



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE MODELOS DE ENERGÍA OSCURA USANDO  
MULTIMENSAJEROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

JOSÉ ANTONIO DE JESÚS NÁJERA QUINTANA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA RIVERA

Ciudad Universitaria, CDMX, 2022





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Dedicatoria...

Dedico esta tesis a todas las personas que me apoyaron durante estos años, a mi familia por su apoyo total, tanto económico cómo personal, por creer en mí y por poder contar con ustedes. En particular a mis padres, tía, abuela, y primos.

A mis amigos, que siempre creyeron en mi y en quiénes podía contar siempre, para asuntos tanto académicos cómo personales.

A mi directora de tesis, Dra. Celia Escamilla-Rivera, gracias a quién aprendí el proceso para llevar a cabo una investigación original y quien me apoyó para realizar una estancia de investigación en el extranjero. Gracias a sus enseñanzas agradezco que ahora tengo un paper de investigación publicado en una revista, y más en revisión y preparación.

# Agradecimientos

La investigación contenida en esta tesis se realizó gracias al apoyo del proyecto PAPIIT **IA100220** “Cosmología estadística para modelos de gravedad”, del cual la Dra. Celia Escamilla-Rivera es responsable. Se agradece al Mtro. Juan Luciano Díaz González por la ayuda en asesoría brindada sobre el cluster Tochtli ICN-UNAM, en el cuál se realizaron los cálculos numéricos de la investigación de la presente tesis. Se agradece al grupo de investigación **CosmoNag (Cosmostatistics National Group)** dirigido por la Dra. Celia Escamilla-Rivera. Se agradece a los profesores Dra. Celia Escamilla-Rivera, Dr. Miguel Alcubierre, y Dr. José Manuel Carmona por su apoyo y cartas de recomendación para programas de posgrado. Finalmente, se agradece a la UNAM-DGECI por otorgarme la beca **Iniciación a la Investigación (verano-otoño 2021)** con la cuál fue posible realizar una estancia de investigación en la Universidad de Zaragoza, y a los profesores Dr. José Manuel Carmona, Dr. José Luis Cortés, Dr. Javier Relancio, y al estudiante de doctorado Maykoll Reyes por su hospitalidad durante mi estancia de investigación en la Universidad de Zaragoza.

# Convenciones y notación

Signatura	$(-+++)$
Índices Griegos	$\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$
Índices Latinos	$i \in \{1, 2, 3\}$
Sistema de unidades	MKS(metro-kilogramo-segundo) con excepción de las distancias, $[d] = pc(\text{pársec})$
Convenio de sumas de Einstein	$a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu$ , $a_i b^i = \sum_{i=1}^3 a_i b^i$
Derivada	$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
Derivada covariante	$\nabla_\mu b^\nu = \partial_\mu b^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} b^\alpha$

# Introducción

El trabajo desarrollado en esta tesis se centra en estudiar parametrizaciones de energía oscura empleando los recientes catálogos ondas gravitacionales de LIGO-Virgo, el GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] (las ondas gravitacionales reportadas en dichos catálogos incluyen detección de la primera y segunda corridas observacionales de LIGO-Virgo) para así mejorar las constricciones en los parámetros cosmológicos del modelo en cuestión y para desarrollar un método independiente a las supernovas o relojes cósmicos que permita estudiar modelos cosmológicos.

Lo anterior permite trabajar uno de los desafíos más importantes de la cosmología de precisión, el cuál es entender la naturaleza de la energía oscura, la componente a la cuál le asociamos la expansión acelerada tardía del universo. El modelo estandar de la cosmología de llama  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  por la constante cosmológica y CDM de sus siglas en ingles “*cold dark matter*”, materia oscura fría) y en él se considera que la expansión acelerada del universo es debida a un fluido de presión negativa con densidad constante, además de que el universo contiene materia oscura, la cuál no se conoce su naturaleza precisa y se supone que sólo interactúa gravitacionalmente con la materia bariónica. A pesar de ser el modelo más óptimo que se ajusta a las observaciones recientes,  $\Lambda$ CDM tiene diversos problemas, por lo que alternativas deben considerarse. Existen dos principales caminos para estas extensiones. El primero es conservar la teoría de la Relatividad General y modificar el tensor de energía-momento del fluido en el universo, lo cuál se realiza modificando la parte derecha de las ecuaciones de Einstein. El segundo camino es el llamado teorías extendidas y alternativas a la gravedad en las cuáles se modifica la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein y por ende la expansión acelerada del universo puede explicarse debido cambios en la geometría.

Ambos caminos se pueden explorar de forma sencilla a nivel fenomenológico, mediante la dinámica de una ecuación de estado (el cociente entre la presión y la densidad) de la energía oscura en el primer caso, además de que este es el camino que se tomará en la presente tesis. El modelo estándar  $\Lambda$ CDM asume una ecuación de estado constante  $w = -1$ , por lo que alternativas pueden tomarse como funciones del corrimiento al rojo cosmológico  $z$ . Es estándar en la literatura considerar parametrizaciones de la ecuación de estado que dependan del corrimiento al rojo  $z$ , las cuales puedan reproducir así mismo modelos como LCDM ( $w=-1$ ). Una manera simple de realizar dichas aproximaciones es a través de series de Taylor en  $z^1$  la cual nos permite explorar la dinámica de la energía oscura modelada

---

<sup>1</sup>Existen en la literatura otras maneras como polinimos de tipo Padé [3] o Chebyshev [4]

a través de esta parametrización en  $z$  altos. Otras formas de tomar estas ecuaciones de estado dinámicas, algunas de estas son parametrizaciones bidimensionales [5], evolución de la ecuación de estado con un campo escalar [6], ecuaciones de estado obtenidas de teorías  $f(R)$  (las cuáles se obtienen reemplazando el Lagrangiano de Einstein-Hilbert del escalar de Ricci a una función del escalar de Ricci) [7, 8, 9], dobles potenciales exponenciales para la expansión acelerada tardía [10], energía oscura interactuante [11], aproximaciones Padé de energía oscura [3], y cosmografía inversa de energía oscura [12, 4].

En la presente tesis se abordará una actualización del estudio de parametrizaciones de energía oscura empleando los recientes catálogos de ondas gravitacionales para mejorar la restricción en sus parámetros cosmológicos. Uno de los principales problemas que se ha presentado en estos estudios reportados en la literatura es el hecho de que aunque la detección de ondas gravitacionales permita conocer de forma directa la distancia a sus fuentes, el corrimiento al rojo a ellas no es fácil de medir, con lo cuál la determinación de la función de distancia sirena (distancia a fuentes de ondas gravitacionales) en función del corrimiento al rojo  $D_S(z)$  sea complicada de deducir. Una forma de medir el corrimiento al rojo a una sirena estándar (fuente de ondas gravitacionales) es detectando una contraparte electromagnética y en función de ella realizar una medición del corrimiento al rojo independiente del modelo, sin embargo este método no permite conocer el corrimiento al rojo con la mayoría de eventos, pues la mayoría son agujeros negros sin ningún tipo de radiación electromagnética detectable. Una forma alternativa es mediante la identificación de la galaxia en la cuál la onda gravitacional se encuentra y el corrimiento al rojo se determine empleando el de esta galaxia.

Cómo se puede ver, los métodos anteriormente descritos requieren fuertemente el uso de alguna contraparte electromagnética, entonces estos métodos están sujetos a detectar radiación electromagnética, lo cuál podría no ser posible hacer con los detectores de ondas gravitacionales de tercera generación o al menos no con todos o la mayoría de eventos, actualmente en planeación, pues estos podrán realizar detecciones de sirenas estándar hasta aproximadamente  $z = 20$ , un corrimiento al rojo en el cuál detectar contrapartes electromagnéticas podría resultar imposible debido a que en esos corrimientos al rojos aún no se ha detectado radiación electromagnética. En la presente tesis se usará el método de las sirenas estándar pero igualmente un método que no depende de una medición independiente del corrimiento al rojo propuesto por primera vez en [13] en el cuál se calcula la probabilidad posterior de los parámetros cosmológicos en términos de la probabilidad likelihood, probabilidad prior de las distancias y la probabilidad prior del corrimiento al rojo, la cuál se calcula mediante las tasas de fusión de binarias compactas y la eficiencia de los detectores de ondas gravitacionales. Este método entonces permite realizar cosmología de precisión con detecciones de ondas gravitacionales sin necesidad de contrapartes electromagnéticas (sirenas oscuras).

La presente tesis se encuentra dividida en los siguientes capítulos: en el Capítulo 1 se desarrollará la relatividad general junto con las herramientas teóricas necesarias para el resto de la tesis. En el Capítulo 2 se dará una introducción a la cosmología estándar y se desarrollarán las parametrizaciones bidimensionales a usarse. En el Capítulo 3 se hará un

completo análisis de las ondas gravitacionales, desde la teoría, la forma en que se detectan, y la forma en que se mide la distancia a una onda gravitacional. En el Capítulo 4 se realizará el estudio de las parametrizaciones bidimensionales de energía oscura introducidas en el Capítulo 2 empleando las detecciones actuales de ondas gravitacionales. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentarán las conclusiones generales y un resumen del futuro de la cosmología empleando datos de ondas gravitacionales.



## Lista de publicaciones

La presente tesis está basada en el siguiente artículo de investigación

- C. Escamilla-Rivera and A. Nájera, “Dynamical dark energy models in the light of Gravitational-Wave Transient Catalogues,” *JCAP* **03** (2022) 060, doi:10.1088/1475-7516/2022/03/060 [arXiv:2103.02097 [gr-qc]].

Otros trabajos del autor

- A. Nájera and A. Fajardo, “Fitting  $f(Q, T)$  gravity models with a  $\Lambda$ CDM limit using  $H(z)$  and Pantheon data,” *Phys. Dark Univ.* **34**, 100889 (2021), doi:10.1016/j.dark.2021.100889, [arXiv:2104.14065 [gr-qc]].
- A. Nájera and A. Fajardo, “Cosmological perturbation theory in  $f(Q, T)$  gravity,” *JCAP* **03** (2022) 020, doi:10.1088/1475-7516/2022/03/020 [arXiv:2111.04205 [gr-qc]].
- Tracker solutions in the light of early cosmic measurements. En preparación. Posibles autores: A. Nájera y C. Escamilla-Rivera.
- Lorentz-Invariance violation effects in the propagation of cosmogenic neutrinos. En preparación. Posibles autores: J.M. Carmona, J.L. Cortés, J.J. Relancio, M.A. Reyes y A. Nájera.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Convenciones y notación</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1 Relatividad general</b>	<b>1</b>
1.1 Relatividad General . . . . .	1
1.2 Fundamentos de la Relatividad General . . . . .	2
1.2.1 Formulación matemática del principio de equivalencia . . . . .	2
1.2.2 La métrica . . . . .	4
1.2.3 Derivadas no triviales de los vectores base . . . . .	4
1.2.4 Transporte paralelo y tensor de Riemann . . . . .	7
1.3 Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	11
1.4 Límite Newtoniano . . . . .	14
1.5 Gravedad linealizada . . . . .	17
1.6 Pruebas de la Relatividad General . . . . .	19
1.6.1 Principio de Equivalencia Débil . . . . .	19
1.6.2 La prueba de Eddington . . . . .	19
1.6.3 Ondas gravitacionales . . . . .	20
<b>2 Cosmología estándar</b>	<b>21</b>
2.1 El principio cosmológico . . . . .	24
2.2 La métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) . . . . .	24
2.3 La distancia comóvil y el tiempo conforme . . . . .	26
2.4 Las ecuaciones de Friedmann . . . . .	27
2.4.1 Símbolos de Christoffel y geodésicas . . . . .	27
2.4.2 Tensor y escalar de Ricci . . . . .	29
2.4.3 Tensor de energía-momento y ecuaciones de Friedmann . . . . .	29
2.4.4 Evolución de $\rho$ . . . . .	30
2.4.5 Parámetros de densidad . . . . .	30
2.5 Parámetros cosmológicos . . . . .	31
2.5.1 La constante de Hubble . . . . .	31
2.5.2 Parámetros de densidad actuales . . . . .	32
2.6 El modelo estándar $\Lambda$ CDM . . . . .	32
2.7 Modelos de energía oscura dinámica . . . . .	34

2.7.1	Chevallier-Polarski-Linder (CPL)	35
2.7.2	Barboza-Alcaniz (BA)	35
2.7.3	Low Correlation (LC)	35
2.8	Distancias en Cosmología	36
2.8.1	Distancia comóvil	36
2.8.2	Distancia comóvil transversa	36
2.8.3	Distancia diametral angular	37
2.8.4	Distancia luminosa	37
2.8.5	Distancia sirena	37
2.9	Teoría de perturbaciones lineales tensoriales cosmológicas	37
2.9.1	Perturbación de la métrica FLRW	38
2.9.2	La descomposición escalar-vector-tensor (SVT)	38
2.9.3	Perturbación del tensor de energía-momento	40
2.9.4	Ecuaciones de campo para las perturbaciones tensoriales	41
2.10	Observables Cosmológicas	45
2.10.1	Reglas estándar	45
2.10.2	Candelas estandarizables	46
2.10.3	Relojes cósmicos	47
2.11	Mensajeros cósmicos	48
2.11.1	Ondas gravitacionales	48
2.11.2	Rayos cósmicos	48
2.11.3	Neutrinos	48
2.11.4	Fotones	48
2.11.5	Multimensajeros	49
2.12	Análisis Bayesiano en Cosmología	49
<b>3</b>	<b>Ondas Gravitacionales</b>	<b>53</b>
3.1	Polarizaciones de las ondas gravitacionales	53
3.2	Deducción del tensor $h_{ij}^T$ de una onda gravitacional	55
3.2.1	Luminosidad de una onda gravitacional	57
3.3	Ondas gravitacionales producidas por colisiones de binarias compactas	57
3.3.1	Amplitud	58
3.3.2	Distancia sirena y dinámica	59
3.4	Distancia sirena teórica	60
3.5	Detección de ondas gravitacionales	62
3.6	Sirenas estándar	66
3.7	Sirenas oscuras	66
3.8	Catálogos de ondas gravitacionales	67
3.8.1	GWTC-1	67
3.8.2	GWTC-2	69
3.8.3	Eventos empleados para estudiar modelos de energía oscura con datos de ondas gravitacionales	70
<b>4</b>	<b>Análisis de la energía oscura empleando ondas gravitacionales</b>	<b>71</b>
4.1	Análisis Bayesiano con sirenas estándar y oscuras	71

4.1.1	Análisis Bayesiano con sirenas estándar . . . . .	72
4.1.2	Análisis Bayesiano con sirenas oscuras . . . . .	72
4.1.3	Sirenas estándar simuladas . . . . .	77
4.2	Compilaciones observacionales de reglas estándar, candelas estandarizables y relojes cósmicos . . . . .	78
4.2.1	SNeIa Pantheon . . . . .	79
4.2.2	Cronómetros cósmicos . . . . .	80
4.3	Metodología . . . . .	80
4.3.1	Análisis estadístico . . . . .	81
4.3.2	Análisis del criterio de la evidencia de Bayes . . . . .	82
4.4	Discusión de resultados . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>90</b>
<b>A</b>	<b>Elementos matemáticos de relatividad general</b>	<b>101</b>
A.1	Fundamentos matemáticos de la relatividad general . . . . .	101
A.1.1	Variedad diferencial . . . . .	101
A.1.2	Vectores . . . . .	102
A.1.3	1-formas . . . . .	104
A.1.4	Tensores . . . . .	105
A.1.5	El tensor métrico . . . . .	107
A.1.6	Derivadas en una variedad . . . . .	110
A.1.7	El principio de mínima acción . . . . .	110
A.2	Derivación de componentes tensoriales . . . . .	111
<b>B</b>	<b>Gravedad linealizada</b>	<b>114</b>
<b>C</b>	<b>GWTC-2</b>	<b>116</b>
<b>D</b>	<b>Deducciones del tensor <math>h_{ij}^T</math> para una onda gravitacional</b>	<b>118</b>
<b>E</b>	<b>Método numérico</b>	<b>120</b>
E.1	Método de Metropolis-Hastings . . . . .	121
E.2	El movimiento por tramos . . . . .	122
E.3	El tiempo de autocorrelación . . . . .	123
E.4	El martillo de MCMC . . . . .	123
E.5	Cálculo de la evidencia . . . . .	124

# Capítulo 1

## Relatividad general

### 1.1. Relatividad General

La idea de que el Universo estaba descrito por la geometría Euclidiana y por la teoría Newtoniana era aceptada por los físicos hasta finales del siglo XIX. En este tipo de universo plano, el espacio y tiempo eran dos conceptos distintos por lo cuál el tiempo fluiría de igual forma en cualquier marco de referencia y además las leyes de la física eran invariantes ante transformaciones Galileanas. Sin embargo la teoría electromagnética comenzó a poner duda a estas aseveraciones, ya que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes ante transformaciones Galileanas, pero si lo son ante transformaciones de Lorentz. Para solucionar estos problemas, Einstein postuló la teoría especial de la relatividad en [14], teoría en la cuál se tomaron los siguientes postulados [15]

1. El espacio es isotrópico, homogéneo y continuo.
2. La relatividad Galileana es válida para todo marco de referencia inercial.
3. La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todo marco de referencia inercial

Es el último postulado el que cambia por completo el entendimiento del tiempo, pues partiendo de estos tres postulados se deduce que el tiempo no es absoluto [14]. En este contexto el tiempo es una coordenada que se suma a las coordenadas espaciales, por lo cuál se tiene un *espacio-tiempo* 4-dimensional. Aún más, la teoría de la relatividad especial rompe el concepto de simultaneidad y por ello es incompatible con la ley de gravitación universal de Newton en la cuál la gravedad es una fuerza entre dos cuerpos que actúa a distancia de manera instantánea. Sin embargo aunque la relatividad especial solucionó los problemas de la invarianza de las ecuaciones de Maxwell, sólo es válida mientras la gravedad no esté presente. Es en este punto donde la Relatividad General es necesaria y para formularla es necesario de un postulado adicional: el principio de equivalencia, el cuál está en forma débil y fuerte.

El principio de equivalencia débil establece que la masa gravitacional e inercial son equivalentes, mientras que el fuerte establece que los cuerpos en caída libre no sufren efectos gravitacionales. A consecuencia de esto en caída libre las leyes de la física son las

mismas localmente que en la relatividad especial.

Empleando el principio de equivalencia, se pueden escribir las ecuaciones para un sistema suficientemente pequeño de forma que en el la gravedad no intervenga, esto es, que solo se requiere escribir las ecuaciones en una forma que sea covariante de forma general, por lo que debido a la covarianza general, las ecuaciones serán válidas en cualquier marco de referencia.

## 1.2. Fundamentos de la Relatividad General

Una vez presentado el postulado principal de la relatividad general, se presentan algunos conceptos adicionales de Relatividad General. La Relatividad General es una teoría geométrica que emplea definiciones matemáticas cómo lo son las variedades (véase el Apéndice A para una definición formal) con una métrica  $g_{\mu\nu}$  definida en ella. Intuitivamente, una variedad diferencial es un espacio topológico que para todo punto existe una vecindad que se ve cómo el espacio  $\mathbb{R}^n$ . En esta caso se considerarán variedades diferenciales de 4 dimensiones. En la presente sección se formula la Relatividad General desde un punto de visto físico, sustentado en el desarrollo formal matemático desarrollado en el apéndice A.

El capítulo continuará tratando de forma matemática el ya mencionado anteriormente principio de equivalencia.

### 1.2.1. Formulación matemática del principio de equivalencia

Debido a que en cualquier punto en ausencia de gravedad, existe un marco de referencia inercial en el cuál la gravedad no intervenga, este marco de referencia sigue la métrica de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (1.1)$$

y por consiguiente, el intervalo está dado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.2)$$

Cómo podemos ver, debido a la covarianza general, este intervalo  $ds^2$  será equivalente ante cualquier difeomorfismo. Consideremos ahora que en este marco de referencia, en el cuál la gravedad está ausente dos eventos ocurren en el mismo punto en el espacio, pero en distintos tiempos. A este marco de referencia se le denomina marco propio y cómo en el se cumple  $dx = dy = dz = 0$ , el tiempo en el marco de denomina tiempo propio  $\tau$ , por ende

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (1.3)$$

Este marco de referencia también se puede ver de modo que el origen se desplace junto con el cuerpo en estudio. Ahora aplicando la covarianza general, este intervalo será idéntico en cualquier otro sistema de coordenadas, dado que un cambio de coordenadas es un difeomorfismo. En este nuevo sistema de coordenadas la métrica será  $g_{\mu'\nu'}$ , mientras

que las coordenadas serán  $x^{\mu'}$ . Por lo que cómo el intervalo será  $ds'^2 = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$  y por la covarianza general se sigue

$$-c^2 d\tau^2 = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}, \quad (1.4)$$

regresando por un momento al marco de referencia donde la gravedad está ausente, el cuál tiene métrica  $\eta_{\mu\nu}$  y aplicando nuevamente la covarianza general se sigue que

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}, \quad (1.5)$$

y el sistema con coordenadas  $x^\mu$  se relaciona a lo de coordenadas  $x^{\mu'}$  mediante  $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'}$ . Por ende aplicando esta transformación es la ecuación (1.5)

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'} = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}, \quad (1.6)$$

entonces

$$\left( \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} - g_{\mu'\nu'} \right) dx^{\mu'} dx^{\nu'} = 0, \quad (1.7)$$

por lo tanto obtenemos la forma de transformación de la métrica

$$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}. \quad (1.8)$$

En el marco de referencia donde la gravedad está ausente, al ser un marco inercial y seguir las leyes de Newton, los cuerpos siguen líneas rectas, o bien

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0, \quad (1.9)$$

con  $\lambda = \lambda(t)$  un parámetro en función del tiempo. Mediante la ley de transformación  $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'}$  la expresión anterior se escribe cómo (ecuación A.48 del Apéndice)

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{d^2 x^{\nu'}}{d\lambda^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu'}}{d\lambda} = 0. \quad (1.10)$$

Contrayendo con  $\frac{dx^{\nu'}}{dx^\mu}$  y cambiando el índice mudo del segundo término  $\nu' \rightarrow \alpha'$

$$\frac{dx^{\nu'}}{dx^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{d^2 x^{\nu'}}{d\lambda^2} + \frac{dx^{\nu'}}{dx^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\alpha'}} \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda} \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = 0.$$

Empleando la regla de la cadena  $\frac{dx^{\nu'}}{dx^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} = \frac{dx^{\nu'}}{dx^\mu} = 1$  y también  $\frac{dx^{\nu'}}{dx^\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dx^\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \delta^\alpha_\mu$ . Por lo tanto

$$\frac{d^2 x^{\nu'}}{d\lambda^2} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\alpha'}} \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda} \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = 0. \quad (1.11)$$

Y definiendo  $\Gamma_{\mu'\alpha'}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\alpha'}}$  a los cuáles se les conoce cómo símbolos de Christoffel.

$$\frac{d^2 x^{\nu'}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu'\alpha'}^{\nu'} \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda} \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = 0, \quad (1.12)$$

la cuál se denomina ecuación de la geodésica. Cómo se puede observar en el marco de referencia inercial no existe ninguna fuerza, ahora en ese marco al que se llegó mediante una transformación de coordenadas, se observa que aparece una aceleración y por ende una fuerza distinta de 0. Por ello en general, en los marcos de referencia está presente la gravedad, pero la forma de la ecuación geodésica es válida en todo marco de referencia debido a la covarianza general.

### 1.2.2. La métrica

La métrica es la forma de medir distancias en Relatividad General. En la geometría Euclidiana, la distancia se mide simplemente tomando la raíz de la suma de los cuadrados de las coordenadas. Extendiendo la geometría Euclidiana al espacio-tiempo, el cuál igual es plano se sigue la ecuación (1.1) y el intervalo está definido por la ecuación (1.2), por lo que puede verse que la coordenada  $x_0 = ct$ . Esta es la métrica para los espacios-tiempos planos, sin curvatura. Partiendo del apéndice A, cómo  $ds^2$  es el intervalo y más formalmente el tensor métrico, al ser un tensor será invariante ante cualquier difeomorfismo arbitrario. Particularmente, al realizar un cambio de coordenadas será igual. Este intervalo además nos da información sobre el tipo de evento que se realiza. Se sabe que la luz se mueve a velocidad  $c$ , por lo que la luz siempre sigue las trayectorias con intervalos  $ds^2 = 0$ , y se denominan *luminoides*. Por otro lado, las partículas con masa nunca pueden alcanzar la velocidad de la luz, por lo que siguen sólo intervalos negativos  $ds^2 < 0$ , y se denominan *temporaloides*. Finalmente, los intervalos que sólo podrían recorrer partículas con velocidades superiores a las de la luz, los cuáles son imposibles, se denominan *espacialoides* y cumplen  $ds^2 > 0$ . Un último detalle interesante es que los intervalos espacialoides están casualmente desconectados, dado que la luz no puede recorrerlos. Si se permiten relaciones de causalidad espacialoides, entonces existirán sistemas de referencia donde los efectos ocurren antes que las causas. Otro concepto útil para definir es el de *tiempo propio*  $d\tau$ , el cuál se define cómo el tiempo transcurrido por una partícula en el marco de referencia con dicha partícula en el origen. En términos del intervalo, es tiempo propio es

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} ds^2, \quad (1.13)$$

el intervalo tiene unidades de longitud, mientras que el tiempo propio tiene unidades de tiempo.

### 1.2.3. Derivadas no triviales de los vectores base

Los vectores base, definidos en el apéndice A no siempre serán constantes al tomar las derivadas ordinarias  $\partial_{\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right)$ . Recordando que las componentes de la métrica son



el producto punto de los vectores base, cómo ejemplo, los vectores base de la métrica de Minkowski son

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, 0), \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1), \end{aligned} \tag{1.14}$$

los cuales se obtienen al definir el producto punto de dos vectores por

$$A \cdot B = -A_0B_0 + A_iB_i. \tag{1.15}$$

Ahora, se puede considerar las derivadas de los vectores base respecto a las componentes, en el caso de los vectores base de Minkowski las derivadas de todos respecto a las 4 componentes son 0 en todos los casos, sin embargo para unos vectores base generales las derivadas pueden ser no triviales, cuando esto ocurre conviene introducir un elemento geométrico llamado símbolo de Christoffel  $\Gamma$  el cuál es un elemento con 3 índices (aunque no por ello es un tensor) y se define cómo

$$\partial_\nu e_\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha e_\alpha, \tag{1.16}$$

es decir, escribiendo la derivada de un vector base respecto a una coordenada cómo combinación lineal de los mismos vectores base, los símbolos de Christoffel son los coeficientes de la combinación lineal. Cómo los vectores base entonces en general tienen derivadas no triviales, al derivar un vector  $V = V^\mu e_\mu$  respecto a una coordenada se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\nu V &= \partial_\nu V^\mu e_\mu + V^\mu \partial_\nu e_\mu \\ &= (\partial_\nu V^\mu + V^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\mu) e_\mu, \end{aligned} \tag{1.17}$$

a los términos entre paréntesis se les denomina derivada covariante y se denota cómo

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + V^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\mu, \tag{1.18}$$

la cuál es la misma derivada definida al final del apéndice A, por lo que en un sistema coordinado arbitrario las derivadas tienen un término extra además de la derivada usual. Por otro lado, las 1-formas base tampoco son necesariamente constantes, sino que pueden variar dependiendo el punto en el espacio tiempo. Para el caso de las 1-formas, los símbolos de Christoffel se definen por

$$\partial_\nu dx^\mu = -\Gamma_{\alpha\nu}^\mu dx^\alpha, \tag{1.19}$$

luego, al tomar una 1-forma arbitraria  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ , su derivada es

$$\begin{aligned} \partial_\nu \omega &= \partial_\nu \omega_\mu dx^\mu + \omega_\mu \partial_\nu dx^\mu \\ &= \left( \partial_\nu \omega_\mu - \omega_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right) dx^\mu, \end{aligned} \tag{1.20}$$

por ello la derivada covariante de una 1-forma es

$$\nabla_\nu \omega_\mu = \partial_\nu \omega_\mu - \omega_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha. \quad (1.21)$$

Finalmente, es igualmente posible tomar las derivadas de tensores arbitrarios, considerando uno de orden  $(k, l)$  y tomando la derivada

$$\begin{aligned} \partial_\alpha T &= \partial_\alpha \left( T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} \right) \\ &= \partial_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_\alpha e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} \\ &+ \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots \partial_\alpha e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} \partial_\alpha dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} \\ &+ \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots \partial_\alpha dx^{\nu_l} \\ &= \partial_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \Gamma_{\alpha\mu_1}^\beta e_\beta \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} \\ &+ \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots \Gamma_{\alpha\mu_k}^\beta e_\beta dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l} - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu_1} dx^\beta \dots dx^{\nu_l} \\ &- \dots - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu_l} dx^\beta, \end{aligned} \quad (1.22)$$

por lo tanto, la derivada covariante de las componentes de un tensor de orden  $(k, l)$  están dadas por

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= \partial_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu_1} T^{\beta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu_k} T^{\mu_1 \dots \beta}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\ &- \Gamma_{\alpha\nu_1}^\beta T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\beta \dots \nu_l} - \dots - \Gamma_{\alpha\nu_l}^\beta T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \beta}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Una variedad diferencial dotada de una métrica requiere además una conexión. Para la relatividad general se toma una derivada covariante sin torsión (las derivadas covariantes conmutan) cómo en el apéndice A además de una métrica paralela, o sea  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ . A esta conexión se le denomina de Levi-Civita y en ella se cumple que  $\Gamma_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , o sea que los símbolos de Christoffel son simétricos en sus índices inferiores. Ahora, dado que la métrica es paralela, hay una forma de escribir los símbolos de Christoffel en términos de la métrica. Cómo  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$  entonces

$$0 = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta}, \quad (1.24)$$

y por lo tanto

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta}. \quad (1.25)$$

Considerando ahora la suma  $\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} &= \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta g_{\beta\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g_{\nu\beta} \\ &= \left( \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \right) g_{\beta\nu} + \left( \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right) g_{\mu\beta} + \left( \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \Gamma_{\beta\alpha}^\nu \right) g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde se hizo uso de la simetría de la métrica. Ahora, cómo en la conexión de Levi-Civita los símbolos de Christoffel son simétricos con sus índices inferiores, se sigue que

$$2g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta = \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}, \quad (1.27)$$

aplicando producto exterior con  $g^{\gamma\mu}$  y por la propiedad del apéndice A,  $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\mu} (\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu}g_{\nu\alpha}), \quad (1.28)$$

por lo tanto, la conexión de Levi-Civita da una forma de escribir los símbolos de Christoffel en términos de la métrica.

#### 1.2.4. Transporte paralelo y tensor de Riemann

Uno de los axiomas de la geometría Euclidiana es el hecho de que dos rectas paralelas nunca se tocarán. Este axioma en un tipo general de geometría es falso. En particular en un espacio-tiempo *curvo*, dos rectas paralelas si se tocan. Esta es la noción intuitiva de un espacio-tiempo curvo. Sin embargo, en un espacio-tiempo general (recuérdese que el espacio tiempo es una variedad 4-dimensional dotada de una métrica con signatura  $(-+++)$  y con conexión de Levi-Civita) no existe una forma clara e intuitiva de definir lo que son las líneas paralelas. Además, para definir una recta en el espacio-tiempo necesitamos el concepto de transporte paralelo, el cuál intuitivamente significa tener una flecha en la variedad y colocar una flecha idéntica enfrente de esta de forma que la flecha se va transportando paralelamente. Esta descripción de transporte paralelo en un vector  $T$  arbitrario está dada mediante la expresión

$$\frac{dT}{d\lambda} = 0, \quad (1.29)$$

esta expresión debe cumplirse para una curva en la variedad y para todo punto en dicha curva. Tomando una base de vectores  $\{e_{\mu}\}$  se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(T^{\mu}e_{\mu})}{d\lambda} \\ &= \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{\partial(T^{\mu}e_{\mu})}{\partial x^{\nu}} \\ &= \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} (\partial_{\nu}T^{\mu}e_{\mu} + T^{\mu}\partial_{\nu}e_{\mu}) \\ &= \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} (\partial_{\nu}T^{\mu} + T^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}) e_{\mu}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ahora a este vector  $T$  se están colocando copias de él mismo paralelas por lo que curva en la que se transporta puede parametrizarse con  $\lambda$  con componentes  $x^{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  con  $\mathcal{M}$  la variedad del espacio-tiempo. Así entonces el vector  $T$  tendrá componentes

$$T^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}, \quad (1.31)$$

sustituyendo estas componentes en la ecuación (1.30)

$$\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} + \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} \right) e_{\mu} = 0, \quad (1.32)$$

o bien cómo los vectores base son distintos de 0

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (1.33)$$

la cuál es la antes ya mencionada ecuación de la geodésica (1.12) que igual se puede obtener a partir del principio de equivalencia o cómo se puede ver también empleando el transporte paralelo. Esta expresión define las líneas *rectas* en el espacio-tiempo. En el espacio tiempo plano los símbolos de Christoffel son 0 por lo que la curva predecida es una línea recta pero en un espacio curvo será una trayectoria distinta. Esta expresión además nos da información física adicional sobre la gravedad. En este contexto no es más una fuerza cómo en gravedad Newtoniana, sino que es causada debido a la geometría del espacio-tiempo codificada en los símbolos de Christoffel.

Se ha mencionado antes que la intersección de líneas paralelas conduce a la curvatura, sin embargo la curvatura debe definirse con los conceptos hasta ahora desarrollados. Para ello recuérdese el concepto intuitivo de una variedad, en este caso el espacio-tiempo y un punto  $p$  en la variedad. Se elige una carta de modo que con esa carta en este punto y en una vecindad local la métrica es

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}, \quad (1.34)$$

por lo que se sigue que  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$  para todo valor de  $\alpha, \mu, \nu$ . Sin embargo la condición  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \neq 0$  puede satisfacerse en el resto de puntos en el espacio-tiempo. Aún más, por la forma de escribir los símbolos de Christoffel en términos de la métrica, estos están en términos de la métrica y derivadas de la métrica, así que si las segundas derivadas de la métrica en  $p$  son distintas de 0  $\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} \neq 0$  se sigue que en  $p$  las derivadas de los símbolos de Christoffel son distintas de 0, o sea

$$\partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \neq 0, \quad (1.35)$$

dado que las derivadas son 0, en otro punto distinto a  $p$  los símbolos de Christoffel serán distintos de 0. Ahora en el punto  $p$  la métrica es la del espacio-tiempo plano de Minkowski, sin embargo si las segundas derivadas de la métrica son distintas de 0 en  $p$  en otro punto de la variedad la métrica será distinta y ya no será el espacio tiempo plano, por lo que ya existe curvatura. Cómo se puede ver entonces puede tratarse la existencia de curvatura si la condición (1.35) se satisface. Sin embargo es importante aclarar un punto aquí y es que si en el espacio tiempo de Minkowski, el cuál es plano se aplica un cambio de coordenadas, por ejemplo a coordenadas esféricas, los vectores base dejarían de ser constantes y por ende los símbolos de Christoffel y sus derivadas podrían ser 0, lo cuál indicaría la existencia de curvatura cuando lo único que se hizo fue cambiar de coordenadas. Por ello, para que la curvatura esté presente, las derivadas de los símbolos de Christoffel deben ser distintas de 0 para cualquier sistema coordenado. De este modo si hay un espacio-tiempo plano basta hacer un cambio de coordenadas para que las derivadas de los símbolos de Christoffel sean 0.

Aunque la condición (1.35) es una condición para saber si un espacio-tiempo es curvo, debe recordarse que los símbolos de Christoffel no son tensores. Sin embargo se construirá

algo que si es un tensor llamado el tensor de Riemann, el cuál cuantificará la curvatura en un espacio-tiempo. Para estudiar esto se verá cómo se observa el transporte paralelo en un espacio curvo. Cómo se mencionó antes el transporte paralelo es mover un vector de forma que conserve su dirección alrededor de una curva. Se puede considerar una curva cerrada en una esfera con un vector en el ecuador de la esfera apuntando al polo norte, en todo el trayecto al polo norte el vector se mantiene derecho, o sea apuntando al polo norte, una vez en el polo norte se camina hacia la derecha hasta llegar al ecuador, por lo que el vector ahora en todo punto es ortogonal a la trayectoria y en todo momento se mantiene derecho, finalmente se retrocede hasta el punto inicial, por lo que para mantener el vector derecho debe apuntar siempre en dirección contraria a la trayectoria. Al final del trayecto el vector claramente no apunta en la misma dirección en la que comenzó aún cuando se transportó paralelamente. Esto se observa en la Figura 1.1 donde el vector transportado es una flecha en naranja mientras que la trayectoria se representa en verde. En cambio en un espacio-tiempo plano al transportar paralelamente vectores en trayectorias cerradas siempre terminarán en la misma dirección a en la que empezaron. Cómo se puede ver, el transporte paralelo indica la curvatura de un espacio-tiempo. Pensando ahora en que pasaría si la trayectoria se recorriera en sentido inverso, es decir el vector apuntando al polo norte y primero caminando a lo largo del ecuador luego de ahí al polo norte para finalmente regresar al inicio el vector final quedaría paralelo al ecuador mientras el inicial apuntaba al polo norte. O sea que invertir la trayectoria da dos resultados completamente distintos entre sí y respecto al vector inicial.

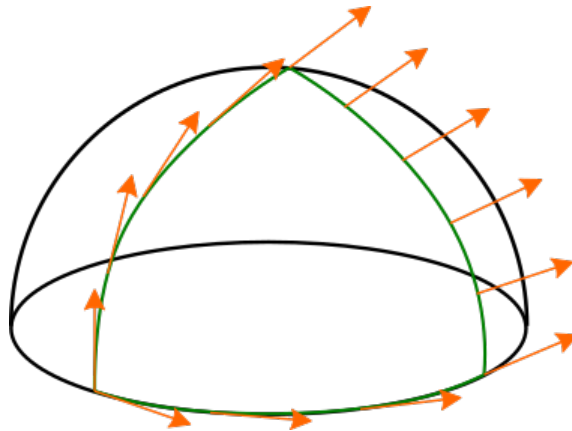


Figura 1.1: Transporte paralelo de un vector en una esfera alrededor de una trayectoria cerrada

Cómo puede verse tomar direcciones distintas da resultados distintos, este hecho se puede tratar más formalmente empleando la derivada, que para el espacio-tiempo es la derivada covariante. Cómo puede verse definiendo una carta en el espacio-tiempo en el que una coordenada  $x^\alpha$  cambie al viajar en el ecuador mientras que la otra no  $x^\beta$  y al viajar por los meridianos pase lo inverso. Las derivadas pueden indicar la dirección porque al derivar la curva se obtiene la velocidad lo que da la dirección del movimiento. Por ello cómo tomar las trayectorias inversas da resultados inversos entonces tomar las derivadas en

sentidos inversos no da resultados idénticos por lo que las derivadas no conmutan. Esta no-conmutatividad de las derivadas covariantes es lo que dará resultado al tensor de Riemann.

Considerando las ideas anteriores consideramos el espacio-tiempo y en él una carta con coordenadas definidas, y un vector  $V$  en el espacio-tiempo, entonces el conmutador de derivadas covariantes aplicado a las componentes del vector es

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha \\
&= \nabla_\mu \left( \partial_\nu V^\alpha + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha V^\beta \right) - \nabla_\nu \left( \partial_\mu V^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha V^\beta \right) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu V^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \partial_\nu V^\beta - \Gamma_{\nu\mu}^\beta \partial_\beta V^\alpha + \partial_\mu (\Gamma_{\nu\beta}^\alpha V^\beta) + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\gamma V^\beta - \Gamma_{\nu\mu}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha V^\beta \\
&\quad - \partial_\nu \partial_\mu V^\alpha - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \partial_\mu V^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \partial_\beta V^\alpha - \partial_\nu (\Gamma_{\mu\beta}^\alpha V^\beta) - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma V^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha V^\beta \\
&= \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha V^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha V^\beta + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\gamma V^\beta - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma V^\beta \\
&= \left[ \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma \right] V^\beta \\
&\equiv R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta,
\end{aligned} \tag{1.36}$$

donde se ha definido el tensor de Riemann cómo

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma, \tag{1.37}$$

cómo se puede ver, si las direcciones en las que se transporta paralelamente el vector  $V$  son  $x^\mu$  y  $x^\nu$ , el tensor de Riemann cuantifica la diferencia entre transportarlo primero por  $x^\mu$  y luego por  $x^\nu$  y primero por  $x^\nu$  y luego por  $x^\mu$ . Por ende, el tensor de Riemann cuantifica curvatura dado que de ser distinta de 0 implica que en trayectorias cerradas recorridas en sentidos inversos un vector termina en dos diferentes posiciones.

El tensor de Riemann es de orden  $(1,3)$ , sin embargo realizando producto exterior con el tensor métrico se puede mapear a un tensor de orden  $(0,4)$  y las componentes quedan  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma} R_{\beta\mu\nu}^\gamma$ . Ahora, trabajando en un espacio tiempo 4-dimensional, al tener 4 índices, el tensor de Riemann tendría 256 componentes, sin embargo no todas ellas son independientes, en particular el tensor de Riemann satisface 4 simetrías [15, 16]

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\mu\nu\alpha\beta} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.38}$$

por consiguiente el número de componentes independientes del tensor de Riemann en el espacio-tiempo 4-dimensional se reduce de 256 a 20. Finalmente existe una identidad adicional, la que se conoce cómo identidad de Bianchi [15, 16]

$$\nabla_\gamma R_{\beta\mu\nu}^\alpha + \nabla_\mu R_{\beta\nu\gamma}^\alpha + \nabla_\nu R_{\beta\gamma\mu}^\alpha = 0. \tag{1.39}$$

Además el tensor de Ricci y el escalar de Ricci se obtienen mediante contracciones del

tensor de Riemman con

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Estos tensor y escalar serán importantes a la hora de escribir las ecuaciones de campo de Einstein ya que están dadas en términos de ambas.

