



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

HIPERESPACIOS DE CONJUNTOS ORILLA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
M. EN C. JORGE ENRIQUE VEGA ACEVEDO

DIRECTOR DE LA TESIS:  
DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

DR. RODRIGO JESÚS HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UAM-I

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO DE 2021.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

En estas breves líneas me gustaría plasmar el agradecimiento que siento hacia las personas, instituciones y programas que me apoyaron a lo largo de la elaboración de este trabajo.

En primer lugar, a mis padres, que desde mis primeros pasos me han guiado con amor y disciplina, para formarme como un hombre de bien, espero que algún día estén orgullosos de mí.

A mis hermanos, que desde pequeños, me han guiado con su ejemplo, escuchándome y aconsejándome.

A mi novia Catalina Lara García (Katy), que con su amor, paciencia y comprensión, jamás dudó en hacerme ver mis errores y a la vez darme esa palabra de aliento que necesitaba.

A mis compañeros becarios del IMATE, con los que conviví tanto en estos años, que al pasar del tiempo se volvieron mis grandes amigos, de los cuales me gustaría destacar a Mindy, a Diego y a Mario.

A mis compañeros y amigos dentro del grupo de trabajo, Jimmy, Erick, Emmanuel, Daniel, Edder y José María, con los cuales compartí agradables momentos y siempre nos pudimos ayudar mutuamente.

Al Dr. Alejandro Illanes, que con mucha paciencia y sabiduría me ha guiado en la teoría de continuos y siempre ha sido mi modelo a seguir como matemático, espero algún día llegar a ser como él.

A la Dra. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla, mi tutora, que me apoyo creyendo en mí desde mis primeros pasos en el posgrado, que con la paciencia de un santo y su expertis me ha guiado lo largo de mis estudios culminando en la elaboración de este trabajo, con la meta de superar mis deficiencias y

potenciar mis cualidades. Nunca olvidaré sus sabios consejos.

Al Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano, miembro de mi comité tutor, que siempre estuvo dispuesto a ayudarme y muchas veces hizo más de lo que le correspondía, siempre le estaré agradecido.

Al Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez, miembro de mi comité tutor, que con sus aportaciones, sugerencias, en especial en el trabajo que realizamos juntos para el último capítulo de esta tesis, me ayudó mucho al darme confianza y culminar este trabajo.

A todos mis profesores que me formaron a lo largo de mi carrera académica, mis amigos y conocidos, que tocaron y pasaron por mi vida, que con un granito de arena me ayudaron a formarme como ser humano.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por brindarme una beca de lugar y dejarme formar parte de su comunidad como becario.

A los proyectos “Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos III” (IN106319) del PAPIIT, DGAPA, UNAM; y “Teoría de Continuos e Hiperespacios” (A1-S-15492) del CONACYT, que apoyaron este trabajo.

Al CONACYT, por brindarme la beca con número (487053), sin la cual este trabajo no hubiera sido posible.

# Índice General

Introducción	VII
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2. Árboles y Dendritas</b>	<b>7</b>
2.1. Definiciones y Preliminares . . . . .	7
2.2. El hiperespacio $NC^*(X)$ , cuando $X$ es un árbol . . . . .	16
2.3. $NC^*(X)$ no tiene hiperespacio único. . . . .	32
<b>3. Gráficas finitas</b>	<b>35</b>
3.1. Modelos de $NC^*(X)$ . . . . .	35
3.2. Compacidad de $NC^*(X)$ en gráficas finitas . . . . .	84
3.3. Conexidad Local de $NC^*(X)$ en gráficas finitas . . . . .	95
<b>4. Dendritas</b>	<b>107</b>
4.1. Conexidad de $NC^*(X)$ en dendritas . . . . .	107
4.2. Dendritas con conjunto de puntos terminales denso . . . . .	115
4.2.1. Dendritas con $NC^*(X)$ totalmente desconexo . . . . .	116
4.2.2. Dendritas con $NC^*(X) \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . . . . .	116



# Introducción

El área de estudio de este trabajo es la Teoría de Continuos e Hiperespacios, razón por la cual el lector debe tener los conocimientos previos que dan los cursos de Topología de la Licenciatura en Matemáticas y los cursos de Teoría de Continuos e Hiperespacios de la Maestría en Ciencias Matemáticas. Los resultados que salgan de estos temarios los demostraremos a menos que se desvíen de nuestro objetivo, en ese caso solo los citaremos para que el lector interesado pueda revisarlos.

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo  $X$ , los dos hiperespacios más importantes son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío de } X\} \text{ y}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

A estos hiperespacios se les dota de la llamada métrica de Hausdorff  $H$ , de la cual hablaremos en el capítulo 1.

A lo largo de la historia, se han definido muchos tipos de hiperespacios, con ellos se puede estudiar mejor la estructura de los continuos en los que se definen. Siguiendo esta línea de investigación, este trabajo trata de estudiar al siguiente hiperespacio de los conjuntos de no corte,  $NC^*(X)$ .

Dados un continuo  $X$  y  $A \in C(X)$ , decimos que  $A$  *no corta a*  $X$  si  $X \setminus A$  es conexo. Definimos:

$$NC^*(X) = \{A \in C(X) : A \text{ no corta a } X\}.$$

Este hiperespacio fue introducido y considerado en [2] y en [7]. A lo largo de esta tesis vamos a estudiar las propiedades que tiene este hiperespacio y las relaciones que tiene con el espacio  $X$ .

El primer capítulo de este trabajo consta de los resultados preliminares para el desarrollo del mismo.

En el segundo capítulo estudiaremos el hiperespacio  $NC^*(X)$ , cuando  $X$  es un árbol, algunos resultados son generales para dendritas.

En el tercer capítulo estudiaremos el hiperespacio  $NC^*(X)$ , cuando  $X$  es una gráfica finita.

En el cuarto capítulo veremos algunas propiedades del hiperespacio  $NC^*(X)$ , cuando  $X$  es una dendrita y más generalmente para continuos localmente conexos.

# Capítulo 1

## Preliminares

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo, no vacío con más de un punto. Dado un continuo  $(X, d)$ , definimos:

$$C(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado, conexo y no vacío}\} \text{ y}$$

$$NC^*(X) = \{A \in C(X) : X \setminus A \text{ es conexo}\}.$$

Dadas  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in X$  y  $A \in C(X)$  definimos **la nube de radio  $\varepsilon$  en  $A$**  como  $N(\varepsilon, A) = \{q \in X : \text{existe } p \in A \text{ tal que } d(p, q) < \varepsilon\}$  y **la bola de radio  $\varepsilon$  en  $p$**  como  $B(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p, q) < \varepsilon\}$ . Consideramos a estos hiperespacios con la **métrica de Hausdorff** definida de la siguiente manera:  $H : C(X) \times C(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , como  $H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$ . Sabemos por [17, Teorema (0.2), p. 2] que  $H$  es una métrica para  $C(X)$ .

**Convención 1.1.** *De ahora en adelante, cuando escribamos  $C(X)$  nos referimos al espacio  $C(X)$  con la topología inducida por la métrica de Hausdorff y  $NC^*(X)$  al espacio con la topología inducida por la métrica del subespacio en  $C(X)$ .*

Veamos primero algunas definiciones con respecto a las gráficas finitas.

**Definición 1.2.** [18, Definición 9.3, p.141] Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $A \subseteq X$  y  $\beta$  un cardinal. Decimos que  **$A$  es de orden menor o igual a  $\beta$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ , si para cualquier  $U \in \tau$  tal que  $A \subseteq U$ , existe  $V \in \tau$  tal que  $A \subseteq V \subseteq U$  y  $|\text{Fr}(V)| \leq \beta$ .

Decimos que  **$A$  es de orden  $\beta$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) = \beta$ , si  $\text{ord}(A, X) \leq \beta$  y  $\text{ord}(A, X) \neq \alpha$  para todo cardinal  $\alpha < \beta$ .

**Observación 1.3.** *La Definición 1.2 es conocida como el **orden de Menger-Urysohn**, o equivalentemente al orden en sentido clásico ([3, p.229]), es decir, el número de arcos que emanan de  $p$  y que sólo se intersectan en ese punto (Lema 1.6).*

**Definición 1.4.** *Una **gráfica finita** es un continuo  $X$  que se puede poner como una unión finita de arcos de manera que cada dos de ellos se intersectan en un conjunto finito (el vacío se considera como un conjunto finito).*

**Definición 1.5.** [18, Definición 9.8, p.143] *Dado un entero  $n \geq 3$ , un  **$n$ -odo simple** es un espacio el cual es homeomorfo al cono sobre un espacio discreto de  $n$  puntos. Si  $Z$  es un  $n$ -odo simple, entonces el único punto de  $Z$  con orden mayor o igual a 3 en  $Z$  lo llamaremos el **vértice** de  $Z$ . Es claro que un  $n$ -odo simple es una gráfica finita y a un 3-odo simple lo llamaremos un **triodo simple**.*

**Lema 1.6.** *Dada  $X$  una gráfica finita y  $p \in X$  definimos el **orden de  $p$  en  $X$**  como el número natural  $n$  tal que  $p$  tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un  $n$ -odo, de manera que el vértice del  $n$ -odo se corresponda con  $p$ , aquí daremos la posibilidad de que el orden sea 1 o 2, para el caso que sea 2, estaremos entendiendo que  $p$  tiene una vecindad que es un arco pero que  $p$  no queda en la orilla de éste, y para el caso de que el orden sea 1, estaremos entendiendo que  $p$  tiene una vecindad que es un arco y  $p$  está en la orilla de él. Denotaremos por  $ord_X(p)$  al orden del punto  $p$  en  $X$ .*

A continuación definiremos algunos conjuntos importantes.

**Definición 1.7.** *Dado un continuo  $X$  definimos:*

- (1)  $E(X) = \{x \in X : ord(x) = 1\}$  como el conjunto de los puntos terminales;
- (2)  $O(X) = \{x \in X : ord(x) = 2\}$  como el conjunto de los puntos ordinarios;
- (3)  $R(X) = \{x \in X : ord(x) \geq 3\}$  como el conjunto de los puntos de ramificación;
- (4)  $Q(X) = \{x \in X : X \setminus \{x\} \text{ no es conexo}\}$  como el conjunto de los puntos de corte.

**Definición 1.8.** *Dada una gráfica finita  $X$  definimos:*

- (1) Una **arista** es:
  - (a) un arco que une a un par de puntos no ordinarios y que sólo sus extremos son puntos no ordinarios;
  - (b) una circunferencia con a lo más un punto de ramificación en ella.
- (2) Un **nodo** es un punto  $p$  tal que  $p \in R(X) \cup E(X)$ ;
- (3) Un **pelo** en  $X$  es una arista  $L$  de  $X$  tal que  $L$  es un arco con puntos extremos  $p$  y  $e$  donde  $p \in R(X)$  y  $e \in E(X)$ .
- (4) Un **lazo** en  $X$  es una arista  $L$  de  $X$  tal que  $L$  es una circunferencia con un punto de ramificación.
- (5) Un **arco libre** es un arco  $A$  en  $X$  con puntos extremos  $x$  y  $y$  tal que  $A \setminus \{x, y\}$  es un conjunto abierto en  $X$ .

Sea  $X$  una gráfica finita y  $d$  la distancia de longitud del arco, es decir, que  $X$  tiene una métrica de tal manera que todas sus aristas tienen medida 1, que la métrica se comporta como la longitud del arco. Sabemos por [16, Teorema 13.4, p.73] que cualquier gráfica finita se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$ , entonces consideramos la longitud del arco con la métrica inducida por su inclusión en  $\mathbb{R}^3$ .

**Observación 1.9.**  *$X$  tiene una métrica convexa.*

*Demostración.*

Mostremos este hecho haciendo inducción sobre el número de aristas de la gráfica.

Para  $n = 1$ , si la gráfica  $X$  es un arco, tiene la métrica convexa natural, y si es una circunferencia tiene la longitud del arco.

Ahora bien, si  $X$  es una gráfica con  $n + 1$  aristas, tomemos una arista  $v$  tal que sea un lazo o que tenga como uno de sus extremos un punto terminal. De la elección de  $v$ , tenemos que la gráfica  $Y$  que resulta de quitarle  $v$  a  $X$  es conexa. Sea  $p$  el vértice de  $v$  que está en  $Y$

Si  $v$  es un pelo, por hipótesis de inducción, tenemos que  $Y = X \setminus \{v\}$  tiene una métrica convexa  $d$  y sea  $h : v \rightarrow [0, 1]$  un homomorfismo tal que  $h(0) = p$ . Definamos  $d'(x, y)$  de la siguiente manera:

$$d'(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{si } x, y \in X; \\ |h(x) - h(y)| & \text{si } x, y \in v; \\ d(x, p) + h(y) & \text{si } x \in X \setminus \{v\} \text{ y } y \in v. \end{cases}$$

Si  $v$  es un lazo, Tomemos  $q \in v \setminus \{p\}$  donde tenemos dos arcos de  $p$  a  $q$  en  $v$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  para cada arco consideremos los homomorfismo  $h : \alpha \rightarrow [0, 1]$  tal que  $h(0) = p$  y  $h(q) = 1$ ,  $g : \beta \rightarrow [0, 1]$  tal que  $g(0) = p$  y  $g(q) = 1$ . Definamos  $d'(x, y)$  de la siguiente manera:

$$d'(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{si } x, y \in X; \\ |h(x) - h(y)| & \text{si } x, y \in \alpha; \\ |g(x) - g(y)| & \text{si } x, y \in \beta; \\ d(x, p) + h(y) & \text{si } x \in X \setminus \{v\} \text{ y } y \in \alpha; \\ d(x, p) + g(y) & \text{si } x \in X \setminus \{v\} \text{ y } y \in \beta; \\ h(x) + g(y) & \text{si } x \in \alpha \setminus \{q\} \text{ y } x \in \beta \setminus \{q\}. \end{cases}$$

En ambos casos, hemos definido una métrica convexa para la gráfica  $X$ . □

Ahora, daremos algunos resultados sobre gráficas finitas y espacios localmente conexos, que utilizaremos más adelante.

**Definición 1.10.** *Un espacio topológico  $X$  es **localmente conexo en un punto  $p$** , si para todo abierto  $U$  que contiene a  $p$  existe un abierto conexo  $V$  tal que  $p \in V \subseteq U$ . Un espacio topológico  $X$  es **localmente conexo** si es localmente conexo en  $p$  para todo elemento  $p \in X$ .*

**Teorema 1.11.** *[18, Teorema 8.23, p.130] Los continuos localmente conexos no degenerados son arcoconexos.*

**Teorema 1.12.** *[18, Teorema 8.26, p.132] Cualquier subconjunto abierto conexo de un continuo localmente conexo es arcoconexo.*

**Teorema 1.13.** *[21, Teorema 27.9, p.200]  $X$  es localmente conexo si y sólo si las componentes de los conjuntos abiertos son abiertas.*

**Definición 1.14.** *Un espacio topológico  $X$  es **conexo en pequeño en un punto  $p$  en  $X$** , si para todo abierto  $U$  de  $X$  que tiene a  $p$  existe un conexo  $M$  de  $X$  tal que  $p \in \text{int}(M) \subseteq M \subseteq U$ . Un espacio topológico  $X$  es **conexo en pequeño** si es conexo en pequeño en  $p$  para todo elemento  $p \in X$ .*

**Teorema 1.15.** *[15, Teorema 6.6, pp.58-59] Sea  $X$  un continuo,  $X$  es localmente conexo en todo punto  $x \in X$  si y sólo si  $X$  es conexo en pequeño en todo punto  $x \in X$ .*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Si  $X$  es localmente conexo en cada uno de sus puntos, entonces por definición  $X$  es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

$\Leftarrow$ ) Sea  $X$  un continuo conexo en pequeño, veremos que  $X$  es localmente conexo. Para demostrar esto usaremos el Teorema 1.13 y probaremos que las componentes de los abiertos son abiertas.

Sean  $U$  un abierto en  $X$ ,  $C$  cualquier componente de  $U$  y  $p \in C$  punto arbitrario. Como  $X$  es conexo en pequeño en  $p$  y  $p \in C \subset U$ , se tiene que existe una vecindad conexas  $N_p$  de  $p$  tal que  $p \in \text{int}(N_p) \subset N_p \subset U$ .

Dado que  $C$  es componente de  $U$  y  $p \in (N_p \cap C) \neq \emptyset$ , entonces  $N_p \subset C$ . Como  $p \in \text{int}(N_p) \subset C$ , se tiene que la componente  $C$  es abierta en  $X$ . Por el Teorema 1.13, concluimos que  $X$  es localmente conexo en todo punto.  $\square$

**Proposición 1.16.** *[18, Proposición 9.4, p.142] Si  $X$  es un continuo tal que  $\text{ord}_X(x) < \aleph_0$  (i.e.  $\text{ord}_X(x) = n$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ ) para todo  $x \in X$ , entonces cualquier subcontinuo de  $X$  es localmente conexo. Más aún, cualquier subcontinuo de una gráfica finita es un continuo localmente conexo.*

**Proposición 1.17.** *[18, Proposición 9.5, p.142] Si  $X$  es un continuo, entonces  $\text{ord}_X(x) \leq 2$  para todo  $x \in X$  si y sólo si  $X$  es un arco o una curva cerrada simple.*

**Corolario 1.18.** *[18, Corolario 9.6, p.142] Un continuo  $X$  es una curva cerrada simple si y sólo si cada punto de  $X$  es de orden 2 en  $X$ .*

**Teorema 1.19.** *[18, Teorema 9.10, p.144] Un continuo  $X$  es una gráfica finita si y sólo si se cumplen (1) y (2):*

- (1)  $ord_X(x) < \aleph_0$ , para todo  $x \in X$ ;
- (2)  $ord_X(x) \leq 2$ , para todo  $x \in X$ , excepto una cantidad finita.

**Proposición 1.20.** [18, Corolario 9.10.1, p.145] *Los subcontinuos de las gráficas finitas son gráficas finitas.*

**Teorema 1.21.** [18, Teorema 9.12, p.146] *Un continuo  $X$  es una gráfica finita si y sólo si  $ord(A, X) < \aleph_0$  para toda  $A \in C(X)$ .*

**Lema 1.22.** *Un continuo  $X$  es una gráfica finita si y sólo si cada punto  $p$  de  $X$  tiene una base de vecindades que son una gráfica finita.*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Como  $X$  es locamente conexo y compacto, cada punto  $p$  de  $X$  tiene una base de vecindades cerradas y conexas, es decir, una base de vecindades de subcontinuos de  $X$  y por la Proposición 1.20 es una base de vecindades que son una gráfica finita.

$\Leftarrow$ ) Sea  $p \in X$ . Veamos que se cumplen (1) y (2) del Teorema 1.19.

(1) Por hipótesis  $p$  tiene una base de vecindades  $\mathcal{B}$  que son una gráfica finita. De manera que para todo  $V \in \mathcal{B}$   $ord_V(p) < \aleph_0$ , como  $p \in int(V) \subset V$ , tenemos que  $ord_X(p) < \aleph_0$ .

(2) Supongamos por el contrario, que existe un conjunto infinito  $P$  tal que para toda  $p \in P$  el  $ord_X(p) > 2$ . Sea  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión convergente de puntos diferentes entre si de  $P$ , tal que  $p_i \rightarrow q$  y sea  $W$  una vecindad de  $q$  que es una gráfica finita. Como  $q \in int(W) \subset W$  y  $p_i \rightarrow q$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$ ,  $p_n \in int(W) \subset W$ , de manera que  $ord_W(p_n) > 2$  y la Proposición 1.20 no se cumple en  $W$ ; lo cual es una contradicción. Por tanto,  $ord_X(x) \leq 2$ , para todo  $x \in X$ , excepto una cantidad finita.

Como (1) y (2) se cumplen,  $X$  es una gráfica finita.

□

# Capítulo 2

## Árboles y Dendritas

En este capítulo vamos a estudiar el hiperespacio  $NC^*(X)$ , cuando  $X$  es un árbol, algunos resultados son generales para dendritas, sin embargo el Capítulo 4, está enfocado a profundizar en resultados exclusivos de dendritas.

### 2.1. Definiciones y Preliminares

Iniciaremos dando unos resultados previos que nos serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

**Definición 2.1.** [18, Definición 9.25, p.153]  $X$  es un **árbol**, o una **gráfica acíclica**, si  $X$  es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

**Definición 2.2.** [18, Definición 10.1, p.165] Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

**Definición 2.3.** [15, Definición 4.1, p.27] Un continuo  $X$  es **unicoherente** si para cualesquiera dos subcontinuos  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $A \cup B = X$  se tiene que  $A \cap B$  es conexo.

**Definición 2.4.** [15, Definición 4.2, p.27] Un continuo  $X$  es **hereditariamente unicoherente** si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

**Definición 2.5.** [15, Definición 4.3, p.27] Un continuo  $X$  es un **dendroide** si es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.

**Teorema 2.6.** [10, Teorema 6.7, p.97] Para un continuo  $X$  es equivalente ser una dendrita y ser un dendroide localmente conexo.

Por el Teorema 2.6, tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.7.** Una *dendrita* es un dendroide localmente conexo.

**Nota 2.8.** Notemos que un árbol es un continuo localmente conexo que no tiene curvas cerradas simples. Por lo tanto, un árbol es una dendrita.

**Proposición 2.9.** Los subcontinuos de los árboles son árboles.

*Demostración.*

Sea  $A$  un subcontinuo de  $X$ . Por la Proposición 1.20, tenemos que  $A$  es una gráfica finita. Si en  $A$  contuviera una curva cerrada simple, implicaría que  $X$  contiene una curva cerrada simple; lo cual es una contradicción, ya que  $X$  es un árbol. Por lo tanto,  $A$  es un árbol. □

**Lema 2.10.** [15, Lema 4.4, p.28] Si  $X$  es un dendroide y  $a, b \in X$  con  $a \neq b$ , entonces existe un único arco en  $X$  que los une el cual vamos a denotar por  $ab$  (para unificar notación denotaremos  $aa = \{a\}$ ).

*Demostración.*

Supongamos que existen dos arcos diferentes de  $a$  a  $b$  que llamaremos  $A_1$  y  $A_2$ . Entonces,  $\{a, b\} \subset A_1$  y  $\{a, b\} \subset A_2$ . Por tanto,  $\{a, b\} \subset A_1 \cap A_2$ . Como  $X$  es hereditariamente unicoherente,  $A_1 \cap A_2 \in C(X)$ . Como  $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ , entonces  $A_1 \cap A_2$  es un subarco de  $A_1$  que contiene a los puntos  $\{a, b\}$ , de modo que  $A_1 \cap A_2 = A_1$ . De manera análoga podemos probar que  $A_1 \cap A_2 = A_2$ . Por tanto,  $A_1 = A_2$ . □

**Lema 2.11.** [15, Lema 4.5, p.28] Los subcontinuos de los dendroides son arcoconexos.

*Demostración.*

Sea  $A$  un subcontinuo de  $X$  y sean  $a, b \in A$ . Tenemos que demostrar que  $ab \subset A$ . Como  $a, b \in A$  y como  $X$  es hereditariamente unicoherente, entonces  $ab \cap A \in C(X)$ . Entonces,  $ab \cap A$  es un subarco de  $ab$  que tiene a  $a$  y  $b$ . Por lo que,  $ab \cap A = ab \subset A$ .

De modo que  $A$  es arconexo. □

**Corolario 2.12.** [15, Corolario 4.6, p.29] *Los subcontinuos de los dendroides son dendroides.*

*Demostración.*

Sea  $X$  un dendroide y  $A$  un subcontinuo de  $X$ . Como  $X$  es hereditariamente unicoherente,  $A$  es hereditariamente unicoherente. Por el Lema 2.11,  $A$  es arcoconexo. Por tanto,  $A$  es un dendroide.  $\square$

**Lema 2.13.** [15, Lema 4.16, p.33] *Sean  $X$  un dendroide,  $B \in C(X)$  y  $a$  un punto en  $X$ , entonces existe un único punto  $b \in B$  tal que  $ab \cap B = \{b\}$ , y además,  $b$  tiene la propiedad de que  $b \in ay$  para todo  $y \in B$ .*

*Demostración.*

Para cada punto  $y \in B$ , consideremos el arco  $ay$ , como  $y \in B$ , y  $X$  es un dendroide,  $ay \cap B$  es un subarco de  $ay$ .

De donde tenemos que  $ay \cap B = by$ , por lo que  $ay = ab \cup by$  y  $ab \cap B = \{b\}$ .

Consideremos ahora  $y' \in B$ ,  $y' \neq y$  y el arco  $ay'$ . Por lo que acabamos de mostrar, existe un punto  $b' \in B \cap ay'$  tal que  $ab' \cap B = \{b'\}$ . Como  $b', y \in B \in C(X)$  y  $B$  es arcoconexo, tenemos que  $ay' = ab' \cup b'y'$  y  $b'y \subset B$ . De modo que  $b' \in ab' \cup b'y$  es un arco de  $a$  a  $y$ . Por el Lema 2.10, tenemos que el arco  $ay$  es único, entonces  $ab' \cup b'y = ay = ab \cup by$ .

Veamos que  $b = b'$ .

Como  $ay \cap B = by$  y  $b'y \subset B \cap ay$ , entonces  $b'y \subset by$ . Por otro lado, dado que  $by \subset ay = ab' \cup b'y$ ,  $B \cap ab' = \{b'\}$  y  $B \cap ay = b'y$ , tenemos que  $by \subset b'y$ . Por lo tanto,  $b'y = by$ . Esto nos conduce a que  $b' = b$ , de donde  $b \in ay'$ .

De este modo hemos mostrado el Lema.  $\square$

**Teorema 2.14** (Teorema de golpes en la frontera). [18, Teorema 5.6, p.74] *Sean  $X$  un continuo,  $A$  un subconjunto propio y no vacío de  $X$  y  $C$  una componente de  $A$ . Entonces,  $\overline{C} \cap Fr(A) \neq \emptyset$ .*

**Lema 2.15** (Lema de las orejas). [18, Corolario 5.9, p.75] *Sean  $X$  un continuo y  $A$  un subcontinuo propio de  $X$ . Si  $K$  es una componente de  $X \setminus A$ , entonces  $K \cup A$  es un continuo.*

**Definición 2.16.** [18, Definición 5.11, p.76] Dado un espacio métrico  $S$ , un subcontinuo no degenerado  $A$  de  $S$ , se llama **continuo de convergencia** de  $S$  si existe una sucesión  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  de subcontinuos  $A_i$  en  $S$ , tales que  $A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$  y para cualquier  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A \cap A_i = \emptyset$ .

**Lema 2.17.** Si  $X$  es un dendroide no localmente conexo, entonces  $X$  contiene un continuo de convergencia.

*Demostración.*

Como  $X$  no es localmente conexo por el Teorema 1.15,  $X$  no es conexo en pequeño, por tanto, existe  $p \in X$  tal que  $X$  no es conexo en pequeño en  $p$ . De esta manera, tenemos que existe  $U$  abierto en  $X$  tal que para toda vecindad  $M$  de  $p$  contenida en  $U$ ,  $M$  no es conexa.

Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B(\varepsilon, p)} \subsetneq U$ . Sea  $C_0$  la componente de  $U$  que tiene a  $p$ , por la forma en la que escogimos  $U$ ,  $p \notin \text{int}(C_0)$ , entonces  $B(\delta, p)$  no está contenida en  $C_0$  para ninguna  $\delta > 0$ .

Vamos a construir de manera inductiva lo siguiente:

- (a) Una sucesión de números naturales  $\frac{1}{\varepsilon} < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ;
- (b) Una sucesión de componentes no degeneradas  $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $U$ ;
- (c) Una sucesión de puntos  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Tales que si  $B_i = B(\frac{1}{n_i}, p)$  se cumple lo siguiente:

- (1)  $p_i \in B_i \cap C_i$ , para toda  $i \in \mathbb{N}$ ;
- (2)  $B_i \cap (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1}) = \emptyset$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ ;
- (3)  $C_i \neq C_0$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .

Para  $i = 1$ . Sea  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{\varepsilon} < n_1$ .

Como  $B_1$  no está contenida en  $C_0$ , entonces existe  $p_1 \in B_1$  tal que  $p_1 \notin C_0$ . Sea  $C_1$  la componente de  $U$  que tiene a  $p_1$ . Entonces se cumple que  $p_1 \in B_1 \cap C_1$  y que  $C_1 \cap C_0 = \emptyset$ .

Para  $i > 1$ . Supongamos ahora que ya hemos construido un conjunto finito de números naturales  $\{n_1, n_2, \dots, n_i\}$ , un conjunto finito de puntos

$\{p_1, p_2, \dots, p_i\}$  y un conjunto finito de componentes  $\{C_1, C_2, \dots, C_i\}$  de  $U$  con la propiedades mencionadas.

Como  $C_i$  es cerrado en  $U$ , al ser una componente de  $U$  y como  $U$  es un abierto de  $X$ , tenemos que  $X \setminus C_i$  es un abierto de  $X$  tal que  $p \in U \setminus C_i$ . Por tanto, existe  $n_{i+1} \in \mathbb{N}$  tal que  $n_{i+1} > n_i$  y que  $B_{i+1} \cap C_i = \emptyset$ . Dado que  $B_i \cap (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1}) = \emptyset$ , tenemos que  $B_{i+1} \cap (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_i) = \emptyset$ . Como  $B_{i+1}$  no está contenido en  $C_0$  existe  $p_{i+1} \in B_{i+1} \setminus C_0$ . Sea  $C_{i+1}$  la componente de  $U$  que tiene a  $p_{i+1}$ . De donde tenemos que  $C_{i+1} \cap C_0 = \emptyset$ .

Hemos construido la sucesiones que queríamos en los puntos (a), (b) y (c) que cumplen los puntos (1), (2) y (3). Así hemos demostrado que existen abiertos  $U$  y  $V = B(\varepsilon, p)$  en  $X$ , una sucesión  $\{p_n\}$  en  $V$  y componentes diferentes  $C_0, C_1, C_2, \dots$  de  $U$  tales que  $p \in (C_0 \cap \bar{V}) \subset U$ ,  $p_n \in (C_n \cap V)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_n \rightarrow p$ .

Ahora bien, para toda  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $D_n$  la componente de  $V$  que contiene a  $p_n$ .

Como  $D_n$  es un conexo contenido en  $U$  que tiene a  $p_n$ , entonces  $D_n \subset C_n$ . Dado que  $D_n \subset V$ , entonces  $\overline{D_n} \subset \bar{V}$ . Por tanto,  $\overline{D_n} \subset (\bar{V} \cap C_n) \subset U$ . Tomemos la sucesión  $\{\overline{D_n}\}_{n=1}^{\infty}$  en el compacto  $\bar{V}$ , entonces existe una subsucesión convergente  $\{\overline{D_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$  tal que  $\overline{D_{n_k}} \rightarrow D_0$ , donde  $D_0$  es un subcontinuo de  $X$  contenido en  $\bar{V}$ .

Puesto que para toda  $k \in \mathbb{N}$  tenemos que  $p_{n_k} \in D_{n_k}$ ,  $\overline{D_{n_k}} \rightarrow D_0$  y  $p_{n_k} \rightarrow p$ , entonces  $p \in D_0$ . Por lo que,  $D_0$  es un subcontinuo de  $U$  que tiene a  $p$ , por tanto,  $D_0 \subset C_0$ . Por el Teorema 2.14, tenemos que para toda  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{D_{n_k}} \cap Fr(V) \neq \emptyset$ . Elegimos  $q_{n_k} \in \overline{D_{n_k}} \cap Fr(V)$ , sin perdida de generalidad podemos suponer que la sucesión  $\{q_{n_k}\}$  converge a un punto  $q \in Fr(V)$ . Dado que  $\overline{D_{n_k}} \rightarrow D_0$  y que la sucesión  $\{q_{n_k}\}$  converge a  $q$ , entonces  $q \in (D_0 \cap Fr(V))$ .

Ahora bien, como  $p_{n_k} \in V$  y  $q_{n_k} \in Fr(V)$ , entonces  $p_{n_k} \neq q_{n_k}$ , donde  $\overline{D_{n_k}}$  es no degenerado y  $p_{n_k}, q_{n_k} \in \overline{D_{n_k}} \subset (C_{n_k} \cap \bar{V})$ . Como  $p_n \rightarrow p$ , entonces  $p_{n_k} \rightarrow p$ . Del mismo modo  $p \in V$  y  $q \in Fr(V)$ , entonces  $p \neq q$ , donde  $D_0$  es no degenerado y  $p, q \in D_0 \subset (C_0 \cap \bar{V})$ .

Si  $\overline{D_{n_k}} \cap D_0 \neq \emptyset$  para alguna  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $\emptyset \neq (\overline{D_{n_k}} \cap D_0) \subset (C_{n_k} \cap \bar{V}) \cap (C_0 \cap \bar{V}) \subset C_{n_k} \cap C_0$  para alguna  $k \in \mathbb{N}$ ; lo cual es una contradicción al punto

(3). Por tanto,  $\overline{D_{n_k}} \cap D_0 = \emptyset$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

De esta manera tenemos que existe una sucesión  $\{\overline{D_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$  de subcontinuos  $\overline{D_{n_k}}$  de  $X$  que convergen al continuo  $D_0$  no degenerado y para toda  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{D_{n_k}} \cap D_0 = \emptyset$ . Por tanto,  $D_0$  es un continuo de convergencia de  $X$ .  $\square$

**Lema 2.18.** *Si  $X$  es una dendrita,  $X$  no contiene continuos de convergencia.*

*Demostración.*

Supongamos por el contrario, que  $X$  contiene un continuo de convergencia, entonces existe una sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  de subcontinuos  $A_i$  en  $X$ , que converge a  $A$  y para cualquier  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A \cap A_i = \emptyset$ .

Sean  $x, y \in A$  con  $x \neq y$ . Como  $X$  es localmente conexo, existen  $U$  y  $V$  abiertos conexos ajenos tales que  $x \in U$ ,  $y \in V$ ,  $\text{diam}(U) > 0$  y  $\text{diam}(V) > 0$ , Tomemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\varepsilon, x) \subset U$  y  $B(\varepsilon, y) \subset V$ , dado que  $A_n \rightarrow A$ , entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $H(A_n, A) < \varepsilon$ , por lo que existen  $u \in A_n \cap B(\varepsilon, x) \subset U$  y  $v \in A_n \cap B(\varepsilon, y) \subset V$ . Como  $U$  y  $V$  son abiertos conexos, tenemos que el arco  $vy \subset V$  y el arco  $ux \subset U$ . Ahora, por el Lema 2.13, existe un único punto  $s \in vy \subset V$  tal que  $vy \cap A = \{s\}$  y un único punto  $t \in ux \subset U$  tal que  $ux \cap A = \{t\}$ . Como  $u, v \in A_n$ , el arco  $uv \subset A_n$ .

Sea  $B = tu \cup uv \cup vs$ . Como  $tu$ ,  $uv$  y  $vs$  son continuos, y además,  $u \in tu \cap uv$  y  $v \in uv \cap vs$ . Entonces,  $D = tu \cup uv \cup vs$  es un continuo.

Como  $A$  es un dendroide y  $t, s \in A$ , nuevamente por el Lema 2.11, tenemos que el arco  $ts$  está contenido en  $A$ .

**Afirmación 1.**  $B \cap ts$  no es conexo.

Tenemos que  $B \cap ts = (tu \cup uv \cup vs) \cap ts = (tu \cap ts) \cup (uv \cap ts) \cup (vs \cap ts)$ , como  $ts \subset A$ ,  $uv \subset A_n$ ,  $ut \cap A = \{t\}$  y  $vs \cap A = \{s\}$ , entonces  $(uv \cap ts) \subset A \cap A_n = \emptyset$ ,  $(tu \cap ts) = \{t\}$  y  $(vs \cap ts) = \{s\}$ , entonces  $B \cap ts = \{t, s\}$ , dado que  $t \in U$ ,  $s \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ , tenemos que  $t \neq s$ . Por lo que,  $B \cap ts$  no es conexo.

La Afirmación 1 es una contradicción al hecho de que  $X$  es hereditariamente unicoherente. La contradicción vino de suponer que  $X$  contiene un continuo de convergencia. Por lo tanto,  $X$  no contiene continuos de convergencia.  $\square$

Con los lemas 2.17 y 2.18 tenemos lo necesario para probar el siguiente resultado:

**Teorema 2.19.** *Todos los subcontinuos de las dendritas son dendritas.*

*Demostración.*

Sea  $X$  una dendrita y  $A$  un subcontinuo de  $X$ . Por el Corolario 2.12  $A$  es un dendroide. Si  $A$  no fuera localmente conexo por el Lema 2.17,  $A$  contendría un continuo de convergencia, esto implicaría que la dendrita  $X$  contiene un continuo de convergencia; lo cual contradice al Lema 2.18. De donde,  $A$  es localmente conexo y, por tanto,  $A$  es una dendrita. □

**Notación 2.20.** [18, Notación 6.2, pp.87-88] Dado  $X$  un espacio topológico y  $U, V$  subconjuntos de  $X$ . Escribimos  $X = U|_V$ , si  $X = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos, ajenos y no vacíos de  $X$ . Llamamos a  $U|_V$  una separación de  $X$ .

**Proposición 2.21.** [18, Proposición 6.3, p.88] Sea  $X$  un espacio topológico conexo, y sea  $C$  un subconjunto conexo de  $X$  tal que  $X \setminus C = A|_B$ . Entonces  $A \cup C$  y  $B \cup C$  son conexos. Más aún si  $X$  y  $C$  son continuos  $A \cup C$  y  $B \cup C$  son continuos.

**Teorema 2.22** (Teorema de existencia de puntos de no corte). [18, Teorema 6.6, pp.89-90] Todo continuo tiene al menos dos puntos que no son de corte.

**Teorema 2.23.** [18, Teorema 6.17, p.96] Un continuo  $X$  es un arco si y sólo si  $X$  tiene exactamente dos puntos que no son de corte.

**Teorema 2.24.** [18, Teorema 10.7, p.168] Un continuo  $X$  no degenerado es una dendrita si y sólo si todos los puntos de  $X$  son de corte o terminales.

**Teorema 2.25.** [18, Teorema 10.23, pp.174-175] Todos los puntos de cualquier dendrita  $X$  tienen orden numerable.

**Teorema 2.26.** [18, Teorema 10.23, pp.174-175] El conjunto de los puntos de ramificación de una dendrita es numerable.

**Definición 2.27.** [20, 13, p.19] Un conjunto conexo  $M$  es **regular en un punto  $p$** , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un abierto conexo  $V$  tal que  $p \in V$ ,  $\text{diam}(V) < \varepsilon$  y tal que  $\text{Fr}(V)$  es un conjunto finito de puntos. Un espacio topológico  $X$  es **regular** si es regular en  $p$  para todo elemento  $p \in X$ .

**Teorema 2.28.** [15, Teorema 4.32, pp.43-44] Sea  $X$  una dendrita, entonces  $X$  es regular.

**Lema 2.29.** Sea  $X$  un continuo localmente conexo y sea  $p$  un punto de no corte de  $X$ . Entonces para toda  $\varepsilon > 0$ , existe un abierto conexo  $U$  de  $X$  tal que  $p \in U$ ,  $\text{diam}(U) < \varepsilon$  y  $X \setminus U$  es conexo.

*Demostración.*

Sean  $p$  un punto de no corte de  $X$  y  $\varepsilon > 0$ . Consideremos  $B(\frac{\varepsilon}{2}, p)$ , entonces  $X \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}, p) \subset X \setminus \{p\}$ . Sea  $x \in X \setminus \{p\}$ , dado que  $X$  es localmente conexo, existe  $U_x$  abierto conexo de  $X$  tal que  $x \in U_x \subset \bar{U}_x \subset X \setminus \{p\}$ . De donde,  $\{U_x : x \in X \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}, p)\}$  es una cubierta abierta de  $X \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}, p)$ . Como  $X \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}, p)$  es compacto, existen puntos  $x_1, \dots, x_n \in X \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}, p)$  tales que  $X \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}, p) \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n} \subset \bar{U}_{x_1} \cup \dots \cup \bar{U}_{x_n}$  con  $x_i \in \bar{U}_{x_i}$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dado que  $p$  es un punto de no corte de  $X$  y  $X$  es localmente conexo, por el Teorema 1.12, tenemos que  $X \setminus \{p\}$  es arcoconexo, por lo que para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  existe un arco  $\alpha_i$  tal que  $\alpha_i([0, 1]) \subset X \setminus \{p\}$ ,  $\alpha_i(0) = x_i$  y  $\alpha_i(1) = x_{i+1}$  (Ver Figura 2.1). Definimos  $A_i = \bar{U}_{x_i} \cup \alpha_i([0, 1]) \cup \bar{U}_{x_{i+1}}$ .

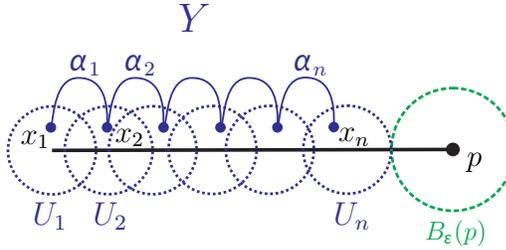


Figura 2.1: Conjunto  $Y$ .

**Afirmación 1.**  $A_i$  es un continuo y  $p \notin A_i$  para toda  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Dado que para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\bar{U}_{x_i} \subset X \setminus \{p\}$  es un continuo y para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$   $\alpha_i([0, 1]) \subset X \setminus \{p\}$  es un continuo, y además, tenemos que  $x_i \in \bar{U}_{x_i} \cap \alpha_i([0, 1])$  y  $x_{i+1} \in \bar{U}_{x_{i+1}} \cap \alpha_i([0, 1])$ . Entonces,  $A_i = \bar{U}_{x_i} \cup \alpha_i([0, 1]) \cup \bar{U}_{x_{i+1}} \subset X \setminus \{p\}$  es un continuo para toda  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Definimos  $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$  y  $U = X \setminus Y$ .

**Observación 2.**  $Y$  es un continuo y  $Y \subset X \setminus \{p\}$ .

Por la Afirmación 1, para toda  $i \in \{1, \dots, n-1\}$   $A_i \subset X \setminus \{p\}$  es un continuo donde  $x_{i+1} \in A_i \cap A_{i+1}$ . Entonces,  $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \subset X \setminus \{p\}$  es un continuo.

**Afirmación 3.**  $U$  es un abierto tal que  $p \in U \subset B(\frac{\varepsilon}{2}, p)$ .

Como  $Y \subset X \setminus \{p\}$  es un continuo (Observación 2), tenemos que  $U = X \setminus Y$  es abierto.

Veamos que  $U \subset B(\frac{\varepsilon}{2}, p)$ . Como  $X \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}, p) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_{x_i} \subset Y$ , entonces  $U = X \setminus Y \subset B(\frac{\varepsilon}{2}, p)$ .

Sea  $W$  la componente de  $U$  que tiene a  $p$ . Como  $X$  es localmente conexo y  $U$  es abierto, por el Teorema 1.13, tenemos que  $W$  es abierto, al ser una componente  $W$  es un abierto conexo y  $\text{diam}(W) < \text{diam}(U) < \text{diam}(B(\frac{\varepsilon}{2}, p)) < \varepsilon$ . Solamente nos resta ver que  $X \setminus W$  es conexo.

Sea  $Z$  una componente de  $U$  tal que  $Z \neq W$ .

**Afirmación 4.**  $\bar{Z} \cap Y \neq \emptyset$ .

Como  $Z$  es una componente de  $U$ , por el Teorema 2.14, tenemos que  $\bar{Z} \cap \text{Fr}(U) \neq \emptyset$  y dado que  $Y = X \setminus U$ , entonces  $\text{Fr}(U) \subset Y$ . Por tanto,  $\bar{Z} \cap Y \neq \emptyset$ .

**Afirmación 5.**  $\bar{Z} \cap W = \emptyset$ .

Para toda  $w \in W$ ,  $W$  es un abierto que no interseca a  $Z$ , entonces  $w$  no está en  $\bar{Z}$ . Por tanto,  $W \cap \bar{Z} = \emptyset$ .

Definimos  $M = Y \cup \bigcup \{\bar{Z} : Z \text{ es componente de } U \text{ y } Z \neq W\}$ .

Veamos que  $M$  es conexo. Como para toda  $Z$  componente de  $U$  tal que  $Z \neq W$ , tenemos que  $\bar{Z}$  es conexo y por la Afirmación 4,  $\bar{Z} \cap Y \neq \emptyset$ , entonces  $M = Y \cup \bigcup \{\bar{Z} : Z \text{ es componente de } U \text{ y } Z \neq W\}$  es conexo.

Veamos que  $M = X \setminus W$ .

$\subseteq$ ) Sea  $x \in M$ , entonces  $x \in Y$  o  $x \in \bigcup \{\bar{Z} : Z \text{ es componente de } U \text{ y } Z \neq W\}$ . Si  $x \in Y$ , como  $Y = X \setminus U$  y  $W \subset U$ , entonces  $x \in X \setminus U \subset X \setminus W$ . Si  $x \in \bar{Z}$  para alguna  $Z$  componente de  $U$  y  $Z \neq W$ . Por la Afirmación 5,

tenemos que  $\overline{Z} \cap W = \emptyset$ , entonces  $x \in \overline{Z} \subset X \setminus W$ .

$\supseteq$ ) Sea  $x \in X \setminus W$ , entonces  $x \notin W$ . Si  $x \notin U$ , como  $Y = X \setminus U$ , entonces  $x \in Y$ . Si  $x \in U$ , como  $x \notin W$ , entonces  $x \in \overline{Z}$  para alguna componente  $Z$  de  $U$  tal que  $Z \neq W$ , de donde  $x \in \overline{Z}$ . Entonces,  $x \in \bigcup \{\overline{Z} : Z \text{ es componente de } U \text{ y } Z \neq W\}$ . Por lo que,  $x \in M$ .

Por lo tanto,  $X \setminus W = M$  es conexo. Lo cual concluye la demostración.  $\square$

**Definición 2.30.** Una arista en un árbol es **interna** si sus dos extremos son puntos de ramificación, en caso contrario, decimos que es una arista **externa**.

Con estos resultados estamos listos para iniciar el estudio del hiperespacio  $NC^*(X)$ , cuando  $X$  es un árbol.

## 2.2. El hiperespacio $NC^*(X)$ , cuando $X$ es un árbol

Iniciamos esta sección con un resultado que será de gran utilidad en el resto de la misma.

**Lema 2.31.** Sea  $X$  es un árbol,  $X$  tiene  $n$  aristas si y sólo si  $|E(X)| + |R(X)| = n + 1$ .

*Demostración.* Haremos esta prueba por inducción.

Para  $n = 1$ ,  $X$  tiene una arista si y sólo si  $X$  es el intervalo, en cuyo caso  $|E(X)| = 2$  y  $|R(X)| = 0$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  y supongamos que para todo número natural  $m$  que cumple  $1 \leq m \leq n$  se tiene que si  $X$  es un árbol con  $m$  aristas, entonces  $|E(X)| + |R(X)| = m + 1$ .

Veamos que  $X$  es un árbol con  $n+1$  aristas si y sólo si  $|E(X)| + |R(X)| = n+2$ .

Como  $X$  es un árbol tiene al menos dos puntos que son de no corte, sea  $e$  un punto de no corte, por el Teorema 2.24,  $e \in E(X)$ . Sea  $L$  la arista o pelo que tiene a  $e$ , entonces  $L$  tiene extremos  $p, e$  con  $p \in R(X)$  y  $e \in E(X)$ .

Consideremos  $Y = (X \setminus L) \cup \{p\}$ , entonces  $Y$  es cerrado y conexo, y por la Proposición 2.9 es un árbol.

**Caso 1.**  $ord_X(p) = 3$ .

En este caso  $p \in R(X)$  y  $p \notin R(Y)$ , de manera que  $Y$  tiene dos aristas menos que  $X$ , es decir,  $Y$  tiene  $n - 1$  arista (Ver Figura 2.2).

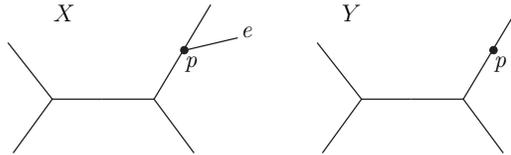


Figura 2.2: Árboles  $X$  y  $Y$ .

Por hipótesis de inducción  $Y$  tiene  $n - 1$  aristas si y sólo si  $|E(Y)| + |R(Y)| = n$ . Como  $X = Y \cup L$ , donde  $R(X) = R(Y) \cup \{p\}$  y  $E(X) = E(Y) \cup \{e\}$ , tenemos que  $|R(X)| + |E(X)| = |R(Y)| + |E(Y)| + 2 = n + 2$ .

**Caso 2.**  $ord_X(p) > 3$ .

En este caso  $p \in R(X) \cap R(Y)$  y  $e \in E(X) \setminus E(Y)$ , de manera que  $Y$  tiene una arista menos que  $X$ , es decir,  $Y$  tiene  $n$  arista (Ver Figura 2.3).

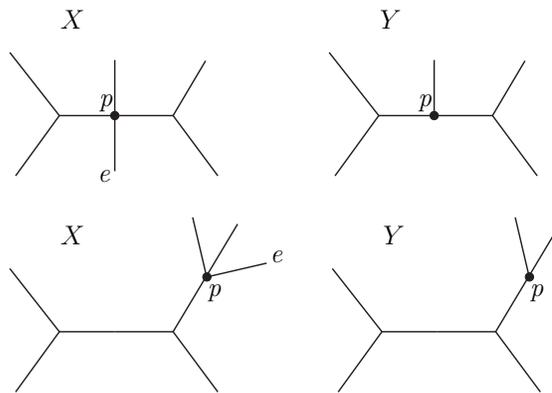


Figura 2.3: Árboles  $X$  y  $Y$ .

