



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Localización por subcategorías de Serre

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Miguel Ignacio Romero Cortés

TUTOR

Dr. Valente Santiago Vargas

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Primero quiero agradecer al Dr. Valente Santiago Vargas por todo el apoyo y enseñanza, a lo largo de mi trayectoria académica, tanto como docente, asesor y amigo. Le agradezco el tiempo y conocimiento que me brindó a lo largo de la elaboración de este trabajo, ya que sin su ayuda, paciencia y confianza no se hubiera podido realizar esta tesis.

En segundo lugar agradezco a mis padres Luciano Romero y Matilde Cortés, a mis hermanos Ángel Luciano y Joel Enrique por ser un apoyo incondicional a lo largo de mi vida, gracias por las enseñanzas y confianza que me han permitido continuar adelante.

También quisiera agradecer a la Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda por su apoyo y gestión de un apoyo económico por parte del proyecto PRODEP con número de proyecto COFON 12613411 y con folio UAM-PTC-700, de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Por último agradezco a Itzel Jimenez Valencia por compartir tiempo conmigo, por acompañarme, escucharme y aconsejarme en todo momento, sobre todo en los momentos difíciles.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Categorías abelianas</b>	<b>1</b>
1.1. Nociones básicas de categorías . . . . .	1
1.2. Funtores . . . . .	3
1.3. Principio de dualidad . . . . .	5
1.4. Morfismos . . . . .	5
1.5. Subobjetos y objetos cocientes . . . . .	7
1.6. Igualadores y coigualadores . . . . .	8
1.7. Pullback y pushout . . . . .	8
1.8. Intersección . . . . .	10
1.9. Unión . . . . .	11
1.10. Imágenes . . . . .	12
1.11. Imágenes inversas . . . . .	13
1.12. Objeto cero . . . . .	14
1.13. Kerneles y cokerneles . . . . .	14
1.14. Categoría normal y conormal . . . . .	17
1.15. Categoría exacta . . . . .	18
1.16. El lema del 9 y los teoremas de isomorfismo . . . . .	19
1.17. Producto y coproducto . . . . .	21
1.18. Categoría abeliana . . . . .	23
1.19. Funtor exacto . . . . .	24
1.20. Objeto inyectivo y proyectivo . . . . .	25
<b>2. Localización</b>	<b>27</b>
2.1. Localización . . . . .	27
2.2. Categoría $\mathcal{L}(X, Y)$ . . . . .	36
2.3. El funtor $q(X, Y) : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathbf{Ab}$ . . . . .	40

2.4.	Primera construcción de la categoría $\mathcal{C}_\Sigma$ . . . . .	45
2.4.1.	Asociatividad de la composición . . . . .	61
2.4.2.	Aditividad de la categoría $\mathcal{C}_\Sigma$ . . . . .	74
2.5.	Segunda construcción de la categoría $\mathcal{C}_\Sigma$ . . . . .	92
<b>3.</b>	<b>La categoría <math>\mathcal{C}/\mathcal{A}</math></b> . . . . .	<b>105</b>
3.1.	Propiedades de $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ . . . . .	105
<b>4.</b>	<b>Funtor sección de <math>\mathbb{L}</math></b> . . . . .	<b>125</b>
4.1.	Objetos cerrados y funtor adjunto de $\mathbb{L}$ . . . . .	125
4.2.	Pares adjuntos que inducen localizaciones . . . . .	133
4.3.	Algunas propiedades que son preservadas . . . . .	142
4.4.	Epimorfismos de anillos que inducen localizaciones . . . . .	148

# Introducción

La localización de anillos conmutativos es una técnica clásica del álgebra conmutativa, un ejemplo de ésta se da en la construcción del campo de cocientes de un dominio entero. La localización de anillos no conmutativos fue dada por Ore en 1931, quien introdujo la “condición de Ore”, la cual permite hacer localización en anillos no conmutativos.

La noción de localización se lleva al contexto de la teoría de categorías con la siguiente definición. Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma$  una clase de morfismos de  $\mathcal{C}$ . Se dice que la pareja  $(T, \mathcal{C}_\Sigma)$ , donde  $\mathcal{C}_\Sigma$  es una categoría y  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\Sigma$  un funtor, es una **categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  relativa a  $\Sigma$**  si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a) Para cada  $s \in \Sigma$ ,  $T(s)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma$
- (b) Si  $T' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , es un funtor tal que para cada  $s \in \Sigma$ ,  $T'(s)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}'$  entonces existe un único funtor  $\bar{T} : \mathcal{C}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}'$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{T} & \mathcal{C}_\Sigma \\ & \searrow T' & \downarrow \bar{T} \\ & & \mathcal{C}' \end{array}$$

Al funtor  $T$  lo llamamos funtor localización.

Dentro de algunos ejemplos conocidos tenemos los siguientes:

- (1) Consideremos un anillo conmutativo  $A$ ,  $S$  un subconjunto multiplicativo de  $A$  y  $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$  el morfismo canónico. Entonces el funtor restricción de escalares  $\varphi_* : \text{Mod}(S^{-1}A) \rightarrow \text{Mod}(A)$  es un funtor fiel y pleno y admite un funtor adjunto a izquierda que es exacto.
- (2) Consideremos  $X$  un espacio topológico. Sea  $\text{PSh}(X)$  (resp.  $\text{Sh}(X)$ ) la categoría de pregavillas (resp. gavillas) con valores en la categoría de grupos abelianos sobre  $X$ . Sea  $i : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{PSh}(X)$  la inclusión canónica, entonces  $i$  tiene un funtor adjunto a izquierda que es exacto (el adjunto es



el funtor engavillización). Los ejemplos de arriba y muchos otros llevaron a la siguiente situación.

- (3) Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana, consideremos un par  $(\mathcal{D}, T)$  donde  $\mathcal{D}$  es una categoría abeliana y  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un funtor exacto que tiene adjunto a derecha que es fiel y pleno.

La noción anterior, está relacionado con localización debido al siguiente resultado, el cual veremos su demostración en el Teorema 4.21 de esta tesis.

**Teorema 1** Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor exacto entre categorías abelianas y supongamos que  $F$  tiene un funtor adjunto a derecha  $G$  tal que  $G$  es fiel y pleno. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a)  $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{C} \mid F(A) = 0\}$  es una subcategoría de Serre.
- (b) Sea  $\Sigma := \{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \text{Ker}(f), \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}\}$ , entonces existe la categoría de fracciones  $\mathcal{C}_\Sigma$  relativa a  $\Sigma$  la cual denotaremos por  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  y una equivalencia de categorías  $H : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & \mathcal{C}/\mathcal{A} \\ F \downarrow & & \nearrow H \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

donde  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  es el funtor localización.

El concepto de subcategoría de Serre fue introducida por J. P. Serre en su trabajo [14], donde estudia grupos de homología de espacios topológicos módulo ciertas subcategorías de Serre de la categoría de grupos abelianos. Serre llamaba a estas subcategorías “clases” y utilizó este concepto para dar una generalización del famoso teorema de Hurewicz. Es también en este trabajo donde surge de forma seminal la idea de categoría cociente por una subcategoría de Serre. Posteriormente A. Grothendieck indica la idea para construir la categoría cociente de una categoría abeliana en su famoso artículo de álgebra homológica [6] (ver sección 1.11 en las páginas 137-139). Grothendieck en la pág. 139 refiriéndose a la categoría cociente escribe lo siguiente: “*et enfin que c’est meme une categorie abelienne. Nous ne ferons pas ici cette verification extremement fastidieuse*”, lo anterior podría traducirse como sigue: “es una categoría abeliana. No haremos aquí esta comprobación extremadamente tediosa”. Posteriormente P. Gabriel en su tesis doctoral desarrolla la técnica de categoría cociente y da aplicaciones interesantes a categorías de módulos y a geometría algebraica (ver [4]).

El objetivo de esta tesis es presentar las bases necesarias para entender y demostrar la existencia de la categoría cociente  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$

módulo una subcategoría de Serre  $\mathcal{A}$ . También estudiamos algunas propiedades que la categoría  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  hereda de la categoría  $\mathcal{C}$ . Por ejemplo, veremos que  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es abeliana.

Se ha tomado como base el libro [9]: “*Abelian categories with applications to rings and modules*” de N. Popescu. Se han completado las partes faltantes en las demostraciones del libro mediante la introducción de lemas o proposiciones necesarias; así como también, se han redactado de mejor manera algunas definiciones. De manera similar, se han usado algunas fuentes (ver [11], [7],[17]) para describir algunas de las nociones básicas de categorías tales como kernel, cokernel, pullback, productos, etc. A continuación damos una descripción breve de cada capítulo.

En el primer capítulo damos las nociones básicas de categorías abelianas. En el segundo capítulo, vemos que si  $\mathcal{A}$  es una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$  la clase  $\Sigma_{\mathcal{A}} := \{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \text{Ker}(f), \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}\}$  es un sistema calculable. Luego pasamos a dar la primera construcción y gran parte del capítulo es para probar la asociatividad de la composición. También en el capítulo 2 damos una segunda construcción de la categoría  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  a través de una doble localización, para esta demostración utilizamos la teoría explicada en detalle en la tesis de Licenciatura [17].

En el tercer capítulo, vemos propiedades básicas de la categoría  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ , en particular, demostramos que  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es una categoría abeliana.

En el cuarto capítulo, consideramos el functor canónico de localización  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  y estudiamos cuando este functor tiene adjunto a derecha. Se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tal adjunto y finalmente damos como se relaciona la localización con epimorfismos de anillos que satisfacen ciertas condiciones.



# Capítulo 1

## Categorías abelianas

A lo largo de este capítulo recordaremos nociones básicas de la teoría de categorías abelianas. Los resultados expuestos en este capítulo los daremos sin demostraciones, el lector interesado en ver las pruebas de tales resultados y una introducción más detallada de la teoría básica de categorías abelianas, puede revisar [13], [9], [7].

### 1.1. Nociones básicas de categorías

**Definición 1.1** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  consiste de tres clases: una clase de *Objetos* denotada por  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ , una clase de *morfismos* denotada por  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ , y una *operación parcial binaria*  $\theta$  en  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ . Cumpliendo los siguientes axiomas:

- (a)  $\text{Mor}(\mathcal{C}) := \bigcup_{(A,B) \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , donde  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es un conjunto para todo  $(A, B) \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C})$ .
- (b) Para los objetos  $A, B, C, D$  en  $\mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$  si y solo si,  $A = C$  y  $B = D$ .
- (c) Para una tripleta  $(A, B, C) \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C})$ , la operación binaria " $\theta$ ", induce por restricción, la función:

$$\theta_{(A,B,C)} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

Denotando  $\theta_{(A,B,C)}(f, g) := g \circ f$ , con  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ . A la operación  $\theta$  se le llama comúnmente **composición de morfismos** y satisface las siguientes propiedades:

- (i) Para todo objeto  $A$ , existe un **morfismo identidad**  $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ , tal que para cualesquiera morfismos  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ , tenemos que:  $f \circ 1_A = f$  y  $1_A \circ g = g$ .

- (ii) Sean los morfismos,  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ,  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ .  
Entonces  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**Notación 1.2** De la definición anterior, escribiremos  $\text{Hom}(A, B)$  en lugar de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  si no hay riesgo de confusión de la categoría en la que estemos trabajando. De la misma manera, si  $f \in \text{Hom}(A, B)$ , escribiremos en su lugar  $f : A \rightarrow B$  o bien  $A \xrightarrow{f} B$ . Llamaremos a  $A$  **dominio** de  $f$  y  $B$  como **codominio** de  $f$ . Además escribiremos  $g \circ f$  como  $gf$  si no hay riesgo de confusión

**Definición 1.3** Una categoría  $\mathcal{C}$  se llama **pequeña**, si  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  es conjunto.

**Definición 1.4** Diremos que una categoría  $\mathcal{A}$  es una **subcategoría** de  $\mathcal{C}$  si se satisface lo siguiente.

- (a)  $\text{Obj}(\mathcal{A}) \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$ .
- (b)  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , para todo  $(A, B) \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \times \text{Obj}(\mathcal{A})$ .
- (c) La composición de morfismos en  $\mathcal{A}$  es la misma en  $\mathcal{C}$ .
- (d) Si  $1'_X \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X)$  es el morfismo identidad en  $\mathcal{A}$ , entonces  $1'_X = 1_X$  donde  $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  es el morfismo identidad en  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.5** Sea  $\mathcal{A}$  una subcategoría de  $\mathcal{C}$ , se dice que es **subcategoría plena**, si  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , para todo  $(A, B) \in \text{Obj}(\mathcal{A}) \times \text{Obj}(\mathcal{A})$ .

**Ejemplo 1.6** (a) La categoría  $\text{Sets}$  cuya clase de objetos es la clase de todos los conjuntos, y donde  $\text{Hom}_{\text{Sets}}(A, B)$  es el conjunto de todas las funciones de  $A$  en  $B$  con la composición usual de funciones.

- (b) La categoría  $\text{Top}$  cuya clase de objetos son los espacios topológicos, y donde  $\text{Hom}_{\text{Top}}(A, B)$  es el conjunto de todas las funciones continuas de  $A$  en  $B$  con la composición usual de funciones.
- (c) La categoría  $\text{Sets}_0$  cuya clase de objetos son los pares ordenados  $(A, a)$ , donde  $A$  es un conjunto y  $a \in A$ , y donde  $f \in \text{Hom}_{\text{Sets}_0}((A, a), (B, b))$  si y sólo si,  $f$  es función y  $f(a) = b$ , con la composición usual de funciones.
- (d) La categoría  $\text{Top}_0$  cuya clase de objetos son los pares ordenados  $(A, a)$ , donde  $A$  es un espacio topológico y  $a \in A$ , y donde  $f \in \text{Hom}_{\text{Top}_0}((A, a), (B, b))$  si y sólo si,  $f$  es función continua y  $f(a) = b$ , con la composición usual de funciones.

## 1.2. Funtores

**Definición 1.7** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  categorías. Un **functor covariante**  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es una asignación de un objeto  $T(A) \in \mathcal{B}$  para cada objeto  $A \in \mathcal{A}$  y un morfismo  $T(\alpha) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A), T(A'))$  para cada morfismo  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ , tal que:

(a) *preserva la composición, esto es, si  $\alpha' \alpha$  esta definida en  $\mathcal{A}$  entonces*

$$T(\alpha' \alpha) = T(\alpha')T(\alpha)$$

(b) *preserva las identidades, esto es, para cada  $A \in \mathcal{A}$  se tiene que*

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

De forma similar tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.8** Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  categorías. Un **functor contravariante**  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es una asignación de un objeto  $T(A) \in \mathcal{B}$  para cada objeto  $A \in \mathcal{A}$  y un morfismo  $T(\alpha) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A'), T(A))$  para cada morfismo  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ , tal que:

(a) *invierte la composición, esto es, si  $\alpha' \alpha$  esta definida en  $\mathcal{A}$  entonces*

$$T(\alpha' \alpha) = T(\alpha)T(\alpha')$$

(b) *preserva las identidades, esto es, para cada  $A \in \mathcal{A}$  se tiene que*

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

**Definición 1.9** Sean  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  dos funtores. Definimos la composición  $ST : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  por la regla  $ST(A) = S(T(A))$  y  $ST(\alpha) = S(T(\alpha))$ .

**Observación 1.10** No es difícil ver que si  $S$  y  $T$  ambos son covariantes o contravariantes, entonces  $ST$  es covariante. Mientras que si uno es covariante y el otro es cotravariante entonces  $ST$  es contravariante.

**Ejemplo 1.11** (a) Sean  $\mathcal{C}$  categoría y  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Denotamos por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$  al functor contravariante definido en objetos como:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)(Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

Para todo morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  se define  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ , dada por la siguiente regla de correspondencia: para  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)(\alpha) := \alpha f.$$

(b) Sean  $\mathcal{C}$  categoría y  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Denotamos por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$  al funtor covariante definido en objetos como:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)(Y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Para todo morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  se define  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$ , dada por la regla de correspondencia, para  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)(\alpha) := f\alpha.$$

**Definición 1.12** Sean  $T, S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  funtores covariantes. Una **transformación natural**  $\eta : S \rightarrow T$ , es una familia de morfismos

$$\eta := \{\eta_A : S(A) \rightarrow T(A)\}_{A \in \text{Obj}(\mathcal{A})}$$

en  $\mathcal{B}$  tal que para todo morfismo  $f : A \rightarrow A'$  en  $\mathcal{A}$ , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ S(f) \downarrow & & \downarrow T(f) \\ S(A') & \xrightarrow{\eta_{A'}} & T(A') \end{array}$$

**Observación 1.13** (a) En la definición anterior, si para todo  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  tenemos que  $\eta_A$  es un isomorfismo, decimos que la transformación natural  $\eta$  es una **equivalencia natural**. Denotamos a la transformación inversa de  $\eta$ , como  $\eta^{-1} : T \rightarrow S$ , definida por  $(\eta^{-1})_A = (\eta_A)^{-1}$ . Y escribiremos  $S \simeq T$ , para decir que  $S$  y  $T$  son **naturalmente equivalentes**.

(b) Sean  $\eta : S \rightarrow T$  y  $\mu : T \rightarrow F$  dos transformaciones naturales. Definimos la composición  $\mu\eta : S \rightarrow F$  por la regla  $(\mu\eta)_A := \mu_A\eta_A$ .

(c) Para todo funtor, la **transformación natural identidad** es  $1_T : T \rightarrow T$ , está definida por  $(1_T)_A = 1_{T(A)}$ , para todo  $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ .

**Definición 1.14** Sea  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor covariante. Se dice que  $T$  es una **equivalencia de categorías** si existe un funtor  $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $TS \simeq 1_{\mathcal{B}}$  y  $ST \simeq 1_{\mathcal{A}}$ .

**Definición 1.15** Sea  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor.

(a) Se dice que  $T$  es **fiel** (resp. **pleno**) si la función inducida

$$T_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A), T(B))$$

es inyectiva (resp. suprayectiva) para cada par de objetos  $A, B \in \mathcal{A}$ .

(b) Se dice que  $T$  es **denso** si para cada objeto  $X \in \mathcal{B}$  existe un objeto  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $T(A)$  es isomorfo a  $X$ .

**Proposición 1.16** Sea  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor covariante. Si  $T$  es fiel, pleno y denso, entonces  $T$  es una equivalencia de categorías.

### 1.3. Principio de dualidad

Una categoría de suma importancia, es la categoría opuesta, la cual se define como se sigue:

**Definición 1.17** Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , se define la **categoría opuesta** de  $\mathcal{C}$  denotada como  $\mathcal{C}^{op}$  y se construye como se sigue:

- (a)  $Obj(\mathcal{C}^{op}) := Obj(\mathcal{C})$  y escribimos  $A = A^{op}$  cuando estemos pensando al objeto dentro de  $\mathcal{C}^{op}$
- (b)  $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B^{op}, A^{op}) := Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  y escribiremos  $f^{op} : B^{op} \rightarrow A^{op}$ .
- (c) La composición  $f \circ g$  en  $\mathcal{C}^{op}$  está definida como sigue:  $f^{op} \circ g^{op} := (g \circ f)^{op}$  para todo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ .

**Observación 1.18** De la definición anterior tenemos que:

- (a) La asignación  $D_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$  definida como  $D_{\mathcal{C}}(A) := A^{op}$  con  $A \in Obj(\mathcal{C})$  y  $D_{\mathcal{C}}(f) := f^{op}$  con  $f$  morfismo en  $\mathcal{C}$  es un funtor contravariante.
- (b) Tenemos que  $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$ , lo cual implica que  $D_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$  y  $D_{\mathcal{C}^{op}} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$  satisfacen que,  $D_{\mathcal{C}^{op}}D_{\mathcal{C}} = 1_{\mathcal{C}}$  y  $D_{\mathcal{C}}D_{\mathcal{C}^{op}} = 1_{\mathcal{C}^{op}}$ .

**Observación 1.19 (Principio de dualidad)** La propiedad 2) de la observación anterior, nos permite definir para cada **concepto categórico** y cada **enunciado categórico**, sus respectivas versiones duales. El principio de dualidad dice lo siguiente:

Si  $\mathcal{P}$  es un enunciado categórico que es verdadero para todas las categorías, entonces  $\mathcal{P}^{op}$  también es verdadero para todas las categorías. Para más detalles consultar ([13]).

### 1.4. Morfismos

**Definición 1.20** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $f$  es **split-mono**, si existe  $f' : Y \rightarrow X$  tal que  $f' \circ f = 1_X$ . De forma dual, decimos que  $f$  es **split-epi**, si existe  $f'' : Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ f'' = 1_Y$ .

**Notación 1.21** También se usan los términos **monomorfismo que se escinde ó retracción**, para referirse a un morfismo que es split-mono. Por otro lado se usan los términos **epimorfismo que se escinde ó sección**, para referirse a un morfismo que es split-epi.

**Definición 1.22** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $f$  es **isomorfismo**, o bien solo **iso**, si  $f$  es split-mono y split-epi.



**Notación 1.23** Si existe  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  tal que  $f$  es un isomorfismo, diremos que  $X$  es isomorfo a  $Y$ , en símbolos  $X \cong Y$ .

**Observación 1.24** Algo a notar es que si  $f : X \rightarrow Y$  y existen  $f' : Y \rightarrow X$ ,  $f'' : Y \rightarrow X$  tales que  $f' \circ f = 1_X$  y  $f \circ f'' = 1_Y$ , entonces  $f' = f''$ . En efecto, se tienen las siguientes igualdades:

$$f' = f' \circ 1_Y = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = 1_X \circ f'' = f''.$$

A este elemento lo llamaremos **el inverso** de  $f$  y lo denotaremos por  $f^{-1}$ .

**Definición 1.25** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $f$  es un **monomorfismo** o bien solo **mono**, si para todo objeto  $A$  y todos los morfismos  $u, v \in \text{Hom}(A, X)$  tales que  $f \circ u = f \circ v$ , implican que  $u = v$ . De forma dual, decimos que  $f$  es un **epimorfismo** o bien solo **epi**, si para todo objeto  $B$  y todos los morfismos  $p, q \in \text{Hom}(Y, B)$  tales que  $p \circ f = q \circ f$ , implican que  $p = q$ .

La definición anterior da el siguiente lema, cuya demostración se sigue inmediatamente de la definición.

**Lema 1.26** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria, con  $f, g \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ . Entonces:

- (a) Si  $f, g$  son monos y  $f \circ g$  está bien definido, entonces  $f \circ g$  es mono.
- (b) Si  $f, g$  son epis y  $f \circ g$  está bien definido, entonces  $f \circ g$  es epi.
- (c) Si  $f \circ g$  es mono, entonces  $g$  es mono.
- (d) Si  $f \circ g$  es epi, entonces  $f$  es epi.

Del lema anterior, se tiene el siguiente corolario directo de la definición de split-mono y split-epi.

**Corolario 1.27** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria y  $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ . Entonces:

- (a) Si  $f$  es split-mono, entonces  $f$  es mono.
- (b) Si  $f$  es split-epi, entonces  $f$  es epi.

**Corolario 1.28** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria y  $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ . Si  $f$  es un isomorfismo, entonces  $f$  es un monomorfismo y un epimorfismo.

Sin embargo, el recíproco del corolario anterior no es cierto. Es decir, si  $f$  es mono y epi, no necesariamente  $f$  es iso, lo cuál da la siguiente definición.

**Definición 1.29** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, se dice que  $\mathcal{C}$  es **balanceada**, si para todo  $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ , con  $f$  mono y epi, entonces  $f$  es iso.

Pero algo que si nos garantiza que un morfismo es iso, es el siguiente enunciado.

**Proposición 1.30** *Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Si  $f$  es mono y split-epi, entonces  $f$  es un isomorfismo.*

De forma dual, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.31** *Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Si  $f$  es epi y split-mono, entonces  $f$  es un isomorfismo.*

## 1.5. Subobjetos y objetos cocientes

Las definiciones dadas en la sección 1.4 nos permite nombrar ciertos objetos en relación con otro. La siguiente construcción será importante en el próximo capítulo.

Dado  $X \in \mathcal{C}$ , definamos la categoría  $M(X)$  cuyos objetos son pares  $\langle X', u_{X'}^X \rangle$  donde  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  es un monomorfismo en  $\mathcal{C}$ . Dados dos objetos  $\langle X', u_{X'}^X \rangle$  y  $\langle X'', u_{X''}^X \rangle$  en  $M(X)$ , un morfismo del objeto  $\langle X', u_{X'}^X \rangle$  en el objeto  $\langle X'', u_{X''}^X \rangle$  es un morfismo  $\alpha : X' \rightarrow X''$  tal que  $u_{X''}^X \circ \alpha = u_{X'}^X$ , en  $\mathcal{C}$ .

Definimos una relación de equivalencia en los objetos de  $M(X)$  como sigue:  $\langle X', u_{X'}^X \rangle \sim \langle X'', u_{X''}^X \rangle$  si y sólo si  $\langle X', u_{X'}^X \rangle$  es isomorfo a  $\langle X'', u_{X''}^X \rangle$  en  $M(X)$ . Con esto, para cada objeto  $\langle X', u_{X'}^X \rangle$  en  $M(X)$  consideramos su clase de equivalencia y la denotaremos como

$$(X', u_{X'}^X).$$

**Definición 1.32** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Se dice que  $\mathcal{C}$  es una categoría localmente pequeña si para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$  la clase*

$$\text{Sub}(X) := \{ \langle X', u_{X'}^X \rangle \mid \langle X', u_{X'}^X \rangle \in M(X) \}$$

*es un conjunto. A la clase de equivalencia  $(X', u_{X'}^X)$  del morfismo  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  lo llamamos **subobjeto** de  $X$ . A veces diremos que  $X'$  es un subobjeto de  $X$  y lo denotaremos como  $X' \subseteq X$*

De manera dual, dado  $X \in \mathcal{C}$ , definamos la categoría  $E(X)$  cuyos objetos son pares  $\langle p_{X'}^{X'}, X' \rangle$  donde  $p_{X'}^{X'} : X \rightarrow X'$  es un epimorfismo en  $\mathcal{C}$ . Dados dos objetos  $\langle p_{X'}^{X'}, X' \rangle$  y  $\langle p_{X''}^{X''}, X'' \rangle$  en  $E(X)$ , un morfismo del objeto  $\langle p_{X'}^{X'}, X' \rangle$  en el objeto  $\langle p_{X''}^{X''}, X'' \rangle$  es un morfismo  $\alpha : X' \rightarrow X''$  tal que  $\alpha \circ p_{X'}^{X'} = p_{X''}^{X''}$  en  $\mathcal{C}$ .

Definimos una relación de equivalencia en los objetos de  $E(X)$  como sigue:  $\langle p_{X'}^{X'}, X' \rangle \sim \langle p_{X''}^{X''}, X'' \rangle$  si y sólo si  $\langle p_{X'}^{X'}, X' \rangle$  es isomorfo a  $\langle p_{X''}^{X''}, X'' \rangle$  en  $E(X)$ . Con esto, para cada objeto  $\langle p_{X'}^{X'}, X' \rangle$  en  $E(X)$  consideramos su clase de equivalencia y lo denotaremos como

$$(p_{X'}^{X'}, X').$$

**Definición 1.33** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Se dice que  $\mathcal{C}$  es una categoría **colocalmente pequeña** si para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$  la clase

$$\text{Coc}(X) := \{(p_X^{X'}, X') \mid \langle p_X^{X'}, X' \rangle \in E(X)\}$$

es un conjunto. A la clase de equivalencia  $(p_X^{X'}, X')$  del epimorfismo  $p_X^{X'} : X \rightarrow X'$  lo llamamos **objeto cociente** de  $X$ .

## 1.6. Igualadores y coigualadores

**Definición 1.34** Sean  $\alpha, \beta : A \rightarrow B$  morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $\mu : K \rightarrow A$  es un **igualador** para  $\alpha$  y  $\beta$  si:

- (a)  $\alpha\mu = \beta\mu$ ,
- (b) para cualquier morfismo  $\mu' : K' \rightarrow A$  tal que  $\alpha\mu' = \beta\mu'$ , existe un único morfismo  $\gamma : K' \rightarrow K$  tal que  $\mu' = \mu\gamma$ .

**Observación 1.35** Si existe el igualador de dos morfismos, el igualador es un monomorfismo y es único salvo isomorfismos.

**Definición 1.36** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Si todo par de morfismos  $\alpha, \beta : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  tienen igualador, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene igualadores**.

Dualmente tenemos la definición siguiente.

**Definición 1.37** Sean  $\alpha, \beta : A \rightarrow B$  morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $\mu : B \rightarrow H$  es un **coigualador** para  $\alpha$  y  $\beta$  si:

- (a)  $\mu\alpha = \mu\beta$ ,
- (b) para cualquier morfismo  $\mu' : B \rightarrow H'$  tal que  $\mu'\alpha = \mu'\beta$ , existe un único morfismo  $\gamma : H \rightarrow H'$  tal que  $\mu' = \gamma\mu$ .

**Definición 1.38** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Si todo par de morfismos  $\alpha, \beta : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  tienen coigualador, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene coigualadores**.

## 1.7. Pullback y pushout

**Definición 1.39** Sean  $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A$  y  $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A$  morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$ . Decimos que el diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A \end{array}$$

es un **pullback** para  $\alpha_1, \alpha_2$ , si se satisface lo siguiente:

para todo par de morfismos  $\beta_1' : P' \rightarrow A_1$  y  $\beta_2' : P' \rightarrow A_2$  tales que  $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$ , existe un único morfismo  $\gamma : P' \rightarrow P$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 P' & & & & \\
 \beta_1' \searrow & \gamma \searrow & & \beta_2' \searrow & \\
 & P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 & \\
 & \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 & \\
 & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A & 
 \end{array}$$

Tenemos las siguientes propiedades básicas de pullback

**Lema 1.40** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Sean  $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A$  y  $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A$  morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$  y supongamos que el siguiente diagrama es un pullback para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 \\
 \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A.
 \end{array}$$

Si el siguiente diagrama es un pullback de  $\alpha_1, \alpha_2$

$$\begin{array}{ccc}
 P' & \xrightarrow{\beta_2'} & A_2 \\
 \beta_1' \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A,
 \end{array}$$

entonces existe un único isomorfismo  $\gamma : P \rightarrow P'$  tal que  $\beta_1 = \beta_1'\gamma$ ,  $\beta_2 = \beta_2'\gamma$ .

**Proposición 1.41** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Sean  $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A$  y  $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A$  morfismos en  $\mathcal{C}$ . Si el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$  es un pullback para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 \\
 \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A,
 \end{array}$$

entonces:

- (a)  $\beta_2$  es mono si  $\alpha_1$  es mono,
- (b)  $\beta_2$  es iso si  $\alpha_1$  es iso.

**Proposición 1.42** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria y el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C', \end{array}$$

donde ambos cuadrados son pullbacks. Entonces el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$  es un pullback

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{gf} & C \\ \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow \\ A' & \xrightarrow{g'f'} & C'. \end{array}$$

De forma dual, tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.43** Sean  $\alpha_1 : A \rightarrow A_1$  y  $\alpha_2 : A \rightarrow A_2$  morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$ . Decimos que el diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ A_1 & \xrightarrow{\beta_1} & P \end{array}$$

es un **pushout** para  $\alpha_1, \alpha_2$ , si satisface lo siguiente:

para todo par de morfismos  $\beta_1' : A_1 \rightarrow P'$  y  $\beta_2' : A_2 \rightarrow P'$  tales que  $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$ , existe un único morfismo  $\gamma : P \rightarrow P'$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ A_1 & \xrightarrow{\beta_1} & P \\ & \searrow \beta_1' & \downarrow \gamma \\ & & P'. \end{array}$$

## 1.8. Intersección

**Definición 1.44** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\{\mu_i : A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$  una familia de subobjetos de  $A$ . Decimos que un morfismo  $\mu : A' \rightarrow A$  es la **intersección** de dicha familia si cumple las siguientes condiciones:

- (a) para cada  $i \in I$  existe  $v_i : A' \rightarrow A_i$  tal que  $\mu = \mu_i v_i$ ,

(b) si hay otro morfismo  $\theta : B \rightarrow A$  que cumple la propiedad (a), entonces existe un único morfismo  $\eta : B \rightarrow A'$ , tal que  $\theta = \mu\eta$ .

**Notación 1.45** En caso de existir una intersección de una familia de subobjetos de  $A$ , se puede demostrar que tal intersección es única salvo isomorfismos. Denotaremos a  $A'$  como  $\bigcap_{i \in I} A_i$  o bien, si no hay riesgo de confusión con la familia, lo denotaremos como  $\bigcap A_i$ .

**Definición 1.46** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene intersecciones**, si para cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  y cada familia  $\{\mu_i : A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$  de subobjetos de  $A$ , existe la intersección. Si la intersección existe, solo para familias finitas, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene intersecciones finitas**.

**Lema 1.47** Sean  $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A$  y  $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A$  monomorfismos en una categoría  $\mathcal{C}$ . Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A. \end{array}$$

Entonces:

- (a) El cuadrado anterior es pullback de  $\alpha_1, \alpha_2$  si y sólo si  $\alpha_1\beta_1$  es intersección de  $\alpha_1, \alpha_2$ .
- (b) Si  $\mathcal{C}$  tiene pullbacks, entonces tiene intersecciones finitas.

## 1.9. Unión

**Definición 1.48** Para una categoría  $\mathcal{C}$ , consideremos el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} A' & & B' \\ u \downarrow & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

donde los morfismos verticales son monos. Diremos que el subobjeto  $u : A' \rightarrow A$  es **llevado** a el subobjeto  $h : B' \rightarrow B$ , via  $f$ , si existe un morfismo  $f' : A' \rightarrow B'$  tal que hace conmutar el diagrama anterior, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ u \downarrow & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

De forma no tan natural como la intersección, tenemos la siguiente definición de unión.

**Definición 1.49** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Consideremos  $\{u_i : A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$  una familia de subobjetos de  $A$ . Decimos que un monomorfismo  $u : A' \rightarrow A$  es una **unión** de dicha familia, si cumple las siguientes condiciones.

- (a) Para cada  $i \in I$ , existe un morfismo  $h_i : A_i \rightarrow A'$  tal que  $u_i = u \circ h_i$ ,
- (b) si  $f : A \rightarrow B$  es un morfismo tal que cada  $u_i$  es llevado a un subobjeto  $\mu : B' \rightarrow B$  de  $B$  por  $f$ , entonces también  $u$  es llevado a  $\mu$  via  $f$ .

**Notación 1.50** Se puede ver que una unión, en caso de existir, es única salvo isomorfismos. En caso exista, denotaremos a  $A'$  como  $\bigcup_{i \in I} A_i$  o bien, si no hay riesgo de confusión con la familia, lo denotaremos como  $\bigcup A_i$ .

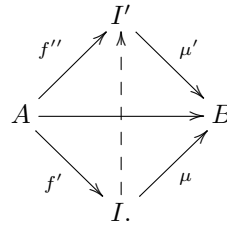
**Notación 1.51** Notemos que la unión debe ser un objeto en la categoría donde estemos trabajando. De esta manera, se puede ver que en la categoría de conjuntos la definición de arriba coincide con la unión conjuntista. Sin embargo, en la categoría de grupos abelianos la unión (definida arriba) de una familia de subgrupos es el subgrupo abeliano generado por la unión conjuntista de dicha familia.

**Definición 1.52** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene uniones** si para cada objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$  y cada familia  $\{\mu_i : A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$  de subobjetos de  $A$ , existe la unión. Si la unión existe solo para familias finitas, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene uniones finitas**.

## 1.10. Imágenes

**Definición 1.53** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Un subobjeto  $\mu : I \rightarrow B$  de  $B$  es una **imagen** de  $f$  si satisface lo siguiente:

- (a) existe un morfismo  $f' : A \rightarrow I$  tal que  $f = \mu f'$ ,
- (b) si  $\mu' : I' \rightarrow B$  es un monomorfismo con la propiedad (a), entonces existe un morfismo  $h : I \rightarrow I'$  tal que el triángulo derecho del siguiente diagrama es conmutativo



**Observación 1.54** De la definición de imagen se tiene lo siguiente.

- (a) Todo el diagrama de la definición anterior conmuta.
- (b) La imagen de un morfismo  $f$ , si existe, es única.
- (c) Si  $f$  es mono, entonces  $f$  es su imagen.

**Notación 1.55** De la definición de imagen, junto con la notación usada en dicha definición, denotaremos a  $I$  como  $\text{Im}(f)$ .

**Definición 1.56** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Si todo morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  tiene imagen, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene imágenes**.

**Proposición 1.57** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con igualadores y  $f : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Si  $A \xrightarrow{f'} I \xrightarrow{\mu} B$  es una factorización de  $f$  a través de su imagen, entonces  $f'$  es epi.

**Proposición 1.58** Sean  $\mathcal{C}$  un categoría balanceada y  $f : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  tal que  $f$  tiene imagen. Si  $A \xrightarrow{f'} I \xrightarrow{\mu} B$  es una factorización de  $f$  con  $f'$  un epimorfismo y  $\mu$  un monomorfismo, entonces  $\mu$  es la imagen de  $f$ .

**Notación 1.59** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Si  $\mu : A' \rightarrow A$  es un subobjeto de  $A$ , denotaremos a la imagen de la composición  $A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{f} B$  por  $f(A')$ .

## 1.11. Imágenes inversas

**Definición 1.60** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $\alpha : B' \rightarrow B$  un subobjeto de  $B$ . La **imagen inversa** por  $f$  de  $\alpha : B' \rightarrow B$  es el monomorfismo  $\beta_1 : P \rightarrow A$  dado por el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta_2} & B' \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

**Notación 1.61** Usualmente denotaremos a  $P$  como  $f^{-1}(B')$ .

**Proposición 1.62** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Consideremos las inclusiones  $A_1 \subset A_2 \subset A$  y  $B_1 \subset B_2 \subset B$ . Entonces se satisfacen las siguientes relaciones, cada vez que ambos lados de dichas relaciones estén definidas:



- (a)  $f(A_1) \subset f(A_2)$ ,
- (b)  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ ,
- (c)  $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$ ,
- (d)  $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$ ,
- (e)  $f(A_1) \subset f(f^{-1}(f(A_1)))$ ,
- (f)  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(B_1)))$ .

### 1.12. Objeto cero

**Definición 1.63** Un objeto  $0$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , es llamado **objeto final** si para todo  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  existe un único morfismo  $\alpha : A \rightarrow 0$ . Dualmente un objeto  $0'$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , es llamado **objeto inicial** si para todo  $B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  existe un único morfismo  $\beta : 0' \rightarrow B$ .

**Lema 1.64** Si la categoría  $\mathcal{C}$  tiene un objeto final (respectivamente, inicial), entonces éste es único salvo isomorfismos.

**Definición 1.65** Un objeto  $0$  en una categoría  $\mathcal{C}$ , es llamado **objeto cero** si este es objeto inicial y final. En este caso, diremos que un morfismo  $\alpha : A \rightarrow B$  es un **morfismo cero** si se factoriza a través de un objeto cero.

**Observación 1.66** Si la categoría  $\mathcal{C}$  tiene un objeto cero, éste es único salvo isomorfismos.

**Proposición 1.67** Sea  $\mathcal{C}$  categoría con objeto cero. Entonces, cada conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  tiene un morfismo cero que se denota por  $0_{AB}$  o simplemente por  $0$ .

### 1.13. Kerneles y cokerneles

**Definición 1.68** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero y  $\alpha : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Decimos que un morfismo  $i : K \rightarrow A$  es un **kernel** de  $\alpha$  si cumple las siguientes condiciones:

- (a)  $\alpha i = 0$ ,
- (b) para todo morfismo  $i' : K' \rightarrow A$  tal que  $\alpha i' = 0$ , existe un único morfismo  $\gamma : K' \rightarrow K$  tal que  $i' = i\gamma$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero, si todo morfismo en  $\mathcal{C}$  tiene un kernel, diremos que  $\mathcal{C}$  tiene **kernels**.

**Proposición 1.69** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero y  $\alpha : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Para el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow i & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) El diagrama anterior es un diagrama pullback.
- (b)  $i$  es un kernel de  $f$ .

**Corolario 1.70** Para una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$  con objeto cero, las siguientes afirmaciones se satisfacen.

- (a) Si  $\alpha : A \rightarrow B$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $i : K \rightarrow A$  es un kernel de  $\alpha$ , entonces  $i$  es un monomorfismo.
- (b) Si  $\alpha : A \rightarrow B$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $i : K \rightarrow A$  es un kernel de  $\alpha$ , entonces  $i$  es único salvo isomorfismos de subobjetos de  $A$ .

**Notación 1.71** Al objeto  $K$  de la definición de kernel muchas veces lo denotaremos por  $\text{Ker}(\alpha)$  (esto está bien definido por el inciso (b) del corolario anterior).

**Lema 1.72** Para una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$  con objeto cero, se satisface las siguientes condiciones.

- (a) Si  $\mathcal{C}$  tiene igualadores, entonces  $\mathcal{C}$  tiene kerneles.
- (b) Si  $f : A \rightarrow B$  es mono, entonces  $\text{Ker}(f) = 0$ .
- (c) Sean  $\alpha : A \rightarrow B$  y  $\beta : B \rightarrow C$  morfismos en  $\mathcal{C}$ . Si existen  $\text{Ker}(\alpha)$  y  $\text{Ker}(\beta\alpha)$ , entonces  $\text{Ker}(\alpha) \subset \text{Ker}(\beta\alpha)$ .
- (d) Sean  $\alpha : A \rightarrow B$  y  $\beta : B \rightarrow C$  morfismos en  $\mathcal{C}$ , con  $\beta$  mono. Si existen  $\text{Ker}(\alpha)$  y  $\text{Ker}(\beta\alpha)$  entonces  $\text{Ker}(\alpha) \cong \text{Ker}(\beta\alpha)$ .

De forma dual, tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.73** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero y  $\alpha : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Decimos que un morfismo  $p : B \rightarrow H$  es un **cokernel** de  $\alpha$  si cumple las siguientes condiciones:

- (a)  $p \circ \alpha = 0$ ,
- (b) para todo morfismo  $p' : B \rightarrow H'$  tal que  $p' \circ \alpha = 0$ , existe un único morfismo  $\gamma : H \rightarrow H'$  tal que  $p' = \gamma p$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto cero. Si todo morfismo en  $\mathcal{C}$  tiene cokernel, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene cokernels**.

**Lema 1.74** Para una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$  con objeto cero, las siguientes afirmaciones se satisfacen.

- (a) Si  $\alpha : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $p : B \rightarrow H$  es un cokernel de  $\alpha$ , entonces  $p$  es un epimorfismo.
- (b) Si  $\alpha : A \rightarrow B$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $p : B \rightarrow H$  es un cokernel de  $\alpha$ , entonces  $p$  es único salvo isomorfismos de objetos cocientes de  $B$ .

**Notación 1.75** Al objeto  $H$ , de la definición anterior, comúnmente lo denotaremos por  $\text{Coker}(\alpha)$ .

**Lema 1.76** Para una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$  con objeto cero, las siguientes afirmaciones se satisfacen.

- (a) Si  $\mathcal{C}$  tiene coigualadores, entonces  $\mathcal{C}$  tiene cokernels.
- (b) Si  $f : A \rightarrow B$  es epi, entonces  $\text{Coker}(f) = 0$ .
- (c) Sean  $\alpha : A \rightarrow B$  y  $\beta : B \rightarrow C$  morfismos en  $\mathcal{C}$ . Si existen  $\text{Coker}(\beta\alpha)$  y  $\text{Coker}(\beta)$ , entonces  $\text{Coker}(\beta)$  es un objeto cociente de  $\text{Coker}(\beta\alpha)$ .
- (d) Sean  $\alpha : A \rightarrow B$  y  $\beta : B \rightarrow C$  morfismos en  $\mathcal{C}$  con  $\alpha$  un epimorfismo. Si existen  $\text{Coker}(\beta\alpha)$  y  $\text{Coker}(\beta)$ , entonces  $\text{Coker}(\beta\alpha) \simeq \text{Coker}(\beta)$ .

**Proposición 1.77** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría  $\mathcal{C}$  con objeto cero

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\gamma} & P & \xrightarrow{\beta_2} & A' \\ \parallel & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \alpha \\ K & \xrightarrow{\mu} & A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Si el cuadrado derecho es un pullback,  $\mu$  es kernel de  $f$  y  $\gamma$  es el morfismo inducido por el pullback por los morfismos  $\mu$  y  $0_{KA'}$ , entonces  $\gamma$  es el kernel de  $\beta_2$ .

**Proposición 1.78** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría  $\mathcal{C}$  con objeto cero

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i} & A \\ & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{\alpha} & B \xrightarrow{p} X, \end{array}$$

donde  $\alpha$  es el kernel de  $p$ . Entonces, el diagrama anterior se puede extender a un pullback si y solo si  $i$  es kernel de  $pf$ .

## 1.14. Categoría normal y conormal

**Definición 1.79** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Decimos que  $\mathcal{C}$  es **normal** si:

- (a) tiene objeto cero,
- (b) todo monomorfismo en  $\mathcal{C}$  es el kernel de algún morfismo en  $\mathcal{C}$ .

De forma dual, se tiene la siguiente definición:

**Definición 1.80** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Decimos que  $\mathcal{C}$  es **conormal** si:

- (a) tiene objeto cero,
- (b) todo epimorfismo en  $\mathcal{C}$  es el cokernel de algún morfismo en  $\mathcal{C}$ .

**Lema 1.81** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con con objeto cero y  $f : A \rightarrow B$  morfismo en  $\mathcal{C}$  tales que existen  $p : B \rightarrow \text{Coker}(f)$ , el cokernel de  $f$ , y  $v : \text{Ker}(p) \rightarrow B$ , el kernel de  $p$ . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) Existe un único morfismo  $u : A \rightarrow \text{Ker}(p)$ , tal que hace conmutar el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & \text{Coker}(f). \\ & \searrow u & \nearrow v & & \\ & & \text{Ker}(p) & & \end{array}$$

- (b) Si  $\mathcal{C}$  tiene cokernels y es normal, entonces  $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\text{Coker}(f))$ .

### 1.15. Categoría exacta

**Definición 1.82** Una categoría  $\mathcal{C}$  es **exacta** si es normal, conormal, tiene kernels y cokernels, y todo morfismo  $\alpha : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{C}$  puede ser escrito como  $X \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} Y$ , donde  $u$  es epi y  $v$  es mono.

**Lema 1.83** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría exacta y  $\alpha : X \rightarrow Y$  morfismo en  $\mathcal{C}$ , escrito de forma canónica como  $X \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} Y$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ , con  $i$  el kernel de  $u$  y  $p$  el cokernel de  $v$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(u) & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{p} & \text{Coker}(v) \\ & & \searrow u & & \nearrow v & & \\ & & & & I & & \end{array}$$

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a)  $\mathcal{C}$  es balanceada y tiene imágenes.
- (b)  $\text{Ker}(\alpha) = i$ ,  $\text{Coker}(\alpha) = p$  y  $\text{Im}(\alpha) = v$ .

