_1$. Realizando la sustitución correspondiente se obtiene lo siguiente,

$$(\delta_1): 29260.59\delta_1 - 29260.59\delta_2 - 46816.95\theta_4 - 46816.95\theta_5 + 1.3r_1 + 0.3r_2 = 409.2$$

$$(\delta_2): -29260.59\delta_1 + 58521.19\delta_2 - 29260.59\delta_1 + 46816.95\theta_4 + 46816.95\theta_4 + 0.3r_1 + 2.6r_2 + 0.3r_1 = 618.4$$

$$(\delta_3): -29260.59\delta_2 + 29260.59\delta_1 + 46816.95\theta_5 - 46816.95\theta_4 + 0.3r_2 + 1.3r_1 = 409.2$$

$$(\theta_4): -46816.95\delta_1 + 46816.95\delta_2 + 99876.16\theta_4 + 49938.08\theta_5 + 31.5733 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 = 0$$

$$(\theta_5): -46816.95\delta_1 + 46816.95\delta_1 + 49938.08\theta_4 + 199752.32\theta_5 - 49938.08\theta_4 + 0.26667r_1 - 0.26667r_1 = 0$$

$$(\theta_6): -46816.95\delta_2 + 46816.95\delta_1 + 49938.08\theta_5 - 99876.16\theta_4 - 31.5733 + 0.26667r_2 + 0.58667r_1 = 0$$

Simplificando las ecuaciones anteriores,

$$(\delta_1): 29260.59\delta_1 - 29260.59\delta_2 - 46816.95\theta_4 - 46816.95\theta_5 + 1.3r_1 + 0.3r_2 = 409.2$$

$$(\delta_2): -58521.19\delta_1 + 58521.19\delta_2 + 93633.90\theta_4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 = 618.4$$

$$(\delta_3): -29260.59\delta_2 + 29260.59\delta_1 + 46816.95\theta_5 - 46816.95\theta_4 + 0.3r_2 + 1.3r_1 = 409.2$$

$$(\theta_4): -46816.95\delta_1 + 46816.95\delta_2 + 99876.16\theta_4 + 49938.08\theta_5 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 = -31.5733$$

$$(\theta_5): \theta_5 = 0$$

$$(\theta_6): -46816.95\delta_2 + 46816.95\delta_1 + 49938.08\theta_5 - 99876.16\theta_4 + 0.26667r_2 + 0.58667r_1 = 31.5733$$

Dado que se obtuvo el resultado de una de las incógnitas se procede a realizar la sustitución de θ_5 en las ecuaciones anteriores.

$$(\delta_1): 29260.59\delta_1 - 29260.59\delta_2 - 46816.95\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 = 409.2$$

$$(\delta_2): -58521.19\delta_1 + 58521.19\delta_2 + 93633.90\theta_4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 = 618.4$$

$$(\delta_3): -29260.59\delta_2 + 29260.59\delta_1 - 46816.95\theta_4 + 0.3r_2 + 1.3r_1 = 409.2$$

$$(\theta_4): -46816.95\delta_1 + 46816.95\delta_2 + 99876.16\theta_4 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 = -31.5733$$

$$(\theta_6): -46816.95\delta_2 + 46816.95\delta_1 - 99876.16\theta_4 + 0.26667r_2 + 0.58667r_1 = 31.5733$$

Como se observa del conjunto de ecuaciones anteriores, se aplica que $\delta_3 = \delta_1$ y $\theta_6 = -\theta_4$, por lo tanto solo se tiene tres ecuaciones, con ellas son tres

ecuaciones para cinco incógnitas, se debe tomar en cuenta las ecuaciones obtenidas de desplazamiento en función de las reacciones del suelo (ecuaciones para completar el sistemas y resolver.