Por hipótesis de inducción  $Y$  tiene  $n$  aristas si y sólo si  $|E(Y)| + |R(Y)| = n + 1$ . Como  $X = Y \cup L$ , donde  $R(X) = R(Y)$  y  $E(X) = E(Y) \cup \{e\}$ , tenemos que  $|R(X)| + |E(X)| = |R(Y)| + |E(Y)| + 1 = n + 2$ .

En cualquier caso hemos mostrado que  $X$  tiene  $n + 1$  arista si y sólo si  $|R(X)| + |E(X)| = n + 2$  y con eso se termina la prueba.  $\square$

**Lema 2.32.** *Si  $X$  es una dendrita,  $A \in NC^*(X)$  y  $A \neq X$ , entonces  $|Fr(A)| = 1$ .*

*Demostración.*

**Afirmación 1.**  $Fr(A)$  es una dendrita.

Como  $A \in NC^*(X) \setminus \{X\}$ , entonces  $X \setminus A$  es un conexo no vacío, de donde  $\overline{X \setminus A}$  es un continuo. Dado que  $Fr(A) = A \cap \overline{X \setminus A}$ ,  $A$  es un continuo y  $X$  es hereditariamente unicoherente, tenemos que  $Fr(A)$  es un continuo y por el Teorema 2.19 es una dendrita.

Supongamos por el contrario, que  $|Fr(A)| \geq 2$ , sean  $q, r \in Fr(A)$ .

Como  $X$  es un continuo locamente conexo, existen  $U$  y  $V$  abiertos conexos ajenos tales que  $q \in U$ ,  $r \in V$ , dado que  $q, r \in Fr(A)$ , existen  $v \in V \cap X \setminus A$  y  $u \in U \cap X \setminus A$ . Por el Teorema 1.12, tenemos que el arco  $vr \subset V$  y el arco  $uq \subset U$ . Ahora, por el Lema 2.13, existe un único punto  $s \in vr \subset V$  tal que  $vs \cap Fr(A) = \{s\}$  y un único punto  $t \in uq \subset U$  tal que  $ut \cap Fr(A) = \{t\}$ . Como  $u, v \in X \setminus A$  nuevamente por el Teorema 1.12, el arco  $uv \subset X \setminus A$ .

Sea  $D = tu \cup uv \cup vs$ . Como  $tu$ ,  $uv$  y  $vs$  son continuos, y además,  $u \in tu \cap uv$  y  $v \in uv \cap vs$ . Entonces,  $D = tu \cup uv \cup vs$  es un continuo.

Por la Afirmación 1,  $Fr(A)$  es una dendrita y como  $t, s \in Fr(A)$ , tenemos que el arco  $ts$ , el único arco entre  $t$  y  $s$ , está contenido en la  $Fr(A)$ .

**Afirmación 2.**  $D \cap ts$  no es conexo.

Tenemos que  $D \cap ts = (tu \cup uv \cup vs) \cap ts = (tu \cap ts) \cup (uv \cap ts) \cup (vs \cap ts)$ , como  $ts \subset Fr(A)$ ,  $uv \subset X \setminus A$ ,  $ut \cap Fr(A) = \{t\}$  y  $vs \cap Fr(A) = \{s\}$ , entonces  $(uv \cap ts) = \emptyset$ ,  $(tu \cap ts) = \{t\}$  y  $(vs \cap ts) = \{s\}$  respectivamente, entonces  $D \cap ts = \{t, s\}$ , dado que  $t \in U$ ,  $s \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ , tenemos que  $t \neq s$ . Por lo que  $D \cap ts$  no es conexo.

La Afirmación 2 es una contradicción al hecho de que  $X$  es hereditariamente uncoherente. La contradicción vino de suponer que  $|Fr(A)| \geq 2$ . Por lo tanto,  $|Fr(A)| = 1$ . □

**Teorema 2.33.** *Sea  $X$  una dendrita y  $A \in C(X)$ . Entonces  $A \in NC^*(X)$  si y sólo si se cumple uno de los siguientes enunciados:*

- (1)  $A = X$ ;
- (2)  $A = \{e\}$  con  $e \in E(X)$ ;
- (3)  $A = X \setminus C$  donde  $C$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $p \in X \setminus E(X)$ .

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Si  $A = X$ , tenemos que  $X \setminus X = \emptyset$ , por lo cual  $A \in NC^*(X)$ . Si  $A = \{e\}$  con  $e \in E(X)$ , por el Teorema 2.24, tenemos que  $e$  es un punto de no corte y, por tanto,  $A \in NC^*(X)$ .

Si  $A = X \setminus C$  donde  $C$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $p \in X \setminus E(X)$ . Primero veamos que  $A \in C(X)$ . Como  $p \notin E(X)$  por el Teorema 2.24, tenemos que  $p \in Q(X)$  y  $X \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in M} C_i$  con  $M \subset \mathbb{N}$ ,  $|M| \geq 2$  y  $C_i$  las componentes de  $X \setminus \{p\}$ . De donde,  $C = C_m$  para alguna  $m \in M$ . Por lo que,  $A = (\bigcup_{j \in M \setminus \{m\}} C_j) \cup \{p\}$  y por el Lema 2.15 concluimos que  $A \in C(X)$ . Así mismo, tenemos que  $X \setminus A = C$  el cual es un conjunto conexo al ser componente de  $X \setminus \{p\}$ . Por tanto,  $A \in NC^*(X)$ . Lo cual concluye esta implicación.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $A \in NC^*(X)$ ,  $A \neq X$  y  $A \neq \{e\}$  para todo  $e \in E(X)$ . Como  $A \neq X$ , tenemos que  $Fr(A) \neq \emptyset$ .

Por el Lema 2.32, tenemos que  $|Fr(A)| = 1$ . Sea  $\{p\} = Fr(A)$ .

**Afirmación 1.**  $p \in Q(X)$ .

Notemos que  $A$  no puede ser degenerado, pues el Teorema 2.24 implicaría que  $A = \{e\}$  para alguna  $e \in E(X)$ ; lo cual es una contradicción. Como  $X \setminus A \neq \emptyset$  y abierto,  $A$  es no degenerado. Por lo tanto,  $X \setminus Fr(A) = X \setminus \{p\} = {}^A|_{X \setminus A}$  y  $p \in Q(X)$ .

Como  $p \in Q(X)$ , tenemos que  $X \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in M} C_i$  con  $M \subset \mathbb{N}$ ,  $|M| \geq 2$  y  $C_i$  las componentes de  $X \setminus \{p\}$ .

**Afirmación 2.** Si  $A \cap C_i \neq \emptyset$  para alguna  $i \in M$ , entonces  $C_i \subset A$ .

Supongamos por el contrario, que existe  $q \in C_i \setminus A$ . Como  $p \notin C_i$  existe  $a \in (A \setminus \{p\}) \cap C_i = \text{int}(A) \cap C_i \subset \text{int}(A)$ . Como  $C_i$  es abierto y conexo en  $X$ , por el Teorema 1.12 el arco  $qa \subset C_i$ , como  $q \notin A$  y  $a \in \text{int}(A)$  existe  $b \in \text{Fr}(A)$  tal que  $b \in qa \subset C_i$ . Entonces,  $b \in \text{Fr}(A)$  y  $b \neq p$  (Ver Figura 2.4); lo cual es una contradicción. Por tanto,  $C_i \subset A$ .

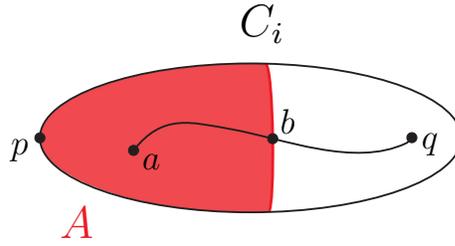


Figura 2.4: Conjuntos  $A$  y  $C_i$ .

Notemos que  $A \neq \{p\}$ , pues  $p \in Q(X)$  y, por tanto,  $\{p\} \notin NC^*(X)$ . De manera que  $A \cap C_i \neq \emptyset$  para alguna  $i \in M$ , sea  $K = \{j \in M : C_j \cap A \neq \emptyset\}$ , por la Afirmación 2, tenemos que  $A = (\bigcup_{j \in K} C_j) \cup \{p\}$ .

**Afirmación 3.**  $K = M \setminus \{m\}$  para alguna  $m \in M$ .

Como  $A \neq X$ , tenemos que  $K \subsetneq M$ . Supongamos por el contrario, que  $K = M \setminus N$  donde  $N \subset M$  y  $|N| \geq 2$ , entonces  $A = (\bigcup_{j \in K} C_j) \cup \{p\}$  y  $X \setminus A = \bigcup_{j \in N} C_j$ . Dado que  $|N| \geq 2$ , tenemos que  $X \setminus A$  no es conexo y  $A \notin NC^*(X)$ ; lo cual es una contradicción. Por tanto,  $K = M \setminus \{m\}$  para alguna  $m \in M$ .

Por las Afirmaciones 2 y 3 podemos concluir que  $A = X \setminus C$  donde  $C$  es componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $p \in Q(X)$ . Con esto terminamos la prueba del Teorema. □

**Definición 2.34.** [5, 2.2, p.74] Sea  $\{X_s\}_{s \in S}$  una familia de espacios topológicos disjuntos dos a dos, es decir,  $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$  con  $s \neq s'$ ; consideremos el conjunto  $X = \bigcup_{s \in S} X_s$  y la familia  $\mathcal{O}$  de conjuntos  $U \subset X$  tales que  $U \cap X_s$  es abierto en  $X_s$  para toda  $s \in S$ , la cual es una topología para  $X$ . Decimos

que  $X$  es la **suma de los espacios**  $\{X_s\}_{s \in S}$  y la denotamos por  $\bigoplus_{s \in S} X_s$ , o por  $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_k$  si  $S = \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Proposición 2.35.** Si  $X$  es el intervalo, entonces  $NC^*(X) \approx X$ .

*Demostración.*

Por [11, p.29-30]. Sabemos que  $C(I) = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \approx \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ . (Ver Figura 2.5).

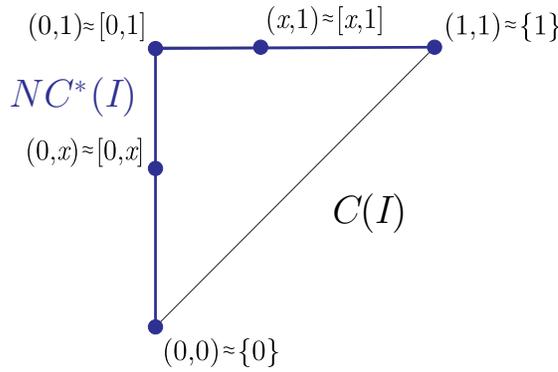


Figura 2.5:  $C(I)$ .

Por el Teorema 2.33,  $A \in NC^*(I)$  si y sólo si  $A \in \{[0, 1], \{0\}, \{1\}\}$  o  $A$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$  donde  $p \in (0, 1)$ , en este último caso  $A = [0, p]$  o  $A = [p, 1]$  de manera que

$$NC^*(X) = \{[0, y] : y \in [0, 1]\} \cup \{[x, 1] : x \in [0, 1]\} \approx \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$$

que es un arco. □

En el siguiente resultado discutiremos la estructura de  $NC^*(X)$ , si  $X$  es un árbol.

**Teorema 2.36.** Sea  $X$  un árbol distinto al intervalo  $[0, 1]$  con  $|R(X)| = m$  y  $|E(X)| = k$ . Entonces  $NC^*(X) \approx \mathcal{K} \oplus \mathcal{I}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{I}_k \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_{2m-2}$  donde  $\mathcal{K}$  es un  $k$ -odo simple para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{I}_i \approx [0, 1]$ , y para cada  $i \in \{1, \dots, 2m - 2\}$ ,  $\mathcal{J}_i \approx [0, 1]$ .

*Demostración.*

Primero veamos lo siguiente,  $X$  tiene  $m - 1$  aristas internas y  $k$  aristas externas. Como  $X$  es un árbol distinto al intervalo  $[0, 1]$ ,  $X$  tiene al menos un punto de ramificación. Por lo que no hay una arista que ambos extremos sean puntos terminales. De donde, hay tantas aristas externas como  $|E(X)| = k$ . Por el Lema 2.31, tenemos que  $X$  tiene  $(m + k) - 1$  aristas, ya vimos que  $X$  tiene  $k$  aristas externas. Por lo que,  $X$  tiene  $m - 1$  aristas internas.

Sea  $E(X) = \{e_1, \dots, e_k\}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , denotamos por  $[e_i, r_{e_i}]$  la arista externa que contiene a  $e_i$ . Definimos, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $f_i : [e_i, r_{e_i}] \rightarrow NC^*(X)$  dada por  $f_i(t) = [e_i, t]$  y  $g_i : [e_i, r_{e_i}] \rightarrow NC^*(X)$  dada por:

$$g_i(t) = \begin{cases} X \setminus [e_i, t] & \text{si } t \in (e_i, r_{e_i}); \\ X & \text{si } t = e_i. \end{cases}$$

**Afirmación 1.** Para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $f_i$  y  $g_i$  son encajes bien definidos.

Como para toda  $t \in (e_i, r_{e_i})$ , se tiene que  $ord_x(t) = 2$ , entonces  $X \setminus \{t\} = C_{e_i} \cup C_{r_{e_i}}$  donde  $C_{e_i} = [e_i, t)$  la componente de  $X \setminus \{t\}$  que tiene a  $e_i$  y  $C_{r_{e_i}} = X \setminus [e_i, t]$ , la componente de  $X \setminus \{t\}$  que tiene a  $r_i$ . De donde, podemos observar que  $f_i(t) = X \setminus C_{r_{e_i}}$  y  $g_i(t) = X \setminus C_{e_i}$  y por el Teorema 2.33,  $f_i(t)$  y  $g_i(t)$  son elementos de  $NC^*(X)$ . De manera que  $f_i(t)$  y  $g_i(t)$  están bien definidos. (Ver Figura 2.6)

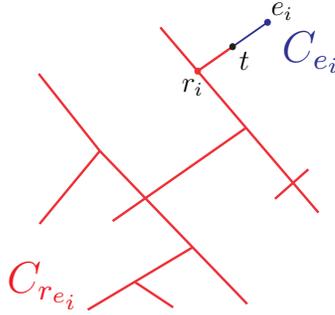


Figura 2.6: Componentes  $C_{r_{e_i}}$  y  $C_{e_i}$ .

Sea  $i \in \{1, \dots, k\}$  y  $t, s \in [e_i, r_{e_i})$  tales que  $t \neq s$ , podemos suponer que  $t < s$ . Entonces,  $f_i(t) = [e_i, t]$  y  $f_i(s) = [e_i, s]$ , donde  $[e_i, t] \subsetneq [e_i, s]$ . Por tanto,  $f_i$  es inyectiva.

Para ver la continuidad, sea  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $[e_i, r_{e_i}]$  y  $t \in [e_i, r_{e_i}]$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n \neq t$  y  $t_n \rightarrow t$ , de donde  $f_i(t_n) = [e_i, t_n]$  y tenemos que  $f_i(t_n)$  converge a  $f_i(t)$ . Por tanto,  $f_i$  es continua.

De manera similar, sea  $i \in \{1, \dots, k\}$  y  $t, s \in [e_i, r_{e_i}]$  tales que  $t \neq s$ , podemos suponer que  $t < s$  y  $t \neq e_i$ . Entonces,  $g_i(t) = X \setminus [e_i, t]$  y  $g_i(s) = X \setminus [e_i, s]$ , donde  $X \setminus [e_i, s) \subsetneq X \setminus [e_i, t)$ . Si  $t < s$  y  $t = e_i$ , entonces  $g_i(e_i) = X$  y  $g_i(s) = X \setminus [e_i, s)$ , de donde  $X \setminus [e_i, s) \subsetneq X$ . Por lo tanto,  $g_i$  es inyectiva.

Para ver la continuidad, sea  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $(e_i, r_{e_i}]$  y  $t \in [e_i, r_{e_i}]$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n \neq t$  y  $t_n \rightarrow t$ , de donde  $g_i(t_n) = X \setminus [e_i, t_n)$  y tenemos que  $g_i(t_n)$  converge a  $g_i(t) = X \setminus [e_i, t)$ . Por tanto,  $g_i$  es continua. Con esto probamos que para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$   $f_i$  y  $g_i$  son encajes bien definidos.

Definimos  $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^k g_i([e_i, r_{e_i}]) = \bigcup_{i=1}^k (\bigcup_{t \in [e_i, r_{e_i}]} X \setminus [e_i, t))$ , y para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{I}_i = f_i([e_i, r_{e_i}])$ .

**Afirmación 2.**  $\mathcal{K}$  es un  $k$ -odo simple con vértice  $X$  y para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{I}_i \approx [0, 1)$  con extremo  $\{e_i\}$ .

Como para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$   $g_i : [e_i, r_{e_i}] \rightarrow NC^*(X)$  es un encaje, entonces  $g_i([e_i, r_{e_i}])$  es un arco en  $NC^*(X)$  con extremos  $g_i(e_i) = X$  y  $g_i(r_{e_i}) = X \setminus [e_i, r_{e_i})$ . Veamos además, que si  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  con  $i \neq j$ , entonces  $g_i([e_i, r_{e_i}]) \cap g_j([e_j, r_{e_j}]) = g_i(e_i) = g_j(e_j) = X$ .

$\supseteq$ ) Está contención es inmediata pues  $X = g_i(e_i) \in (e, r_{e_i})$  para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

$\subseteq$ ) Sea  $A \in g_i([e_i, r_{e_i}]) \cap g_j([e_j, r_{e_j}])$ , entonces  $A = g_i(p) = g_j(q)$  tal que  $p \in [e_i, r_{e_i}]$  y  $q \in [e_j, r_{e_j}]$ . Si  $p \neq e_i$ , entonces  $g_i(p) = X \setminus [e_i, p)$ . Por lo que,  $e_i \notin g_i(p)$ , ahora bien, para toda  $q \in [e_j, r_{e_j}]$

$$e_i \in g_j(q) = \begin{cases} X \setminus [e_j, q) & \text{si } q \neq e_j; \\ X & \text{si } q = e_j. \end{cases}$$

Por lo que,  $g_i(p) \neq g_j(q)$  para toda  $q \in [e_j, r_{e_j}]$ . De igual manera, si  $q \neq e_j$ ,  $g_j(q) \neq g_i(p)$  para toda  $p \in [e_i, r_{e_i}]$ , de manera que  $p = e_i$ ,  $q = e_j$  y  $A = X$ .

Hemos probado que  $\mathcal{K}$  es la unión de  $k$  arcos en  $NC^*(X)$  que se intersectan únicamente en el punto  $X$ , donde  $X$  es extremo de cada uno de los arcos,

por tanto,  $\mathcal{K}$  es un  $k$ -odo.

Ahora, como  $f_i$  es un encaje,  $\mathcal{I}_i \approx [0, 1)$  para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$  y como  $f_i(e_i) = \{e_i\}$ , entonces el extremo de  $\mathcal{I}_i$  es  $\{e_i\}$ . Con esto concluimos la prueba de esta afirmación.

**Afirmación 3.** Si  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  con  $i \neq j$ , entonces  $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_j = \emptyset$ , y además, para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{K} \cap \mathcal{I}_i = \emptyset$ .

Si  $i \neq j$ , entonces  $[e_i, r_{e_i}) \cap [e_j, r_{e_j}) = \emptyset$  y, por tanto,  $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_j = \emptyset$ .

Ahora, supongamos por el contrario, que existe  $A \in \mathcal{K} \cap \mathcal{I}_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ , entonces  $A = g_j(t) = X \setminus [e_j, t)$  para alguna  $j \in \{1, \dots, k\}$  y para alguna  $t \in [e_j, r_{e_j}]$  y  $A = f_i(s) = [e_i, s]$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$  y para alguna  $s \in [e_i, r_{e_i})$ .

Notemos que como  $X \neq I$ , para toda  $A \in \mathcal{K}$ ,  $A \cap R(X) \neq \emptyset$  y para toda  $A \in \mathcal{I}_i$ ,  $A \cap R(X) = \emptyset$ , de manera que  $\mathcal{K} \cap \mathcal{I}_i = \emptyset$ .

Estudiaremos ahora las aristas internas. Sean  $[l_1, r_1], \dots, [l_{m-1}, r_{m-1}]$  a las  $m - 1$  aristas internas de  $X$ . Dada  $i \in \{1, \dots, m - 1\}$ , definimos:

- (1)  $L_i : [l_i, r_i] \rightarrow NC^*(X)$  por  $L_i(t) = X \setminus C_{r_i}$  donde  $C_{r_i}$  es la componente de  $X \setminus \{t\}$  que contiene a  $r_i$  (Ver Figura 2.7);
- (2)  $R_i : (l_i, r_i] \rightarrow NC^*(X)$  por  $R_i(t) = X \setminus C_{l_i}$  donde  $C_{l_i}$  es la componente de  $X \setminus \{t\}$  que contiene a  $l_i$  (Ver Figura 2.7).

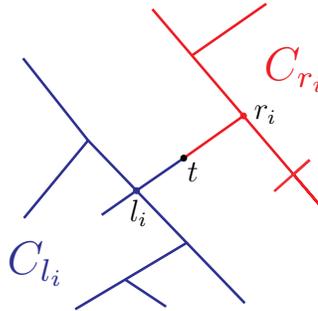


Figura 2.7: Componentes  $C_{l_i}$  y  $C_{r_i}$ .

**Afirmación 4.** Para toda  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $L_i$  y  $R_i$  son encajes bien definidos.

Primero notemos que para toda  $t \in (l_i, r_i)$  se tiene que  $ord_x(t) = 2$ . Por lo que,  $X \setminus \{t\} = C_{l_i} \cup C_{r_i}$  en este caso  $L_i(t) = C_{l_i} \cup \{t\}$  y  $R_i(t) = C_{r_i} \cup \{t\}$  que son subcontinuos de  $X$  (Lema 2.15) y como  $X \setminus L_i(t) = C_{r_i}$  y  $X \setminus R_i(t) = C_{l_i}$ , entonces  $R_i(t)$  y  $L_i(t)$  son elementos de  $NC^*(X)$ .

En el caso que  $t = l_i$ .  $L_i$  sigue cumpliendo lo mismo y  $R_i$  no está definida y si  $t = r_i$ ,  $L_i$  no está definida y  $R_i$  sigue cumpliendo lo mismo. De manera que  $L_i$  y  $R_i$  están bien definidos.

Sea  $X \setminus \{l_i\} = A_1 \cup \dots \cup A_n$  con  $n \geq 3$ , donde  $A_n = C_{r_i}$ . Definimos  $L = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \{l_i\}$  el cual es un un conexo. Sean  $t, s$  puntos en  $[l_i, r_i)$  con  $t < s$ . De manera que  $L_i(t) = L \cup [l_i, t]$  y  $L_i(s) = L \cup [l_i, t] \cup [t, s]$ , por lo que  $L_i(t) \subsetneq L_i(s)$ . Similarmente si  $X \setminus \{r_i\} = B_1 \cup \dots \cup B_m$  con  $m \geq 3$  donde  $B_m = C_{l_i}$ . Definimos  $R = \bigcup_{i=1}^m B_i \cup \{r_i\}$  el cual es un un conexo. Si  $t, s$  son puntos en  $(l_i, r_i]$  con  $t < s$ , entonces  $R_i(s) = R \cup [s, r_i]$  y  $R_i(t) = R \cup [s, r_i] \cup [t, s]$ , y  $L_s(t) \subsetneq L_i(t)$ . Por tanto,  $R_i$  y  $L_i$  son inyectivas.

Para ver la continuidad, sea  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $[l_i, r_i)$  y  $t \in [l_i, r_i)$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n \neq t$  y  $t_n \rightarrow t$ , de donde  $L_i(t_n) = L \cup [l_i, t_n]$  y tenemos que  $L_i(t_n)$  converge a  $L_i(t) = L \cup [l_i, t]$ . Similarmente, sea  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $(l_i, r_i]$  y  $t \in (l_i, r_i]$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n \neq t$  y  $t_n \rightarrow t$ , de donde  $R_i(t_n) = R \cup [t_n, r_i]$  y tenemos que  $R_i(t_n)$  converge a  $R_i(t) = R \cup [t, r_i]$ . Por tanto,  $L_i$  y  $R_i$  son continuas. Con esto probamos que para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$   $L_i$  y  $R_i$  son encajes bien definidos.

Definimos para cada  $i \in \{1, \dots, 2m-2\}$   $\mathcal{J}_i = L_i([l_i, r_i))$  y  $\mathcal{J}_{m-1+i} = R_i((l_i, r_i])$ . Por la Afirmación 4, tenemos que  $L_i$  y  $R_i$  son encajes y, por tanto, tenemos que para cada  $i \in \{1, \dots, 2m-2\}$   $\mathcal{J}_i \approx [0, 1)$ .

**Afirmación 5.**  $NC^*(X) = \mathcal{K} \cup \mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_k \cup \mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_{2m-2}$ .

$\subseteq$ ) Sea  $A \in NC^*(X)$ . Si  $A = X$  o  $A = \{e_i\}$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ , entonces por la Afirmación 2,  $X$  es el vértice del  $n$ -odo  $\mathcal{K}$  y  $\{e_i\}$  es extremo del arco  $\mathcal{I}_i$ , por tanto,  $A \in \mathcal{K} \cup \mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_k$

Sea  $A \in NC^*(X)$  con  $A \neq X$  y  $A \neq \{e_i\}$  para toda  $e_i \in E(X)$ . Entonces, por el Teorema 2.33,  $A = X \setminus C$  donde  $C$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$  con

$p \in Q(X)$ .

**Caso A.**  $p \in (e_i, r_{e_i})$  una arista externa de  $X$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Caso A.1.**  $A = C_{e_i} \cup \{p\} = f_i(p) \in \mathcal{I}_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Caso A.2.**  $A = C_{r_{e_i}} \cup \{p\} = g_i(p) \in \mathcal{K}$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Caso B.**  $p \in (l_i, r_i)$  una arista interna de  $X$  para alguna  $i \in \{1, \dots, 2m-2\}$ , entonces  $A = L_i(p)$  o  $A = R_i(p)$  de cualquier forma  $A \in \mathcal{J}_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, 2m-2\}$ .

Por tanto,  $NC^*(X) \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_k \cup \mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_{2m-2}$ .

$\supseteq$ ) Como para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$   $f_i$  y  $g_i$  son encajes bien definidos en  $NC^*(X)$  (Afirmación 1), tenemos que  $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^k g_i([e_i, r_{e_i}])$  e  $\mathcal{I}_i = f_i([e_i, r_{e_i}])$  son subconjuntos de  $NC^*(X)$ . Dado que para toda  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $L_i$  y  $R_i$  son encajes bien definidos en  $NC^*(X)$  (Afirmación 4), tenemos que  $\mathcal{J}_i = L_i([l_i, r_i])$  y  $\mathcal{J}_{m-1+i} = R_i([l_i, r_i])$  son subconjuntos de  $NC^*(X)$ . Por tanto,  $\mathcal{K} \cup \mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_k \cup \mathcal{J}_1 \cup \dots \cup \mathcal{J}_{2m-2} \subseteq NC^*(X)$ .

**Afirmación 6.** Para toda  $i, j \in \{1, \dots, 2m-2\}$ ,  $i \neq j$  y  $l \in \{1, \dots, k\}$ , se tiene que  $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \emptyset = \mathcal{J}_j \cap \mathcal{K} = \emptyset$  y  $\mathcal{J}_j \cap \mathcal{I}_l = \emptyset$ .

Sean  $i, j \in \{1, \dots, 2m-2\}$ , de donde tenemos los siguientes casos:

**Caso 1.**  $\mathcal{J}_i = L_i([l_i, r_i])$  y  $\mathcal{J}_j = L_j([l_j, r_j])$

Como  $i \neq j$ , entonces  $L_i([l_i, r_i]) \neq L_j([l_j, r_j])$ , por lo que  $[l_i, r_i] \cap [l_j, r_j] = \emptyset$  y, por tanto,  $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \emptyset$ .

**Caso 2.**  $\mathcal{J}_i = R_i([l_i, r_i])$  y  $\mathcal{J}_j = R_j([l_j, r_j])$

Como  $i \neq j$ , entonces  $R_i([l_i, r_i]) \neq R_j([l_j, r_j])$ , por lo que  $(l_i, r_i] \cap (l_j, r_j] = \emptyset$  y, por tanto,  $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \emptyset$ .

**Caso 3.**  $\mathcal{J}_i = L_i([l_i, r_i])$  y  $\mathcal{J}_j = R_j([l_j, r_j])$ .

Para toda  $A \in \mathcal{J}_i$ , tenemos que  $l_i \in A$  y  $r_i \notin A$ . Por otro lado si  $B \in \mathcal{J}_j$ , entonces  $r_j \in B$  y  $l_j \notin B$ . Por lo tanto, para toda  $i, j \in \{1, \dots, 2m-2\}$ ,  $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \emptyset$ .

Ahora, para toda  $j \in \{1, \dots, 2m - 2\}$  y para toda  $A \in \mathcal{J}_j$ , tenemos que  $(X \setminus A) \cap R(X) \neq \emptyset$ , pues  $l_j \in X \setminus A$  o  $r_j \in X \setminus A$ . Por otro lado si  $B \in \mathcal{K}$ , entonces  $B = g_i(p)$  para alguna  $i \in \{1, \dots, k\}$  y  $X \setminus B = [e_i, p) \subset f_i(p)$ , de manera que  $(X \setminus B) \cap R(X) = \emptyset$ . Por lo que para toda  $j \in \{1, \dots, 2m - 2\}$   $\mathcal{J}_j \cap \mathcal{K} = \emptyset$ .

Finalmente, para toda  $j \in \{1, \dots, 2m - 2\}$  y para toda  $A \in \mathcal{J}_j$ , tenemos que  $A \cap R(X) \neq \emptyset$ , pues  $l_j \in A$  o  $r_j \in A$ . Por otro lado para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$  y para toda  $B \in \mathcal{I}_i$ , tenemos que  $B \cap R(X) = \emptyset$ , pues  $B = [e_i, p) \subset [e_i, r_{e_i}]$ . Por lo tanto, para toda  $j \in \{1, \dots, 2m - 2\}$  y  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{J}_j \cap \mathcal{I}_i = \emptyset$ .

De las afirmaciones 3, 5 y 6, obtenemos que  $NC^*(X) \approx \mathcal{K} \oplus \mathcal{I}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{I}_k \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_{2m-2}$ .

□

Finalmente el modelo para  $NC^*(X)$ , si  $X$  es un árbol se muestra en la Figura 2.8.

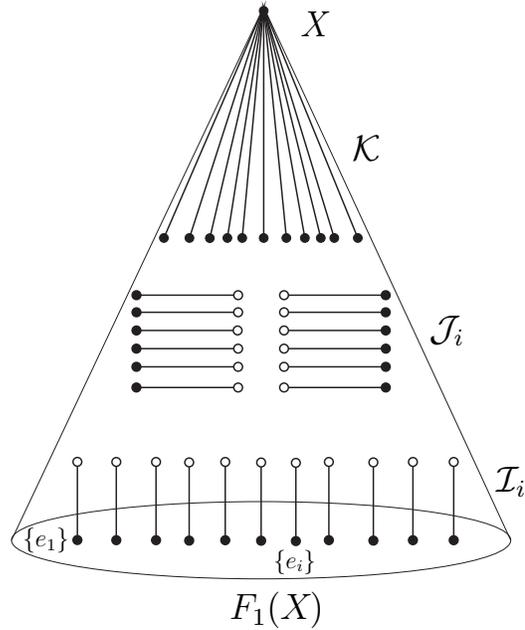


Figura 2.8: Modelo de  $NC^*(X)$  para  $X$  un árbol.

Por lo anterior, tenemos que  $NC^*(X)$  no es ni conexo, ni compacto, cuando  $X$  es un árbol distinto al intervalo. Además, podemos saber exactamente cuantas componentes tiene  $NC^*(X)$ , si  $X$  es un árbol.

**Corolario 2.37.** *Sea  $X$  un árbol con  $|R(X)| = m$  y  $|E(X)| = k$ . Entonces la cantidad de componentes de  $NC^*(X)$  es  $2m + k - 1$ .*

*Demostración.*

Si  $X = I$ . Por la Proposición 2.35, tenemos que  $NC^*(I) \approx I$ , por lo que  $NC^*(I)$  es conexo y en este caso  $m = 0$ ,  $K = 2$  y  $2m + k - 1 = 1$ .

Si  $X \neq I$ . Por el Teorema 2.36, tenemos que  $NC^*(X) \approx \mathcal{K} \oplus \mathcal{I}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_k \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_{2m-2}$  donde  $\mathcal{K}$  es un  $k$ -odo simple para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{I}_i \approx [0, 1)$ , y para cada  $i \in \{1, \dots, 2m - 2\}$ ,  $\mathcal{J}_i \approx [0, 1)$ , de manera que  $NC^*(X)$  tiene exactamente  $2m + k - 1$  componentes. □

**Lema 2.38.** *Sea  $X$  una dendrita. Si  $D \in NC^*(X)$ , entonces  $D \cap E(X) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.*

Por el Teorema 2.33, sabemos que  $D \in NC^*(X)$  si y sólo si algunas de las siguientes se cumple:

- (1)  $D = X$ ;
- (2)  $D = \{e\}$  con  $e \in E(X)$ ;
- (3)  $D = X \setminus C$  donde  $C$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $p \in X \setminus E(X)$ .

En el caso (1) y (2) es claro que  $D \cap E(X) \neq \emptyset$ .

Ahora para el caso (3). Como  $D$  es un subcontinuo no degenerado de  $X$ , por el Teorema 2.22  $D$  tiene al menos 2 dos puntos de no corte y por el Teorema 2.24 los puntos de no corte son terminales. Por lo tanto,  $D \cap E(X) \neq \emptyset$  y el Lema queda demostrado. □

**Teorema 2.39.** *Sea  $X$  un árbol.  $NC^*(X)$  es conexo si y sólo si  $X$  es el intervalo.*

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Por la Proposición 2.35, tenemos que  $NC^*(X) \approx X$ . Por tanto,  $NC^*(X)$  es conexo.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $X$  no es un intervalo. Por la Proposición 1.17,  $|R(X)| = m \geq 1$  y por los teoremas 2.22 y 2.24  $|E(X)| = k \geq 2$ . De manera que por el Corolario 2.37,  $NC^*(X)$  tiene  $2m + k - 1 \geq 3$  componentes. Por tanto,  $NC^*(X)$  no es conexo. □

**Teorema 2.40.** *Sea  $X$  es un árbol.  $NC^*(X)$  es compacto si y sólo si  $X$  es el intervalo.*

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Por la Proposición 2.35, tenemos que  $NC^*(X) \approx X$ . Por lo que  $NC^*(X)$  es compacto.

$\Rightarrow$ ) Supongamos por el contrario, que  $X$  no es un intervalo y dado que  $X$  es un árbol, no tiene curvas cerradas simples. Por la Proposición 1.17,  $X$  tiene al menos un punto de ramificación  $r$ . Consideremos  $X \setminus \{r\} = C_1 \cup \dots \cup C_k$  con  $k \geq 3$ . Por el Teorema 2.33, dado  $i \in \{1, \dots, k\}$  tenemos que  $A = X \setminus C_i$  es un continuo de no corte de  $X$ . Ahora tomemos  $J$  la arista que tiene en un extremo a  $r$  tal que  $J \setminus \{r\} \subseteq C_i$ .

**Caso 1.**  $J \setminus \{r\} = C_i$ .

Entonces,  $J = [e, r]$  es un pelo en  $X$  con  $e \in E(X)$ . Tomemos la sucesión  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $[e, r]$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n \neq r$  y  $r_n \rightarrow r$ .

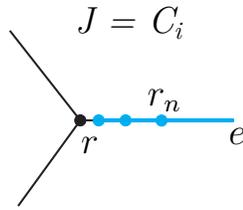
Veamos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[e, r_n] \in NC^*(X)$ .

Como  $r_n \in O(X) \subset Q(X)$  y  $X \setminus \{r_n\}$  tiene dos componentes  $C_1$  y  $C_2$  donde  $C_1 = [e, r_n)$ , por el Teorema 2.33, tenemos que  $X \setminus C_2 = [e, r_n] \in NC^*(X)$ .

Veamos que  $[e, r] \notin NC^*(X)$ .

Como  $X \setminus \{r\}$  tiene al menos 3 componentes y tenemos que una de estas componentes es  $[e, r)$ , podemos concluir que  $X \setminus [e, r]$  tiene al menos dos componentes y, por tanto, no es conexo. De donde,  $[e, r] \notin NC^*(X)$ .

Notemos que  $[e, r_n] \rightarrow [e, r]$ . Por lo tanto,  $NC^*(X)$  no es compacto, y con esto concluimos el Caso 1 (Ver Figura 2.9).

Figura 2.9: Sucesión  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Caso 2.**  $J \setminus \{r\} \subsetneq C_i$ .

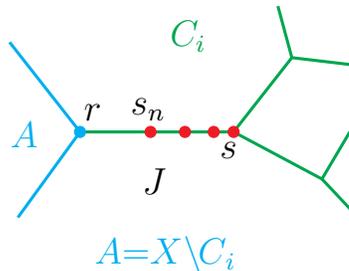
En este caso, tenemos que el otro extremo de la arista  $J$  es un punto de ramificación, digamos  $s$ . Tomemos la sucesión  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $[r, s]$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n \neq s$  y  $s_n \rightarrow s$ .

Veamos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = A \cup [r, s_n] \in NC^*(X)$ .

Como  $s_n \in O(X) \subset Q(X)$  y  $X \setminus \{s_n\}$  tiene dos componentes  $C_1$  y  $C_2$  donde  $C_1 = A \cup [r, s_n)$ , de manera que por el Teorema 2.33, tenemos que  $\overline{C_1} = X \setminus C_2 = A \cup [r, s_n] \in NC^*(X)$ .

Veamos que  $A_0 = A \cup [s, r] \notin NC^*(X)$ .

Como  $X \setminus \{s\}$  tiene al menos 3 componentes y tenemos que una de estas componentes es  $A \cup [r, s)$ , podemos concluir que  $X \setminus (A \cup [r, s])$  tiene al menos 2 componentes y, por tanto, no es conexo. De donde,  $A \cup [r, s] \notin NC^*(X)$ .

Figura 2.10: Sucesión  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Notemos que  $A_n \rightarrow A_0$ . Por lo tanto,  $NC^*(X)$  no es compacto (Ver Figura 2.10); lo cual concluye nuestra demostración.

□

Como consecuencia de los teoremas 2.39 y 2.40, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.41.** *Sea  $X$  un árbol, las siguientes son equivalentes:*

- (1)  $NC^*(X)$  es un continuo;
- (2)  $NC^*(X)$  es compacto;
- (3)  $NC^*(X)$  es conexo;
- (4)  $NC^*(X) \approx X$ ;
- (5)  $X \approx [0, 1]$ .

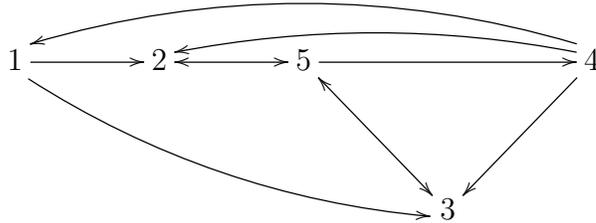
*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2), (1)  $\Rightarrow$  (3), (4)  $\Rightarrow$  (1), (4)  $\Rightarrow$  (2) y (4)  $\Rightarrow$  (3), son inmediatas de las definiciones y del hecho que  $X$  es un continuo.

(5)  $\Rightarrow$  (4), se sigue de la Proposición 2.35.

(3)  $\Leftrightarrow$  (5), se sigue del Teorema 2.39.

(2)  $\Leftrightarrow$  (5), se sigue del Teorema 2.40.



□

### 2.3. $NC^*(X)$ no tiene hiperespacio único.

Lo siguiente que nos preguntamos es si el hiperespacio  $NC^*(X)$  es único, encontramos que en el caso de que  $X$  es un árbol la respuesta es negativa. Para este fin, veamos lo siguiente.

**Definición 2.42.** *Un continuo  $X$  tiene hiperespacio único  $NC^*(X)$  si  $Y$  es un continuo y se sabe que  $NC^*(X)$  es homeomorfo a  $NC^*(Y)$ , entonces  $X$  tiene que ser homeomorfo a  $Y$ .*

**Lema 2.43.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un homomorfismo entre continuos. Entonces para todo  $p \in X$   $ord_Y(f(p)) = ord_X(p)$ .*

*Demostración.*

Como  $f(Fr(A)) = Fr(f(A))$ . Sea  $p \in X$  tal que  $ord_Y(f(p)) = m$  y  $U$  un abierto de  $Y$  tal que  $f(p) \in U$ . Entonces, existe  $V$  abierto de  $Y$  tal que  $f(p) \in V \subseteq U$  y  $|Fr(V)| \leq m$  (Ver Figura 2.11 (a)). Como  $f$  es un homeomorfismo  $p \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$  y dado que  $|Fr(f^{-1}(V))| = |f(Fr(f^{-1}(V)))| = |Fr(V)|$  (Ver Figura 2.11 (b)). Entonces,  $ord_X(p) \leq m$ , por lo que  $ord_X(p) \leq ord_Y(f(p))$ .

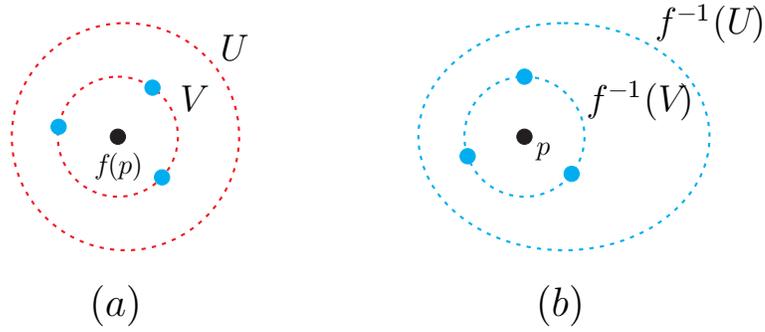


Figura 2.11: Conjuntos  $U$ ,  $V$ ,  $f^{-1}(U)$  y  $f^{-1}(V)$ .

De igual manera, como  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  es un homomorfismo, tenemos que  $ord_Y(f(p)) \leq ord_X(f^{-1}(f(p))) = ord_X(p)$ . Por lo tanto, para todo  $p \in X$   $ord_Y(f(p)) = ord_X(p)$ ; lo cual concluye nuestro Lema.  $\square$

**Ejemplo 2.44.** *Existen  $X, Y$  árboles no homeomorfos tales que  $NC^*(X) = NC^*(Y)$ .*

Consideremos los siguientes árboles (Ver Figura 2.12).

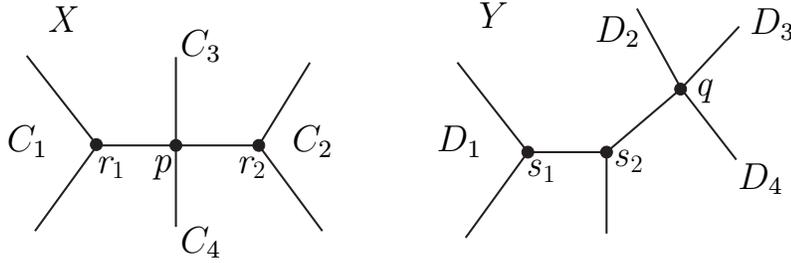


Figura 2.12: Árboles  $X$  y  $Y$ .

Veamos que  $X$  no es homeomorfo a  $Y$ . Supongamos por el contrario, que existe  $f : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo, y sea  $p$  el único punto en  $X$  tal que  $ord_X(p) = 4$  y  $r_1, r_2$  los puntos de orden 3 en  $X$  (Ver figura 2.12). Tenemos que  $X \setminus \{p\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$  donde  $C_1 \cap R(X) = \{r_1\}$ ,  $C_2 \cap R(X) = \{r_2\}$  y  $C_3, C_4$  son arcos libres (Ver figura 2.12). Como  $f$  es un homeomorfismo por el Lema 2.43, tenemos que  $ord_X(p) = ord_Y(f(p))$  y al ser  $q$  el único punto en  $Y$  de orden 4, se tiene que  $f(p) = q$ . De igual manera, tenemos que  $f(r_1) = s_i$  y  $f(r_2) = s_j$  con  $i, j \in \{1, 2\}$  donde  $s_1, s_2$  son los puntos de orden 3 en  $Y$ . Entonces,  $f(X \setminus \{p\}) = f(X) \setminus \{p\} = Y \setminus \{q\} = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$  donde  $D_1 \cap R(X) = \{s_1, s_2\}$  y  $D_2, D_3$  y  $D_4$  son arcos libres (Ver figura 2.12). Dado que  $f$  es un homeomorfismo y  $D_1$  es conexo, tenemos que  $f^{-1}(D_1)$  es un conjunto conexo contenido en  $X \setminus \{p\}$  que tiene a  $r_1$  y a  $r_2$ , por lo que  $f^{-1}(D_1) \subset C_1 \cup C_2$  por ser componentes de  $X \setminus \{p\}$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $X$  no es homeomorfo a  $Y$ .

Tenemos que  $|E(X)| = |E(Y)| = 6$  y  $|R(X)| = |R(Y)| = 3$ , por el Teorema 2.36,  $NC^*(X) \approx \mathcal{K} \oplus \mathcal{I}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_6 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_4 \approx NC^*(Y)$  donde  $\mathcal{K}$  es un 6-odo simple, para cada  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $\mathcal{I}_i \approx [0, 1)$ , y para cada  $i \in \{1, \dots, 4\}$ ,  $\mathcal{J}_i \approx [0, 1)$  (Ver Figura 2.13); lo cual concluye el análisis del Ejemplo 2.44.

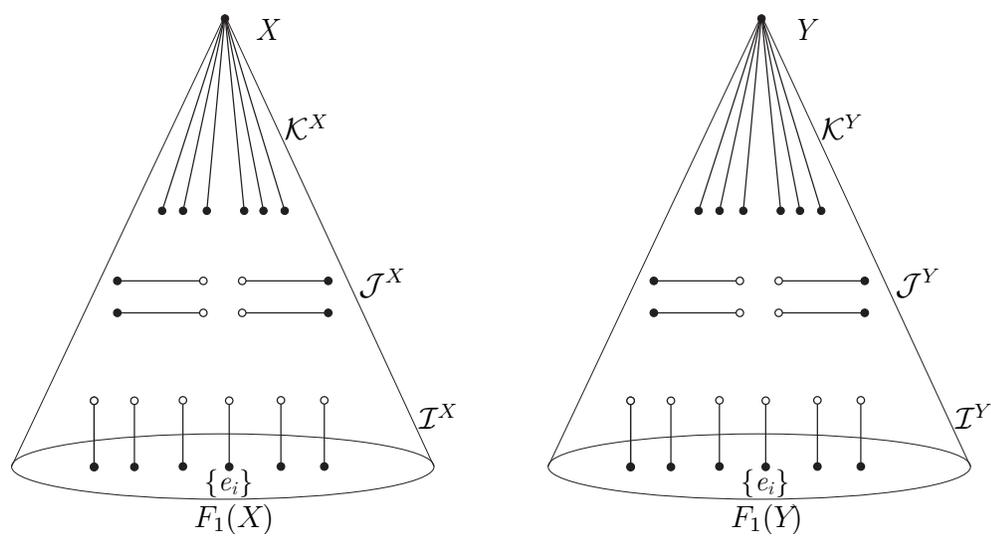


Figura 2.13:  $NC^*(X)$  y  $NC^*(Y)$ .

# Capítulo 3

## Gráficas finitas

### 3.1. Modelos de $NC^*(X)$ .

Iniciamos esta sección con el análisis de algunas gráficas conocidas, para obtener información de su hiperespacio  $NC^*(X)$ , razón por la cual el lector debe estar familiarizado con los modelos de estas gráficas. Estos modelos se pueden consultar en [11, p.29-47], [8, p.153-194] y [12].

El siguiente ejemplo se puede encontrar en [11, Ejemplo 3.2 p.31-34] y en [19, 3.2 p.18].

Antes de comenzar nuestros ejemplos. Dado un continuo  $X$  y  $v \in X$ . Definimos  $C_{\{v\}}(X) = \{A \in C(X) : v \in A\}$ .

**Ejemplo 3.1.** *La Circunferencia.*

Sea  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  la circunferencia. Podemos dar un homomorfismo entre los subcontinuos de  $S^1$  y  $D$  el disco acotado en el plano- $xy$ . Sea  $C$  un subcontinuo de  $S^1$ , tenemos las siguientes posibilidades:

Si  $C$  sea un arco no degenerado contenido en  $S^1$ ,  $C$  está determinado por su punto medio  $m_C$  y su diámetro  $diam(C)$ . Ahora bien, consideremos la recta  $L_C$  que pasa por los puntos  $(0,0)$  y  $m_C$ , también el punto  $h(C) \in L_C$  que está a distancia  $1 - diam(C)/2\pi$  del origen. Notemos que  $h(C)$  depende únicamente de  $m_C$  y  $diam(C)$ . De donde, hemos asignado un punto  $h(C)$ , para cada arco no degenerado en  $S^1$ .

Si  $C = \{s\}$  con  $s \in S^1$ , podemos pensar que el punto medio  $C$  es  $m_{\{s\}} = s$

y su diámetro  $diam(\{s\}) = 0$ . Entonces al considerar la recta  $L_{\{s\}}$  que pasa por los puntos  $(0,0)$  y  $s$ , y el punto  $h(\{s\}) \in L_{\{s\}}$  que está a distancia  $1 - diam(C))/2\pi = 1$  del origen, tenemos que  $h(\{s\}) = s$ . De igual forma que el el caso anterior,  $h(C)$  depende únicamente de  $m_C$  y  $diam(C)$ . Por lo que, dado un subcontinuo de la forma  $\{s\}$  con  $s \in S^1$ , le asignamos el punto  $h(\{s\}) = s$ .

