



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA

**PREDICCIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA DE
UN FLUIDO NO NEWTONIANO INELÁSTICO DURANTE UNA
ULTRAFILTRACIÓN PARA LA PURIFICACIÓN DE *ALOE VERA***

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO QUÍMICO**

**P R E S E N T A :
IVAN HAZIEL GONZÁLEZ GUILLEN**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS MEDINA TORRES

ASESORES DE TESIS:

M. EN. C. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

CIUDAD DE MÉXICO

JUNIO 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIAS

- Quiero dedicar este trabajo a mi madre Ana y a mi hermano Eduardo a quienes amo con todo mi corazón, me han apoyado, brindado cariño y estado conmigo desde pequeño y durante todo este trayecto, han creído en mi más que nadie y si este logro es posible es gracias a ellos.
- A mi Abuela Irma que fue la primera en felicitarme cuando me gradué y a mi primo Yahir quien siempre fue amable conmigo, aunque ya no estén conmigo los recordare siempre y agradezco todo el tiempo que pasaron a mi lado.
- A todos los amigos que conocí en mi tiempo en la FES Zaragoza, Enrique, Fabian, Karla, Sebastián, Brandon, Alejandro, Judith, Daniel, Suá, Mauro, Pedro, Renee, Douglas y todos los que no puedo escribir porque no tendría espacio suficiente, son ellos con los que recorrí el mismo el camino, y pase tantas alegrías, les deseo lo mejor y agradezco poder estar con ustedes.
- También a toda mi familia, amigos y compañeros que no mencione directamente, pero sin su apoyo y cariño este trabajo no habría sido posible.
- Finalmente, a ti quien está leyendo este trabajo, cuando lo escribí todos vivíamos tiempos difíciles, pero justamente todo nuestro esfuerzo e investigación tienen el objetivo de hallar un mejor mañana, así que espero que este escrito pueda ayudarte a encontrar lo que buscas.

AGRADECIMIENTOS

- Quiero agradecer primero a la Universidad Nacional Autónoma de México, que me permitió desarrollarme y aprender desde mi etapa de bachillerato hasta los estudios superiores, obtuve educación de primera calidad y todos los apoyos que permitieron mi realización profesional.
- A la facultad de Estudios Superiores Zaragoza mi alma máter donde pase los que fueron mis mejores momentos de vida académica y también algunos de los más complicados pero juntos formaron quien soy y no podría estar más orgulloso de la formación que recibí, estoy muy agradecido con todos los profesores, doctores y compañeros que dedican todo su esfuerzo para educar a las siguientes generaciones.
- Al doctor Luis Medina Torres por compartir su conocimiento e investigación conmigo su trabajo sirvió de inspiración y guía durante la realización de este trabajo.
- Al Dr. Fausto Calderas García por sus comentarios y propuestas, que fueron muy importantes en el desarrollo y corrección de este trabajo sobre todo de la programación.
- Al profesor Luis Antonio Ramírez que desde el comienzo me guio durante el desarrollo de este trabajo, le agradezco por apoyarme, compartir su tiempo y conocimientos, también le agradezco su paciencia y dedicación.
- A mis sinodales el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia y a la I.Q. Dominga Ortiz Bautista por su apoyo y observaciones.
- Quiero agradecer a todo el grupo de investigación del Laboratorio 7 de Reología y fenómenos de Transporte, de la Unidad Multidisciplinaria de Investigación la FES Zaragoza, que me permitieron realizar mi servicio social y tesis, avivaron mi deseo de investigación, me dieron un lugar donde pertenecer, crecer y dedicaron tanto esfuerzo para apoyarme, les estaré siempre agradecido.

INDICE GENERAL

RESUMEN	7
INTRODUCCIÓN	8
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	9
HIPÓTESIS	10
OBJETIVO GENERAL	10
OBJETIVOS PARTICULARES	10
1 MARCO TEÓRICO	11
1.1. ULTRAFILTRACIÓN	11
1.1.1. APLICACIONES DE LA ULTRAFILTRACIÓN	13
1.1.2. POLARIZACIÓN DE CONCENTRACIÓN	14
1.2. PLANTA DE <i>ALOE VERA</i>	19
1.2.1. MUCÍLAGO DE <i>ALOE VERA</i>	21
1.2.2. PROPIEDADES REOLÓGICAS DEL MUCÍLAGO DE <i>ALOE VERA</i>	23
1.2.3. PROCESAMIENTO DE HOJA DE <i>ALOE VERA</i>	25
1.2.4. EFECTOS DEL PROCESAMIENTO TÉRMICO EN AL <i>ALOE VERA</i>	28
1.2.5. COEFICIENTE DE DIFUSIÓN DE LAS SOLUCIONES DE <i>ALOE VERA</i>	30
1.3. ANALOGÍAS ENTRE LA TRANSFERENCIA DE CALOR, MASA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO ..	31
1.3.1. ANALOGÍA DE CHILTON Y COULBURN	32
1.4. FUNDAMENTOS DE LA REOLOGÍA	33
1.4.1. FLUIDOS NEWTONIANOS	33
1.4.2. FLUIDOS NO-NEWTONIANOS	34
1.4.3. MODELOS REOLÓGICOS CONSTITUTIVOS	35
2. METODOLOGÍA	38
2.1. MATERIALES	38
2.1.1. EXTRACCIÓN DEL MUCILAGO DE <i>ALOE VERA</i> DEL GEL	38
2.2. CARACTERIZACIÓN REOLÓGICA	38
2.3. PROCESO DE ULTRAFILTRACIÓN	39
2.4. FLUX DE PERMEADO	39
2.4.1. PREDICCIÓN DEL FLUX DE PERMEADO DEL <i>ALOE VERA</i>	40

3.	ANÁLISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS	42
3.1.	COEFICIENTE DE DIFUSIÓN PARA LAS DISOLUCIONES DE <i>ALOE VERA</i>	42
3.2.	CARACTERIZACIÓN REOLÓGICA	44
3.3.	FLUX DE PERMEADO EXPERIMENTAL DEL MUCILAGO DE <i>ALOE VERA</i>	47
3.3.1.	COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA <i>kc</i> Y EL FLUJO DE PERMEADO <i>J</i>	48
3.4.	SIMULACIONES NUMERICAS	51
4.	CONCLUSIONES	58
4.1.	TRABAJO A FUTURO	59
	APENDICE A	60
	APENDICE B	83
	APENDICE C	130
5.	NOTACIÓN.....	132
5.1.	LETRAS GRIEGAS.....	132
5.2.	OTROS SÍMBOLOS	133
6.	BIBLIOGRAFÍA.....	134

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Esquema para un proceso batch simple de ultrafiltración. F1 es un indicador de flujo, PG un medidor de presión (tomado de Matteson, 1987).	12
Figura 2 Módulo Espiral de ultrafiltración (tomado de Matteson, 1987).....	13
Figura 3 Esquema de un perfil de concentraciones cerca de la membrana durante la ultrafiltración (Tomado de Matteson, 1987).....	14
Figura 4 Hoja entera y corte transversal del Aloe vera (<i>Aloe barbadensis</i> Mill) tomado de (CABI, 2020).....	21
Figura 5 <i>Grafica de viscosidad vs velocidad de corte del mucilago de Aloe vera fresco</i> Tomado de (Perez & al, 2019)	24
Figura 6 Micrografías de muestra de gel de Aloe vera: (a) antes de la prueba de corte a 30 °C, y (b) después de la prueba de corte a 30 °C tomado de (Lad & Murthy, 2013).	25
Figura 7 Diagrama de flujo para el procesamiento de la hoja Aloe vera mediante el proceso de tiempo temperatura y sanitación (TTS).....	28
Figura 8 Influencia de la temperatura en el contenido de polisacáridos dentro de un rango de tiempo determinado 0-10 horas, tomado de (Chang, Wang, Feng, & Liu, 2006).	29
Figura 9 Micrografías del jugo de Aloe vera, pruebas simples a 15°C (a), 30°C (b), 45°C (c). Tomado de (Lad & Murthy, 2013)	30
Figura 10 Diagrama de flujo de la predicción teórica del flux de permeado.	40
Figura 11 Viscosidad cortante vs. Rapidez de deformación para la disolución de Aloe vera a 20°Brix.....	45
Figura 12 Viscosidad cortante vs. Rapidez de deformación para la disolución de Aloe vera a 60°Brix.....	46
Figura 13 flux de Permeado (J) en función del tiempo(minuto) de la Ultrafiltración para la filtración de mucilago Aloe vera.	48
Figura 14 Grafica Flux de k_c en comparación del diámetro del módulo de Ultrafiltración	52
Figura 15 Grafica Flux de k_c en comparación de la longitud del módulo de Ultrafiltración	53
Figura 16 <i>Grafica Coeficiente de transferencia de masa (k_c) en función de la caída de presión (ΔP).</i>	54
Figura 17 Grafica Flux de permeado (J) en función de la concentración de filtrado de mucílago (C_b) para distintos modelos Reológicos.	55
Figura A- 1 Perfil de velocidades en una tubería cilíndrica.	61
Figura A- 2. Representación de un flujo homogéneo en una tubería.	130

RESUMEN

El *Aloe vera* (*Aloe barbadensis Miller*) es un biopolímero con alto contenido de mucopolisacáridos que contribuye a la preservación del sistema inmunológico, gracias a sus propiedades antiinflamatorias, cicatrizantes, analgésicas, antioxidantes, antineoplásica, etc. También ha sido utilizado como alimento funcional y como base de diversos productos cosméticos. Tradicionalmente, la extracción y concentración del mucílago de *Aloe vera* implica un proceso de evaporación, que altera la composición de los mucopolisacáridos y de su estructura molecular. Por lo anterior, la ultrafiltración (UF) representa una alternativa interesante y prometedora para concentrar el mucílago del *Aloe vera*, y preservar su contenido de mucopolisacáridos y a la vez minimizar la degradación de los compuestos sensibles al calor. En este trabajo se caracterizó la respuesta reológica y se modeló un proceso de UF para la concentración del mucílago de *Aloe vera* a condiciones fijas de operación: temperatura (T), flujo de entrada (V), la presión transmembrana (ΔP_{TM}). Las soluciones concentradas de mucílago de *Aloe vera* (20 a 60%°Brix) a partir de un proceso de UF se caracterizaron reologicamente, y exhiben un comportamiento no newtoniano del tipo adelgazante al flujo. El objetivo de este trabajo fue la obtención del coeficiente de transferencia de masa k_c de este fluido de reología compleja durante un proceso de ultrafiltración por medio de la teoría de capa polarizada en flujo cruzado. En la descripción del comportamiento reológico del mucílago de *Aloe vera* concentrado se usó la ecuación constitutiva de Reiner-Philippoff y el modelo de Bautista-Manero-Puig (BMP). Los resultados sugieren que el modelo de Bautista-Manero-Puig representaron mejor los datos experimentales de flux de permeado versus la concentración del filtrado con respecto el flux de permeado medido experimentalmente. Finalmente, el modelo de Reiner-Philippoff y el modelo de Bautista-Manero-Puig representan mejor los datos experimentales a altas concentraciones en comparación con el modelo de la ley de la potencia.

INTRODUCCIÓN

El proceso de ultrafiltración con membrana permite clarificar, separar y/o concentrar productos sin el uso de solventes químicos ni el empleo de altas temperaturas. Actualmente se ha utilizado la ultrafiltración con membranas para concentrar, clarificar y en la estandarización microbiológica de jugos vegetales y de frutas, separación de compuestos biológicos de interés o de importancia en la industria química (Thomas, Gaddis, Westfall, Titus, & Ellis, 1987). La tecnología de ultrafiltración con membranas ofrece una alternativa interesante, permitiendo que los productos obtenidos sean aprovechados en su totalidad, como productos puros o mezclados, logrando una diversificación comercial. En este estudio, la predicción del comportamiento reológico del mucilago de *Aloe vera* durante el flujo en un proceso de ultrafiltración, se emplearon los modelos constitutivos de Reiner-Philipoff y el de Bautista-Manero-Puig (BMP) y se incorporaron estas predicciones en los modelos del flux de permeado a las condiciones geométricas y de proceso en la ultrafiltración de capa polarizada de flujo cruzado como son: la temperatura (T), velocidad de alimentación (V), presión transmembrana (ΔP_{TM}), diámetro del ultrafiltrador (D) y la longitud del ultrafiltrador (L). Además, se evaluó el efecto de la concentración de mucílago de *Aloe vera* sobre el flux de permeado tomando en cuenta las propiedades reológicas del filtrado obtenido durante el proceso de UF. Así pues, La medición, caracterización y modelado de las propiedades reológicas proporciona una comprensión de las propiedades macro-estructurales y funcionales del concentrado obtenido por UF del mucilago del *Aloe vera*, lo que permitirá diseñar equipos a nivel industrial (Lad & Murthy, 2013). La tecnología de membranas ofrece una alternativa no térmica para la obtención de nuevos productos y subproductos procedentes de diversas fuentes que generarán un aprovechamiento integral, además de un impacto benéfico en la economía. El uso de la UF en lugar de los tratamientos tradicionales como la evaporación (proceso térmico) que se usan durante la preparación y estabilización del mucilago de *Aloe vera* causan efectos irreversibles en sus componentes bioactivos como polisacáridos y compuestos antioxidantes (Kim K. , et al., 1998), permite mantener su estructura original manteniendo las propiedades bioquímicas y productos de mayor calidad a partir del *Aloe vera* fresco.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad existe un creciente interés en el entendimiento y modelado de flujos de fluidos de reología compleja (Charcosset & Choplin, 1995) durante el proceso de ultrafiltración (Solís, 2016), ya que el desarrollo tecnológico e implementación industrial de estos procesos requieren de la simulación más detallada y eficiente, por ejemplo, para la predicción de la concentración del mucilago de *Aloe vera* como una alternativa no térmica (CABI, 2020), de hecho, durante el procesamiento térmico del *Aloe vera* usado en la actualidad, se producen daños en las membranas celulares del mucilago que causan cambios importantes en los efectos fisiológicos y farmacológicos de los ingredientes activos presentes en el mucilago de *Aloe vera* (Chang, Wang, Feng, & Liu, 2006).

Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995) emplearon el modelo de la ley de potencia para describir el coeficiente de transferencia de masa k_c durante un proceso de ultrafiltración para un fluido no newtoniano adelgazante termoreológicamente simple (goma xantana), sin embargo, este enfoque presenta una desviación entre los valores teóricos y los valores experimentales registrados del flujo de permeado.

En este trabajo, se propone una alternativa de modelación matemática para obtener valores teóricos del flujo de permeado más consistentes con los valores experimentales de un fluido no newtoniano adelgazante inelástico (mucilago de *Aloe vera*) aplicando el modelo constitutivo reológico de Reiner-Philippoff y el de Bautista-Manero-Puig (BMP) ya que estos modelos representan adecuadamente la curva de flujo cortante simple estacionario completa, asimismo, se realizó una comparación con el modelo obtenido por Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995) para un proceso de UF considerando los parámetros reológicos obtenidos con los modelos constitutivos. La aplicación directa de esta metodología facilitará el diseño y optimización de un equipo de UF para la concentración del Mucilago de *Aloe vera* con diversas aplicaciones en la industria química.

HIPÓTESIS

- El concentrado de *Aloe vera* es un fluido termoreológicamente sencillo, es decir, cambios equivalentes en la concentración de *Aloe vera* genera cambios equivalentes en su respuesta reológica.
- El modelo de BMP (Bautista-Manero-Puig) representará con mayor precisión el comportamiento del fluido complejo como lo es el mucilago de *Aloe vera* en comparación con el modelo de Reiner-Philipoff y el de la ley de potencia, ya que el modelo de BMP describe fluidos cuya estructura es compleja.
- Se cumple la analogía de Chilton – Colburn (factor J), esto es, existe una analogía entre la Transferencia de Calor y la Transferencia de Masa, por lo que cambios equivalentes de la concentración de soluto cerca y lejos de la pared implican cambios equivalentes en la viscosidad cerca y lejos de la pared.

OBJETIVO GENERAL

- Calcular el flux de permeado de *Aloe vera* durante un proceso de ultrafiltración de capa polarizada de flujo cruzado en estado estacionario, y comprar los valores teóricos con los valores experimentales obtenidos.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Obtener los parámetros reológicos de los dos modelos constitutivos por medio de los datos experimentales de flujo cortante simple.
- Estudiar los principios de la ultrafiltración de capa polarizada de flujo cruzado en estado estacionario.
- Deducir, con las ecuaciones reológicas propuestas, la expresión del coeficiente de transferencia de masa k_c para un proceso de ultrafiltración de capa polarizada de flujo cruzado en coordenadas cilíndricas.
- Obtener el flux de permeado teórico y compararlo con el flux de permeado experimental para calcular el porcentaje de error que cada modelo.

1 MARCO TEÓRICO

1.1. ULTRAFILTRACIÓN

La ultrafiltración es un medio de separación con membrana utilizado para purificar y/o concentrar líquidos. El proceso de ultrafiltración con membrana permite clarificar, separar y/o concentrar productos sin el uso de solventes químicos ni altas temperaturas, además, en este tipo de métodos se permite el aprovechamiento de todos los subproductos por lo que el aprovechamiento es integral. Actualmente se ha utilizado la ultrafiltración con membranas para la clarificación y estandarización microbiológica de jugos vegetales y de frutas, separación de compuestos biológicos de interés o de importancia industrial, entre otros (Wakat, 2008). La ultrafiltración (UF) cubre rangos más amplios de tamaño de partículas, desde $0.5 \mu m$ hasta moléculas con tamaño de $10^{-3} \mu m$ (McCabe, Smith, & Harriot, 2007). El equipo para los sistemas de ultrafiltración es parecido al de los sistemas de osmosis inversa, pero trabaja a presiones menores. Las membranas para ultrafiltración son porosas, y se clasifican por el tamaño de poro (Matteson & Orr, 1987). Las moléculas grandes se separan en los poros de la película delgada de la membrana, por lo que quedan en el permeado. Las moléculas pequeñas caben en los poros que atraviesan hacia el permeado. Como suele haber una distribución de tamaños de poro, las moléculas dentro del intervalo de tamaños de poro parcialmente pasan y/o parcialmente se retienen. De manera simplificada, la ultrafiltración a nivel molecular es una filtración de flujo cruzado (Wakat, 2008). En la **Figura 1** se puede apreciar un esquema típico de una filtración de tipo *batch* en el que el módulo de ultrafiltración está conectado a tres flujos, (alimentación, permeado y concentrado), un tipo común de un sistema comercial de ultrafiltración.

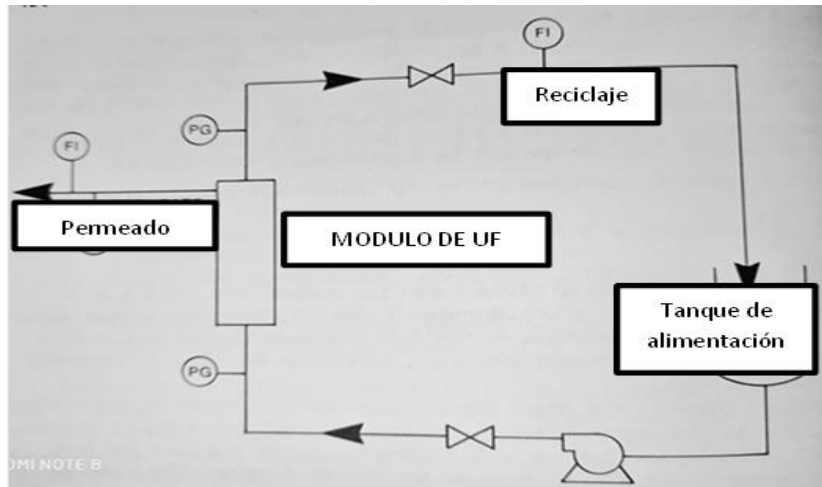


Figura 1 Esquema para un proceso batch simple de ultrafiltración. F1 es un indicador de flujo, PG un medidor de presión (tomado de *Matteson, 1987*).

En el proceso de UF, un material similar a un gel de interés se deposita sobre la superficie de la membrana, aumentando su capacidad de concentración con el tiempo. El efecto del aumento de la concentración en la superficie de la membrana del ultrafiltrador es temporal, posteriormente disminuye la eficiencia y, por lo tanto, el flux de permeado disminuye significativamente (Ying & Abdul, 2012). En el proceso de filtrado convencional, el flujo opera en una dirección perpendicular a la superficie, por lo que el medio filtrante se obstruye más rápido que en la filtración de flujo tangencial como la UF (Mears, 1976) (Chou, Wiley, & Schlimme, 1991). Los procesos de UF suelen funcionar en condiciones de flujo tangencial debido a la torta de partículas de 1 μm que se formaría en una filtración tradicional en dirección perpendicular por los tamaños de partícula que se manejan en la UF y ofrecería una muy alta resistencia al flujo, y la velocidad de filtrado sería muy lenta. El flujo tangencial da lugar a volúmenes de producto mayores que los obtenidos mediante flujos perpendiculares (McCabe, Smith, & Harriot, 2007). Así pues, los módulos de ultrafiltración representan un elemento central de los sistemas de ultrafiltración, aunque existen varias clases, en la **Figura 2** se puede apreciar el más común de los módulos de UF el módulo espiral el cual puede ser descrito como: “Un modelo espiral está formado por una membrana de lámina plana, intercalada entre una pantalla separadora de alimentación y una pantalla

de recolección de permeado, ambos espacios sirven para definir las alturas del canal respectivas separando las láminas de membrana. El espaciador de alimentación puede mejorar la transferencia de masa en el canal de alimentación. El espaciador de permeado sirve como un conducto para el flujo de permeado hacia el tubo central. Los bordes del canal de permeado deben sellarse. Las membranas y los separadores de sándwich completos se enrollan alrededor del tubo de recolección de permeado perforado (Matteson & Orr, 1987).

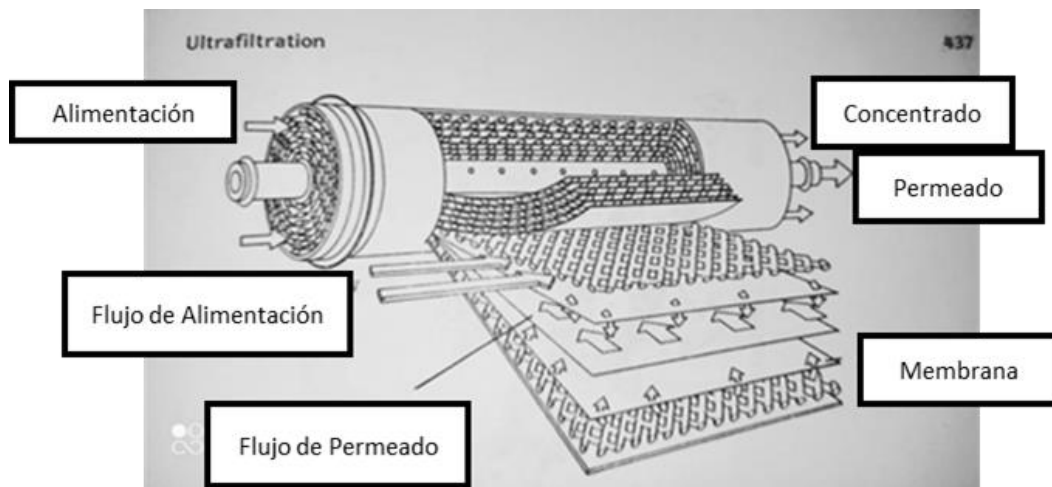


Figura 2 Módulo Espiral de ultrafiltración (tomado de Matteson, 1987).

Por otro lado, los modelos fenomenológicos empleados en el proceso de UF de fluidos no newtonianos a través de membranas aún están poco desarrollados. Todavía faltan predicciones *a priori* de rendimiento para una membrana dada y un fluido dado en términos de flujos. Los modelos disponibles tienen como objetivo comprender el efecto de las propiedades reológicas en el flujo, en particular esta investigación se centra en las predicciones del coeficiente de transferencia de masa por convección forzada (k_c) tomando en cuenta las propiedades reológicas de los fluidos.

1.1.1. APLICACIONES DE LA ULTRAFILTRACIÓN

La tecnología de ultrafiltración con membranas ofrece una alternativa prometedora no solo para las sustancias como el mucilago de *Aloe vera*, el proceso puede ser extrapolable a otras sustancias mucilaginosas y/o gomas de origen natural,

permitiendo que los productos obtenidos sean aprovechados en su totalidad, como productos puros o mezclados, logrando una diversificación comercial. Por otra parte, la tecnología de membranas ofrece una alternativa para la obtención de nuevos productos y subproductos procedentes de diversas fuentes que generarán un aprovechamiento integral, además de un impacto benéfico que fortalece la implementación de la economía circular. La ultrafiltración se usa ampliamente en el procesamiento de alimentos y en la industria farmacéutica para separar y concentrar soluciones de biopolímeros, proteínas y medicamentos. En la industria láctea, se encuentra un ejemplo en la concentración de proteínas en la leche descremada (Charcosset & Choplin, 1995). También se usa para recuperar sustancias químicas en las industrias textil y papelera, tratamiento de residuos acuosos, además de la purificación del agua proveniente de pulpas minerales.

1.1.2. POLARIZACIÓN DE CONCENTRACIÓN

Es la acumulación de solutos que ocurre en la superficie de la membrana donde se lleva a cabo la filtración cuando el flujo de *momentum* del concentrado es perpendicular al flujo de masa (Matteson & Orr, 1987), (Solís, 2016). Se puede entender el fenómeno de polarización de concentración en una versión simplificada como se ve en la **Figura 3**. El permeado fluye en régimen laminar en co-corriente con la alimentación generando así una transferencia de masa cuya dirección es perpendicular.

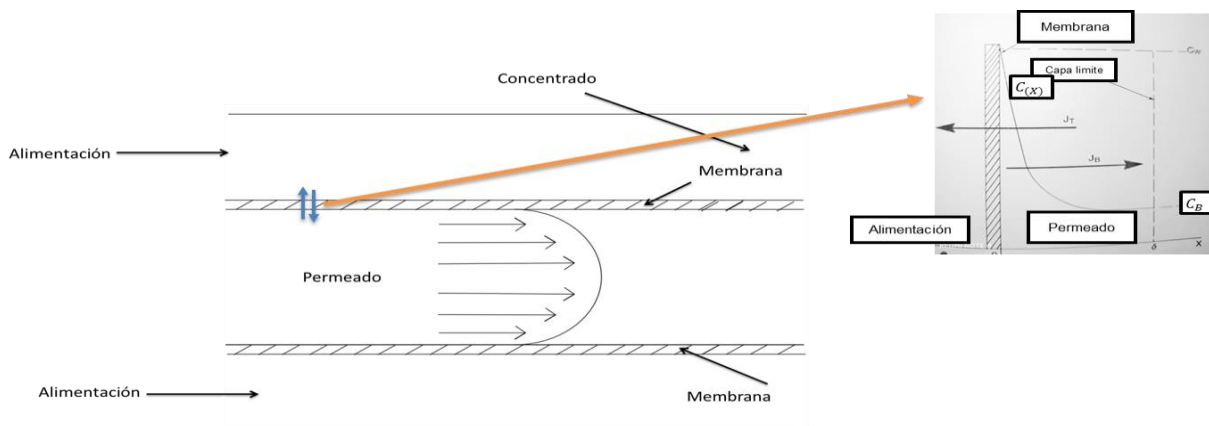


Figura 3 Esquema de un perfil de concentraciones cerca de la membrana durante la ultrafiltración (Tomado de Matteson, 1987)

Donde, C_B es la concentración de alimentación en el *grosor de alimentación* (capa límite), C_w es la concentración de alimentación en la superficie de la membrana. Se supone un flujo de materia en estado estacionario establecido entre un flujo de soluto J_T hacia delante de la membrana y un flujo de soluto J_B lejos de la membrana (principalmente debido a la difusión y la turbulencia del canal). Estos flujos son descritos por la Ec. (1) y (2) respectivamente:

$$J_T = J_V c \quad (1)$$

$$J_B = D_S \frac{dc}{dx} \quad (2)$$

Donde, J_V es el flujo volumétrico, c es la concentración del soluto de alimentación, y x es la distancia perpendicular desde la membrana hacia el canal de alimentación. En estado estacionario $J_T = J_B$ e integrando en los límites $x (0, \delta)$, $c (c_b)$, obtenemos la aproximación de la capa límite (Matteson & Orr, 1987).

$$\frac{c_w}{c_b} = \exp\left(\frac{J_V \delta}{D_S}\right) = \exp\left(\frac{J_V}{k_c}\right) \quad (3)$$

Donde, D_S es el coeficiente de difusión del soluto, δ es el grosor de la capa límite, c_w , c_b son concentraciones de alimentación en la superficie de la membrana (pared) y en la capa límite, respectivamente, y k_c denota un coeficiente de transferencia de masa. El valor de k_c se puede aproximar de una de varias correlaciones de ingeniería, usando D_S , viscosidad de solución, geometría del canal, y viscosidad cortante como parámetros.