$$29260.59\delta_1 - 29260.59\delta_2 - 46816.95\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 = 409.2 \quad (6.18)$$

$$-58521.19\delta_1 + 58521.19\delta_2 + 93633.90\theta_4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 = 618.4 \quad (6.19)$$

$$-46816.95\delta_1 + 46816.95\delta_2 + 99876.16\theta_4 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 = -31.5733 \quad (6.20)$$

$$\delta_1 = 0.0000242794r_1 + 0.0000002423r_2 \quad (6.21)$$

$$\delta_2 = 0.000000973r_1 + 0.000048868r_2 \quad (6.22)$$

Se procede a sustituir δ_1 en la ecuación (6.18).

$$29260.59(\delta_1) - 29260.59(\delta_2) - 46816.95\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 = 409.2$$

$$29260.59(0.0000242794r_1 + 0.0000002423r_2) - 29260.59(0.000000973r_1 + 0.000048868r_2) - 46816.95\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 = 409.2$$

$$0.71r_1 + 0.007r_2 - 0.028r_1 - 1.43r_2 - 46816.95\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 = 409.2$$

$$1.98r_1 - 1.123r_2 - 46816.95\theta_4 = 409.2$$

Despejando a θ_4 ,

$$-46816.95\theta_4 = -1.98r_1 + 1.123r_2 + 409.2$$

$$\theta_4 = 0.000042334r_1 - 0.000023983r_2 - 0.00874 \quad (6.23)$$

Se procede a sustituir δ_1 , δ_2 y θ_4 en la ecuación (6.19).

$$-58521.19(\delta_1) + 58521.19(\delta_2) + 93633.90(\theta_4) + 0.6r_1 + 2.6r_2 = 618.4$$

$$-58521.19(0.0000242794r_1 + 0.0000002423r_2) + 58521.19(0.000000973r_1 + 0.000048868r_2) + 93633.90(0.000042334r_1 - 0.000023983r_2 - 0.00874) + 0.6r_1 + 2.6r_2 = 618.4$$

$$-1.421r_1 - 0.014r_2 + 0.057r_1 + 2.86r_2 + 3.964r_1 - 2.246r_2 - 818.4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 = 618.4$$

$$3.2r_1 + 3.2r_2 = 1436.8$$

Se despeja r_2 la ecuación anterior.

$$r_2 = -r_1 + 449 \quad (6.24)$$

Se procede a obtener el resultado de r_1 , sistituyendo cada uno de los elementos obtenidos en la ecuación 6.20.

$$-46816.95(\delta_1) + 46816.95(\delta_2) + 99876.16(\theta_4) - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 = -31.5733$$

$$\begin{aligned}
 & -46816.95(0.0000242794r_1 + 0.0000002423r_2) + 46816.95(0.000000973r_1 + 0.000048868r_2) \\
 & + 99876.16(0.000042334r_1 - 0.000023983r_2 - 0.00874) - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 \\
 & = -31.5733
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -1.137r_1 - 0.011r_2 + 0.046r_1 + 2.288r_2 + 4.228r_1 - 2.395r_2 - 872.96 - 0.58667r_1 - 0.26667r_2 \\
 & = -31.5733
 \end{aligned}$$

$$2.55r_1 - 0.386r_2 = 841.387$$

Se procede a sustituir r_2 (ecuación 6.24),

$$2.55r_1 - 0.386(-r_1 + 449) = 841.387$$

$$2.55r_1 + 0.386r_1 - 173.093 = 841.387$$

$$2.936r_1 = 1014.479$$

$$r_1 = 345.545 \text{ kN/m}$$

A partir de este punto, se obtiene el resultado de r_2 de la ecuación 6.24, el cual es el siguiente:

$$r_2 = -(345.545) + 449 \quad ; \quad r_2 = 103.455 \text{ kN/m}$$

Por último se sustituye los valores obtenidos de r_1 y r_2 en las ecuaciones 6.18, 6.19 y 6.20.