Si  $C = S^1$ , entonces  $h(C) = (0,0)$ .

De lo anterior, definimos el homomorfismo  $h : C(S^1) \rightarrow D$  donde a cada subcontinuo  $C$  le asignamos el punto  $h(C) = m_C(1 - diam(C))/2\pi$  (Ver Figura 3.1).

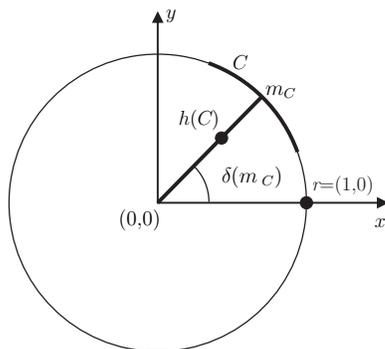


Figura 3.1:  $C(S^1)$ .

Notemos que los subcontinuos de un solo punto están representados en la frontera de  $D$ . Si consideramos al punto  $r = (1,0)$ , diremos que  $r$  es un extremo izquierdo de un arco  $C$  de  $S^1$ , si  $r$  es el extremo del arco que queda a la izquierda cuando nos paramos sobre el arco y vemos en la dirección del origen. Sea  $\mathcal{B}_1$  el conjunto de todos los subarcos de  $S^1$  que tienen a  $r$  como extremo izquierdo. Notemos que para cada  $C \in \mathcal{B}_1$ , el punto  $m_C$  está en  $\{(x,y) \in S : y \geq 0\}$ . Ahora bien, cuando  $diam(C)$  tiende a cero tenemos que  $C$  es casi  $\{r\}$ , y a su vez el número  $1 - diam(C))/2\pi$  tiende a 1. De donde, el punto  $h(C)$  es un punto muy cercano a  $r$ , en el interior del disco  $D$ . Por otro lado cuando  $diam(C)$  tiende a  $2\pi$  tenemos que  $C$  es casi  $S^1$ , y a su vez el número  $1 - diam(C))/2\pi$  tiende a 0. De donde, el punto  $h(C)$  es un punto muy cercano al origen. Con este análisis podemos representar a  $\mathcal{B}_1$  con el conjunto que se muestra en la Figura 3.2 (Un “corazón”). Similarmente

podemos representar a  $\mathcal{B}_2$  el conjunto de todos los subarcos de  $S^1$  que tienen a  $r$  como extremo derecho (Ver Figura 3.2).

Como cada subarco  $C$  que contiene a  $r$  está entre dos subarcos del mismo diámetro de  $C$ , uno que tiene a  $r$  como extremo izquierdo y otro que tiene a  $r$  como extremo derecho, con esto podemos concluir que el conjunto  $\mathcal{C} = \{C \in C(S^1) : r \in C\}$  queda representado por la región limitada por  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ . (Ver Figura 3.2)

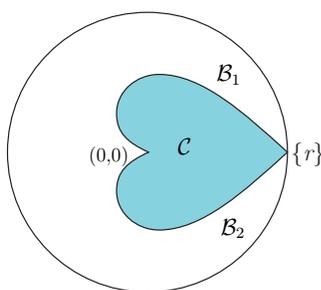


Figura 3.2:  $\mathcal{C} = \{C \in C(S^1) : r \in C\}$  en  $C(S^1)$ .

Notemos que todos los subcontinuos de  $S^1$  son de no corte. Por lo que  $NC^*(S^1) = C(S^1)$ . Esto concluye el análisis del Ejemplo 3.1.

**Ejemplo 3.2.** *La Paleta.*

La Paleta es un continuo que consta de una circunferencia  $S$  y un arco  $L$ , que se intersectan en un extremo del arco  $L$ , Denotaremos por  $v$  al punto de intersección de  $L$  con  $S$  y por  $p$  al otro extremo de  $L$  (Ver Figura 3.3).

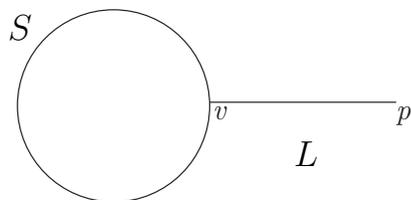


Figura 3.3: La Paleta.

Sea  $\mathcal{A} = C_{\{v\}}(S) \setminus \{S\}$ , veamos que  $NC^*(X) \cap C(S) = C(S) \setminus \mathcal{A}$ .

$\subseteq$ ) Sea  $A \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $X \setminus A = (S \setminus A) \cup (L \setminus \{v\})$  donde  $(S \setminus A) \neq \emptyset \neq L \setminus A = (L \setminus \{v\})$  y  $(S \setminus A) \cap (L \setminus \{v\}) = \emptyset$ , por tanto,  $A \notin NC^*(X)$  y  $NC^*(X) \cap C(S) \subseteq C(S) \setminus \mathcal{A}$ .

$\supseteq$ ) Si  $B \in C(S) \setminus \mathcal{A}$  y  $S \neq B$ , se tiene que  $X \setminus B = (S \setminus B) \cup L$  y  $(S \setminus B) \cap L = \{v\}$ , entonces  $X \setminus B$  es conexo. Si  $B = S$ , tenemos que  $X \setminus S = L \setminus \{v\}$ . De donde,  $B \in NC^*(X) \cap C(S)$ .

En el Ejemplo 3.1 p.37 vimos que el conjunto de los continuos que tiene al punto  $v$  está modelado con un “corazón” contenido dentro del modelo de  $C(S)$ , por lo que al considerar el modelo del conjunto  $\mathcal{A}$  obtenemos la Figura 3.4.

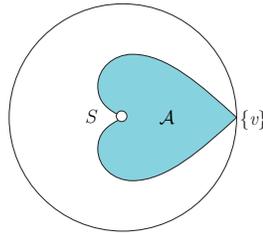


Figura 3.4: Conjunto  $\mathcal{A}$  en  $C(S)$ .

Ahora bien, para obtener un modelo para los continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $S$ , basta ver como se representa el conjunto  $C(S) \setminus \mathcal{A}$ , el cual nos queda una 2-celda sin una parte de su frontera, como se ve en la Figura 3.5.

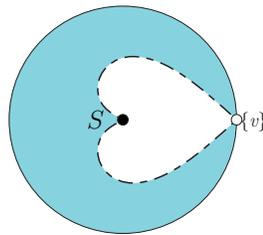


Figura 3.5: Conjunto  $C(S) \setminus \mathcal{A} = NC^*(X) \cap C(S)$ .

Vamos a ver la Figura 3.5 de otra manera, para este fin. Primero colocamos

flechas en la circunferencia exterior y el corazón interior para saber en que dirección están y consideramos la flecha que va de  $\{v_A\}$  el punto antípoda de  $\{v\}$  a  $S$  y la etiquetamos con  $a$  como se muestra en la Figura 3.6. Ahora, hacemos un corte donde está la flecha  $a$  y desdoblemos la figura el hemisferio norte  $90^\circ$  en el sentido de las manecillas del reloj y el hemisferio sur  $90^\circ$  en sentido contrario de las manecillas del reloj, hasta obtener el segundo dibujo de la Figura 3.6. Volvemos a girar el hemisferio norte y el hemisferio sur como en el paso anterior y pegamos las orillas de éste segundo, hasta obtener el tercer dibujo de la Figura 3.6.

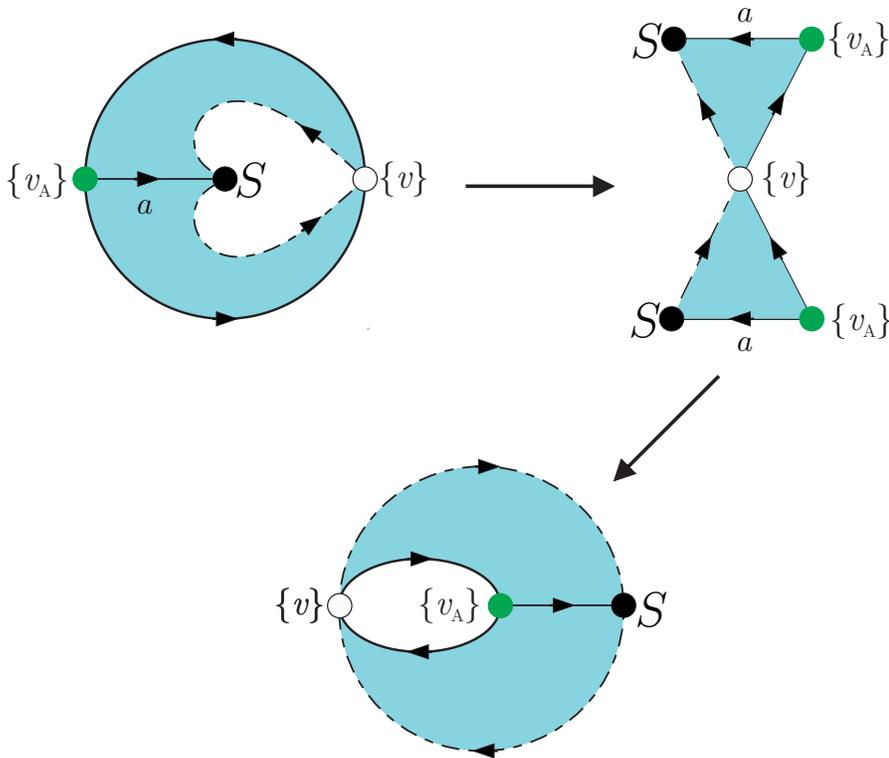


Figura 3.6:

Con lo anterior la Figura 3.5  $\mathcal{A} = NC^*(X) \cap C(S)$  se puede ver de la siguiente forma (Ver Figura 3.7).

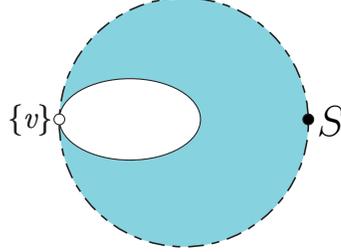


Figura 3.7: Continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $S$ .

Ahora bien, para obtener los continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $L$ ,  $NC^*(X) \cap C(L)$ . Veamos que  $\mathcal{B} = \{B \in C(L) : p \in A\} = NC^*(X) \cap C(L)$ .

$\subseteq$ ) Dado  $B \in \mathcal{B}$ , si  $B \neq L$ , tenemos que  $X \setminus B = S \cup (L \setminus B)$  donde  $S \cap (L \setminus B) = \{v\}$  por lo que  $X \setminus B$  es conexo. Si  $B = L$ , tenemos que  $X \setminus B = S \setminus B = S \setminus \{v\}$ , el cual es conexo ya que  $S$  es una circunferencia.

$\supseteq$ ) Si  $A \in C(L) \setminus \mathcal{B}$ , tenemos que  $A \subset L$  y  $p \notin A$ , por tanto,  $X \setminus A$  tiene al menos dos componentes: la componente que interseca a  $S$  y la componente que tiene al punto  $p$ , de manera que  $A \notin NC^*(X)$ .

$\mathcal{B}$  está modelado por un arco en  $C(L)$  que va del arco  $L$  al singular  $\{p\}$  (Ver figura 3.8), donde cada punto del arco representa un arco de la forma  $px$  con  $x \in L$ .

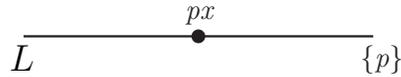


Figura 3.8: Continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $L$ .

Continuando con nuestro análisis veamos que los continuos de la forma  $\mathcal{C} = \{C = L \cup A : A \in C_{\{v\}}(S)\} \subseteq NC^*(X)$ . Sea  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $X \setminus C = S \setminus A$  el cual es conexo. Notemos que si  $A = S$ , tenemos que  $S \setminus S = \emptyset$ , donde  $C = X$ .

En el Ejemplo 3.1 p.37 vimos que el conjunto de los continuos que tiene al punto  $v$  está modelado con un “corazón” contenido dentro del modelo de  $C(X)$ , por lo que al considerar el modelo del conjunto  $\mathcal{C}$  obtenemos el primer dibujo en la Figura 3.9. La cual es homeomorfo a una 2 celda como se muestra en el segundo dibujo de la Figura 3.9.

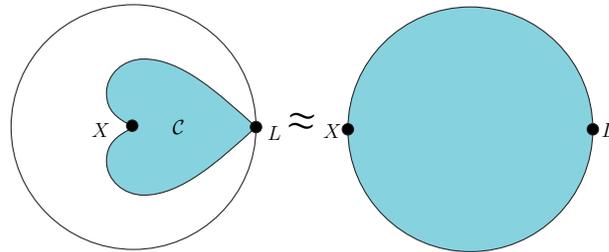


Figura 3.9: Conjunto  $\mathcal{C}$ .

Por último, consideremos  $C_{\{v\}}(L) = \{E \in C(S) : v \in E\}$ . Veamos que los continuos de la forma  $\mathcal{D} = \{D = S \cup E : E \in C_{\{v\}}(L)\} \subseteq NC^*(X)$ . Sea  $D \in \mathcal{D}$ , entonces  $X \setminus D = L \setminus E$  el cual es conexo. Notemos que si  $E = L$ , tenemos que  $L \setminus L = \emptyset$ , donde  $D = X$ . El conjunto  $\mathcal{D}$  está modelado por un arco que va de la circunferencia  $S$  a  $X$  (Ver figura 3.10). Donde cada punto del arco representa al continuo  $S \cup E_x$  y  $E_x$  es el arco en  $L$  que une a  $v$  con el punto  $x \in L$ .



Figura 3.10: Conjunto  $\mathcal{D}$ .

Finalmente uniendo las figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10 obtenemos el modelo para  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.11).

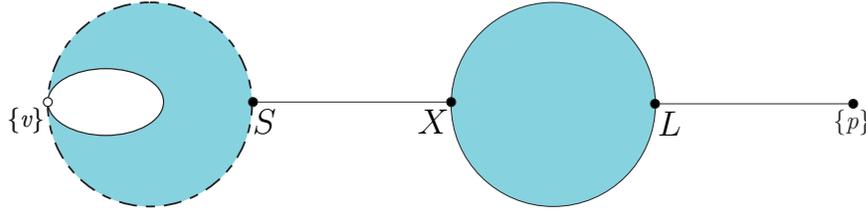


Figura 3.11: Modelo de  $NC^*(X)$  para la Paleta.

De donde tenemos que  $NC^*(X)$  es conexo. Además, este modelo se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$  y su dimensión es 2.

**Ejemplo 3.3.** *Las Pesas.*

Sea  $X$  el continuo al cual llamamos las Pesas, este continuo consta de dos circunferencias  $S_1, S_2$  y un arco  $L$ , donde cada circunferencia se intersecta en uno de los extremos de  $L$ . Denotaremos por  $v_1$  al punto de intersección de  $L$  con  $S_1$  y por  $v_2$  al punto de intersección de  $L$  con  $S_2$  (Ver Figura 3.12).

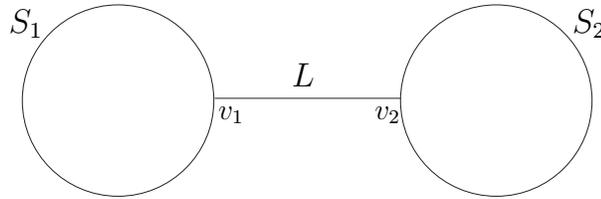


Figura 3.12: Las Pesas.

Sea  $\mathcal{A} = C_{\{v_1\}}(S_1) \setminus \{S_1\}$ , veamos que  $NC^*(X) \cap C(S_1) = C(S_1) \setminus \mathcal{A}$ .

$\subseteq$ ) Sea  $A \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $X \setminus A = (S_1 \setminus A) \cup (L \setminus \{v_1\}) \cup S_2$  donde  $S_1 \setminus A \neq \emptyset \neq L \setminus A = L \setminus \{v_1\}$ ,  $(L \setminus \{v_1\}) \cap S_2 = \{v_2\}$  y  $(S_1 \setminus A) \cap ((L \setminus \{v_1\}) \cup S_2) = \emptyset$ , por tanto,  $A \notin NC^*(X)$  y  $NC^*(X) \cap C(S_1) \subseteq C(S_1) \setminus \mathcal{A}$ .

$\supseteq$ ) Si  $B \in C(S_1) \setminus \mathcal{A}$  y  $S_1 \neq B$ , se tiene que  $X \setminus B = (S_1 \setminus B) \cup L \cup S_2$ ,  $(S_1 \setminus B) \cap (L \cup S_2) = \{v_1\}$  y  $L \cap S_2 = \{v_2\}$ , entonces  $X \setminus B$  es conexo. Si  $B = S_1$ , tenemos que  $X \setminus S_1 = (L \setminus \{v_1\}) \cup S_2$ . De donde,  $B \in NC^*(X) \cap C(S_1)$ .

Similarmente al trabajo hecho en el Ejemplo 3.2 p. 39 (Figura 3.6) obtenemos que el conjunto de continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $S_1$  está modelado con el siguiente dibujo (Figura 3.13).

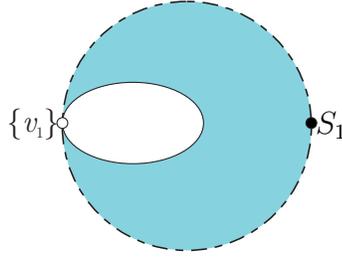


Figura 3.13: Continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $S_1$ .

Ahora bien, veamos que  $\mathcal{B} = \{B = S_1 \cup C : C \in C_{\{v_1\}}(L)\} \subseteq NC^*(X)$ . Si  $B \in \mathcal{B}$  y  $C \neq L$ , tenemos que  $X \setminus B = (L \setminus C) \cup S_2$  donde  $(L \setminus C) \cap S_2 = \{v_2\}$ , por lo que  $X \setminus B$  es conexo. Si  $C = L$ , tenemos que  $X \setminus B = S_2 \setminus \{v_2\}$ , el cual es conexo.

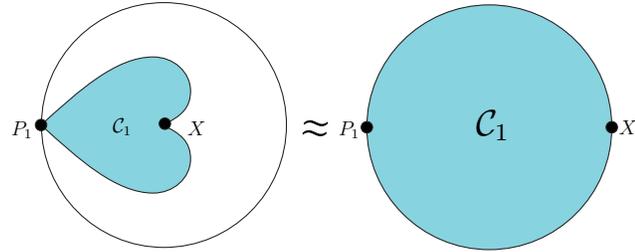
$\mathcal{B}$  está modelado por un arco que va de  $S_1$  a  $P_1 = S_1 \cup L$  (Ver figura 3.14).



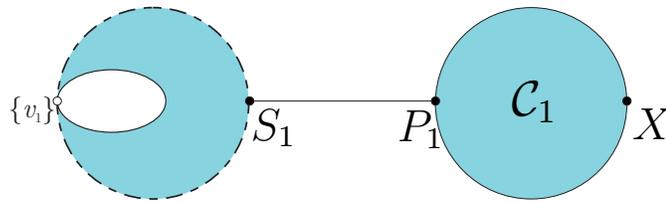
Figura 3.14: Conjunto  $\mathcal{B}$ .

Continuando con nuestro análisis, veamos que  $\mathcal{C}_1 = \{C = P_1 \cup D : D \in C_{\{v_2\}}(S_2)\} \subseteq NC^*(X)$ . Sea  $C \in \mathcal{C}_1$ , entonces  $X \setminus C = S_2 \setminus D$  el cual es conexo. Notemos que si  $D = S_2$ , tenemos que  $S_2 \setminus S_2 = \emptyset$ , donde  $C = X$ .

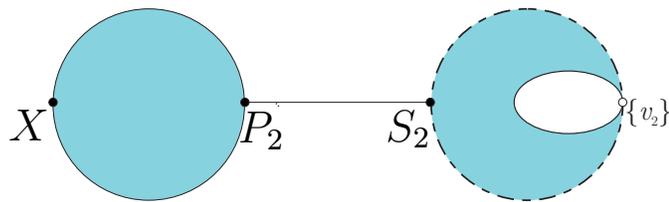
Similarmente al trabajo hecho en el Ejemplo 3.2 p.41 obtenemos que el conjunto de continuos que conforman el conjunto  $\mathcal{C}_1$  está modelado con el siguiente dibujo (Figura 3.15).

Figura 3.15: Conjunto  $\mathcal{C}_1$ .

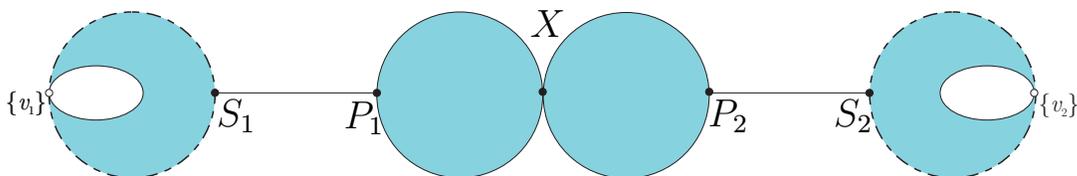
Uniendo las figuras 3.13, 3.14 y 3.15. Obtenemos los continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $(S_1 \cup L) \cup \mathcal{C}_1$  (Ver Figura 3.16).

Figura 3.16: Continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $(S_1 \cup L) \cup \mathcal{C}_1$ .

Similarmente podemos iniciar esta construcción en  $S_2 \cup L$ , definir  $\mathcal{C}_2 = \{C = P_2 \cup D : D \in C_{\{v_1\}}(S_1)\}$  y obtenemos:

Figura 3.17: Continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $(S_2 \cup L) \cup \mathcal{C}_2$ .

Finalmente uniendo las figuras 3.16 y 3.17 en el punto  $X$ , obtenemos el modelo para  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.18).

Figura 3.18: Modelo de  $NC^*(X)$  para las Pesas.

De donde tenemos que  $NC^*(X)$  es conexo. Además, este modelo se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$  y su dimensión es 2.

**Ejemplo 3.4.** *El Ocho.*

El Ocho es un continuo que consta de dos circunferencias  $S_1$  y  $S_2$ , que se intersectan en un punto. Denotaremos por  $v$  al punto de intersección de  $S_1$  con  $S_2$  (Ver Figura 3.19).

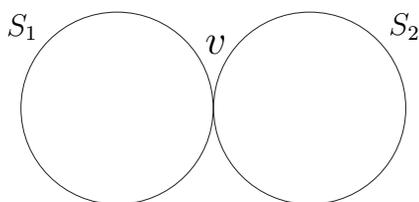


Figura 3.19: El Ocho.

Sea  $\mathcal{A} = C_{\{v\}}(S_1) \setminus \{S_1\}$ , veamos que  $NC^*(X) \cap C(S_1) = C(S_1) \setminus \mathcal{A}$ .

$\subseteq$ ) Sea  $A \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $X \setminus A = (S_1 \setminus A) \cup (S_2 \setminus \{v\})$  donde  $S_1 \setminus A \neq \emptyset \neq S_2 \setminus A = S_2 \setminus \{v\}$  y  $(S_1 \setminus A) \cap (S_2 \setminus \{v\}) = \emptyset$ , por tanto,  $A \notin NC^*(X)$  y  $NC^*(X) \cap C(S_1) \subseteq C(S_1) \setminus \mathcal{A}$ .

$\supseteq$ ) Si  $B \in C(S_1) \setminus \mathcal{A}$  y  $S_1 \neq B$ , se tiene que  $X \setminus B = (S_1 \setminus B) \cup S_2$  y  $(S_1 \setminus B) \cap S_2 = \{v\}$ , entonces  $X \setminus B$  es conexo. Si  $B = S_1$ , tenemos que  $X \setminus S_1 = S_2 \setminus \{v\}$ . De donde,  $B \in NC^*(X) \cap C(S_1)$ .

Similarmente al trabajo en la Paleta Ejemplo 3.2 p.39 (Figura 3.6) obtenemos

que el conjunto de continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $S_1$  está modelado con el siguiente dibujo (Figura 3.20).

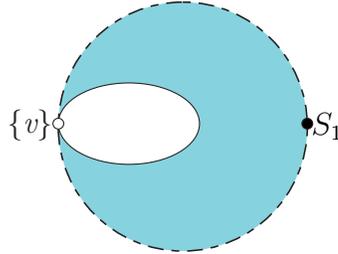


Figura 3.20: Continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $S_1$ .

Ahora bien, veamos que  $\mathcal{B}_1 = \{B = S_1 \cup C : C \in C_{\{v\}}(S_2)\} \subseteq NC^*(X)$  Si  $B \in \mathcal{B}_1$  y  $C \neq S_2$ , tenemos que  $X \setminus B = S_2 \setminus C$  el cual es conexo, por lo que  $X \setminus B$  es conexo. Si  $C = S_2$ , tenemos que  $X \setminus B = S_2 \setminus S_2 = \emptyset$ , donde  $B = X$ .

Similarmente al trabajo realizado en el Ejemplo 3.2 p.41 (Figura 3.9) obtenemos que el conjunto  $\mathcal{B}_1$  está modelado con el siguiente dibujo (Figura 3.21).

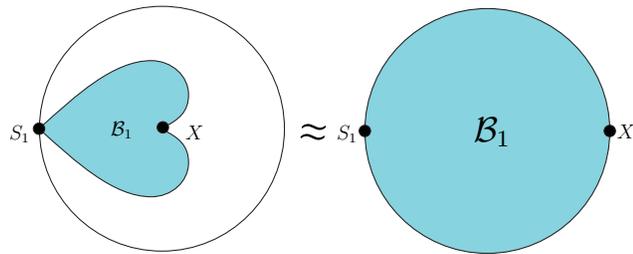


Figura 3.21: Conjunto  $\mathcal{B}_1$ .

Uniendo las figuras 3.20 y 3.21. Obtenemos los continuos de no corte de  $X$  que contiene a  $S_1$  o están contenidos en  $S_1$ ,  $(NC^*(X) \cap C(S_1)) \cup \mathcal{B}_1$  (Ver Figura 3.22).

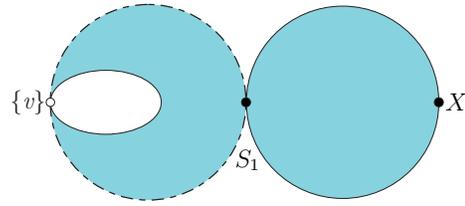


Figura 3.22:  $(NC^*(X) \cap C(S_1)) \cup \mathcal{B}_1$ .

Similarmente podemos iniciar esta construcción en  $S_2$  y obtenemos (Ver Figura 3.23):

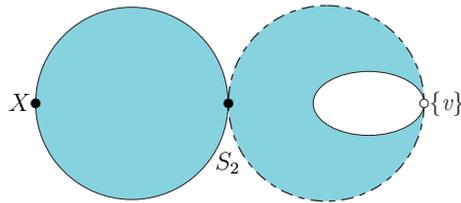


Figura 3.23:  $(NC^*(X) \cap C(S_1)) \cup \mathcal{B}_2$ .

Finalmente uniendo las figuras 3.22 y 3.23 en los puntos  $X$  y  $\{v\}$ , obtenemos el modelo para  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.24).

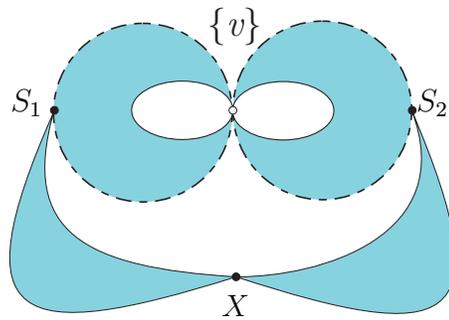


Figura 3.24: Modelo de  $NC^*(X)$  para el Ocho.

De donde tenemos que  $NC^*(X)$  es conexo, además, el modelo se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$  y su dimensión es 2.

**Ejemplo 3.5.** *El Dulce.*

El dulce es un continuo que consta de dos arcos  $L_1, L_2$  y una circunferencia  $S$  que se intersecta a cada arco en uno de sus extremos. Denotaremos por  $v_1, v_2$  al punto de intersección de  $L_1$  con  $S$  y  $L_2$  con  $S$  respectivamente, y por  $p_1, p_2$  al otro extremo de  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente (Ver Figura 3.25).

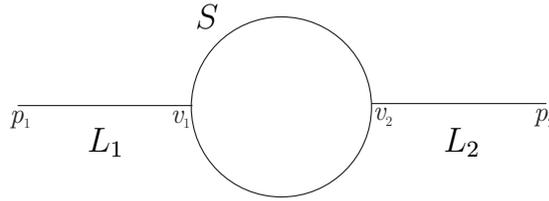


Figura 3.25: El Dulce.

Veamos que  $\mathcal{A} = \{A : A \in C_{\{p_1\}}(L_1)\} \subseteq NC^*(X)$ .

Sea  $A \in \mathcal{A}$ . Si  $A \neq L_1$ , tenemos que  $X \setminus A = (L_1 \setminus A) \cup (S \cup L_2)$  donde  $(L_1 \setminus A) \cap (S \cup L_2) = \{v_1\}$ , por lo que  $X \setminus A$  es conexo. Si  $A = L_1$ , tenemos que  $X \setminus A = (S \cup L_2) \setminus \{v_1\}$ , el cual es conexo.

El conjunto  $\mathcal{A}$  está modelado por un arco que va del singular  $\{p_1\}$  al arco  $L_1$  (Ver figura 3.26).

Figura 3.26: Continuos de no corte de  $X$  contenidos en  $L_1$ .

Antes de continuar nuestro modelo, primero veamos cuales son los subcontinuos de  $S$  tales que  $v_1 \in S$  y  $v_2 \notin S$ . Es decir,  $C_{\{v_1\}}(S) \setminus C_{\{v_2\}}(S)$ .

Llamamos  $\alpha$  el arco superior de  $S$  que une  $v_1$  con  $v_2$  y  $\beta$  al arco inferior. Si  $A \in C_{\{v_1\}}(S) \setminus C_{\{v_2\}}(S)$ ,  $A$  es la unión de un subarco  $v_1a$  de  $\alpha$  y un subarco  $v_1b$  de  $\beta$  (Ver Figura 3.27).

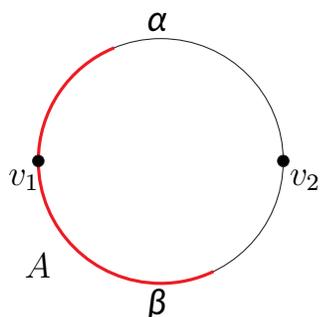


Figura 3.27: Subcontinuo  $A$

Si identificamos a  $\alpha$  con el intervalo  $[0, 1)$  donde  $v_1$  corresponde a 0 y  $v_2$  a 1 y hacemos lo mismo con  $\beta$ , el continuo  $A = [v_1, a] \cup [v_1, b]$  queda identificado de manera única por la pareja  $(a, b)$ .

Por tanto, el modelo buscado es  $[0, 1) \times [0, 1)$  (Ver Figura 3.28). Notemos que la diagonal representa a los subcontinuos  $A$  de  $S$  tales que  $v_1$  es punto medio de  $A$  y  $v_2 \notin A$  (Ver Figura 3.28) y por último notemos que el punto  $(1, 1)$  representa a  $\alpha \cup \beta = S$  (Ver Figura 3.28).

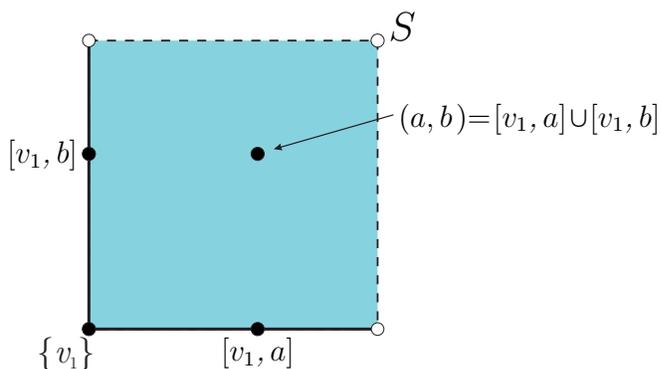


Figura 3.28:  $\{A \in C(S) : v_1 \in A \text{ y } v_2 \notin A\}$ .

Ahora, veamos que  $\mathcal{B} = \{B = L_1 \cup C : C \in C_{\{v_1\}}(S) \setminus C_{\{v_2\}}(S)\} \cup \{S\} \subseteq NC^*(X)$ .

Sea  $B \in \mathcal{B}$ , si  $C \neq S$ , tenemos que  $X \setminus B = (S \setminus C) \cup L_2$  donde  $(S \setminus C) \cap L_2 =$

$\{v_2\}$ , por lo que  $X \setminus B$  es conexo. Si  $C = S$ , tenemos que  $X \setminus B = L_2 \setminus \{v_2\}$ , el cual es conexo.

Por el modelo que acabamos de explicar en la Figura 3.28, tenemos que el conjunto  $\mathcal{B}$  está modelado con el siguiente dibujo en el que destacamos los puntos que representan a  $L_1$  y a  $P_1 = L_1 \cup S$  (Figura 3.29).

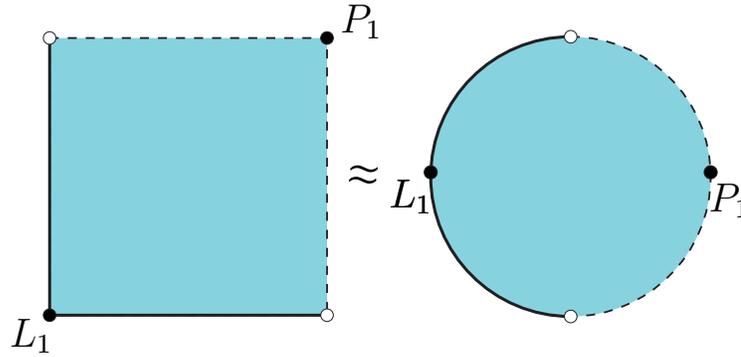


Figura 3.29: Conjunto  $\mathcal{B}$ .

Veamos que los continuos de la forma  $\mathcal{C} = \{C = P_1 \cup D : D \in C_{\{v_2\}}(L_2)\} \subseteq NC^*(X)$ . Sea  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $X \setminus C = L_2 \setminus C$  el cual es conexo. Notemos que si  $C = L_2$  tenemos  $L_2 \setminus L_2 = \emptyset$ , donde  $C = X$ . El conjunto  $\mathcal{C}$  está modelado por un arco que va de  $P_1$  a  $X$  (Ver figura 3.30).



Figura 3.30: Conjunto  $\mathcal{C}$ .

Uniendo las figuras 3.26, 3.29 y 3.30. Obtenemos los continuos de no corte de  $X$  que tienen a  $p_1$ . Es decir,  $NC^*(X) \cap C_{\{p_1\}}(X)$  (Ver Figura 3.31).

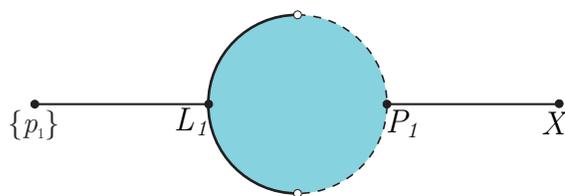


Figura 3.31: Continuos de no corte de  $X$  que tiene a  $p_1$ .

Similarmente podemos iniciar esta construcción en  $p_2$  y obtenemos:

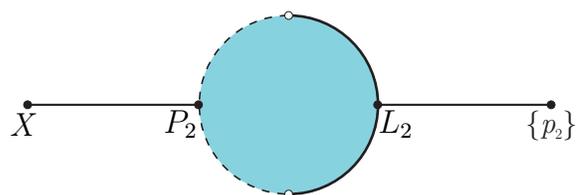


Figura 3.32: Continuos de no corte de  $X$  que tienen a  $p_2$ ,  $NC^*(X) \cap C_{\{p_2\}}(X)$ .

Uniendo las figuras 3.31 y 3.32 en el punto  $X$ , obtenemos una componente de  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.33). Qué es la componente que tiene a  $X$

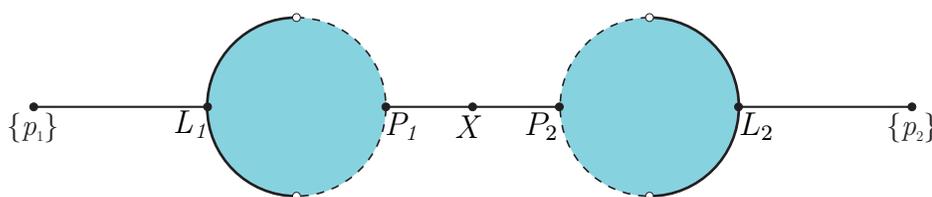
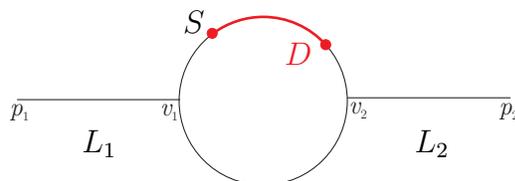
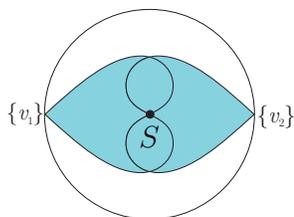


Figura 3.33: La componente de  $X$  en  $NC^*(X)$ .

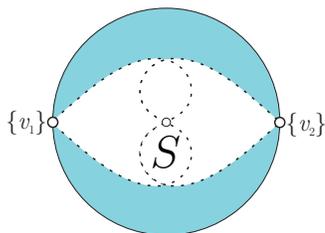
Veamos que hay más continuos de no corte en este espacio. Consideremos el conjunto  $\mathcal{D} = \{D \in C(S) : \{v_1, v_2\} \cap D = \emptyset\} \subseteq NC^*(X)$ . Sea  $D \in \mathcal{D}$ , tenemos que  $X \setminus D = (S \setminus D) \cup (L_1 \cup L_2)$  donde  $(S \setminus D) \cap L_1 = \{v_1\}$  y  $(S \setminus D) \cap L_2 = \{v_2\}$ , por lo que  $X \setminus D$  es conexo (Ver Figura 3.34).

Figura 3.34: Conjunto  $\mathcal{D}$ .

En el Ejemplo 3.1 vimos que el conjunto de los continuos que tiene a un punto  $p$  está modelado por un corazón contenido en  $C(S)$ . Consideremos  $\mathcal{E} = \{E \in C(X) : \{v_1, v_2\} \cap D \neq \emptyset\} = C(S) \setminus \mathcal{D}$ . La siguiente figura modela al conjunto  $\mathcal{E}$  en  $C(S)$  (Ver figura 3.35).

Figura 3.35: Conjunto  $\mathcal{E} = C(S) \setminus \mathcal{D}$ .

Ahora bien, un modelo de  $\mathcal{D}$  en  $C(S)$ , nos queda de la siguiente manera (Figura 3.36).

Figura 3.36: Conjunto  $\mathcal{D}$ .

Notemos que  $\mathcal{D}$  no es conexo. Si  $D \in \mathcal{D}$ , entonces  $\{v_1, v_2\} \cap D = \emptyset$ , por lo que  $D \subset \alpha \setminus \{v_1, v_2\}$  o bien  $D \subset \beta \setminus \{v_1, v_2\}$  (Ver Figura 3.37).

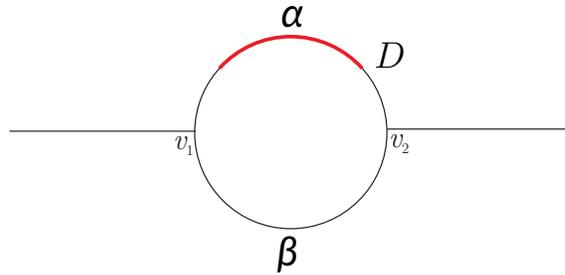


Figura 3.37:

Por lo cual  $\mathcal{D}$  tiene dos componentes una contenida en  $C(\alpha)$  y la otra en  $C(\beta)$  (Ver Figura 3.38).

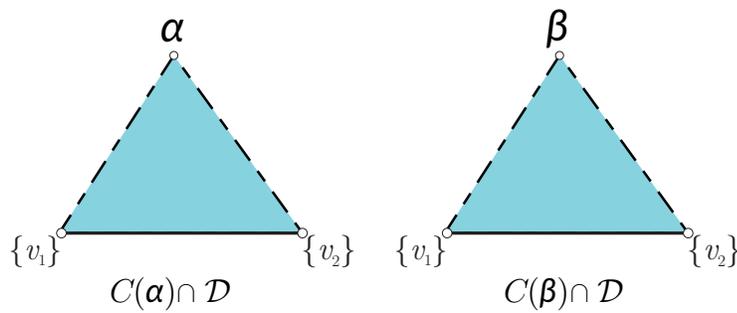


Figura 3.38: Componentes del conjunto  $\mathcal{D}$ .

Finalmente colocando juntas las figuras 3.33 y 3.38, obtenemos el modelo para  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.39).

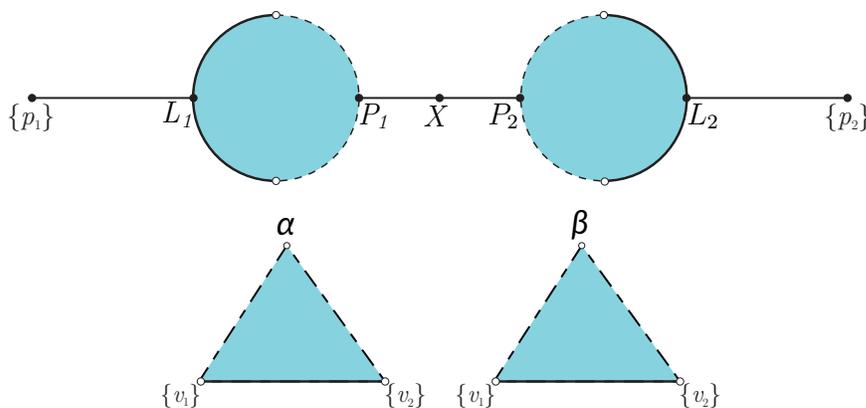


Figura 3.39: Modelo de  $NC^*(X)$  para el Dulce.

De donde tenemos que  $NC^*(X)$  no es conexo, además, el modelo se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$ , su dimensión es 2 y tiene 3 componentes.

Nos preguntamos por más familias de gráficas finitas, consideramos ahora la Oruga.

**Ejemplo 3.6.** *La Oruga.*

La Oruga es un continuo que consta de una unión finita de circunferencias  $S_1, \dots, S_n$  tales que  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $|i - j| \leq 1$ . Para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $|S_i \cap S_j| = 1$  donde la intersección la circunferencia  $S_i$  con  $S_{i+1}$  es el punto  $v_i$ . (Ver Figura 3.40).

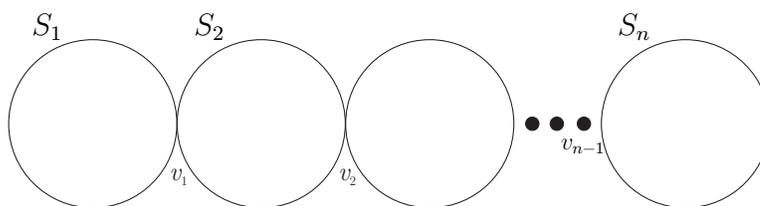


Figura 3.40: La Oruga.

En este ejemplo no seremos tan minuciosos, solo lo describiremos generalizando los argumentos que ya vimos en los ejemplos anteriores.

Primero describiremos algunos subconjuntos especiales de  $C(X)$  que nos ayudaran en la descripción de nuestro modelo de  $NC^*(X)$ .

Para  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  definimos  $S_i = \alpha_i \cup \beta_i$  donde  $\alpha_i$  es el arco superior de  $S_i$  con extremos  $v_{i-1}$ ,  $v_i$  y  $\beta_i$  es el arco inferior de  $S_i$  con extremos  $v_{i-1}$ ,  $v_i$  (Ver Figura 3.41).

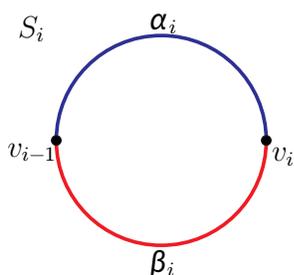


Figura 3.41:  $S_i = \alpha_i \cup \beta_i$ .

Con lo anterior, ahora definamos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \{A \in C(S_i) : \alpha_i \subset A\} \\ &= \{A = \alpha_i \cup [v_{i-1}, c] \cup [d, v_i] : c, d \in \beta_i \text{ y con } v_{i-1} \leq c \leq d \leq v_i\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_i &= \{B \in C(S_i) : \beta_i \subset B\} \\ &= \{B = \beta_i \cup [v_{i-1}, a] \cup [b, v_i] : a, b \in \alpha_i \text{ y con } v_{i-1} \leq a \leq b \leq v_i\} \end{aligned}$$

En  $C(S_i)$ ,  $\Lambda_i$  y  $\beta_i$  están representados en la Figura 3.42.

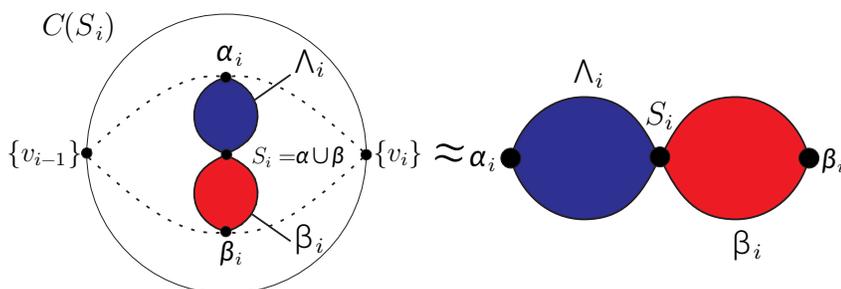


Figura 3.42:  $\Lambda_i \cup \beta_i \subset C(S_i)$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  definimos  $I_i = \bigcup_{j < i} S_j$ ,  $D_i = \bigcup_{j > i} S_j$  y  $Y_i = \bigcup_{j \neq i} S_j$ , notemos que  $I_1 = \emptyset = D_n$ .

Para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  definimos  $\mathcal{L}_i = \{L = I_i \cup C : C \in C_{\{v_{i-1}\}}(S_i) \setminus C_{\{v_i\}}(S_i)\} \cup \{I_i \cup S_i\}$  y  $\mathcal{L}_1 = \emptyset$  (Ver Figura 3.43).

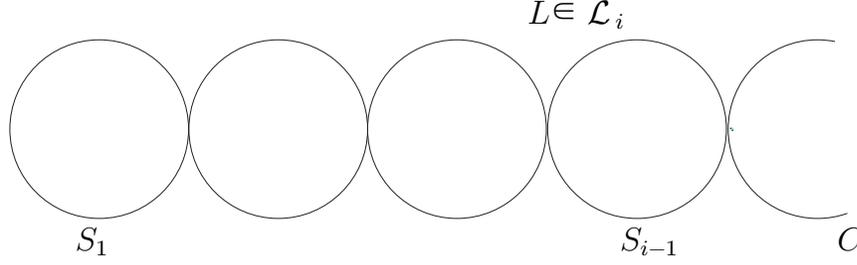


Figura 3.43: Conjunto  $L \in \mathcal{L}_i$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  definimos  $\mathcal{R}_i = \{R = D_i \cup C : C \in C_{\{v_i\}}(S_i) \setminus C_{\{v_{i-1}\}}(S_i)\} \cup \{D_i \cup S_i\}$  y  $\mathcal{R}_n = \emptyset$  (Ver Figura 3.44).

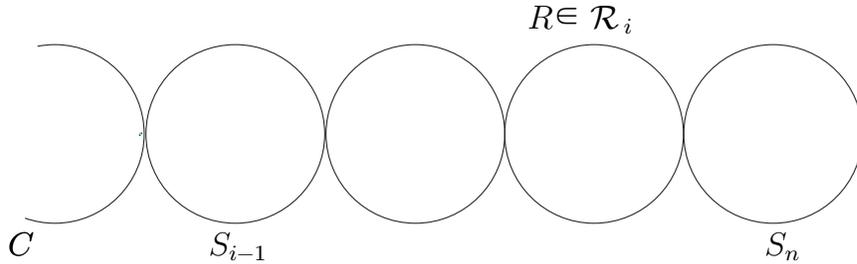


Figura 3.44: Conjunto  $R \in \mathcal{R}_i$ .

Observemos lo siguiente:

Si  $L \in \mathcal{L}_i$  y  $L = I_i \cup S_i$ , entonces  $L \in \mathcal{L}_{i+1}$  y  $L = I_{i+1} \cup \{v_i\}$ .

Si  $R \in \mathcal{R}_i$  y  $R = D_i \cup S_i$ , entonces  $L \in \mathcal{R}_{i+1}$  y  $R = D_{i+1} \cup \{v_{i-1}\}$ .

Como en el Ejemplo 3.5 p.50 (Figura 3.29), tenemos que la Figura 3.45 y la Figura 3.46 modelan a los conjuntos  $\mathcal{R}_i$  y  $\mathcal{L}_i$  respectivamente.

