



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

COMPLEJIDAD DE LA DINÁMICA DE INTERSECCIÓN PARA
VARIETADES SUAVES Y CON SINGULARIDADES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MÓNICA DE NOVA VÁZQUEZ

DIRECTOR
DR. ERNESTO ROSALES GONZÁLEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. XAVIER GÓMEZ MONT ÁVALOS
CENTRO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS, CIMAT

DRA. ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 1 DE FEBRERO DE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A la amada memoria de mi padre,
Arturo De Nova Rosas*

Agradecimientos

Agradezco infinitamente al Dr. Ernesto Rosales por su paciencia, apoyo y guía a lo largo de este proceso, no puedo decir más que es el mejor asesor del mundo. A los miembros de mi comité tutor, la Dra. Adriana Ortiz por sus observaciones y correcciones sobre el trabajo (mi gran ejemplo a seguir) y el Dr. Xavier Gómez Mont por la enriquecedora charla sobre esta investigación.

A cada uno de mis sinodales: Dra. Patricia Dominguez, Dr. Carlos Cabrera, Dra. Ana Rechtman, por cada una de sus observaciones, preguntas y sobre todo, su tiempo dedicado a la revisión del trabajo. Al Dr. Héctor Méndez, por haber sido sinodal en mi examen de candidatura, por sus consejos y sus enseñanzas desde que entré a la universidad.

A CONACyT por la beca 245432 otorgada de enero 2016 a enero 2020 y a la UNAM por el apoyo FENOMECE otorgado de noviembre 2021 a febrero 2022, así como al Instituto de Matemáticas de la UNAM por la beca de lugar que me ha otorgado desde enero de 2016 a la fecha.

A mi familia, por su apoyo incondicional y por motivarme a seguir con este sueño, sobre todo tras nuestro terrible 2019... ¡Lo logramos!

Índice general

Índice general	III
Introducción	1
1. Preliminares	9
1.1. Conjuntos algebraicos	9
1.2. Formas multilineales	10
1.3. Multivectores	11
1.4. Grassmannianas y el encaje de Plücker.	12
1.5. Teorema de Skolem-Mahler-Lech	13
2. Caso diagonalizable	18
2.1. Prueba de la dinámica de intersección para X de dimensión k	21
2.2. Análisis del conjunto Σ para X de dimensión 1 y $m \geq 2$	23
2.2.1. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^2	25
2.2.2. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^3	27
2.2.3. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^m , $m \geq 4$	32
3. Caso no diagonalizable	37
3.1. Prueba de la dinámica de intersección para X de dimensión k	39
3.2. Análisis del conjunto Σ para X de dimensión 1 y $m \geq 2$	42
3.2.1. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^2	42
3.2.2. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^3	44
3.2.3. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^m , $m \geq 4$	49
4. Conjetura de clasificación de Arnold	55
4.1. Los soportes de un s -vector y una s -forma	58
4.2. Pruebas de CCA para X de dimensión 2 y $m \geq 4$	66
4.2.1. Prueba del Teorema 4.4	67
4.2.2. Prueba del Teorema 4.6	70
Referencias	73

Introducción

Para comenzar vamos a considerar dos subvariedades X y Y de una variedad topológica m -dimensional M de clase \mathcal{C}^k . Si k es un entero positivo, entonces decimos que M es k -diferenciable, es suave si k es infinito, o bien, es analítica holomorfa cuando k es ω . También consideramos una aplicación suave F de la variedad M en sí misma y denotamos por X_n a la n -ésima imagen iterada bajo F de la subvariedad X . Así, podemos definir funciones μ que asocian a cada entero n algún invariante topológico o algebraico de la intersección $X_n \cap Y$.

Ha resultado de mucho interés estudiar el comportamiento de las funciones μ . Por ejemplo, dada una variedad N se define a M como el producto cartesiano $N \times N$. Las subvariedades X , Y están definidas ambas como la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in N\} \subset M$. La gráfica de una aplicación $g : N \rightarrow N$ es la imagen de la diagonal Δ bajo la aplicación $F = (Id, g)$. Así, $F^n = (Id, g^n)$ y por tanto, la intersección $X_n \cap Y$ consiste de aquellos puntos (x, x) sobre la diagonal tales que x es un punto fijo de g^n . En este contexto, en 1965, Artin y Mazur [4] estudiaron el crecimiento asintótico de la función $\mu(n)$, definida como el número de puntos periódicos aislados de g , o equivalentemente la intersección $X_n \cap Y$. Probaron que, para g “genérica”, la función μ crece a lo más de forma exponencial, esto es, existe una constante C tal que $\mu(n) \leq C^n$ para cada $n \geq 1$.