$$\delta_1 = 0.0000242794(345.545) + 0.0000002423(103.455)$$

$$\delta_1 = 0.008414m$$

$$\delta_2 = 0.000000973(345.545) + 0.000048868(103.455)$$

$$\delta_2 = 0.005392 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.000042334(345.545) - 0.000023983(103.455) - 0.00874$$

$$\theta_4 = 0.0034067 \text{ rad}$$

6.7. Modelado numérico del problema

Con respecto a los resultados obtenidos de manera manual en el capítulo anterior, se procede a resolver el problema mediante modelado numérico. Para obtener resultados mediante este método, es importante introducir los datos de cada estrato, así como los datos de los elementos que soportan la carga impuesta por la estructura y peso propio.

Como se ha planteado en la resolución del problema, primeramente se generan los materiales con los cuales se compone el medio de estudio, ello se presenta en la [Ilustración 43](#). En la imagen se observa los estratos donde se desplanta la zapata corrida.

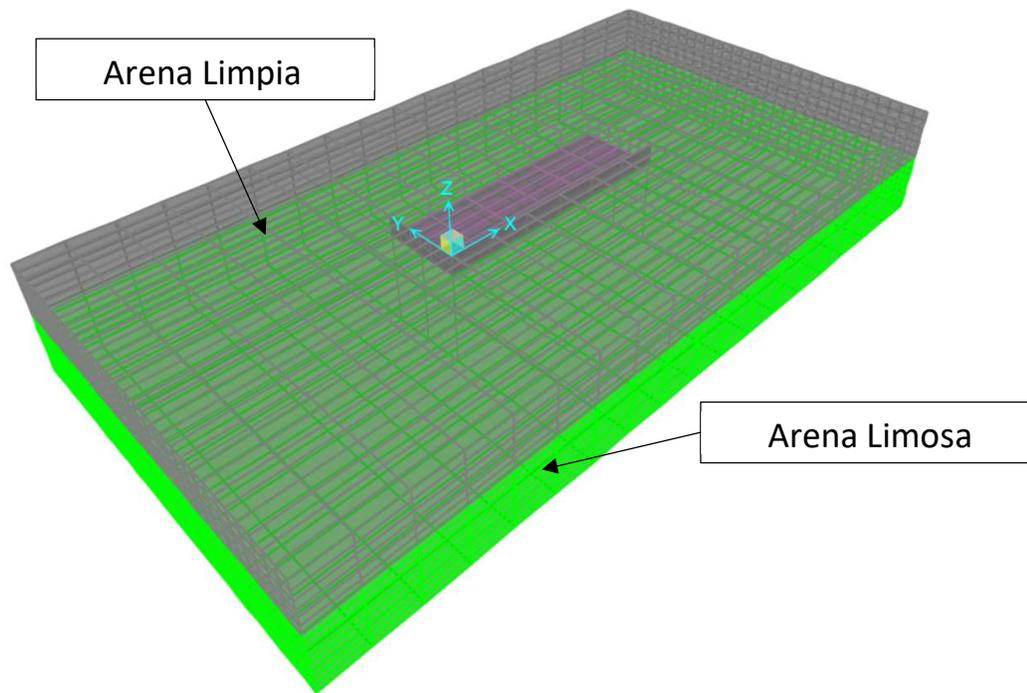


Ilustración 43. Presentación del modelado de los estratos en estudio.

Para lograr dimensionar la zona de estudio, se plantean los límites lo suficientemente amplios para que la respuesta sea lo más cercano posible a la realidad, por lo que las dimensiones de los estratos son de 19.20 m en el eje “x”, 10.00 m en el eje “y” y en el eje “z” las profundidades son definidas mediante la estratigrafía planteada. A su vez, la posición de la cimentación se establece, en el plano horizontal, en parte central de la superficie (ver [Ilustración 44](#)).