### 1.3. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones centrales de la relatividad general, las ecuaciones de Einstein, con las cuáles se estudia la evolución de un sistema pueden deducirse a partir del principio de mínima acción, el cuál establece que dada una acción  $S$ , la evolución del sistema está dada por  $\delta S = 0$  [17]. Además la acción está dada por

$$S = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L} d\mathcal{V}, \quad (1.41)$$

con  $\mathcal{V}$  un volumen en coordenadas planas de Minkowski. Para transformar de coordenadas planas a coordenadas generales, sea  $d\mathcal{V}$  la diferencial con coordenadas primadas y la de coordenadas generales no primadas se sigue  $d\mathcal{V} = dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} = (\det J_{\nu}^{\mu'}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ . Con  $J_{\nu}^{\mu'}$  el Jacobiano de la transformación de coordenadas primada a planas. Además el Jacobiano puede definirse cómo  $J_{\nu}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$ . Además de esto, la forma en que la métrica transforma es

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\mu'\nu'}, \quad (1.42)$$

y por la definición de Jacobiano

$$g_{\mu\nu} = J_{\mu}^{\mu'} J_{\nu}^{\nu'} \eta_{\mu'\nu'}, \quad (1.43)$$

y calculando el determinante de esta expresión (definiendo  $g = \det g_{\mu\nu}$ )

$$\begin{aligned} g &= \det(J_{\mu}^{\mu'} J_{\nu}^{\nu'} \eta_{\mu'\nu'}) \\ &= (\det J_{\mu}^{\mu'}) (\det J_{\nu}^{\nu'}) (\det \eta_{\mu'\nu'}) \\ &= -(\det J_{\mu}^{\mu'})^2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Y por lo tanto  $\det J_{\mu}^{\mu'} = \sqrt{-g}$ . Por lo que  $d\mathcal{V} = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ . Además de eso el Lagrangiano debe ser un escalar. Y cómo puede verse el escalar más simple función de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y sus derivadas es el escalar de Ricci  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , así se toma  $\mathcal{L} = R$

$$S_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{V}} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.45)$$

con  $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ . A esta acción se le conoce como la acción de Einstein-Hilbert y

a partir de ella se obtienen las ecuaciones de campo en el vacío. Por el principio de mínima acción

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S_{\text{EH}} &= \delta \int_{\mathcal{V}} R\sqrt{-g}d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \delta(R\sqrt{-g})d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g})d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} (\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g} + R\delta(\sqrt{-g}))d^4x. \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

Lo anterior puede simplificarse si se calcula la variación de  $\sqrt{-g}$ , este cálculo se encuentra en la ecuación (A.49) del apéndice A y está dado por

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta}), \tag{1.47}$$

sustituyendo este resultado en la variación de la acción

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S_{\text{EH}} &= \int_{\mathcal{V}} (\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g} + R\delta(\sqrt{-g}))d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \left( \delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})\sqrt{-g} - \frac{1}{2}R\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta}) \right) d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \left( \delta(g^{\mu\nu}) \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) + g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \right) \sqrt{-g}d^4x, \tag{1.48}
 \end{aligned}$$

el último término es 0 por el cálculo desarrollado en la ecuación (A.52) del apéndice A. Por lo tanto del principio de mínima acción y cómo las variaciones en la métrica  $\delta g^{\mu\nu}$  son arbitrarias

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0, \tag{1.49}$$

las cuáles son las ecuaciones de Einstein en el vacío. Para deducir las ecuaciones de Einstein en un espacio que no es vacío, pero que contiene materia debe asumirse una forma diferente de la acción. En este caso la acción es

$$S = \frac{S_{\text{EH}}}{\kappa^2} + S_M, \tag{1.50}$$

con  $\kappa^2 = \frac{16\pi G}{c^4}$  donde  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  es la constante de gravitación de Newton. En este caso, las ecuaciones de campo estarán dadas con  $\delta S$ . O sea, que

$$0 = \delta S = \frac{\delta S_{\text{EH}}}{\kappa^2} + \delta S_M. \tag{1.51}$$



La variación en la acción de Einstein-Hilbert puede reescribirse de la forma

$$\delta S_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^4x, \quad (1.52)$$

ahora por (1.48) se satisface la igualdad

$$\frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}, \quad (1.53)$$

luego

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{\kappa^2} \frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

por lo tanto

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.55)$$

y definiendo el tensor de energía-momento cómo

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.56)$$

las ecuaciones de Einstein resultan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.57)$$

y una forma alterna de escribirlas es en terminos del tensor de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}. \quad (1.58)$$

Con esta definición y empleando las identidades de Bianchi puede observarse que el tensor de Einstein satisface  $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$ . Por lo que se conserva de manera covariante. La curvatura del espacio tiempo está codificada en el tensor de Einstein y este mismo, comparando (1.58) con (1.57) se relaciona con el tensor de energía-momento por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.59)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. De la expresión (1.59) se puede ver que la conservación covariante del tensor de Einstein implica la conservación covariante del tensor de energía-momento.

## 1.4. Límite Newtoniano

Hasta ahora se ha explorado la teoría de la Relatividad General, sin embargo, no se ha tratado el cómo está conectada con la gravedad de Newton. Y es necesario que lo esté dado que si la Relatividad General no lo estuviera, contradeciría siglos de datos experimentales y no pasaría las pruebas del sistema solar. Cómo se verá en esta sección, la teoría de gravedad Newtoniana es una aproximación de la relatividad general cuándo están presentes solamente campos gravitacionales pequeños. Al hablar de agujeros negros o el universo entero, la teoría gravitacional Newtoniana no es ya una buena aproximación debido a los campos gravitacionales intensos o a la escala del universo.

Para verificar que efectivamente la gravedad Newtoniana es predecida por la relatividad general se supondrá que se tiene una métrica plana más una perturbación muy pequeña, es decir la métrica de Minkowski más una métrica que sea casi 0 en todo punto del espacio-tiempo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.60)$$

con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  en todo el espacio tiempo. Cómo esta perturbación  $h$  es muy pequeña, el tensor para *subir* y *bajar* índices es la métrica plana de Minkowski. Para recuperar la gravedad Newtoniana se debería esperar obtener la segunda ley de Newton

$$\mathbf{a} = -\nabla\phi, \quad (1.61)$$

la cuál establece que el gradiente de un potencial gravitacional es la aceleración. La segunda ley de Newton normalmente se escribe cómo  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , sin embargo dado que la fuerza gravitacional en un contexto Newtoniano es conservativa, puede escribirse cómo el gradiente de un potencial escalar  $\Phi$  y definiendo simplemente  $\phi = \Phi/m$  se obtiene la expresión (1.61). Además de suponer campos gravitatorios muy pequeños se requiere asumir que las partículas son no relativistas, esto quiere decir que sus velocidades son mucho menores que la velocidad de la luz. Para ello consideremos el vector denominado cómo 4-velocidad  $U$ . Para construirlo se requiere el vector de posición que en su entrada 0 incluye el tiempo por la velocidad de la luz para tener unidades de posición y en sus entradas 1 a 3 las posiciones en los ejes dependiendo el sistema de coordenadas, es decir el vector posición es

$$x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3), \quad (1.62)$$

las coordenadas pueden ser cartesianas o de cualquier otro tipo. La 4-velocidad es simplemente la derivada respecto al tiempo de la posición. Aunque aquí hay que aclarar de que tiempo se está hablando debido a qué el tiempo no es algo absoluto en relatividad general, aunque desde luego en este límite Newtoniano el tiempo si debería ser absoluto. El tiempo respecto al que se derivará es el tiempo propio, el tiempo medido en el marco de referencia de la partícula, por ende

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \quad (1.63)$$

donde se aplicó la regla de la cadena y  $t$  es el tiempo medido en el marco de referencia de

laboratorio. La derivada de los tiempos es justamente el factor de Lorentz [15]

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u, \quad (1.64)$$

con  $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}$  y  $u^i = \frac{dx^i}{dt}$  las velocidades medidas en el marco de referencia de laboratorio. Empleando el factor de Lorentz, la 4-velocidad es

$$U^\mu = \gamma_u(c, u^1, u^2, u^3). \quad (1.65)$$

Como se desea que las velocidades sean no relativistas  $u^i \ll c$  y por consiguiente  $U^i \ll U^0$ . Entonces los productos  $U^\mu U^\nu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$  serán despreciables al contener uno o dos componentes espaciales. Por lo que sólo el  $(U^0)^2 = \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$  será relevante, y entonces la ecuación de la geodésica (A.48) se reduce a

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (1.66)$$

Para ver la solución a la ecuación anterior se requiere entonces calcular los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{00}^\mu$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (\partial_0 g_{\gamma 0} + \partial_0 g_{0\gamma} - \partial_\gamma g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\mu\gamma} \partial_\gamma g_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\gamma} \partial_\gamma h_{00}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

donde el segundo paso se sigue si se consideran fuentes de campo gravitatorio estáticas, lo cual se condierará y el tercer paso del hecho de que  $g^{\mu\gamma} = \eta^{\mu\gamma} - h^{\mu\gamma}$  por lo que el segundo término se desprecia pues llevaría al producto de dos términos de la perturbación  $h$  y cómo es muy pequeña, trabajando a primer orden es 0 y dado que  $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$  por lo que la derivada sólo considera a  $h_{00}$  al ser  $\eta_{00} = -1$  constante. Entonces por la ecuación de la geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\gamma} \partial_\gamma h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2. \quad (1.68)$$

Considerando  $\mu = 0$  se estudia la componente  $x^0 = ct$  luego

$$c \frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \partial_0 h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2, \quad (1.69)$$

pero cómo los campos son estáticos  $\partial_0 g_{00}$  entonces  $\partial_0 h_{00} = \partial_0 (g_{00} - \eta_{00}) = 0$ , por lo tanto

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0, \quad (1.70)$$

luego  $t = a\tau + b$  con  $a$  y  $b$  constantes. Si al inicio del evento, los relojes se sincronizan, de modo que  $b = 0$ . Por lo que el tiempo si es simultáneo en este límite Newtoniano. Ahora se trabaja con las componentes espaciales. Multiplicando la expresión (1.68) por  $\left(\frac{d^2 \tau}{dt^2}\right)^2$

$$\left(\frac{d^2 \tau}{dt^2}\right)^2 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = c^2 \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \left(\frac{d^2 \tau}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right)^2, \quad (1.71)$$

entonces

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \partial_i h_{00}, \quad (1.72)$$

aquí se puede tomar el ansatz  $h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2}$ , cómo es un escalar se puede justamente asignar que el escalar sea ese, luego

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \phi, \quad (1.73)$$

la cuál si se escribe vectorialmente es

$$\mathbf{a} = -\nabla \phi, \quad (1.74)$$

la cuál es justamente la segunda ley de Newton. Lo que resta para corroborar que la relatividad general si incluye a la gravedad Newtoniana es la ley de gravitación universal, o bien, la ley de Gauss para la gravedad la cuál implica la última. Para esto se supondrá una forma simple del tensor de energía-momento, el cuál es el correspondiente a un fluido perfecto sin presión, o bien

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, 0, 0, 0), \quad (1.75)$$

ahora se emplearán las ecuaciones de campo de Einstein, para lo cuál se debe calcular el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Sin embargo, puede evitarse calcular el escalar de Ricci si se contraen las ecuaciones de campo de Einstein con  $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (1.76)$$

luego

$$R = -\frac{8\pi G}{c^2} T, \quad (1.77)$$

donde se usó el hecho de que  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4$  pues se trabaja en 4 dimensiones y además se definió  $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ , sustituyendo en las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right], \quad (1.78)$$

por lo que ya no es necesario calcular el escalar de Ricci con esta forma equivalente. Para calcular el tensor de Ricci primero se contrae la expresión para el tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\gamma}, \quad (1.79)$$

entonces calculando  $R_{00}$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_{\alpha}\Gamma_{00}^{\alpha} - \partial_0\Gamma_{\alpha 0}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\gamma} - \Gamma_{0\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\gamma} \\ &\approx \partial_{\alpha}\Gamma_{00}^{\alpha} = \eta^{\alpha\gamma}\partial_{\alpha}\partial_{\gamma}\phi, \end{aligned} \quad (1.80)$$

donde se hizo uso de la expresión de los símbolos de Christoffel anteriormente calculada y la sustitución de  $h_{00}$ , además dado que se consideran campos estáticos el segundo término es 0, por otro lado el tercer y cuarto término es 0 debido a que el producto de símbolos de Christoffel contendría productos de  $h_{\mu\nu}$  y al trabajar a primer orden se desprecian. Ahora sólo se calcula la traza del tensor de energía-momento

$$T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\rho, \quad (1.81)$$

cómo se puede observar, la métrica de Minkowski fue la que se empleó para subir el índice y realizar la contracción, esto es posible debido a que la perturbación  $h_{\mu\nu}$  es muy pequeña. Finalmente, sustituyendo en (1.78)

$$\eta^{\alpha\gamma}\partial_{\alpha}\partial_{\gamma}\phi = \frac{8\pi G\rho}{c^2} \left[ \frac{1}{2} + \phi \right] \approx \frac{4\pi G}{c^2}\rho, \quad (1.82)$$

el último paso se debe a que cómo se consideran campos gravitacionales débiles, es decir no entran agujeros negros ni otros campos fuertes, la densidad es pequeña, por lo que el producto de la densidad y  $\phi$  es una contribución a segundo orden que se desprecia a primer orden. Finalmente  $\eta^{\alpha\gamma}\partial_{\alpha}\partial_{\gamma}\phi = \partial^{\gamma}\partial_{\gamma}\phi = \partial^0\partial_0\phi + \partial^i\partial_i\phi = \partial^i\partial_i\phi$  pues al considerarse campos estáticos la perturbación de la métrica plana debe ser también estática entonces sus derivadas temporales son 0, más aún  $\partial^i\partial_i\phi = \nabla^2\phi$ , por lo tanto

$$\nabla^2\phi = \frac{4\pi G}{c^2}\rho, \quad (1.83)$$

la cuál es justamente la Ley de Gauss para la gravitación e implica la ley de Gravitación Universal de Newton. Por lo tanto, la relatividad general si contiene a la gravedad Newtoniana fuertemente testada, lo que hace que sea una teoría más completa ya que considerando perturbaciones más grandes o perturbaciones variables se describen nuevos fenómenos.

## 1.5. Gravedad linealizada

La tarea principal en relatividad general para estudiar la evolución de un sistema es resolver la ecuación de campo de Einstein (1.59). Un sistema particularmente interesante y que servirá más adelante para estudiar las ondas gravitacionales es de la métrica plana

de Minkowski más una perturbación lineal, la diferencia de la presente sección respecto a la anterior es el hecho de que en este caso los campos no serán estáticos sino que si evolucionarán con el tiempo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.84)$$

con  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  en todo el espacio tiempo. En esta métrica se consideran perturbaciones en el espacio tiempo plano de forma que las contribuciones a segundo orden y superiores sean despreciables y por ende se trabaja a primer orden. Por ello a primer orden la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  puede subir o bajar los índices de la perturbación  $h_{\mu\nu}$ , por ello la traza de la perturbación se puede definir cómo  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ . Para que esta teoría sea válida se requiere que exista un sistema coordenado en el que la métrica (1.84) sea verdadera en una región grande del espacio-tiempo. La forma en que se escribe (1.84) se puede obtener suponiendo que  $g^{\mu\nu} = a\eta^{\mu\nu} + bh^{\mu\nu}$  y se pueden obtener las constantes sabiendo que  $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu}$  o sea

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha}^{\mu} &= g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} \\ &= (a\eta^{\mu\nu} + bh^{\mu\nu})(\eta_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha}) \\ &= a\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha} + a\eta^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} + b\eta_{\nu\alpha}h^{\mu\nu} + bh^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} \\ &= a\delta_{\alpha}^{\mu} + (a + b)h_{\alpha}^{\mu}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

donde  $bh^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} \approx 0$  pues  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  y se está trabajando a primer orden por lo que este término es una corrección a segundo orden y se desprecia. Comparando ambos lados se sigue que  $a = 1$  y  $a + b = 0$  por lo tanto

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (1.86)$$

Cómo se verá es conveniente trabajar con un tensor llamado cómo la inversa de la traza de  $h_{\mu\nu}$  dado por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}, \quad (1.87)$$

a partir de esta métrica se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein, las cuáles se calculan en el apéndice A y el resultado está dado por la ecuación B.5

$$G_{\beta\nu} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\partial_{\beta}\bar{h}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}\bar{h}_{\beta\nu} + \partial_{\nu}\partial^{\mu}\bar{h}_{\beta\mu} - \partial^{\mu}\partial^{\alpha}\bar{h}_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu}). \quad (1.88)$$

Debido a la covarianza general aplicando cualquier difeomorfismo arbitrario las ecuaciones de Einstein se preservan. En particular nos permite tomar una elección de Gauge, en particular podemos tomar la norma de Lorenz que simplifica notablemente las ecuaciones de Einstein en gravedad linealizada, el cuál es  $\partial^{\mu}h_{\mu\nu} = 0$ , luego

$$-\partial_{\mu}\partial^{\mu}\bar{h}_{\beta\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\beta\nu}, \quad (1.89)$$

la cuál es una ecuación de onda y las perturbaciones se propagan a la velocidad de la luz  $c$ .

## 1.6. Pruebas de la Relatividad General

Antes se ha visto que la teoría de la Relatividad General es capaz de predecir la teoría de Newton en uno de sus límites. Sin embargo, aunque esa es una condición necesaria para que la Relatividad General sea una teoría correcta, no es suficiente y requiere un número mucho mayor de pruebas para lograr considerar a esta una teoría correcta. Al día de hoy la Relatividad General ha pasado un número incontable de pruebas y las sigue pasando, y se hablará un poco de algunas de ellas a continuación. Solamente se han encontrado algunos problemas que potencialmente podrían requerir una nueva teoría más general que la Relatividad General. Dos de estos problemas son el problema de la constante cosmológica y el problema de la constante de Hubble, de los que se hablará en el siguiente capítulo. Sin embargo, hasta donde se sabe, la Relatividad General es la mejor teoría que se conoce para describir la gravedad y la que ha pasado el mayor número de pruebas observacionales.

### 1.6.1. Principio de Equivalencia Débil

Recordando que el principio de equivalencia débil propone que la masa inercial y la masa gravitacional son equivalentes y que la Relatividad General descansa sobre este postulado, es necesario que sea verdadero.

La medición de la masa gravitacional se realiza a partir de básculas las cuáles miden la fuerza normal aplicada necesaria para que el cuerpo quede en reposo por lo que esta lectura de la fuerza normal es igual a la fuerza gravitacional y al dividir entre la aceleración de la gravedad la que se puede determinar con un péndulo puede medirse con precisión la masa gravitacional.

Tomando dos cuerpos de la misma masa gravitacional pero diferentes materiales y aplicándoles la misma fuerza horizontal sobre una superficie con la menor fricción posible, deberían acelerarse de igual manera si el principio de equivalencia es válido. Diferencias en la aceleración implicarían que la masa inercial de uno de ellos es diferente a la del otro lo que implicaría una violación del principio de equivalencia débil. Mediante un aparato llamado balance de torsión rotatorio, el cuál es un aparato que puede medir diferencias en la aceleración horizontales con dos tipos materiales a una precisión enorme, se logró determinar una diferencia en la aceleración horizontal de  $\Delta a = (0.6 \pm 3.1) \times 10^{-15} \text{ m/s}^2$  al emplear materiales de Berilio y Titanio [18], lo cuál es consistente con el principio de equivalencia débil e impone cotas restrictivas sobre modelos que asuman una ruptura del principio de equivalencia débil.

### 1.6.2. La prueba de Eddington

Recordando la ecuación de la Geodésica (1.12), puede verse que si se tiene presentes los símbolos de Christoffel, las trayectorias seguidas por partículas ya no son líneas rectas sino otro tipo de curvas. Las ecuaciones de campo de Einstein (1.59) nos indican que la curvatura del espacio-tiempo es causada por el tensor de energía-momento, por lo cuál si asumimos la presencia de masa en el espacio-tiempo, el espacio se curvará y los símbolos

de Christoffel serán distintos de 0, lo cuál causará que las trayectorias seguidas por partículas sin interacciones externas a la gravedad no sean líneas rectas. Crucialmente, también causará que los fotones, partículas sin masa, sean desviadas por la gravedad. La desviación de los fotones también ocurre en la teoría de Newton, sin embargo la desviación teórica en esta teoría es la mitad de la predecida por la Relatividad general. Por lo tanto, si es posible medir la deflexión de los rayos de luz a causa de la gravedad y es consistente con la Relatividad General, se tendrá una prueba de esta teoría, en cambio si la deflexión es la mitad de la predecida, esta teoría estará equivocada.

Este es el debate que se realizaba a finales de los años 10s, cuándo Einstein había publicado su teoría y no había un claro camino para probarla experimentalmente. Sin embargo, el mismo Einstein propuso probar la Relatividad general mediante eclipses. La idea era esperar a que un Eclipse solar ocurriera. Conociendo la posición de las estrellas en el cielo nocturno sin eclipses y tomando fotografías en el momento de un eclipse total solar es posible probar la Relatividad General. En caso de que la luz de las estrellas en el momento del eclipse total solar parezca provenir de un lugar distinto a la localización normal de las mismas estrellas en ausencia del eclipse y que este cambio aparente sea el doble que el predecido por la teoría de Newton sería una indicación de que la relatividad general es correcta. En este momento aparece Arthur Stanley Eddington, quien realizó dos expediciones en 1919 al Norte de Brasil y a una isla en la costa de África Occidental [19] y tomó estas fotografías, donde se mostró que la deflexión predecida por la Relatividad General era correcta.

### 1.6.3. Ondas gravitacionales

Cómo se vió en la sección anterior y cómo se verá en el siguiente capítulo, la Relatividad General predice la existencia de perturbaciones en el espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz. En caso de poder medirse estas llamadas ondas gravitacionales, sería una indicación adicional de que la Relatividad General es correcta. En el Capítulo 4 se hablará a fondo de estos mensajeros cósmicos y cómo ya han sido detectados, lo que constituye una prueba adicional de la Relatividad General.



# Capítulo 2

## Cosmología estándar

La Cosmología es la rama de la física que estudia el Universo a gran escala, su evolución, origen y futuro. Estos temas incluyen el estudio del modelo del Big Bang así como alternativas a este modelo del origen, el estudio del ritmo actual de expansión del universo, el estudio de la radiación de fondo de microondas, entre otros.

En 1917, dos años después de la formulación de la Relatividad General, Albert Einstein dedujo las soluciones para las ecuaciones de campo de Einstein (1.57) asumiendo que la distribución de materia era homogénea e isotrópica, junto con el postulado de que el universo tenía curvatura positiva (dotado de la geometría de una hiperesfera) [20]. Además de eso, Einstein buscó que la solución fuera la de un universo estático (con densidad de materia promedio constante al variar el tiempo) así como un radio de curvatura de la hiperesfera constante. Sin embargo, las soluciones a las que llegó apuntaban a un universo que colapsaba sobre sí mismo, por lo que para lograr tener un universo estático agregó un término extra a las ecuaciones de campo, la llamada constante cosmológica  $\Lambda$ . El efecto de esta constante propuesta por Einstein era la de compensar la atracción gravitatoria que tienen los cuerpos masivos. La constante cosmológica propuesta por Einstein además debía tener un valor específico para poder garantizar un universo estático. Este valor está dado por  $\Lambda = \frac{1}{R^2}$  con  $R$  el radio de la hiperesfera [21].

Esta idea propuesta por Einstein parecía una idea elegante en la época, sin embargo, tiene varios problemas, uno de ellos siendo el hecho de que el universo estático planteado por Einstein está en equilibrio inestable debido que al mover levemente uno de los cuerpos de su posición, el universo colapsaría sobre sí mismo a pesar de la constante cosmológica presente. Aún más, el astrofísico Willem de Sitter [22] supuso un Universo curvado positivamente y vacío, aunque incluyendo la constante cosmológica en las soluciones. En este universo, a pesar de suponerse un Universo estático, la separación entre partículas prueba crecía con el tiempo. Dicho de otro modo, la constante cosmológica introducía estructura al Universo de forma que generaba expansión aún sin materia.

Posteriormente, en 1925, Georges Lemaître encontró una relación lineal entre la distancia y el corrimiento al rojo, y el mismo año Edwin Hubble probó la existencia de galaxias

diferentes a la nuestra y además que la radiación de las más lejanas a nosotros estaban corridas al rojo, lo que es una indicación del efecto Doppler de que están alejándose de nuestra galaxia. Dos años después, en 1927, Lemaître encontró una solución al problema proponiendo un universo con curvatura positiva, presión y densidad variables con el tiempo [23]. En esa solución, el Universo se encuentra en expansión constante por lo que la separación entre galaxias se incrementa con el tiempo y esto provoca el corrimiento al rojo. Empleando los datos disponibles en la época, Lemaître encontró una relación entre la distancia a una galaxia y su velocidad respecto a nuestra galaxia

$$v = H_0 d, \quad (2.1)$$

donde  $v$  es la velocidad relativa de la galaxia respecto a la nuestra,  $d$  su distancia respecto a nuestra galaxia y  $H_0$  una constante de proporcionalidad que hoy en día se conoce cómo la constante de Hubble debido a que Hubble en 1929 encontró de forma independiente la misma relación [24]. Es con estos descubrimientos de Lemaître y Hubble que se conoció que el universo se estaba expandiendo. Debido a que Einstein introdujo la constante cosmológica a las ecuaciones de campo para predecir un universo estático y esta evidencia probaba que en realidad el universo estaba en expansión, Einstein nombró a la constante cosmológica cómo *el peor error de su vida* [25].

Sin embargo, la constante cosmológica volvió décadas después. Adam Riess, Saul Perlmutter, Brian Schmidt y su equipo encontraron en 1998 que para una muestra de 10 supernovas de tipo IA (SNeIa), sus distancias eran en promedio de 10 % a 15 % más grandes de lo esperado para un universo con un contenido de 20 % de materia y sin constante cosmológica. Estas muestras probaron ser consistentes con un universo de expansión acelerada en el intervalo de confianza de  $2.8\text{-}\sigma$  y  $3.9\text{-}\sigma$ , así cómo presencia de la constante cosmológica en los intervalos de confianza a  $3\text{-}\sigma$  y  $4\text{-}\sigma$  [26]. Por lo que este estudio probó que el universo esta expandiéndose aceleradamente y aún más, la constante cosmológica es necesaria para explicar estas observaciones. Por lo que *el peor error de la vida de Einstein* no fue un error del todo ya que sirve para explicar esta expansión acelerada.

Además de esto, las curvas de velocidad de rotación de las estrellas en galaxias con respecto a la distancia al centro de la galaxia no correspondía con la masa de la parte observable de la galaxia, lo que hacía sospechar que otro tipo de materia estaba presente y provocaba estos cambios en las curvas de rotación [27]. Debido a que era imposible ver este tipo de materia se le denominó materia oscura, dado que no parecía interactuar electromagnéticamente, pero si gravitacionalmente.

Uniando las ideas de que el Universo requiere de una constante cosmológica para explicar la expansión acelerada así cómo materia oscura, se desarrolló un modelo estándar llamado  $\Lambda$ CDM. A para referirse a la constante cosmológica y CDM son las siglas de *cold dark matter*, o sea materia oscura fría (fría se refiere a materia no relativista por lo que su presión es 0). Además de eso, el universo incluye radiación y materia bariónica (la materia que se conoce del modelo estándar de partículas), sin embargo su contenido es mucho menor que el contenido de materia oscura y energía oscura.

Sin embargo, a pesar de que este modelo predice correctamente la expansión del universo y la formación de estructura, entre otras cosas, tiene diversos problemas. Uno de ellos siendo que el modelo estándar de partículas carece de una partícula que tenga una presión negativa para causar la expansión acelerada del universo. Otro de estos es el problema de la constante de Hubble. La constante de Hubble determina el ritmo actual de expansión del universo y es importante para conocer la edad del universo.

Con el avance tecnológico se ha hecho posible medir con precisión enorme los parámetros cosmológicos, entre ellos la constante de Hubble. En particular, la colaboración Planck, que calcula la constante de Hubble con el espectro de temperaturas del fondo cósmico de microondas predice un valor de esta en  $H_0 = 67.4 \pm 0.5$  km/s/Mpc asumiendo el modelo  $\Lambda$ CDM [28]. Mientras que la constante de Hubble calculada por la colaboración SH0ES la cuál es liderada por Adam Riess obtuvo un valor de  $H_0 = 73.2 \pm 1.3$  km/s/Mpc independiente del modelo, mediante estrellas Cefeidas en el universo tardío [29]. Por ello, Planck calculó el valor de esta constante asumiendo que el modelo  $\Lambda$ CDM es correcto y fue calculada con datos del universo temprano. Por otro lado, la colaboración SH0ES calculó la constante con muestras del universo tardío (cefeidas y supernovas de tipo 1A) y sin asumir ningún modelo de fondo [30]. Además de esto, existe un nuevo cálculo de esta constante en el universo tardío mediante gigantes rojas [31].

Lo discutido en el párrafo anterior se conoce como el *problema de la tensión de la constante de Hubble* y es uno de los grandes problemas abiertos junto con el *problema de la constante cosmológica* en el cuál se estudia la naturaleza de la energía oscura debido a que con el modelo estándar de partículas no se puede explicar un fluido con presión negativa. Por los problemas que presenta el modelo estándar  $\Lambda$ CDM es necesario considerar alternativas. Existen dos formas para realizar esto. La primera es modificar la acción de Einstein-Hilbert 1.48. Esto se puede hacer generalizando el escalar de Ricci a una función arbitraria de este ( $R \rightarrow f(R)$ ) en la acción de Einstein-Hilbert, y a estas teorías extendidas se les conoce  $f(R)$  [22, 32]. Un segundo camino, que se ha vuelto popular últimamente, consiste en cambiar la forma en la que se construye la gravedad. Esto se puede lograr si se supone que la curvatura es 0 y la gravedad es causada por la torsión (en este caso los símbolos de Christoffel no son simétricos en sus índices inferiores), teoría a la cuál se le denomina *gravedad teleparalela* [22, 33]. Otra forma de seguir este camino se sigue al suponer tanto la curvatura cómo la torsión igual a 0 y lo que causa la gravedad en este caso es la no-metricidad (la derivada covariante de la métrica), a esta teoría se le conoce cómo *gravedad simétrica teleparalela* [34, 35]. Sin embargo, el camino más sencillo es conservar la Relatividad General y modificar el lado derecho de las ecuaciones de Einstein (1.57). Esto se puede hacer modicando los constituyentes del universo. Por ejemplo, en vez de considerar una constante cosmológica considerar un fluido de energía oscura que evoluciona con el tiempo.

## 2.1. El principio cosmológico

La idea de que no existan *observadores especiales* en el Universo se conoce cómo el principio Copernicano. Al intentar aplicar el principio Copernicano a la Cosmología se proponen las ideas de si el Universo es isotrópico y homogéneo. La isotropía implica que en cualquier dirección en que se mire el universo, se verá lo mismo a gran escala. Por otro lado, la homogeneidad significa que el Universo tiene la misma densidad promedio a gran escala. Por supuesto, la isotropía y homogeneidad no son ciertas a escalas pequeñas pues galaxias aisladas y mucho espacio vacío entre ellas no es una prueba de la isotropía o la homogeneidad. La isotropía y homogeneidad se consideran cuándo se habla del Universo a gran escala, del orden de megapársecs (Mpc). Por lo anterior, si se quiere aplicar el principio Copernicano al Universo debe demandarse que este sea isotrópico y homogéneo. Ya que de no serlo, el principio se rompe.

Las ideas propuestas previamente de que el Universo es isotrópico y homogéneo a gran escala se conocen cómo el *principio cosmológico*. Cómo puede verse, este principio es un corolario de aplicar el principio Copernicano a la Cosmología, sin embargo es un postulado y por lo mismo imposible de probarse matemáticamente. Además, por el principio cosmológico, y el hecho de que no existe un lugar privilegiado en el Universo, se sigue la idea de que las leyes de la física son Universales. Esto es, que el principio de invarianza de Lorentz es válido. Este hecho es importante pues permite estudiar sistemas lejanos a la tierra con las mismas leyes físicas que aquí. En adición a esto, las constantes Universales deben ser invariantes ante cualquier transformación.

Otra de las consecuencias fuertes del principio cosmológico es que el Universo debió estar causalmente conectado en algún instante en el pasado, pues de no haberlo estado la homogeneidad e isotropía no serían válidas. Esto propone la existencia de un momento de creación del Universo conocido cómo el *big bang*. Finalmente, el hacer la suposición de que el principio cosmológico es válido para todo instante en la vida del Universo implica que las leyes de la física son invariantes ante transformaciones temporales. Por lo cuál si se asume esto, se puede estudiar el pasado del Universo con las mismas leyes físicas que en el presente.

## 2.2. La métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

Para poder resolver las ecuaciones de campo de Einstein 1.57 se requiere de una métrica, la cuál debe tener presentes las ideas del principio cosmológico. Debido a este principio, el Universo debe ser isotrópico y homogéneo, y por ende la métrica debe ser invariante ante transformaciones espaciales y rotaciones. Además del espacio, tenemos el tiempo por lo que se trabaja en un espacio-tiempo 4-dimensional. En este contexto, el espacio es una hipersuperficie en el espacio-tiempo y podemos pensar en la superficie

$$k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + z^2 = a^2, \quad (2.2)$$

donde  $(x_1, x_2, x_3)$  son las coordenadas espaciales,  $k = -1, 0, 1$  dependiendo la geometría buscada. Para  $k = -1$  tenemos una superficie hiperbolica, para  $k = 0$  es una superficie espacialmente plana y para  $k = 1$  es una superficie esférica y  $a^2$  una constante arbitraria positiva. Además, su métrica esta dada por

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + kdz^2. \quad (2.3)$$

El principio cosmológico se satisface en las superficies con las que se está trabajando debido a que si se consideran las transformaciones

$$x_i \rightarrow x_i + b_i, \quad (2.4)$$

y

$$x_i \rightarrow R_i^j x_j, \quad (2.5)$$

con  $b_i$  una traslación y  $R_i^j$  una rotacion arbitraria que en términos de los ángulos de Euler puede escribirse cómo

$$R_i^j = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \\ -\sin \theta & \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Siempre que  $db_i = 0 = d\theta = d\phi = d\psi$ , se sigue que  $ds'^2 = ds^2$ , por lo que esta métrica satisface la homogeneidad e isotropía, es decir satisface el principio cosmológico mientras  $dz^2$  no cambie. Cómo la hipersuperficie está en un espacio 4-dimensional se requiere esa coordenada  $z$ , sin embargo con las expresiones (2.3) y (2.2) se puede escribir la métrica en términos únicamente de  $x_1, x_2$  y  $x_3$ . De (2.2)

$$z^2 = a^2 - kr^2, \quad (2.7)$$

mientras que al diferenciar esa misma expresión se sigue

$$k\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + z dz = 0, \quad (2.8)$$

pues  $a$  es una constante arbitraria y con  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ . Sustituyendo estos resultados en (2.3) y cambiando a coordenadas esféricas

$$ds^2 = \left( \frac{a^2}{a^2 - kr^2} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.9)$$

Reescalando las coordenadas  $r' = ar$  (cambiando a coordenadas comóviles) y eliminando la prima

$$ds^2 = a^2 \left[ \left( \frac{1}{1 - kr^2} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.10)$$

Para tener la métrica del Universo debe agregarse la parte temporal, o sea

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.11)$$

la cuál se conoce cómo métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) y el factor de escala es función únicamente del tiempo, antes era una constante pero era cuándo se trabajaba la parte espacial. El que sea una función del tiempo no rompe el principio cosmológico.

### 2.3. La distancia comóvil y el tiempo conforme

El factor de escala tiene un significado físico importante, el cuál es el de medir la expansión del universo. En el momento del big bang este debía ser  $a(0) = 0$ . Conforme el universo se va expandiendo este factor va creciendo hasta un valor de  $a(t_0) = a_0$  con  $t_0$  la edad actual del universo y  $a_0$  el factor de escala al día de hoy. Dado que este valor es sólo un factor de normalización se suele tomar  $a_0 \equiv 1$ .

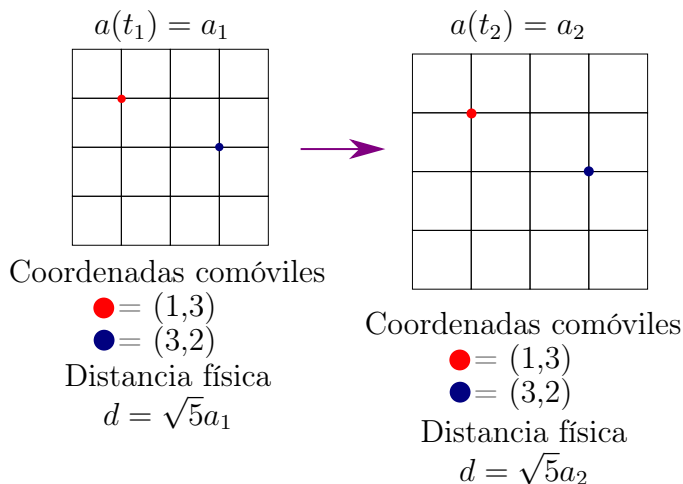


Figura 2.1: Diferencia entre la distancia comóvil y la distancia física para diferentes tiempos en la evolución del universo. Las coordenadas comóviles no se modifican con la expansión del universo y la distancia comóvil entre las dos partículas de prueba de la imagen es  $d_c = \sqrt{5}$ . En cambio, la distancia física cambia con la expansión del universo y es  $d_f(t) = a(t)d_c$ .

Lo anterior puede verse si se imagina al universo como una cuadrícula y consideramos dos partículas puntuales en algunos puntos de dicha cuadrícula. Conforme el universo se expande, la distancia entre dos intersecciones de la cuadrícula se incrementa, y es igual a  $a(t)$ . Sin embargo, la distancia comóvil se define cómo la distancia en unidades de la cuadrícula sin importar el valor del factor de escala. Esto se ve en la figura 2.1. La distancia comóvil entre dos partículas de prueba nunca cambia pero si lo hace la distancia física. Cabe destacar que el principio cosmológico se satisface si se está en reposo en las coordenadas comóviles. Al viajar de un punto a otro de estas coordenadas debido a la velocidad, el fondo cósmico de microondas no se vería isotrópico ni homogéneo sino con

mayor intensidad en la dirección que se mueve.

Considerando una distancia comóvil  $D_C$  a una fuente de luz, por definición  $D_f = aD_C$  con  $D_f$  la distancia física. La fuente emite luz que en un tiempo  $dt$  se mueve una distancia física  $dD_f$ , o sea que en ese intervalo de tiempo se desplaza una distancia comóvil  $dD_C = \frac{dD_f}{a} = \frac{cdt}{a}$  debido a que la luz se desplaza a velocidad  $c$ . Integrando se obtiene la distancia comóvil

$$D_C = c \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.12)$$

donde  $t_0$  es el tiempo de detección de la luz y  $t$  el tiempo de emisión. Si  $t = 0$ , la integral de la ecuación (2.12) se denomina cómo el tiempo conforme

$$\eta \equiv \int_0^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.13)$$

por lo que  $\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a}$ . El tiempo conforme es otra forma de medir el tiempo en cosmología, y es útil en algunos casos, por ejemplo en teoría de perturbaciones lineales, cómo se verá más adelante. En terminos del tiempo conforme, la métrica FLRW puede escribirse cómo

$$ds^2 = a^2(\eta) \left( -c^2 d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.14)$$

cómo el factor de escala es adimensional, el tiempo conforme efectivamente tiene dimensiones de tiempo y de ahí su nombre. Si  $k = 0$  la métrica FLRW con el tiempo conforme es la métrica de Minkowski.

## 2.4. Las ecuaciones de Friedmann

Una vez que se ha elegido una métrica, que en este caso es la de FLRW, se puede proceder a resolver las ecuaciones de campo de Einstein 1.58. Para ello se requiere calcular el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Y para estos se necesitan los símbolos de Christoffel.

### 2.4.1. Símbolos de Christoffel y geodésicas

Suponiendo por simplicidad que  $k = 0$ , los únicos no triviales para la métrica FLRW son [36]

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{\dot{a}}{ca} g_{ij} \quad , \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{ca} \delta_j^i \quad , \quad \Gamma^i_{jm} = kg_{jm} x^i, \quad (2.15)$$

con  $x^i$  la  $i$ -ésima coordenada.

Partiendo de la ecuación (A.48) y definiendo  $P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  el 4-momento si el parámetro

$\lambda = \tau/m$  con  $\tau$  el tiempo propio y  $m$  la masa, entonces

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = 0, \quad (2.16)$$

además, la norma del 4-momento es

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m^2 c^2, \quad (2.17)$$

donde se definió  $g_{00} P^0 P^0 = -\frac{E^2}{c^2}$  y  $g_{ij} P^i P^j = p^2$  y se empleó la relación de dispersión. En el caso de los fotones, cómo su masa es 0, no puede usarse el tiempo propio cómo parámetro pues este es 0. Para los fotones la componente 0 de las geodésicas es

$$\frac{dP^0}{d\lambda} + \frac{a\dot{a}}{c} \delta_{ij} P^i P^j = 0, \quad (2.18)$$

por la relación de dispersión  $P^0 = p$  y cómo con  $k = 0$ ,  $g_{ij} = a^2 \delta_{ij}$

$$\frac{dp}{d\lambda} + \frac{H}{c} g_{ij} P^i P^j = 0, \quad (2.19)$$

donde se definió el *factor de Hubble*  $H(t) = \dot{a}/a$ . Esto se puede poner en términos del tiempo haciendo  $\frac{dp}{d\lambda} = \frac{dp}{dx^0} \frac{dx^0}{d\lambda}$  con  $x^0 = ct$  y  $\frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{E}{c} = p$ , debido a que  $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = (E/c, \mathbf{p})$ . Finalmente

$$\frac{dp}{dt} + Hp = 0. \quad (2.20)$$

Resolviendo la ecuación diferencial

$$p = \frac{C}{a}, \quad (2.21)$$

donde  $C$  es una constante. Además cómo para un fotón  $E = \frac{hc}{\lambda}$ , entonces

$$\frac{a_{\text{em}}}{a_{\text{obs}}} = \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{obs}}} \equiv \frac{1}{1+z}, \quad (2.22)$$

donde em significa emitido y obs observado. La última igualdad es la definición del corrimiento al rojo. Por lo tanto, si el factor de escala al día de hoy se normaliza a  $a_0 = 1$

$$a = \frac{1}{1+z}. \quad (2.23)$$

Este resultado será muy importante en las secciones y capítulos siguientes.



### 2.4.2. Tensor y escalar de Ricci

Calculando las componentes del tensor de Ricci a partir de los símbolos de Christoffel [37], las componentes no triviales son

$$R_{00} = -\frac{3}{c} \left( \dot{H} + H^2 \right) \quad , \quad R_{ij} = \frac{g_{ij}}{c^2} \left( 3H^2 + \dot{H} + \frac{2kc^2}{a^2} \right), \quad (2.24)$$

mientras que el escalar de Ricci está dado por [37]

$$R = \frac{6}{c^2} \left( 3H^2 + \dot{H} + \frac{kc^2}{a^2} \right). \quad (2.25)$$

### 2.4.3. Tensor de energía-momento y ecuaciones de Friedmann

Una vez que se conoce el escalar de Ricci, así cómo el tensor de Ricci, ya se conoce la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein. Falta la parte derecha, o sea conocer el tensor de energía momento. Cómo puede verse  $G_{0i} = 0$  (la parte izquierda de las ecs. de Einstein componentes 0i es 0), por lo que por las ecuaciones de campo  $T_{0i} = 0$ . Esto va acorde a lo esperado porque de no ser 0 se rompería la isotropía. Además, por la forma de  $R_{ij}$ ,  $G_{ij} \propto g_{ij}$ , entonces  $T_{ij} \propto g_{ij}$ . Además de eso, la componente 00 debe ser  $T_{00} = -c^2\rho$  pues esta componente esta relacionada con la presión. Cómo la parte espacial esta relacionada con la presión se puede proponer un ansatz de  $T_{ij} = g_{ij}p$  con  $p$  la presión. Esto tensorialmente se puede escribir cómo [37]

$$T_{\mu\nu} = (c^2\rho + p) U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

con  $U_\mu$  la 4-velocidad del fluido que satisface  $U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$ . Esta forma del tensor de energía-momento describe un fluido perfecto debido a que no incluye términos de viscosidad u otros términos. Finalmente, combianando las ecuaciones (2.24), (2.25) y (2.26) con las ecuaciones de campo de Einstein (1.57) las *ecuaciones de Friedmann* son

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.27)$$

y

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (2.28)$$

La segunda ecuación se conoce cómo *segunda ecuación de Friedmann*, *ecuación de aceleración* o cómo la *ecuación de Raychaudhuri*. La densidad y presión de estas ecuaciones son las densidades y presiones totales tomando en cuenta todas las componentes del universo.

#### 2.4.4. Evolución de $\rho$

Contrayendo  $\alpha$  con  $\mu$  en las identidades de Bianchi (1.39)

$$\nabla_\gamma R_{\beta\nu} + \nabla_\mu R^\mu_{\beta\nu\gamma} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\gamma\alpha} = 0, \quad (2.29)$$

y usando las simetrías del tensor de Riemann

$$\nabla_\gamma R_{\beta\nu} - \nabla_\nu R_{\beta\gamma} + \nabla_\mu R^\mu_{\beta\nu\gamma} = 0. \quad (2.30)$$

Contrayendo  $\beta$  y  $\nu$

$$\nabla_\gamma R - 2\nabla_\nu R^\nu_\gamma = 0, \quad (2.31)$$

lo cuál se puede reescribir cómo

$$\nabla^\nu \left( R_{\nu\gamma} - \frac{1}{2} R g_{\nu\gamma} \right) = 0, \quad (2.32)$$

donde se usó la propiedad de la conexión de Levi-Civita, donde la derivada covariante de la métrica es 0 y el hecho de que la métrica *sube y baja índices*. Sin embargo, nótese que el término entre paréntesis es la parte izquierda de las ecuaciones de campo de Einstein, por lo tanto la derivada covariante de la parte derecha igual debe ser 0. Luego

$$\nabla^\nu T_{\nu\mu} = 0. \quad (2.33)$$

Elevando los índices de T se sigue  $\nabla_\nu T^{\nu\mu} = 0$  y resolviendo la componente 0

$$\partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^0_{\mu\nu} T^{\nu\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} T^{0\nu} = 0, \quad (2.34)$$

desarrollando

$$\dot{\rho} + 3H \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (2.35)$$

Si se propone una ecuación de estado

$$w = \frac{p}{c^2 \rho}, \quad (2.36)$$

con  $w$  constante, esta ecuación puede resolverse cómo

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (2.37)$$

con  $\rho_0$  la densidad al día de hoy.