En 1974, Shub y Sullivan [15], consideraron una aplicación diferenciable F , definida en una vecindad de un punto fijo aislado de \mathbb{R}^m . Estudiaron la dinámica de la función μ , donde $\mu(n)$ es el índice del punto fijo. Demostraron que esta función μ es acotada.

Con estos antecedentes, en 1990, Arnold [2] consideró una variedad compacta suave M , X y Y dos subvariedades compactas suaves y una aplicación diferenciable F de M en sí misma. Estudió el comportamiento de la función μ que asocia a cada entero n la d medida de la intersección $X_n \cap Y$ ($d = \dim X_n + \dim Y - \dim M$). Probó que “genéricamente” la función μ crece a lo más de forma exponencial. Específicamente, probó que cuando X y Y son de dimensión complementaria, el crecimiento de μ es un estimado exponencial del número de puntos de intersección. En este mismo trabajo, también analizó el caso excepcional del toro 2-dimensional junto con un difeomorfismo F del toro en sí mismo, X y Y ambas son S^1 . En este caso, la función μ asocia a cada entero n el número de puntos de la intersección $X_n \cap Y$. El autor probó que para cualquier sucesión $\{a_n\}$ creciente de valores reales se cumple que $\mu(n) > a_n$ para una cantidad infinita de valores n . Este ejemplo muestra que la función μ no necesariamente crece a lo más de forma exponencial o es acotada.

Siguiendo esta misma línea, en un segundo artículo de ese mismo año, Arnold [1] consideró la función μ que asocia a cada entero n la suma de los números de Betti de $X_n \cap Y$. Demostró

que “genéricamente” existen constantes C y λ tales que $\mu(n) \leq Ce^{\lambda n}$ para todo valor n . En este mismo trabajo, probó resultados análogos para los casos en que μ asocia a cada entero n , la curvatura total de la intersección $X_n \cap Y$ si las variedades son Riemannianas, el volumen no orientado y el mínimo número de puntos críticos de una función de Morse.

Posteriormente, en 1993, Arnold [3] consideró sistemas dinámicos donde $(X, 0)$, $(Y, 0)$ son gérmenes de subvariedades del espacio complejo \mathbb{C}^m , suaves en el origen y holomorfas en una vecindad de éste. En este caso, la aplicación $F : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ es un germen de biholomorfismo y la función μ asocia a cada entero n la multiplicidad de intersección de las subvariedades X_n y Y en el origen. En este trabajo se demostró que la función μ es acotada. Además, resulta que dicha multiplicidad se comporta periódicamente, salvo quizá para un número finito de valores.

En 1991, Rosales-González [11] consideró una variedad compacta N , de manera que M es el producto $N \times N$. Al igual que en el trabajo de Artin y Mazur, el autor consideró a X y Y como la diagonal Δ y $F = (Id, f)$ donde f es un difeomorfismo de N en sí misma. Definió la función μ que asocia a cada entero n el número de componentes conexas de la intersección $X_n \cap Y$. A diferencia del trabajo de Artin y Mazur, probó que para cualquier sucesión de números naturales $\{a_n\}$ existe un difeomorfismo f de N en sí misma de tal forma que $\mu(n) > a_n$ para una cantidad infinita de valores n . Siguiendo esta misma línea, en los artículos posteriores [12], [14] realizados por el mismo autor, se demostraron resultados análogos. Podemos mencionar, por ejemplo, el caso en el que la función μ asocia a cada entero n el número de órbitas periódicas hiperbólicas de período n del difeomorfismo F .

En 1996, Rosales-González [13] consideró subespacios lineales X y Y del espacio complejo m -dimensional \mathbb{C}^m , con dimensión complementaria k y $m - k$ respectivamente. Consideró también un automorfismo lineal F de \mathbb{C}^m y una función μ que asocia a cada entero n la dimensión compleja de la intersección $X_n \cap Y$. Probó que para cada entero no negativo $d \leq m$, el conjunto de valores n tales que $\mu(n) \geq d$ coincide con el conjunto de soluciones enteras de una ecuación diofantina. Debido al Teorema de Skolem-Mahler-Lech [6], este conjunto es la unión de un conjunto finito y una cantidad finita de progresiones aritméticas. Como consecuencia de este hecho se tiene que la función μ es periódica excepto quizá para un número finito de valores n .

Otro aspecto interesante de ese trabajo, es que el autor enuncia por primera vez la *conjetura de clasificación de Arnold* (CCA). Dicha suposición establece lo siguiente:

El conjunto Σ de valores n tales que $\mu(n) > 0$ es infinito si y sólo si existen números enteros a, q , con $0 \leq a < q$, y un subespacio j -dimensional V de \mathbb{C}^m , invariante bajo F^q , tales que los números $\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(X_a \cap V)$, $\beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V)$ satisfacen que $\alpha + \beta > j$.