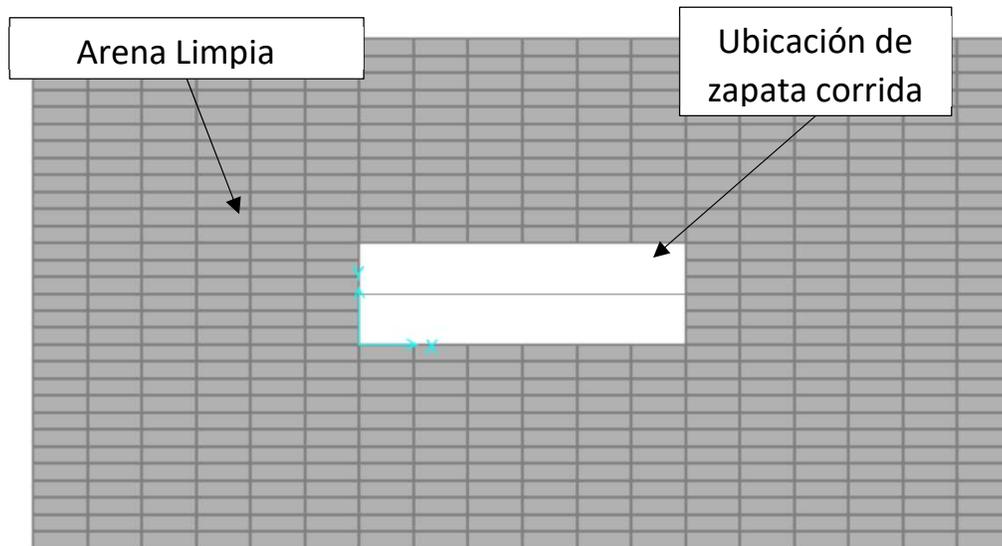


Ilustración 44. Posición de la cimentación sobre la superficie en estudio.

Cabe resaltar que la cimentación se coloca a la profundidad de desplante, la cual es de 0.50 m, la imagen anterior presenta la vista de la cimentación en planta a nivel de superficie. La división de la superficie en segmentos pequeños se debe a que la fuerza se concentra en los nodos y no toma contacto con el área generada, por lo tanto, entre menor sea el tamaño de los elementos se logra representar la realidad de lo que ocurre con los estratos de suelo y los elementos estructurales. En la [Ilustración 45](#) se muestra el nivel de desplante de la cimentación y el modelado de la cimentación.

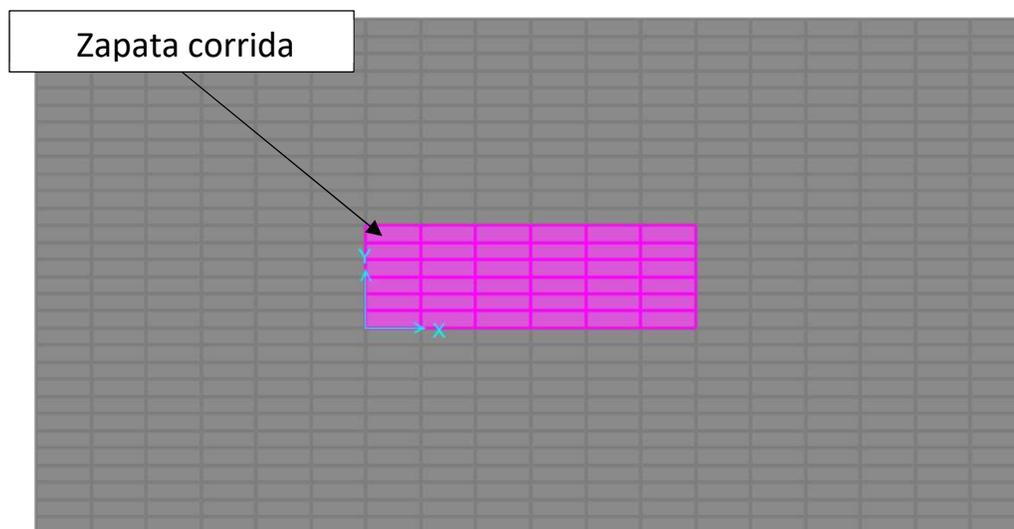


Ilustración 45. Modelado de la cimentación y el terreno de desplante.