#### 2.4.5. Parámetros de densidad

Las ecuaciones de Friedmann pueden reescribirse de una forma más simple haciendo uso de los parámetros de densidad, los cuáles están dados por el cociente entre la densidad y la densidad crítica, la cuál es la densidad requerida para que el Universo tenga curvatura

espacial 0 ( $k = 0$ ). De la primera ecuación de Friedmann (2.27) se sigue que si  $k = 0$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{cr}}, \quad (2.38)$$

donde  $\rho_{\text{cr}}$  es la densidad crítica, entonces

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.39)$$

por lo que con esta definición, los parámetros de densidad están dados por

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{\text{cr}}} = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}, \quad (2.40)$$

por lo que la ecuación de Friedmann (2.27) se puede reescribir cómo

$$\Omega + \Omega_k = 1, \quad (2.41)$$

donde se definió  $\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{H^2 a^2}$ .

## 2.5. Parámetros cosmológicos

Dado un conjunto de datos, por ejemplo supernovas de tipo 1A, ondas gravitacionales, relojes cósmicos, se puede calcular el mejor ajuste de los parámetros cosmológicos.

### 2.5.1. La constante de Hubble

Este es uno de los parámetros más importantes y controversiales de la cosmología. Cuantifica la expansión actual del Universo, es decir,  $H(a = 1) = H_0$ . La medición de esta constante fundamental en cosmología ha abierto una amplia línea de investigación, muy activa en la cosmología actual, llamada *problema de la constante de Hubble*. La colaboración SH0ES, en su último paper reportó un valor de [30]

$$H_0 = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.42)$$

el cuál es independiente de cualquier modelo. En cambio, la colaboración Planck, en su último paper de 2018 reportó un valor de [28]

$$H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.43)$$

el cuál es dependiente del modelo estándar  $\Lambda$ CDM, del cuál se hablará más adelante. Además de este valor, existe un camino alternativo considerando gigantes rojas en vez de cefeidas cómo en la colaboración SH0ES y que es igual independiente del modelo y con muestras del universo tardío [31]

$$H_0 = 69.8 \pm 2.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.44)$$

Los primeros dos resultados están en una tensión de  $5\sigma$  [30], por lo que es necesario considerar modelos alternativos a  $\Lambda$ CDM para explicar esta discrepancia. El tercer valor es consistente con el de Planck, sin embargo, tiene un error mucho mayor, provenientes de la estadística y errores sistemáticos [31]. Por ello, y el hecho de que SH0ES trabajó con los errores sistemáticos, intentando reducirlos enormemente [30], este es el mejor valor en el Universo tardío independiente de modelos cosmológicos. En este trabajo se considerarán algunos tipos de energía oscura dinámica.

### 2.5.2. Parámetros de densidad actuales

Los otros parámetros que se considerarán en el presente trabajo son los parámetros de densidad introducidos en la sección anterior evaluados al día de hoy, es decir

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0\text{cr}}} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}. \quad (2.45)$$

En un modelo cosmológico se consideran diversas especies, cada una con su parámetro de densidad respectivo. Dada una ecuación de estado  $w$  constante para cada especie, con ayuda de (2.37), su parámetro de densidad al día de hoy es

$$\Omega_{0j} = \frac{8\pi G\rho_j a^{3(1+w_j)}}{3H_0^2}, \quad (2.46)$$

y por lo tanto

$$\Omega_{0j} a^{-3(1+w)} = \frac{8\pi G\rho_j}{3H_0^2}. \quad (2.47)$$

Empleando este resultado y el hecho de que la densidad de las ecuaciones de Friedmann es la densidad total se sigue que

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_j \Omega_{0j} a^{-3(1+w)} + \Omega_k, \quad (2.48)$$

y evaluando al día de hoy

$$\sum_j \Omega_{0j} + \Omega_k = 1, \quad (2.49)$$

entonces los parámetros de densidad no son independientes, sino que uno se puede escribir en términos del resto. En lo que resta de la presente tesis se omitirá el 0 en la notación de los parámetros de densidad al día de hoy, sabiendo que están evaluados con  $a = 1$ .

## 2.6. El modelo estándar $\Lambda$ CDM

El modelo  $\Lambda$ CDM es el estándar de la cosmología, el que tiene más evidencia observacional. Sin embargo, cómo se vio anteriormente, asumiendo este modelo, el valor en la constante de Hubble tiene una tensión estadística de  $5\sigma$ , por lo cuál deben estudiarse modelos alternativos. Sin embargo, dicho modelo que resuelva la tensión en la constante de

Hubble y además tenga la evidencia observacional de  $\Lambda$ CDM no existe hasta la actualidad y la búsqueda de este será uno de los temas principales de la cosmología en los siguientes años. Sin embargo, debido a sus éxitos pasados y a que es el modelo con más evidencia, es importante estudiar y comprender este modelo. Este modelo asume que el universo tiene dos componentes que dominan el contenido energético del universo: la constante cosmológica y la materia oscura fría.

La constante cosmológica  $\Lambda$  es un fluido perfecto con una ecuación de estado negativa, o sea, con presión negativa, lo cuál causa la expansión acelerada del universo observada. El otro componente dominante es la materia oscura fría, la cual es un tipo de materia que sólo interactúa gravitacionalmente pero no electromagnéticamente, por lo que no es posible detectarla directamente. Además de esto se le llama fría porque se supone no relativista, es decir que su movimiento es mucho menor que la velocidad de la luz, y por ello tiene una ecuación de estado igual a la de la materia ordinaria. Finalmente, el universo esta compuesto de materia bariónica (ordinaria, toda la del modelo estándar de partículas) más radiación (neutrinos, fotones, y demás materia relativista). Cada uno de estos 4 componentes tiene una ecuación de estado dada por

- Constante cosmológica  $\Lambda$  :  $w = -1$
- Materia oscura fría :  $w = 0$
- Radiación :  $w = 1/3$
- Materia bariónica :  $w = 0$

Estas ecuaciones de estado para la materia provienen de asumir que las componentes son aproximadamente un gas ideal en cuyo caso  $w = C^2/c^2$ , con  $C$  la velocidad termal característica de las partículas. Por ello, la materia oscura fría y bariónica tienen una ecuación de estado aproximadamente 0, debido a que sus partículas tienen una velocidad mucho menor a la de la luz. En el caso de la radiación se trabaja con un gas de fotones o neutrinos a velocidades relativistas y la energía oscura es una construcción fenomenológica para explicar la expansión acelerada del Universo. Por lo tanto con estas ecuaciones de estado, que se asumen constantes, la ecuación de Friedmann (2.48) es (con el cambio de variable del factor de escala al corrimiento al rojo)

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_b(1+z)^3 + \Omega_{\text{cdm}}(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}, \quad (2.50)$$

donde los subíndices significan b para materia bariónica, cdm para materia oscura fría, r para radiación,  $k$  para curvatura y  $\Lambda$  para la constante cosmológica. Dado que en esta ecuación, la materia bariónica y la materia oscura fría tienen la misma ecuación de estado, se puede unir estos dos componentes en una llamada materia  $\Omega_M = \Omega_b + \Omega_{\text{cdm}}$ . Entonces

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}, \quad (2.51)$$

y los parámetros de densidad satisfacen

$$\Omega_M + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1. \quad (2.52)$$

## 2.7. Modelos de energía oscura dinámica

Anteriormente se mencionó el problema de la constante de Hubble, el cuál es uno de los grandes problemas que tiene el modelo  $\Lambda$ CDM. Debido a estos problemas, es necesario considerar modelos alternativos que potencialmente puedan resolver sus problemas. Una posibilidad es considerar que la densidad de energía oscura no es constante, sino que varía con la evolución del universo. Esta clase de modelos son modelos de energía oscura dinámica, y se estudiarán en la presente tesis.

En esta sección se considerarán modelos donde la energía oscura ya no es una constante cosmológica, y en cambio su densidad varía con el corrimiento al rojo, es decir considerar  $\rho_{\text{de}} = \rho_{\text{de}}(z)$  donde el subíndice de se refiere a la energía oscura. En este caso la ecuación de continuidad arroja

$$\rho(t) = \rho_0 \exp \left( -3 \int_t^{t_0} dt' H(t') (1 + w(t')) \right), \quad (2.53)$$

para escribir esto en términos del corrimiento al rojo se requiere hacer el cambio de variable de  $t$  a  $z$ . Los límites de la integral son de un tiempo  $t$  a  $t_0$ , el tiempo en la actualidad. Al cambiar al corrimiento al rojo, los nuevos límites deben ser de un corrimiento al rojo  $z$  al corrimiento al rojo actual que es 0. Para el cambio de variable se deben recordar las definiciones del factor de Hubble y del corrimiento al rojo

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{adt} \quad , \quad 1 + z = \frac{1}{a}, \quad (2.54)$$

por lo cuál tomando el doble cambio de variable y estas expresiones  $dt = \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} dz$

$$dt = -\frac{dz}{H(1+z)}, \quad (2.55)$$

y por lo tanto

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left( 3 \int_0^z dz' \frac{1 + w(z')}{1 + z'} \right). \quad (2.56)$$

Con esta expresión puede calcularse la evolución de la densidad de una energía oscura dinámica con ecuación de estado  $w = w(z)$ . Por lo tanto la ecuación de Friedmann (2.48) para esta energía oscura dinámica es

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_{\text{de}} f(z)}, \quad (2.57)$$

donde  $f(z)$  esta dada por

$$f(z) = \exp \left( 3 \int_0^z dz' \frac{1 + w(z')}{1 + z'} \right). \quad (2.58)$$

En la presente tesis, además de considerarse el modelo  $\Lambda$ CDM, se estudiarán tres dis-

tintas parametrizaciones de energía oscura. Se supondrá que el Universo tiene curvatura espacial nula, debido a que la evidencia observacional apunta a que  $\Omega_k \approx 0$  [38, 28], y que la radiación es despreciable, pues  $\Omega_r$  es del orden de  $10^{-4}$  y en bajos corrimientos al rojo, que son las bases de datos con las que se trabajarán, su contribución es muy pequeña, es decir  $\Omega_k \approx 0 \approx \Omega_r$ . Y de esta forma se puede escribir  $\Omega_{de} = 1 - \Omega_M$ .

### 2.7.1. Chevallier-Polarski-Linder (CPL)

Esta parametrización considera una ecuación de estado de la forma [39, 40]

$$w(z) = w_0 + \left( \frac{z}{1+z} \right) w_1, \quad (2.59)$$

la cuál tiene dos parámetros libres  $w_0, w_1$  y converge para altos corrimientos al rojo. Sustituyendo esta función en la expresión (2.57)

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + (1 - \Omega_m) \exp\left(-\frac{3w_1z}{1+z}\right) (1+z)^{3(1+w_0+w_1)}}. \quad (2.60)$$

### 2.7.2. Barboza-Alcaniz (BA)

Este modelo toma una ecuación de estado [41]

$$w(z) = w_0 + \frac{z(1+z)}{1+z^2} w_1. \quad (2.61)$$

La cuál igualmente converge para corrimientos al rojo grandes. Aún más, esta parametrización converge también si  $z \rightarrow -1$ , lo cuál es útil al considerar toda la historia del universo. El factor de escala  $a = 0$  corresponde al big bang, el valor  $a = 1$  al día de hoy y el valor  $a \rightarrow \infty$  corresponde al futuro en una edad arbitrariamente grande del universo. Por ello la historia completa del universo se obtiene al considerar  $a \in [0, \infty)$  o bien  $z \in (-1, \infty)$ . Para esta parametrización, la ecuación de Friedmann (2.57) es

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)(1+z)^{3(1+w_0)}(1+z^2)^{3w_1/2}}. \quad (2.62)$$

### 2.7.3. Low Correlation (LC)

Esta tercera parametrización tiene una ecuación de estado [42]

$$w(z) = \frac{(-z + z_c)w_0 + z(1 + z_c)w_c}{(1+z)z_c}, \quad (2.63)$$

donde  $w_0 = w(z=0)$  y  $w_c = w_c(z_c)$  y  $z_c$  es un corrimiento al rojo de forma que  $(w_0, w_z)$  estén no correlacionados. Se considerará un valor de  $z_c = 0.5$ , un valor conservador con el que se tiene una baja correlación entre  $w_0$  y  $w_c$ . En este caso, la ecuación de Friedmann

(2.57) es

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m) \exp\left(\frac{9(w_0 - w_c)z}{1+z}\right)} (1+z)^{3(1-2w_0+3w_c)}. \quad (2.64)$$

## 2.8. Distancias en Cosmología

En cosmología hay varias formas de medir la distancia, en esta sección se presentarán algunas de las más importantes.

### 2.8.1. Distancia comóvil

Esta es una distancia que no crece con la expansión del Universo, y fue presentada anteriormente en la ecuación (2.12). Realizando el cambio de variable del tiempo al corrimiento al rojo (2.55) se sigue

$$D_C(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.65)$$

Esta distancia se puede escribir de forma distinta si se toma la distancia de Hubble  $D_H = \frac{c}{H_0}$  y si se define  $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$

$$D_C(z) = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.66)$$

por lo que como puede observarse tiene unidades de distancia debido a que  $E(z)$  es adimensional y  $D_H$  es una distancia.

### 2.8.2. Distancia comóvil transversa

Esta distancia es equivalente a la comóvil en el caso en el que la curvatura espacial del Universo es 0, es decir si  $\Omega_k = 0$ , en otros casos está definida por [43]

$$D_M(z) = \begin{cases} \frac{D_H}{(\Omega_k)^{1/2}} \sinh \left[ \frac{(\Omega_k)^{1/2} D_C(z)}{D_H} \right] & \text{si } \Omega_k > 0 \\ D_C(z) & \text{si } \Omega_k = 0 \\ \frac{D_H}{(-\Omega_k)^{1/2}} \sin \left[ \frac{(-\Omega_k)^{1/2} D_C(z)}{D_H} \right] & \text{si } \Omega_k < 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

El significado de esta distancia es la distancia comóvil de dos eventos en el mismo corrimiento al rojo separados en el cielo nocturno por  $\delta\theta$ . Por ello esta distancia es  $D_M(z)\delta\theta$ . Esta distancia es importante dado que las demás se escribirán en términos de esta.



### 2.8.3. Distancia diametral angular

Esta distancia está definida cómo el cociente de su tamaño físico transverso con su tamaño angular en radianes. Esta distancia está dada por [43]

$$D_A = \frac{D_M(z)}{1+z}, \quad (2.68)$$

en corrimientos al rojo pequeños esta distancia es casi igual a la distancia comóvil transversa y no tiende a infinito con  $z \rightarrow \infty$ .

### 2.8.4. Distancia luminosa

Esta distancia se calcula midiendo el flujo y la luminosidad de un objeto integrados en todas las frecuencias y esta dada por

$$D_L = \left( \frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2}, \quad (2.69)$$

además esta distancia está relacionada con la distancia comóvil transversa mediante [43]

$$D_L(z) = (1+z)D_M = (1+z)^2 D_A. \quad (2.70)$$

La magnitud aparente de una fuente de radiación astronómica en un paso de banda fotométrico se define cómo el cociente del flujo aparente de esa fuente con el de la estrella brillante del firmamento Vega. Por otro lado la magnitud absoluta se define cómo la magnitud que tendría la fuente si se observara a una distancia de 10 pc. El módulo de distancia es la resta de la magnitud aparente  $m$  con la absoluta  $M$  y está dada por

$$\mu = m - M = 5 \log \left( \frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right), \quad (2.71)$$

### 2.8.5. Distancia sirena

Esta es la distancia a una fuente de ondas gravitacionales, causada por una colisión de estrellas binarias, las cuáles pueden ser un par de agujeros negros, un par de estrellas de neutrones o una estrella de neutrones y un agujero negro. Esta distancia se tratará en detalle en el siguiente capítulo, el cuál será sobre las ondas gravitacionales.

## 2.9. Teoría de perturbaciones lineales tensoriales cosmológicas

Anteriormente se trabajó con el principio cosmológico, el cuál asume que el universo es tanto isotrópico cómo homogéneo a gran escala. Sin embargo, en escalas pequeñas este principio se rompe. Una galaxia con espacio vacío a su alrededor claramente rompe el principio cosmológico, el cuál es válido en escalas sobre 200 Mpc. Por ello la cosmología

con la métrica FLRW no permite predecir la formación de galaxias y clusters, los cuáles son desviaciones fuertes del principio cosmológico en escalas pequeñas. En esta sección se considerarán pequeñas desviaciones tensoriales del principio cosmológico, las cuáles explican la propagación de las ondas gravitacionales en el Universo.

En esta sección se considerará un universo plano con  $\Omega_k = 0$  por simplicidad y la evidencia observacional de que el universo es espacialmente plano. En esta sección, se trabajará con unidades naturales donde  $\hbar = 1 = c$ . Antes de trabajar con las perturbaciones tensoriales exclusivamente, se hará una introducción general de la teoría de perturbaciones lineales cosmológicas.

### 2.9.1. Perturbación de la métrica FLRW

La métrica FLRW describe un espacio-tiempo de fondo (background), en el cuál se satisface el principio cosmológico en todas las escalas, por lo que para considerar desviaciones de este se requiere considerar desviaciones de la métrica FLRW. Esta métrica describirá al espacio-tiempo físico y se denotará por  $g_{\mu\nu}$ , mientras que el de fondo se denotará con una barra  $\bar{g}_{\mu\nu}$  para diferenciar ambos. Por ello se define la diferencia entre ambas métricas

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \bar{g}_{\mu\nu}(x), \quad (2.72)$$

en un punto  $x$  de las variedades. Esta definición es un abuso de notación pues  $g_{\mu\nu}$  y  $\bar{g}_{\mu\nu}$  son tensores definidos en diferentes variedades y por ende con diferentes cartas que definirán  $x$  en cada una. Por ello para que esta diferencia tenga significado en este contexto se requiere una función que mapee cada punto del espacio-tiempo de fondo al físico. Esta función se llama *norma* y permite usar una carta fija en el espacio-tiempo de fondo para los puntos en el espacio-tiempo físico. Por lo tanto, en este espacio-tiempo físico se puede seguir empleando las coordenadas del espacio-tiempo de fondo, las cuáles serán las coordenadas espaciales y el tiempo conforme por simplicidad. La métrica  $g_{\mu\nu}$  tiene 10 componentes independientes y en un gauge genérico se escriben cómo [37]

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -(1 + 2\Psi(\eta, \mathbf{x})) & w_i(\eta, \mathbf{x}) \\ w_i(\eta, \mathbf{x}) & \delta_{ij}(1 + 2\phi(\eta, \mathbf{x})) + \chi_{ij}(\eta, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

con  $\delta^{ij}\chi_{ij} = 0$ , es decir la parte tensorial tiene traza 0. Y las funciones  $\Psi$ ,  $w_i$ ,  $\phi$ ,  $\chi_{ij}$  son funciones del espacio-tiempo de fondo y dependen tanto del tiempo conforme cómo de las coordenadas por lo que estas funciones no satisfacen el principio cosmológico y son de primer orden por lo que el producto de dos de estas funciones es despreciable.

### 2.9.2. La descomposición escalar-vector-tensor (SVT)

Esta descomposición fue introducida por Lifshitz en 1946 [44]. La métrica perturbada (2.73) tiene dos funciones escalares  $\Psi$ ,  $\phi$ , un 3-vector  $w_i$  y un 3-tensor de orden 2  $\chi_{ij}$ . La descomposición escalar-vector-tensor permite obtener un escalar del 3-vector  $w_i$  así cómo

un escalar y un vector del 3-tensor  $\chi_{ij}$ . Estos hechos se pueden obtener del teorema de Helmholtz

**Teorema 1** (de Helmholtz). Sea  $w_i$  un campo vectorial continuo con derivadas parciales continuas, entonces puede expresarse únicamente en términos de su parte longitudinal más su parte ortogonal por

$$w_i = w_i^{\parallel} + w_i^{\perp}, \quad (2.74)$$

donde la parte longitudinal tiene rotacional 0 y la parte ortogonal divergencia 0

$$\epsilon^{ijk} \partial_j w_k^{\parallel} = 0 \quad , \quad \partial^k w_k^{\perp} = 0 \quad (2.75)$$

con  $\epsilon$  el símbolo de Levi-Civita. Cómo la parte longitudinal tiene rotacional 0, se puede emplear el teorema de Stokes para escribirlo cómo el gradiente de un escalar  $w_i^{\parallel} = \partial_i w$ .

Por este teorema, el vector  $w_i$  se puede escribir cómo

$$w_i = \partial_i w + W_i, \quad (2.76)$$

donde  $w$  es la parte escalar y  $W_i$  la parte vectorial que se define  $W_i = w_i^{\perp}$  y satisface  $\partial^i W_i = 0$ . En el caso de 3-tensores de orden 2, el teorema de Helmholtz se extiende a

**Teorema 2** (de Helmholtz para 3-tensores). Sea  $\chi_{ij}$  un 3-tensor de orden 2 continuo y con derivadas parciales continuas, entonces puede expresarse únicamente en términos de su parte longitudinal, mas su parte ortogonal más su parte transversa mediante

$$\chi_{ij} = \chi_{ij}^{\parallel} + \chi_{ij}^{\perp} + \chi_{ij}^T, \quad (2.77)$$

donde  $\parallel$  se refiere a la parte longitudinal,  $\perp$  a la parte ortogonal y  $T$  a la parte transversa. Cada una de estas componentes satisfacen [37]

$$\epsilon^{ijk} \partial^m \partial_j \chi_{mk}^{\parallel} = 0 \quad , \quad \partial^i \partial^j \chi_{ij}^{\perp} = 0 \quad , \quad \partial^i \chi_{ij}^T = 0. \quad (2.78)$$

Además cada una de las partes se escriben cómo

$$\chi_{ij}^{\parallel} = \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \right) 2\mu \quad , \quad \chi_{ij}^{\perp} = \partial_j A_i + \partial_i A_j, \quad (2.79)$$

donde  $\partial^i A_i = 0$ , es decir su divergencia es 0. Cómo puede observarse la parte longitudinal incluye un escalar  $\mu$ , la parte ortogonal un 3-vector  $A_i$  y la transversa es un 3-tensor de orden 2.

Por ello, este tensor se escribe

$$\chi_{ij} = \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \right) 2\mu + \partial_j A_i + \partial_i A_j + \chi_{ij}^T. \quad (2.80)$$

Y por lo tanto la métrica en el espacio-tiempo físico está dada por

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -(1 + 2\Psi) & & & \\ \partial_i w + W_i & \delta_{ij}(1 + 2\phi) + (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k) 2\mu + \partial_j A_i + \partial_i A_j + \chi_{ij}^T & & \\ & & & \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Por lo que la métrica perturbada tiene una parte escalar, una vectorial y una tensorial. Los vectores y tensores en ella no pueden descomponerse a escalares o vectores. Las partes escalares, vectorial y tensorial se pueden trabajar por separado debido a que si se trabajaran juntas se tendrían términos de segundo orden que se consideran despreciables a primer orden. Por lo tanto, la parte tensorial de las perturbaciones es

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} + \chi_{ij}^T \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

donde  $\chi_{ij}^T$  tiene divergencia y traza 0, es decir  $\partial^i \chi_{ij}^T = 0 = \delta^{ij} \chi_{ij}^T$ . Aún más, esta parte tensorial es invariante de Gauge [37] por lo que en cualquier Gauge que se trabaje tiene la misma forma.

### 2.9.3. Perturbación del tensor de energía-momento

Una vez que se conoce la forma de la métrica en el espacio físico, se requiere conocer el tensor de energía-momento para resolver las ecuaciones de campo (1.57). El tensor de energía-momento considerado en el espacio de fondo (2.26) era el de un fluido perfecto isotrópico y homogéneo. En este caso, para estudiar perturbaciones se requiere un tensor de energía-momento que incluya la idea de disipación de energía y que rompa el principio cosmológico. Este está dado por [45, 37]

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + (p + \pi)(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) + \pi_{\mu\nu}, \quad (2.83)$$

por lo que la adición que se le hace es el escalar  $\pi$  de viscosidad y el tensor  $\pi_{\mu\nu}$  de estrés anisotrópico sin traza y que satisface  $\pi_{\mu\nu} U^\nu = 0$ . Estos elementos rompen el fluido perfecto, así como la isotropía y la homogeneidad, por lo que son términos perturbativos. Para el resto de tensores se pueden escribir de forma similar a cómo se escribe la diferencia entre la métrica física y la de fondo (2.72). Para una cantidad arbitraria  $A$ , en el espacio físico se puede escribir cómo

$$A(\eta, \mathbf{x}) = \bar{A}(\eta) + \delta A(\eta, \mathbf{x}), \quad (2.84)$$

o sea que se escribe cómo la cantidad en el espacio de fondo más una perturbación a primer orden. La cantidad en el espacio de fondo sólo depende del tiempo conforme por el principio cosmológico mientras que la perturbación depende del tiempo conforme y de las coordenadas. De esta forma, es posible escribir

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho \quad , \quad p = \bar{p} + \delta p \quad , \quad U_\mu = \bar{U}_\mu + \delta U_\mu, \quad (2.85)$$

las cuales son la densidad, presión y 4-velocidad del fluido en el espacio físico. Al igual que en el caso de la métrica, en el tensor de energía-momento se emplea la descomposición

SVT y cómo sólo se trabajará del lado izquierdo de las ecuaciones de campo con la parte tensorial, se hará lo mismo con el tensor de energía-momento. Y el único término que tiene una parte tensorial es  $\pi_{\mu\nu}$ . Sin embargo este es un 4-tensor de orden 2 por lo que no se le puede aplicar el teorema de Helmholtz. Sin embargo, si se trabajan en las coordenadas comóviles, cómo  $U^\mu$  es la 4-velocidad del fluido en el espacio de fondo se debe satisfacer  $\bar{U}^i = 0$  debido a que en estas coordenadas el observador se mueve junto con la materia del universo. Por ello la condición  $\pi_{\mu\nu}\bar{U}^\nu = 0$  es  $\pi_{\mu 0}\bar{U}^0 = 0$  para las coordenadas comóviles. Recordando además que  $\bar{g}_{\mu\nu}\bar{U}^\mu\bar{U}^\nu = 0$ , entonces en estas coordenadas comóviles  $a^2(\bar{U}^0)^2 = 1$ . Por lo tanto  $\pi_{\mu 0} = 0$ . Además cómo el tensor de energía-momento es simétrico,  $\pi_{\mu\nu}$  también debe ser simétrico para satisfacer la igualdad (2.83). Luego  $\pi_{\mu 0} = 0 = \pi_{0\mu}$ , lo que lleva a concluir que en las coordenadas comóviles, este tensor sólo tiene componentes espaciales a las cuáles ya se le puede aplicar el teorema de Helmholtz. Por lo tanto

$$\pi_{ij} = \pi_{ij}^{\parallel} + \pi_{ij}^{\perp} + \pi_{ij}^T, \quad (2.86)$$

donde la parte longitudinal es una parte escalar, la parte ortogonal vectorial y la transversa es tensorial y satisface  $\partial^i\pi_{ij}^T = 0 = \delta^{ij}\pi_{ij}^T$ . Por lo tanto, la parte tensorial del tensor de energía-momento es

$$T_{ij} = \pi_{ij}^T. \quad (2.87)$$

Esta parte tensorial es puramente perturbativa. Se calculará el tensor con índices cruzados  $T^i_j$  para ello se requiere subir el índice. Recordando que  $T_{ij}$  es puramente perturbativo

$$T^i_j = \bar{g}^{i\mu}T_{\mu j} = \bar{g}^{ik}T_{kj}, \quad (2.88)$$

debido a que  $T_{0j} = 0$  para la parte tensorial. La métrica FLRW en el espacio de fondo con el tiempo conforme es  $\bar{g}_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu}$  con  $\eta_{\mu\nu}$  la métrica de Minkowski. Por lo tanto, para satisfacer la relación  $\bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$  se requiere que  $\bar{g}^{\mu\nu} = \frac{\eta^{\mu\nu}}{a^2}$ . Por lo tanto

$$T^i_j = \frac{1}{a^2}\delta^{ik}\pi_{kj} \equiv \Pi_{ij}, \quad (2.89)$$

donde se definió  $\Pi_{ij} \equiv \frac{1}{a^2}\delta^{ik}\pi_{kj}$ . Esta es la parte del tensor de energía-momento con la que se trabajará.

#### 2.9.4. Ecuaciones de campo para las perturbaciones tensoriales

Una vez que se conoce la métrica parte tensorial así cómo la parte tensorial del tensor de energía-momento, se pueden calcular las ecuaciones de campo para estas perturbaciones. Recordando las ecuaciones de campo con índices cruzados

$$g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}R\delta_\nu^\mu = G^\mu_\nu, \quad (2.90)$$

usando cálculo variacional para encontrar las ecuaciones perturbativas

$$\delta G^\mu{}_\nu = \delta g^{\mu\alpha} \bar{R}_{\alpha\nu} + \bar{g}^{\mu\alpha} \delta R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu \delta R. \quad (2.91)$$

Por ello, se requiere conocer la perturbación del tensor de Ricci, así cómo del escalar de Ricci. Como  $g_{\mu\nu}$  es una métrica, se requiere que  $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$ , por lo tanto la métrica inversa del espacio físico es

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} - \chi_{ij}^T \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

y por lo tanto

$$\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\chi_{ij}^T \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Antes de continuar, la perturbación de la métrica se escribirá cómo

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 h_{\mu\nu}, \quad (2.94)$$

por lo tanto  $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + a^2 h_{\mu\nu}$ . El tensor  $h$  es un término de primer orden. Al igual que en el caso de gravedad linealizada, cómo se está trabajando a primer orden

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{a^2} h^{\mu\nu}, \quad (2.95)$$

donde  $h^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$ , debido a qué cómo la perturbación es muy pequeña, la métrica del espacio de fondo es la que eleva los índices. De esta forma

$$\delta g^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (2.96)$$

Y por lo tanto

$$\delta g^{00} = -\frac{h_{00}}{a^2}, \quad \delta g^{0i} = \frac{h_{0i}}{a^2}, \quad \delta^{ij} = -\frac{h_{ij}}{a^2}, \quad (2.97)$$

que en el caso particular de las perturbaciones tensoriales se reduce a

$$\delta g^{ij} = -\frac{\chi_{ij}^T}{a^2}, \quad (2.98)$$

cómo es de esperarse. El tensor de Ricci se deduce en términos de los símbolos de Christoffel y de sus derivadas, por lo que se requiere calcularse la variación de los símbolos. Variando la expresión para los símbolos correspondientes a la conexión de Levi-Civita

$$\delta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} (\partial_\nu \delta g_{\beta\mu} + \partial_\mu \delta g_{\beta\nu} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}) - \bar{g}^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} \bar{\Gamma}^\gamma{}_{\mu\nu}. \quad (2.99)$$

Por ello se requiere el valor de las perturbaciones y de los símbolos de Christoffel en el espacio de fondo. Considerando el tiempo conforme, los símbolos de Christoffel en el

espacio de fondo son [37]

$$\bar{\Gamma}^0_{00} = \mathcal{H} \quad , \quad \bar{\Gamma}^0_{ij} = \mathcal{H}\delta_{ij} \quad , \quad \bar{\Gamma}^i_{0j} = \mathcal{H}\delta^i_j, \quad (2.100)$$

donde  $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$  es el factor de Hubble conforme y la prima denota derivadas respecto al tiempo conforme. El resto de los símbolos de Christoffel en el espacio de fondo son 0. Para el caso de las perturbaciones de los símbolos de Christoffel, empleando la expresión (2.99)

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^0_{00} &= -\frac{1}{2}h'_{00} \quad , \quad \delta\Gamma^0_{i0} = -\frac{1}{2}(\partial_i h_{00} - 2\mathcal{H}h_{0i}) \quad , \quad \delta\Gamma^i_{00} = h'_{i0} + \mathcal{H}h_{i0} - \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \\ \delta\Gamma^0_{ij} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_j h_{0i} + \partial_i h_{0j} - h'_{ij} - 2\mathcal{H}h_{ij} - 2\mathcal{H}\delta_{ij}h_{00}\right) \quad , \quad \delta\Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}h'_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0}), \\ \delta\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}(\partial_k h_{ij} + \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{jk} - 2\mathcal{H}\delta_{jk}h_{i0}). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Al igual que antes, en estas expresiones la prima denota derivada respecto al tiempo conforme. Para el caso de las perturbaciones tensoriales sólo tres de estos símbolos son no triviales

$$\delta\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\left(\chi_{ij}^{T'} - 2\mathcal{H}\chi_{ij}^T\right) \quad , \quad \delta\Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\chi_{ij}^{T'} \quad , \quad \delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(\partial_k \chi_{ij}^T + \partial_j \chi_{ik}^T - \partial_i \chi_{jk}^T\right). \quad (2.102)$$

En el caso de la perturbación del tensor de Ricci, se sigue que

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^\beta_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\beta} \delta\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta} \bar{\Gamma}^\beta_{\nu\alpha}, \quad (2.103)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta R_{00} &= -\frac{1}{2}\partial_i \partial_i h_{00} - \frac{3}{2}\mathcal{H}h'_{00} + \partial_i h'_{i0} + \mathcal{H}\partial_i h_{i0} - \frac{1}{2}(h''_{ii} + \mathcal{H}h'_{ii}) \\ \delta R_{0i} &= -\mathcal{H}\partial_i h_{00} - \frac{1}{2}(\partial_j \partial_j h_{0i} - \partial_i \partial_j h_{0j}) + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)h_{i0} - \frac{1}{2}(\partial_i h'_{jj} - \partial_j h'_{ij}) \\ \delta R_{ij} &= \frac{1}{2}\partial_i \partial_j h_{00} + \frac{1}{2}\mathcal{H}\delta_{ij}h'_{00} + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_{ij}h_{00} - \frac{1}{2}(\partial_k \partial_k h_{ij} - \partial_k \partial_j h_{ki} - \partial_k \partial_i h_{jk} + \partial_i \partial_j h_{kk}) \\ &+ \frac{1}{2}h''_{ij} + \mathcal{H}h'_{ij} + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)h_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}\delta_{ij}h'_{kk} - \mathcal{H}\delta_{ij}\partial_k h_{0k} - \frac{1}{2}(\partial_j h'_{0i} + \partial_i h'_{0j}) - \mathcal{H}(\partial_j h_{0i} + \partial_i h_{0j}). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Para resolver las ecuaciones de campo, únicamente falta conocer la variación del escalar de Ricci. Cómo este escalar esta dado por  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , entonces

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} + \bar{g}^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (2.105)$$

y cómo se ve, se necesita el valor del tensor de Ricci en el espacio de fondo con el tiempo

conforme, el cuál está dado por

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\alpha} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \bar{\Gamma}^\beta_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\beta} \bar{\Gamma}^\beta_{\nu\alpha}, \quad (2.106)$$

sustituyendo los valores de los símbolos de Christoffel

$$\bar{R}_{00} = 3\mathcal{H}' \quad , \quad \bar{R}_{ij} = \delta_{ij} (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2), \quad (2.107)$$

por lo tanto la variación del escalar de Ricci esta dada por

$$\delta R = \frac{1}{a^2} \left( \partial_i \partial_i h_{00} + 3\mathcal{H} h'_{00} + 6 (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) h_{00} - 2\partial_i h'_{0i} - 6\mathcal{H} \partial_i h_{0i} + h''_{ii} + 3\mathcal{H} h'_{ii} - \partial_j \partial_j h_{ii} + \partial_i \partial_j h_{ij} \right). \quad (2.108)$$

Los resultados de las expresiones (2.104) y (2.108) son para una perturbación general, trabajando con la parte tensorial debe recordarse que  $\partial_i \chi_{ij} = 0 = \chi_{ii}$ , por lo que la variación escalar de Ricci es 0. Aún más, solo la parte espacial de la variación del tensor de Ricci es no trivial y dada por

$$\delta R_{ij} = -\frac{1}{2} \partial_k \partial_k \chi_{ij}^T + \frac{1}{2} \chi_{ij}''^T + \mathcal{H} \chi_{ij}'^T + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \chi_{ij}^T. \quad (2.109)$$

Por lo tanto las ecuaciones de campo perturbadas son (2.91)

$$\frac{1}{2} \chi_{ij}''^T + \mathcal{H} \chi_{ij}'^T - \frac{1}{2} \partial_k \partial_k \chi_{ij}^T = a^2 \delta G^i_j, \quad (2.110)$$

donde  $\delta G^i_j = 8\pi G T^i_j$ . Por lo tanto

$$\chi_{ij}''^T + 2\mathcal{H} \chi_{ij}'^T - \partial_k \partial_k \chi_{ij}^T = 16a^2 \pi G \Pi_{ij}. \quad (2.111)$$

Esta ecuación es una diferencial parcial de segundo orden. Por ello se supondrá que las perturbaciones son una superposición de modos normales. es decir que estas pueden escribirse en términos de una transformada de Fourier

$$\chi^T(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\chi}^T \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (2.112)$$

por ello al aplicarle Laplaciano a esto

$$\partial_k \partial_k \chi^T = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} k^2 \tilde{\chi}^T \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (2.113)$$

donde  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ . Por lo tanto aplicando la transformada de Fourier y regresando a la notación de  $h_{ij}^T$

$$h_{ij}''^T + 2\mathcal{H} h_{ij}'^T + k^2 h_{ij}^T = 16a^2 \pi G \Pi_{ij}. \quad (2.114)$$

Estas perturbaciones tensoriales describen la propagación de las ondas gravitacionales en el espacio-tiempo físico. Esto se tratará a mayor detalle en el siguiente capítulo en el que se hablará sobre las ondas gravitacionales.



## 2.10. Observables Cosmológicas

Para estudiar cosmología se requiere conocer la distancia a objetos así cómo su corrimiento al rojo. Cómo se vio en la sección de distancias en cosmología, la relación entre el corrimiento al rojo y las diferentes formas de medir distancias dependen de  $H(z)$ , es decir que dependen del modelo. Por ello, si experimentalmente se obtienen distancias o el factor de Hubble junto con su corrimiento al rojo puede estudiarse que modelos son mejores dados los datos observacionales obtenidos.

Para lograr medir estas distancias existen diferentes tipos de observables, aquí se hablarán de las reglas estándar, candelas estándar y relojes cósmicos, las cuáles serán las observables que se usarán en el análisis de esta tesis, sin contar las asociadas a ondas gravitacionales (sirenas estándar y sirenas oscuras) de las que se hablará en el siguiente capítulo.

### 2.10.1. Reglas estándar

Considerando que desde la tierra se observa un objeto en el cielo, si este tiene un radio  $r$  y subtende un ángulo  $\theta$  en el cielo, su distancia está dada por

$$D = \frac{r}{\tan \theta}, \quad (2.115)$$

la cuál es trigonometría elemental. Si ahora se supone que  $\theta \ll 1$ , es decir que el objeto observado subtende un ángulo muy pequeño, entonces  $\tan \theta \approx \theta$  y por lo tanto

$$D \approx \frac{r}{\theta}. \quad (2.116)$$

Esta aproximación es buena mientras el ángulo subtendido sea muy pequeño, lo cuál pasa con todas las estrellas debido a que su distancia es enorme. Para comparación la luna subtende un ángulo de  $0.5^\circ$ . Ahora, recordando la definición de la distancia diametral angular, la cuál es el cociente del tamaño físico transverso con su tamaño angular en radianes. Por lo tanto, esta distancia de la que se está hablando en esta sección es justamente la diametral angular. Entonces

$$D_A = \frac{r}{\theta}. \quad (2.117)$$

Mientras que la expresión (2.68) es una expresión teórica, (2.117) es observacional. Entonces, una vez obtenida la distancia diametral angular a un gran número de objetos, se puede determinar si cierto modelo teórico describe de forma satisfactoria estas distancias. Mientras que medir el ángulo subtendido  $\theta$  es sencillo, debido a que sólo se requiere medirlo en el cielo, con ayuda de telescopios, el radio  $r$  no es tarea fácil. En este escenario entran las reglas estándar, los cuáles son objetos con un mismo radio conocido  $r_A$ . Por lo tanto si se logra determinar la distancia a una regla estándar, la distancia a otra regla estándar puede calcularse mediante

$$D_{A2} = D_{A1} \frac{\theta_2}{\theta_1}. \quad (2.118)$$

Es decir, puede obtenerse con el cociente entre sus ángulos subtendidos. Entonces, midiendo la distancia a una regla estándar es posible medir la distancia a cualquier otra tomando únicamente el cociente de sus ángulos subtendidos. Esto permite medir la distancia a un gran número de objetos.

Además, a partir de una regla estándar no sólo puede determinarse la distancia diametral angular sino igualmente, el factor de Hubble  $H(z)$ . Cómo la distancia diametral angular es

$$D_A(z) = \frac{c}{1+z} \frac{\Delta z}{H(z)}, \quad (2.119)$$

con  $\Delta z$  un intervalo de corrimiento al rojo. Entonces

$$H(z) = \frac{c\Delta z}{\Delta\chi}, \quad (2.120)$$

con  $\Delta\chi = r(1+z)$  el tamaño de una regla estándar la cuál cambiar con la expansión del universo, por lo que para una regla estándar si se mide el intervalo de corrimiento al rojo es posible determinar el factor de Hubble. Lo que permite estudiar la relación  $H(z) - z$  y con ello cosmología.

Sin embargo, el problema es encontrar una clase de objetos que tengan siempre el mismo tamaño. Una regla estándar son las oscilaciones acústicas de bariones [46], las cuáles son fluctuaciones de densidad de la materia bariónica. Estas fluctuaciones permiten medir el horizonte de sonido en el tiempo de recombinación. Midiendo mediante métodos de clusters de galaxias el horizonte de sonido en otros tiempos y calculando la diferencia de corrimiento al rojo entonces es posible medir el factor de Hubble de forma independiente al modelo [47]. Esta será la primera observable que se tomará en consideración.

### 2.10.2. Candelas estandarizables

Otros objetos de gran utilidad para estudiar cosmología son las llamadas candelas estándar. Las cuáles son objetos que tienen la misma luminosidad intrínseca  $L$ . El problema se reduce a encontrar clases de objetos que tengan la misma luminosidad. De hacerse esto, el módulo de distancia puede calcularse. Considérese que a una candela estándar se le logró calcular la distancia luminosa  $D_L$  y el flujo  $F_1$ . Entonces se determina la distancia luminosa a partir de

$$L = 4\pi F_1 D_{L1}^2, \quad (2.121)$$

si ahora se encuentra otra candela estándar con un flujo  $F_2$  se puede encontrar la distancia a esta nueva candela estándar mediante

$$D_{L2} = D_{L1} \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^{1/2}, \quad (2.122)$$

por lo que una vez que se logra encontrar objetos que funcionen cómo candelas estándar y calcular la distancia luminosa a una de ellas, sólo basta medir sus flujos para determinar

las distancias del resto.

El tipo de candelas estándar (aunque son en realidad candelas estandarizables por lo que se comentará a continuación) con las que se trabajará son las Supernovas tipo Ia (desde ahora SNeIa), las cuáles se describen a continuación.

Las supernovas son estrellas en explosión, en el caso de una SNeIa, se producen cuando una enana blanca está absorbiendo masa de una estrella acompañante y cuándo absorbe suficiente masa para alcanzar el límite de Chandrasekhar de  $1.4M_{\odot}$  y en este momento estallan. La razón por la cuál no son candelas estándar es porque no tienen una luminosidad idéntica (y por ende no tienen una magnitud absoluta intrínseca idéntica), a pesar de que siempre estallan al tener la misma masa.

El hecho de que su luminosidad no sea idéntica se ve en sus curvas de luz (gráficas de la luminosidad respecto al tiempo), pues para diversas SNeIa, se obtienen diferentes curvas. Sin embargo, la magnitud absoluta de las SNeIa está correlacionada con el decaimiento de la curva de luz con el tiempo [48]. Mediante esta correlación se puede corregir la dispersión en el valor de la magnitud absoluta de las SNeIa [48] y por ende estas supernovas, que se estandarizaron mediante esta corrección se vuelven candelas estandarizables con magnitudes absolutas muy parecidas y de esa forma es posible estudiar cosmología con ellas, dado un  $\mu$  observacional junto con sus corrimientos al rojo (pues las supernovas emiten luz, por lo que el corrimiento al rojo se determina conociendo sus frecuencias en reposo y comparándolas con las observadas), se puede estudiar la relación  $\mu(z) - z$ . Esta es la segunda observable cosmológica que se usará en el análisis de la presente tesis, las candelas estandarizables dadas por las SNeIa [26].