En el artículo [13] el autor probó que la existencia de estos enteros y el subespacio V implica que el conjunto Σ es infinito. La prueba es debido a la invarianza de V bajo F^q , lo cual implica que la progresión aritmética $\{a + qs : s \in \mathbb{Z}\}$ está contenida en el conjunto Σ .

Este par de resultados conforma el eje que guía la presente investigación, pues de ellos

surgieron las siguientes interrogantes:

1. ¿Existen casos en los que el conjunto Σ es finito? ¿existen casos en los que el conjunto Σ es únicamente la unión de una cantidad finita de progresiones aritméticas, sin contener un conjunto finito que no esté relacionado con dichas progresiones?
2. En el caso en que Σ contiene progresiones aritméticas, ¿se puede determinar la cantidad de ellas o al menos una cota superior?
3. ¿Qué podemos establecer sobre la otra implicación de CCA?

Para dar respuesta a estas preguntas, el presente trabajo está conformado por cuatro capítulos. El primero de ellos consiste de los preliminares (definiciones y resultados conocidos) que serán de utilidad para el desarrollo de los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo analizamos el caso en que el isomorfismo lineal F es diagonalizable, y X, Y son subespacios lineales de dimensión k y $m - k$ respectivamente. Además, consideramos la función μ que asocia a cada entero n , la dimensión compleja de la intersección $X_n \cap Y$. El primer resultado de este capítulo establece que $\mu(n) > 0$ si y sólo si el entero n satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{\sigma \in S_m} C_\sigma \Lambda_\sigma^n = 0, \quad (1)$$

donde S_m es el grupo simétrico, Λ_σ es el producto de k valores propios de F y C_σ son números complejos que dependen de los vectores que generan a los subespacios X y Y (ver Proposición 2.2). Esto implica que el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ es la unión de un conjunto finito y una cantidad finita de progresiones aritméticas (ver Proposición 2.3).

Para el análisis exhaustivo del conjunto Σ , consideramos inicialmente la dimensión compleja de X igual a 1, en dimensiones bajas como \mathbb{C}^2 y \mathbb{C}^3 . En ambos espacios complejos demostramos que Σ es finito, o bien, cuando es infinito es la unión de una cantidad finita de progresiones aritméticas (no contiene un conjunto finito que no esté relacionado con dichas progresiones). La cardinalidad del conjunto Σ depende en mayor medida de los valores propios del isomorfismo F .

En \mathbb{C}^2 , si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los valores propios de F , entonces, por (1), tenemos que

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \Lambda^n + a_2 = 0\},$$

donde $\Lambda = \lambda_1/\lambda_2$ y los complejos a_1, a_2 se obtienen de las bases de X y Y (ver Lema 2.15). Teniendo en cuenta que $\Lambda = Re^{i2\pi\theta}$, probamos el siguiente resultado.¹

Teorema 2.6 *Sean X y Y subespacios lineales 1-dimensionales de \mathbb{C}^2 , $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es un isomorfismo lineal diagonalizable y $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$. Con la notación anterior, se tienen los siguientes dos casos.*

¹La numeración de los resultados mencionados en esta introducción coincide con la numeración con la que aparecen en los capítulos posteriores.

1. Si $a_1a_2 = 0$, entonces el conjunto Σ es igual a \mathbb{Z} . Más aún, los subespacios X y Y son iguales y coinciden con alguno de los subespacios propios.

2. Si $a_1a_2 \neq 0$ y

a) $R \neq 1$, o bien, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces el conjunto Σ tiene a lo más un elemento.

b) $R = 1$, $\theta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $(p, q) = 1$ y el conjunto Σ es no vacío, entonces existe un único número $n_0 \in \{0, \dots, q-1\}$ tal que

$$\Sigma = \{n_0 + qs : s \in \mathbb{Z}\}.$$

De manera similar, en \mathbb{C}^3 , si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los valores propios de F y suponemos, sin pérdida de generalidad, que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$, entonces

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1\Lambda_1^n + a_2\Lambda_2^n + a_3 = 0\},$$

donde $\Lambda_i = \lambda_i/\lambda_3$ y $a_i \in \mathbb{C}$ (ver Lema 2.18). Análogamente a lo hecho para \mathbb{C}^2 , tenemos que cada $\Lambda_i = R_i e^{i2\pi\theta_i}$ y probamos el siguiente resultado.