En algunos casos se alcanza un flux máximo cuando C_B se iguala a la solubilidad y se forma una capa de precipitado o gel en la superficie debido a las moléculas rechazadas con una resistencia hidráulica apreciable. En otros casos, C_B es menor que la solubilidad en el flux máximo, porque las moléculas rechazadas forman una capa superficial con una considerable resistencia hidráulica. Esto es probable que suceda con una solución de un polímero de alto peso molecular que tiene sólo una moderada presión osmótica, pero puede formar una masa enmarañada de moléculas que se superponen en la superficie de la membrana. Aun cuando no exista ningún gel real.

Cuando se alcanza el flux máximo, éste está limitado por la velocidad de transferencia de masa que regresa al seno de la solución. Un repentino incremento de Δp , por ejemplo, desde el punto *b* al punto *c*, brinda un incremento temporal del flux de permeado, pero éste decrece hasta el valor máximo en estado estacionario conforme la capa de gel se vuelve más espesa. Como una capa de gel gruesa puede comprimirse con el tiempo, al incrementar la caída de presión puede hacer decaer el flux y el cambio de presión osmótico (McCabe, Smith, & Harriot, 2007).

1.1.1.1. TRANSFERENCIA DE MASA EN LA MEMBRANA: TEORÍA DE CAPA DE POLARIZACIÓN DE CONCENTRACIÓN

El modelo de polarización de concentración permite la obtención de una expresión para el coeficiente de transferencia de masa k_c durante un flujo laminar de permeado cuando la concentración en la pared de la membrana c_w es conocida:

$$J = k_c \ln \left(\frac{C_w}{C_b} \right) \quad (4)$$

La Ecuación (4) indica que si k_c y c_w son constantes, entonces la disminución del flujo debe ser proporcional al logaritmo de la concentración molar del compuesto de interés en el bulto. Para los fluidos newtonianos, la correlación más popular se basa en la ecuación de Lévêque que fue obtenida en la transferencia de calor laminar (Sieder & Tate, 1936). Para tubos cilíndricos, esta correlación tiene la siguiente forma:

$$k_c = \left(\frac{3D^2}{4L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{8u}{d} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

La variación de la viscosidad con respecto a la concentración en la capa límite y en cercanías de la pared se explica incluyendo un término de corrección. Goldsmith (Goldsmith, 1971) propuso $(\eta_b/\eta_w)^{0.14}$, donde η_b es la viscosidad newtoniana lejos de la pared y η_w es la viscosidad newtoniana cerca de la pared, lo anterior se ha utilizado previamente en el campo de la transferencia de calor por Sieder y Tate (Sieder & Tate, 1936). Sin embargo, se encontró que esta corrección no coincidía con el coeficiente

de transferencia de masa estimado por el modelo osmótico y los datos experimentales. Aimar y Field, sugirieron un término de corrección $\left(\frac{\eta_w}{\eta_b}\right)^{0.27}$ basado en una analogía de transferencia de calor para condiciones de enfriamiento donde $\eta_w > \eta_b$, lo cual también es consistente con el aumento de la viscosidad con la concentración. El uso del exponente 0.27 tiene cierta justificación teórica (Field R. W., 1990). Este término de corrección significa que un aumento en μ_b conducirá a un aumento directo en la transferencia de masa axial cerca de la membrana, a pesar de que la velocidad axial $v_z(r)$ se mantenga constante.

Por otro lado, Field (Field R. W., 1990) propuso un nuevo factor de corrección de viscosidad, el cuál es mostrado en la Ec. (6)

$$Nu = 1.82[RePrD/L] \left[\frac{\eta_w}{\eta_b} \frac{4(6e^\alpha - \alpha^3 - 3\alpha^2 - 6\alpha - 6)}{\alpha^4} \right]^{1/3} \quad (6)$$

Donde, Pr es el Número de Prandtl, Re es el Número de Reynolds, L se refiere a la longitud de la tubería y D es el Diámetro de la tubería, α se refiere a la diferencia logarítmica de concentraciones, $\alpha = \left[\ln \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right) \right]$. Esta ecuación es una alternativa teórica a la siguiente correlación semi-empírica para la transferencia de calor a flujo laminar de tuberías introducido por Sieder y Tate (Sieder & Tate, 1936).

$$Nu = 1.86[RePrD/L]^{1/3} \left[\frac{\eta_w}{\eta_b} \right]^{0.14} \quad (7)$$

El nuevo factor de corrección de viscosidad F es:

$$F = \left[\frac{\eta_w}{\eta_b} \frac{4(6e^\alpha - \alpha^3 - 3\alpha^2 - 6\alpha - 6)}{\alpha^4} \right]^{1/3} \quad (8)$$

Al examinar el comportamiento de la Ec.(8) a valores moderados de α si el término $6e^\alpha$ se expande como una serie de α hasta α^5 , el término F es igual a

$$F = \left[\frac{\eta_w}{\eta_b} \left(1 + \frac{\alpha}{5} + \text{terminos mas altos en } \alpha \right) \right]^{1/3} \quad (9)$$

Dada la definición de $\alpha = \left[\ln \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right) \right]$, la Ec. (9) puede ser aproximada para un valor de $\alpha < 5$

$$F = (e^{-\alpha} e^{\alpha/5})^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{4\alpha}{15}} = \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right)^{\frac{4}{15}} = \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right)^{0.27} \quad (10)$$

La restricción de α no es estricta lo que la hace muy versátil. Se sabe que, para un rango amplio de valores de $\frac{\eta_w}{\eta_b}$, la Ec.(10) es adecuada (Field R. W., 1990).

Para fluidos no-newtonianos (inelásticos) que siguen la ley de la potencia, Pritchard (Pritchard M. , 1990) propuso una expresión para el coeficiente de transferencia de masa en régimen laminar que incorpora el efecto del comportamiento reológico no newtoniano del tipo pseudoplástico dependiente de la concentración:

$$k_c = \left(\frac{3D^2}{4L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3n_b + 18u}{4n_b} \frac{u}{d} \right)^B \left(\frac{K_b^{1/n_b}}{K_w^{1/n_w}} \right)^{0.13} \quad (11)$$

$$B = 2n_b/3(n_b + n_w) \quad (12)$$

Donde, n_b , K_b , n_w y K_w , son los índices de comportamiento del flujo y los índices de consistencia en la capa límite y en la pared, respectivamente, B es el exponente que relaciona los índices de consistencia de la capa límite y la pared, D es el coeficiente de difusión del soluto. Esta ecuación es cuestionable para condiciones donde $n_w \neq n_b$, es decir, para fluidos que no son termoreológicamente sencillos (Charcosset & Choplin, 1995).

Se han desarrollado muchas correlaciones para la transferencia de calor en fluidos no newtonianos generalmente para condiciones de *calentamiento* (por la analogía de transferencia de calor), donde $\eta_w < \eta_b$. Estas correlaciones no son aplicables a las condiciones en procesos de ultrafiltración donde $\eta_w > \eta_b$. Además, como las propiedades pseudoplásticas de un fluido son relativamente independientes de la temperatura, estas correlaciones solo consideran el caso en el que el fluido lejos de la pared adelgaza de la misma manera que el fluido que se encuentra cerca de la pared,

es decir, las respuestas al flujo cortante simple son paralelas (en escala logarítmica), es decir, a fluidos termoreológicamente sencillos. Sin embargo, Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995) propusieron una ecuación empírica para el coeficiente de transferencia de masa basada en una analogía de transferencia de calor para condiciones de enfriamiento que puede incorporar el efecto del índice de comportamiento de flujo dependiente de la concentración (Midoux, 1993). El coeficiente de transferencia de masa se expresa como:

$$k_c = \left(\frac{3D^2}{4L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3n_b + 1}{4n_b} \frac{8\langle V_z \rangle}{d} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta_{PN}(C_b)}{\eta_a(C_w)} \right)^{0.27} \quad (13)$$

Donde, $\eta_{PN}(C_b)$ es la viscosidad newtoniana del proceso a la concentración en el fluido lejos de la pared (bulto) (Ec. (14)) y $\eta_a(C_w)$ es la viscosidad aparente del fluido a la concentración de pared (Ec. (15)).

$$\eta_{PN}(C_b) = \frac{\tau_w(C_b)}{(8v/d)} \quad (14)$$

$$\eta_a(C_w) = \frac{\tau_w(C_w)}{\dot{\gamma}_w(C_w)} \quad (15)$$

Donde, τ_w y $\dot{\gamma}_w$ son el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación en la pared.

En el presente trabajo se usará la metodología de Charcosset-Choplin (Charcosset & Choplin, 1995) para describir la viscosidad en la pared y la viscosidad de bulto empleando los modelos reológicos de Reiner-Philippoff y el de Bautista-Manero-Puig (BMP) y proponer una correlación para k_c en el proceso de UF.

1.2. PLANTA DE ALOE VERA

El *Aloe vera* es una especie de planta suculenta del género *Aloe* (*Aloe barbadensis* Miller). Una planta perenne que se origina en la Península Arábiga pero crece en forma silvestre en climas tropicales, semitropicales y áridos de todo el mundo, tiene amplios usos en la industria alimentaria, farmacéutica y cosmética por los principios activos

que contiene (CABI, 2020) (Freitas, Rodrigues, & Oliveira, 2014). Esta planta tiene un amplio rango de adaptación al medio ambiente por su alto índice de retención de agua que le permite formar una densa capa de gel, que contiene 99,4g / 100g de agua y 0,6g / 100g de sólidos, al menos existen cuatro azúcares parcialmente acetalizados diferentes en su composición que se diferencian en el radio de la glucosa y Manosa (Vega, Ampuero, Díaz, & Lemus, 2005), además, esta planta tiene una composición de proporciones iguales de D-Glucosa y D-Manosa (76g / 100g) con 24 g / 100 g de ácido urónico, el jugo contiene 55,2 mg de polisacáridos por 100 ml de jugo. Finalmente, la masa total aproximada de polisacáridos contenidos en el parénquima del Aloe es de dos tipos, que juntos forman el Acemanano, un polisacárido de alto peso molecular rico en unidades de Manosa ubicado dentro del protoplasma de la célula y la matriz de la pared celular. La planta de *Aloe vera* se compone de raíz, tallo, hojas y flores en época de floración. Las hojas crecen alrededor del tallo a nivel del suelo en forma de roseta, desde el centro hacia arriba crece el tallo que al florecer forma densos racimos de flores tubulares amarillas o rojas (Reynolds & Dweck, 1999). Las hojas tienen formas lanceoladas y dentadas con pinchos que le sirven de protección a la planta. La estructura de las hojas está formada por el exocarpio (corteza), la cual está cubierta de una cutícula delgada. La corteza representa aproximadamente del 20 al 30% del peso de toda la planta, y dicha estructura es de color verde o verde azulado, dependiendo de diversos factores tales como: el lugar, clima o nutrición de la planta. El parénquima, conocido comúnmente como pulpa o gel se localiza en la parte central de la hoja (ver **Figura 4**), y representa del 65 al 80 % del peso total de la planta. Como se mencionó anteriormente, entre la corteza y la pulpa, ocupando toda la superficie interna de la hoja, se encuentran los conductos de aloína que son una serie de canales longitudinales de pocos milímetros de diámetro por donde circula la savia de la planta, conocida como acíbar (Domínguez, et al., 2011).

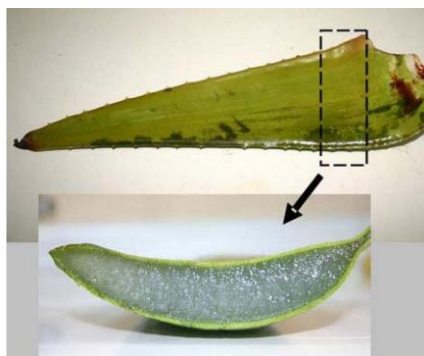


Figura 4 Hoja entera y corte transversal del *Aloe vera* (*Aloe barbadensis* Mill) tomado de (CABI, 2020)

1.2.1. MUCÍLAGO DE ALOE VERA

El gel de *Aloe vera* es un líquido concentrado de compuestos mucilaginosos presentes en el centro de las hojas. Muchas culturas en el mundo, incluyendo Japón, China, Grecia, Egipto, etc. han utilizado el gel obtenido de las hojas de *Aloe (barbadensis Miller)* como medicina tradicional debido a su capacidad antioxidante y efectos antivirales para la cicatrización de heridas, trastornos de la piel, así como para quemaduras en la piel. Recientemente, muchos productores comerciales de productos alimenticios y farmacéuticos han iniciado el uso de *Aloe vera* en sus producciones. Además, el jugo de *Aloe vera* también se comercializa hoy en día como fuente de nutrientes, suplemento e incluso como medicamento (Lad & Murthy, 2013). Puede aportar componentes nutricionales para la producción de alimentos funcionales (Rodríguez, et al., 2011) (Cervantes-Martínez, et al., 2014). Además, el mucílago de *Aloe vera (Aloe barbadensis Miller)* es un complemento nutricional bien conocido por sus propiedades antiinflamatorias, cicatrizante, analgésicas, antioxidante, antineoplásica, etc.; que se obtiene del procesamiento del gel (Freitas, Rodrigues, & Oliveira, 2014), (Vega, Ampuero, Díaz, & Lemus, 2005). Se ha informado que el mucílago de *Aloe vera* es una fuente potencial para uso como un hidrocoloide (Rodríguez, et al., 2011) (Cervantes-Martínez, et al., 2014) (Medina-Torres, et al., 2016) Actualmente, se ha empleado el mucílago como agente encapsulante de compuestos lábiles mediante la técnica de secado por aspersión (Medina-Torres, et al., 2016). La presentación comercial más común de *Aloe vera* es en forma diluida

como mucílago y/o jugo (Vega, Ampuero, Díaz, & Lemus, 2005) El mucílago natural de *Aloe vera* contiene 99% de agua y solo 1.0% de sólidos; está compuesto como ya se mencionado por al menos cuatro glucomananos acetilados parciales diferentes, que difieren en la proporción de glucosa a manosa, así como en el contenido de acetilo. Se ha informado que el mucílago de *Aloe vera* tiene una composición de D-glucosa y D-manosa con un 24% de ácidos urónicos (Femenia, García, Simala, & Rosselló, 2003). La masa total aproximada de polisacáridos en *Aloe vera* es de aproximadamente 13% (788 mg / L) (Rodríguez, et al., 2011). Femenia *et al.* (Femenia, García, Simala, & Rosselló, 2003) informaron que los polisacáridos están contenidos en las células del parénquima (la mayor parte de una sustancia) del *Aloe vera*, donde coexisten dos tipos diferentes que forman la molécula de acemanano, que es rica en manosa y glucosa, un polisacárido de alto peso molecular (Femenia, García, Simala, & Rosselló, 2003). Los mucopolisacáridos varían en tamaño y no forman soluciones acuosas reales, una distribución de las distintas azúcares puede ser vista en la **Tabla 1**.

Tabla 1 Concentración de azúcares en el mucilago de *Alore vera barbadensis Miller*, tomado de (Perez, Minjares, Martínez, Baez, & Candelas, 2019)

MUCÍLAGO DE ALOE VERA		
Azúcar	mg/g de AIR	Desviación estándar
Ramnosa	2.8	0.4
Fucosa	2.4	1.7
Arabinosa	5.5	1.9
Xilosa	20.0	12.6
Manosa	92.6	37.8
Galactosa	15.5	9.2
Glucosa	131.1	37.6
Ácidos Urónicos	489.0	72.9
Total	755.9	83.1

Los polisacáridos se encuentran en la matriz celular de la planta de *Aloe vera*, formando emulsiones coloidales que se descomponen mediante mecanismos de

hidrólisis. Estos mucopolisacáridos tienen actividades antibacterianas, antivirales, antifúngicas y antiparasitarias que mejoran la respuesta del sistema inmunológico humano frente a algunas enfermedades (Femenia, García, Simala, & Rosselló, 2003) (Cervantes-Martínez, et al., 2014); (Medina-Torres, et al., 2016) Debido a la alta actividad hídrica del mucílago de *Aloe vera* ($a_w > 0.90$) y su composición de carbohidratos, su vida útil es de aproximadamente 3-4 días a temperatura ambiente. Por lo que se requiere un proceso de conservación para preservar la mayoría de los ingredientes activos, aumentando la vida útil del producto, para su comercialización o aplicaciones como aditivo para preparar alimentos funcionales (Rodríguez, et al., 2011), de ahí la importancia de los procesos de UF.

1.2.2. PROPIEDADES REOLÓGICAS DEL MUCÍLAGO DE *ALOE VERA*

A pesar de que se han realizado muchos estudios sobre el gel de *Aloe vera* falta información sobre el comportamiento reológico del mismo. Teniendo muchos productos farmacéuticos, aplicaciones terapéuticas y alimentarias reportadas en la literatura para el gel de *Aloe barbadensis Miller*, es muy importante conocer sus propiedades reológicas que pueden ayudar a modificar el procesamiento para tener productos de mejor calidad y estabilidad. (Lad & Murthy, 2013)

Los pocos reportes del mucílago de *Aloe vera* muestran un comportamiento como un fluido No Newtoniano del tipo pseudoplástico, es decir, la viscosidad desciende a medida que aumenta la rapidez de la cizalla simple (flujo) hasta mantenerse constante cómo se ve en la **Figura 5** (Perez, Minjares, Martínez, Baez, & Candelas, 2019) exhiben un notable adelgazamiento por rapidez de deformación. La viscosidad del material se vuelve independiente de la rapidez de deformación a altas deformaciones según lo reportado por varios autores para materiales similares (Kontogiorgos, Margelou, Geordiadis, & Ritzoulis, 2012) (Dunstan, Chai, Lee, & Boger, 1995).

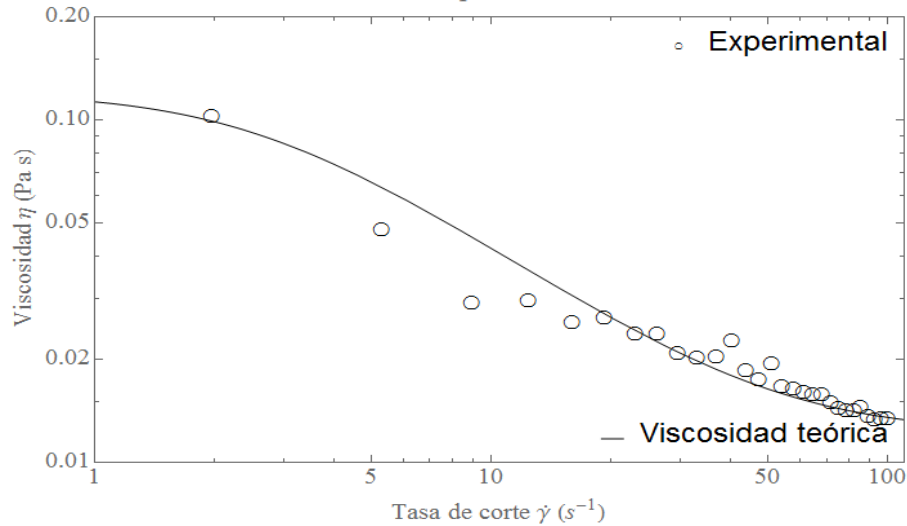


Figura 5 Grafica de viscosidad vs velocidad de corte del mucilago de Aloe vera fresco Tomado de (Perez, Minjares, Martínez, Baez, & Candelas, 2019)

La microestructura de este material se rige preferentemente por los polisacáridos presentes en el *Aloe vera*. Pero, al mismo tiempo, la presencia de otros constituyentes también contribuye a la caracterización reológica del material. En pruebas de flujo a la cizalla simple, a bajos flujos, el reordenamiento de las fibras poliméricas presentes en la estructura del material hace que el material sea muy sensible a la deformación aplicada. La componente viscosa del *Aloe vera* es más afectada por una baja rapidez de deformación, según lo reportado por Lad (Lad & Murthy, 2013) en comparación a valores de rapidez de deformación más altos en los que la red fibrosa polimérica casi se ha roto, tal y como se muestra en la **Figura 6**.

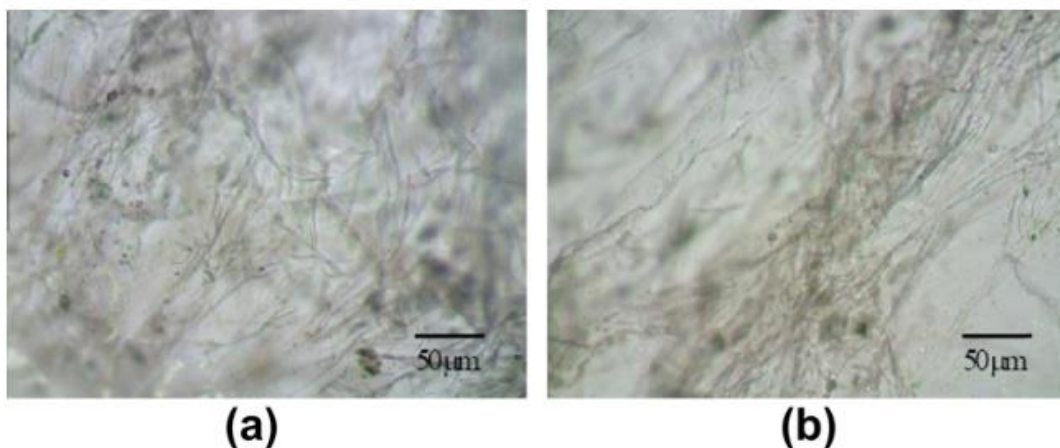


Figura 6 Micrografías de muestra de gel de *Aloe vera*: (a) antes de la prueba de corte a 30 °C, y (b) después de la prueba de corte a 30 °C tomado de (Lad & Murthy, 2013).

Las micrografías de la **Figura 6** revelaron una gran deformación de la red debido a la rapidez de deformación aplicada. Aunque es muy difícil predecir la funcionalidad individual de otros constituyentes en el gel y en el jugo de *Aloe vera*, en sus hallazgos Lad y Murthy (2013) identificaron la red fibrosa insoluble y el polisacárido que genera la estructura del hidrogel como las principales causas de su comportamiento reológico. Adicionalmente, estos autores encontraron que la estructura del hidrogel polisacárido es responsable de la reología en la región de adelgazamiento, pero a muy alta velocidad de corte, las fibras insolubles deformadas en el caso del gel, y la orientación final de las fibras rotas en el caso de muestras de jugo son las responsables de generar un comportamiento reológico complejo (Lad & Murthy, 2013). Esto indica que el reordenamiento de la estructura fibrosa insoluble juega un papel vital en la variación de la respuesta viscoelástica (G' y G'') en las pruebas de viscoelasticidad lineal (SAOS, Small Amplitude Oscillatory Shear) a bajas frecuencias.

1.2.3. PROCESAMIENTO DE HOJA DE *ALOE VERA*

El cultivo comercial de *Aloe vera* para obtener el gel y/o mucílago, inicio en el año 1920 en Florida. A lo largo de la historia se ha usado terapéuticamente en la medicina

popular, como heridas en la piel y otros trastornos, que se remontan desde hace miles de años; hoy en día el procesamiento del gel de sábila para uso medicinal, cosmético y como alimento funcional, se ha convertido en una gran industria en todo el mundo. En la industria alimentaria, la sábila se ha utilizado en productos como, leche, helados, yogurts y confitería sin embargo, el jugo de sábila ha sido utilizado como alimento funcional especialmente para la preparación de bebidas que no tengan efectos laxantes. En cuanto a la industria farmacéutica, el uso comercial del gel de sábila es muy importante en la fabricación de ungüentos tópicos, tabletas y capsulas. En la industria cosmética, el gel de sábila ha sido empleado como material de base para la preparación de cremas, lociones, jabones, champús, cremas faciales y una amplia variedad de productos de tocador. El uso potencial de los productos a base de sábila con frecuencia implica algún tipo de tratamiento, por ejemplo, calefacción, deshidratación o molienda. Desafortunadamente y debido a los procesamientos inadecuados que se llevan a cabo durante la preparación y estabilización del gel, estos causan modificaciones irreversibles en componentes bioactivos como polisacáridos y compuestos antioxidantes, afectando su estructura original y promoviendo cambios importantes en las propiedades bioquímicas, haciendo que muchos de los productos contengan muy poco o casi ningún ingrediente activo (Kim K. , et al., 1998). Es por lo que en las últimas décadas diversos estudios se han enfocado a investigar los principales compuestos químicos activos responsables de los efectos terapéuticos reportados, de igual manera, se han desarrollado métodos para mantener y preservar de manera natural dichos compuestos contenidos en el gel de *Aloe vera* con la finalidad de mejorar la calidad del producto final (Domínguez, et al., 2011).

Cuando el gel de *Aloe vera* se expone al aire, este se oxida rápidamente y se descompone, perdiendo gran parte de su actividad biológica activa. Por lo que, actualmente se han desarrollado diferentes técnicas en el procesamiento del gel con respecto a su estabilización y esterilización, es decir, el procesamiento en frío o el tratamiento térmico. Sin embargo, el principio fundamental de estas técnicas de procesamiento sigue siendo aun prácticamente el mismo. Independientemente de la calidad de la planta por sí misma, los mejores resultados se obtienen cuando las hojas se procesan inmediatamente después de la cosecha, esto es debido a que el gel sufre

una descomposición provocada por reacciones enzimáticas, así como el crecimiento de bacterias debido a la presencia de oxígeno, elevada actividad de agua y alto contenido de azúcares. El proceso consiste en lavar las hojas de sábila recién cosechadas con un bactericida adecuado, seguido por el procesamiento de separar mecánicamente el parénquima del exocarpio, una vez obtenido el gel este se trata con carbón activado para decoloración y la expulsión de aloína y antraquinonas. El líquido (mucílago) resultante se somete a diversas etapas de alteración, esterilización y estabilización. El mucilago estabilizado obtenido es entonces concentrado para reducir la cantidad de agua o alternativamente, casi toda el agua es removida para obtener un polvo (Ramachandra & Srinivasa, 2008) (He, Liu, Eshun, & Zhang, 2005) Se ha reportado que el uso de enzimas como la glucosa oxidasa y la catalasa inhiben el crecimiento de organismos aerobios del gel. Otras alternativas de esterilización en frío son la exposición del gel a la luz ultravioleta, seguido de una microfiltración.

En la técnica de procesado con calor como el que describe en la **Figura 7**, el líquido de la sábila obtenido del tratamiento con carbón activado es esterilizado por medio de una pasteurización a alta temperatura con tiempos de exposición cortos. Se ha reportado que la actividad biológica del gel permanece esencialmente intacta cuando el gel es calentado a 65 °C por periodos menores a 15 minutos. Periodos extendidos o altas temperaturas han resultado en alta reducción de los niveles de actividad biológica. Sin embargo, se sugiere que el mejor método de pasteurización sea el HTST (High Temperatura Short Time por sus siglas en ingles), seguido de un enfriado súbito a 5 °C o menor. En estas técnicas, la estabilización puede alcanzarse por la adición de conservadores y otros aditivos. Asimismo, se ha investigado el uso de benzoato de sodio, sorbato de potasio, ácido cítrico y vitamina E en forma sinérgica y se ha demostrado que el uso de estas sustancias en conjunto mantiene la bioactividad de la sábila de manera eficaz (Ramachandra & Srinivasa, 2008) (Domínguez, et al., 2011).

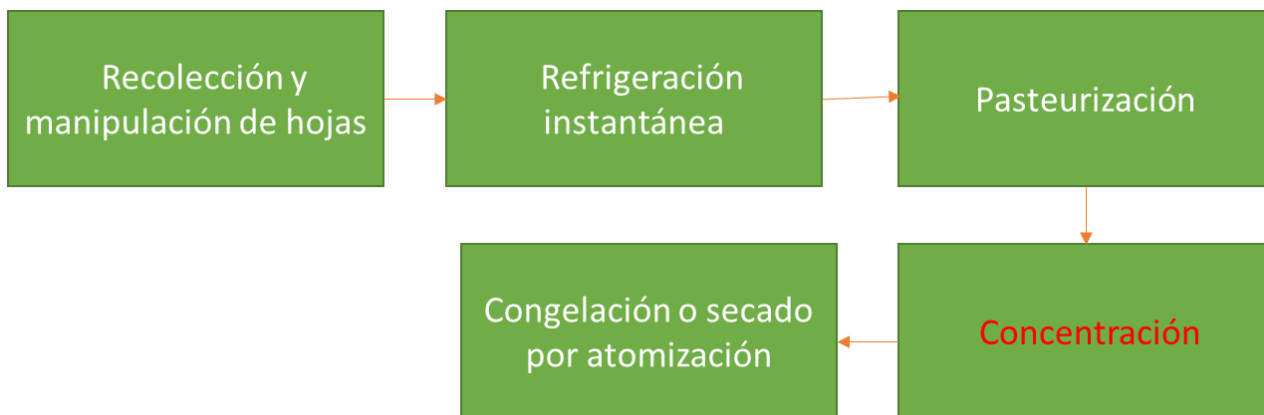


Figura 7 Diagrama de flujo para el procesamiento de la hoja *Aloe vera* mediante el proceso de tiempo temperatura y sanitación (TTS)

1.2.4. EFECTOS DEL PROCESAMIENTO TÉRMICO EN AL *ALOE VERA*

La producción de los productos de *Aloe vera* a menudo implica algún tipo de proceso y/o operación unitaria, por ejemplo, calentamiento o deshidratación. Este proceso como ya se mencionó previamente puede causar modificaciones irreversibles en las sustancias activas, que afectan su estructura original, lo que puede promover cambios importantes en el sistema fisiológico propuesto y propiedades farmacológicas de estos componentes (Thibault, Lahaye, & Guillon, 1992).