**Definición 1.84** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría exacta. Consideremos la siguiente sucesión  $\eta$  de morfismos en  $\mathcal{C}$ :

$$\eta : \quad \dots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_{i+2} \longrightarrow \dots$$

- (a) Diremos que  $\eta$  es una **sucesión exacta** en  $\mathcal{C}$  si  $\text{Ker}(\alpha_{i+1}) = \text{Im}(\alpha_i)$  para cada  $i$ .
- (b) Diremos que  $\eta$  es un **complejo** en  $\mathcal{C}$ , si  $\alpha_{i+1} \circ \alpha_i = 0$  (o bien  $\text{Im}(\alpha_i) \subset \text{Ker}(\alpha_{i+1})$ ), para cada  $i$ .

**Proposición 1.85** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría exacta. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a)  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$  es exacta en  $\mathcal{C}$  si y solo si  $\alpha$  es mono.
- (b)  $A \xrightarrow{\beta} B \rightarrow 0$  es exacta en  $\mathcal{C}$  si y solo si  $\beta$  es epi.
- (c)  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$  es exacta en  $\mathcal{C}$  si y solo si  $\alpha$  es iso.

**Definición 1.86** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría exacta. Consideremos la siguiente sucesión  $\eta$  en  $\mathcal{C}$ :

$$\eta : \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0.$$

Decimos que  $\eta$  es **exacta corta** si es exacta, es decir,  $\alpha$  es un monomorfismo,  $\beta$  es un epimorfismo y  $\alpha$  es el kernel de  $\beta$ .

**Notación 1.87** De la definición anterior, normalmene se denota a  $C$  como  $B/A$ .

**Lema 1.88** Consideremos el siguiente diagrama en un categoría exacta  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & B/A \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & B'/A' \longrightarrow 0, \end{array}$$

donde los renglones son sucesiones exactas cortas. Entonces, existe un morfimo  $\theta : A \rightarrow A'$  que hace conmutar el diagrama anterior, si y sólo si existe  $\delta : B/A \rightarrow B'/A'$  que hace conmutar el diagrama anterior. Más aún, la existencia de uno de tales morfismos determina al otro de manera única.

### 1.16. El lema del 9 y los teoremos de isomorfimo

**Teorema 1.89 (Lema del 9)** Consideremos el siguiente diagrama en un categoría exacta  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A' & & A & & A'' \\ & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow \psi_1 \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\alpha_1} & B & \xrightarrow{\alpha_2} & B'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \psi_2 \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\beta_1} & C & \xrightarrow{\beta_2} & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0, \end{array}$$

donde los renglones y columnas son sucesiones exactas cortas. Entonces, existen morfismos  $f : A' \rightarrow A$  y  $g : A \rightarrow A''$ , tales que hacen conmutar al diagrama anterior y  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$  es exacta corta.

**Teorema 1.90 (Primer teorema de isomorfismo)** Sean  $B \subset A_2 \subset A_1$  subobjetos en una categoría exacta  $\mathcal{C}$ . Entonces, se tiene el siguiente diagrama con-

mutativo, con filas exactas en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_1/A_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A_2/B & \longrightarrow & A_1/B & \longrightarrow & A_1/A_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

**Corolario 1.91** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría exacta. Si el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\beta_1} & C' \\ \beta_2 \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \\ B & \xrightarrow{\alpha_2} & C \end{array}$$

es un pullback,  $\alpha_1$  es mono y  $\alpha_2$  es epi, entonces dicho diagrama puede ser extendido al siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$  con filas y columnas exactos

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\eta} & B' & \xrightarrow{\beta_1} & C' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \alpha_1 \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\theta} & B & \xrightarrow{\alpha_2} & C \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \psi & & \downarrow \gamma \\ & & & & C'' & = & C'' \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0. \end{array}$$

**Proposición 1.92** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría exacta. Consideremos el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$  con la segunda fila y segunda columna sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow \psi_1 \\ & & \text{II} & & \text{I} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\alpha_1} & B & \xrightarrow{\alpha_2} & B'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \psi_2 \\ & & \text{III} & & \text{IV} & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\beta_1} & C & \xrightarrow{\beta_2} & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0. \end{array}$$

Entonces, el diagrama anterior es conmutativo y exacto en  $\mathcal{C}$  si y sólo si  $II$  es pullback,  $IV$  es pushout,  $I$  y  $III$  son, respectivamente, la factorización  $\alpha_2\theta_1$  y  $\theta_2\alpha_1$  a través de sus imágenes.

**Corolario 1.93** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría exacta y  $A$  un objeto en  $\mathcal{C}$ . Si  $\alpha_1$  y  $\theta_1$  son subobjetos de  $A$ , entonces el siguiente diagrama es conmutativo en  $\mathcal{C}$  con filas y columnas sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_1 \cap A_2 & \xrightarrow{f} & A_2 & \xrightarrow{g} & A_2/A_1 \cap A_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow \psi_1 \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A & \xrightarrow{\alpha_2} & A/A_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \psi_2 \\
 0 & \longrightarrow & A_1/A_1 \cap A_2 & \xrightarrow{\beta_1} & A/A_2 & \xrightarrow{\beta_2} & A/A_1 \cup A_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

**Teorema 1.94 (Segundo teorema de isomorfismo)** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría exacta y  $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A$  y  $\theta_1 : A_2 \rightarrow A$  subobjetos de  $A$ . Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 \cap A_2 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_2/A_1 \cap A_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_1 \cup A_2 & \longrightarrow & A_1 \cup A_2/A_1 \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

## 1.17. Producto y coproducto

**Definición 1.95** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de objetos en una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$ . Un **producto** para  $\{A_i\}_{i \in I}$  es un objeto  $A \in \mathcal{C}$  y una familia de morfismos  $\{p_i : A \rightarrow A_i\}_{i \in I}$  llamados *proyecciones*, con la siguiente propiedad: para cualquier otro objeto  $A'$  y otra familia de morfismos  $\{\alpha_i : A' \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ , existe un único morfismo  $\alpha : A' \rightarrow A$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 & \searrow \alpha_i & \swarrow p_i \\
 & & A_i
 \end{array}$$

para todo  $i \in I$ .



**Observación 1.96** (a) De la definición de producto, se puede ver que si un producto para una familia existe, éste es único salvo isomorfismos.

(b) Un objeto  $0$  en  $\mathcal{C}$ , es un objeto final en  $\mathcal{C}$  si y sólo si sirve como producto para la familia vacía.

(c) Supongamos que la categoría  $\mathcal{C}$  tiene objeto cero. Para cada  $i \in I$ , definimos el morfismo  $\delta_{ij} : A_i \rightarrow A_j$ , donde  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = \text{Id}_{A_i}$  si  $i = j$ . Si existe el producto de  $\{A_i\}_{i \in I}$ , entonces existen morfismos  $\mu_i : A_i \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ , llamados **inclusiones canónicas** tales que  $p_i \mu_j = \delta_{ji}$  para cada  $i, j \in I$ .

**Definición 1.97** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Si toda familia de morfismo en  $\mathcal{C}$  tiene producto, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene productos**. Si solo existen productos para familias finitas, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene productos finitos**

**Notación 1.98** De la observación anterior, junto con la notación usada en la definición de producto, denotaremos a  $A$  como  $\prod_{i \in I} A_i$  o bien, si no hay riesgo de confusión con la familia, lo denotaremos como  $\prod A_i$ . A cada  $p_i$  lo llamaremos  **$i$ -ésima proyección del producto sobre  $A_i$** .

De forma dual, tenemos la siguiente definición de coproducto.

**Definición 1.99** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de objetos en una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$ . Un **coproducto** para  $\{A_i\}_{i \in I}$  es un objeto  $A \in \mathcal{C}$  y una familia de morfismos  $\{\mu_i : A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$ , llamados **inclusiones**, con la siguiente propiedad: para cualquier otro objeto  $A'$  y otra familia de morfismos  $\{\alpha_i : A_i \rightarrow A'\}_{i \in I}$ , existe un único morfismo  $\alpha : A \rightarrow A'$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ & \swarrow p_i & \nearrow \alpha_i \\ & A_i & \end{array}$$

para todo  $i \in I$ .

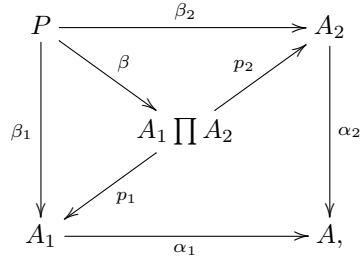
**Observación 1.100** (a) De la definición de coproducto, se puede ver que si un coproducto para una familia existe, éste es único salvo isomorfismos.

(b) Un objeto  $0$  en  $\mathcal{C}$ , es un objeto inicial en  $\mathcal{C}$  si y sólo si sirve como coproducto para la familia vacía.

**Definición 1.101** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Si toda familia de morfismo en  $\mathcal{C}$  tiene coproducto, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene coproductos**. Si solo existen coproductos para familias finitas, diremos que  $\mathcal{C}$  **tiene coproductos finitos**

**Notación 1.102** De la observación anterior, junto con la notación usada en la definición de coproducto, denotaremos a  $A$  como  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  o bien, si no hay riesgo de confusión con la familia lo denotaremos como  $\bigoplus A_i$ . A cada  $\mu_i$  llamaremos *i-esima inclusión* del coproducto sobre  $A_i$ .

**Lema 1.103** Sean  $\alpha_1 : A_1 \rightarrow A$  y  $\alpha_2 : A_2 \rightarrow A$  morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$ . Consideremos el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$



donde  $p_1$  y  $p_2$  son las proyecciones del producto  $A_1 \amalg A_2$  y  $\beta_i = p_i \beta$  para  $i = 1, 2$ . Entonces, el cuadrado anterior es pullback si y sólo si  $\beta$  es el igualador de los morfismos  $\alpha_1 p_1$  y  $\alpha_2 p_2$ .

## 1.18. Categoría abeliana

**Definición 1.104** Una categoría  $\mathcal{C}$  es *semiaditiva*, si tiene objeto cero y cada conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  tiene estructura de monoide abeliano, tal que las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) La composición de morfismos en  $\mathcal{C}$  es bilineal, es decir,  $\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$  y  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ , cada vez que las composiciones anteriores estén bien definidas.
- (b) El elemento cero de cada monoide  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  coincide con el morfismo cero de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ .

Si además, cada monoide  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  tiene inverso aditivo (es decir,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  es grupo abeliano), diremos que  $\mathcal{C}$  es *aditiva*.

**Definición 1.105** Una categoría  $\mathcal{C}$  es *preabeliana*, si es aditiva, tiene kerneles y cokerneles, y coproductos finitos.

**Proposición 1.106** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva. Consideremos un morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$ . Si existen  $\text{Ker}(f), \text{Coker}(f), \text{Ker}(\text{Coker}(f)), \text{Coker}(\text{Ker}(f))$ , entonces, existe un único morfismo  $\bar{f} : \text{Coker}(\text{Ker}(f)) \rightarrow \text{Ker}(\text{Coker}(f))$  tal que

el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$  conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(f) \hookrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} \twoheadrightarrow \text{Coker}(f) \\ & \downarrow \mu & & \uparrow \pi & \\ & \text{Coker}(\text{Ker}(f)) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Ker}(\text{Coker}(f)) & \end{array}$$

donde  $\pi$  es el kernel de  $p$  y  $\mu$  el cokernel de  $i$ .

**Definición 1.107** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva. Consideremos un morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  tal que existen  $\text{Ker}(f)$ ,  $\text{Coker}(f)$ ,  $\text{Ker}(\text{Coker}(f))$  y  $\text{Coker}(\text{Ker}(f))$ . El único morfismo  $\bar{f} : \text{Coker}(\text{Ker}(f)) \rightarrow \text{Ker}(\text{Coker}(f))$ , construido en 1.106, lo llamaremos el **morfismo paralelo de  $f$** ; y a la factorización  $f = \pi \bar{f} \mu$ , la llamaremos la **factorización canónica de  $f$** .

**Definición 1.108** Una categoría  $\mathcal{C}$  es **abeliana** si es exacta, aditiva y tiene producto finitos.

**Proposición 1.109** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones.

- (a)  $\mathcal{C}$  es una categoría abeliana.
- (b)  $\mathcal{C}$  es una categoría preabeliana, y para todo morfismo  $f : A \rightarrow B$ , su morfismo paralelo es un isomorfismo.
- (c)  $\mathcal{C}$  tiene kerneles, cokernels, productos finitos, coproductos finitos, es normal y conormal.
- (d)  $\mathcal{C}$  tiene pullbacks, pushouts y es normal y conormal.

**Lema 1.110** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana. Si el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$  es un pullback

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A \end{array}$$

con  $\alpha_1$  epi, entonces el diagrama anterior también es un pushout.

## 1.19. Funtor exacto

**Definición 1.111** Sea  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor covariante.

- (a) Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías con objeto cero. Se dice que  $T$  **preserva objetos cero** (resp. morfismos cero) si  $T(0)$  es un objeto cero (resp. morfismo cero) en  $\mathcal{D}$  siempre que  $0$  lo sea en  $\mathcal{C}$ .
- (b)  $T$  **preserva kerneles** si  $T(\mu) : T(K) \rightarrow T(A)$  es el kernel de  $T(\alpha) : T(A) \rightarrow T(B)$  siempre que  $\mu : K \rightarrow A$  sea el kernel de  $\alpha : A \rightarrow B$ .
- (c)  $T$  **preserva cokerneles** si  $T(\pi) : T(B) \rightarrow T(L)$  es el cokernel de  $T(\alpha) : T(A) \rightarrow T(B)$  siempre que  $\pi : B \rightarrow L$  sea el cokernel de  $\alpha : A \rightarrow B$ .

**Definición 1.112** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías abelianas. Decimos que el funtor  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es **exacto**, si  $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$  es una sucesión exacta en  $\mathcal{D}$  para toda sucesión exacta  $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$  en  $\mathcal{C}$ .

**Proposición 1.113** Para  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías abelianas y  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor covariante, las siguientes condiciones se satisfacen

- (a)  $T$  preserva kerneles si y solo si para toda sucesión exacta corta en  $\mathcal{C}$

$$\eta : \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0,$$

la sucesión  $0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$  es exacta en  $\mathcal{D}$ .

- (b)  $T$  preserva cokerneles si y solo si para toda sucesión exacta corta  $\eta$ , como la anterior, la sucesión  $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C) \longrightarrow 0$  es exacta en  $\mathcal{D}$ .

- (c)  $T$  es exacto si y solo si para toda sucesión exacta corta  $\eta$ , como la anterior, la sucesión  $0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C) \longrightarrow 0$  es exacta en  $\mathcal{D}$ .

**Demostración.** Consultar [13, pág. 76].  $\square$

## 1.20. Objeto inyectivo y proyectivo

**Definición 1.114** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Se dice que  $P \in \mathcal{C}$  es **proyectivo** si para todo diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{\alpha} & A' \end{array}$$

con  $\alpha$  un epimorfismo, existe un morfismo  $f' : P \rightarrow A$  tal que  $f = \alpha f'$ . Dualmente, se tiene la noción de objeto **inyectivo** en  $\mathcal{C}$ .

**Proposición 1.115** *Para una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  y  $P \in \mathcal{C}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a)  $\text{Hom}(P, -)$  es exacto.
- (b)  $\text{Hom}(P, -)$  es exacto derecho.
- (c)  $\text{Hom}(P, -)$  manda epimorfismos en epimorfismos.
- (d)  $P$  es proyectivo.

**Demostración.** Consultar [9, pág. 71].  $\square$

**Definición 1.116** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Un objeto  $G$  de  $\mathcal{C}$  es un **generador** de  $\mathcal{C}$  si para  $f, g : X \rightarrow Y$  morfismos en  $\mathcal{C}$  tales que  $f \neq g$ , existe un  $h : G \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $f \circ h \neq g \circ h$ .*

**Definición 1.117** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Un conjunto de objetos  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $\mathcal{C}$  es un **conjunto de generadores** de  $\mathcal{C}$  si para  $f, g : X \rightarrow Y$  morfismo en  $\mathcal{C}$  tales que  $f \neq g$ , existen  $i_0 \in I$  y un morfismo  $h : U_{i_0} \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  tales que  $f \circ h \neq g \circ h$ .*

**Proposición 1.118** *Para una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$  y  $G \in \mathcal{C}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a)  $G$  es un generador de  $\mathcal{C}$ .
- (b)  $\text{Hom}(G, -)$  es fiel.

**Demostración.** Consultar [13, pág. 76].  $\square$

# Capítulo 2

## Localización

En este capítulo se darán dos construcciones de la categoría  $\mathcal{C}_\Sigma$ , dada  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña, donde  $\Sigma$  es una clase de morfismos, descrito en el Teorema 2.17. Las diferentes construcciones realizadas, a lo largo de este capítulo, son fundamentales para los resultados de los posteriores capítulos.

Siendo la segunda construcción, un resultado del contenido de [17]

### 2.1. Localización

El concepto de localización para anillos conmutativos se generaliza a cierto tipo de categorías. Una motivación para la localización en categorías es generalizar el concepto de localización de anillos conmutativos con identidad.

**Definición 2.1** *Sea  $A$  un anillo conmutativo con identidad. Un subconjunto  $S \subseteq A$  es **multiplicativo** si:*

- (a)  $1_A \in S$ ,
- (b) si  $s, s' \in S$  entonces  $ss' \in S$ .

Dados un anillo conmutativo con unidad  $A$  y  $S \subseteq A$  multiplicativo, definimos un relación  $\sim$  en el conjunto

$$S \times A := \{(s, a) \mid s \in S, a \in A\}$$

donde en  $S \times A$

$$(s, a) \sim (s', a') \text{ si existe } s'' \in S \text{ tal que } s''(as' - a's) = 0.$$

Note, que la relación  $\sim$  es de equivalencia. Denotamos por  $\frac{a}{s}$  a la clase de equivalencia de  $(s, a)$ , es decir,

$$\frac{a}{s} := \{(s', a') \in S \times A \mid (s', a') \sim (s, a)\}$$

Denotaremos por  $S^{-1}A$  al conjunto de todas las clases de equivalencia dadas por la relación anterior. Es decir,

$$S^{-1}A := \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S \right\}.$$

**Observación 2.2** *El conjunto  $S^{-1}A$  es un anillo conmutativo con identidad, con las operaciones siguientes:*

$$(a) \quad \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'},$$

$$(b) \quad \left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{a'}{s'}\right) = \frac{aa'}{ss'},$$

(c) *la identidad en  $S^{-1}A$  es el elemento  $\frac{1}{1}$ .*

Con lo anterior, tenemos la función  $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ ,  $a \mapsto \frac{a}{1}$ . Resulta sencillo ver que  $\varphi$  es un morfismo de anillos conmutativos con identidad. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.3** *Sean  $A$  un anillo conmutativo con 1 y  $S$  un subconjunto multiplicativo de  $A$ . Entonces, el par  $(\varphi, S^{-1}A)$  satisfacen las siguientes condiciones.*

(a)  $\forall s \in S$ ,  $\varphi(s)$  es una unidad en  $S^{-1}A$ .

(b) *Sea  $\psi : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos conmutativos con 1 tal que  $\psi(s)$  es unidad en  $B$ , para todo  $s \in S$ . Entonces, existe un único morfismo de anillos conmutativos con 1  $\theta : S^{-1}A \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & B \\ \varphi \downarrow & \nearrow \theta & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

*conmuta.*

**Demostración.** Ver [2, pág 36].  $\square$

**Definición 2.4** *Sean  $A$  anillo conmutativo con 1 y  $S \subseteq A$  un sistema multiplicativo. El par  $(\varphi, S^{-1}A)$  se llama la **localización de  $A$  respecto a  $S$** .*

Motivados en esta construcción para anillos conmutativos ( ver [2, pág. 41]) es que se tiene la siguiente definición en la cual durante todo el capítulo la palabra funtor se refiere a funtor covariante a menos que se especifique lo contrario.

**Definición 2.5** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma$  una clase de morfismos de  $\mathcal{C}$ . Se dice que la pareja  $(T, \mathcal{C}_\Sigma)$ , donde  $\mathcal{C}_\Sigma$  es una categoría y  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\Sigma$  un funtor, es una **categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  relativa a  $\Sigma$**  si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a)  $T(s)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma$ , para cada  $s \in \Sigma$ .
- (b) Si  $T' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , es un funtor tal que para cada  $s \in \Sigma$ ,  $T'(s)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}'$ , entonces existe un único funtor  $\bar{T} : \mathcal{C}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}'$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{T} & \mathcal{C}_\Sigma \\ & \searrow T' & \downarrow \bar{T} \\ & & \mathcal{C}' \end{array}$$

### Ejemplo 2.6

- (a) La categoría derivada de una categoría abeliana, la cual es la localización de la categoría de complejos de cadena (hasta homotopía) con respecto a los cuasi-isomorfismos, muy utilizada en álgebra homológica.
- (b) En teoría de módulos, sobre un anillo conmutativo  $R$ , cuando  $R$  tiene una dimensión de Krull  $\geq 2$ , puede ser útil tratar módulos  $M$  y  $N$  como pseudo-isomorfos si  $M/N$  tiene soporte de codimensión al menos dos. Esta idea es muy utilizada en la teoría de Iwasawa.

En todo lo que sigue, veremos que bajo ciertas condiciones en el conjunto de morfismos  $\Sigma$ , podemos construir a la categoría de fracciones relativa a  $\Sigma$  para esto, vamos a necesitar los siguientes resultados previos.

**Lema 2.7** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana. Entonces, todo diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f'} & C \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

que es pullback, se puede completar al siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f' & \xrightarrow{i'} & D & \xrightarrow{f'} & C \\ & & \downarrow 1_{\text{Ker } f'} & & \downarrow g' & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$



**Demostración.** Ver [17, Lema 1.4.13]  $\square$

El siguiente lema muestra la relación que existe entre el kernel y cokernel de dos morfismos  $f$  y  $g$ , con el kernel y cokernel de la composición  $gf$ , respectivamente.

**Lema 2.8** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana y  $f : Y \rightarrow Z$ ,  $g : X \rightarrow Y$  morfismos en  $\mathcal{C}$ . Entonces, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(g) & \longrightarrow & \text{Ker}(f \circ g) & \longrightarrow & \text{Ker}(f) \\ & & & & \delta & \nearrow & \\ \text{Coker}(g) & \longleftarrow & \text{Coker}(f \circ g) & \longrightarrow & \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

**Demostración.** Ver [17, Lema 1.4.14]  $\square$

**Proposición 2.9** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana. Consideremos el siguiente diagrama de pullback en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f'} & A \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Entonces, el diagrama anterior se puede completar al siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} D & \xrightarrow{f'} & A & \xrightarrow{\pi'} & \text{Coker}(f') & \longrightarrow & 0 \\ g' \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \zeta & & \\ C & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde  $\zeta$  es un monomorfismo.

**Demostración.** Ver [17, Lema 1.4.16]  $\square$

**Definición 2.10** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana y  $\mathcal{A}$  una subcategoría plena de  $\mathcal{C}$ . Se dice que  $\mathcal{A}$  es una subcategoría de **Serre** si para cualquier sucesión exacta en  $\mathcal{C}$ :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

se tiene que  $B \in \mathcal{A}$  si y solo si  $A, C \in \mathcal{A}$ .

**Lema 2.11** Sea  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ . Entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen.

- (a)  $0 \in \mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}$  es densa en  $\mathcal{C}$ .
- (b) Si  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ , entonces  $X \oplus Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ .
- (c) Si  $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ , entonces todo subobjeto y objeto cociente de  $X$ , pertenece a  $\text{Obj}(\mathcal{A})$ .

**Demostración.**

- (a) Sean  $X \in \mathcal{A}$  y  $X \cong X'$  en  $\mathcal{C}$ . Consideremos la sucesión exacta corta en  $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\cong} X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Entonces  $X', 0 \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  pues  $\mathcal{A}$  es Serre.

- (b) Sean  $X, Y \in \mathcal{A}$ . El coproducto induce una sucesión exacta corta en  $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} X \oplus Y \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0.$$

Dado que  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  y  $\mathcal{A}$  es de Serre, entonces  $X \oplus Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ .

- (c) Sean  $B, E$  subobjeto y objeto cociente de  $X$ , respectivamente. Luego tenemos las siguientes sucesiones exactas cortas en  $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow B \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X/B \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(f) \hookrightarrow X \xrightarrow{f} E \longrightarrow 0.$$

Como  $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  y  $\mathcal{A}$  es de Serre, concluimos que  $B, E \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ .

□

**Observación 2.12** Si  $\mathcal{A}$  es de Serre, entonces  $X \amalg Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  pues  $X \oplus Y \cong X \amalg Y$ .

**Definición 2.13** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma$  una clase de morfismos en  $\mathcal{C}$ . Se dice que  $\Sigma$  es un **sistema multiplicativo** si:

- (a) para  $s : X \longrightarrow Y$  y  $s' : Y \longrightarrow Z$  morfismos en  $\Sigma$ , se tiene que la composición  $s' \circ s \in \Sigma$ ,
- (b) para cada  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  se tiene que  $1_X \in \Sigma$ .

**Definición 2.14** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  un sistema multiplicativo. Se dice que  $\Sigma$  es **calculable a derecha** si:

(a)  $\Sigma$  es **permutable a derecha**, es decir, cada diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & & Y' \\ & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

con  $s \in \Sigma$  puede ser completado a un cuadrado conmutativo  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{s'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{s} & Y, \end{array}$$

con  $s' \in \Sigma$ .

(b)  $\Sigma$  es **simplificable a derecha**, es decir, para cada par de morfismos  $f, g : X \rightarrow Y$ , para los cuales existe  $s : Y \rightarrow Y'$  con  $s \in \Sigma$  tal que  $sf = sg$ , existe  $s' \in \Sigma$  tal que  $fs' = gs'$ .

Dualmente, tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.15** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  un sistema multiplicativo. Se dice que  $\Sigma$  es **calculable a izquierda** si:

(a)  $\Sigma$  es **permutable a izquierda**, es decir, cada diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow s & & \\ Y & & \end{array}$$

con  $s \in \Sigma$  puede ser completado a un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow s & & \downarrow s' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

con  $s' \in \Sigma$ .

(b)  $\Sigma$  es **simplificable a izquierda**, es decir, para cada par de morfismos  $f, g : X \rightarrow Y$  para los cuales existe  $s : X' \rightarrow X$  con  $s \in \Sigma$  tal que  $fs = gs$ , existe  $s' \in \Sigma$  tal que  $s'f = s'g$ .

**Definición 2.16** Se dice que  $\Sigma$  es **calculable** si  $\Sigma$  es simultáneamente calculable a izquierda y a derecha.

**Teorema 2.17** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana y  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre. Definimos

$$\Sigma_{\mathcal{A}} := \{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \text{Ker}(f), \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}\}.$$

Entonces  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es un sistema calculable.

**Demostración.** Para ver que  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es un sistema calculable, tenemos que demostrar que  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es calculable a izquierda y a derecha. Primero veremos que la clase de morfismos  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es un sistema calculable a derecha.

- (a)  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es multiplicativo. Sean  $f, g \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  con  $g : X \rightarrow Y$ ,  $f : Y \rightarrow Z$ . Como  $\mathcal{C}$  es una categoría abeliana, podemos contruir las siguientes sucesiones exactas por el Lema 2.8:

$$(*) : \quad 0 \longrightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{\alpha_1} \text{Ker}(f \circ g) \xrightarrow{\alpha_2} \text{Ker}(f)$$

$$(**) : \quad \text{Coker}(g) \xrightarrow{\beta_1} \text{Coker}(f \circ g) \xrightarrow{\beta_2} \text{Coker}(f) \longrightarrow 0.$$

De la sucesión exacta (\*), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Ker}(f \circ g) & & & & \\ & & \downarrow \theta_1 & \searrow \alpha_2 & & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}(\alpha_2) & \xrightarrow{\theta_2} & \text{Ker}(f) & \twoheadrightarrow & \text{Ker}(f)/\text{Im}(\alpha_2) \longrightarrow 0, \end{array}$$

donde el triángulo es la factorización de  $\alpha_2$  a través de su imagen. Como  $f \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ , tenemos que  $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}$  de donde concluimos que  $\text{Im}(\alpha_2), \text{Ker}(f)/\text{Im}(\alpha_2) \in \mathcal{A}$  pues  $\mathcal{A}$  es subcategoría de Serre.

De la sucesión exacta (\*\*), tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglón exacto

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\beta_1) & \hookrightarrow & \text{Coker}(g) & \xrightarrow{\mu_1} & \text{Im}(\beta_1) \longrightarrow 0 \\ & & & & \searrow \beta_1 & & \downarrow \mu_2 \\ & & & & & & \text{Coker}(f \circ g), \end{array}$$

donde el triángulo es la factorización de  $\beta_1$  a través de su imagen. Como  $g \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  se tiene que  $\text{Coker}(g) \in \mathcal{A}$ . De donde concluimos que  $\text{Im}(\beta_1), \text{Ker}(\beta_1) \in \mathcal{A}$  pues  $\mathcal{A}$  es una subcategoría de Serre.

Observemos que tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{\alpha_1} \text{Ker}(f \circ g) \xrightarrow{\theta_1} \text{Im}(\alpha_2) \longrightarrow 0$$

Ya que  $\text{Ker}(\theta_1) = \text{Ker}(\theta_2 \circ \theta_1)$  por ser  $\theta_2$  un monomorfismo y  $\text{Ker}(\theta_2 \circ \theta_1) = \text{Ker}(\alpha_2) = \text{Im}(\alpha_1) = \alpha_1$ .

De esta sucesión exacta y del hecho de que  $\text{Im}(\alpha_2), \text{Ker}(g) \in \mathcal{A}$ , concluimos que  $\text{Ker}(f \circ g) \in \mathcal{A}$ .

También tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \text{Im}(\beta_1) \xrightarrow{\mu_2} \text{Coker}(f \circ g) \xrightarrow{\beta_2} \text{Coker}(f) \longrightarrow 0,$$

donde  $\text{Im}(\beta_1), \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{A}$  es de Serre, concluimos que  $\text{Coker}(f \circ g) \in \mathcal{A}$ . Probándose que  $f \circ g \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ .

- (b) Todos los morfismo identidad están en  $\Sigma_{\mathcal{A}}$ .

En efecto, dado que  $1_A : A \rightarrow A$  es un isomorfismo para cada  $A \in \mathcal{C}$  se tiene que  $\text{Ker}(1_A) = \text{Coker}(1_A) = 0$ . En consecuencia,  $\text{Ker}(1_A)$  y  $\text{Coker}(1_A)$  están en  $\mathcal{A}$ . Por lo tanto,  $1_A \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ .

- (c) El sistema multiplicativo es permutable a derecha. Consideremos el siguiente diagrama con  $f \in \Sigma_{\mathcal{A}}$

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

Tomando el pullback, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\ \downarrow \bar{g} & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

Por Lema 2.7, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\bar{f}) & \xrightarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\bar{f}} & B \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f) & \xrightarrow{\quad} & C & \xrightarrow{f} & D. \end{array}$$

De este diagrama tenemos que  $\text{Ker}(f) \cong \text{Ker}(\bar{f})$  y sabemos que  $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}$ , por lo que  $\text{Ker}(\bar{f}) \in \mathcal{A}$ .

Por otro lado, por Proposición 2.9, tenemos el siguiente diagrama conmu-

tativo y exacto donde  $\varphi$  es un monomorfismo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\bar{f}} & B & \longrightarrow & \text{Coker}(\bar{f}) \\ \downarrow \bar{g} & & \downarrow g & & \downarrow \varphi \\ C & \xrightarrow{f} & D & \longrightarrow & \text{Coker}(f). \end{array}$$

Lo cual implica que  $\text{Coker}(\bar{f})$  es un subobjeto de  $\text{Coker}(f)$ . Como  $\text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}$  es de Serre, tenemos que  $\text{Coker}(\bar{f}) \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto,  $\bar{f} \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ .

(d)  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es simplificable a derecha.

Ahora sean  $f, g : X \rightarrow Y$  morfismos en  $\mathcal{C}$  tal que existe  $s : Y \rightarrow Z$  con  $s \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ , que cumple que  $s \circ f = s \circ g$ . Sea  $\psi = \text{Ker}(f - g)$ . Por lo que  $(f - g) \circ \psi = 0$  y entonces  $f \circ \psi = g \circ \psi$ . Veamos que  $\psi \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ .

En efecto, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f - g) & \xrightarrow{\psi} & X & \xrightarrow{f - g} & Y & \xrightarrow{\omega} & \text{Coker}(f - g) \\ & & & & \downarrow \sigma_1 & & \uparrow \sigma_2 & & \\ & & & & \text{Coker}(\psi) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ker}(\omega), & & \end{array}$$

con  $\omega = \text{Coker}(f - g)$ . Por la propiedad universal del cokernel, existe un único morfismo  $h$  tal que el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\omega} & \text{Coker}(f - g) \\ & \searrow s & \downarrow h \\ & & Z. \end{array}$$

Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\omega) & \xrightarrow{\sigma_2} & Y & \xrightarrow{\omega} & \text{Coker}(f - g) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h' & & \parallel & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(s) & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{s} & Z & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde  $h'$  es un monomorfismo. Como  $s \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  tenemos que  $\text{Ker}(s) \in \mathcal{A}$ . Luego, tenemos que  $\text{Ker}(\omega) \in \mathcal{A}$  ya que  $\mathcal{A}$  es una subcategoría de Serre y  $h'$  es un monomorfismo.

Dado que  $\text{Coker}(\psi) \cong \text{Ker}(\omega)$  concluimos que  $\text{Coker}(\psi) \in \mathcal{A}$ . Finalmente, como  $\psi$  es un monomorfismo tenemos que  $0 = \text{Ker}(\psi) \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto  $\psi \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  y así que  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es calculable a derecha.

De manera dual, se prueba que  $\Sigma_{\mathcal{A}}$  es calculable a izquierda.  $\square$

## 2.2. Categoría $\mathcal{L}(X, Y)$

Sean  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana y  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ , para cada par de objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$  construyamos la categoría  $\mathcal{L}(X, Y)$  como sigue:

- (a) Los objetos de  $\mathcal{L}(X, Y)$  son pares  $((X', u_{X'}^X), (Y', u_{Y'}^Y)) \in \text{Sub}(X) \times \text{Sub}(Y)$  (ver Definición 1.33) donde  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  y  $u_{Y'}^Y : Y' \rightarrow Y$  son monomorfismos tales que  $\text{Coker}(u_{X'}^X) = X/X' \in \mathcal{A}$  y  $Y' \in \mathcal{A}$ .
- (b) Definimos los morfismos en  $\mathcal{L}(X, Y)$  :

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}(X, Y)} \left( \left( (X', u_{X'}^X), (Y', u_{Y'}^Y) \right), \left( (X'', u_{X''}^X), (Y'', u_{Y''}^Y) \right) \right) = \{ (\alpha, \beta) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X'', X') \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Y'') \mid u_{X'}^X \circ \alpha = u_{X''}^X, u_{Y''}^Y \circ \beta = u_{Y'}^Y \}.$$

**Notación 2.18** En muchos lugares en lo que sigue, para evitar sobrecargar la notación, escribiremos  $(X', Y')$  en lugar de  $\left( (X', u_{X'}^X), (Y', u_{Y'}^Y) \right)$ , sobreentendiendo que existen monomorfismos  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  y  $u_{Y'}^Y : Y' \rightarrow Y$  con las propiedades que  $\text{Coker}(u_{X'}^X) = X/X' \in \mathcal{A}$  y  $Y' \in \mathcal{A}$ . También al morfismo  $(\alpha, \beta)$  lo representaremos como

$$(\alpha, \beta) : (X', Y') \longrightarrow (X'', Y'').$$

**Observación 2.19** Notemos que  $|\text{Hom}_{\mathcal{L}(X, Y)} \left( (X', Y'), (X'', Y'') \right)| \leq 1$ . En efecto, sean  $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \text{Hom}_{\mathcal{L}(X, Y)} \left( (X', Y'), (X'', Y'') \right)$ . Entonces  $u_{X'}^X \circ \alpha = u_{X''}^X = u_{X'}^X \circ \alpha'$  y  $u_{Y''}^Y \circ \beta = u_{Y''}^Y = u_{Y''}^Y \circ \beta'$ . Como  $u_{X'}^X$  y  $u_{Y''}^Y$  son monomorfismos, tenemos que  $\alpha = \alpha'$  y  $\beta = \beta'$ . Es decir, tenemos que si existe un morfismo  $(\alpha, \beta) : (X', Y') \longrightarrow (X'', Y'')$ , éste es único.

**Lema 2.20** Sea  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ .

- (a) Sean  $u_{X_1}^X : X_1 \rightarrow X$  y  $u_{X_2}^X : X_2 \rightarrow X$  monomorfismos en  $\mathcal{C}$  tales que  $\text{Coker}(u_{X_1}^X) = \frac{X}{X_1}, \text{Coker}(u_{X_2}^X) = \frac{X}{X_2} \in \mathcal{A}$ . Entonces, el monomorfismo  $i = u_{X_1}^X \circ \mu_1 = u_{X_2}^X \circ \mu_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X$  es tal que  $\text{Coker}(i) = \frac{X}{X_1 \cap X_2} \in \mathcal{A}$ , donde  $\mu_1 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1$  y  $\mu_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2$  son las inclusiones canónicas.
- (b) Sean  $u_{Y_1}^Y : Y_1 \rightarrow Y$  y  $u_{Y_2}^Y : Y_2 \rightarrow Y$  monomorfismos en  $\mathcal{C}$  tales que  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}$ . Entonces existe un monomorfismo  $\mu : Y_1 + Y_2 \rightarrow Y$  tal que  $Y_1 + Y_2 \in \mathcal{A}$  y monomorfismos  $\delta_i : Y_i \rightarrow Y_1 + Y_2$  tales que  $\mu \delta_i = u_{Y_i}^Y$ , para  $i = 1, 2$ .

(c) Sean  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  objetos en  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Entonces existen únicos morfismos en  $\mathcal{L}(X, Y)$

$$\begin{array}{ccc} (X_1, Y_1) & & (X_2, Y_2) \\ & \searrow^{(\mu_1, \delta_1)} & \swarrow_{(\mu_2, \delta_2)} \\ & (X_1 \cap X_2, Y_1 + Y_2) & \end{array}$$

**Demostración.**

(a) y (b) Sean  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  objetos en  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Luego, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{\mu_1} & X_1 & \longrightarrow & \frac{X_1}{X_1 \cap X_2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu_2 & \text{pullback} & \downarrow u_{X_1}^X & & \downarrow \theta \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{u_{X_2}^X} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde  $\theta$  es un monomorfismo (ver la Proposición 2.9). Como  $\frac{X}{X_2} \in \mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}$  es subcategoría de Serre, tenemos que  $\frac{X_1}{X_1 \cap X_2} \in \mathcal{A}$ .

Ahora, definamos  $i : X_1 \cap X_2 \rightarrow X$  como  $i := u_{X_1}^X \circ \mu_1$ . Afirmamos que  $\frac{X}{X_1 \cap X_2} \in \mathcal{A}$ . En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{i} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_1 \cap X_2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mu_1 & & \parallel & & \downarrow p \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{u_{X_1}^X} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_1} \longrightarrow 0, \end{array}$$

donde  $p$  es un epimorfismo. Por el Lema de la Serpiente, tenemos que  $\text{Ker}(p) \simeq \text{Coker}(\mu_1) = \frac{X_1}{X_1 \cap X_2}$ . Por lo tanto,  $\text{Ker}(p) \in \mathcal{A}$ . De la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(p) \longrightarrow \frac{X}{X_1 \cap X_2} \xrightarrow{p} \frac{X}{X_1} \longrightarrow 0$$

concluimos que  $\frac{X}{X_1 \cap X_2} \in \mathcal{A}$  ya que  $\text{Ker}(p) \in \mathcal{A}$ ,  $\frac{X}{X_1} \in \mathcal{A}$ .

(c) Consideremos las inclusiones  $u_{Y_1}^Y : Y_1 \rightarrow Y$  y  $u_{Y_2}^Y : Y_2 \rightarrow Y$ . Tenemos que la propiedad del coproducto, induce un morfismo  $\psi : Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow Y$  tal



que  $\psi \circ \gamma_i = u_{Y_i}^Y$  para  $i = 1, 2$  donde  $\gamma_i : Y_i \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$  son las inclusiones canónicas.

Consideremos la factorización de  $\psi$  a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} & Y_1 + Y_2 & \\ \pi \nearrow & & \searrow \mu \\ Y_1 \oplus Y_2 & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

Notemos que como  $\mu(\pi\gamma_i) = \psi\gamma_i = u_{Y_i}^Y$  para  $i = 1, 2$  y cada  $u_{Y_i}^Y$  es un monomorfismo, tenemos que  $\delta_i := \pi\gamma_i : Y_i \rightarrow Y_1 + Y_2$  es un monomorfismo para cada  $i = 1, 2$ .

Por el inciso (a) y (b), tenemos que  $i : X_1 \cap X_2 \rightarrow X$  y  $\mu : Y_1 + Y_2 \rightarrow Y$  son monomorfismos en  $\mathcal{C}$  que satisfacen que  $\frac{X}{X_1 \cap X_2}, Y_1 + Y_2 \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto,  $((X_1 \cap X_2, i), (Y_1 + Y_2, \mu)) \in \mathcal{L}(X, Y)$ . También por (a) y (b), tenemos que el par de morfismos  $(\mu_1, \delta_1)$  satisface que  $u_{Y_1}^Y \circ \mu_1 = i$  y  $\mu\delta_1 = u_{Y_1}^Y$ . Por lo tanto, tenemos el morfismo  $(\mu_1, \delta_1) : (X_1, Y_1) \rightarrow (X_1 \cap X_2, Y_1 + Y_2)$  en  $\mathcal{L}(X, Y)$ . De manera análoga, se tiene el morfismo  $(\mu_2, \delta_2) : (X_2, Y_2) \rightarrow (X_1 \cap X_2, Y_1 + Y_2)$  en  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

□

**Definición 2.21** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria. Decimos que  $\mathcal{C}$  es una categoría *casí-directa a izquierda* si cumple las siguientes condiciones.

(a) Cualquier diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \uparrow & \\ A & \longrightarrow & C, \end{array}$$

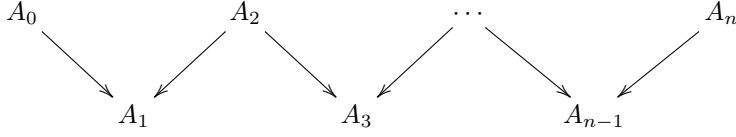
se puede completar a un cuadrado conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & D \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & C. \end{array}$$

(b) Para cada pareja de morfismos  $u, v : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$ , existe un morfismo  $w : B \rightarrow C$  tal que  $wu = vw$ .

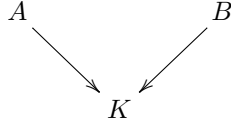
**Definición 2.22** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Se dice que  $\mathcal{C}$  es *conexa* si para cualesquiera dos objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  existe una cantidad finita de objetos  $A_0, A_1, \dots$ ,

$A_n$  y un diagrama de la forma



con  $A_0 = A$  y  $A_n = B$ , para algún  $n$ .

**Lema 2.23** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría casi-directa a izquierda. Entonces,  $\mathcal{C}$  es conexa si y solo si para cada par de objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  existe un objeto  $K \in \mathcal{C}$  y un diagrama de la forma*



**Demostración.** Ver [17, Lema 2.2.9].  $\square$

**Proposición 2.24** *La categoría  $\mathcal{L}(X, Y)$  es casi-directa a izquierda y conexa.*

**Demostración.** Sean  $(a_1, b_1) : (X', Y') \rightarrow (X_1, Y_1)$  y  $(a_2, b_2) : (X', Y') \rightarrow (X_2, Y_2)$  morfismos en  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Consideremos los morfismos canónicos dados en el Lema 2.20(c),  $(\mu_1, \delta_1) : (X_1, Y_1) \rightarrow (X_1 \cap X_2, Y_1 + Y_2)$  y  $(\mu_2, \delta_2) : (X_2, Y_2) \rightarrow (X_1 \cap X_2, Y_1 + Y_2)$ . Por Observación 2.19, tenemos que el siguiente diagrama conmuta (por la unicidad de un morfismo de un objeto a otro en  $\mathcal{L}(X, Y)$ )

$$\begin{array}{ccc}
 (X_1, Y_1) & \xrightarrow{(\mu_1, \delta_1)} & (X_1 \cap X_2, Y_1 + Y_2) \\
 (a_1, b_1) \uparrow & & \uparrow (\mu_2, \delta_2) \\
 (X', Y') & \xrightarrow{(a_2, b_2)} & (X_2, Y_2)
 \end{array}$$

Ahora bien, de la Observación 2.19, tenemos que el inciso (b) de la Definición 2.21 también es válido. Por lo tanto  $\mathcal{L}(X, Y)$  es casi-directa a izquierda. La conexidad se sigue del Lema 2.23 y el Lema 2.20.  $\square$

**Proposición 2.25** *Sean  $\mathcal{C}$  un categoría abeliana localmente pequeña y  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\mathcal{L}(X, Y)$  es una categoría pequeña, para cualquier  $X, Y \in \mathcal{C}$ .*

**Demostración.** Sean  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  y  $u_{X''}^X : X'' \rightarrow X$  monomorfismos que representan la misma clase en  $\text{Sub}(X)$  (es decir, existe isomorfismo  $\alpha : X' \rightarrow X''$  tal que  $u_{X''}^X \alpha = u_{X'}^X$ ). Entonces  $\text{Coker}(u_{X'}^X) \cong \text{Coker}(u_{X''}^X)$ . Como  $\mathcal{A}$  es cerrada por isomorfismos, tenemos que las siguientes clases están bien

definidas:  $L_X := \{(X', u_{X'}^X) \in \text{Sub}(X) \mid \text{Coker}(u_{X'}^X) \in \mathcal{A}\}$  y  $L_Y := \{(Y', u_{Y'}^Y) \in \text{Sub}(Y) \mid Y' \in \mathcal{A}\}$ . Por la Definición 1.33, tenemos que  $L_X$  y  $L_Y$  son conjuntos y además tenemos que  $\mathcal{L}(X, Y) = L_X \times L_Y$ . Por lo tanto  $\mathcal{L}(X, Y)$  es una categoría pequeña.  $\square$

### 2.3. El funtor $q(X, Y) : \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow \mathbf{Ab}$

Sean  $\mathcal{C}$  un categoría abeliana localmente pequeña y  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ ; Sean  $X, Y \in \mathcal{C}$ , definamos el funtor

$$q(X, Y) : \mathcal{L}(X, Y) \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

como sigue:

- (a)  $q(X, Y)(X', Y') := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \frac{Y}{Y'})$  para  $(X', Y') \in \mathcal{L}(X, Y)$
- (b) dado  $(u_{X''}^{X'}, u_{Y''}^{Y'}) : (X', Y') \longrightarrow (X'', Y'')$  definimos

$$q(X, Y)(u_{X''}^{X'}, u_{Y''}^{Y'}) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X', \frac{Y}{Y'}\right) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X'', \frac{Y}{Y''}\right)$$

como sigue: si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \frac{Y}{Y'})$  definimos

$$q(X, Y)(u_{X''}^{X'}, u_{Y''}^{Y'})(f) := \theta_{Y''}^{Y'} \circ f \circ u_{X''}^{X'} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X'', \frac{Y}{Y''}\right),$$

donde  $\theta_{Y''}^{Y'}$  es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u_{Y'}^Y} & Y & \xrightarrow{p_{Y'}^Y} & \frac{Y}{Y'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u_{Y''}^{Y'} & & \parallel & & \downarrow \theta_{Y''}^{Y'} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y'' & \xrightarrow{u_{Y''}^Y} & Y & \xrightarrow{p_{Y''}^Y} & \frac{Y}{Y''} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

**Definición 2.26** Consideremos el siguiente unión disjunta de conjuntos

$$\mathbb{X} := \bigsqcup_{(X', Y') \in \mathcal{L}(X, Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y/Y').$$

Notemos que un elemento de  $\mathbb{X}$ , consta de un morfismo  $f : X_f \longrightarrow Y/Y_f$  para algún  $(X_f, Y_f) \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pero  $(X_f, Y_f) \in \mathcal{L}(X, Y)$ , quiere decir que existen monomorfismos  $u_f : X_f \rightarrow X$  y  $\omega_f : Y_f \rightarrow Y$  tal que  $\text{Coker}(u_f) = \frac{X}{X_f} \in \mathcal{A}$  y  $Y_f \in \mathcal{A}$ .