Teorema 2.7 Sean X y Y subespacios lineales de \mathbb{C}^3 tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ es un isomorfismo lineal diagonalizable y $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$. Con la notación anterior, se cumple uno de los siguientes casos.

1. Si $a_1a_2a_3 = 0$, entonces el conjunto Σ tiene a lo más un elemento, es una progresión aritmética, o bien, coincide con \mathbb{Z} .

2. Si $a_1a_2a_3 \neq 0$ y

a) $R_1 < 1$ o $R_2 < 1$, entonces el conjunto Σ tiene una cantidad finita de elementos,

b) $R_1 = R_2 = 1$ y $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para $j = 1$ o $j = 2$, entonces el conjunto Σ tiene a lo más dos elementos,

c) $R_1 = R_2 = 1$, $\theta_j = \frac{p_j}{q_j}$, $(p_j, q_j) = 1$ para $j = 1, 2$ y Σ no es vacío, entonces

1) $\Sigma = \{n_1 + qs : s \in \mathbb{Z}\}$, donde $q = [q_1, q_2]$ es el mínimo común múltiplo de q_1 y q_2 , $n \in \{0, \dots, q-1\}$, o bien,

2) $\Sigma = \{n_1 + qs : s \in \mathbb{Z}\} \cup \{n_2 + qs : s \in \mathbb{Z}\}$, donde n_1 y n_2 son elementos distintos de $\{0, \dots, q-1\}$.

Es importante señalar que en \mathbb{C}^2 , cuando Σ es infinito, entonces coincide con una progresión aritmética, mientras que en \mathbb{C}^3 es la unión de a lo más dos progresiones aritméticas. En la prueba para \mathbb{C}^3 usamos una interpretación geométrica sobre las soluciones de (1). Lo que tenemos es que dichas soluciones corresponden a los puntos de intersección de circunferencias en \mathbb{C} . Específicamente, para el inciso 2 c), tenemos únicamente dos circunferencias y por cada punto en común obtenemos una progresión aritmética, de aquí que a lo más son dos progresiones aritméticas.

En la última sección de este capítulo, demostramos, en \mathbb{C}^m , $m \geq 4$, que si todos los cocientes de los valores propios de F son raíces de la unidad, entonces Σ es infinito. Más aún, probamos

que coincide con una unión finita de progresiones aritméticas.

Teorema 2.8 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales con $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 1$, $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ es un isomorfismo lineal diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Si para cada $1 \leq j \leq m - 1$ se tiene

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_m} = e^{i2\pi \frac{p_j}{q_j}}, \quad (p_j, q_j) = 1$$

y el conjunto

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\} = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \Lambda_1^n + \dots + a_{m-1} \Lambda_{m-1}^n + a_m = 0\}$$

no es vacío, entonces se tiene uno de los siguientes casos.

1. Si $a_j \neq 0$ para todo índice j , entonces el conjunto Σ es la unión de a lo más q progresiones aritméticas (donde q es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_{m-1}),
2. Si $a_j = 0$ para algún índice j , entonces el conjunto Σ es la unión de a lo más \hat{q} progresiones aritméticas, donde \hat{q} es el mínimo común múltiplo de

$$q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_m$$

si $j < m$, o \hat{q} es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_{m-2} si $j = m$.

La cantidad de las progresiones aritméticas depende de los valores propios de F , más específicamente del mínimo común múltiplo de los denominadores de los Λ_j , el cual puede ser un número muy grande. Una de nuestras conjeturas es que la cantidad de progresiones aritméticas debería estar acotada por la dimensión del subespacio Y .

Como último resultado de este capítulo, con las hipótesis del teorema anterior, obtenemos un subespacio invariante bajo una iteración de F .

Teorema 2.9 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales con $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 1$, $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ es un isomorfismo lineal diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Si para cada $1 \leq j \leq m - 1$ se tiene

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_m} = e^{i2\pi \frac{p_j}{q_j}}, \quad (p_j, q_j) = 1$$

y existe $n \in \Sigma \cap \{0, \dots, q - 1\}$, entonces el subespacio $X_n = F^n(X)$ es invariante bajo la transformación F^q .

En el tercer capítulo estudiamos el caso en el que F no es diagonalizable, usando la forma canónica de Jordan. El primer resultado que probamos establece que $\mu(n) > 0$ si y sólo si n satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{\sigma \in S_m} P_{\sigma}(n) \Lambda_{\sigma}^n = 0, \tag{2}$$

donde la única diferencia con (1) es que $P_\sigma(n)$ es un polinomio de grado a lo más $k(m-1)$ en la variable n (ver Proposición 3.1).