### 2.10.3. Relojes cósmicos

El método de los relojes cósmicos proporciona una forma independiente de cualquier modelo de medir el factor de Hubble. Reescribiendo el cambio de variable (2.55) cómo

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}, \quad (2.123)$$

por lo cuál de ser posible medir el corrimiento al rojo y  $dz/dt$  se puede calcular el factor de Hubble. Nótese que esto es independiente de cualquier modelo e incluso de la Relatividad General dado que esta expresión se obtiene únicamente de definiciones del factor de Hubble, factor de escala y corrimiento al rojo. Este método se denomina reloj porque mide la variación de edad del universo con el corrimiento al rojo y fue propuesto por primera vez en [49]. El reloj del método se realiza con el fechado espectroscópico de la edad de galaxias. Considerando dos galaxias que se formaron al mismo tiempo pero separadas con un intervalo de redshift  $\Delta z$ , se mide la diferencia de edad  $\Delta t$  y la derivada  $dz/dt$  se calcula con  $\Delta z/\Delta t$ . Las galaxias seleccionadas deben tener metalicidades bajas y baja tasa de formación estelar debido a qué en las galaxias con alta tasa de formación estelar, su espectro de emisión estará dado por las nuevas estrellas que estén naciendo [49].

Por lo tanto este método permitirá estudiar modelos cosmológicos dado que nos dará datos de la relación  $H(z) - z$ .

## 2.11. Mensajeros cósmicos

Los mensajeros cósmicos son partículas u ondas emitidas por objetos astrofísicos, las cuáles tienen información de sus fuentes y del espacio entre las fuentes y la tierra. Estos mensajeros cósmicos son las ondas gravitacionales, los rayos cósmicos (partículas cargadas como protones), los neutrinos y los fotones [50].

### 2.11.1. Ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son perturbaciones en el espacio-tiempo con dos estados de polarización  $+$ ,  $\times$ . Se hablará a detalle de ellas en el siguiente capítulo así como el motivo por el cuál pueden emplearse para estudiar modelos cosmológicos.

### 2.11.2. Rayos cósmicos

Este tipo de partículas son cargadas, por ejemplo protones con un origen extraterrestre. Tienen un espectro de energías proporcional a  $dN/dE \propto E^{-\gamma}$  con  $\gamma \approx 3$ , el cuál es válido en el rango de energías de algunos GeV a algunos EeV. Los rayos cósmicos con energía superiores a 1 EeV se conocen como rayos cósmicos de ultra-alta energía (ultra-high energy cosmic rays). Cuando estos rayos cósmicos entran en la atmósfera producen duchas de partículas al colisionar con las partículas atmosféricas. Las partículas producto de estas colisiones pueden detectarse con detectores terrestres [50].

### 2.11.3. Neutrinos

Los neutrinos son partículas que sólo interactúan mediante la fuerza débil y proveen una relación entre la astrofísica y la física de partículas. Pueden viajar distancias cosmológicas sin ser afectados por la radiación de fondo de microondas u otros fondos, además de que su dirección igualmente se mantiene constante, por lo que representan herramientas valiosas para estudiar las fuentes que los produjeron. En el modelo estándar de partículas se postularon como fermiones sin masa que sólo interactúan con la fuerza débil, sin embargo el descubrimiento del fenómeno de oscilación de sabores de neutrinos implica el hecho de que tienen masa y por consiguiente evidencia de necesidad de física más allá del modelo estándar [50].

### 2.11.4. Fotones

Los fotones son las partículas de la radiación electromagnética las cuáles tienen una frecuencia. Conociendo la frecuencia de los fotones producidos por una fuente y midiendo

la frecuencia detectada puede determinarse el corrimiento al rojo de la fuente mediante

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_d}, \quad (2.124)$$

donde  $\nu_e$  es la frecuencia emitida y  $\nu_d$  es la frecuencia detectada. Junto con las ondas gravitacionales, los fotones son el segundo mensajero cósmico de interés para la presente tesis dado que, cómo se verá adelante, además de medir la distancia a una fuente de ondas gravitacionales se requiere medir el corrimiento al rojo, lo que se puede hacer con contrapartes electromagnéticas asociadas a la fuente de onda gravitacional que emitirán fotones a los cuáles se los podrá determinar su corrimiento al rojo.

### 2.11.5. Multimensajeros

Los multimensajeros son eventos a los cuáles se les asocian dos tipos de mensajeros cósmicos. El tipo de mensajeros relevante en este trabajo son las ondas gravitacionales con contrapartes electromagnéticas, es decir fuentes que emitan ondas gravitacionales y fotones. En el siguiente capítulo se verá cómo a partir de la colisión de estrellas binarias compactas es posible medir la distancia a estas fuentes mediante sus ondas gravitacionales producidas. Sin embargo, la determinación del corrimiento al rojo no se puede realizar a partir de la onda gravitacional y se requiere una contraparte electromagnética asociada a la colisión de binarias compactas que emita fotones que permitan medir su corrimiento al rojo y con ello estudiar modelos cosmológicos con ondas gravitacionales aunque también se verá más adelante que a pesar de no tener contrapartes electromagnéticas, es posible hacer cosmología con ondas gravitacionales sin mediciones independientes del corrimiento al rojo.

## 2.12. Análisis Bayesiano en Cosmología

Hasta ahora se ha mencionado que el tener datos de una observable cosmológica cómo la distancia luminosa, factor de Hubble o distancia diametral angular junto con su corrimiento al rojo, es posible estudiar modelos cosmológicos. En esta sección se estudiará cómo con estos datos se pueden deducir los mejores parámetros de un modelo y aún más, cómo comparar dos modelos de forma estadística. Para comenzar se discutirá el teorema de Bayes. Una vez que se han recolectado datos de una observable cosmológica junto con sus corrimientos al rojo tenemos los datos, lo que permite calcular la probabilidad de los datos condicionales a un modelo cosmológico, sin embargo lo que se desea calcular es la probabilidad de los parámetros cosmológicos de un modelo condicional a los datos recabados. Esto se puede hacer mediante el teorema de Bayes

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A)}{\mathcal{E}}, \quad (2.125)$$

donde  $\mathcal{P}(A|B)$  se denomina probabilidad posterior,  $\mathcal{P}(A)$  la probabilidad prior,  $\mathcal{P}(B|A)$  la probabilidad de confianza y  $\mathcal{E}$  la evidencia Bayesiana dada por

$$\mathcal{E} = \int d\Theta \theta(\Theta) \mathcal{L}(B|\Theta), \quad (2.126)$$

donde  $\Theta$  es el vector de parámetros cosmológicos a calcularse (en la notación de (2.125)  $\Theta = A$  y  $B$  son los datos),  $\mathcal{L}(B|\Theta)$  es la probabilidad de confianza y  $\theta(\Theta)$  la probabilidad prior de los parámetros. Cómo puede verse, la evidencia es el producto de la probabilidad de confianza y la prior integrada sobre todo el espacio de parámetros. Por otro lado la probabilidad de confianza, para una cantidad  $N$  de datos, es [51]

$$\mathcal{L} = \prod_{n=1}^N \mathcal{P}(Y_n|z_n, \sigma_{Y_n}, \Theta), \quad (2.127)$$

donde  $Y_n$  es la  $n$ -ésima medición de  $Y$  la cuál puede ser cualquier observable cosmológica,  $z_n$  su corrimiento al rojo de esta medición asociado y  $\sigma_{Y_n}$  el error en la medición de  $Y_n$  (los datos entonces son  $B = Y, z, \sigma_Y$ ). Por ello, para calcular la probabilidad de confianza sólo hace falta conocer esta función de probabilidad y está dada por [51]

$$\mathcal{P}(Y_n|z_n, \sigma_{Y_n}, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_n}^2}} \exp\left(-\left[\frac{Y_n - Y_{\text{teórica}}(z_n)}{\sqrt{2}\sigma_{Y_n}}\right]^2\right), \quad (2.128)$$

con  $Y_{\text{teórica}}(z_n)$  el valor de la observable cosmológica teórica en el corrimiento al rojo  $z_n$ . Esta probabilidad entonces depende de que tan cercanos estén los valores teórico y observacional y de la incertidumbre en la medición de la observable. Mientras más cercanos sean los valores, mayor será el valor de esta probabilidad, al igual que crece si la incertidumbre es mayor. Se puede simplificar el teorema de Bayes si se toma logaritmo natural a ambos lados

$$\ln \mathcal{P}(\Theta|Y, z, \sigma_Y) = \ln \mathcal{P}(\Theta) + \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{Y_n}^2}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{Y_n - Y_{\text{teórica}}(z_n, \Theta)}{\sigma_{Y_n}}\right)^2 - \ln \mathcal{E}. \quad (2.129)$$

Al tener probabilidades menores también hay logaritmos de probabilidades menores y viceversa dado que la función logaritmo natural es estrictamente creciente. Por ello, si se busca calcular que parámetros cosmológicos son los más probables dado un conjunto de datos y un modelo teórico se puede maximizar el logaritmo natural de la probabilidad posterior. Nótese que el segundo y cuarto término son constantes y sólo son relevantes para propósitos de normalización. Si únicamente se busca conocer los valores de los parámetros cosmológicos que tienen probabilidad máxima no es necesario normalizar y sólo basta calcular su probabilidad relativa a otros valores de los parámetros. Por ello sólo es necesario considerarse el primer y tercer término. En particular, la suma del tercer término

se denomina  $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{Y_n - Y_{\text{teórica}}(z_n, \Theta)}{\sigma_{Y_n}} \right)^2, \quad (2.130)$$

y esta cantidad debe ser mínima si lo que se busca es maximizar la probabilidad de los parámetros cosmológicos. La otra contribución realizada proviene de la probabilidad prior de los parámetros. Esta debe proponerse a partir de valores posibles que pueden tomar los parámetros cosmológicos, por ejemplo el contenido de materia  $\Omega_M$  no puede ser negativo y por lo tanto necesita una probabilidad prior positiva. Para considerar intervalos que los parámetros puedan tomar sin darle preferencia a ninguno de ellos, se emplearán probabilidades prior uniformes  $\mathcal{U}(a, b)$  en el análisis de la presente tesis, con intervalos posibles para cada parámetro.

Por ello, una vez que se ha decidido la forma de las probabilidades prior y se conocen los datos de una observable cosmológica, su incertidumbre, junto con un modelo propuesto con el que se calcule esta observable cosmológica es posible calcular la probabilidad posterior de los parámetros cosmológicos, la cuál se espera que tenga forma Gaussiana debido al teorema central del límite de la probabilidad (al calcularse la posterior con un gran número de eventos aleatorios esta probabilidad debería tener forma cercana a una Gaussiana), y con ello su media y desviación estándar. Esto nos dará el valor más probable de los parámetros cosmológicos para un conjunto de datos y un modelo propuesto junto con los intervalos de confianza de ellos.

El cálculo de la probabilidad posterior permite determinar los valores de los parámetros cosmológicos, sin embargo no es posible con esto determinar cual de los modelos en consideración es el mejor de todos. Para hacer esto se requiere calcular la evidencia Bayesiana y tomar el logaritmo natural de sus cocientes

$$\ln B_{12} = \ln \left( \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} \right), \quad (2.131)$$

con  $\mathcal{E}_i$  la evidencia del modelo  $\mathcal{M}_i$ . En caso de que  $\ln B_{12} > 0$ , el modelo  $\mathcal{M}_1$  es el preferido y en caso contrario es  $\mathcal{M}_2$  el preferido y la fuerza de la preferencia se determina con el criterio de Jeffreys mediante el valor absoluto de  $|\ln B_{12}|$  [52, 5, 53] dado en la Tabla 2.1.

Una vez que se conoce cómo realizar el análisis Bayesiano en Cosmología y con ello determinar los mejores valores de los parámetros cosmológicos dada una base de datos observacional es natural preguntarse cómo trabajar con más de una base de datos y con ello incrementar la cantidad de datos y mejorar la estadística y las constricciones a los parámetros cosmológicos. Para ello consideremos dos bases de datos con observables cosmológicas  $Y_1, Y_2$ , corrimientos al rojo asociadas  $z_1, z_2$  y errores en las observables  $\sigma_1, \sigma_2$ . Las probabilidades posterior de cada caso debe ser independiente de la otra pues cada base de datos no tiene relación con la otra. Por ejemplo las candelas estándar no deben tener relación con las reglas estándar. Por ello la probabilidad posterior de la base de datos

Criterio de la información	Preferencia para el modelo con mayor evidencia
$0 <  \ln B_{12}  < 1$	Débil
$1 \leq  \ln B_{12}  < 2.5$	Substancial
$2.5 \leq  \ln B_{12}  < 5$	Fuerte
$5 \leq  \ln B_{12} $	Muy fuerte

Tabla 2.1: Criterio de Jeffreys para interpretar los valores del factor del logaritmo natural del factor de Bayes  $\ln B$  calculado al comparar dos modelos mediante su evidencia Bayesiana. El modelo con mayor evidencia es el preferido y la fuerza de la preferencia se determina con el valor absoluto de  $|\ln B_{12}|$  mediante este criterio.

completa es el producto de las posterior individuales, y aplicando el logaritmo natural

$$\ln \mathcal{P}(\Theta|Y_{\text{total}}, z_{\text{total}}, \sigma_{\text{total}}) = \ln \mathcal{P}(\Theta|Y_1, z_1, \sigma_1) + \ln \mathcal{P}(\Theta|Y_2, z_2, \sigma_2), \quad (2.132)$$

con lo cual ya se puede calcular la probabilidad posterior con la base de datos completa. Este proceso se puede generalizar para un número  $n$  de bases de datos y con ello mejorar las constricciones a  $\Theta$  con un número mayor de datos.



# Capítulo 3

## Ondas Gravitacionales

La teoría de la relatividad general predice la existencia de las ondas gravitacionales, las cuáles son perturbaciones en el espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz cómo pudo verse en el capítulo 1. En el capítulo 2 se dedujo la expresión para la evolución de perturbaciones tensoriales en el espacio-tiempo físico. La teoría de la relatividad general fue presentada en 1915 [54], sin embargo tomó cerca de 100 años confirmar de forma directa la existencia de las ondas gravitacionales, cuándo el 14 de septiembre de 2015 la colaboración LIGO-Virgo detectó la colisión de un par de agujeros negros [55]. A este evento se le denomina GW150914 (qué hace referencia a un evento asociado a una onda gravitacional detectado el 15/09/2014) y es la primera detección directa de una onda gravitacional. Desde ese entonces se han hecho un gran número de detecciones de ondas gravitacionales, 50 de ellas están reportadas en los catálogos GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] de la colaboración LIGO-Virgo. Cómo se verá más adelante, estas detecciones permiten hacer cosmología y probar teorías alternativas a la relatividad general.

Se partirán de las expresiones (1.89) y (2.114), donde ambas describen la propagación de las ondas gravitacionales, la primera en un espacio-tiempo plano y la segunda en un espacio-tiempo físico en expansión. La primera permite ver que las ondas gravitacionales son perturbaciones lineales en la métrica y que se trasladan a la velocidad de la luz. La segunda muestra que son transversas y aún más puede deducirse que las ondas gravitacionales tienen dos polarizaciones.

### 3.1. Polarizaciones de las ondas gravitacionales

Para esto debe recordarse que la parte tensorial de las perturbaciones satisfacen  $\partial_i h_{ij}^T = 0$ , lo que al aplicar la transformada de Fourier se escribe cómo

$$k^i h_{ij}^T = 0, \quad (3.1)$$

esta condición también se satisface en el espacio-tiempo plano estático pues fue el gauge que se tomó. Ahora cómo la métrica es simétrica y puede escribirse cómo

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

y también la métrica no perturbada es simétrica entonces la perturbación debe ser simétrica. Aún más, la parte tensorial es sólo espacial cómo se explicó en el capítulo 2, por lo que estas condiciones reducen sus componentes independientes a 6. Ahora la expresión (3.1) reduce 3 componentes más y la condición de que  $h_{ii}^T = 0$  reduce a sólo dos componentes independientes. Por lo tanto se puede considerar una base de dos vectores base  $\{e_1, e_2\}$  y las ondas gravitacionales se escribirán en términos de ella. La expresión (3.1) también permite determinar que estos vectores base deben ser ortogonales a  $\parallel$ . Por lo tanto esta base debe satisfacer [37]

$$\gamma^{ij}\partial_i e_a k_j = 0 \quad , \quad \gamma^{ij}\partial_i e_a \partial_j e_b = \delta_{ab}, \quad (3.3)$$

donde  $\gamma$  es la métrica en el subespacio de dimensión 2 generado por  $\{e_1, e_2\}$  y  $a, b = 1, 2$ . Por lo tanto, la perturbación puede escribirse cómo [37]

$$h_{ij}^T(\mathbf{k}) = (\partial_i e_1 \partial_j e_2 - \partial_i e_2 \partial_j e_1) (\hat{k}) h_+(\mathbf{k}) + (\partial_i e_1 \partial_j e_2 + \partial_i e_2 \partial_j e_1) (\hat{k}) h_\times(\mathbf{k}), \quad (3.4)$$

cómo puede verse, las combinaciones de los 2-vectores base dependen de la orientación del vector  $\mathbf{k}$ . Sustituyendo este resultado en la expresión (2.114) asumiendo que  $\Pi_{ij}$ , tensor que se asocia a momentos cuadrupolares, es 0

$$h''_{+, \times} + 2\mathcal{H}h'_{+, \times} + k^2 h_{+, \times} = 0, \quad (3.5)$$

donde las  $h_+$ ,  $h_\times$  son las dos polarizaciones de las ondas gravitacionales. La forma más simple es tomar  $\mathbf{k} = \mathbf{z}$ , y en este caso la onda gravitacional vivirá en el subespacio de  $x$  y  $y$ , mientras que  $h_{ij}^T$  estará dado por

$$h_{ij}^T = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Una onda gravitacional es la combinación lineal de estas dos polarizaciones y cada una satisface la expresión (3.5). El efecto de cada estado de polarización se puede comprender si se considera un anillo en el eje  $xy$  y que una onda gravitacional incide sobre este con dirección en el eje  $z$ . Considerando que la onda gravitacional tiene únicamente la polarización  $h_+$ , el efecto que tiene sobre un anillo inicialmente en reposo se observa en la figura (3.1) asumiendo que la fase de la ónda gravitacional al golpear el anillo es 0 y que la onda es plana.

Cómo una onda es periódica, las posiciones de las partículas roja y azul en la figura (3.1) se repetirán cada medio ciclo. En el caso de la onda gravitacional polarizada por  $h_\times$ , el movimiento del anillo y de las partículas roja y azul se ilustran en la figura (3.2). Finalmente, cómo una onda gravitacional se construye en términos de estas dos polarizaciones, el caso general es una combinación lineal de ambos casos.

Cómo puede verse, teniendo un arreglo cómo el de las figuras (3.1) y (3.2) puede detectarse el paso de una onda gravitacional, considerando partículas de prueba cómo es el caso de la roja y azul en estas figuras. Si se mide constantemente la distancia de ellas

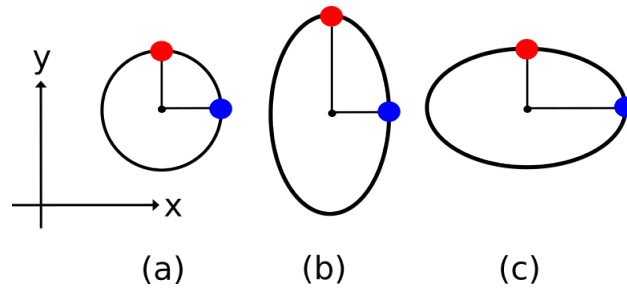


Figura 3.1: (a) Un anillo de partículas inicialmente en reposo. (b) El anillo de partículas por el cuál pasa una onda gravitacional polarizada  $h_+$  en fase  $\pi/4$ . (c) La distorsión del anillo con la misma onda gravitacional en fase  $3\pi/2$ . Se consideran dos partículas de prueba para ver el efecto en distintas fases.

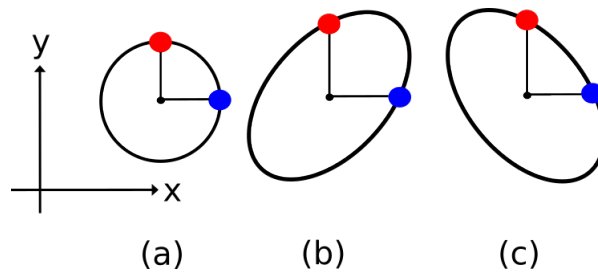


Figura 3.2: (a) Un anillo de partículas inicialmente en reposo. (b) El anillo de partículas por el cuál pasa una onda gravitacional polarizada  $h_\times$  en fase  $\pi/4$ . (c) La distorsión del anillo con la misma onda gravitacional en fase  $3\pi/2$ . Se consideran dos partículas de prueba para ver el efecto en distintas fases.

al centro y se obtiene que en la primer mitad del ciclo una de ellas se acerca al centro y la otra se aleja mientras que en la segunda mitad ocurre lo inverso puede determinarse que ha pasado una onda gravitacional en este arreglo. Por ello se puede construir un interferómetro para determinar si se ha detectado una onda gravitacional, sin embargo, las perturbaciones provocadas por las ondas gravitacionales astrofísicas son increíblemente pequeñas y por ello la diferencia en distancias es muy complicada de detectar [56]. Más adelante se calculará el orden del que se espera tener cambios en un anillo cómo el de las figuras (3.1) y (3.2).

### 3.2. Deducción del tensor $h_{ij}^T$ de una onda gravitacional

Hasta ahora se sabe que las ondas gravitacionales son transversas, con divergencia 0 y que tienen dos polarizaciones. Ahora se resolverá la ecuación (1.89) para determinar la forma del tensor  $h_{ij}$  de una onda gravitacional que se propaga en un espacio-tiempo plano y sin expansión. En particular se trabajará con la ecuación diferencial de Green, la cuál

para esta expresión esta dada por

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0). \quad (3.7)$$

Escribiendo la transformada de Fourier de la función de Green y las deltas de Dirac y resolviendo la ecuación para la función de Green original se sigue que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t, t_0) = \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \quad (3.8)$$

por lo que el tensor  $h_{ij}^T$  esta dado por

$$h_{ij}^T = \frac{16\pi G}{c^4} \int d^3x_0 dt_0 T_{ij}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{c}\right)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \quad (3.9)$$

e integrando respecto al tiempo

$$h_{ij}^T = \frac{4G}{c^4} \int d^3x_0 \frac{T_{ij}\left(\mathbf{x}_0, t - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}{c}\right)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}. \quad (3.10)$$

Suponiendo que el sistema que produce la onda gravitacional esta muy lejos  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \approx D_S$  con  $D_S$  la distancia sirena, la cuál es la distancia asociada a una fuente de onda gravitacional, de forma análoga a cómo la distancia luminosa se asocia a una fuente de energía electromagnética. Entonces

$$h_{ij}^T = \frac{4G}{c^4 D_S} \int d^3x_0 T_{ij}\left(\mathbf{x}_0, t - \frac{D_S}{c}\right). \quad (3.11)$$

En el apéndice D se calcula la forma final tras reescribir esta integral y definiendo el tensor de momento cuadrupolar (D.7). Finalmente, se escribe

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 D_S} \left( \frac{d^2 I_{ij}^{TT}\left(t - \frac{D_S}{c}\right)}{dt^2} \right), \quad (3.12)$$

donde  $TT$  indica la componente transversa y sin traza. Por lo tanto el tensor  $h_{ij}^{TT}$  de una onda gravitacional es generado por la segunda derivada del momento cuadrupolar de la fuente y es inversamente proporcional a la distancia a la fuente. Esta expresión es un paso intermedio para poder resolver la expresión para la distancia sirena a una fuente de ondas

gravitacionales.

### 3.2.1. Luminosidad de una onda gravitacional

El siguiente paso para deducir la distancia sirena es el de calcular la luminosidad de una onda gravitacional. Afortunadamente, Einstein dedujo esta expresión en 1918 [57, 58]

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{d^3 I_{ij}^{TT}}{dt^3} \frac{d^3 T^{ij TT}}{dt^3} \right\rangle, \quad (3.13)$$

donde  $\langle \rangle$  denota el promedio en un periodo. Cómo se tomó la parte transversa y sin traza significa que únicamente la parte no esférica de una fuente contribuye a la generación de una onda gravitacional. Es decir la energía cinética de la parte no esférica genera las ondas gravitacionales [56].

## 3.3. Ondas gravitacionales producidas por colisiones de binarias compactas

En esta sección se deducirá la expresión para la distancia sirena de un sistema de binarias compactas que colisionan. Este sistema puede estar constituido por un par de agujeros negros, un par de estrellas de neutrones o una combinación de ambas. Recuérdese que la expresión (1.89) predice la existencia de perturbaciones en el espacio tiempo que viajan a la velocidad de la luz. La parte izquierda proviene de la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein mientras que la derecha proviene del tensor de energía-momento y ambas partes tienen una constante de acoplamiento proporcional a  $G/c^4$ , la cuál tiene dimensiones de fuerza a la menos 1. Por lo que se puede definir una fuerza

$$G_F = c^4/G \approx 1.21 \times 10^{44} \text{ N}. \quad (3.14)$$

Esta fuerza es muy grande y por lo tanto se requieren fuerzas de este orden para tener las amplitudes de ondas gravitacionales más grandes. Considerando el caso de binarias compactas, la fuerza centrípeta del sistema es

$$F = \frac{Mv^2}{r}, \quad (3.15)$$

con  $v$  la velocidad de rotación,  $r$  la distancia entre las binarias y  $M$  la masa total del sistema, es decir, la suma de masas de ambas binarias.

A partir de las expresiones (3.12) y (3.13) se puede deducir la amplitud, luminosidad y la dinámica de una onda gravitacional producida por la colisión de estrellas binarias compactas.

### 3.3.1. Amplitud

La amplitud del sistema se puede deducir si se considera un sistema de binarias compactas con masa total  $M$ . Además, de esto es conveniente considerar su masa reducida  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ . Además, la energía cinética del sistema en el sistema del centro de masa es  $K = \frac{\mu v^2}{2}$  con  $v$  la velocidad relativa de rotación. Ahora, recordando la Tercera Ley de Kepler

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad (3.16)$$

donde  $T$  es el periodo, dado por  $T = \frac{2\pi r}{v}$ , por lo tanto

$$v^2 = \frac{GM}{r}. \quad (3.17)$$

Esta expresión relaciona la velocidad de rotación con la masa total del sistema y la distancia de separación de las binarias. Antes se mencionó que al tomarse la parte transversa y sin traza se estaba trabajando con la parte no esférica y por ello sólo la energía cinética de la parte no esférica contribuía a las ondas gravitacionales, por lo tanto la segunda derivada del momento cuadrupolar es igual a la energía cinética del sistema. Y usando (??) se obtiene la expresión para la amplitud

$$h = \frac{G^2 \mu M}{c^4 r D_S}, \quad (3.18)$$

donde  $h$  es una componente del tensor  $h_{ij}^{TT}$ . Esta amplitud además tiene un sentido físico. Considerando el anillo de partículas de antes de las figuras (3.1) y (3.2) y asumiendo que tiene radio  $L$ , la contracción máxima que sufrirá el radio (el cambio máximo) esta dado por

$$\Delta L = hL, \quad (3.19)$$

o sea que será proporcional a  $L$  y a  $h$ . Con la expresión (3.18) puede calcularse el valor de  $h$  para conocer el tamaño del que se debe construir el anillo de partículas para poder observar un cambio suficientemente grande. Como ejemplo se trabajará con un sistema de binarias compactas, cada una con masa  $m_1 = m_2 = 10M_\odot$ , o sea 10 masas solares, a una distancia sirena de 200 Mpc y separadas por una distancia  $r = \frac{GM_\odot}{c^2}$  tendrá una amplitud de  $h \approx 2 \times 10^{-20}$ . Esta amplitud es muy pequeña incluso para un sistema de binarias con masa muy grande, por lo que si se construyera un anillo de 1 km de radio el cambio en este al pasar la onda gravitacional generada por este sistema con esas condiciones sería de  $\Delta L \approx 2 \times 10^{-17}$  m. Como comparación, el radio de un núcleo atómico es del orden de  $10^{-15}$ , por lo que la onda gravitacional causa cambios 2 órdenes de magnitud menor. Estas distancias son muy pequeñas y por eso se requieren de instrumentos increíblemente precisos para detectar las ondas gravitacionales.

Aunque la amplitud crece conforme el radio de separación de las binarias disminuye

cómo se ve en la expresión (3.18), conforme las estrellas binarias se vayan acercando, la amplitud irá creciendo hasta un máximo en el momento antes de colisionar.

### 3.3.2. Distancia sirena y dinámica

A partir de la ecuación (3.13) puede estimarse la luminosidad de la binaria de estrellas compactas [56]

$$\mathcal{L} = \frac{32\mu^2 G^4 M^3}{5r^4 c^5}, \quad (3.20)$$

la cuál es la luminosidad observacional. A partir de ella puede calcularse la distancia sirena mediante la dinámica del sistema. Cómo las binarias están continuamente emitiendo energía en forma de ondas gravitacionales, su energía debe ir disminuyendo y con ello el radio de separación irá decreciendo, hasta que eventualmente colisionen. Se tomará el ansatz de que toda la energía del sistema que pierden se transforma en ondas gravitacionales, o sea que se convierte en luminosidad, es decir

$$\mathcal{L} = -\frac{dE}{dt}, \quad (3.21)$$

donde  $E$  es la energía total, es decir la suma de la cinética más la potencial

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r}, \quad (3.22)$$

empleando la tercera ley de Kepler (3.17)

$$E = -\frac{G\mu M}{2r}, \quad (3.23)$$

por lo tanto la luminosidad está dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{G\mu M}{2r^2} \frac{dr}{dt}, \quad (3.24)$$

igualando esta expresión a (3.20) y resolviendo para  $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64\mu G^3 M^2}{5r^3 c^5}. \quad (3.25)$$

Si ahora se emplea la tercera ley de Kepler (3.16) recordando que el periodo es  $T = 2\pi/\omega$  con  $\omega$  la frecuencia angular

$$r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}, \quad (3.26)$$

y por lo tanto la ecuación (3.25) se puede escribir en términos de la frecuencia angular cómo

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{96\mu}{5c^5} (\omega^{11} G^5 M^2)^{1/3}. \quad (3.27)$$

Por la simetría del sistema la frecuencia orbital y la de la onda gravitacional está dada por  $f_{\text{GW}} = \frac{f_{\text{orbital}}}{2} = \frac{\omega}{\pi}$ . Por lo tanto

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\mu\pi^{8/3}}{5c^5} (f_{\text{GW}}^{11} G^5 M^2)^{1/3}. \quad (3.28)$$

Finalmente combinando las ecuaciones (3.12) y (3.28) se obtiene la expresión para la distancia sirena

$$D_S = \frac{5c}{96\pi^2 h f_{\text{GW}}^3} \frac{df_{\text{GW}}}{dt}. \quad (3.29)$$

Esta expresión permite determinar observacionalmente la distancia a una fuente de ondas gravitacionales, la forma teórica de determinarla se deducirá más adelante. Cómo puede verse basta con medir la amplitud de la onda gravitacional  $h$  así cómo sus frecuencias y derivadas de la frecuencia. Si estas cantidades se determinan, la distancia a una fuente de ondas gravitacionales se determina.

Finalmente, puede calcularse el tiempo en el cuál las binarias colisionan, al que se le conoce cómo tiempo de chirrido  $t_c$ . Integrando la ecuación (3.28)

$$t_c = \frac{5c^5}{256\mu} \left( \frac{1}{\pi^8 f_0^8 G^5 M^2} \right)^{1/3}, \quad (3.30)$$

es el tiempo en el que la binaria colisiona a partir de cuándo la onda gravitacional tiene una frecuencia de  $f_0$ . La principal complicación de trabajar con ondas gravitacionales es el hecho de que no emiten radiación electromagnética y por ende no es posible calcular el corrimiento al rojo de las fuentes por sí solas. Si se desea hacer esto, se requiere que la fuente de onda gravitacional emita un gamma ray burst durante la colisión para que sea posible determinar su corrimiento al rojo y con esto hacer cosmología con ondas gravitacionales. Aunque este es el método más sencillo existen otros en los cuáles se estima el redshift posible, con uno de ellos se hará cosmología en la presente tesis. Además de las cantidades anteriores, la evolución de la fase de la onda gravitacional durante la rotación de las binarias depende de la masa de chirrido

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{M^{1/5}}, \quad (3.31)$$

esta cantidad será importante en los análisis del siguiente capítulo.

### 3.4. Distancia sirena teórica

Ya se calculó la forma observacional de determinar la distancia sirena observacional y el corrimiento al rojo puede determinarse con una contraparte electromagnética o estimándose con otros métodos. Por lo cuál para estudiar modelos cosmológicos, se requiere calcular la expresión para la distancia sirena teórica. Cómo se verá a continuación, la distancia sirena teórica es equivalente a la distancia luminosa para el caso de relatividad general.



Recordando la ecuación para las perturbaciones tensoriales de la relatividad general

$$h''_{+,x} + 2\mathcal{H}h'_{+,x} + k^2h_{+,x} = 0, \quad (3.32)$$

donde se omitió la  $T$  de transversa y los índices. Para el caso de teorías de gravedad modificada esta ecuación puede modificarse, en particular considérense la clase de teorías en las cuáles las perturbaciones tensoriales son

$$h''_{+,x} + 2\mathcal{H}(1 - \delta(\eta))h'_{+,x} + k^2h_{+,x} = 0, \quad (3.33)$$

para alguna función  $\delta(\eta)$ . Si se introduce un campo tensorial [59]

$$h_{+,x}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\bar{\chi}_{+,x}(\eta, \mathbf{x})}{\bar{a}}, \quad (3.34)$$

donde  $\bar{a}$  esta dada por [59]

$$\frac{\bar{a}'}{\bar{a}} = \mathcal{H}(1 - \delta(\eta)), \quad (3.35)$$

por lo que  $\bar{a} = a$  en el caso de Relatividad General. Con el campo tensorial  $\bar{\chi}$ , la ecuación (3.33) es

$$\bar{\chi}''_{+,x} + \left(k^2 - \frac{\bar{a}''}{\bar{a}}\right)\bar{\chi} = 0. \quad (3.36)$$

Con ayuda de la ecuación (3.35)

$$\frac{\bar{a}''}{\bar{a}} = \mathcal{H}'(1 - \delta(\eta)) + \mathcal{H}^2(1 - \delta(\eta))^2 - \mathcal{H}\delta'(n), \quad (3.37)$$

por lo que puede verse que todo término es proporcional a  $\mathcal{H}$  o su derivada. Concentrándose en la época de dominación de materia y de materia oscura, donde  $\mathcal{H} \ll k$ , estos términos son despreciables en comparación con  $k$ , por lo que en estas épocas la ecuación (3.36) se reduce a

$$\bar{\chi}''_{+,x} + k^2\bar{\chi} = 0, \quad (3.38)$$

lo cuál muestra que la relación de dispersión de las perturbaciones tensoriales es  $\omega = k$  [59]. Esto implica que la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales es la velocidad de la luz, por lo que las teorías con una ecuación de perturbaciones tensoriales dada por (3.33) predicen ondas gravitacionales que se propagan a la velocidad de la luz. Esta es una condición necesaria debido a que la onda gravitacional GW170817 con contraparte electromagnética GRB170817A impone una cota máxima entre la diferencia de la velocidad de la luz y de propagación de una onda gravitacional de  $|v_{\text{GW}} - c| < 10^{-15}$  [60]. Existen teorías de gravedad modificada que predicen una velocidad de propagación diferente, las cuáles fueron descartadas por este evento.

Regresando a la definición del campo tensorial  $\bar{\chi}$ , la perturbación tensorial decrece mientras  $\bar{a}$  aumenta. Mientras que en relatividad general decrece con  $a$  al propagarse en distancias cosmológicas. Por esta diferencia, la distancia sirena y la luminosa son distintas

en una teoría de gravedad modificada y la diferencia está dada por [59]

$$D_S(z) = \frac{a}{\bar{a}} D_L(z). \quad (3.39)$$

Para resolver esta ecuación se puede reescribir (3.35) cómo

$$\frac{d \ln \left( \frac{a}{\bar{a}} \right)}{d\eta} = \mathcal{H}\delta, \quad (3.40)$$

y resolviendo la ecuación diferencial, la distancia sirena teórica es

$$D_S(z) = D_L(z) \exp \left( - \int_0^z dz' \frac{\delta(z')}{1+z'} \right). \quad (3.41)$$

Esta expresión permite calcular teóricamente la distancia sirena y es igual a la luminosa para el caso de Relatividad General, sin embargo se desvía de esta en teorías de gravedad modificada. Antes se había calculado la distancia sirena observacional, y esta es la expresión teórica. Por lo tanto para una base de datos de ondas gravitacionales con contrapartes electromagnéticas u otros métodos para estimar el corrimiento al rojo es posible estudiar modelos cosmológicos. Aún más, cómo la distancia sirena es distinta a la luminosa en teorías de gravedad modificada, las fuentes de ondas gravitacionales serán una fuerte herramienta futura para cuantificar posibles desviaciones de la Relatividad General.

Dado que en el análisis de la presente tesis se conservará la Relatividad General cómo la teoría de gravedad, se tomará la equivalencia entre la distancia sirena y la luminosa.

### 3.5. Detección de ondas gravitacionales

Ahora se tratará brevemente el tema de la detección de ondas gravitacionales. La complicación principal de esto son las amplitudes pequeñas que tiene una onda gravitacional producida por una fuente astrofísica y un problema adicional se presenta por el hecho de que existe ruido de diversas fuentes proveniente tanto de la tierra cómo astrofísico.

Considerando un intervalo de tiempo  $[0, T]$  dividido en  $N$  segmentos  $\Delta = \frac{T}{N}$ . Entonces, si para cada uno de estos segmentos se obtiene una muestra de datos  $x_i = x(i\Delta)$  con  $i \in 0, 1, 2, \dots, N-1$ , se puede contruir un vector  $N$  dimensional con los datos  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ , donde  $\mathbf{e}_i$  es un vector unitario con componentes  $\delta_{ij}$  para  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . Estos vectores unitarios forman una base ortonormal que genera el espacio complejo  $N$ -dimensional, y por ello  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ .

Se pueden considerar dos casos, uno en el cuál los datos no incluyen una señal de onda gravitacional y sólo incluye ruido  $\mathbf{x} = \mathbf{n}$  y el segundo caso donde los datos incluyen una señal de onda gravitacional más ruido  $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$ , donde este caso se llama ruido aditivo.

Mientras que la señal de onda gravitacional se espera que sea determinista aunque dependiendo en varios parámetros, el ruido es un vector aleatorio y por ello el vector de ruido se puede describir con una función de distribución de probabilidad.

Los dos casos que se mencionaron en el párrafo anterior juntos constituyen lo que se llama una hipótesis binaria y se pueden denotar por  $H_0$  para el caso de sólo ruido y  $H_1$  para ruido más una señal de onda gravitacional. Debido a que  $\mathbf{n}$  es un vector aleatorio,  $\mathbf{x}$  también lo será para ambas hipótesis así que  $\mathbf{x}$  también tendrá una función de distribución de probabilidad asociada. Para la hipótesis  $H_0$  se denotará  $p_0(\mathbf{x})$  y para  $H_1$ ,  $p_1(\mathbf{x})$ . El objetivo será para un vector de datos  $\mathbf{x}$  decidir si  $H_0$  o  $H_1$  es verdadera.

Para poder continuar se realizarán algunas suposiciones sobre el ruido. Trabajando con el rango de frecuencias de 100 Hz a algunos KHz, el ruido está dominado por conteo de fotones [61] entonces si los detectores trabajan en este rango de frecuencias

1. En cada tiempo muestra  $t_i$ , la variable aleatoria  $n_i = n(t_i)$  tiene promedio 0  $\langle n_i \rangle = 0$ , donde los brackets denotan promedio de conjunto (ensemble average).
2. El ruido es estacionario, lo que se escribe matemáticamente cómo  $\langle n(t_i)n(t_j) \rangle = K(t_i - t_j)$  con  $K$  una función de autocorrelación.
3. El ruido puede modelarse con una distribución Gaussiana.

Con estas suposiciones, el ruido es estacionario de sentido amplio Gaussiano (Gaussian wide sense stationary) con promedio 0. Por lo tanto, la hipótesis  $H_0$  tiene una función de distribución de probabilidad dada por

$$p_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T C^{-1}\mathbf{x}\right), \quad (3.42)$$

por ello  $\mathbf{x}$  debe construirse cómo un vector columna y  $C$  es la matriz de covarianza con entradas dadas por

$$C_{ij} = K(t_i - t_j). \quad (3.43)$$

Si se considera la matriz de información de Fisher  $\mu$  (la inversa de la matriz de covarianza), entonces  $\mathbf{x}^T C^{-1}\mathbf{x}$  puede escribirse de forma simple cómo  $\mu_{ij}x_i x_j$ . Definiendo el producto escalar cómo  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu_{ij}x_i y_j$ , la función de distribución de probabilidad es

$$p_0(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det \mu}{(2\pi)^N}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{x})\right). \quad (3.44)$$

A partir de este resultado puede deducirse la función de distribución de probabilidad para la hipótesis  $H_1$ . Cómo se tomó la hipótesis de ruido aditivo,  $p_1(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x} - \mathbf{s})$  [56, 61] y por ende

$$p_1(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det \mu}{(2\pi)^N}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{s}, \mathbf{x} - \mathbf{s})\right). \quad (3.45)$$

Con la definición del producto escalar, el conjunto de vectores de datos que se denotará cómo  $\mathcal{D}$  es un espacio de Hilbert. Una prueba se requerirá para decidir entre la hipótesis  $H_0$  y  $H_1$ . Para hacer esto, el espacio  $\mathcal{D}$  se dividirá en dos subconjuntos  $\mathcal{R}_0$  y  $\mathcal{R}_1$  de forma que si  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_i$  entonces  $H_i$  es verdadera. Sin embargo, debido a la naturaleza probabilística de las hipótesis, la prueba puede fallar, por lo que el objetivo es reducir el error a lo menor posible.

Recordando que la amplitud  $h$  de una onda gravitacional es extremadamente pequeña, la hipótesis  $H_1$  será verdadera en muy raras ocasiones y por ende puede escogerse erróneamente en varios intentos. El cociente de las veces que se toma erróneamente la hipótesis  $H_1$  con el número de intentos se llama probabilidad de falsa alarma  $p_F$ . De este modo, minimizar el error de reduce a minimizar  $p_F$  y así determinar el conjunto  $\mathcal{R}_1$ . A este método se le conoce cómo el criterio de Neyman-Pearson [56, 61]. La probabilidad de falsa alarma junto con la probabilidad de detección de definen cómo

$$p_F = \int_{\mathcal{R}_0} p_0(\mathbf{x}) d^N x \quad , \quad p_D = \int_{\mathcal{R}_1} p_1(\mathbf{x}) d^N x, \quad (3.46)$$

con  $p_D$  la probabilidad de detección. Ahora se define el cociente de probabilidad

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p_1(\mathbf{x})}{p_0(\mathbf{x})}, \quad (3.47)$$

por lo que para una probabilidad de falsa alarma  $p_F = \alpha$ ,  $\alpha = \{p | \lambda(\mathbf{x}) > \Lambda_0\}$  la región  $\mathcal{R}_1$  es  $\mathcal{R}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C} | \Lambda(\mathbf{x}) > \Lambda_0\}$ .  $\Lambda_0$  se conoce cómo el umbral (threshold) y define una hipersuperficie en  $\mathbb{C}^n$  que divide las regiones  $\mathcal{R}_0$  y  $\mathcal{R}_1$ . Esta condición  $\Lambda(\mathbf{x}) > \Lambda_0$  puede reescribirse en términos de un producto escalar aplicando logaritmo natural a (3.47)

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{1}{2}(\mathbf{s}, \mathbf{s}), \quad (3.48)$$

con  $(\mathbf{s}, \mathbf{s})$  una constante debido a que la señal se está asumiendo determinista. Por ende la condición se reduce a

$$\rho = (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq \rho_0 \quad (3.49)$$

con  $\ln \Lambda_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{s}, \mathbf{s})$ . Además,  $\rho$  se llama cociente de señal-ruido (signal to noise ratio) y  $\rho_0$ , umbral (threshold). Por lo que el valor de  $\rho$  determinará cual de las hipótesis  $H_0$  o  $H_1$  es correcta. Este método es simple, sin embargo, las ondas gravitacionales reales no tienen una única señal sino un conjunto de señales que dependen en un vector de parámetros  $\lambda$ , es decir  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\lambda)$ . Este vector de parámetros incluye  $p$  parámetros  $\lambda^\alpha$  con  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , los cuáles pueden depender de la masa de las fuentes de ondas gravitacionales, su distancia, fase inicial, entre otros [56]. Ahora el conjunto de señales genera una variedad  $p$ -dimensional, la cuál es una sub-variedad de  $\mathcal{D}$ . Esta sub-variedad se llama variedad de señales y se denota por  $\mathcal{S}$  y en ella se puede tomar una carta con coordenadas  $\lambda^\alpha$ .