Sean  $f : X_f \longrightarrow Y/Y_f$  y  $g : X_g \longrightarrow Y/Y_g$  elementos de  $\mathbb{X}$ . Se define una



**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Si  $f \sim g$  sabemos que existe  $\left((X', u_{X'}^X), (Y', u_{Y'}^Y)\right) \in \mathcal{L}(X, Y)$  y morfismos en  $\mathcal{L}(X, Y)$

$$\begin{array}{ccc} (X_f, Y_f) & & (X_g, Y_g) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (u_{X'}^{X_f}, u_{Y'}^{Y_f}) & (u_{X'}^{X_g}, u_{Y'}^{Y_g}) \\ & & (X', Y') \end{array}$$

tales que

$$q(X, Y)(u_{X'}^{X_f}, u_{Y'}^{Y_f})(f) = q(X, Y)(u_{X'}^{X_g}, u_{Y'}^{Y_g})(g).$$

Luego, podemos construir el diagrama (\*) con las propiedades deseadas.

( $\Leftarrow$ ). Ahora, supongamos que existe el diagrama (\*) con las propiedades (a) y (b). Como el monomorfismo  $u_{X'}^{X_f} := u_f \circ u_{X'}^{X_f}$  satisface que  $\text{Coker}(u_{X'}^{X_f}) \in \mathcal{A}$  y el monomorfismo  $u_{Y'}^{Y_f} : Y' \rightarrow Y$  satisface que  $Y' \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\left((X', u_{X'}^{X_f}), (Y', u_{Y'}^{Y_f})\right) \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Como  $u_{X'}^X = u_f \circ u_{X'}^{X_f} = u_g \circ u_{X'}^{X_g}$  y el diagrama (\*) conmuta, tenemos morfismos en  $\mathcal{L}(X, Y)$

$$\begin{array}{ccc} (X_f, Y_f) & & (X_g, Y_g) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (u_{X'}^{X_f}, u_{Y'}^{Y_f}) & (u_{X'}^{X_g}, u_{Y'}^{Y_g}) \\ & & (X', Y'). \end{array}$$

También, dado que el pentágono del diagrama (\*) conmuta, tenemos que

$$\theta_{Y'}^{Y_f} \circ f \circ u_{X'}^{X_f} = \theta_{Y'}^{Y_g} \circ g \circ u_{X'}^{X_g}.$$

Por lo tanto

$$q(X, Y)(u_{X'}^{X_f}, u_{Y'}^{Y_f})(f) = q(X, Y)(u_{X'}^{X_g}, u_{Y'}^{Y_g})(g).$$

Probándose que  $f \sim g$ .  $\square$

**Teorema 2.28** Sean  $\mathcal{C}$  un categoría abeliana localmente pequeña y  $\mathcal{A}$  subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ . Entonces, para  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,

$$\varinjlim q(X, Y) = \frac{\bigsqcup_{(X', Y') \in \mathcal{L}(X, Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y/Y')}{\sim}.$$

**Demostración.** De la prueba del [17, Teorema 2.2.10], tenemos que la relación dada en la Definición 2.26 es de equivalencia. Además, como  $\mathcal{L}(X, Y)$  es casi-directa y conexa se tiene que

$$\varinjlim q(X, Y) = \frac{\bigsqcup_{(X', Y') \in \mathcal{L}(X, Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y/Y')}{\sim},$$

donde  $\sim$  es la relación dada en la Definición 2.26.  $\square$

**Notación 2.29** (a) Para  $X, Y \in \mathcal{C}$ , consideremos

$$\mathbb{X} := \bigsqcup_{(X', Y') \in \mathcal{L}(X, Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y/Y')$$

Recordemos que un elemento de  $\mathbb{X}$  queda determinado por la siguiente información: un morfismo  $f : X_f \longrightarrow Y/Y_f$ , para algún  $(X_f, Y_f) \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pero  $(X_f, Y_f) \in \mathcal{L}(X, Y)$ , quiere decir que existen monomorfismos  $u_f : X_f \rightarrow X$  y  $\omega_f : Y_f \rightarrow Y$  tales que  $\text{Coker}(u_f) = \frac{X}{X_f} \in \mathcal{A}$  y  $Y_f \in \mathcal{A}$ . Sea  $p_f : Y \rightarrow \frac{Y}{Y_f}$  tal que  $p_f = \text{Coker}(\omega_f)$ . Notemos que  $p_f$  determina de manera única a  $\omega_f$ , como  $\omega_f = \text{Ker}(p_f)$ . Entonces, dar un monomorfismo  $\omega : Y_f \rightarrow Y$ , con  $Y_f \in \mathcal{A}$ , es equivalente a dar un epimorfismo  $p_f : Y \rightarrow \frac{Y}{Y_f}$  tal que  $\text{Ker}(p_f) = Y_f \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto, un elemento de  $\mathbb{X}$  lo escribiremos como el triple

$$F = (u_f : f : p_f)$$

donde

- (i)  $f : X_f \rightarrow \frac{Y}{Y_f}$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ ;
- (ii)  $u_f : X_f \rightarrow X$  es un monomorfismo con  $\text{Coker}(u_f) \in \mathcal{A}$  y  $p_f : Y \rightarrow \frac{Y}{Y_f}$  es un epimorfismo con  $\text{Ker}(p_f) \in \mathcal{A}$ , para demostraciones posteriores recordemos que  $p_f$  viene de la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y_f \xrightarrow{\omega_f} Y \xrightarrow{p_f} \frac{Y}{Y_f} \longrightarrow 0.$$

Al triple  $F = (u_f : f : p_f)$ , lo representaremos también por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u_f} & X_f \\ & & \downarrow f \\ & & \frac{Y}{Y_f} \xleftarrow{p_f} Y, \end{array}$$

donde  $\text{Coker}(u_f) \in \mathcal{A}$  y  $\text{Ker}(p_f) \in \mathcal{A}$ .

Tenemos que dos elementos  $(u_f : f : p_f), (u_g : g : p_g) \in \mathbb{X}$  son iguales si y solo si  $u_f = u_g, f = g$  y  $p_f = p_g$ .

(b) Dado que

$$\underline{\lim} q(X, Y) = \frac{\bigsqcup_{(X', Y') \in L_X \times L_Y} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y/Y')}{\sim},$$

a la clase de equivalencia de  $(u_f : f : p_f)$  la denotaremos como  $[u_f : f : p_f]$ . Es decir, a un elemento  $F \in \underline{\lim} q(X, Y)$  lo denotaremos como  $F = [u_p : f : p_f]$ .

Después quedará claro por que hemos escogido esta notación (cuando veamos la segunda construcción de la categoría  $\mathcal{C}_\Sigma$ ). Para más detalles ver la Observación 2.67.

**Lema 2.30** Sea  $[u_f : f : p_f] \in \varinjlim q(X, Y)$ . Sean  $u_{X'}^{X_f} : X' \rightarrow X_f$  un monomorfismo y  $\pi : \frac{Y}{Y_f} \rightarrow Y''$  un epimorfismo tales que  $\text{Coker}(u_f \circ u_{X'}^{X_f}) \in \mathcal{A}$  y  $\text{Ker}(\pi \circ p_f) \in \mathcal{A}$ . Entonces, tenemos que  $[u_f \circ u_{X'}^{X_f} : \pi \circ f \circ u_{X'}^{X_f} : \pi \circ p_f] \in \varinjlim q(X, Y)$  y además

$$[u_f \circ u_{X'}^{X_f} : \pi \circ f \circ u_{X'}^{X_f} : \pi \circ p_f] = [u_f : f : p_f].$$

**Demostración.** En efecto, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & X_f & \xrightarrow{u_f} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_f} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow^{u_{X'}^{X_f}} & & \searrow^f & & & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & Y_f & \xrightarrow{\omega_f} & Y & \xrightarrow{p_f} & \frac{Y}{Y_f} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow^{u_{Y_f}^{Y'}} & & \parallel & & \downarrow^\pi & & \\
 X' & & 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u_{Y'}^Y} & Y & \xrightarrow{\pi \circ p_f} & \frac{Y}{Y'} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u_{Y'}^Y} & Y & \xrightarrow{\pi \circ p_f} & \frac{Y}{Y'} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow^{1_{X'}} & & \downarrow^{\pi \circ f \circ u_{X'}^{X_f}} & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{u_f \circ u_{X'}^{X_f}} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X'} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde  $u_{Y'}^Y : Y' \rightarrow Y$  es un monomorfismo que satisface que  $Y' \in \mathcal{A}$ , se tiene la igualdad  $u_f \circ u_{X'}^{X_f} = (u_f \circ u_{X'}^{X_f}) \circ 1_{X'}$  y  $\text{Coker}(u_f \circ u_{X'}^{X_f}) = \frac{X}{X'} \in \mathcal{A}$ . Por la Proposición 2.27, se tiene que  $[u_f \circ u_{X'}^{X_f} : \pi \circ f \circ u_{X'}^{X_f} : \pi \circ p_f] = [u_f : f : p_f]$ .  $\square$

**Observación 2.31** Notemos que, con lo descrito en la Notación 2.29, tenemos que: si  $(u_f : f : p_f) \sim (u_g : g : p_g)$ , por la Proposición 2.27 podemos construir los siguientes dos diagramas que representan al mismo elemento en  $\mathbb{X}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X \longleftarrow \xrightarrow{\quad} X' & & X \longleftarrow \xrightarrow{\quad} X' \\
 \downarrow^{u_{X'}^{X_f} = u_f \circ u_{X'}^{X_f}} & & \downarrow^{u_{X'}^{X_g} = u_g \circ u_{X'}^{X_g}} \\
 \Gamma & & \Gamma \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{Y}{Y'} \longleftarrow \xrightarrow{\quad} Y, & & \frac{Y}{Y'} \longleftarrow \xrightarrow{\quad} Y, \\
 p_{Y'}^Y = \theta_{Y_f}^{Y'} \circ p_f & & p_{Y'}^Y = \theta_{Y_g}^{Y'} \circ p_g
 \end{array}$$





- (a) Cada objeto  $X \in \mathcal{C}$  determina un único objeto  $\bar{X} \in \mathcal{C}_\Sigma$ .
- (b) Para cada par de objetos  $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{C}_\Sigma$ , definimos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\bar{X}, \bar{Y}) := \varinjlim q(X, Y).$$

- (c) Composición de morfismos en  $\mathcal{C}_\Sigma$ .

Sean  $\Delta = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\bar{X}, \bar{Y})$  y  $F = [u_f : f : p_f] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\bar{Y}, \bar{Z})$ . Queremos definir  $F \circ \Delta : \bar{X} \rightarrow \bar{Z}$ .

Para esto, supongamos que tenemos  $\alpha : X_\alpha \rightarrow Y/Y_\alpha$ , con  $(X_\alpha, Y_\alpha) \in \mathcal{L}(X, Y)$ , y  $f : Y_f \rightarrow Z/Z_f$ , con  $(Y_f, Z_f) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ .

Luego, consideremos el diagrama de intersección

$$\begin{array}{ccc} Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_\alpha \\ \delta_{f,\alpha} \downarrow & & \downarrow u_{Y_\alpha}^Y = \omega_\alpha \\ Y_f & \xrightarrow{\epsilon_{f,\alpha} = u_f} & Y. \end{array}$$

Sabemos que éste diagrama se completa al siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_\alpha & \longrightarrow & \frac{Y_\alpha}{Y_f \cap Y_\alpha} \longrightarrow 0 \\ & & \delta_{f,\alpha} \downarrow & & \downarrow u_{Y_\alpha}^Y \quad I & & \downarrow \mu_1'' \\ 0 & \longrightarrow & Y_f & \xrightarrow{\epsilon_{f,\alpha}} & Y & \longrightarrow & \frac{Y}{Y_f} \longrightarrow 0 \\ & & \xi_{f,\alpha} \downarrow & & \downarrow p_{Y_\alpha}^Y & & \downarrow p'' \\ 0 & \longrightarrow & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} & \longrightarrow & \frac{Y}{Y_f \cup Y_\alpha} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0, \end{array}$$

donde los cuadrados  $I$  y  $II$  son factorizaciones a través de sus imágenes. Por ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \\ \xi_{f,\alpha} \nearrow & & \searrow \epsilon'_{f,\alpha} \\ Y_f & \xrightarrow{p_{Y_\alpha}^Y \circ \epsilon_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} \end{array}$$

es la factorización correspondiente (es decir,  $p_{Y_\alpha}^Y(Y_f) = \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}$ ).

Ahora, consideremos la factorización a través de su imagen de  $f \circ \delta_{f,\alpha}$ :

$$\begin{array}{ccc} & f(Y_f \cap Y_\alpha) & \\ \pi_{f,\alpha} \nearrow & & \searrow v_{f,\alpha} \\ Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{f \circ \delta_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_f}. \end{array}$$

Por un lado, podemos construir el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_f & \longrightarrow & Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha}} & f(Y_f \cap Y_\alpha) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \mu_{f,\alpha} \text{ pull} & & \downarrow v_{f,\alpha} \\ 0 & \longrightarrow & Z_f & \xrightarrow{u_{Z_f}^Z} & Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \zeta_{f,\alpha} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} \\ & & & & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xlongequal{\quad} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Por otro lado, existe  $\lambda_{f,\alpha} : \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} \longrightarrow \frac{Z}{Z_{f,\alpha}}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \downarrow & \\ f(Y_f \cap Y_\alpha) & \xleftarrow{\pi_{f,\alpha}} & Y_f \cap Y_\alpha \\ & \downarrow v_{f,\alpha} & \downarrow \delta_{f,\alpha} \\ \frac{Z}{Z_f} & \xleftarrow{f} & Y_f \\ & \downarrow \varphi_{f,\alpha} & \downarrow \xi_{f,\alpha} \\ \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0. \end{array}$$

Finalmente, tomando pullback del morfismo  $\alpha$  con el morfismo  $\epsilon'_{f,\alpha}$ , obten-

$$\begin{array}{ccccccc}
Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha}} & f(Y_f \cap Y_\alpha) & \xleftarrow{\pi_{f,\alpha}} & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_\alpha \\
\downarrow \mu_{f,\alpha} & & \downarrow v_{f,\alpha} & & \downarrow \delta_{f,\alpha} & & \downarrow \omega_\alpha \\
Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \xleftarrow{f} & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y \\
\downarrow \zeta_{f,\alpha} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} & & \downarrow \xi_{f,\alpha} & & \downarrow p_\alpha \\
\frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xrightarrow{\quad} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} \\
& & & & \uparrow \alpha_f & & \uparrow \alpha \\
& & & & X_{f,\alpha} = \alpha^{-1}\left(\frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}\right) & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_\alpha
\end{array}$$

Figura 2.1: Diagrama de la composición

nemos  $\alpha_f : \alpha^{-1}\left(\frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}\right) \rightarrow \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}$  del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} \\
\alpha_f \uparrow & & \uparrow \alpha \\
X_{f,\alpha} = \alpha^{-1}\left(\frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}\right) & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_\alpha
\end{array}$$

Toda la información esencial anterior, la podemos poner en el diagrama de la figura 2.1.

De esta manera, definimos

$$F \circ \Delta = [u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] := [u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}] : \bar{X} \rightarrow \bar{Z}$$

Veamos que  $[u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\bar{X}, \bar{Y})$ . Para esto, basta ver que  $\text{Coker}(u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}) \in \mathcal{A}$  y que también  $\text{Ker}(\zeta_{f,\alpha}) \in \mathcal{A}$ . En efecto, tenemos el diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X_{f,\alpha} & \xrightarrow{u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_{f,\alpha}} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \epsilon''_{f,\alpha} & & \parallel & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_\alpha & \xrightarrow{u_\alpha} & X & \xrightarrow{p_{X_\alpha}^X} & \frac{X}{X_\alpha} \longrightarrow 0
\end{array}$$

Luego, por el Lema de la Serpiente, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$(**) : 0 \longrightarrow \frac{X_\alpha}{X_{f,\alpha}} \longrightarrow \frac{X}{X_{f,\alpha}} \longrightarrow \frac{X}{X_\alpha} \longrightarrow 0$$

Recordemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_\alpha & \longrightarrow & \frac{Y_\alpha}{Y_f \cap Y_\alpha} \longrightarrow 0 \\
 & & \delta_{f,\alpha} \downarrow & & \downarrow u_{Y_\alpha}^Y \quad \text{I} & & \downarrow \mu_1'' \\
 0 & \longrightarrow & Y_f & \xrightarrow{\epsilon_{f,\alpha}} & Y & \longrightarrow & \frac{Y}{Y_f} \longrightarrow 0 \\
 & & \xi_{f,\alpha} \downarrow & & \text{II} & & \downarrow p'' \\
 0 & \longrightarrow & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} & \longrightarrow & \frac{Y}{Y_f \cup Y_\alpha} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow p_{Y_\alpha}^Y & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

También tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_\alpha & \longrightarrow & \frac{X_\alpha}{X_{f,\alpha}} \longrightarrow 0, \\
 & & \alpha_f \downarrow & \text{pullback} & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha'' \\
 0 & \longrightarrow & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} & \longrightarrow & \frac{Y}{Y_f \cup Y_\alpha} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde  $\alpha''$  es mono por la Proposición 2.9.

Ahora bien, dado que  $(Y_f, Z_f) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ , tenemos que  $\frac{Y}{Y_f} \in \mathcal{A}$  y  $Z_f \in \mathcal{A}$ . Como  $p'' : \frac{Y}{Y_f} \longrightarrow \frac{Y}{Y_f \cup Y_\alpha}$  (del diagrama del 9 de arriba) es un epimorfismo, tenemos que  $\frac{Y}{Y_f \cup Y_\alpha} \in \mathcal{A}$  ya que  $\mathcal{A}$  es de Serre. Por otro lado, como  $\alpha''$  es un monomorfismo, concluimos que  $\frac{X_\alpha}{X_{f,\alpha}} \in \mathcal{A}$ .

De la sucesión  $(**)$  concluimos que  $\frac{X}{X_{f,\alpha}} \in \mathcal{A}$  ya que  $\frac{X}{X_\alpha} \in \mathcal{A}$ , probando que  $\text{Coker}(u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}) \in \mathcal{A}$ .

Ahora bien, como  $\psi_{f,\alpha} : Y_f \cap Y_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  es un monomorfismo y  $Y_\alpha \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $Y_f \cap Y_\alpha \in \mathcal{A}$ . Como  $\pi_{f,\alpha} : Y_f \cap Y_\alpha \rightarrow f(Y_f \cap Y_\alpha)$  es un epimorfismo, tenemos que  $f(Y_f \cap Y_\alpha) \in \mathcal{A}$ . De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z_f \longrightarrow Z_{f,\alpha} \longrightarrow f(Y_f \cap Y_\alpha) \longrightarrow 0$$

concluimos que  $Z_{f,\alpha} \in \mathcal{A}$  pues  $Z_f \in \mathcal{A}$ , probándose que  $\text{Ker}(\zeta_{f,\alpha}) \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto

$$[u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y}).$$



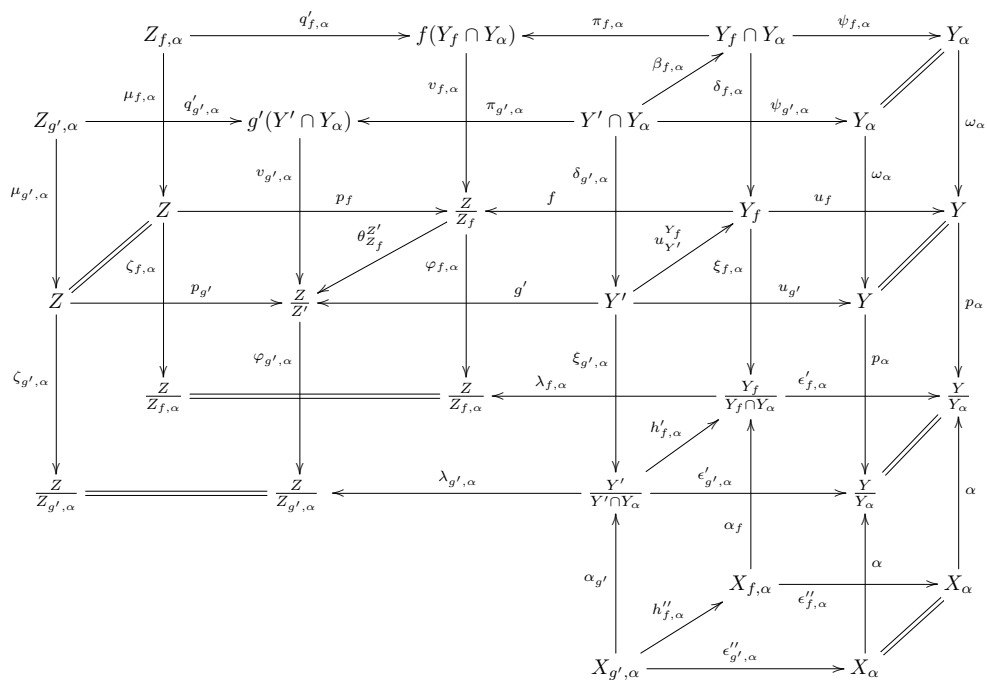


Figura 2.2: Diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
Y' \cap Y_\alpha & & \xrightarrow{\psi_{g',\alpha}} & & Y_\alpha \\
& \searrow \beta_{f,\alpha} & & \searrow \psi_{f,\alpha} & \\
& & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_\alpha \\
& & \downarrow \delta_{f,\alpha} & & \downarrow \omega_\alpha \\
& & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y \\
& \swarrow u_{Y'}^{Y_f} \circ \delta_{g',\alpha} & & & \\
& & & & 
\end{array}$$

Luego, existe  $h'_{f,\alpha} : \frac{Y'}{Y' \cap Y_\alpha} \longrightarrow \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Y' \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\delta_{g',\alpha}} & Y' & \xrightarrow{\xi_{g',\alpha}} & \frac{Y'}{Y' \cap Y_\alpha} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \beta_{f,\alpha} & & \downarrow u_{Y'}^{Y_f} & & \downarrow h'_{f,\alpha} \\
0 & \longrightarrow & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\delta_{f,\alpha}} & Y_f & \xrightarrow{\xi_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\frac{Y'}{Y' \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{h'_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} \\
\downarrow \epsilon'_{g',\alpha} & & \downarrow \epsilon'_{f,\alpha} \\
\frac{Y}{Y_\alpha} & \xlongequal{\quad} & \frac{Y}{Y_\alpha}.
\end{array}$$

En efecto, tenemos que

$$\epsilon'_{f,\alpha} \circ h'_{f,\alpha} \circ \xi_{g',\alpha} = \epsilon'_{f,\alpha} \circ \xi_{f,\alpha} \circ u_{Y'}^{Y_f} = p_\alpha \circ u_f \circ u_{Y'}^{Y_f} = p_\alpha \circ u_{g'} = \epsilon'_{g',\alpha} \circ \xi_{g',\alpha},$$

y como  $\xi_{g',\alpha}$  es un epimorfismo, se sigue que

$$\epsilon'_{f,\alpha} \circ h'_{f,\alpha} = \epsilon'_{g',\alpha}.$$

Como  $\epsilon'_{f,\alpha} \circ h'_{f,\alpha} \circ \alpha_{g'} = \epsilon'_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} = \alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha}$ , se tiene que existe  $h''_{f,\alpha} : X_{g',\alpha} \longrightarrow X_{f,\alpha}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
X_{g',\alpha} & & \xrightarrow{\epsilon''_{g',\alpha}} & & X_\alpha \\
& \searrow h''_{f,\alpha} & & \searrow \epsilon''_{f,\alpha} & \\
& & X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_\alpha \\
& & \downarrow \alpha_f & & \downarrow \alpha \\
& & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha}. \\
& \swarrow h'_{f,\alpha} \circ \alpha_{g'} & & & \\
& & & & 
\end{array}$$

Finalmente, como  $g' := \theta_{Z_f}^{Z'} \circ f \circ u_{Y'}^{Y_f}$ , obtenemos el diagrama conmutativo de la figura 2.2.

Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 g'(Y' \cap Y_\alpha) & \xrightarrow{a_{f,\alpha}} & I = \frac{Z''}{Z'} & \xleftarrow{p_{f,\alpha}} & f(Y_f \cap Y_\alpha) \\
 \downarrow v_{g',\alpha} & & \downarrow s_{f,\alpha} & & \downarrow v_{f,\alpha} \\
 \frac{Z}{Z'} & \xlongequal{\quad} & \frac{Z}{Z'} & \xleftarrow{\theta_{Z_f}^{Z'}} & \frac{Z}{Z_f} \\
 \downarrow \varphi_{g',\alpha} & & \downarrow r_{f,\alpha} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} \\
 \frac{Z}{Z_{g',\alpha}} & \xrightarrow{b_{f,\alpha}} & D = \frac{Z}{Z''} & \xleftarrow{k'_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

donde  $s_{f,\alpha} \circ p_{f,\alpha}$  es la factorización de  $\theta_{Z_f}^{Z'} \circ v_{f,\alpha}$  a través de su imagen y  $r_{f,\alpha} = \text{Coker}(s_{f,\alpha})$ . Además  $a_{f,\alpha} : g'(Y' \cap Y_\alpha) \rightarrow I$  se construye como sigue: del diagrama en a figura 2.2, tenemos que

$$v_{g',\alpha} \circ \pi_{g',\alpha} = \theta_{Z_f}^{Z'} \circ v_{f,\alpha} \circ \pi_{f,\alpha} \circ \beta_{f,\alpha} = s_{f,\alpha} \circ p_{f,\alpha} \circ \pi_{f,\alpha} \circ \beta_{f,\alpha},$$

y como  $s_{f,\alpha}$  es mono y  $v_{g',\alpha} \circ \pi_{g',\alpha}$  es la factorización a través de su imagen de  $v_{g',\alpha} \circ \pi_{g',\alpha}$ , tenemos que existe  $a_{f,\alpha} : g'(Y' \cap Y_\alpha) \rightarrow I$  tal que  $s_{f,\alpha} \circ a_{f,\alpha} = v_{g',\alpha} \circ \pi_{g',\alpha}$ . Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & I & \\
 p_{f,\alpha} \circ \pi_{f,\alpha} \circ \beta_{f,\alpha} \nearrow & \uparrow & \searrow s_{f,\alpha} \\
 Y' \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \frac{Z}{Z_f} \\
 \pi_{g',\alpha} \searrow & \downarrow & \nearrow v_{g',\alpha} \\
 & g'(Y' \cap Y_\alpha) & 
 \end{array}$$

Además  $k'_{f,\alpha}$  y  $b_{f,\alpha}$  son los morfismos inducidos en el cokernel. Veamos ahora que  $I$  es de la forma deseada, se sigue del diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow s_{f,\alpha} & & \\
 0 & \longrightarrow & Z' & \xrightarrow{u_{Z'}^Z} & Z & \xrightarrow{p_{Z'}^Z} & \frac{Z}{Z'} & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$



Es decir, tenemos que  $\frac{Z''}{Z'} \cong I$ . Por lo tanto, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Z'' & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow A_f & & \downarrow s_{f,\alpha} \\
 0 & \longrightarrow & Z' & \xrightarrow{u_{Z'}^Z} & Z & \xrightarrow{p_{Z'}^Z} & \frac{Z}{Z'} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow B_f & & \downarrow r_{f,\alpha} \\
 & & & & \frac{Z}{Z''} & \equiv & \frac{Z}{Z''}
 \end{array}$$

Luego  $k'_{f,\alpha} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ h'_{f,\alpha} \circ \xi_{g',\alpha} = k'_{f,\alpha} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \xi_{f,\alpha} \circ u_{Y'}^{Y_f} = k'_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ f \circ u_{Y'}^{Y_f} = r_{f,\alpha} \circ \theta_{Z_f}^{Z'} \circ f \circ u_{Y'}^{Y_f} = r_{f,\alpha} \circ g'$  (ver el diagrama en 2.2).

Por otro lado, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 Y' \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\pi_{g',\alpha}} & g'(Y' \cap Y_\alpha) & \xrightarrow{a_{f,\alpha}} & I = \frac{Z''}{Z'} \\
 \delta_{g',\alpha} \downarrow & & \downarrow v_{g',\alpha} & & \downarrow s_{f,\alpha} \\
 Y' & \xrightarrow{g'} & \frac{Z}{Z'} & \equiv & \frac{Z}{Z'} \\
 \xi_{g',\alpha} \downarrow & & \downarrow \varphi_{g',\alpha} & & \downarrow r_{f,\alpha} \\
 \frac{Y'}{Y' \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\lambda_{g',\alpha}} & \frac{Z}{Z_{g',\alpha}} & \xrightarrow{b_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z''}
 \end{array}$$

Es decir,  $b_{f,\alpha} \circ \lambda_{g',\alpha} \circ \xi_{g',\alpha} = r_{f,\alpha} \circ g'$ , y como  $\xi_{g',\alpha}$  es epi, de las dos igualdades anteriores concluimos que  $b_{f,\alpha} \circ \lambda_{g',\alpha} = k'_{f,\alpha} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ h'_{f,\alpha}$ .

Por lo tanto  $b_{f,\alpha} \circ \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} = k'_{f,\alpha} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ h'_{f,\alpha} \circ \alpha_{g'} = k'_{f,\alpha} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f \circ h''_{f,\alpha}$  (ver diagrama en la figura 2.2).

Es decir, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & \longrightarrow & X_{f,\alpha} & \xrightarrow{u_\alpha \circ \epsilon'_{f,\alpha}} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_{f,\alpha}} & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \searrow^{\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f} & & & & & & & \\
& & 0 & \longrightarrow & Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{\mu_{f,\alpha}} & Z & \xrightarrow{\zeta_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow i_f & & \parallel & & \downarrow k'_{f,\alpha} & & \\
X_{g',\alpha} & \xrightarrow{h''_{f,\alpha}} & 0 & \longrightarrow & Z'' & \xrightarrow{A_f} & Z & \xrightarrow{B_f} & \frac{Z}{Z''} & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \uparrow i_{g'} & & \parallel & & \uparrow b_{f,\alpha} & & \\
& & 0 & \longrightarrow & Z_{g',\alpha} & \xrightarrow{\mu_{g',\alpha}} & Z & \xrightarrow{\zeta_{g',\alpha}} & \frac{Z}{Z_{g',\alpha}} & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \uparrow \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} & & & & & & \\
& & 0 & \longrightarrow & X_{g',\alpha} & \xrightarrow{u_\alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha}} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_{g',\alpha}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

En efecto  $B_f = r_{f,\alpha} \circ p_{Z'}^Z = b_{f,\alpha} \circ \varphi_{g',\alpha} \circ p_{Z'}^Z = b_{f,\alpha} \circ \zeta_{g',\alpha}$ . Por otro lado, como  $\zeta_{f,\alpha} = \varphi_{f,\alpha} \circ p_f$  (ver el diagrama en 2.2), tenemos que  $k'_{f,\alpha} \circ \zeta_{f,\alpha} = k'_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ p_f = r_{f,\alpha} \circ \theta_{Z'}^Z \circ p_f = r_{f,\alpha} \circ p_{Z'}^Z = B_f$ . Por lo tanto, los cuadrados derechos de arriba conmutan. Luego, existen los momomorfismos  $i_f$  y  $i_{g'}$  tal que los diagramas de arriba conmutan.

Notemos que, del diagrama de la figura 2.2, tenemos que  $u_\alpha \circ \epsilon'_{f,\alpha} \circ h''_{f,\alpha} = u_\alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha}$ . También, notemos que de la construcción del diagrama de la figura 2.1, se tiene que  $u_\alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha} : X_{g',\alpha} \rightarrow X$  y  $u_\alpha \circ \epsilon'_{f,\alpha} : X_{f,\alpha} \rightarrow X$  son monomorfismos tales que  $\frac{X}{X_{g',\alpha}}, \frac{X}{X_{f,\alpha}} \in \mathcal{A}$ .

Ahora, como  $\psi_{f,\alpha} : Y_f \cap Y_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  es un monomorfismo y  $Y_\alpha \in \mathcal{A}$ , concluimos que  $Y_f \cap Y_\alpha \in \mathcal{A}$ . Como  $\pi_{f,\alpha} : Y_f \cap Y_\alpha \rightarrow f(Y_f \cap Y_\alpha)$  es un epi, obtenemos que  $f(Y_f \cap Y_\alpha) \in \mathcal{A}$ . Como  $p_{f,\alpha} : f(Y_f \cap Y_\alpha) \rightarrow I$  es un epi, concluimos que  $I \in \mathcal{A}$ . Luego, de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z' \longrightarrow Z'' \longrightarrow I \longrightarrow 0,$$

concluimos que  $Z'' \in \mathcal{A}$ . Así,  $B_f : Z \rightarrow \frac{Z}{Z''}$  es un epimorfismo tal que  $\text{Ker}(B_f) \in \mathcal{A}$  y entonces  $((X_{g',\alpha}, u_\alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha}), (Z'', A_f)) \in \mathcal{L}(X, Z)$ . También, tenemos morfismos  $(h''_{f,\alpha}, i_f) : (X_{f,\alpha}, Z_{f,\alpha}) \rightarrow (X_{g',\alpha}, Z'')$  y  $(1, i_{g'}) : (X_{g',\alpha}, Z_{g',\alpha}) \rightarrow (X_{g',\alpha}, Z'')$ , y como el diagrama del pentagono de arriba conmuta, concluimos que

$$[u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}] = [u_\alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha} : \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} : \zeta_{g',\alpha}].$$

Dado que  $g' = \theta_{Z'}^Z \circ f \circ u_{Y'}^{Y_f} = \theta_{Z'}^Z \circ g \circ u_{Y'}^{Y_g}$ , podemos repetir la misma construcción

y se puede concluir que

$$[u_\alpha \circ \epsilon''_{g,\alpha} : \lambda_{g,\alpha} \circ \alpha_g : \zeta_{g,\alpha}] = [u_\alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha} : \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} : \zeta_{g',\alpha}].$$

Por lo tanto

$$[u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}] = [u_\alpha \circ \epsilon''_{g,\alpha} : \lambda_{g,\alpha} \circ \alpha_g : \zeta_{g,\alpha}].$$

Probándose que

$$[u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_g : g : p_g] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha].$$

□

También tenemos el siguiente lema.

**Lema 2.34** Sean  $[u_f : f : p_f] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{Z})$  y  $[u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\beta : \beta : p_\beta] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ . Entonces

$$[u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_f : f : p_f] \circ [u_\beta : \beta : p_\beta]$$

**Demostración.** Sean  $\alpha : X_\alpha \rightarrow Y/Y_\alpha$ ,  $\beta : X_\beta \rightarrow Y/Y_\beta$  y  $f : Y_f \rightarrow Z/Z_f$ , con  $[u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\beta : \beta : p_\beta]$ . Como  $[u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\beta : \beta : p_\beta]$ , existen  $((X', u_{X'}^X), (Y', u_{Y'}^Y)) \in \mathcal{L}(X, Y)$  y morfismos  $(u_{X'}^{X_\alpha}, u_{Y'}^{Y_\alpha}) : (X_\alpha, Y_\alpha) \rightarrow (X', Y')$  y  $(u_{X'}^{X_\beta}, u_{Y'}^{Y_\beta}) : (X_\beta, Y_\beta) \rightarrow (X', Y')$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & X_\alpha & \xrightarrow{u_\alpha} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_\alpha} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \searrow^{u_{X'}^{X_\alpha}} & & \searrow^\alpha & & & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & Y_\alpha & \xrightarrow{u_{Y_\alpha}^Y} & Y & \xrightarrow{p_{Y_\alpha}^Y} & \frac{Y}{Y_\alpha} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow^{u_{Y_\alpha}^{Y'}} & & \parallel & & \downarrow^{\theta_{Y_\alpha}^{Y'}} & & \\
 X' & & 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u_{Y'}^Y} & Y & \xrightarrow{p_{Y'}^Y} & \frac{Y}{Y'} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow^{u_{Y'}^{Y_\beta}} & & \parallel & & \uparrow^{\theta_{Y'}^{Y_\beta}} & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & Y_\beta & \xrightarrow{u_{Y_\beta}^Y} & Y & \xrightarrow{p_{Y_\beta}^Y} & \frac{Y}{Y_\beta} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow^{u_{X'}^{X_\beta}} & & \downarrow^\beta & & & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & X_\beta & \xrightarrow{u_\beta} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_\beta} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde  $u_{X'}^X = u_\alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha} = u_\beta \circ u_{X'}^{X_\beta}$ ,  $\text{Coker}(u_{X'}^X) = \frac{X}{X'} \in \mathcal{A}$  y  $Y' \in \mathcal{A}$ .

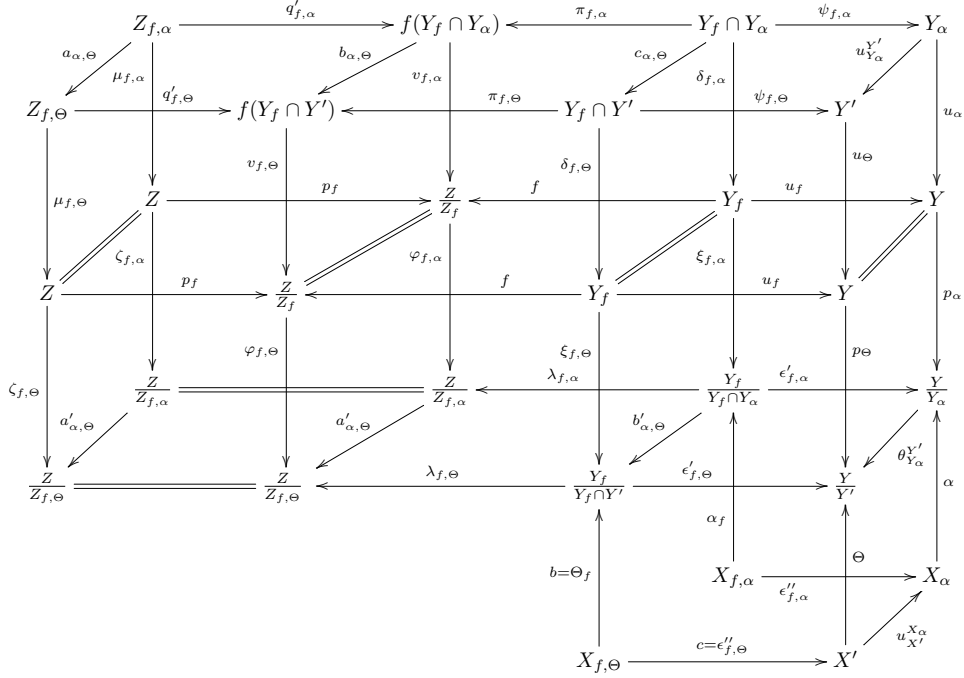


Figura 2.3: Diagrama

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{u_{X'}^X} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X'} \longrightarrow 0 \\
 & & & \searrow \Theta & & & \\
 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{u_{Y'}^Y} & Y & \xrightarrow{p_{Y'}^Y} & \frac{Y}{Y'} \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

donde

$$\Theta := \theta_{Y'_\alpha}^{Y'} \circ \alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha} = \theta_{Y'_\beta}^{Y'} \circ \beta \circ u_{X'}^{X_\beta}.$$

Veamos que podemos construir el diagrama de la figura 2.3. En efecto,

Aseguramos que existe un morfismo  $c_{\alpha,\theta} : Y_f \cap Y_\alpha \longrightarrow Y_f \cap Y'$  tal que el

siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{u_{Y_\alpha}^{Y'} \circ \psi_{f,\alpha}} & & & \\
 & \searrow^{c_{\alpha,\theta}} & & & \\
 & & Y_f \cap Y' & \xrightarrow{\psi_{f,\theta}} & Y' \\
 & \searrow^{\delta_{f,\alpha}} & \downarrow \delta_{f,\theta} & & \downarrow \omega_\theta \\
 & & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y
 \end{array}$$

En efecto, dado que  $\omega_\theta \circ u_{Y_\alpha}^{Y'} \circ \psi_{f,\alpha} = u_\alpha \circ \psi_{f,\alpha} = u_f \circ \delta_{f,\alpha}$ , existe  $b'_{\alpha,\theta}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\delta_{f,\alpha}} & Y_f & \xrightarrow{\xi_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow c_{\alpha,\theta} & & \parallel & & \downarrow b'_{\alpha,\theta} \\
 0 & \longrightarrow & Y_f \cap Y' & \xrightarrow{\delta_{f,\theta}} & Y_f & \xrightarrow{\xi_{f,\theta}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} \\
 b'_{\alpha,\theta} \downarrow & & \downarrow \theta_{Y_\alpha}^{Y'} \\
 \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\theta}} & \frac{Y}{Y'}.
 \end{array}$$

Como,  $\theta_{Y_\alpha}^{Y'} \circ \epsilon'_{f,\alpha} \circ \xi_{f,\alpha} = \theta_{Y_\alpha}^{Y'} \circ p_\alpha \circ u_f = p_\theta \circ u_f = \epsilon'_{f,\theta} \circ \xi_{f,\theta} = \epsilon'_{f,\theta} \circ b'_{\alpha,\theta} \circ \xi_{f,\alpha}$  y como  $\xi_{f,\alpha}$  es epi, tenemos que

$$\theta_{Y_\alpha}^{Y'} \circ \epsilon'_{f,\alpha} = \epsilon'_{f,\theta} \circ b'_{\alpha,\theta}.$$

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & f(Y_f \cap Y') & \\
 \pi_{f,\theta} \circ c_{\alpha,\theta} \nearrow & & \searrow v_{f,\theta} \\
 Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{f \circ \delta_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_f} \\
 \pi_{f,\alpha} \searrow & & \nearrow v_{f,\alpha} \\
 & f(Y_f \cap Y_\alpha) &
 \end{array}$$

Ahora, por la propiedad de la imagen, existe  $b_{\alpha,\theta} : f(Y_f \cap Y_\alpha) \longrightarrow f(Y_f \cap Y')$  tal que el diagrama de arriba conmuta.

De los diagramas de pullback, existe  $a_{\alpha,\theta} : Z_{f,\alpha} \rightarrow Z_{f,\theta}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 Z_{f,\alpha} & & & & \\
 \searrow^{a_{\alpha,\theta}} & & & & \\
 & Z_{f,\theta} & \xrightarrow{q'_{f,\theta}} & f(Y_f \cap Y') & \\
 \mu_{f,\alpha} \searrow & \downarrow \mu_{f,\theta} & & \downarrow v_{f,\theta} & \\
 & Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \\
 & & & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

$\xrightarrow{b_{\alpha,\theta} \circ q'_{f,\alpha}}$  (curved arrow from  $Z_{f,\alpha}$  to  $f(Y_f \cap Y')$ )

pues  $p_f \circ \mu_{f,\alpha} = v_{f,\theta} \circ q'_{f,\alpha} = v_{f,\theta} \circ b_{\alpha,\theta} \circ q'_{f,\alpha}$ . Luego, existe  $a'_{\alpha,\theta}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{\mu_{f,\alpha}} & Z & \xrightarrow{\zeta_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow a_{\alpha,\theta} & & \parallel & & \downarrow a'_{\alpha,\theta} \\
 0 & \longrightarrow & Z_{f,\theta} & \xrightarrow{\mu_{f,\theta}} & Z & \xrightarrow{\zeta_{f,\theta}} & \frac{Z}{Z_{f,\theta}} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Veamos que  $\varphi_{f,\theta} = a'_{\alpha,\theta} \circ \varphi_{f,\alpha}$ . En efecto,  $a'_{\alpha,\theta} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ p_f = a'_{\alpha,\theta} \circ \zeta_{f,\alpha} = \zeta_{f,\theta} = \varphi_{f,\theta} \circ p_f$ , y como  $p_f$  es epi, concluimos que  $a'_{\alpha,\theta} \circ \varphi_{f,\alpha} = \varphi_{f,\theta}$ .