De manera similar al capítulo 2, también consideramos al subespacio X de dimensión 1, comenzando con los espacios complejos \mathbb{C}^2 y \mathbb{C}^3 . Como F no es diagonalizable, entonces existe una base canónica de Jordan B , tal que su matriz asociada $[F]_B$ está formada por bloques de Jordan que dependen de los valores propios de F .

En \mathbb{C}^2 , como F no es diagonalizable, entonces tiene un único valor propio $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, esto es, la matriz $[F]_B$ consta de un único bloque de Jordan. Probamos que

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda^n + a_2n\lambda^{n-1} = 0\},$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ están determinados por las bases de X y Y (ver Lema 3.10). De esta manera, probamos el siguiente resultado.

Teorema 3.3 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^2$ subespacios lineales de dimensión compleja uno y $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ un isomorfismo lineal. Si F no es diagonalizable, con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ su único valor propio, entonces el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ coincide con \mathbb{Z} , o bien, tiene a lo más un elemento.

En \mathbb{C}^3 tenemos dos casos, dependiendo si la matriz $[F]_B$ consta de un único bloque de Jordan o de dos. En el primer caso, como $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es el único valor propio de F , entonces

$$\Sigma = \left\{ n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda^n + na_2\lambda^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a_3\lambda^{n-2} = 0 \right\},$$

donde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ (ver Lema 3.13). Para este caso probamos lo siguiente.

Teorema 3.4 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^3$ subespacios lineales tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ un isomorfismo lineal no diagonalizable. Si $[F]_B$ es un único bloque de Jordan, entonces el conjunto Σ coincide con \mathbb{Z} , o bien, tiene a lo más dos elementos.

En el segundo caso, cuando la matriz $[F]_B$ consta de dos bloques de Jordan, entonces

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + na_2\lambda_1^{n-1} + a_3\lambda_2^n = 0\},$$

donde λ_1, λ_2 son valores propios de F y $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ (ver Lema 3.16). Para este caso demostramos lo siguiente.

Teorema 3.5 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^3$ subespacios lineales tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ un isomorfismo lineal no diagonalizable. Si $[F]_B$ consiste de dos bloques de Jordan, entonces el conjunto Σ es finito, coincide con \mathbb{Z} , o bien, es una progresión aritmética (distinta de \mathbb{Z}).

En general, para \mathbb{C}^m , con $m \geq 4$, si F tiene un único valor propio λ , esto es, su matriz $[F]_B$ consta de un sólo bloque de Jordan, entonces el conjunto Σ coincide con

$$\left\{ n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^+(n) = 0 \right\} \cup \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^-(n) = 0 \right\},$$

donde

$$Q_j^+(n) = \sum_{k=j}^m \binom{n}{k-j} \lambda^{-(k-j)} \quad \text{y} \quad Q_j^-(n) = \sum_{k=j}^m (-1)^{k-j} \frac{(n+k-j-1)!}{(k-j)!(n-1)!} \lambda^{-(k-j)}$$

son polinomios de grado a lo más $m-1$ en la variable n (ver Lema 3.21) y obtenemos lo siguiente.

Teorema 3.6 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales con $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m-1$, $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un isomorfismo lineal no diagonalizable. Si $[F]_B$ es un único bloque de Jordan, entonces el conjunto Σ coincide con \mathbb{Z} , o bien, tiene a lo más $2(m-1)$ elementos.

El último capítulo de esta tesis está dedicado a estudiar la conjetura de clasificación de Arnold. Como mencionamos anteriormente, en [13], se probó que la existencia de los enteros y el subespacio invariante bajo una iteración de F implica que el conjunto Σ es infinito. Nuestro análisis se concentra en la otra implicación, por esta razón supondremos que Σ es infinito. El primer resultado obtenido es para X de dimensión compleja uno (o Y de dimensión uno).

Teorema 4.1 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales de dimensión compleja k y $m-k$ respectivamente; y $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un isomorfismo lineal y $m \geq 2$. Si $k = 1$ (o bien $m-k = 1$) y el conjunto

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y) > 0\}$$

es infinito, entonces existen enteros a, q con $0 \leq a < q$ y un subespacio lineal j -dimensional V , invariante bajo F^q , tales que para $\widehat{X} = F^a(X)$ los números

$$\begin{aligned} \alpha &:= \dim_{\mathbb{C}}(\widehat{X} \cap V), \\ \beta &:= \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V), \end{aligned}$$

satisfacen la desigualdad $\alpha + \beta > j$.

Cuando X tiene dimensión 2, demostramos un resultado análogo, suponiendo que F es diagonalizable y sin 2-resonancias, esto es, ningún cociente de productos de dos valores propios de F es raíz de la unidad. Primero demostramos el resultado para \mathbb{C}^4 , el cual necesitamos para \mathbb{C}^m , con $m > 4$.