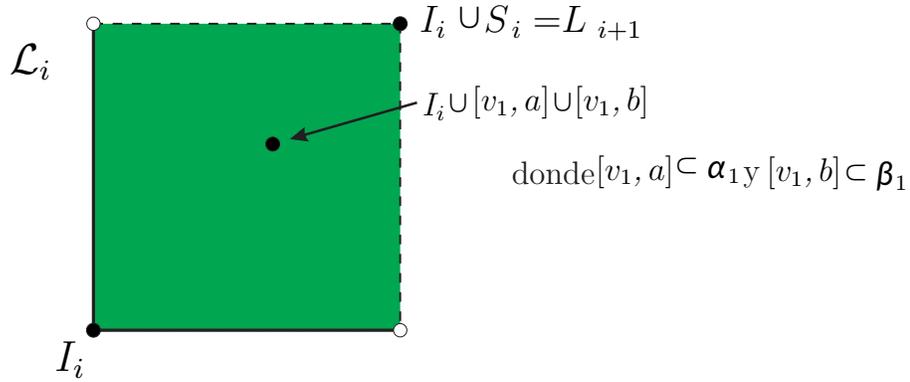


Figura 3.45: Conjunto  $\mathcal{L}_i$ .

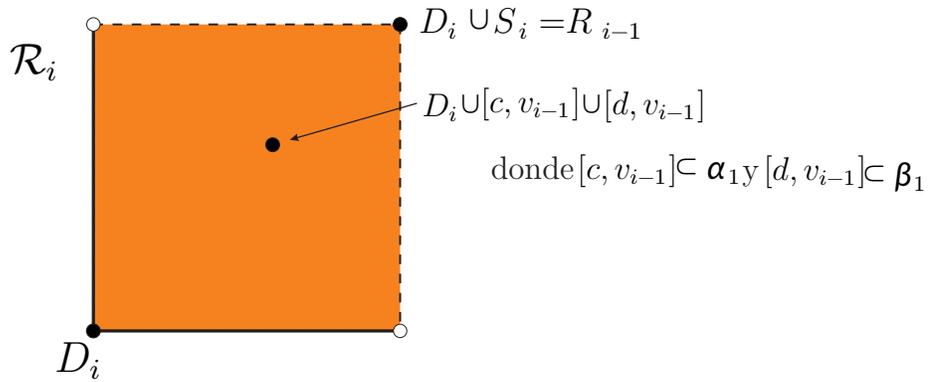
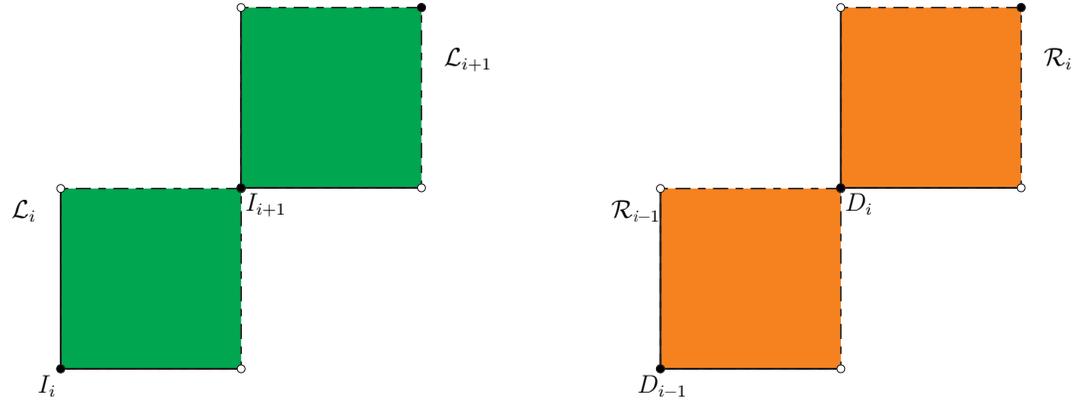


Figura 3.46: Conjunto  $\mathcal{R}_i$ .

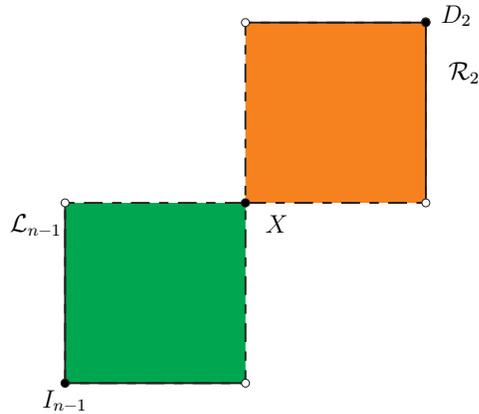
De lo anterior que hemos definido, notemos que pasa lo siguiente:

$\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $|i - j| \leq 1$  y  $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_{i+1} = I_i \cup S_i = I_{i+1}$  (Ver Figura 3.47).

$\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $|i - j| \leq 1$  y  $\mathcal{R}_{i-1} \cap \mathcal{R}_i = D_i \cup S_i = R_{i-1}$  (Ver Figura 3.47).

Figura 3.47:  $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$  y  $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j$ .

$\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i = 1, j = n$  y  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{L}_n = D_1 \cup S_1 = X = I_n \cup S_n$ , (Ver Figura 3.48) en cualquier otro caso  $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$ .

Figura 3.48:  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{L}_n$ .

Podemos observar que si  $A \in \mathcal{L}_i = I_1 \cup \dots \cup I_{i-1} \cup C$  donde  $C \in C_{\{v_{i-1}\}}(S_i) \setminus C_{\{v_i\}}(S_i)$ , entonces  $X \setminus A = R_{i+1} \cup \dots \cup R_n \cup (S_i \setminus C)$  donde  $S_i \setminus C$  es conexo,  $v_i \in S_i \setminus C$  y  $v_{i-1} \notin S_i \setminus C$ , por lo que  $X \setminus A$  es conexo y  $\overline{X \setminus A} \in \mathcal{R}_i$ , por tanto,  $\mathcal{L}_i \subseteq NC^*(X)$ . De igual manera, si  $B \in \mathcal{R}_i$ ,  $X \setminus B$  es conexo y

$\overline{X \setminus B} \in \mathcal{L}_i$ . Con esto probamos que  $\mathcal{L}_i \subseteq NC^*(X)$  para toda  $i \in \{2, \dots, n\}$  y  $\mathcal{R}_j \subseteq NC^*(X)$  para toda  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Ahora, definamos los siguientes conjuntos que nos darán más continuos de no corte de  $X$ .

$\mathcal{T}_i^\alpha = \{Y_i \cup A : A \in \Lambda_i\}$  si  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ . (Ver Figura 3.49).

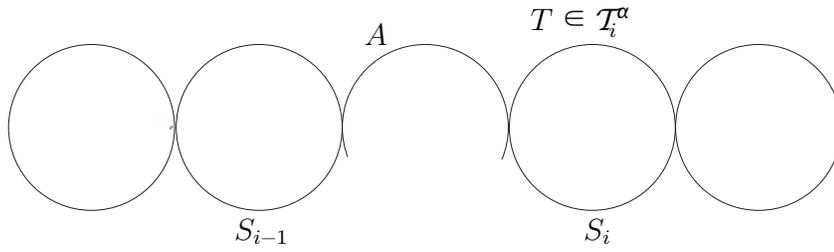


Figura 3.49:  $T \in \mathcal{T}_i^\alpha$ .

$\mathcal{T}_i^\beta = \{Y_i \cup B : B \in \beta_i\}$  si  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ . (Ver Figura 3.50).

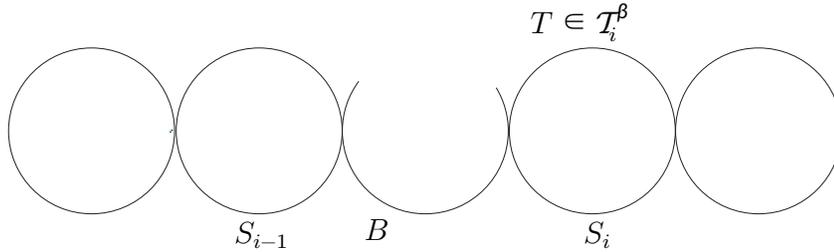
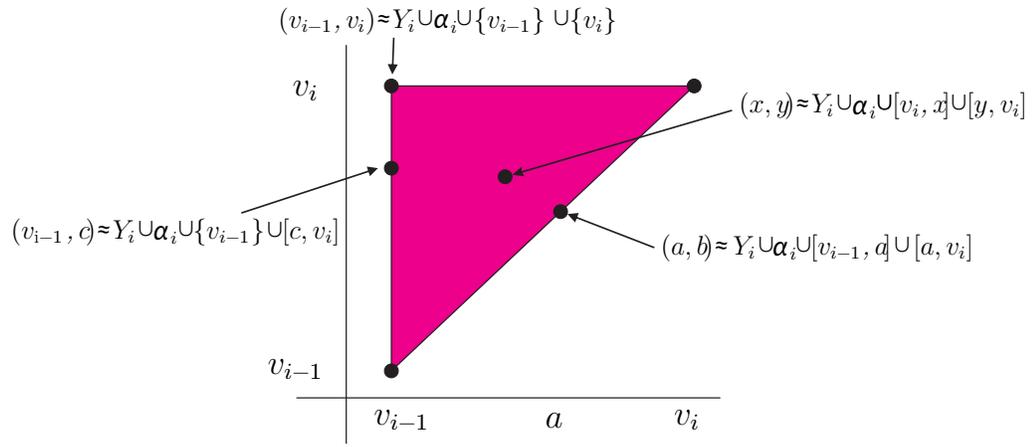
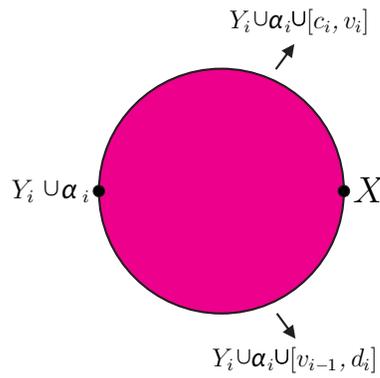


Figura 3.50:  $T \in \mathcal{T}_i^\beta$ .

Para ver un modelo de  $\mathcal{T}_i^\alpha$  notemos que si  $A \in \mathcal{T}_i^\alpha$ , entonces  $A = Y_i \cup \alpha_i \cup [v_{i-1}, c] \cup [d, v_i]$  donde  $[v_{i-1}, c] \cup [d, v_i] \subset \beta_i$  y  $v_{i-1} \leq c \leq d \leq v_i$ , entonces a  $A$  le podemos asociar el punto  $(c, d)$  en el cuadrado  $[v_{i-1}, v_i] \times [v_{i-1}, v_i]$  (Ver Figura 3.51) con lo que  $\mathcal{T}_i^\alpha$  queda representado en el triángulo por arriba de la diagonal.

Figura 3.51: Conjunto  $\mathcal{T}_i^\alpha$ .

Notemos que esta representación no es inyectiva pues para todo punto  $(a, a)$  en la diagonal tenemos que  $(a, a) \approx X$ , por lo que si identificamos la diagonal nos queda que  $\mathcal{T}_i^\alpha$  es una 2-celda (Ver Figura 3.52).

Figura 3.52: Conjunto  $\mathcal{T}_i^\alpha$ .

De igual manera,  $\mathcal{T}_i^\beta$  es una 2-celda (Ver Figura 3.53).

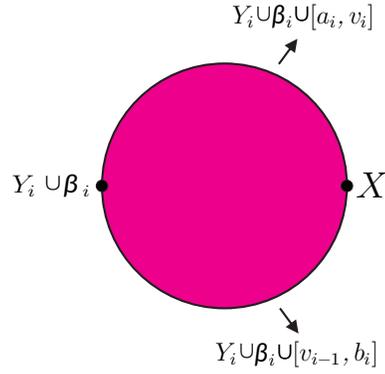


Figura 3.53: Conjunto  $\mathcal{T}_i^\beta$ .

Notemos que  $\mathcal{T}_i^\alpha \cap \mathcal{T}_i^\beta = X$ . Por lo que uniendo las figuras 3.52 y 3.53 en el punto  $X$ , obtenemos un modelo para  $\mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta$  (Ver Figura 3.54)

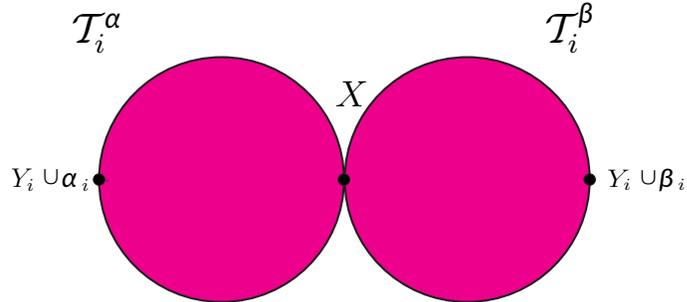
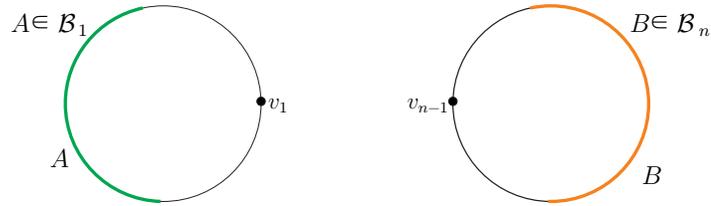


Figura 3.54:  $\mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta$ .

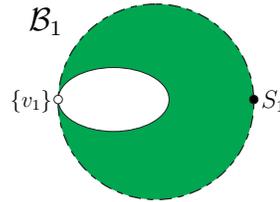
Ahora, definamos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{B}_1 = \{A \in C(S_1) : v_1 \notin A\} \cup \{S_1\} \text{ (Ver Figura 3.55).}$$

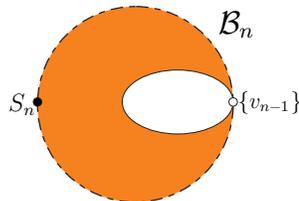
$$\mathcal{B}_n = \{A \in C(S_n) : v_{n-1} \notin A\} \cup \{S_n\} \text{ (Ver Figura 3.55).}$$

Figura 3.55:  $A \in \mathcal{B}_1$  y  $B \in \mathcal{B}_n$ .

Similarmente al trabajo hecho en el Ejemplo 3.4 p.46 obtenemos que el conjunto  $\mathcal{B}_1$  está modelado con el siguiente dibujo (Ver Figura 3.56).

Figura 3.56: Conjunto  $\mathcal{B}_1$ .

De igual manera el conjunto  $\mathcal{B}_n$  está modelado con el siguiente dibujo (Ver Figura 3.57).

Figura 3.57: Conjunto  $\mathcal{B}_n$ .

Para cada  $i \in \{2, \dots, n-1\}$   $\mathcal{B}_i = \{A \in C(S_i) : \{v_{i-1}, v_i\} \cap A = \emptyset\}$ . Notemos que  $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i^\alpha \cup \mathcal{B}_i^\beta$  donde  $\mathcal{B}_i^\alpha = \{A \in \mathcal{B}_i : A \subset \alpha_i\}$  (Ver Figura 3.58) y  $\mathcal{B}_i^\beta = \{A \in \mathcal{B}_i : A \subset \beta_i\}$  (Ver Figura 3.59).

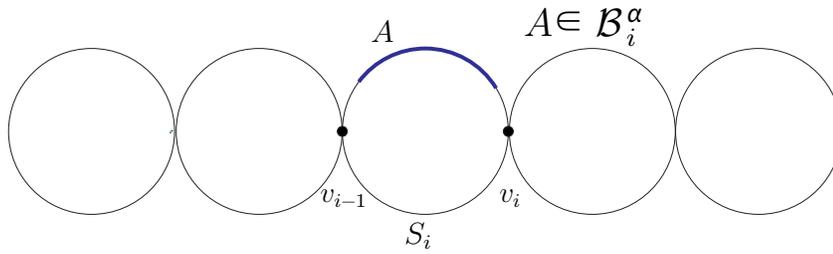


Figura 3.58:  $A \in \mathcal{B}_i^\alpha$ .

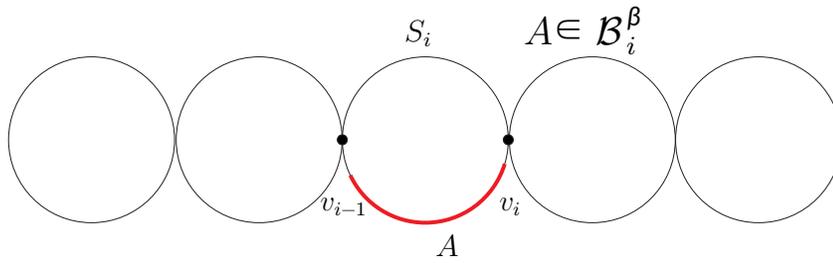


Figura 3.59:  $A \in \mathcal{B}_i^\beta$ .

Similarmente al trabajo que realizamos en el Ejemplo 3.5 p.53 (Figura 3.38), tenemos que los conjuntos  $\mathcal{B}_i^\alpha$  y  $\mathcal{B}_i^\beta$  están modelados por la siguiente dibujo (Figura 3.60).

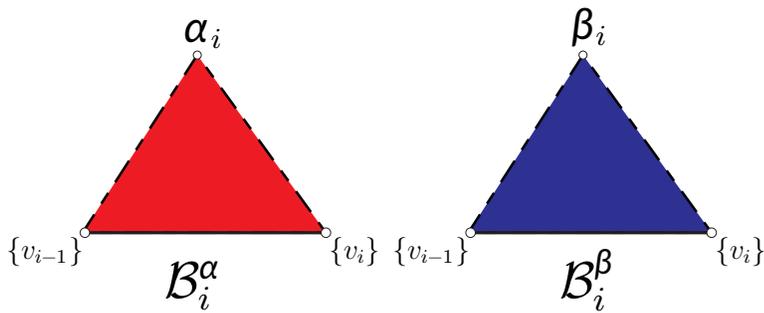


Figura 3.60: Conjuntos  $\mathcal{B}_i^\alpha$  y  $\mathcal{B}_i^\beta$ .

Hemos definido en  $C(X)$  los conjuntos  $\mathcal{T}_i^\alpha$ ,  $\mathcal{T}_i^\beta$ ,  $\mathcal{B}_i^\alpha$  y  $\mathcal{B}_i^\beta$  cada uno de estos subconjuntos de  $C(X)$  es conexo, veamos que también son subconjuntos de  $NC^*(X)$ .

Para  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  si  $A \in \mathcal{T}_i^\alpha$ ,  $A = Y_i \cup \alpha \cup [v_{i-1}, c] \cup [d, v_i]$  donde  $[v_{i-1}, c], [d, v_i] \subseteq \beta$  y  $v_i \leq c \leq d \leq v_i$ . De manera que si  $c = d$ , entonces  $X \setminus A = \emptyset$  y si  $c < d$ , entonces  $X \setminus A = (c, d)$  el arco abierto contenido en  $\beta_i$ . Por tanto,  $X \setminus A$  es conexo,  $\mathcal{T}_i^\alpha \subseteq NC^*(X)$ , y además,  $\overline{X \setminus A} \in \mathcal{B}_i^\beta$ .

De igual manera podemos ver que  $\mathcal{T}_i^\beta$ ,  $\mathcal{B}_i^\alpha$  y  $\mathcal{B}_i^\beta$  son subconjuntos de  $NC^*(X)$ , y además, si  $A \in \mathcal{B}_i^\alpha$ ,  $\overline{X \setminus A} \in \mathcal{T}_i^\beta$ , si  $A \in \mathcal{B}_i^\beta$ ,  $\overline{X \setminus A} \in \mathcal{T}_i^\alpha$  y si  $A \in \mathcal{T}_i^\beta$ ,  $\overline{X \setminus A} \in \mathcal{B}_i^\alpha$ .

Finalmente, tenemos que  $NC^*(X) = \mathcal{B}_1 \cup \bigcup_{i=2}^n \mathcal{L}_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_i \cup \bigcup_{i=2}^n \mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta \cup \mathcal{B}_i^\alpha \cup \mathcal{B}_i^\beta \cup \mathcal{B}_n$ .

Donde  $\bigcup_{i=2}^n \mathcal{L}_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_i$  está modelado por el siguiente dibujo (Figura 3.61).

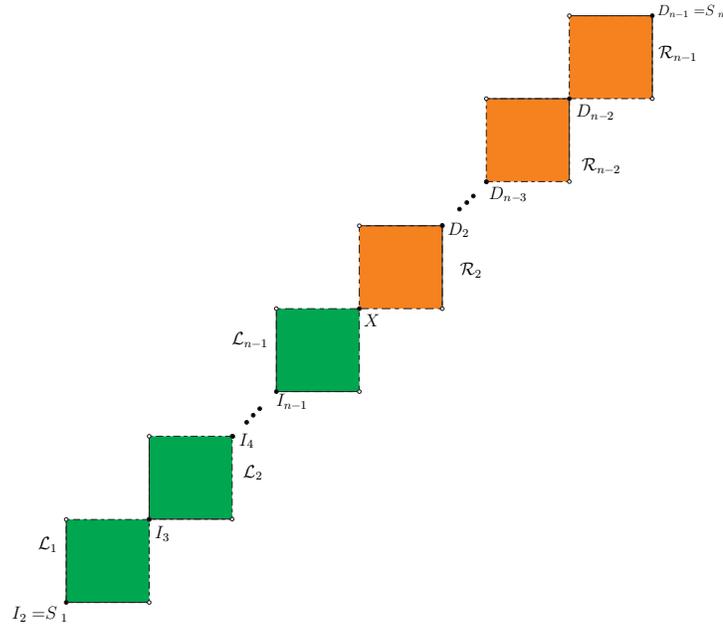


Figura 3.61:  $\bigcup_{i=2}^n \mathcal{L}_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}_i$ .

$\bigcup_{i=2}^n \mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta$  está modelado por la siguiente dibujo (Figura 3.62).

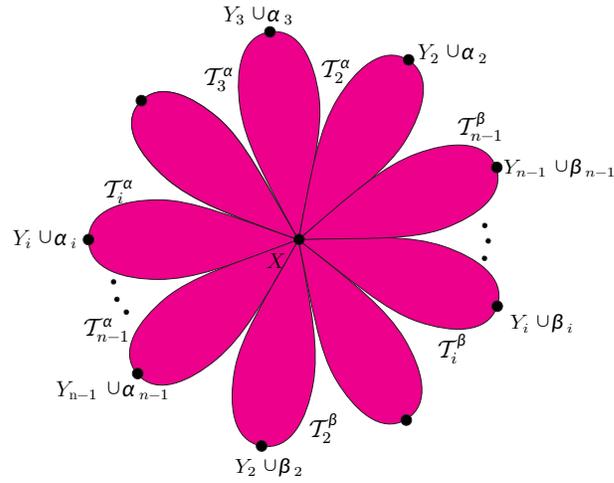


Figura 3.62:  $\bigcup_{i=2}^n \mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta$ .

Uniando las figuras 3.56, 3.57, 3.61 y 3.62 en los puntos  $X$ ,  $S_1$  y  $S_n$ , obtenemos una componente de  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.63). Qué es la componente que tiene a  $X$ .

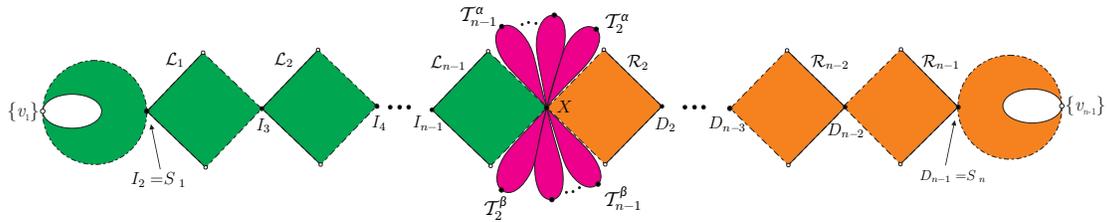


Figura 3.63: La componente de  $X$  en  $NC^*(X)$ .

Finalmente colocando juntas las figuras 3.63 y 3.60, para toda  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ , obtenemos el modelo para  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.64).

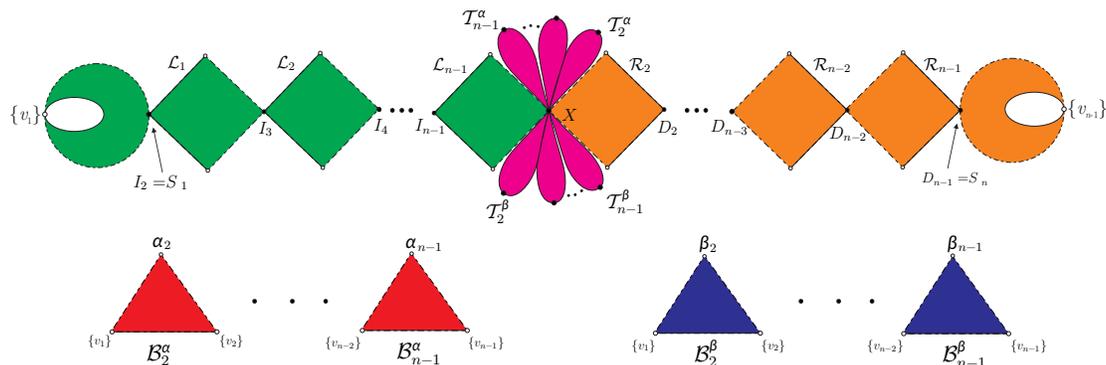


Figura 3.64: Modelo de  $NC^*(X)$  para la Oruga.

De donde tenemos que  $NC^*(X)$  no es conexo, además, el modelo se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$ , su dimensión es 2 y tiene  $2n - 3$  componentes, donde  $n$  es el número de ciclos en  $X$ .

### Ejemplo 3.7. El Tren.

Sea  $X$  el conjunto formado por  $n$  circunferencias  $S_1, \dots, S_n$  y  $n - 1$  arcos  $L_1, \dots, L_{n-1}$  donde los extremos de los arcos  $L_i$  son los puntos  $v_i, w_i$ ,  $S_i \cap S_j = \emptyset = L_i \cap L_j$  si  $i \neq j$  y  $L_i \cap S_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $j \in \{i, i + 1\}$ ,  $L_i \cap S_i = \{v_i\}$  y  $L_i \cap S_{i+1} = \{w_i\}$  (Ver Figura 3.65).

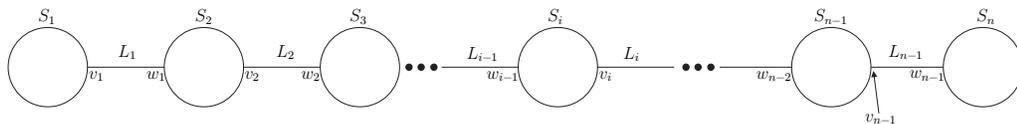


Figura 3.65: El Tren.

Notemos que  $X$  es homeomorfo a la Figura 3.66, por eso el nombre de tren.

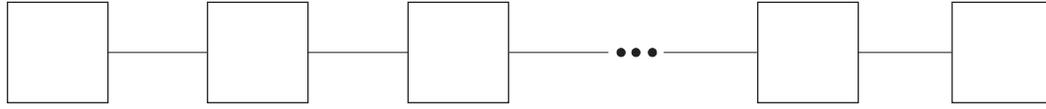


Figura 3.66: El Tren.

Al igual que en la Oruga (Ejemplo 3.6), en este ejemplo no seremos tan minuciosos y solo lo describiremos generalizando argumentos que ya usamos en los ejemplos anteriores.

Para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$  definimos  $IS_i = \bigcup_{j < i} S_j \cup L_j$  (Ver Figura 3.67).

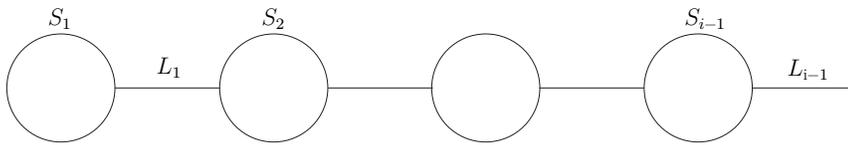


Figura 3.67: Conjunto  $IS_i$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  Definimos:

$IL_i = \bigcup_{j \leq i} L_{j-1} \cup S_j$  (Ver Figura 3.68).

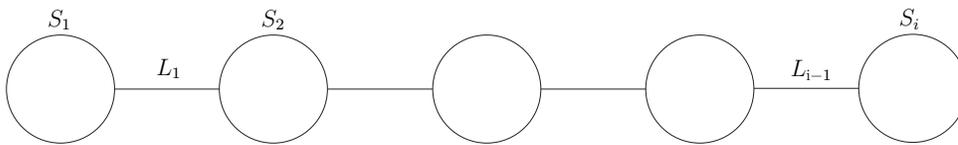


Figura 3.68: Conjunto  $IL_i$ .

$DS_i = \bigcup_{j \geq i} L_j \cup S_{j+1}$  (Ver Figura 3.69).

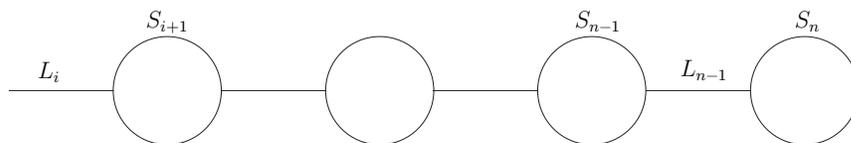


Figura 3.69: Conjunto  $DS_i$ .

$DL_i = \bigcup_{j > i} S_j \cup L_j$  (Ver Figura 3.70).

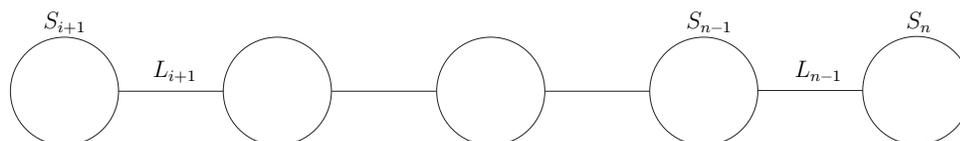


Figura 3.70: Conjunto  $DL_i$ .

**Observación:**  $IS_1 = \emptyset = DS_n$ .

Ahora, definimos para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

$\mathcal{LIS}_i = \{K = IS_i \cup C : C \in C_{\{w_{i-1}\}}(S_i) \setminus C_{\{v_i\}}(S_i)\} \cup \{S_i\}$  (Ver Figura 3.71).

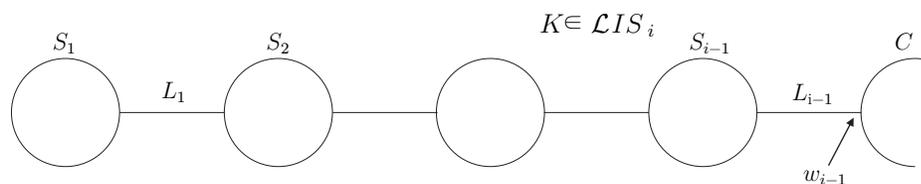


Figura 3.71:  $K \in \mathcal{LIS}_i$ .

De manera similar a lo hecho en el Ejemplo 3.6 p.57 (Figura 3.45), tenemos que la Figura 3.72 modela al conjunto  $\mathcal{LIS}_i$ .

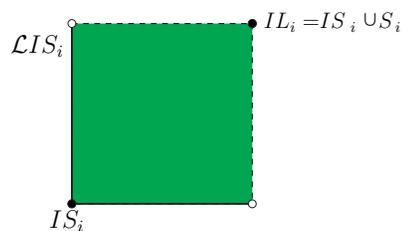


Figura 3.72: Conjunto  $\mathcal{LIS}_i$ .

Y para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  definimos  
 $\mathcal{RDS}_i = \{R = DS_i \cup C : C \in C_{\{v_i\}}(S_i) \setminus C_{\{w_{i-1}\}}(S_i)\} \cup \{S_i\}$  (Ver Figura 3.73)

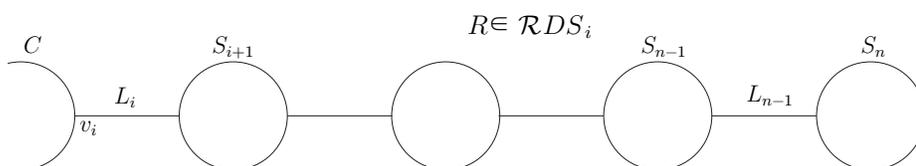


Figura 3.73: Conjunto  $R \in \mathcal{RDS}_i$ .

Nuevamente a lo hecho en el Ejemplo 3.6 p.57 (Figura 3.46), tenemos que la Figura 3.74 modela al conjunto  $\mathcal{RDS}_i$ .

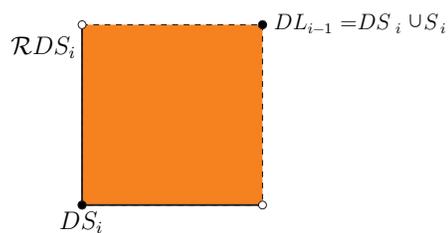


Figura 3.74: Conjunto  $\mathcal{RDS}_i$ .

Ahora bien, definimos para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .  
 $\mathcal{LIL}_i = \{K = IL_i \cup C : C \in C_{\{v_i\}}(L_i)\}$  (Ver Figura 3.75).

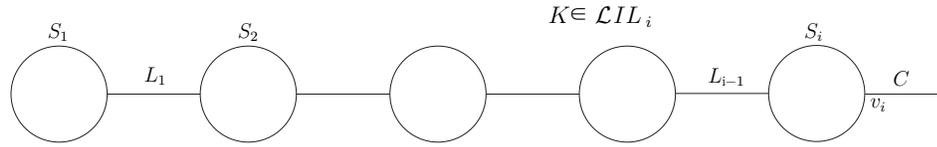


Figura 3.75: Conjunto  $\mathcal{LIL}_i$ .

Similarmente al trabajo que realizamos en el Ejemplo 3.5 p.50 (Ver Figura 3.30), tenemos que el conjunto  $\mathcal{LIL}_i$  está modelado por la siguiente arco con extremos  $IL_i$  e  $IL_i \cup L_i = IS_{i+1}$  (Ver Figura 3.76).

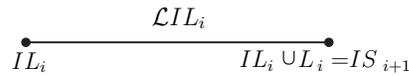


Figura 3.76:  $\mathcal{LIL}_i$ .

**Observación:**

$\mathcal{LIL}_i \cap \mathcal{LIS}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $j = i$  donde  $\mathcal{LIL}_i \cap \mathcal{LIS}_i = IL_i$  o bien  $j = i + 1$  donde  $\mathcal{LIL}_i \cap \mathcal{LIS}_{i+1} = IS_{i+1}$  (Ver Figura 3.77).

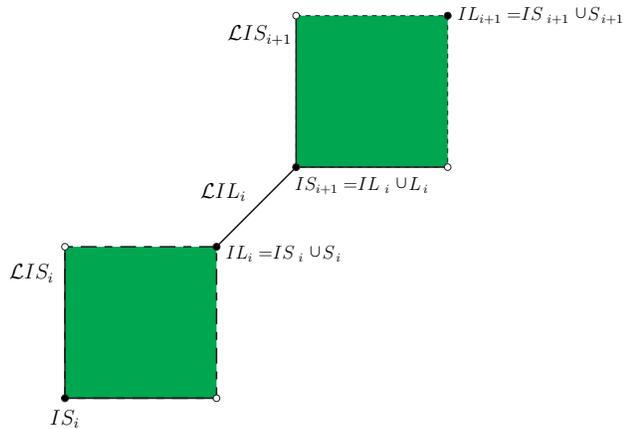


Figura 3.77:  $\mathcal{LIL}_i \cap \mathcal{LIS}_j$ .

$\mathcal{RDS}_i \cap \mathcal{RDL}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i \geq 2$  y  $j = i - 1$  donde  $\mathcal{RDS}_i \cap \mathcal{RDL}_{i-1} = DS_i \cup S_i = DL_{i-1}$  o bien  $i = j$  donde  $\mathcal{RDS}_i \cap \mathcal{RDL}_i = DL_i \cup L_i = DS_i$  (Ver Figura 3.78)

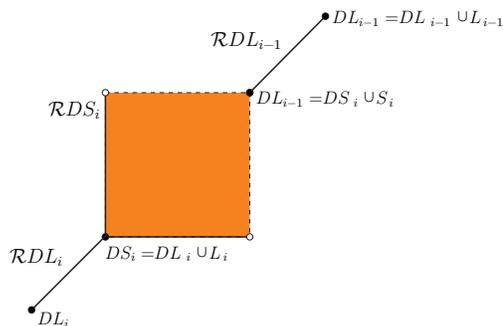


Figura 3.78:  $\mathcal{RDS}_i \cap \mathcal{RDL}_j$ .

$\mathcal{LIL}_i \cap \mathcal{LIL}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i = j$ .

$\mathcal{RDL}_i \cap \mathcal{RDL}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i = j$ .

$\mathcal{LIS}_i \cap \mathcal{LIS}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i = j$ .

$\mathcal{RDS}_i \cap \mathcal{RDS}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i = j$ .

$\mathcal{LIS}_i \cap \mathcal{RDS}_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $i = n$  y  $j = 1$ . Donde  $\mathcal{LIS}_n \cap \mathcal{RDS}_1 = X = IS_n \cup S_n = DS_1 \cup S_1$  (Ver Figura 3.79).

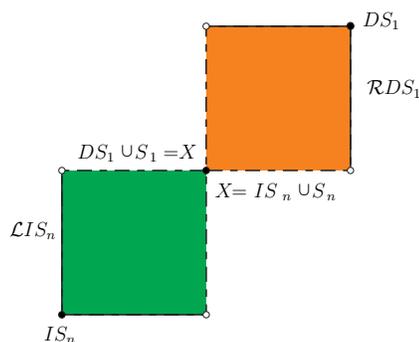


Figura 3.79:  $\mathcal{LIS}_n \cap \mathcal{RDS}_1$ .

De esta manera, tenemos que si  $\mathcal{K} = \bigcup_{i=2}^n \mathcal{L}S_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (\mathcal{R}DS_i \cup \mathcal{L}IL_i \cup \mathcal{R}DL_i)$ , entonces  $\mathcal{K} \subset NC^*(X)$  y se ve así (Ver Figura 3.80).

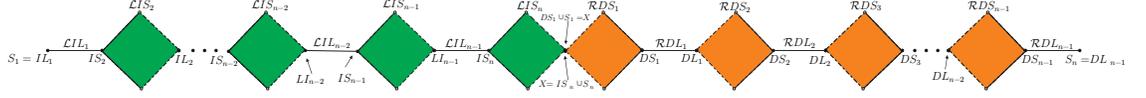


Figura 3.80:  $\mathcal{K} \subset NC^*(X)$ .

Para  $i \in \{1, \dots, n\}$  definimos  $Y_i = (X \setminus S_i) \cup \{v_i, w_{i-1}\} = \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j \cup \bigcup_{j \neq i} S_j$  para  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $Y_1 = (X \setminus S_1) \cup \{v_1\}$  y  $Y_n = (X \setminus S_n) \cup \{v_{n-1}\}$ .

Ahora, para cada  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  definimos  $S_i = \alpha_i \cup \beta_i$  donde  $\alpha_i$  es el arco superior de  $S_i$  con extremos  $w_{i-1}$ ,  $v_i$  y  $\beta_i$  es el arco inferior de  $S_i$  con extremos  $w_{i-1}$ ,  $v_i$  (Ver Figura 3.81).

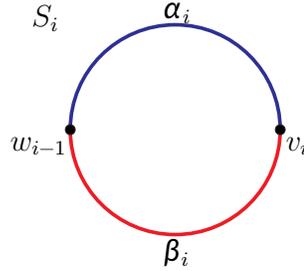


Figura 3.81:  $S_i = \alpha_i \cup \beta_i$ .

Con lo anterior, definamos los siguientes conjuntos:

$$\Lambda_i = \{A \in C(S_i) : \alpha_i \subset A\}$$

$$\beta_i = \{B \in C(S_i) : \beta_i \subset B\}$$

En  $C(S_i)$ ,  $\Lambda_i$  y  $\beta_i$  están representados en la Figura 3.82.

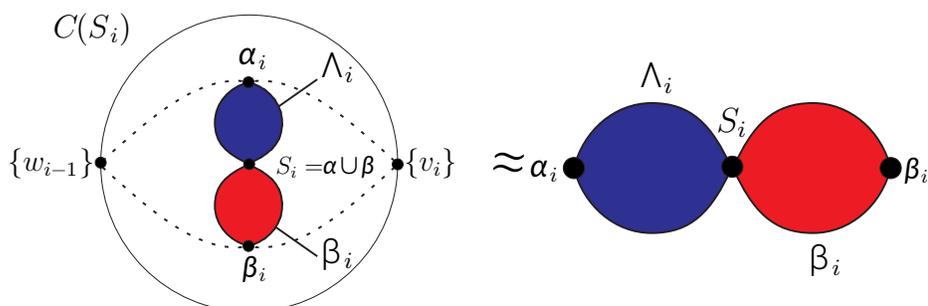


Figura 3.82:  $\Lambda_i \cup \beta_i \subset C(S_i)$ .

Ahora, de manera similar a lo hecho en el Ejemplo 3.6 p.59 definamos los siguientes conjuntos de de  $X$ .

$$\mathcal{T}_i^\alpha = \{Y_i \cup A : A \in \Lambda_i\} \text{ si } i \in \{2, \dots, n-1\}.$$

$$\mathcal{T}_i^\beta = \{Y_i \cup B : B \in \beta_i\} \text{ si } i \in \{2, \dots, n-1\}.$$

Notemos que  $\mathcal{T}_i^\alpha \cap \mathcal{T}_i^\beta = X$ . Por lo quede de manera análoga al Ejemplo 3.6 p.61, obtenemos un modelo para  $\mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta$  (Ver Figura 3.83)

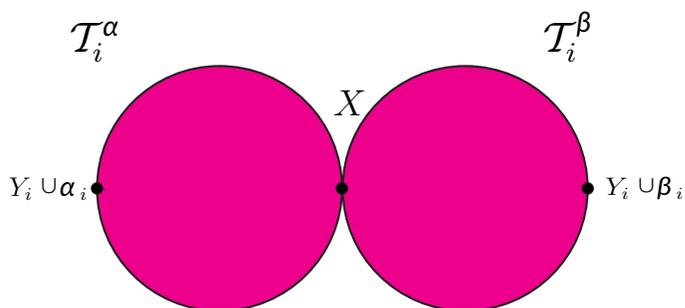


Figura 3.83:  $\mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta$ .

De manera que, definiendo  $\mathcal{T} = \bigcup_{i=2}^{n-1} \mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta \subset NC^*(X)$  está modelado por la siguiente dibujo (Figura 3.84).

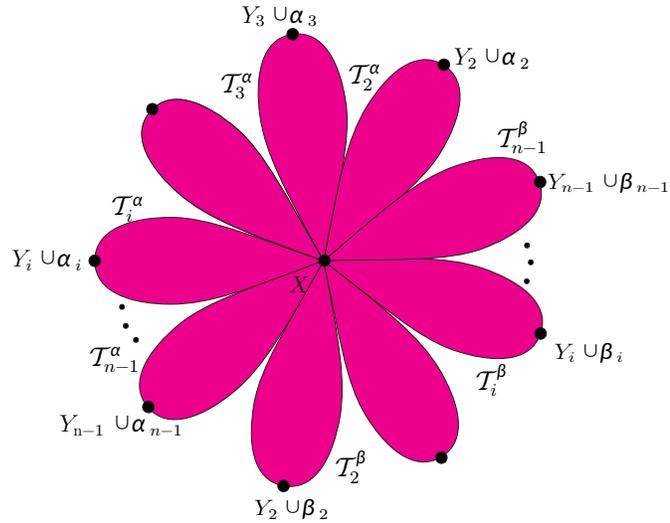


Figura 3.84:  $\mathcal{T} = \bigcup_{i=2}^{n-1} \mathcal{T}_i^\alpha \cup \mathcal{T}_i^\beta$ .

y para cada  $i \in \{2, \dots, n-1\}$   $\mathcal{B}_i = \{A \in C(S_i) : \{w_{i-1}, v_i\} \cap A = \emptyset\}$ . Notemos que  $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i^\alpha \cup \mathcal{B}_i^\beta$  donde  $\mathcal{B}_i^\alpha = \{A \in \mathcal{B}_i : A \subset \alpha_i\}$  y  $\mathcal{B}_i^\beta = \{A \in \mathcal{B}_i : A \subset \beta_i\}$ , análogamente al Ejemplo 3.6 p.63, tenemos que los conjuntos  $\mathcal{B}_i^\alpha$  y  $\mathcal{B}_i^\beta$  están modelados por la siguiente dibujo (Figura 3.85).

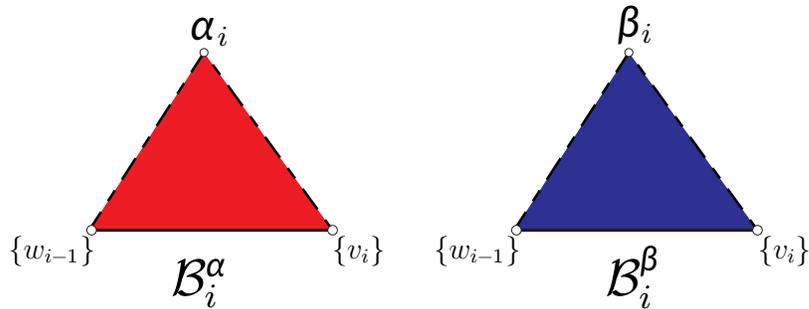


Figura 3.85: Conjuntos  $\mathcal{B}_i^\alpha$  y  $\mathcal{B}_i^\beta$ .

Por último, definimos  $\mathcal{B}_1 = \{A \in C(S_1) : v_1 \notin A\} \cup \{S_1\}$  y  $\mathcal{B}_n = \{A \in C(S_n) : w_{n-1} \notin A\} \cup \{S_n\}$ , los cuales están modelados de manera similar al Ejemplo 3.6 p.62 por la Figura 3.86.

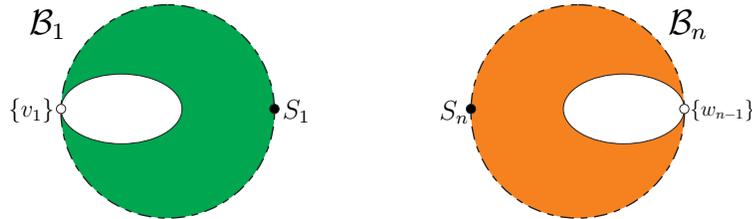


Figura 3.86: Conjuntos  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_n$ .

Si  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{B} \subset NC^*(X)$ .

Finalmente,  $NC^*(X) = \mathcal{K} \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{B}$  y está modelado por el siguiente dibujo (Figura 3.87).

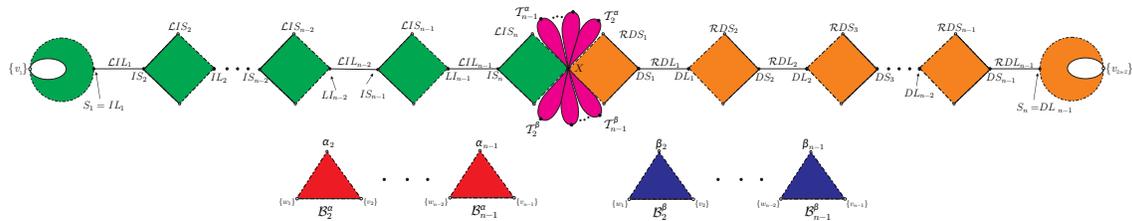


Figura 3.87: Modelo de  $NC^*(X)$  para el Tren.

De donde tenemos que  $NC^*(X)$  no es conexo, además, el modelo se puede encajar en  $\mathbb{R}^2$ , su dimensión es 2 y tiene  $2n - 3$  componentes, donde  $n$  es el número de ciclos en  $X$ .

**Ejemplo 3.8.** *La Theta.*

La Theta es un continuo que consta de 3 aristas que se intersectan en sus puntos extremos a saber  $J_1, J_2$  y  $J_3$  con extremos  $v_1$  y  $v_2$  (Ver Figura 3.88).

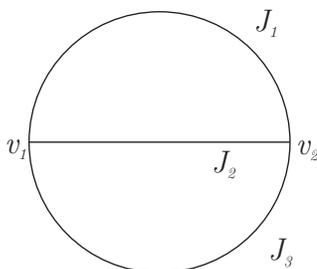
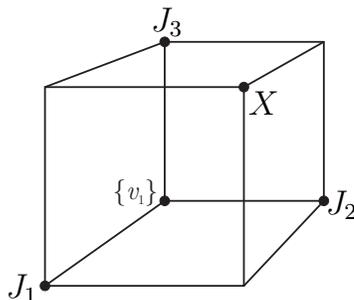


Figura 3.88: La Theta.

Sea  $C \in C(X)$  tal que  $v_1 \in C$ , notemos que para toda  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $J_i \cap C$  es un arco con extremos  $v_1$  y  $t_i$  con  $t_i \in [1, 0]$ . A la colección de estos conjuntos la denominamos por  $M(v_1)$ . Éstos conjuntos se pueden representar en una 3-celda de la siguiente manera a cada tres elementos  $t_1, t_2, t_3$ , los identificamos con la terna  $(t_1, t_2, t_3)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Como se muestra en la Figura 3.89

Figura 3.89: Conjunto  $M(v_1)$ .