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\lambda_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} \\
 b'_{\alpha,\theta} \downarrow & & \downarrow a'_{\alpha,\theta} \\
 \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} & \xrightarrow{\lambda_{f,\theta}} & \frac{Z}{Z_{f,\theta}}.
 \end{array}$$

En efecto, tenemos que

$$a'_{\alpha,\theta} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \xi_{f,\alpha} = a'_{\alpha,\theta} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ f = \varphi_{f,\theta} \circ f = \lambda_{f,\theta} \circ \xi_{f,\theta} = \lambda_{f,\theta} \circ b'_{\alpha,\theta} \circ \xi_{f,\alpha},$$

y como  $\xi_{f,\alpha}$  es epi, concluimos que  $a'_{\alpha,\theta} \circ \lambda_{f,\alpha} = \lambda_{f,\theta} \circ b'_{\alpha,\theta}$ ; y así obtenemos el diagrama conmutativo de la figura 2.3. Calculemos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc}
 X' \cap X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\tau_{f,\alpha}} & X_{f,\alpha} \\
 \rho_{f,\alpha} \downarrow & & \downarrow \epsilon'_{f,\alpha} \\
 X' & \xrightarrow{u_{X'}^{X_\alpha}} & X_\alpha.
 \end{array}$$

Luego, tenemos las igualdades (ver diagrama en figura 2.3)

$$\begin{aligned}\Theta \circ \rho_{f,\alpha} &= \theta_{Y_\alpha}^{Y'} \circ \alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha} \circ \rho_{f,\alpha} = \theta_{Y_\alpha}^{Y'} \circ \alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} \circ \tau_{f,\alpha} = \theta_{Y_\alpha}^{Y'} \circ \epsilon'_{f,\alpha} \circ \alpha_f \circ \tau_{f,\alpha} \\ &= \epsilon'_{f,\Theta} \circ b'_{\alpha,\Theta} \circ \alpha_f \circ \tau_{f,\alpha}.\end{aligned}$$

De donde existe  $r : X' \cap X_{f,\alpha} \rightarrow X_{f,\Theta}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} X' \cap X_{f,\alpha} & \xrightarrow{b'_{\alpha,\Theta} \circ \alpha_f \circ \tau_{f,\alpha}} & & & \\ & \searrow r & & & \\ & & X_{f,\Theta} & \xrightarrow{\Theta_f} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ & \searrow \rho_{f,\alpha} & \downarrow \epsilon''_{f,\Theta} & & \downarrow \epsilon'_{f,\Theta} \\ & & X' & \xrightarrow{\Theta} & \frac{Y}{Y'} \end{array}$$

Como  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  y  $u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : X_{f,\alpha} \rightarrow X$  son monomorfismos tales que  $\text{Coker}(u_{X'}^X) = X/X'$ ,  $\text{Coker}(u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}) = X/X_{f,\alpha}$  están en  $\mathcal{A}$ , entonces tenemos que  $u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} \circ \tau_{f,\alpha} : X' \cap X_{f,\alpha} \rightarrow X$  es tal que  $\text{Coker}(u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} \circ \tau_{f,\alpha}) = \frac{X}{X' \cap X_{f,\alpha}} \in \mathcal{A}$  (ver el Lema 2.20(a)). Además

$$a'_{\alpha,\Theta} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f \circ \tau_{f,\alpha} = \lambda_{f,\Theta} \circ b'_{\alpha,\Theta} \circ \alpha_f \circ \tau_{f,\alpha} = \lambda_{f,\Theta} \circ \Theta_f \circ r.$$

Como  $Z_{f,\Theta} \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\zeta_{f,\Theta}$  es un epimorfismo tal que  $\text{Ker}(\zeta_{f,\Theta}) \in \mathcal{A}$ . En resumen, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & X_{f,\alpha} & \xrightarrow{u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X_{f,\alpha}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f & & & & & & \\ & & 0 & \longrightarrow & Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{\mu_{f,\alpha}} & Z & \xrightarrow{\zeta_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow a_{\alpha,\Theta} & & \parallel & & \downarrow a'_{\alpha,\Theta} & & \\ X' \cap X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\tau_{f,\alpha}} & 0 & \longrightarrow & Z_{f,\Theta} & \xrightarrow{\mu_{f,\Theta}} & Z & \xrightarrow{\zeta_{f,\Theta}} & \frac{Z}{Z_{f,\Theta}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \parallel 1 & & \parallel & & \parallel 1 & & \\ & & 0 & \longrightarrow & Z_{f,\Theta} & \xrightarrow{\mu_{f,\Theta}} & Z & \xrightarrow{\zeta_{f,\Theta}} & \frac{Z}{Z_{f,\Theta}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow r & & \searrow \lambda_{f,\Theta} \circ \Theta_f & & & & \\ & & 0 & \longrightarrow & X_{f,\Theta} & \xrightarrow{u_\alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha} \circ \epsilon''_{f,\Theta}} & X & \longrightarrow & \frac{X}{X''} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

También, tenemos que  $u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} \circ \tau_{f,\alpha} = u_\alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha} \circ \rho_{f,\alpha} = u_\alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha} \circ \epsilon''_{f,\Theta} \circ r$ . Luego, concluimos que

$$[u_\alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha} \circ \epsilon''_{f,\Theta} : \lambda_{f,\Theta} \circ \Theta_f : \zeta_{f,\Theta}] = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}].$$

De la misma forma tenemos que, haciendo toda la construcción para  $\beta : X_\beta \longrightarrow Y/Y_\beta$  se tiene que

$$[u_\beta \circ u_{X'}^{X_\beta} \circ \epsilon''_{f,\Theta} : \lambda_{f,\Theta} \circ \Theta_f : \zeta_{f,\Theta}] = [u_\beta \circ \epsilon''_{f,\beta} : \lambda_{f,\beta} \circ \beta_f : \zeta_{f,\beta}].$$

Pero como  $u_{X'}^X = u_\beta \circ u_{X'}^{X_\beta} = u_\alpha \circ u_{X'}^{X_\alpha}$  (ver Proposición 2.27), concluimos que

$$[u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}] = [u_\beta \circ \epsilon''_{f,\beta} : \lambda_{f,\beta} \circ \beta_f : \zeta_{f,\beta}].$$

Por lo tanto, usando la transitividad en dicha relación de equivalencia, se tiene que

$$[u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_f : f : p_f] \circ [u_\beta : \beta : p_\beta].$$

□

La siguiente proposición nos dice que la composición no depende de las clases de equivalencia usadas para definirla.

**Proposición 2.35** Sean  $[u_f : f : p_f] = [u_g : g : p_g] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{Z})$  y  $[u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\beta : \beta : p_\beta] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ . Entonces,

$$[u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_g : g : p_g] \circ [u_\beta : \beta : p_\beta]$$

**Demostración.** Por los Lemas 2.33 y 2.34, tenemos que

$$\begin{aligned} [u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] &= [u_g : g : p_g] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \\ &= [u_g : g : p_g] \circ [u_\beta : \beta : p_\beta]. \end{aligned}$$

□

### 2.4.1. Asociatividad de la composición

**Proposición 2.36** Sean  $\Delta = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ ,  $F = [u_f : f : p_f] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{Z})$  y  $H = [u_h : h : p_h] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Z}, \overline{W})$ , representados por  $\alpha : X_\alpha \longrightarrow \frac{Y}{Y_\alpha}$ ,  $f : Y_f \longrightarrow \frac{Z}{Z_f}$  y  $h : Z_h \longrightarrow \frac{W}{W_h}$ , respectivamente. Entonces

$$(HG)\Delta = H(F\Delta)$$

en  $\mathcal{C}_\Sigma$ .



**Demostración.** Primero calculemos la composición  $F\Delta$ . Para esto, consideremos el diagrama de la figura 2.4. Luego, tenemos que  $F \circ \Delta$  está representado por el morfismo

$$\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : X_{f,\alpha} \longrightarrow \frac{Z}{Z_{f,\alpha}}.$$

Es decir, tenemos que

$$F \circ \Delta = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}].$$

Para simplicidad, definamos  $\beta := \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : X_\beta \longrightarrow Z/Z_\beta$ , donde  $X_\beta := X_{f,\alpha}$  y  $Z_\beta := Z_{f,\alpha}$  y también hagamos  $u_\beta := u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}$  y  $p_\beta := \zeta_{f,\alpha}$ . Luego, del diagrama de la figura 2.5, tenemos que la composición  $H \circ (F \circ \Delta)$ , está representado, por el morfismo

$$\lambda_{h,\beta} \circ \beta_h : X_{h,\beta} \longrightarrow \frac{W}{W_{h,\beta}}.$$

Es decir, tenemos que

$$H \circ (F \circ \Delta) = [u_\beta \circ \epsilon''_{h,\beta} : \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h : \zeta_{h,\beta}].$$

Ahora, calculemos la composición  $H \circ F$ . Para esto, consideremos el diagrama de la figura 2.6. Luego, tenemos que  $H \circ F$  está representado por el morfismo

$$\lambda_{h,f} \circ f_h : Y_{h,f} \longrightarrow \frac{W}{W_{h,f}}.$$

Es decir,  $H \circ F = [u_f \circ \epsilon''_{h,f} : \lambda_{h,f} \circ f_h : \zeta_{h,f}]$ . Por simplicidad, definamos  $\theta := \lambda_{h,f} \circ f_h : Y_\theta \longrightarrow \frac{W}{W_\theta}$ , con  $Y_\theta := Y_{h,f}$ ,  $W_\theta = W_{h,f}$ ,  $u_\theta := u_f \circ \epsilon''_{h,f}$  y  $p_\theta := \zeta_{h,f}$ .

Luego, del diagrama de la figura 2.7, tenemos que la composición  $(H \circ F) \circ \Delta$ , está representado, por el morfismo

$$\lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta : X_{\theta,\alpha} \longrightarrow \frac{W}{W_{\theta,\alpha}}.$$

Es decir, tenemos que

$$(H \circ F) \circ \Delta = [u_\alpha \circ \epsilon''_{\theta,\alpha} : \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta : \zeta_{\theta,\alpha}].$$

De la figura 2.5, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_f & \xrightarrow{d} & Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha}} & f(Y_f \cap Y_\alpha) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \mu_{f,\alpha} & & \downarrow v_{f,\alpha} \\ 0 & \longrightarrow & Z_f & \xrightarrow{\omega_f} & Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Notemos que  $\omega_\beta := \mu_{f,\alpha} : Z_{f,\alpha} = Z_\beta \longrightarrow Z$ . Luego, existe  $d'$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_f & \xrightarrow{\omega_f} & Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \parallel & & \downarrow d' & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_\beta & \xrightarrow{\omega_\beta} & Z & \xrightarrow{p_\beta} & \frac{Z}{Z_\beta} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Notemos que la sucesión exacta inferior, del diagrama anterior, coincide con la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z_{f,\alpha} \xrightarrow{\mu_{f,\alpha}} Z \xrightarrow{\zeta_{f,\alpha}} \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} \longrightarrow 0$$

del diagrama de la figura 2.5. Es decir, tenemos que  $\zeta_{f,\alpha} = p_\beta$ .

Ahora bien, del diagrama 2.4 y de los diagramas de arriba, tenemos que  $\varphi_{f,\alpha} : \frac{Z}{Z_f} \longrightarrow \frac{Z}{Z_{f,\alpha}}$  es tal que  $\varphi_{f,\alpha} \circ p_f = \zeta_{f,\alpha} = p_\beta = d' \circ p_f$ ; y como  $p_f$  es epi, tenemos que

$$d' = \varphi_{f,\alpha}.$$

De los diagramas de pullback de la figuras 2.5, 2.6 y de las igualdades  $\omega_\beta \circ d \circ \psi_{h,f} = \omega_f \circ \psi_{h,f} = u_h \circ \delta_{h,f}$  (ver diagrama en figura 2.6), tenemos que existe un morfismo  $c$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} Z_h \cap Z_f & \xrightarrow{d \circ \psi_{h,f}} & Z_\beta & & \\ \downarrow c & \searrow & \downarrow \psi_{h,\beta} & & \\ Z_h \cap Z_\beta & \xrightarrow{\psi_{h,\beta}} & Z_\beta & & \\ \downarrow \delta_{h,\beta} & & \downarrow \omega_\beta & & \\ Z_h & \xrightarrow{u_h} & Z & & \end{array}$$

$\delta_{h,f}$  (curved arrow from  $Z_h \cap Z_f$  to  $Z_h$ )

Luego, existe  $c'$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_h \cap Z_f & \xrightarrow{\delta_{h,f}} & Z_h & \xrightarrow{\xi_{h,f}} & \frac{Z_h}{Z_h \cap Z_f} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow c & & \parallel & & \downarrow c' & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_h \cap Z_\beta & \xrightarrow{\delta_{h,\beta}} & Z_h & \xrightarrow{\xi_{h,\beta}} & \frac{Z_h}{Z_h \cap Z_\beta} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \frac{Z_h}{Z_h \cap Z_f} & \xrightarrow{\epsilon'_{h,f}} & \frac{Z}{Z_f} \\ \downarrow c' & & \downarrow d' \\ \frac{Z_h}{Z_h \cap Z_\beta} & \xrightarrow{\epsilon'_{h,\beta}} & \frac{Z}{Z_\beta} \end{array}$$

En efecto,  $d' \circ \epsilon'_{h,f} \circ \xi_{h,f} = d' \circ p_f \circ u_h = p_\beta \circ u_h = \epsilon'_{h,\beta} \circ \xi_{h,\beta} = \epsilon'_{h,\beta} \circ c' \circ \xi_{h,f}$ ; y como  $\xi_{h,f}$  es epi, tenemos que  $d' \circ \epsilon'_{h,f} = \epsilon'_{h,\beta} \circ c'$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & h(Z_h \cap Z_\beta) & \\ \pi_{h,\beta} \circ c' \nearrow & & \searrow v_{h,\beta} \\ Z_h \cap Z_f & \xrightarrow{h \circ \delta_{h,f}} & \frac{W}{W_h} \\ \pi_{h,f} \searrow & & \nearrow v_{h,f} \\ & h(Z_h \cap Z_f) & \end{array}$$

Luego, por la propiedad de la imagen, existe  $b : h(Z_h \cap Z_f) \rightarrow h(Z_h \cap Z_\beta)$  tal que el diagrama de arriba conmuta.

De los diagramas de pullback de la figuras 2.5, 2.6 y de las igualdades  $p_h \circ \mu_{h,f} = v_{h,f} \circ q'_{h,f} = v_{h,\beta} \circ b \circ q'_{h,f}$ , existe  $a$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} W_{h,f} & & & & \\ & \searrow^{b \circ q'_{h,f}} & & & \\ & & W_{h,\beta} & \xrightarrow{q'_{h,\beta}} & h(Z_h \cap Z_\beta) \\ & \searrow^a & \downarrow \mu_{h,\beta} & & \downarrow v_{h,\beta} \\ & & W & \xrightarrow{p_h} & \frac{W}{W_h} \\ & \searrow^{\mu_{h,f}} & & & \end{array}$$

Luego existe  $a'$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & W_{h,f} & \xrightarrow{\mu_{h,f}} & W & \xrightarrow{\zeta_{h,f}} & \frac{W}{W_{h,f}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \parallel & & \downarrow a' \\ 0 & \longrightarrow & W_{h,\beta} & \xrightarrow{\mu_{h,\beta}} & W & \xrightarrow{\zeta_{h,\beta}} & \frac{W}{W_{h,\beta}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Veamos que  $\varphi_{h,\beta} = a' \circ \varphi_{h,f}$ . En efecto, tenemos que  $a' \circ \varphi_{h,f} \circ p_h = a' \circ \zeta_{h,f} = \zeta_{h,\beta} = \varphi_{h,\beta} \circ p_h$ ; y como  $p_h$  es epi, concluimos que  $\varphi_{h,\beta} = a' \circ \varphi_{h,f}$ . Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha}} & f(Y_f \cap Y_\alpha) & \xleftarrow{\pi_{f,\alpha}} & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_\alpha \\
\downarrow \mu_{f,\alpha} & \text{pullback} & \downarrow v_{f,\alpha} & & \downarrow \delta_{f,\alpha} & \text{pullback} & \downarrow \omega_\alpha \\
Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \xleftarrow{f} & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y \\
\downarrow \zeta_{f,\alpha} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} & & \downarrow \xi_{f,\alpha} & & \downarrow p_\alpha \\
\frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xrightarrow{\quad} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} \\
& & & & \downarrow \alpha_f & \text{pullback} & \downarrow \alpha \\
& & & & X_{f,\alpha} = \alpha^{-1}\left(\frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}\right) & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_\alpha
\end{array}$$

Figura 2.4: Diagrama que calcula  $f \circ \alpha$ 

$$\begin{array}{ccc}
\frac{Z_h}{Z_h \cap Z_f} & \xrightarrow{\lambda_{h,f}} & \frac{W}{W_{h,f}} \\
\downarrow c' & & \downarrow a' \\
\frac{Z_h}{Z_h \cap Z_\beta} & \xrightarrow{\lambda_{h,\beta}} & \frac{W}{W_{h,\beta}}
\end{array}$$

En efecto, tenemos que

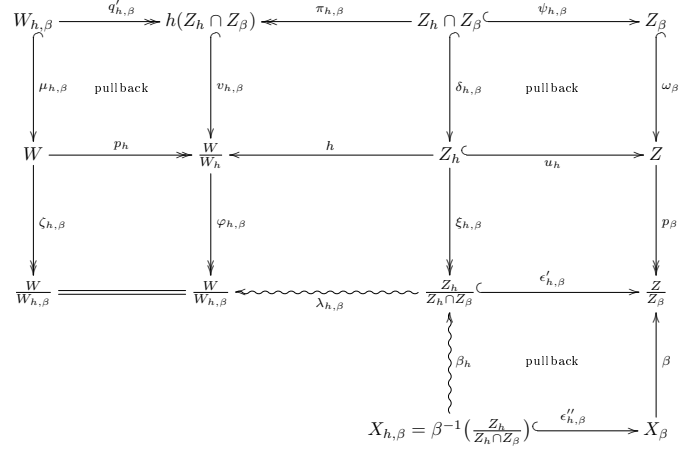
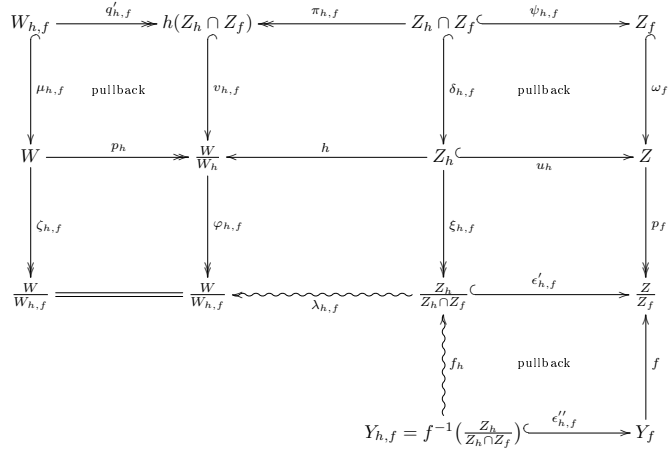
$$a' \circ \lambda_{h,f} \circ \xi_{h,f} = a' \circ \varphi_{h,f} \circ h = \varphi_{h,\beta} \circ h = \lambda_{h,\beta} \circ \xi_{h,\beta} = \lambda_{h,\beta} \circ c' \circ \xi_{h,f};$$

y como  $\xi_{h,f}$  es epi, tenemos que  $a' \circ \lambda_{h,f} = \lambda_{h,\beta} \circ c'$ . De esta forma tenemos el diagrama conmutativo de la figura 2.8, con  $d' = \varphi_{f,\alpha}$ .

Considerando los morfismos  $u_f : Y_f \rightarrow Y$  y  $\epsilon''_{h,f} : Y_{h,f} = Y_\theta \rightarrow Y_f$  de los diagramas en 2.4 y 2.6, definimos la inclusión

$$u_\theta := u_f \circ \epsilon''_{h,f} : Y_{h,f} = Y_\theta \rightarrow Y.$$

(a partir de esta inclusión se construye el diagrama 2.7). Luego por propiedad de pullback y de las igualdades  $u_f \circ \epsilon''_{h,f} \circ \delta_{\theta,\alpha} = u_\theta \circ \delta_{\theta,\alpha} = \omega_\alpha \circ \psi_{\theta,\alpha}$ , existe  $r$

Figura 2.5: Diagrama que calcula  $h \circ \beta$ Figura 2.6: Diagrama que calcula  $h \circ f$

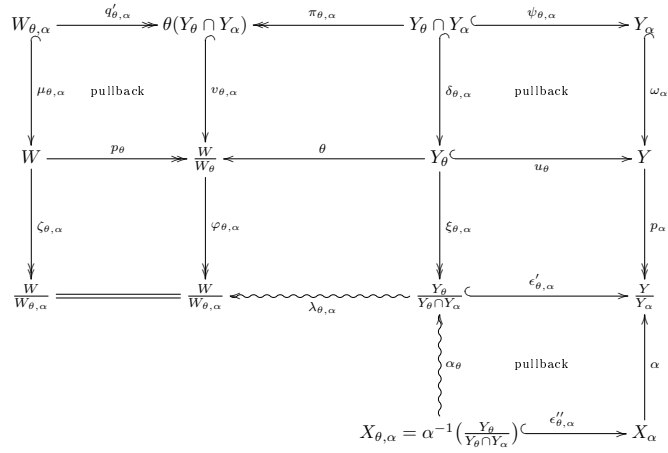


Figura 2.7: Diagrama que calcula  $\theta \circ \alpha$

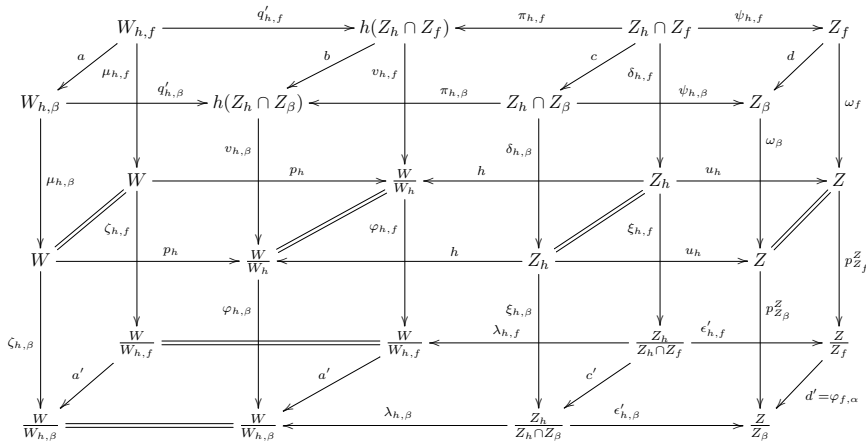


Figura 2.8: Diagrama

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_{\theta,\alpha} & & \xrightarrow{\psi_{\theta,\alpha}} & & Y_{\alpha} \\
 & \searrow r & & \searrow \psi_{f,\alpha} & \\
 & & Y_f \cap Y_{\alpha} & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_{\alpha} \\
 & & \downarrow \delta_{f,\alpha} & & \downarrow \omega_{\alpha} \\
 & & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y.
 \end{array}$$

$\epsilon''_{h,f} \circ \delta_{\theta,\alpha}$  (curved arrow from  $Y_{\theta,\alpha}$  to  $Y_f$ )

Por propiedad de cokernels, existe  $\rho_{\theta,f}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y_{\theta} \cap Y_{\alpha} & \xrightarrow{\delta_{\theta,\alpha}} & Y_{\theta} & \xrightarrow{\xi_{\theta,\alpha}} & \frac{Y_{\theta}}{Y_{\theta} \cap Y_{\alpha}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow r & & \downarrow \epsilon''_{h,f} & & \downarrow \rho_{\theta,f} \\
 0 & \longrightarrow & Y_f \cap Y_{\alpha} & \xrightarrow{\delta_{f,\alpha}} & Y_f & \xrightarrow{\xi_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_{\alpha}} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Por otro lado, tenemos que  $\epsilon'_{\theta,\alpha}$  es el único morfismo tal que  $p_{\alpha} \circ u_{\theta} = \epsilon'_{\theta,\alpha} \circ \xi_{\theta,\alpha}$ . Y como  $\epsilon'_{f,\alpha} \circ \rho_{\theta,f} \circ \xi_{\theta,\alpha} = \epsilon'_{f,\alpha} \circ \xi_{f,\alpha} \circ \epsilon''_{h,f} = p_{\alpha} \circ u_f \circ \epsilon''_{h,f} = p_{\alpha} \circ u_{\theta}$ , tenemos que  $\epsilon'_{f,\alpha} \circ \rho_{\theta,f} = \epsilon'_{\theta,\alpha}$ . Luego, calculando el siguiente diagrama conmutativo de dos pullbacks

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\rho} & X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_{\alpha} \\
 \downarrow k & & \downarrow \alpha_f & & \downarrow \alpha \\
 \frac{Y_{\theta}}{Y_{\theta} \cap Y_{\alpha}} & \xrightarrow{\rho_{\theta,f}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_{\alpha}} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_{\alpha}},
 \end{array}$$

tenemos que el cuadrado exterior es un pullback. Por lo tanto, podemos suponer que  $M = X_{\theta,\alpha}$ , que  $k = \alpha_{\theta}$  y que  $\epsilon''_{\theta,\alpha} = \epsilon''_{f,\alpha} \circ \rho$  (es decir, tenemos el diagrama de pullback inferior de la figura 2.7). En particular, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

Ahora bien, consideremos el pushout

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{\zeta_{\theta,\alpha}} & \frac{W}{W_{\theta,\alpha}} \\
 \zeta_{h,\beta} \downarrow & & \downarrow b'' \\
 \frac{W}{W_{h,\beta}} & \xrightarrow{a''} & \frac{W}{W_{h,\beta} \cup W_{\theta,\alpha}}.
 \end{array}$$

Notemos que  $\zeta_{\theta,\alpha} = \varphi_{\theta,\alpha} \circ p_{\theta}$  (ver figura 2.7) y  $\zeta_{h,\beta} = a' \circ \zeta_{h,f}$  (ver figura 2.8). Además, por construcción de los diagramas 2.6 y 2.7, tenemos que  $\zeta_{h,f} = p_{\theta}$ ;

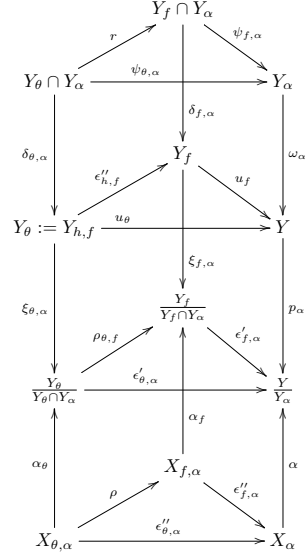


Figura 2.9: Diagrama piramide

de donde concluimos que  $b'' \circ \varphi_{\theta,\alpha} \circ p_\theta = b'' \circ \zeta_{\theta,\alpha} = a'' \circ \zeta_{h,\beta} = a'' \circ a' \circ \zeta_{h,f} = a'' \circ a' \circ p_\theta$ ; y como  $p_\theta$  es epi, tenemos que

$$b'' \circ \varphi_{\theta,\alpha} = a'' \circ a'.$$

Ahora bien, construyamos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{v} & X_{\theta,\alpha} \\ u \downarrow & & \downarrow \rho \\ X_{h,\beta} & \xrightarrow{\epsilon''_{h,\beta}} & X_{f,\alpha}. \end{array}$$

Afirmamos que

$$a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u = b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta \circ v.$$

Para esto, construyamos el pullback

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi'} & Y_{h,f} = Y_\theta \\ \psi \downarrow & & \downarrow \xi_{\theta,\alpha} \\ T & \xrightarrow{\alpha_\theta \circ v} & \frac{Y_\theta}{Y_\theta \cap Y_\alpha}. \end{array}$$



Notemos que  $\psi$  es epi pues  $\xi_{\theta,\alpha}$  lo es.  
Y también consideremos el pushout

$$\begin{array}{ccc} \frac{Z_h}{Z_h \cap Z_\beta} & \xrightarrow{\epsilon'_{h,\beta}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} \\ a'' \circ \lambda_{h,\beta} \downarrow & & \downarrow \Xi' \\ \frac{W}{W_{h,\beta} \cap W_{\theta,\alpha}} & \xrightarrow{\Xi} & N, \end{array}$$

donde  $\Xi$  es mono pues  $\epsilon'_{h,\beta}$  lo es.

Afirmamos que

$$\Xi \circ a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u \circ \psi = \Xi \circ b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta \circ v \circ \psi.$$

Dado que  $\psi$  y  $\Xi$  son epi y mono, respectivamente, tenemos que los caminos rojos descritos en el diagrama 2.10 conmutan. Ya que, por un lado, tenemos que siguiendo los diagramas 2.10, 2.8 y 2.9, tenemos que

$$\begin{aligned} \Xi \circ a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u \circ \psi &= \Xi' \circ \epsilon'_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u \circ \psi \\ &= \Xi' \circ \beta \circ \epsilon''_{h,\beta} \circ u \circ \psi \\ &= \Xi' \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f \circ \rho \circ v \circ \psi \\ &= \Xi' \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \rho_{\theta,f} \circ \alpha_\theta \circ v \circ \psi. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \Xi \circ b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta \circ v \circ \psi &= \Xi \circ b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \xi_{\theta,\alpha} \circ \psi' \\ &= \Xi \circ b'' \circ \varphi_{\theta,\alpha} \circ \lambda_{h,f} \circ f_h \circ \psi' \\ &= \Xi \circ a'' \circ a' \circ \lambda_{h,f} \circ f_h \circ \psi' \\ &= \Xi \circ a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ c' \circ f_h \circ \psi' \\ &= \Xi' \circ \epsilon'_{h,\beta} \circ c' \circ f_h \circ \psi' \\ &= \Xi' \circ d' \circ \epsilon'_{h,f} \circ f_h \circ \psi' \\ &= \Xi' \circ d' \circ f \circ \epsilon''_{h,f} \circ \psi' \\ &= \Xi' \circ \varphi_{f,\alpha} \circ f \circ \epsilon''_{h,f} \circ \psi' \\ &= \Xi' \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \xi_{f,\alpha} \circ \epsilon''_{h,f} \circ \psi' \\ &= \Xi' \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \rho_{\theta,f} \circ \xi_{\theta,\alpha} \circ \psi' \\ &= \Xi' \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \rho_{\theta,f} \circ \alpha_\theta \circ v \circ \psi, \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\Xi \circ a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u \circ \psi = \Xi \circ b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta \circ v \circ \psi;$$

y como  $\Xi$  es mono y  $\psi$  epi, tenemos que

$$a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u = b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta \circ v.$$

Probando que los caminos rojos descritos en el diagrama 2.10 conmutan; y como  $T$  es tal que  $\frac{X}{T} \in \mathcal{A}$  y  $W_{h,\beta} \cup W_{\theta,\alpha} \in \mathcal{A}$  pues cada uniendo lo esta. Por un lado, tenemos que

$$[u_\beta \circ \epsilon''_{h,\beta} : \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h : \zeta_{h,\beta}] = [u_\beta \circ \epsilon''_{h,\beta} \circ u : a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u : a'' \circ \zeta_{h,\beta}],$$

$$[u_\alpha \circ \epsilon''_{\theta,\alpha} : \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta : \zeta_{\theta,\alpha}] = [u_\alpha \circ \epsilon''_{\theta,\alpha} \circ v : b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta \circ v : b'' \circ \zeta_{\theta,\alpha}].$$

Pero

$$u_\beta \circ \epsilon''_{h,\beta} \circ u = (u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}) \circ \epsilon''_{h,\beta} \circ u = (u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha}) \circ \rho \circ v = u_\alpha \circ \epsilon''_{\theta,\alpha} \circ v,$$

$$a'' \circ \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h \circ u = b'' \circ \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta \circ v,$$

$$a'' \circ \zeta_{h,\beta} = b'' \circ \zeta_{\theta,\alpha}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$[u_\beta \circ \epsilon''_{h,\beta} : \lambda_{h,\beta} \circ \beta_h : \zeta_{h,\beta}] = [u_\alpha \circ \epsilon''_{\theta,\alpha} : \lambda_{\theta,\alpha} \circ \alpha_\theta : \zeta_{\theta,\alpha}];$$

probándose que  $(H \circ F) \circ \Delta = H \circ (F \circ \Delta)$  en  $\mathcal{C}_\Sigma$ .

□

**Lema 2.37** Para  $[u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$  y  $[u_f : f : p_f] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{Z})$ , se tiene que

$$[1_Y : 1_Y : 1_Y] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha], \quad [u_f : f : p_f] \circ [1_Y : 1_Y : 1_Y] = [u_f : f : p_f].$$

**Demostración.** Del siguiente diagrama tenemos que  $[1_Y : 1_Y : 1_Y] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\alpha \circ \epsilon''_{1,\alpha} : \lambda_{1,\alpha} \circ \alpha_1 : \zeta_{1,\alpha}] = [u_\alpha : 1_{\frac{Y}{\alpha}} \circ \alpha : p_\alpha] = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha]$ .

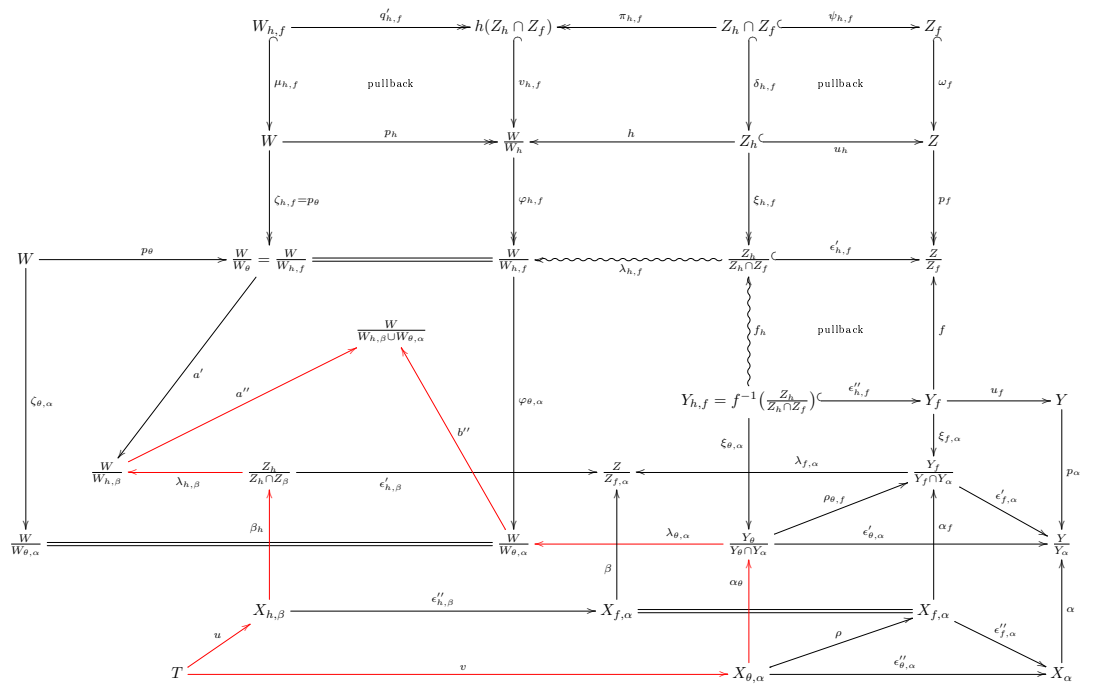
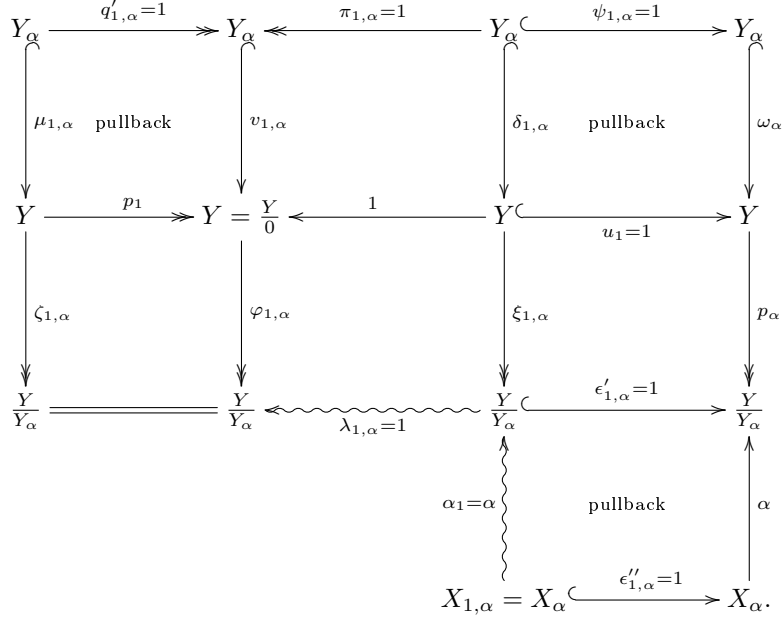
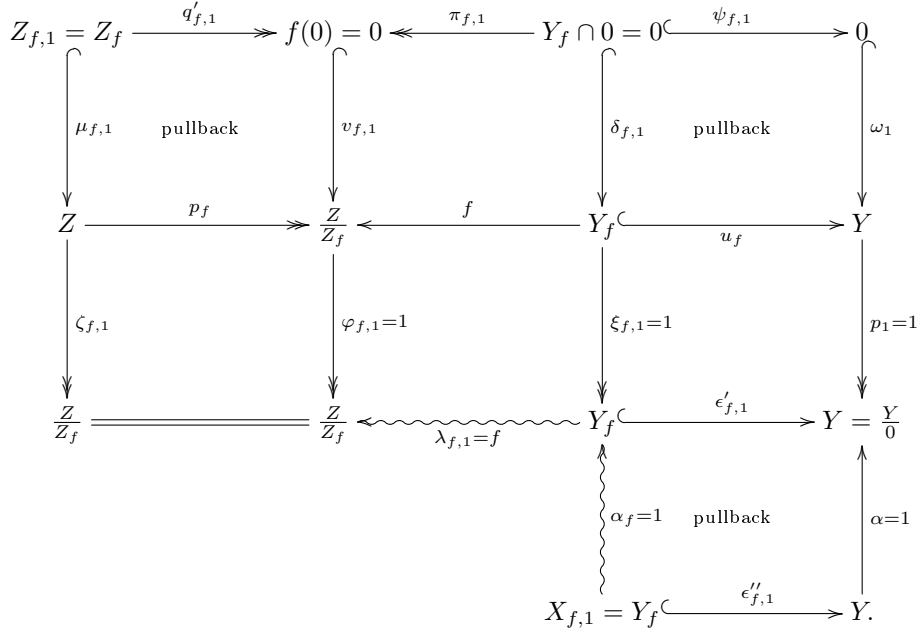


Figura 2.10: Diagrama de la asociatividad



De la misma manera, el siguiente diagrama nos dice que  $[1_Y : 1_Y : 1_Y] \circ [u_f : f : p_f] = [1 \circ \epsilon''_{f,1} : \lambda_{f,1} \circ \alpha_f : \zeta_{f,1}] = [u_f : f \circ 1_{Y_f} : p_f] = [u_f : f : p_f]$





$$\begin{aligned} F + G &:= [u_{X'}^X : q(X, Y)(u_{X'}^{X_f}, u_{Y'}^{Y_f})(f) + q(X, Y)(u_{X'}^{X_g}, u_{Y'}^{Y_g})(g) : p_{Y'}^Y] \\ &= [u_{X'}^X : \theta_{Y_f}^{Y'} \circ f \circ u_{X'}^{X_f} + \theta_{Y_g}^{Y'} \circ g \circ u_{X'}^{X_g} : p_{Y'}^Y]. \end{aligned}$$

**Observación 2.39** Por [17, Teorema 2.2.11], tenemos que la definición de la suma es independiente de los representantes y de los morfismos tomados en  $\mathcal{L}(X, Y)$

$$\begin{array}{ccc} (X_f, Y_f) & & (X_g, Y_g) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (u_{X'}^{X_f}, u_{Y'}^{Y_f}) & (u_{X'}^{X_g}, u_{Y'}^{Y_g}) \\ & & (X', Y'). \end{array}$$

**Proposición 2.40** Para cada par de objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\bar{X}, \bar{Y})$  es un grupo abeliano con la suma definida en la Definición 2.38

**Demostración.** Esto se sigue de [17, Teorema 2.2.11]  $\square$

**Observación 2.41** Sean  $F = [u_f : f : p_f], G = [u_g : g : p_g] \in \varinjlim q(X, Y)$ . Sabemos que existen  $((X', u_{X'}^X), (Y', u_{Y'}^Y)) \in \mathcal{L}(X, Y)$  y morfismos en  $\mathcal{L}(X, Y)$  de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} (X_f, Y_f) & & (X_g, Y_g) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (u_{X'}^{X_f}, u_{Y'}^{Y_f}) & (u_{X'}^{X_g}, u_{Y'}^{Y_g}) \\ & & (X', Y'). \end{array}$$

Dado que  $[u_f : f : p_f] = [u_f \circ u_{X'}^{X_f} : \theta_{Y_f}^{Y'} \circ f \circ u_{X'}^{X_f} : \theta_{Y_f}^{Y'} \circ p_f]$  y  $[u_g : g : p_g] = [u_g \circ u_{X'}^{X_g} : \theta_{Y_g}^{Y'} \circ g \circ u_{X'}^{X_g} : \theta_{Y_g}^{Y'} \circ p_g]$  (ver Lema 2.30),  $u_f \circ u_{X'}^{X_f} = u_g \circ u_{X'}^{X_g}$  y  $\theta_{Y_f}^{Y'} \circ p_f = \theta_{Y_g}^{Y'} \circ p_g$ , podemos suponer que  $f$  y  $g$  tienen el mismo dominio, codominio y que  $u_f = u_g$  y  $p_f = p_g$ . Entonces, podemos suponer siempre que

$$[u_f : f : p_f] + [u_f : g : p_f] = [u_f : f + g : p_f].$$

**Lema 2.42** Sea  $\alpha : A \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$ , tal que  $\alpha = \mu\alpha'$ , con  $\mu : B \rightarrow C$  un monomorfismo y  $\alpha' : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$ . Entonces tenemos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha'} & B \\ \downarrow 1 & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C. \end{array}$$

**Demostración.** Sean  $\gamma : X \rightarrow A$  y  $\gamma' : X \rightarrow B$  morfismos tales que  $\alpha \circ \gamma = \mu \circ \gamma'$ . Luego  $\mu \circ \alpha' \circ \gamma = \mu \circ \gamma'$ ; y como  $\mu$  es mono, tenemos que  $\gamma' = \alpha' \circ \gamma$ . También se tiene que  $\gamma = 1_A \circ \gamma$  y  $\gamma$  es el único que cumple las dos igualdades anteriores. Por lo tanto el cuadrado del lema es un pullback.  $\square$

**Proposición 2.43** Sean  $\Delta = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha], H = [u_\beta : \beta : p_\beta]$  morfismos en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$  y  $F = [u_f : f : p_f] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{Z})$ . Entonces

$$F \circ (\Delta + H) = F \circ \Delta + F \circ H.$$

**Demostración.** Sean  $\alpha : X_\alpha \rightarrow \frac{Y}{Y_\alpha}$  y  $\beta : X_\beta \rightarrow \frac{Y}{Y_\beta}$ . Por la Observación 2.41, podemos pensar que  $X' = X_\alpha = X_\beta$ ,  $Y' = Y_\alpha = Y_\beta$  y  $u_\alpha = u_\beta$  y  $p_\alpha = p_\beta$ . Consideremos los pullbacks de los diagramas que definen la composición (ver diagramas de las figuras 2.11 y 2.12)

$$\begin{array}{ccc} X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\alpha_f} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ \epsilon''_{f,\alpha} \downarrow & & \downarrow \epsilon'_{f,\alpha} \\ X' & \xrightarrow{\alpha} & \frac{Y}{Y'} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_{f,\beta} & \xrightarrow{\beta_f} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ \epsilon''_{f,\beta} \downarrow & & \downarrow \epsilon'_{f,\beta} \\ X' & \xrightarrow{\beta} & \frac{Y}{Y'} \end{array}$$

Notemos que en éste caso, se tiene que  $\mu := \epsilon'_{f,\alpha} = \epsilon'_{f,\beta}$ . Luego, tenemos los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} & \xrightarrow{u} & X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\alpha_f} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ \downarrow v & & \downarrow \epsilon''_{f,\alpha} & & \downarrow \epsilon'_{f,\alpha} \\ X_{f,\beta} & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\beta}} & X' & \xrightarrow{\alpha} & \frac{Y}{Y'} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} & \xrightarrow{v} & X_{f,\beta} & \xrightarrow{\beta_f} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ \downarrow u & & \downarrow \epsilon''_{f,\beta} & & \downarrow \epsilon'_{f,\beta} \\ X_{f,\alpha} & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X' & \xrightarrow{\beta} & \frac{Y}{Y'} \end{array}$$

Luego, si  $\alpha' := \alpha \circ \epsilon''_{f,\beta} \circ v$  y  $\beta' := \beta \circ \epsilon''_{f,\alpha} \circ u$ , entonces

$$[U : \alpha' : p_{\alpha'}] = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha],$$

$$[U : \beta' : p_{\beta'}] = [u_\beta : \beta : p_\beta],$$

con  $U := u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} \circ u = u_\beta \circ \epsilon''_{f,\beta} \circ v$  y  $P := p_{\alpha'} = p_\alpha = p_\beta = p_{\beta'}$ . Ahora, para  $\alpha'' := \alpha_f \circ u$  y  $\beta'' := \beta_f \circ v$ , tenemos que  $\alpha' = \mu \circ \alpha''$  y  $\beta' = \mu \circ \beta''$ . Luego, por el Lema 2.42, tenemos los siguientes pullbacks

$$\begin{array}{ccc} X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} & \xrightarrow{\alpha''} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ \downarrow 1 & & \downarrow \mu \\ X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} & \xrightarrow{\alpha'} & \frac{Y}{Y'} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} & \xrightarrow{\beta''} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ \downarrow 1 & & \downarrow \mu \\ X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} & \xrightarrow{\beta'} & \frac{Y}{Y'} \end{array}$$

Por lo tanto, podemos formar los diagramas de las figuras 2.13 y 2.14. Por otro lado, como

$$\alpha' + \beta' = \mu \circ (\alpha'' + \beta''),$$

con  $\mu$  mono, por el Lema 2.42 tenemos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} \xrightarrow{\alpha'' + \beta''} & \xrightarrow{\quad} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} \\ \downarrow 1 & & \downarrow \mu \\ X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} \xrightarrow{\alpha' + \beta'} & \xrightarrow{\quad} & \frac{Y}{Y'}; \end{array}$$

y así, formar el diagrama de la figura 2.15.