Para modelar la zapata corrida se dividió en tres secciones, dos losas y un trabe de 0.50 m de alto y 0.30 m de ancho, lo que deja a las losas con 0.25 m de alto y 0.85 m de ancho. Cabe resaltar que los elementos modelados se posicionan unos junto a otros, por lo que se debe tener continuidad en los elementos con la finalidad de que al momento de ejecutar la corrida de los cálculos trabajen en conjunto. Además, las propiedades de la zapata se definen como concreto con un $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$, un peso específico de 24 kN/m^3 y un módulo de elasticidad de $11,300 \text{ MPa}$.

Con lo anterior, el resultado del desplazamiento generado por la corrida se muestra en la [Ilustración 46](#). Sin embargo, los desplazamientos de la zapata corrida se presentan en la [Ilustración 47](#), en ella se observa la deformación de la zapata exagerada con respecto a los resultados obtenidos mediante la modelación.

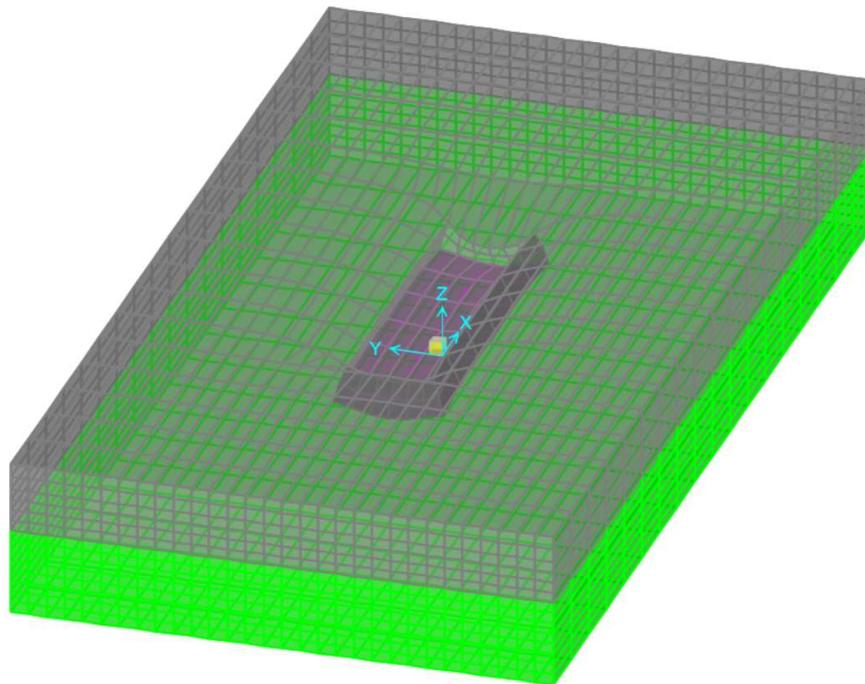


Ilustración 46. Deformación resultante de modelado.