A partir de lo reportado por Chang (**Figura 8**) (Chang, Wang, Feng, & Liu, 2006), se concluyó que el proceso de calentamiento promueve la degradación térmica del polisacárido del jugo de gel de *Aloe vera* a temperaturas altas que van desde 80 °C a 90 °C, y principalmente una degradación por la hidrólisis enzimática a temperaturas más bajas de 50 °C a 60 °C, esto produce la máxima estabilidad del polisacárido a 70 °C. Sin embargo, debe señalarse que los productos comerciales de *Aloe vera* generalmente se preparan calentándola durante algunas horas a fuego directo (Manitto, Speranza, Tommasi, Ortoleva, & Morelli, 2003) o por concentración a una determinada proporción previa al secado, o se requiere un tiempo más corto en un proceso de pasteurización (como 71,7 C/15 s o 62,7 C/30 min) y esterilización (como procesamiento con tratamiento ultratérmico (UHT), 135 C/1 s, o esterilización clásica en botella, 110– 120 C/10–20 min) los cuales son los procesaos más utilizados para la conservación de jugos a escala industrial (Indrawati, Van-Loey, & Hendrickx, 2004).

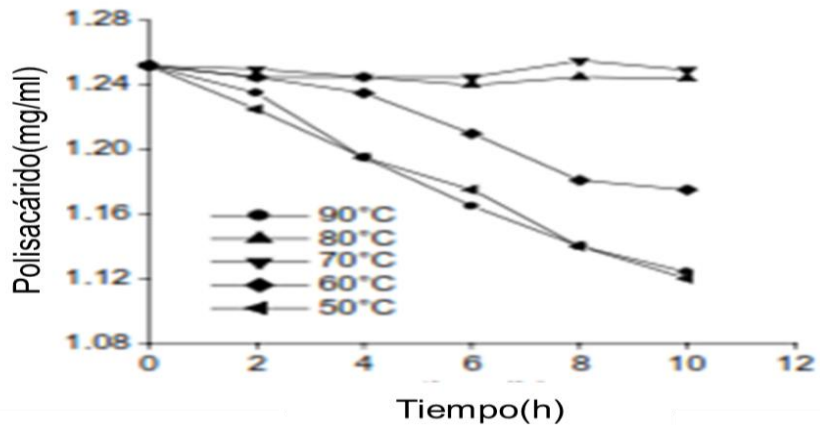


Figura 8 Influencia de la temperatura en el contenido de polisacáridos dentro de un rango de tiempo determinado 0-10 horas, tomado de (Chang, Wang, Feng, & Liu, 2006).

Asimismo, la marcada disminución a 90 °C puede deberse a la degradación térmica del polisacárido, lo que concuerda con Cohen y Yang (Cohen & Yang, 1995) en el sentido de que el secado por calor puede promover la ruptura de la red de polisacáridos de la pared celular. La disminución significativa a 50 °C y 60 °C se debe probablemente a la presencia de enzimas que podrían ser responsables de la hidrólisis de los polisacáridos de gran peso molecular en otros de peso inferior (Chang, Wang, Feng, & Liu, 2006). Por otro lado, Lad & Murthy (Lad & Murthy, 2013) observaron experimentalmente que la viscosidad compleja del gel y/o del jugo de *Aloe vera* disminuye con la temperatura para todo el rango de frecuencias estudiadas, esto se atribuye a la degradación parcial de los polisacáridos presentes en el material, lo que provoca una mayor liberación del líquido acuoso atrapado en la estructura según lo reportado por Chang (Chang, Wang, Feng, & Liu, 2006) debido a la degradación térmica de los polisacáridos del jugo de gel de *Aloe vera*, este efecto se puede ver en la **Figura 9**

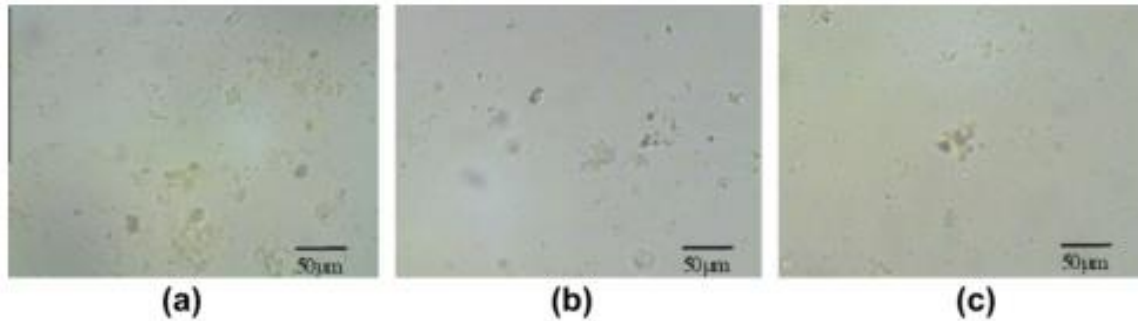


Figura 9 Micrografías del jugo de Aloe vera, pruebas simples a 15°C (a), 30°C (b), 45°C (c). Tomado de (Lad & Murthy, 2013)

1.2.5. COEFICIENTE DE DIFUSIÓN DE LAS SOLUCIONES DE ALOE VERA

Las difusividades para grandes moléculas esféricas en soluciones diluidas se pueden predecir a partir de la ecuación de Stokes-Einstein, que se derivó al considerar un flujo por arrastre sobre una esfera moviéndose en un fluido newtoniano continuo.

$$D_v = \frac{kT}{6\pi r_0 \mu} \quad (16)$$

Donde, k es la constante de Boltzman cuyo valor es $1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K}$, otra forma de la ecuación es:

$$D_v = \frac{7.32 \times 10^{-16} T}{r_0 \mu} \quad (17)$$

Donde, D_v corresponde a la difusividad (cm^2/s), T a la temperatura absoluta (K), r_0 al radio molecular (cm) y μ a la viscosidad (cP).

Para solutos de peso molecular pequeño a moderado ($M < 400$) la difusividad en los líquidos es mayor que la calculada por esta ecuación porque el arrastre es menor que el predicho para un fluido continuo. La difusividad varía más o menos de manera proporcional al volumen molar elevado a la potencia de -0.6 en lugar de la potencia de $1/3$ derivada de la ecuación de Stokes-Einstein.

Una correlación ampliamente usada para la difusividad de pequeñas moléculas en líquidos es la ecuación empírica de Wilke-Chang:

$$D_v = 7.4 * 10^{-8} \frac{(\psi_B M_B)^{1/2} T}{V_A^{0.6} \mu} \quad (18)$$

Donde, D_v corresponde a la difusividad (cm^2/s), T a la temperatura absoluta (K), μ a la viscosidad (cP), ψ_B al parámetro de asociación para el disolvente y M_B Peso molecular del disolvente

Los valores recomendados de ψ_B son 2.6 para el agua, esta ecuación sólo es válida para bajas concentraciones de soluto y no se aplica cuando la solución ha sido espesada por la adición de polímeros de alto peso molecular. Pequeñas cantidades de polímero pueden incrementar la viscosidad de la solución en más de 100 veces o incluso gelificar la solución, pero la difusividad de pequeños solutos sólo se reduce levemente porque las cadenas de polímeros están demasiado apartadas como para obstruir el movimiento de las moléculas del soluto (McCabe, Smith, & Harriot, 2007).

Para soluciones acuosas no electrolíticas diluidas se puede usar una ecuación más sencilla

$$D_v = \frac{13.26 * 10^{-5}}{V_A^{0.589} \mu_B^{1.14}} \quad (19)$$

Donde, μ_B corresponde a la viscosidad del agua (cP) y V_A es igual al Volumen molar del soluto ($\frac{cm^3}{g * mol}$)

1.3. ANALOGÍAS ENTRE LA TRANSFERENCIA DE CALOR, MASA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En el transporte molecular de momento, calor y masa existen muchas similitudes. Las ecuaciones de difusión molecular de Newton para el *momentum*, Fourier para el calor y Fick para la masa son muy similares, y podemos decir que existen analogías

entre estos tres fenómenos de transporte molecular. También hay similitudes en el transporte turbulento, sin embargo, estas similitudes no están tan bien definidas matemática o físicamente, y son más difíciles de relacionar con cualquiera de las otras (Bird, 2006). Reynolds fue el primero en notar similitudes en los procesos de transporte y relacionar el momento turbulento y la transferencia de calor. Desde entonces, la transferencia de masa también se ha relacionado con la de *momentum* y la de la transferencia de calor.

1.3.1. ANALOGÍA DE CHILTON Y COULBURN

En la literatura científica se han propuestos analogías entre estos tres procesos para la transferencia turbulenta a fin de permitir la predicción de una forma de cualquiera de las otras, por lo que a continuación se discuten los siguientes aspectos:

Una de las analogías más exitosas y más ampliamente utilizada es la analogía del factor J de Chilton y Colburn (Chilton & Colburn, 1934). Esta analogía se basa en datos de experimentos para gases y líquidos en regiones de flujo laminar y turbulento, y se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{f}{2} = J_H = \frac{h}{c_p G} (N_{PT})^{2/3} = J_D = \frac{K_c}{D_{EV}} (N_{SC})^{2/3} \quad (20)$$

Se ha demostrado que esta ecuación es bastante útil para correlacionar el momento, el calor y la transferencia de masa. Además, permite la predicción de un coeficiente de transferencia desconocido a partir de uno de los otros coeficientes. Para el flujo que pasa por una placa plana o en una tubería donde no hay arrastre de forma, $f/2 = j_h = j_d$ (Cengel, 2002).

1.4. FUNDAMENTOS DE LA REOLOGÍA

La reología es la ciencia que estudia el flujo a la deformación de un cuerpo sometido a esfuerzos externos. Su estudio es esencial en muchas aplicaciones industriales, incluyendo las de plásticos, pinturas, alimentación, tintas de impresión, detergentes o aceites lubricantes, por mencionar algunos. Un concepto formal del término reología sería: “Parte de la mecánica del medio continuo que estudia la elasticidad, plasticidad y viscosidad de la materia”. La reología, es decir, «la ciencia del flujo y la deformación», estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros (Ramirez J. , 2006).

Así pues, un fluido se define como una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante, sin importar que tan pequeño sea ese esfuerzo cortante. Un esfuerzo cortante es la componente de fuerza tangencial a una superficie, y esta fuerza es dividida por el área de la superficie se le conoce como el esfuerzo cortante promedio sobre dicha superficie. El esfuerzo cortante en un punto es el valor límite de la fuerza por unidad de área medida que el área se reduce a un punto. Cuando dos capas de fluido se mueven una en relación con la otra, se desarrolla una fuerza de fricción entre ellas, mediante la cual la capa más lenta trata de desacelerar a la más rápida. Esta resistencia interna del fluido al movimiento se cuantifica por la propiedad del fluido conocida como “viscosidad”, que es una medida de la resistencia interna interna de ese fluido al flujo (deformación). La viscosidad es causada por las fuerzas de cohesión entre las moléculas, en los líquidos, y por las colisiones moleculares, en los gases. No hay fluido con viscosidad cero y, por consiguiente, todos los flujos de fluidos implican efectos viscosos en cierto grado. Los flujos en los que los efectos de la fricción son significativos se conocen como flujos viscosos, y se clasifican en fluidos newtonianos y no newtonianos.

1.4.1. FLUIDOS NEWTONIANOS

Los fluidos newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los elementos de fluido al moverse uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante

sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son fluidos newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante aplicado y la velocidad de deformación.

1.4.2. FLUIDOS NO-NEWTONIANOS

Son los fluidos en los cuales no se manifiesta una proporcionalidad entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal.

Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo:

1.4.2.1. FLUIDOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

Este tipo de fluidos se clasifican en dos tipos: los fluidos tixotrópicos, en los que su viscosidad disminuye al aumentar el tiempo de aplicación del esfuerzo cortante, recuperando su estado inicial después de un reposo prolongado, y los fluidos reopécticos, en los cuales su viscosidad aumenta con el tiempo de aplicación de la fuerza y vuelven a su estado anterior tras un tiempo de reposo (Ramirez J. , 2006).

1.4.2.2. FLUIDOS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO DE APLICACIÓN

Los fluidos no-newtonianos independientes del tiempo, se caracterizan porque las tensiones tangenciales dependen únicamente de la velocidad de deformación.

Estos fluidos se pueden clasificar como pseudoplásticos, dilatantes o viscoplásticos dependiendo de su comportamiento con respecto al esfuerzo cortante.

1.4.2.1.1. FLUIDOS SIN ESFUERZO DE CEDENCIA

- a) Fluidos pseudoplásticos: Este tipo de fluidos se caracterizan por una disminución de su viscosidad, y de su esfuerzo cortante, con la velocidad de deformación.
- b) Fluidos dilatantes: Los fluidos dilatantes son suspensiones en las que se produce un aumento de la viscosidad con la velocidad de deformación, es decir, un aumento del esfuerzo cortante con dicha velocidad.

1.4.2.1.2. FLUIDOS CON ESFUERZO DE CEDENCIA

Llamados también plásticos (viscoplásticos). Este tipo de fluido se comporta como un sólido hasta que sobrepasa un esfuerzo cortante mínimo (τ_y) y a partir de dicho valor se comporta como un líquido. La razón por la que se comportan así los fluidos plásticos es la gran interacción existente entre las partículas suspendidas en su interior, formando una capa de solvatación. Están formados por dos fases, con una fase dispersa formada por sólidos y burbujas distribuidos en una fase continua.

1.4.3. MODELOS REOLÓGICOS CONSTITUTIVOS

Las ecuaciones constitutivas son aquellas que relacionan el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación en las que pueden intervenir también otras magnitudes como la temperatura o cualquier otra propiedad relacionada con el material, y permiten describir el comportamiento al flujo de un fluido.

1.4.3.1. MODELO DE REINER-PHILIPPOFF

El modelo de fluidos de Reiner-Philippoff es un modelo constitutivo que consta de tres parámetros ajustables (η_0, η_∞ y τ_s), en este modelo el esfuerzo cortante τ está relacionado con el gradiente de velocidad dado por la relación siguiente Ec.(21):

$$\frac{du}{dy} = \dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2}} \quad (21)$$

Donde, η_0 y η_∞ son la viscosidad a bajas rapidez de deformación y la viscosidad a altas rapidez de deformación, respectivamente, y τ_s es el esfuerzo cortante de fluencia o tensión cortante de fluencia. Se puede utilizar el modelo Reiner-Philippoff para un fluido que muestra un comportamiento newtoniano a muy bajas rapidez de deformación y esfuerzos cortantes muy altos, y comportamiento no newtoniano de ley de potencia para valores intermedios de esfuerzo cortante (Ahmad, Qasim, & Ahmed, 2017).

El modelo constitutivo reológico de Reiner-Philipoff describe completamente la curva de flujo cortante simple; muestra un comportamiento newtoniano a bajas $\dot{\gamma}$ y a altas $\dot{\gamma}$, η_0 y η_∞ respectivamente, y para valores intermedios de $\dot{\gamma}$.

1.4.3.2. MODELO DE BAUTISTA-MANERO-PUIG (BMP)

Mewis (Mewis, 1979) en su artículo de revisión de modelos constitutivos, señala que el comportamiento no lineal y dependiente del tiempo de las funciones reológicas es causado por cambios en la estructura interna del material, que se puede describir mediante un conjunto de dos ecuaciones. Uno es una ecuación constitutiva que da la tensión instantánea τ en función de la cinemática instantánea $D(r, t)$ para cada estado posible de la estructura en cualquier posición, r . El otro es una ecuación cinética que describe la tasa de cambio del grado de estructura $s(r, t)$ con la cinemática instantánea, es decir, la tasa de corte impuesta, $\dot{\gamma}$;

Debido a que la cinética de la ruptura y formación de la estructura suele depender del sistema, no es posible una expresión cinética única para estos procesos.

- El modelo de BMP permite predecir el comportamiento no lineal de los fluidos complejos considerando parámetros de estructura, consta de la ecuación de Maxwell convectiva superior y una ecuación cinética que describe el cambio estructural inducido por el flujo descrita por Fredrickson (Fredrickson, 1970).
- Fredrickson (Fredrickson, 1970) propuso una ecuación cinética simple para la destrucción y construcción de la estructura acoplada a una ecuación constitutiva newtoniana con una viscosidad dependiente del tiempo para predecir el

comportamiento tixotrópico de suspensiones inelásticas bajo flujo de corte. Este modelo puede predecir el comportamiento no newtoniano y las tensiones de fluencia aparentes en flujo de corte constante. La ecuación cinética de Fredrickson tiene la siguiente forma:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda} (\varphi_0 - \varphi) + k(\varphi_\infty - \varphi) \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} \quad (22)$$

Donde, φ es la fluidez ($\equiv \eta^{-1}$), φ_0 y φ_∞ son la fluidez a rapidez de deformación cero y muy altas, respectivamente λ (lambda) es un tiempo de relajación estructural, es decir, un tiempo de construcción estructural, mientras que k puede ser interpretado como una constante cinética para la ruptura de la estructura (Bautista, de Santos, Puig, & Manero, 1999).

La ecuación de Maxwell puede ser escrita como (Oldroyd, 1950):

$$\underline{\underline{\tau}} + \delta(r, t) \overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} = \frac{2D}{\varphi(r, t)} \underline{\underline{\underline{\underline{\tau}}}} \quad (23)$$

Donde, $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}}$ es la derivada convectiva superior del tensor de tensión, $\delta [= (G_0\varphi)^{-1}]$, es el tiempo de relajación dependiente una estructura, G_0 es el módulo de relajación instantánea.

2. METODOLOGÍA

2.1. MATERIALES

Se recolectaron en un área de 2500 m² expuesta a un clima seco en el norte de México (Durango, México) y se procesaron hojas de *Aloe vera*. Las hojas presentaban una superficie lisa, blanda y flexible, con espinas puntiagudas, ligeramente amarillas en los bordes orientados hacia el ápice; mientras que el cuerpo de la hoja tiene aproximadamente 8 cm de espesor para ejemplares de 24 a 30 meses. Se tomaron hojas de color verde brillante (sin manchas visibles) todas del mismo lote, que habían crecido en condiciones semicontroladas: fertilizante orgánico constante cada 2 meses y riego por goteo controlado cada tres días.

2.1.1. EXTRACCIÓN DEL MUCILAGO DE ALOE VERA DEL GEL

Las hojas lavadas de *Aloe vera* se almacenaron a - 4 ° C para evitar la degradación. La extracción del mucílago de *Aloe vera* fue asistida con un extractor comercial (Hamilton Beach® Health Smart 67800, 400 Watts, EE. UU.). El material fibroso se separó en una centrífuga de mesa (Heraeus Labofuge, modelo 400/400 R, EE. UU.). Se realizaron mediciones de pH (AOAC Technical 32010-1984), ° Brix (refractómetro Brix modelo RF-10-CAT, escala 0-32°Brix, resolución 0.2%, EE. UU.) y humedad (OHAUS Thermobalance, MB2000, EE. UU.) en soluciones a 20° Brix y 60° Brix, respectivamente.

2.2. CARACTERIZACIÓN REOLÓGICA

Las pruebas reológicas del mucilago fresco y concentrado mediante UF se realizaron en un reómetro de esfuerzo controlado (modelo DHR-3, instrumentos TA) equipado con una geometría de plato y cono, y un sistema Peltier (Cole Parmer Polystat y Peltier AR-G2) para el control de temperatura. Todas las pruebas se realizaron al menos por duplicado a una temperatura de 25 °C. Las pruebas reométricas realizadas fueron flujo cortante simple a rapidez de deformación de 1 a 300 s⁻¹. Los datos experimentales de

cada curva se ajustaron con el modelo de ley de potencia, al modelo de Reiner-Philipoff y al modelo de Bautista-Manero-Puig. Cabe reiterar que todas las caracterizaciones reológicas se realizaron al mucilago de *Aloe vera* fresco y a la muestra concentrada por UF a una temperatura controlada en el reómetro a 25 °C.

2.3. PROCESO DE ULTRAFILTRACIÓN

Las condiciones para el proceso de UF fueron a temperatura (T), velocidad de alimentación de entrada (V) y presión transmembrana (ΔP_{TM}) controlada. La temperatura fue constante a 25 ° C para evitar variaciones significativas en la viscosidad de la solución. La velocidad de alimentación se controló con una bomba peristáltica y se mantuvo fija a 160 rpm. La presión se mantuvo a través de válvulas colocadas en las ubicaciones de entrada y salida del sistema de UF; la diferencia de presión transmembranosa se mantuvo constante a 137,9 kPa. El filtro empleado consistió en fibras huecas de polisulfona (modelo HIP30-43 DR4259-6³ Millipore). Las especificaciones de la unidad UF fueron 25.4 x 31.7 x 26.6 cm de ancho, largo y alto, respectivamente, y su peso fue de 6.6 kg. La bomba peristáltica tiene velocidades variables y reversibles (6 - 600 rpm); el área de trabajo fue de 0.03 m², la longitud de la fibra es de 20.2 cm. La tasa de permeación para el agua como fluido de referencia (WPR) fue de 0,07 a 0,15 L / min y el rango de velocidad de flujo de 22 a 2000 ml / min. Los controles incluyen interruptores de encendido / apagado, selector de velocidad de la bomba con manómetro de 0 a 2,1 E -4 kgf / m² y salida de la válvula de presión.

2.4. FLUX DE PERMEADO

El flux de permeado se preparó con agua destilada para limpiar la membrana y asegurar una mínima resistencia al flujo. Posteriormente, el fluido de *Aloe vera* pasó por la unidad de UF para iniciar el proceso de ultrafiltración. Después del procesamiento por UF, se determinaron los °Brix, la densidad y el comportamiento reológico de las soluciones a las diferentes concentraciones, las pruebas se realizaron

al menos por duplicado. Los datos recopilados se utilizaron para la estimación del flujo de permeado a través de la membrana de ultrafiltración mediante dos modelos fenomenológicos y un modelo cinético.

2.4.1. PREDICCIÓN DEL FLUX DE PERMEADO DEL ALOE VERA

La predicción de los valores teóricos del coeficiente de transferencia de masa (k_c) y del flux de permeado (J) se realizaron mediante la metodología de Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995) empleando el Modelo reológico de Reiner-Philippoff (modelo fenomenológico) y el Modelo de Bautista-Manero-Puig (modelo cinético) como modelos constitutivos. Se compararon las predicciones teóricas con los datos experimentales obtenidos en el reómetro, y se determinó qué modelo reológico tiene una mejor aproximación con un proceso real de ultrafiltración de capa polarizada de flujo cruzado para la concentración de mucilago de *Aloe vera*.

Las propiedades reológicas del mucilago de *Aloe vera*, y las condiciones de proceso de UF corresponden a datos obtenidos experimentalmente a nivel laboratorio de un proceso de ultrafiltración para concentrar el mucilago de aloe vera.

En la **Figura 10** muestra el diagrama de flujo para la predicción del flux de permeado de manera detallada.

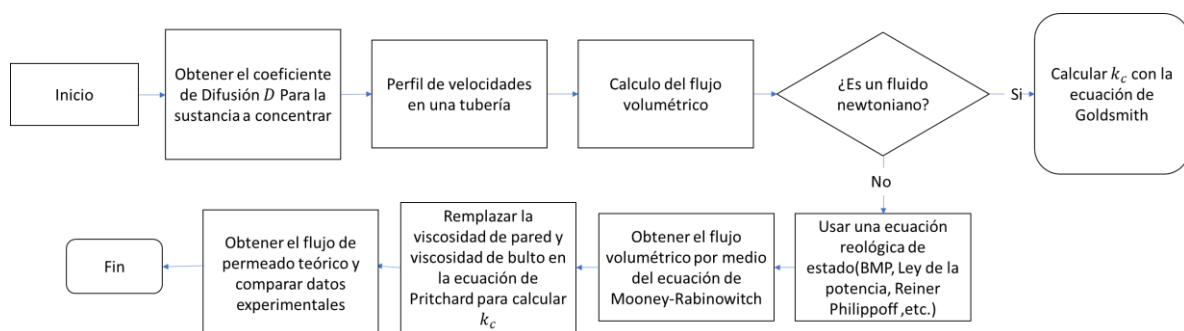


Figura 10 Diagrama de flujo de la predicción teórica del flux de permeado.

El desarrollo de este trabajo puede resumirse de la siguiente manera:

1. Se obtuvo el perfil de velocidades de un fluido no newtoniano inelástico incompresible en estado estacionario en coordenadas cilíndricas.
2. Se calculó el flujo volumétrico usando el perfil de velocidades. Posteriormente, se expresa el flujo volumétrico en términos del esfuerzo cortante τ y el esfuerzo en la pared τ_w (Ec. (77))
3. Se seleccionó el modelo constitutivo reológico. Se expresa dicho modelo en términos del esfuerzo τ , es decir, en la forma $f(\tau)$.
4. Se calculó el flujo volumétrico mediante la ecuación de Mooney-Rabinowitch que permite obtener la viscosidad aparente de pared η_w y la viscosidad aparente de bulo η_b . Por consiguiente, se sustituyen los 2 valores previos en las ecuaciones de Pritchard (Ecs. (113) y (270)) para obtener el valor de k_c . Cabe resaltar que este paso de la metodología es bastante amplio (ver **Apéndices A y B**).
5. Se multiplicó el k_c obtenido por la diferencia logarítmica de concentración para posteriormente obtener el flux de permeado.
6. Finalmente, se calculó el error absoluto promedio entre los datos experimentales y la predicción teórica.

Para conocer *más a fondo todos los detalles de la deducción de las predicciones del flux de permeado se recomiendan* al lector consultar los **Apéndices A y B**:

El software que se usó para realizar las distintas simulaciones de este trabajo fue *Wolfram Mathematica 12.1, Versión de estudiante* (Licencia: Universidad Nacional Autónoma de México, 2022) y el Microsoft Excel 2020 64 bits (Licencia: Universidad Nacional Autónoma de México, 2022) para el registro de datos.

3. ANÁLISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados experimentales, y las predicciones teóricas del flux de permeado del proceso de UF, posteriormente, se comparan, y se discuten cuál de las predicciones tiene una mayor semejanza a los datos experimentales obtenidos.

3.1. COEFICIENTE DE DIFUSIÓN PARA LAS DISOLUCIONES DE ALOE VERA

El coeficiente de difusión que se usó para representar el sistema propuesto se obtuvo mediante la ecuación de Stokes-Einstein para grandes moléculas esféricas en soluciones diluidas al ser una buena aproximación al sistema propuesto.

$$D_v = \frac{kT}{6\pi r_0 \mu} \quad (24)$$

Donde, D_v (cm^2/s) corresponde a la difusividad, T (K) a la temperatura absoluta, r_0 al radio molecular (cm), μ (cP) a la viscosidad del solvente y k a la constante de Boltzmann ($1.380 * 10^{-23} \frac{J}{K}$). D_v se obtuvo usando una temperatura estándar de 25 °C (298.15 K), una viscosidad correspondiente a la del agua 1 cP.

El coeficiente de difusión fue promediado de acuerdo a su composición en mol de azúcares en el mucilago del *Aloe vera* de acuerdo a lo reportado en la **Tabla 2** (Medina-Torres, et al., 2016).

Tabla 2 Composición de azúcares del mucilago de *Aloe vera* (*barbadensis* Miller)
Tomado de (Medina, Calderas, & al, 2016)

Composición de azúcares del mucilago de <i>Aloe vera</i> Fresco	
Sustancia	Composición (%mol)
Manosa	47±2
Glucosa	41±2
Ácido urónico	6.1±0.5
Galactosa	4.5±0.4
Xilosa	7±1.1
Arabinosa	1.9±0.1
Ramnosa	0.9±0.03
Fructuosa	0.8±0.02

Del promedio de los coeficientes de difusión de las distintas azúcares del mucilago de *Aloe vera* se obtuvo el coeficiente de difusión promedio del mucilago de *Aloe vera* fresco el cual de $D = 6.12 * 10^{-6} \frac{cm^2}{s}$. Este coeficiente de difusión es consistente con otros coeficientes de difusión para líquidos que suelen estar en el orden de 10^{-5} (cm^2/s) siendo ligeramente menor ya que las partículas del mucilago tienen un tamaño considerablemente mayor en comparación a otros líquidos, debido a las grandes estructuras formadas por los oligo-polisacáridos presentes.