Ahora bien, como la composición no depende de los representantes, y de los diagramas de las figuras 2.13, 2.14 y 2.15, tenemos que

$$\begin{aligned} & [u_f : f : p_f] \circ ([u_\alpha : \alpha : p_\alpha] + [u_\beta : \beta : p_\beta]) = \\ & = [u_f : f : p_f] \circ ([U : \alpha' : P] + [U : \beta' : P]) \\ & = [u_f : f : p_f] \circ [U : \alpha' + \beta' : P] \\ & = [u_{\alpha' + \beta'} \circ \epsilon''_{f,\alpha' + \beta'} : \lambda_{f,\alpha' + \beta'} \circ (\alpha' + \beta')_f : \zeta_{f,\alpha' + \beta'}] \\ & = [u_{\alpha' + \beta'} : \lambda_{f,\alpha' + \beta'} \circ (\alpha'' + \beta'') : \zeta_{f,\alpha' + \beta'}] \quad (\text{pues } \epsilon''_{f,\alpha' + \beta'} = 1) \\ & = [U : \lambda_{f,\alpha' + \beta'} \circ \alpha'' + \lambda_{f,\alpha' + \beta'} \circ \beta'' : \zeta_{f,\alpha' + \beta'}] \quad (\text{pues } U = u_{\alpha' + \beta'}) \\ & = [U : \lambda_{f,\alpha'} \circ \alpha'_f + \lambda_{f,\beta'} \circ \beta'_f : \zeta_{f,\alpha' + \beta'}] \\ & = [U : \lambda_{f,\alpha'} \circ \alpha'_f : \zeta_{f,\alpha' + \beta'}] + [U : \lambda_{f,\beta'} \circ \beta'_f : \zeta_{f,\alpha' + \beta'}] \\ & = [u_{\alpha'} : \lambda_{f,\alpha'} \circ \alpha'_f : \zeta_{f,\alpha'}] + [u_{\beta'} : \lambda_{f,\beta'} \circ \beta'_f : \zeta_{f,\beta'}] \quad (\text{pues } U = u_{\alpha'} = u_{\beta'}) \\ & = [u_{\alpha'} \circ \epsilon''_{f,\alpha'} : \lambda_{f,\alpha'} \circ \alpha'_f : \zeta_{f,\alpha'}] + [u_{\beta'} \circ \epsilon''_{f,\beta'} : \lambda_{f,\beta'} \circ \beta'_f : \zeta_{f,\beta'}] \quad (\epsilon''_{f,\alpha'} = \epsilon''_{f,\beta'} = 1) \\ & = [u_f : f : p_f] \circ [U : \alpha' : P] + [u_f : f : p_f] \circ [U : \beta' : P] \\ & = [u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] + [u_f : f : p_f] \circ [u_\beta : \beta : p_\beta] \end{aligned}$$

Esto pues  $\lambda_{f,\alpha' + \beta'} = \lambda_{f,\alpha'} = \lambda_{f,\beta'}$ ,  $\zeta_{f,\alpha' + \beta'} = \zeta_{f,\alpha'} = \zeta_{f,\beta'}$  (por construcción de los diagramas en las figuras 2.13, 2.14 y 2.15) y  $\alpha'' = \alpha'_f$  y  $\beta'' = \beta'_f$ .  $\square$

**Proposición 2.44** Sean  $F = [u_f : f : p_f], G = [u_g : g : p_g] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{Z})$  y  $\Delta = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ . Entonces

$$(F + G) \circ \Delta = F \circ \Delta + G \circ \Delta.$$

**Demostración.** Por la Observación 2.41, podemos suponer que  $f$  y  $g$  tienen el mismo dominio y codominio, es decir  $f, g : Y' \rightarrow \frac{Z}{Z'}$  con  $Y'$  subobjeto de  $Y$ , tal que  $\frac{Y}{Y'} \in \mathcal{A}$  y  $Z' \in \mathcal{A}$ . Sea  $U := u_f = u_g : Y' \rightarrow Y$  y  $P = p_f = p_g : Z \rightarrow \frac{Z}{Z'}$ . Luego, se tiene el diagrama de la composición  $F \circ \Delta$  de la figura 2.16:

También podemos construir el diagrama de  $[g] \circ [\alpha]$  análogo al diagrama de la figura 2.16. De tal diagrama, tenemos el morfismo  $\zeta_{g,\alpha} : Z \rightarrow \frac{Z}{Z_{g,\alpha}}$ . Tomando



$$\begin{array}{ccccccc}
Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha}} & f(Y_f \cap Y') & \xleftarrow{\pi_{f,\alpha}} & Y_f \cap Y' & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y' \\
\downarrow \mu_{f,\alpha} & & \downarrow v_{f,\alpha} & & \downarrow \delta_{f,\alpha} & & \downarrow \omega \\
Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \xleftarrow{f} & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y \\
\downarrow \zeta_{f,\alpha} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} & & \downarrow \xi_{f,\alpha} & & \downarrow p \\
\frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xrightarrow{=} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y'} \\
& & & & \uparrow \alpha_f & & \uparrow \alpha \\
& & & & X_{f,\alpha} = \alpha^{-1}\left(\frac{Y_f}{Y_f \cap Y'}\right) & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X'
\end{array}$$

pullback                      pullback                      pullback

Figura 2.11: Diagrama de la composición  $[f] \circ [\alpha]$ 

$$\begin{array}{ccccccc}
Z_{f,\beta} & \xrightarrow{q'_{f,\beta}} & f(Y_f \cap Y') & \xleftarrow{\pi_{f,\beta}} & Y_f \cap Y' & \xrightarrow{\psi_{f,\beta}} & Y' \\
\downarrow \mu_{f,\beta} & & \downarrow v_{f,\beta} & & \downarrow \delta_{f,\beta} & & \downarrow \omega \\
Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \xleftarrow{f} & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y \\
\downarrow \zeta_{f,\beta} & & \downarrow \varphi_{f,\beta} & & \downarrow \xi_{f,\beta} & & \downarrow p \\
\frac{Z}{Z_{f,\beta}} & \xrightarrow{=} & \frac{Z}{Z_{f,\beta}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\beta}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y'} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\beta}} & \frac{Y}{Y'} \\
& & & & \uparrow \beta_f & & \uparrow \beta \\
& & & & X_{f,\beta} = \beta^{-1}\left(\frac{Y_f}{Y_f \cap Y'}\right) & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\beta}} & X'
\end{array}$$

pullback                      pullback                      pullback

Figura 2.12: Diagrama de la composición  $[f] \circ [\beta]$

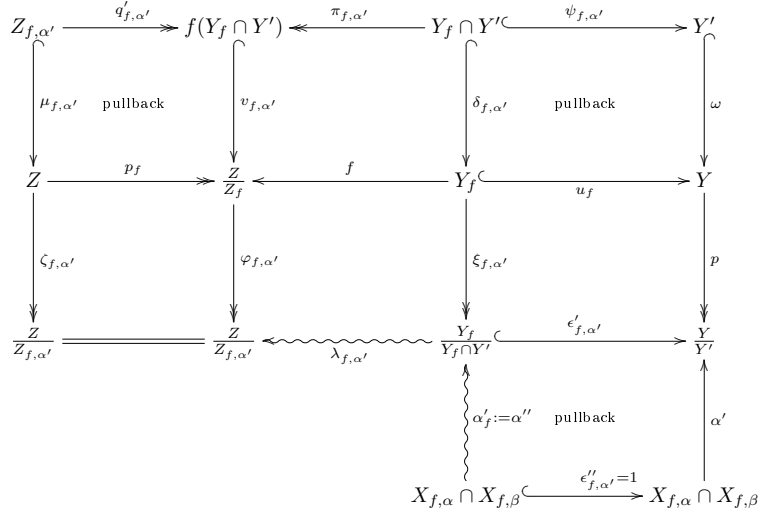


Figura 2.13: Diagrama de la composición  $[f] \circ [\alpha']$

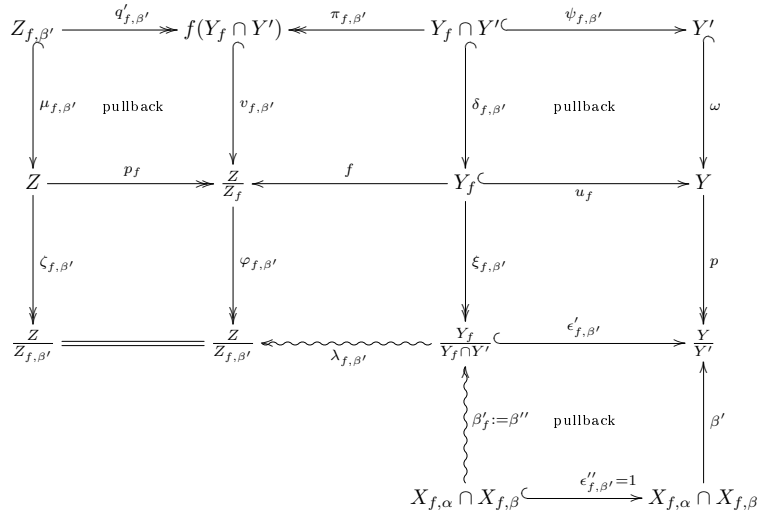


Figura 2.14: Diagrama de la composición  $[f] \circ [\beta']$

$$\begin{array}{ccccc}
Z_{f,\alpha'+\beta'} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha'+\beta'}} & f(Y_f \cap Y') & \xleftarrow{\pi_{f,\alpha'+\beta'}} & Y_f \cap Y' \subset Y' & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha'+\beta'}} & Y' \\
\downarrow \mu_{f,\alpha'+\beta'} \text{ pullback} & & \downarrow v_{f,\alpha'+\beta'} & & \downarrow \delta_{f,\alpha'+\beta'} \text{ pullback} & & \downarrow \omega \\
Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \xleftarrow{f} & Y_f \subset Y & \xrightarrow{u_f} & Y \\
\downarrow \zeta_{f,\alpha'+\beta'} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha'+\beta'} & & \downarrow \xi_{f,\alpha'+\beta'} & & \downarrow p \\
\frac{Z}{Z_{f,\alpha'+\beta'}} & \xlongequal{\quad} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha'+\beta'}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\alpha'+\beta'}} & Y_f \cap Y' \subset Y' & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha'+\beta'}} & Y' \\
& & & & \uparrow \text{pullback} & & \uparrow \alpha'+\beta' \\
& & & & X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta} & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha'+\beta'}=1} & X_{f,\alpha} \cap X_{f,\beta}
\end{array}$$

$(\alpha'+\beta')_f := \alpha''+\beta''$

Figura 2.15: Diagrama de la composición  $[f] \circ [\alpha' + \beta']$ 

$$\begin{array}{ccccc}
Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha}} & f(Y' \cap Y_\alpha) & \xleftarrow{\pi_{f,\alpha}} & Y' \cap Y_\alpha \subset Y'_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y'_\alpha \\
\downarrow \mu_{f,\alpha} \text{ pullback} & & \downarrow v_{f,\alpha} & & \downarrow \delta_{f,\alpha} \text{ pullback} & & \downarrow \omega_\alpha \\
Z & \xrightarrow{P} & \frac{Z}{Z'} & \xleftarrow{f} & Y' \subset Y & \xrightarrow{U} & Y \\
\downarrow \zeta_{f,\alpha} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} & & \downarrow \xi_{f,\alpha} & & \downarrow p_\alpha \\
\frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xlongequal{\quad} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\alpha}} & Y' \cap Y_\alpha \subset Y'_\alpha & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & Y'_\alpha \\
& & & & \uparrow \text{pullback} & & \uparrow \alpha \\
& & & & X_{f,\alpha} = \alpha^{-1}\left(\frac{Y'}{Y' \cap Y_\alpha}\right) & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_\alpha
\end{array}$$

Figura 2.16: Diagrama de la composición  $[f] \circ [\alpha]$

pushout, de  $\zeta_{f,\alpha} : Z \longrightarrow \frac{Z}{Z_{f,\alpha}}$  con  $\zeta_{g,\alpha} : Z \longrightarrow \frac{Z}{Z_{g,\alpha}}$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde todos los morfismos son epimorfismos

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\zeta_{f,\alpha}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} \\ \zeta_{g,\alpha} \downarrow & & \downarrow h_{f,\alpha} \\ \frac{Z}{Z_{g,\alpha}} & \xrightarrow{h_{g,\alpha}} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha} \cup Z_{g,\alpha}} \end{array}$$

Notemos que, como  $Z_{f,\alpha}, Z_{g,\alpha} \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $Z'' := Z_{f,\alpha} \cup Z_{g,\alpha} \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto, consideremos  $f' := h_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ f$  y  $g' := h_{g,\alpha} \circ \varphi_{g,\alpha} \circ g$ . Notemos que  $h_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ P = h_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ p_f = h_{f,\alpha} \circ \zeta_{f,\alpha} = h_{g,\alpha} \circ \zeta_{g,\alpha} = h_{g,\alpha} \circ \varphi_{g,\alpha} \circ p_g = h_{g,\alpha} \circ \varphi_{g,\alpha} \circ P$ . Por lo tanto, definiendo

$$P' := h_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ P = h_{g,\alpha} \circ \varphi_{g,\alpha} \circ P$$

Tenemos que

$$[U : f : P] = [U : f' : P'],$$

$$[U : g : P] = [U : g' : P'],$$

pues  $h_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha}$  y  $h_{g,\alpha} \circ \varphi_{g,\alpha}$  son epimorfismos.

Notemos que  $f' \circ \delta_{f,\alpha} = 0$  pues  $f' \circ \delta_{f,\alpha} = h_{f,\alpha} \circ \varphi_{f,\alpha} \circ f \circ \delta_{f,\alpha} = h_{f,\alpha} \circ \lambda_{f,\alpha} \circ \xi_{f,\alpha} \circ \delta_{f,\alpha} = 0$

Entonces, para obtener la composición  $[U : f' : P'] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha]$ , usaremos el diagrama de la figura 2.17.

También, para calcular  $[U : g' : P'] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha]$ , usaremos un diagrama similar (ver el diagrama de la figura 2.18).

Como  $\delta_{g',\alpha} = \delta_{f',\alpha}$ , tenemos también que  $(f' + g') \circ \delta_{f',\alpha} = f' \circ \delta_{f',\alpha} + g' \circ \delta_{f',\alpha} = 0$  y así, que podemos formar el diagrama de la figura 2.19.

De los diagramas de las figuras 2.17, 2.18 y 2.19, tenemos que

$$\alpha_{f'+g'} = \alpha_{f'} = \alpha_{g'},$$

$$\xi_{f'+g'} = \xi_{f'} = \xi_{g'}.$$

Además, tenemos que  $\lambda_{f'+g',\alpha}$  es el único morfismo tal que

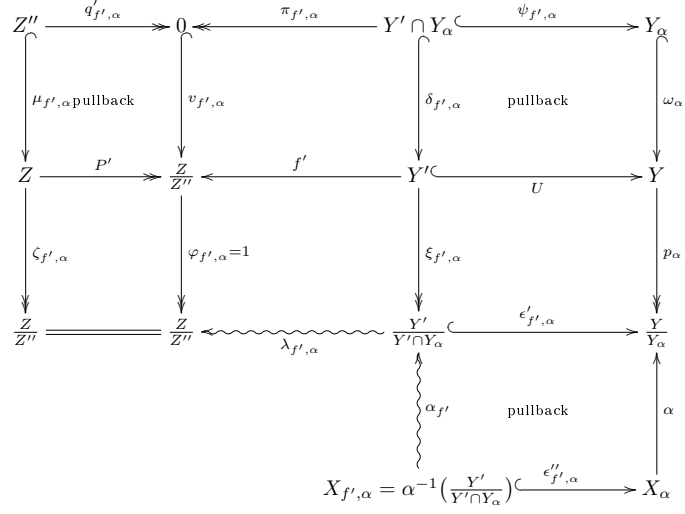
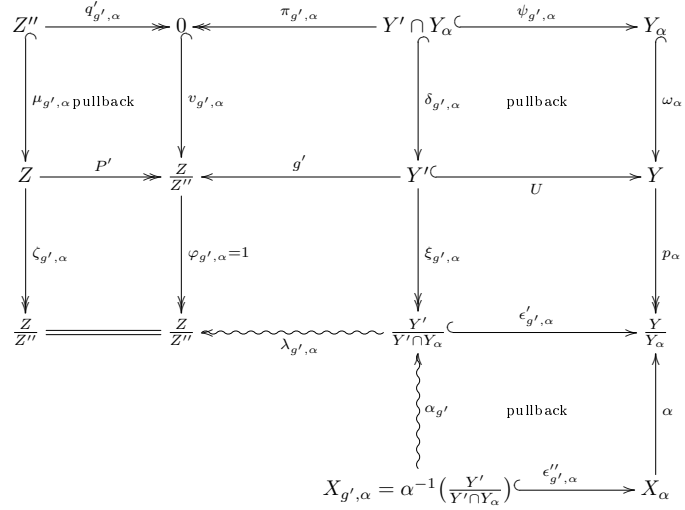
$$\lambda_{f'+g',\alpha} \circ \xi_{f'+g',\alpha} = f' + g'.$$

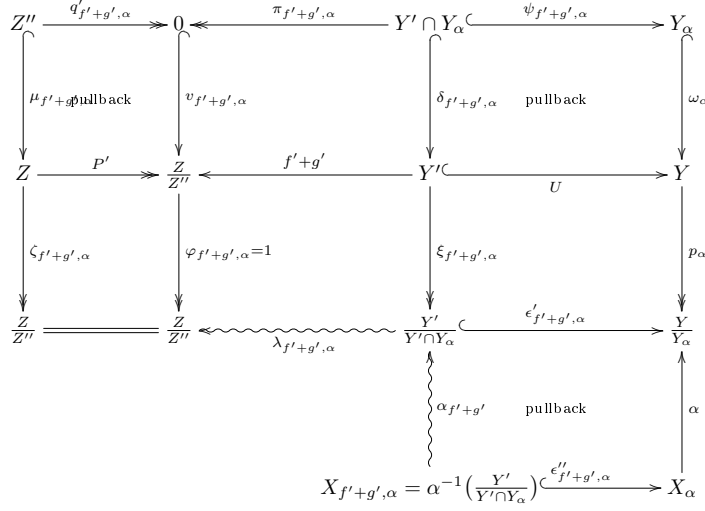
Pero,

$$\lambda_{f',\alpha} \circ \xi_{f'} = f' \quad \text{y} \quad \lambda_{g',\alpha} \circ \xi_{g'} = g'.$$

Entonces

$$\lambda_{f',\alpha} \circ \xi_{f'+g'} = f' \quad \text{y} \quad \lambda_{g',\alpha} \circ \xi_{f'+g'} = g'.$$

Figura 2.17: Diagrama de la composición  $[f'] \circ [\alpha]$ Figura 2.18: Diagrama de la composición  $[g'] \circ [\alpha]$

Figura 2.19: Diagrama de la composición  $[f' + g'] \circ [\alpha]$ 

Por lo tanto

$$(\lambda_{f',\alpha} + \lambda_{g',\alpha}) \circ \xi_{f'+g'} = f' + g'$$

De donde concluimos que

$$\lambda_{f'+g',\alpha} = \lambda_{f',\alpha} + \lambda_{g',\alpha}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
& (F + G) \circ \Delta = \\
& ([U : f : P] + [U : g : P]) \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \\
& = ([U : f' : P'] + [U : g' : P']) \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \\
& = [U : f' + g' : P'] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \\
& = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f'+g',\alpha} : \lambda_{f'+g',\alpha} \circ \alpha_{f'+g'} : \zeta_{f'+g',\alpha}] \\
& = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f'+g',\alpha} : (\lambda_{f',\alpha} + \lambda_{g',\alpha}) \circ \alpha_{f'+g'} : \zeta_{f'+g',\alpha}] \\
& = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f'+g',\alpha} : \lambda_{f',\alpha} \circ \alpha_{f'+g'} + \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{f'+g'} : \zeta_{f'+g',\alpha}] \\
& = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f'+g',\alpha} : \lambda_{f',\alpha} \circ \alpha_{f'} + \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} : \zeta_{f'+g',\alpha}] \\
& = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f'+g',\alpha} : \lambda_{f',\alpha} \circ \alpha_{f'} : \zeta_{f'+g',\alpha}] + [u_\alpha \circ \epsilon''_{f'+g',\alpha} : \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} : \zeta_{f'+g',\alpha}] \\
& = [u_\alpha \circ \epsilon''_{f',\alpha} : \lambda_{f',\alpha} \circ \alpha_{f'} : \zeta_{f',\alpha}] + [u_\alpha \circ \epsilon''_{g',\alpha} : \lambda_{g',\alpha} \circ \alpha_{g'} : \zeta_{g',\alpha}] \\
& = [U : f' : P'] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] + [U : g' : P'] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \\
& = [U : f : P] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] + [U : g : P] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \\
& = F \circ \Delta + G \circ \Delta
\end{aligned}$$

□

**Corolario 2.45** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma := \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Entonces, la localización  $\mathcal{C}_{\Sigma}$  es una categoría preaditiva.

**Demostración.** Se sigue de los Lemas 2.43, 2.44 y 2.40 que la composición es bilineal y los Hom son grupos abelianos. Además, el objeto  $\bar{0}$  es el objeto cero de  $\mathcal{C}_{\Sigma}$ . □

**Proposición 2.46** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma := \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Entonces, existe funtor un aditivo

$$\mathbb{L} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}.$$

**Demostración.** Consideremos la categoría aditiva  $\mathcal{C}_{\Sigma}$ . Definamos la asignación  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}$ , como sigue:

- (a)  $\mathbb{L}(X) := \bar{X}$ , para  $X \in \mathcal{C}$ .
- (b) Sea  $f : X \longrightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Tenemos que  $\frac{X}{X} = 0 \in \mathcal{A}$  y  $Y = \frac{Y}{0}$  con  $0 \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto  $[1_X : f : 1_Y] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_{\Sigma}}(\bar{X}, \bar{Y})$  esta representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{1_X} & X \\ & & \downarrow f \\ & & Y \\ & & \xleftarrow{1_Y} & Y. \end{array}$$

Así, definimos que  $\mathbb{L}(f) := [1_X : f : 1_Y]$ .

Veamos que  $\mathbb{L}$  es funtor aditivo. En efecto, si  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tenemos que  $\mathbb{L}(f + g) = [1_X : f + g : 1_Y] = [1_X : f : 1_Y] + [1_X : g : 1_Y] = \mathbb{L}(f) + \mathbb{L}(g)$ . □

**Proposición 2.47** Sea  $F = [u_f : f : 1_Y] : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ , dado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u_f} & X_f \\ & & \downarrow f \\ & & Y \\ & & \xleftarrow{1_Y} & Y; \end{array}$$

y  $G = [1 : g : p_g] : \bar{Y} \longrightarrow \bar{Z}$ , representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{1_Y} & Y \\ & & \downarrow g \\ & & \frac{Z}{Z_g} \\ & & \xleftarrow{p_g} & Z. \end{array}$$

Entonces  $[1_Y : g : p_g] \circ [u_f : f : 1_Y] = [u_f : g \circ f : p_g]$ .

**Demostración.** En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 Z_g & \xrightarrow{q'_{g,f}} & 0 & \xleftarrow{\pi_{g,f}} & 0 & \xrightarrow{\psi_{g,f}} & 0 \\
 \downarrow \mu_{g,f} \text{ pullback} & & \downarrow v_{g,f} & & \downarrow \delta_{g,f} \text{ pullback} & & \downarrow \omega_f=0 \\
 Z & \xrightarrow{p_g} & \frac{Z}{Z_g} & \xleftarrow{g} & Y & \xrightarrow{u_g=1} & Y \\
 \downarrow \zeta_{g,f} & & \downarrow \varphi_{g,f}=1 & & \downarrow \xi_{g,f}=1 & & \downarrow p_f=1 \\
 \frac{Z}{Z_g} & \xrightarrow{\quad} & \frac{Z}{Z_g} & \xleftarrow{\lambda_{g,f}=g} & Y & \xrightarrow{\epsilon'_{g,f}=1} & Y \\
 & & & & \uparrow f \text{ pullback} & & \uparrow f \\
 & & & & X_f & \xrightarrow{\epsilon''_{g,f}=1} & X_f
 \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$[1 : g : p_g] \circ [u_f : f : 1] = [u_f \circ \epsilon''_{g,f} : g \circ f : \zeta_{g,f}] = [u_f : g \circ f : p_g].$$

□

**Proposición 2.48** *Sea  $s : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\Sigma$  y consideremos  $\mathbb{L}(s) = [1_X : s : 1_Y] : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ . Entonces  $\mathbb{L}(s)$  es invertible y además*

$$\mathbb{L}(s)^{-1} = [u : (\bar{s})^{-1} : p] : \bar{Y} \rightarrow \bar{X},$$

donde

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{\pi} & T & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow p & & \uparrow u & & & & \\
 & & & & X' & \xrightarrow{\bar{s}} & Y' & & & & 
 \end{array}$$

es la factorización canónica de  $s$  en  $\mathcal{C}$  y  $\bar{s}$  es el morfismo paralelo de  $s$ .

**Demostración.** Sea  $s : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\Sigma$ . Luego, formamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{\pi} & T & \longrightarrow & 0, \\
 & & & & \downarrow p & & \uparrow u & & & & \\
 & & & & X' & \xrightarrow{\bar{s}} & Y' & & & & 
 \end{array}$$



donde  $\bar{s}$  es el morfismo paralelo de  $s$ . Como  $s \in \Sigma$ , tenemos que  $K = \text{Ker}(s) \in \mathcal{A}$  y  $T = \text{Coker}(s) \in \mathcal{A}$ .

Además, como  $\mathcal{C}$  es abeliana, tenemos que existe  $f := \bar{s}^{-1} : Y' \rightarrow X'$ .

Afirmamos que  $f$  representa a un morfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma$ . En efecto, por construcción, tenemos que  $\frac{Y'}{Y'} \cong T \in \mathcal{A}$  y  $X' \cong \frac{X}{K}$ , con  $K \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto, tenemos que  $[u : f : p] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{X})$ .

Afirmamos que  $[u : f : p] = [1_X : s : 1_Y]^{-1}$ .

En efecto, primero tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 K & \xrightarrow{q'_{f,s}} & 0 & \xleftarrow{\pi_{f,s}} & 0 \subset & \xrightarrow{\psi_{f,s}} & 0 \\
 \downarrow \mu_{f,s} \text{ pullback} & & \downarrow v_{f,s} & & \downarrow \delta_{f,s} & \text{pullback} & \downarrow w_s \\
 X & \xrightarrow{p} & \frac{X}{K} & \xleftarrow{f} & Y' \subset & \xrightarrow{u} & Y \\
 \downarrow \zeta_{f,s} & & \downarrow \varphi_{f,s}=1 & & \downarrow \xi_{f,s}=1 & & \downarrow p_s=1 \\
 \frac{X}{K} & \xlongequal{\quad} & \frac{X}{K} & \xleftarrow{\lambda_{f,s}=f} & \frac{Y'}{0} = Y' \subset & \xrightarrow{\epsilon'_{f,s}} & \frac{Y}{0} = Y \\
 & & & & \uparrow s_f \text{ pullback} & & \uparrow s \\
 & & & & X_{f,s} = s^{-1}(Y') \subset & \xrightarrow{\epsilon''_{f,s}} & X
 \end{array}$$

Como  $u \circ \bar{s} \circ p = s$ , existe  $r : X \rightarrow X_{f,s}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \searrow \bar{s} \circ p & & & & \\
 & X_{f,s} & \xrightarrow{s_f} & Y' & \\
 \searrow r & \downarrow \epsilon''_{f,s} & & \downarrow u & \\
 & X & \xrightarrow{s} & Y & \\
 \searrow 1 & & & & 
 \end{array}$$

Luego  $r$  es un monomorfismo y además  $\frac{X}{X} = 0 \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto

$$[u : f : p] \circ [1_X : s : 1_Y] = [1_X \circ \epsilon''_{f,s} : f \circ s_f : p]$$

Pero

$$\begin{aligned} [1_X \circ \epsilon''_{f,s} : f \circ s_f : p] &= [\epsilon''_{f,s} \circ r : f \circ s_f \circ r : p] = [\epsilon''_{f,s} \circ r : f \circ \bar{s} \circ p : p] \\ &= [1_X : p : p] \\ &= [1_X : 1_X : 1_X]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[u : f : p] \circ [1_X : s : 1_Y] = [1_X : 1_X : 1_X].$$

Por otro lado, consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{q'_{s,f}} & 0 & \xleftarrow{\pi_{s,f}} & K & \xrightarrow{1=\psi_{s,f}} & K \\ \downarrow \mu_{s,f} \text{ pullback} & & \downarrow v_{s,f} & \delta_{s,f}=i & \downarrow & \text{pullback} & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{p_s=1} & Y_0 = Y & \xleftarrow{s} & X & \xrightarrow{1=u_s} & X \\ \downarrow 1=\zeta_{s,f} & & \downarrow 1=\varphi_{s,f} & \xi_{s,f}=p & \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xleftarrow{\lambda_{s,f}} & X & \xrightarrow{1=\epsilon'_{s,f}} & X \\ & & & & \downarrow f \text{ pullback} & & \downarrow f \\ & & & & Y' & \xrightarrow{1=\epsilon''_{s,f}} & Y' \end{array}$$

Sabemos que  $\lambda_{s,f}$  es el único morfismo tal que  $s = \lambda_{s,f} \circ p$ , pero  $u \circ \bar{s}$  satisface que  $s = u \circ \bar{s} \circ p$ . Por lo tanto, tenemos que  $\lambda_{s,f} = u \circ \bar{s}$ . Entonces

$$\begin{aligned} [1_X : s : 1_Y] \circ [u : f : p] &= [u \circ \epsilon''_{s,f} : \lambda_{s,f} \circ f : \zeta_{s,f}] = [u \circ \epsilon''_{s,f} : u \circ \bar{s} \circ f : 1_Y] \\ &= [u : u : 1_Y] \\ &= [1_Y : 1_Y : 1_Y], \end{aligned}$$

pues  $\bar{s} \circ f = 1_{Y'}$ , y  $\frac{Y}{Y'} = T \in \mathcal{A}$  y  $\zeta_{s,f} = 1_Y$ .

Finalmente  $\mathbb{L}(s)^{-1} = [u : f : p] = [u : (\bar{s})^{-1} : p]$ .  $\square$

**Corolario 2.49** (a) Sea  $s : X \rightarrow Y$  un monomorfismo en  $\Sigma$ . Entonces  $\mathbb{L}(s)^{-1} = [s : 1_X : 1_X]$  está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{s} & X \\ & & \downarrow 1_X \\ & & X \xleftarrow{1_X} X. \end{array}$$

(b) Sea  $p : X \rightarrow Y$  un epimorfismo en  $\Sigma$ . Entonces  $\mathbb{L}(p)^{-1} = [1_Y : 1_Y : p]$  está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{1_Y} & Y \\ & & \downarrow 1_Y \\ & & Y \xleftarrow{p} X. \end{array}$$

**Demostración.**

(a) Sea  $s : X \rightarrow Y$  un monomorfismo en  $\Sigma$ . Luego tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{s} & Y & \longrightarrow & \frac{Y}{X} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow s & & \\ & & X & \xrightarrow{1_X} & X & & \end{array}$$

Por lo tanto, el resultado se sigue de la Proposición 2.48.

(b) Sea  $p : X \rightarrow Y$  un epimorfismo en  $\Sigma$ . Luego tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & Y \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow p & & \uparrow 1_Y \\ & & & & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y. \end{array}$$

Por lo tanto, el se sigue de la Proposición 2.48.

□

**Proposición 2.50** Sea  $F := [u_f : f : p_f] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ , representado por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u_f} & X_f \\ & & \downarrow f \\ & & \frac{Y}{Y_f} \xleftarrow{p_f} Y. \end{array}$$

Entonces

$$F = \mathbb{L}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{L}(f) \circ \mathbb{L}(u_f)^{-1}.$$

**Demostración.** Como  $[u_f : f : p_f] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ , tenemos que  $u_f$  y  $p_f$  son momonorfismos y epimorfismos en  $\Sigma$ , respectivamente. Luego, por el Corolario 2.49, tenemos que  $\mathbb{L}(u_f)^{-1} = [u_f : 1_{X_f} : 1_{X_f}]$  y  $\mathbb{L}(p_f)^{-1} = [1_{\overline{Y}_f} : 1_{\overline{Y}_f} : p_f]$ . Luego, por la Proposición 2.47

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(f) \circ \mathbb{L}(s)^{-1} &= [1_{X_f} : f : 1_{\overline{Y}_f}] \circ [u_f : 1_{X_f} : 1_{X_f}] = [u_f : f \circ 1_{X_f} : 1_{X_f}] \\ &= [u_f : f : 1_{\overline{Y}_f}]. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.47, tenemos que

$$[1_{\overline{Y}_f} : 1_{\overline{Y}_f} : p_f] \circ [u_f : f : 1_{\overline{Y}_f}] = [u_f : 1_{\overline{Y}_f} \circ f : p_f] = [u_f : f : p_f].$$

Finalmente

$$\mathbb{L}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{L}(f) \circ \mathbb{L}(u_f)^{-1} = [u_f : f : p_f] = F.$$

□

**Teorema 2.51** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Entonces existe la categoría preaditiva  $\mathcal{C}_\Sigma$  de fracciones relativa a  $\Sigma$ .

**Demostración.** Sabemos que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\Sigma$  es tal que  $\mathbb{L}(s)$  es iso, para todo  $s \in \Sigma$ . Ahora, sea  $\mathbb{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $\mathbb{G}(s)$  es iso, para todo  $s \in \Sigma$ .

Definimos  $\mathbb{H}(\overline{X}) := \mathbb{G}(X)$ ; y dado un morfismo  $[u_f : f : p_f] = F = \mathbb{L}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{L}(f) \circ \mathbb{L}(u_f)^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ , definimos

$$\mathbb{H}(F) := \mathbb{G}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(f) \circ \mathbb{G}(u_f)^{-1}.$$

Veamos que  $\mathbb{H} : \mathcal{C}_\Sigma \rightarrow \mathcal{D}$  es un funtor.

Primero veamos que  $\mathbb{H}$  está bien definido. Supongamos que  $[u_f : f : p_f] = [u_g : g : p_g] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ . Entonces, tenemos un diagrama conmutativo de la



De la misma manera, tenemos que

$$\mathbb{G}(p_{Y'}^Y) \circ \mathbb{G}(p_g)^{-1} \circ \mathbb{G}(g) \circ \mathbb{G}(u_{X'}^{X_g}) = \mathbb{G}(p_{Y'}^Y) \circ \mathbb{G}(p_g)^{-1} \circ \mathbb{G}(g) \circ \mathbb{G}(u_g)^{-1} \circ A.$$

Ahora, como  $A$  y  $\mathbb{G}(p_{Y'}^Y)$  son isomorfismos, podemos cancelar de las igualdades anteriores y obtener que

$$\mathbb{G}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(f) \circ \mathbb{G}(u_f)^{-1} = \mathbb{G}(p_g)^{-1} \circ \mathbb{G}(g) \circ \mathbb{G}(u_g)^{-1}.$$

Por lo tanto,  $\mathbb{H}$  está bien definida.

Veamos que  $\mathbb{H}$  respeta composiciones.

Sean  $F = [u_f : f : p_f] : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  y  $\Delta = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] : \bar{Y} \rightarrow \bar{Z}$  morfismos. Luego, considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 Z_{f,\alpha} & \xrightarrow{q'_{f,\alpha}} & f(Y_f \cap Y_\alpha) & \xleftarrow{\pi_{f,\alpha}} & Y_f \cap Y_\alpha & \xrightarrow{\psi_{f,\alpha}} & Y_\alpha \\
 \downarrow \mu_{f,\alpha} & \text{pullback} & \downarrow v_{f,\alpha} & & \downarrow \delta_{f,\alpha} & \text{pullback} & \downarrow \omega_\alpha \\
 Z & \xrightarrow{p_f} & \frac{Z}{Z_f} & \xleftarrow{f} & Y_f & \xrightarrow{u_f} & Y \\
 \downarrow \zeta_{f,\alpha} & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} & & \downarrow \xi_{f,\alpha} & & \downarrow p_\alpha \\
 \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xlongequal{\quad} & \frac{Z}{Z_{f,\alpha}} & \xleftarrow{\lambda_{f,\alpha}} & \frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha} & \xrightarrow{\epsilon'_{f,\alpha}} & \frac{Y}{Y_\alpha} \\
 & & & & \uparrow \alpha_f & \text{pullback} & \uparrow \alpha \\
 & & & & X_{f,\alpha} = \alpha^{-1}\left(\frac{Y_f}{Y_f \cap Y_\alpha}\right) & \xrightarrow{\epsilon''_{f,\alpha}} & X_\alpha
 \end{array}$$

tenemos que

$$F \circ \Delta = [u_f : f : p_f] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] := [u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha} : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f : \zeta_{f,\alpha}] : \bar{X} \rightarrow \bar{Z}.$$

Por definición, tenemos que

$$\mathbb{H}(F \circ \Delta) := \mathbb{G}(\zeta_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f) \circ \mathbb{G}(u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha})^{-1}.$$

Del diagrama anterior, tenemos que  $p_f, \varphi_{f,\alpha}, \epsilon'_{f,\alpha}, \epsilon''_{f,\alpha}, p_\alpha, u_f \in \Sigma$ . Luego, del diagrama anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{G}(\zeta_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha_f) \circ \mathbb{G}(u_\alpha \circ \epsilon''_{f,\alpha})^{-1} = \\
& = \mathbb{G}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(\varphi_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(\lambda_{f,\alpha}) \circ \mathbb{G}(\alpha_f) \circ \mathbb{G}(\epsilon''_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(u_\alpha)^{-1} \\
& = \mathbb{G}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(\varphi_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(\lambda_{f,\alpha}) \circ \mathbb{G}(\epsilon'_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(\alpha) \circ \mathbb{G}(u_\alpha)^{-1} \\
& = \mathbb{G}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(\varphi_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(\lambda_{f,\alpha}) \circ \mathbb{G}(\xi_{f,\alpha}) \circ \mathbb{G}(u_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(p_\alpha)^{-1} \circ \mathbb{G}(\alpha) \circ \mathbb{G}(u_\alpha)^{-1} \\
& = \mathbb{G}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(\varphi_{f,\alpha})^{-1} \circ \mathbb{G}(\varphi_{f,\alpha}) \circ \mathbb{G}(f) \circ \mathbb{G}(u_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(p_\alpha)^{-1} \circ \mathbb{G}(\alpha) \circ \mathbb{G}(u_\alpha)^{-1} \\
& = \mathbb{G}(p_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(f) \circ \mathbb{G}(u_f)^{-1} \circ \mathbb{G}(p_\alpha)^{-1} \circ \mathbb{G}(\alpha) \circ \mathbb{G}(u_\alpha)^{-1} \\
& = \mathbb{H}(F) \circ \mathbb{H}(\Delta).
\end{aligned}$$

Ahora bien, es fácil ver que  $\mathbb{H}(1_{\overline{X}}) = \mathbb{H}([1_X : 1_X : 1_X]) = 1_{\mathbb{H}(X)}$ . Por lo tanto,  $\mathbb{H}$  es un funtor.

Para  $f : X \rightarrow Y$ , se tiene que  $\mathbb{L}(f) = [1_X : f : 1_Y]$ . Así, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}([1_X : f : 1_Y]) &= \mathbb{G}(1_Y)^{-1} \circ \mathbb{G}(f) \circ \mathbb{G}(1_X)^{-1} \\
&= 1_{\mathbb{G}(Y)} \circ \mathbb{G}(f) \circ 1_{\mathbb{G}(X)} \\
&= \mathbb{G}(f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathbb{G} = \mathbb{H} \circ \mathbb{L}$ . La unicidad de  $\mathbb{H}$  tal que  $\mathbb{G} = \mathbb{H} \circ \mathbb{L}$  es fácil de ver. Por lo tanto, la pareja  $(\mathbb{L}, \mathcal{C}_\Sigma)$  es una categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  respecto a  $\Sigma$ , con

$$\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\Sigma.$$

□

## 2.5. Segunda construcción de la categoría $\mathcal{C}_\Sigma$

Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma := \Sigma_{\mathcal{A}}$ .

Usando la notación de la primera construcción de la categoría  $\mathcal{C}_\Sigma$  y recordando que, para cada par de objetos  $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{C}_\Sigma$ , definimos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y}) := \varinjlim q(X, Y).$$

Es decir, a un elemento  $F \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$  lo denotaremos como  $F = [u_p : f : p_f]$ . Siendo  $u_p, p_f$  un monomorfismo y un epimorfismo respectivamente, tales que  $u_p, p_f \in \Sigma$ .

Podemos definir dos subclases de  $\Sigma$ , como sigue

**Definición 2.52** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma := \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Definimos  $\Sigma' := \{s \in \Sigma \mid s \text{ es monomorfismo}\}$  y  $\Sigma'' := \{s \in \Sigma \mid s \text{ es epimorfismo}\}$

**Proposición 2.53** *La clase  $\Sigma'$  es calculable a derecha.*

**Demostración.** Sean  $s : X \rightarrow Y$  y  $s' : Y \rightarrow Z$  monomorfismos en  $\Sigma'$ . Entonces  $s' \circ s$  es un mono; y como  $\Sigma$  es calculable, tenemos que  $s' \circ s \in \Sigma$ . Por lo tanto,  $s' \circ s \in \Sigma'$ . De la misma forma se tiene que  $\Sigma'$  tiene a todas las identidades de objetos en  $\mathcal{C}$ .

Ahora, veamos que es permutable a derecha. En efecto, consideremos un diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & & Y' \\ & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

con  $s \in \Sigma'$ . Consideremos el pullback de  $s$  y  $f$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{s'} & Y' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{s} & Y. \end{array}$$

Note que  $s'$  es mono, pues  $s$  lo es. Además, de la prueba que  $\Sigma$  es calculable, sabemos que  $s' \in \Sigma$ . Por lo tanto, tenemos que  $s' \in \Sigma'$ , probándose que es permutable a derecha.

Ahora, veamos que  $\Sigma'$  es simplificable a derecha. En efecto, sean  $f, g : X \rightarrow Y$  morfismos en  $\mathcal{C}$ , para los cuales existe  $s : Y \rightarrow Y'$  en  $\Sigma'$  tal que  $sf = sg$ . Luego, como  $s$  es mono, tenemos que  $f = g$ . En particular,  $f \circ 1_X = g \circ 1_X$  con  $1_X \in \Sigma'$ . Probándose que es simplificable a derecha, y por lo tanto, concluimos que  $\Sigma'$  es calculable a derecha.  $\square$

**Proposición 2.54** *La clase  $\Sigma''$  es calculable a izquierda.*

**Demostración.** Dual a la proposición anterior.  $\square$

**Proposición 2.55** *Sean  $u : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $v : Y \rightarrow Z$  un monomorfismo en  $\mathcal{C}$ , tal que  $v \circ u : X \rightarrow Z$  está en  $\Sigma'$ . Entonces  $u \in \Sigma'$ .*

**Demostración.** En efecto, como  $v \circ u \in \Sigma'$ , tenemos que  $u$  es un monomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & \frac{Y}{X} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v & & \downarrow \theta & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{v \circ u} & Z & \longrightarrow & \frac{Z}{X} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$



Como  $v$  es un monomorfismo, por el "Lema de la Serpiente", tenemos que  $\theta$  es un monomorfismo. Usando que  $v \circ u \in \Sigma'$ , se sigue que  $\frac{Z}{X} \in \mathcal{A}$ ; y como  $\theta$  es mono y  $\mathcal{A}$  es una subcategoría de Serre, tenemos que  $\frac{Y}{X} \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto  $u \in \Sigma'$ .  $\square$

**Definición 2.56** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría preaditiva y  $\Sigma$  un sistema de morfismos en  $\mathcal{C}$ . Para  $X$  en  $\mathcal{C}$ , se define la categoría  $\Sigma/X$  como sigue.

- (a) *Objetos:* son pares  $(Y, s)$ , con  $s : Y \rightarrow X$  un morfismo en  $\Sigma$ ;
- (b) *Morfismos:* Un morfismo  $\alpha : (Y, s) \rightarrow (Y', s')$  en  $\Sigma/X$ , es un morfismo  $\alpha : Y \rightarrow Y'$  en  $\mathcal{C}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow \alpha & \searrow s & \\ & & X \\ & \nearrow s' & \\ Y' & & \end{array}$$

La composición de morfismos en  $\Sigma/X$  es la inducida de  $\mathcal{C}$

De manera dual, se define la categoría  $X/\Sigma$ .

Recordemos la siguiente definición.

**Definición 2.57** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría arbitraria y  $\mathcal{C}'$  una subcategoría plena de  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $\mathcal{C}'$  es **cofinal** si para cada objeto  $A \in \mathcal{C}$  existe un morfismo  $f : A \rightarrow A'$  con  $A' \in \mathcal{C}'$ . Dualmente,  $\mathcal{C}'$  es **coinitial** si para cada objeto  $A \in \mathcal{C}$  existe un morfismo  $f : A' \rightarrow A$  con  $A' \in \mathcal{C}'$ .

Ahora, veamos que  $\Sigma'/X$  tiene una subcategoría coinitial pequeña.

**Lema 2.58** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña,  $\Sigma'$  y  $X \in \mathcal{A}$ . Entonces existe una subcategoría coinitial pequeña de  $\Sigma'/X$ .

**Demostración.** Queremos una subcategoría pequeña  $\mathcal{D}$  de  $\Sigma'/X$  tal que para cada objeto  $(Y, s) \in \Sigma'/X$  exista un morfismo  $\beta : (Z, t) \rightarrow (Y, s)$  con  $(Z, t) \in \mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \downarrow \beta & \searrow t & \\ & & X \\ & \nearrow s & \\ Y & & \end{array}$$

Dado que  $\mathcal{C}$  es una categoría localmente pequeña, para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$  se tiene que la clase de subobjetos de  $X$ , denotada como  $\text{Sub}(X)$ , es un conjunto (ver 1.33). Recordemos que un subobjeto de  $X$  es una clase de equivalencia  $(X', u_{X'}^X)$  en la categoría  $M(X)$ , donde  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  es un monomorfismo. Note que la clase  $\{u_{X'}^X : X' \rightarrow X \mid u \text{ es monomorfismo}\}$  no es necesariamente un conjunto; y sólo con esta información, no podemos determinar que  $\Sigma'/X$  sea un conjunto.

Sin embargo, si tenemos que la clase

$$\mathcal{R} := \{(X', u_{X'}^X) \in \text{Sub}(X) \mid u_{X'}^X \in \Sigma\}$$

es un conjunto pues

$$\{(X', u_{X'}^X) \in \text{Sub}(X) \mid u_{X'}^X \in \Sigma\} \subseteq \text{Sub}(X).$$

Definamos  $\mathcal{D}_X \subseteq \Sigma'/X$  como la categoría plena que tiene por objetos a un representante de cada clase de equivalencia  $(X', u_{X'}^X) \in \mathcal{R}$ .