Con estos cambios, la hipótesis  $H_1$  cambia a, una de las señales  $\lambda^\alpha$  se ha detectado, entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{n} + \mathbf{s}(\lambda^\alpha)$  y la función de distribución de probabilidad es  $p_1(\mathbf{x}; \lambda)$ . En este caso para determinar si  $H_0$  o  $H_1$  es verdadera, un nuevo cociente de probabilidad debe

definirse. en este caso, este cociente para un parámetro específico  $\lambda$  se define cómo

$$\Lambda(\mathbf{x}; \lambda) = \frac{p_1(\mathbf{x}; \lambda)}{p_0(\mathbf{x})}, \quad (3.50)$$

y cómo el ruido no incluye parámetros  $\lambda$ , la función de distribución de probabilidad para  $H_0$  no depende en  $\lambda$ . Para obtener el cociente total se requiere hacer una integral [56]

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int d\lambda \Lambda(\mathbf{x}; \lambda) z(\lambda), \quad (3.51)$$

donde  $z(\lambda)$  es una función de distribución de probabilidad para el espacio de parámetros que se calcula con información astrofísica.

Cómo puede verse, para determinar si se ha detectado una onda gravitacional, se requiere calcular el cociente de probabilidad (3.51), sin embargo esta tarea es computacionalmente costosa. Recordando que  $\rho = (\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mu_{ij} x_i s_j$ , un filtro emparejado (matched filter) puede definirse cómo  $q_i = \mu_{ij} s_j$  y por la condición  $\rho \geq \rho_0$ , este filtro emparejado maximiza la probabilidad de detección  $p_D$  para una probabilidad de falsa alarma arbitraria  $p_F$ . Por lo tanto, al final el problema se reduce a calcular el filtro emparejado  $q_i$  para una gran cantidad de puntos en el espacio de parámetros.

Debido a las limitaciones computacionales, sólo puede calcularse  $q_i$  para un número finito pero grande de puntos en  $\mathcal{S}$ , a los que se les llama plantillas. Una forma de colocar estos puntos es en una rejilla donde un punto arbitrario esta a lo más a una distancia  $\epsilon$  de un punto de la plantilla. Para hacer esto se requiere definir una métrica en  $\mathcal{S}$  y puede tomarse la que es inducida por el producto escalar  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu_{ij} x_i y_j$  dada por [56]

$$g_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \lambda^\mu}, \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \lambda^\nu} \right), \quad (3.52)$$

por lo que la condición para colocar las plantillas es

$$g_{\mu\nu} \Delta \lambda^\mu \Delta \lambda^\nu = \epsilon. \quad (3.53)$$

Si  $\epsilon = 0.03$ , alrededor del 10 % de las detecciones se perderán [56]. La forma más simple de colocar las plantillas son considerando hipercubos con el punto plantilla en el centro del hipercubo de lado  $\Delta l$ , con la longitud del lado obtenida demandando que la distancia de un vértice del hipercubo a su centro sea  $\epsilon$ . Por lo tanto  $\epsilon = p \left( \frac{\delta l}{2} \right)^2$ . Con esto, el número de plantillas puede calcularse mediante [56]

$$N_{\text{plantillas}} = \frac{\int d\lambda \sqrt{\det(-g)}}{\Delta l^p}, \quad (3.54)$$

cómo ejemplo, en la primera corrida O1 de la colaboración LIGO-Virgo, se emplearon alrededor de 250,000 plantillas [56].

### 3.6. Sirenas estándar

Cómo se vio anteriormente, es posible, partiendo de la teoría de relatividad general deducir la distancia a una fuente de ondas gravitacionales (3.29) a partir de la amplitud  $h$ , la frecuencia de la onda gravitacional y su primera derivada. Para poder estudiar la relación distancia sirena contra corrimiento al rojo se requiere determinar el corrimiento al rojo a la fuente, sin embargo eso puede no ser una tarea fácil. En el caso de la colisión de dos agujeros negros, es muy complicado medir su corrimiento al rojo debido a la baja radiación electromagnética que emiten. Además de detectar la onda gravitacional, es preciso determinar su corrimiento al rojo. Esto se puede hacer si la colisión de las binarias compactas provocan un Gamma Ray burst al cuál se le pueda medir su corrimiento al rojo.

Las sirenas estándar son las fuentes de ondas gravitacionales que tienen una contraparte electromagnética asociada [62, 63]. De esta forma ya se pueden estudiar modelos cosmológicos con estos objetos y no se requiere usar la escalera cósmica cómo en candelas estándar o de encontrar objetos con tamaño o luminosidad intrínseca igual cómo para las reglas y candelas estándar. El problema es que de los catálogos que se considerarán en este trabajo, los cuáles serán el GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] sólo dos de los eventos es una sirena estándar. El primero se llama GW170817 [60], proveniente de una colisión de estrellas de neutrones, al cuál de forma independiente se le detectó una contraparte electromagnética GRB-170817A con corrimiento al rojo  $z = 0.0099$  [64]. El segundo se llama GW190521, proveniente de una colisión de agujeros negros, con el cuál se tiene un candidato a contraparte electromagnética ZTF19abahr con corrimiento al rojo  $z = 0.438$  [65].

Por lo anterior de que sólo se cuenta con dos sirena estándar en estos catálogos, es crucial considerar otros métodos para estudiar la relación  $D_S - z$  con eventos de ondas gravitacionales.

### 3.7. Sirenas oscuras

Las sirenas oscuras son las fuentes de ondas gravitacionales a las cuáles no se les tiene asociada una contraparte electromagnética y por lo tanto no hay una determinación del corrimiento al rojo de estos eventos. Es por ello que con este tipo de eventos no es posible calcular la probabilidad posterior de los parámetros cosmológicos de la forma en cómo se trató en la sección 2.12. Sin embargo, en el capítulo siguiente se empleará un método alternativo para igualmente calcular la probabilidad posterior de los parámetros para estos eventos y con ello usarlos para hacer cosmología y ampliar la base de datos de ondas gravitacionales. En particular se trabajará con el caso de las sirenas oscuras provenientes de colisiones de agujeros negros de los catálogos GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] por simplicidad en cálculos computacionales cómo se discutirá más adelante.

### 3.8. Catálogos de ondas gravitacionales

La colaboración LIGO-Virgo está compuesta por tres observatorios, dos de LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), uno llamado LIGO Livingston Observatory en Livingston, Louisiana y otro llamado LIGO Hanford Observatory en Richland, Washington, ambos en Estados Unidos. El tercer detector se llama Virgo en Cascina, Italia. El que estén separados los tres detectores es importante y reduce la probabilidad de falsa alarma  $p_F$  debido a que si uno de los detectores detecta una señal que en realidad es ruido terrestre los otros dos no la detectarán. Únicamente en ondas gravitacionales reales, los tres detectarán la misma señal.

En esta sección se presentarán los catálogos de ondas gravitacionales GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] de la colaboración LIGO-Virgo con los que se estudiarán las parametrizaciones bidimensionales de energía oscura antes presentadas. Esta colaboración realiza las detecciones en diferentes corridas y al terminar cada una se llevan a cabo trabajos de mantenimiento y mejoras para la siguiente corrida. La primera corrida se denomina O1 y se llevó a cabo del 12 de septiembre de 2015 al 19 de enero de 2016, detectando tres colisiones de agujeros negros binarios [1]. La segunda corrida O2, se llevó a cabo del 30 de noviembre de 2016 al 25 de agosto de 2017, donde se detectaron 8 eventos, 7 colisiones de agujeros negros binarios y 1 colisión de estrella de neutrones binaria [1]. La tercera corrida O3 se dividió en dos debido a la pandemia actual que el mundo está viviendo, la primera de estas se denomina O3a y se llevó a cabo del 1 de abril al 30 de septiembre de 2019 [2].

Comenzando con la primera observación de una colisión de agujeros negros el 12 de Septiembre de 2015 [55, 66, 67, 68], la colaboración LIGO-Virgo ha detectado 50 eventos de colisiones de binarias en sus tres corridas. Los resultados de las primeras dos corridas se encuentran en el paper de la colaboración LIGO-Virgo GWTC-1 (Gravitational Wave Transient Catalog 1) [1] mientras que los correspondientes a la primer mitad de la tercera corrida en el paper de GWTC-2 (Gravitational Wave Transient Catalog 2) [2].

#### 3.8.1. GWTC-1

El GWTC-1 incluye  $N_{\text{GWTC-1}} = 11$  eventos de alta confianza de ondas gravitacionales causados por colisiones de binarias compactas todas ellas con masas  $M > 1M_{\odot}$  observadas por LIGO-Virgo durante las primeras dos corridas (O1 y O2). La red de detectores es sensible a eventos de binarias compactas que colisionaron y produjeron una onda gravitacional, y cubren un rango de frecuencia de alrededor de 15 Hz hasta algunos kHz [1].

Los eventos presentados en GWTC-1 provienen de 3 búsquedas. Dos de estas, PyCBC<sup>1</sup> [69] y GstLAL [70, 71] emplean la búsqueda con el filtro emparejado (matched filter) mencionado en la sección de detección de ondas gravitacionales. Además de esto, se realizó una búsqueda sin modelo de señales o estallidos transcientes de corta duración, denominados coherent WaveBurst (cWB)[72]. Estas búsquedas se detallarán brevemente a continuación.

<sup>1</sup><https://github.com/gwastro/pycbc>

## PyCBC

Esta búsqueda se realizó mediante el software PyCBC <sup>2</sup> [69] donde se realizó mediante filtros emparejados directos con un banco de plantillas usadas para calcular el cociente de señal-ruido para cada combinación del detector. En caso de que el máximo local del cociente de señal-ruido fuera mayor a 5.5, la tubería producía desencadenamiento de un sólo detector asociado a un detector, los parámetros de la plantilla y el tiempo de colisión de las binarias. Para ésta búsqueda no se empleó el detector Virgo, únicamente los dos de LIGO [1].

## GstLAL

Esta búsqueda igualmente realiza una búsqueda mediante filtros emparejados, pero es independiente a PyCBC y se realiza con el software GstLAL [70, 71]. Este software produce un desencadenamiento para cada plantilla y detector maximizando el cociente de señal-ruido del filtro emparejado en ventanas superiores a un segundo y demandando que  $\rho \geq 4$  para los detectores de LIGO y  $\rho \geq 3.5$  para Virgo [1].

## Coherent WaveBurst (cWB)

Este es un algoritmo de análisis empleado en búsquedas para señales levemente o no modeladas de los detectores de ondas gravitacionales de LIGO, el cuál no depende de la Relatividad General. El algoritmo identifica excesos de potencia en las representaciones de tiempo-frecuencia de los datos de la amplitud de la onda gravitacional para señales de hasta 1 kHz y duraciones de algunos segundos. Considera eventos que son coherentes en más de un detector y reconstruye la señal usando el método de máxima probabilidad [72, 1].

## Resultados

En la tabla III del GWTC-1 se presentan los resultados de estos eventos, obtenidos de [1]. Aquí se recopilaron los resultados de distancia sirena  $D_S$  en Mpc, los cocientes de señal-ruido  $\rho$ , las masas de chirrido  $\mathcal{M}$ , todas ellas con el 90% de intervalos creíbles de confianza así cómo su tipo de binaria (BHBH para binarias de agujeros negros, NSNS para binarias de estrellas de neutrones y NSBH para binaria de estrella de neutrones y agujero negro). Estos resultados se presentan en la tabla 3.1.

Cómo se puede ver en la Tabla 3.1, de los 11 eventos de este catálogo, 10 son agujeros negros binarios. Para el caso de la distancia sirena, se tomaron los resultados de la tabla III de [1], al igual que con las masas de chirrido. En el caso del cociente de señal-ruido se tomó el máximo valor de las tres tuberías PyCBC, GstLAL y cWB antes descritas de la tabla I de [1].

Las masas de chirrido reportadas son las masas intrínsecas, sin embargo esas están calculadas asumiendo una cosmología de Planck [28] para determinar el corrimiento al

---

<sup>2</sup><https://github.com/gwastro/pycbc>



Evento	$D_S$ (Mpc)	$\rho$	$\mathcal{M}$ ( $M_\odot$ )	Tipo de binaria
GW150914	$440^{+150}_{-170}$	25.2	$28.6^{+1.7}_{-1.5}$	BHBH
GW151012	$1080^{+550}_{-490}$	10.0	$15.2^{+2.1}_{-1.2}$	BHBH
GW151226	$450^{+180}_{-190}$	13.1	$8.9^{+0.3}_{-0.3}$	BHBH
GW170104	$990^{+440}_{-430}$	13.0	$21.4^{+2.2}_{-1.8}$	BHBH
GW170608	$320^{+120}_{-110}$	15.4	$7.9^{+0.2}_{-0.2}$	BHBH
GW170729	$2840^{+1400}_{-1360}$	10.8	$35.4^{+6.5}_{-4.8}$	BHBH
GW170809	$1030^{+320}_{-390}$	12.4	$24.9^{+2.1}_{-1.7}$	BHBH
GW170814	$600^{+150}_{-220}$	17.2	$24.1^{+1.4}_{-1.1}$	BHBH
GW170817	$40^{+7}_{-5}$	33.0	$1.186^{+0.001}_{0.001}$	NSNS
GW170818	$1060^{+420}_{-380}$	11.3	$26.5^{+2.1}_{-1.7}$	BHBH
GW170823	$1940^{+970}_{-900}$	11.5	$29.2^{+4.6}_{-3.6}$	BHBH

Tabla 3.1: Eventos del GWTC-1 junto con sus distancias sirena en Mpc, sus cocientes de señal-ruido, masas de chirrido y tipo de estrella binaria

rojo [1]. Las masas detectadas son la masa de chirrido en el sistema de referencia del detector, las cuáles no tienen la contaminación de asumir un modelo cosmológico. Por ello, es necesario multiplicar las masas de chirrido reportadas por su corrimiento al rojo calculado más 1 (multiplicar por  $1 + z$ ) y así se regresará a las masas en el marco de referencia del detector las cuáles no asumen ningún modelo cosmológico.

### 3.8.2. GWTC-2

El GWTC-2 está compuesto por  $N_{\text{GWTC-2}} = 39$  eventos candidatos con una contaminación esperada de menos del 10 % durante la primera mitad de la tercera corrida (O3a) y se esperan 3 eventos de falsa alarma causados por ruido instrumental [2]. En la tabla VI del GWTC-2 se presentan los resultados de estos eventos, obtenidos de [2]. Aquí se recopilamos los resultados de distancia sirena  $D_S$  en Mpc, los cocientes de señal-ruido  $\rho$ , las masas de chirrido  $\mathcal{M}$ , todas ellas con el 90 % de intervalos creíbles de confianza así como su tipo de binaria (BHBH para binarias de agujeros negros, NSNS para binarias de estrellas de neutrones y NSBH para binaria de estrella de neutrones y agujero negro). Estos resultados se presentan en la tabla C.1.

En el caso de la corrida O3a de la colaboración LIGO-Virgo se emplearon las mismas tuberías que en O1 y O2 (PyCBC, GstLAL y cWB) con la adición de otra fuente PyCBC BBH que se describirá a continuación

#### PyCBC BBH

Esta es una búsqueda especializada en ondas gravitacionales provocadas por binarias de agujeros negros. La búsqueda especializada en este tipo de binarias compactas fue motivada por el hecho de que las señales de O1 y O2 con la excepción de GW170817 son consistentes con colisiones de binarias de agujeros negros con cociente de masas cercanos a 1 y spins rotacionales efectivos cercanos a 0. Esta búsqueda emplea una estadística de detección que

incluye un número de elecciones de afinación para descartar desencadenamientos que no concuerdan con los filtros [73, 74]. Esta búsqueda permitió a PyCBC detectar más eventos de binarias de agujeros negros en O3a que las detectadas en O1 y O2 [2].

## Resultados

De la tabla VI del GWTC-1 se extrajeron los resultados de los eventos junto con sus distancias sirenas  $D_S$  en  $\text{Gpc}^3$ , masas de chirrido, y cociente de señal-ruido todas ellas con el 90 % de intervalos creíbles de confianza así como el tipo de binaria (BHBH para binarias de agujeros negros, NSNS para binarias de estrellas de neutrones y NSBH para binaria de estrella de neutrones y agujero negro). En el caso de los cocientes de señal-ruido están reportados en la tabla IV de este catálogo para cada una de las 4 tuberías (cWB, GstLAL, PyCBC, PyCBC BBH). Para el presente análisis se tomaron el máximo valor de las 4. Los eventos junto con su distancia sirena  $D_S$ , masa de chirrido, cociente de señal-ruido y tipo de binaria se presentan en el apéndice C.

Al igual que en el GWTC-1, las masas de chirrido presentadas son las intrínsecas calculadas mediante el corrimiento al rojo [2] asumiendo una cosmología tipo Planck [28]. Por ello, para eliminar este ruido de suponer este modelo cosmológico es necesario multiplicar por  $1 + z$  y así regresar a las masas de chirrido en el marco de referencia del detector, las cuáles para su cálculo no asumen ningún modelo cosmológico.

### 3.8.3. Eventos empleados para estudiar modelos de energía oscura con datos de ondas gravitacionales

Para realizar los estudios de parametrizaciones bidimensionales de energía oscura se emplearán los siguientes datos de ondas gravitacionales.

1. La sirena estándar GW170817.
2. La sirena estándar GW190521.
3. Los eventos de GWTC-1 y GWTC-2 de colisiones de agujeros negros sin incluir GW190521.

Los dos primeros eventos tienen contrapartes electromagnéticas por lo que es posible estudiar la relación  $D_L - z$  con ellos de forma directa. En el caso de las sirenas oscuras, las cuáles son 45, se requiere emplear un método alternativo para estimar su corrimiento al rojo y con ello estudiar las parametrizaciones de energía oscura. Los detalles se incluirán en el siguiente capítulo. Por último, se generarán muestras de sirenas estándar empleando  $\Lambda\text{CDM}$  como modelo de fondo para determinar el número esperado de estos eventos con los cuáles realizar una determinación de la constante de Hubble con un error relativo inferior al 1 %. Sin embargo, el análisis con estos eventos será independiente a los realizados con los datos reales de sirenas estándar y oscuras.

---

<sup>3</sup>debe realizarse una conversión para poder trabajar con el GWTC-1 y GWTC-2 en conjunto por sus distintas unidades en  $D_S$

# Capítulo 4

## Análisis de la energía oscura empleando ondas gravitacionales

De los factores de Hubble para el modelo estándar  $\Lambda$ CDM y las parametrizaciones bidimensionales de energía oscura puede verse que la energía oscura sólo tiene una contribución considerable para bajos corrimientos al rojo. Por ello, las mejores bases de datos para estudiar la energía oscura son las de bajos corrimientos al rojo. Los parámetros cosmológicos de los cuales dependen los modelos cosmológicos son  $h = H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ , el contenido de materia  $\Omega_M$  ( $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ ), se supone que el Universo tiene curvatura espacial 0 ( $\Omega_k = 0$ ) y el contenido de radiación es despreciable en bajos corrimientos al rojo. Aunado a estos, para las parametrizaciones bidimensionales de energía oscura, existen dos parámetros adicionales  $\{w_0, w_1\}$ . Por lo tanto el vector de parámetros está dado por  $\Theta = \{h, \Omega_m, w_0, w_1\}$ , todos ellos parámetros adimensionales. El objetivo del análisis es actualizar las constricciones de parámetros cosmológicos de [5] donde se emplearon datos de relojes cósmicos y SNeIa. En este análisis se usarán nuevamente esas dos observacionales cosmológicas con la diferencia de que se usarán bases de datos más actualizadas, para los relojes cósmicos la base de datos de [75] (donde se presenta una recopilación de resultados del factor de Hubble de relojes cósmicos y provenientes de oscilaciones acústicas de Bariones) y para SNeIa la base de datos Pantheon [38], y se agregarán las sirenas estándar y oscuras provenientes de colisiones de agujeros negros de los catálogos de la colaboración LIGO-Virgo GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2]. Para realizar el análisis Bayesiano con cada conjunto de datos se requiere definir su  $\chi^2$ , y además la probabilidad prior del vector de parámetros que será la misma para todos los casos, primero se hablará de las probabilidades likelihood para cada tipo de evento. Se comienza tratando el tema de las ondas gravitacionales.

### 4.1. Análisis Bayesiano con sirenas estándar y oscuras

Cómo se discutió en el capítulo anterior, se emplearán los dos eventos de ondas gravitacionales con contrapartes electromagnéticas de GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] más los eventos de colisión de agujeros negros de los mismos capítulos como sirenas oscuras. Se comienza explicando el caso de sirenas estándar.

### 4.1.1. Análisis Bayesiano con sirenas estándar

Las sirenas estándar son multimensajeros, fuentes generadoras de una onda gravitacional, que permite determinar su distancia sirena, y a las que se les asocia una contraparte electromagnética, lo que permite determinar su corrimiento al rojo. Los eventos que se considerarán serán GW170817 y GW190521 debido a que a ambos se les a logrado asociar una contraparte electromagnética. En este caso la observable cosmológica es la distancia sirena, por lo que

$$\chi_{\text{Sirenas estándar}}^2 = \sum_{n=1}^2 \left( \frac{D_{S_n} - D_S(z_n, \Theta)}{\sigma_{D_{S_n}}} \right)^2, \quad (4.1)$$

aunque las distancias sirena reportadas en los catálogos considerados tienen incertidumbres superiores e inferiores distintas, se tomará la máxima de estas dos como la incertidumbre asociada a cada evento.

### 4.1.2. Análisis Bayesiano con sirenas oscuras

El hecho de que las sirenas oscuras no tengan una medición independiente del corrimiento al rojo no permite escribir la  $\chi^2$  como en el caso de las sirenas estándar. Sin embargo se puede tomar un camino alternativo con el cual calcular la probabilidad posterior y así encontrar con qué valores del vector de parámetros, esta se maximiza. Primero se aplicará el teorema de Bayes para la  $i$ -ésima sirena oscura

$$\mathcal{P}(\Theta | D_{S_i}, \sigma_{D_{S_i}}) = \frac{\mathcal{P}(\Theta) \mathcal{P}(D_{S_i} | \sigma_{D_{S_i}}, \Theta, \eta)}{\mathcal{P}(D_{S_i} | \sigma_{D_{S_i}}, \eta)}, \quad (4.2)$$

donde  $\mathcal{P}(\Theta)$  es la probabilidad prior de los parámetros,  $\mathcal{P}(D_{S_i} | \sigma_{D_{S_i}}, \Theta, \eta)$  la probabilidad likelihood para el  $i$ -ésimo evento,  $\mathcal{P}(D_{S_i} | \sigma_{D_{S_i}}, \eta)$  la evidencia para el  $i$ -ésimo evento y  $\eta$  es un vector de parámetros astrofísicos de las fuentes de ondas gravitacionales. Ahora, la probabilidad likelihood se puede escribir de una forma distinta mediante el teorema de la probabilidad total

$$\mathcal{P}(D_{S_i} | \sigma_{D_{S_i}}, \Theta, \eta) = \int_0^\infty dz \mathcal{P}(D_{S_i} | \sigma_{D_{S_i}}, \Theta, z) \mathcal{P}(z | \Theta, \eta), \quad (4.3)$$

donde  $\mathcal{P}(z | \Theta, \eta)$  es una probabilidad prior del corrimiento al rojo condicional a los parámetros cosmológicos y a los parámetros astrofísicos. Al aplicar el teorema de la probabilidad total se recupera la dependencia condicional de la probabilidad likelihood en el corrimiento al rojo, la cual desaparece al integrar sobre todo el rango de corrimiento al rojo. Con esto no se requiere una medición del corrimiento al rojo, y ya se puede escribir la probabilidad likelihood estándar [51]

$$\mathcal{P}(D_{S_i} | \sigma_{D_{S_i}}, \eta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{D_{S_i}}^2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left[ \frac{D_S(z, \eta) - D_{S_i \text{ obs}}}{\sigma_{D_{S_i}}} \right]^2 \right), \quad (4.4)$$

esto reduce el problema a encontrar una probabilidad prior para el corrimiento al rojo y a realizar una integral en todo el rango de corrimientos al rojo. Cómo la integral es computacionalmente costosa se realizará en un intervalo  $[0, z_{\text{máx}}]$  donde la cota superior debe ser un corrimiento al rojo suficientemente grande donde no se esperen detecciones de ondas gravitacionales.

Cómo el análisis se realizará para una muestra de detecciones de ondas gravitacionales, se requiere tomar la probabilidad total de todos los eventos. Cada una de las detecciones de ondas gravitacionales debería de ser independiente de las otras, por lo que la likelihood total es el producto de las likelihood individuales. Aún más, para obtener la probabilidad posterior hace falta multiplicar por la probabilidad prior y dividir entre la evidencia, entonces

$$\mathcal{P}(\Theta|D_s, \sigma_{D_s}, \eta) = \frac{\mathcal{P}(\Theta)}{\mathcal{E}} \prod_{n=1}^N \int_0^{z_{\text{máx}}} dz \mathcal{P}(D_{S_n}|\sigma_{D_{S_n}}, \Theta, z) \mathcal{P}(z|\Theta, \eta), \quad (4.5)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la evidencia y  $\mathcal{P}(\Theta)$  la probabilidad prior de los parámetros cosmológicos. El de  $z_{\text{máx}}$  deberá ser suficientemente grande para considerar el rango de corrimientos al rojo al cuál los detectores actuales pueden recibir señales de ondas gravitacionales. De los elementos de la ecuación (4.5), la probabilidad prior son rangos que pueden tomar los parámetros cosmológicos, la evidencia es un factor de normalización y para determinar los contornos de confianza de los parámetros cosmológicos no es necesario calcularla, la likelihood se determina, pues las distancias sirena a las fuentes de ondas gravitacionales, cómo sus incertidumbres se conocen y al integrar sobre  $z$  desaparece la dependencia en  $z$ . Sin embargo, la probabilidad prior del corrimiento es la que falta conocer.

Para estos propósitos puede suponerse que la probabilidad prior del corrimiento al rojo es proporcional a la llamada tasa de colisión de binarias compactas diferencial por corrimiento al rojo (la cuál determina el número de colisiones de binarias compactas por año que deben ocurrir en el intervalo de corrimiento al rojo  $[z, z + dz]$ ), dada por [13]

$$\frac{d\dot{N}}{dz} = 4\pi \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \frac{\dot{n}(z)}{1+z} \frac{r^2(z)}{E(z)} C_\theta(x(z), \rho, \mathcal{M}), \quad (4.6)$$

la cuál es una función que toma en cuenta la tasa de colisión intrínseca de estrellas binarias compactas  $\dot{n}(z)$  a corrimiento al rojo  $z$  y donde  $r$  es la distancia comóvil adimensional (sin incluir unidades, únicamente la integral),  $E(z) = H(z)/H_0$  y  $C_\theta$  una función que mide el desempeño de la red de detectores [76] la cuál depende de los parámetros astrofísicos  $\eta$ . Algo que debe tenerse en cuenta es que las probabilidades son adimensionales, por lo cuál para construir la probabilidad prior del corrimiento al rojo en términos de la ecuación (4.6) se requiere incluir una constante de proporcionalidad, que hará que la probabilidad no tenga unidades. Más aún, al integrar esta probabilidad prior en todo el corrimiento al rojo, el resultado debe dar 1. Esto debido a que la probabilidad de que el evento sea detectado en el intervalo de corrimiento al rojo  $[0, z_{\text{máx}}]$  es 1, debido a que el evento debe localizarse en algún corrimiento al rojo. Por este motivo es importante elegir

correctamente el valor de  $z_{\text{máx}}$  y se sugiere tomar una cota bastante conservadora, la cuál permita que las colas de probabilidad prior de corrimiento al rojo de todos los eventos estén incluidas. Los hechos anteriores se pueden escribir de forma matemática cómo

$$1 = B(\Theta, \eta) \int_0^{z_{\text{máx}}} dz \frac{d\dot{N}}{dz}, \quad (4.7)$$

donde  $B(\Theta, \eta)$  es la constante que depende de los parámetros cosmológicos y astrofísicos dado que la probabilidad prior del corrimiento al rojo es condicional al valor del vector de parámetros cosmológicos y astrofísicos, por lo que esta constante variará con cada valor de estos vectores. Además,  $B(\Theta, \eta)$  cancela las unidades y normaliza el resultado. En términos de esta constante puede escribirse finalmente la probabilidad prior del corrimiento al rojo

$$\mathcal{P}(z|\Theta, \eta) = B(\Theta, \eta) \frac{d\dot{N}(\Theta, z, \eta)}{dz}. \quad (4.8)$$

Esta es una probabilidad prior de corrimiento al rojo dado que contiene información sobre el número de colisiones de binarias compactas que ocurrirán en cada intervalo diferencial de corrimiento al rojo. Además de eso, dependerá de mediciones astrofísicas y de la eficiencia de los detectores, aspectos que se denotaron cómo  $\eta$ . Cómo se verá más adelante el factor  $C_\theta(x(z, \rho, \mathcal{M}_{\text{det}}))$  pesa cada evento detectado y considera que los eventos más masivos es posible detectarlos a corrimientos al rojo mayores, dándole una probabilidad mayor a corrimientos al rojo superiores que para estrellas poco masivas y que además toma en cuenta la distancia máxima a la que los detectores pueden detectar una onda gravitacional. Esta función, por lo tanto depende del tipo de fuente de onda gravitacional que se detecte y de la red de detectores considerada.

En la definición de (4.6) puede verse que se requiere conocer  $\dot{n}$  y  $C_\theta$ . La primera es la tasa de colisión intrínseca de estrellas binarias a corrimiento al rojo  $z$  e indica intrínsecamente el número de estrellas binarias que colisionan por año mientras que la segunda función incluye el funcionamiento y eficiente del detector así cómo los eventos astrofísicos detectados.

Para la primera función se requiere tomar un modelo astrofísico que calcule este valor. En particular se tomaron los resultados de  $\dot{n}(z)$  calculados en [77] donde se empleó el código **StarTrack**, el cuál es capaz de evolucionar binarias aisladas que interactúan en equilibrio quasi-hidrostático hasta la formación de binarias compactas y eventualmente en su colisión [77]. Se tomaron los resultados del modelo denominado estándar low-end (el cuál es el modelo base que se trabajó igualmente en [13, 76]) en el marco de referencia del detector para el caso de colisiones de agujeros negros, los cuáles incluyen valores del corrimiento al rojo y la tasa de colisión intrínseca de estrellas binarias compactas  $\dot{n}(z)$  con unidades de  $\text{yr}^{-1}\text{Gpc}^{-3}$  a cada corrimiento al rojo para 13 metalicidades distintas. Para tener la  $\dot{n}(z)$  total se suman las cantidades de las 13 metalicidades. Los resultados pueden descargarse en <sup>1</sup>.

<sup>1</sup><https://www.syntheticuniverse.org/>

Los resultados dan valores discretos de  $\dot{n}(z)$ , por lo que sólo se cuentan con valores discretos para la integral (4.5). Por lo tanto puede emplearse un método numérico para calcular la integral. En el análisis de esta tesis se consideró el método del trapecio. Con los valores del corrimiento al rojo los puntos de la derecha de cada paso de integración. Los resultados para el intervalo de corrimiento al rojo  $z \in [0, 1.5]$  (se tomará como cota superior  $z_{\text{máx}} = 1.5$  debido a que los eventos del GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] considerando una cosmología  $\Lambda$ CDM y los parámetros cosmológicos de Planck 2018 [28] tienen un corrimiento al rojo inferior a  $z = 1.0$  considerando los errores al 90% de confianza. Por lo tanto, con cosmologías alternativas una cota de  $z_{\text{máx}} = 1.5$  es una cota bastante conservadora que permitirá considerar de forma apropiada las colas de la probabilidad prior de corrimiento al rojo de los eventos de estos catálogos) se muestran en la figura 4.1. Como puede verse, por las unidades de  $\dot{n}(z)$ , esta tasa de colisión intrínseca es el número de eventos de colisiones de agujeros negros que ocurren cada año, por cada Gigapársec cúbico. Entonces las unidades de  $\dot{N}$  serán  $\text{yr}^{-1}$ , por lo que esta cantidad dará los eventos que ocurrirán a cierto corrimiento al rojo por año. Mientras mayor sea el valor de  $\dot{N}(z)$ , más probable será que el evento se ubique en ese corrimiento al rojo.

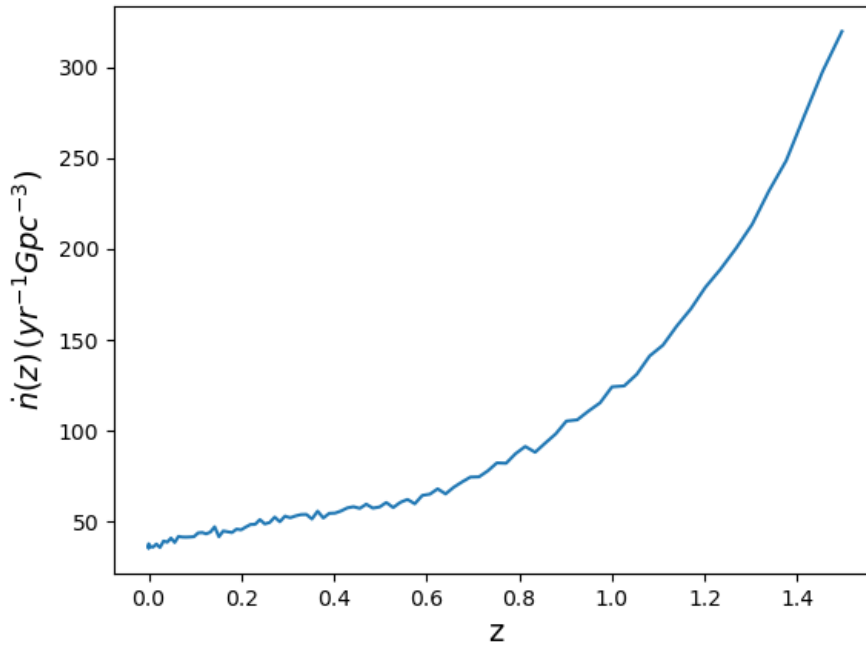


Figura 4.1: tasa de colisión intrínseca de agujeros binarios  $\dot{n}(z)$  contra corrimiento al rojo para el modelo estándar low-end en el marco de referencia del detector con los datos tomados de [77].

Para poder calcular la probabilidad prior del corrimiento al rojo sólo falta entonces conocer la función  $C_\theta$ , la que da los efectos de efectividad de la red de detectores y la cuál

esta dada por [13]

$$C_\theta(x(z, \rho)) = \int_{x(z, \rho)}^{\infty} d\theta P_\theta(\theta), \quad (4.9)$$

donde

$$P_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{5}{256} \theta (4 - \theta)^3 & \text{if } 0 < \theta < 4, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (4.10)$$

siendo  $P_\theta$  una distribución de probabilidad de un parámetro  $\theta$ , el cuál es una factor de orientación que captura parte del patrón de sensibilidad debido a la orientación relativa del sistema de binarias compactas respecto al detector [13]. Cuatro ángulos describen este parámetro  $\theta$ , dos de ellos  $(\xi, \phi)$  describen la orientación de la binaria relativa al detector y dos más  $(\psi, \iota)$  la orientación de la binaria relativa a la línea de visión entre esta y el detector [13]. Suponiendo que estos cuatro ángulos no están correlacionados, la densidad de probabilidad del parámetro  $\theta$  está dada por (4.10). Y finalmente

$$x(z, \rho) = \frac{\rho}{\rho_0} (1 + z) \frac{c}{H_0} \frac{r(z)}{r_0} \left[ \frac{1.2 M_\odot}{\mathcal{M}_{\text{det}}} \right]^{5/6}, \quad (4.11)$$

donde  $\rho$  es cociente de señal-ruido del evento detectado medida en el detector,  $\rho_0$  es el umbral de la red de detectores,  $r_0$  la distancia característica de la red de detectores, y  $\mathcal{M}_{\text{det}}$  la masa de chirrido de las binarias en el marco de referencia del detector. Mientras que  $\rho_0$  y  $r_0$  son constantes para todos los eventos detectados por una red de detectores,  $\rho$  y  $\mathcal{M}_{\text{det}}$  varían de evento a evento. Debido a la presencia de  $\rho$  y  $\mathcal{M}_{\text{det}}$ , se puede observar que la probabilidad prior del corrimiento al rojo efectivamente depende de parámetros astrofísicos.

A partir del valor de  $x(z, \rho)$ , se puede estudiar el efecto que tienen las masas de chirrido. Mientras mayor sea esta masa, menor será  $x(z, \rho)$  y por ende el límite inferior de la integral (4.9), lo que maximizará el valor de  $C_\theta$  y por ende la probabilidad prior de redshift. Entonces, con mayores masas de chirrido, el evento puede medirse a un corrimiento al rojo mayor. Por otro lado, el cociente de señal-ruido debe ser apenas mayor que el umbral para que esta misma probabilidad se maximice. Cocientes de señal-ruido altos favorecerán corrimientos al rojo bajos.

Finalmente, se puede ver que un valor de  $r_0$  mayor permite detectar eventos a un corrimiento al rojo mayor. Esto es debido a que  $x$  debe estar entre 0 y 4 para que la función  $C_\theta$  sea distinta de 0 debido a la definición de  $P_\theta$ .

En la presente tesis, se trabajó con un valor de  $r_0 = 120$  Mpc pues esta esta en el rango de sensibilidades características de la red de detectores de LIGO-Virgo avanzado para colisiones de agujeros negros y también se trabajó con  $\rho_0 = 8$  [78], la cuál es una cota inferior para los cocientes de señal-ruido de todos los eventos detectados. Sin embargo, al realizar



el análisis se encontró que tomando valores un poco diferentes de  $r_0$  y  $\rho$  no cambiaban considerablemente los resultados.

Como se vió en la sección anterior, los eventos con los que se trabajó fueron de los catálogos GWTC-1 [1] y [2], las dos sirenas estándar y cómo sirenas oscuras los eventos de agujeros negros. Al conjunto de estos datos se le denominará de ahora en adelante como GW.

### 4.1.3. Sirenas estándar simuladas

Además de emplear las sirenas estándar provenientes de datos reales GW170817 y GW190521 y las sirenas oscuras provenientes de colisiones de agujeros negros de los catálogos GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2], se generarán muestras de sirenas estándar para determinar un número razonable de estos eventos requeridos para determinar la constante de Hubble con un error relativo al 1%. Es decir para tener un valor de esta constante con un error relativo similar al de Riess et al. [79]. Cabe destacar que para realizar las simulaciones, se requiere asumir un modelo de fondo, en este caso el que se tomará es el estándar de la cosmología  $\Lambda$ CDM, por lo que debe notarse que al usar sirenas estándar con este método, la medición de  $H_0$  depende del modelo cosmológico y no es una medición independiente cómo si lo es el resultado de Riess et al. [79].

Sin embargo, la utilización de este método, una vez que se tenga una gran cantidad de datos de sirenas estándar, ayudará a comprender más el problema de la constante de Hubble si es debido al modelo o debido a alguna consideración que se esté ignorando. Para ello se requieren sirenas estándar en el mismo rango de corrimiento al rojo que las correspondientes a Riess et al. [79], es decir en  $z \in (0, 2.3)$ . De esta forma, suponiendo que se cuentan con suficientes muestras de sirenas estándar y en caso de que exista una tensión en  $H_0$  entre los resultados de Riess et al. [79] y los resultados con sirenas estándar asumiendo  $\Lambda$ CDM, indicará que el problema de la constante de Hubble ocurriría igualmente a nivel local y por lo tanto no se podría deber a ningún factor externo que provoque que la constante cambie para datos en el Universo temprano y tardío. En este posible escenario, la tensión sería completamente física y sería viable con ese mismo catálogo de sirenas estándar, estudiar una gran cantidad de modelos cosmológicos buscando uno que resuelva la tensión en el Universo tardío.

Además de esto, será importante determinar el valor de  $H_0$  de forma independiente del modelo con estos catálogos futuros de sirenas estándar, lo cuál dará más información sobre la naturaleza del problema de la constante de Hubble. Este valor determinado independientemente podría coincidir con el predicho por Planck [28] o con el de Riess et al. [79]. En el primer escenario, habría problemas con las calibraciones con Cefeidas que se desconocen, ya que en el último paper de la colaboración SH0ES, los errores sistemáticos presentes se han reducido enormemente [29]. En el segundo caso, se confirmaría nuevamente la tensión de Hubble y la necesidad de un nuevo modelo estándar en la cosmología.

Cómo puede verse, las sirenas estándar jugarán un papel fundamental en la cosmología

para conocer más sobre la tensión de Hubble. Por ello, es importante conocer un número aproximado de eventos de sirenas estándar requeridos para obtener determinaciones de la constante de Hubble  $H_0$  con error relativo similar al de la colaboración SH0ES y en su mismo rango de corrimiento al rojo lo que permitiría trabajar con dos catálogos independientes en el universo tardío. En el caso del método de sirenas oscuras presentado en la subsección anterior, Ding et al. reporta que se requiere un número aproximado de  $10^5$  eventos de sirenas oscuras para obtener un error relativo de 1 % en la determinación de  $H_0$  asumiendo el modelo  $\Lambda$ CDM [13].

Siguiendo el camino anteriormente discutido, se asumirá igualmente el modelo  $\Lambda$ CDM y un valor de  $H_0$  y  $\Omega_M$  dado por los resultados de Pantheon [38] y el modelo  $\Lambda$ CDM presentados en la tabla 4.2, de  $h = 0.7284$  y  $\Omega_M = 0.285$ . Más adelante, se hablará de este catálogo y se mencionará que los datos se calibrarán con el  $H_0$  de Riess et al. [79], por lo que este resultado es cercano al valor de la colaboración SH0ES y proporciona un valor de  $\Omega_M$  que se obtendría asumiendo este tipo de cosmología.

Partiendo de estos valores para  $h$  y  $\Omega_M$ , las distancias sirena se simularán de forma que

$$D_{S \text{ simulada}}(z) = D_{S \Lambda\text{CDM}}(z) + \mathcal{N}(0, \sigma), \quad (4.12)$$

donde  $D_{S \Lambda\text{CDM}}$  es la distancia sirena calculada asumiendo  $\Lambda$ CDM y los valores de  $h$  y  $\Omega_M$  antes mencionados,  $\mathcal{N}(0, \sigma)$  es la distribución normal de probabilidad con media 0 y  $\sigma$  la desviación estándar. Esta desviación estándar estará dada por los errores en las distancias sirena, los cuáles se simularán empleando una distribución uniforme de probabilidad de forma que el error en la distancia sirena esté entre 7 % y 30 %. Por ello, en caso de que los errores de muestras futuras sean mayores a estos considerados, se requerirá un número mayor de muestras y en caso de que el error sea menor será un menor número las que se requieran.

Las muestras se generarán en el rango de corrimiento al rojo  $z \in (0, 2.3)$  para tener un desempeño similar al de Riess et al. [79]. Además de eso, los corrimientos al rojo de las muestras se simularán tomando la tasa de colisión intrínseca de binarias compactas  $\dot{n}(z)$  normalizada como distribución de probabilidad. Para ello, se sumarán las  $\dot{n}(z)$  correspondientes a colisiones de agujeros negros, de estrellas de neutrones y de estrella de neutrón con agujero negro dado que de estos tres tipos se puede obtener sirenas estándar. Después de simular los corrimientos al rojo para las muestras se calculan sus distancias sirenas con la ecuación (4.12). En este caso, al ser sirenas estándar simuladas, se usará la misma  $\chi^2$  que en el caso de sirenas estándar.