Teorema 4.4 Sean X, Y dos subespacios 2-dimensionales de \mathbb{C}^4 y $F : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ un operador lineal sin 2-resonancias. Si el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ es infinito, entonces existe un subespacio j -dimensional V de \mathbb{C}^4 , invariante bajo F , tal que los números

$$\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(X \cap V) \quad \text{y} \quad \beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V)$$

satisfacen que $\alpha + \beta > j$.

En este caso, observamos que los enteros a y q son 0 y 1 respectivamente. Para el caso general \mathbb{C}^m , con $m > 4$, consideramos la base B formada por los vectores propios de F y además de suponer que F es diagonalizable, suponemos que los subespacios X y Y no son generados

por elementos de la base B .

Teorema 4.6 Sean $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un operador lineal sin 2-resonancias, X y Y subespacios de \mathbb{C}^m , $m \geq 4$, tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 2$. Si el subespacio X no está contenido en ningún subespacio generado por algún subconjunto de la base B , el subespacio Y es distinto de cualquier subespacio generado por algún subconjunto de B , y el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ es infinito, entonces existen números enteros a, q , con $0 \leq a < q$ y un subespacio j -dimensional V de \mathbb{C}^m , invariante bajo F^q , tal que los números $\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(F^a(X) \cap V)$ y $\beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V)$ satisfacen que $\alpha + \beta > j$.

Es importante destacar que las pruebas de estos dos últimos resultados están centradas en el área de álgebra exterior y teoría de gráficas. Más específicamente, en las demostraciones aparecen de forma natural los s -vectores y las s -formas en \mathbb{C}^m sobre \mathbb{C} . Por ello, en la primera sección de este capítulo, dada una base B de \mathbb{C}^m , describimos como a cada s -vector (o s -forma) le asociamos una gráfica, definida como el soporte del s -vector (o de la s -forma) con respecto a la base B . Más aún, a cualquier subespacio s -dimensional de \mathbb{C}^m le asociamos un s -vector mediante una base que lo genere y por tanto, le asociamos una gráfica. Por la definición de soporte del s -vector, una vez fija la base B de \mathbb{C}^m , la gráfica no sufre alteraciones aunque cambiemos la base del subespacio. En nuestro contexto, el subespacio X está asociado con una gráfica, su soporte. De manera análoga, el subespacio Y también está asociado a una gráfica que proviene del soporte de una 2-forma.

Además de esta definición, probamos resultados para soportes de subespacios 2-dimensionales mediante soportes de 2-vectores, o bien, de subespacios $(m - 2)$ -dimensionales mediante soportes de 2-formas. Por ejemplo, en cualquiera de los dos casos, si el soporte contiene dos aristas ajenas a y b , entonces debe contener a la arista que conecta un vértice de a con uno de b (ver Lemas 4.13 y 4.14).

Finalmente, encontramos propiedades que relacionan dichas gráficas con los subespacios X y Y ; de estos resultados se desprende la justificación para las condiciones pedidas en el último teorema. Si X no está contenido en ningún subespacio generado por elementos de la base de vectores propios de F , entonces su soporte es una gráfica conexa con m vértices. Más aún, cualesquiera dos vértices son adyacentes o existe una trayectoria de longitud 2 que los conecta (ver Lema 4.15). Bajo esta misma condición, probamos que si a, b y c son vértices del soporte y alguno de los vértices b ó c es adyacente al vértice a (pero no ambos), entonces el soporte debe contener a la arista que conecta a b y c ; si ninguno de los dos es adyacente al vértice a , entonces tampoco existe la arista que conecta a b y c (ver Lema 4.17). Los resultados sobre el subespacio Y son completamente análogos, partiendo de que Y no contiene a ningún subespacio generado por elementos de la base de vectores propios de F . Estas propiedades tienen mucha relevancia para las demostraciones de los teoremas 4.4 y 4.6.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciamos conceptos que utilizaremos a lo largo del trabajo, por ejemplo, conjuntos algebraicos, sucesiones de recurrencia lineal, formas multilineales y multivectores, así como las Grassmannianas.

1.1. Conjuntos algebraicos

Sea \mathbb{C} el campo de los números complejos y $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en \mathbb{C} , de aquí en adelante denotado por $\mathbb{C}[x]$, donde $x := (x_1, \dots, x_n)$.