3.2. CARACTERIZACIÓN REOLÓGICA

Para cada solución concentrada mediante UF del mucilago de *Aloe vera* se obtuvo una curva de flujo, esto es, la viscosidad cortante en función de la rapidez de deformación. Todas las pruebas reológicas (ver **Figura 11** y **Figura 12**) mostraron una disminución de la viscosidad cortante a medida que la rapidez de deformación aumenta, es decir, presentaron un comportamiento no newtoniano del tipo adelgazante al flujo ($n < 1$). Por otro lado, el ajuste de los modelos reológicos a las curvas reológicas se muestra en la **Tabla 3**. Al comparar la predicción del modelo de ley de potencia y el modelo BMP de la **Figura 11** se puede observar que el modelo de BMP describe con mayor precisión los datos experimentales al presentar un menor error absoluto promedio (10.42%) en comparación al modelo de la ley de la potencia que presenta un error absoluto promedio del 27.01%, y se desvía a altos valores de rapidez de deformación. Por otro lado, el modelo de Reiner-Philippoff (**Figura 11**) presentó un error promedio del 54.59%, la representación de este modelo presenta un comportamiento irregular debido a la naturaleza del modelo Reiner-Philippoff ya que este no puede ajustarse directamente en la curva viscosidad cortante versus la rapidez de deformación por lo cual fue necesario evaluarlo usando los datos experimentales donde el esfuerzo y la rapidez de deformación son conocidas, el modelo presenta un desviación a bajos valores rapidez de deformación, y un buen ajuste a altos valores, el modelo de la ley de la potencia y el modelo de Reiner-Philippoff pueden describir distintas zonas del comportamiento del fluido, sin embargo, el modelo de BMP presento el menor error promedio en comparación a los demás modelos reológicos empleados. A bajas concentraciones de *Aloe vera* con altas rapidez de deformación, η_{∞} se aproxima a la viscosidad del agua según lo reportado por Lad (Lad & Murthy, 2013). Los distintos parámetros reológicos se muestran en la **Tabla 3**, observando comportamientos adelgazantes a las diferentes concentraciones ($n < 1$), además, el esfuerzo característico es muy pequeño (0.0049 Pa) por lo que, se requiere de un esfuerzo pequeño para que el *Aloe vera* pase a la zona de adelgazamiento al flujo. De manera similar Lad (Lad & Murthy, 2013), en soluciones concentradas de *Aloe vera* se observó un gran aumento de la viscosidad (alrededor del 115%) a una baja rapidez de deformación (η_0), esto indica que el ordenamiento de la estructura fibrosa insoluble es

más complejo y de mayor tamaño conforme aumenta la concentración, lo cual es ventajoso en el uso de un proceso de UF para concentrar el mucilago en comparación con un proceso de evaporación, ya que indica que el uso de este método mantiene gran parte de las azúcares que le dan sus distintas propiedades benéficas al mucilago.

Tabla 3 Parámetros reológicos para distintos modelos reológicos de soluciones de *Aloe vera*

Modelo Reológico	BMP/RP	BMP/RP	LP	LP	BMP	RP
Parámetro	η_0 [Pa s]	η_∞ [Pa s]	k [Pa s ⁿ]	n	β [s/Pa]	τ_s [Pa]
Diluido	0.32	0.001	0.0429	0.075	0.47	0.0049
Concentrado	3.7	0.003	0.2225	0.066	0.04	0.016

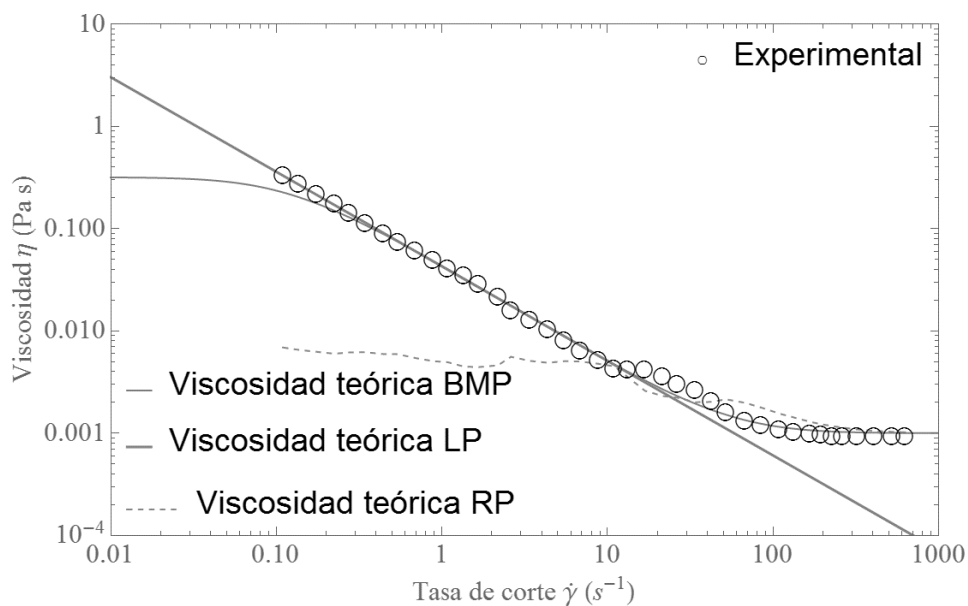


Figura 11 Viscosidad cortante vs. Rapidez de deformación para la disolución de *Aloe vera* a 20°Brix.

El comportamiento reológico del mucílago fresco de *Aloe vera* (*Aloe barbadensis Miller*), tras el proceso de UF con parámetros fijos ($T = 25$ °C; $DP = 137,9$ kPa y $N =$

160 rpm), revela un comportamiento de adelgazamiento al flujo, como era de esperarse. Este comportamiento fue común en todas las concentraciones obtenidas mediante UF (20-60%, ° Brix), tal y como se muestra en la **Figura 12**, la disminución de la viscosidad sigue a la ruptura de las unidades estructurales en el mucílago de *Aloe vera* causada por la rapidez de deformación (Medina-Torres, et al., 2016) (Lad & Murthy, 2013). La viscosidad del mucílago concentrado es más alta que la del mucílago diluido, como era de esperarse. Sin embargo, el proceso de UF no modifica el comportamiento de adelgazamiento al flujo, es decir, la respuesta reológica es muy similar entre si (paralelas entre sí) lo que muestra el comportamiento de un fluido termoreológicamente simple. Los altos niveles de adelgazamiento al flujo (n) que se encuentran en el mucílago de *Aloe vera* tienen un papel importante en el proceso de UF, ya que los fluidos pseudoplásticos tienen una mejor concentración a la UF en comparación a los fluidos newtonianos (Aimar, Verall, & Hudson, 1987).

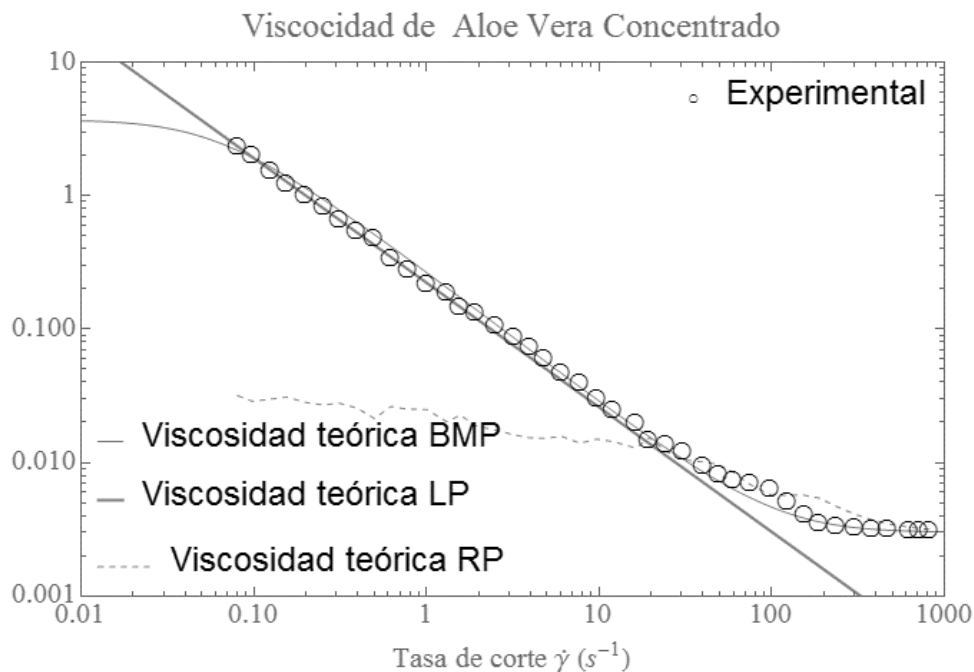


Figura 12 Viscosidad cortante vs. Rapidez de deformación para la disolución de *Aloe vera* a 60°Brix.

Por el contrario, el proceso UF incrementó el índice de consistencia del mucílago en aproximadamente un 360%, lo cual concuerda con lo reportado previamente por Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995), quienes reportaron una variación en el índice de consistencia de alrededor de 400% para la goma xantana cuyo comportamiento es muy similar al del mucílago de *Aloe vera*, dentro de un intervalo de concentración por un proceso de UF 0.1 a 5% en peso. Por otro lado, para la poliacrilamida, del 0,1 al 5 % en peso, la variación en el índice de consistencia llegó al 600 % también mediante un proceso por UF. Nótese que el comportamiento reológico del mucílago de *Aloe vera* es similar al de otros fluidos alimenticios, frutos y mucílagos (de nopal *Opuntia ficus indica*) (Medina-Torres, Brito-De La Fuente, Torrestiana-Sánchez, & Katthain, 2000), los cuales son fluidos pseudoplásticos ($n < 1$). Finalmente, cabe mencionar que, un concentrado de tomate tiene valores de $n = 0,59$ y $k = 0,22$ Pa sⁿ, un concentrado de plátano, de $n = 0,49$ y $k = 6,51$ Pa sⁿ (Aimar, 1987, Pritchard, 1990 y Field, 1990). En consecuencia, la reología permite la comparación de varios niveles de concentración de un proceso de UF. Además, permite conocer las condiciones óptimas de UF para evitar la degradación y preservar su estructura en un proceso por UF del mucilago de Aloe vera (Medina-Torres, et al., 2016).

3.3. FLUX DE PERMEADO EXPERIMENTAL DEL MUCILAGO DE ALOE VERA

La caracterización de la membrana se realizó mediante mediciones al flujo de permeado primero con agua destilada, antes de los experimentos de concentrado de mucilago de *Aloe vera*. Los datos experimentales para el flujo de permeado con agua se tomaron en estado estacionario. Los resultados sugieren que el estado estacionario se alcanza después de los primeros cinco minutos de iniciar el proceso. El valor del flujo de permeado de agua en estado estacionario es $0.04 \frac{kg}{m^2s}$, y está dentro del rango dado por el fabricante que es de $0.03 - 0.08 \frac{kg}{m^2s}$. Los datos experimentales del mucílago de *Aloe vera* se obtuvieron en estado estacionario a las condiciones de operación empleadas con agua con una concentración inicial del 20°Brix. Los datos sugieren que el estado estacionario se establece dentro de los primeros cinco minutos de iniciar el

proceso de concentración de las soluciones de mucílago de *Aloe vera* como se muestra en la **Figura 13**. Aunque el flujo de permeado ($9.5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{m}^2\text{s}$) difiere mucho del del agua ($40 \text{ m}^3 / \text{m}^2 \text{ s}$) el flujo de permeado todavía está por debajo del valor nominal dado por el fabricante de las membranas empleadas. Todavía es posible manejar estas condiciones en el proceso de UF, ya que la degradación está ausente en las muestras de mucílago.

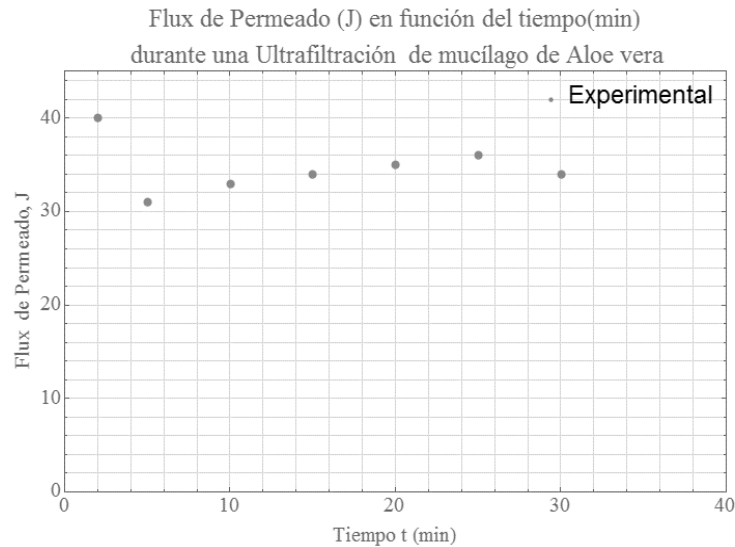


Figura 13 flux de Permeado (J) en función del tiempo(minuto) de la Ultrafiltración para la filtración de mucilago Aloe vera.

3.3.1. COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA k_c Y EL FLUJO DE PERMEADO J

Al combinar la viscosidad equivalente newtoniana a la concentración de bulto $\eta_{PN}(C_b)$, y la viscosidad aparente de la pared a la concentración de la superficie de la membrana $\eta_{ab}(C_w)$, se obtiene la ecuación para el coeficiente de transferencia de masa (**Véase la deducción en Apéndices A y B**):

$$k_c = \left(\frac{3D^2}{4L}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{8(V_z(C_b)_{RP})}{d}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta_{PN}(C_b)}{\eta_{ab}(C_w)}\right)^{0.27} \quad (25)$$

Por lo tanto, el flux de permeado tiene la siguiente forma:

$$J = \left(\frac{3D^2}{4L}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{8\langle V_{z(C_b)} \rangle}{d}\right)^{1/3} \left(\frac{\eta_{PN}(C_b)}{\eta_{ab}(C_w)}\right)^{0.27} \text{Ln}\left(\frac{C_w}{C_b}\right) \quad (26)$$

Empleando el modelo de Reiner-Philipoff $\eta_{PN}(C_b)$ y $\eta_{ab}(C_w)$ son (**Véase apéndice A**):

$$\eta_{PN}(C_b) = \frac{R^2}{4\langle V_{z(C_b)} \rangle_{RP}^2} \frac{f(\tau_w(C_b)_{RP})}{\tau_w(C_b)^2} \quad (27)$$

$$\eta_{ab}(C_w) = \frac{f(\tau_w(C_w)_{RP})R\left(\eta_{\infty C_w} + \frac{(\eta_0 C_w - \eta_{\infty C_w})\tau_s C_w^2}{\tau_s C_w^2 + \tau_w^2}\right)}{\langle V_{z(C_w)} \rangle_{RP} \tau_w^3} \quad (28)$$

Donde, η_0 y η_{∞} son la viscosidad a rapidez de deformación cero y muy altas, respectivamente, τ_s es el esfuerzo cortante crítico o tensión cortante de fluencia, que indica un cambio de comportamiento del material

La función $f(\tau_w(C_b)_{RP})$ y $f(\tau_w(C_w)_{RP})$ corresponden a las siguientes expresiones obtenidas a partir de la ecuación de Rabinowitsch-Mooney al evaluarse en condiciones concentración de bulto C_b y pared C_w .

$$f(\tau_w) = \frac{1}{2\eta_{\infty}^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_{\infty}} \right) (\eta_{\infty}\tau_w^2) + \tau_s^4 \left(\frac{\eta_0^2}{\eta_{\infty}} - \eta_0 \right) \text{Ln} \left[\frac{\eta_{\infty}\tau_w^2 + \tau_s^2\eta_0}{\tau_s^2\eta_0} \right] + \frac{(\eta_{\infty}\tau_w^2 + \tau_s^2\eta_0)^2 - \tau_s^4\eta_0^2}{2\eta_{\infty}} \right] \quad (29)$$

Por otro lado, para el modelo BMP las expresiones para $\eta_{PN}(C_b)$ y $\eta_{ab}(C_w)$ son (**véase Apéndice B**):

$$\eta_{PN}(C_b) = \frac{R^2}{4\langle V_{z(C_b)} \rangle_{BMP}^2} \frac{f(\tau_w(C_b)_{BMP})}{\tau_w^2}; \quad (30)$$

$$\eta_a(C_w) = \frac{2\beta_{(C_w)} Rf(\tau_w(C_w)_{BMP})}{\langle V_{z(C_w)_{BMP}} \rangle \tau_w \left(\beta_{(C_w)} \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta_{(C_w)} \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta_{(C_w)} \tau_w^2 \frac{1}{\eta_0}} \right)}; \quad (31)$$

Donde, β ($\beta = \lambda k$) es un parámetro cinético-estructural que a su vez es el producto del tiempo de relajación estructural (λ) y el esfuerzo crítico para la desestructuración (k), por debajo del cual el material presenta fluencia primaria (también conocida como fluencia transitoria), es decir, en la zona donde la viscosidad es relativamente alta pero disminuye con el aumento del tiempo y la deformación debido al hecho de que el material está experimentando un aumento en la resistencia a la fluencia o endurecimiento por deformación.

Finalmente, el valor de la función $f(\tau_w)$ que debe ser evaluada en sus respectivas concentraciones para el modelo BMP toma la siguiente forma:

$$f(\tau_w) = \beta^2 \tau_w^4 - 2\beta \tau_w^2 \eta_\infty + \eta_\infty^2 \left(1 - 2\varphi_r + \left(\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) \sqrt{\left(\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta \tau_w^2}{\eta_0}} + 4\varphi_r \left(1 - \varphi_r \right) \ln \left[\frac{\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta \tau_w^2}{\eta_0}}}{2\varphi_r} \right] \right) \quad (32)$$

Finalmente, la aproximación de flujo reométrico se puede observar en el **apéndice C**, esta se realiza debido que a altas concentraciones existe un cambio de comportamiento en el flux de permeado debido al aumento de la viscosidad y a la

concentración de bulto, en esta zona la transferencia de masa laminar ocurre de manera similar a la de módulos con canales de 1 mm de altura aun cuando se tiene un canal más amplio, este fenómeno fue observado por Pritchard en su estudio de UF con soluciones de Pectina (Pritchard, Howell, & Field, 1994), la aproximación propuesta se basa en el flujo capilar donde $L \gg D$ y toma la forma siguiente:

$$J = \left(\frac{3D^2}{4L}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{8V_{zB}}{d}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_{ab}(C_w)}\right)^{0.27} \text{Ln}\left(\frac{C_w}{C_B}\right) \quad (33)$$

Donde, V_{zB} y η_{∞} se refieren a la velocidad y viscosidad newtonianas del flujo homogéneo, mientras que la expresión $\eta_{ab}(C_w)$ a la viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de pared, esta toma el valor de la Ec.(27) y (30) para el modelo de RP y BMP respectivamente.

3.4. SIMULACIONES NUMERICAS

Para observar el efecto de las diferentes propiedades materiales, y las condiciones del proceso de UF en la concentración del mucilago de aloe vera, se programaron las ecuaciones mostradas en la sección anterior en el software *Wolfram Mathematica v11*. Los parámetros geométricos del ultrafiltrador (UF) cilíndrico empleado es: diámetro de 0.254 metros y largo de 0.202 metros.

La primera de las simulaciones que se realizó fue la variación del flux de permeado J con respecto el diámetro de la unidad de UF. Como se puede apreciar en la **Figura 14**, el flux de permeado se incrementa conforme aumenta el diámetro del módulo UF, además, se puede observar que las aproximaciones del modelo de BMP y las 2 simulaciones de flujo reométrico tienden a tener un comportamiento similar, y el modelo de RP tiene una variación considerable, esto se debe a que el modelo de RP tiene dificultades describiendo cada una de las zonas de la curva reológicas del mucilago de *Aloe vera* a bajos valores de rapidez de deformación, donde la viscosidad tiende a cambiar rápidamente. Las 4 distintas simulaciones realizadas tuvieron un

comportamiento similar a altos valores de diámetro del módulo de UF empleado.

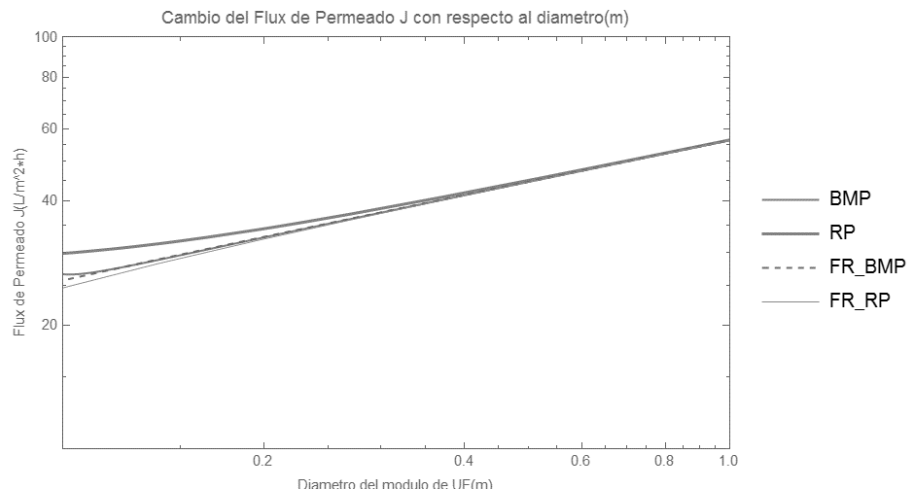


Figura 14 Grafica Flux de k_c en comparación del diámetro del módulo de Ultrafiltración

Por otro lado, la simulación de la variación del flux de permeado J con respecto a la longitud de la unidad de UF (véase **Figura 15**), se mantuvieron algunas de las tendencias mostradas en la **Figura 14**, como la similitud en los valores de la simulación de los modelos de flujo reológico con el modelo de BMP, y que existe una desviación con el modelo de RP, también es remarcable el cambio de comportamiento en la simulación del modelo BMP a un valor aproximado 0.6 metros de longitud donde pasó de tener de un comportamiento casi igual a la simulación de flujo reológico de BMP a la simulación de RP, lo anterior es muy relevante ya que la aproximación de flujo reológico de RP tiene un valor similar al modelo Newtoniano, por lo que según lo esperado la simulación de BMP se puede mostrar el cambio de un comportamiento del sistema. Las 4 distintas simulaciones en este caso tuvieron un comportamiento similar a bajos valores de longitud del módulo de UF.

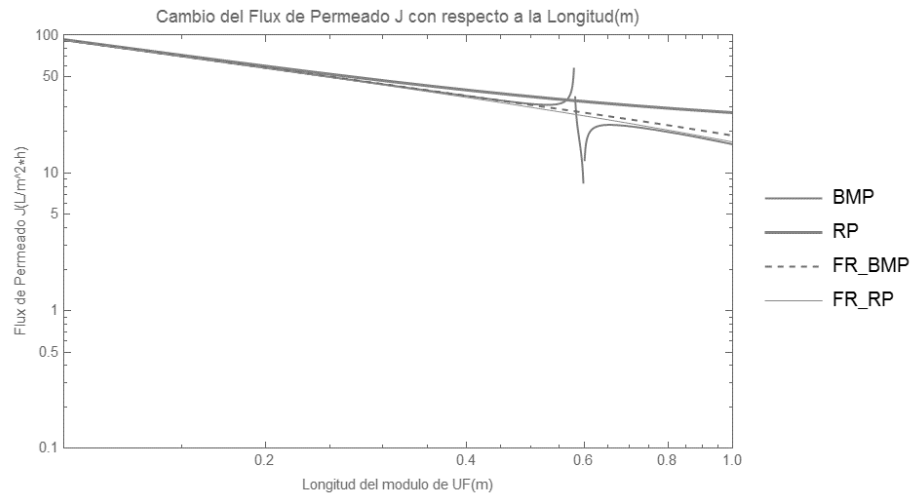


Figura 15 Grafica Flux de k_c en comparación de la longitud del módulo de Ultrafiltración

Adicionalmente, de manera indirecta, la **Figura 14** muestra que k_c aumenta conforme lo hace el radio, y la **Figura 15** muestra que disminuye conforme al largo de la unidad de ultrafiltración, esta es una observación interesante para la construcción de nuevas unidades de ultrafiltración en este tipo de procesos de concentración.

Por otro lado, en el caso de la **Figura 16** se puede apreciar que k_c aumenta considerablemente en casos donde el fluido tiene un comportamiento muy adelgazante ($n \rightarrow 0$), esto al aumentar el gradiente de presión ΔP_{TM} , este efecto ya había sido reportado por Aimar (Aimar, Verall, & Hudson, 1987) quien consideraba que los fluidos pseudoplásticos tendrían una mayor transferencia de masa que un fluido newtoniano de la misma viscosidad, también que el modelo de Reiner-Philipoff exhibe algunos problemas describiendo procesos a bajos cambios de presión mostrando un comportamiento irregular, y muy alto en comparación a las aproximaciones del modelo de flujo reológico que tienen un comportamiento más apropiado para la descripción de esta zona con un aumento constante que se asemeja a un modelo Newtoniano. Por su parte, el modelo de BMP y su aproximación de flujo reológico tienen una tendencia similar a bajos cambios de presión, esto posiblemente sea debido a que se encuentran en la zona de fluencia primaria, donde la viscosidad es alta por lo que la transferencia

de masa es menor, cuando el gradiente de presión es de aproximadamente 180 Pa existe un cambio de comportamiento en el modelo de BMP que podría representar el reordenamiento de la red fibrosa polimérica por el cambio de presión aplicada, cuando el cambio de presión (ΔP) aumenta, las distintas simulaciones tienden a tener un comportamiento muy similar.

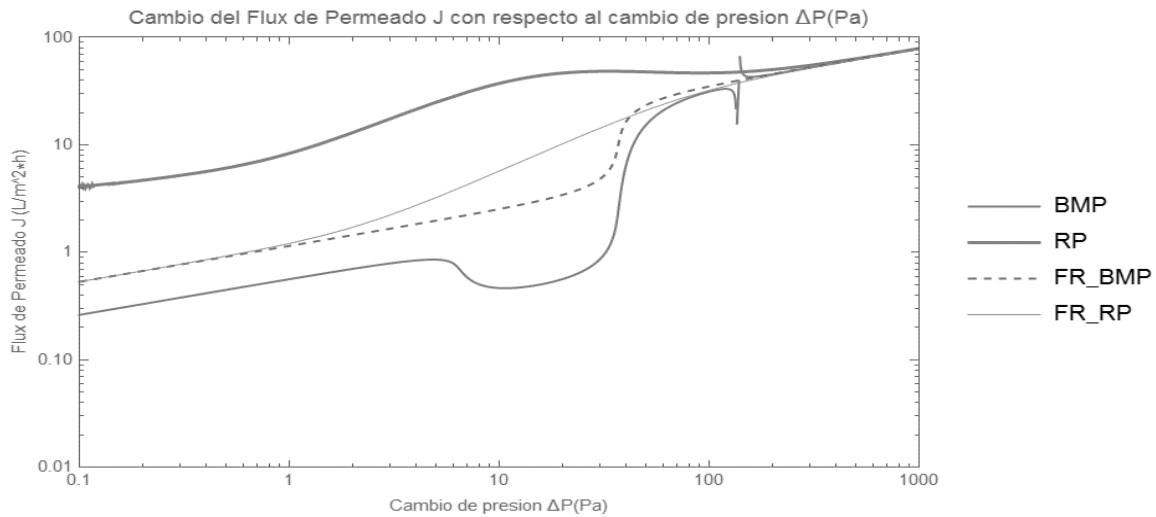


Figura 16 Gráfica Coeficiente de transferencia de masa (k_c) en función de la caída de presión (ΔP).

Así pues, cuando se busca aumentar la transferencia de masa en un proceso con características fijas (radio o largo fijo de un módulo de ultrafiltración ya existente) se recomienda aumentar el gradiente de presión $\nabla_z P$, ya que en la mayoría de las distintas simulaciones que se realizaron (ver en la **Figura 16**), el flujo de permeado tuvo un comportamiento positivo conforme aumentaba el gradiente de presión, también es importante mencionar que mantener el permeado a una concentración constante, ya que la diferencia de concentraciones aumenta la eficiencia del proceso.