Con esto, claramente  $\mathcal{D}_X$  es una subcategoría pequeña de  $\Sigma'/X$  y además, para cada objeto  $(Y, s) \in \Sigma'/X$ , existe un morfismo  $\beta : (Z, t) \rightarrow (Y, s)$  (que de hecho es un isomorfismo) con  $(Z, t) \in \mathcal{D}_X$

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \downarrow \beta & \searrow t & \\ & & X \\ & \nearrow s & \\ Y & & \end{array}$$

□

Recordemos los siguientes teoremas

**Teorema 2.59** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría preaditiva y  $\Sigma$  un sistema de morfismos de  $\mathcal{C}$  tal que las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a)  $\Sigma$  es calculable a izquierda.
- (b) Para cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  la categoría  $X/\Sigma$  contiene una subcategoría pequeña cofinal denotada por  $F(X)$ .

Entonces, la categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  relativa a  $\Sigma$  existe. Dicha categoría es denotada por  $\mathcal{C}_\Sigma^l$  y es llamada categoría de fracciones a izquierda.

**Demostración.** Ver [17, Teorema 2.4.8]. □

**Teorema 2.60** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría preaditiva y  $\Sigma$  un sistema de morfismos de  $\mathcal{C}$  tal que las siguientes condiciones se satisfacen.

(a)  $\Sigma$  es calculable a derecha.

(b) Para cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  la categoría  $\Sigma/X$  contiene una subcategoría pequeña coinitial denotada por  $F(X)$ .

Entonces la categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  relativa a  $\Sigma$  existe. Dicha categoría es denotada por  $\mathcal{C}_{\Sigma}^r$  y es llamada categoría de fracciones a derecha.

**Demostración.** Ver [17, Teorema 2.6.4].  $\square$

**Proposición 2.61** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma$ . Entonces, existe la categoría de fracciones a derecha  $\mathcal{C}_{\Sigma}^r$  y el funtor canónico  $\mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}^r$  es exacto a derecha.

**Demostración.** Por el Teorema 2.60, existe la categoría de fracciones a derecha y el funtor localización

$$\mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}^r.$$

Un morfismo  $\alpha : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  en  $\mathcal{C}_{\Sigma}^r$  está dado por la clase de equivalencia de un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y, \end{array}$$

con  $s \in \Sigma'$ , donde la relación de equivalencia es la dada en la [17, Sección 2.6]. Al morfismo dado por el diagrama anterior, lo denotaremos como

$$f/s : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}.$$

Además, por el dual de la [17, Proposición 2.7.2], tenemos que  $\mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Sigma}^r$  es exacto a izquierda.  $\square$

**Proposición 2.62** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma'$ . Para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$  tenemos que  $X/\Sigma''$  tiene una subcategoría cofinal pequeña.

**Demostración.** Por [7, Proposición 14.2, pág. 16], existe una biyección entre la clase de subobjetos de  $X$  y la clase de objetos cociente de  $X$ . Luego, como  $\mathcal{C}$  es localmente pequeña, tenemos que la clase de objetos cociente de  $X$

$$\text{Coc}(X) := \{(p_X^{X'}, X') \mid \langle p_X^{X'}, X' \rangle \in E(X)\}$$

es un conjunto. En particular  $\mathcal{S} := \{(p_X^{X'}, X') \in \text{Coc}(X) \mid p_X^{X'} \in \Sigma''\}$  es un conjunto. Definamos  $\mathcal{E}_X \subseteq X/\Sigma''$  como la categoría plena de  $X/\Sigma''$  que tiene por objetos a un representante de cada clase de equivalencia  $(p_X^{X'}, X') \in \mathcal{S}$ .

Claramente  $\mathcal{E}_X$  es pequeña y además, para cada  $(p, Y) \in X/\Sigma''$ , tenemos que existe un objeto  $(p_Y^{Y'}, Y')$  en  $\mathcal{E}_X$  y un morfismo (de hecho un isomorfismo)  $\gamma : (p, Y) \rightarrow (p_Y^{Y'}, Y')$ . Por lo tanto  $\mathcal{E}_X$  es una subcategoría cofinal pequeña de  $X/\Sigma''$ .  $\square$

**Lema 2.63** *Si  $p : X \rightarrow Y$  es un epimorfismo en  $\Sigma''$ , entonces  $\mathbb{T}(p)$  es un epimorfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma^r$ .*

**Demostración.** Sea  $p : X \rightarrow Y$  un epimorfismo en  $\Sigma''$ . Veamos que  $\mathbb{T}(p)$  es un epimorfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma^r$ .

En efecto, como  $\mathcal{C}_\Sigma^r$  es una categoría preaditiva [17, Lema 2.5.1], basta ver que, si  $f/s : \bar{Y} \rightarrow \bar{Z}$  representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ Y & \xleftarrow{s} & Z, \end{array}$$

con  $s \in \Sigma'$  es tal que  $(f/s) \circ \mathbb{T}(p) = 0$ , entonces  $f/s = 0$ .

Para calcular la composición  $(f/s) \circ \mathbb{T}(p)$ , tenemos el siguiente diagrama (ver [17, Sección 2.6])

$$\begin{array}{ccccc} & & W' & & \\ & & \swarrow \quad \searrow & & \\ & & s' & & p' \\ & & X & \star & W \\ & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ X & \xrightarrow{1} & X & \xrightarrow{p} & Y & \xleftarrow{s} & W & \xrightarrow{f} & Z, \end{array}$$

con  $s' \in \Sigma'$ . Además, notemos que como el cuadrado  $\star$  del diagrama anterior se construye a través de un pullback (ver la Proposición 2.53) y  $p \in \Sigma$ , tenemos que  $p' \in \Sigma$  pues  $\Sigma$  es calculable (ver Teorema 2.17); y también  $p'$  es un epimorfismo pues  $p$  lo es. Por lo tanto  $p' \in \Sigma''$ . Ahora bien, la composición  $(f/s) \circ \mathbb{T}(p)$  está representado por el morfismo  $(f \circ p')/s'$  dado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & W' & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ X & \xleftarrow{s'} & Z. \end{array}$$

Como  $(f/s) \circ \mathbb{T}(p) = 0$ , tenemos que existen morfismos  $u$  y  $v$  tales que el siguiente

diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & & \swarrow u & \searrow v & \\
 & W' & & X & \\
 & \swarrow s' & & \searrow 0 & \\
 X & & & & Z. \\
 & \swarrow 1 & \searrow f \circ p' & & 
 \end{array}$$

Es decir, tenemos que  $v = s' \circ u \in \Sigma'$  y  $f \circ p' \circ u = 0$ . Por la Proposición 2.55, tenemos que  $u \in \Sigma'$  pues  $v = s' \circ u \in \Sigma'$ . Como  $\Sigma$  es calculable, tenemos que  $p' \circ u \in \Sigma$ . Ahora, consideremos la factorización de  $p' \circ u$  a través de su imagen. Luego tenemos el siguiente diagrama exacto

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & I & & & \\
 & & & \swarrow \pi & \searrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & L & \xrightarrow{p' \circ u} & W & \xrightarrow{\psi} & Z'' & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Como  $p' \circ u \in \Sigma$ , tenemos que  $K \in \mathcal{A}$  y  $Z'' \in \mathcal{A}$ . Usando que  $\text{Ker}(\pi) = K$  y  $\text{Coker}(\gamma) = Z''$ , tenemos que  $\gamma \in \Sigma'$  y  $\pi \in \Sigma''$ . Luego

$$0 = f \circ p' \circ u = f \circ \gamma \circ \pi.$$

Como  $\pi$  es un epimorfismo, tenemos que  $f \circ \gamma = 0$  con  $\gamma \in \Sigma'$ . Luego, por el dual del [9, Corolario 1.8, pág. 159] (versión fracciones derechas), tenemos que  $\mathbb{T}(f) = 0$ . Finalmente

$$f/s = \mathbb{T}(f) \circ \mathbb{T}(s)^{-1} = 0.$$

Probándose que  $\mathbb{T}(p)$  es un epimorfismo.  $\square$

**Proposición 2.64** Sea  $\overline{\Sigma''} := \{\mathbb{T}(p) \mid p \in \Sigma''\} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)$ . Entonces  $\overline{\Sigma''}$  es calculable a izquierda en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ .

**Demostración.**

Sean  $\mathbb{T}(p) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$  y  $\mathbb{T}(q) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$  en  $\overline{\Sigma''}$ , con  $p : X \longrightarrow Y$  y  $q : Y \longrightarrow Z$  morfismos en  $\Sigma''$ . Tenemos que  $qp$  es un epimorfismo pues  $p$  y  $q$  lo son, y además, tenemos que  $qp \in \Sigma$  pues  $\Sigma$  es bicalculable. Por lo tanto  $qp \in \Sigma''$  y además

$$\mathbb{T}(q) \circ \mathbb{T}(p) = \mathbb{T}(qp).$$

Además  $1_{\overline{X}} = \mathbb{T}(1_X)$  y  $1_X \in \Sigma''$ . Por lo tanto  $\overline{\Sigma''}$  es cerrado por composiciones e identidades.

Veamos que  $\overline{\Sigma''}$  es permutable a izquierda (ver la Definición 2.15). Para esto, consideremos un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(X) & \xrightarrow{\mathbb{T}(p)} & \mathbb{T}(Z) \\ f/s \downarrow & & \\ \mathbb{T}(Y), & & \end{array}$$

con  $p : X \rightarrow Z$  morfismo en  $\Sigma''$  y  $f/s$  representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y, \end{array}$$

con  $s \in \Sigma'$ . Consideremos  $p \circ s : W \rightarrow Z$ . Como  $\Sigma$  es calculable, tenemos que  $ps \in \Sigma$ . Consideremos la factorización de  $p \circ s$  a través de su imagen. Luego se tiene el siguiente diagrama exacto

$$\begin{array}{ccccccc} & & & I & & & \\ & & \nearrow \pi & & \searrow u & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\mu} & W & \xrightarrow{p \circ s} & Z & \xrightarrow{\psi} & Z'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como  $p \circ s \in \Sigma$ , tenemos que  $K \in \mathcal{A}$  y  $Z'' \in \mathcal{A}$ . Usando que  $\text{Ker}(\pi) = K$  y  $\text{Coker}(u) = Z''$ , tenemos que  $u \in \Sigma'$  y  $\pi \in \Sigma''$ . Calculemos el siguiente diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\pi} & I \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\pi'} & W'. \end{array}$$

Como  $\Sigma$  es calculable, tenemos que  $\pi' \in \Sigma$  y además  $\pi'$  es epimorfismo. Por lo tanto  $\pi' \in \Sigma''$ . Tenemos el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Z \\ s \uparrow & & \uparrow u \\ W & \xrightarrow{\pi} & I \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\pi'} & W'. \end{array}$$

Como  $s, u \in \Sigma'$ ,  $\mathbb{T}(s), \mathbb{T}(u)$  son isomorfismos en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ . Luego, del diagrama anterior, tenemos las siguientes igualdades en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ ,

$$\begin{aligned}
(*) : \quad \mathbb{T}(\pi') \circ \mathbb{T}(f) \circ \mathbb{T}(s)^{-1} &= \mathbb{T}(f') \circ \mathbb{T}(\pi) \circ \mathbb{T}(s)^{-1} \\
&= \mathbb{T}(f') \circ \mathbb{T}(u)^{-1} \circ \mathbb{T}(p).
\end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que como  $u \in \Sigma'$ , el morfismo  $f'/u : \bar{Z} \rightarrow \bar{W}'$  en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$  es representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& I & \\
u \swarrow & & \searrow f' \\
Z & & W'.
\end{array}$$

Por la demostración del dual del [17, Teorema 2.4.8], tenemos que  $f'/u = \mathbb{T}(f') \circ \mathbb{T}(u)^{-1}$  y también  $f/s = \mathbb{T}(f) \circ \mathbb{T}(s)^{-1}$ . Por lo tanto, de la igualdad (\*), tenemos la igualdad en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$

$$\mathbb{T}(\pi') \circ (f/s) = (f'/u) \circ \mathbb{T}(p).$$

Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{T}(X) & \xrightarrow{\mathbb{T}(p)} & \mathbb{T}(Z) \\
f/s \downarrow & & \downarrow f'/u \\
\mathbb{T}(Y) & \xrightarrow{\mathbb{T}(\pi')} & \mathbb{T}(W'),
\end{array}$$

con  $\pi' \in \Sigma''$ . Probándose que  $\bar{\Sigma}''$  es permutable a izquierda.

Ahora, veamos que  $\bar{\Sigma}''$  es simplificable a izquierda. En efecto, supongamos que para dos morfismos  $f/s, f'/s' : \bar{Y} \rightarrow \bar{Z}$  existe  $\mathbb{T}(p) : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ , con  $\mathbb{T}(p) \in \bar{\Sigma}''$  tal que  $(f/s) \circ \mathbb{T}(p) = (f'/s') \circ \mathbb{T}(p)$ . Como  $\mathbb{T}(p)$  es un epimorfismo por el Lema 2.63, tenemos que  $f/s = f'/s'$ . Luego, tomando  $1_{\bar{Z}} \in \bar{\Sigma}''$  se sigue que  $1_{\bar{Z}} \circ (f/s) = 1_{\bar{Z}} \circ (f'/s')$ . Por lo tanto  $\bar{\Sigma}''$  es simplificable a izquierda y así  $\bar{\Sigma}''$  es calculable a izquierda.  $\square$

**Proposición 2.65** *Para cada  $\bar{X} \in \mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ , tenemos que  $\bar{X}/\bar{\Sigma}''$  tiene una subcategoría cofinal pequeña.*

**Demostración.** Notemos que  $\mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Sigma'}^r$  induce una asignación suprayectiva

$$\mathbb{T} : X/\Sigma'' \rightarrow \bar{X}/\bar{\Sigma}''.$$

Dado que para  $p : X \rightarrow Y$ , con  $p \in \Sigma''$ , se tiene  $\mathbb{T}(p) : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ , con  $\mathbb{T}(p) \in \bar{\Sigma}''$ , obtenemos una subcategoría plena  $\bar{\mathcal{E}}_X := \mathbb{T}(\mathcal{E}_X)$  de  $\bar{X}/\bar{\Sigma}''$  (donde  $\mathcal{E}_X$  es definida en la Proposición 2.62). Afirmamos que  $\bar{\mathcal{E}}_X$  es cofinal en  $\bar{X}/\bar{\Sigma}''$ . Sea  $\mathbb{T}(p) : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  con  $\mathbb{T}(p) \in \bar{\Sigma}''$ . Como  $p : X \rightarrow Y$  está en  $\Sigma''$  y  $\mathcal{E}_X$

es cofinal en  $X/\Sigma''$  tenemos que existe un objeto  $(q, Z) \in \mathcal{E}_X$  y un morfismo  $\gamma : (p, Y) \rightarrow (q, Z)$ . Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow p & \downarrow \gamma \\ X & & \\ & \searrow q & \\ & & Z, \end{array}$$

y por lo tanto, el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{T}(Y) \\ & \nearrow \mathbb{T}(p) & \downarrow \mathbb{T}(\gamma) \\ \mathbb{T}(X) & & \\ & \searrow \mathbb{T}(q) & \\ & & \mathbb{T}(Z), \end{array}$$

con  $\mathbb{T}(q) \in \bar{\mathcal{E}}_X$ . Usando que  $\mathbb{T} : \mathcal{E}_X \rightarrow \bar{\mathcal{E}}_X$  es suprayectiva, con  $\mathcal{E}_X$  un conjunto, concluimos que  $\bar{\mathcal{E}}_X = \mathbb{T}(\mathcal{E}_X)$  es un conjunto. Probándose que  $\bar{\mathcal{E}}_X$  es una subcategoría cofinal pequeña de  $\bar{X}/\bar{\Sigma}''$ .  $\square$

**Teorema 2.66** *Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña y  $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Entonces existe la categoría preaditiva  $\mathcal{C}_\Sigma$  de fracciones relativa a  $\Sigma$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 2.61 existe el funtor  $\mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ .

Ahora, por la Proposición 2.64 y la Proposición 2.65, tenemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.59. Luego, existe la categoría de fracciones izquierdas de  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$  relativa a  $\bar{\Sigma}''$ , con

$$\mathbb{G} : \mathcal{C}_{\Sigma'}^r \rightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\bar{\Sigma}''}^l.$$

Sea

$$\mathbb{H} := \mathbb{G} \circ \mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\bar{\Sigma}''}^l.$$

Afirmamos que  $\mathbb{H}(s)$  es un isomorfismo, para todo  $s \in \Sigma$ . En efecto, consideremos la factorización de  $s$  a través de la imagen

$$\begin{array}{ccc} & & I \\ & \nearrow p & \searrow u \\ X & \xrightarrow{s} & Y. \end{array}$$



Tenemos que  $u \in \Sigma'$  y  $p \in \Sigma''$ . Por lo tanto

$$\mathbb{H}(s) = \mathbb{H}(u) \circ \mathbb{H}(p) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(p)) \circ \mathbb{G}(\mathbb{T}(u)).$$

Como  $\mathbb{T}(u)$  es un isomorfismo,  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(u))$  es un isomorfismo y además  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(p))$  es un isomorfismo pues  $\mathbb{T}(p) \in \overline{\Sigma''}$ . Luego,  $\mathbb{H}(s)$  es un isomorfismo.

Ahora, sea  $\mathbb{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $\mathbb{P}(s)$  es isomorfismo para todo  $s \in \Sigma$ . Dado que  $\Sigma' \subseteq \Sigma$ , tenemos que  $\mathbb{P}(s)$  es isomorfismo, para todo  $s \in \Sigma'$ . Luego, existe  $\mathbb{P}' : \mathcal{C}_{\Sigma'}^r \rightarrow \mathcal{D}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{T}} & \mathcal{C}_{\Sigma'}^r \\ \mathbb{P} \downarrow & & \swarrow \mathbb{P}' \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

Ahora bien, para  $p \in \Sigma''$  también tenemos que  $\mathbb{P}(p)$  es un isomorfismo. Del diagrama conmutativo de arriba, tenemos que

$$\mathbb{P}(p) = \mathbb{P}'(\mathbb{T}(p)).$$

Por lo tanto,  $\mathbb{P}'$  invierte a todos los elementos de  $\overline{\Sigma''}$ . Entonces por la propiedad universal de  $\mathbb{G}$ , existe  $\mathbb{P}'' : (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l \rightarrow \mathcal{D}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\Sigma'}^r & \xrightarrow{\mathbb{G}} & (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l \\ \mathbb{P}' \downarrow & & \swarrow \mathbb{P}'' \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{G} \circ \mathbb{T}} & (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l \\ \mathbb{P} \downarrow & & \swarrow \mathbb{P}'' \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

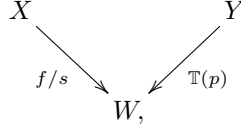
Supongamos que existe otro funtor  $\mathbb{Q} : (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l \rightarrow \mathcal{D}$  tal que el diagrama de arriba conmuta. Es decir,  $\mathbb{Q} \circ \mathbb{G} \circ \mathbb{T} = \mathbb{P}$ .

Consideremos  $\mathbb{Q} \circ \mathbb{G} : \mathcal{C}_{\Sigma'}^r \rightarrow \mathcal{D}$ . Como  $(\mathbb{Q} \circ \mathbb{G}) \circ \mathbb{T} = \mathbb{P}$ , por la propiedad universal de  $\mathbb{T}$ , tenemos que  $\mathbb{Q} \circ \mathbb{G} = \mathbb{P}'$ . Ahora, por la propiedad universal de  $\mathbb{G}$ , tenemos que  $\mathbb{Q} = \mathbb{P}''$ . Por lo tanto, la pareja  $(\mathbb{H}, (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l)$  es una categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  respecto a  $\Sigma$ , con

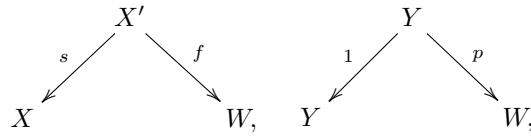
$$\mathbb{H} := \mathbb{G} \circ \mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l.$$

□

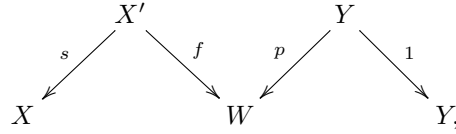
**Observación 2.67** Notemos que un morfismo de  $X$  a  $Y$  en  $(\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l$  está dado por un diagrama en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ ,



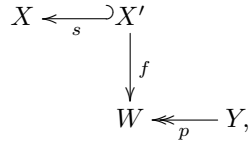
donde  $f/s : X \rightarrow W$  es un morfismo en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ , y  $\mathbb{T}(p) \in \overline{\Sigma''}$ . Tenemos que  $f/s$  y  $\mathbb{T}(p) = p/1$  están representados por los diagramas en  $\mathcal{C}$



con  $s \in \Sigma'$  y  $p \in \Sigma''$ . Luego, un morfismo de  $X$  a  $Y$  en  $(\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l$  lo podemos representar por un diagrama de la forma



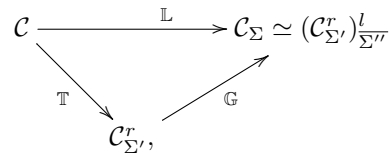
donde  $s \in \Sigma'$  y  $p \in \Sigma''$ . Olvidando el morfismo identidad, el diagrama anterior lo podemos escribir como



donde  $s \in \Sigma'$  y  $p \in \Sigma''$ .

Notemos que éste diagrama es congruente con lo descrito en la Notación 2.29.

**Corolario 2.68** Tenemos el siguiente diagrama conmutativo



donde  $\mathbb{L}$  es el funtor definido en la Proposición 2.46,  $\mathbb{G}$  y  $\mathbb{T}$  son los funtores definidos en la demostración del Teorema 2.66.

**Demostración.** Por el Teorema 2.51 la pareja  $(\mathbb{L}, \mathcal{C}_\Sigma)$  es una categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  respecto a  $\Sigma$ , con

$$\mathbb{L} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_\Sigma.$$

Por otro lado, por el Teorema 2.66 la pareja  $(\mathbb{H}, (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l)$  es una categoría de fracciones de  $\mathcal{C}$  respecto a  $\Sigma$ , con

$$\mathbb{H} := \mathbb{G} \circ \mathbb{T} : \mathcal{C} \longrightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l.$$

Usando la propiedad universal de  $\mathbb{L}$ , existe un único funtor  $\mathbb{P}' : \mathcal{C}_\Sigma \longrightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & \mathcal{C}_\Sigma \\ \mathbb{H} \downarrow & \searrow \mathbb{P}' & \\ (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l & & \end{array}$$

por otro lado, usando la propiedad universal de  $\mathbb{H}$ , existe un único funtor  $\mathbb{P}'' : (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l \longrightarrow \mathcal{C}_\Sigma$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{H}} & (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l \\ \mathbb{L} \downarrow & \searrow \mathbb{P}'' & \\ \mathcal{C}_\Sigma & & \end{array}$$

de la unicidad de  $\mathbb{P}'$  y  $\mathbb{P}''$ , concluimos que  $\mathcal{C}_\Sigma \simeq (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l$ . Finalmente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & \mathcal{C}_\Sigma \simeq (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l \\ \mathbb{T} \searrow & & \nearrow \mathbb{G} \\ & \mathcal{C}_{\Sigma'}^r & \end{array}$$

□

**Notación 2.69** Del corolario anterior, junto con la notación usada, denotaremos a la categoría  $\mathcal{C}_\Sigma$  como  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  y diremos que  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es la **categoría cociente** de  $\mathcal{C}$  relativa a  $\mathcal{A}$ .

# Capítulo 3

## La categoría $\mathcal{C}/\mathcal{A}$

Usando ambas construcciones de la categoría cociente  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  de  $\mathcal{C}$  respecto a  $\mathcal{A}$ , dada  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  localmente pequeña. Se expondrá algunos resultados, sobre propiedades que tiene la categoría  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ , junto con el funtor  $\mathbb{L}$ .

Con todo lo hecho anteriormente, hemos demostrado que  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es en efecto una categoría.

Recordemos, por el Corolario 2.68, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & \mathcal{C}/\mathcal{A} \\ & \searrow \mathbb{T} & \nearrow \mathbb{G} \\ & \mathcal{C}_{\Sigma'}^r & \end{array}$$

donde  $\mathbb{L}$  es el funtor definido en la Proposición 2.46 y  $\mathbb{G}$  y  $\mathbb{T}$  son los funtores definidos en la demostración del Teorema 2.66. El cual, nos permite trabajar apartir de las dos construcciones realizadas en el capítulo anterior. Siendo este capítulo, las bases para los resultados del capítulo 4.

A lo largo de este capítulo supondremos que,  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana localmente pequeña,  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$  y  $\Sigma := \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Además los funtores  $\mathbb{G}$  y  $\mathbb{T}$ , son los funtores de la demostración del Corolario 2.68.

### 3.1. Propiedades de $\mathcal{C}/\mathcal{A}$

**Proposición 3.1** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Entonces,  $\mathbb{L}(f) = 0$  si y solo si  $\text{Im}(f) \in \mathcal{A}$ .*

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ). Supongamos que  $\mathbb{L}(f) = 0$ . Entonces, tenemos que  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(f)) = 0$ . Por el [9, Corolario 1.8, pág. 159], existe  $s'' : Y \rightarrow B$  en  $\Sigma''$  tal que  $0 = \mathbb{T}(s'')\mathbb{T}(f) = \mathbb{T}(s''f)$  en  $\mathcal{C}_{\Sigma}^r$ . Por la versión para fracciones derechas del [9, Corolario 1.8, pág. 159], tenemos que existe  $s' : A \rightarrow X$  tal que  $s''fs' = 0$  en  $\mathcal{C}$ . Consideremos la factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \nearrow u \\ & & I \end{array}$$

de  $f$  a través de su imagen. Sea  $\mu : K \rightarrow Y$  el kernel de  $s''$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(K) & \xrightarrow{p'} & Z & \xrightarrow{u'} & K \\ \downarrow \theta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \mu \\ X & \xrightarrow{p} & I & \xrightarrow{u} & Y, \end{array}$$

donde los dos cuadrados  $I$  y  $II$  son pullbacks. Luego el cuadrado exterior es un pullback. Ahora bien, como  $s'' \in \Sigma''$ , tenemos que  $K = \text{Ker}(s'') \in \mathcal{A}$ . En el diagrama anterior tenemos que  $u' : Z \rightarrow K$  es un monomorfismo y por lo tanto  $Z \in \mathcal{A}$  pues  $\mathcal{A}$  es de Serre.

Por otro lado, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$(*) : \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & f^{-1}(K) & \xrightarrow{p'} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \theta & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & I & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & W & \equiv & W & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Dado que  $\mu = \text{Ker}(s'')$  y  $s''fs' = 0$ , existe  $\gamma : A \rightarrow K$  tal que  $\mu\gamma = fs'$ . Como el siguiente cuadrado es pullback

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(K) & \xrightarrow{u'p'} & K \\ \downarrow \theta & & \downarrow \mu \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

existe  $\psi : A \rightarrow f^{-1}(K)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & & & \\
 \searrow \psi & & \gamma & & \\
 & f^{-1}(K) & \xrightarrow{u'p'} & K & \\
 \searrow s' & \downarrow \theta & & \downarrow \mu & \\
 & X & \xrightarrow{f} & Y & 
 \end{array}$$

Es decir,  $\psi : A \rightarrow f^{-1}(K)$  es tal que  $\theta\psi = s'$ . Usando que  $s'$  es mono, tenemos que  $\psi$  es mono. Luego podemos construir el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{s'} & X & \longrightarrow & X/A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \psi & & \parallel & & \downarrow \psi' \\
 0 & \longrightarrow & f^{-1}(K) & \xrightarrow{\theta} & X & \longrightarrow & W \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

donde  $\psi'$  es un epimorfismo. Usando que  $s' \in \Sigma'$ , tenemos que  $\frac{X}{A} \in \mathcal{A}$  y usando que  $\mathcal{A}$  es de Serre, tenemos que  $W \in \mathcal{A}$ . De la siguiente sucesión exacta construida en el diagrama (\*)

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} I \longrightarrow W \longrightarrow 0,$$

concluimos que  $I = \text{Im}(f) \in \mathcal{A}$  pues  $Z, W \in \mathcal{A}$ .

( $\Leftarrow$ ). Supongamos que  $\text{Im}(f) = I \in \mathcal{A}$ . Consideremos la factorización

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \searrow p & & \nearrow u \\
 & I & 
 \end{array}$$

de  $f$  a través de su imagen. Sea  $u : K \rightarrow X$  el kernel de  $f$ . Entonces  $u \in \Sigma'$ . Además, como  $fu = 0$ , por la versión para fracciones derechas del [9, Corolario 1.8, pág. 159], concluimos que  $\mathbb{T}(f) = 0$  en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ , y por lo tanto  $\mathbb{L}(f) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(f)) = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.2** Sean  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $p : X \rightarrow W$  un epimorfismo tal que  $\text{Ker}(p) \in \mathcal{A}$ . Consideremos el diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 p \downarrow & & \downarrow p' \\
 W & \xrightarrow{f'} & L.
 \end{array}$$

- (a) Entonces  $p'$  es un epimorfismo, con  $\text{Ker}(p') \in \mathcal{A}$ , y existe un morfismo  $\psi \in \Sigma''$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\epsilon} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow p & & \downarrow p' \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\epsilon'} & W & \xrightarrow{f'} & L. \end{array}$$

- (b) Si  $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}$ , entonces también  $\text{Ker}(f') \in \mathcal{A}$ .

**Demostración.**

- (a) Como  $p$  es epimorfismo, tenemos que  $p'$  es un epimorfismo. Por otro lado, como  $\Sigma$  es calculable, tenemos que  $p' \in \Sigma$  y por lo tanto  $\text{Ker}(p') \in \mathcal{A}$ . Consideremos las factorizaciones

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \pi & \nearrow u \\ & I & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f'} & L \\ & \searrow \pi' & \nearrow u' \\ & J & \end{array}$$

de  $f$  y  $f'$ , respectivamente, a través de sus imágenes. Por la propiedad universal de las imágenes, existe  $p'' : I \rightarrow J$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & W \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ I & \xrightarrow{p''} & J \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ Y & \xrightarrow{p'} & L. \end{array}$$

Luego, se tiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & I & \xrightarrow{p''} & J & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow u & & \downarrow u' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{p'} & L & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como  $N' = \text{Ker}(p') \in \mathcal{A}$  y  $\gamma$  es un monomorfismo, tenemos que  $N = \text{Ker}(p'') \in \mathcal{A}$ . Consideremos el diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\epsilon} & X & \xrightarrow{\pi} & I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow p & & \downarrow p'' & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\epsilon'} & W & \xrightarrow{\pi'} & J & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por el Lema de la Serpiente se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\psi) \longrightarrow \text{Ker}(p) \longrightarrow \text{Ker}(p'') \longrightarrow \text{Coker}(\psi) \longrightarrow 0.$$

Como  $\text{Ker}(p), \text{Ker}(p'') \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\text{Ker}(\psi), \text{Coker}(\psi) \in \mathcal{A}$ . Por lo que,  $\psi \in \Sigma$ . Luego, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\epsilon} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow p & & \downarrow p' \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\epsilon'} & W & \xrightarrow{f'} & L. \end{array}$$

Por el dual de la Proposición 2.9,  $\psi$  es un epimorfismo y por lo tanto  $\psi \in \Sigma''$ .

- (b) Por (a), tenemos que  $\psi$  es un epimorfismo. Por lo tanto  $\text{Ker}(f') \in \mathcal{A}$  si  $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}$ , pues  $\mathcal{A}$  es de Serre.

□

**Proposición 3.3** Sean  $f : X \longrightarrow Y$  y  $g : Z \longrightarrow X$  morfismos en  $\mathcal{C}$ , tale que  $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}$  y  $\text{Im}(fg) \in \mathcal{A}$ . Entonces  $\mathbb{L}(g) = 0$ .

**Demostración.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & X \\ \parallel & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{fg} & Y. \end{array}$$

Sean  $I = \text{Im}(g)$  y  $J = \text{Im}(fg)$ . Por la propiedad universal de la imagen, existe un morfismo  $\theta : I \longrightarrow J$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{p} & I & \xrightarrow{u} & X \\ \parallel & & \downarrow \theta & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{q} & J & \xrightarrow{\mu} & Y. \end{array}$$

En particular,  $\theta$  es un epimorfismo. Luego tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\theta) & \xrightarrow{\epsilon} & I & \xrightarrow{\theta} & J \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow u & & \downarrow \mu \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f) & \xrightarrow{\epsilon'} & X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$



donde  $\gamma$  es un monomorfismo pues  $\epsilon'\gamma = u\epsilon$  es un monomorfismo. Como  $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}$ , concluimos que  $\text{Ker}(\theta) \in \mathcal{A}$ . Ahora bien, como  $J = \text{Im}(fg) \in \mathcal{A}$ , de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\theta) \xrightarrow{\epsilon} I \xrightarrow{\theta} J \longrightarrow 0,$$

concluimos que  $I = \text{Im}(g) \in \mathcal{A}$ . Luego por Proposición 3.1 concluimos que  $\mathbb{L}(g) = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.4** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos en  $\mathcal{C}$ , tales que  $\text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$  y  $\text{Im}(gf) \in \mathcal{A}$ . Entonces  $\mathbb{L}(g) = 0$ .

**Demostración.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{gf} & Z \\ \downarrow f & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

Sean  $I = \text{Im}(gf)$  y  $J = \text{Im}(g)$ . Por la propiedad universal de la imagen, existe un morfismo  $\theta : I \rightarrow J$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{p} & I & \xrightarrow{u} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow \theta & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{q} & J & \xrightarrow{\mu} & Z. \end{array}$$

En particular,  $\theta$  es un monomorfismo. Luego tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\pi'} & \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\theta} & J & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(\theta) \longrightarrow 0, \end{array}$$

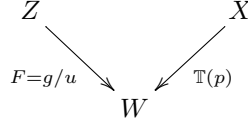
donde  $\gamma$  es un epimorfismo pues  $\gamma\pi' = \pi q$  es un epimorfismo. Como  $\text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$ , concluimos que  $\text{Coker}(\theta) \in \mathcal{A}$ . Ahora bien, como  $I = \text{Im}(gf) \in \mathcal{A}$ , de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\theta} J \xrightarrow{\pi} \text{Coker}(\theta) \longrightarrow 0$$

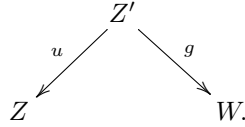
concluimos que  $J = \text{Im}(g) \in \mathcal{A}$ . Luego por la Proposición 3.1, concluimos que  $\mathbb{L}(g) = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.5** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\text{Ker}(f) \in \mathcal{A}$  si y solo si  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo.

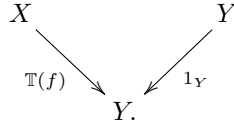
**Demostración.** ( $\implies$ ). Veamos que  $\mathbb{L}(f) : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  es un monomorfismo. Sea  $\alpha : \bar{Z} \rightarrow \bar{X}$  un morfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma$  tal que  $\mathbb{L}(f) \circ \alpha = 0$ . Tenemos que  $\alpha$  está identificado con el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}_\Sigma^r$ ,



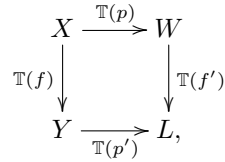
con  $p : X \rightarrow W$  en  $\Sigma''$ , y donde  $F = \mathbb{T}(g)\mathbb{T}(u)^{-1}$  con  $u \in \Sigma'$  está representado por el diagrama



Es decir, tenemos que  $\alpha = \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1}\mathbb{G}(F) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1}\mathbb{G}(\mathbb{T}(g)\mathbb{T}(u)^{-1})$ . Como  $\mathbb{L} = \mathbb{G} \circ \mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l$ , tenemos que  $\mathbb{L}(f)$  se identifica con el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ ,

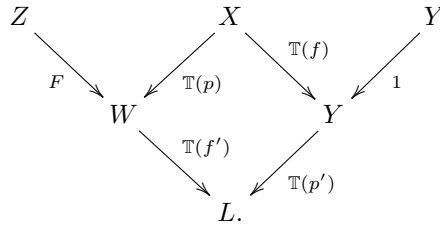


Por la Proposición 3.2, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ ,



donde  $p'$  es un epimorfismo en  $\mathcal{C}$  con  $\text{Ker}(p') \in \mathcal{A}$  y también  $\text{Ker}(f') \in \mathcal{A}$ .

Para hacer la composición  $\mathbb{L}(f) \circ \alpha = 0$ , consideremos el diagrama



Ahora bien

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{L}(f) \circ \alpha = \mathbb{G}(\mathbb{T}(f))\mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1}\mathbb{G}(F) \\
&= \mathbb{G}(\mathbb{T}(p'))^{-1}\mathbb{G}(\mathbb{T}(f'))\mathbb{G}(F) \\
&= \mathbb{G}(\mathbb{T}(p'))^{-1}\mathbb{G}(\mathbb{T}(f'))\mathbb{G}(\mathbb{T}(g))\mathbb{G}(\mathbb{T}(u))^{-1}.
\end{aligned}$$

Como  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(p'))^{-1}$  y  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(u))^{-1}$  son isomorfismos, concluimos que  $\mathbb{L}(f'g) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(f'))\mathbb{G}(\mathbb{T}(g)) = 0$ . Por la Proposición 3.1 tenemos que  $\text{Im}(f'g) \in \mathcal{A}$ . Dado que  $\text{Ker}(f') \in \mathcal{A}$ , por la Proposición 3.3 concluimos que  $\mathbb{L}(g) = 0$ . Como  $\alpha = \mathbb{L}(p)^{-1}\mathbb{L}(g)\mathbb{L}(u)^{-1}$ , se tiene que  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo.

( $\Leftarrow$ ). Supongamos que  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo y sea  $\epsilon : K \rightarrow X$  el kernel de  $f$ . Entonces  $f\epsilon = 0$  y por lo tanto  $\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(\epsilon) = 0$  y como  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo, tenemos que  $\mathbb{L}(\epsilon) = 0$ . Por la Proposición 3.1, se sigue que  $\text{Im}(\epsilon) \in \mathcal{A}$ , y como  $\epsilon$  es un monomorfismo, concluimos que  $K \cong \text{Im}(\epsilon) \in \mathcal{A}$ , probándose lo deseado.  $\square$

**Proposición 3.6** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Entonces,  $\text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$  si y solo si  $\mathbb{L}(f)$  es un epimorfismo.*

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ). Supongamos que  $\text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$ . Veamos que  $\mathbb{L}(f) : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$  es un epimorfismo. En efecto, sea  $\alpha : \overline{Y} \rightarrow \overline{Z}$  un morfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma$  tal que  $\alpha \circ \mathbb{L}(f) = 0$ . Tenemos que  $\alpha$  está identificado con el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}_\Sigma^r$

$$\begin{array}{ccc}
Y & & Z \\
\searrow & & \swarrow \\
& W & \\
\text{\scriptsize } F=g/u & & \text{\scriptsize } \mathbb{T}(p)
\end{array}$$

con  $p : Z \rightarrow W$  en  $\Sigma'$ , y donde  $F = \mathbb{T}(g)\mathbb{T}(u)^{-1}$  con  $u \in \Sigma'$  está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& Y' & \\
u \swarrow & & \searrow g \\
Y & & W.
\end{array}$$

El diagrama anterior lo podemos completar al siguiente diagrama de pushout

$$(*) \quad \begin{array}{ccc}
& Y' & \\
u \swarrow & & \searrow g \\
Y & & W \\
g' \searrow & & \swarrow u' \\
& L, &
\end{array}$$

con  $u' \in \Sigma'$  pues  $u'$  es mono y además  $\text{Coker}(u') = \text{Coker}(u) \in \mathcal{A}$ . Como  $\mathbb{L} := \mathbb{G} \circ \mathbb{T} : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l$ , tenemos que  $\mathbb{L}(f)$  se identifica con el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ ,

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow \mathbb{T}(f) & \swarrow 1_Y \\ & & Y. \end{array}$$

Para hacer la composición  $\alpha \circ \mathbb{L}(f)$ , consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & Z \\ & & \swarrow 1_Y & \searrow F & \swarrow \mathbb{T}(p) \\ X & \searrow \mathbb{T}(f) & Y & & W \\ & & \searrow F & \swarrow 1_W & \\ & & W & & \end{array}$$

Entonces, del diagrama anterior y del diagrama (\*), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \circ \mathbb{L}(f) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G}(F) \mathbb{G}(\mathbb{T}(f)) \\ &= \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G}(\mathbb{T}(u')^{-1}) \mathbb{G}(\mathbb{T}(g')) \mathbb{G}(\mathbb{T}(f)) \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G}(\mathbb{T}(u')^{-1})$  es isomorfismo, concluimos la igualdad  $\mathbb{L}(g'f) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(g')) \mathbb{G}(\mathbb{T}(f)) = 0$ . Por lo tanto, por la Proposición 3.1, concluimos que  $\text{Im}(g'f) \in \mathcal{A}$ . Por la Proposición 3.4 concluimos que  $\mathbb{L}(g') = 0$ , y por lo tanto  $\alpha = \mathbb{L}(p)^{-1} \mathbb{L}(g) \mathbb{L}(u)^{-1} = \mathbb{L}(p)^{-1} \mathbb{L}(u')^{-1} \mathbb{L}(g') = 0$ . Probándose que  $\mathbb{L}(f)$  es un epimorfismo.

( $\Leftarrow$ ). Supongamos que  $\mathbb{L}(f)$  es un epimorfismo. Sea  $\gamma : Y \rightarrow Z$  el cokernel de  $f$ . Entonces  $\gamma f = 0$  y por lo tanto  $\mathbb{L}(\gamma) \mathbb{L}(f) = 0$ , y como  $\mathbb{L}(f)$  es un epimorfismo, tenemos que  $\mathbb{L}(\gamma) = 0$ . Por la Proposición 3.1, tenemos que  $\text{Im}(\gamma) = Z \in \mathcal{A}$  y concluimos que  $\text{Coker}(f) = Z \in \mathcal{A}$ , probándose lo deseado.  $\square$

**Proposición 3.7** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Si  $\epsilon : K \rightarrow X$  es el kernel de  $f : X \rightarrow Y$ , entonces  $\mathbb{L}(\epsilon)$  es el kernel de  $\mathbb{L}(f)$ .

**Demostración.** Sea  $\alpha : Z \rightarrow X$  un morfismo en  $\mathcal{C}_{\Sigma}$  tal que  $\mathbb{L}(f) \circ \alpha = 0$ . Tenemos que  $\alpha$  esta identificado con el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$ ,

$$\begin{array}{ccc} Z & & X \\ & \searrow F=g/u & \swarrow \mathbb{T}(p) \\ & & W, \end{array}$$



Como  $\Sigma$  es calculable, existe  $t : R \rightarrow Q \in \Sigma$  tal que  $(f'g)s't = 0t = 0$ . Sea  $\epsilon' : K' \rightarrow W$  el kernel de  $f'$ . Entonces existe  $h : R \rightarrow K'$  tal que  $\epsilon'h = gs't$ . Luego

$$\mathbb{L}(\epsilon')\mathbb{L}(h)\mathbb{L}(s't)^{-1} = \mathbb{L}(g).$$

Componiendo con  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(u)^{-1})$ , tenemos

$$\mathbb{L}(\epsilon')\mathbb{L}(h)\mathbb{L}(s't)^{-1}\mathbb{L}(u)^{-1} = \mathbb{L}(g)\mathbb{L}(u)^{-1}.$$

Luego,

$$\mathbb{L}(p)^{-1}\mathbb{L}(\epsilon')\mathbb{L}(h)\mathbb{L}(s't)^{-1}\mathbb{L}(u)^{-1} = \mathbb{L}(p)^{-1}\mathbb{L}(g)\mathbb{L}(u)^{-1} = \alpha.$$

Por la Proposición 3.2(a), tenemos que  $\mathbb{L}(p)^{-1}\mathbb{L}(\epsilon') = \mathbb{L}(\epsilon)\mathbb{L}(\psi)^{-1}$ . Por lo tanto

$$\alpha = \mathbb{L}(\epsilon)\left(\mathbb{L}(\psi)^{-1}\mathbb{L}(h)\mathbb{L}(s't)^{-1}\mathbb{L}(u)^{-1}\right),$$

y como  $\mathbb{L}(\epsilon)$  es mono pues  $\epsilon$  lo es (ver la Proposición 3.5), concluimos que  $\mathbb{L}(\epsilon)$  es el kernel de  $\mathbb{L}(f)$ .  $\square$

**Proposición 3.8** Sean  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$  y  $p : Y \rightarrow Z$  cokernel de  $f$ . Entonces,  $\mathbb{L}(p)$  es el cokernel de  $\mathbb{L}(f)$ .