## 4.2. Compilaciones observacionales de reglas estándar, candelas estandarizables y relojes cósmicos

Además de trabajar con ondas gravitacionales, dado que uno de los objetivos del análisis realizado en la presente tesis era el de actualizar las constricciones en los parámetros

cosmológicos de [5] con los nuevos datos de ondas gravitacionales, se empleó el catálogo de SNeIa Pantheon [38] y una compilación de valores del factor de Hubble [75]. El primer catálogo incluye candelas estandarizables SNeIa y el segundo reglas estándar de las oscilaciones acústicas de bariones más relojes cósmicos.

### 4.2.1. SNeIa Pantheon

Este catálogo [38] incluye  $N_{\text{Pantheon}} = 1048$  muestras de supernovas, las cuáles se encuentran en el intervalo de corrimiento al rojo  $z \in [0.010, 2.26]$ .

Este catálogo da el valor observacional del módulo de distancia [38]

$$\mu = m'_B - M, \quad (4.13)$$

donde  $m'_B$  es la magnitud aparente corregida en la banda B dada por [38, 80]

$$m'_B = m_B + \alpha x_1 - \beta c + \Delta_M + \Delta_B, \quad (4.14)$$

donde  $\Delta_M$  es una corrección en la distancia basada en la masa de la galaxia donde se encontraba la supernova,  $\Delta_B$  una corrección en la distancia determinada por posibles tendencias precedidas por simulaciones, y  $\alpha$  y  $\beta$  coeficientes de relación entre la luminosidad, y el tramo (stretch) y el color respectivamente [38]. Por lo tanto la magnitud aparente  $m'_B$  es una corrección tomando en consideración posibles errores sistemáticos.

Debido a la degeneración entre la magnitud absoluta  $M$  y la constante de Hubble  $H_0$ , en el presente trabajo, para realizar el análisis estadístico, se calibró este catálogo con el valor de la constante de Hubble  $H_0$  determinado por Riess et al. [79], de la colaboración SH0ES, la cuál tiene la mejor medida de la constante de Hubble en el Universo local e independiente del modelo. Esta calibración provocará que los análisis que incluyan datos de Pantheon, arrojen valores de  $H_0$  cercanos a este valor de Riess et al. [79]. Ahora, el módulo de distancia está dado por

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left( \frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right), \quad (4.15)$$

donde  $D_L$  es la distancia luminosa que deberá tratarse en pársecs (pc) para evitar conflictos de unidades. Este es el módulo de distancia teórico, mientras que la muestra de Pantheon calibrada con el valor de  $H_0$  de Riess et al. [79] incluye valores observacionales del módulo de distancia y del redshift. En base a estos, los mejores parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega_M, w_0, w_1\}$  se minimizando el  $\chi^2$  dado por

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^{N_{\text{Pantheon}}} \left( \frac{\mu(z_n, \Theta) - \mu_{\text{obs}}(z_n)}{\sigma_{\text{obs } n}} \right)^2, \quad (4.16)$$

donde  $\sigma_{\text{obs}}^2$  se refiere a las varianzas observacionales del módulo de distancia y  $\mu_{\text{extobs}}(z_n)$  al módulo de la distancia para la muestra  $n$ . A partir de ahora se referirá a este catálogo

cómo Pantheon. La muestra completa de Pantheon incluye una matriz de covarianza que incluye errores correlacionados entre las diversas muestras de Pantheon, sin embargo, en el análisis de esta tesis, sólo se consideró la diagonal de la matriz de covarianza que da el error en el módulo de la distancia de cada muestra. Esto disminuye notablemente el tiempo computacional y es una buena aproximación en promedio.

### 4.2.2. Cronómetros cósmicos

Este catálogo [75] incluye  $N_{CC} = 51$  eventos en el intervalo de corrimiento al rojo  $z \in [0, 2.36]$  y además se incluirá el valor de  $H_0$  de Riess et al. [79] dado que es una medición independiente del modelo del factor de Hubble en  $z = 0$ .

Veinte de los 51 eventos de este catálogos provienen de mediciones por el método de clústers de galaxias de reglas estándar provenientes de las oscilaciones acústicas de bariones. Para calcular el factor de Hubble de estos eventos es necesario conocer el horizonte de sonido  $r_d$  al corrimiento al rojo  $z_d$ , el cuál depende del modelo cosmológico considerado. Por ello, algunos de estos eventos podrán crear un pequeño error estadístico en el análisis.

Sin embargo, el resto de los eventos provienen del método de edad diferencial y por ende son relojes cósmicos, los cuáles dan mediciones del factor de Hubble independiente del modelo.

Para realizar un análisis estadístico con esta muestra igualmente debe el mínimo del  $\chi^2$

$$\chi_{CC}^2 = \sum_{n=1}^{N_{CC}} \left( \frac{H(z_n, \Theta) - H_{\text{obs}}(z_n)}{\sigma_{\text{obs } n}} \right)^2, \quad (4.17)$$

donde  $H(z_n, \Theta)$  es el factor de Hubble teórico,  $H_{\text{obs}}(z_n)$  el observacional asociado a la muestra  $n$  y  $\sigma_{\text{obs } n}^2$  su varianza asociada. Desde este momento se referirá a este catálogo como CC, abreviatura de cronómetros cósmicos, a pesar de que el nombre no sea del todo acertado dado que los 20 eventos de oscilaciones acústica de bariones no son relojes formalmente, pero se le dará el nombre por que al igual que los relojes cósmicos, proporcionan valores del factor de Hubble.

## 4.3. Metodología

Una vez que ya se presentaron las  $\chi^2$  para cada base de datos (con excepción de las sirenas oscuras donde se empleó un método alternativo), se requiere considerar la probabilidad prior para el vector de parámetros. Para todos los parámetros cosmológicos se consideraron distribuciones de probabilidad uniformes ( $\mathcal{U}(a, b)$ ) para evitar darle preferencia a algún valor con los siguientes intervalos para cada uno

Parámetro	Distribución de probabilidad
$h$	$\mathcal{U}(0.5, 1.0)$
$\Omega_M$	$\mathcal{U}(0.0, 0.5)$
$w_0$	$\mathcal{U}(-5.0, 5.0)$
$w_1$	$\mathcal{U}(-5.0, 5.0)$

Tabla 4.1: Distribuciones de probabilidad prior consideradas para los parámetros cosmológicos. En todos los casos se consideraron distribuciones uniformes.

Las probabilidades posteriores para el vector de parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega_M, w_0, w_1\}$  se calcularon mediante un método de Monte Carlo de Cadenas de Markov (MCMC) empleando un algoritmo mejorado del tradicional Metropolis-Hastings con el paquete de python `emcee` [81]. En el apéndice E se detalla el método empleado para generar las cadenas y con ellas se graficaron las regiones de confianza a  $1-\sigma$  y  $2-\sigma$  para el vector de parámetros con el paquete de python `GetDist` [82] el cuál a partir de unas cadenas de Markov calcula la media, desviaciones estándar de cada elemento del vector de parámetros y las regiones de confianza entre los pares de parámetros.

Además de correr el método MCMC para cada base de datos aislada de las antes mencionadas Pantheon, CC y GW, se hicieron superposiciones de bases de datos para mejorar la estadística y con ello actualizar los resultados anteriormente obtenidos en [5] al agregar GW. La superposición de bases de datos se realizó sumando logaritmos naturales de las probabilidades posteriores individuales cómo se discutió en la sección 2.12.

### 4.3.1. Análisis estadístico

El valor de mejor ajuste (media) así cómo la incertidumbre a  $1-\sigma$  (desviación estándar) para los parámetros cosmológicos con las muestras Pantheon y CC y su combinación Pantheon+CC se presentan en la tabla 4.2, mientras que los correspondientes para GW y su combinación con los otros catálogos Pantheon+GW y Pantheon+CC+GW se encuentran en la tabla 4.3. Finalmente, en la simulación de sirenas estándar, se generaron  $N = 50, 200, 1000, 2000$  muestras. Los resultados de los parámetros cosmológicos así cómo el error relativo en  $H_0$  se presentan en la tabla 4.5.

También se incluyen los contornos de confianza a  $1-\sigma$  y  $2-\sigma$  para  $\Lambda$ CDM y las parametrizaciones de energía oscura para Pantheon, CC, su combinación Pantheon+CC y GW así cómo GW y su combinación con los otros catálogos Pantheon+GW y Pantheon+CC+GW. Estos contornos de confianza se presentan en la figura 4.2 para  $\Lambda$ CDM, en la figura 4.3 para CPL, en la figura 4.4 para BA y en la figura 4.5 para LC. Además de esto, se presentan los contornos de confianza únicamente para el catálogo completo de GW y los cuatro modelos considerados en la figura 4.6. Finalmente, para las sirenas estándar simuladas, los contornos de confianza se presentan en la figura 4.7.

### 4.3.2. Análisis del criterio de la evidencia de Bayes

Además se realizar los MCMCs, para determinar si alguno de los modelos de energía oscura alternativos podía competir con el modelo estándar  $\Lambda$ CDM se calculó el factor de Bayes 2.131, el cuál es el cociente entre la evidencia de dos modelos en consideración. En este caso, la evidencia del modelo estándar  $\Lambda$ CDM se colocará en el numerador y la evidencia de uno de los modelos alternativos en el denominador. Un valor positivo de este factor de Bayes corresponde a una preferencia por  $\Lambda$ CDM mientras que un valor negativo tiene una preferencia sobre el modelo alternativo. La fuerza de la preferencia se determinó con el criterio de Jeffreys 2.1.

Para calcular la evidencia, se requiere calcular una integral del producto de la probabilidad likelihood y la prior sobre todo el espacio de parámetros cómo se observa en la expresión (2.126). Esta integral es costosa computacionalmente, por lo que se empleó un algoritmo de muestreo anidado para calcularla, lo que convierte esta integral de varias dimensiones a una de una dimensión. Este algoritmo se ha determinado viable en aplicaciones en cosmología [83, 5]. Este algoritmo se ejecutó empleando el paquete de python `dynesty`[84, 85, 86, 87]. El algoritmo se describe en el apéndice E. El cálculo de la evidencia se realizó sobre la muestra completa Pantheon+CC+GW, para determinar si con todos los datos disponibles, alguna de las parametrizaciones bidimensionales de energía oscura podía competirle a  $\Lambda$ CDM.

## 4.4. Discusión de resultados

Cómo puede verse en las gráficas de contornos de confianza, el comportamiento tipo  $\Lambda$ CDM ( $w_0 = -1, w_1 = 0$  para todas las parametrizaciones, excepto LC donde  $w_0 = -1, w_c = -1$ ) cae dentro del contorno de  $2\text{-}\sigma$  para los todos los casos. Esto muestra que los resultados con la base de datos completa y cada una de las bases y combinaciones individuales son consistentes con el modelo  $\Lambda$ CDM.

De acuerdo a los resultados de la Tabla 4.3, el catálogo GW considerado es capaz de calcular los valores de los parámetros cosmológicos exitosamente, sin embargo presentan errores relativos grandes, de entre 20 % y 25 % en el caso de la constante de Hubble reducida  $h$ . Este catálogo tiene 2 eventos de sirenas estándar y 45 de sirenas oscuras, dando un total de 47 eventos. En comparación al catálogo CC considerado, que tiene 52 eventos, los errores relativos son enormes dado que este último tiene errores de entre 1 % y 3 % para el caso de  $h$ . Esto indica que las sirenas estándar no tienen el mismo poder de acotar parámetros cosmológicos cómo los relojes cósmicos o las sirenas estándar ya que las simulaciones indicaron que si es posible acotar los valores con 50 sirenas estándar.

Lo anterior es consistente con lo reportado por Ding et al. [13], donde se necesitaron de  $10^5$  sirenas estándar para tener un error relativo de 1 % en el valor de la constante de Hubble  $H_0$ . Sin embargo, los resultados obtenidos sólo con GW son consistentes con los

demás catálogos y sus combinaciones, lo cuál permite ver que el método desarrollado lleva a una consistencia esperada. Cómo se puede además observar al comparar las tablas 4.2 y 4.3, los resultados conteniendo Pantheon y CC no cambiaron demasiado sus valores al incluir GW, lo cuál indica que la base de GW no tienen un peso estadístico significativo al combinar los catálogos. Esto puede esperarse si se tiene en cuenta que Pantheon tiene 1048 datos contra 47 de la base de datos de GW que se consideró.

Sin embargo, futuras detección de ondas gravitacionales tanto de sirenas estándar cómo oscuras podrán ayudar a acotar fuertemente los parámetros y a estudiar la tensión de Hubble cómo se discutió con la simulación de sirenas estándar. Además en la tabla 4.5 puede verse que con 50 sirenas estándar generadas puede esperarse un error relativo de 4.7%, mientras que al aumentar a 200 el error sería de 2.2%. Curiosamente, con los resultados obtenidos, se requieren 1000 muestras generadas para alcanzar un error relativo a penas menor a 1%, en comparación con las  $10^5$  que se requerirían en el caso de sirenas oscuras, una cantidad 2 órdenes de magnitud menor. Finalmente, con 2000 muestras el error sólo podría bajar a 0.73%, el cuál es aún mayor que el error relativo que hay con Pantheon. Esto puede deberse a que los errores en Pantheon son muy pequeños mientras que en las muestras generadas pueden llegar hasta el 30% de la distancia sirena de cada muestra. Por ello, la cantidad de sirenas estándar necesarias para calcular un valor de  $h$  menor al 1% de error relativo dependerá de que tan grandes sean los errores en la distancia sirena.

En la tabla 4.4 puede verse que el modelo estándar  $\Lambda$ CDM es el preferido de los 4 considerados por una larga diferencia, mostrando una evidencia fuerte contra CPL y muy fuerte contra BA y LC. Con la base de datos completa Pantheon+CC+GW ninguno de estos modelos le compite al estándar.

Los resultados de GW incluyen un pequeño error debido a que las muestras del GWTC-2 tienen una contaminación menor al 10% [2], lo cuál induce un error, sin embargo al considerar la muestra completa Pantheon+CC+GW debido a que la muestra de GW sólo representa 47 de los 1147 eventos totales, por ello el error en la muestra completa será despreciable.

Cómo puede observarse, hasta ahora, los datos de GW no pueden ayudar a estudiar problemas en cosmología cómo el de la constante de Hubble debido a falta de datos, sin embargo el futuro de la cosmología con ondas gravitacionales es prometedor dado que este estos eventos permitirán medir los parámetros cosmológicos de forma independiente a los cálculos empleando datos del fondo cósmico de microondas cómo en Planck [28] o de cefeidas en el universo tardío cómo en SH0ES [79, 29]. Por ello, a pesar de que los errores actualmente son muy grandes con GW, en el futuro constituirán una herramienta fundamental en la forma de sirenas estándar y también de sirenas oscuras si no pueden obtenerse muchas contrapartes electromagnéticas asociadas a colisiones de binarias compactas. Incluso, el método presentado en esta tesis puede extenderse a otros modelos cosmológicos en Relatividad General y potencialmente a modelos de gravedad extendida y modificada, los cuáles pueden ser candidatos a resolver el problema de la constante de Hubble.

Model	Database	$h$	$\Omega_M$	$w_0$	$w_1$
$\Lambda$ CDM	CC	$0.7152 \pm 0.0099$	$0.248 \pm 0.014$	-	-
	Pantheon	$0.7284 \pm 0.0023$	$0.285 \pm 0.013$	-	-
	Pantheon+CC	$0.7330 \pm 0.0020$	$0.2447 \pm 0.0073$	-	-
CPL	CC	$0.722 \pm 0.017$	$0.186^{+0.071}_{-0.032}$	$-1.05 \pm 0.12$	$0.77^{+0.54}_{-0.21}$
	Pantheon	$0.7335 \pm 0.0042$	$0.306^{+0.13}_{-0.044}$	$-1.18 \pm 0.17$	$-0.05^{+1.9}_{-0.61}$
	Pantheon+CC	$0.7337 \pm 0.0031$	$0.168^{+0.078}_{-0.031}$	$-0.950^{+0.053}_{-0.074}$	$0.61^{+0.46}_{-0.17}$
BA	CC	$0.722 \pm 0.016$	$0.184^{+0.073}_{-0.031}$	$-1.01^{+0.10}_{-0.12}$	$0.380^{+0.25}_{-0.090}$
	Pantheon	$0.7329 \pm 0.0041$	$0.336^{+0.11}_{-0.034}$	$-1.20^{+0.15}_{-0.19}$	$-0.40^{+1.3}_{-0.43}$
	Pantheon+CC	$0.7330 \pm 0.0029$	$0.159^{+0.085}_{-0.038}$	$-0.915^{+0.057}_{-0.090}$	$0.326^{+0.20}_{-0.061}$
LC	CC	$0.723 \pm 0.016$	$0.188^{+0.070}_{-0.028}$	$-1.05 \pm 0.12$	$-0.80^{+0.19}_{-0.16}$
	Pantheon	$0.7336 \pm 0.0041$	$0.304^{+0.13}_{-0.047}$	$-1.18 \pm 0.17$	$-1.18^{+0.75}_{-0.31}$
	Pantheon+CC	$0.7337^{+0.0032}_{-0.0029}$	$0.170^{+0.078}_{-0.031}$	$-0.952^{+0.050}_{-0.074}$	$-0.75^{+0.19}_{-0.15}$

Tabla 4.2: Valores de los mejores ajustes para los cuatro parámetros cosmológicos con su incertidumbre a  $1-\sigma$ . Los resultados se reportan para el modelo estándar  $\Lambda$ CDM y las tres parametrizaciones bidimensionales. La segunda columna indica la base de datos empleada, en este caso se reportan los resultados con Pantheon, CC y la combinación Pantheon+CC

Modelo	Catálogo	$h$	$\Omega_M$	$w_0$	$w_1$
$\Lambda$ CDM	GW	$0.75^{+0.13}_{-0.17}$	$0.25 \pm 0.14$	-	-
	Pantheon+GW	$0.7285 \pm 0.0024$	$0.285^{+0.012}_{-0.014}$	-	-
	Pantheon+CC+GW	$0.7329 \pm 0.0019$	$0.2450 \pm 0.0072$	-	-
CPL	GW	$0.74^{+0.12}_{-0.18}$	$0.27^{+0.22}_{-0.12}$	$-1.0^{+2.7}_{-3.0}$	$0.2 \pm 2.9$
	Pantheon+GW	$0.7336 \pm 0.0042$	$0.309^{+0.12}_{-0.044}$	$-1.19 \pm 0.17$	$0.01^{+1.8}_{-0.67}$
	Pantheon+CC+GW	$0.7334^{+0.0032}_{-0.0028}$	$0.169^{+0.079}_{-0.031}$	$-0.948^{+0.052}_{-0.074}$	$0.60^{+0.47}_{-0.18}$
BA	GW	$0.74^{+0.13}_{-0.17}$	$0.271^{+0.22}_{-0.092}$	$-1.1^{+2.5}_{-3.2}$	$0.3 \pm 2.9$
	Pantheon+GW	$0.7328 \pm 0.0041$	$0.333^{+0.11}_{-0.035}$	$-1.20^{+0.15}_{-0.19}$	$-0.33^{+1.2}_{-0.41}$
	Pantheon+CC+GW	$0.7330 \pm 0.0028$	$0.158^{+0.083}_{-0.040}$	$-0.913^{+0.055}_{-0.088}$	$0.327^{+0.20}_{-0.057}$
LC	GW	$0.74^{+0.12}_{-0.17}$	$0.26^{+0.22}_{-0.15}$	$-1.4^{+1.3}_{-3.3}$	$0.6^{+4.2}_{-5.1}$
	Pantheon+GW	$0.7337 \pm 0.0042$	$0.309^{+0.13}_{-0.049}$	$-1.19 \pm 0.17$	$-1.20^{+0.75}_{-0.32}$
	Pantheon+CC+GW	$0.7335 \pm 0.0030$	$0.170^{+0.077}_{-0.030}$	$-0.949^{+0.049}_{-0.074}$	$-0.75^{+0.18}_{-0.15}$

Tabla 4.3: Valores de los mejores ajustes para los cuatro modelos cosmológicos estudiados con sus respectivas incertidumbres a  $1-\sigma$ . En este caso se reportan los valores con el catálogo GW y las superposiciones Pantheon+GW y Pantheon+CC+GW.

Modelo	$\ln \mathcal{E}$	$B_{E L}$
$\Lambda$ CDM	336.01	-
CPL	331.12	4.89
BA	330.81	5.20
LC	330.18	5.83

Tabla 4.4: Criterio de la evidencia de Bayes para los tres modelos alternativos de energía oscura comparados con el estándar  $\Lambda$ CDM.  $E$  denota la parametrización alternativa de energía oscura y  $L$  el modelo estándar  $\Lambda$ CDM. La interpretación de la preferencia del modelo estándar debe realizarse en términos del criterio de Jeffreys.



N	$h$	$\Omega_M$	Err. rel. $h$
50	$0.715^{+0.027}_{-0.034}$	$0.340^{+0.069}_{-0.079}$	4.7 %
200	$0.725 \pm 0.016$	$0.284^{+0.031}_{-0.037}$	2.2 %
1000	$0.7254 \pm 0.0071$	$0.288 \pm 0.015$	0.98 %
2000	$0.7241 \pm 0.0053$	$0.294 \pm 0.012$	0.73 %

Tabla 4.5: Valores de los mejores ajustes para los dos parámetros cosmológicos con su incertidumbre a  $1\text{-}\sigma$ . Los resultados se reportan para el modelo estándar  $\Lambda\text{CDM}$  a partir de las sirenas estándar simuladas.  $N$  representa el número de muestras simuladas. Además se presenta el error relativo en el resultado de  $h$ .

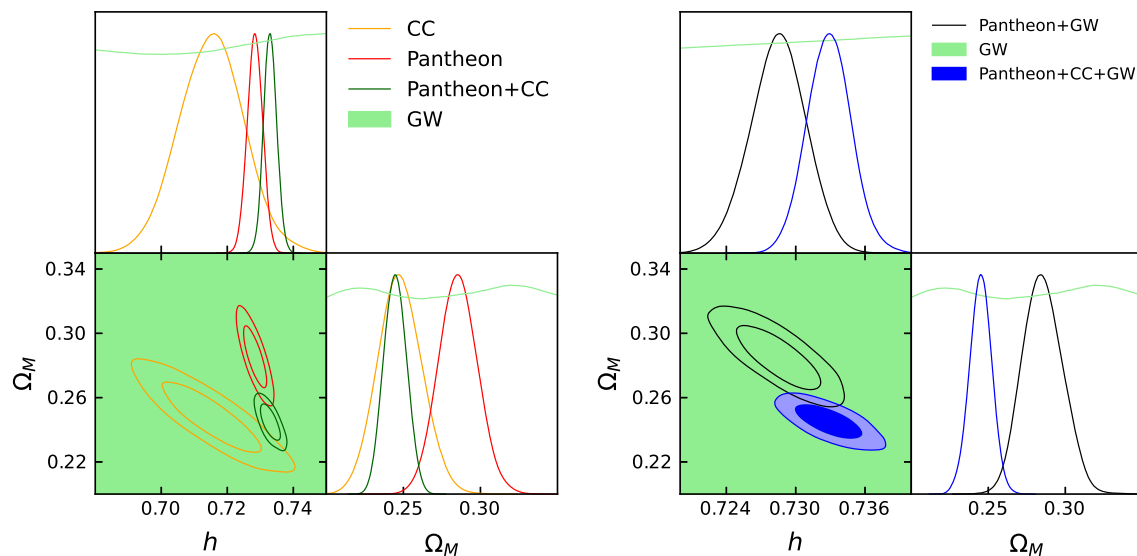


Figura 4.2: Regiones de confianza de  $1\text{-}\sigma$  y  $2\text{-}\sigma$  para los parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega\}$  para el modelo estándar  $\Lambda\text{CDM}$ . *Izquierda:* Análisis empleando los catálogos Pantheon (color rojo), CC (color naranja) y GW (color verde claro) y la unión Pantheon+CC (color verde oscuro). *Derecha:* Análisis empleando el catálogo GW (color verde claro) y sus combinaciones con los otros catálogos Pantheon+GW (color negro) y Pantheon+CC+GW (color azul.)

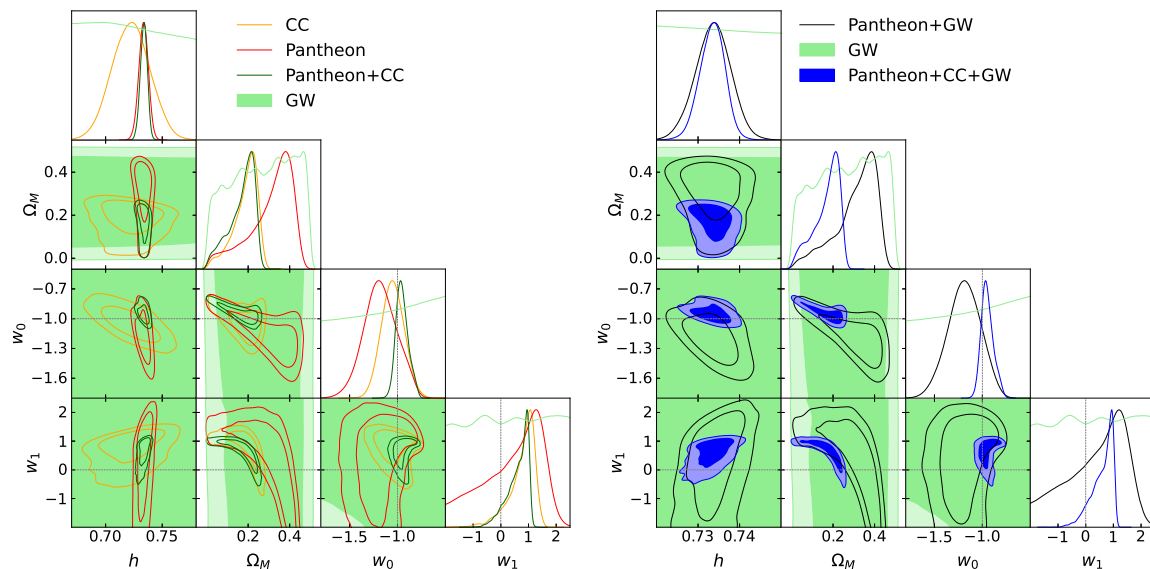


Figura 4.3: Regiones de confianza de  $1\text{-}\sigma$  y  $2\text{-}\sigma$  para los parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega, w_0, w_1\}$  para el modelo alternativo de energía oscura CPL. *Izquierda*: Análisis empleando los catálogos Pantheon (color rojo), CC (color naranja) y GW (color verde claro) y la unión Pantheon+CC (color verde oscuro). *Derecha*: Análisis empleando el catálogo GW (color verde claro) y sus combinaciones con los otros catálogos Pantheon+GW (color negro) y Pantheon+CC+GW (color azul).

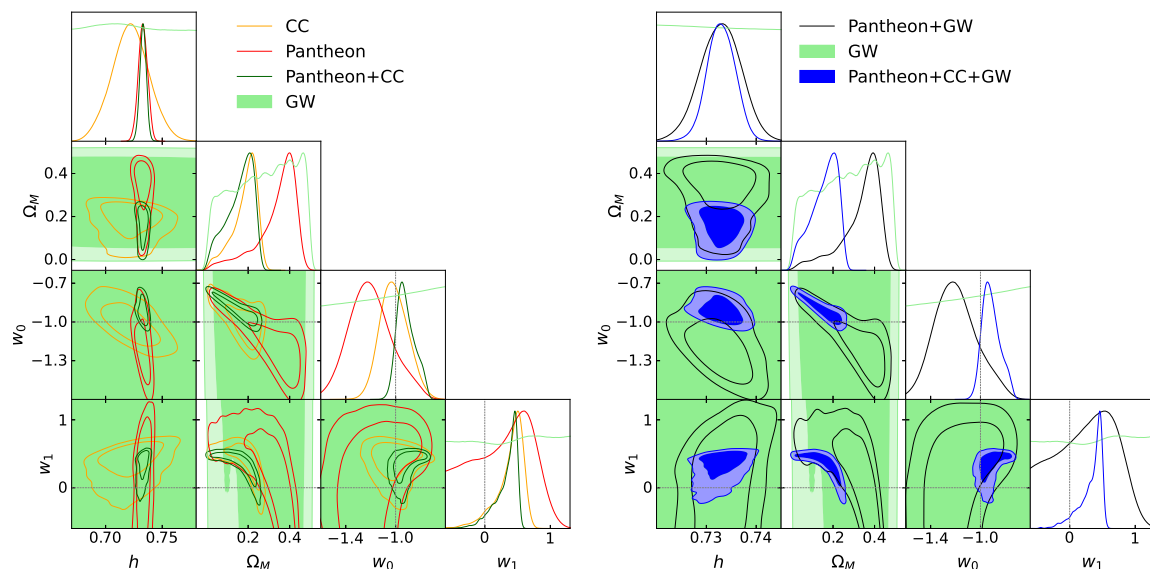


Figura 4.4: Regiones de confianza de  $1\text{-}\sigma$  y  $2\text{-}\sigma$  para los parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega, w_0, w_1\}$  para el modelo alternativo de energía oscura BA. *Izquierda*: Análisis empleando los catálogos Pantheon (color rojo), CC (color naranja) y GW (color verde claro) y la unión Pantheon+CC (color verde oscuro). *Derecha*: Análisis empleando el catálogo GW (color verde claro) y sus combinaciones con los otros catálogos Pantheon+GW (color negro) y Pantheon+CC+GW (color azul).

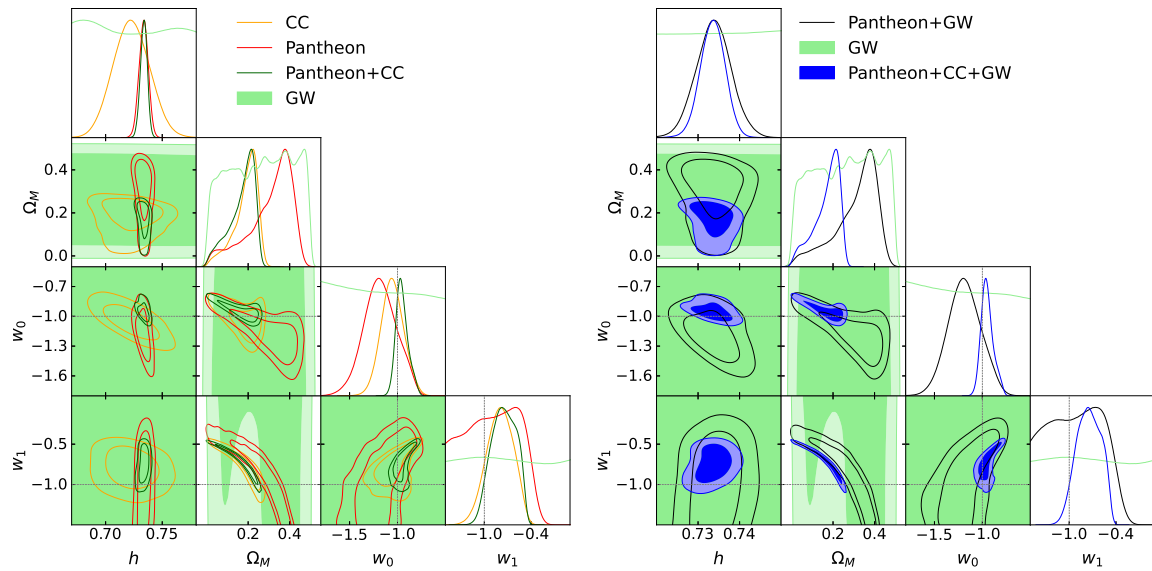


Figura 4.5: Regiones de confianza de  $1\text{-}\sigma$  y  $2\text{-}\sigma$  para los parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega, w_0, w_1\}$  ( $w_1 = w_c$  en este caso) para el modelo alternativo de energía oscura LC. *Izquierda:* Análisis empleando los catálogos Pantheon (color rojo), CC (color naranja) y GW (color verde claro) y la unión Pantheon+CC (color verde oscuro). *Derecha:* Análisis empleando el catálogo GW (color verde claro) y sus combinaciones con los otros catálogos Pantheon+GW (color negro) y Pantheon+CC+GW (color azul).

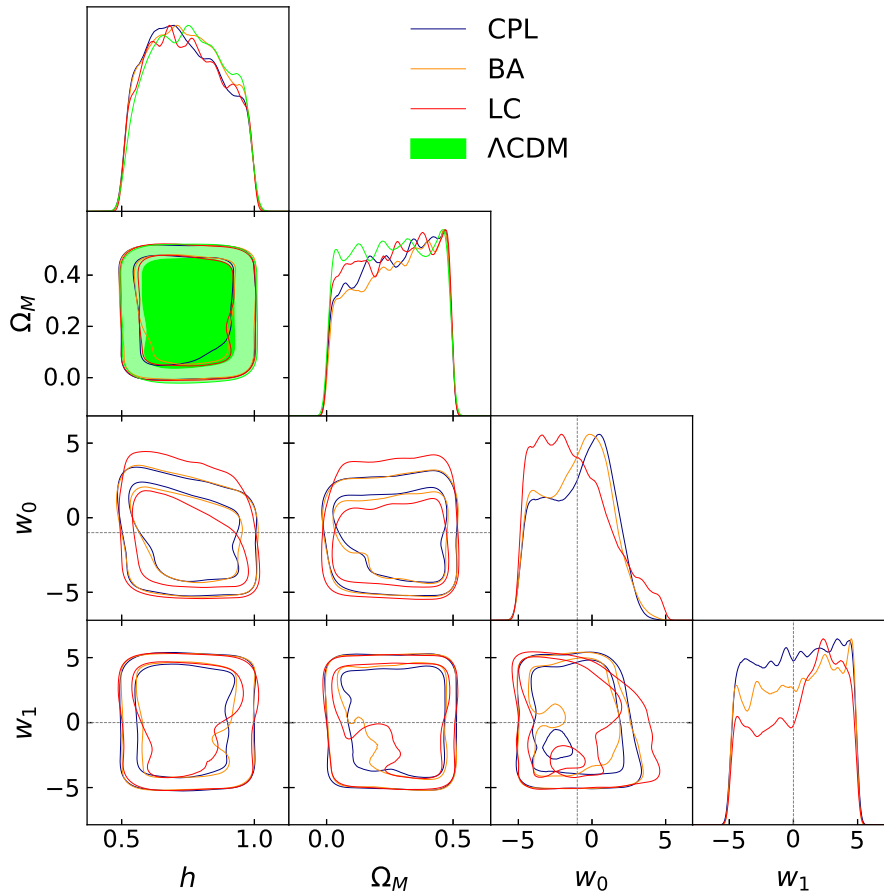


Figura 4.6: Regiones de confianza de  $1\text{-}\sigma$  y  $2\text{-}\sigma$  para los parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega_M, w_0, w_1\}$  ( $w_1 = w_c$  para LC) para los cuatro modelos cosmológicos considerados y el catálogo completo de GW.

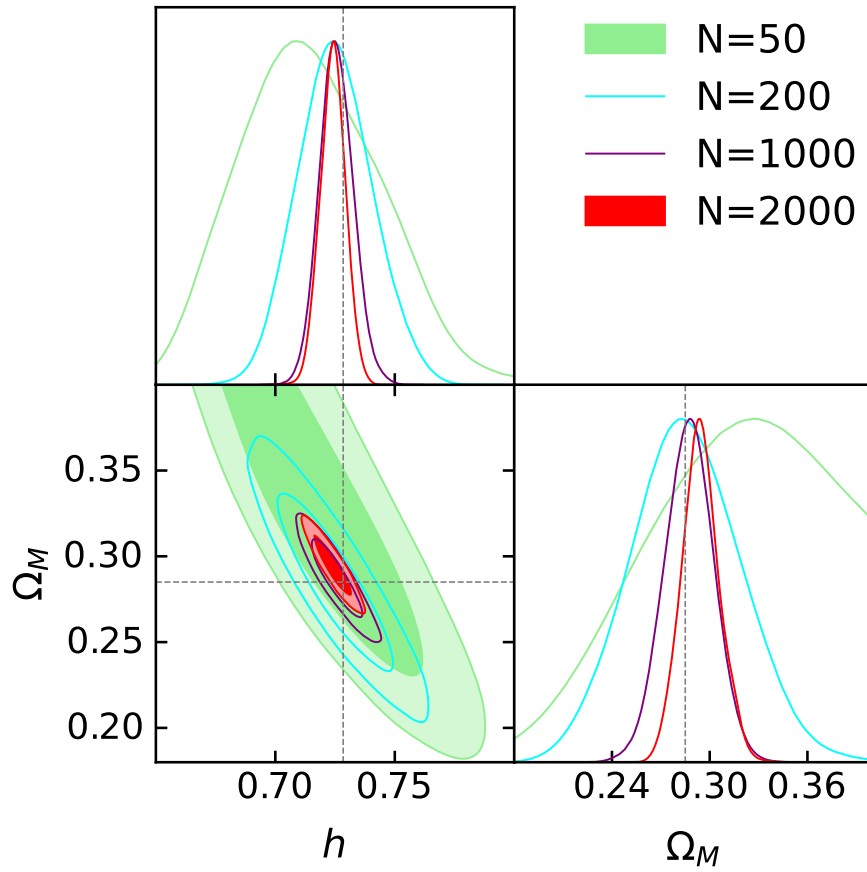


Figura 4.7: Regiones de confianza de 1- $\sigma$  y 2- $\sigma$  para los parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega_M\}$  para  $\Lambda$ CDM y las sirenas estándar simuladas.  $N$  indica el número de muestras generadas.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis, se estudiaron modelos de energía oscura dinámica mediante parametrizaciones bidimensionales. Así mismo, se consideró que la energía oscura ya no era constante como lo es en el modelo  $\Lambda$ CDM, sino que evolucionaba junto con la dinámica del flujo de Hubble pero preservando el Principio Cosmológico. Para ello, se consideraron tres de las parametrizaciones frecuentemente estudiadas en la literatura de CPL  $w(z) = w_0 + z/(1+z)w_1$ , BA  $w(z) = w_0 + z(1+z)/(1+z^2)w_1$  y LC  $w(z) = ((-z + 1/2)w_0 + 3/2z(w_c))/(1/2(1+z))$ . Para estudiar estos modelos y compararlos con el modelo estándar  $\Lambda$ CDM, se emplearon datos de SNeIa, relojes cósmicos, oscilaciones acústicas de bariones y para actualizar los análisis de estos modelos presentados en [5] datos de ondas gravitacionales. Los catálogos observacionales que se usaron fueron el de Pantheon [38] con eventos de SNeIa, un compendio de oscilaciones acústicas de bariones y relojes cósmicos de [75] y sirenas estándar y oscuras de los nuevos catálogos GWTC-1 [1] y GWTC-2 [2] de la colaboración LIGO-Virgo. A la muestra completa de estudio se le denominó Pantheon+CC+GW.

Se realizaron métodos Monte Carlo Markov Chain para determinar los mejores ajustes e incertidumbres de los parámetros cosmológicos  $\Theta = \{h, \Omega_M, w_0, w_1\}$ . Se observó que para todos los casos, el comportamiento tipo  $\Lambda$ CDM correspondiente a  $w_0 = -1$  y  $w_1 = 0$  ( $w_c = -1$  para LC) era consistente a  $2\text{-}\sigma$  con los mejores ajustes y las regiones de confianza de los modelos alternativos de energía oscura CPL, BA y LC en todos los casos. Además de esto para comparar los modelos y determinar si alguno podía competirle a  $\Lambda$ CDM, se calculó la evidencia de Bayes de cada uno y se empleó el criterio de Jeffreys. El modelo  $\Lambda$ CDM resultó ser el mejor modelo mostrando una evidencia fuerte contra CPL y muy fuerte contra BA y LC. Por ello, con esta base de datos completa Pantheon+CC+GW,  $\Lambda$ CDM es el mejor modelo por mucho.

Con esto se cumplió el primer objetivo de esta tesis el cuál era actualizar el estudio de estos modelos alternativos de energía oscura con los datos de GW. Sin embargo, debido a que sólo se consideraron 2 sirenas estándar y 47 sirenas oscuras, el peso estadístico de este catálogo en comparación con Pantheon y CC fue mucho menor. Cómo se observó, para lograr tener una determinación de  $h$  con menos de 1% de error se requieren aproximadamente 1000 sirenas estándar o  $10^5$  sirenas oscuras, las cuáles no se tienen a la mano en la actualidad pero las habrá en el futuro debido a los futuros detectores de ondas gravitacio-

nales cómo el Einstein Telescope [88] y LISA [89].

El segundo objetivo del trabajo, fue desarrollar un método para estudiar modelos alternativos a  $\Lambda$ CDM con los nuevos datos de GW. Esto se realizó considerando las sirenas estándar GW170817 y la candidata a sirena estándar GW190521, las cuáles dan una medición de la distancia sirena  $D_S(z)$  mediante la detección de la onda gravitacional y del corrimiento al rojo  $z$  mediante una contraparte electromagnética y por ello puede estudiarse la relación  $D_S(z) - z$  con estos eventos. Por otro lado, también se consideraron sirenas estándar, las cuáles son fuentes de ondas gravitacionales a las que no se les asocia una contraparte electromagnética y por ende no cuentan con una determinación independiente del corrimiento al rojo. Sin embargo, basándonos en un método diseñado por Ding et al. [13], es posible calcular los mejores ajustes de estos eventos aún sin contrapartes electromagnéticas. Esto se puede hacer considerando la tasa de colisión de binarias compactas cómo función del corrimiento al rojo, la cuál es una función que considera la tasa intrínseca de colisión de binarias compactas, el modelo cosmológico y la efectividad de la red de detectores considerada. Por ello, esta función multiplicada por una constante de normalización brinda una probabilidad prior del corrimiento al rojo lo que permite estimar este valor para las sirenas oscuras. Sin embargo, para este método debe asumirse un modelo astronómico de colisión de binarias compactas, por lo que de elegirse uno incorrecto puede tenerse errores en la determinación de los parámetros cosmológicos. Futuros estudios tienen que continuar estudiando la tasa intrínseca de colisión de binarias compactas si es que quiere mejorarse el método presentado.

El método desarrollado, además probó ser capaz de acotar los valores de los parámetros cosmológicos con regiones de confianza consistentes con Pantheon y CC, sin embargo con errores mucho mayores debido a falta de muestras. El método ejecutado en esta tesis además puede extenderse para estudiar otros modelos que asuman relatividad general cómo modelo de fondo. Aún más, potencialmente podría aplicarse a modelos extendidos y modificados de la gravedad, sin embargo es necesario realizar futuros estudios para realizar esto dado que la determinación de la distancia sirena y la masa de chirrido se realiza asumiendo relatividad general. Con ello, podrían estudiarse este tipo de modelos alternativos y determinar si pueden ayudar a resolver los problemas modernos en cosmología cómo el problema de la constante de Hubble.

Además de lo anterior, se simularon muestras de sirenas estándar, suponiendo un modelo  $\Lambda$ CDM y un valores de  $h$  y  $\Omega_M$  dados por los resultados de Pantheon calibrados con la  $H_0$  de Riess et al. [79] con  $\Lambda$ CDM. Esto permitió determinar que se requieren aproximadamente 1000 sirenas estándar para tener un error relativo menor al 1% en  $h$ . Por lo tanto, cuándo en el futuro se tenga esta cantidad de sirenas estándar podrán hacerse amplios estudios en cosmología. Cabe destacar que el método considerado asume  $\Lambda$ CDM cómo modelo de fondo por lo que será útil para conocer más sobre la naturaleza del problema de la tensión en la constante de Hubble. En caso de que el valor sea cercano al de Riess et al. [79] podría indicar que la tensión se resuelve en el universo tardío pero aparece en el universo temprano, por lo que deberían existir factores que causen esta tensión que se desconozcan. Por otro lado, si el valor calculado fuera cercano al de Planck [28] o a

otro que igualmente esté en tensión con el de Riess et al. [79] verificaría que la tensión se comprueba en el universo tardío con diferentes tipos de datos y por ende la necesidad de modelos de gravedad extendida y modificada para resolver la tensión. En este contexto, serán igualmente importantes las sirenas oscuras que darán un método alternativo a las sirenas estándar y los métodos independientes al modelo, que podrán despejar dudas sobre el origen de la tensión en la constante de Hubble.