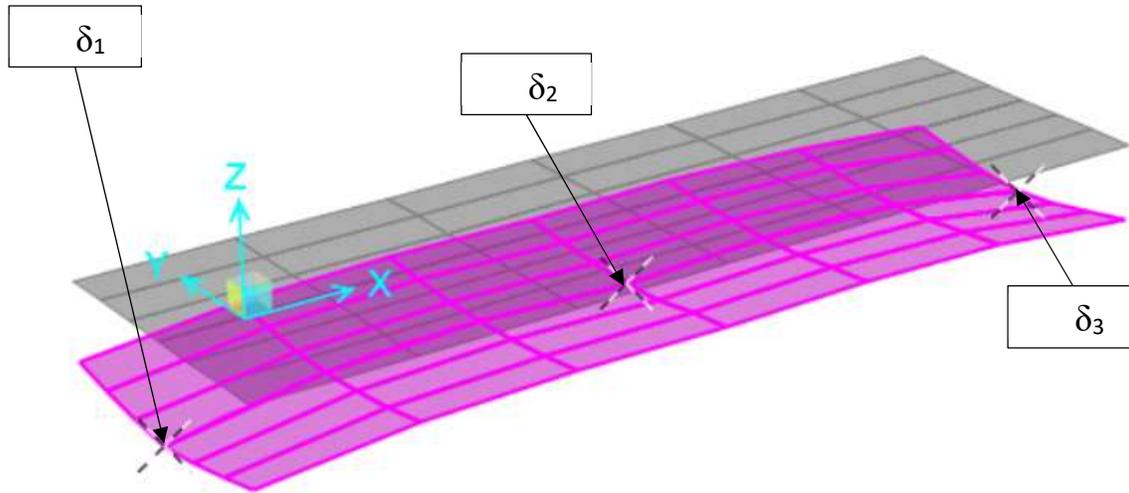


Ilustración 47. Zapata corrida modelada con respectivos desplazamientos.

Por lo tanto, los resultados obtenidos a través de la modelación se presentan a continuación en la [Tabla 3](#).

Tabla 3. Resultados obtenidos mediante modelado numérico a lo largo de la estructura.

Nodo	Desplazamiento (m)
1	-0.010795
2	-0.008142
3	-0.007501
4	-0.008033
5	-0.007501
6	-0.008142
7	-0.010795

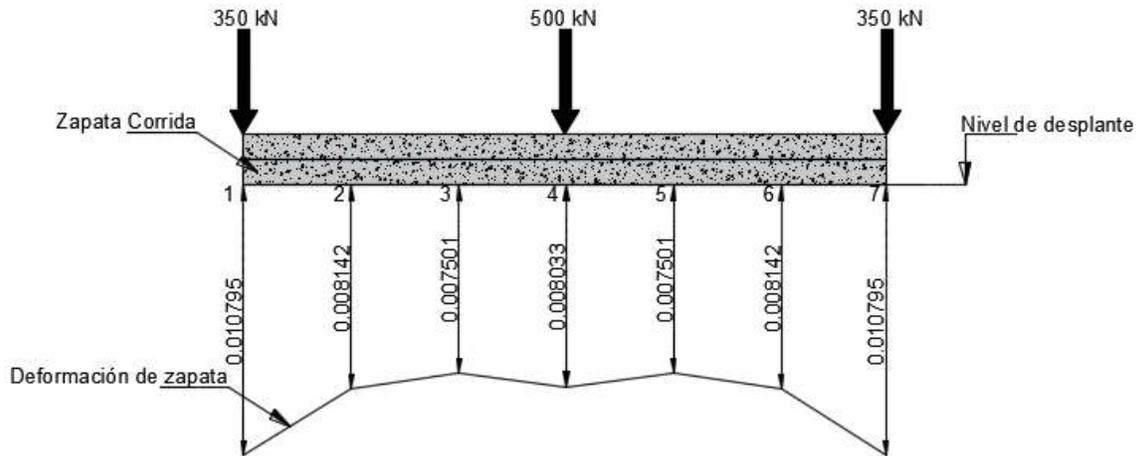


Ilustración 48. Representación en vista frontal de desplazamientos en zapata corrida mediante modelado numérico.

En la [Ilustración 48](#) se observan los desplazamientos generados por las cargas puntuales a lo largo de la zapata corrida, así como los nodos donde inicia el desplazamiento, cabe mencionar que la deformación que se presenta en la ilustración anterior se encuentra a escala con el fin de visualizar los desplazamientos. De tal forma que los desplazamientos que se observan a partir de la posición de las cargas puntuales son los siguientes:

$$\delta_1 = \delta_3 = 0.010795 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.008033 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0028 \text{ rad}$$

En la [Ilustración 47](#) se muestra marcado con una “X” los desplazamientos calculados con sus respectivas etiquetas, la superficie en color oscuro representa la posición inicial de la cimentación.