Muchos modelos de ultrafiltración utilizan una correlación de coeficiente de transferencia de masa para caracterizar la transferencia de masa en la capa de polarización de concentración de la membrana. En este estudio, se propusieron cuatro expresiones para el coeficiente de transferencia de masa de un fluido no newtoniano obtenidas con la metodología de Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995),

dos de ellas que obedecen el modelo de Reiner-Philipoff(RP) y BMP respectivamente y otras dos que se basan en un comportamiento capilar ($L \gg D$) que se basan en los mismos modelos Reiner-Philipoff (FRRP) y BMP (FRBMP). La **Figura 17** muestra el flux de permeado experimentales (puntos negros) y la predicción teórica de todos los modelos presentados (líneas continuas) en función de la concentración de *Aloe vera* filtrado, se puede observar que la predicción mostrada por la ley de potencia es buena a bajas concentraciones, y los modelos reológicos propuestos BMP y RF tienen una mejor aproximación a altas concentraciones, esto se debe a que existe un cambio de comportamiento reológico con el aumento de concentración por el proceso de UF. Este cambio de comportamiento del flux de permeado producido debido a la pseudoplasticidad ya había sido observado por Aimar (Aimar, Verall, & Hudson, 1987) el cual es más marcado conforme aumenta la concentración según lo reportado por Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995), de aquí la importancia del uso de modelos reológicos como los propuestos que puedan describir el comportamiento de la alimentación durante el proceso de UF.

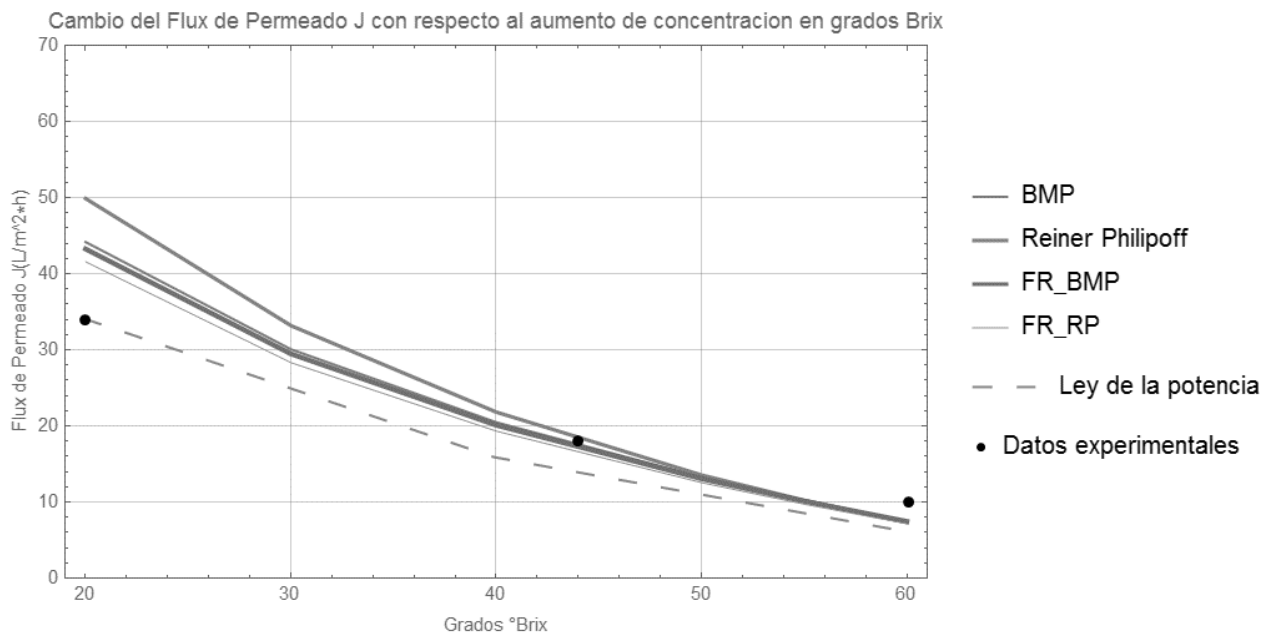


Figura 17 Grafica Flux de permeado (J) en función de la concentración de filtrado de mucílago (C_b) para distintos modelos Reológicos.

Cabe destacar que, aunque no hay superposición, la desviación se debe a las comparaciones realizadas con el mucílago de *Aloe vera* en un proceso de UF real. Por lo tanto, en fluidos que contienen una reología compleja como lo es el mucílago de *Aloe vera*, las predicciones del flujo de permeado son factibles, y pueden mejorarse aún más para describir mejor las zonas a alta concentración obtenidas mediante UF. Se observa además que las distintas aproximaciones teóricas (BMP y RP) son mejores a intervalos de concentraciones medias (30-50 °Brix) pero fallan a altas concentraciones (60 °Brix), y se asemejan al modelo de la ley de la potencia, las aproximaciones de flujo Reológico (FRBMP y FRRP) tienen resultados similares con un buen ajuste a concentraciones medias, y mostraron un flujo de permeado menor ya que consideran que la viscosidad de bulto depende únicamente de la concentración y no es afectada por la rapidez de deformación del sistema por lo que no muestran el efecto de adelgazamiento en esta zona, siendo la aproximación de Flujo Reológico de BMP (FRBMP) la que tuvo la mejor aproximación a los datos experimentales (ver Tabla 4) esta mejora de 1.06%. con respecto al modelo actual basado en la ley de la potencia (LP) es destacable para una mejora en la predicción de sistema de UF sobre todo en la industria de los productos de origen vegetal que se ven beneficiados por su procesamiento con UF.

Tabla 4 Comparación de errores absolutos para las diversas simulaciones de flux de permeado

Modelo	BMP	RP	FRBMP	FRRP	LP
Error promedio absoluto (%)	20.46	24.54	19.93	20.41	20.99

Los modelos de ultrafiltración son procesos de naturaleza compleja que muestran distintos comportamientos dependientes del sistema y la concentración, que suelen variar de un flujo turbulento a un flujo laminar, y hacia un comportamiento similar al de

un capilar y finalmente llegar al límite de concentración debido a la saturación o en un caso como el presentado un comportamiento complejo debido a la naturaleza del mucilago de *Aloe Vera*, por lo que, no es raro que un proceso muestre uno o varios de estos comportamientos, por lo que un solo modelo no suele ser capaz de describir en su totalidad el proceso de UF; en caso de un comportamiento complejo muchas veces en lugar de una predicción muchas veces se hace una deducción a *posteriori* tras la realización de un experimento de planta piloto antes de escalarlo a nivel industrial (Field & Wu, 2022). Por esta razón es importante identificar el modelo a utilizar para describir el proceso en este caso los modelos de flujo reológico (FRBMP y FRRP) son los que tuvieron la mejor aproximación por su capacidad de describir zonas de media concentración en el proceso de UF, y son mejor a utilizar entre los modelos propuestos, aun así vale la pena desarrollar aproximaciones de flujo turbulento que se espera tengan una mejor aproximación a bajas concentraciones y con partículas de mayor tamaño, usando el más adecuado para cada concentración, donde se espera que en el futuro se logre un mejor entendimiento y modelado de un proceso de Ultrafiltración.

Finalmente, vale la pena mencionar que a altas concentraciones k_c tiende a ser casi constante, esto posiblemente sea debido a la formación de una capa superficial, con una considerable resistencia hidráulica (McCabe, Smith, & Harriot, 2007). Lo anterior es probable que suceda con una solución de alto peso molecular como lo es el mucilago de aloe vera ($5.96 \cdot 10^4$ Daltons reportado por Medina et al., 2016) debido a que la red fibrosa insoluble, que está compuesta por las distintas azúcares, puede formar una masa enmarañada de moléculas que se superponen en la superior de la membrana a pesar de que la C_b no alcanzado su solubilidad máxima. Cuando se alcanza el flux máximo, éste está limitado por la velocidad de transferencia de la masa que regresa al seno de la solución y se refleja en las propiedades al flujo del mucilago, por lo tanto, el modelo de capa polarizada tiene ciertos problemas describiendo un producto con una reología tan compleja como la del mucilago a altas concentraciones y es necesario el uso de un modelo adicional que pueda describir este fenómeno, a pesar de esto el uso de distintos modelos reológicos que describen mejor el material al concentrar aumentan la precisión del sistema. y valen la pena expandirlo para el

estudio de concentración de otros biomateriales y/o mucilagos con amplias aplicaciones en la industria química.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una investigación de un proceso de ultrafiltración (UF) para concentrar el mucilago de aloe vera con amplias aplicaciones en la industria, así como la caracterización reológica de los diferentes concentrados obtenidos por UF, y la obtención del coeficiente de transferencia de masa k_c mediante la metodología propuesta por Charcosset y Choplin (Charcosset & Choplin, 1995). Se puede afirmar que:

El proceso de ultrafiltración no modifica el comportamiento termoreológicamente sencillo del mucílago de *Aloe vera*, lo que indica que no existe un cambio estructural a la hora de concentrar el mucilago de *Aloe vera* por medio de este método de UF.

El carácter diluyente por la rapidez de deformación del mucílago indica posibles cambios estructurales pequeños, lo que induce un daño moderado a los mucopolisacáridos presentes. Este es un resultado positivo ya que normalmente estos compuestos de son muy sensibles a la rapidez de deformación y la temperatura. En este contexto, el proceso de UF representa una ventaja frente a los métodos tradicionales de concentración (por ej., la evaporación), para producir concentrados de mucílago de alta calidad.

Las simulaciones sugieren que el proceso de ultrafiltración se ve favorecida en casos donde el fluido tiene un comportamiento muy adelgazante ($n \rightarrow 0$), con altos valores de diámetro D de la unidad de ultrafiltración y una longitud pequeña, ya que estas condiciones aumentan el valor del coeficiente de transferencia de masa k_c .

El modelo de BMP (Bautista-Manero-Puig) presenta una mejor predicción en la representación de un sistema real de concentración de *Aloe vera* en comparación al modelo de Reiner-Philppoff, a la vez ambos tienen una mejor aproximación a altas

concentraciones en comparación al modelo de la ley de la potencia comúnmente empleado en la industria, aunque una ligeramente menor a bajas concentraciones.

A altas caídas de presión, el coeficiente k_c tiende a ser casi constante esto posiblemente sea debido a la formación de una capa superficial con una considerable resistencia hidráulica.

Los distintos modelos reológicos empleados (LP, BMP y RF) tienen distintos grados de representación al flux de permeado a bajas y medianas concentraciones, pero todos tienden a ser muy cercanos a altas concentraciones.

Finalmente se considera que, aunque se pueden hacer ciertos cambios en los modelos y programación presentados para describir el coeficiente de transferencia de masa (k_c), estos pueden ser usados para el diseño u optimización en un proceso de ultrafiltración para otros fluidos similares de reología compleja.

Los resultados obtenidos por el proceso de UF son útiles para la obtención del mucílago de *Aloe vera* empleado en alimentos estructurados o productos farmacéuticos

4.1. TRABAJO A FUTURO

-El uso de una simulación de un proceso de UF mediante *COMSOL Multphysics* en el que se observen las características y evolución de este proceso, y puede llegar a ser una mejor representación y describir de mejor manera las partes complejas del mismo.

-Aunque los resultados de este trabajo fueron satisfactorios vale la pena hacer una modelación completa del fenómeno de UF sin usar el coeficiente de transferencia de masa (k_c), y resolver numéricamente las ecuaciones de balance por medio de la teoría de capa límite.

APENDICE A

En este apéndice se muestra la deducción del coeficiente de transferencia de masa para el modelo Reológico de Reiner-Philipoff

DEDUCCION DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA K_c EN LA ULTRAFILTRACION PARA EL MODELO DE REINER PHILIPPOFF

Se busca obtener el valor de la viscosidad aparente a concentración de bulto $\eta_{PN}(C_b)$ y la viscosidad aparente en la superficie de la membrana $\eta_a(C_w)$, para poder sustituirlos en el coeficiente de comportamiento de flujo dependiente de la concentración $(\frac{\mu_{PN}(C_b)}{\mu_a(C_w)})^{0.27}$ y obtener el coeficiente de transferencia de masa. Por lo anterior, se obtendrá el perfil de velocidad del flujo de la sustancia de interés dentro de la tubería del ultrafiltrado considerándolo cilíndrico, la transferencia de masa de la sustancia a través de la membrana es lo suficientemente pequeña como para no alterar el perfil de velocidades, es decir, se considera que la transferencia de masa y el flujo del fluido se encuentran desacoplados.

ESQUEMA DE PROCESO:

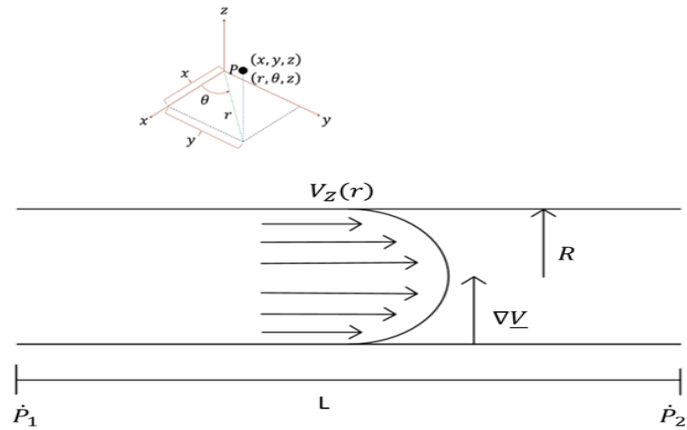


Figura A- 1 Perfil de velocidades en una tubería cilíndrica.

ANÁLISIS DE PROCESO:

1. Estado estacionario
2. Proceso Isotérmico
3. Sin reacción química
4. Flujo unidireccional (en z)
5. Flujo de masa unidireccional (en r)
6. Fluido no newtoniano
7. Fluido Incompresible
8. Flujo laminar
9. Fluido isotrópico
10. Coordenadas cilíndricas

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN TÉRMINOS DE τ

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \underline{T} + \rho \underline{g} \quad (34)$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, θ, z) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}) + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta \end{aligned} \quad \begin{matrix} (3 \\ 6) \end{matrix}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) \right] + \rho g_z \quad \begin{matrix} (3 \\ 7) \end{matrix}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \underline{v}) = 0 \quad (38)$$

COORDENADAS CILINDRICAS (r, θ, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (39)$$

Al aplicar las consideraciones del sistema la ecuación constitutiva llega a la forma presentada en la Ec. (40)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) \right]; \quad (40)$$

El diferencial de presión con respecto a la dimensión $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ corresponde al valor de $\left(\frac{P_L - P_0}{L}\right)$ debido a las condiciones del sistema donde P_L , P_0 y L corresponden a la presión en la entrada, salida del sistema y la longitud de este respectivamente, esta expresión se simplifica como $\nabla_z P$ para facilitar su manejo durante el desarrollo de cálculos, como se ve en la Ec. (41)

$$\frac{P_L - P_0}{L} = \frac{\partial p}{\partial z} = \nabla_z P; \quad (41)$$

Se sustituye el valor de (41) en la Ec (40)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) = \nabla_z P; \quad (42)$$

$$\partial(r\tau_{rz}) = \partial r(\nabla_z P)r; \quad (43)$$

Desarrollando e Integrando se obtiene el perfil de esfuerzos:

$$\tau_{rz} = (\nabla_z P) \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}; \quad (44)$$

Evaluando (44) en la condición de frontera 1 (C.F. 1) $V_z(R) = V_{max}$, $r = 0$; Por consistencia física se considera a $C_1 = 0$, se obtiene el valor de τ_{rz} para el sistema.

$$\tau_{rz} = (\nabla_z P) \frac{r}{2} \quad (45)$$

CÁLCULO DEL PERFIL DE VELOCIDADES DEL SISTEMA

Se sabe que para un fluido de Reiner-Philippoff de τ_{rz} es

$$\tau_{rz} = \left(-\frac{dV_z}{dr}\right) \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\tau_{rz}}{\tau_s}\right)^2} \right) \quad (46)$$

Sustituyendo este valor en la Ec (45) se tiene

$$\left(-\frac{dV_z}{dr}\right) \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\tau_{rz}}{\tau_s}\right)^2} \right) = (\nabla_z P) \frac{r}{2} \quad (47)$$

Sustituyendo una vez más (45) en (47) y desarrollando se obtiene el valor correspondiente a $\left(-\frac{dV_z}{dr}\right)$

$$\left(-\frac{dV_z}{dr}\right) \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2} \right) = (\nabla_z P) \frac{r}{2} \quad (48)$$

$$-\frac{dV_z}{dr} = \frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2}} \quad (49)$$

La Ec. (49) se integra de la manera siguiente:

$$\int dV_z = - \int dr \frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2}} \quad (50)$$

$$\int dV_z = - \int dr \frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\frac{\eta_\infty \left(1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2\right) + \eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2}}; \quad (51)$$

$$\int dV_z = - \int dr \frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2} \left(1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2\right)}{\eta_\infty + \eta_\infty \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2 + \eta_0 - \eta_\infty}; \quad (52)$$

Se iguala denominador $1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s}\right)^2$ para la parte inferior de la integral y luego se hacen los cambios correspondientes para la integral, este proceso se puede ver en las ecuaciones de (50) a (52).

$$\int dV_z = - \int dr \frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2} \left(1 + \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s} \right)^2 \right)}{\eta_\infty \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s} \right)^2 + \eta_0}; \quad (53)$$

$$\int dV_z = - \int dr \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\eta_\infty \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s} \right)^2 + \eta_0} + \frac{\left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s} \right)^2 (\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\eta_\infty \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s} \right)^2 + \eta_0} \right); \quad (54)$$

La expresión se divide en 2 sumas y realizando los siguientes cambios de variables $u = \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s} \right)^2$; $du = (\nabla_z P)^2 \frac{r}{2} dr$; $\frac{2du}{r(\nabla_z P)^2} = dr$, a la expresión (54) se obtiene la Ec. (55)

$$\int dV_z = - \int \frac{2du}{r(\nabla_z P)^2} \left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\eta_\infty \frac{u}{\tau_s^2} + \eta_0} + \frac{\left(\frac{(\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\tau_s} \right)^2 (\nabla_z P) \frac{r}{2}}{\eta_\infty \frac{u}{\tau_s^2} + \eta_0} \right); \quad (55)$$

- Como el gradiente de presión es constante con el radio se obtiene lo siguiente

$$\int dV_z = -\frac{1}{(\nabla_z P)} \int du \left(\frac{1}{\eta_\infty \frac{u}{\tau_s^2} + \eta_0} + \frac{u}{\tau_s^2 (\eta_\infty \frac{u}{\tau_s^2} + \eta_0)} \right); \quad (56)$$

Realizando los siguientes cambios de variables, $uv = \eta_\infty \frac{u}{\tau_s^2} + \eta_0$; $dv = \eta_\infty \frac{1}{\tau_s^2} du$; $\frac{dv\tau_s^2}{\eta_\infty} = du$; $\frac{(v-\eta_0)\tau_s^2}{\eta_\infty} = u$, y sustituyendo se obtiene la Ec. (57)

$$\int dV_z = -\frac{1}{(\nabla_z P)} \int \frac{dv\tau_s^2}{\eta_\infty} \left(\frac{1}{v} + \frac{(v-\eta_0)\tau_s^2}{\eta_\infty \tau_s^2 v} \right); \quad (57)$$

Como la expresión $\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)}$ es constante se factoriza y se saca de la integral

$$\int dV_z = -\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \int dv \left(\frac{1}{v} + \frac{(v-\eta_0)}{\eta_\infty v} \right) = -\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \int \frac{1}{v} dv + \frac{1}{\eta_\infty} \int dv \right); \quad (58)$$

Resolviendo la expresión (58) se obtiene

$$-\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \int \frac{1}{v} dv + \frac{1}{\eta_\infty} \int dv \right) = -\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln}[v] + \frac{1}{\eta_\infty} v \right) + C \quad (59)$$

Sustituyendo los cambios de variable en (59) se obtiene el perfil de velocidades general del sistema

$$\begin{aligned}
& -\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_Z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \int \frac{1}{v} dv + \frac{1}{\eta_\infty} \int dv \right) \\
& = -\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_Z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln} \left[\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\tau_s^2} \right] + \frac{1}{\eta_\infty} \left(\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\tau_s^2} \right) \right) + C_2 = V_z
\end{aligned} \tag{60}$$

Evaluando (60) en la condición de frontera (C.F 2) $V_z(R) = 0$, $r = R$, se puede obtener la constante C_2 como se hace a continuación:

$$0 = -\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_Z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln} \left[\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{R}{2})^2}{\tau_s^2} \right] + \frac{1}{\eta_\infty} \left(\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{R}{2})^2}{\tau_s^2} \right) \right) + C_2 \tag{61}$$

$$C_2 = \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_Z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln} \left[\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{R}{2})^2}{\tau_s^2} \right] + \frac{1}{\eta_\infty} \left(\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{R}{2})^2}{\tau_s^2} \right) \right) \tag{62}$$

Sustituyendo (62) en (60) se llega al perfil de velocidades particular (63)

$$\begin{aligned}
V_z = & -\frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_Z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln} \left[\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\tau_s^2} \right] + \frac{1}{\eta_\infty} \left(\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\tau_s^2} \right) \right) \\
& + \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_Z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln} \left[\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{R}{2})^2}{\tau_s^2} \right] + \frac{1}{\eta_\infty} \left(\eta_\infty \frac{((\nabla_Z P) \frac{R}{2})^2}{\tau_s^2} \right) \right);
\end{aligned} \tag{63}$$

$$V_z = \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln} \left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2 - r^2)}{4\tau_s^2} \right); \quad (64)$$

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD MEDIA

Para obtener la velocidad media para el sistema de Reiner-Philipoff se empieza sustituyendo el perfil de velocidad particular (64) en la siguiente ecuación

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R V_z(r) r dr \quad (65)$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \text{Ln} \left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2 - r^2)}{4\tau_s^2} \right) r dr; \quad (66)$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \int_0^R \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) (\text{Ln}[R^2] - \text{Ln}[r^2]) + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2)}{4\tau_s^2} - \frac{(\nabla_z P)^2 (r^2)}{4\tau_s^2} \right) r dr; \quad (67)$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} \int_0^R \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) (\text{Ln}[R^2]) + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2)}{4\tau_s^2} - \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) (\text{Ln}[r^2]) - \frac{(\nabla_z P)^2 (r^2)}{4\tau_s^2} \right) r dr; \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty(\nabla_z P)} & \left[\int_0^R \left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) (\text{Ln}[R^2]) + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2)}{4\tau_s^2} \right) r dr - \int_0^R \frac{(\nabla_z P)^2 (r^3)}{4\tau_s^2} dr \right. \\ & \left. - \int_0^R \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) (\text{Ln}[r^2]) r dr; \right. \end{aligned} \quad (69)$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty (\nabla_z P)} \left[\left[\left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[R^2]) + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2)}{4\tau_s^2} \right) \frac{r^2}{2} dr \right]_0^R - \left[\frac{(\nabla_z P)^2 (r^4)}{16\tau_s^2} \right]_0^R \right. \\ \left. - \int_0^R \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[r^2]) r dr ; \right. \quad (70)$$

Haciendo varios pasos algebraicos, obtenemos la Ec. (70), donde la integral de la derecha se resuelve de la siguiente manera con los siguientes cambios de variables $u = r^2$; $du = dr2r$; $\frac{du}{2r} = dr$,

$$\int \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[r^2]) r dr = \int \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[u]) r \frac{du}{2r}; \quad (71)$$

$$\int \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[r^2]) r dr = \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \frac{1}{2} \int (\text{Ln}[u]) du; \quad (72)$$

Una vez realizado el cambio de variables la expresión Ec.(72) se Integra por partes quedando de la manera siguiente

$$\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \frac{1}{2} \int (\text{Ln}[u]) du = \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \frac{1}{2} (u \text{Ln}[u] + u) + C \quad (73)$$

Regresando a los valores originales y a la expresión original (70) para velocidad media se tiene

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty (\nabla_z P)} \left[\left[\left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[R^2]) + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2)}{4\tau_s^2} \right) \frac{r^2}{2} dr - \frac{(\nabla_z P)^2 (r^4)}{16\tau_s^2} - \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \frac{1}{2} (r^2 \text{Ln}[r^2] \right. \right. \\ \left. \left. + r^2) \right]_0^R \right. \quad (74)$$

Evaluando en los límites de integración la Ec. (74)

$$\begin{aligned}
\langle V_z \rangle = & \frac{2}{R^2} \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty (\nabla_z P)} \left(\left[\left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[R^2]) + \frac{(\nabla_z P)^2 (R^2)}{4\tau_s^2} \right) \frac{R^2}{2} dr - \frac{(\nabla_z P)^2 (R^4)}{16\tau_s^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \frac{1}{2} (r^2 \text{Ln}[R^2] + R^2) \right] \right. \\
& \left. - \left[\left(\left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\text{Ln}[0^2]) + \frac{(\nabla_z P)^2 (0^2)}{4\tau_s^2} \right) \frac{0^2}{2} dr - \frac{(\nabla_z P)^2 (0^4)}{16\tau_s^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \frac{1}{2} (r^2 \text{Ln}[0^2] + 0) \right] \right);
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\langle V_z \rangle = \frac{\tau_s^2}{\eta_\infty (\nabla_z P)} \left[\frac{(\nabla_z P)^2 (R^2)}{8\tau_s^2} - \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \right] \tag{76}$$

Se obtiene la expresión del perfil de velocidad media para el modelo de Reiner Philippoff Ec.(76)

Ecuación de Rabinowitsch-Mooney para fluido de Reiner Philippoff:

La ecuación de Rabinowitsch-Mooney Ec.(77) sirve para expresar una ecuación constitutiva en función del esfuerzo en la pared:

$$\langle V_z \rangle = \frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau) d\tau \tag{77}$$

Para un fluido de Reiner Philippoff valor de la ecuación de Rabinowitsch-Mooney es el de (78):

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \left(\frac{\tau}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2}} \right) d\tau \quad (78)$$

Se iguala denominador $1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2$ para la parte inferior de la integral y luego se hacen los cambios correspondientes para la integral, este proceso se puede ver en las ecuaciones de (79) a (82)(50).