Definición 1.1 Dado un subconjunto $S \subseteq \mathbb{C}[x]$, definimos el *conjunto algebraico asociado a S* como

$$\mathbf{V}(S) := \{a \in \mathbb{C}^n \mid f(a) = 0, \text{ para todo } f \in S\}.$$

Si $W \subseteq \mathbb{C}^n$ es tal que $W = \mathbf{V}(S)$ para algún conjunto $S \subseteq \mathbb{C}[x]$, decimos que W es un *conjunto algebraico afín*.

Definición 1.2 Dado un conjunto algebraico afín $W \subseteq \mathbb{C}^n$, definimos el *ideal del conjunto algebraico W* como

$$\mathbf{I}(W) = \{f \in \mathbb{C}[x] \mid f(a) = 0 \text{ para todo } a \in W\}.$$

Observación 1.3 El conjunto $\mathbf{I}(W)$ es un ideal de $\mathbb{C}[x]$. Además, si $\mathbf{V}(J) \subseteq W$ entonces $J \subseteq \mathbf{I}(W)$.

El *espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ de dimensión n* es el espacio cociente $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, donde la relación de equivalencia \sim está definida como $(a_0, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un punto en $\mathbb{C}P^n$ es una clase de equivalencia denotada por $[a_0 : \dots : a_n]$, de la cual (a_0, \dots, a_n) es un representante, es decir,

$$[a_0 : \dots : a_n] := \{\lambda(a_0, \dots, a_n) : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

En general, dado un espacio vectorial V sobre un campo F , definimos el *espacio proyectivo de V* , denotado por $\mathbb{P}(V)$, como el cociente $V \setminus \{0\} / \sim$. Dos vectores \vec{u} y \vec{v} en $V \setminus \{0\}$ son equivalentes si y sólo si existe $\lambda \in F \setminus \{0\}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$. Un punto en $\mathbb{P}(V)$ es una clase de equivalencia denotada por $[\vec{u}]$ de la cual \vec{u} es un representante.

Definición 1.4 Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ es *homogéneo de grado k* si y sólo si $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definición 1.5 Un subconjunto $W \subseteq \mathbb{C}P^n$ es un *conjunto algebraico proyectivo* si y sólo si $W = \mathbf{V}(S)$ para algún conjunto de polinomios homogéneos $S \subseteq \mathbb{C}[x]$.

En las tres secciones siguientes haremos mención de algunas definiciones y propiedades del álgebra exterior, las cuales utilizaremos a lo largo del trabajo (ver [8] y [9] para más información).

1.2. Formas multilineales

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo \mathbb{C} . Si $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ es una base de V , entonces para cada $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{x}_i$ con $v_i \in \mathbb{C}$. Las funciones lineales $x_j^* : V \rightarrow \mathbb{C}$, definidas como $x_j^*(v) = v_j$ para cada $j = 1, \dots, n$, son llamadas *formas básicas*. Denotamos por S_k al grupo simétrico sobre el conjunto $\{1, \dots, k\}$.

Definición 1.6 Una *forma de grado k* (o una *k -forma*) es una función $\varphi^* : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{C}$, la cual cumple las siguientes propiedades.

1. Es k -lineal, esto es, para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, se satisface que

$$\varphi^*(\vec{v}_1, \dots, \lambda_1 \vec{v}_i + \lambda_2 \vec{u}_i, \dots, \vec{v}_k) = \lambda_1 \varphi^*(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_k) + \lambda_2 \varphi^*(\vec{v}_1, \dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{v}_k),$$

para cada $i = 1, \dots, k$.

2. Es alternante, es decir,

$$\varphi^*(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_k}) = (-1)^\nu \varphi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k),$$

donde $\nu = 0$ si la permutación (i_1, \dots, i_k) es par y $\nu = 1$ si es impar.

Sean φ^*, ψ^* dos k -formas y $\lambda \in \mathbb{C}$. La suma de dos k -formas y la multiplicación de una k -forma por un escalar están definidas como

$$\begin{aligned} (\varphi^* + \psi^*)(\xi) &= \varphi^*(\xi) + \psi^*(\xi), \\ (\lambda \varphi^*)(\xi) &= \lambda \varphi^*(\xi), \end{aligned}$$

donde $\xi = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$. De esta manera, el conjunto $\bigwedge^k(V^*)$ de todas las k -formas en V es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y por la Proposición 1.9, su dimensión es $\binom{n}{k}$.

Definición 1.7 Sean $\varphi_1^*, \dots, \varphi_k^* : V \rightarrow \mathbb{C}$ k formas de grado 1. El *producto exterior*

$$\varphi_1^* \wedge \dots \wedge \varphi_k^* : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{C}$$

está definido como

$$(\varphi_1^* \wedge \dots \wedge \varphi_k^*)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k) = \begin{vmatrix} \varphi_1^*(\vec{x}_1) & \cdots & \varphi_k^*(\vec{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^*(\vec{x}_k) & \cdots & \varphi_k^*(\vec{x}_k) \end{vmatrix}$$

Observación 1.8 1. El producto exterior $\varphi_1^* \wedge \cdots \wedge \varphi_k^*$ es una k -forma. En efecto, ya que el determinante es alternante y multilineal.