**Demostración.** Sea  $\alpha : \bar{Y} \rightarrow \bar{Z}$  un morfismo en  $\mathcal{C}_\Sigma$  tal que  $\alpha \circ \mathbb{L}(f) = 0$ . Tenemos que  $\alpha$  esta identificado con el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}_\Sigma^r$ ,

$$\begin{array}{ccc} Y & & Z' \\ & \searrow^{F=g/u} & \swarrow_{\mathbb{T}(p)} \\ & W, & \end{array}$$

con  $p : Z \rightarrow W$  en  $\Sigma''$ , y donde  $F = \mathbb{T}(g)\mathbb{T}(u)^{-1}$  con  $u \in \Sigma'$  está representado por el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ u \swarrow & & \searrow g \\ Y & & W. \end{array}$$

El diagrama anterior lo podemos completar al diagrama de pushout

$$(*) : \begin{array}{ccccc} & & Y' & & \\ & u \swarrow & & \searrow g & \\ Y & & & & W \\ & \searrow g' & & \swarrow u' & \\ & & L. & & \end{array}$$

Como  $\mathbb{L} := \mathbb{G} \circ \mathbb{T} : \mathcal{C} \longrightarrow (\mathcal{C}_{\Sigma'}^r)_{\Sigma''}^l$ , tenemos que  $\mathbb{L}(f)$  se identifica con el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}_{\Sigma'}^r$

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow \mathbb{T}(f) & \swarrow 1_Y \\ & Y & \end{array}$$

Para calcular  $\alpha \circ \mathbb{L}(f)$ , consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & & Y & & Z \\ & \searrow \mathbb{T}(f) & & \swarrow F & \\ & Y & & W & \\ & & \searrow F & \swarrow 1_W & \\ & & & W & \end{array}$$

Del diagrama anterior y del diagrama (\*), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \circ \mathbb{L}(f) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G}(F) \mathbb{G}(\mathbb{T}(f)) \\ &= \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G}(\mathbb{T}(u')^{-1}) \mathbb{G}(\mathbb{T}(g')) \mathbb{G}(\mathbb{T}(f)). \end{aligned}$$

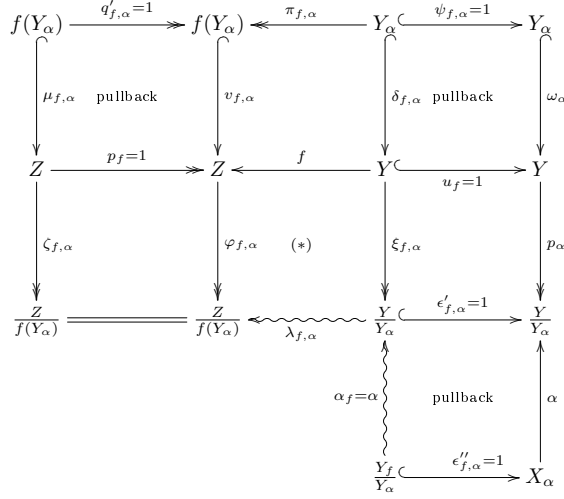
Como  $\mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G}(\mathbb{T}(u')^{-1})$  es iso, concluimos que  $\mathbb{L}(g'f) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(g')) \mathbb{G}(\mathbb{T}(f)) = 0$ . Por lo tanto, por [9, Corolario 1.8, pág. 159] y su versión para fracciones a derecha, existen  $s'' : L \longrightarrow R$  en  $\Sigma''$  y  $s' : A \longrightarrow X$  en  $\Sigma'$  tales que  $s''(g'f)s' = 0$ . Es decir,  $s''(g'f)s' = 0 = 0s'$ . Como  $\Sigma$  es calculable, existe  $t : R \longrightarrow Q$  en  $\Sigma$  tal que  $(ts''g')f = t0 = 0$ . Usando que  $p : Y \longrightarrow Z$  es el cokernel de  $f$ , existe  $h : Z \longrightarrow Q$  tal que  $hp = ts''g'$ . Por lo tanto

$$\mathbb{L}(ts'')^{-1} \mathbb{L}(h) \mathbb{L}(p) = \mathbb{L}(g').$$

Como  $F = \mathbb{T}(u')^{-1} \mathbb{T}(g')$  (ver diagrama (\*)), tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G}(F) = \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G} \mathbb{T}(u')^{-1} \mathbb{G}(\mathbb{T}(g')) \\ &= \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G} \mathbb{T}(u')^{-1} \mathbb{L}(g') \\ &= \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G} \mathbb{T}(u')^{-1} \mathbb{L}(ts'')^{-1} \mathbb{L}(h) \mathbb{L}(p) \\ &= \left( \mathbb{G}(\mathbb{T}(p))^{-1} \mathbb{G} \mathbb{T}(u')^{-1} \mathbb{L}(ts'')^{-1} \mathbb{L}(h) \right) \mathbb{L}(p) \\ &= \left( \mathbb{L}(p) \right)^{-1} \mathbb{L}(u')^{-1} \mathbb{L}(ts'')^{-1} \mathbb{L}(h) \mathbb{L}(p); \end{aligned}$$

y como  $\mathbb{L}(p)$  es un epimorfismo pues  $p$  lo es (ver Proposición 3.6), tenemos que  $\mathbb{L}(p)$  es el cokernel de  $\mathbb{L}(f)$ .  $\square$

Figura 3.1: Diagrama de la composición  $\mathbb{L}(f) \circ F = 0$ 

**Lema 3.9** Sea  $F := [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$  un morfismo en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ . Entonces,  $F = 0$  en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  si y solo si  $\text{Im}(\alpha) \in \mathcal{A}$ .

**Demostración.** Sabemos que  $F = \mathbb{L}(p_\alpha)^{-1} \circ \mathbb{L}(\alpha) \circ \mathbb{L}(u_\alpha)^{-1}$ . Como  $\mathbb{L}(p_\alpha)^{-1}$  y  $\mathbb{L}(u_\alpha)^{-1}$  son isomorfismos, tenemos que  $F = 0$  si y solo si  $\mathbb{L}(\alpha) = 0$ . Por la Proposición 3.1, tenemos que esto último pasa si y solo si  $\text{Im}(\alpha) \in \mathcal{A}$ .  $\square$

En la siguiente proposición, vamos a dar otra prueba de la Proposición 3.7 utilizando la primera construcción de la categoría  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  vista en el capítulo anterior. La demostración que veremos es la versión expandida de la dada por P. Gabriel en su tesis de doctorado (ver [4, Lema 3, páginas 366 y 367]). También nos ayudamos de [15, Proposición 6.6(3)], en las notas del profesor Smith.

**Proposición 3.10** Sea  $f : X \longrightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Si  $i : M \longrightarrow Y$  es el kernel de  $f : X \longrightarrow Y$ , entonces  $\mathbb{L}(i)$  es el kernel de  $\mathbb{L}(f)$ .

**Demostración.** Sea  $F := [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] : \bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$  tal que  $\mathbb{L}(f) \circ F = 0$ .

Del diagrama de la figura 3.1, tenemos que  $\mathbb{L}(f) \circ F = [1_Y : f : 1_Z] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\alpha : \lambda_{f,\alpha} \circ \alpha : \zeta_{f,\alpha}] = 0$ . Por el Lema 3.9, tenemos que esto implica que  $\text{Im}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha) \in \mathcal{A}$ .

Tomando kerneles a los morfismos del cuadrado (\*) del diagrama de la figura



3.1 tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\star\star) : & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j'} & Y_\alpha & \xrightarrow{\pi_{f,\alpha}} & f(Y_\alpha) \\
 & & \downarrow j & & \downarrow \omega_\alpha & & \downarrow v_{f,\alpha} \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{f} & Z \\
 & & \downarrow \gamma & & \downarrow p_\alpha & & \downarrow \varphi_{f,\alpha} \\
 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\epsilon} & \frac{Y}{Y_\alpha} & \xrightarrow{\lambda_{f,\alpha}} & \frac{Z}{f(Y_\alpha)}.
 \end{array}$$

Ahora, consideremos el diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha^{-1}(N) & \xrightarrow{\delta} & N \\
 \downarrow \epsilon' & & \downarrow \epsilon \\
 X_\alpha & \xrightarrow{\alpha} & \frac{Y}{Y_\alpha} \xrightarrow{\lambda_{f,\alpha}} \frac{Z}{Y_\alpha}.
 \end{array}$$

Afirmamos que  $\epsilon'$  es el kernel de  $\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha$ . En efecto, sea  $\psi : R \rightarrow X_\alpha$  tal que  $\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha \circ \psi = 0$ . Como  $\epsilon = \text{Ker}(\lambda_{f,\alpha})$ , existe  $\psi' : R \rightarrow N$  tal que  $\epsilon\psi' = \alpha\psi$ . Como el cuadrado es un pullback, existe  $\psi'' : R \rightarrow \alpha^{-1}(N)$  tal que  $\epsilon'\psi'' = \psi$  y como  $\epsilon'$  es mono pues  $\epsilon$ , tenemos que  $\epsilon' = \text{Ker}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha)$ .

Luego, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \alpha^{-1}(N) \xrightarrow{\epsilon'} X_\alpha \longrightarrow \text{Im}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha) \longrightarrow 0.$$

Luego, podemos completar dicha sucesión al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \alpha^{-1}(N) & \xrightarrow{\epsilon'} & X_\alpha & \longrightarrow & \text{Im}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow u_\alpha & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \alpha^{-1}(N) & \xrightarrow{u_\alpha \epsilon'} & X & \longrightarrow & \frac{X}{\alpha^{-1}(N)} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \frac{X}{X_\alpha} & \xlongequal{\quad} & \frac{X}{X_\alpha} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

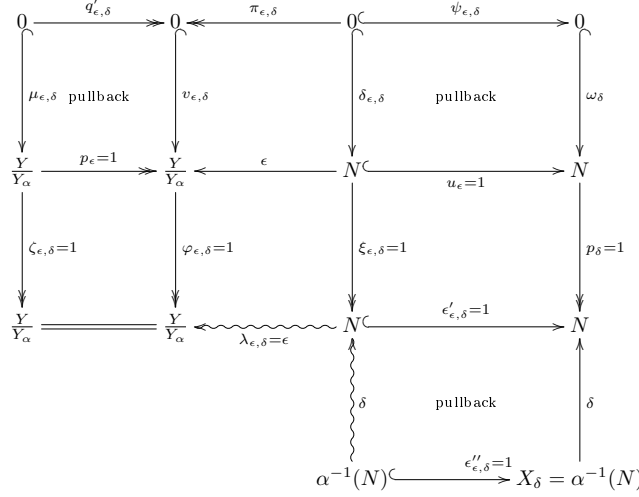


Figura 3.2: Diagrama de la composición  $[1_N : \epsilon : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N]$

De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Im}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha) \longrightarrow \frac{X}{\alpha^{-1}(N)} \longrightarrow \frac{X}{X_\alpha} \longrightarrow 0,$$

concluimos que  $\frac{X}{\alpha^{-1}(N)} \in \mathcal{A}$ , pues  $\text{Im}(\lambda_{f,\alpha} \circ \alpha)$ ,  $\frac{X}{X_\alpha} \in \mathcal{A}$ . Luego, por el lema 2.30, tenemos que  $[u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\alpha \epsilon' : \alpha \epsilon' : p_\alpha] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ .

Por otro lado, consideremos  $[u_\alpha \epsilon' : \alpha \epsilon' : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] = [u_\alpha \epsilon' : \epsilon \delta : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{\left(\frac{Y}{Y_\alpha}\right)})$ . Del diagrama 3.2, se sigue que

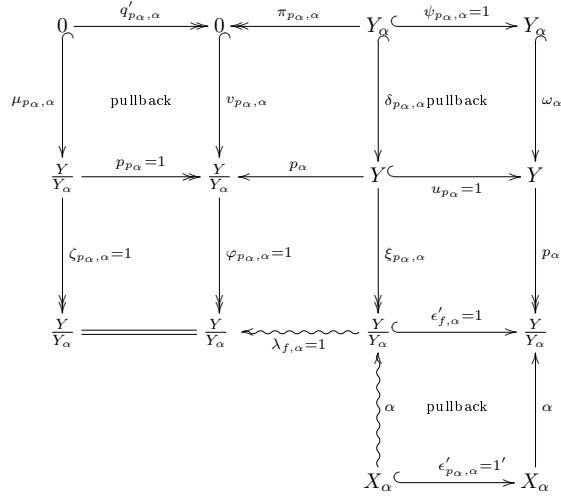
$$[u_\alpha \epsilon' : \epsilon \delta : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] = [1_N : \epsilon : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N] = \mathbb{L}(\epsilon) \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N],$$

consideremos  $\mathbb{L}(p_\alpha) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{\left(\frac{Y}{Y_\alpha}\right)}$ . Entonces tenemos el morfismo de grupos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \mathbb{L}(p_\alpha)) : \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{\left(\frac{Y}{Y_\alpha}\right)}).$$

Como  $F = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ , del diagrama 3.3, tenemos que  $\mathbb{L}(p_\alpha) \circ F = [1 : p_\alpha : 1] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = [u_\alpha : \alpha : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(\overline{X}, \overline{\left(\frac{Y}{Y_\alpha}\right)})$ .

Como  $\epsilon' : \alpha^{-1}(N) \longrightarrow X_\alpha$  es tal  $\text{Coker}(u_\alpha \circ \epsilon') = \frac{X}{\alpha^{-1}(N)} \in \mathcal{A}$  y  $1_{\frac{Y}{Y_\alpha}} : \frac{Y}{Y_\alpha} \longrightarrow$

Figura 3.3: Diagrama de la composición  $[1 : p_\alpha : 1] \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha]$ 

$\frac{Y}{Y_\alpha}$  satisface que  $\text{Ker}\left(1_{\frac{Y}{Y_\alpha}} \circ p_\alpha\right) = Y_\alpha \in \mathcal{A}$ , por el Lema 2.30, tenemos que

$$[u_\alpha : \alpha : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] = [u_\alpha \epsilon' : \alpha \epsilon' : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}].$$

Pero vimos arriba que  $[u_\alpha \epsilon' : \alpha \epsilon' : 1_{\frac{Y}{Y_\alpha}}] = \mathbb{L}(\epsilon) \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N]$ . Por lo tanto,  $\mathbb{L}(p_\alpha) \circ [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] = \mathbb{L}(\epsilon) \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N]$ . Pero del diagrama (\*\*), concluimos que  $\mathbb{L}(\epsilon) = \mathbb{L}(p_\alpha) \mathbb{L}(i) \mathbb{L}(\gamma)^{-1}$  (pues  $\gamma$  es iso en  $\mathcal{C}_\Sigma$ ). Luego

$$\begin{aligned} F = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha] &= \mathbb{L}(p_\alpha)^{-1} \mathbb{L}(\epsilon) \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N] \\ &= \mathbb{L}(p_\alpha)^{-1} \left( \mathbb{L}(p_\alpha) \mathbb{L}(i) \mathbb{L}(\gamma)^{-1} \right) \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N] \\ &= \mathbb{L}(i) \mathbb{L}(\gamma)^{-1} \circ [u_\alpha \epsilon' : \delta : 1_N]. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $F = [u_\alpha : \alpha : p_\alpha]$  se factoriza a través de  $\mathbb{L}(i)$ , y como  $\mathbb{L}(i)$  es mono (ver la Proposición 3.5), tenemos que  $\mathbb{L}(i)$  es el kernel de  $\mathbb{L}(f)$ .  $\square$

**Observación 3.11** *Las demostraciones de las Proposiciones 3.7 y 3.10, son similares en el siguiente sentido.*

- Dado un morfismo  $\alpha$  tal que  $\mathbb{L}(f) \circ \alpha = 0$ , se utiliza otro representante  $\alpha'$  de  $\alpha$  para encontrar la factorización de  $\alpha$  a través del kernel de  $\mathbb{L}(f)$ .
- Dado el morfismo  $\alpha'$  que es equivalente a  $\alpha$  del inciso (a), tal que  $\mathbb{L}(f) \circ \alpha' = 0$ , se factoriza  $\alpha'$  a través del kernel de otro morfismo  $\mathbb{L}(\beta)$  donde  $\mathbb{L}(\beta)$  es isomorfo a  $\mathbb{L}(f)$  en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  (en la primera demostración  $\beta$  es el

morfismo  $f' : W \rightarrow L$  y en la segunda demostración es el morfismo  $\lambda_{f,\alpha} : \frac{Y}{\bar{Y}_\alpha} \rightarrow \frac{Z}{\bar{f}(Y_\alpha)}$ .

**Proposición 3.12** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\mathbb{L}(f)$  es un isomorfismo si y solo si  $\text{Ker}(f), \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$ .

**Demostración.** ( $\implies$ ). Supongamos que  $\text{Ker}(f), \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$ . Entonces  $f \in \Sigma$ , y por la Proposición 2.48 tenemos que  $\mathbb{L}(f)$  es un isomorfismo. ( $\impliedby$ ). Supongamos que  $\mathbb{L}(f)$  es un isomorfismo. Entonces  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo y también es un epimorfismo. Por las Proposiciones 3.5 y 3.6 concluimos que  $\text{Ker}(f), \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$ .  $\square$

**Proposición 3.13** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría preabeliana. Consideremos la descomposición canónica del morfismo  $f : X \rightarrow Y$  dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{t} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{u} & U \\ & & \downarrow \pi & & \uparrow i & & \\ & & \text{Coker}(t) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Ker}(u) & & \end{array}$$

Sean  $\beta : X' \rightarrow X$  y  $\alpha : Y \rightarrow Y'$  isomorfismos en  $\mathcal{C}$ . Entonces, la descomposición canónica del morfismo  $\alpha f \beta$  está dada por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{\beta^{-1}t} & X' & \xrightarrow{\alpha f \beta} & Y' & \xrightarrow{u \alpha^{-1}} & U \\ & & \downarrow \pi \beta & & \uparrow \alpha i & & \\ & & \text{Coker}(t) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Ker}(u) & & \end{array}$$

**Demostración.** La demostración es sencilla y parecida a la demostración de [17, Proposición 2.8.3].  $\square$

**Proposición 3.14** Se tiene que  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es una categoría abeliana.

**Demostración.** Por las Proposiciones 3.7 y 3.8 tenemos que  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es una categoría preabeliana. Sea  $F : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ . Sabemos que  $F = [u_f : f : p_f]$  está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u_f} & X_f \\ & & \downarrow f \\ & & \frac{Y}{\bar{Y}_f} \xleftarrow{p_f} Y. \end{array}$$

Es decir,  $F = \mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(u_f)^{-1}$ . Consideremos la descomposición canónica del morfismo  $f : X_f \rightarrow \frac{Y}{Y_f}$  dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} T & \xrightarrow{t} & X_f & \xrightarrow{f} & \frac{Y}{Y_f} & \xrightarrow{u} & U \\ & & \downarrow \pi & & \uparrow i & & \\ & & \text{Coker}(t) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Ker}(u) & & \end{array}$$

Como  $\mathcal{C}$  es abeliana, tenemos que  $\bar{f}$  es un isomorfismo. Usando que  $\mathbb{L}$  preserva kernels y cokernels, tenemos que

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{L}(T) & \xrightarrow{\mathbb{L}(t)} & \mathbb{L}(X_f) & \xrightarrow{\mathbb{L}(f)} & \mathbb{L}\left(\frac{Y}{Y_f}\right) & \xrightarrow{\mathbb{L}(u)} & \mathbb{L}(U) \\ & & \downarrow \mathbb{L}(\pi) & & \uparrow \mathbb{L}(i) & & \\ & & \mathbb{L}(\text{Coker}(t)) & \xrightarrow{\mathbb{L}(\bar{f})} & \mathbb{L}(\text{Ker}(u)) & & \end{array}$$

es la descomposición canónica de  $\mathbb{L}(f)$ . Como  $\mathcal{C}_\Sigma$  es preabeliana, por la Proposición 3.13 tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{L}(T) & \xrightarrow{\mathbb{L}(u_f)\mathbb{L}(t)} & \mathbb{L}(X_f) & \xrightarrow{\mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(u_f)^{-1}} & \mathbb{L}\left(\frac{Y}{Y_f}\right) & \xrightarrow{\mathbb{L}(u)\mathbb{L}(p_f)} & \mathbb{L}(U) \\ & & \downarrow \mathbb{L}(\pi)\mathbb{L}(u_f)^{-1} & & \uparrow \mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(i) & & \\ & & \mathbb{L}(\text{Coker}(t)) & \xrightarrow{\mathbb{L}(\bar{f})} & \mathbb{L}(\text{Ker}(u)) & & \end{array}$$

es la descomposición canónica de  $F = \mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(u_f)^{-1}$ . Además,  $\mathbb{L}(\bar{f})$  es un isomorfismo, pues  $\bar{f}$  es un isomorfismo. Probándose que el morfismo paralelo de  $F$  es un isomorfismo y por lo tanto  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es abeliana.  $\square$

**Proposición 3.15** *Se tiene que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  es un funtor exacto.*

**Demostración.** Se sigue de que  $\mathbb{L}$  preserva kernels y cokernels por todo lo hecho anteriormente.  $\square$

**Proposición 3.16** *Sea  $0 \rightarrow \bar{X} \xrightarrow{F} \bar{Y} \xrightarrow{G} \bar{Z} \rightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ . Entonces existe una sucesión exacta en  $\mathcal{C}$*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0;$$

*y también existen isomorfismos  $\Phi_A : \bar{A} \rightarrow \bar{X}$ ,  $\Phi_B : \bar{B} \rightarrow \bar{Y}$ ,  $\Phi_C : \bar{C} \rightarrow \bar{Z}$  en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  tales que el siguiente diagrama conmuta en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \bar{A} & \xrightarrow{\mathbb{L}(\alpha)} & \bar{B} & \xrightarrow{\mathbb{L}(\beta)} & \bar{C} \rightarrow 0. \\ & & \downarrow \Phi_A & & \downarrow \Phi_B & & \downarrow \Phi_C \\ 0 & \rightarrow & \bar{X} & \xrightarrow{F} & \bar{Y} & \xrightarrow{G} & \bar{Z} \rightarrow 0 \end{array}$$

**Demostración.** Sabemos que  $F = [u_f : f : p_f]$  y  $G = [u_g : g : p_g]$  están representados por los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X \xleftarrow{u_f} X_f & & Y \xleftarrow{u_g} Y_g \\ & \downarrow f & \downarrow g \\ \frac{Y}{Y_f} \xleftarrow{p_f} Y & & \frac{Z}{Z_g} \xleftarrow{p_g} Z \end{array}$$

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\epsilon} Y_g \xrightarrow{g} \frac{Z}{Z_g} \xrightarrow{\gamma} L \longrightarrow 0,$$

y la factorización de  $g : Y_g \longrightarrow \frac{Z}{Z_g}$  a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} Y_g & \xrightarrow{f} & \frac{Z}{Z_g} \\ & \searrow \pi & \nearrow u \\ & I & \end{array}$$

Luego, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\epsilon} Y_g \xrightarrow{\pi} I \longrightarrow 0.$$

Como  $G = \mathbb{L}(p_g)^{-1}\mathbb{L}(g)\mathbb{L}(u_g)^{-1}$  es un epimorfismo y  $\mathbb{L}(p_g)^{-1}, \mathbb{L}(u_g)^{-1}$  son isomorfismos, tenemos que  $\mathbb{L}(g)$  es un epimorfismo. Por la Proposición 3.6, se sigue que  $L = \text{Coker}(g) \in \mathcal{A}$ . Como  $L = \text{Coker}(g) = \text{Coker}(u)$  y  $u$  es mono, concluimos que  $u \in \Sigma$ .

Luego, como  $\mathbb{L}(g) = \mathbb{L}(u)\mathbb{L}(\pi)$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(Y_g) & \xrightarrow{\mathbb{L}(\pi)} & \mathbb{L}(I) \\ \mathbb{L}(u_g) \downarrow & & \downarrow \mathbb{L}(p_g)^{-1}\mathbb{L}(u) \\ \bar{Y} & \xrightarrow{\mathbb{L}(p_g)^{-1}\mathbb{L}(g)\mathbb{L}(u_g)^{-1}} & \bar{Z}, \end{array}$$

donde los morfismos verticales  $\mathbb{L}(u_g), \mathbb{L}(p_g)^{-1}\mathbb{L}(u)$ , son isomorfismos pues  $u, u_g, p_g \in \Sigma$ . Como  $\mathbb{L}$  es exacto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{L}(K) & \xrightarrow{\mathbb{L}(\epsilon)} & \mathbb{L}(Y_g) & \xrightarrow{\mathbb{L}(\pi)} & \mathbb{L}(I) \longrightarrow 0. \\ & & & & \downarrow \mathbb{L}(u_g) & & \downarrow \mathbb{L}(p_g)^{-1}\mathbb{L}(u) \\ 0 & \longrightarrow & \bar{X} & \xrightarrow{F} & \bar{Y} & \xrightarrow{G} & \bar{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Luego, existe  $\lambda : \mathbb{L}(K) \rightarrow \overline{X}$  tal que el diagrama anterior conmuta. Como  $\mathbb{L}(p_g)^{-1}\mathbb{L}(u)$  y  $\mathbb{L}(u_g)$  son isomorfismos, concluimos por el Lema de la Serpiente que  $\lambda$  es un isomorfismo. Entonces, la sucesión exacta requerida es

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\epsilon} Y_g \xrightarrow{\pi} I \longrightarrow 0.$$

Probándose el resultado.  $\square$

**Proposición 3.17** *Sea  $G : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor covariante. Entonces,  $G$  es exacto si y solo si  $G \circ \mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es exacto.*

**Demostración.** ( $\implies$ ). Como  $\mathbb{L}$  es exacto, el resultado se sigue de que la composición de funtores exactos es exacto.

( $\impliedby$ ). Sea  $0 \longrightarrow \overline{X} \xrightarrow{F} \overline{Y} \xrightarrow{G} \overline{Z} \longrightarrow 0$  una sucesión exacta en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ . Por la Proposición 3.16, podemos suponer que la sucesión anterior es de la forma

$$\eta : 0 \longrightarrow \mathbb{L}(A) \xrightarrow{\mathbb{L}(\alpha)} \mathbb{L}(B) \xrightarrow{\mathbb{L}(\beta)} \mathbb{L}(C) \longrightarrow 0,$$

para alguna sucesión exacta  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$ . Como  $G \circ \mathbb{L}$  es exacto, concluimos al aplicarle  $G \circ \mathbb{L}$  a la sucesión anterior que

$$0 \longrightarrow (G \circ \mathbb{L})(A) \xrightarrow{(G \circ \mathbb{L})(\alpha)} (G \circ \mathbb{L})(B) \xrightarrow{(G \circ \mathbb{L})(\beta)} (G \circ \mathbb{L})(C) \longrightarrow 0$$

es exacta. Probándose que  $G$  manda la sucesión exacta  $\eta$ , en una sucesión exacta. Por lo tanto,  $G$  es un funtor exacto.  $\square$

**Proposición 3.18** *Sea  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor exacto tal que  $H(X) = 0$ , para todo  $X \in \mathcal{A}$ . Entonces, existe un único funtor exacto  $G : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $G \circ \mathbb{L} = H$ .*

**Demostración.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  en  $\Sigma$ . Entonces, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0,$$

donde  $K, Z \in \mathcal{A}$ . Como  $H$  es exacto, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H(K) \longrightarrow H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \longrightarrow H(Z) \longrightarrow 0.$$

Usando que  $K, Z \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $H(K) = H(Z) = 0$ . Por lo tanto,  $H(f)$  es un isomorfismo. Luego, por la propiedad universal de  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ , existe un único funtor  $G : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $G \circ \mathbb{L} = H$ . Por la Proposición 3.17, concluimos que  $G$  es exacto, probándose el resultado.  $\square$

# Capítulo 4

## Funtor sección de $\mathbb{L}$

Hasta el capítulo anterior, suponíamos que  $\mathcal{C}$  es una categoría abeliana localmente pequeña,  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ . Lo cual nos permitió definir la categoría cociente  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  de  $\mathcal{C}$  respecto a  $\mathcal{A}$ , y al funtor  $\mathbb{L}$ .

A lo largo de este capítulo, se darán condiciones necesarias y suficientes, para que el funtor  $\mathbb{L}$  definido en la Proposición 2.46, tenga funtor adjunto derecho. Describiendo, propiedades del funtor adjunto derecho de  $\mathbb{L}$ , así como resultados, usando la teoría descrita.

A lo largo de este capítulo supondremos que,  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana localmente pequeña y  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ .

### 4.1. Objetos cerrados y funtor adjunto de $\mathbb{L}$

**Proposición 4.1** *Para  $M \in \mathcal{C}$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Para todo morfismo  $s : X \rightarrow Y$ , con  $s \in \Sigma$ , el morfismo*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$$

*es un isomorfismo.*

(b)  *$M$  satisface las siguientes dos condiciones:*

(b1) *si  $f : X \rightarrow M$  es un monomorfismo en  $\mathcal{C}$ , con  $X \in \mathcal{A}$  entonces  $X = 0$ ;*

(b2) *si  $s : M \rightarrow Y$  es un monomorfismo en  $\mathcal{C}$ , con  $s \in \Sigma$ , entonces  $s$  es un monomorfismo que se escinde.*



(c) Para todo  $X \in \mathcal{C}$ , el siguiente morfismo de grupos abelianos inducido por  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$ :

$$\mathbb{L}_{X,M} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(M))$$

es un isomorfismo.

**Demostración.**

(a)  $\implies$  (b) Primero veamos que se satisface (b1).

Sean  $f : X \rightarrow M$ , un monomorfismo con  $X \in \mathcal{A}$  y  $p : M \rightarrow Z$  el cokernel de  $f$ . Como  $X = \text{Ker}(p) \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $p \in \Sigma$ . Dado que estamos asumiendo (a), tenemos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(p, M) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$$

es un isomorfismo. Luego, existe  $\alpha : Z \rightarrow M$  tal que  $1_M = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(p, M)(\alpha) = \alpha \circ p$ . Por lo tanto  $p$  es un monomorfismo y  $X = \text{Ker}(p) = 0$ .

Ahora probemos (b2).

Sea  $s : M \rightarrow Y$  un monomorfismo, con  $s \in \Sigma$ . Como estamos suponiendo (a), tenemos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$$

es un isomorfismo. Luego, existe  $\beta : Y \rightarrow M$  tal que  $1_M = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M)(\alpha) = \beta \circ s$ , y así  $s$  es un monomorfismo que se escinde.

(b)  $\implies$  (a) Sea  $s : X \rightarrow Y$ , con  $s \in \Sigma$ . Veamos que el morfismo de grupos abelianos

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$$

es un isomorfismo. Para esto, basta ver que para todo  $f : X \rightarrow M$  existe un único morfismo  $g : Y \rightarrow M$  tal que  $g \circ s = f$ .

Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\epsilon} X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{\gamma} L \longrightarrow 0.$$

Como  $s \in \Sigma$ , tenemos que  $K, L \in \mathcal{A}$ . Consideremos la factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & Y \\ & \searrow p & \nearrow u \\ & & I \end{array}$$

de  $f$  a través de su imagen. Luego, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$(*) : 0 \longrightarrow K \xrightarrow{\epsilon} X \xrightarrow{p} I \longrightarrow 0.$$

Sea  $f : X \longrightarrow M$ . Entonces tenemos  $f\epsilon : K \longrightarrow M$ . Consideremos la factorización de  $f\epsilon$  a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f\epsilon} & M \\ & \searrow q & \nearrow \mu \\ & & J. \end{array}$$

Como  $K \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $J \in \mathcal{A}$ . Usando que  $\mu : J \longrightarrow M$  es un monomorfismo y que estamos suponiendo (b1), tenemos que  $J = 0$  y por lo tanto  $f\epsilon = 0$ . De la sucesión exacta (\*), concluimos que existe  $\lambda : I \longrightarrow M$  tal que  $\lambda p = f$ . Consideremos el siguiente cuadrado pushout

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{u} & Y \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ M & \xrightarrow{u'} & N. \end{array}$$

Luego, tenemos que  $\text{Coker}(u') \cong \text{Coker}(u) = L \in \mathcal{A}$  y además  $u'$  es un monomorfismo pues  $u$  lo es. Por lo tanto,  $u' \in \Sigma$ . Por (b2), existe  $\varphi : N \longrightarrow M$  tal que  $\varphi u' = 1_M$ . De esta manera tenemos que

$$f = \lambda p = 1_M(\lambda p) = \varphi u' \lambda p = \varphi \lambda' u p = \varphi \lambda' s.$$

Por lo tanto

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$$

es suprayectiva.

Supongamos que  $\theta : Y \longrightarrow M$  es tal que  $\theta s = 0$ . Entonces existe  $\theta' : L \longrightarrow M$  tal que  $\theta' \gamma = \theta$ . Consideremos la factorización de  $\theta'$  a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\theta'} & M \\ & \searrow \pi' & \nearrow \mu' \\ & & I'. \end{array}$$

Como  $L \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $I' \in \mathcal{A}$  y como  $\mu'$  es mono, por (b1) se sigue que  $I' = 0$  y así  $\theta' = 0$  y por lo tanto  $\theta = 0$ . Luego

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$$

es inyectiva.

(b)  $\implies$  (c) Primero veamos que la función

$$\mathbb{L}_{X,M} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(M))$$

es inyectiva. Sea  $f : X \longrightarrow M$  tal que  $\mathbb{L}_{X,M}(f) = \mathbb{L}(f) = 0$ . Por la Proposición 3.1, tenemos que  $\text{Im}(f) \in \mathcal{A}$ . Sea  $u : \text{Im}(f) \longrightarrow M$ . Por (b1) tenemos que  $\text{Im}(f) = 0$  y así  $f = 0$  y por lo tanto  $\mathbb{L}_{X,M}$  es inyectiva.

Ahora veamos que  $\mathbb{L}_{X,M}$  es suprayectiva. Sea  $F \in \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(M)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\overline{X}, \overline{M})$ . Sabemos que  $F = [u_f : f : p_f]$  está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow[u_f]{} & X_f \\ & & \downarrow f \\ & & \frac{M}{M_f} \xleftarrow[p_f]{} M. \end{array}$$

Es decir,  $F = \mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(u_f)^{-1}$ , con  $u_f \in \Sigma'$  y  $p_f \in \Sigma''$ . Entonces  $M_f = \text{Ker}(p_f) \in \mathcal{A}$ . Por (b1), tenemos que  $\text{Ker}(p_f) = 0$  y por lo tanto  $p_f$  es un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_f & \xrightarrow{u_f} & X & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow p_f^{-1}f & & \downarrow h & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u'} & L & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0. \end{array}$$

Dado que  $\text{Coker}(u_f) = Z \in \mathcal{A}$ ,  $u' \in \Sigma'$  y por (b2) tenemos que  $u'$  se escinde. Por lo tanto, existe  $\varphi : L \longrightarrow M$  tal que  $\varphi u' = 1_M$ . Luego, del diagrama anterior, tenemos que  $p_f^{-1}f = (\varphi h) \circ u_f$ . Es decir,  $f = p_f(\varphi h)u_f$  y así  $\mathbb{L}(f) = \mathbb{L}(p_f)\mathbb{L}(\varphi h)\mathbb{L}(u_f)$ . En particular

$$\mathbb{L}(\varphi h) = \mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(u_f)^{-1} = F.$$

Probándose que  $\mathbb{L}_{X,M}$  es suprayectiva y por lo tanto un isomorfismo.

(c)  $\implies$  (a) Sea  $s : X \longrightarrow Y$  un morfismo en  $\Sigma$ . Entonces  $\mathbb{L}(s)$  es un isomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M) & \xrightarrow{\mathbb{L}_{X,M}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(M)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(s), \mathbb{L}(M)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) & \xrightarrow{\mathbb{L}_{Y,M}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(Y), \mathbb{L}(M)). \end{array}$$

Como  $\mathbb{L}(s)$  es un isomorfismo, el morfismo  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(s), \mathbb{L}(M))$  es un isomorfismo y por hipótesis también los morfismos horizontales son isomorfismos. Por lo tanto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, M)$  es un isomorfismo. Probándose (a).

□

**Definición 4.2** Sea  $M \in \mathcal{C}$ . Se dice  $M$  es  **$\mathcal{A}$ -cerrado** o simplemente **cerrado** si  $M$  satisface alguna de la condiciones de la Proposición 4.1.

**Definición 4.3** Sean  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores entre categorías arbitrarias. Se dice que  $F$  es **functor adjunto a izquierda de  $G$**  o que  $G$  es **functor adjunto a derecha de  $F$**  si para cada  $C \in \mathcal{C}$  y  $D \in \mathcal{D}$  se tiene una biyección natural en  $C$  y  $D$

$$\Phi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)).$$

Luego, tenemos el siguiente teorema bien conocido.

**Proposición 4.4** Sean  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores entre categorías arbitrarias. Las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $F$  es adjunto a izquierda de  $G$ .
- (b) Existen transformaciones naturales  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$  y  $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$  llamadas **unidad y counidad**, respectivamente, que satisfacen las **identidades triangulares**:

$$1_F = \epsilon F \circ F\eta, \quad 1_G = G\epsilon \circ \eta G.$$

**Demostración.** Ver [3, Teorema 3.1.5, pág. 99]. □

**Observación 4.5** Las identidades triangulares

$$1_F = \epsilon F \circ F\eta, \quad 1_G = G\epsilon \circ \eta G,$$

quieren decir que se satisfacen las igualdades:

$$1_{F(C)} = \epsilon_{F(C)} \circ F(\eta_C) \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

$$1_{G(D)} = G(\epsilon_D) \circ \eta_{G(D)} \quad \forall D \in \mathcal{D}.$$

**Observación 4.6** En la demostración de (b)  $\implies$  (a) de la Proposición 4.4 dada en [3, Teorema 3.1.5], se construyen

$$\Phi_{C,D} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

y

$$\Phi_{C,D}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)$$

como sigue. Sea  $\alpha : F(C) \rightarrow D$ . Aplicando  $G$ , tenemos el morfismo  $G(\alpha) : G(F(C)) \rightarrow G(D)$ . Por otro lado, tenemos el morfismo  $\eta_C : C \rightarrow G(F(C))$ ; y así, se define  $\Phi_{C,D}$  como

$$\Phi_{C,D}(\alpha) := G(\alpha) \circ \eta_C.$$

De manera similar, se define  $\Phi_{C,D}^{-1}$  como sigue

$$\Phi_{C,D}^{-1}(\beta) = \epsilon_D \circ F(\beta) \quad \forall \beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)).$$

**Definición 4.7** Supongamos que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  tiene adjunto a derecha  $S : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ . En éste caso, decimos que  $S$  es el funtor **sección** de  $\mathbb{L}$  y que  $\mathcal{A}$  es una subcategoría **localizante** de  $\mathcal{C}$ .

Supongamos que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  tiene adjunto a derecha  $S : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ . Es decir, tenemos la biyección funtorial

$$\Phi_{X, \bar{Y}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \bar{Y}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S(\bar{Y})),$$

para  $X \in \mathcal{C}$  y  $\bar{Y} \in \mathcal{C}/\mathcal{A}$ . Representemos lo anterior con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & \mathcal{C}/\mathcal{A} \\ & \xleftarrow{S} & \end{array}$$

La siguiente proposición nos dice como producir objetos cerrados.

**Proposición 4.8** Supongamos que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  tiene adjunto a derecha  $S : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ . Entonces  $S(\bar{Z})$  es un objeto cerrado, para todo  $\bar{Z} \in \mathcal{C}/\mathcal{A}$ .

**Demostración.** Sea  $s : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\Sigma$ . Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \bar{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{X, \bar{Z}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S(\bar{Z})) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(s), \bar{Z}) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, S(\bar{Z})) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(Y), \bar{Z}) & \xrightarrow{\Phi_{Y, \bar{Z}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S(\bar{Z})). \end{array}$$

Como  $s \in \Sigma$ , tenemos que  $\mathbb{L}(s)$  es iso y por lo tanto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(s), \bar{Z})$  es un isomorfismo. Dado que los morfismos horizontales son isomorfismos, concluimos que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(s, S(\bar{Z}))$  es un isomorfismo. Luego por la Proposición 4.1 concluimos que  $S(\bar{Z})$  es cerrado.  $\square$

**Proposición 4.9** Supongamos que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  tiene adjunto a derecha  $S : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ . Entonces  $S$  es exacto si y solo si  $S \circ \mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un funtor exacto.

**Demostración.** Esto se sigue de la Proposición 3.17.  $\square$

**Proposición 4.10** Supongamos que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  tiene adjunto a derecha  $S : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ . Sean

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow S \circ \mathbb{L}, \quad \epsilon : \mathbb{L} \circ S \rightarrow 1_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$$

la unidad y counidad de la adjunción, respectivamente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a)  $\epsilon$  es un isomorfismo.
- (b) Para cada  $X \in \mathcal{C}$ , el morfismo  $\eta_X : X \rightarrow (S \circ \mathbb{L})(X)$  satisface que  $\text{Ker}(\eta_X), \text{Coker}(\eta_X) \in \mathcal{A}$ . Es decir,  $\eta_X \in \Sigma$ .

**Demostración.**

- (a) Recordemos que, para  $X; Y \in \mathcal{C}$ , la función

$$\Phi_{X, \bar{Y}}^{-1} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S(\bar{Y})) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \bar{Y})$$

está definido, como sigue (ver Observación 4.6): Sea  $f : X \rightarrow S(\bar{Y})$ . Entonces tenemos  $\mathbb{L}(f) : \mathbb{L}(X) \rightarrow \mathbb{L}(S(\bar{Y}))$  y

$$\Phi_{X, \bar{Y}}(f) := \epsilon_{\bar{Y}} \circ \mathbb{L}(f),$$

donde  $\epsilon_{\bar{Y}} : \mathbb{L}(S(\bar{Y})) \rightarrow \bar{Y}$ . Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S(\bar{Y})) & \xrightarrow{\Phi_{X, \bar{Y}}^{-1}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \bar{Y}) \\ & \searrow \mathbb{L}_{X, S(\bar{Y})} & \nearrow \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \epsilon_{\bar{Y}}) \\ & \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(S(\bar{Y}))) & \end{array}$$

Por la Proposición 4.8, tenemos que  $S(\bar{Y})$  es cerrado y por lo tanto  $\mathbb{L}_{X, \bar{Y}}$  es un isomorfismo. Como  $\Phi_{X, \bar{Y}}^{-1}$  es un isomorfismo,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \epsilon_{\bar{Y}})$  es un isomorfismo. Es decir, hemos probado que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \epsilon_{\bar{Y}})$  es un isomorfismo, para todo  $X \in \mathcal{C}$ . Como todo objeto de  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$  es de la forma  $\mathbb{L}(X) = \bar{X}$ , tenemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\bar{X}, \epsilon_{\bar{Y}})$  es un isomorfismo para todo  $\bar{X} \in \mathcal{C}/\mathcal{A}$ . Luego, por el Lema de Yoneda, tenemos que  $\epsilon_{\bar{Y}}$  es un isomorfismo. Como esto lo hicimos para  $\bar{Y} \in \mathcal{C}/\mathcal{A}$  arbitrario, concluimos que  $\epsilon$  es un isomorfismo.

- (b) Por las identidades triangulares, tenemos que

$$1_{\mathbb{L}(X)} = \epsilon_{\mathbb{L}(X)} \circ \mathbb{L}(\eta_X), \quad 1_{S(\bar{Y})} = S(\epsilon_{\bar{Y}}) \circ \eta_{S(\bar{Y})}.$$

Pero por (a), sabemos que  $\epsilon_{\mathbb{L}(X)}$  es un isomorfismo. Luego, de la primera igualdad de arriba, tenemos que  $\epsilon_{\mathbb{L}(X)}^{-1} = \mathbb{L}(\eta_X)$  y así  $\mathbb{L}(\eta_X)$  es un isomorfismo. Finalmente, por la Proposición 3.12, tenemos que  $\text{Ker}(\eta_X), \text{Coker}(\eta_X) \in \mathcal{A}$ , probándose (b).

□

**Observación 4.11** Como  $\epsilon : \mathbb{L} \circ S \rightarrow 1_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$  es un isomorfismo, podemos suponer que  $\mathbb{L} \circ S = 1_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$  y que  $\epsilon = 1$ .

**Corolario 4.12** *Para  $M \in \mathcal{C}$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a)  $M$  es un objeto cerrado.
- (b)  $\eta_M : M \rightarrow (S \circ \mathbb{L})(M)$  es un isomorfismo.

**Demostración.**

- (a)  $\implies$  (b) Supongamos que  $M$  es un objeto cerrado. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\eta_M} (S \circ \mathbb{L})(M) \xrightarrow{q} L \longrightarrow 0.$$

Por la Proposición 4.10 (b), tenemos que  $K, L \in \mathcal{A}$ . Como  $M$  es cerrado, por la Proposición 4.1 (b1), se sigue que  $K = 0$ . Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta_M} (S \circ \mathbb{L})(M) \xrightarrow{q} L \longrightarrow 0.$$

Como  $L \in \mathcal{A}$ ,  $\eta_M \in \Sigma$  y por lo tanto, por la Proposición 4.1 (b2), tenemos que  $\eta_M$  es un monomorfismo que se escinde, es decir, la sucesión exacta anterior se escinde. Por lo tanto, existe monomorfismo  $\psi : L \rightarrow S(\mathbb{L}(M))$  tal que  $q\psi = 1_L$ . Pero  $S(\mathbb{L}(M))$  es cerrado por la Proposición 4.8. Luego por la Proposición 4.1 (bi), tenemos que  $L = 0$  y así  $\eta_M$  es un isomorfismo.

- (b)  $\implies$  (a) Supongamos que  $\eta_M$  es un isomorfismo, es decir,  $M \cong S(\mathbb{L}(M))$ . Pero  $S(\mathbb{L}(M))$  es cerrado por la Proposición 4.8. Por lo tanto  $M$  es cerrado.

□

Recordemos el siguiente resultado importante general de funtores adjuntos.

**Proposición 4.13** *Sea  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor entre categorías arbitrarias.*

- (a) *Supongamos que  $F$  tiene un adjunto a izquierda  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Entonces  $F$  es fiel y pleno si y sólo si la counidad  $\epsilon : G \circ F \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$  es un isomorfismo*
- (b) *Supongamos que  $F$  tiene adjunto a derecha  $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Entonces  $F$  es fiel y pleno si y sólo si la unidad  $\eta : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow H \circ F$  es un isomorfismo.*

**Demostración.** Ver [3, Teorema 3.4.1, pág. 114]. □

**Corolario 4.14** *Si  $\mathcal{A}$  es una subcategoría localizante de  $\mathcal{C}$  y  $S$  el funtor adjunto a derecha de  $\mathbb{L}$ , entonces  $S$  es fiel y pleno.*

**Demostración.** Como  $S$  tiene adjunto a izquierda  $\mathbb{L}$  y la counidad  $\epsilon : \mathbb{L} \circ S \rightarrow 1_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$  es un isomorfismo (ver Proposición 4.10), tenemos por la Proposición 4.13 que  $S$  es fiel y pleno. □

## 4.2. Pares adjuntos que inducen localizaciones

Como antes, estamos considerando,  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana localmente pequeña,  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$  y  $\Sigma := \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Recordemos la siguiente definición. Dados un conjunto parcialmente ordenado  $(P, \leq)$  y  $Q$  un subconjunto de  $P$ , decimos que un elemento  $m \in Q$  es un **elemento máximo** de  $Q$  si  $q \leq m$ , para todo  $q \in Q$ . Notemos que, en caso de existir un elemento máximo, este es necesariamente único.

Recordemos que  $\mathcal{C}$  es una categoría abeliana localmente pequeña. Por lo tanto, para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$ , la clase

$$\text{Sub}(X) := \{(X', u_{X'}^X) \mid \langle X', u_{X'}^X \rangle \in M(X)\}$$

es un conjunto. A la clase de equivalencia  $(X', u_{X'}^X)$  del momomorfismo  $u_{X'}^X : X' \rightarrow X$  lo llamamos subobjeto de  $X$  (ver Definición 1.33).

**Definición 4.15** *Sea  $X \in \mathcal{C}$  tal que el conjunto  $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(X) := \{(X', u_{X'}^X) \in \text{Sub}(X) \mid X' \in \mathcal{A}\}$  tiene elemento máximo. A tal elemento máximo lo denotaremos por  $(X_m, u)$ , donde  $u : X_m \rightarrow X$  denota la inclusión correspondiente. En este caso, diremos simplemente que  $X_m$  es el **subobjeto máximo de  $X$  en  $\mathcal{A}$** .*

**Lema 4.16** *Sea  $X_m$  el subobjeto máximo  $X$  en  $\mathcal{A}$ . Si  $v : A \rightarrow \frac{X}{X_m}$  es un monomorfismo con  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $A = 0$ .*

**Demostración.** Consideremos el siguiente diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_m & \xrightarrow{u'} & E & \xrightarrow{\pi'} & A \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow v' & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & X_m & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{\pi} & \frac{X}{X_m} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como  $X_m, A \in \mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}$  es de Serre, concluimos que  $E \in \mathcal{A}$ . Usando ahora que  $X_m$  es el subobjeto más grande de  $X$  que pertenece a  $\mathcal{A}$ , concluimos que  $u'$  es un isomorfismo. Por lo tanto  $A = 0$ .  $\square$



**Proposición 4.17** Consideremos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & W & \longrightarrow & N_m \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \downarrow \nu \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\varphi_L} & Z & \xrightarrow{p} & N \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\
 & & & & \frac{N}{N_m} & \xlongequal{\quad} & \frac{N}{N_m} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

donde  $Z$  es un objeto cerrado y  $N_m$  es el subobjeto máximo de  $N$  en  $\mathcal{A}$ . Entonces  $W$  es cerrado.