Vamos a ver de esta familia cuales son continuos de no corte de  $X$ . Considera  $\mathcal{C}_1 = \{C \in C(J_1) : v_1 \in C\}$  donde  $C$  es un arco de la forma  $[v_1, t_i]$ , los cuales están representados por  $(t_1, 0, 0)$ . Si  $t_1 = v_2$ , tenemos que  $[v_1, v_2] = J_1$ . Entonces,  $X \setminus J_1 = J_2 \setminus \{v_1, v_2\} \cup J_3 \setminus \{v_1, v_2\}$  y  $J_2 \setminus \{v_1, v_2\} \cap J_3 \setminus \{v_1, v_2\} = \emptyset$ . Por lo que su complemento no es conexo, razón por la cual  $J_1 \notin NC^*(X)$ . Si  $t_1 \in [v_1, v_2)$ , tenemos que  $X \setminus [v_1, t_1] = (t_1, v_2] \cup J_2 \setminus \{v_1\} \cup J_3 \setminus \{v_1\}$  donde  $v_2 \in (t_1, v_2] \cap J_2 \setminus \{v_1\} \cap J_3 \setminus \{v_1\}$  y dado que cada conjunto es conexo, tenemos que  $X \setminus [v_1, t_1]$  es conexo. De donde,  $\mathcal{C}_1^{v_1} = \{C \in C(J_1) : v_1 \in C \text{ y } v_2 \notin C\}$

$C\} \subseteq NC^*(X)$ , este conjunto está representado en el intervalo  $(t_1, 0, 0)$  con  $t_1 \in [0, 1)$  (Ver Figura 3.90). Similarmente, tenemos a los conjuntos:

$$\mathcal{C}_2^{v_1} = \{C \in C(J_2) : v_1 \in C \text{ y } v_2 \notin C\} \subseteq NC^*(X) \text{ y}$$

$$\mathcal{C}_3^{v_1} = \{C \in C(J_3) : v_1 \in C \text{ y } v_2 \notin C\} \subseteq NC^*(X)$$

Representados en el intervalo  $(0, t_2, 0)$  con  $t_2 \in [0, 1)$  y en el intervalo  $(0, 0, t_3)$  con  $t_3 \in [0, 1)$  respectivamente (Ver Figura 3.90)

Notemos que los continuos representados con la terna  $(t_1, t_2, t_3)$  donde  $t_i \in [0, 1)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  están en  $NC^*(X)$ , ya que estas ternas representan a los continuos de la forma  $C = [v_1, t_1] \cup [v_1, t_2] \cup [v_1, t_3]$  y  $X \setminus C = (t_1, v_2] \cup (t_2, v_2] \cup (t_3, v_2]$ , donde  $v_2 \in (t_1, v_2] \cap (t_2, v_2] \cap (t_3, v_2]$  y dado que cada conjunto es conexo, tenemos que  $X \setminus C$  es conexo. Entonces,  $T(v_1) = \{C \in C(X) : C = [v_1, t_1] \cup [v_1, t_2] \cup [v_1, t_3] \text{ donde } t_i \in [0, 1), i \in \{1, 2, 3\}\} \subseteq NC^*(X)$ . Con esto tenemos al interior de la 3-celda y las caras  $(0, t_2, t_3)$ ,  $(t_1, 0, t_3)$  y  $(t_1, t_2, 0)$ , de la 3-celda que representa a  $M(v_1)$  (Ver Figura 3.90).

Por último, tenemos que los continuos representados por terna  $(t_1, 1, 1)$  con  $t_1 \in [0, 1]$  conforman el conjunto  $\mathcal{C}_{2,3}^{v_1} = \{C \in C(X) : C = [v_1, t_1] \cup J_2 \cup J_3 \text{ con } [v_1, t_1] \in \mathcal{C}_1\}$  y  $X \setminus C = J_1 \setminus [v_1, t_1]$ . Si  $t_1 \in [0, 1)$ , entonces  $J_1 \setminus [v_1, t_1] = (t_1, v_2]$  el cual es conexo. Si  $t_1 = 1$ , entonces  $J_1 \setminus [v_1, t_1] = J_1 \setminus J_1 = \emptyset$  el cual es conexo. Por lo que  $X \setminus C$  es conexo. De donde,  $\mathcal{C}_{2,3}^{v_1} \subseteq NC^*(X)$ . Que está representado en el intervalo  $(t_1, 1, 1)$  con  $t_1 \in [0, 1]$  (Ver Figura 3.90). Similarmente tenemos a los conjuntos:

$$\mathcal{C}_{3,1}^{v_1} = \{C \in C(X) : C = [v_1, t_2] \cup J_3 \cup J_1 \text{ con } [v_1, t_1] \in \mathcal{C}_2\} \subseteq NC^*(X) \text{ y}$$

$$\mathcal{C}_{2,1}^{v_1} = \{C \in C(X) : C = [v_1, t_3] \cup J_2 \cup J_1 \text{ con } [v_1, t_1] \in \mathcal{C}_3\} \subseteq NC^*(X).$$

Que están representados en el intervalo  $(1, t_2, 1)$  con  $t_2 \in [0, 1]$  y en el intervalo  $(1, 1, t_3)$  con  $t_3 \in [0, 1]$ , respectivamente (Ver Figura 3.90). Notemos que para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , si  $t_i = 1$ , la terna  $(1, 1, 1)$  representa a  $X$ . (Ver Figura 3.90).

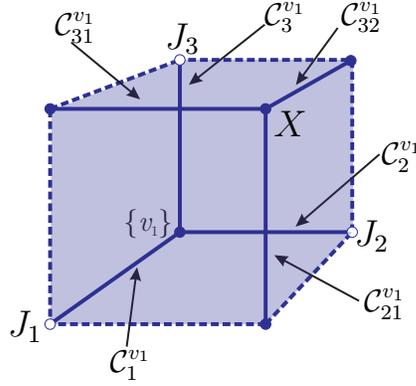


Figura 3.90: Continuos de no corte en  $M(v_1)$ .

Similarmente si nos centramos en  $v_2$  y en el conjunto  $M(v_2)$ , tenemos que los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1^{v_2} &= \{C \in \mathcal{C}(J_1) : v_2 \in C \text{ y } v_1 \notin C\}, \\ \mathcal{C}_2^{v_2} &= \{C \in \mathcal{C}(J_2) : v_2 \in C \text{ y } v_1 \notin C\} \text{ y} \\ \mathcal{C}_3^{v_2} &= \{C \in \mathcal{C}(J_3) : v_2 \in C \text{ y } v_1 \notin C\}. \end{aligned}$$

Están contenidos en  $NC^*(X)$  y se representan con los intervalos  $(t_1, 0, 0)$  con  $t_1 \in [0, 1)$ ,  $(0, t_2, 0)$  con  $t_2 \in [0, 1)$  y  $(0, 0, t_3)$  con  $t_3 \in [0, 1)$  respectivamente (Ver Figura 3.91). De igual manera, tenemos que el conjunto:

$$T(v_2) = \{C \in \mathcal{C}(X) : C = [v_2, s_1] \cup [v_2, s_2] \cup [v_2, s_3] \text{ donde } s_i \in [0, 1), i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Está contenido en  $NC^*(X)$ , y se representa como el interior de la 3-celda y las caras  $(0, s_2, s_3)$ ,  $(s_1, 0, s_3)$  y  $(s_1, s_2, 0)$ , de la 3-celda que representa a  $M(v_2)$  (Ver Figura 3.91). Por último, tenemos que los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{2,3}^{v_2} &= \{C \in \mathcal{C}(X) : C = [v_2, s_1] \cup J_2 \cup J_3 \text{ con } [v_2, s_1] \in \mathcal{C}_1\}, \\ \mathcal{C}_{3,1}^{v_2} &= \{C \in \mathcal{C}(X) : C = [v_2, s_2] \cup J_3 \cup J_1 \text{ con } [v_2, s_2] \in \mathcal{C}_2\} \text{ y} \\ \mathcal{C}_{2,1}^{v_2} &= \{C \in \mathcal{C}(X) : C = [v_2, s_3] \cup J_2 \cup J_1 \text{ con } [v_2, s_3] \in \mathcal{C}_3\}. \end{aligned}$$

Están contenidos en  $NC^*(X)$  y se representan con los intervalos  $(s_1, 1, 1)$  con  $s_1 \in [0, 1]$ ,  $(1, s_2, 1)$  con  $s_2 \in [0, 1]$  y  $(1, 1, s_3)$  con  $s_3 \in [0, 1]$ , respectivamente (Ver Figura 3.91). Notemos que para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , si  $s_i = 1$ , la tercia  $(1, 1, 1)$  representa a  $X$ . (Ver Figura 3.91)

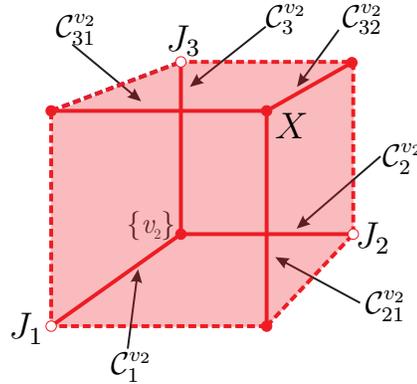


Figura 3.91: Continuos de no corte en  $M(v_2)$ .

Notemos que hay más continuos de no corte, consideremos ahora los siguientes continuos  $\mathcal{B}_1 = C(J_1) \setminus \{J_1\}$ . Donde  $C \in \mathcal{B}_1$  es un intervalo de la forma  $[p_1, q_1] \subseteq J_1$  y  $X \setminus C = J_1 \setminus [p_1, q_1] \cup J_2 \cup J_3 = [v_1, p_1) \cup (q_1, v_2] \cup J_2 \cup J_3$ , donde  $v_1 \in [v_1, p_1) \cap J_2 \cap J_3$  y  $v_2 \in (q_1, v_2] \cap J_2 \cap J_3$  y como cada conjunto es conexo, tenemos que  $X \setminus C$  es conexo. De donde,  $\mathcal{B}_1 \subseteq NC^*(X)$ . Ahora bien, sabemos por el Teorema 2.35 que un modelo para los subcontinuos de  $J_1$  es un triángulo, por lo que un modelo para  $\mathcal{B}_1$  está representado por la Figura 3.92.

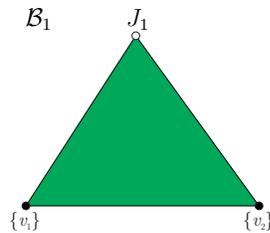


Figura 3.92: Conjunto  $\mathcal{B}_1$ .

Análogamente, tenemos que  $\mathcal{B}_2 = C(J_2) \setminus \{J_2\} \subseteq NC^*(X)$  y  $\mathcal{B}_3 = C(J_3) \setminus \{J_2\} \subseteq NC^*(X)$ , los modelos para  $\mathcal{B}_2$  y  $\mathcal{B}_3$  están representado por los dibujos de la Figura 3.93.

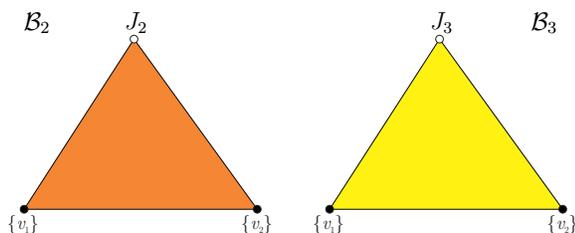


Figura 3.93: Conjuntos  $\mathcal{B}_2$  y  $\mathcal{B}_3$  .

Por último, definamos  $\mathcal{B}_1^c = \{B \in C(X) : B = \overline{X \setminus C} \text{ y } C \in \mathcal{B}_1\}$ . Tenemos que para cada  $B \in \mathcal{B}_1^c$ ,  $X \setminus B = X \setminus \overline{X \setminus C}$ . Como  $C \in \mathcal{B}_1$ , se tiene que  $X \setminus C = [v_1, p_1] \cup [q_1, v_2] \cup J_2 \cup J_3$  donde  $\overline{X \setminus C} = [v_1, p_1] \cup [q_1, v_2] \cup J_2 \cup J_3$ . Entonces,  $X \setminus \overline{X \setminus C} = (p_1, q_1)$  el cual es conexo. Por lo que  $\mathcal{B}_1^c \subseteq NC^*(X)$ . Ahora, veamos como modelar este conjunto. Notemos que cada  $B \in \mathcal{B}_1^c$  está determinado por sus dos puntos  $p_1$  y  $q_1$ , y cuando  $p_1 = q_1$ , tenemos que  $B = X$ . Vamos a pensar que ambos extremos pueden variar a partir de un singular  $r$  hasta llegar a todo  $J_1$  (Ver Figura 3.94 (a)). Este comportamiento se puede modelar como se muestra en la Figura 3.94 (b).

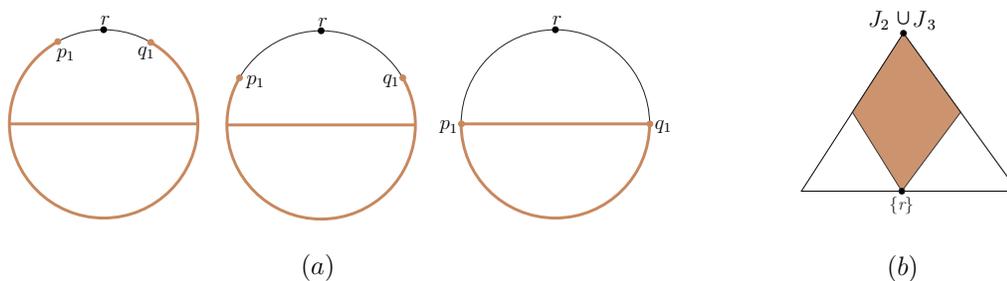


Figura 3.94: Elementos de  $\mathcal{B}_1^c$ .

Tenemos que hacer esto para cada punto de  $J_1$  y obtenemos a todo el triángulo como se muestra en el dibujo de la izquierda de la Figura 3.95. Notemos

que cada punto de la base del triángulo representa a  $X$ . Identificando a toda la base en un punto obtenemos el dibujo de la derecha en la Figura 3.95.

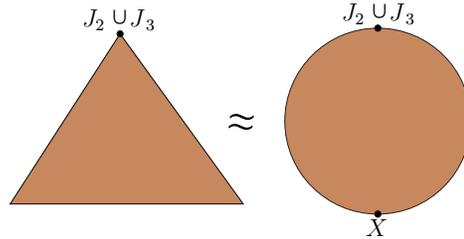


Figura 3.95: Conjunto  $\mathcal{B}_1^c$ .

Análogamente, tenemos que  $\mathcal{B}_2^c = \{B \in C(X) : B = \overline{X \setminus C} \text{ y } C \in \mathcal{B}_2\}$ . y  $\mathcal{B}_3^c = \{B \in C(X) : B = \overline{X \setminus C} \text{ y } C \in \mathcal{B}_3\} \subseteq NC^*(X)$ , los modelos para  $\mathcal{B}_2^c$  y  $\mathcal{B}_3^c$  están representados por los dibujos de la Figura 3.96.

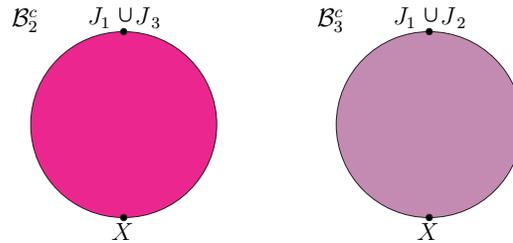


Figura 3.96: Conjuntos  $\mathcal{B}_2^c$  y  $\mathcal{B}_3^c$ .

Para iniciar a construir el modelo tenemos que ver como se pegan las figuras 3.90 y 3.91. Primero pegamos el punto que representa a  $X$ , como se ve en primer dibujo de la Figura 3.97, al punto que representa a  $J_3$ , como se muestra en el segundo dibujo de la Figura 3.97 y a los puntos  $J_2 \cup J_3$  y  $J_2 \cup J_3$  como se visualiza en tercer dibujo de la Figura 3.97.

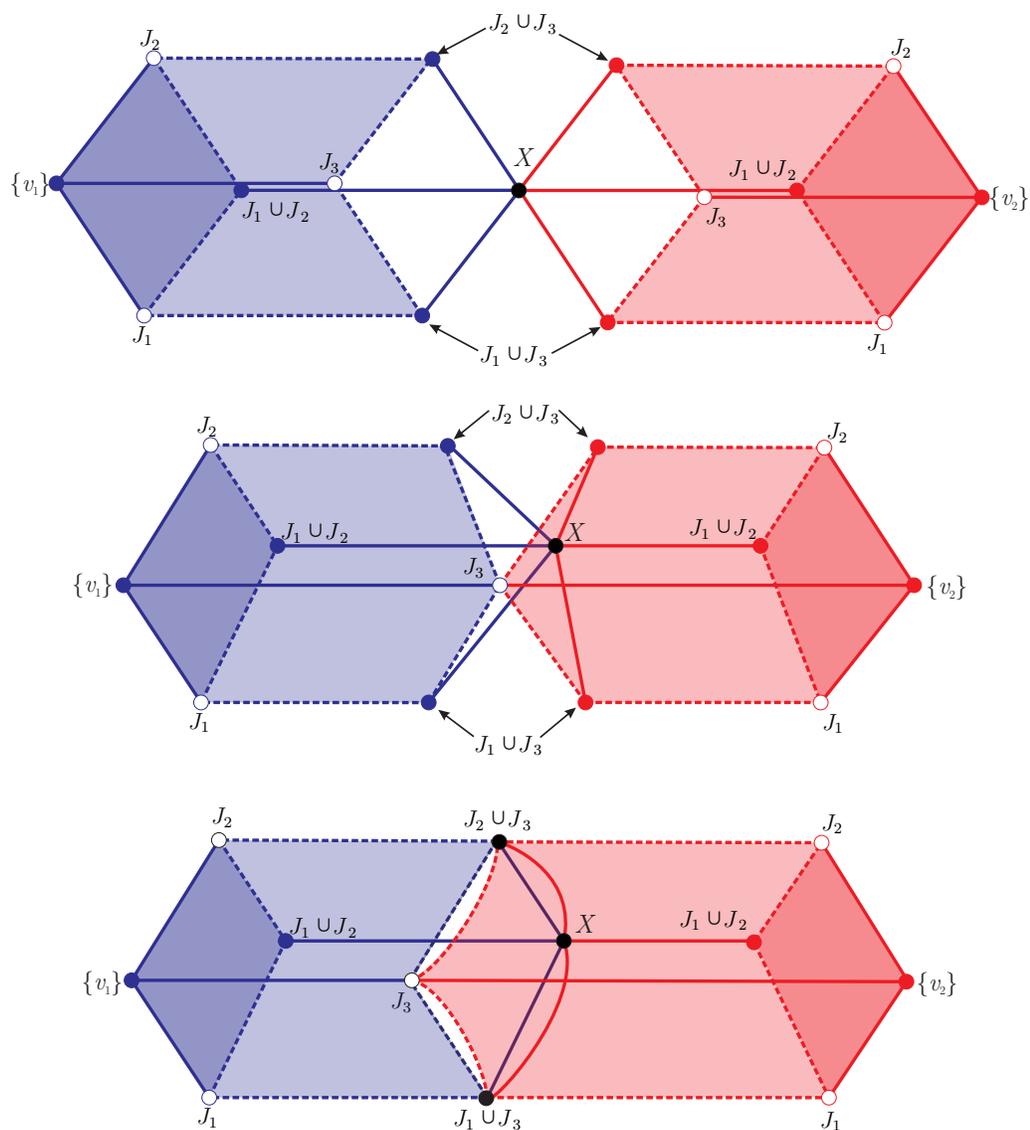


Figura 3.97: Continuos de no corte en  $M(v_1)$  y  $M(v_2)$ .

Ahora falta pegar los puntos  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_1 \cup J_2$  de ambos cubos, como se ve en la Figura 3.98.

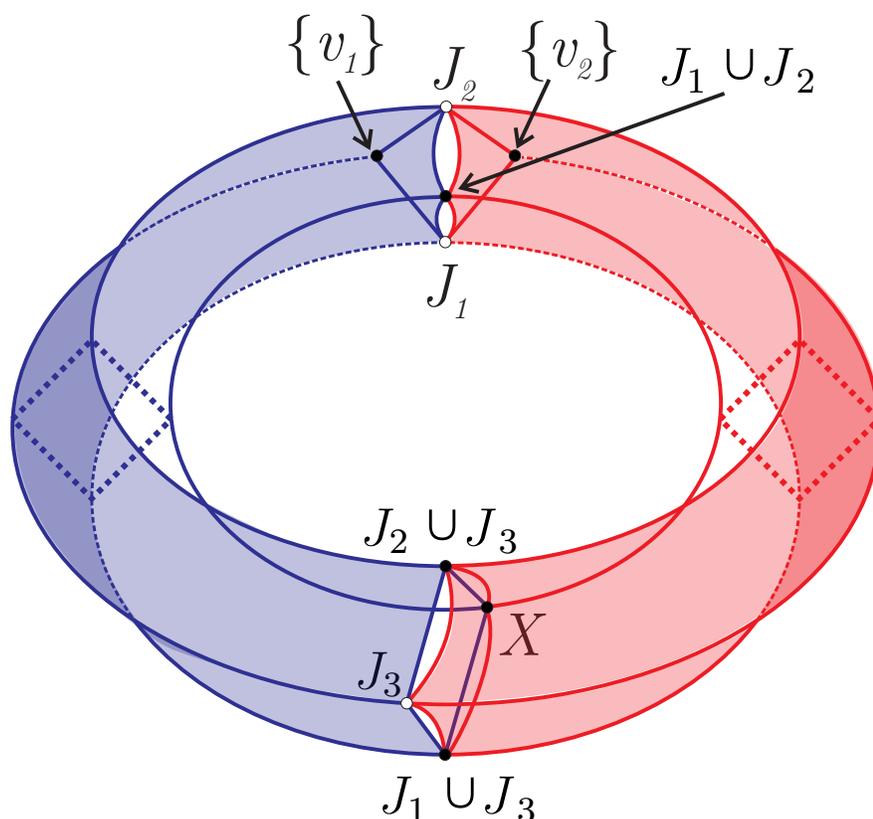


Figura 3.98: Continuos de no corte en  $M(v_1)$  y  $M(v_2)$ .

Notemos que para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{C}_i^{v_1}$  es la arista de  $\{v_1\}$  a  $J_i$  en el modelo de  $\mathcal{B}_i$  y  $\mathcal{C}_i^{v_2}$  es la arista de  $\{v_2\}$  a  $J_i$  en el modelo de  $\mathcal{B}_i$  (Ver Figura 3.99),  $\mathcal{C}_{2,3}^{v_1}$  es uno de los arcos de  $X$  a  $J_2 \cup J_3$  en el modelo de  $\mathcal{B}_1^c$  y  $\mathcal{C}_{2,3}^{v_2}$  es el otro arco de  $X$  a  $J_2 \cup J_3$  en el modelo de  $\mathcal{B}_1^c$  (Ver Figura 3.99), similarmente  $\mathcal{C}_{1,3}^{v_1}$  es uno de los arcos de  $X$  a  $J_1 \cup J_3$  en el modelo de  $\mathcal{B}_2^c$  y  $\mathcal{C}_{1,3}^{v_2}$  es el otro arco de  $X$  a  $J_1 \cup J_3$  en el modelo de  $\mathcal{B}_2^c$  (Ver Figura 3.99). Por último,  $\mathcal{C}_{1,2}^{v_1}$  es uno de los arcos de  $X$  a  $J_1 \cup J_2$  en el modelo de  $\mathcal{B}_3^c$  y  $\mathcal{C}_{1,2}^{v_2}$  es el otro arco de  $X$  a  $J_1 \cup J_2$  en el modelo de  $\mathcal{B}_3^c$  (Ver Figura 3.99). Con lo anterior al colocar juntas las figuras 3.92, 3.93, 3.95, 3.96 y 3.98, obtenemos el modelo para  $NC^*(X)$  (Ver Figura 3.99).

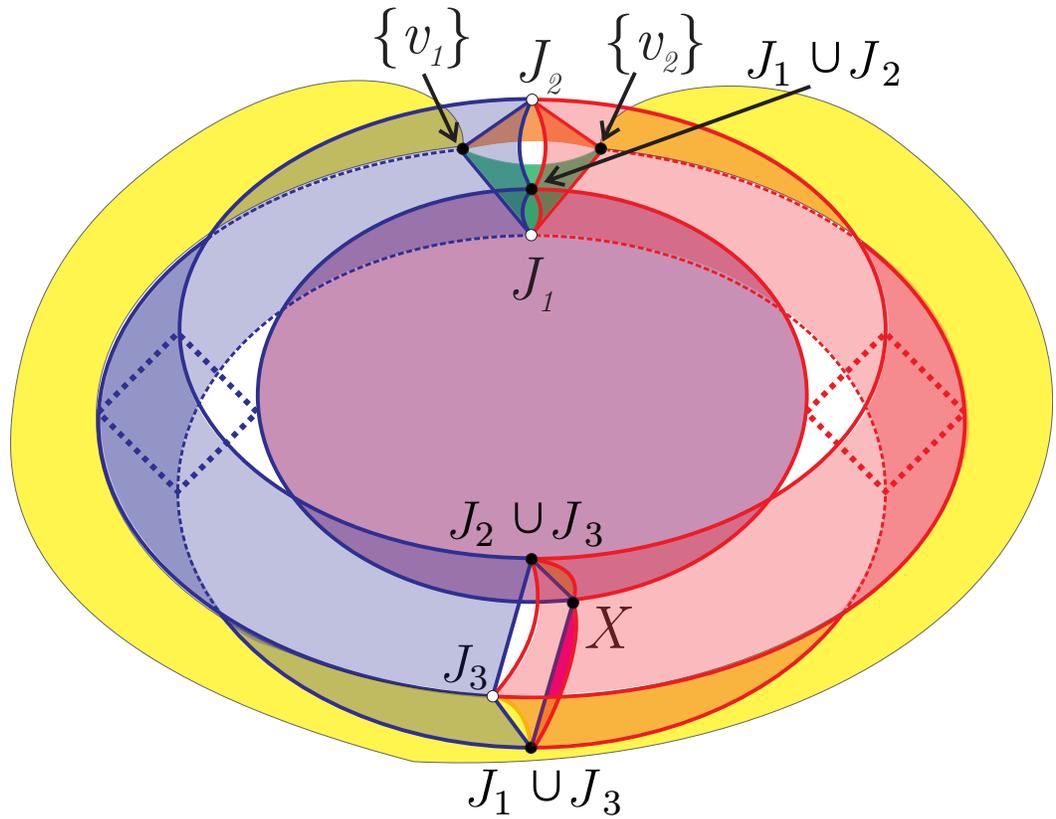


Figura 3.99: Modelo de  $NC^*(X)$  para la Theta.

De donde tenemos que  $NC^*(X)$  es conexo, además, el modelo se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$  y su dimensión es 3.

**Pregunta 3.9.** *¿Se podrá caracterizar la conexidad de  $NC^*(X)$ , cuando  $X$  es una gráfica finita en relación a los ciclos de la gráfica?*

### 3.2. Compacidad de $NC^*(X)$ en gráficas finitas

Como hemos visto, para que el hiperespacio  $NC^*(X)$  sea conexo o no, depende mucho de la gráfica  $X$  con respecto a la compacidad del espacio tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.10.** *Sea  $X$  una gráfica finita. Entonces  $NC^*(X)$  es compacto si y sólo si  $X \approx [0, 1]$  o  $X \approx S^1$ .*

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Si  $X \approx [0, 1]$ . Por la Proposición 2.35, tenemos que  $NC^*([0, 1]) \approx [0, 1]$ . Si  $X \approx S^1$ . Del Ejemplo 3.1, sabemos que  $NC^*(S^1) = C(S^1)$ . Por lo que en ambos casos  $NC^*(X)$  es compacto. Lo cual concluye esta implicación.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $NC^*(X)$  es compacto y que  $S^1 \not\approx X \not\approx [0, 1]$ , entonces por la Proposición 1.17,  $R(X) \neq \emptyset$ . Con el fin de obtener una contradicción, mostraremos una serie de afirmaciones.

**Afirmación 1.**  $X$  no tiene lazos.

Supongamos por el contrario, que  $X$  contiene un lazo  $L$ . Sea  $p$  el único punto de ramificación en  $L$ . Tomemos la sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $L$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n \neq p$  y  $p_n \rightarrow p$ .

Veamos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{p_n\} \in NC^*(X)$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_n \in L \setminus \{p\}$ . Como  $L$  es un lazo, tenemos que  $L \setminus \{p_n\}$  es conexo y dado que  $p_n \neq p$ , tenemos que  $p \in L \setminus \{p_n\}$ . De donde,  $X \setminus \{p_n\}$  es conexo. Por lo tanto,  $\{p_n\} \in NC^*(X)$  (Ver Figura 3.100).

Veamos que  $\{p\} \notin NC^*(X)$ .

Como  $p$  es el punto de ramificación del lazo, tenemos que  $X \setminus \{p\}$  tiene al menos dos componentes. Por lo que  $\{p\} \notin NC^*(X)$ .

Dado que  $\{p_n\} \rightarrow \{p\}$ , tenemos que  $NC^*(X)$  no es compacto; lo cual es una contradicción. Esto termina la prueba de la Afirmación 1 (Ver Figura 3.100).

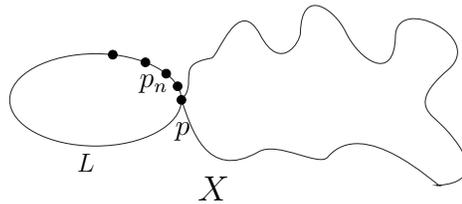


Figura 3.100: Sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Afirmación 2.**  $X$  no tiene pelos.

Supongamos que  $[e, r]$  es un pelo en  $X$  con  $e \in E(X)$  y  $r \in R(X)$ . De donde,  $X \setminus \{r\}$  no es conexo. Si  $X \setminus \{r\}$  tiene 3 o más componentes, entonces tomamos la sucesión  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $[e, r]$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n \neq r$  y  $r_n \rightarrow r$ .

Veamos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[e, r_n] \in NC^*(X)$ .

Como  $r_n \in O(X)$  y  $X \setminus \{r_n\}$  tiene dos componentes  $C_1$  y  $C_2$  donde  $C_1 = [e, r_n]$  y dado que  $r_n \neq r$ , tenemos que  $r \in C_2$ . Como  $X$  es una gráfica finita,  $X \setminus C_1$  es conexo. Por lo tanto,  $[e, r_n] \in NC^*(X)$  (Ver Figura 3.101).

Veamos que  $[e, r] \notin NC^*(X)$ .

Como  $X \setminus \{r\}$  tiene al menos 3 componentes y tenemos que una de estas componentes es  $[e, r]$  por ser un pelo. Entonces,  $X \setminus [e, r]$  tiene al menos dos componentes y, por tanto, no es conexo. De donde,  $[e, r] \notin NC^*(X)$  (Ver Figura 3.101).

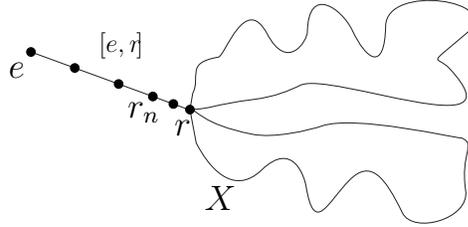


Figura 3.101: Sucesión  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Como  $[e, r_n] \rightarrow [e, r]$ , entonces  $NC^*(X)$  no es compacto; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $X \setminus \{r\}$  tiene 2 componentes una es  $[e, r]$  y llamemos  $K$  a la otra componente.

Si  $X \setminus \{r\}$  tiene dos componentes, sean  $ord_X(r) = m \geq 3$  y  $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  una base local de  $X$  en  $r$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{diam}(U_n) < \frac{1}{2^n}$ ,  $\overline{U_n}$  es un  $m$ -odo con vértice  $r$  y  $Fr(U_n) \subset O(X)$ .

Notemos que  $Fr(U_n) \cap [e, r] = \{u\}$ , de manera que  $[e, r] \cup \overline{U} = \overline{[e, r] \cup U_n}$  es también un  $m$ -odo. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $z_n \in Fr(U_n) \setminus [e, r]$ . Veamos que  $\{z_n\} \in NC^*(X)$ .

Como  $ord_X(r) = m \geq 3$ , existe un punto  $q \in Fr([e, r] \cup U_n) \setminus \{z_n\}$ . Dado que  $q, z_n \in K$  y  $K$  es cerrado, existe un arco  $[q, z_n] \subset K \subset X \setminus \{r\}$ .

Veamos que  $X \setminus \{z_n\}$  es conexo. Sean  $w_0, w \in X \setminus \{z_n\}$ . Si  $w, w_0 \in (\overline{[e, r] \cup U_n}) \setminus \{z_n\}$ , existe un arco  $w, w_0 \subset (\overline{[e, r] \cup U_n}) \setminus \{z_n\}$ . Si  $w, w_0 \in K$ , consideremos un arco  $[w, w_0] \subset K$ , si  $z_n \notin [w, w_0]$ , entonces  $[w, w_0] \subset K \setminus \{z_n\}$ .

Sean  $u, v$  puntos en  $[w, w_0]$  tales que  $[w, u] \cap [z_n, q] = \{u\}$  y  $[v, w_0] \cap [z_n, q] = \{v\}$ . Notemos que no es posible que  $[r, z_n] \cap [z_n, w] = \{z_n\}$ , pues de lo contrario tenemos que en  $z_n$  inciden los arcos  $[w, z_n]$ ,  $[z_n, q]$  y  $[r, z_n]$  que se intersectan solo en el punto  $z_n$ , esto implicaría que  $ord_X(z_n) \geq 3$  y  $z_n \in R(X)$ ; lo cual es una contradicción. Por tanto,  $u \neq z_n$  o existe  $a \in [r, z_n]$  tal que el arco  $[w, a] \cap [r, z_n] = \{a\}$ . Análogamente, no es posible que  $[r, q] \cap [q, v] = \{v\}$ , de donde  $v \neq q$  o existe  $b \in [r, v]$  tal que el arco  $[w_0, b] \cap [r, q] = \{b\}$ . De aquí tenemos los siguientes casos:

**Caso 1.**  $u \in [z_n, q]$  y  $u \neq z_n$ .

De igual manera, podemos ver que  $u \neq q$  y dado que  $v \in [z_n, q]$ , ahora procedemos a analizar el comportamiento de  $v$ .

**Caso 1.1.**  $v \in [z_n, q]$  y  $v \neq q$ .

De igual manera, podemos ver que  $v \neq z_n$  y en general  $\{u, v\} \cap \{z_n, q\} = \emptyset$ . Entonces  $[u, v] \subset [z_n, q] \setminus \{z_n, q\}$  y el arco  $[w, u] \cup [u, v] \cup [v, w_0] \subset K \setminus \{z_n\}$  (Ver Figura 3.102).

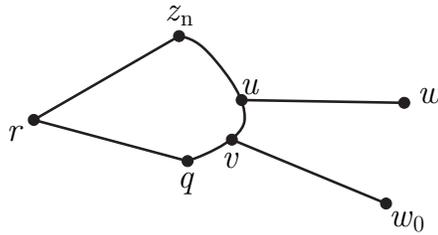


Figura 3.102:  $u \neq z_n$  y  $v \neq q$ .

**Caso 1.2.**  $v \in [z_n, q]$  y existe  $b \in [r, v]$  tal que el arco  $[w_0, b] \cap [r, q] = \{b\}$ .

En este caso, tenemos que  $[v, u] \subseteq [q, z_n]$ . Entonces el arco  $[w_0, v] \cup [v, u] \cup$

$[u, w] \subset K \setminus \{z_n\}$  (Ver Figura 3.103).

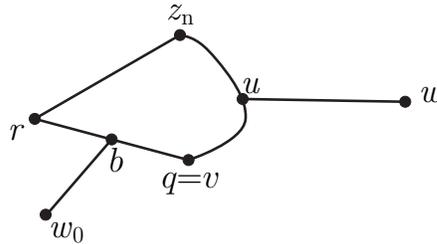


Figura 3.103:  $u \neq z_n$  y  $q = v$ .

**Caso 2.**  $u \in [z_n, q]$  y existe  $a \in [r, z_n]$  tal que el arco  $[w, a] \cap [r, z_n] = \{a\}$ .

Nuevamente, como  $v \in [z_n, q]$  procedemos a analizar el comportamiento de  $v$ .

**Caso 2.1.**  $v \in [z_n, q]$  y  $v \neq q$ .

De manera similar al Caso 1.1, podemos probar que  $v \neq z_n$ . De donde,  $[q, v] \subseteq [q, z_n]$ . Entonces el arco  $[w, a] \cup [a, r] \cup [r, q] \cup [q, v] \cup [v, w_0] \subset K \setminus \{z_n\}$  (Ver Figura 3.104).

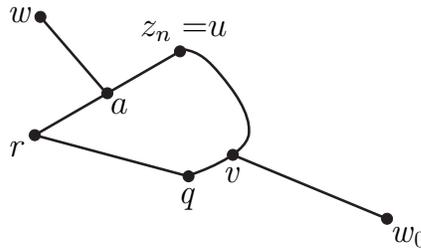
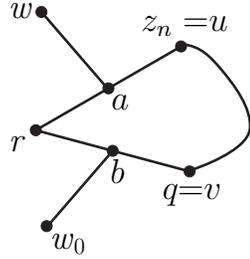


Figura 3.104:  $z_n = u$  y  $v \neq q$ .

**Caso 2.2.**  $v \in [z_n, q]$  y existe  $b \in [r, v]$  tal que el arco  $[w_0, b] \cap [r, q] = \{b\}$ .

En este caso, tenemos que el arco  $[w_0, a] \cup [a, r] \cup [r, b] \cup [b, w_0] \subset K \setminus \{z_n\}$  (Ver Figura 3.105).

Figura 3.105:  $z_n = u$  y  $v = q$ .

Si  $w_0 \in (\overline{[e, r] \cup U_n}) \setminus \{z_n\}$  y  $w \in K \setminus \{z_n\}$ , entonces existen los arcos  $[w_0, q] \subset (\overline{[e, r] \cup U_n}) \setminus \{z_n\}$  y dado que  $q, w \in K \setminus \{z_n\}$ , de manera similar al caso anterior, tenemos que  $[q, w] \subset K \setminus \{z_n\}$ . Por tanto,  $X \setminus \{z_n\}$  es conexo y  $\{z_n\} \in NC^*(X)$ .

Como  $z_n \in Fr(U_n)$ ,  $r \in U_n$  y  $\text{diam}(U_n) < \frac{1}{2^n}$  la sucesión de puntos  $\{z_n\}$  cumple que  $\{z_n\} \rightarrow \{r\}$ ,  $\{z_n\} \in NC^*(X)$  y  $\{r\} \notin NC^*(X)$ . Por tanto,  $NC^*(X)$  no es compacto; lo cual es una contradicción. Esta contradicción nace de suponer que  $X$  tiene pelos. Con lo que concluimos que  $X$  no tiene pelos y la Afirmación queda demostrada.

**Observación 1.**  $E(X) = \emptyset$ .

Si  $p \in E(X)$ , entonces existe una arista  $L$  tal que  $p \in L$  y  $L = [r, e]$ , donde  $L \cap R(X) = \{r\}$ . Entonces  $L$  es un pelo; lo cual contradice la Afirmación 2.

**Afirmación 3.**  $|R(X)| \geq 2$ .

Si  $|R(X)| = 1$ , entonces  $X$  tiene un pelo o un lazo; lo cual contradice la Afirmación 1 o la Afirmación 2.

Sea  $T_{R(X)}$  un árbol mínimo que contiene a  $R(X)$ .

**Afirmación 4.**  $\emptyset \neq E(T_{R(X)}) \subseteq R(X)$ .

Por el Teorema 2.22,  $T_{R(X)}$  tiene al menos dos puntos de no corte y por el Teorema 2.24 estos dos puntos son puntos terminales de  $T_{R(X)}$  y, por tanto,  $E(T_{R(X)}) \neq \emptyset$ .

Supongamos por el contrario, que existe un punto  $e \in E(T_{R(X)}) \setminus R(X)$ .

Como  $T_{R(X)}$  es localmente conexo y colocalmente conexo, existe  $U$  una vecindad conexa de  $e$  tal que  $|Fr_{T_{R(X)}}(U)| = 1$ ,  $\bar{U} \cap R(X) = \emptyset$  y  $T_{R(X)} \setminus U$  es conexo. Entonces  $R(X) \subset T_{R(X)} \setminus U$  es un subárbol de  $T_{R(X)}$ . Lo cual implica que  $T_{R(X)}$  no es un árbol mínimo que contiene a  $R(X)$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\emptyset \neq E(T_{R(X)}) \subseteq R(X)$ .

**Afirmación 5.**  $O(X) \cap T_{R(X)} \subset O(T_{R(X)})$ .

Sea  $p \in O(X) \cap T_{R(X)}$ . Si  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de vecindades de  $p$  en  $X$  tal que  $|Fr(U_n)| = 2$ , entonces dada  $p \in O(X) \cap T_{R(X)}$ ,  $\{U_n \cap T_{R(X)} : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de vecindades de  $p \in T_{R(X)}$  tal que  $|Fr(U_n) \cap T_{R(X)}| \leq 2$ . De manera que  $ord_{T_{R(X)}}(p) \leq ord_X(p) = 2$ . Si  $ord_{T_{R(X)}}(p) = 1$ , entonces  $p \in E(T_{R(X)}) \subset R(X)$  y  $ord_X(p) \geq 3$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $p \in O(T_{R(X)})$ .

**Afirmación 6.** Toda componente  $C$  de  $X \setminus T_{R(X)}$  es un arco libre  $(p, q)$ ,  $\bar{C}$  es un arco con extremos  $p, q$  tales que  $p \neq q$  con  $\{p, q\} \subset R(X) \subset T_{R(X)}$ .

Como  $R(X) \subset T_{R(X)}$ , entonces si  $C$  es componente de  $X \setminus T_{R(X)}$ ,  $C \cap R(X) = \emptyset$ , por lo que  $C$  es un arco libre,  $\bar{C}$  es un arco con extremos  $p, q$  y  $\bar{C} \cap R(X) = \emptyset$ .

Por la Observación 1,  $E(X) = \emptyset$ , por lo que  $\{p, q\} \subset O(X) \cup R(X)$ . Supongamos por el contrario, que  $p \in O(X)$ , entonces por la Afirmación 5  $p \in O(T_{R(X)})$ . De manera que existen puntos  $c, d \in T_{R(X)}$  tales que los arcos  $cp, pd \subset T_{R(X)}$  cumplen que  $cp \cap pd = \{p\}$ . Sea  $z \in C$ , entonces el arco  $cp \subset \bar{C}$  cumple que  $zp \cap T_{R(X)} = \{p\}$ . De donde,  $cp \cup pd \cup zp$  es un triodo con vértice  $p$  y  $p \in R(X)$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $p \in R(X)$ . De igual manera, probamos que  $q \in R(X)$ . Si  $p = q$ , entonces  $\bar{C}$  es un lazo; lo cual contradice a la Afirmación 1, por lo que  $p \neq q$  y  $\{p, q\} \subset R(X) \subset T_{R(X)}$  y con esto se termina la prueba de la Afirmación.

**Afirmación 7.**  $T_{R(X)} \notin NC^*(X)$ .

De la Afirmación 3, se sigue que  $T_{R(X)}$  es no degenerado dado que  $E(T_{R(X)}) \neq \emptyset$ . Supongamos por el contrario, que  $T_{R(X)} \in NC^*(X)$ . Entonces por la Afirmación 6,  $X \setminus T_{R(X)} = (p, q)$  es un intervalo abierto en  $X$  con  $(p, q) \cap R(X) = \emptyset$ ,  $p, q \in (R(X) \cap T_{R(X)})$ . Si  $\{p, q\} \cap E(T_{R(X)}) \neq \emptyset$ , entonces  $ord_X(p) = 2$  o  $ord_X(q) = 2$ ; lo cual es una contradicción a la Afirmación 6,  $\{p, q\} \subset R(X)$ . De aquí se deduce que existe un punto  $z \in E(T_{R(X)})$  y  $z \notin Fr(T_{R(X)})$ . Por

tanto,  $z \in \text{int}(T_{R(X)})$ , de donde tenemos que  $\text{ord}_{T_{R(X)}}(z) = \text{ord}_X(z) = 1$ ; lo cual contradice que  $z \in R(X)$ . Por lo tanto,  $T_{R(X)} \notin NC^*(X)$ . Esto termina la prueba de la Afirmación 7.

Ahora, estamos listos para dar el argumento que nos da una contradicción. Sea  $X$  una gráfica finita tal que  $NC^*(X)$  es compacto.

Por la Afirmación 3,  $|R(X)| \geq 2$  y  $T_{R(X)}$  es un árbol no degenerado. Por las Afirmaciones 7 y 6,  $X \setminus T_{R(X)} = \{C_1, \dots, C_m\}$  con  $m \geq 2$ , donde  $C_i$  es un arco libre y  $\overline{C_i}$  tiene puntos extremos  $p_i, q_i \in R(X) \cap T_{R(X)}$  y  $p_i \neq q_i$ . Si para toda  $C \in \{C_1, \dots, C_m\}$  se tiene que  $\overline{C}$  tiene puntos extremos  $p, q$  tal que  $\{p, q\} \cap E(T_{R(X)}) = \emptyset$  entonces, para todo  $x \in E(T_{R(X)})$ ,  $x \notin \text{Fr}(T_{R(X)})$ . De donde,  $\text{ord}_x(x) = 1$ ; lo cual contradice que  $x \in R(X)$ . Por lo tanto, existe  $C \in \{C_1, \dots, C_m\}$  tal que  $\overline{C}$  tiene puntos extremos  $p, q$  con  $p \in E(T_{R(X)})$ . Sea  $A = pq$  el arco en  $T_{R(X)}$  con puntos extremos  $p$  y  $q$  (Ver Figura 3.106).

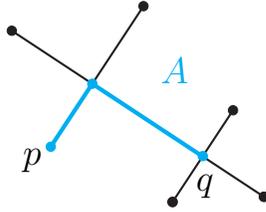
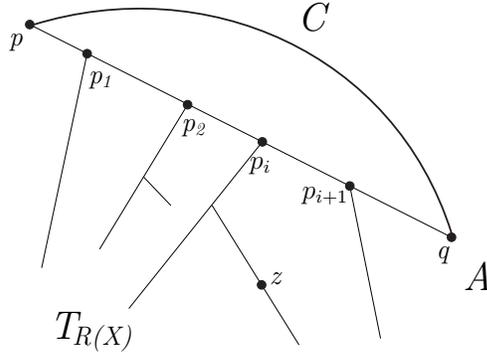


Figura 3.106: Arco  $A$ .

**Observación 2.**  $A \notin NC^*(X)$ .

Si  $T_{R(X)} = A$  por la Afirmación 7,  $A \notin NC^*(X)$  y la afirmación, está probada. Supongamos que  $T_{R(X)} \neq A$  y sea  $z \in T_{R(X)} \setminus A$ , como  $C$  es una componente de  $X \setminus T_{R(X)}$ , por ende de  $X \setminus A$ , y además,  $z \notin C$ , tenemos que  $X \setminus A$  tiene al menos dos componentes. Por lo tanto,  $A \notin NC^*(X)$ .

Sea  $A \cap R(X) = \{p = p_0, \dots, q = p_k\}$  con  $p_0 < \dots < p_k$  en el orden natural del arco  $A = pq$ . Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$  un homeomorfismo y sean  $0 = s_0 < \dots < s_k$  en  $[0, 1]$  dados por  $\alpha(s_i) = p_i$  para cada  $i \in \{0, \dots, k\}$  y definimos el arco ordenado  $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$  como  $\beta(t) = \alpha([0, t])$  (Ver Figura 3.107).

Figura 3.107: Conjunto  $A$ .

**Observación 3.** Para cada  $t \in [0, s_1]$ ,  $\beta(t) \in NC^*(X)$ .

Para  $t < s_1$ .

De como se definieron  $\beta$  y  $A$ , tenemos que  $\beta(t) \subset A \subset T_{R(X)}$  y  $\beta(t) \cap R(X) = \{p\}$ . Del inciso (3) del Teorema 2.33, se sigue que  $T_{R(X)} \setminus \beta(t)$  es conexo y por la Afirmación 6, cada componente  $C$  de  $X \setminus T_{R(X)}$  cumple que  $\overline{C} \cap (T_{R(X)} \cap (R(X) \setminus \{p\})) \neq \emptyset$ . De donde,  $X \setminus \beta(t) = (T_{R(X)} \setminus \beta(t)) \cup \bigcup \{\overline{C_i} \setminus \{p\} \mid C_i \text{ es una componente de } X \setminus T_{R(X)}\}$  el cual es un conjunto conexo de  $X$ , entonces  $\beta(t) \in NC^*(X)$  para cada  $t < s_1$ . Como  $NC^*(X)$  es compacto, concluimos que  $\beta(s_1) \in NC^*(X)$ .

**Observación 4.** Supongamos que existe  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  tal que para cada  $t \leq s_i$ ,  $\beta(t) \in NC^*(X)$ . Entonces, para cada  $t \in [s_i, s_{i+1}]$ ,  $\beta(t) \in NC^*(X)$ .

Sea  $s_i \leq t < s_{i+1}$ .

Primero, probemos que para cada  $x \in X \setminus \beta(t)$  existe un arco  $L_x$  con puntos extremos  $x, p_{i+1}$  tal que  $L_x \subset X \setminus \beta(t)$ . Sea  $x \in \alpha((t, s_{i+1}])$ , entonces  $x = \alpha(s)$  para alguna  $s > t$  y el arco  $\alpha([s, s_{i+1}])$  satisface la condición que buscamos. Sea  $x \in X \setminus \beta(s_{i+1})$  sabemos que existe un arco  $L_x = xp_i$  en  $X \setminus \beta(s_i)$  que une a  $x$  y a  $p_{i+1}$  porque  $\beta(s_i) \in NC^*(X)$ . Dado que  $\alpha((s_i, s_{i+1})) \cap R(X) = \emptyset$  y  $p_i \notin L_x$ , tenemos que  $xp_{i+1} \cap \alpha([s_i, s_{i+1}]) = \{p_{i+1}\}$  es el primer punto tal que  $x \leq p_{i+1}$ . Por lo que el arco  $L_x = xp_i$  satisface la condición que buscamos.