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \left(\frac{\tau^3}{\frac{\eta_\infty \left(1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2\right) + \eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2}} \right) d\tau; \quad (79)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \left(\frac{\tau^3 \left(1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2\right)}{\eta_\infty \left(1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2\right) + \eta_0 - \eta_\infty} \right) d\tau; \quad (80)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \left(\frac{\tau^3}{\eta_\infty \left(1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2\right) + \eta_0 - \eta_\infty} + \frac{\frac{\tau^5}{\tau_s^2}}{\eta_\infty \left(1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2\right) + \eta_0 - \eta_\infty} \right) d\tau; \quad (81)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \left(\frac{\tau^3}{\eta_\infty \left(1 + \frac{\tau^2}{\tau_s^2}\right) + \eta_0 - \eta_\infty} + \frac{\tau^5}{\tau_s^2 \left(\eta_\infty \left(1 + \frac{\tau^2}{\tau_s^2}\right) + \eta_0 - \eta_\infty\right)} \right) d\tau; \quad (82)$$

Realizando el cambio de variable $u = \tau^2$; $du = d\tau 2\tau$; $\frac{1}{2\tau} du = d\tau$, y sustituyendo se obtiene la Ec. (83)

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\int \left(\frac{\tau^3}{\eta_\infty \left(1 + \frac{u}{\tau_s^2}\right) + \eta_0 - \eta_\infty} + \frac{\tau^5}{\tau_s^2 \left(\eta_\infty \left(1 + \frac{u}{\tau_s^2}\right) + \eta_0 - \eta_\infty\right)} \right) \frac{1}{2\tau} du \right]_0^{\tau_w}; \quad (83)$$

La integral dentro de la Ec. (83) se resuelve en la manera siguiente

$$\int \left(\frac{\tau^3}{\eta_\infty \left(\frac{u}{\tau_s^2}\right) + \eta_0} + \frac{\tau^5}{\tau_s^2 \left(\eta_\infty \left(\frac{u}{\tau_s^2}\right) + \eta_0\right)} \right) \frac{1}{2\tau} du = \int \left(\frac{\tau_s^2 u}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} + \frac{u^2}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} \right) \frac{1}{2} du; \quad (84)$$

$$\int \left(\frac{\tau_s^2 u}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} + \frac{u^2}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} \right) \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\tau_s^2 u}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} + \frac{u^2}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} \right) du \quad (85)$$

Realizando el cambio de variable $a = \eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0$; $da = \eta_\infty du$; $\frac{da}{\eta_\infty} = du$; $\frac{a - \tau_s^2 \eta_0}{\eta_\infty} = u$; en la Ec. (85) Se llega a

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{\tau_s^2 u}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} + \frac{u^2}{\eta_\infty(u) + \tau_s^2 \eta_0} \right) du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\tau_s^2 \left(\frac{a - \tau_s^2 \eta_0}{\eta_\infty}\right)}{a} + \frac{\left(\frac{a - \tau_s^2 \eta_0}{\eta_\infty}\right)^2}{a} \right) \frac{da}{\eta_\infty}; \quad (86)$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{a\tau_s^2 - \tau_s^4\eta_0}{a\eta_\infty} + \frac{(a - \tau_s^2\eta_0)^2}{a\eta_\infty^2} \right) \frac{da}{\eta_\infty} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{a\tau_s^2 - \tau_s^4\eta_0}{a} + \frac{a^2 - 2a\tau_s^2\eta_0 + \tau_s^4\eta_0^2}{a\eta_\infty} \right) \frac{da}{\eta_\infty^2}; \quad (87)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left(\frac{a\tau_s^2 - \tau_s^4\eta_0}{a} + \frac{a^2 - 2a\tau_s^2\eta_0 + \tau_s^4\eta_0^2}{a\eta_\infty} \right) \frac{da}{\eta_\infty^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{a\tau_s^2}{a} - \frac{\tau_s^4\eta_0}{a} + \frac{a^2}{a\eta_\infty} - \frac{2a\tau_s^2\eta_0}{a\eta_\infty} + \frac{\tau_s^4\eta_0^2}{a\eta_\infty} \right) \frac{da}{\eta_\infty^2}; \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left(\frac{a\tau_s^2}{a} - \frac{\tau_s^4\eta_0}{a} + \frac{a^2}{a\eta_\infty} - \frac{2a\tau_s^2\eta_0}{a\eta_\infty} + \frac{\tau_s^4\eta_0^2}{a\eta_\infty} \right) \frac{da}{\eta_\infty^2} \\ &= \frac{1}{2\eta_\infty^2} \int \left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} + \frac{\tau_s^4\eta_0^2}{a\eta_\infty} - \frac{\tau_s^4\eta_0}{a} + \frac{a}{\eta_\infty} \right) da \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\eta_\infty^2} \int \left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} + \frac{\tau_s^4\eta_0^2}{a\eta_\infty} - \frac{\tau_s^4\eta_0}{a} + \frac{a}{\eta_\infty} \right) da \\ &= \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) \int da + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \int \frac{da}{a} + \frac{1}{\eta_\infty} \int ada \right]; \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) \int da + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \int \frac{da}{a} + \frac{1}{\eta_\infty} \int ada \right] \\ &= \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) a + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[a] + \frac{a^2}{2\eta_\infty} \right] + C \end{aligned} \quad (91)$$

Se realiza una serie de pasos algebraicos y se obtiene el valor de la integral de la Ec. (91) En esta expresión se sustituyen los valores originales.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) a + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[a] + \frac{a^2}{2\eta_\infty} \right] \\
&= \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty(u) + \tau_s^2\eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty(u) + \tau_s^2\eta_0] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\eta_\infty(u) + \tau_s^2\eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right]; \tag{92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) a + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[a] + \frac{a^2}{2\eta_\infty} \right] \\
&= \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty\tau^2 + \tau_s^2\eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty\tau^2 + \tau_s^2\eta_0] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\eta_\infty\tau^2 + \tau_s^2\eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right]; \tag{93}
\end{aligned}$$

Se sustituye esta expresión en la ecuación original y se evalúa:

$$\begin{aligned}
& \left[\left[\frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty\tau^2 + \tau_s^2\eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty\tau^2 + \tau_s^2\eta_0] \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{(\eta_\infty\tau^2 + \tau_s^2\eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right] \right] \right]_0^{\tau_w} \\
& = \frac{\tau_s^2}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty\tau_w^2 + \tau_s^2\eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty\tau_w^2 + \tau_s^2\eta_0] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\eta_\infty\tau_w^2 + \tau_s^2\eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right] \\
& - \frac{\tau_s^2}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty 0^2 + \tau_s^2\eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4\eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4\eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty 0^2 + \tau_s^2\eta_0] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\eta_\infty 0^2 + \tau_s^2\eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right]
\end{aligned} \tag{94}$$

$$\left[\left[\frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty \tau^2 + \tau_s^2 \eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4 \eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4 \eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty \tau^2 + \tau_s^2 \eta_0] \right. \right. \right. \right. \quad (95)$$

$$\left. \left. \left. + \frac{(\eta_\infty \tau^2 + \tau_s^2 \eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right] \right] \right]_0^{\tau_w}$$

$$= \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4 \eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4 \eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0] \right.$$

$$\left. + \frac{(\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right]$$

$$- \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\tau_s^2 \eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4 \eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4 \eta_0 \right) \text{Ln}[\tau_s^2 \eta_0] + \frac{(\tau_s^2 \eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right];$$

$$\frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4 \eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^2 \eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0] + \frac{(\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right] \quad (96)$$

$$- \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\tau_s^2 \eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4 \eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4 \eta_0 \right) \text{Ln}[\tau_s^2 \eta_0] + \frac{(\tau_s^2 \eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right]$$

$$= \frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty \tau_w^2) + \left(\frac{\tau_s^4 \eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4 \eta_0 \right) \text{Ln} \left[\frac{\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0}{\tau_s^2 \eta_0} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{(\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0)^2 - \tau_s^4 \eta_0^2}{2\eta_\infty} \right]$$

Realizando varios pasos y sustituyendo en el valor de la integral en la Ec. (78) se llega al valor de la ecuación de Rabinowitsch-Mooney para el modelo de Reiner Philippoff

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty \tau^2 + \tau_s^2 \eta_0) + \left(\frac{\tau_s^4 \eta_0^2}{\eta_\infty} - \tau_s^4 \eta_0 \right) \text{Ln}[\eta_\infty \tau^2 + \tau_s^2 \eta_0] + \frac{(\eta_\infty \tau^2 + \tau_s^2 \eta_0)^2}{2\eta_\infty} \right] \right]_0^{\tau_w} \quad (97)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left(\frac{1}{2\eta_\infty^2} \left[\left(\tau_s^2 - \frac{2\tau_s^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) (\eta_\infty \tau_w^2) + \tau_s^4 \left(\frac{\eta_0^2}{\eta_\infty} - \eta_0 \right) \text{Ln} \left[\frac{\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0}{\tau_s^2 \eta_0} \right] + \frac{(\eta_\infty \tau_w^2 + \tau_s^2 \eta_0)^2 - \tau_s^4 \eta_0^2}{2\eta_\infty} \right] \right) \quad (98)$$

Una representación más sencilla puede ser

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{f(\tau_w)}{\tau_w^3} \quad (99)$$

El valor de esfuerzo en la pared se obtiene fácilmente sustituyendo la función esfuerzo en la pared $f(\tau_w)$ en la siguiente expresión

$$\tau_w = \frac{-\nabla_z P}{2} R = \frac{\pi R^3}{Q} \frac{f(\tau_w)}{\tau_w^2} = \frac{R}{\langle V_z \rangle} \frac{f(\tau_w)}{\tau_w^2} \quad (100)$$

El Perfil de Velocidad de corte se obtiene sustituyendo (100) en la expresión (101)

$$\tau(r) = \tau_w \frac{r}{R} \quad (101)$$

$$\tau(r) = \frac{\pi R^3 f(\tau_w) r}{Q \tau_w^2 R} \quad (102)$$

Se Sustituye la expresión (101) en el diferencial de velocidad z con respecto al radio para el modelo de Reiner Philipoff (103) para obtener el valor $\dot{\gamma}(r)$ en base al esfuerzo en la pared con respecto al radio.

$$\frac{dV_z}{dr} = \frac{\tau}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2}} \quad (103)$$

$$\dot{\gamma}(r) = \frac{\tau_w \frac{r}{R}}{\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\tau_w \frac{r}{R}}{\tau_s}\right)^2}} \quad (104)$$

Viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de bulto $\eta_{PN}(C_b)$

Para obtener la viscosidad en condiciones de pared es necesario evaluar el sistema en las condiciones de concentración de bulto (C_b), como se ve a continuación la función esfuerzo en la pared, presentada en la Ec. (99), se evalúa e condiciones de bulto.

$$f(\tau_w(C_b)) = \frac{\tau_{sC_b}^2}{2\eta_{\infty C_b}^2} \left[\left(1 - \frac{2\tau_{sC_b}^2 \eta_{0C_b}}{\eta_{\infty C_b}} \right) (\eta_{\infty C_b} \tau_w^2) \right. \\ \left. + \left(\frac{\tau_{sC_b}^4 \eta_{0C_b}^2}{\eta_{\infty C_b}} - \tau_{sC_b}^2 \eta_{0C_b} \right) \text{Ln} \left[\frac{\eta_{\infty C_b} \tau_w^2 + \tau_{sC_b}^2 \eta_{0C_b}}{\tau_{sC_b}^2 \eta_{0C_b}} \right] \right. \\ \left. + \frac{(\eta_{\infty C_b} \tau_w^2 + \tau_{sC_b}^2 \eta_{0C_b})^2 - \tau_{sC_b}^4 \eta_{0C_b}^2}{2\eta_{\infty C_b}} \right] \quad (105)$$

Luego se sustituye (105) en la expresión de viscosidad newtoniana equivalente (106), se debe considerar que la velocidad media $\langle V_z(C_b) \rangle$ corresponde a las propiedades de concentración de bulto.

$$\eta_{PN}(C_b) = \frac{\tau_w(C_b)}{(8\langle V_z(C_b) \rangle/d)} = \frac{R^2}{4\langle V_z(C_b) \rangle^2} \frac{f(\tau_w(C_b))}{\tau_w^2} \quad (106)$$

Viscosidad aparente en concentración de pared $\eta_{ab}(C_w)$

Para obtener la viscosidad en condiciones de pared es necesario evaluar los esfuerzos en las condiciones de concentración en la pared (C_w) de forma similar a lo presentado en la Ec. (105) solo que, con propiedades correspondientes a la concentración de pared, por lo que el valor de la función $f(\tau_w)$ es:

$$\begin{aligned} f(\tau_w(C_w)) = & \frac{\tau_{sC_w}^2}{2\eta_{\infty C_w}^2} \left[\left(1 - \frac{2\tau_{sC_w}^2 \eta_{0C_w}}{\eta_{\infty C_w}} \right) (\eta_{\infty C_w} \tau_w^2) \right. \\ & + \left(\frac{\tau_{sC_w}^4 \eta_{0C_w}^2}{\eta_{\infty C_w}} - \tau_{sC_w}^2 \eta_{0C_w} \right) \text{Ln} \left[\frac{\eta_{\infty C_w} \tau_w^2 + \tau_{sC_w}^2 \eta_{0C_w}}{\tau_{sC_w}^2 \eta_{0C_w}} \right] \\ & \left. + \frac{(\eta_{\infty C_w} \tau_w^2 + \tau_{sC_w}^2 \eta_{0C_w})^2 - \tau_{sC_w}^4 \eta_{0C_w}^2}{2\eta_{\infty C_w}} \right] \end{aligned} \quad (107)$$

Luego se sustituye (107) en la expresión de viscosidad aparente en la pared (108).

$$\eta_{ab}(C_w) = \frac{\tau_w(C_w)}{\dot{\gamma}_{w(C_w)}} \quad (108)$$

$$\eta_{ab}(C_w) = \frac{\frac{\pi R^3 f(\tau_w(C_w))}{Q \tau_w^2}}{\left(\frac{\frac{\tau w}{\eta_{\infty C_w} + \frac{\eta_{0 C_w} - \eta_{\infty C_w}}{2}}}{1 + \left(\frac{\tau_w}{\tau_{s C_w}}\right)^2} \right)} \quad (109)$$

$$\eta_{ab}(C_w) = \frac{\frac{\pi R^3 \langle V_{z(C_w)} \rangle f(\tau_w(C_w))}{\tau_w^2}}{\left(\frac{\frac{\tau w}{\eta_{\infty C_w} + \frac{\eta_{0 C_w} - \eta_{\infty C_w}}{2}}}{1 + \left(\frac{\tau_w}{\tau_{s C_w}}\right)^2} \right)} \quad (110)$$

$$\eta_{ab}(C_w) = \frac{\frac{R \langle V_{z(C_w)} \rangle f(\tau_w(C_w))}{\tau_w^2}}{\left(\frac{\frac{\tau w}{\eta_{\infty C_w} + \frac{\eta_{0 C_w} - \eta_{\infty C_w}}{2}}}{1 + \left(\frac{\tau_w}{\tau_{s C_w}}\right)^2} \right)} \quad (111)$$

$$\eta_{ab}(C_w) = \frac{f(\tau_w(C_w))R \left(\eta_{\infty C_w} + \frac{(\eta_{0C_w} - \eta_{\infty C_w})\tau_{sC_w}^2}{\tau_{sC_w}^2 + \tau_w^2} \right)}{\langle V_z(C_w) \rangle \tau_w^3} \quad (112)$$

Realizando varios pasos y simplificándose se obtiene el valor de la viscosidad aparente en la pared a condiciones de proceso para el modelo de Reiner Philippoff (112)

Coeficiente de transferencia para un fluido de Reiner Philippoff: K_c

Sustituyendo los valores de la viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de bulto $\mu_{PN}(C_b)$ y el de la viscosidad aparente en la pared $\mu_a(C_w)$, en el Coeficiente de transferencia de masa propuesto por Charcosset y Choplin, se obtiene el coeficiente de transferencia para un fluido de Reiner Philippoff: .

$$K_c = \left(\frac{3D^2}{4L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{8 \langle V_z C_b \rangle}{d} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta_{PN}(C_b)}{\eta_{ab}(C_w)} \right)^{0.27} \quad (113)$$

Donde se sabe que los valores de viscosidad en condiciones de bulto y aparentes corresponden a la Ec. (106) y (112).

APENDICE B

En este apéndice se va a deducir el coeficiente de transferencia de masa para el modelo Reológico de Bautista Mateo Puig BMP

DEDUCCION DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA K_c EN LA ULTRAFILTRACION PARA EL MODELO DE BAUTISTA MATEO PUIG BMP

Flujo de corte simple en estado estacionario

Para un flujo de corte simple, las ecuaciones de Fredrickson y Maxwell se pueden expresar como las siguientes ecuaciones escalares:

Ecuación cinética de Fredrickson

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + K(\varphi_\infty - \varphi)\underline{\underline{\tau}}:\underline{\underline{D}} \quad (114)$$

Donde el valor de $\underline{\underline{\tau}}$ y $\underline{\underline{D}}$ en la Ec. (114) es:

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (115)$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} D_{rr} & D_{r\theta} & D_{rz} \\ D_{\theta r} & D_{\theta\theta} & D_{\theta z} \\ D_{zr} & D_{z\theta} & D_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\dot{\gamma} \quad (116)$$

Al considerar condiciones de flujo cortante simple la ecuación de Fredrickson (114) queda de la manera siguiente

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + K(\varphi_\infty - \varphi)\tau_{rz}\dot{\gamma}; \quad (117)$$

Aplicando las condiciones del proceso y considerar un flujo en estado estacionario las derivadas temporales $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ se cancelan y la ecuación de Fredickson queda de la siguiente manera:

$$0 = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + K(\varphi_\infty - \varphi)\tau_{rz}\dot{\gamma}; \quad (118)$$

De la cual se despeja el valor de τ_{rz} con múltiples pasos algebraicos como se ve en las expresiones de (119) a (123).

$$-\frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) = k(\varphi_\infty - \varphi)\tau_{rz}\dot{\gamma}; \quad (119)$$

$$-\varphi_0 + \varphi = k\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\tau_{rz}\dot{\gamma}; \quad (120)$$

$$\varphi\left(-\frac{\varphi_0}{\varphi} + 1\right) = \varphi k\lambda\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi} - 1\right)\tau_{rz}\dot{\gamma}; \quad (121)$$

$$\left(-\frac{\varphi_0}{\varphi} + 1\right) = k\lambda\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi} - 1\right)\tau_{rz}\dot{\gamma}; \quad (122)$$

$$\frac{\left(-\frac{\varphi_0}{\varphi} + 1\right)}{k\lambda\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi} - 1\right)\dot{\gamma}} = \tau_{rz}; \quad (123)$$

Considerando a la viscosidad como el inverso a la fluidez ($\eta^{-1} \equiv \varphi$), y multiplicando el denominador por τ_{rz} (123) queda de la manera siguiente:

$$0 = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + K(\varphi_\infty - \varphi)\tau_{rz}\dot{\gamma}; \quad (124)$$

El modelo de Maxwell convectivo superior también se ajusta a condiciones del proceso, este modelo es el siguiente

$$\underline{\underline{\tau}} + \delta(r, t)\underline{\underline{\tau}} = \frac{2D}{\varphi(r, t)} \underline{\underline{\tau}} \quad (125)$$

Donde las variables $\delta, \underline{\underline{\tau}}^{\nabla}$ del modelo de Maxwell convectivo (125) corresponden a:

$$\delta = (G_0\varphi)^{-1} \quad (126)$$

$$\underline{\underline{\tau}}^{\nabla} = \frac{D}{Dt}\underline{\underline{\tau}} - \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\nabla V}} + \underline{\underline{\nabla V}}^T \cdot \underline{\underline{\tau}} \right) \quad (127)$$

A su vez las expresiones descritas en la Ec.(127) corresponden a

$$\frac{D}{Dt}\underline{\underline{\tau}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla V}} \right) \underline{\underline{\tau}} \quad (128)$$

$$\underline{\underline{\nabla V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (129)$$

$$\underline{\underline{\nabla V}}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (130)$$

Sustituyendo (126) y (127) en (125) se llega a la expresión

$$\underline{\underline{\tau}} + \frac{1}{G_0\varphi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{\underline{\nabla V}} \right) \underline{\underline{\tau}} - \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\nabla V}} + \underline{\underline{\nabla V}}^T \cdot \underline{\underline{\tau}} \right) \right] = \frac{2 \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma} \right)}{\varphi} \quad (131)$$

A condiciones de flujo cortante simple la Ec. (131) queda de la manera siguiente

$$\tau_{rz} + \frac{1}{G_0\varphi} \frac{d\tau_{rz}}{dt} + \frac{\tau_{zz}\dot{\gamma}}{G_0\varphi} = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi} \quad (132)$$

El valor de la derivada material se iguala a cero debido a que se encuentra en estado estacionario, se desprecia el valor de τ_{zz} al ser muy pequeño, por lo que:

$$\tau_{rz} + \frac{1}{G_0\varphi} [0 - 0] = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi} \quad (133)$$

La Ecuación de Maxwell en estado estacionario y flujo cortante simple para el modelo de BMP en las condiciones de este proceso corresponde a:

$$\tau_{rz} = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi} = \dot{\gamma}\eta \quad (134)$$

Igualando el modelo de Maxwell convectivo superior (134) y la ecuación de Fredrickson (123) a condiciones de flujo cortante simple en estado estacionario se tiene lo siguiente:

$$\frac{(-\frac{\eta}{\eta_0} + 1)}{k\lambda\left(\frac{\eta}{\eta_\infty} - 1\right)\dot{\gamma}} = \dot{\gamma}\eta \quad (135)$$

A partir de la igualdad de la Ec.(135) se busca despejar el valor de la viscosidad η con los siguientes pasos algebraicos

$$\left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right) = k\lambda\left(\frac{\eta^2}{\eta_\infty} - \eta\right)\dot{\gamma}^2 \quad (136)$$

$$1 - \frac{\eta}{\eta_0} + \eta k\lambda\dot{\gamma}^2 - \frac{\eta^2}{\eta_\infty} k\lambda\dot{\gamma}^2 = 0 \quad (137)$$

$$\eta^2\left(-\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2}{\eta_\infty}\right) + \eta\left(k\lambda\dot{\gamma}^2 - \frac{1}{\eta_0}\right) + 1 = 0; \quad (138)$$

$$\eta^2 \left(-\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2}{\eta_\infty} \right) + 1 = -\eta \left(k\lambda\dot{\gamma}^2 - \frac{1}{\eta_0} \right); \quad (139)$$

$$\eta^2 \left(-\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2}{\eta_\infty} \right) + 1 = -\eta \left(k\lambda\dot{\gamma}^2 - \frac{1}{\eta_0} \right) \frac{\eta_0}{\eta_0} \quad (140)$$

$$\eta^2 \left(-\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) + \eta_0 = -\eta(k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 - 1) \quad (141)$$

$$0 = -\eta(k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 - 1) - \eta^2 \left(-\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) - \eta_0 \quad (142)$$

$$0 = \eta^2 \left(\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0}{\eta_\infty} \right) + \eta(-k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1) - \eta_0 \quad (143)$$

La Viscosidad en estado estacionario se obtiene de la raíz no negativa de la ecuación anterior.

$$\eta = \frac{-(-k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1) + \sqrt{(-k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 - 4(-\eta_0)\left(\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0}{\eta_\infty}\right)}}{2\left(\frac{k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0}{\eta_\infty}\right)} \quad (144)$$

$$\eta_{ss} = \frac{k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 - 1 + \sqrt{(-k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 + 4k\lambda\dot{\gamma}^2\eta_0 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}}}{2k\lambda\dot{\gamma}^2 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}} \quad (145)$$

Considerando el cambio de variable $\beta = k\lambda$, la expresión (145) queda como:

$$\eta_{ss} = \frac{\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 - 1 + \sqrt{(-\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 + 4\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}}}{2\beta\dot{\gamma}^2 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}}; \quad (146)$$

Para obtener el valor de rapidez de deformación $\dot{\gamma}$ es necesario despejarlo del valor de viscosidad para estado estacionario del modelo BMP

$$\eta_{ss} = \frac{\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 - 1 + \sqrt{(-\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 + 4\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}}}{2\beta\dot{\gamma}^2 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}}; \quad (147)$$

$$\eta_{ss} 2\beta\dot{\gamma}^2 \frac{\eta_0}{\eta_\infty} = \beta\dot{\gamma}^2\eta_0 - 1 + \sqrt{(-\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 + 4\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}} \quad (148)$$

$$2\beta\dot{\gamma}\tau \frac{\eta_0}{\eta_\infty} = \beta\dot{\gamma}^2\eta_0 - 1 + \sqrt{(-\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 + 4\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}} \quad (149)$$

$$2\beta\dot{\gamma}\tau \frac{\eta_0}{\eta_\infty} - \beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1 = \sqrt{(-\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 + 4\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 \frac{\eta_0}{\eta_\infty}} \quad (150)$$

$$(2\beta\dot{\gamma}\tau \frac{\eta_0}{\eta_\infty} - \beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 = (-\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 + 1)^2 + 4\beta\dot{\gamma}^2\eta_0 \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \quad (151)$$

$$4\beta\dot{\gamma}\tau \frac{\eta_0}{\eta_\infty} + 4\beta^2\dot{\gamma}^2\tau^2 \frac{\eta_0^2}{\eta_\infty^2} - 4\beta^2\dot{\gamma}^3\tau \frac{\eta_0^2}{\eta_\infty} = +4\beta\dot{\gamma}^2 \frac{\eta_0^2}{\eta_\infty} \quad (152)$$

$$\tau + \beta \dot{\gamma} \tau^2 \frac{\eta_0}{\eta_\infty} - \beta \dot{\gamma}^2 \tau \eta_0 = \dot{\gamma} \eta_0 \quad (153)$$

$$\tau + \beta \dot{\gamma} \tau^2 \frac{\eta_0}{\eta_\infty} - \beta \dot{\gamma}^2 \tau \eta_0 - \dot{\gamma} \eta_0 = 0 \quad (154)$$

$$\dot{\gamma}^2 (-\beta \tau \eta_0) + \dot{\gamma} \left(\beta \tau^2 \frac{\eta_0}{\eta_\infty} - \eta_0 \right) + \tau = 0 \quad (155)$$

$$\dot{\gamma}^2 (-\beta \tau) + \dot{\gamma} \left(\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_\infty} - 1 \right) = \frac{-\tau}{\eta_0} \quad (156)$$

$$0 = \dot{\gamma}^2 (\beta \tau) + \dot{\gamma} \left(-\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_\infty} + 1 \right) - \frac{\tau}{\eta_0} \quad (157)$$

De la raíz no negativa de la ecuación anterior (157) se puede obtener la velocidad de deformación para el modelo BMP

$$\dot{\gamma}_{SS} = \frac{\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \tau} \quad (158)$$

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD MEDIA DEL SISTEMA

Para el modelo de BMP el valor de $\left(-\frac{dV_z}{dr}\right)$ es igual a la ecuación siguiente ($\dot{\gamma}_{SS}$) por lo que al sustituir la Ec.(45) se tiene

$$\dot{Y}_{SS} = \frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)} \quad (159)$$

La Ec. (158) se integra de la manera siguiente:

$$\int dV_z = - \int dr \frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)} \quad (160)$$

$$\int dV_z = - \int \left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})}{2\beta\eta_\infty} - \frac{1}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)} \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} \right) dr \quad (161)$$

$$V_z(r) = - \left[\int \frac{(\nabla_z P)r}{4\eta_\infty} dr - \int \frac{1}{\beta \nabla_z P r} dr + \int \frac{1}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)} \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr \right] \quad (162)$$

$$V_z(r) = \quad (163)$$

$$-\left[\frac{(\nabla_Z P)r^2}{8\eta_\infty} - \frac{1}{\beta \nabla_Z P} \text{Ln}[r] + C + \int \frac{1}{2\beta \left(\tau_w \frac{r}{R}\right)} \sqrt{\left(-\beta \frac{\left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr \right]$$

Donde la expresión de la derecha de la Ec. (163) se resuelve de la manera siguiente

$$\int \frac{1}{2\beta (\nabla_Z P) \frac{r}{2}} \sqrt{\left(-\beta \frac{\left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr \quad (164)$$

Realizando el cambio de variable $X = \beta \frac{\left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2}{\eta_\infty}$, $X\eta_\infty = \beta \left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2$, $dX = \frac{2\beta r \left(\nabla_Z P\right)^2}{\eta_\infty} dr$, $\frac{dX\eta_\infty}{2\beta r \left(\nabla_Z P\right)^2} = dr$, y sustituyendo, $\varphi_r = \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} =$

$\frac{\eta_\infty}{\eta_0}$, en la expresión se tiene.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{2\beta (\nabla_Z P) \frac{r}{2}} \sqrt{\left(-\beta \frac{\left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr \\ &= \frac{1}{2\beta} \int \frac{1}{(\nabla_Z P) \frac{r}{2}} \sqrt{(-X + 1)^2 + 4X\varphi_r} \frac{dX\eta_\infty}{2\beta r \left(\frac{\nabla_Z P}{2}\right)^2}; \end{aligned} \quad (165)$$

$$\frac{1}{2\beta} \int \frac{1}{(\nabla_Z P) \frac{r}{2}} \sqrt{(-X + 1)^2 + 4X\varphi_r} \frac{dX\eta_\infty}{2\beta r \left(\frac{\nabla_Z P}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\beta} \int \frac{\eta_\infty}{(\nabla_Z P)\beta \frac{\left(\nabla_Z P \frac{r}{2}\right)^2}{\eta_\infty}} \sqrt{(-X + 1)^2 + 4X\varphi_r} dX; \quad (166)$$

$$\frac{1}{2\beta} \int \frac{\eta_{\infty}}{(\nabla_z P) \beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}}} \sqrt{(-X+1)^2 + 4X\varphi_r} dX = \frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_z P)} \int \frac{1}{X} \sqrt{(-X+1)^2 + 4X\varphi_r} dX \quad (167)$$

$$\frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_z P)} \int \frac{1}{X} \sqrt{(-X+1)^2 + 4X\varphi_r} dX = \frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_z P)} \int \frac{1}{X} \sqrt{X^2 - 2X + 1 + 4X\varphi_r} dX \quad (168)$$

$$\frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_z P)} \int \frac{1}{X} \sqrt{X^2 - 2X + 1 + 4X\varphi_r} dX = \frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_z P)} \int \frac{1}{X} \sqrt{X^2 + X(4\varphi_r - 2) + 1} dX \quad (169)$$

Realizando varios pasos algebraicos se llega a la expresión (169), De la cual se completa el trinomio cuadrado perfecto de la expresión dentro de la raíz cuadrada de la manera siguiente:

$$\sqrt{X^2 + X(4\varphi_r - 2) + 1} = \sqrt{X^2 + X(4\varphi_r - 2) + \left(\frac{1}{2}(4\varphi_r - 2)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(4\varphi_r - 2)\right)^2 + 1}; \quad (170)$$

Sustituyendo (170) en (169) se llega a

$$\frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_z P)} \int \frac{1}{X} \sqrt{X^2 + X(4\varphi_r - 2) + (2\varphi_r - 1)^2 - (2\varphi_r - 1)^2 + 1} dX \quad (171)$$