Por ello, el futuro de la cosmología con sirenas estándar y oscuras es prometedor ya que ayudará a conocer más sobre la tensión en la constante de Hubble y a probar modelos de gravedad extendida y modificada, dado que, cómo se vió antes, la distancia sirena es distinta a la luminosa en este caso de modelos. Y por lo tanto estas sirenas brindarán muestras observacionales para calcular desviaciones de la relatividad general a partir de los datos. Y además a determinar si estos modelos pueden reducir o resolver la tensión en la constante de Hubble.

Además de lo anterior, las GW podrán detectarse a corrimientos al rojo mayores, por ejemplo con los futuros detectores de ondas gravitacionales del Einstein Telescope [88] y LISA [89] lo cuál permitirá tener muestras en el Universo intermedio y con ello posibles estudios cosmológicos sólo en estas edades del Universo de la misma forma que hay estudios del Universo tardío y temprano. Por lo tanto, a pesar de que el modelo  $\Lambda$ CDM fue el modelo preferido por larga diferencia respecto a las parametrizaciones alternativas de energía oscura consideradas en esta tesis, las ondas gravitacionales han abierto la puerta para realizar nuevos estudios en cosmología tanto en el presente cómo los habrá en el futuro, debido a que el método de esta tesis se puede extender fácilmente a otros modelos que tengan relatividad general cómo teoría de gravedad de fondo, con sólo cambiar el factor de Hubble al correspondiente a otros modelos alternativos. Por otro lado, estos métodos deben extenderse a modelos de gravedad extendida y modificada, debido a que las ondas gravitacionales abren la puerta a cuantificar desviaciones de la relatividad general y a estudiar el problema de la tensión en la constante de Hubble donde estos modelos son candidatos a resolver el problema. Estos estudios son temas para futuros trabajos e investigaciones.



# Bibliografía

- [1] BP Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, S Abraham, F Acernese, K Ackley, C Adams, RX Adhikari, VB Adya, C Affeldt, et al. Gwtc-1: a gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs. Physical Review X, 9(3):031040, 2019.
- [2] R Abbott, TD Abbott, S Abraham, F Acernese, K Ackley, A Adams, C Adams, RX Adhikari, VB Adya, C Affeldt, et al. Gwtc-2: Compact binary coalescences observed by ligo and virgo during the first half of the third observing run. arXiv preprint arXiv:2010.14527, 2020.
- [3] Mehdi Rezaei, Mohammad Malekjani, Spyros Basilakos, Ahmad Mehrabi, and David F. Mota. Constraints to Dark Energy Using PADE Parameterizations. Astrophys. J., 843(1):65, 2017.
- [4] Cristian Zamora Munõz and Celia Escamilla-Rivera. Inverse Cosmography: testing the effectiveness of cosmographic polynomials using machine learning. JCAP, 12:007, 2020.
- [5] Celia Escamilla-Rivera. Status on bidimensional dark energy parameterizations using SNe Ia JLA and BAO datasets. Galaxies, 4(3):8, 2016.
- [6] Celia Escamilla-Rivera, Luciano Casarini, Julio C. Fabris, and Jailson S. Alcaniz. Linear and non-linear perturbations in dark energy models. JCAP, 11:010, 2016.
- [7] Luisa G. Jaime, Mariana Jaber, and Celia Escamilla-Rivera. New parametrized equation of state for dark energy surveys. Phys. Rev. D, 98(8):083530, 2018.
- [8] Celia Escamilla-Rivera, A. Hernández-Almada, Miguel A. García-Aspeitia, and V. Motta. Linear perturbations spectra for dynamical dark energy inspired by modified gravity. arXiv preprint arXiv:2005.13957, 5 2020.
- [9] N. M. Jiménez Cruz and Celia Escamilla-Rivera. Late-time and Big Bang Nucleosynthesis constraints for generic modified gravity surveys. Eur. Phys. J. Plus, 136(1):51, 2021.
- [10] Sudipta Das, Abdulla Al Mamon, and Manisha Banerjee. A new parametrization of dark energy equation of state leading to double exponential potential. Res. Astron. Astrophys., 18(11):131, 2018.

- [11] Emilio Elizalde, Martiros Khurshudyan, and Shin'ichi Nojiri. Cosmological singularities in interacting dark energy models with an  $\omega(q)$  parametrization. Int. J. Mod. Phys. D, 28(01):1950019, 2018.
- [12] Celia Escamilla-Rivera and Salvatore Capozziello. Unveiling cosmography from the dark energy equation of state. Int. J. Mod. Phys. D, 28(12):1950154, 2019.
- [13] Xuheng Ding, Marek Biesiada, Xiaogang Zheng, Kai Liao, Zhengxiang Li, and Zong-Hong Zhu. Cosmological inference from standard sirens without redshift measurements. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2019(04):033, 2019.
- [14] Albert Einstein et al. On the electrodynamics of moving bodies. Annalen der physik, 17(10):891–921, 1905.
- [15] Saúl Ramos-Sánchez. Relatividad para futuros físicos, volume 1. CopIt ArXives, 2018.
- [16] Bernard Schutz. A first course in general relativity. Cambridge university press, 2009.
- [17] Robert M Wald. General relativity. University of Chicago press, 2010.
- [18] Stephan Schlamminger, K-Y Choi, Todd A Wagner, Jens H Gundlach, and Eric G Adelberger. Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance. Physical review letters, 100(4):041101, 2008.
- [19] Peter Coles. Einstein, eddington and the 1919 eclipse. arXiv preprint astro-ph/0102462, 2001.
- [20] Albert Einstein. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitäts-theorie. In Das Relativitätsprinzip, pages 130–139. Springer, 1922.
- [21] Jean-Pierre Luminet. Lemaitre's big bang. arXiv preprint arXiv:1503.08304, 2015.
- [22] Willem De Sitter. On einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. second paper. Monthly notices of the royal astronomical society, 77:155–184, 1916.
- [23] Georges Lemaître. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. In Annales de la Société scientifique de Bruxelles, volume 47, pages 49–59, 1927.
- [24] Edwin P Hubble. 106. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. Harvard University Press, 2013.
- [25] Russell L Hamm. Frankenstein or einstein. Contemporary Education, 58(3):125, 1987.
- [26] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Ron L Gilliland, Craig J Hogan, Saurabh Jha, Robert P Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. The Astronomical Journal, 116(3):1009, 1998.

- [27] MS Roberts and AH Rots. Comparison of rotation curves of different galaxy types. Astronomy and Astrophysics, 26:483–485, 1973.
- [28] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. Astronomy & Astrophysics, 641:A6, 2020.
- [29] Adam G Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, J Bradley Bowers, Lucas Macri, Joel C Zinn, and Dan Scolnic. Cosmic distances calibrated to 1% precision with gaia edr3 parallaxes and hubble space telescope photometry of 75 milky way cepheids confirm tension with  $\lambda$ cdm. The Astrophysical Journal Letters, 908(1):L6, 2021.
- [30] Adam G. Riess et al. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team. 12 2021.
- [31] Wendy L Freedman. Measurements of the hubble constant: tensions in perspective. The Astrophysical Journal, 919(1):16, 2021.
- [32] Thomas P Sotiriou and Valerio Faraoni.  $f(r)$  theories of gravity. Reviews of Modern Physics, 82(1):451, 2010.
- [33] Sebastian Bahamonde, Konstantinos F Dialektopoulos, Celia Escamilla-Rivera, Gabriel Farrugia, Viktor Gakis, Martin Hendry, Manuel Hohmann, Jackson Levi Said, Jurgen Mifsud, and Eleonora Di Valentino. Teleparallel gravity: From theory to cosmology. arXiv preprint arXiv:2106.13793, 2021.
- [34] Muzaffer Adak, Mestan Kalay, and Özcan Sert. Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity. International Journal of Modern Physics D, 15(05):619–634, 2006.
- [35] James M Nester and Hwei-Jang Yo. Symmetric teleparallel general relativity. arXiv preprint gr-qc/9809049, 1998.
- [36] Steven Weinberg. Cosmology. Oxford university press, 2008.
- [37] Oliver Piattella. Lecture notes in cosmology. Springer, 2018.
- [38] Daniel Moshe Scolnic, DO Jones, A Rest, YC Pan, R Chornock, RJ Foley, ME Huber, R Kessler, Gautham Narayan, AG Riess, et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. The Astrophysical Journal, 859(2):101, 2018.
- [39] Michel Chevallier and David Polarski. Accelerating universes with scaling dark matter. Int. J. Mod. Phys. D, 10:213–224, 2001.
- [40] Eric V. Linder. The Dynamics of Quintessence, The Quintessence of Dynamics. Gen. Rel. Grav., 40:329–356, 2008.

- [41] EM Barboza Jr and JS Alcaniz. A parametric model for dark energy. Physics Letters B, 666(5):415–419, 2008.
- [42] Yun Wang. Figure of merit for dark energy constraints from current observational data. Physical Review D, 77(12):123525, 2008.
- [43] David W Hogg. Distance measures in cosmology. arXiv preprint astro-ph/9905116, 1999.
- [44] Evgenii Mikhailovich Lifshitz. On the gravitational stability of the expanding universe. Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki, 16:587–602, 1946.
- [45] Roy Maartens. Causal thermodynamics in relativity. arXiv preprint astro-ph/9609119, 1996.
- [46] Daniel J Eisenstein. Dark energy and cosmic sound. New Astronomy Reviews, 49(7-9):360–365, 2005.
- [47] Daniel J Eisenstein, Idit Zehavi, David W Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R Blanton, Robert C Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. The Astrophysical Journal, 633(2):560, 2005.
- [48] MM Phillips, Paulina Lira, Nicholas B Suntzeff, RA Schommer, Mario Hamuy, and José Maza. The reddening-free decline rate versus luminosity relationship for type ia supernovae. The Astronomical Journal, 118(4):1766, 1999.
- [49] Raul Jimenez and Abraham Loeb. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. The Astrophysical Journal, 573(1):37, 2002.
- [50] A Addazi, J Alvarez-Muniz, R Alves Batista, G Amelino-Camelia, V Antonelli, M Arzano, M Asorey, J-L Atteia, S Bahamonde, F Bajardi, et al. Quantum gravity phenomenology at the dawn of the multi-messenger era—a review. arXiv preprint arXiv:2111.05659, 2021.
- [51] David W Hogg, Jo Bovy, and Dustin Lang. Data analysis recipes: Fitting a model to data. arXiv preprint arXiv:1008.4686, 2010.
- [52] Robert E. Kass and Adrian E. Raftery. Bayes factors. Journal of the American Statistical Association, 90(430):773–795, 1995.
- [53] Harold Jeffreys. The Theory of Probability. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. 1939.
- [54] Albert Einstein. Zur allgemeinen relativitätstheorie. Akademie der Wissenschaften, in Kommission bei W. de Gruyter, 1915.

- [55] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, Fausto Acernese, Kendall Ackley, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addesso, RX Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. Physical review letters, 116(6):061102, 2016.
- [56] Sanjeev Dhurandhar and Bangalore Sathyaprakash. Cosmic sirens: discovery of gravitational waves and their impact on astrophysics and fundamental physics. Current Science, 113(4):663–671, 2017.
- [57] Albert Einstein. Über gravitationswellen. SPAW, pages 154–167, 1918.
- [58] Thibault Damour. Gravitational waves and binary black holes. Ondes Gravitationnelles, Séminaire Poincaré, 22:1–51, 2016.
- [59] Enis Belgacem, Yves Dirian, Stefano Foffa, and Michele Maggiore. Gravitational-wave luminosity distance in modified gravity theories. Physical Review D, 97(10):104066, 2018.
- [60] Benjamin P Abbott, Robert Abbott, TD Abbott, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addesso, RX Adhikari, VB Adya, et al. Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: Gw170817 and grb 170817a. The Astrophysical Journal Letters, 848(2):L13, 2017.
- [61] SV Dhurandhar and Bernard F Schutz. Filtering coalescing binary signals: Issues concerning narrow banding, thresholds, and optimal sampling. Physical Review D, 50(4):2390, 1994.
- [62] Bernard F Schutz. Determining the hubble constant from gravitational wave observations. Nature, 323(6086):310–311, 1986.
- [63] Samaya Nissanke, Daniel E Holz, Neal Dalal, Scott A Hughes, Jonathan L Sievers, and Christopher M Hirata. Determining the hubble constant from gravitational wave observations of merging compact binaries. arXiv preprint arXiv:1307.2638, 2013.
- [64] BP Abbott, R Abbott, TD Abbott, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addesso, RX Adhikari, VB Adya, et al. Properties of the binary neutron star merger gw170817. Physical Review X, 9(1):011001, 2019.
- [65] Hsin-Yu Chen, Carl-Johan Haster, Salvatore Vitale, Will M Farr, and Maximiliano Isi. A standard siren cosmological measurement from the potential gw190521 electromagnetic counterpart ztf19abahr. arXiv preprint arXiv:2009.14057, 2020.
- [66] Benjamin P Abbott, R Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addesso, RX Adhikari, et al. Gw151226: observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. Physical review letters, 116(24):241103, 2016.

- [67] Benjamin P Abbott, R Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addesso, RX Adhikari, et al. Gw150914: First results from the search for binary black hole coalescence with advanced ligo. Physical Review D, 93(12):122003, 2016.
- [68] Benjamin P Abbott, R Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addesso, RX Adhikari, et al. Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. Physical Review X, 6(4):041015, 2016.
- [69] Samantha A Usman, Alexander H Nitz, Ian W Harry, Christopher M Biwer, Duncan A Brown, Miriam Cabero, Collin D Capano, Tito Dal Canton, Thomas Dent, Stephen Fairhurst, et al. The pycbc search for gravitational waves from compact binary coalescence. Classical and Quantum Gravity, 33(21):215004, 2016.
- [70] Surabhi Sachdev, Sarah Caudill, Heather Fong, Rico KL Lo, Cody Messick, Debnandini Mukherjee, Ryan Magee, Leo Tsukada, Kent Blackburn, Patrick Brady, et al. The gstlal search analysis methods for compact binary mergers in advanced ligo’s second and advanced virgo’s first observing runs. arXiv preprint arXiv:1901.08580, 2019.
- [71] Cody Messick, Kent Blackburn, Patrick Brady, Patrick Brockill, Kipp Cannon, Romain Cariou, Sarah Caudill, Sydney J Chamberlin, Jolien DE Creighton, Ryan Everett, et al. Analysis framework for the prompt discovery of compact binary mergers in gravitational-wave data. Physical Review D, 95(4):042001, 2017.
- [72] S Klimentko, G Vedovato, M Drago, F Salemi, V Tiwari, GA Prodi, C Lazzaro, K Ackley, S Tiwari, CF Da Silva, et al. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors. Physical Review D, 93(4):042004, 2016.
- [73] Alexander H Nitz, Thomas Dent, Gareth S Davies, Sumit Kumar, Collin D Capano, Ian Harry, Simone Mozzon, Laura Nuttall, Andrew Lundgren, and Márton Tápai. 2-ogc: Open gravitational-wave catalog of binary mergers from analysis of public advanced ligo and virgo data. The Astrophysical Journal, 891(2):123, 2020.
- [74] Gareth S Davies, Thomas Dent, Márton Tápai, Ian Harry, Connor McIsaac, and Alexander H Nitz. Extending the pycbc search for gravitational waves from compact binary mergers to a global network. Physical Review D, 102(2):022004, 2020.
- [75] Juan Magaña, Mario H Amante, Miguel A Garcia-Aspeitia, and V Motta. The Cardasian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 476(1):1036–1049, 02 2018.
- [76] Marek Biesiada, Xuheng Ding, Aleksandra Piórkowska, and Zong-Hong Zhu. Strong gravitational lensing of gravitational waves from double compact binaries—perspectives for the einstein telescope. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014(10):080, 2014.

- [77] Michal Dominik, Krzysztof Belczynski, Christopher Fryer, Daniel E Holz, Emanuele Berti, Tomasz Bulik, Ilya Mandel, and Richard O’Shaughnessy. Double compact objects. ii. cosmological merger rates. The Astrophysical Journal, 779(1):72, 2013.
- [78] B. P. Abbott et al. Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA. Living Rev. Rel., 21(1):3, 2018.
- [79] Adam G Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, Lucas M Macri, and Dan Scolnic. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond  $\lambda$ cdm. The Astrophysical Journal, 876(1):85, 2019.
- [80] Robert D Tripp. A two-parameter luminosity correction for type ia supernovae. Astronomy and Astrophysics, 331(3), 1997.
- [81] Daniel Foreman-Mackey, David W Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: the mcmc hammer. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 125(925):306, 2013.
- [82] Antony Lewis. Getdist: a python package for analysing monte carlo samples. arXiv preprint arXiv:1910.13970, 2019.
- [83] Andrew R Liddle, Pia Mukherjee, David Parkinson, and Yun Wang. Present and future evidence for evolving dark energy. Physical Review D, 74(12):123506, 2006.
- [84] F Feroz, MP Hobson, and M Bridges. Multinest: an efficient and robust bayesian inference tool for cosmology and particle physics. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 398(4):1601–1614, 2009.
- [85] Joshua S Speagle. dynesty: a dynamic nested sampling package for estimating bayesian posteriors and evidences. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 493(3):3132–3158, 2020.
- [86] John Skilling. Nested sampling. In AIP Conference Proceedings, volume 735, pages 395–405. American Institute of Physics, 2004.
- [87] John Skilling et al. Nested sampling for general bayesian computation. Bayesian analysis, 1(4):833–859, 2006.
- [88] Bangalore Sathyaprakash, Matthew Abernathy, Fausto Acernese, P Ajith, Bruce Allen, P Amaro-Seoane, Nils Andersson, Sofiane Aoudia, K Arun, P Astone, et al. Scientific objectives of einstein telescope. Classical and Quantum Gravity, 29(12):124013, 2012.
- [89] Stanislav Babak, Jonathan R Gair, Antoine Petiteau, and Alberto Sesana. Fundamental physics and cosmology with lisa. Classical and quantum gravity, 28(11):114001, 2011.

- [90] David JC MacKay and David JC Mac Kay. Information theory, inference and learning algorithms. Cambridge university press, 2003.
- [91] Jonathan Goodman and Jonathan Weare. Ensemble samplers with affine invariance. Communications in applied mathematics and computational science, 5(1):65–80, 2010.
- [92] Andrew Gelman, GO Roberts, WR Gilks, JM Bernardo, and JO Berger. Bayesian statistics 5. Oxford University Press, 16:17, 1996.



# Apéndice A

## Elementos matemáticos de relatividad general

En el presente apéndice se desarrollarán los desarrollos matemáticos requeridos en el capítulo 1 y se presentarán los fundamentos matemáticos de la teoría de la relatividad.

### A.1. Fundamentos matemáticos de la relatividad general

La teoría de la relatividad general está sustentada en una formulación matemática fuerte. Se emplean propiedades básicas de variedades y campos tensoriales.

#### A.1.1. Variedad diferencial

Intuitivamente, una variedad  $n$ -dimensional es un conjunto que tiene la estructura local diferencial de  $\mathbb{R}^n$ , pero globalmente no necesariamente es el caso. Es decir que para todo punto  $x \in \mathcal{M}$  con  $\mathcal{M}$  la variedad, existe una vecindad de  $x$  que se ve cómo  $\mathbb{R}^n$ . En la teoría especial de la relatividad, al carecer de curvatura, es posible poner en correspondencia uno a uno las coordenadas del espacio 4-dimensional de Minkowski con  $\mathbb{R}^4$ , sin embargo en relatividad general esto no ocurre, por lo cuál en este contexto el estudio de las variedades es crucial.

Para definir a una variedad diferencial es útil el concepto de esferas abiertas en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición A.1.1.** Una esfera abierta en  $\mathbb{R}^n$  de radio  $r$  centrada en  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el conjunto de los puntos  $y \in \mathbb{R}^n$  tales que  $|x - y| < r$ . Con  $|x - y|$  la distancia entre  $x$  y  $y$  dada por

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (\text{A.1})$$

Y con esta definición un conjunto abierto puede definirse por

**Definición A.1.2.** Un conjunto abierto  $C \in \mathbb{R}^n$  es una unión arbitraria de esferas abiertas.

Con las definiciones previas se puede dar la definición de variedad [17]

**Definición A.1.3.** (Variedad) Una variedad diferencial real  $\mathcal{M}$   $n$ -dimensional,  $C^\infty$  (infinitamente diferenciable) es un conjunto con una colección de subconjuntos  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  que satisface

1. Todo  $x \in \mathcal{M}$  pertenece a al menos un  $O_\alpha$ . Esto es  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  es una cubierta de  $\mathcal{M}$ .
2. Para todo  $\alpha$  existe una función uno a uno  $\phi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$  con  $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$  y abierto.
3. Si dos conjuntos  $O_\alpha$  y  $O_\beta$  con  $\alpha \neq \beta$  se intersectan  $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ , la función  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que mapea puntos de  $\phi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  a puntos de  $\phi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$  requiere que estos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  sean abiertos, y que la función sea  $C^\infty$ .

Las funciones  $\phi_\alpha$  descritas en la definición A.1.3 se suelen llamar *cartas* o *sistemas coordenados* y el conjunto de cartas de la variedad se denomina *atlas*. Otro concepto de mucha utilidad en relatividad general es el de *difeomorfismo* dado que las ecuaciones tensoriales de la relatividad general son invariantes ante un difeomorfismo arbitrario. La definición de estas funciones es [17]

**Definición A.1.4.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  variedades  $n$  y  $n'$  dimensionales y sean  $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  y  $\{\phi_\beta\}_{\beta \in \mathbb{R}}$  sus atlas respectivos. Un difeomorfismo es una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  biyectiva (uno a uno y suprayectiva),  $C^\infty$ , con inversa  $C^\infty$  si para cada  $\alpha, \beta$  la función  $\phi'_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow U'_\beta$  con  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  y  $U'_\beta \subset \mathbb{R}^{n'}$  es  $C^\infty$  en el sentido usado en el cálculo avanzado. Se dice además que  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  son difeomorfas.

## A.1.2. Vectores

En la geometría Euclidiana, la noción de vector intuitiva es la de una flecha con magnitud y dirección en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, en relatividad general se consideran variedades, y sabemos que en ellas existe una vecindad para cada punto que se ve cómo  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, la geometría global en general no es la misma, por lo que el concepto de vector ya no se cumple. A diferencia de un espacio Euclidiano donde es sencillo sumar dos vectores (sumando sus entradas) o multiplicarlos por un escalar (multiplicar las entradas por el escalar), en una variedad general no hay una forma global de hacerlo. Sin embargo, debido a la definición de variedad, en un punto arbitrario es posible recuperar la geometría Euclidiana, al menos infinitesimalmente. Para realizar lo anterior es necesario trabajar los conceptos de vector y espacio tangente. Se comienza definiendo el primero

**Definición A.1.5.** (Vector tangente) Sea  $\mathcal{M}$  una variedad y  $\mathcal{F}$  la colección de funciones  $C^\infty$  de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}$ , un vector tangente  $v$  en  $p \in \mathcal{M}$  es la función  $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y que sigue la regla de Leibnitz, es decir, para todo  $f, g \in \mathcal{F}$  y  $a, b \in \mathbb{R}$

1.  $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$

$$2. v(fg) = fv(g) + gv(f)$$

Empleando la definición A.1.5 se puede recuperar la geometría Euclidiana de forma infinitesimal. Para ello se denota por  $V_p$  (el cuál se denomina espacio tangente en  $p$ ) a la colección de todos los vectores tangentes a  $p$ . Cómo se puede observar, tomando dos vectores arbitrarios  $v_1, v_2 \in V_p$ , por la definición se sigue  $(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f)$  y  $(av)(f) = av(f)$ , lo que da la linealidad. Sin embargo para poder recuperar la noción de geometría Euclidiana infinitesimalmente se necesita que el espacio de vectores tangentes tenga la misma dimensión que la variedad, y justamente este es el caso [17]. Ahora se tratará en la forma en que se escriben los vectores. Consideremos  $\mathcal{M}$  una variedad  $n$ -dimensional,  $p \in \mathcal{M}$ ,  $V_p$  el espacio tangente en  $p$  y  $\phi : O \rightarrow U$ , con  $U \subset \mathbb{R}^n$  una carta que contiene a  $p$  (es decir  $p \in O$ ). Tomando además  $f \in \mathcal{F}$ , siguiendo las definiciones la función  $f \circ \phi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^\infty$ . Empleando esta función se definen los vectores base de  $V_p$ ,  $X_\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$

$$X_\mu(f) = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \phi^{-1}) \right]_{\phi(p)}, \quad (\text{A.2})$$

cómo el vector tangente va a  $\mathbb{R}$ ,  $x^\mu$  es la  $\mu$ -ésima coordenada de la geometría Euclidiana. En términos de estos vectores tangentes, el vector  $v$  se puede escribir cómo [17]

$$v = v^\mu X_\mu, \quad (\text{A.3})$$

donde  $v^\mu = v(x^\mu \circ \phi) \in \mathbb{R}$  son las componentes del vector  $v$ . Además, los  $\{X_\mu\}$  se pueden denotar de otra forma, en particular se pueden denotar por  $\{e_\mu\}$  y se pueden llamar vectores base, que será la forma común en que se denotarán. A partir de la definición de vectores base (A.2) se puede ver cómo transforman con un cambio de base. Tomando otra carta  $\phi'$  que sigue conteniendo a  $p$ , los vectores base  $e_\mu$  se pueden escribir en términos de  $e_{\mu'}$  cómo

$$\begin{aligned} e_\mu &= \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \phi^{-1}) \right]_{\phi(p)} \\ &= \left[ \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} (f \circ \phi^{-1}) \right]_{\phi(p)} \\ &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} e_{\mu'}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

en el segundo paso se aplicó la regla de la cadena y en el tercero se definió  $e_{\mu'} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} (f \circ \phi^{-1}) \right]_{\phi(p)}$ , nótese que la derivada  $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$  se aplica en la carta  $\phi$ . Esta expresión define la transformación de los vectores base. Dado que únicamente se está trabajando con una carta diferente y una base cartesiana distinta, el vector debe preservarse, o sea

$$v^{\mu'} e_{\mu'} = v^\mu e_\mu, \quad (\text{A.5})$$

y empleando la regla de transformación de los vectores base

$$v^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} v^{\mu}, \quad (\text{A.6})$$

la que es la regla de transformación de las componentes de vectores.

### A.1.3. 1-formas

El siguiente elemento matemático de importancia para la relatividad son las 1-formas, las cuáles viven en el espacio dual de los vectores y son funciones que van de vectores en escalares. Estas uno formas se definen cómo sigue

**Definición A.1.6.** (1-formas) Sea  $\mathcal{M}$  una variedad,  $\mathcal{F}$  la colección de funciones  $C^\infty$  de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}$  y  $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  un vector en  $p \in \mathcal{M}$ . Una 1-forma en  $p$  es una función  $\omega : V_p \rightarrow \mathbb{R}$  dada por [15]

$$\omega(v) = \omega(v^\mu e_\mu) = v^\mu \omega(e_\mu) = v^\mu \omega_\mu, \quad (\text{A.7})$$

en el último paso se definió  $\omega(e_\mu) \equiv \omega_\mu$ , las componentes de las 1-formas. La 1-forma no opera sobre  $v^\mu$  pues estos son únicamente coeficientes reales. A partir de las expresiones (A.4) y (A.7) se puede deducir la regla de transformación de las 1-formas

$$\begin{aligned} \omega_{\mu'} &= \omega(e_{\mu'}) \\ &= \omega\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} e_\mu\right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega(e_\mu) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En forma análoga a los vectores, que tienen vectores base, las 1-formas tienen 1-formas base. Las componentes de la 1-forma son entonces los coeficientes de las 1-formas base, o sea

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (\text{A.9})$$

ahora, con esta definición

$$\begin{aligned} \omega(v) &= \omega_\mu dx^\mu(v) \\ &= \omega_\mu dx^\mu(v^\nu e_\nu) \\ &= \omega_\mu v^\nu dx^\mu(e_\nu), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

comparando la anterior expresión con (A.7) se sigue que  $dx^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu$ , con  $\delta$  la delta de Kronecker. Además, las 1-formas base transforman cómo [15]

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (\text{A.11})$$

### A.1.4. Tensores

Una vez que se han presentado los vectores y 1-formas es posible definir los tensores

**Definición A.1.7.** Tensor de orden  $(k, l)$ : sea  $V$  un espacio vectorial  $n$ -dimensional y  $V^*$  su espacio dual (el espacio de las 1-formas), también  $n$ -dimensional. Un tensor  $T$  de orden  $(k, l)$  es una función multilineal

$$T : \times_{n=1}^k V^* \times_{n=1}^l V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{A.12})$$

es decir, un tensor de orden  $(k, l)$  toma  $l$  uno formas,  $k$  vectores y arroja un número, además de que si se fijan todos los vectores y 1-formas, excepto 1, el tensor es lineal en ese vector o 1-forma. Definiendo ahora por  $\mathcal{T}(k, l)$  el espacio de todos los tensores de tipo  $(k, l)$ , se pueden definir dos operaciones tensoriales importantes. La primera se llama producto exterior y se denota por  $\otimes$ . Dado un tensor  $T$  de orden  $(k, l)$  y otro  $T'$  de orden  $(k', l')$ , se puede construir un tensor de orden  $(k + k', l + l')$  el cuál será el producto exterior de  $T$  y  $T'$  denotado por  $T \otimes T'$ . Este producto exterior de  $l + l'$  1-formas base y  $k + k'$  vectores base se construye tomando el producto de  $T(dx^1, \dots, dx^l; e_1, \dots, e_k)$  y  $T'(dx^{l+1}, \dots, dx^{l+l'}; e_{k+1}, \dots, e_{k+k'})$ .

A partir de lo anterior se puede observar que cómo un tensor de orden  $(1, 0)$  es un vector y uno de rango  $(0, 1)$  es una 1-forma, se pueden construir tensores de orden  $(k, l)$  cómo producto exterior de 1-formas y vectores. Este tipo de tensores se llaman simples [17]. Tomando  $V$  un espacio vectorial  $k$ -dimensional con base  $\{e_\mu\}$  y  $V^*$  su espacio dual  $l$ -dimensional con base  $\{dx^\nu\}$ , los  $n^{k+l}$  tensores simples  $\{\otimes_{i=1}^l e_{\mu_i} \otimes_{j=1}^k dx^{\nu_j}\}$  son una base de  $\mathcal{T}(k, l)$ , por lo que un tensor arbitrario  $T \in \mathcal{T}(k, l)$  se puede expresar cómo

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \otimes_{i=1}^l e_{\mu_i} \otimes_{j=1}^k dx^{\nu_j}, \quad (\text{A.13})$$

con  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \in \mathbb{R}$  las componentes del tensor respecto a la base  $\{e_\mu\}$ . Los  $\mu_1, \dots, \mu_k$  se denominan índices superiores, mientras que los  $\nu_1, \dots, \nu_l$  índices inferiores. Aunque debe siempre recordarse que en los tensores hay productos exteriores de los vectores y 1-formas base, para ahorrar notación pueden no escribirse los  $\otimes$ , por lo cuál en la notación que se empleará en esta tesis, los tensores son

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l}, \quad (\text{A.14})$$

aunque normalmente se trabaja únicamente con las componentes de los tensores. La segunda operación se llama contracción, puede denotarse por  $C$ , y es una función  $C : \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k-1, l-1)$  que opera en la  $i$ -ésima 1-forma y el  $j$ -ésimo vector. Considerando un tensor  $T$  de orden  $(k, l)$ , la contracción se ve en las componentes del tensor cómo

$$(CT)^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}{}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1}} = T^{\mu_1 \dots \alpha \dots \mu_{k-1}}{}_{\nu_1 \dots \alpha \dots \nu_{l-1}}, \quad (\text{A.15})$$

cómo puede verse la contracción es una operación que reduce el orden de los tensores y en términos de componentes iguala el  $i$ -ésimo índice superior con el  $j$ -ésimo índice inferior. Por ello, la operación de contracción toma un tensor de orden  $(k, l)$  y lo lleva al espacio

de tensores de orden  $(k-1, l-1)$ . Esto se hace, pues cómo un tensor es una función  $T : \times_{n=1}^k V^* \times_{n=1}^l V \rightarrow \mathbb{R}$ , se puede escribir de la forma, usando vectores simples cómo

$$T(dx^{\nu_1}, \dots, dx^{\nu_k}; e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_l}) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_l} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l}, \quad (\text{A.16})$$

por ello la contracción, para que iguale el  $i$ -ésimo índice superior con el  $j$ -ésimo inferior requiere de tomar en el tensor como  $i$ -ésima 1-forma la base dual del  $j$ -ésimo vector, de esta forma

$$\begin{aligned} CT &= T(dx^{\nu_1}, \dots, dx^\alpha, \dots, dx^{\nu_k}; e_{\mu_1}, \dots, e_\alpha, \dots, e_{\mu_l}) \\ &= T^{\mu_1 \dots \alpha \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \alpha \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_\alpha \dots e_{\mu_l} dx^{\nu_1} \dots dx^\alpha \dots dx^{\nu_l}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

por lo que no sólo los índices de las componentes se igualan con la contracción, también dos índices, de la  $i$ -ésima 1-forma base y el  $j$ -ésimo vector base. Por otro lado, en forma de componentes siguiendo la definición de producto exterior, dados dos tensores  $T \in \mathcal{T}(k, l)$  y  $T' \in \mathcal{T}(k', l')$ , las componentes del producto exterior  $S = T \otimes T'$  están dadas por [17]

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}}. \quad (\text{A.18})$$

Aplicar un cambio de coordenadas no cambia al tensor, pues sólo es una forma diferente de tomar las bases (los vectores y 1-formas base). En general, los tensores son invariantes ante cualquier difeomorfismo arbitrario [15]. Por lo cuál, a partir de la invarianza de los tensores ante esta clase de funciones, es importante conocer la forma en que las componentes transforman. Sea  $T \in \mathcal{T}(k, l)$  un tensor arbitrario de orden  $(k, l)$ ,  $\mathcal{M}$  una variedad  $\{e_\mu\}$  y  $\{dx^\nu\}$  vectores y 1-formas base correspondientes a  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  otra variedad con  $\{e_{\mu'}\}$  y  $\{dx^{\nu'}\}$  vectores y 1-formas base correspondientes a  $\mathcal{M}'$ . Si  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}'$  son difeomórficas y  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  es un difeomorfismo representado por  $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$  o  $\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}$  dependiendo si transforma vectores o 1-formas base. A partir de lo anterior, se puede encontrar la regla de transformación de las componentes del tensor. Sabiendo que el tensor es invariante ante difeomorfismos, será invariante ante  $f$ . Luego

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} e_{\mu'_1} \dots e_{\mu'_k} dx^{\nu'_1} \dots dx^{\nu'_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_l}, \quad (\text{A.19})$$

por las reglas de transformación de los vectores y 1-formas base

$$\left( T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} - \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \right) e_{\mu'_1} \dots e_{\mu'_k} dx^{\nu'_1} \dots dx^{\nu'_l} = 0, \quad (\text{A.20})$$

por lo tanto

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}, \quad (\text{A.21})$$

la cuál es la regla de transformación de tensores de orden  $(k, l)$ .

### A.1.5. El tensor métrico

Un tensor fundamental en la relatividad general es el llamado tensor métrico, el cuál permite medir distancias. En el caso de una variedad al tener estructura local de  $\mathbb{R}^n$ , pero estructura global diferente se está interesado en medir distancias infinitesimales que se le asocian a desplazamientos infinitesimales. Infinitesimalmente se recupera la geometría Euclidiana y los vectores son vectores tangentes a cada punto de la variedad. El tensor métrico lo que permite calcular es el cuadrado de las distancias infinitesimales, por ello este tensor debería ser una transformación lineal  $g : V_p \times V_p \rightarrow \mathbb{R}$  para cada punto de la variedad. Cómo se puede ver, este tensor encaja en la definición de un tensor de orden  $(0, 2)$ . Es de esperar que la distancia entre un punto  $A$  y un punto  $B$  sea la misma que la distancia del punto  $B$  al punto  $A$ , o sea que debe ser simétrico ante el cambio de sus entradas, o sea, dados dos vectores  $v_1$  y  $v_2$ ,  $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$  para todo  $v_1, v_2 \in V_p$ . Además la métrica es no degenerada, o sea, si  $g(v, v_1) = 0$  para todo  $v \in V_p$ , entonces  $v_1 = 0$ . Se puede ver que esas propiedades también las cumple la operación vectorial del producto punto, por lo cuál la métrica es el producto punto de dos vectores tangentes. Con una base, la métrica puede denotarse por

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.22})$$

en relatividad esta acostumbrado a denotarse lo anterior por  $ds^2$ , además de llamar a  $ds^2$  cómo intervalo y a la métrica como las componentes  $g_{\mu\nu}$ , con esta notación

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.23})$$

y cómo la métrica también es un producto punto se sigue  $g(v_1, v_2) = v_1 \cdot v_2$ . Un aspecto importante es que dada una métrica  $g$ , se puede encontrar una base ortonormal  $v_1, \dots, v_n$  del espacio tangente para cada punto  $p \in \mathcal{M}$ , de forma que  $g(v_a, v_b) = 0$  si  $a, b \in \{1, \dots, n\}$  y  $a \neq b$  y además  $g(v_a, v_a) = \pm 1$  para todo  $a \in \{1, \dots, n\}$  [17]. El número de signos positivos y negativos en la base elegida se denomina signatura de la métrica. En la geometría Euclidiana se trabajan con métricas de signatura  $(+++)$ , mientras que en relatividad general el espacio tiene signatura  $(-+++)$  o  $(+---)$  dependiendo la convención tomada. En la presente tesis se considera  $(-+++)$ . Las componentes de la métrica  $g_{\mu\nu}$  pueden calcularse mediante el producto punto de los vectores base. Sea  $p \in \mathcal{M}$  en una variedad con espacio tangente  $V_p$   $n$ -dimensional generado por vectores base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , entonces las componentes de la métrica son [15]

$$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu) = e_\mu \cdot e_\nu, \quad (\text{A.24})$$

por lo que en términos de los vectores base pueden calcularse todas las componentes de la métrica tomando su producto punto. Otra propiedad interesante del tensor métrico es que puede bajar los índices de otro tensor, o dicho de otro modo dado un tensor de orden  $(k, l)$ , el producto exterior de dicho tensor con el tensor métrico resulta en un tensor de orden  $(k - 1, l + 1)$ . Se puede construir una 1-forma que tome un vector arbitrario  $v$  y

arroje un escalar, en particular se puede construir una 1-forma  $\omega$  dada por

$$\omega(v) = w \cdot v, \quad (\text{A.25})$$

o sea que tome el producto punto de  $w$  y  $v$ , donde  $\omega_v$  es la 1-forma (vector dual) de  $w$ . Por ello  $w = w^\mu e_\mu$ . Ahora, por definición  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$  y las componentes de la 1-forma están dadas por  $\omega_\mu = \omega(e_\mu)$ . Por ello si se calculan las componentes

$$\omega_\mu = \omega(e_\mu) = w \cdot e_\mu = w^\nu e_\nu \cdot e_\mu = g_{\mu\nu} w^\nu, \quad (\text{A.26})$$

donde se empleó la definición de que las componentes de la métrica son el producto punto de los vectores base y el hecho de que  $w^\nu$  es un real por lo que conmuta con el producto punto que es otro escalar. Cómo puede verse al aplicarse la métrica a las componentes de un vector, se obtienen componentes de una 1-forma o se *baja el índice*. El tensor métrico por ello también puede verse cómo una función que toma vectores y los torna en 1-formas. Cómo puede observarse el vector  $w = w^\nu e_\nu \rightarrow \omega_\mu dx^\mu$  al aplicarse el tensor métrico. De forma análoga al tensor métrico se puede definir un tensor de orden  $(2, 0)$  que tome dos 1-formas y arroje su producto escalar, este tensor se denotará con  $g^{-1}$  (más adelante se justificará esta notación)

$$g^{-1}(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \cdot \omega_2, \quad (\text{A.27})$$

con  $\omega_1, \omega_2$  1-formas. Análogamente al tensor métrico, puede definirse que las componentes de este tensor  $g^{-1}$  estén dadas por el producto punto de 1-formas base, o sea  $(g^{-1})^{\mu\nu} = dx^\mu \cdot dx^\nu$ . Cómo los vectores son también tensores de orden  $(1, 0)$ , pueden verse cómo funciones que toman una 1-forma y regresan un escalar. Consideremos el vector dado por

$$v(\omega) = \omega \cdot \mathcal{V}, \quad (\text{A.28})$$

con  $\mathcal{V}$  la 1-forma (vector dual) correspondiente a  $v$ . Por definición  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\mu dx^\mu$ . De forma análoga a las componentes de las 1-formas, las componentes de los vectores pueden calcularse con  $v^\nu = v(dx^\nu)$ , entonces

$$v^\nu = v(dx^\nu) = dx^\nu \cdot \mathcal{V}_\mu dx^\mu = \mathcal{V}_\mu dx^\mu \cdot dx^\nu = \mathcal{V}_\mu (g^{-1})^{\mu\nu}, \quad (\text{A.29})$$

por lo que el tensor  $g^{-1}$  toma 1-formas y las mapea en su vector correspondiente, o bien este tensor *baja el índice*. Cómo se puede ver, la métrica  $g$  mapea vectores en 1-formas, por lo que debe hacer el cambio de base de  $\{e_\mu\}$  a  $\{dx^\mu\}$ , mientras que el tensor  $g^{-1}$  hace justo lo contrario. Esto se puede ver de modo que  $g$  transforma  $e_\mu \rightarrow g_{\mu\nu} dx^\nu$  y  $g^{-1}$  transforma  $dx^\mu \rightarrow (g^{-1})^{\mu\nu} e_\nu$ . Por eso dado un vector arbitrario  $v$  se puede escribir cómo sigue

$$v = v^\mu e_\mu = v^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = v^\mu g_{\mu\nu} (g^{-1})^{\nu\alpha} e_\alpha, \quad (\text{A.30})$$

en la segunda igualdad se mapeo el vector base en 1-formas y en la tercera se mapeo la 1-forma en vectores base. Cómo la parte derecha debe ser igual a la izquierda debe satisfacerse

$$g_{\mu\nu} (g^{-1})^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha, \quad (\text{A.31})$$



es decir que  $g^{-1}$  es la función inversa de la métrica y por ello se usa el superíndice  $-1$  en su notación. Debido a que las componentes de la métrica tienen los índices abajo, mientras que las componentes de la métrica inversa tienen los índices arriba, se omitirá el superíndice dado que la posición de los índices los distingue (siempre que se trabaje con las componentes, si se usa a  $g^{-1}$  como tensor el superíndice se mantendrá para ser explícito en que se trata de la métrica inversa), por ello  $(g^{-1})^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$  para simplificar notación.