Por lo tanto, si  $x, y \in X \setminus \beta(t)$ , entonces  $L_x \cup L_y$  es un subconjunto conexo de  $X \setminus \beta(t)$  que contiene a ambos puntos y con esto probamos la afirmación para  $t < s_{i+1}$ . Como  $\beta(t) \in NC^*(X)$  para cada  $t < s_{i+1}$  y  $NC^*(X)$  es compacto, entonces  $\beta(s_{i+1}) \in NC^*(X)$ .

De las Observaciones 3 y 4, concluimos que  $A = \beta(s_k) \in NC^*(X)$ ; lo cual es una contradicción a la Observación 2. Hemos probado que si  $R(X) \geq 1$  llegamos a una contradicción. Por lo tanto,  $R(X) = \emptyset$ .

Obtenemos que  $X$  es una gráfica finita sin puntos de ramificación, por la Proposición 1.17  $X$  es homeomorfo a un intervalo o una curva cerrada simple y con esto queda probado el Teorema. □

Del resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.11.** *Sea  $X$  una gráfica finita. Entonces:*

- (1)  $NC^*(X) \approx X$  si y sólo si  $X$  es un intervalo.
- (2)  $NC^*(X) = C(X)$  si y sólo si  $X$  es una curva cerrada simple.

*Demostración.*

Si  $X \approx NC^*(X)$  o  $C(X) = NC^*(X)$ , entonces  $NC^*(X)$  es compacto. Por Teorema 3.10,  $X$  es un intervalo o una curva cerrada simple. Por la Proposición 2.35 y el Ejemplo 3.1, si  $X$  es un intervalo, tenemos que  $NC^*(X) \approx X$  y si  $X$  es una curva cerrada simple, entonces  $NC^*(X) = C(X)$ . □

A continuación, mostraremos una generalización del segundo inciso del Corolario 3.11.

**Teorema 3.12.** *Sea  $X$  un continuo localmente conexo. Entonces  $NC^*(X) = C(X)$  si y sólo si  $X \approx S^1$ .*

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Si  $X \approx S^1$ , por el Ejemplo 3.1, sabemos que  $NC^*(X) = C(X)$ .

$\Rightarrow$ ) Sean  $p, q \in X$ ,  $U \subsetneq X$  un abierto conexo tal que  $p \in U$  y  $q \notin U$ . Si  $Fr(U)$  es conexa, entonces  $Fr(U) \in C(X) = NC^*(X)$  y  $X \setminus Fr(U)$  es conexa; lo cual es una contradicción. Por lo que  $Fr(U)$  no es conexa.

Para cada  $y \in Fr(U)$ , sea  $C_y$  un abierto conexo tal que  $y \in C_y$  y  $p \notin \overline{C_y} \subsetneq X \setminus \{q\}$ . Como  $Fr(U)$  es compacta, podemos escoger puntos  $y_1, \dots, y_n \in Fr(U)$  tal que  $\{C_{y_1}, \dots, C_{y_n}\}$  es una cubierta abierta finita de  $Fr(U)$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sean  $z_i \in C_{y_i} \setminus (Fr(U) \cup Ext(U))$ ,  $pz_i$  es un arco en  $U$  que une a  $p$  con  $z_i$  y  $r_i \in pz_i$  tal que  $pz_i \cap \overline{C_{y_i}} = \{r_i\}$ . Entonces,  $G_p = \bigcup_{i=1}^n pr_i$  es una gráfica finita y  $Z = G_p \cup \overline{C_{y_1}} \cup \dots \cup \overline{C_{y_n}} \in C(X)$  (Ver Figura 3.108). Por lo que  $X \setminus Z$  es conexo y, como  $q \in (X \setminus Z) \cap Ext(U)$ , obtenemos que  $(X \setminus Z) \cap U = \emptyset$ . De donde,  $p \in U \setminus (C_{y_1} \cup \dots \cup C_{y_n}) \subset G_p \subset U$ . Por lo tanto, cada  $p \in X$  tiene una base de vecindades que son una gráfica finita, por el Lema 1.22,  $X$  es una gráfica finita. Por el Corolario 3.11, tenemos que  $X \approx S^1$  y con esto queda probado el Teorema.

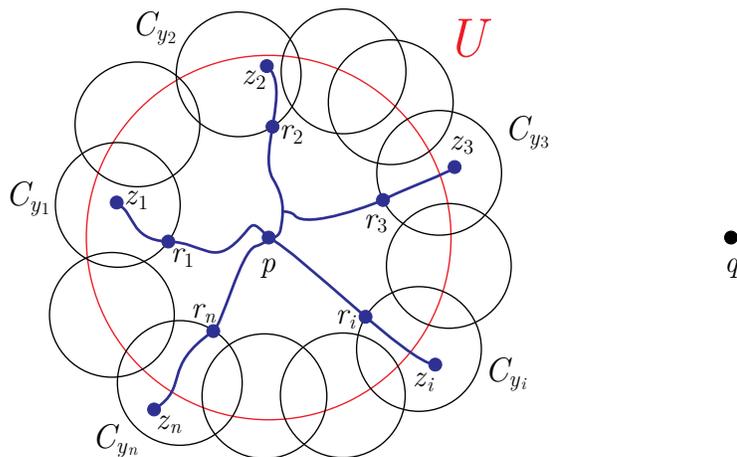


Figura 3.108: Conjunto  $G_p$ .

□

Del Corolario 3.11 y el Teorema 3.12 surge la siguiente pregunta:

**Pregunta 3.13.** ¿Sea  $X$  un continuo localmente conexo. Si  $X \approx NC^*(X)$ , entonces  $X$  es el intervalo?

No tenemos una caracterización completa, pero probaremos esto de manera positiva cuando  $X$  es una dendrita en el Capítulo 4.

### 3.3. Conexidad Local de $NC^*(X)$ en gráficas finitas

En esta sección, mostraremos que si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $NC^*(X)$  es localmente conexo. Para este fin, veamos primero una serie de resultados previos.

Dada  $X$  una gráfica finita, definimos:

$$\mathcal{L} = \{L : L \text{ es arista o ciclo de } X\};$$

y dado  $A \in C(X)$  definimos:

$$\mathcal{E}_A = \{E : E \text{ es una componente no degenerada de } A \cap (L \setminus R(X)) \text{ con } L \in \mathcal{L}\}.$$

Dado  $A \in NC^*(X)$  y sea  $\varepsilon > 0$  tal que, satisface:

- (a)  $\varepsilon < \min \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \text{diam}(E) : E \in \mathcal{E}_A \right\}, \frac{1}{4} \right\}$ ;
- (b) Si  $(E(X) \cup R(X)) \setminus A \neq \emptyset$ , entonces  $\varepsilon < \frac{1}{4}d(A, (E(X) \cup R(X)) \setminus A)$ ;
- (c) Si  $A \neq X$ , existe  $p \in X \setminus A$  tal que  $\varepsilon < \frac{1}{4}d(A, p)$ ;
- (d) Para toda  $a \in Fr(A)$ ,  $B(\varepsilon, a) \cap ((R(X) \cup E(X)) \setminus \{a\}) = \emptyset$ ;
- (e)  $\overline{B(\varepsilon, a)} \cap \overline{B(\varepsilon, a')} = \emptyset$  para toda  $a \neq a'$ ,  $a, a' \in Fr(A)$ .

Sea  $X$  una gráfica finita tal que  $I \neq X \neq S^1$  y sean  $A \in NC^*(X)$ ,  $B \in C(X)$  tales que  $H(A, B) < \varepsilon$  ( $\varepsilon$ , satisface las condiciones (a)-(e)), entonces se cumplen las siguientes observaciones:

**Observación 1.** Si  $q \in (R(X) \cup E(X)) \cap B$ , entonces  $q \in A$ .

Supongamos por el contrario, que  $q \notin A$ , de donde  $q \in (R(X) \cup E(X)) \setminus A$ . Como  $H(A, B) < \varepsilon$ , entonces  $q \in B \subseteq N(\varepsilon, A)$ , de donde existe  $a \in A$  tal que  $d(a, q) < \varepsilon$ . Por la condición (b), tenemos que  $d(a, q) < \frac{1}{4}d(A, (E(X) \cup R(X)) \setminus A)$ ; lo cual es una contradicción. Por tanto,  $q \in A$ .

**Observación 2.** Si  $D$  es una componente de  $A \setminus B$  o  $D$  es componente de  $B \setminus A$ , entonces  $\overline{D}$  no contiene ni aristas ni ciclos de  $X$ .

Sin pérdida de generalidad, sea  $D$  una componente de  $A \setminus B$ . Supongamos por el contrario, que existe una arista o ciclo  $L$  tal que  $L \subset \overline{D}$ ,  $L \setminus R(X) \subset D \subset A \setminus B$ . Sea  $a$  el punto medio de  $L$ , entonces  $B(\frac{1}{4}, a) \subset (L \setminus R(X)) \subset D \subset A \setminus B$ . De manera que  $a \notin N(\varepsilon, B)$ ; lo cual contradice que  $H(A, B) < \varepsilon$ .

**Observación 3.** Si  $D$  es una componente de  $A \setminus B$ , entonces  $|\overline{D} \cap R(X)| \leq 1$ .

Supongamos por el contrario, que  $|\overline{D} \cap R(X)| \geq 2$ . Sean  $q, r \in \overline{D} \cap R(X)$  tal que  $q \neq r$ . Como  $\overline{D}$  es arcoconexo al ser subcontinuo de  $X$  (Proposición 1.20 y Teorema 1.11), existe un arco  $\alpha$  con extremos  $q$  y  $r$  contenido en  $\overline{D}$ . Dado que  $p, q \in R(X)$ ,  $\alpha$  contiene una arista; lo cual contradice la Observación 2. Por lo tanto,  $|\overline{D} \cap R(X)| \leq 1$ .

**Observación 4.** Si  $E \in \mathcal{E}_A$ , entonces  $B \cap \text{int}(E) \neq \emptyset$ .

Sea  $E$  una componente no degenerada de  $A \cap (L \setminus R(X))$  y sea  $q$  el punto medio de  $E$ . Por (a) y del hecho que  $d$  es la longitud del arco y es una métrica convexa, tenemos que  $B(\varepsilon, q) \subseteq \text{int}(E)$  y como  $H(A, B) < \varepsilon$ , existe  $b \in B$  tal que  $d(b, q) < \varepsilon$ . Entonces  $B \cap B(\varepsilon, q) \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $B \cap \text{int}(E) \neq \emptyset$ .

**Observación 5.** Si  $A \neq X$ , entonces  $B \neq X$  y  $p \notin B$ .

De (c), tenemos que existe  $p \in X \setminus A$  tal que  $\varepsilon < \frac{d(A, p)}{4}$ . Supongamos por el contrario, que  $p \in B$ . Como  $H(A, B) < \varepsilon$ , entonces  $B \subseteq N(\varepsilon, A)$ , de donde existe  $a \in A$  tal que  $d(a, p) < \varepsilon$ . Por lo que,  $d(a, p) < \frac{d(A, p)}{4}$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $p \notin B$  y  $B \neq X$ .

**Observación 6.** Si  $e \in A \cap E(X)$  y  $L \in \mathcal{L}$  donde  $L = [r, e]$ . Si  $B \in NC^*(X)$ , entonces se cumple uno de los siguientes casos:

- (1)  $e \in B$ ;
- (2)  $B = X \setminus (b, e]$  donde  $b \in L \setminus \{r\}$ .

Si  $e \in B$ , tenemos el resultado, supongamos que  $e \notin B$ . Como  $e \in A$  y  $H(A, B) < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , tenemos que existe  $x \in B$  tal que  $d(e, x) < \frac{1}{4}$ , de donde  $B(\frac{1}{4}, x) \subset L \setminus \{e\}$ . Entonces,  $B \cap \text{int}(L) \neq \emptyset$  y, por tanto,  $B \cap (L \setminus \{r\}) \neq \emptyset$ .

Sea  $b$  el primer punto de  $B$  tal que  $[e, b] \cap B = \{b\}$ , entonces  $[e, b)$  es componente de  $X \setminus B$ . Dado que  $b \in L \setminus \{r\}$ ,  $b \in O(X)$ , entonces  $X \setminus \{b\} = \bigcup_{i=1}^m C_i$  con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  y  $C_i$  las componentes de  $X \setminus \{b\}$ .

Veamos que si  $B \cap C_i \neq \emptyset$  para alguna  $i \in \{1, \dots, m\}$ , entonces  $C_1 \subset B$ , pues de lo contrario, si existe  $q \in C_i \setminus B$ . Como  $b \notin C_i$ , existe  $a \in (B \setminus \{b\}) \cap C_i = \text{int}(B) \cap C_i \subset \text{int}(B)$ . Como  $C_i$  es abierto y conexo en  $X$  por el Teorema 1.12 el arco  $qa \subset C_i$ , como  $q \notin B$  y  $a \in \text{int}(B)$  existe  $b' \in \text{Fr}(B)$  tal que  $b' \in qa \subset C_i$ . Entonces,  $b' \in \text{Fr}(B)$  y  $b' \neq b$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $C_i \subset B$  y

Notemos que  $B \neq \{b\}$ , pues  $b \in O(X)$  y, por tanto,  $\{b\} \notin NC^*(X)$ . De manera que,  $B \cap C_i \neq \emptyset$  para alguna  $i \in \{1, \dots, m\}$ , de donde  $k$  el número de componentes tales que  $B \cap C_j \neq \emptyset$  es distinto de cero y por lo anterior, tenemos que  $B = \bigcup_{j=1}^k \{C_j \cup \{b\} : B \cap C_j \neq \emptyset\}$  y  $X \setminus B = \bigcup_{j=1}^n \{C_j : B \cap C_j = \emptyset\}$  con  $n = m - k$ .

Veamos que  $n = 1$ , supongamos por el contrario que con  $n \geq 2$ , es decir, existe al menos otra componente  $C$  de  $X \setminus B$  tal que  $C \neq [e, b)$ , con esto tendríamos que  $X \setminus B = \bigcup_{j=1}^n \{C_j \cup \{b\} : B \cap C_j = \emptyset\}$  es un conjunto con elementos dos elementos ajenos, lo cual contradice el hecho que  $B \in NC^*(X)$ . Por lo que,  $n = 1$ . Con esto, concluimos que  $X \setminus B = (b, e]$  y, por tanto,  $B = X \setminus (b, e]$ .

**Observación 7.** Si  $A \in F_1(X)$ ,  $A = \{e\}$  tal que  $e \in E(X)$  y  $B \in NC^*(X)$ , entonces  $e \in B$ .

Supongamos por el contrario, que  $e \notin B$ . De la Observación 6, tenemos que  $B = X \setminus (b, e]$  donde  $b \in L \setminus \{r\}$ ,  $L \in \mathcal{L}$  y  $L = [r, e]$ , entonces  $H(A, B) > d(e, r)$ . Por (a) y que la métrica es convexa, tenemos que  $d(e, r) > \varepsilon$ , con esto concluimos que  $H(A, B) > \varepsilon$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $e \in B$ .

**Observación 8.** Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A \in F_1(X)$ .

Supongamos por el contrario, que  $A \notin F_1(X)$ , entonces  $\mathcal{E}_A \neq \emptyset$  y por la Observación 4, tenemos que  $B \cap \text{int}(E) \neq \emptyset$  para toda  $E \in \mathcal{E}_A$  y, por tanto,  $B \cap A \neq \emptyset$ .

**Observación 9.** Si  $A \cap B = \emptyset$  y  $B \in NC^*(X)$ , entonces  $A, B \subset L$  para alguna  $L \in \mathcal{L}$  y  $B \subset \text{int}(L)$ .

De la Observación 8, tenemos que  $A = \{a\} \in F_1(X)$  y por la Observación 7,  $a \notin E(x)$ . Dado que  $H(A, B) < \varepsilon$ ,  $B \subset N(\varepsilon, A) = B(\varepsilon, a)$ . Tenemos las siguientes posibilidades:  $a \in R(X)$  o  $a \in O(X)$ .

Si  $a \in R(X)$ , como  $A \cap B = \emptyset$  y por la Observación 1, tenemos que  $B \cap R(X) = \emptyset$ , tenemos que  $B \subset \text{int}(L)$  para alguna  $L \in \mathcal{L}$ . Si  $a \notin L$ , entonces  $\varepsilon < d(a, L) \leq d(a, B)$ ; lo cual es una contradicción a la condición (a). Entonces,  $a \in L$  y  $a$  es extremo de  $L$ . Por lo tanto,  $A, B \subset L$  para alguna  $L \in \mathcal{L}$  y  $B \subset \text{int}(L)$ .

Si  $a \in O(X)$ , entonces  $a \in \text{int}(L)$  para alguna  $L \in \mathcal{L}$ . Por (b), (d) y del hecho que  $d$  es la longitud del arco y es una métrica convexa, tenemos que  $B(\varepsilon, a) \subset \text{int}(L)$  y, por tanto,  $A, B \subset \text{int}(L)$ . Lo cual concluye esta Observación.

**Observación 10.** *Para todo  $D \in C(X)$  tal que  $A \subset D \subset A \cup B$  o  $B \subset D \subset A \cup B$ , se tiene que  $H(A, D) < \varepsilon$  y  $H(B, D) < \varepsilon$ .*

Sea  $D \in C(X)$ . Si  $A \subset D \subset A \cup B$ , tenemos que  $A \subset N(\varepsilon, D)$ .

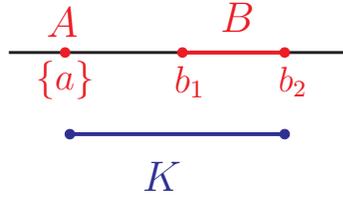
Veamos que  $D \subset N(\varepsilon, A)$ . Sea  $d \in D$ , entonces  $d \in A$  o  $d \in B$ . Si  $d \in A$ , entonces  $d \in N(\varepsilon, A)$ . Si  $d \in B$ , como  $H(A, B) < \varepsilon$ , tenemos que  $d \in B \subset N(\varepsilon, A)$ . Por lo tanto,  $H(A, D) < \varepsilon$ .

Si  $B \subset D \subset A \cup B$ , tenemos que  $B \subset N(\varepsilon, D)$  y de manera análoga al caso anterior, tenemos que  $D \subset N(\varepsilon, B)$  y, por tanto,  $H(B, D) < \varepsilon$ .

**Observación 11.** *Suponiendo que  $A \cap B = \emptyset$ . Sea  $K$  el continuo irreducible en  $L$  tal que  $A \cup B \subset K$ . Entonces  $K$  es un arco con extremos  $a$  y  $b_2$  donde  $b_2$  es un extremo del arco  $B$ ,  $K \setminus \{a\} \subset O(X)$  y para todo  $D \in C(X)$  tal que  $D \subset K$ , se tiene que  $H(A, D) < \varepsilon$ .*

Por las Observaciones 8 y 9, tenemos que  $A \in F_1(X)$  y existe una arista  $L$  tal que  $A, B \subset L$  y  $B \subset \text{int}(L)$ .

Tenemos que  $A = \{a\}$  un punto en  $L$  y  $B = [b_1, b_2]$  un arco contenido en  $L$ . Dado que  $A \cap B = \emptyset$ , tenemos que  $a \notin [b_1, b_2]$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a < b_1 \leq b_2$  en el orden natural del arco  $L$  o el ciclo en  $C$ , de donde  $K = [a, b_2]$  (Ver figura 3.109) y  $K \setminus \{a\} \subset O(X)$ . Como  $d$  es una métrica convexa y  $d(a, b_2) < \varepsilon$  ( $H(A, B) < \varepsilon$ ), tenemos que para toda  $c \in K$ , se cumple que  $d(a, c) < \varepsilon$ . De manera que si  $D \subset K$ , se tiene que  $H(A, D) < \varepsilon$ .


 Figura 3.109: Arco  $K$ .

**Lema 3.14.** Sean  $A \in NC^*(X)$ ,  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$ , satisface la condición (c)) y  $B \in C(X)$  tales que  $B \cap R(X) \subset A \cap R(X)$ . Si  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces:

- (1)  $A \cup B \in NC^*(X)$ ;
- (2) si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$  es un arco ordenado de  $A$  a  $A \cup B$ , entonces  $\alpha(t) \in NC^*(X)$  para toda  $t \in [0, 1]$ .

*Demostración.*

(1) Si  $A = X$ , el Lema es trivial, supongamos que  $A \neq X$ , entonces existe  $p \in X \setminus A$  y por la Observación 5,  $B \neq X$  y  $p \notin B$ .

Sea  $u \in X \setminus (A \cup B)$ , como  $A \in NC^*(X)$ ,  $X \setminus A$  es arcoconexo (Teorema 1.12) y existe un arco  $l_u$  con extremos  $p, u$  tal que  $l_u \subset X \setminus A$ .

Veamos que  $l_u \subset X \setminus (A \cup B)$ .

Sean  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset (l_u \setminus \{p, u\}) \cap R(X)$ , llamemos  $v_0 = p$  y  $v_{n+1} = u$ , donde  $p = v_0 < v_1 < \dots < v_{n+1} = u$  en el orden natural del arco  $l_u$ . Sea  $l_i$  el arco en  $l_u$  con extremos  $v_i, v_{i+1}$ .

Veamos que para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $B \cap l_i = \emptyset$ .

Supongamos por el contrario, que  $B \cap l_i \neq \emptyset$  para alguna  $i \in \{0, \dots, n\}$ , como  $v_i, v_{i+1} \in \{p, q\} \cup (R(X) \setminus A)$  los extremos de  $l_i$  y  $B \cap R(X) \subset A \cap R(X)$ , tenemos que  $\{v_i, v_{i+1}\} \cap B = \emptyset$ . De manera que como  $B$  es conexo y  $X$  una gráfica finita, si  $B \cap l_i \neq \emptyset$ , tenemos que  $B \subset l_i \subset l_u \subset X \setminus A$ ; lo cual contradice que  $B \cap A \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $A \cup B \in NC^*(X)$ .

(2) Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$  un arco ordenado tal que  $\alpha(0) = A$  y  $\alpha(1) = A \cup B$ . Sea  $t \in [0, 1]$ , entonces  $\alpha(t) \cap A \neq \emptyset$ . Como  $B \cap R(X) \subset A \cap R(X)$  y

$\alpha(t) \cap R(X) \subset A \cap R(X)$  aplicando (1) a  $\alpha(t)$  obtenemos que  $A \cup \alpha(t) = \alpha(t) \in NC^*(X)$  y el Lema queda demostrado.  $\square$

**Lema 3.15.** *Sea  $X$  una gráfica finita tal que  $I \neq X \neq S^1$ . Sean  $A \in NC^*(X)$  y  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$ , satisface las condiciones (a)-(e)). Si  $B \in NC^*(X)$ ,  $H(A, B) < \varepsilon$  y  $A \cap B = \emptyset$ , entonces existe una trayectoria  $\alpha \subset B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  tal que  $A, B \in \alpha$ .*

*Demostración.*

Sea  $K$  el continuo irreducible en  $L$  tal que  $A \cup B \subset K$ . Por la Observación 11, tenemos que  $K$  es un arco y  $K = [a, b_2]$  y  $K \setminus \{a\} \subset O(X)$ . Con esto definimos un homeomorfismo  $h(t) : [0, 1] \rightarrow [a, b_2]$  dado por  $h(t) = a(1 - t) + b_2t$  y definimos el arco  $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ , dado por  $\alpha_1(t) = [a, h(t)]$  con  $h(t) \in [a, b_2]$ . Entonces,  $\alpha_1(0) = \{a\}$  y  $\alpha_1(1) = [a, b_2] = K$ .

**Afirmación 1.**  $\alpha_1(t) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$  para toda  $t \in [0, 1]$ .

Sea  $t \in [0, 1]$ , por la Observación 11,  $H(A, \alpha_1(t)) < \varepsilon$  y  $(\alpha_1(t) \cap R(X)) = A \cap R(X)$ . Aplicando el Lema 3.14 a  $A$  y  $K$  tenemos que  $A \cup K = K \in NC^*(X)$  y  $\alpha_1(t) \in NC^*(X)$  y con esto concluimos la prueba de la Afirmación 1.

Ahora bien, sea  $h : [0, 1] \rightarrow [a, b_1]$  dado por  $h(s) = b_1(1 - s) + as$  y definimos el arco  $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow C(X)$ , dado por  $\alpha_2(s) = B \cup [b_1, h(s)]$ . De donde,  $\alpha_2(0) = B \cup \{b_1\} = B$  y  $\alpha_2(1) = B \cup [a, b_1] = K$ .

**Afirmación 2.**  $\alpha_2(s) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$  para toda  $s \in [0, 1]$ .

Sea  $s \in [0, 1)$ , por la Observación 11,  $H(A, \alpha_2(t)) < \varepsilon$ ,  $H(B, \alpha_2(t)) < \varepsilon$  y  $(\alpha_2(s) \cap R(X)) = B \cap R(X)$ . Aplicando el Lema 3.14 a  $B$  y  $\alpha(s)$ , tenemos que  $\alpha(s) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$ .

Para  $s = 1$ , tenemos que  $\alpha_2(1) = K = \alpha_1(1)$  y por la Afirmación 1,  $\alpha_1(1) \in NC^*(X)$ , con lo concluimos que  $\alpha_2(1) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$ . Por lo tanto,  $\alpha_2(s) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$  para toda  $s \in [0, 1]$ .

Sea  $\alpha = \alpha_1([0, 1]) \cup \alpha_2([0, 1])$ . y por las Afirmaciones 1 y 2,  $\alpha$  es una trayectoria de  $A$  a  $B$  en  $NC^*(X) \cap B_\varepsilon^H(A)$ . Esto concluye la demostración del Lema.  $\square$

**Observación 12.** *Los subcontinuos de gráficas finitas tienen frontera finita.*

*Demostración.* Sea  $X$  una gráfica finita y  $A \in C(X)$ . Por la Proposición 1.20,  $A$  es una gráfica finita, por lo que  $|E(A)| < \infty$ . Si  $p \in O(A) \cap O(X)$ , entonces  $p \in \text{int}(A)$ , de donde  $\text{Fr}(A) \subset E(A) \cup (R(X) \cap A)$  los cuales son conjuntos finitos. Por lo tanto,  $\text{Fr}(A)$  es finita. □

**Lema 3.16.** *Sea  $X$  una gráfica finita tal que  $I \neq X \neq S^1$ . Sean  $A, B \in NC^*(X)$  tales que  $A \cap B \neq \emptyset$  y  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$ , satisface las condiciones (a)-(e)). Si  $K$  es componente de  $A \setminus B$ , entonces  $\overline{K} \cap R(X) = \emptyset$  y  $\overline{K}$  es un arco no degenerado o  $\overline{K}$  es  $n$ -odo simple con vértice  $r$  y extremos  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \text{Fr}(B) \subset B$ .*

*Demostración.*

Sea  $K$  una componente de  $A \setminus B$ . Si  $K$  fuera degenerado, entonces  $B$  no sería compacto.

De la Observación 2, tenemos que  $\overline{K}$  no contiene ciclos, por lo que  $\overline{K}$  es un árbol y por Observación 3  $|\overline{K} \cap R(X)| \leq 1$ . Veamos que  $\overline{K}$  es un arco o un  $n$ -odo para alguna  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $\overline{K} \cap R(X) = \emptyset$ , como  $\overline{K}$  es no degenerada y es un árbol, tenemos que  $\overline{K}$  es un arco no degenerado.

Si  $\overline{K} \cap R(X) \neq \emptyset$ , tenemos que (Observación 3),  $|\overline{K} \cap R(X)| = 1$  y denotamos por  $\{r\} = \overline{K} \cap R(X)$ . Sea  $n = \text{ord}_A(r)$ .

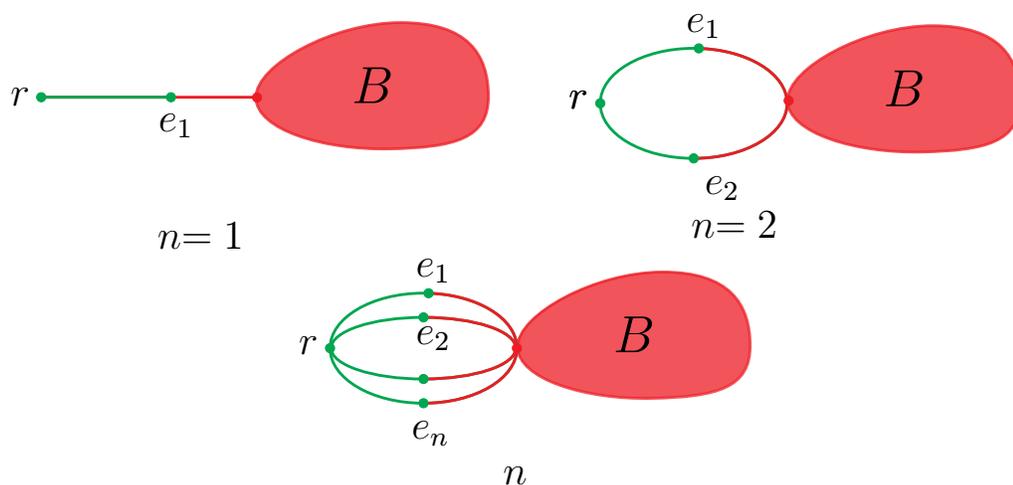
Veamos que  $\overline{K}$  es un  $n$ -odo.

**Caso (A)**  $n = 1$ .

De manera similar al caso anterior tenemos que  $\overline{K}$  es un arco no degenerado y como  $\text{ord}_A(r) = 1$  uno de los extremos de este arco es  $r$ , llamaremos al otro extremo  $e_1$ . Entonces  $\overline{K}$  es un 1-odo con vértice  $r$  y extremo  $\{e_1\} \subset \text{Fr}(B) \subset B$ .

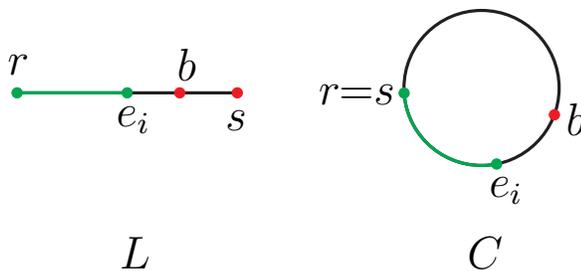
**Caso (B)**  $n \geq 2$ .

En este caso,  $\overline{K}$  es un  $n$ -odo y llamaremos  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a los extremos de  $\overline{K}$  donde el  $n$ -odo puede ser como se muestra en la Figura 3.110.

Figura 3.110: El  $n$ -odo  $\bar{K}$ .

Veamos que en cualquier caso  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq Fr(B) \subset B$ .

Supongamos por el contrario, que existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $e_i \notin B$ , entonces el arco  $[r, e_1] \subseteq A \setminus B$ . Sea  $L = [r, s]$  la arista (o  $C$  el ciclo) tal que  $[r, e_1] \subset L$  (o  $[r, e_i] \subset C$ ) (Ver Figura 3.111).

Figura 3.111: Arista  $L$  y ciclo  $C$ .

Si  $B \cap L \neq \emptyset$  (o  $B \cap C \neq \emptyset$ ). Sea  $b = \max\{L \cap B\}$  (o  $b = \max\{C \cap B\}$ ) con el orden  $s < r$ , de donde  $e_i > b$ . De manera que,  $[e_i, r] = E \in \mathcal{E}_A$  y por Observación 4, tenemos que  $B \cap \text{int}(E) \neq \emptyset$ ; lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $e_i \in B$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Como  $e_i \in \overline{K}$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $e_i \in Fr(B)$  para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Si  $B \cap L = \emptyset$ , tenemos de igual manera que  $[r, e_i] = E \in \mathcal{E}_A$  y concluimos que  $e_i \in Fr(B) \subset B$ . □

**Lema 3.17.** *Sean  $A \in NC^*(X)$  y  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$ , satisface las condiciones (a)-(e)). Si  $B \in NC^*(X)$ ,  $H(A, B) < \varepsilon$  y  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces existe un arco ordenado  $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC^*(X)$  tal que  $\alpha(0) = A$ ,  $\alpha(1) = A \cup B$  y  $\alpha(t) \in B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  para toda  $t \in [0, 1]$ .*

*Demostración.*

De la Observación 1, tenemos que si  $q \in (R(X) \cup E(X)) \cap B$ , entonces  $q \in A$ . De donde,  $B \cap R(X) \subset A \cap R(X)$ . Por lo que, el Lema se sigue directamente del Lema 3.14. □

**Lema 3.18.** *Sean  $A \in NC^*(X)$  y  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$ , satisface las condiciones (a)-(e)). Si  $B \in NC^*(X)$ ,  $H(A, B) < \varepsilon$  y  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces existe un arco ordenado  $\beta : [0, 1] \rightarrow NC^*(X)$  tal que  $\beta(0) = B$ ,  $\beta(1) = A \cup B$  y  $\beta(t) \in B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  para toda  $t \in [0, 1]$ .*

*Demostración.*

**Caso 1.** Para toda componente  $K$  de  $A \setminus B$ ,  $K \cap R(X) = \emptyset$ .

Como para toda  $K$  componente de  $A \setminus B$ ,  $K \cap R(X) = \emptyset$ , tenemos que  $B \cap R(X) \subset A \cap R(X)$ . Entonces, podemos aplicar el Lema 3.14 a  $A$  y  $B$ , pues  $B \in NC^*(X)$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ . De manera que  $A \cup B \in NC^*(X)$  y si  $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$  es un arco ordenado tal que  $\beta(0) = B$  a  $\beta(1) = A$ , entonces  $\beta(t) \in NC^*(X)$  para toda  $t \in [0, 1]$ . Además, como para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $B \subset \beta(t) \subset A \cup B$ , tenemos que  $\beta(t) \in B_H(\varepsilon, A)$  (Observación 10) y el Caso 1 esta probado.

**Caso 2.** Existe una componente  $K$  de  $A \setminus B$ ,  $K \cap R(X) \neq \emptyset$ .

Sean  $A_1, \dots, A_k$  las componentes de  $A \setminus B$  tales que para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $A_i \cap R(X) = \emptyset$  y sea  $B' = B \cup \bigcup_{i=1}^k A_i$ , aplicando el Caso 1 a  $B'$ , tenemos que existe un arco ordenado  $\beta' : [0, 1] \rightarrow C(X)$  tal que  $\beta'(0) = B$  y  $\beta'(1) = B'$  y  $\beta'(t) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$  para toda  $t \in [0, 1]$ .

Ahora sean  $K_1, \dots, K_m$  las componentes de  $A \setminus B'$ , entonces  $K_i \cap R(X) \neq \emptyset$ . Por el Lema 3.16, tenemos que  $\overline{K_i}$  es un  $n$ -odo con vértice  $r_i = K_i \cap R(X)$ , puntos extremos  $\{e_i^1, \dots, e_i^{n_i}\} \subset Fr(B') \subset B'$  y  $n_i = ord_A(r_i)$ .

Para  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  sea  $h_j : [0, 1] \rightarrow e_j^i r_1$  (el arco en  $\overline{K_i}$  con extremos  $e_j^i, r_i$ ) dado por  $h_j = e_j^i(1-t) + r_i$  y  $\beta_i : [0, 1] \rightarrow C(X)$  como  $\beta_i(t) = B' \cup \bigcup_{j=1}^{n_i} [e_j^i, h_j(t)]$ . De manera que  $B_i$  es un arco ordenado tal que  $\beta_i(0) = B'$  y  $\beta_i(1) = B' \cup K_i$  y  $\beta_i(t) \cap B' \neq \emptyset$ .

Notemos que para toda  $t \in [0, 1)$ ,  $\beta_i(t) \cap R(X) = (B' \cap R(X)) \cup ((\bigcup_{j=1}^{n_i} [e_j^i, h_j(t)]) \cap R(X)) \subset (B' \cap R(X)) \cup (\overline{K_i} \setminus \{r_i\}) \cap R(X)$  y como  $\overline{K_i} \setminus \{r_i\} \cap R(X) = \emptyset$ , tenemos que  $\beta_i(t) \cap R(X) \subset B' \cap R(X)$ . Por lo tanto, podemos aplicar el Lema 3.14 a  $B'$  y  $\beta_i(t)$ , de donde  $\beta_i(t) = B' \cup \beta_i(t) \in NC^*(X)$  y como  $B \subset B' \subset \beta_i(t) \subset B \cup K_i \subset A \cup B$ , por la observación 10, tenemos que  $H(\beta_i(t), A) < \varepsilon$ .

Definamos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C(X)$  dada por:

$$\gamma(t) = \bigcup_{i=1}^k \beta_i(t).$$

Entonces  $\gamma(0) = B'$ ,  $\gamma(1) = B' \cup \bigcup_{i=1}^k K_i = A \cup B' = A \cup B$  y  $\gamma(t) \cap B' \neq \emptyset$ .

Notemos que para toda  $t \in [0, 1)$ ,  $\gamma(t) \cap R(X) = (B' \cap R(X)) \cup ((\bigcup_{i=1}^k \beta_i(t)) \cap R(X)) \subset B' \cap R(X)$ . Por lo tanto, nuevamente podemos aplicar el Lema 3.14 a  $B'$  y  $\gamma(t)$ , de donde  $\gamma(t) = B' \cup \gamma(t) \in NC^*(X)$  y nuevamente como  $B \subset B' \subset \gamma(t) \subset A \cup B$ , por la observación 10, tenemos que  $H(\gamma(t), A) < \varepsilon$ ,  $\gamma(t) \in B_H(\varepsilon, A)$ .

Notemos que como  $\gamma(1) = A \cup B$ ,  $A \in NC^*(X)$ ,  $B \cap A \neq \emptyset$  y  $B \cap R(X) \subset A \cap R(X)$  nuevamente por el Lema 3.14,  $\gamma(1) = A \cup B \in NC^*(X)$ . Por tanto, para toda  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma(t) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$ .

Definamos  $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$  dada por:

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta'_t(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \gamma(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces si  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $2t \in [0, 1]$  y  $\beta(t) = \beta'_t(2t) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$  y si  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $2t-1 \in [0, 1]$  y  $\beta(t) = \gamma(2t-1) \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$ . Con esto el Lema queda demostrado.

□

Con los resultados anteriores, ahora estamos listos para demostrar el resultado central de esta sección.

**Teorema 3.19.** *Si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $NC^*(X)$  es localmente conexo.*

*Demostración.*

Si  $I = X$  o  $X = S^1$ , por el Corolario 3.11, tenemos que  $NC^*(X) \approx X$  o  $NC^*(X) = C(X)$  respectivamente y en ambos casos  $NC^*(X)$  es localmente conexo. Por lo que podemos suponer que  $I \neq X \neq S^1$ .

Sea  $U$  un abierto en  $NC^*(X)$  tal que  $A \subset U$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $A \in B_H(\varepsilon, A) \subset U$  y  $\varepsilon$  cumple las condiciones (a)-(e). Sea  $B \in B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$ .

Si  $A \cap B = \emptyset$ , por el Lema 3.15, entonces existe una trayectoria  $\alpha \subset B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  tal que  $A, B \in \alpha$ .

Si  $A \cap B \neq \emptyset$ , por el Lema 3.17, existe un arco ordenado  $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC^*(X)$  tal que  $\alpha(0) = A$ ,  $\alpha(1) = A \cup B$  y  $\alpha(t) \in B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  para toda  $t \in [0, 1]$  y por el Lema 3.18, existe un arco ordenado  $\beta : [0, 1] \rightarrow NC^*(X)$  tal que  $\beta(0) = B$ ,  $\beta(1) = A \cup B$  y  $\beta(t) \in B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  para toda  $t \in [0, 1]$ .

De manera que, para toda  $B \in B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  existe una trayectoria  $\gamma = \alpha([0, 1]) \cup \beta([0, 1])$  tal que  $A, B \in \gamma \subset NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, A)$ . Por tanto,  $B_H(\varepsilon, A) \cap NC^*(X)$  es conexa y el Lema queda demostrado.

□

En otras familias de continuos este resultado no es cierto, como en las dendritas. De hecho tenemos un resultado sobre una familia de dendritas cuyo hiperespacio  $NC^*(X)$  es totalmente desconexo, las cuales estudiaremos en el siguiente Capítulo.



# Capítulo 4

## Dendritas

En el Capítulo anterior probamos que si  $X$  es una gráfica finita, entonces  $NC^*(X)$  es localmente conexo. Esto no es necesariamente cierto para dendritas.

Vamos a mostrar que las dendritas cuyo conjunto de puntos de ramificación es denso tienen hiperespacio  $NC^*(X)$  totalmente desconexo. Más aún probaremos que  $NC^*(X)$  es homeomorfo a los números irracionales.

### 4.1. Conexidad de $NC^*(X)$ en dendritas

Para mostrar los resultados centrales de este capítulo, veamos primero algunas definiciones y resultados previos y finalizaremos con un resultado acerca de la conexidad de  $NC^*(X)$  en dendritas.

**Definición 4.1.** [21, Definición 29.1, p.29] Un espacio  $X$  es **totalmente desconexo** si y sólo si las componentes en  $X$  son los puntos.

**Teorema 4.2.** [21, Teorema 29.5, p.210] Todo espacio 0-dimensional  $T_1$  es totalmente desconexo.

**Definición 4.3.** [16, Definición 1.1 p.5] Dado  $X$  un espacio métrico separable, y  $n$  un número entero positivo, entonces la **dimensión de  $X$**  se escribe  $\dim(X)$  y si  $p \in X$ , la **dimensión de  $X$  en  $p$**  se escribe  $\dim_p(X)$ .

- (1)  $\dim(X) = -1$  si y sólo si  $X = \emptyset$ . Además,  $\dim(X) \leq -1$  si se tiene que  $X = \emptyset$ .

(2) Ahora, asumamos inductivamente que hemos definido  $\dim(Y) \leq n - 1$  para  $n$  un número entero  $n \geq 0$  y cualquier espacio  $Y$ . Entonces para un espacio  $X$  y un punto  $p \in X$ , definimos

$$\dim_p(X) \leq n.$$

si y sólo si  $p$  tiene una vecindad arbitrariamente pequeña  $U$  en  $X$  cuya frontera tiene dimensión  $n - 1$ ,  $\dim(\text{Fr}(U)) \leq n - 1$ .

(3)  $\dim(X) \leq n$  si y sólo si  $\dim_p(X) \leq n$  para toda  $p \in X$ .

(4)  $\dim(X) = n$  si y sólo si  $\dim(X) \leq n$  y  $\dim(X) \not\leq n - 1$ .

(5)  $\dim_p(X) = n$  si y sólo si  $\dim_p(X) \leq n$  y  $\dim_p(X) \not\leq n - 1$ .

(6)  $\dim(X) = \infty$  si y sólo si  $\dim(X) \not\leq n$  para todo  $n \geq -1$ .

(7)  $\dim_p(X) = \infty$  si y sólo si  $\dim_p(X) \not\leq n$  para todo  $n \geq -1$ .

**Definición 4.4.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $A \subseteq X$  y  $n$  un número natural. Decimos que  **$A$  es de orden menor o igual a  $n$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) \leq n$ , si para cualquier  $U \in \tau$  tal que  $A \subseteq U$ , existe  $V \in \tau$  tal que  $A \subseteq V \subseteq U$  y  $|\text{Fr}(V)| \leq n$ .

Decimos que  **$A$  es de orden  $n$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) = n$ , si  $\text{ord}(A, X) \leq n$  y  $\text{ord}(A, X) \neq m$  para todo número natural  $m < n$ .

Decimos que  **$A$  es de orden menor o igual a  $\omega$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) \leq \omega$ , si para cualquier  $U \in \tau$  tal que  $A \subseteq U$ , existe  $V \in \tau$  tal que  $A \subseteq V \subseteq U$  y  $|\text{Fr}(V)| < \omega$ .

Decimos que  **$A$  es de orden  $\omega$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) = \omega$ , si  $\text{ord}(A, X) \leq \omega$  y para todo número natural  $n$ ,  $\text{ord}(A, X) \not\leq n$ .

Decimos que  **$A$  es de orden menor o igual a  $\aleph_0$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) \leq \aleph_0$ , si para cualquier  $U \in \tau$  tal que  $A \subseteq U$ , existe  $V \in \tau$  tal que  $A \subseteq V \subseteq U$  y  $|\text{Fr}(V)| \leq \aleph_0$ .

Decimos que  **$A$  es de orden  $\aleph_0$  en  $X$** , y escribimos  $\text{ord}(A, X) = \aleph_0$ , si  $\text{ord}(A, X) \leq \aleph_0$  y  $\text{ord}(A, X) \not\leq \omega$ .

**Observación 4.5.** La Definición 4.4 es conocida como el **orden de Menger-Urysohn**, si  $X$  es una dendrita es equivalente al orden en sentido clásico ([3, p.229]), es decir,  $ord_X(p)$  es igual al número de componentes de  $X \setminus \{p\}$ ; en caso de que este número sea infinito el orden es igual al ordinal  $\omega$ .

**Lema 4.6.** [14, VI 7. 8., pp.339-340] Sea  $(X, T)$  un espacio topológico y sea  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ . Se cumple lo siguiente:

(1) Si  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , entonces  $\lim A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$ ;

(2) Si  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , entonces  $\lim A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ .

**Lema 4.7.** Sean  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de  $C(X)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  y  $B \in C(X)$  tal que para toda  $n \in \mathbb{N}$   $A_n \subset B$ . Entonces  $A \subset B$ .

*Demostración.*

Sea  $p \in A$ , entonces existe  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos de  $X$  tal que  $p_n \in A_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_n \rightarrow p$ . Como  $A_n \subset B$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $p_n \in B$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,  $p \in \overline{B} = B$ . □

**Definición 4.8.** [16, p.3] Si  $B, K, L \subset X$ , entonces el enunciado  $K$  y  $L$  están separados en  $X$  por  $B$  (o  $B$  es un separador entre  $K$  y  $L$  en  $X$ ) quiere decir que

$$X \setminus B = {}^E|_F, K \subset E, L \subset F;$$

cuando  $B = \emptyset$ , simplemente decimos que  $K$  y  $L$  son una separación en  $X$ .

**Definición 4.9.** [9, Definición 2.29 f), p.93] Un subconjunto  $A$  de un espacio  $X$  es  $\mathbf{G}_\delta$  si existen abiertos  $V_1, V_2 \dots$  en  $X$  tales que  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ .  $A$  es  $\mathbf{F}_\sigma$  si existen cerrados  $H_1, H_2 \dots$  en  $X$  tales que  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ .

**Definición 4.10.** [9, Definición 4.21, p.221] Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es **completamente metrizable** si existe una métrica completa  $d$  en  $X$  tal que  $\tau = \tau_d$ .

**Definición 4.11.** Un espacio topológico es **Polaco** si es separable y completamente metrizable.

**Lema 4.12.** [6, Lemma 1.3.12] Sea  $X$  un espacio completamente metrizable. Si  $Y$  es un subconjunto  $G_\delta$  de  $X$ , entonces  $Y$  es completamente metrizable.

**Definición 4.13.** *Un espacio es **locamente compacto en ninguna parte**, si no tiene abiertos con cerradura compacta.*

**Teorema 4.14.** *[1, 2, p.91] Para un espacio métrico separable  $P$  las siguientes son equivalentes:*

- (a)  $X$  es polaco, 0-dimensional y locamente compacto en ni ninguna parte;
- (b)  $P$  es homeomorfo a  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Definición 4.15.** *[18, Definición 10.3, p. 166] Un continuo  $X$  es **hereditariamente localmente conexo**, escribimos *hlc*, si todo subcontinuo de  $X$  es un continuo localmente conexo.*

**Teorema 4.16.** *[18, Teorema 10.4, pp.167] Un continuo  $X$  es *hlc* si y sólo si  $X$  no contiene continuos de convergencia.*

**Teorema 4.17.** *[4, Teorema 4.6, p.10] Para cualquier dendrita las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1)  $E(X)$  es denso en  $X$ ;
- (2)  $R(X)$  es denso en  $X$ ;
- (3) Para cualquier arco  $A \subset X$ , el conjunto  $A \cap R(X)$  es denso en  $A$ .

**Lema 4.18.** *Sean  $X$  una dendrita,  $A \in NC^*(X) \setminus \{X\}$ ,  $\{a\} = Fr(A)$  (Lema 2.32) y  $y$  un punto en  $X \setminus A$ . Si  $z$  es el único punto en  $A$  tal que  $yz \cap A = \{z\}$  (Lema 2.13), entonces  $z = a$ .*

*Demostración.*

Veamos que  $z \in Fr(A)$ . Sea  $W$  un abierto en  $X$  tal que  $z \in W$ . Como  $z \in A$ , entonces  $W \cap A \neq \emptyset$  y como  $z \in yz$ , tenemos que  $W \cap (yz \setminus \{z\}) \neq \emptyset$ , por tanto,  $W \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$  y  $z \in Fr(A)$ . Como  $Fr(A) = \{a\}$ , entonces  $z = a$ . □

**Teorema 4.19.** *Sea  $X$  es una dendrita si  $a, b \in X$  con  $a \neq b$ , entonces para todo  $x \in ab \setminus \{a, b\}$ ,  $x$  separa  $a$  de  $b$ .*

*Demostración.*

Sean  $a, b \in X$  con  $a \neq b$ . Sea  $ab$  el único arco que une a  $a$  y a  $b$  en  $X$  (Lema 2.10). Elegimos  $x \in ab \setminus \{a, b\}$ .

Veamos que  $a$  y  $b$  están en componentes distintas de  $X \setminus \{x\}$ .

Sea  $C_a$  la componente de  $X \setminus \{x\}$  que tiene a  $a$  y supongamos que  $b \in C_a$ . Como  $C_a$  es abierto por ser componente de  $X \setminus \{x\}$  (Teorema 1.13) por el Teorema 1.12 tenemos que  $C_a$  es arcoconexo, entonces existe un arco  $\alpha \subseteq C_a$  con extremos  $a$  y  $b$ . Entonces  $\alpha = ab$  y  $x \in ab$ . Por otro lado  $x \notin C_a$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $b \notin C_a$ .