Hasta el momento se cuenta con los resultados del modelado numérico y método directo, por lo que es conveniente obtener los desplazamientos mediante un programa enfocado exclusivamente al cálculo numérico, se procede a resolver el problema propuesto a fin de comparar los resultados obtenidos mediante el modelado numérico. Los datos obtenidos por medio del lenguaje de programación se presentan a continuación en la [Tabla 4](#).

Tabla 4. Resultados obtenidos mediante lenguaje de programación a lo largo de la estructura.

Nodo	Desplazamiento (m)
1	-0.011097
2	-0.009697
3	-0.008820
4	-0.008538
5	-0.008566
6	-0.008538
7	-0.008820
8	-0.009697
9	-0.011096

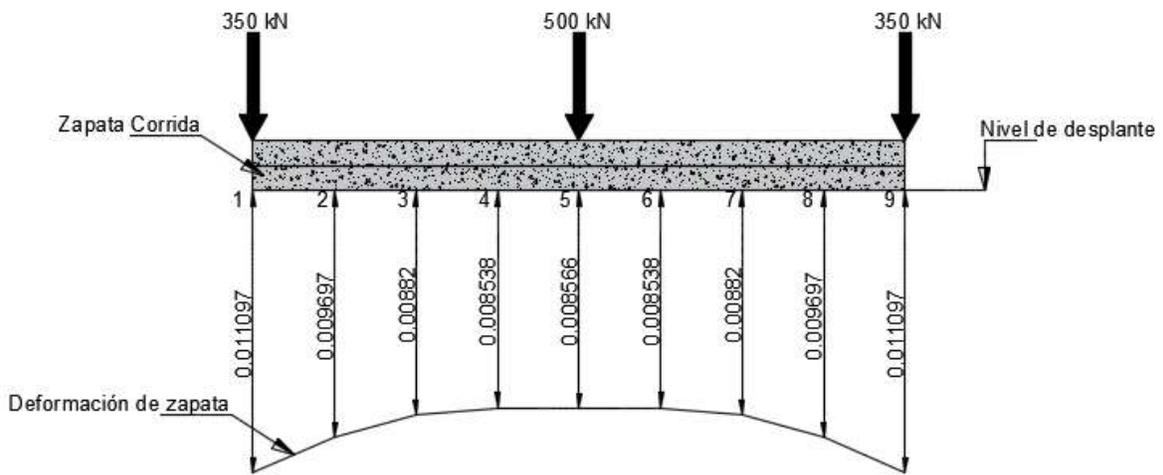


Ilustración 49. Representación en vista frontal de desplazamientos en zapata corrida mediante lenguaje de programación.

De la misma forma, en la [Ilustración 49](#) se presentan los desplazamientos calculados mediante el lenguaje de programación a lo largo de la zapata con sus respectivos nodos, cabe mencionar que la deformación que se presenta en la ilustración anterior se encuentra a escala con el fin de visualizar los desplazamientos. De tal forma que los desplazamientos que se observan a partir de la posición de las cargas puntuales son los siguientes:

$$\delta_1 = \delta_3 = 0.010965 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.008566 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0028 \text{ rad}$$

Cabe señalar que el lenguaje de programación utilizado, valga la redundancia, está programado con el método directo con el fin de resolver problemas de interacción suelo estructura con un mayor número de grados de libertad, alimentando el programa con solo datos del problema, sin embargo, ello resulta inconveniente al intentar visualizar el problema.

7. Conclusiones

De acuerdo con lo presentado en este trabajo, la solución de problemas relacionados con desplazamientos sobre suelo friccionante son de interés común. Al contar hoy en día con paquetes de modelación por computadora se tiende a desconocer la obtención de los resultados, por lo que es importante conocer los fundamentos del proceso de la interacción suelo-estructura.