La expresión de la dentro de la raíz de(171) se desarrolla y factora de la manera siguiente

$$X^2 + X(4\varphi_r - 2) + (2\varphi_r - 1)^2 - (2\varphi_r - 1)^2 + 1 = (X + 2\varphi_r - 1)^2 - (2\varphi_r - 1)^2 + 1; \quad (172)$$

$$(X + 2\varphi_r - 1)^2 - (4\varphi_r^2 - 4\varphi_r + 1) + 1 = (X + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r^2 - 4\varphi_r); \quad (173)$$

Sustituyendo (175) en (171) se tiene:

$$\frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\bar{V}_z P)} \int \frac{1}{X} \sqrt{(X + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r^2 - \varphi_r)} dX; \quad (174)$$

Se realiza la siguiente sustitución trigonométrica $v^2 + a^2 \rightarrow v = a * \tan\theta$, donde v^2, a^2, v, a corresponden a:

$$v^2 = (X + 2\varphi_r - 1)^2; \quad a^2 = 4(\varphi_r^2 - \varphi_r);$$

$$v = X + 2\varphi_r - 1; \quad a = 2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)};$$

A su vez $\tan\theta$ y las funciones trigonométricas para este cambio de variable son:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}}{\sqrt{(X + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r^2 - \varphi_r)}}; \\ \sin\theta &= \frac{X + 2\varphi_r - 1}{\sqrt{(X + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r^2 - \varphi_r)}}; \\ \tan\theta &= \frac{X + 2\varphi_r - 1}{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}}; \end{aligned}$$

Se despeja el valor de x para el cambio de variable a partir de la función $\tan\theta$:

$$X + 2\varphi_r - 1 = 2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\tan\theta;$$

$$dX = 2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\sec^2\theta d\theta;$$

$$(X + 2\varphi_r - 1)^2 = 4(\varphi_r^2 - \varphi_r)\tan^2\theta$$

$$X = 2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\tan\theta + 1 - 2\varphi_r$$

Sustituyendo el cambio de variable en (174) se obtiene la expresión:

$$\frac{\eta_\infty}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{1}{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\tan\theta + 1 - 2\varphi_r} \sqrt{4(\varphi_r^2 - \varphi_r)\tan^2\theta + 4(\varphi_r^2 - \varphi_r)} 2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\sec^2\theta d\theta \quad (175)$$

$$\frac{\eta_\infty}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\sec^2\theta}{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\tan\theta + 1 - 2\varphi_r} \sqrt{4(\varphi_r^2 - \varphi_r)\tan^2\theta + 4(\varphi_r^2 - \varphi_r)} d\theta \quad (176)$$

$$\frac{\eta_\infty}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\sec^2\theta * 2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}}{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\tan\theta + 1 - 2\varphi_r} \sqrt{\tan^2\theta + 1} d\theta \quad (177)$$

Se simplifica en parte (175) y luego se usa la identidad trigonométrica, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$$\frac{\eta_\infty}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{4(\varphi_r^2 - \varphi_r)\sec^2\theta}{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}\tan\theta + 1 - 2\varphi_r} \sqrt{\sec^2\theta} d\theta \quad (178)$$

$$\frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{4(\varphi_r^2 - \varphi_r) \sec^3 \theta}{2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r) \tan \theta + 1 - 2\varphi_r}} d\theta \quad (179)$$

$$\frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{4(\varphi_r^2 - \varphi_r) \sec \theta \sec^2 \theta}{\left(2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r) \tan \theta + 1 - 2\varphi_r}\right)} d\theta \quad (180)$$

Se realizan varios pasos algebraicos a partir de (177) y se cambian los valores $4(\varphi_r^2 - \varphi_r)$ y $2\sqrt{(\varphi_r^2 - \varphi_r)}$ por la variable y^2 y y respectivamente

$$\frac{\eta_{\infty}}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{y^2 \sec \theta \sec^2 \theta}{(\cos^2 \theta)(y \tan \theta + 1 - 2\varphi_r)} d\theta \quad (181)$$

$$\frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \frac{\sec \theta \sec^2 \theta}{(y \tan \theta + 1 - 2\varphi_r)} d\theta \quad (182)$$

$$\frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \sec \theta \left[\frac{\sec^2 \theta}{(y \tan \theta + 1 - 2\varphi_r)} + \right] d\theta \quad (183)$$

La equivalencia $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ se sustituye en (183) y se simplifica en lo más posible el divisor de la integral

$$\frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_z P)} \int \sec\theta \left[\frac{\sec^2\theta}{\left(\frac{y\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta} + 1 - 2\varphi_r\right)} \right] d\theta \quad (184)$$

$$\frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_z P)} \int \sec\theta \left[\frac{\sec^2\theta}{\left(\frac{y\text{Sen}\theta + (1 - 2\varphi_r)\text{Cos}\theta}{\text{Cos}\theta}\right)} \right] d\theta \quad (185)$$

$$\frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_z P)} \int \text{Cos}\theta \sec\theta \left[\frac{\sec^2\theta}{y\text{Sen}\theta + (1 - 2\varphi_r)\text{Cos}\theta} + \right] d\theta \quad (186)$$

$$\frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_z P)} \int \left[\frac{\sec^2\theta}{y\text{Sen}\theta + (1 - 2\varphi_r)\text{Cos}\theta} \right] d\theta \quad (187)$$

Usando el teorema de Adición Armónico para Senos y cosenos [$a\text{Sen}x + b\text{Cos}x = c\text{Tan}(x + \alpha)$] considera $a = y$, $b = (1 - 2\varphi_r)$

donde $c^2 = a^2 + b^2$, se

$$\begin{aligned} \text{Cos}\alpha &= \frac{(1-2\varphi_r)}{\sqrt{y^2+(1-2\varphi_r)^2}}; \\ \text{Sin}\alpha &= \frac{-y}{\sqrt{y^2+(1-2\varphi_r)^2}}; \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tan}\alpha = \frac{-y}{(1 - 2\varphi_r)}}$$

Realizando esta sustitución se llega a la Ec.(188) y luego se sacan los valores constantes de la integral llegando a la Ec.(189)

$$\frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \int \left[\frac{\text{Sec}^2\theta}{\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \text{Cos}(\theta + \alpha)} \right] d\theta \quad (188)$$

$$\frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_Z P)\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}} \int \left[\frac{\text{Sec}^2(\theta)}{\text{Cos}(\theta + \alpha)} \right] d\theta \quad (189)$$

Se sustituye la expresión dentro de la integral de (189) por $\frac{\text{Sec}^2(\theta)}{\text{Cos}(\theta + \alpha)} = \text{Csc}(\alpha)[- \text{Cot}(\alpha)\text{Sec}(\theta) + \text{Csc}(\alpha)\text{Sec}(\theta + \alpha) - \text{Sec}(\theta)\text{Tan}(\theta)]$;

$$\frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_Z P)\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}} \int \text{Csc}(\alpha)[- \text{Cot}(\alpha)\text{Sec}(\theta) + \text{Csc}(\alpha)\text{Sec}(\theta + \alpha) - \text{Sec}(\theta)\text{Tan}(\theta)] d\theta \quad (190)$$

$$\frac{\eta_\infty y^2 \text{Csc}(\alpha)}{2\beta(\nabla_Z P)\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}} \left[-\text{Cot}(\alpha) \int \text{Sec}(\theta) d\theta + \text{Csc}(\alpha) \int \text{Sec}(\theta + \alpha) d\theta - \int \text{Sec}(\theta)\text{Tan}(\theta) d\theta \right] \quad (191)$$

La integración de las tres expresiones de (191) se resuelve usando sus respectivas formulas

$$\frac{\eta_\infty y^2 \text{Csc}(\alpha)}{2\beta(\nabla_Z P)\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}} [-\text{Cot}(\alpha) \ln[\text{Sec}(\theta) + \text{Tan}(\theta)] + \text{Csc}(\alpha) \ln[\text{Sec}(\theta + \alpha) + \text{Tan}(\theta + \alpha)] - \text{Sec}[\theta]] + C \quad (192)$$

Después se regresan las expresiones a sus condiciones originales

$$\frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_Z P) \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}} \frac{\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}}{-y} \left[\frac{(1 - 2\varphi_r)}{y} \ln[\text{Sec}(\theta) + \text{Tan}(\theta)] \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}}{y} \ln[\text{Sec}(\theta + \alpha) + \text{Tan}(\theta + \alpha)] - \text{Sec}[\theta] \right]; \quad (193)$$

$$- \frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \left[(1 - 2\varphi_r) \ln[\text{Sec}(\theta) + \text{Tan}(\theta)] - \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln[\text{Sec}(\theta + \alpha) + \text{Tan}(\theta + \alpha)] - y \text{Sec}[\theta] \right]; \quad (194)$$

Usando las identidades $\left(\text{Tan}[A + B] = \frac{\text{Tan}(A) + \text{Tan}(B)}{1 - \text{Tan}(A)\text{Tan}(B)} \right)$ y $\left(\text{Sec}[A + B] = \frac{\text{Sec}(A)\text{Sec}(B)\text{Csc}(A)\text{Csc}(B)}{\text{Csc}(A)\text{Csc}(B) - \text{Sec}(A)\text{Sec}(B)} \right)$ en (194)

$$= - \frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \left[(1 - 2\varphi_r) \ln[\text{Sec}(\theta) + \text{Tan}(\theta)] \right. \\ \left. - \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\text{Sec}(\theta)\text{Sec}(\alpha)\text{Csc}(\theta)\text{Csc}(\alpha)}{\text{Csc}(\theta)\text{Csc}(\alpha) - \text{Sec}(\theta)\text{Sec}(\alpha)} + \frac{\text{Tan}(\theta) + \text{Tan}(\alpha)}{1 - \text{Tan}(\theta)\text{Tan}(\alpha)} \right] - y \text{Sec}[\theta] \right]; \quad (195)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \left[(1 - 2\varphi_r) \ln[\text{Sec}(\theta) + \text{Tan}(\theta)] \right. \\
&\quad - \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\text{Sec}(\theta) \frac{\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}}{(1 - 2\varphi_r)} \text{Csc}(\theta) \frac{\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}}{-y}}{\text{Csc}(\theta) \frac{\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}}{-y} - \text{Sec}(\theta) \frac{\sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}}{(1 - 2\varphi_r)}} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\text{Tan}(\theta) + \frac{-y}{(1 - 2\varphi_r)}}{1 - \text{Tan}(\theta) \frac{-y}{(1 - 2\varphi_r)}} \right] - y \text{Sec}[\theta] \right] \tag{196}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \left[(1 - 2\varphi_r) \ln \left[\frac{X + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{(X + 2\varphi_r - 1)^2 + y^2}}{y} \right] \right. \\
&\quad - \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{X - 1 - 2\varphi_r(X + 2\varphi_r - 2) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \sqrt{(X + 2\varphi_r - 1)^2 + y^2}}{Xy} \right] \\
&\quad \left. - \sqrt{(X + 2\varphi_r - 1)^2 + y^2} \right] \tag{197}
\end{aligned}$$

Sustituyendo la variable $X = \beta \frac{((\nabla_Z P)_z^r)^2}{\eta_\infty}$, en (197)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_z P)} \left(1 - 2\varphi_r\right) \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2}}{y} \right] \\
&- \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2\right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} y} \right] \\
&- \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2}
\end{aligned} \tag{198}$$

Luego se sustituye esta expresión en la ecuación original

$$\begin{aligned}
V_z(r) &= -\frac{(\nabla_z P)r^2}{8\eta_\infty} + \frac{1}{\beta\nabla_z P} \text{Ln}[r] \\
&+ \frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_z P)} \left[(1-2\varphi_r) \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2}}{y} \right] \right. \\
&- \sqrt{y^2 + (1-2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2\right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1-2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - y} \right] \\
&\left. - \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2} \right] + C
\end{aligned} \tag{199}$$

Siendo la Ec. (199) el perfil general de velocidades para el modelo de BMP que se obtiene tras varios pasos algebraicos, luego se evalúa en la condición de frontera (C.F 2) $V_z(R) = 0$, $r = R$.

Se despeja el valor de la constante de integración a partir de la Ec. (200)

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{(\nabla_z P)R^2}{8\eta_\infty} + \frac{1}{\beta \nabla_z P} \text{Ln}[R] \\
 &+ \frac{\eta_\infty y^2}{2\beta (\nabla_z P)} (1 - 2\varphi_r) \text{Ln} \left[\frac{\beta \frac{(\nabla_z P)R^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P)R^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2}}{y} \right] \\
 &- \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \text{Ln} \left[\frac{\beta \frac{(\nabla_z P)R^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{(\nabla_z P)R^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2\right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P)R^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2}}{\beta \frac{(\nabla_z P)R^2}{\eta_\infty} - y} \right] \\
 &- \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P)R^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)^2 + y^2} + C
 \end{aligned} \tag{200}$$

$$c = \frac{\tau_w R^2}{8\eta_\infty R} - \frac{1}{\beta \nabla_z P} \text{Ln}[R] - \frac{\eta_\infty y^2}{2\beta (\nabla_z P)} (1 - 2\varphi_r) \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{y} \right]$$

$$- \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2 \right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} y} \right] - \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}$$
(201)

Sustituyendo la constante de integración (Ec. (201)) se llega al perfil de velocidades particular para el modelo de BMP

$$\begin{aligned}
 V_z(r) &= -\frac{(V_z P)r^2}{8\eta_{\infty}} + \frac{1}{\beta V_z B} \ln[r] \\
 &+ \frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(V_z P)} \left[(1-2\varphi_r) \ln \left[\frac{\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{y}} \right] \right. \\
 &- \sqrt{y^2 + (1-2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 2 \right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1-2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}} y}} \right] - \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2} \left. \right] \\
 &- \left(\frac{\tau_w R^2}{8\eta_{\infty} R} - \frac{1}{\beta V_z B} \ln[R] \right. \\
 &- \frac{\eta_{\infty} y^2}{2\beta(V_z P)} \left[(1-2\varphi_r) \ln \left[\frac{\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{y}} \right] \right. \\
 &- \sqrt{y^2 + (1-2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_{\infty}} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 2 \right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1-2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_{\infty}} y}} \right] - \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_{\infty}} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2} \left. \right] \left. \right)
 \end{aligned} \tag{202}$$

$$\begin{aligned}
& V_z(r) \\
&= \frac{(\nabla_z P)(R^2 - r^2)}{8\eta_\infty} + \frac{1}{\beta \nabla_z P} \text{Ln} \left[\frac{r}{R} \right] \\
&+ \frac{\eta_\infty y^2}{2\beta(\nabla_z P)} (1 - 2\varphi_r) \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}} \right] \\
&- \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2 \right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2 \right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}} \right] \\
&+ \left[\sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2} \right]
\end{aligned} \tag{203}$$

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD MEDIA:

Se obtiene sustituyendo el perfil (203) en la ecuación

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R V_z(r) r dr \quad (204)$$

Que queda de siguiente manera al realizar la sustitución

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \left(\frac{(V_z P)(r^2 - R^2)}{8\eta_\infty} + \frac{1}{\beta V_z P} \ln \left[\frac{R}{r} \right] \right) + \frac{\eta_\infty y^2}{2\beta (V_z P)} (1 - 2\varphi_r) \ln \left[\frac{\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}} \right] - \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2} \ln \left[\frac{\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2 \right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}}{\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 - 2\varphi_r \left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 2 \right) - y^2 + \sqrt{y^2 + (1 - 2\varphi_r)^2}} \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}}{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2}} \right] + \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)^2 + y^2} \right) \quad (205)$$

Luego la Ec. (205) se integra por partes $u = V_z(r)$, $dv = r dr$

$$du = dr \frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)}; v = \frac{r^2}{2};$$

Al realizar este cambio para integrar por partes la integral queda de la manera siguiente:

$$\langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} \left[V_z(r) r^2 - \int \frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)} r^2 dr \right]_0^R \quad (206)$$

Donde la integral de la Ec. (206) se resuelve de la manera siguiente:

$$\frac{1}{2} \int \frac{\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left((\nabla_z P) \frac{r}{2}\right)} r^2 dr \quad (207)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)^2 - 1 + \sqrt{\left(-\beta \frac{(\nabla_Z P) r}{2} + 1 \right)^2 + 4\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)} r^2 dr \quad (208)$$

Donde la integral de la Ec. (208) se separa en tres integrales más sencillas para facilitar su resolución:

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{(\nabla_Z P) r^3}{4\eta_\infty} dr - \int \frac{r}{\beta(\nabla_Z P)} dr + \int r^2 \frac{\sqrt{\left(-\beta \frac{(\nabla_Z P) r}{2} + 1 \right)^2 + 4\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)} dr \right]; \quad (209)$$

$$\int \frac{(\nabla_Z P) r^3}{4\eta_\infty} dr - \int \frac{r}{\beta(\nabla_Z P)} dr + \int r^2 \frac{\sqrt{\left(-\beta \frac{(\nabla_Z P) r}{2} + 1 \right)^2 + 4\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)} dr \quad (210)$$

$$= \left[\frac{(\nabla_Z P) r^4}{16\eta_\infty} \right]_0^R - \left[\frac{r^2}{2\beta(\nabla_Z P)} \right]_0^R + \int \frac{r}{\beta(\nabla_Z P)} \sqrt{\left(-\beta \frac{(\nabla_Z P) r}{2} + 1 \right)^2 + 4\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2} \right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr; \quad (211)$$

Donde la integral con una raíz de la Ec. (211), más complicada se resuelve se resuelve a continuación:

$$\begin{aligned} & \int \frac{r}{\beta(\nabla_Z P)} \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_Z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr \\ &= \frac{1}{\beta(\nabla_Z P)} \int r \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_Z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr; \end{aligned} \quad (212)$$

Se empieza con el cambio de variables $\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} = u$; $\frac{\beta(\nabla_Z P)^2 r}{2\eta_\infty} dr = du$; $dr = du \frac{2\eta_\infty}{\beta(\nabla_Z P)^2 r}$; $\beta \left((\nabla_Z P) \frac{r}{2}\right)^2 = u\eta_\infty$;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta(\nabla_Z P)} \int r \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \left((\nabla_Z P) \frac{r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr \\ &= \frac{1}{\beta(\nabla_Z P)} \int r \sqrt{(-u + 1)^2 + 4u \frac{\eta_\infty}{\eta_0} * \frac{2\eta_\infty du}{\beta(\nabla_Z P)^2 r}}; \end{aligned} \quad (213)$$

$$\frac{1}{\beta(\nabla_Z P)} \int r \sqrt{(-u + 1)^2 + 4u \frac{\eta_\infty}{\eta_0} * \frac{2\eta_\infty du}{\beta(\nabla_Z P)^2 r}} = \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{(-u + 1)^2 + 4u\phi_r} du; \quad (214)$$

$$\frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{(-u + 1)^2 + 4u\phi_r} du = \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{u^2 - 2u + 1 + 4u\phi_r} du; \quad (215)$$

$$\frac{2\eta_{\infty}}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{u^2 - 2u + 1 + 4u\varphi_r} du = \frac{2\eta_{\infty}}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{u^2 + u(4\varphi_r - 2) + 1} du; \quad (216)$$

Se sacan los valores constantes de la expresión y tras varios pasos se completa el trinomio cuadrado perfecto

$$\frac{2\eta_{\infty}}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{u^2 + u(4\varphi_r - 2) + 1} du \quad (217)$$

$$= \frac{2\eta_{\infty}}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{u^2 + u(4\varphi_r - 2) + \left(\frac{1}{2}(4\varphi_r - 2)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(4\varphi_r - 2)\right)^2 + 1} du;$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\eta_{\infty}}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{u^2 + u(4\varphi_r - 2) + \left(\frac{1}{2}(4\varphi_r - 2)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(4\varphi_r - 2)\right)^2 + 1} du \\ & = \frac{2\eta_{\infty}}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{u^2 + u(4\varphi_r - 2) + (2\varphi_r - 1)^2 - (2\varphi_r - 1)^2 + 1} du \end{aligned} \quad (218)$$

Donde los valores dentro de la raíz en la Ec. (218) se desarrollan para obtener el trinomio perfecto

$$u^2 + u(4\varphi_r - 2) + (2\varphi_r - 1)^2 - (2\varphi_r - 1)^2 + 1 = (u + 2\varphi_r - 1)^2 - (2\varphi_r - 1)^2 + 1;$$

$$(u + 2\varphi_r - 1)^2 - (4\varphi_r^2 - 4\varphi_r + 1) + 1 = (u + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r - \varphi_r^2);$$

Sustituyendo en la integral se tiene:

$$\frac{2\eta_{\infty}}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{(u + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r - \varphi_r^2)} du \quad (219)$$

La e Ec. (219) puede resolverse a partir de la fórmula: $\int \sqrt{v^2 \pm a^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \text{Ln} \left[v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right] + C$

$$\sqrt{4(\varphi_r - \varphi_r^2)}$$

Al aplicar la formula se llega a la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{(u + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r - \varphi_r^2)} du \\ &= \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \left[\left[\frac{(u + 2\varphi_r - 1)}{2} \right] \sqrt{(u + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r - \varphi_r^2)} \right. \\ & \left. + \frac{4(\varphi_r - \varphi_r^2)}{2} \text{Ln} \left[(u + 2\varphi_r - 1) + \sqrt{(u + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r - \varphi_r^2)} \right] + C \right] \end{aligned} \quad (220)$$

Se regresa la Ec. (220) a sus valores originales, empezando al regresar la raíz a su forma previa al trinomio perfecto para reducir la longitud del resultado

$$\begin{aligned} & \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \int \sqrt{(u + 2\varphi_r - 1)^2 + 4(\varphi_r - \varphi_r^2)} du \\ &= \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \left[\left[\frac{(u + 2\varphi_r - 1)}{2} \right] \sqrt{(-u + 1)^2 + 4u\varphi_r} \right. \\ & \left. + \frac{4(\varphi_r - \varphi_r^2)}{2} \text{Ln} \left[(u + 2\varphi_r - 1) + \sqrt{(-u + 1)^2 + 4u\varphi_r} \right] + C \right] \end{aligned} \quad (221)$$

Al sustituir el valor original de u y simplificar de la Ec. (221) se tiene:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{r}{\beta(\nabla_Z P)} \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \left(\frac{(\nabla_Z P) r}{2}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}} dr & (222) \\
& = \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_Z P)^3} \left[\left[\frac{\left(\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)}{2} \right] \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4u\varphi_r} \right. \\
& \quad \left. + 2(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln} \left[\left(\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right) + \sqrt{\left(-\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta \frac{((\nabla_Z P) \frac{r}{2})^2}{\eta_\infty} \varphi_r} \right] + C \right];
\end{aligned}$$

Sustituyendo (222) en la expresión original la Ec. (206) se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle V_z \rangle = & \frac{2}{R^2} \left[V_z(r)r^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{(V_z P)r^4}{16\eta_\infty} - \left[\frac{r^2}{2\beta(V_z P)} \right] \right. \right. \\
 & + \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(V_z P)^3} \left[\left[\frac{\left(\beta \frac{((V_z P)r/2)^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P)r/2)^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4u\varphi_r} \right. \\
 & \left. \left. + 2(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln} \left[\left(\beta \frac{((V_z P)r/2)^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) + \sqrt{\left(\beta \frac{((V_z P)r/2)^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{((V_z P)r/2)^2}{\eta_\infty} \varphi_r} \right] \right] \right]_0^R \\
 & \left[\left[\frac{\tau^4}{8\eta_\infty} \right]_0^{\tau_w} - \left[\frac{\tau^2}{4\beta} \right]_0^{\tau_w} + \frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \left[\left[\frac{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \text{Ln} \left[\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} \right] \right]_0^{\tau_w} \right]
 \end{aligned} \tag{223}$$

Donde se evalúan los límites R y 0, de la integral para obtener el valor de la velocidad media.

$$\begin{aligned}
 \langle V_z \rangle = \frac{2}{R^2} & \left[V_z(r)r^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{(\nabla_z P)r^4}{16\eta_\infty} - \left[\frac{r^2}{2\beta(\nabla_z P)} \right] \right. \right. \\
 & + \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_z P)^3} \left[\left[\frac{\left(\beta \frac{(\nabla_z P)r^2}{2} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P)r^2}{2} - 1 \right)^2 + 4u\varphi_r} \right. \\
 & \left. \left. + 2(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln} \left[\left(\beta \frac{(\nabla_z P)r^2}{2} + 2\varphi_r - 1 \right) + \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P)r^2}{2} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{(\nabla_z P)r^2}{2} \varphi_r} \right] \right] \right]_0^R
 \end{aligned} \tag{224}$$

(225)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{R^2} \left[\frac{(\nabla_z P) R^4}{16\eta_\infty} - \left[\frac{R^2}{2\beta(\nabla_z P)} \right] \right. \\
&\quad + \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_z P)^3} \left[\left(\frac{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) R}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right) \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) R}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\varphi_r} \right. \\
&\quad \left. + 2(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln} \left[\left(\beta \frac{(\nabla_z P) R}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) + \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) R}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{(\nabla_z P) R}{\eta_\infty} \varphi_r} \right] \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_z P)^3} \left(\frac{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) 0}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right) \sqrt{(0-1)^2 + 0} + 2(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln} \left[(0 + 2\varphi_r - 1) + \sqrt{(0-1)^2 + 0} \right] \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle V_z \rangle = \frac{1}{R^2} & \left[\frac{(\nabla_z P) R^4}{16\eta_\infty} - \left[\frac{R^2}{2\beta(\nabla_z P)} \right] \right. \\
& + \frac{\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_z P)^3} \left[\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} \varphi_r} \right. \\
& \left. \left. + 4(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln} \left[\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) + \sqrt{\left(\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{((\nabla_z P) \frac{R}{2})^2}{\eta_\infty} \varphi_r} \right] \right] - \frac{\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_z P)^3} [2\varphi_r - 1 + 4(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln}[2\varphi_r]] \right]
\end{aligned}
\tag{226}$$

(227)

$$\begin{aligned}
 \langle V_z \rangle = \frac{1}{R^2} & \left[\frac{(\nabla_z P) R^4}{16\eta_\infty} - \left[\frac{R^2}{2\beta(\nabla_z P)} \right] \right. \\
 & + \frac{\eta_\infty}{\beta^2(\nabla_z P)^3} \left[1 - 2\varphi_r + \left(\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_0}} \right. \\
 & \left. \left. + 4(\varphi_r - \varphi_r^2) \text{Ln} \left[\frac{\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty}}}{2\varphi_r} \right] \right] \right]
 \end{aligned}$$

Tras evaluar y simplificando se llega a la velocidad media para el modelo BMP Ec. (228)

$$\begin{aligned}
 \langle V_z \rangle = & \frac{1}{16\beta^2(\nabla_z P)^3 R^2 \eta_\infty} \left[\beta^2 (\nabla_z P)^4 R^4 - 8\beta (\nabla_z P)^2 R^2 \eta_\infty \right. \\
 & + 4\eta_\infty \left[\eta_\infty(4 - 8\varphi_r) + (\eta_\infty(8\varphi_r - 4) + \beta(\nabla_z P)^2 R^2) \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_0}} \right. \\
 & \left. \left. + 16\eta_\infty(\varphi_r - \varphi_r^2) \ln \left[\frac{\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \frac{(\nabla_z P) \frac{R^2}{2}}{\eta_0}}}{2\varphi_r} \right] \right] \right]; \tag{228}
 \end{aligned}$$

Ecuación de Rabinowitsch-Mooney para el modelo de BMP(Bautista-Manero-Puig):

La ecuación de Rabinowitsch-Mooney sirve para expresar una ecuación constitutiva en función del esfuerzo en la pared:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau) d\tau \quad (229)$$

Para el modelo de BMP el valor de la ecuación de Rabinowitsch-Mooney es:

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \left(\frac{\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1)^2 + 4\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \tau} \right) d\tau \quad (230)$$

La resolución es similar al proceso para obtener la velocidad media para el modelo BMP y empieza igual con la separación de la Ec. (230) en integrales más sencillas.