Ahora bien, vamos a dar la separación de  $X \setminus \{x\}$ . Sea  $U = C_a$ , de la cual sabemos que  $b \notin C_a$  y  $V = \bigcup \{C : C \text{ es componente de } X \setminus \{x\} \text{ y } a \notin C\}$ . Entonces  $U$  y  $V$  son abiertos por ser unión de abiertos y  $b \in V$  pues  $b \in X \setminus \{x\}$  y  $b \notin C_a$ . Si  $U \cap V \neq \emptyset$ , existiría  $C$  una componente de  $X \setminus \{x\}$  que tendría a  $a$  y no tendría  $a$ ; lo cual es una contradicción. Entonces  $U \cap V = \emptyset$  y, por lo tanto,  $x$  separa  $a$  de  $b$ . □

**Lema 4.20.** *Sea  $X$  una dendrita,  $p \in R(X)$  y  $C$  una componente de  $X \setminus \{p\}$ . Entonces  $C \cap E(X) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.*

Como  $p \in R(X)$ , tenemos que  $X \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in M} C_i$  con  $M \subset \mathbb{N}$ ,  $|M| \geq 3$  y  $C_i$  las componentes no vacías de  $X \setminus \{p\}$ . Sea  $C = C_i$  para alguna  $i \in M$ .

Sea  $K = \bigcup \{D : D \text{ es componente de } X \setminus \{p\} \text{ y } D \neq C\}$ .

**Afirmación 1.**  $K \neq \emptyset$ .

Como  $|M| \geq 3$ , tenemos que al menos hay tres componentes distintas de  $X \setminus \{p\}$ , por lo que hay al menos dos componentes de  $X \setminus \{p\}$  distintas de  $C$ . Por tanto,  $K \neq \emptyset$ .

**Afirmación 2.**  $C$  y  $K$  son abiertos.

Como  $C$  es una componente del conjunto abierto  $X \setminus \{p\}$  por el Teorema 1.13, tenemos que  $C$  un conjunto abierto de  $X$ . De igual manera, para toda  $D \in K$  al ser componentes de  $X \setminus \{p\}$  son conjuntos abiertos de  $X$ . De donde,  $K$  es una unión de abiertos de  $X$  y, por tanto,  $K$  es abierto.

Por las Afirmaciones 1 y 2, tenemos que  $C$  y  $K$  son abiertos no vacíos de  $X$ . De la definición de  $K$ , tenemos que  $C \cap K = \emptyset$ . Por tanto,  $X \setminus \{p\} = {}^C|_K$ , es decir,  $C$  y  $K$  son un separación de  $X \setminus \{p\}$ .

Por el Teorema 2.22, tenemos que existe un punto de no corte,  $e$ , de  $X$  en  $C$ . Como  $e$  es de no corte, por el Teorema 2.24,  $e \in E(X)$ . Por tanto,  $e \in C \cap E(X)$ . □

**Proposición 4.21.** *Sea  $A$  un subconjunto de  $X$  y consideremos las siguientes familias:*

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in C(X) : B \subset A\};$$

$$\mathcal{D}(A) = \{B \in C(X) : B \cap A \neq \emptyset\}.$$

*Entonces si  $A$  es abierto, se tiene que  $\mathcal{C}(A)$  y  $\mathcal{D}(A)$  son abiertos en  $C(X)$ .*

*Demostración.*

Sea  $A \subset X$  abierto, veamos que  $\mathcal{C}(A)$  es abierto en  $C(X)$ .

Sea  $B \in \mathcal{C}(A)$ . Como  $A$  es abierto para toda  $x \in A$  existe  $\delta_x > 0$  tal que  $B(\delta_x, x) \subset A$ , dado que  $B \subset A$  y  $B$  es compacto pues  $B \in C(X)$ . Entonces, existen  $x_1, \dots, x_n \in B$  tal que  $B \subset \bigcup_{i=1}^n B(\delta_i, x_i) \subset A$ . Tomando  $\varepsilon = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ , tenemos que  $N(\varepsilon, B) \subset A$ .

Veamos que  $B_H(\varepsilon, B) \subset \mathcal{C}(A)$ .

Sea  $C \in B_H(\varepsilon, B)$ , entonces  $H(C, B) < \varepsilon$ , de donde  $C \subset N(\varepsilon, B) \subset A$  y  $B_H(\varepsilon, B) \subset \mathcal{C}(A)$ , por tanto,  $\mathcal{C}(A)$  es abierto en  $C(X)$ .

Sea  $A \subset X$  abierto, veamos que  $\mathcal{D}(A)$  es abierto en  $C(X)$ .

Como  $C(X) \setminus \mathcal{D}(A) = \{B \in C(X) : B \cap A = \emptyset\}$ , basta ver que  $C(X) \setminus \mathcal{D}(A)$  es cerrado en  $C(X)$ . Sea  $\{B_n\}$  una sucesión en  $C(X) \setminus \mathcal{D}(A)$  tal que converge a  $B$  con  $B \in C(X)$ .

Veamos que  $B \cap A = \emptyset$ . Supongamos por el contrario, que  $B \cap A \neq \emptyset$ . Sea  $b \in B \cap A$ , entonces existe  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos de  $X$  tal que  $b_n \in B_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $b_n \rightarrow b$ . Dado que  $A$  es abierto existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n > N$ ,  $b_n \in A$ , entonces  $b_n \in B_n \cap A$ ; lo cual es una contradicción ya que  $B_n \cap A = \emptyset$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , de donde  $B \cap A = \emptyset$ . Por tanto,  $C(X) \setminus \mathcal{D}(A)$  es cerrado y  $\mathcal{D}(A)$  es abierto en  $C(X)$ .

□

**Definición 4.22.** [17, Notación (0,10,2), p.7] Para cualquier colección finita  $U_1, \dots, U_m$  de conjuntos abiertos de un espacio topológico  $X$ . Definimos el conjunto

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

**Teorema 4.23.** [17, Teorema (0.13), pp.8-9] Sea  $\mathcal{B}$  la familia de subconjuntos de  $2^X$  dada por:

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_m \rangle : m \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \text{ abierto en } X\}.$$

Entonces  $\mathcal{B}$  es una familia de abiertos en  $2^X$  que induce la misma topología que la inducida por la métrica de Hausdorff.

**Lema 4.24.** Sea  $X$  una dendrita,  $q$  un punto de ramificación de  $X$  y  $C$  una componente de  $X \setminus \{q\}$ . Definimos

$$\mathcal{K} = \{A \in NC^*(X) : A \subset C\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L} = \{A \in NC^*(X) : A \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset\}.$$

Entonces  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son una separación de  $NC^*(X)$ .

*Demostración.*

Sean  $q \in R(X)$  y  $C$  una componente de  $X \setminus \{q\}$ .

**Afirmación 1.**  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son conjuntos abiertos de  $NC^*(X)$ .

Como  $C$  es una componente del conjunto abierto  $X \setminus \{q\}$  por el Teorema 1.13, tenemos que  $C$  un conjunto abierto de  $X$ . Como  $\overline{C}$  es un conjunto cerrado de  $X$ , entonces  $X \setminus \overline{C}$  es conjunto abierto de  $X$ . Por la Proposición 4.21, tenemos que los conjuntos  $\{A \in C(X) : A \subset C\}$  y  $\{A \in C(X) : A \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset\}$  son conjuntos abiertos de  $C(X)$ . Como  $\mathcal{K} = NC^*(X) \cap \{A \in C(X) : A \subset C\}$  y  $\mathcal{L} = NC^*(X) \cap \{A \in C(X) : A \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset\}$  y  $NC^*(X)$  tiene la topología inducida por la métrica del subespacio en  $C(X)$ . Concluimos que  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son conjuntos abiertos de  $NC^*(X)$ .

**Afirmación 2.**  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son no vacíos.

Por el Lema 4.20, tenemos que  $E(X) \cap C \neq \emptyset$ , entonces existe  $e \in E(X)$  tal que  $\{e\} \subset C$ , por el Teorema 2.33, se tiene que  $\{e\} \in NC^*(X)$ , por tanto,  $\{e\} \in \mathcal{K}$ .

Por el Teorema 2.33, tenemos que  $X \in NC^*(X)$  y dado que  $X \setminus \overline{C} \subset X$ ,  $X \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset$ . Por tanto,  $X \in \mathcal{L}$ .

**Afirmación 3.**  $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ .

Supongamos por el contrario, que existe  $A \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ . Dado que  $A \in \mathcal{L}$ , se tiene que  $A \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset$ , entonces existe  $x \in A \cap (X \setminus \overline{C})$ , donde  $x \in X \setminus \overline{C} \subset X \setminus C$ . Por otro lado, como  $A \in \mathcal{K}$ , tenemos que  $A \subset C$ , de donde  $x \in C$ ; lo cual es una contradicción. Por lo que,  $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ .

**Afirmación 4.** Si  $A \in NC^*(X)$  y  $A \subset \overline{C}$ , entonces  $A \subset C$ .

Como  $C$  es componente de  $X \setminus \{q\}$ ,  $\overline{C} = C \cup \{q\}$ . Sea  $A \in NC^*(X)$  tal que  $A \subset \overline{C}$  y supongamos por el contrario, que  $A \not\subset C$ , entonces  $q \in A$ . Como  $q \in R(X)$ ,  $X \setminus \{q\}$  tiene al menos tres componentes,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . Como  $A \subset \overline{C} = C \cup \{q\}$ , tenemos que  $A \cap D = \emptyset = A \cap E$  y  $X \setminus A \subset X \setminus \{q\}$ , por lo que  $X \setminus A \subset (C \setminus A) \cup (D \setminus A) \cup (E \setminus A) = (C \setminus A) \cup D \cup E$ ; lo cual implica que  $D$  y  $E$  son componentes de  $X \setminus A$ . Esto implica que  $X \setminus A$  no es conexo y  $A \notin NC^*(X)$ . Por tanto,  $A \subset C$  y la afirmación es cierta.

**Afirmación 5.**  $NC^*(X) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ .

$\supseteq$ ) Como  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son subconjuntos de  $NC^*(X)$ , tenemos que  $\mathcal{K} \cup \mathcal{L} \subset NC^*(X)$ .

$\subseteq$ ) Sea  $A \in NC^*(X)$ . Si  $A \subset \overline{C}$  por la Afirmación 4,  $A \subset C$  y  $A \in \mathcal{K}$ . Si  $A \not\subset \overline{C}$ , entonces  $A \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset$  y  $A \in \mathcal{L}$ . Hemos probado que si  $A \in NC^*(X)$ ,  $A \in \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ .

Por las afirmaciones 1, 2, 3 y 5 podemos concluir que  $NC^*(X) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$  donde  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son abiertos, ajenos y no vacíos de  $NC^*(X)$ , es decir,  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son una separación de  $NC^*(X)$ .

□

## 4.2. Dendritas con conjunto de puntos terminales denso

En esta sección nos enfocaremos en estudiar las dendritas cuyo conjunto de puntos de ramificación de  $X$  es denso en  $X$ , las cuales cumplen los resultados centrales de este capítulo.

**Teorema 4.25.** *Sea  $X$  una dendrita que cumple que el conjunto de puntos de ramificación de  $X$  es denso en  $X$ ,  $\overline{R(X)} = X$ . Si  $K, L \in NC^*(X)$  con  $K \neq L$ , entonces existe una separación  $\mathcal{K}|_{\mathcal{L}}$  de  $NC^*(X)$  donde  $K \in \mathcal{K}$  y  $L \in \mathcal{L}$ .*

*Demostración.*

Sean  $K, L \in NC^*(X)$  con  $L \neq K$ . Como  $L \neq K$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $L \setminus K \neq \emptyset$  y existe  $l \in L \setminus K$ , por tanto,  $K \neq X$ . Como  $K \in NC^*(X)$  y  $K \neq X$  por el Lema 2.32,  $|Fr(K)| = 1$  y denotamos por  $\{k\} = Fr(K)$ .

Como  $l \in L \setminus K$  y  $k \in K$ , tenemos que  $k \neq l$ , con lo que el arco  $kl$  es no degenerado.

**Afirmación 1.**  $kl \cap K = \{k\}$ .

Como  $k \in K$ , entonces por el Lema 2.13 existe un único punto  $z \in K$  tal que  $zl \cap K = \{z\}$  y por el Lema 4.18,  $z = k$ . Como el arco  $kl = zl$  cumple que  $kl \cap K = \{k\}$ , se concluye esta afirmación.

Por el Teorema 4.17 (3),  $kl \cap R(X)$  es denso en  $kl$ . Dado que  $kl \setminus \{k, l\}$  es un abierto en  $kl$ , entonces existe  $q \in R(X)$  tal que  $q \in kl \setminus \{k, l\}$ . Como  $kl \cap K = \{k\}$ , entonces  $q \notin K$ , de donde  $K \subset X \setminus \{q\}$ . Como  $K$  es un conjunto conexo, existe  $C$  una componente de  $X \setminus \{q\}$  tal que  $K \subset C$ . Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{K} = \{A \in NC^*(X) : A \subset C\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L} = \{A \in NC^*(X) : A \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset\}.$$

Como  $K \subset C$ , entonces  $K \in \mathcal{K}$ .

Veamos que  $L \in \mathcal{L}$ .

**Observación 2.**  $l \in X \setminus \overline{C}$ .

Supongamos por el contrario, que  $l \in \overline{C}$ . Como  $C$  es componente de  $X \setminus \{q\}$ ,  $\overline{C} = C \cup \{q\}$  y dado que  $q \in kl \setminus \{k, l\}$ , tenemos que  $l \in C$ . Dado que  $X$  es una dendrita y  $C$  una componente del conjunto abierto  $X \setminus \{q\}$ , por el Teorema 1.13,  $C$  es un conjunto abierto  $X$  y al ser conexo, por el Teorema 1.12, tenemos que  $C$  es arconexo. De donde, el arco  $kl \subset C$ ,  $q \in C$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $l \notin \overline{C}$ .

Por la Observación 2, tenemos que  $l \in (X \setminus \overline{C})$  y como  $l \in L \setminus K$ , entonces  $l \in L \cap (X \setminus \overline{C})$  y, por tanto,  $L \in \mathcal{L}$ .

Por el Lema 4.24, tenemos que  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son una separación de  $NC^*(X)$ . Por lo tanto, existe una separación  $\mathcal{K}|_{\mathcal{L}}$  de  $NC^*(X)$  donde  $K \in \mathcal{K}$  y  $L \in \mathcal{L}$ . □

#### 4.2.1. Dendritas con $NC^*(X)$ totalmente desconexo

Con todo lo anterior, ya podemos probar el primer resultado central de esta capítulo.

**Corolario 4.26.** *Sea  $X$  una dendrita que cumple que el conjunto de puntos de ramificación de  $X$  es denso en  $X$ ,  $\overline{R(X)} = X$ , entonces  $NC^*(X)$  es un espacio totalmente desconexo.*

*Demostración.*

Sea  $A \in NC^*(X)$ ,  $\mathcal{C}_A$ , la componente de  $NC^*(X)$  que tiene a  $A$ , probaremos que  $\mathcal{C}_A = \{A\}$ .

Supongamos por el contrario, que existe  $B \in NC^*(X)$ ,  $B \neq A$  tal que  $B \in \mathcal{C}_A$ . Por el Teorema 4.25, existe una separación  $\mathcal{K}|_{\mathcal{L}}$  de  $NC^*(X)$  donde  $A \in \mathcal{K}$  y  $B \in \mathcal{L}$ . Por lo que  $\mathcal{C}_A = (\mathcal{K} \cap \mathcal{C}_A)|_{(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}_A)}$  es una separación de  $\mathcal{C}_A$ , lo cual es una contradicción. De manera que para toda  $A \in NC^*(X)$ ,  $\mathcal{C}_A = \{A\}$ ; lo cual prueba el Corolario. □

#### 4.2.2. Dendritas con $NC^*(X) \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

En esta sección probaremos que si  $X$  es una dendrita que cumple que el conjunto de puntos terminales de  $X$  es denso en  $X$ , entonces  $NC^*(X)$  es

homeomorfo a los números irracionales.

**Definición 4.27.** Para cualquier dendrita  $X$  definimos los subconjuntos de  $C(X)$ ,  $\mathcal{D}_X$  y  $\mathcal{A}_X$ , de la siguiente manera:

- (1)  $Y \in \mathcal{A}_X$  si y sólo si existe  $p \in R(X)$  y existe  $C$  una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $Y = C \cup \{p\}$ ;
- (2)  $Y \in \mathcal{D}_X$  si y sólo si existe  $p \in O(X)$  y existe  $C$  una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $Y = C \cup \{p\}$ .

**Proposición 4.28.** Para toda dendrita  $X$  no degenerada se cumple lo siguiente:

- (1)  $\mathcal{D}_X \subseteq NC^*(X)$ ;
- (2)  $\mathcal{A}_X$  es numerable;
- (3)  $\mathcal{A}_X \cap NC^*(X) = \emptyset$ .

*Demostración.*

(1) Sea  $Y \in \mathcal{D}_X$ , entonces existe  $p \in O(X)$  y existe  $C$  una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $Y = C \cup \{p\}$ . Como  $ord_X(p) = 2$ , entonces  $Y = X \setminus D$  con  $D$  la otra componente de  $X \setminus \{p\}$  y por el Teorema 2.33, tenemos que  $Y \in NC^*(X)$ .

(2) Por el Teorema 2.25, tenemos que para todo  $p \in R(X)$ ,  $ord_X(p) \leq \aleph_0$ , entonces  $X \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in M} C_i^p$  con  $M_p \subset \mathbb{N}$ ,  $|M_p| \geq 3$  y  $C_i^p$  las componentes de  $X \setminus \{p\}$ . De donde, para cada punto  $p \in R(X)$ , tenemos que el conjunto  $Y_p = \{Y \in \mathcal{A}_X : Y = C_i^p \cup \{p\} \text{ con } i \in M_p\}$  es numerable. Ahora bien, por el Teorema 2.26, sabemos  $X$  tiene una cantidad numerable de puntos de ramificación. Por tanto,  $\bigcup_{p \in R(X)} Y_p$  es numerable y dado que  $\mathcal{A}_X = \bigcup_{p \in R(X)} Y_p$  concluimos que  $\mathcal{A}_X$  es numerable.

(3) Supongamos que  $Y \in \mathcal{A}_X$ , entonces existe  $p \in R(X)$  y existe  $C$  una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $Y = C \cup \{p\}$ . Dado que  $p \in R(X)$ ,  $X \setminus \{p\}$  tiene al menos tres componentes,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . Del hecho que  $Y = C \cup \{p\}$ , tenemos que  $Y \cap D = \emptyset = Y \cap E$  y, por tanto,  $D \cup E \subseteq X \setminus Y$ . Como  $X \setminus Y \subset X \setminus \{p\}$ , esto implica que  $D$  y  $E$  son componentes distintas de  $X \setminus Y$ . Entonces  $X \setminus Y$  no es conexo, por lo que  $Y \notin NC^*(X)$ . Por tanto,  $\mathcal{A}_X \cap NC^*(X) = \emptyset$ . □

**Lema 4.29.** Sea  $X$  una dendrita y sean  $p, q \in X$  con  $p \neq q$ . Supongamos que  $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (pq \setminus \{p, q\}) \cap O(X)$  tales que  $p_{n+1} \in p_n q$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ . Para toda  $n \in \mathbb{N}$  sean  $C_n$  y  $D_n$  las componentes de  $X \setminus \{p_n\}$  tal que  $p \in C_n$  y  $q \in D_n$ , las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (1)  $D_n \cup \{p_n\} = \overline{D_n} \in \mathcal{D}_X$  y  $D_{n+1} \subset D_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (2)  $C_n \cup \{p_n\} = \overline{C_n} \in \mathcal{D}_X$  y  $C_n \subset C_{n+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{D_n} = \bigcap \{\overline{D_n} : n \in \mathbb{N}\} = X \setminus C$  donde  $C$  es la componente de  $X \setminus \{q\}$  que tiene a  $p$  y  $X \setminus C \in NC^*(X) \cap \overline{\mathcal{D}_X}$ ;
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcup \{C_n : n \in \mathbb{N}\} = C$  y  $\bigcup \{C_n : n \in \mathbb{N}\} = \overline{C} = C \cup \{q\} \in \overline{\mathcal{D}_X}$ .

*Demostración.*

Los conjuntos que hemos descrito se ven como se muestra en la Figura 4.1.

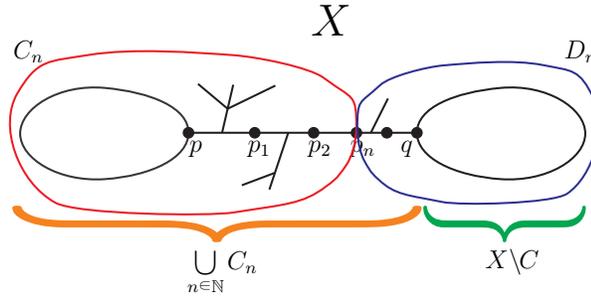


Figura 4.1: Conjuntos  $C_n$  y  $D_n$ .

(1) Como para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Fr(D_n) = \{p_n\}$ , tenemos que  $\overline{D_n} = D_n \cup \{p_n\}$  y como  $p_n \in O(X)$ ,  $\overline{D_n} \in \mathcal{D}_X$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $p_n \in D_{n+1}$ . Entonces  $D_{n+1}$  es un conexo que tiene a  $p_n$  y a  $q$ , por los teoremas 1.13 y 1.12, tenemos que  $p_n q \subseteq D_{n+1}$ , por lo que  $p_{n+1} \in D_{n+1}$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $p_n \notin D_{n+1}$ . De donde  $D_{n+1} \subset X \setminus \{p_n\} = C_n \cup D_n$ . Por último, dado que  $q \in D_{n+1} \cap D_n$ , tenemos que  $D_{n+1} \subset D_n$ .

(2) Al igual que en (1), tenemos que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Fr(C_n) = \{p_n\}$  y, por tanto,  $C_n \cup \{p_n\} = \overline{C_n} \in \mathcal{D}_X$ . También por (1), tenemos que  $\overline{D_{n+1}} \subset \overline{D_n}$ . Por lo que,  $X \setminus \overline{D_n} \subseteq X \setminus \overline{D_{n+1}}$  y, por tanto,  $C_n \subset C_{n+1}$ .

#### 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO119

(3) Sea  $C$  la componente de  $X \setminus \{q\}$  que tiene  $p$ .

Como para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in C_n$  y  $q \notin C_n$ , tenemos que  $p \in C_n \subset X \setminus \{q\}$ . Por tanto,  $\bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto conexo tal que  $p \in \bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X \setminus \{q\}$ , lo cual implica que  $\bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C$ .

Veamos que  $\bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\} = C$ . Supongamos por el contrario, que existe  $c \in C \setminus \bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ , como  $c \in C \subset X \setminus \{q\}$ , tenemos que  $c \neq q$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$ , como  $c \notin C_n$  y  $c \neq q$ , entonces  $c \in D_n$  y  $c \neq p$ .

Consideremos el arco  $cp$  en  $X$ , como  $c \in D_n$  y  $p \in C_n$ , tenemos que  $p_n \in cp$ . Hemos probado que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n \in cp$ , como  $cp$  es cerrado y  $p_n \rightarrow q$ , tenemos que  $q \in cp \setminus \{c, p\}$ , por lo que  $q$  separa a  $c$  de  $p$  y  $c, p$  están en diferentes componentes de  $X \setminus \{q\}$ ; lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\} = C$ .

Por el Lema 4.6,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{D_n} = \bigcap\{\overline{D_n} : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{X \setminus C_n : n \in \mathbb{N}\} = X \setminus C$ .

Ahora, por (1), se tiene que  $\overline{D_n} \in \mathcal{D}_X$ , entonces  $X \setminus C \in \overline{\mathcal{D}_X}$  y por el Teorema 2.33 (3), concluimos que  $X \setminus C \in NC^*(X)$  y (3) queda demostrado.

(4) Por el Lema 4.6,  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\} = C$ . Ahora, por (2), se tiene que  $\overline{C_n} \in \mathcal{D}_X$  y  $\overline{C_n} \subset \overline{C_{n+1}}$ . Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_n \cup \{p_n\}) = C \cup \{q\} = \overline{C}$  y  $\overline{C} \in \overline{\mathcal{D}_X}$ .

□

**Lema 4.30.** *Sea  $X$  un continuo hereditariamente localmente conexo, supongamos que existe  $Y \in C(X)$  tal que  $X \setminus Y$  tiene una cantidad infinita de componentes y sea  $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$  el conjunto de las componentes de  $X \setminus Y$ . Supongamos también que para toda  $n \in \mathbb{N}$  existe  $A_n \in NC^*(X)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \neq \emptyset$ .*

(1) *Si  $X \setminus C_n \subset A_i$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $A = X$ ;*

(2) *Si  $A_n \subset C_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $|A| = 1$ .*

*Demostración.*

(1) Veamos que  $A = X$ .

⊆) Claramente  $A \subset X$ .

⊇) Veamos que  $X \subset A$ .

Sea  $x \in X$ . Si  $x \in Y$ , entonces  $x \in X \setminus C_n \subset A_n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$  y, por tanto,  $x \in A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ . Si  $x \notin Y$ , entonces  $x \in C_m$  para alguna  $m \in \mathbb{N}$  y como para toda  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \neq m$ , tenemos que  $C_n \cap C_m = \emptyset$ , concluimos que  $x \in X \setminus C_n \subset A_n$  para toda  $n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$ . Por lo tanto,  $x \in \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ . Con esto concluimos que  $X \subset A$  y  $A = X$ .

(2) Veamos que  $|A| = 1$ . Como  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  es un continuo y dado que  $A_n \subset C_n \subset X \setminus Y$ , entonces si para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \cap Y = \emptyset$  y si  $n \neq m$ , como  $C_n \cap C_m = \emptyset$ , tenemos que  $A_n \cap A_m = \emptyset$ .

Veamos que  $A \subset Y$ . Supongamos por el contrario, que existe  $x \in A \setminus Y$ , entonces  $x \in C_m$  para alguna  $m \in \mathbb{N}$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in A_n \subset C_n$ . Como  $C_m$  es abierto existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq N$ ,  $x_n \in C_m$ . Por otro lado si  $n \neq m$ ,  $C_m \cap C_n = \emptyset$ , entonces para toda  $n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$ ,  $x_n \notin C_m$ ; lo cual es una contradicción, por tanto,  $A \subset Y$ .

De lo anterior, tenemos que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \cap A = \emptyset$  y si  $n \neq m$ ,  $A_n \cap A_m = \emptyset$ .

Si  $A$  es no degenerado, entonces  $A$  es un continuo de convergencia de  $X$  (Definición 2.16). Pero como  $X$  es una dendrita, por el Lema 4.16,  $X$  no contiene continuos de convergencia, en particular  $A$  no es un continuo de convergencia. Entonces  $|A| = 1$ . Con esto terminamos (2). □

**Proposición 4.31.** *Sea  $X$  una dendrita no degenerada. Entonces*

$$NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X \subseteq \overline{\mathcal{D}_X}.$$

*Demostración.*

Sea  $A \in NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X$ .

**Caso 1.**  $A \in NC^*(X)$ .

Por el Teorema 2.33, sabemos que si  $X$  es una dendrita,  $A \in NC^*(X)$  si y sólo si algunas de las siguientes se cumple:

- (1)  $A = X$ ;

#### 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO121

(2)  $A = \{e\}$  con  $e \in E(X)$ ;

(3)  $A = X \setminus C$  donde  $C$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$  con  $p \in X \setminus E(X)$ .

Sean  $A \in NC^*(X)$ ,  $A \neq X$ ,  $p \in X \setminus A$  y  $\{q\} = Fr(A)$  (Lema 2.32). Consideremos el arco  $pq$  y  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de puntos ordinarios contenida en  $pq$  tales que  $p_{n+1} \in p_nq$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_n \rightarrow q$ . Como para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $ord_X(p_n) = 2$ , tenemos que  $X \setminus \{p_n\}$  tiene exactamente dos componentes  $C_n, D_n$ ; donde  $C_n$  es la componente de  $X \setminus \{p_n\}$  que tiene a  $p$  y  $D_n$  es la componente de  $X \setminus \{p_n\}$  que tiene a  $q$ .

Si  $A = \{e\}$  para algun  $e \in E(X)$ , entonces  $e = q$  y  $X \setminus \{e\}$  es conexo. Además,  $C = X \setminus \{e\}$  es la componente de  $X \setminus \{e\}$  que tiene a  $\{p\}$ . Consideremos la sucesión  $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ , por el Lema 4.29 (3) y (4),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{D_n} = X \setminus C = \{e\}$  y  $\{e\} \in \overline{D_X}$  y también  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{C_n} = \overline{C} = X \in \overline{D_X}$ . Por lo tanto, si  $A \in NC^*(X)$ ,  $A = \{e\}$  con  $e \in NC^*(X)$  o  $A = X$ , tenemos que  $A \in \overline{\mathcal{D}_X}$ .

Si  $A = X \setminus D$  donde  $D$  es una componente de  $X \setminus \{q_0\}$  con  $q_0 \in X \setminus E(X)$ , dado que  $A \in NC^*(X)$ ,  $Fr(A) = \{q_0\}$  (Lema 2.32) y como elegimos a  $\{q\} = Fr(A)$ , tenemos que  $q = q_0$ .

Nuevamente, por el Lema 4.29 (3), tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{D_n} = X \setminus C$  donde  $C$  es la componente de  $X \setminus \{q\}$  que tiene a  $p$  y  $X \setminus C \in \overline{\mathcal{D}_X}$ . Ahora, como elegimos que  $p \in X \setminus A = D$ , tenemos que  $D = C$ . Por tanto,  $A = X \setminus C = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{D_n}$  y  $A \in \overline{\mathcal{D}_X}$ . Con esto hemos probado que  $NC^*(X) \subset \overline{\mathcal{D}_X}$  y terminamos el Caso 1.

**Caso 2.**  $A \in \mathcal{A}_X$ .

Como  $A \in \mathcal{A}_X$ ,  $A = C \cup \{q\}$  donde  $q \in R(X)$  y  $C$  es una componente de  $X \setminus \{q\}$ . Sea  $p \in C$ , entonces  $p \neq q$  y  $C$  es la componente de  $X \setminus \{q\}$  que tiene a  $p$ . Consideremos el arco  $pq$  y  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de puntos ordinarios contenida en  $pq$  tales que  $p_{n+1} \in p_nq$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_n \rightarrow q$ . Como para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $ord_X(p_n) = 2$ , tenemos que  $X \setminus \{p_n\}$  tiene exactamente dos componentes  $C_n, D_n$  donde  $C_n$  es la componente de  $X \setminus \{p_n\}$  que tiene a  $p$  y  $D_n$  es la componente de  $X \setminus \{p_n\}$  que tiene a  $q$ . Nuevamente, aplicando el Lema 4.29 (1),(3) y (4), tenemos que  $\overline{D_n} = D_n \cup \{p_n\} \in \mathcal{D}_X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{D_n} =$

$X \setminus C \in \overline{\mathcal{D}_X}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{C_n} = \overline{C} = C \cup \{q\} = A \in \overline{\mathcal{D}_X}$  y, por tanto,  $\mathcal{A}_X \subset \overline{\mathcal{D}_X}$ .

Con esto terminamos el Caso 2.

Por los Casos 1 y 2, concluimos que  $NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X \subseteq \overline{\mathcal{D}_X}$  y la Proposición queda demostrada. □

**Proposición 4.32.** *Sea  $X$  una dendrita no degenerada. Entonces*

$$\overline{\mathcal{D}_X} \subseteq NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X \cup F_1(X).$$

*Demostración.*

Sea  $A \in \overline{\mathcal{D}_X}$ , entonces existe una sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $A_n = C_n \cup \{p_n\}$  donde  $p_n \in O(X)$  y  $C_n$  es una componente de  $X \setminus \{p_n\}$ . Llamamos  $X \setminus \{p_n\} = C_n \cup D_n$  y  $B_n = D_n \cup \{p_n\}$ . Supondremos en todo momento que para toda  $n \neq m$ ,  $p_n \neq p_m$ , para quitar los elementos de la sucesión que se repiten.

Sea  $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  una subsucesión de  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $p_{n_k} \rightarrow p$ , sea  $\{A_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$  una subsucesión de  $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  tal que  $A_{n_{k_m}} \rightarrow A$  y sea  $\{B_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$  una subsucesión de  $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  tal que  $B_{n_{k_m}} \rightarrow B$ .

Para efectos de practicidad. Renombramos las subsucesiones  $\{A_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $\{B_{n_{k_m}}\}_{m=1}^{\infty}$  y  $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  por  $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$  y  $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$  y tenemos que  $A_m \rightarrow A$ ,  $B_m \rightarrow B$  y  $p_m \rightarrow p$ .

Si  $A = X$  o  $A \in F_1(X)$ , entonces  $A \in NC^*(X) \cup F_1(X)$  y la Proposición queda demostrada. Supongamos entonces, que  $A \notin F_1(X) \cup \{X\}$ .

**Observación 1.**

- (1)  $X = A \cup B$ ;
- (2)  $A \cap B = \{p\}$ ;
- (3)  $B \notin F_1 \cup \{X\}$ .

(1) Sabemos que  $A \neq X$ , sea  $b \in X \setminus A$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $N(\varepsilon, A) \cap B(\varepsilon, b) = \emptyset$ . Sea  $M \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $m \geq M$ ,  $A_m \subset N(\varepsilon, A)$ , entonces  $b \notin A_m$ , por lo que para toda  $m \geq M$ ,  $b \in B_m$  y, por tanto,  $b \in B$ . Con esto concluimos que  $X = A \cup B$ .

#### 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO123

(2) Sea  $z \in A \cap B$  y sea  $U_n$  una vecindad conexa de  $z$  con  $\text{diam}(U_n) < \frac{1}{n}$  (Definición 2.7), como  $z \in A \cap B$ , existen sucesiones  $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$  y  $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$  tales que  $a_m \in A_m$ ,  $b_m \in B_m$ ,  $a_m \rightarrow z$  y  $b_m \rightarrow z$ , además, existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $m \geq M$ ,  $a_m, b_m \in U_n$ . De donde, el arco  $a_m b_m \subset U_n$  (Teorema 1.12) y dado que  $a_m \in A_m$  y  $b_m \in B_m$ , tenemos que  $p_m \in a_m b_m \subset U_n$ . De manera que podemos construir una subsucesión  $\{p_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$  de  $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$  tal que  $p_{m_k} \rightarrow z$ , como  $p_{m_k} \rightarrow p$ , entonces  $p = z$  y, por tanto,  $A \cap B = \{p\}$ .

(3) Si  $B \in F_1(X)$ , entonces  $B = \{b\}$  y  $X \setminus B = X \setminus \{b\} \subset A$ , de manera que  $X = \overline{X \setminus \{b\}} \subset \overline{A} = A$ , por tanto,  $A = X$ ; lo cual es una contradicción. Si  $B = X$ , entonces  $A = A \cap X = A \cap B$  y por (2)  $A \cap B = \{p\}$ , por tanto,  $A = \{p\} \in F_1(X)$ ; lo cual es una contradicción. Con esto concluimos la prueba de la Observación 1.

**Observación 2.** Existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n, m \geq M$ ,  $A_m \cap A_n \neq \emptyset \neq B_m \cap B_n$ .

Como  $A \neq X \neq B$ , existe  $a \in A \setminus B$  y  $b \in B \setminus A$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(\varepsilon, a) \cap N(\varepsilon, B) = \emptyset = B(\varepsilon, b) \cap N(\varepsilon, A)$ , sea  $M \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $m \geq M$ ,  $B_m \subset N(\varepsilon, B)$  y  $A_m \subset N(\varepsilon, A)$ . Entonces, para toda  $m \geq M$ ,  $a \notin B_m$  y  $b \notin A_m$ , por lo que para toda  $m \geq M$ ,  $a \in A_m$  y  $b \in B_m$ . Por lo tanto, para toda  $n, m \geq M$ ,  $a \in A_n \cap A_m$ ,  $b \in B_n \cap B_m$  y la Observación queda demostrada.

Estamos listo para probar que si  $A \in \overline{\mathcal{D}_X}$ , entonces  $A \in NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X$ . Analicemos los siguientes casos:

**Caso 1.** Sea  $M \in \mathbb{N}$  como en la Observación 2 y supongamos que  $m \geq M$ , existe  $n_m > m$  tal que  $p_{n_m} \notin A_m$

Sabemos que  $X \setminus \{p_{n_m}\} = C_{n_m} \cup D_{n_m}$ , por la Observación 2 y del hecho que  $p_{n_m} \notin A_m$ , tenemos que  $A_m \cap (A_{n_m} \setminus \{p_{n_m}\}) \neq \emptyset$ . Por tanto,  $A_m \cap C_{n_m} \neq \emptyset$  y  $A_m \subset C_{n_m} \subset A_{n_m}$ , entonces podemos construir una subsucesión creciente  $A_{n_m} \subset A_{n_{m+1}} \subset A_{n_{m+2}} \subset \dots$  y por el Lema 4.6 (1), tenemos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} A_{n_m} = \bigcup \{A_{n_m} : m \geq M\}$ . Por otro lado, como  $A_{n_m} \rightarrow A$ , entonces  $A = \overline{\bigcup \{A_{n_m} : m \geq M\}}$ .

Veamos que  $A = \bigcup \{A_{n_m} : m \geq M\} \cup \{p\}$ .

Sea  $a \in A \setminus \bigcup\{A_{n_m} : m \geq M\} \cup \{p\}$ , entonces  $a \in B_{n_m}$  para toda  $m \geq M$  y dado que  $B_{n_m} \rightarrow B$ , tenemos que  $a \in B$ . De donde,  $a \in A \cap B$  y por la Observación 1 (2), se tiene que  $A \cap B = \{p\}$ , por lo tanto,  $a = p$

De manera que  $X \setminus \{p\} = (A \setminus \{p\}) \cup (B \setminus \{p\}) = \bigcup\{A_{n_m} : m \geq M\} \cup (B \setminus \{p\})$ . Como  $(A \setminus \{p\}) \cap (B \setminus \{p\}) = \emptyset$ , tenemos que  $\bigcup\{A_{n_m} : m \geq M\}$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$ . De aquí podemos concluir que:

Si  $p \in O(X)$ , entonces  $A \in \mathcal{D}_X$  y por la Proposición 4.28 (1), tenemos que  $A \in \mathcal{D}_X \subset NC^*(X)$ .

Si  $p \in E(X)$ , entonces  $A = X \in NC^*(X)$ ; lo cual es una contradicción.

Si  $p \in R(X)$ , entonces  $A \in \mathcal{A}_X$  y el Caso 1 queda demostrado.

**Caso 2.** Supongamos que el Caso 1 no se da, es decir, para toda  $m \geq M$  y para toda  $n > m$ ,  $p_n \in A_m$ .

Como  $n \neq m$ , entonces  $p_n \neq p_m$  y  $p_n \in A_m \setminus \{p_m\}$ , tenemos que  $p_n \notin B_m$ .

De manera que podemos aplicar el Caso 1 a la sucesión  $\{B_m\}_{m \geq M}$  y podemos concluir que:

Si  $p \in O(X)$ , entonces  $B \in \mathcal{D}_X$  y  $A \in \mathcal{D}_X$ . Nuevamente, por la Proposición 4.28 (1), tenemos que  $A \in \mathcal{D}_X \subset NC^*(X)$ .

Si  $p \in E(X)$ , entonces  $B = X \in NC^*(X)$ ; lo cual contradice la Observación 1 (3).

Si  $p \in R(X)$ , entonces  $B \in \mathcal{A}_X$ , donde  $B = C \cup \{p\}$  y  $C$  es una componente de  $X \setminus \{p\}$ . De manera que  $X \setminus C = X \setminus (B \setminus \{p\}) = A$  y por el Teorema 2.33, concluimos que  $A \in NC^*(X)$  y el Caso 2 queda demostrado.

Por los Casos 1 y 2, concluimos que  $\overline{\mathcal{D}_X} \subseteq NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X \cup F_1(X)$  y la Proposición queda demostrada. □

**Lema 4.33.** *Sea  $X$  una dendrita no degenerada,  $x \in R(X)$  y  $C$  una componente de  $X \setminus \{x\}$ . Entonces, si  $A \in C(X)$  y  $x \in A \subset C \cup \{x\}$ , se tiene que  $A \notin NC^*(X)$ .*

*Demostración.*

#### 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO125

Sea  $C$  es componente de  $X \setminus \{x\}$  y sea  $A \in NC^*(X)$  tal que  $x \in A \subset C \cup \{x\}$ . Como  $x \in R(X)$ ,  $X \setminus \{x\}$  tiene al menos tres componentes,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . Del hecho que  $A \subset C \cup \{x\}$ , tenemos que  $A \cap D = \emptyset = A \cap E$  y, por tanto,  $D \cup E \subseteq X \setminus A$ . Como  $X \setminus A \subset X \setminus \{x\}$ , esto implica que  $D$  y  $E$  son componentes de  $X \setminus A$ . Entonces  $X \setminus A$  no es conexo y  $A \notin NC^*(X)$ . Lo que concluye la demostración del Lema. □

**Proposición 4.34.** *Sea  $X$  una dendrita no degenerada. Entonces  $NC^*(X)$  es subconjunto  $G_\delta$  de  $C(X)$  y, por tanto, es Polaco.*

*Demostración.*

En primer lugar, veamos que  $NC^*(X) \setminus F_1(X) = \overline{\mathcal{D}_X} \setminus (\mathcal{A}_X \cup F_1(X))$ .

De la Proposición 4.31, tenemos que  $NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X \subseteq \overline{\mathcal{D}_X}$ , de donde  $(NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X) \setminus F_1(X) \subseteq \overline{\mathcal{D}_X} \setminus F_1(X)$  y por la Proposición 4.32, tenemos que  $\overline{\mathcal{D}_X} \subseteq NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X \cup F_1(X)$ , lo cual implica que  $\overline{\mathcal{D}_X} \setminus F_1(X) \subseteq (NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X) \setminus F_1(X) \subseteq \overline{\mathcal{D}_X} \setminus F_1(X)$ . Entonces

$$\begin{aligned} (NC^*(X) \cup \mathcal{A}_X) \setminus F_1(X) &= \overline{\mathcal{D}_X} \setminus F_1(X) \\ (NC^*(X) \setminus F_1(X)) \cup (\mathcal{A}_X \setminus F_1(X)) &= \overline{\mathcal{D}_X} \setminus F_1(X) \\ ((NC^*(X) \setminus F_1(X)) \cup (\mathcal{A}_X \setminus F_1(X))) \setminus \mathcal{A}_X &= (\overline{\mathcal{D}_X} \setminus F_1(X)) \setminus \mathcal{A}_X \\ ((NC^*(X) \setminus F_1(X)) \setminus \mathcal{A}_X) \cup ((\mathcal{A}_X \setminus F_1(X)) \setminus \mathcal{A}_X) &= \overline{\mathcal{D}_X} \setminus (F_1(X) \cup \mathcal{A}_X) \\ (NC^*(X) \setminus F_1(X)) \setminus \mathcal{A}_X &= \overline{\mathcal{D}_X} \setminus (F_1(X) \cup \mathcal{A}_X). \end{aligned}$$

Por (3) de la Proposición 4.28, tenemos que  $NC^*(X) \cap \mathcal{A}_X = \emptyset$ , de donde  $(NC^*(X) \setminus F_1(X)) \setminus \mathcal{A}_X = NC^*(X) \setminus F_1(X)$ . Por lo tanto,  $NC^*(X) \setminus F_1(X) = \overline{\mathcal{D}_X} \setminus (\mathcal{A}_X \cup F_1(X))$ .

Ahora bien, por (2) de la Proposición 4.28, tenemos que  $\mathcal{A}_X$  es numerable y dado que  $\overline{\mathcal{D}_X}$  es compacto y  $F_1(X)$  es cerrado,  $NC^*(X) \setminus F_1(X)$  es  $G_\delta$ . Además,  $NC^*(X) = [NC^*(X) \setminus F_1(X)] \cup F_1(E(X))$ , unión de dos  $G_\delta$ , entonces es  $G_\delta$ . Por el Lema 4.12, concluimos que  $NC^*(X)$  es completamente metrizable y, por tanto, es Polaco. □

Cuando se enviaron a publicación los resultados de esta tesis, el árbitro de la revista hizo el siguiente comentario:

**Comentario 4.35.** En [13, Proposición 5.1] se prueba que si  $X$  es un continuo localmente conexo, el conjunto  $\mathcal{S}(X)$  de todos  $A \in 2^X$  tales que  $X \setminus A$  es no conexo es un subconjunto  $F_\sigma$  de  $2^X$ . Dado que las dendritas son continuos localmente conexos y  $NC^*(X) = C(X) \setminus \mathcal{S}(X)$ , se concluye que  $NC^*(X)$  es un subconjunto  $G_\delta$  de  $C(X)$ . Como es bien sabido ([6, Lema 1.3.12]), los subconjuntos  $G_\delta$  de los espacios completamente metrizable son completamente metrizable. Como  $C(X)$  es compacto y metrizable,  $NC^*(X)$  es Polaco.

Lo cual acorta considerablemente el trabajo realizado para la demostración de la Proposición 4.34, siendo ambas maneras matemáticamente correctas.

**Teorema 4.36.** [16, Teorema 7.1, pp.33-34] Un espacio que es la unión numerable de subconjuntos  $F_\sigma$ , donde cada uno de los cuales tiene  $\dim \leq n$ , es en sí mismo de  $\dim \leq n$ .

**Corolario 4.37.** Si  $X$  es un espacio métrico separable,  $U \subset X$  abierto tal que  $\dim(U) = \dim(X \setminus U) = 0$ , entonces  $\dim(X) = 0$ .

*Demostración.*

Como  $U = \bigcup \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$  cerrados de  $X$ , entonces  $U$  es  $F_\sigma$  y al ser  $X \setminus U$  un cerrado es  $F_\sigma$ . Por el Teorema 4.36 y dado que  $X = U \cup (X \setminus U)$ , tenemos que  $\dim(X) = 0$ . □

A continuación, mostraremos que  $NC^*(X)$  es 0-dimensional. Para este fin, veamos primero una serie de resultados previos.

Sea  $X$  una dendrita no degenerada,  $a \in X$  y  $x \in X \setminus (E(X) \cup \{a\})$ . Definimos:

$A_x$  como la componente de  $X \setminus \{x\}$  que tiene a  $a$  y sea  $B_x = X \setminus A_x$ . Por el Teorema 2.33 (3), tenemos que  $B_x \in NC^*(X)$ . Sea  $b \in X \setminus \{a\}$ , definimos:

$$\mathcal{F} = \{B_x : x \in ab \setminus \{a, b\}\}.$$

Como para toda  $x \in ab \setminus \{a, b\}$ ,  $x \in X \setminus (E(X) \cup \{a\})$ , tenemos que  $B_x \in NC^*(X)$  y  $\mathcal{F} \subset NC^*(X)$ .

Supongamos que existen puntos  $p, q \in (ab \setminus \{a, b\} \cap R(X))$  tales que  $q$  separa a  $b$  de  $p$  (Teorema 4.19). Definimos:

$$\mathcal{B} = \{B_x : x \in pq \setminus \{p\}\}$$

#### 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO127

Como  $p, q \in R(X)$ ,  $X \setminus \{p\}$  y  $X \setminus \{q\}$  tiene al menos tres componentes cada uno,  $p$  separa al punto  $a$  del arco  $qb$  y  $q$  separa al arco  $ap$  del punto  $b$ . Sea  $C_p$  una componente de  $X \setminus \{p\}$  que no contiene ni al punto  $a$ , ni al arco  $qb$  y  $C_q$  una componente de  $X \setminus \{q\}$  que no contiene ni al arco  $ap$ , ni al punto  $b$ .

**Observación 4.38.** Si  $u, w \in ab \setminus \{a, b\}$  y  $w$  separa al punto  $u$  del punto  $b$ , entonces:

- (a)  $A_u \subset A_w$ ;
- (b)  $B_w \subset B_u$ ;
- (c)  $B_w \setminus \{w\} \subset B_u$ ;
- (d)  $B_w \setminus \{w\} \subset B_u \setminus \{u\}$ .

*Demostración.*

Los conjuntos que hemos descrito se ven como se muestra en la Figura 4.2.

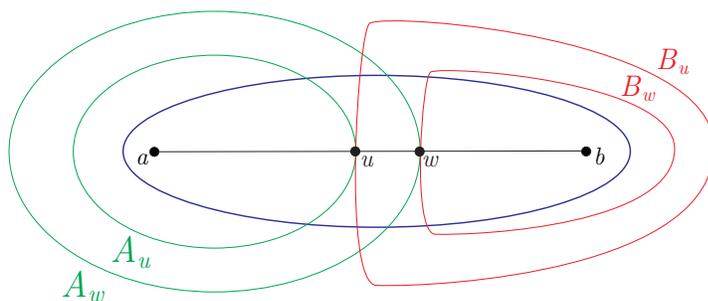


Figura 4.2: Conjuntos  $A_u$ ,  $A_w$ ,  $B_w$  y  $B_u$ .

Veamos que  $w$  separa al arco  $au$  del punto  $b$  y que  $u$  separa al punto  $a$  del arco  $wb$ .

Como  $w$  separa a los puntos  $u$  y  $b$ , entonces  $X \setminus \{w\} = E \cup F$  donde  $u \in E$  y  $b \in F$ . Ahora bien, como el arco  $au$  es conexo,  $b \notin au$  y  $u \in au \cap E$ , tenemos que  $au \subset E$ , y, por tanto,  $w$  separa al arco  $au$  de  $b$ . Similarmente, tenemos que  $u$  separa al punto  $a$  del arco  $wb$ .