La métrica también puede operar sobre los tensores, antes de ver cómo ocurre esto se considera un vector arbitrario  $v$  y una base de vectores  $\{e_\mu\}$ , entonces

$$g(e_\mu, v) = g(e_\mu, v^\nu e_\nu) = v^\nu g(e_\mu, e_\nu) = v^\nu g_{\mu\nu} = v_\mu, \quad (\text{A.32})$$

pues la métrica baja índices y se está suponiendo que  $v_\mu$  son las componentes del vector dual a  $v$ . Análogamente tomando una 1-forma  $\omega$  y una base de 1-formas  $\{dx^\mu\}$

$$g^{-1}(dx^\mu, \omega) = g^{-1}(dx^\mu, \omega_\nu dx^\nu) = \omega_\nu g^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) = \omega_\nu g^{\mu\nu} = \omega^\mu, \quad (\text{A.33})$$

con  $\omega^\mu$  las componentes del vector asociado al vector dual  $\omega$ . Por simplicidad se puede suponer que  $\omega$  es el vector dual de  $v$ . Como  $\omega$  es una 1-forma,  $\omega = \omega_\mu dx^\mu = v_\mu dx^\mu$ , y por la expresión (A.32)

$$\omega = g(e_\mu, v) dx^\mu. \quad (\text{A.34})$$

Análogamente, como  $v$  es un vector  $v = v^\mu e_\mu$ , luego por la expresión (A.33)

$$v = g^{-1}(dx^\mu, \omega) e_\mu. \quad (\text{A.35})$$

Sea  $T$  un tensor de rango  $(k, l)$ , entonces

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_1 \dots e_k dx^1 \dots dx^l, \quad (\text{A.36})$$

considerando  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_j}$  con  $j \in \{1, \dots, k\}$ , el índice  $\mu_j$  variable y el resto fijo. Entonces esta cantidad es un vector y entonces

$$g(e_\beta, T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_j}) dx^\beta = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} g(e_\beta, e_{\mu_j}) dx^\beta = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} g_{\beta \mu_j} dx^\beta, \quad (\text{A.37})$$

luego por la expresión (A.34) esta cantidad es una 1-forma con base  $\{dx^\beta\}$ , entonces las componentes de la 1-forma satisfacen

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\beta \nu_1 \dots \nu_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} g_{\beta \mu_j}, \quad (\text{A.38})$$

es decir que la métrica baja el índice. Además nótese que  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}$  son las componentes del tensor  $T$ , por lo que la métrica baja índices también en tensores. En términos formales la métrica mapea un tensor de orden  $(k, l)$  a uno de orden  $(k-1, l+1)$ . Si se trabaja con  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} dx^{\nu_j}$  con  $j \in \{1, \dots, l\}$ , dejando  $\nu_j$  variable y el resto de índices fijos, por la expresión (A.35) en forma análoga a la expresión anterior se sigue que

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}{}^\beta = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} g^{\beta \nu_j}, \quad (\text{A.39})$$

por lo que la métrica inversa también sube índices de un tensor arbitrario. Y en términos formales la métrica inversa mapea tensores de orden  $(k, l)$  a tensores de orden  $(k+1, l-1)$ .

### A.1.6. Derivadas en una variedad

En geometría Euclidiana es sencillo calcular los gradientes de funciones escalares. Sin embargo en una variedad  $\mathcal{M}$  el camino no es tan claro dado que la estructura general no es la de  $\mathbb{R}^n$ . A pesar de esto, es posible construir una forma de tomar gradientes en una variedad para funciones escalares en la variedad. Aún más, es posible hacer lo mismo para tensores generales. Para ello se definirá el operador de derivada  $\nabla$ , el cuál se le suele llamar *derivada covariante* en relatividad. Esta operación se define cómo

**Definición A.1.8.** Sea  $\mathcal{M}$  una variedad n-dimensional y  $\nabla : \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k, l+1)$  es la derivada covariante que satisface las siguientes propiedades

1. Para todo  $T, V \in \mathcal{T}(k, l)$  y para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\nabla_\alpha (aT^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + bV^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) = a \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + b \nabla_\alpha V^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (\text{A.40})$$

2. Para todo  $T \in \mathcal{T}(k, l)$  y  $V \in \mathcal{T}(k', l')$ ,

$$\nabla_\alpha \left( T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} V^{\beta_1 \dots \beta_{k'}}_{\gamma_1 \dots \gamma_{l'}} \right) = \left( \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \right) V^{\beta_1 \dots \beta_{k'}}_{\gamma_1 \dots \gamma_{l'}} \quad (\text{A.41})$$

$$+ T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \left( \nabla_\alpha V^{\beta_1 \dots \beta_{k'}}_{\gamma_1 \dots \gamma_{l'}} \right) \quad (\text{A.42})$$

3. Para todo  $T \in \mathcal{T}(k, l)$ ,

$$\nabla_\alpha \left( T^{\mu_1 \dots \beta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \beta \dots \nu_l} \right) = \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \beta \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \beta \dots \nu_l} \quad (\text{A.43})$$

4. Para todo  $f \in \mathcal{F}$  y todo  $t^\alpha \in V_p$ ,

$$t(f) = t^\alpha \nabla_\alpha f \quad (\text{A.44})$$

5. Para todo  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta f = \nabla_\beta \nabla_\alpha f \quad (\text{A.45})$$

Entonces la derivada covariante es lineal, satisface la regla de Leibnitz, conmuta con la operación de contracción. En general esta derivada es diferente a la derivada  $\partial_\alpha$  definida en coordenadas cartesianas. Esto ocurre debido a que en una variedad arbitraria  $\mathcal{M}$  los vectores base no son constantes, sino que al tomar derivadas direccionales, estos cambian.

### A.1.7. El principio de mínima acción

Los principios de acción son usados ampliamente en la física para describir las leyes de la física. En relatividad general por ejemplo, las partículas en caída libre describen geodésicas, las cuáles son curvas con longitud extremal. Además de esto las acciones en una

teoría tienen restricciones muy fuertes. Para la relatividad no debe existir una dependencia con las coordenadas, en cambio debe ser invariante ante este tipo de transformaciones, por lo que la acción dependerá de alguna forma de la métrica.

En el contexto de la relatividad general ya no hablamos de una variedad arbitraria, sino que ahora nos referimos al espacio tiempo, el cuál es una variedad diferencial 4-dimensional. La acción además está dada por

$$S = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L} d\mathcal{V}, \quad (\text{A.46})$$

donde  $\mathcal{L}$  es el Lagrangiano que es un escalar real y  $d\mathcal{V}$  es la diferencial de volumen. Por ello se debe calcular antes una forma de calcular el volumen en la variedad  $\mathcal{M}$ . Además, el principio de mínima acción establece que las ecuaciones de movimiento están dadas en los valores extremales de la acción, es decir cuando

$$0 = \delta S. \quad (\text{A.47})$$

Por lo tanto proponiendo el Lagrangiano adecuado de la relatividad general, las ecuaciones de movimiento se deducen de tomar la variación de la acción igual a 0.

## A.2. Derivación de componentes tensoriales

### Ecuación de la geodésica

La ecuación de la geodésica puede obtenerse a partir del Principio de Equivalencia. Si al marco de referencia inercial se le aplica una transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx^\mu}{d\lambda^2} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right] \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{dx^{\nu'}}{d\lambda} \right] \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{d^2 x^{\nu'}}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \right] \frac{dx^{\nu'}}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{d^2 x^{\nu'}}{d\lambda^2} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left[ \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \right] \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu'}}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{d^2 x^{\nu'}}{d\lambda^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu'}}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

### Variación de $\delta(\sqrt{-g})$

Se empleara la expresión  $\frac{\delta(\det A)}{\det A} = \text{tr}(A^{-1}\delta A)$  que en notación tensorial es  $\delta(\det A_{\mu\nu}) = \det(A_{\mu\nu})A^{\alpha\beta}\delta(A_{\alpha\beta})$

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}) &= \delta(-g)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2}(-g)^{-1/2}\delta(-g) \\
 &= \frac{1}{2}(-g)^{-1/2}\delta(-\det g_{\mu\nu}) \\
 &= -\frac{1}{2}(-g)^{-1/2}\det(g_{\mu\nu})g^{\alpha\beta}\delta(g_{\alpha\beta}) \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta(g_{\alpha\beta}) \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta}), \tag{A.49}
 \end{aligned}$$

el último paso se sigue del hecho que  $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\alpha$  y entonces  $0 = \text{delta}(\delta_\alpha^\alpha) = \delta(g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta}) + g^{\alpha\beta}\delta(g_{\alpha\beta})$ .

### Calculo de $\int_V g^{\beta\nu}\delta R_{\beta\nu}\sqrt{-g}d^4x$

Variando el tensor de Ricci (1.40)

$$\delta R_{\beta\nu} = \partial_\mu\delta\Gamma^\mu_{\beta\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\mu_{\beta\mu} + \delta\Gamma^\gamma_{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\gamma\mu} + \Gamma^\gamma_{\beta\nu}\delta\Gamma^\mu_{\gamma\mu} - \delta\Gamma^\gamma_{\beta\mu}\Gamma^\mu_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma_{\beta\mu}\delta\Gamma^\mu_{\gamma\nu}. \tag{A.50}$$

Se verá como se puede escribir en términos de derivadas covariantes. Para ello consideramos  $\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu})$ , que por la definición de derivada covariante

$$\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}) = \partial_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}) + \Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}\delta\Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \tag{A.51}$$

y por lo tanto la resta de  $\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha})$  esta dada por

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}) &= (\partial_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}) + \Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}\delta\Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}) \\
 &\quad - (\partial_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}) + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu}\delta\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}) \\
 &= \partial_\mu(\delta\Gamma^\mu_{\beta\nu}) - \partial_\nu(\delta\Gamma^\mu_{\beta\mu}) + \delta\Gamma^\gamma_{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\gamma\mu} + \Gamma^\gamma_{\beta\nu}\delta\Gamma^\mu_{\gamma\mu} \\
 &\quad - \delta\Gamma^\gamma_{\beta\mu}\Gamma^\mu_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma_{\beta\mu}\delta\Gamma^\mu_{\gamma\nu} \\
 &= \delta R_{\beta\nu}. \tag{A.52}
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{V}} g^{\beta\nu} \delta R_{\beta\nu} \sqrt{-g} d^4x &= \int_{\mathcal{V}} g^{\beta\nu} [\nabla_{\alpha}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha})] \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} [\nabla_{\alpha}(g^{\beta\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) - \nabla_{\nu}(g^{\beta\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha})] \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} [\nabla_{\alpha}(g^{\beta\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) - \nabla_{\alpha}(g^{\beta\alpha} \delta\Gamma^{\nu}_{\beta\nu})] \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \nabla_{\alpha} [g^{\beta\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - g^{\beta\alpha} \delta\Gamma^{\nu}_{\beta\nu}] \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \nabla_{\alpha} B^{\alpha} \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \int_{\partial\mathcal{V}} \sqrt{-g} B^a dS_a \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{A.53}$$

donde se tomó  $B^{\alpha} = g^{\beta\nu} \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - g^{\beta\alpha} \delta\Gamma^{\nu}_{\beta\nu}$ . La última línea se sigue si el volumen es tomado arbitrariamente grande de forma que el vector en la frontera del volumen sea 0. Además se empleó la expresión de la variación del tensor de Ricci (A.52).

# Apéndice B

## Gravedad linealizada

Se comienza calculando los símbolos de Christoffel (??). Todo término que involucre productos de  $h_{\mu\nu}$  se despreciarán pues son términos a primer orden y se está trabajando a primer orden

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})[\partial_{\nu}(\eta_{\beta\mu} + h_{\beta\mu}) + \partial_{\mu}(\eta_{\beta\nu} + h_{\beta\nu}) - \partial_{\beta}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})[\partial_{\nu}(h_{\beta\mu}) + \partial_{\mu}(h_{\beta\nu}) - \partial_{\beta}(h_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\nu}h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}h_{\nu}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Con los símbolos de Christoffel se calcula el tensor de Riemann

$$\begin{aligned}R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\gamma}\Gamma_{\gamma\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\gamma}\Gamma_{\gamma\nu}^{\alpha} \\ &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}(\partial_{\nu}h_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta}h_{\nu}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\beta\nu}) - \partial_{\nu}(\partial_{\mu}h_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta}h_{\mu}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\beta\mu})) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\partial^{\alpha}h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\nu}\partial^{\alpha}h_{\beta\mu}).\end{aligned}\tag{B.2}$$

Los productos de símbolos de Christoffel se despreciaron dado que todos los terminos contendrían productos de  $h_{\mu\nu}$  y a primer orden son 0. Contrayendo el primer y tercer índice se calcula el tensor de Ricci

$$\begin{aligned}R_{\beta\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\nu}^{\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h_{\mu}^{\mu} + \partial_{\nu}\partial^{\mu}h_{\beta\mu}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\nu}^{\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h + \partial_{\nu}\partial^{\mu}h_{\beta\mu}).\end{aligned}\tag{B.3}$$

Ahora, el escalar de Ricci se obtiene contrayendo los índices  $\beta$  y  $\nu$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}
 R &= g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \\
 &= \frac{1}{2}(\eta^{\beta\nu} - h^{\beta\nu})(\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h + \partial_\nu \partial^\mu h_{\beta\mu}) \\
 &= \frac{1}{2}\eta^{\beta\nu}(\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h + \partial_\nu \partial^\mu h_{\beta\mu}) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial^\nu h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h_\nu^\nu - \partial_\nu \partial^\nu h + \partial_\nu \partial^\mu h_\mu^\nu) \\
 &= \partial_\mu \partial^\nu h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h,
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

por lo tanto de las ecuaciones de Einstein (1.58) están dadas por

$$\begin{aligned}
 G_{\beta\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h + \partial_\nu \partial^\mu h_{\beta\mu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial^\alpha h_\alpha^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h)(\eta_{\beta\nu} + h_{\beta\nu}) \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h + \partial_\nu \partial^\mu h_{\beta\mu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial^\alpha h_\alpha^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h)\eta_{\beta\nu} \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h_{\beta\nu} + \partial_\mu \partial^\mu h \eta_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial^\mu h \eta_{\beta\mu} + \partial_\nu \partial^\mu h_{\beta\mu} - \partial_\mu \partial^\alpha h_\alpha^\mu \eta_{\beta\nu}) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} \eta^{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\beta h \eta_{\alpha\nu} \eta^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\beta h \eta_{\alpha\nu} \eta^{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu h \eta_{\beta\nu} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial^\mu h \eta_{\beta\mu} - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\gamma\alpha} \eta_{\beta\nu} \eta^{\gamma\mu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\alpha h \eta_{\gamma\alpha} \eta_{\beta\nu} \eta^{\gamma\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\alpha h \eta_{\gamma\alpha} \eta_{\beta\nu} \eta^{\gamma\mu} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\beta \bar{h}_{\alpha\nu} \eta^{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\nu} + \partial_\nu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\mu} - \partial_\mu \partial^\alpha \bar{h}_{\gamma\alpha} \eta_{\beta\nu} \eta^{\gamma\mu}) \\
 &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \partial_\beta \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\nu} + \partial_\nu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\mu} - \partial^\mu \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\alpha} \eta_{\beta\nu}).
 \end{aligned} \tag{B.5}$$





# Apéndice C

## GWTC-2

Evento	$D_S(Gpc)$	$\rho$	$\mathcal{M}(M_\odot)$	Tipo de binaria
GW190408_181802	$1.55^{+0.40}_{-0.60}$	14.8	$18.3^{+1.9}_{-1.2}$	BHBH
GW190412	$0.74^{+0.14}_{-0.17}$	19.7	$13.3^{+0.4}_{-0.3}$	BHBH
GW190413_052954	$3.55^{+2.27}_{-1.66}$	8.6	$24.6^{+5.5}_{-4.1}$	BHBH
GW190413_134308	$4.45^{+2.48}_{-2.12}$	9.0	$33.0^{+8.2}_{-5.4}$	BHBH
GW190421_213856	$2.88^{+1.37}_{-1.38}$	10.2	$31.2^{+5.9}_{-4.2}$	BHBH
GW190424_180648	$2.20^{+1.58}_{-1.16}$	10.0	$31.0^{+5.8}_{-4.6}$	BHBH
GW190425	$0.16^{+0.07}_{-0.07}$	13.0	$1.44^{+0.02}_{-0.02}$	NSNS
GW190426_152155	$0.37^{+0.32}_{-0.30}$	10.1	$2.41^{+0.08}_{-0.08}$	NSBH
GW190503_185404	$1.45^{+0.69}_{-0.63}$	12.2	$30.2^{+4.2}_{-4.2}$	BHBH
GW190512_180714	$1.43^{+0.55}_{-0.55}$	12.2	$14.6^{+1.3}_{-1.0}$	BHBH
GW190513_205428	$2.06^{+0.88}_{-0.89}$	12.3	$21.6^{+3.8}_{-2.5}$	BHBH
GW190514_065416	$4.13^{+2.65}_{-2.17}$	8.3	$28.5^{+7.9}_{-4.8}$	BHBH
GW190517_055101	$1.86^{+1.62}_{-0.84}$	10.7	$26.6^{+4.0}_{-4.0}$	BHBH
GW190519_153544	$2.53^{+1.83}_{-0.92}$	14.0	$44.5^{+6.4}_{-7.1}$	BHBH
GW190521	$3.92^{+2.19}_{-1.95}$	14.4	$69.2^{+17.0}_{-10.6}$	BHBH
GW190521_074359	$1.24^{+0.40}_{-0.57}$	24.7	$32.1^{+3.2}_{-2.5}$	BHBH
GW190527_092055	$2.49^{+2.48}_{-1.24}$	8.9	$24.3^{+9.1}_{-4.2}$	BHBH
GW190602_175927	$2.69^{+1.79}_{-1.12}$	12.1	$49.1^{+9.1}_{-8.5}$	BHBH
GW190620_030421	$2.81^{+1.68}_{-1.31}$	10.9	$39.3^{+8.3}_{-6.5}$	BHBH
GW190630_185205	$0.89^{+0.56}_{-0.37}$	15.6	$24.9^{+2.1}_{-2.1}$	BHBH
GW190701_203306	$2.06^{+0.76}_{-0.73}$	11.6	$40.3^{+5.4}_{-4.9}$	BHBH
GW190706_222641	$4.42^{+2.59}_{-1.93}$	12.7	$42.7^{+10.0}_{-7.0}$	BHBH
GW190707_093326	$0.77^{+0.38}_{-0.37}$	13.0	$8.5^{+0.6}_{-0.5}$	BHBH
GW190708_232457	$0.88^{+0.33}_{-0.39}$	13.1	$13.2^{+0.9}_{-0.6}$	BHBH
GW190719_215514	$3.94^{+2.59}_{-2.00}$	8.0	$23.5^{+6.5}_{-4.0}$	BHBH
GW190720_000836	$0.79^{+0.69}_{-0.32}$	11.7	$8.9^{+0.5}_{-0.8}$	BHBH
GW190727_060333	$3.30^{+1.54}_{-1.50}$	12.3	$28.6^{+5.3}_{-3.7}$	BHBH
GW190728_064510	$0.87^{+0.26}_{-1.37}$	13.6	$8.6^{+0.5}_{-0.3}$	BHBH
GW190731_140936	$3.30^{+2.39}_{-1.72}$	8.5	$29.5^{+7.1}_{-5.2}$	BHBH
GW190803_022701	$3.27^{+1.95}_{-1.58}$	9.0	$27.3^{+5.7}_{-4.1}$	BHBH
GW190814	$0.24^{+0.04}_{-0.05}$	22.2	$6.09^{+0.06}_{-0.06}$	NSBH
GW190828_063405	$2.13^{+0.66}_{-0.93}$	16.6	$25.0^{+3.4}_{-2.1}$	BHBH
GW190828_065509	$1.60^{+0.62}_{-0.60}$	11.1	$13.3^{+1.2}_{-1.0}$	BHBH
GW190909_114149	$3.77^{+3.27}_{-2.22}$	8.5	$30.9^{+17.2}_{-7.5}$	BHBH
GW190910_112807	$1.46^{+10.3}_{-0.58}$	13.4	$34.3^{+4.1}_{-4.1}$	BHBH
GW190915_235702	$1.62^{+0.71}_{-0.61}$	13.1	$25.3^{+3.2}_{-2.7}$	BHBH
GW190924_021846	$0.57^{+0.22}_{-0.22}$	13.2	$5.8^{+0.2}_{-0.2}$	BHBH
GW190929_012149	$2.13^{+3.25}_{-1.05}$	9.9	$35.8^{+14.9}_{-8.2}$	BHBH
GW190930_133541	$0.76^{+0.36}_{-0.32}$	10.0	$8.5^{0.5}_{-0.5}$	BHBH

Tabla C.1: Eventos del GWTC-2 junto con sus distancias sirena en Mpc, sus cocientes de señal-ruído, masas de chirrido y tipo de estrella binaria.

## Apéndice D

# Deducciones del tensor $h_{ij}^T$ para una onda gravitacional

Para lograr reducir la expresión (3.11) se requiere reescribir su integral. En particular, del gauge para ondas gravitacionales  $\partial^\nu T_{\nu\mu} = 0$ , entonces

$$\frac{\partial T_{\mu 0}}{\partial t} = -\frac{\partial T_{\mu i}}{\partial x^i} \quad , \quad \frac{\partial T_{00}}{\partial t} = -\frac{\partial T_{0i}}{\partial x^i}. \quad (\text{D.1})$$

Además se supondrá que las fuentes de ondas gravitacionales están muy lejos, por lo que toda integral de superficie incluyendo al tensor de energía-momento será 0 y que el sistema tiene movimiento lento, o sea  $\frac{\partial x^i}{\partial t} \approx 0$ . Con estas condiciones presentes se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d^3x T_{00} x_i x_j &= \int d^3x \frac{\partial (T_{00} x_i x_j)}{\partial t} \\ &= \int d^3x \frac{\partial T_{00}}{\partial t} x_i x_j \\ &= - \int d^3x \frac{\partial T_{0k}}{\partial x^k} x_i x_j \\ &= - \int d^3x \left( \frac{\partial (T_{0k} x_i x_j)}{\partial x^k} - T_{0k} \frac{\partial (x_i x_j)}{\partial x^k} \right) \\ &= - \oint dS S_k T_{0k} x_i x_j + \int d^3x T_{0k} (x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik}) \\ &= \int d^3x (T_{0i} x_j + T_{0j} x_i), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

donde la segunda línea se sigue del sistema con movimiento lento, la tercera del gauge, la cuarta de la regla del producto de la derivada, y la quinta del teorema de la divergencia.

Tomando ahora la derivada del resultado

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int d^3x (T_{0i}x_j + T_{0j}x_i) &= \int d^3x \left( \frac{\partial T_{0i}}{\partial t} x_j + \frac{\partial T_{0j}}{\partial t} x_i \right) \\
 &= - \int d^3x \left( \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} x_j + \frac{\partial T_{jk}}{\partial x^k} x_i \right) \\
 &= - \int d^3x \left( \frac{\partial (T_{ik}x_j)}{\partial x^k} + \frac{\partial (T_{jk}x_i)}{\partial x^k} - T_{ik} \frac{\partial x_j}{\partial x^k} - T_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial x^k} \right) \\
 &= - \oint dS S_k (T_{ik}x_j + T_{jk}x_i) + \int d^3x (T_{ik}\delta_{jk} + T_{jk}\delta_{ik}) \\
 &= 2 \int d^3x T_{ij}, \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int d^3x T_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3x T_{00} x_i x_j. \tag{D.4}$$

Como  $T_{00} = \rho$  y definiendo el tensor de momento cuadrupolar cómo

$$I_{ij} = \int d^3x \rho x_i x_j, \tag{D.5}$$

se sigue que la expresión (3.11) se escribe

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 D_S} \left( \frac{d^2 I_{ij}^{TT} \left( t - \frac{D_S}{c} \right)}{dt^2} \right), \tag{D.6}$$

en este caso se hizo explícito el hecho de que  $h_{ij}^{TT}$  es transverso y sin traza, cada  $T$  significa uno de estos hechos. Por lo tanto para satisfacer la igualdad también se debe tomar la parte transversa y sin traza del momento cuadrupolar. La modificación que se le requiere hacer al tensor de momento cuadrupolar para obtener la sin traza es

$$I_{ij} = \int d^3x \left( \rho x_i x_j - \frac{1}{3} x^2 \delta_{ij} \right), \tag{D.7}$$

con  $x^2 = x_i x_i$ .

# Apéndice E

## Método numérico

Para calcular la distribución de probabilidad de los parámetros cosmológicos, una vez que se conoce la probabilidad prior, requiere calcular la probabilidad likelihood dada. Por los 6 parámetros considerados, entonces se requeriría mapear un espacio de 6 dimensiones y calcular la probabilidad para una gran cantidad de puntos en este espacio. Puede hacerse este proceso considerando hipercubos en este espacio de 6 dimensiones y calculando la probabilidad likelihood en los vértices de estos hipercubos, sin embargo realizar este proceso es computacionalmente muy costoso (a pesar de que probabilidades prior uniformes reducen el costo dado que fuera de los intervalos considerados la probabilidad prior es 0), por lo que se requiere emplear métodos alternativos. El método que se empleará es un método de cadenas de Markov con Monte Carlo (MCMC).

El propósito de los MCMC es obtener  $M$  muestras  $\{\Theta_i\}$  a partir de la distribución de probabilidad posterior

$$\mathcal{P}(\Theta|D) = \frac{\mathcal{P}(\Theta)\mathcal{P}(D|\Theta)}{\mathcal{E}}, \quad (\text{E.1})$$

donde la probabilidad likelihood se puede calcular fácilmente dada un modelo, unos parámetros cosmológicos  $\Theta$  y un conjunto de datos  $D$ . La evidencia es una integral sobre todo el espacio de parámetros por lo que no depende de  $\Theta$  y por ende funciona sólo como factor de normalización. Por ello, no es necesario incluirlo en el MCMC dado que sólo normaliza pero sin la evidencia se puede igualmente determinar la forma de la distribución de probabilidad y con ello su media y desviación estándar. El cálculo de la evidencia se realiza si se busca comparar dos modelos [81]. Calcular la evidencia es muy costoso computacionalmente, por lo cuál no incluirla en el MCMC salva mucho tiempo.

El método MCMC, para generar las muestras  $\{\Theta_i\}$  genera caminantes aleatorios en el espacio de parámetros, los cuáles con el tiempo obtienen un conjunto de puntos representativos de este espacio con los que se puede dibujar la distribución de probabilidad [81] sin necesidad de mapear todo el espacio de parámetros. Cada paso en la cadena de Markov  $X(t_i) = [\Theta_i]$  depende únicamente del paso anterior  $X(t_{i-1})$  [81]. Existen varios algoritmos para realizar un MCMC, donde el relevante para el análisis de esta tesis es el algoritmo de Metropolis-Hastings del cuál se habla a continuación.

## E.1. Método de Metropolis-Hastings

El objetivo de un método MCMC es el encontrar un conjunto independiente de muestras en el espacio de parámetros  $\{\Theta_i\}$  que sean representativos y con los cuáles se pueda dibujar las distribuciones de probabilidad junto con sus medias (mejores ajustes) y desviaciones estándar. Cómo mapear todo el espacio es costoso computacionalmente, se requiere emplear un método para reducir esto y que al mismo tiempo obtenga puntos representativos e independientes. Uno de esos algoritmos se llama Metropolis-Hastings. Se explicará a continuación el caso en una dimensión.

Para cualquier punto es posible calcular la probabilidad posterior (dejando de lado la evidencia) si se conoce la probabilidad prior y la likelihood. Partiendo de un punto  $X(t)$  a tiempo  $t$  que está en el espacio de parámetros y considerando una función  $Q(Y; X(t))$  la cuál es una distribución de probabilidad similar a la probabilidad posterior que puede no tener nada que ver con la distribución de probabilidad posterior. Esta función puede ser una distribución Gaussiana multivariada centrada en  $X(t)$  con un tensor de covarianza general. Un nuevo estado tentativo  $Y = X(t+1)$  puede generarse a partir de la distribución  $Q$ . Sin embargo, para decidir si este nuevo estado se acepta o no se requiere calcular un factor [81, 90]

$$\alpha = \frac{\mathcal{P}(Y|D)Q(X(t); Y)}{\mathcal{P}(X(t)|D)Q(Y; X(t))}, \quad (\text{E.2})$$

si  $\alpha \geq 1$ , el nuevo punto en el espacio de parámetros se acepta, y en caso contrario se rechaza y se mantiene el punto anterior (si  $\alpha < 1$ ,  $X(t+1) = X(t)$ ). Este proceso va generando una cadena de Markov con todo el conjunto de puntos  $\{X(t)\}_t$ . Debe tenerse cuidado con el significado de  $Q$ , mientras  $Q(X(t); Y)$  es una distribución Gaussiana centrada en  $X(t)$  y evaluada en  $Y$ ,  $Q(Y; X(t))$  es lo inverso, una distribución Gaussiana centrada en  $Y$  y evaluada en  $X(t)$ . Cómo se puede ver, si el nuevo punto en el espacio de parámetros es rechazado se volverá a tomar el anterior y por lo tanto no todos los puntos en la cadena de Markov serán independientes, lo cuál es necesario para tener un conjunto representativo.

Para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ , este algoritmo converge a un conjunto de muestras estacionario. Lo que se desea es tener convergencia rápida con lo cuál se requieren generar menos cadenas de Markov y por ende menor costo computacional.

Antes se mencionó que los puntos en las cadenas son dependientes porque el punto  $k$  depende en su antecesor  $k - 1$ . Por ello, el algoritmo debe correrse por un tiempo considerable para obtener un conjunto de puntos efectivamente independientes con el cuál tener información suficiente para calcular las medias y desviaciones estándar de los parámetros.

El método de Metropolis-Hastings suele ejecutarse con funciones  $Q(X(t); Y)$  que hagan que el valor de  $Y$  esté mucho más cerca que las dimensiones del tamaño esperado de la región más probable. El objetivo de hacer esto es que moverse demasiado de un punto puede llevar a una región de bajas probabilidades.

La desventaja de tomar este tipo de funciones es que los pasos en el algoritmo serán pequeños (con pequeña hiperdistancia entre dos puntos de la cadena los cuáles están en el espacio de parámetros) y por ende se tendrá lo que se denomina como caminata aleatoria (random walk) [90]. Esta caminata aleatoria incrementa el tiempo que debe correrse el algoritmo para alcanzar el conjunto independiente y representativo que se busca  $\{\Theta_i\}$ . Por ello es deseable buscar métodos que reduzcan este tiempo de convergencia y ahorren recursos computacionales.

## E.2. El movimiento por tramos

El movimiento por tramos (strecht move) es un algoritmo para generar muestras que supera el estándar Metropolis-Hastings [91] con tiempos de autocorrelación significativamente menores [81]. Para este método se considera un conjunto de caminantes. En este algoritmo, cada paso del método Monte Carlo  $X(t) \rightarrow X(t+1)$  consiste en un ciclo de actualizar cada uno de los  $k$  caminantes, es decir tomar  $X_k(t) \rightarrow X_k(t+1)$  para todo  $k \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Donde cada caminante  $X_k$  se actualiza en función de todos los demás [91]. La nueva posición de cada caminante se acepta o rechaza con el mismo criterio que para el caso de Metropolis-Hastings. En el movimiento por tramos, la nueva posición del caminante  $X_k$  se determina a partir de otro caminante  $X_j$  con  $k \neq j$  mediante [91]

$$X_k(t) \rightarrow Y = X_j + Z(X_k(t) - X_j), \quad (\text{E.3})$$

donde  $Z$  se obtiene a partir de una distribución de probabilidad  $g(Z=z)$  que si satisface

$$g(z^{-1}) = zg(z), \quad (\text{E.4})$$

entonces la nueva posición del caminante es simétrica de forma que [91]

$$\mathcal{P}(X_k(t) \rightarrow Y) = \mathcal{P}(Y \rightarrow X_k(t)). \quad (\text{E.5})$$

En particular se puede tomar una función de la forma [91]

$$g(z) \propto \begin{cases} z^{-1/2} & \text{si } z \in \left[\frac{1}{a}, a\right] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

y para este caso la nueva posición es aceptada con probabilidad [81, 91]

$$\text{mín} \left\{ 1, Z^{N-1} \frac{\mathcal{P}(Y)}{\mathcal{P}(X_k(t))} \right\}, \quad (\text{E.7})$$

con lo que se va constuyendo la cadena de Markov.

### E.3. El tiempo de autocorrelación

Para determinar la convergencia y rendimiento de un algoritmo dado pueden emplearse una diversidad de herramientas, una de las cuáles se denomina tiempo de autocorrelación.

Para comprender lo que este concepto significa, es importante entender otro concepto llamado *fracción de aceptación*  $a_f$ , el cuál da información sobre el porcentaje del número de pasos aceptados en una cadena de Markov. Si este número es muy alto, casi todos los pasos fueron aceptados y si es casi 0 casi todos fueron rechazados. En ambos casos, no se tendría una buena cadena, para el primer caso los caminantes están ejecutando una caminata aleatoria casi en todo punto lo que no conduce a una muestra representativa y en el segundo caso hay un número pequeño de puntos independientes insuficientes para mapear correctamente las distribuciones posteriores de probabilidad. El valor de esta fracción de aceptación debería estar entre 0.2 y 0.5 para tener una buena muestra representativa [92].

En el caso del movimiento por tramos, el parámetro  $a$  de la función  $g(z)$  controla el tamaño de los pasos, lo que permite modificar la fracción de aceptación de requerirse si no cae entre esos valores óptimos. Una vez que se conoce este concepto puede hablarse del tiempo de autocorrelación, el cuál es el número de evaluaciones de la probabilidad posterior requeridos para obtener muestras independientes de  $\{\Theta_i\}$ . Además de esto, el algoritmo de movimiento por tramos tiene un tiempo de autocorrelación inferior al de Metropolis-Hastings [91]. El tiempo de correlación integrado esta dado por [81]

$$\tau_f = \sum_{T=-\infty}^{\infty} \frac{C_f(T)}{C_f(0)} = 1 + 2 \sum_{T=1}^{\infty} \frac{C_f(T)}{C_f(0)}, \quad (\text{E.8})$$

con  $C_f(T)$  la función de autocovarianza de tiempo con una serie de tiempo  $X(t)$  dada por

$$C_f(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{cov}[f(X(t+T)), f(X(t))], \quad (\text{E.9})$$

lo que mide la covarianza entre muestras con diferencia de tiempo  $T$ . El valor de  $T$  con el cuál  $C(T) \rightarrow 0$  mide el número de muestras que deben tomarse para tener independencia [81]. Mientras mayor sea el tiempo de autocorrelación, más larga tiene que ser la cadena para mapear correctamente las distribuciones de probabilidad del vector de parámetros  $\{\Theta_i\}$ .

### E.4. El martillo de MCMC

En la presente tesis se empleará un paquete de python llamado `emcee`<sup>1</sup> el cuál usa un método de movimiento por tramos. Esta herramienta se denomina martillo de MCMC porque es útil para una gran cantidad de problemas de análisis de datos.

---

<sup>1</sup><https://emcee.readthedocs.io/en/stable/>

Para comenzar el MCMC es necesario colocar los caminantes aleatorios en una posición dada. Una de las posibilidades es colocarlos dispersados cerca de un punto donde se espera que se tendrá la máxima probabilidad. Eso puede ser colocándolos en una pequeña esfera Gaussiana alrededor del punto de máximo  $\chi^2$ . De esta forma los caminantes no quedarán atrapados en zonas de baja probabilidad y la cadena puede obtener una convergencia con un tiempo menor.

Luego de probar el código mediante varios intentos con bases de datos reducidas de CC, se determinó que el número de pasos en la cadena debe ser al menos 50 veces el tiempo de autocorrelación para obtener cadenas confiables y con suficientes muestras independientes para graficar la probabilidad posterior de los parámetros. Además de eso, se tomaron 32 caminantes aleatorios en los análisis pues se determinó que es un buen número para no tener una penalidad en rendimiento y al mismo tiempo tener un número considerable para tener tiempos de autocorrelación no tan largos. El tiempo de autocorrelación puede ser obtenido con el código `emcee` [81] con lo cual se puede determinar después de calcularlo, el número de pasos para tener una muestra independientes suficiente de  $\{\Theta_i\}$ . En todos los casos nunca se requirieron cadenas más largas que 60,000 pasos. Para el caso de Pantheon+GW fue en el que se requirió este número de pasos. En el resto de casos bastaba con 30,000 cadenas, excepto los casos de  $\Lambda$ CDM donde dependiendo la base de datos eran necesario entre 5,000 – 20,000 por cadena.

Además de eso, al software `emcee` se le debe dar el valor del logaritmo natural de la probabilidad likelihood y la prior para que puede mapear la posterior de los parámetros. Los MCMCs fueron ejecutados en el cluster Tochtli del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM en el grupo CosmoNag.

## E.5. Cálculo de la evidencia

Además de correr un MCMC y así obtener los mejores valores de los parámetros cosmológicos, uno de los objetivos del análisis de la presente tesis es el de determinar cuál es el mejor modelo entre el estándar  $\Lambda$ CDM y las parametrizaciones bidimensionales de energía oscura. Para esto es preciso calcular la evidencia Bayesiana la cuál es una integral computacionalmente costosa. Para reducir el costo computacional existen métodos, en la presente tesis se empleará un algoritmo de muestreo anidado (nested sampling algorithm). Mientras un MCMC trata de mapear la posterior de forma directa, un muestreo anidado divide el espacio de parámetros en regiones más simples, mapea cada una de estas y combina los resultados al finalizar.

Además, estos algoritmos de muestreo anidado se centran en el cálculo de la evidencia. Esto se hace reescribiendo la integral sobre el espacio de parámetros a un volumen prior  $X$  del espacio de parámetros [85]

$$\mathcal{E} = \int d\Theta \mathcal{L}(\Theta) \theta(\Theta) d\Theta = \int_0^1 dX \mathcal{L}(X), \quad (\text{E.10})$$



donde  $\mathcal{L}(X)$  denota un contorno de la likelihood definiendo los bordes del volumen  $X$ . Y el volumen prior está dado por [85]

$$X(\lambda) = \int_{\Omega_{\Theta} | \mathcal{L}(\Theta) \geq \lambda} d\Theta \theta(\Theta), \quad (\text{E.11})$$

por lo que es la fracción de la likelihood encima de un umbral  $\lambda$ . Por ello, el algoritmo de muestreo anidado convierte un problema complicado de una integral multi-dimensional en un problema de una integral en una dimensión sobre  $X$ . Las cotas de este valor son  $X(0) = 1$  y  $X(\infty) = 0$  debido a que la probabilidad está normalizada.

El punto ahora es generar muestras de  $\mathcal{L}(X)$  que nos permitan calcular la evidencia. Este algoritmo necesita tener la capacidad de generar muestras de la probabilidad prior  $\theta(\Theta)$  sujetas a una restricción de la likelihood por  $\lambda$  [85]. Un algoritmo sencillo para realizar esto es el muestreo por rechazo simple en el cuál para la  $i$ -ésima iteración, se generan muestras  $\Theta_{i+1}$  de la prior  $\theta(\Theta)$  hasta que se logre conseguir que  $\mathcal{L}(\Theta_{i+1}) \geq \mathcal{L}(\Theta_i)$ . Este método se va complicando mientras el valor de  $X$  se vaya haciendo más pequeño dado que al tomar  $\lambda$  cada vez mayor este valor tiende a 0, por lo cuál este proceso iterativo se demorará después de cierto número de iteraciones.

Esto se puede solucionar re-escalando la prior mediante [85]

$$\theta_{\lambda}(\Theta) = \begin{cases} \theta(\Theta) & \text{si } \mathcal{L}(\Theta) \geq \lambda \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

La dificultad de obtener las muestras de esta nueva prior re-escalada dependerá de la forma que tengan las probabilidades prior. En la presente tesis se trabajarán priors uniformes en todos los parámetros, lo cuál simplifica enormemente las integrales al calcular  $X(\lambda)$ . Una vez que se calculan suficientes valores de  $\mathcal{L}(X)$  para  $X$  entre 0 y 1 es posible calcular la evidencia empleando algún método numérico para hacer la integral. Sin embargo el valor exacto de  $X(\lambda)$  no se conoce con precisión. Sin embargo, su valor se puede estimar construyendo un estimador  $\hat{X}(\lambda)$  con una distribución de probabilidad conocida. Recordando la definición de función de distribución acumulada se ve que  $X(\mathcal{L})$  es una de esas funciones por lo que se puede definir una densidad de probabilidad dada por [85]

$$\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \frac{dX(\mathcal{L})}{d\mathcal{L}}. \quad (\text{E.13})$$

Suponiendo que se puede calcular  $\mathcal{L}$  a partir de su distribución de probabilidad  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ , se podrá calcular  $X(\mathcal{L})$  a partir de una distribución uniforme por la transformada integral de probabilidad. E imponiendo la restricción  $\mathcal{L} > \lambda$ ,  $X(\mathcal{L})/X(\lambda)$  se podrá calcular de la distribución uniforme. Por ello se puede partir de  $\lambda$  y  $\mathcal{P}(\mathcal{L})$  y hacer el muestreo desde  $\theta(\Theta)$  pues para una  $\lambda$  fija,  $X(\lambda)$  es una función de distribución acumulada, esto implica que si se puede obtener  $\Theta$  a partir de  $\theta(\Theta)$  entonces  $X(\mathcal{L}(\Theta))/X(\lambda)$  puede obtenerse de la distribución uniforme [85].

Para una  $\lambda$  fija, la función  $X(\lambda)$  es una función de distribución acumulada en la prior re-escalada  $\theta_\lambda$ . Sea  $X_{i-1}$  al cuál se le asocia la likelihood  $\mathcal{L}_{i-1}$  después de  $i - 1$  iteraciones. Cómo cada una de estas funciones de volumen tienen distribución uniforme, la distribución de  $\hat{X}_i$  es [85]

$$\hat{X}_i = \mathcal{U}_i \hat{X}_{i-1} = \prod_{n=1}^i \mathcal{U}_n, \quad (\text{E.14})$$

donde todas las probabilidades uniformes estándar son independientes e idénticamente distribuidas. Además, por definición  $\hat{X}(0) = 1$ . Se desconocen los valores de  $U_n$  para todos los  $n$ , por lo que  $\hat{X}$  es una aproximación de  $X$ . Mientras se va realizando el muestreo debe determinarse un punto en el cuál parar. Los valores de distribuciones uniformes estándar son sencillos de determinar y para que sean consistentes un buen valor que se les puede asignar es el del valor esperado [85]

$$E[\hat{X}_i] = \prod_{n=1}^i E[\mathcal{U}_n] = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad (\text{E.15})$$

por lo que cómo se puede ver al ir aumentando el número de iteraciones, el valor esperado va disminuyendo o lo que es lo mismo, se van obteniendo valores para poder realizar la integral de 0 a 1 y con ello calcular la evidencia. El análisis que hasta ahora se ha presentado es considerando un sólo punto llamado *punto vivo*. Usa únicamente un punto vivo provocará que la estadística pueda ser errática, por lo cuál debe tomarse un gran número de estos puntos y así hay mayor posibilidad de que se tengan muestras en el intervalo uniforme  $[0, 1]$  distribuidas de forma uniforme con las cuáles se integre sobre todo el volumen  $dX$  y se pueda determinar la evidencia. Por el valor esperado de  $\hat{X}_i$ , en cada iteración se espera tener puntos más cercanos al 0, con lo cuál con cada iteración, la evidencia calculada se irá aproximando a la evidencia real. Aunque esto se haría de forma infinita dado que el valor esperado jamás llegará a 0, por lo que debe proponerse un criterio de finalización del algoritmo. Un criterio posible puede ser [85]

$$\Delta \ln \mathcal{E}_i < \epsilon, \quad (\text{E.16})$$

lo que quiere decir que se frenará el algoritmo cuándo la diferencia del logaritmo natural de la evidencia real y la calculada sea menor que una tolerancia  $\epsilon$ . Sin embargo, la evidencia restante no se conoce a prior, sin embargo se puede proponer una cota superior [85]

$$\Delta \mathcal{E}_i \leq \mathcal{L}_i^{\text{máx}} \hat{X}_i, \quad (\text{E.17})$$

con  $\mathcal{L}_i^{\text{máx}}$  el máximo valor de la likelihood para todos los puntos vivos considerados en la iteración  $i$ . Este caso es una buena aproximación, sin embargo puede fallar si se está ignorando un pico de probabilidad muy alta en el espacio  $dX$  que no se ha explorado. El riesgo de que esto ocurra se puede disminuir considerando un número mayor de puntos vivos y una tolerancia menor.

Para los análisis de la presente tesis, se empleará una tolerancia  $\epsilon = 10^{-2}$  aunado al

paquete de python `dynesty` [84, 85, 86, 87]. Además de esto, se emplearon 3200 puntos vivos en todos los análisis. Una vez que se consiguen muestras en el espacio de parámetros, la evidencia es estimada por `dynesty` [84, 85, 86, 87] mediante la regla del trapecoide

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N+K} \frac{1}{2} (\mathcal{L}(\Theta_{i-1}) + \mathcal{L}(\Theta_i)) (\hat{X}_{i-1} - \hat{X}_i), \quad (\text{E.18})$$

con  $N$  el número de muestras y  $K$  el número de puntos vivos.

El software `dynesty` requiere el logaritmo natural de las probabilidades likelihood y prior considerando la raíz cuadrada de las desviaciones estándar de los datos en la likelihood para que el software puede normalizar y con ello calcular la evidencia de forma correcta.