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \frac{\beta \frac{\tau^3}{\eta_\infty} - \tau + \tau \sqrt{(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1)^2 + 4\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta} d\tau \quad (231)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \left(\beta \frac{\tau^3}{2\beta \eta_\infty} - \frac{\tau}{2\beta} + \frac{\tau}{2\beta} \sqrt{\left(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_0}} \right) d\tau \quad (232)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\int_0^{\tau_w} \frac{\tau^3}{2\eta_\infty} d\tau - \int_0^{\tau_w} \frac{\tau}{2\beta} d\tau + \int_0^{\tau_w} \frac{\tau}{2\beta} \sqrt{\left(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_0}} d\tau \right] \quad (233)$$

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\left[\frac{\tau^4}{8\eta_\infty} \right]_0^{\tau_w} - \left[\frac{\tau^2}{4\beta} \right]_0^{\tau_w} + \int_0^{\tau_w} \frac{\tau}{2\beta} \sqrt{\left(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta\tau^2 \frac{1}{\eta_0}} d\tau \right] \quad (234)$$

Donde la integral con una raíz de la Ec. (234) se resuelve a continuación:

$$\int_0^{\tau_w} \frac{\tau}{2\beta} \sqrt{\left(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta\tau^2 \frac{1}{\eta_0}} d\tau \quad (235)$$

$$\frac{1}{2\beta} \int_0^{\tau_w} \tau \sqrt{\left(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta\tau^2 \frac{1}{\eta_0}} d\tau \quad (236)$$

Se realiza el cambio de variable $\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} = u$; $\frac{2\beta\tau}{\eta_\infty} d\tau = du$; $d\tau = du \frac{\eta_\infty}{2\beta\tau}$; $\beta\tau^2 = u\eta_\infty$; en la Ec. (236)

$$\frac{1}{2\beta} \int_0^{\tau_w} \tau \sqrt{(u-1)^2 + 4 \frac{u\eta_\infty}{\eta_0} \frac{\eta_\infty}{2\beta\tau}} du \quad (237)$$

$$\frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \int \sqrt{(u-1)^2 + 4u \frac{\eta_\infty}{\eta_0}} du \quad (238)$$

$$\frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \int \sqrt{u^2 - 2u + 1 + 4u \frac{\eta_\infty}{\eta_0}} du \quad (239)$$

$$\frac{\eta_{\infty}}{4\beta^2} \int \sqrt{u^2 + u\left(\frac{4\eta_{\infty}}{\eta_0} - 2\right) + 1} du \quad (240)$$

Se realiza varios pasos algebraicos y se completa el trinomio cuadrado perfecto para la Ec. (240)

$$\frac{\eta_{\infty}}{4\beta^2} \int \sqrt{u^2 + u\left(\frac{4\eta_{\infty}}{\eta_0} - 2\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{4\eta_{\infty}}{\eta_0} - 2\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{4\eta_{\infty}}{\eta_0} - 2\right)\right)^2 + 1} du \quad (241)$$

$$\frac{\eta_{\infty}}{4\beta^2} \int \sqrt{u^2 + u\left(\frac{4\eta_{\infty}}{\eta_0} - 2\right) + \left(\frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 - \left(\frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 + 1} du \quad (242)$$

Donde

$$u^2 + u\left(\frac{4\eta_{\infty}}{\eta_0} - 2\right) + \left(\frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 - \left(\frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 + 1 = \left(u + \frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 - \left(\frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 + 1;$$

$$\left(u + \frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 - \left(4\left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_0}\right)^2 - \frac{4\eta_{\infty}}{\eta_0} + 1\right) + 1 = \left(u + \frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_0}\right)^2\right);$$

Sustituyendo en la integral de la Ec. (242) se tiene:

$$\frac{\eta_{\infty}}{4\beta^2} \int \sqrt{\left(u + \frac{2\eta_{\infty}}{\eta_0} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_0}\right)^2\right)} du \quad (243)$$

La ecuación (243) puede resolverse a partir de la fórmula $\int \sqrt{v^2 \pm a^2} dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \text{Ln} \left[v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right] + C$; llegando a la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \int \sqrt{\left(u + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right)^2\right)} du & (244) \\
& = \frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \left[\left[\frac{\left(u + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right)}{2} \right] \sqrt{\left(u + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right)^2\right)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{4\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right)^2\right)}{2} \operatorname{Ln} \left[\left(u + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right) + \sqrt{\left(u + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right)^2\right)} \right] + C \right]
\end{aligned}$$

Al regresar la raíz a su forma original se tiene:

$$\frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \left[\left[\frac{\left(u + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right)}{2} \right] \sqrt{(u-1)^2 + 4u \frac{\eta_\infty}{\eta_0}} + \frac{4\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right)^2\right)}{2} \operatorname{Ln} \left[\left(u + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right) + \sqrt{(u-1)^2 + 4u \frac{\eta_\infty}{\eta_0}} \right] + C \right] \quad (245)$$

Al sustituir el valor original de u y simplificar (245) se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \left[\left[\frac{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right)}{2} \right] \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} \right. & (246) \\
& \quad \left. + 2\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0} - \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right)^2\right) \operatorname{Ln} \left[\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + \frac{2\eta_\infty}{\eta_0} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} \right] + C \right]
\end{aligned}$$

Considerando a $\varphi_r = \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} = \frac{\eta_\infty}{\eta_0}$, y sustituyendo en (246)

$$\frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \left[\left[\frac{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \operatorname{Ln} \left[\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} \right] + C \right] \quad (247)$$

Sustituyendo en la expresión original (234) se tiene

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\left[\frac{\tau^4}{8\eta_\infty} \right]_0^{\tau_w} - \left[\frac{\tau^2}{4\beta} \right]_0^{\tau_w} + \frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \left[\left[\frac{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \operatorname{Ln} \left[\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} \right] \right]_0^{\tau_w} \right] \quad (248)$$

Se evalúa (248) en sus límites de integración 0 y τ_w

$$\begin{aligned} & \left[\left[\frac{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \operatorname{Ln} \left[\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau^2}{\eta_0}} \right] \right]_0^{\tau_w} \\ &= \left[\frac{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \operatorname{Ln} \left[\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}} \right] \\ &- \left(\left[\frac{\left(\frac{\beta(0)^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right)}{2} \right] \sqrt{(0-1)^2 + 0} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \operatorname{Ln} \left[(0 + 2\varphi_r - 1) + \sqrt{(0-1)^2 + 0} \right] \right); \end{aligned} \quad (249)$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \text{Ln} \left[\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}} \right] - \varphi_r + \frac{1}{2} - 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \text{Ln}[2\varphi_r]; \quad (250)$$

$$= \frac{1}{2} - \varphi_r + \frac{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \text{Ln} \left[\frac{\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}}}{2\varphi_r} \right] \quad (251)$$

Sustituyendo nuevamente la evaluación y tras realizar pasos algebraicos se llega a la forma

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\frac{\tau_w^4}{8\eta_\infty} - \frac{\tau_w^2}{4\beta} + \frac{\eta_\infty}{4\beta^2} \left(\frac{1}{2} - \varphi_r + \frac{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1\right)}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}} + 2\varphi_r(1 - \varphi_r) \text{Ln} \left[\frac{\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + \frac{4\beta\tau_w^2}{\eta_0}}}{2\varphi_r} \right] \right) \right] \quad (252)$$

Al simplificar (252) se obtiene

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\frac{1}{8\beta^2 \eta_\infty} \left(\beta^2 \tau_w^4 - 2\beta \tau_w^2 \eta_\infty \right) + \eta_\infty^2 \left(1 - 2\varphi_r + \left(\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 \right) \sqrt{\left(\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta \tau_w^2}{\eta_0}} + 4\varphi_r(1 - \varphi_r) \ln \left[\frac{\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta \tau_w^2}{\eta_0}}}{2\varphi_r} \right] \right) \right] \quad (253)$$

Donde la Ec.(254) es el valor de la ecuación de Rabinowitsch-Mooney para el modelo BMP

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \left[\frac{1}{8\beta^2 \eta_\infty} \left(\beta^2 \tau_w^4 - 2\beta \tau_w^2 \eta_\infty + \eta_\infty^2 \left(1 - 2\varphi_r + HI + 4\varphi_r(1 - \varphi_r) \ln \left[\frac{H + I}{2\varphi_r} \right] \right) \right) \right] \quad (254)$$

Donde H e I corresponden a

$$H = \frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} + 2\varphi_r - 1; \quad I = \sqrt{\left(\frac{\beta \tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + \frac{4\beta \tau_w^2}{\eta_0}}$$

O bien

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{f(\tau_w)_{BMP}}{\tau_w^3} \quad (255)$$

El esfuerzo en la pared se obtiene fácilmente al sustituir la $f(\tau_w)_{BMP}$ en la siguiente expresión

$$\tau_w = \frac{-\nabla_z P}{2} R = \frac{\pi R^3 f(\tau_w)}{Q \tau_w^2} = \frac{R}{\langle V_z \rangle} \frac{f(\tau_w)}{\tau_w^2} \quad (256)$$

El Perfil de Velocidad de corte se obtiene de manera similar al sustituir $f(\tau_w)_{BMP}$

Con base en

$$\tau(r) = \tau_w \frac{r}{R} \quad (257)$$

$$\tau(r) = \frac{\pi R^3 f(\tau_w) r}{Q \tau_w^2 R} \quad (258)$$

$$\frac{dV_z}{dr} = \frac{\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \tau^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \tau} \quad (259)$$

Se Sustituye (257) para obtener

$$\dot{\gamma}(r) = \frac{\beta \left(\tau_w \frac{r}{R}\right)^2 \frac{1}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta \left(\tau_w \frac{r}{R}\right)^2 \frac{1}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \left(\tau_w \frac{r}{R}\right)^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \left(\tau_w \frac{r}{R}\right)} \quad (260)$$

Viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de bulto $\eta_{PN}(C_b)$

Para obtener la viscosidad en condiciones de pared es necesario evaluar el sistema en las condiciones de concentración de bulto(C_b)

$$f(\tau_w(C_b)) = \left[\frac{1}{8\beta_{C_b}^2 \eta_{\infty C_b}} \left(\beta_{C_b}^2 \tau_w^4 - 2\beta_{C_b} \tau_w^2 \eta_{\infty C_b} \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_{\infty C_b}^2 \left(1 - 2\varphi_{rC_b} + H_{C_b} I_{C_b} + 4\varphi_{rC_b} (1 - \varphi_{rC_b}) \text{Ln} \left[\frac{H_{C_b} + I_{C_b}}{2\varphi_{rC_b}} \right] \right) \right) \right] \quad (261)$$

Luego se sustituye la Ec.(261) en la expresión de viscosidad newtoniana equivalente

$$\eta_{PN}(C_b) = \frac{\tau_w(C_b)}{(8\langle V_z(C_b) \rangle / d)} = \frac{R^2}{4\langle V_z(C_b) \rangle^2} \frac{f(\tau_w(C_b))}{\tau_w^2} \quad (262)$$

Viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de pared $\eta_{ab}(C_w)$

Para obtener la viscosidad en condiciones de pared es necesario evaluar los esfuerzos en las condiciones de concentración en la pared (C_w), por lo que el valor de la función $f(\tau_w)$ es:

$$f(\tau_w(C_w)) = \left[\frac{1}{8\beta_{C_w}^2 \eta_{\infty C_w}} \left(\beta_{C_w}^2 \tau_w^4 - 2\beta_{C_w} \tau_w^2 \eta_{\infty C_w} \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_{\infty C_w}^2 \left(1 - 2\varphi_{rC_w} + H_{C_w} I_{C_w} + 4\varphi_{rC_w} (1 - \varphi_{rC_w}) \text{Ln} \left[\frac{H_{C_w} + I_{C_w}}{2\varphi_{rC_w}} \right] \right) \right) \right] \quad (263)$$

Luego se sustituye (263) en la expresión de viscosidad aparente en la pared

$$\eta_a(C_w) = \frac{\tau_w(C_w)}{\dot{\gamma}_{w(C_w)}} \quad (264)$$

$$\eta_a(C_w) = \frac{\frac{\pi R^3 f(\tau_w(C_w))}{Q \tau_w^2}}{\left(\frac{\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \tau_w^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \tau_w} \right)} \quad (265)$$

$$\eta_a(C_w) = \frac{\frac{\pi R^3}{\pi R^2 \langle V_z(C_w) \rangle} \frac{f(\tau_w(C_w))}{\tau_w^2}}{\left(\frac{\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \tau_w^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \tau_w} \right)} \quad (266)$$

$$\eta_a(C_w) = \frac{\frac{R}{\langle V_z(C_w) \rangle} \frac{f(\tau_w(C_w))}{\tau_w^2}}{\left(\frac{\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta \tau_w^2 \frac{1}{\eta_0}}}{2\beta \tau_w} \right)} \quad (267)$$

$$\eta_a(C_w) = \frac{2\beta R \tau_w f(\tau_w(C_w))}{\langle V_{z(C_w)} \rangle \tau_w^2 \left(\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \tau_w^2 \frac{1}{\eta_0}} \right)} \quad (268)$$

$$\eta_a(C_w) = \frac{2\beta R f(\tau_w(C_w))}{\langle V_{z(C_w)} \rangle \tau_w \left(\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta \frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 \right)^2 + 4\beta \tau_w^2 \frac{1}{\eta_0}} \right)} \quad (269)$$

Tras varios pasos algebraicos se obtiene Viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de pared Ec.(269)

Coeficiente de transferencia para el modelo de Bautista Manero Puig (BMP): K_c

Sustituyendo los valores de la viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de bulto $\mu_{PN}(C_b)$ y el de la viscosidad aparente en la pared $\mu_a(C_w)$, en el Coeficiente de transferencia de masa propuesto por Charcosset y Choplin, se obtiene el coeficiente de transferencia para el modelo de BMP:

$$K_c = \left(\frac{3D^2}{4L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{8 \langle V_{zC_b} \rangle}{d} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta_{PN}(C_b)}{\eta_{ab}(C_w)} \right)^{0.27} \quad (270)$$

Donde se sabe que los valores de viscosidad en condiciones de bulto y pared son correspondientes a la Ec. (262) y (269) respectivamente.

APENDICE C

COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA K_c EN LA ULTRAFILTRACION PARA UN FLUJO HOMOGÉNEO (REOMÉTRICO):

Para el cálculo del coeficiente de transferencia de masa de un flujo de masa homogéneo (reométrico) Se considera un flujo homogéneo donde la viscosidad (η), es constante en todo el caudal con excepción de la zona cercana a la pared donde la concentración es mayor debido a la acumulación del propia de la ultrafiltración

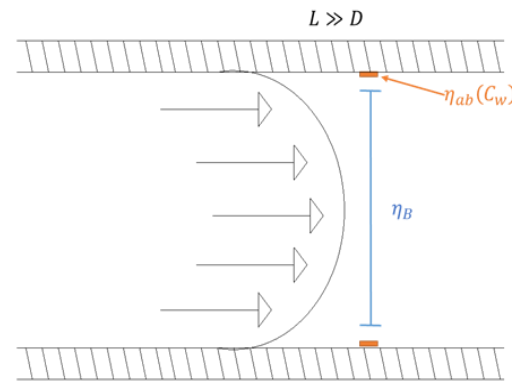


Figura 5: Representación de un flujo homogéneo (reométrico)

Figura A- 2. Representación de un flujo homogéneo en una tubería.

Por lo tanto, el coeficiente de transferencia de masa (K_c) toma la siguiente forma.

$$K_c = \left(\frac{3D^2}{4L} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{8V_{zB}}{d} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\eta_{\infty}}{\eta_{ab}(C_w)} \right)^{0.27} \quad (271)$$

En el que V_{zB} y η_{∞} se refieren a la velocidad y viscosidad newtonianas del flujo homogéneo, mientras que la expresión $\eta_{ab}(C_w)$ a la Viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de pared, que describa mejor el comportamiento reológico de esta zona, en este caso se usa el modelo de BMP debido considera distintitos parámetros estructurales que

se espera permitan describir el comportamiento del mucilago de *Aloe vera* y el modelo de RP por su capacidad de describir la curva de flujo, la velocidad para este sistema es la siguiente

$$V_{zB} = \frac{\nabla_z P * R^2}{8\eta_\infty} \quad (272)$$

La expresión (272) se refiere a la velocidad Newtoniana y en este la viscosidad η_∞ es constante

$$\eta_a(C_w) = \frac{2\beta\tau_w^2}{\left(\beta\frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(\beta\frac{\tau_w^2}{\eta_\infty} - 1\right)^2 + 4\beta\tau_w^2\frac{1}{\eta_0}}\right)} \quad (273)$$

$$\eta_{ab}(C_w) = \eta_{\infty C_w} + \frac{(\eta_{0C_w} - \eta_{\infty C_w})\tau_{sC_w}^2}{\tau_{sC_w}^2 + \tau_w^2} \quad (274)$$

La expresión (273) y (274) corresponden a la Viscosidad newtoniana equivalente a la concentración de pared para la aproximación de flujo reológico de BMP y RP, pero se pueden usar viscosidades para otros modelos como ejemplo la ley de la potencia, solamente que se usan estos dos modelos al considerarse los más adecuado para describir el sistema. Se obtiene la Ec. (273) A partir de la Ec. (148) despeja el valor de la viscosidad para el flujo reológico sustituyendo $\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta}$

$$\frac{\tau}{\eta} = \frac{\beta\frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta\frac{\tau^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta\tau^2\frac{1}{\eta_0}}}{2\beta\tau} \quad (275)$$

$$\frac{2\beta\tau^2}{\beta\frac{\tau^2}{\eta_\infty} - 1 + \sqrt{\left(-\beta\frac{\tau^2}{\eta_\infty} + 1\right)^2 + 4\beta\tau^2\frac{1}{\eta_0}}} = \eta \quad (276)$$

5. NOTACIÓN

$\underline{\underline{D}}$	<i>Tensor rapidez de deformación</i>
G_0	Módulo de relajación instantánea
λ	Tiempo de relajación estructural
Re	Numero de Reynolds
Nu	Número de Nusselt
Pr	Número de Prandtl
De	Número de Deborah
D	Coefficiente de difusión del soluto
d	Diámetro de la tubería
Q	Caudal volumétrico
T	Transposición de una matriz
∇	Derivada codeformacional
$\underline{\underline{\tau}}$	
$\dot{\gamma}$	Esfuerzo cortante
F	Factor de corrección de la viscosidad de Field
$\nabla \underline{V}$	Tensor gradiente de velocidad
$\nabla \underline{V}^T$	Tensor gradiente de velocidad Transpuesto
A_0	Paramento de cinética del sistema

5.1. LETRAS GRIEGAS

φ	Fluidez
φ_0	Fluidez a bajas tasa de rapidez de deformación
φ_∞	Fluidez a altas tasa de rapidez de deformación
η	Viscosidad
η_0	Viscosidad a bajos valores de deformación

η_{∞}	Viscosidad a altos valores de deformación
ρ	Densidad
ν	Viscosidad cinemática
λ	Tiempo de relajación al cesar el flujo cortante
B	Parámetro cinético estructural

5.2. OTROS SÍMBOLOS

$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada temporal
$\frac{D}{Dt}$	Derivada Material
∇	Operador Nabra
:	Producto tensorial de doble punto

6. BIBLIOGRAFÍA

- Ahmad, A., Qasim, M., & Ahmed, S. (2017). *Flow of Reiner–Philippoff fluid over a stretching sheet with variable thickness*. Brazil: Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.
- Aimar, P., Verall, M. J., & Hudson, M. J. (1987). Ultrafiltration of pseudoplastic fluids. *Separations for Biotechnology*, 360-972.
- Barnes, H. (2000). *A Handbook of Elementary Rheology*. Aberystwyth: Cambrian Printers.
- Bautista, F., de Santos, J., Puig, J., & Manero, O. (1999). Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 80, 93-113.
- Bird, R. (2006). *Fenómenos de transporte*. Mexico: Limusa Wiley.
- CABI. (26 de Diciembre de 2020). *Invasive Species Compendium*. Obtenido de Detailed coverage of invasive species threatening livelihoods and the environment worldwide: <https://www.cabi.org/isc/datasheet/4192>
- Calderas, F., Herrera-Valencia, E. E., Sánchez-Olivares, G., & Manero, O. (2012). Rheological Theory and Simulation of a Complex Liquid. *Advances in Engineering Research*, 3, 201-208.
- Cengel, Y. (2002). *Heat and Mass Transfer*. Nevada, USA: McGraw-Hil.
- Cervantes-Martínez, C., Medina-Torres, L., González-Laredo, R. F., Calderas, F., Sánchez-Olivare, G., & et., a. (2014). Study of spray drying of the Aloe vera mucilage (Aloe vera barbadensis Miller) as a function of its rheological properties. *Lebensmittel-Wissenschaftund-Technologie (LWT)*,, 426-435.
- Chang, X., Wang, C., Feng, Y., & Liu, Z. (2006). Effect of heat treatments on the stabilities of polysaccharides substances and barbaloin in gel juice from Aloe vera miller. 75 (2), 245–251. *J. Food Eng.* 75 (2), 245-251.
- Charcosset, C., & Choplin, L. (1995). Ultrafiltration of non-newtonian fluids. *Journal of Membrane Science*, 147-160.
- Cheremisnoff, N. (1998). *Liquid filtration*. United States of America: Butterworth-Heinemann.
- Chilton, T., & Colburn, A. (1934). Mass Transfer (Absortion) Coefficients Prediction form Data on Heat Transfer and Fluid Friction. *Ind. Eng Chem.* 26, 1183-1187.
- Chou, F., Wiley, R., & Schlimme, D. (1991). Reverse osmosis and flavor retention in apple juice concentration. *Journal of Food Science*, 56(2), 484-487.

- Cohen, J. S., & Yang, T. C. (1995). Progress in food dehydration. *Trends in Food Science and Technology*, 6, 20-26.
- Domínguez, F., Domínguez, R., Arzate, I., Chanona, J., Welti, J., Alvarado, J., . . . Gutiérrez, G. (2011). El gel de Aloe vera: Estructura, composición química procesamiento, actividad biológica e importancia en la industria farmacéutica y alimentaria. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, Vol. 1, 23-43.
- Dunstan, D., Chai, E., Lee, M., & Boger, D. (1995). The rheology of engineered polysaccharides. *Food Hydrocolloids* 9 (4), 225-228.
- Femenia, A., García, P., Simala, S., & Rosselló, C. (2003). Effects of heat treatment and dehydration on bioactive polysaccharide acemannan and cell wall polymers from Aloe barbadensis Miller. *Carbohydrate polymers*. 51(4), 397-405.
- Field, R. W. (1990). A theoretical viscosity correction factor for heat transfer and friction in pipe flow. *Chemical Engineering Science*, Vol. 45, No. 5, 1343-1347.
- Field, R., & Wu, J. (2022). Permeate Flux in Ultrafiltration Processes—Understandings and Misunderstandings. *Membranes* 2022, 12, 1-18.
- Fredrickson, A. (1970). A model for the thixotropy of suspensions. *AICHE J* 16, 436-438.
- Freitas, V., Rodrigues, R., & Oliveira, F. (2014). Propriedades farmacológicas da Aloe vera (L.) Burm. f. *Revista Brasileira de Plantas Mediciniais*, Vol.16, 299-307.
- Goldsmith, R. (1971). Macromolecular ultrafiltration with microporous membranes. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 10, 113-120.
- Hamman, J. (2008). Composition and applications of aloe vera leaf gel. *Molecules* 13 (8), 1599-1616.
- He, Q., Liu, C., Eshun, K., & Zhang, T. (2005). Quality and safety assurance in the processing of Aloe vera gel juice. *Food Control* 16, 95-104.
- Indrawati, Van-Loey, A., & Hendrickx, M. (2004). Pressure and temperature stability of water-soluble antioxidants in orange and carrot juice: A kinetic study. *European Food Research and Technology*, 219, 161-166.
- Kim, H., & Lee, K. (1999). Application of a Pulsed Electric Field to Cross-flow Ultrafiltration of Protein Solution. *Biotechnol. Bioprocess Eng*, 4, 46-50.
- Kim, K., Lee, J., Kim, D., Kim, M., Park, J., Shin, Y., . . . Jo, T. (1998). The development of a new method to detect the adulteration of commercial Aloe gel powders. *Archives of Pharmacal Research* 21, 514-520.

- Kontogiorgos, V., Margelou, I., Geordiadis, N., & Ritzoulis, C. (2012). Rheological characterization of okra pectins. *Food Hydrocolloids* 29 (2), 356-362.
- Lad, V., & Murthy, Z. (2013). Rheology of Aloe barbadensis Miller: A naturally available material of high. *Journal of Food Engineering*, 279-284.
- Manitto, P., Speranza, G., Tommasi, N. D., Ortoleva, E., & Morelli, C. F. (2003). Aloeresin H, a new polyketide constituent of Cape Aloe. *Tetrahedron*, 59, 401-408.
- Matteson, M., & Orr, C. (1987). *FILTRATION Principles and Particles*. U.S.A, New York: MARCEL DEKKER, INC.
- McCabe, W., Smith, J., & Harriot, P. (2007). *Operaciones unitarias en ingeniería química*. México, D. F: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES.
- Mears, P. (1976). *Membrane Separation Processes*. N.Y. U.S.A: Elsevier Scientific Publishing.
- Medina-Torres, L., Brito-De La Fuente, E., Torrestiana-Sánchez, B., & Katthain, R. (2000). Rheological properties of the mucilage gum (Opuntia ficus indica). *Chemistry Hydrocolloids*, 14, 417-424.
- Medina-Torres, L., Calderas, F., Minjares, R., Femenia, A., Sánchez, G., González, F., . . . Manero, O. (2016). Structure preservation of Aloe vera (barbadensis Miller) mucilage in a in a spray drying process. *LWT Food Science and Technology*, 94-100.
- Mewis, J. (1979). ThixotropyDa general review. *J. Non-Newtonian Fluid Mechs*, 6.
- Midoux, N. (1993). *La notion de viscosité de procrédre, Stage de perfectionnement Génie des Procédés et Milieux Rhéologiquement Complexes*. Francia: Nancy.
- Oldroyd, J. (1950). Proc. R. Soc. A200 , 523.
- Perez, B., Minjares, R., Martínez, J., Baez, J., & Candelas, M. (2019). Composición Química, Propiedades Físicas y Reológicas del mucílago de Aloe barbadensis Miller. *Investigación y Desarrollo en Ciencia y Tecnología de Alimentos, Vol.4*, 902-906.
- Poole, R. (2012). The Deborah and Weissenberg numbers. *The British Society of Rheology, Rheology Bulletin*. 53(2), 32-39.
- Pritchard, M. (1990). *The Influence of Rheology upon Mass Transfer in Crossflow Membrane Filtration*. UK: Ph.D. Thesis, University of Bath.
- Pritchard, M., Howell, J., & Field, R. (1994). The ultrafiltration of viscous fluids . *Journal of Membrane Science*, 223-235.
- Ramachandra, C., & Srinivasa, P. (2008). Processing of Aloe vera leaf gel: A review. *American Journal of Agricultural and Biological Sciences*. 3, 502-510.

- Ramirez, J. (2006). *Fundamentos de Reología de alimentos*. Colombia: JSR e-books.
- Ramirez, V. (2019). *Flujo de Hagen-Poiseuille de un sistema micelar*. Ciudad de México, México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Reynolds, T., & Dweck, A. (1999). Aloe vera leaf gel: a review update. . *Journal Ethnopharmacology* , 3-37.
- Rodríguez, V., Femenia, A., González, R., Rocha, N. G., Candelas, M., Ramírez, P., . . . Rosselló, C. (2011). Effects of pasteurization on bioactive polysaccharide acemannan and cell wall polymers from Aloe barbadensis Miller. *Carbohydrate Polymers* 86(49), 1675-1683.
- Sahu, K. (2007). 'Linear instability of pressure-driven channel flow of a Newtonian and a Herschel–Bulkley fluid' *Phys. Fluids* 19, 122101, 19.
- Sieder, E., & Tate, G. (1936). Heat transfer and pressure drop of quids in tubes. *Ind. Eng. Chem.*, 28, 1429-1435.
- Smith, R., Inomata, H., & Peters. (2013). *Supercritical Fluid Science and Technology*. Elsevier Science, 557-615.
- Solís, C. (2016). Tecnología de membranas de ultrafiltración Entre Ciencia e Ingeniería. *ISSN 1909-8367*, 26-36.
- Streeter, V. (1970). *Mecánica de los fluidos*. México, D. F: Libros McGRAW-HILL de México.
- T.H, C., & Colburn, A. (1934). Mass Transfer (Absortion) Coefficients Prediction form Data on Heat Transfer and Fluid Friction . *Ind. Eng Chem.* 26, 1183-1187.
- Thibault, J. F., Lahaye, M., & Guillon, F. (1992). *Physico-chemical properties of food plant cell walls*. London: In T. F. Schweizer & C. A. Edwards.
- Thomas, R., Gaddis, J., Westtfall, P., Titus, T., & Ellis, N. (1987). Optimization of apple juice production by single pass metallic membrane ultrafiltration. *J. Food Sci.*, 52, 1263-1266.
- Vega, A., Ampuero, N., Díaz, L., & Lemus, R. (2005). El Aloe Vera (Aloe Barbadensis Miller) como Componente de Alimentos Funcionales. *Revista Chilena de Nutricion* 32, Vol. 3, 1-14.
- Wakat, P. (2008). *Ingeniería de procesos de separación*. Mexico: PEARSON EDUCACIÓN.
- Ying, P. L., & Abdul, W. M. (2012). Influence of pH and Ionic Strength during Food Protein Ultrafiltration: Elucidation of Permeate Flux Behavior, Fouling Resistance, and Mechanism. *Separation Science and Technology*, 47(3), 446-454 .