De manera que  $w \notin A_u$ , entonces  $A_u$  es conexo,  $A_u \subset X \setminus \{w\}$  y  $a \in A_u$ , por lo tanto,  $A_u \subset A_w$ . De donde,  $X \setminus A_w \subset X \setminus A_u$ ; lo cual implica que

$B_w \subset B_u$  y (a), (b) y (c) quedan demostradas. Como  $au \subset A_w$ ,  $u \notin B_w$  y por (c), concluimos que (d)  $B_w \setminus \{w\} \subset B_u \setminus \{u\}$  es cierta y la Afirmación queda demostrada.  $\square$

**Observación 4.39.** Para toda  $x \in pq \setminus \{p\}$ , se cumple que  $B_x \cap A_p = \emptyset = B_x \cap C_p$  y  $C_q \subset B_x$ .

*Demostración.*

Tenemos que para toda  $x \in pq \setminus \{p\}$ ,  $x$  separa al arco  $ap$  del punto  $b$  y  $x \notin C_p$ , de manera que como  $A_p \subset A_x$  (Observación 4.38 (a)) y  $A_p \cup \{p\} \cup C_p$  es un subconjunto conexo de  $X \setminus \{x\}$  y, por tanto,  $A_p \cup \{p\} \cup C_p \subset A_x$  y  $B_x \cap A_p = \emptyset = B_x \cap C_p$ .

Ahora, como  $q$  separa a  $A_q$  de  $C_q$ ,  $C_q \subset B_q$  y dado que para toda  $x \in pq \setminus \{p, q\}$ ,  $q$  separa a los puntos  $x$  y  $b$ , entonces  $B_q \subset B_x$  y tenemos que  $C_q \subset B_x$  para toda  $x \in pq \setminus \{p\}$ .  $\square$

**Lema 4.40.**  $\mathcal{B}$  es abierto en  $NC^*(X)$ .

*Demostración.*

Sea  $\mathcal{U} = \langle B_p \setminus \{p\}, B_q \setminus \overline{C_q}, C_q \rangle$  (Ver Figura 4.3).

Recordemos que  $\mathcal{B} = \{B_x : x \in pq \setminus \{p\}\}$  y  $\overline{C_q} = C_q \cup \{q\}$ .

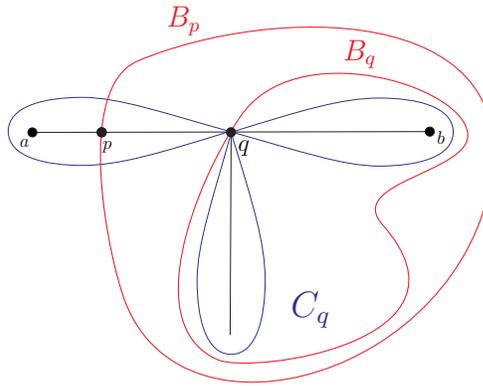


Figura 4.3: Conjuntos  $B_p$ ,  $B_q$  y  $C_q$ .

Veamos que  $\mathcal{U} \cap NC^*(X) = \mathcal{B}$ .

$\subseteq$ ) Sea  $K \in \mathcal{U} \cap NC^*(X)$ . Como  $K \subset (B_p \setminus \{p\}) \cup (B_q \setminus \overline{C_q}) \cup C_q$ ,  $C_q \subset B_q$  (Observación 4.39),  $B_q \subset B_p$  (Observación 4.38 (b)) y  $a \in A_p \subset X \setminus B_p$ , tenemos que  $a \notin K$  y, por tanto,  $K \neq X$ . Dado que  $K \cap (B_q \setminus \overline{C_q}) \neq \emptyset \neq K \cap C_q$ , entonces  $q \in K$ , por lo que  $K \neq \{e\}$  para toda  $e \in NC^*(X)$  (Teorema 2.33 (2)).

De manera que como  $K \in NC^*(X)$ , por el Teorema 2.33 (3), tenemos que  $K = X \setminus C$  donde  $C$  es la componente de  $X \setminus \{y\}$  para alguna  $y \in X \setminus E(X)$  y dado que  $a \notin K$  y  $q \in K$ , tenemos que  $y \neq a$ , el punto  $y$  separa a los puntos  $a$  y  $q$ , por tanto,  $y \in aq \setminus \{a\}$ . Como  $a \notin K$ , entonces  $K = X \setminus A_y = B_y$ . Si  $y \in ap$ , por la Observación 4.38 (d),  $B_p \setminus \{p\} \subset B_y \setminus \{y\} \subset B_y$ . Por lo que, para  $y \in ap$   $B_y \not\subset B_p \setminus \{p\}$ , entonces  $B_y \notin \mathcal{U}$ . De manera que  $K = B_y$  para alguna  $y \in pq \setminus \{p\}$ . Por lo tanto,  $K \in \mathcal{B}$ .

$\supseteq$ ) Sea  $B_x \in \mathcal{B}$ . Como  $x \in pq \setminus \{q\}$ . Por la Observación 4.38 (c) y la Observación 4.39, tenemos que  $B_x \subset B_p \setminus \{p\}$ ,  $B_q \setminus \overline{C_q} \subset B_x$  y  $C_q \subset B_x$ . Concluimos que  $B_x \in \langle B_p \setminus \{p\}, B_q \setminus \overline{C_q}, C_q \rangle = \mathcal{U}$  y como  $\mathcal{B} \subset NC^*(X)$ , tenemos que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U} \cap NC^*(X)$ .

Por tanto,  $\mathcal{U} \cap NC^*(X) = \mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}$  es abierto en  $NC^*(X)$ . □

**Lema 4.41.**  $\mathcal{B}$  es cerrado en  $NC^*(X)$ .

*Demostración.*

Sea  $B \in \overline{\mathcal{B}}$ , entonces  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{x_n}$  donde  $\{B_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de puntos en  $\mathcal{B}$ . Como para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in pq \setminus \{p\}$ , podemos suponer que  $x_n \rightarrow x_0 \in pq$ . De manera que  $x_0 \in B \cap pq$ . Por la Observación 4.39 para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_p \cap B_{x_n} = \emptyset$  y como  $A_p$  es abierto en  $X$ , tenemos que  $A_p \cap B = \emptyset$ .

Hemos probado que si  $B \in \overline{\mathcal{B}}$ , entonces  $x_0 \in B \cap pq$  y  $A_p \cap B = \emptyset$ , de manera que  $B \neq \{e\}$  para toda  $e \in E(X)$  y  $B \neq X$ . Si  $B \in NC^*(X)$ , entonces por el Teorema 2.33 (3),  $B = X \setminus C$  donde  $C$  es la componente de  $X \setminus \{y\}$  para alguna  $y \in X \setminus E(X)$ . Si  $y = a$ , entonces  $a \in X \setminus C$  para toda componente de  $X \setminus \{a\}$  y dado que  $a \notin B$ , concluimos que  $y \neq a$ .

Sabemos además, que  $y$  separa al punto  $a$  del punto  $x_0$ , ya que si  $x_0 \in A_y$ , tenemos que  $x_0 \notin B$ ; lo cual es una contradicción. Por tanto, tenemos que  $y \in ax_0 \setminus \{a, x_0\}$ .

Veamos que  $y \in px_0 \setminus \{p\}$ .

Por la Observación 4.39, tenemos que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_p \cap B_{x_n} = \emptyset$  y, por tanto,  $C_p \cap B = \emptyset$ . Supongamos por el contrario, que  $y \in ap \setminus \{a\}$ . Como  $C_p \subset B_p$  y por la Observación 4.38 (b), tenemos que  $B_p \subset B_y$ , si  $B = X \setminus A_y = B_y$ , entonces  $C_p \subset B$ ; lo cual es una contradicción, por tanto,  $y \in px_0 \setminus \{p\} \subset pq \setminus \{p\}$  y  $B = B_y \in \mathcal{B}$ .

Hemos probado que si  $B \in \overline{\mathcal{B}} \cap NC^*(X)$ , entonces  $B \in \mathcal{B}$  y como  $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}} \cap NC^*(X)$ , por tanto,  $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap NC^*(X)$  y  $\mathcal{B}$  es cerrado en  $NC^*(X)$ .  $\square$

**Lema 4.42.** *Sean  $X$  una dendrita,  $p \in X$  tal que  $ord_X(p) = k$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $U$  es un abierto en  $X$  tal que  $p \in U$ , entonces existe un conjunto  $F$  de puntos,  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  tal que  $F$  separa al punto  $p$  y al conjunto  $X \setminus U$ .*

*Demostración.*

Sea  $p \in X$  tal que  $ord_X(p) = k$  con  $k \in \mathbb{N}$  y  $U$  un abierto de  $X$  tal que  $p \in U$ . De la Definición 4.4 de orden, tenemos que existe  $V$  abierto tal que  $p \in V \subseteq U$  y  $|Fr(V)| = k$ . Consideremos  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} = Fr(V)$ . Como  $X \setminus F = \bigcup_{V \in \mathcal{V}|_{ext(V)}} V$  y dado que  $p \in V$  y  $X \setminus U \subset ext(V)$ , concluimos que  $F$  separa a  $p$  y a  $X \setminus U$ .  $\square$

**Proposición 4.43.** *Sea  $X$  es una dendrita que cumple que  $\overline{E(X)} = X$ . Entonces  $NC^*(X)$  es 0-dimensional.*

*Demostración.*

Sea  $\mathcal{U} = NC^*(X) \setminus (\{X\} \cup F_1(X))$ .

**Observación 1.**

- (1)  $\mathcal{U}$  es abierto en  $NC^*(X)$ ;
- (2)  $F_1(X) \cap NC^*(X) = F_1(E(X)) \approx E(X)$  es 0-dimensional.

(1) Como los únicos elementos unitarios en  $NC^*(X)$  son de la forma  $A = \{e\}$  con  $e \in E(X)$  (Teorema 2.33), tenemos que las sucesiones de unitarios que convergen en el espacio métrico  $NC^*(X)$  son solo aquellas que convergen a unitarios de esta forma. Por lo tanto,  $F_1(X)$  es cerrado en  $NC^*(X)$  y dado que  $\{X\}$  es cerrado en  $NC^*(X)$ , entonces  $\mathcal{U}$  es abierto en  $NC^*(X)$ .

#### 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO131

(2) Del Teorema 2.33, tenemos que los únicos elementos unitarios en  $NC^*(X)$  son de la forma  $A = \{e\}$  con  $e \in E(X)$ . Entonces  $F_1(X) \cap NC^*(X) = F_1(E(X))$  y dado que  $F_1(E(X)) \approx E(X)$ , tenemos que  $\dim(F_1(E(X))) = \dim(E(X))$ .

Veamos que  $E(X)$  es 0-dimensional en  $X$ . Sea  $e \in E(X)$ , entonces  $e$  tiene una base de vecindades  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  tal que  $e \in V_n$  y  $|Fr(V_n)| = 1$ . Sea  $\{p_n\} = Fr(V_n)$ , entonces  $X \setminus \{p_n\} = V_n|_{ext(V_n)}$  y por el Teorema 2.33, tenemos que  $p_n \notin E(X)$ . Por lo que,  $\{V_n \cap E(X) : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de vecindades de  $\{e\}$  en  $E(X)$  tal que  $Fr_{E(X)}(V_n \cap E(X)) = \emptyset$ . Entonces  $e$  tiene una base de vecindades en  $E(X)$  con frontera vacía. Como esto ocurre para todo  $e \in E(X)$ , entonces  $\dim(E(X)) = 0$ . Por tanto,  $\dim(F_1(E(X))) = 0$ .

De la Observación 1 y el Corolario 4.37, tenemos que es suficiente probar que  $NC^*(X)$  es 0-dimensional en cada punto de  $\mathcal{U}$ .

Sea  $Y \in \mathcal{U}$ , entonces por el Teorema 2.33 (3),  $Y = X \setminus C$  donde  $C$  es una componente de  $X \setminus \{y\}$  y  $y \notin E(X)$ . Como  $C \cup \{y\}$  es una dendrita no degenerada por el Teorema 2.22,  $\overline{C} = C \cup \{y\}$  tiene al menos dos puntos de no corte, de manera que por el Teorema 2.24,  $e \in \overline{C}$  si y sólo si  $e \in E(C)$  y  $Fr(C) = \{y\}$ . Por lo que, existe un punto  $a \in E(X) \cap (C \setminus \{y\})$ . De igual manera, existe un punto  $b \in E(X) \cap (X \setminus (C \setminus \{y\}))$ .

Como  $y$  separa a los puntos  $a$  y  $b$ , entonces  $p \in ab \setminus \{a, b\}$  y usando las definiciones de los conjuntos  $A_p$  y  $B_p$ , tenemos que  $C = A_p$  y  $X \setminus C = X \setminus A_p = B_p$ . Como  $\overline{E(X)} = X$  y por el Teorema 4.17, tenemos que existen  $q \in (ap \setminus \{a, p\}) \cap R(X)$  y  $r \in (pb \setminus \{p, b\}) \cap R(X)$ .

A continuación, definiremos una sucesión numerable  $\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de abiertos y cerrados en  $NC^*(X)$  con  $Y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ , y además,  $\lim \text{diam}_H(\mathcal{B}_n) = 0$ . Para probar que  $Y$  es un punto de dimensionalidad cero en  $NC^*(X)$ . Como  $p \in X \setminus E(X)$ , tenemos los siguientes dos casos:

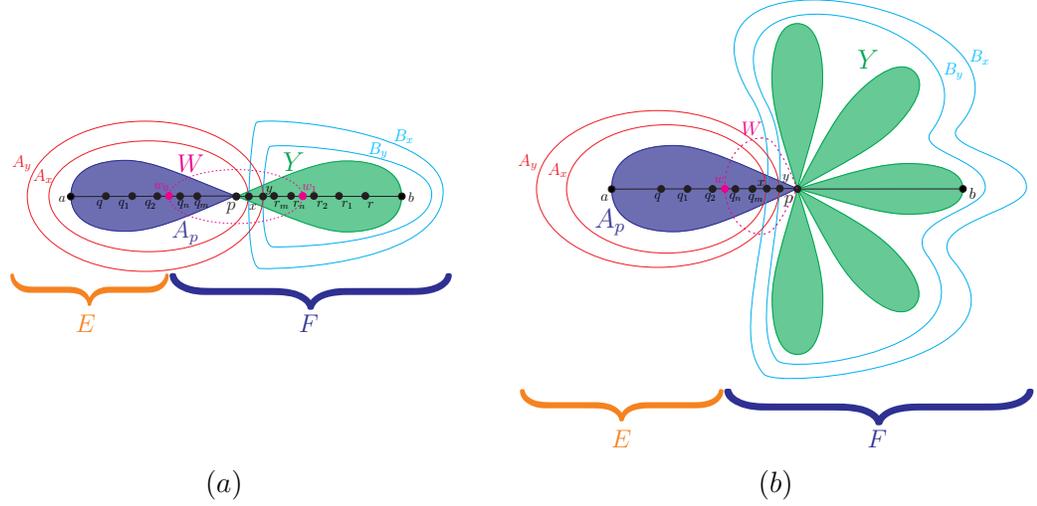


Figura 4.4: Sucesiones  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Caso I.**  $p \in O(X)$ .

Sea  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $(qp \setminus \{q, p\}) \cap R(X)$  con  $q_{n+1} \in q_n p$  y  $\lim q_n = p$  (Ver Figura 4.4 (a)). También, sea  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $(pr \setminus \{p, r\}) \cap R(X)$  con  $r_{n+1} \in pr_n$  y  $\lim r_n = p$  (Ver Figura 4.4 (a)). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$\mathcal{B}_n = \{B_x : x \in q_n r_n \setminus \{q_n\}\}.$$

Como  $p \in q_n r_n \setminus \{q_n\}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $Y = B_p \in \mathcal{B}_n$ .

Veamos que  $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $B_x \in \mathcal{B}_{n+1}$ . Como  $B_x \in \mathcal{B}_{n+1}$ ,  $x \in q_{n+1} r_{n+1} \setminus \{q_{n+1}\}$  y del hecho que  $q_{n+1} \in q_n p$  y  $r_{n+1} \in pr_n$ , tenemos que  $x \in q_n r_n \setminus \{q_n\}$ , y por tanto,  $B_x \in \mathcal{B}_n$ .

Por los Lemas 4.40 y 4.41, sabemos que  $\mathcal{B}_n$  es abierto y cerrado en  $NC^*(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces para probar que  $\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base local, veamos lo siguiente:

**Afirmación 1.** Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{diam}(\mathcal{B}_m) \leq \varepsilon$ .

Por el Lema 4.42 y que  $\text{ord}_X(p) = 2$ , existen  $w_0 \in A_p$  y  $w_1 \in Y \setminus \{p\}$  (Ver Figura 4.4 (a)) tal que si  $W$  es la componente de  $X \setminus \{w_0, w_1\}$  que tiene a  $p$ ,

#### 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO133

entonces  $W \subset B_\rho(p, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \{a, b\}$ .

Veamos que  $w_0 \in ap$  y que  $w_1 \in pb$ . Supongamos por el contrario que,  $w_0 \notin ap$ . Como  $ap \subset \overline{A_p}$ , entonces  $ap \subset X \setminus \{w_0, w_1\}$ , de donde  $ap \subset W$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $w_0 \in ap$ . Para la otra afirmación, de igual manera supongamos que,  $w_1 \notin pb$ . Como  $pb \subset Y$ , entonces  $pb \subset X \setminus \{w_0, w_1\}$ , de donde  $pb \subset W$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $w_1 \in pb$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $q_m, r_m \in W$ . Veamos que esta  $m$  satisface la Afirmación. Dado que  $q_m \in qp \setminus \{q, p\}$  y  $w_0 \in ap$  tenemos que  $q_m \in w_0p$ . De igual manera,  $r_m \in pw_1$ .

Tomemos dos puntos  $x, y \in q_m r_m \setminus \{q_m\}$  (Ver Figura 4.4 (a)). Sin pérdida de generalidad podemos suponer, que  $y \in xr_m$ . Dado el orden natural del arco  $ab$  con  $a < b$ , tenemos que  $q_m < x < y < r_m < w_1$ , de donde  $x, y \in W$ . Por la Observación 4.38 (b), tenemos que  $B_y \subseteq B_x$ .

Veamos que  $B_x \subseteq B_y \cup W$  (Ver Figura 4.4 (a)). Supongamos por el contrario que,  $B_x \not\subseteq B_y \cup W$ . Entonces existe  $z \in B_x$  tal que  $z \notin B_y$  y  $z \notin W$ . Como  $w_0 \in ap$ ,  $q_m \in w_0p$  y  $y \in xr_m$ , tenemos que  $a < w_0 < q_m < x < y < r_m$ . De donde  $w_0 \in ax$  y por el Teorema 4.19, tenemos que  $w_0$  separa al punto  $a$  del punto  $x$ . Entonces  $X \setminus \{w_0\} = {}^E|_F$  donde  $a \in E$  y  $x \in F$ .

Ahora bien, dado que  $B_x$  es conexo,  $w_0 \notin B_x$  y  $x \in B_x \cap F$ , tenemos que  $B_x \subset F$ . De donde  $z \notin E$  y  $z \neq w_0$ . Por otro lado, como  $z \notin B_y$ , entonces  $z \in A_y$ . Por lo que, el arco  $az \subset A_y$ . Si  $az \cap W \neq \emptyset$ , como  $a, z \notin W$  y  $az$  es un arco, se tiene que  $|az \cap Fr(W)| \geq 2$  y dado que  $w_1 \notin A_y$ , entonces  $az \cap Fr(W) \subseteq \{w_0\}$ ; lo cual es una contradicción. Por lo que,  $az \cap W = \emptyset$ . Como  $a, x \in A_x \cup \{x\}$ , entonces  $ax \subseteq A_x \cup \{x\}$ . De igual manera como  $x, z \in B_x$ , tenemos que  $xz \subseteq B_x$ . Entonces por la unicidad del arco en dendritas (Lema 2.10), tenemos que  $x \in az \cap W$ ; lo cual es una contradicción. La contradicción vino de suponer que  $B_x \not\subseteq B_y \cup W$ , por lo tanto  $B_x \subseteq B_y \cup W$ .

De lo anterior, tenemos que  $B_y \subseteq B_x \subseteq B_y \cup W$ . De donde,  $H(B_x, B_y) \leq \text{diam}(W) < \varepsilon$ . Esto prueba la Afirmación 1.

Ahora bien, sean  $\varepsilon > 0$  y  $B_H(Y, \varepsilon)$ , por la Afirmación 1, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{diam}(\mathcal{B}_n) < \varepsilon$ . Como  $Y \in \mathcal{B}_n$ , entonces  $\mathcal{B}_n \subseteq B_H(Y, \varepsilon)$ . Entonces  $\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de abiertos y cerrados en  $NC^*(X)$  que tienen a  $Y$ . Por lo

tanto, en este caso  $NC^*(X)$  es 0-dimensional en  $Y$ .

**Caso II.**  $p \in R(X)$ .

Sea  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión en  $(qp \setminus \{q, p\}) \cap R(X)$  con  $q_{n+1} \in q_n p$  y  $\lim q_n = p$  (Ver Figura 4.4 (b)). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$\mathcal{B}_n = \{B_x : x \in q_n p \setminus \{q_n\}\}.$$

Como  $p \in q_n p \setminus \{q_n\}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $Y = B_p \in \mathcal{B}_n$ .

Veamos que  $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $B_x \in \mathcal{B}_{n+1}$ . Como  $B_x \in \mathcal{B}_{n+1}$ ,  $x \in q_{n+1} p \setminus \{q_{n+1}\}$  y del hecho que  $q_{n+1} \in q_n p$ , tenemos que  $x \in q_n p \setminus \{q_n\}$ , y por tanto,  $B_x \in \mathcal{B}_n$ .

Por los Lemas 4.40 y 4.41, sabemos que  $\mathcal{B}_n$  es abierto y cerrado en  $NC^*(X)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces para probar que  $\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base local, veamos lo siguiente:

**Afirmación 2.** Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{diam}(\mathcal{B}_m) \leq \varepsilon$ .

Dado que  $\overline{A_p}$  es una dendrita y que  $A_p = \overline{A_p} \setminus \{p\}$  es conexo, se tiene que  $\text{ord}_{\overline{A_p}}(p) = 1$  y por el Lema 4.42, existe  $w \in \overline{A_p} \setminus \{p\}$  tal que si  $W$  es la componente de  $\overline{A_p} \setminus \{w\}$  que tiene a  $p$ , entonces  $W \subseteq B_\rho(p, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \{a\}$ .

Veamos que  $w \in ap$ . Supongamos por el contrario que,  $w \notin ap$ . Como  $ap \subset \overline{A_p}$ , entonces  $ap \subset \overline{A_p} \setminus \{w\}$ , de donde  $ap \subset W$ ; lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $w \in ap$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $q_m \in W$ . Veamos que esta  $m$  satisface la Afirmación. Dado que  $q_m \in qp \setminus \{q, p\}$  y  $w \in ap$  tenemos que  $q_m \in wp$ .

Tomemos dos puntos  $x, y \in q_m p \setminus \{q_m\}$  (Ver Figura 4.4 (b)). Sin pérdida de generalidad podemos suponer, que  $y \in xp$ . Dado el orden natural del arco  $ab$  con  $a < b$ , tenemos que  $x < y < p$ . Por la Observación 4.38 (b), tenemos que  $B_y \subseteq B_x$ .

Veamos que  $B_x \subseteq B_y \cup W$  (Ver Figura 4.4 (b)). Supongamos por el contrario que,  $B_x \not\subseteq B_y \cup W$ . Entonces existe  $z \in B_x$  tal que  $z \notin B_y$  y  $z \notin W$ . Como  $w \in ap$  y  $q_m \in wp$ ,  $y \in xp$ , tenemos que  $a < w < q_m < x < y < p$ . De donde,  $w \in ax$  y por el Teorema 4.19, tenemos que  $w$  separa al punto  $a$  del punto  $x$ . Entonces  $X \setminus \{w\} = {}^E|_F$  donde  $a \in E$  y  $x \in F$ .

Ahora bien, dado que  $B_x$  es conexo,  $w \notin B_x$  y  $p \in B_x \cap F$ , tenemos que  $B_x \subset F$ . De donde  $z \notin E$  y  $z \neq w$ . Por otro lado, como  $z \notin B_y$  y  $Y \subset \overline{B_y}$ , tenemos que  $z \notin Y$ . Entonces  $a, z \in A_p$ , así que  $az \subset A_p$ . En la dendrita  $\overline{A_p}$ , tenemos un arco  $az$  y un abierto  $W$  tal que  $|Fr_{\overline{A_p}}(W)| = 1$  y  $a, z \notin W$ . Por lo que,  $az \cap W = \emptyset$ . Como  $a, x \in A_x \cup \{x\}$ , entonces  $ax \subseteq A_x \cup \{x\}$ . De igual manera como  $x, z \in B_x$ , tenemos que  $xz \subseteq B_x$ . Entonces por la unicidad del arco (Lema 2.10), tenemos que  $x \in az \cap W$ ; lo cual es una contradicción. La contradicción vino de suponer que  $B_x \not\subseteq B_y \cup W$ , por lo tanto  $B_x \subseteq B_y \cup W$ .

De lo anterior, tenemos que  $B_y \subseteq B_x \subseteq B_y \cup W$ . De donde,  $H(B_x, B_y) \leq \text{diam}(W) < \varepsilon$ . Esto prueba la Afirmación 2.

Ahora bien, sean  $\varepsilon > 0$  y  $B_H(Y, \varepsilon)$ , por la Afirmación 2, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{diam}(\mathcal{B}_n) < \varepsilon$ . Como  $Y \in \mathcal{B}_n$ , entonces  $\mathcal{B}_n \subseteq B_H(Y, \varepsilon)$ . Entonces  $\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de abiertos y cerrados en  $NC^*(X)$  que tienen a  $Y$ . Por lo tanto, en este caso  $NC^*(X)$  es 0-dimensional en  $Y$ . Esto termina la prueba de la Proposición. □

Con los teoremas que hemos mostrado estamos listos para probar el teorema central de esta sección.

**Teorema 4.44.** *Si  $X$  es un dendrita y  $\overline{E(X)} = X$ , entonces  $NC^*(X) \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .*

*Demostración.*

De acuerdo a la caracterización de Alexandroff-Urysohn de los números irracionales (Teorema 4.14), tenemos que probar tres cosas sobre  $NC^*(X)$ : que es Polaco, que es 0-dimensional y que es localmente compacto en ninguna parte. Las dos primeras propiedades se probaron en las proposiciones 4.34 y 4.43. Así que nos queda probar que  $NC^*(X)$  no es localmente compacto en ninguna parte.

Sea  $Y \in NC^*(X)$ . Por el Teorema 2.33, tenemos los siguientes tres casos:

**Caso 1.**  $Y = \{e\}$  con  $e \in E(X)$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , consideremos  $B_H(\varepsilon, \{e\})$ . Veamos que  $\overline{B_H(\varepsilon, \{e\})}$  no es compacto.

Consideremos  $U$  un abierto de  $X$  tal que  $e \in U$  y  $\text{diam}(U) < 2\varepsilon$ . Como  $R(X)$  es denso en  $X$ , tenemos que existe  $t \in R(X)$  tal que  $t \neq e$  y  $t \in U$ . Consideremos una sucesión de puntos terminales  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  en  $U$  que convergen a  $t$ . Como para toda  $k \in \mathbb{N}$   $e_k \in U$ , tenemos que  $H(\{e\}, \{e_k\}) < \varepsilon$  y, por tanto,  $\{e_k\} \in B_H(\varepsilon, \{e\})$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Por (1) Teorema 2.33, se tiene que para toda  $k \in \mathbb{N}$   $\{e_k\} \in NC^*(X)$ . Por lo que  $\{e_k\} \in NC^*(X) \cap B_H(\varepsilon, \{e\})$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Del hecho que  $e_k \rightarrow t$ , tenemos que  $\{e_k\} \rightarrow \{t\}$  y dado que  $\{t\} \notin NC^*(X)$ , podemos concluir que en este caso  $NC^*(X)$  no es localmente compacto en  $Y$ .

**Caso 2.**  $Y = X \setminus C$  donde  $C$  es una componente de  $X \setminus \{y\}$  con  $y \in X \setminus E(X)$ .

Al igual que en el Teorema 4.43 sabemos que existe  $a \in E(X) \cap C$  y  $b \in E(X) \cap Y \setminus \{y\}$ . Entonces tenemos que  $y \in \{a, b\}$ ,  $C = A_y$  y  $Y = X \setminus A_y = B_y$ . Como  $\overline{R(X) \cap ab} = ab$  ( $\overline{E(X)} = X$  y Teorema 4.17), para toda  $\varepsilon > 0$  existen  $p \in R(X) \cap B(\varepsilon, y) \cap ay$  y  $q \in R(X) \cap B(\varepsilon, y) \cap yb$ . Sea  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de puntos de  $R(X) \cap B(\varepsilon, y) \cap ay$  tal que  $p_{n+1} \in p_n p \setminus \{p_n, p\}$  y  $p_n \rightarrow p$ .

Como  $p \in R(X)$ , existe una componente  $C_p$  de  $X \setminus \{p\}$  tal que  $\{a, b\} \cap C_p = \emptyset$ . Por la Observación 4.39, tenemos que  $C_p \subset B_p$  y  $C_p \cap B_{p_n} = \emptyset$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  (Ver Figura 4.5), de manera que suponiendo que  $B_{p_n} \rightarrow B$ , tenemos que  $C_p \cap B = \emptyset$  y, por tanto,  $B \neq B_p$ .

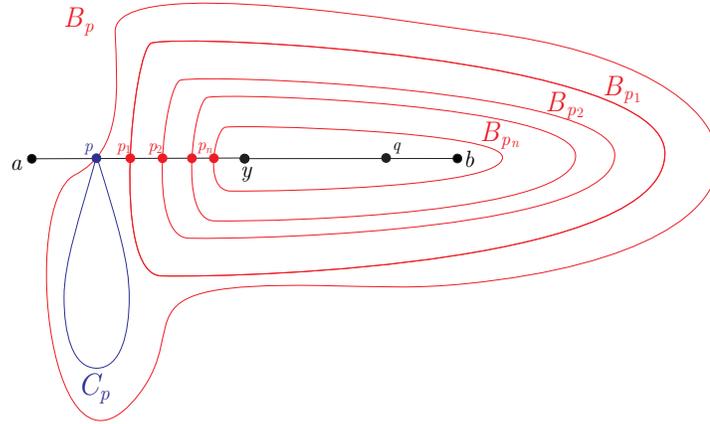


Figura 4.5: Sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  y componente  $C_p$ .

## 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO137

Como  $B_{p_n} \in \mathcal{B} = \{B_x : x \in pq \setminus \{p\}\}$  y por el Lema 4.41,  $\mathcal{B}$  es cerrado en  $NC^*(X)$ , tenemos que  $B \notin NC^*(X)$ , por lo que  $B \in B_H(\varepsilon, B_y) \setminus NC^*(X)$  y  $B_H(\varepsilon, B_y)$  no es compacta. Por tanto,  $NC^*(X)$  no es localmente compacto en  $Y = B_y$ .

**Caso 3.**  $Y = X$ .

Sea  $e \in E(X)$ . Como  $R(X)$  es denso en  $X$ , tenemos que existe  $p \in R(X)$  tal que  $p \neq e$  y  $p \in U$ . Consideremos el arco  $pe$  en  $X$  y  $\{p_k\}_{k=1}^\infty$  una sucesión de puntos ordinarios contenida en  $pe$  tales que  $p_{k+1} \in p_k e$  para toda  $k \in \mathbb{N}$  y  $p_k \rightarrow e$ . Como para toda  $k \in \mathbb{N}$ ,  $ord_X(p_k) = 2$ , tenemos que  $X \setminus \{p_k\} = C_k \cup D_k$  donde  $C_k$  es la componente que contiene a  $p$  y  $\overline{C_k} = C_k \cup \{p_k\}$ .

Por (2) del Lema 4.29, tenemos que para toda  $k \in \mathbb{N}$   $C_k \subset C_{k+1}$ , de donde  $\overline{C_k} \subset \overline{C_{k+1}}$ . Entonces por (2) del Lema 4.6, concluimos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{C_k} = \overline{\bigcup\{\overline{C_k} : k \in \mathbb{N}\}}$ . Como  $e \in E(X)$ , entonces  $X \setminus \{e\}$  es conexo y por (4) del Lema 4.29,  $\bigcup\{\overline{C_n} : n \in \mathbb{N}\} = X \setminus \{e\}$  y, por tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{C_k} = X$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $H(X, \overline{C_m}) < \varepsilon$ . Ahora, como  $\overline{C_m} = X \setminus D_m$ , por el Teorema 2.33,  $\overline{C_m} \in NC^*(X)$ . De hecho,  $\overline{C_m}$  es del segundo tipo de conjuntos en el Teorema 2.33. Entonces, en el Caso 2 ya hemos probado que  $NC^*(X)$  no es localmente compacto en  $\overline{C_m}$ . Dado que  $\overline{C_m} \in B_H(\varepsilon, X)$ , se deduce que  $B_H(\varepsilon, X)$  no puede tener cerradura compacta. Por tanto, en este caso  $B_H(\varepsilon, Y)$  tampoco tiene cerradura compacta.

Por lo tanto,  $NC^*(X)$  es localmente compacto en ninguna parte. De las proposiciones 4.34 y 4.43, tenemos que  $NC^*(X)$  es Polaco y es 0-dimensional, respectivamente. Finalmente, por el Teorema 4.14, podemos concluir que  $NC^*(X) \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

□

**Definición 4.45.** [4, (4.21), (4.22), p.12] Dado un conjunto  $S \subset \{3, 4, \dots, \omega\}$  denotamos por  $D_S$  a cualquier dendrita que satisface las siguientes dos condiciones:

- (1) Si  $p \in R(X)$ , entonces  $ord_X(p) \in S$ ;
- (2) Para cualquier arco  $A \subset X$  y para cualquier  $m \in S$ , existe un punto  $p \in A$  con  $ord_X(p) = m$ .

**Observación 4.46.** Si  $S, T \subset \{3, 4, \dots, \omega\}$  y  $S \neq T$ , entonces  $D_S$  no es homeomorfo a  $D_T$ .

*Demostración.*

Sean  $S, T \subset \{3, 4, \dots, \omega\}$  tales que  $S \neq T$ . De la Definición 4.45, tenemos a las dendritas  $D_S$  y  $D_T$  con la propiedad de que si  $p \in R(D_S)$ , entonces  $ord_X(p) \in S$  y que si  $q \in R(D_T)$ , entonces  $ord_X(q) \in T$  respectivamente.

Supongamos para obtener una contradicción, que  $D_S$  es homeomorfo a  $D_T$  y sea  $f$  un homeomorfismo entre  $D_S$  y  $D_T$ . Como  $S \neq T$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer, que  $S \not\subseteq T$ , entonces existe  $m \in S$  tal que  $m \notin T$ . De la Definición 4.45, existe  $p \in R(D_S)$  tal que  $ord_{D_S}(p) = m$  y por el Lema 2.43, tenemos que  $ord_{D_T}(f(p)) = ord_{D_S}(p) = m$ , por tanto,  $f(p) \in R(D_T)$  y su orden es  $m$ ; lo cual es una contradicción ya que  $m \notin T$  y, por tanto,  $D_T$  no tiene puntos de orden  $m$ . Con lo que concluimos que,  $D_S$  no es homeomorfo a  $D_T$ . □

**Corolario 4.47.** Existe una colección de dendritas  $\{D_S : S \subset \{3, 4, \dots, \omega\}\}$  de tamaño  $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ , no homeomorfas entre sí, tales que  $NC^*(X) \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Demostración.*

De la Definición 4.45 y la Observación 4.46, tenemos que existe la familia de dendritas  $\{D_S : S \subset \{3, 4, \dots, \omega\}\}$  no homeomorfas entre sí. De (2) de la Definición 4.45 y el Teorema 4.17, tenemos que  $E(D_S)$  es denso en  $D_S$ . Al ser tantas como todos los subconjuntos de los números naturales son tantas como el cardinal del continuo. Por último, por el Teorema 4.44, tenemos que  $NC^*(X) \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . □

**Corolario 4.48.** Sea  $X$  dendrita, las siguientes son equivalentes:

- (a)  $\overline{E(X)} = X$ ;
- (b)  $NC^*(X) \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;
- (c)  $NC^*(X)$  es 0-dimensional;
- (d)  $NC^*(X)$  es totalmente desconexo.

## 4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO139

*Demostración.*

(a)  $\Rightarrow$  (b), se sigue del Teorema 4.44.

(b)  $\Rightarrow$  (c), se sigue de la definición de ser 0-dimensional.

(c)  $\Rightarrow$  (d), se sigue del Teorema 4.2.

(d)  $\Rightarrow$  (a), si  $\overline{E(X)} \neq X$ . Por (3) del Teorema 4.17, tenemos que existe un arco libre  $A \subset X$  con extremos  $p$  y  $q$ . Como para toda  $x \in pq \setminus \{p, q\}$  se tiene que  $ord_X(x) = 2$ , entonces  $X \setminus \{x\} = U_x \cup V_x$  donde  $p \in U_x$  y  $q \in V_x$ . Definimos  $\alpha : pq \setminus \{p, q\} \rightarrow NC^*(X)$  dada por  $\alpha(t) = A_x = U_x \cup \{x\}$  (Ver Figura 4.6).

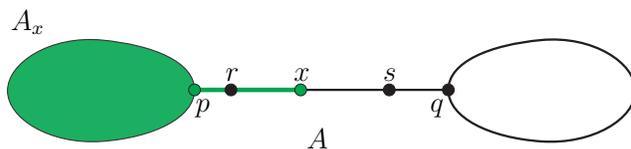


Figura 4.6: Conjunto  $A_x$ .

Consideremos  $r, s \in pq \setminus \{p, q\}$  tales que  $r < x < s$  en el orden natural del arco  $pq$  (Ver Figura 4.6) y sea  $\alpha \upharpoonright_{rs} : rs \rightarrow NC^*(X)$ .

**Afirmación 1.**  $\alpha \upharpoonright_{rs}$  es un encaje bien definido.

Primero, por el Lema 2.15, tenemos que  $A_x = U_x \cup \{x\}$  es un subcontinuo de  $X$  y como  $X \setminus A_x = V_x$ , entonces  $A_x$  es elemento de  $NC^*(X)$ . De manera que,  $\alpha$  está bien definida y, por tanto,  $\alpha \upharpoonright_{rs}$  también lo está.

Sea  $X \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in M} C_i^p$  con  $M_p \subset \mathbb{N}$ ,  $|M_p| \geq 1$  y  $C_i^p$  las componentes de  $X \setminus \{p\}$ . Donde  $q \in C_j^p$  para alguna  $j \in M_p$ .

**Observación 2.** Si  $x \in rs$ , entonces  $V_x \subseteq C_j^p$ .

Sea  $x \in rs$ , como  $p \notin V_x$ , tenemos que  $V_x \subset X \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in M} C_i^p$  y dado que  $q \in V_x$ , concluimos que  $V_x \subseteq C_j^p$ .

Definimos  $C = \bigcup_{i \neq j} C_i^p \cup \{p\}$  el cual es un un conexo. Sean  $x, y$  puntos

en  $rs$  con  $x < y$  en el orden del arco  $A$ . De manera que  $A_x = C \cup px$  y  $A_y = C \cup px \cup xy$ , por lo que  $A_x \subsetneq A_y$ . Por tanto,  $\alpha \upharpoonright_{rs}$  es inyectiva.

Para ver la continuidad, sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $rs$  y  $x \in rs$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \neq x$  y  $x_n \rightarrow x$ , de donde  $A_{x_n} = C \cup px_n$  y tenemos que  $A_{x_n}$  converge a  $A_x = C \cup px$ . Por tanto,  $\alpha \upharpoonright_{rs}$  es continua.

Al ser  $rs$  un conjunto compacto con lo anterior probamos que  $\alpha \upharpoonright_{rs}$  es un encaje bien definido.

Definimos,  $J = \alpha(rs)$ . Por la Afirmación 1, tenemos que  $\alpha$  es un encaje en  $NC^*(X)$ , entonces  $J \approx [0, 1]$  y  $J \subseteq NC^*(X)$ . Con lo que concluimos que  $NC^*(X)$  no es totalmente desconexo. □

Como comentario, quiero agregar que (a)  $\Rightarrow$  (c) es la Proposición 4.43 y (a)  $\Rightarrow$  (d) es el Corolario 4.26.

Como último resultado, mostraremos una generalización en la familia de las dendritas del Teorema 2.41.

**Teorema 4.49.** *Sea  $X$  una dendrita.  $NC^*(X)$  es conexo si y sólo si  $X$  es el intervalo.*

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Por la Proposición 2.35, tenemos que  $NC^*(X) \approx X$ , por lo que  $NC^*(X)$  es conexo.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $X$  no es un intervalo. Por la Proposición 1.17,  $|R(X)| = m \geq 1$  y por los Teoremas 2.22 y 2.24,  $|E(X)| = k \geq 2$ .

Sean  $q \in R(X)$  y  $C$  una componente de  $X \setminus \{q\}$  y consideremos los conjuntos:

$$\mathcal{K} = \{A \in NC^*(X) : A \subset C\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L} = \{A \in NC^*(X) : A \cap (X \setminus \overline{C}) \neq \emptyset\}.$$

Por Lema 4.24, tenemos que  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  son una separación de  $NC^*(X)$ . Por tanto,  $NC^*(X)$  no es conexo. □

**Teorema 4.50.** *Sea  $X$  es una dendrita.  $NC^*(X)$  es compacto si y sólo si  $X$  es el intervalo.*

4.2. DENDRITAS CON CONJUNTO DE PUNTOS TERMINALES DENSO141

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ) Por la Proposición 2.35, tenemos que  $NC^*(X) \approx X$ . Por lo que  $NC^*(X)$  es compacto.

$\Rightarrow$ ) Supongamos por el contrario que  $X$  no es un intervalo y dado que  $X$  es una dendrita, no tiene curvas cerradas simples. Por la Proposición 1.17,  $X$  tiene al menos un punto de ramificación  $p$ . Consideremos  $X \setminus \{p\} = \bigcup_{i \in M} K_i$  con  $M \subset \mathbb{N}$ ,  $|M| \geq 3$  y  $K_i$  las componentes de  $X \setminus \{p\}$ . Consideremos  $K_{i_0}$  una de las componentes de  $X \setminus \{p\}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $B(\varepsilon, p)$  y  $p_0 \in B(\varepsilon, p) \cap O(X) \cap K_{i_0}$ . Consideremos el arco  $p_0p \subset K_{i_0}$  y  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de puntos ordinarios contenida en  $p_0p$  tales que  $p_{n+1} \in p_np$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_n \rightarrow p$  (Ver Figura 4.7). Como para toda  $k \in \mathbb{N}$ ,  $ord_X(p_k) = 2$ , tenemos que  $X \setminus \{p_k\} = C_k \cup D_k$  donde  $C_k$  es la componente que tiene a  $p_0$  y  $\overline{C_k} = C_k \cup \{p_k\}$  (Ver Figura 4.7). Por el Teorema 2.33 tenemos que  $\overline{C_k} \in NC^*(X)$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .

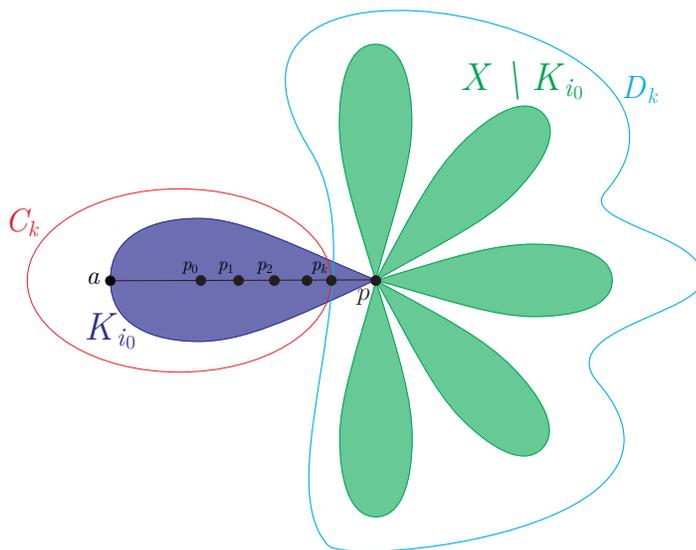


Figura 4.7: Conjuntos  $C_k$  y  $D_k$ .

Por (2) del Lema 4.29, tenemos que para toda  $k \in \mathbb{N}$   $C_k \subset C_{k+1}$ , de donde  $\overline{C_k} \subset \overline{C_{k+1}}$  y por (1) del Lema 4.6, concluimos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{C_k} = \overline{\bigcup \{C_k : k \in \mathbb{N}\}}$ . Como  $K_{i_0}$  es la componente de  $X \setminus \{p\}$  que tiene a  $p_0$  y por (3) del Lema 4.29,

tenemos que  $\bigcup\{\overline{C_k} : n \in \mathbb{N}\} = K_{i_0}$ , de donde  $\overline{\bigcup\{\overline{C_k} : n \in \mathbb{N}\}} = K_{i_0} \cup \{p\}$ . Con esto concluimos que la sucesión de  $\{C_k\}_{k=1}^\infty$  converge a  $C = K_{i_0} \cup \{p\}$ . De donde  $X \setminus K_{i_0} = \bigcup_{i \in M \setminus \{i_0\}} K_i$  con  $M \setminus \{i_0\} \subset \mathbb{N}$ ,  $|M \setminus \{i_0\}| \geq 2$  y, por tanto,  $C \notin NC^*(X)$ .

De lo anterior tenemos que la sucesión  $\{\overline{C_k}\}_{k=1}^\infty$  de elementos en  $NC^*(X)$  converge a  $C$  y  $C \notin NC^*(X)$ . Por lo tanto,  $NC^*(X)$  no es compacto.  $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 4.49 y 4.50, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 4.51.** *Sea  $X$  una dendrita, las siguientes son equivalentes:*

- (1)  $NC^*(X)$  es un continuo;
- (2)  $NC^*(X)$  es compacto;
- (3)  $NC^*(X)$  es conexo;
- (4)  $NC^*(X) \approx X$ ;
- (5)  $X \approx [0, 1]$ .

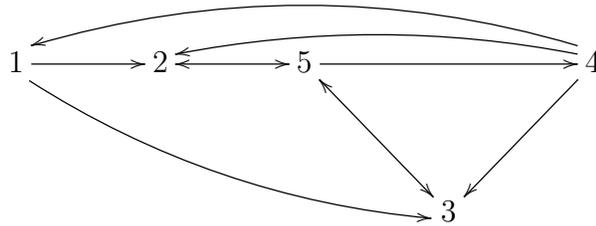
*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2), (1)  $\Rightarrow$  (3), (4)  $\Rightarrow$  (1), (4)  $\Rightarrow$  (2) y (4)  $\Rightarrow$  (3), son inmediatas de las definiciones y del hecho que  $X$  es un continuo.

(5)  $\Rightarrow$  (4), se sigue de la Proposición 2.35.

(3)  $\Leftrightarrow$  (5), se sigue del Teorema 4.49.

(2)  $\Leftrightarrow$  (5), se sigue del Teorema 4.50.



$\square$

# Bibliografía

- [1] P. Alexandroff. *Über nulldimensionale punktmengen*. Mathematische Annalen, 98(1):89–106, 1928.
- [2] J. Bobok, P. Pyrih y B. Vejnar. *Non-cut, shore non-block points in continua*. Glasnik matematički, 51(1):237–253, 2016.
- [3] J. J. Charatonik. *On ramification points in the classical sense*. Fund. Math, 51:229–252, 1962.
- [4] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y J. R. Prajs. *Mapping hierarchy for dendrites*. Polska Akad. Nauk, Inst. Matematyczny, 1994.
- [5] R. Engelking. *General topology*. Revised and completed edition, 1989.
- [6] R. Engelking. *Theory of dimensions*. Finite and Infinite, Heldermann, Lemgo, 1995.
- [7] R. Escobedo, C. Estrada-Obregón y J. Sánchez-Martínez. *On hyperspaces of non-cut sets of continua*. Topology and its Applications, 217:97–106, 2017.
- [8] R. Escobedo, S. Macías y H. Méndez, editores. *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios*. Aportaciones Mat. Textos (SMM) México, 31, 2006.
- [9] A. García-Máynez y A. T. Mascarúa. *Topología general*. Editorial Porrúa, 1988.
- [10] R. Hernández-Gutiérrez. *Dendritas*. Tesis de licenciatura, UNAM, 2007.
- [11] A. Illanes. *Hiperespacios de continuos*. Aportaciones Mat. Textos (SMM) México, 28, 2004.

- [12] A. Illanes. *Models of hyperspaces*. In *Topology Proc*, volume 41, pages 39–64, 2013.
- [13] P. Krupski y A. Samulewicz. *More absorbers in hyperspaces*. *Topology Appl.* 221:352–369, 2017.
- [14] K. Kuratowski. *Topology: Volume I*, volume 1. Elsevier, 2014.
- [15] V. Martínez-de-la Vega. *El hiperespacio de continuos con la topología producto*. Tesis de licenciatura, UNAM, 1998.
- [16] S. B. Nadler. *Dimension theory: An introduction with exercises*. Sociedad Matematica Mexicana, 2002.
- [17] S. B. Nadler Jr. *Hyperspaces of sets*. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math*, 49, 1978.
- [18] S. B. Nadler Jr. *Continuum theory: An introduction*. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 158, 1992.
- [19] N. Ordoñez. *Encajes de hiperespacios*. Tesis de licenciatura, UNAM, 2007.
- [20] G. T. Whyburn. *Analytic Topology*, volume 28. Amer. Math. Soc, 1942.
- [21] S. Willard. *General topology*. 1970.