Como se ha comentado, el problema de interacción que aborda el presente informe se desarrolla en un medio friccionante, sin embargo, el análisis se puede llevar a cabo en otro tipo de suelo, siempre y cuando se tomen en cuenta correctamente las propiedades elásticas del sitio de estudio, como lo son el módulo de elasticidad y la relación de Poisson. Además, el método directo no necesita de iteraciones, dando una respuesta inmediata al modificar las dimensiones de la obra o las propiedades del suelo.

En cuanto al modelado numérico, se considera de gran utilidad formar elementos sólidos con propiedades elásticas y mecánicas, así como el diseño de estructuras a través de elementos básicos como lo son superficies y líneas, a los cuales se designan las propiedades del material en estudio. En cambio, con el lenguaje de programación se designan únicamente los valores tanto de las propiedades como el dimensionamiento del suelo y materiales de construcción.

De acuerdo con los datos obtenidos mediante los métodos de modelado numérico y lenguaje de programación, en cuanto a los desplazamientos, la diferencia entre ellos no es significativa. Los resultados obtenidos se observan en la [Tabla 5](#).

Tabla 5. Resultados obtenidos mediante modelado numérico y lenguaje de programación.

Grado de Libertad	Modelado Numérico	Lenguaje de programación
δ_1 (m)	0.010795	0.010965
δ_2 (m)	0.008033	0.008566
θ_4 (rad)	0.00280	0.00192

Por lo tanto, se encuentra como efectivo el uso del método de modelado numérico utilizado en la resolución de problemas de interacción suelo estructura, dado que los resultados no difieren de los obtenidos mediante el método directo. De tal manera que el modelado numérico depende, como siempre, de la calidad de los resultados que se obtengan a partir las pruebas de laboratorio como de la obtención de muestras alteradas e inalteradas en campo.

8. Bibliografía

- Agustín Demeneghi Colina, *“Apuntes de Mecánica del Medio Continuo”*, Volumen 2, México D.F. 2015.
- Agustín Demeneghi Colina, *“Cálculo del asentamiento de un cimiento en arena”*, XXIV REUNIÓN NACIONAL DE MECÁNICA DE SUELOS, 2008.
- Agustín Demeneghi Colina, (1991), *“Interacción estática suelo estructura”*. Reunión conjunta SMMS, SMIS, SMIE. Interacción suelo-estructura y diseño estructural de cimentaciones. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos. México, D.F.
- Beaufait, F., Rowan, W., Hoadley, P. y Hackett, R. (1970), *“Computer method of structural”*, Prentice-Hall Inc, Estados Unidos de América.
- Dashko, R. E. & Kagán, A. A. 1980. *Mecánica de los Suelos en la Práctica de la Geología Aplicada a la Ingeniería*, Moscú.
- Denver H. (1985), *“Settlement calculation for footings on sand”*,
- Damy, J. (1985). *“Integración de las superficies de Boussinesq, Westergaard y Fröhlich, sobre superficies poligonales de cualquier forma, cargadas con fuerzas verticales uniformemente repartidas”*. Rev. Ingeniería, Vol. LV, N° 1: 82-86.
- ISE3D (2022), *“Programa de interacción estática suelo estructura”*. Realizado por Héctor Sanginés, Agustín Demeneghi y Armando Hermosillo.
- Terzaghi, K. V. (1943), *“Theoretical Soil Mechanics”*, New York, USA: John Wiley and Sons, Inc.
- Zeevaert, L. (1973), *“Foundation engineering for difficult subsoil conditions”*, Van Nostrand Reinhold Company. Estados Unidos de América.
- Zeevaert, L. (1980), *“Interacción suelo-estructura de cimentaciones superficiales y profundas, sujetas a cargas estáticas y sísmicas”*, Editorial Limusa, México, D.F.