**Demostración.** En efecto, verifiquemos que se satisface las hipótesis de la Proposición 4.1(b).

Sea  $v : A \rightarrow W$  un monomorfismo con  $A \in \mathcal{A}$ . Entonces  $\gamma v : A \rightarrow Z$  es monomorfismo. Como  $Z$  es cerrado, por la Proposición 4.1(b) tenemos que  $A = 0$ ; Probándose que  $W$  satisface la hipótesis de la Proposición 4.1(b)(1).

Sea  $f : W \rightarrow B$  un monomorfismo tal que  $C = \text{Coker}(f) \in \mathcal{A}$ . Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma & & & & \\
 & & Z & & & & 
 \end{array}$$

Como  $Z$  es cerrado y  $f \in \Sigma$ , por 4.1(a) tenemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z)$  es un isomorfismo. Por lo tanto, existe  $\gamma' : B \rightarrow Z$  tal que  $\gamma' f = \gamma$ . Consideremos la factorización de  $\gamma'$  a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\gamma'} & Z \\
 \searrow \pi & & \nearrow \delta \\
 & I & 
 \end{array}$$

Luego tenemos que

$$\gamma = \delta \circ (\pi f);$$

y como  $\gamma$  es un monomorfismo, se sigue que  $\delta' := \pi f$  es un monomorfismo. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & W & & & \\
 & & & \downarrow f & & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & I \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow g & & \\
 & & & & C & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Luego, podemos completar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & W & \xlongequal{\quad} & W \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \delta' \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & I \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow g & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\pi'} & \frac{I}{W} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

Como  $\pi'$  es epi y  $C \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\frac{I}{W} \in \mathcal{C}$  y por lo tanto  $\delta' \in \Sigma'$ . Como  $\gamma = \delta\delta'$ , existe un único morfismo  $\theta : \frac{I}{W} \rightarrow \frac{N}{N_m}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\delta'} & I & \longrightarrow & \frac{I}{W} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \delta & & \downarrow \theta \\
 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\gamma} & Z & \xrightarrow{\varphi} & \frac{N}{N_m} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Por el Lema de la Serpiente, se sigue que  $\theta$  es mono. Por el Lema 4.16,  $\frac{I}{W} = 0$  y por lo tanto  $\delta'$  es un isomorfismo. Consideremos  $(\delta')^{-1} : I \rightarrow W$ . Entonces  $1_W = (\delta')^{-1}\delta' = (\delta')^{-1}\pi f$ , es decir,  $f$  se escinde, probándose que  $W$  satisface la hipótesis 4.1(b)(2). Por lo tanto,  $W$  es cerrado.  $\square$

**Proposición 4.18** *Supongamos que  $\mathcal{C}$  satisface las siguientes condiciones.*

- (i) *Para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$ , el conjunto  $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(X) := \{(X', u_{X'}^X) \in \text{Sub}(X) \mid X' \in \mathcal{A}\}$  tiene elemento máximo  $X_m$  (ver Definición 4.15).*
- (ii) *Sea  $X \in \mathcal{C}$ , tal que para cada monomorfismo  $u : X' \rightarrow X$ , con  $X' \in \mathcal{A}$  se tiene que  $X' = 0$ . Entonces, existe un monomorfismo  $\varphi_X : X \rightarrow Z$ , con  $Z$  un objeto cerrado.*

*Entonces, para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$  existe una sucesión exacta*

$$\xi : 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\mu} X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{q} Y' \longrightarrow 0$$

*tal que  $W$  es un objeto cerrado y  $X', Y' \in \mathcal{A}$ .*

*Además si*

$$\xi' : 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{\mu'} X \xrightarrow{f'} Z \xrightarrow{q'} Y'' \longrightarrow 0$$

*es otra sucesión exacta tal que  $Z$  es un objeto cerrado y  $X'', Y'' \in \mathcal{A}$ , entonces existen isomorfismos  $\alpha : X' \rightarrow X''$ ,  $\beta : W \rightarrow Z$  y  $\gamma : Y' \rightarrow Y''$  tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{q} & Y' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{\mu'} & X & \xrightarrow{f'} & Z & \xrightarrow{q'} & Y'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

**Demostración.** Sea  $X_m$  el elemento maximal de  $A_X$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_m \xrightarrow{u} X \xrightarrow{\lambda} \frac{X}{X_m} \longrightarrow 0.$$

Por el Lema 4.16, tenemos que  $L = \frac{X}{X_m}$  no tiene subobjetos no cero en  $\mathcal{A}$ . Por (bii) existe un monomorfismo  $\varphi_L : L \rightarrow Z$ , con  $Z$  cerrado. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi_L} Z \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0.$$

Sea  $N_m$  el subobjeto maximal de  $A_N$ . Luego, tenemos el siguiente diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\psi} & W & \xrightarrow{p'} & N_m & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \downarrow \nu & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\varphi_L} & Z & \xrightarrow{p} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por la Proposición 4.17,  $W$  es un objeto cerrado. Luego, la sucesión exacta buscada es

$$0 \longrightarrow X_m \xrightarrow{u} X \xrightarrow{\psi\lambda} W \xrightarrow{p'} N_m \longrightarrow 0.$$

Es decir, tomamos  $f := \psi\lambda$ ,  $\mu := u$  y  $q := p'$ .

Ahora, supongamos que

$$\xi' : 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{\mu'} X \xrightarrow{f'} Z \xrightarrow{q'} Y'' \longrightarrow 0$$

es otra sucesión exacta tal que  $Z$  es un objeto cerrado y  $X'', Y'' \in \mathcal{A}$ . Notemos que  $f : X \rightarrow W$  es un morfismo en  $\Sigma$ , y como  $Z$  es un objeto cerrado, por la Proposición 4.1 se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z).$$

Luego, existe  $\beta : W \rightarrow Z$  tal que  $f' = \beta f$ .

De la misma manera, como  $f' : X \rightarrow Z$  es un morfismo en  $\Sigma$  y  $W$  es un objeto cerrado, por la Proposición 4.1 se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', W) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W).$$

Luego existe  $\beta' : Z \rightarrow W$  tal que  $f = \beta' f'$ .

Utilizando las dos igualdades anteriores, concluimos que  $f = (\beta' \beta) f$ . Ahora, como  $f : X \rightarrow W$  es un morfismo en  $\Sigma$  y  $W$  es un objeto cerrado, por la Proposición 4.1 tenemos el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W).$$

Dado que  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)(1_W) = 1_W f = f = (\beta' \beta) f = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)(\beta' \beta)$ , obtenemos que  $\beta' \beta = 1_W$ . De la misma manera, se prueba que  $\beta \beta' = 1_Z$ . Por lo tanto  $\beta$  es un isomorfismo. Ahora, por la propiedad universal del kernel y del cokernel, se tiene que existen morfismos  $\alpha : X' \rightarrow X''$ ,  $\gamma : Y' \rightarrow Y''$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\mu} & X & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{q} & Y' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{\mu'} & X & \xrightarrow{f'} & Z & \xrightarrow{q'} & Y'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como  $\beta$  es isomorfismo, se concluye que  $\alpha$  y  $\gamma$  son isomorfismos.  $\square$

**Proposición 4.19** *Para un funtor covariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (a)  $F$  tiene un adjunto a derecha.

- (b) Para cada  $D \in \mathcal{D}$ , el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, D) \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  es representable. Es decir, existe  $C' \in \mathcal{C}$  tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, D) \circ F \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C')$ .

**Demostración.** Ver [9, Teorema 5.1, pág. 12].  $\square$

**Teorema 4.20** Para una subcategoría de Serre  $\mathcal{A}$  de una categoría abeliana localmente pequeña  $\mathcal{C}$ , las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a)  $\mathcal{A}$  es una subcategoría localizante.
- (b) Se satisfacen las siguientes dos condiciones:
- (b1) Para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$ , el conjunto  $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(X) := \{(X', u_{X'}^X) \in \text{Sub}(X) \mid X' \in \mathcal{A}\}$  tiene elemento máximo  $X_{\mathfrak{m}}$  (ver Definición 4.15)
- (b2) Sea  $X \in \mathcal{C}$  tal que para cada monomorfismo  $u : X' \rightarrow X$ , con  $X' \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $X' = 0$ . Entonces, existe un monomorfismo  $\varphi_X : X \rightarrow Z$ , con  $Z$  un objeto cerrado.

**Demostración.**

- (a)  $\implies$  (b) Supongamos que  $\mathcal{A}$  es una subcategoría localizante. Entonces existe  $S : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  funtor adjunto a derecha de  $\mathbb{L}$ . Por la Proposición 4.10, para  $X \in \mathcal{C}$ , se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\eta_X) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\eta_X} (S \circ \mathbb{L})(X) \longrightarrow \text{Coker}(\eta_X) \longrightarrow 0,$$

con  $\text{Ker}(\eta_X), \text{Coker}(\eta_X) \in \mathcal{A}$ . Sea  $\theta : A \rightarrow X$  un monomorfismo, con  $A \in \mathcal{A}$ . Luego, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\theta} X \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0,$$

donde  $p \in \Sigma$ . Sea  $\eta : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow S \circ \mathbb{L}$  dada por la unidad de la adjunción  $(\mathbb{L}, S)$ . Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & S\mathbb{L}(X) \\ \downarrow p & & \downarrow S(\mathbb{L}(p)) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & S\mathbb{L}(Y), \end{array}$$

donde  $S(\mathbb{L}(p))$  es un isomorfismo pues  $\mathbb{L}(p)$  es isomorfismo ya que  $p \in \Sigma$ . Ahora, como  $\theta = \text{Ker}(p)$ , tenemos que  $0 = \eta_Y \circ p \circ \theta = S(\mathbb{L}(f)) \circ \eta_X \circ \theta$ . Usando que  $S(\mathbb{L}(f))$  es un isomorfismo, concluimos que  $\eta_X \theta = 0$ . Luego

por la propiedad universal de  $\text{Ker}(\eta_X)$ , existe un único morfismo  $\lambda : A \rightarrow \text{Ker}(\eta_X)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \lambda \downarrow & \searrow \theta & \\ \text{Ker}(\eta_X) & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Dado que  $\theta$  es mono, tenemos que  $\lambda$  es un monomorfismo. Esto demuestra que cualquier subobjeto de  $X$  en  $\mathcal{A}$  está contenido en  $\text{Ker}(\eta_X)$  y como  $\text{Ker}(\eta_X) \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $\text{Ker}(\eta_X)$  es el subobjeto más grande de  $X$  en  $\mathcal{A}$ , prodándose (b1).

Ahora, supongamos que  $X$  satisface que si  $u : X' \rightarrow X$  es un monomorfismo, con  $X' \in \mathcal{A}$ , entonces  $X' = 0$ . Por la Proposición 4.10, existe sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\eta_X) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\eta_X} (S \circ \mathbb{L})(X) \longrightarrow \text{Coker}(\eta_X) \longrightarrow 0,$$

con  $\text{Ker}(\eta_X), \text{Coker}(\eta_X) \in \mathcal{A}$ . Luego, por hipótesis, concluimos que  $\text{Ker}(\eta_X) = 0$  y por lo tanto  $\eta_X$  es un monomorfismo, y como  $S\mathbb{L}(X)$  es cerrado (ver Proposición 4.8), tenemos que  $\eta_X$  es el monomorfismo buscado. Por lo tanto se satisface (b2).

(b)  $\implies$  (a) Veamos que, para cada objeto  $\bar{X} = \mathbb{L}(X) \in \mathcal{C}/\mathcal{A}$ , se tiene que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(-, \bar{X}) \circ \mathbb{L}$  es un functor representable.

Para  $X \in \mathcal{C}$  por la Proposición 4.18 existe una sucesión exacta que es única salvo isomorfismos

$$\xi : 0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\mu} X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Y' \longrightarrow 0$$

tal que  $W$  es un objeto cerrado y  $X', Y' \in \mathcal{A}$ . Luego, tenemos que  $\mathbb{L}(f) : \mathbb{L}(X) \rightarrow \mathbb{L}(W)$  es un isomorfismo en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ . Por lo tanto,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(-, \mathbb{L}(X)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(-, \mathbb{L}(W))$ , y basta ver que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(-, \mathbb{L}(W)) \circ \mathbb{L}$  es un functor representable.

Como  $W$  es cerrado por la Proposición 4.1(c), tenemos que

$$\mathbb{L}_{X,W} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(W))$$

es un isomorfismo, para cada  $X \in \mathcal{C}$ . Es decir, se tiene un isomorfismo de funtores

$$\mathbb{L}_{-,W} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(-, \mathbb{L}(W)) \circ \mathbb{L},$$

probándose que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(-, \mathbb{L}(W)) \circ \mathbb{L}$  es representable. Luego, por la Proposición 4.19 tenemos que  $\mathbb{L}$  tiene adjunto a derecha y así  $\mathcal{A}$  es localizante.

□

Terminamos esta sección con el siguiente teorema importante que nos dice que pares adjuntos, bajo ciertas condiciones, inducen localizaciones.

**Teorema 4.21** *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor exacto entre categorías abelianas, con  $\mathcal{C}$  localmente pequeña, que admite un functor adjunto a derecha  $G$  tal que  $G$  es fiel y pleno. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen*

- (a)  $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{C} \mid F(A) = 0\}$  es una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$ .
- (b) Existe una equivalencia de categorías  $H : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & \mathcal{C}/\mathcal{A} \\ F \downarrow & \searrow H & \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

donde  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  es el morfismo canónico.

**Demostración.**

- (a) Consideremos una sucesión exacta en  $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Como  $F$  es exacto, tenemos la siguiente sucesión exacta en  $\mathcal{D}$

$$0 \longrightarrow F(L) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow 0.$$

Luego,  $F(M) = 0$  si y solo si  $F(L) = 0$  y  $F(N) = 0$ . Por lo tanto  $\mathcal{A}$  es de Serre.

- (b) Como  $F(A) = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ , por la Proposición 3.18 existe un único functor  $H : \mathcal{C}/\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathbb{L}} & \mathcal{C}/\mathcal{A} \\ F \downarrow & \searrow H & \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

Consideremos la counidad  $\epsilon' : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$  del par adjunto  $(F, G)$ . Como el functor  $G$  es fiel y pleno, por la Proposición 4.13(a), concluimos que  $\epsilon'$  es un isomorfismo. Es decir, para cada  $D \in \mathcal{D}$ , tenemos que  $F(G(D)) \simeq D$  y por lo tanto  $H(\mathbb{L} \circ G(D)) \simeq D$ , probándose que  $H$  es denso.

Ahora veamos que  $H$  es fiel. En efecto, sea  $F \in \text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\mathbb{L}(X), \mathbb{L}(Y)) =$

$\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}(\overline{X}, \overline{Y})$ . Sabemos que  $F = [u_f : f : p_f]$  está representado por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u_f} & X_f \\ & & \downarrow f \\ & & \frac{Y}{Y_f} \xleftarrow{p_f} Y, \end{array}$$

donde  $u_f \in \Sigma'$  y  $p_f \in \Sigma''$ . Es decir,  $F = \mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(u_f)^{-1}$ , con  $u_f \in \Sigma'$  y  $p_f \in \Sigma''$ . En la demostración de la Proposición 2.51, tenemos que  $H$  se define como

$$H(F) := F(p_f)^{-1}F(f)F(u_f)^{-1}.$$

Por lo tanto, si  $H(F) = 0$ , tenemos que  $F(f) = 0$ . Consideremos la factorización de  $f$  a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} X_f & \xrightarrow{f} & \frac{Y}{Y_f} \\ & \searrow q & \nearrow \mu \\ & & J. \end{array}$$

Como  $F$  es exacto,  $0 = F(f) = F(\mu)F(q)$  donde  $F(\mu)$  es un monomorfismo y  $F(q)$  es un epimorfismo. Luego, tenemos que  $0 = F(\mu)$  con  $F(\mu)$  un monomorfismo y así concluimos que  $F(J) = 0$ . Por lo tanto  $\text{Im}(f) = J \in \mathcal{A}$ . Por la Proposición 3.1 concluimos que  $\mathbb{L}(f) = 0$  y así  $F = \mathbb{L}(p_f)^{-1}\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(u_f)^{-1} = 0$ , probándose que  $H$  es fiel.

Ahora veamos que  $H$  es pleno. En efecto, sea  $h : D \rightarrow E$  en  $\mathcal{D}$ . Como  $\epsilon' : FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$  es un isomorfismo natural, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} FG(D) & \xrightarrow{\epsilon'_D} & D \\ FG(h) \downarrow & & \downarrow h \\ FG(E) & \xrightarrow{\epsilon'_E} & E, \end{array}$$

donde  $\epsilon'_D$  y  $\epsilon'_E$  son isomorfismos. Dado que  $F = H \circ \mathbb{L}$ , se sigue que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H(\mathbb{L}G(D)) & \xrightarrow{\epsilon'_D} & D \\ H(\mathbb{L}G(h)) \downarrow & & \downarrow h \\ H(\mathbb{L}G(E)) & \xrightarrow{\epsilon'_E} & E. \end{array}$$

Esto prueba que  $H$  es pleno. Por lo tanto, como  $H$  es fiel, pleno y denso concluimos que  $H$  es una equivalencia de categorías.



□

### 4.3. Algunas propiedades que son preservadas

Para los siguientes resultados, vamos a necesitar la definición de monomorfismo esencial.

**Lema 4.22** *Para un morfismo  $u : X' \rightarrow X$  en una categoría abeliana  $\mathcal{C}$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) *Para cada subobjeto  $Y$  de  $X$ , si  $u^{-1}(Y) = 0$  entonces  $Y = 0$ .*
- (b) *Si  $f : X \rightarrow Z$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$  tal que  $\text{Ker}(fu) = \text{Ker}(u)$ , entonces  $f$  es un monomorfismo.*

**Demostración.** Ver [9, Lema 10.1, pág 135]. □

**Definición 4.23** *Sea  $u : X' \rightarrow X$  un monomorfismo en  $\mathcal{C}$ . Se dice que  $u$  es un **monomorfismo esencial** si satisface alguna de las condiciones equivalentes del Lema 4.22.*

**Proposición 4.24** *Sean  $u : X \rightarrow Y$  y  $v : Y \rightarrow Z$  monomorfismos. Entonces  $vu$  es un monomorfismo esencial si y solo si  $u$  y  $v$  son monomorfismos esenciales.*

**Demostración.** Ver [9, Corolario 10.3, pág 136]. □

También recordemos la siguiente propiedad básica de funtores adjuntos.

**Proposición 4.25** *Sean  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores entre categorías arbitrarias abelianas tal que  $F$  es adjunto a izquierda de  $G$ . Entonces  $F$  es exacto a derecha y  $G$  es exacto a izquierda.*

**Demostración.** Ver [18, Teorema 2.6.1, páginas 51 y 52]. □

**Corolario 4.26** *Sea  $\mathcal{A}$  una subcategoría de Serre de  $\mathcal{C}$  y supongamos que  $\mathbb{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{A}$  tiene adjunto a derecha  $S$ . Entonces  $S$  es exacto a izquierda.*

**Demostración.** Se sigue de la Proposición 4.25. □

**Proposición 4.27** *Sean  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores entre categorías arbitrarias abelianas, tales que  $F$  es adjunto a izquierda de  $G$ .*

- (a) *Si  $G$  preserva epimorfismos, entonces  $F$  preserva objetos proyectivos.*
- (b) *Si  $F$  preserva monomorfismos, entonces  $G$  preserva objetos inyectivos.*

**Demostración.** Ver [11, Teorema 11.8, pág 310].  $\square$

**Observación 4.28** Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un functor aditivo exacto izquierda entre categorías abelianas. Entonces,  $F$  preserva pullbacks.

**Demostración.** Como  $F$  es exacto a izquierda, tenemos que preserva kerneles. Además, como  $F$  es aditivo,  $F$  preserva sucesiones exactas que se escinden y por lo tanto preserva productos finitos. De la construcción de pullback, dada en [7, Lema 17.5, pág 27], tenemos que  $F$  preserva pullbacks.  $\square$

**Observación 4.29** Si  $\mathbb{L}(Z) = \bar{Z} \in \mathcal{C}/\mathcal{A}$  es tal que  $S(\bar{Z}) = 0$ , entonces  $\bar{Z} = 0$ .

**Demostración.** En efecto, considerando el morfismo  $\eta_Z : Z \rightarrow S\mathbb{L}(Z)$  de la Proposición 4.10, concluimos que  $\text{Ker}(\eta_Z) \cong Z \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto, por la Proposición 3.1, concluimos que  $\mathbb{L}(1_Z) := 1_{\mathbb{L}(Z)} = 0$  y así  $\bar{Z} = \mathbb{L}(Z) = 0$  en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ .  $\square$

**Proposición 4.30** Sean  $\mathcal{A}$  una subcategoría localizante de  $\mathcal{C}$ ,  $S$  el funtor adjunto de  $\mathbb{L}$  y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo. Entonces existen morfismos  $f|_{X_m} : X_m \rightarrow Y_m$  y  $f' : \frac{X}{X_m} \rightarrow \frac{Y}{Y_m}$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_m & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{p} & \frac{X}{X_m} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f|_{X_m} & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_m & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{q} & \frac{Y}{Y_m} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Además, se satisfacen las siguientes condiciones.

- (a)  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo si y sólo si  $f'$  es un monomorfismo.
- (b) Consideremos el morfismo canónico  $\eta_X : X \rightarrow (S \circ \mathbb{T})(X)$  de la Proposición 4.10 y su factorización a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & (S \circ \mathbb{L})(X) \\ & \searrow \pi & \nearrow \mu \\ & I & \end{array}$$

Entonces  $I \cong \frac{X}{X_m}$  y  $\mu$  es un monomorfismo esencial.

- (c) Si  $\varphi : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  es un monomorfismo esencial, entonces  $S(\varphi)$  es un monomorfismo esencial.
- (d)  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo esencial si y sólo si  $f'$  es un monomorfismo esencial.

**Demostración.** Primero veamos que se tiene el diagrama requerido. En efecto, sean  $u : X_m \rightarrow X$  y  $v : Y_m \rightarrow Y$  las inclusiones canónicas. Consideremos la factorización de  $fu : X_m \rightarrow Y$  a través de su imagen

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{fu} & Y \\ & \searrow \pi & \nearrow j \\ & & J. \end{array}$$

Como  $X_m \in \mathcal{A}$  y  $\pi$  es un epimorfismo, tenemos que  $J \in \mathcal{A}$ . Dado que  $j$  es un monomorfismo y  $Y_m$  es el subobjeto más grande de  $Y$  en  $\mathcal{A}$ , existe un monomorfismo  $h : J \rightarrow Y_m$  tal que  $j = vh$ . Luego,  $fu = j\pi = v(h\pi)$ . Definimos  $f|_{X_m} := h\pi$ . Luego  $f'$  existe por la propiedad universal del cokernel.

- (a) ( $\implies$ ) Supongamos que  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo. Consideremos el diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_m & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{p} & \frac{X}{X_m} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f|_{X_m} & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \\ 0 & \longrightarrow & Y_m & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{q} & \frac{Y}{Y_m} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como  $X_m, Y_m \in \mathcal{A}$ , tenemos que  $p, q \in \Sigma$  y por lo tanto  $\mathbb{L}(p)$  y  $\mathbb{L}(q)$  son isomorfismos. Luego, del diagrama anterior,  $\mathbb{L}(f') = \mathbb{L}(q)\mathbb{L}(f)\mathbb{L}(p)^{-1}$  y como  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo,  $\mathbb{L}(f')$  es un monomorfismo. Sea  $i : K \rightarrow \frac{X}{X_m}$  el kernel de  $f' : \frac{X}{X_m} \rightarrow \frac{Y}{Y_m}$ . Entonces  $\mathbb{L}(f')\mathbb{L}(i) = 0$ , y como  $\mathbb{L}(f')$  es monomorfismo, concluimos que  $\mathbb{L}(i) = 0$  y así por la Proposición 3.1  $\text{Im}(i) \cong K \in \mathcal{A}$ . Por el Lema 4.16, tenemos que  $K = 0$  y así  $f'$  es un monomorfismo.

( $\impliedby$ ). Supongamos que  $f'$  es un monomorfismo. Dado que  $\mathbb{L}$  es exacto, tenemos que  $\mathbb{L}(f')$  es un monomorfismo. Del diagrama anterior tenemos que  $\mathbb{L}(q)\mathbb{L}(f) = \mathbb{L}(f')\mathbb{L}(p)$ , donde  $\mathbb{L}(p)$  y  $\mathbb{L}(q)$  son isomorfismos. Por lo tanto  $\mathbb{L}$  es un monomorfismo. Esto termina la prueba de (a).

- (b) Por la construcción dada en la Proposición 4.18, podemos suponer que  $u : X_m \rightarrow X$  es el kernel de  $\eta_X$  y por lo tanto  $I = \text{Im}(\eta_X) \cong \frac{X}{X_m}$  y también  $\pi = p$ . Sea  $i : Z \rightarrow (S \circ \mathbb{L})(X)$  un monomorfismo con  $Z \neq 0$  tal que  $Z \cap I = 0$ . Tenemos el diagrama donde el cuadrado es un pullback

$$\begin{array}{ccccccc} I \cap Z & \xrightarrow{\mu'} & Z & & & & \\ \downarrow & & \downarrow i & & & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\mu} & (S \circ \mathbb{L})(X) & \xrightarrow{\gamma} & \text{Coker}(\eta_X) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como  $\mu = \text{Ker}(\gamma)$ , tenemos que  $\mu' = \text{Ker}(\gamma i)$ . Usando que  $I \cap Z = 0$ , concluimos que  $\gamma i$  es un monomorfismo. Por la Proposición 4.10,  $\text{Coker}(\eta_X) \in \mathcal{A}$  y por lo tanto concluimos que  $Z \in \mathcal{A}$  pues  $\mathcal{A}$  es de Serre. Consideremos el monomorfismo  $i : Z \rightarrow S(\mathbb{L}(X))$ . Como  $S(\mathbb{L}(X))$  es cerrado (ver la Proposición 4.8), se tiene que  $Z = 0$ , lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto  $Z \cap I \neq 0$  y así  $\mu : I \rightarrow (S \circ \mathbb{L})(X)$  es un monomorfismo esencial.

- (c) Supongamos que  $\varphi : \mathbb{L}(X) \rightarrow \mathbb{L}(Y)$  es un monomorfismo esencial. Consideremos el pullback

$$(*) : \begin{array}{ccc} Z \cap S\mathbb{L}(X) & \longrightarrow & S(\mathbb{L}(X)) \\ \downarrow & & \downarrow S(\varphi) \\ Z & \xrightarrow{i} & S(\mathbb{L}(Y)), \end{array}$$

tal que  $Z \cap S\mathbb{L}(X) = 0$ . Por la Proposición 4.10, tenemos el morfismo  $\eta_Z : Z \rightarrow S\mathbb{L}(Z)$ . Como  $\eta_Z \in \Sigma$  y  $S(\mathbb{L}(Y))$  es cerrado, se tiene que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta_Z, S\mathbb{L}(Y)) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S\mathbb{L}(Z), S\mathbb{L}(Y)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, S\mathbb{L}(Y))$$

es un isomorfismo (ver la Proposición 4.1). Por lo tanto, existe  $\theta : S\mathbb{L}(Z) \rightarrow S\mathbb{L}(Y)$  tal que  $\theta \eta_Z = i$ .

Por el Corolario 4.14, tenemos que existe  $\alpha : \mathbb{L}(Z) \rightarrow \mathbb{L}(Y)$  tal que  $S(\alpha) = \theta$ . Luego el diagrama (\*) se descompone como sigue

$$\begin{array}{ccccc} Z \cap S\mathbb{L}(X) & \longrightarrow & & \longrightarrow & S\mathbb{L}(X) \\ \downarrow & & & & \downarrow S(\varphi) \\ Z & \xrightarrow{\eta_Z} & S\mathbb{L}(Z) & \xrightarrow{S(\alpha)} & S\mathbb{L}(Y), \end{array}$$

el cual se puede construir tomando pullbacks sucesivos. Es decir, el diagrama anterior es el siguiente, donde los cuadrados internos son pullbacks y los morfismos verticales son monomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} Z \cap S\mathbb{L}(X) & \longrightarrow & N & \longrightarrow & S\mathbb{L}(X) \\ \downarrow \gamma' & & \downarrow \gamma & & \downarrow S(\varphi) \\ Z & \xrightarrow{\eta_Z} & S\mathbb{L}(Z) & \xrightarrow{S(\alpha)} & S\mathbb{L}(Y). \end{array}$$

Como  $i = S(\alpha)\eta_Z$  es un monomorfismo,  $\eta_Z$  es un monomorfismo. Por inciso (b),  $\eta_Z$  es mono esencial. Por lo tanto,  $N = 0$ .

Consideremos la factorización de  $\alpha$  a través de su imagen en la categoría  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$

$$\mathbb{L}(Z) \xrightarrow{\alpha'} \bar{I} \xrightarrow{\alpha''} \mathbb{L}(Y).$$

Luego, construimos el siguiente diagrama donde los dos cuadrados son pullback (por lo tanto el cuadrado externo también es pullback)

$$\begin{array}{ccccc} \overline{M} & \xrightarrow{\beta'} & \overline{I} \cap \mathbb{L}(Y) & \xrightarrow{\beta''} & \mathbb{L}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{L}(Z) & \xrightarrow{\alpha'} & \overline{I} & \xrightarrow{\alpha''} & \mathbb{L}(Y), \end{array}$$

y  $\beta'$  es un epimorfismo pues  $\alpha'$  lo es.

Por la Observación 4.28, tenemos que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{array}{ccccc} S(\overline{M}) & \xrightarrow{S(\beta')} & S(\overline{I}) \cap S(\mathbb{L}(Y)) & \xrightarrow{S(\beta'')} & S(\mathbb{L}(X)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow S(\varphi) \\ S(\mathbb{L}(Z)) & \xrightarrow{S(\alpha')} & S(\overline{I}) & \xrightarrow{S(\alpha'')} & S(\mathbb{L}(Y)) \end{array}$$

Como  $S(\alpha''\alpha') = S(\alpha)$ , concluimos que  $S(\overline{M}) = N = 0$ . Luego, por la Observación 4.29 tenemos que  $\overline{M} = 0$ . Como  $\beta'$  es epi, tenemos que  $\overline{I} \cap \mathbb{L}(Y) = 0$  y como  $\varphi$  es un monomorfismo esencial, concluimos que  $\overline{I} = 0$ . Así  $\alpha = 0$  y por lo tanto  $i = S(\alpha)\eta_Z = 0$ . De donde concluimos que  $Z = 0$ . Por lo tanto  $S(\varphi)$  es un monomorfismo esencial.

- (d) Como  $\eta : 1_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} \rightarrow S \circ \mathbb{L}$  es una transformación natural, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & (S \circ \mathbb{L})(X) \\ \downarrow f & & \downarrow (S \circ \mathbb{L})(f) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & (S \circ \mathbb{L})(Y). \end{array}$$

Luego se tiene el siguiente diagrama

$$(*) : \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{p} & \frac{X}{X_m} & \xrightarrow{\mu} & (S \circ \mathbb{L})(X) \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow (S \circ \mathbb{L})(f) \\ Y & \xrightarrow{p'} & \frac{Y}{Y_m} & \xrightarrow{\mu'} & (S \circ \mathbb{L})(Y). \end{array}$$

( $\Leftarrow$ ). Sea  $f'$  es un monomorfismo esencial. Como  $(S \circ \mathbb{L})(f) \circ \mu = \mu' f'$  es un monomorfismo y  $\mu$  es esencial por (b), tenemos que  $(S \circ \mathbb{L})(f)$  es un monomorfismo (ver Lema 4.22). Como  $\mu'$  es un monomorfismo esencial (inciso (b)), por la Proposición 4.24 tenemos que  $\mu' f' = (S \circ \mathbb{L})(f) \circ \mu$  es un monomorfismo esencial. Por la Proposición 4.24 tenemos que  $(S \circ \mathbb{L})(f)$

es un monomorfismo esencial.

Ahora, sea  $i : \bar{Z} \rightarrow \mathbb{L}(Y)$  un monomorfismo, con  $\bar{Z} \neq 0$ , tal que  $\bar{Z} \cap \mathbb{L}(X) = 0$ . Es decir, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{Z} \cap \mathbb{L}(X) = 0 & \longrightarrow & \bar{Z} \\ \downarrow & & \downarrow i \\ \mathbb{L}(X) & \xrightarrow{\mathbb{L}(f)} & \mathbb{L}(Y). \end{array}$$

Como  $S$  es exacto a izquierda (ver el Corolario 4.26), por la Observación 4.28 tenemos que el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{array}{ccc} S(\bar{Z} \cap \mathbb{L}(X)) = 0 & \longrightarrow & S(\bar{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow S(i) \\ S(\mathbb{L}(X)) & \xrightarrow{S(\mathbb{L}(f))} & S(\mathbb{L}(Y)). \end{array}$$

Es decir  $S(\bar{Z}) \cap S\mathbb{L}(X) = 0$ . Como  $S(i)$  es un monomorfismo y  $S(\mathbb{L}(f))$  es un monomorfismo esencial, concluimos que  $S(\bar{Z}) = 0$ . Por la Observación 4.29 concluimos que  $\bar{Z} = \mathbb{L}(Z) = 0$  en  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\bar{Z} \cap \mathbb{L}(X) \neq 0$  y así  $\mathbb{L}(f)$  es un monomorfismo esencial.

( $\implies$ ). Sea  $\mathbb{L}(f)$  un monomorfismo esencial. Por el inciso (c), tenemos que  $S(\mathbb{L}(f))$  es un monomorfismo esencial en  $\mathcal{C}$ . Consideremos el diagrama (\*) de arriba. Como  $\mu$  es un monomorfismo esencial, por la Proposición 4.24, tenemos que  $S(\mathbb{L}(f)) \circ \mu = \mu' \circ f'$  es un monomorfismo esencial. Por otro lado,  $f'$  es un monomorfismo (ver inciso (a)). Por lo tanto, por la Proposición 4.24, tenemos que  $f'$  es un monomorfismo esencial pues  $\mu' f'$  es un monomorfismo esencial.

□

Recordemos la siguiente definición (ver por ejemplo [9, pág 4]).

**Definición 4.31** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana. Una **envolvente inyectiva** de  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$  es un monomorfismo esencial  $u : \mathcal{C} \rightarrow I$ , donde  $I$  es un objeto inyectivo.*

**Corolario 4.32** *El funtor  $S$  preserva envolventes inyectivas.*

**Demostración.** Como  $\mathbb{L}$  es exacto, por la Proposición 4.27, tenemos que  $S$  preserva inyectivos. Por la Proposición 4.30(c),  $S$  preserva monomorfismos esenciales. Por lo tanto  $S$  preserva envolventes inyectivas. □

**Proposición 4.33** *Sea  $\mathcal{A}$  una subcategoría localizante de  $\mathcal{C}$ . Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un conjunto de generadores de  $\mathcal{C}$ , entonces  $\{\mathbb{L}(U_i)\}_{i \in I}$  es un conjunto de generadores para  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ .*

**Demostración.** Sea  $\alpha : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  un morfismo no cero  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ . Como  $S$  es fiel y pleno (ver el Corolario 4.14),  $S(\alpha) : S(\bar{X}) \rightarrow S(\bar{Y})$  es un morfismo no cero en  $\mathcal{C}$ . Como  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un conjunto de generadores de  $\mathcal{C}$ , existe un morfismo  $f : U_{i_0} \rightarrow S(\bar{X})$  para algún  $i_0 \in I$  tal que  $S(\alpha)f \neq 0$ . Veamos que  $\mathbb{L}(S(\alpha)f) \neq 0$ . En efecto, si  $\mathbb{L}(S(\alpha)f) = 0$ , por la Proposición 3.1 tenemos que  $\text{Im}(S(\alpha)f) \in \mathcal{A}$ . Consideremos la inclusión canónica  $i : \text{I}(S(\alpha)f) \rightarrow S(\bar{Y})$ . Como  $S(\bar{Y})$  es cerrado, por la Proposición 4.1(bi) concluimos que  $\text{I}(S(\alpha)f) = 0$  y por lo tanto  $S(\alpha)f = 0$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\mathbb{L}(S(\alpha)f) = \mathbb{L}(S(\alpha)) \circ \mathbb{L}(f) \neq 0$ .

Por otro lado, por la Proposición 4.10(a),  $\epsilon : \mathbb{L} \circ S \rightarrow 1_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$  es un isomorfismo. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}S(\bar{X}) & \xrightarrow{\epsilon_{\bar{X}}} & \bar{X} \\ \downarrow \mathbb{L}S(\alpha) & & \downarrow \alpha \\ \mathbb{L}S(\bar{Y}) & \xrightarrow{\epsilon_{\bar{Y}}} & \bar{Y} \end{array}$$

donde  $\epsilon_{\bar{X}}, \epsilon_{\bar{Y}}$  son isomorfismos. De donde concluimos que  $\alpha \circ (\epsilon_{\bar{X}} \circ \mathbb{L}(f)) \neq 0$  donde  $\epsilon_{\bar{X}} \circ \mathbb{L}(f) : \mathbb{L}(U_{i_0}) \rightarrow \bar{X}$ . Probándose que  $\{\mathbb{L}(U_i)\}_{i \in I}$  es un conjunto de generadores para  $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ .  $\square$

#### 4.4. Epimorfismos de anillos que inducen localizaciones

En esta sección consideraremos anillos asociativos con 1 y morfismos unitarios, es decir, morfismos de anillos  $f : A \rightarrow B$  tales que  $f(1_A) = 1_B$ . Dado  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos, tenemos el functor **restricción de escalares**  $f_* : \text{Mod}(B) \rightarrow \text{Mod}(A)$  definido como sigue:

Dado  $M$  un  $B$ -módulo a izquierda, definimos  $f_*(M) := M$  como grupo abeliano y la estructura de  $A$ -módulo en  $f_*(M) = M$  está dada a través de  $f$  como:

$$a \cdot m := f(a)m \quad \forall a \in A, \forall m \in M.$$

Luego, tenemos el siguiente resultado bien conocido.

**Proposición 4.34** ([16, Proposición XI.1.2]) *Para un morfismo de anillos asociativos con 1  $f : A \rightarrow B$ , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a)  $f$  es un epimorfismo de anillos.
- (b) El functor restricción  $f_* : \text{Mod}(B) \rightarrow \text{Mod}(A)$  es fiel y pleno. Es decir,

$$f_* : \text{Hom}_B(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(f_*(M), f_*(N))$$

es biyectiva para todo  $M, N \in \text{Mod}(B)$ .

4.4. EPIMORFISMOS DE ANILLOS QUE INDUCEN LOCALIZACIONES 149

- (c)  $f \otimes_A 1_B : A \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B$  es un isomorfismo de  $B$ - $B$ -bimodulos (es decir,  $B \cong B \otimes_A B$ ).
- (d)  $B \otimes_A \text{Coker}(f) = 0$ , donde  $\text{Coker}(f)$  es el cokernel de  $f$  visto como morfismo de  $A$ -modulos.

**Proposición 4.35** Para un morfismo de anillos asociativos con 1  $f : A \rightarrow B$ , las siguientes condiciones se satisfacen.

- (a) El funtor  $B \otimes_A - : \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(B)$  es adjunto a izquierda de  $f_*$ .
- (b) El funtor  $\text{Hom}_A(B, -) : \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(B)$  es adjunto a derecha de  $f_*$ .

Es decir, en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & B \otimes_A - & \\
 & \curvearrowright & \\
 \text{Mod}(B) & \xrightarrow{f_*} & \text{Mod}(A) \\
 & \curvearrowleft & \\
 & \text{Hom}_A(B, -) & 
 \end{array}$$

$(B \otimes_A -, f_*)$  y  $(f_*, \text{Hom}_A(B, -))$  son pares adjuntos.

**Demostración.** Ver [12, Lema 10.68, pág 670].  $\square$

Para la siguiente definición, ver [16, pág 229].

**Definición 4.36** Sea  $f : A \rightarrow B$  un epimorfismo de anillos. Decimos que  $f$  es **localización perfecta izquierda** si  $B$  es un  $A$ -módulo derecho plano, via el morfismo  $f$ .

**Proposición 4.37** Sea  $f : A \rightarrow B$  una localización perfecta izquierda. Consideremos el funtor  $F := B \otimes_A - : \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Mod}(B)$ . Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.

- (a)  $\mathcal{A} = \{M \in \text{Mod}(A) \mid B \otimes_A M = 0\}$  es una subcategoría de Serre de  $\text{Mod}(A)$ .
- (b) Se tiene una equivalencia de categorías

$$\text{Mod}(A)/\mathcal{A} \simeq \text{Mod}(B).$$

**Demostración.**



(a) Consideremos una sucesión exacta en  $\text{Mod}(A)$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Como  ${}_A B$  es plano, tenemos la siguiente sucesión exacta en  $\text{Mod}(B)$

$$0 \longrightarrow L \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B \longrightarrow N \otimes_A B \longrightarrow 0.$$

Luego  $M \otimes_A B = 0$  si y sólo si  $L \otimes_A B = 0$  y  $N \otimes_A B = 0$ . Probándose que  $\mathcal{A}$  es de Serre.

(b) Como  $f : A \longrightarrow B$  una localización perfecta,  $F$  es un funtor exacto tal que su funtor adjunto a derecha  $G = f_*$  es fiel y pleno (ver la Proposición 4.34). Por lo tanto, el resultado se sigue del Teorema 4.21.

□

**Lema 4.38** *Para  $G \in \text{Mod}(\mathbb{Z})$ ,  $G$  es de torsión si y solo si  $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ .*

**Demostración.** ( $\implies$ ) Ver [12, Proposición 2.7.3, pág 91].

( $\impliedby$ ). Recordemos que  $\mathbb{Q} = S^{-1}\mathbb{Z}$ , donde  $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ . En este caso  $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq S^{-1}G$  (ver [2, Proposición 3.5]). Supongamos que  $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ . Entonces  $S^{-1}G = 0$ . Por la construcción de  $S^{-1}G$ , dada en [2, pág 38], tenemos que  $\frac{g}{s} = \frac{0}{1}$  en  $S^{-1}G$  para todo  $g \in G$  y  $s \in S$ . Por definición de  $S^{-1}G$ , se tiene que existe  $t \in S$  tal que  $t(1 \cdot g - 0 \cdot s) = 0$ , es decir,  $tg = 0$ . Por lo tanto, todo elemento de  $G$  es de torsión y así concluimos que  $G$  es de torsión. □

**Corolario 4.39** *Denotemos por  $\mathbb{Z}\text{-Tors}$  a la subcategoría plena de  $\text{Mod}(\mathbb{Z})$  cuyos objetos son todos los grupos abelianos de torsión. Entonces, existe una equivalencia de categorías*

$$\text{Mod}(\mathbb{Z}) / (\mathbb{Z}\text{-Tors}) \simeq \text{Mod}(\mathbb{Q}).$$

**Demostración.** Se sabe que  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$  es un epimorfismo en la categoría de anillos y además que  $\mathbb{Q}$  es plano como  $\mathbb{Z}$ -módulo (ver [2, Corolario 3.6]). Por lo tanto,  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$  es una localización perfecta. Además por el Lema 4.38, tenemos que

$$\{G \in \text{Mod}(\mathbb{Z}) \mid G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0\} = \mathbb{Z}\text{-Tors}.$$

Luego, por la Proposición 4.37, se tiene el resultado. □

**Observación 4.40** *Más generalmente, consideremos anillos conmutativo con 1 y  $S \subseteq A$  un conjunto multiplicativo de  $A$ . Sea  $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$  la localización de  $A$  respecto de  $S$ . Es bien sabido que  $\varphi$  es un epimorfismo de anillos y además que  $S^{-1}A$  es plano como  $A$ -módulo. Entonces, en este caso, existe una equivalencia de categorías*

$$\text{Mod}(A) / \mathcal{A} \simeq \text{Mod}(S^{-1}A),$$

donde  $\mathcal{A} = \{M \in \text{Mod}(A) \mid S^{-1}A \otimes_A M = 0\}$ .

# Bibliografía

- [1] W. Anderson & R. Fuller. Rings and Categories and Modules. Springer Verlag, (1974).
- [2] M. Atiyah. An introduction to commutative algebra. Addison - Wesley Publishing Company, Inc, Massachusetts, (1969).
- [3] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. Vol. 1. Basic Category Theory*. Cambridge University Press, pp 345, (1994).
- [4] P. Gabriel. *Des catégories abéliennes*. Bull. Soc. Math. France. 90, 323-448 (1962).
- [5] G. Gim. Homological Algebra-Lecture Notes. Lectures by Paul Balmer notes by Geunho Gim. Recuperado de: <https://www.math.ucla.edu/~ggim/S14-212lecturenote.pdf>
- [6] A. Grothendieck. *Sur quelques points d'Algèbre homologique*. Tohoku Math. J. 119-221 (1957).
- [7] B. Mitchell. Theory of categories. Columbia University, New York, (1964).
- [8] Z. Murphy. Quotients categories and Grothendieck's splitting theorem. Tesis de Licenciatura en School of Mathematics and Statistics UNSW, Sydney (2017). Recuperado de: [https://web.maths.unsw.edu.au/~danielch/thesis/zac\\_murphy.pdf](https://web.maths.unsw.edu.au/~danielch/thesis/zac_murphy.pdf)
- [9] N. Popescu. Abelian Categories with applications to rings and modules. Academic Press, Inc, London and New York, (1973).
- [10] J. Rotman. Advanced Modern Algebra. Prentice Hall, (2003).
- [11] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press, Inc, Illinois, 1979.

- [12] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Second Edition. Universitext, Springer 2008.
- [13] V. Santiago. Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el teorema de inmersión en la categoría de grupos abelianos, Tesis de Licenciatura, UNAM (2007).
- [14] J. P. Serre. *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*. Ann. of Math., 58, 2 (1953) pp. 258-294.
- [15] P. Smith. Graded Rings and Geometry. Recuperado de <https://sites.math.washington.edu/~smith/Teaching/508/notes.pdf>
- [16] B. Stenström. *Rings of quotients*. Springer Verlag, Berlin New York (1975).
- [17] E. O. Velasco Páez. Localización en categorías abelianas. Tesis de Licenciatura, UNAM, (2017).
- [18] C. Weibel. *An Introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.