2. Si dos de los elementos en el multi-índice (i_1, \dots, i_k) son iguales, entonces la k -forma

$$\varphi_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}^*$$

es cero. En efecto, si dos de los elementos son iguales, entonces el determinante tiene dos columnas iguales, de donde se sigue la afirmación.

Proposición 1.9 Si $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ es base de V , entonces el conjunto

$$\{x_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es base del espacio vectorial $\bigwedge^k(V^*)$ y por tanto, su dimensión es $\binom{n}{k}$.

1.3. Multivectores

Sea V un espacio vectorial de dimensión n , sobre el campo \mathbb{C} . Para cada $p = 0, 1, 2, \dots, n$ construimos un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , denotado por $\bigwedge^p V$. Este espacio vectorial es llamado *espacio de vectores de grado p* (o p -vectores en V). Para $p = 0$ definimos $\bigwedge^0 V = \mathbb{C}$, para $p = 1$ definimos $\bigwedge^1 V = V$ y para $2 \leq p \leq n$ definimos el espacio vectorial $\bigwedge^p V$ como el conjunto de las sumas formales finitas (p -vectores o *vectores de grado p*):

$$\sum a_j (\vec{v}_{1,j} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{p,j}),$$

con $\vec{v}_{1,j}, \dots, \vec{v}_{p,j}$ vectores en V y $a_j = 0$ si $j > K$ para algún $K \in \mathbb{N}$. Estas sumas están sujetas a las reglas

1. $\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge (a\vec{v}_i + b\vec{u}_i) \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p = a(\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_i \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p) + b(\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_i \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p)$ para cada i .
2. $\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p = 0$ si para algún par de índices $i \neq j$ se tiene $\vec{v}_i = \vec{v}_j$.
3. $\vec{v}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{\sigma(p)} = \text{sgn}(\sigma) \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p$, donde $\sigma \in S_p$.

Definición 1.10 La *multiplicación* de un p -vector canónico² $\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p$ por un q -vector canónico $\vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_q$ está definida como

$$(\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p) \wedge (\vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_q) := \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p \wedge \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_q$$

y es extendida linealmente para cualquier p -vector ϑ por cualquier q -vector ω , denotado por $\vartheta \wedge \omega$ (el cual es cero si $p + q > n$).

¹También llamados *multivectores* si no hay ambigüedad con el grado.

²Un multivector *canónico* es aquel que tiene un único término y coeficiente igual a 1.

Este producto de multivectores satisface las siguientes propiedades:

1. $\vartheta \wedge (a\omega) = a\vartheta \wedge \omega$ para cualquier $a \in \mathbb{C}$.
2. $\vartheta \wedge (\omega + \zeta) = \vartheta \wedge \omega + \vartheta \wedge \zeta$.
3. $\zeta \wedge (\vartheta \wedge \omega) = (\zeta \wedge \vartheta) \wedge \omega$.
4. $\vartheta \wedge \omega = (-1)^{pq}\omega \wedge \vartheta$.

Proposición 1.11 (a) Los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ son linealmente independientes si y sólo si

$$\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k \neq 0.$$

(b) Si $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ es base de V , entonces el conjunto

$$\{\vec{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \vec{x}_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

es base del espacio $\bigwedge^p V$ y por tanto la dimensión de $\bigwedge^p V$ es $\binom{n}{p}$.

De esta manera, los espacios vectoriales $\bigwedge^p(V^*)$ y $\bigwedge^p V$ son isomorfos pues tienen la misma dimensión. Así mismo, el espacio dual $(\bigwedge^p V)^*$ de $\bigwedge^p V$ es isomorfo a $\bigwedge^p(V^*)$. Además, si $0 < p < n$, entonces $\bigwedge^p V$ es isomorfo a $\bigwedge^{n-p}(V^*)$.

1.4. Grassmannianas y el encaje de Plücker.

Sea V un espacio vectorial n -dimensional sobre \mathbb{C} . Para cada natural d , $1 \leq d \leq n$, la d -variedad Grassmanniana consiste de todos los subespacios vectoriales d -dimensionales de V y es denotada por $G_{d,V}$.

Definimos la aplicación $p : G_{d,V} \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ como sigue: para cada $W \in G_{d,V}$, si $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d\}$ es una base de W , entonces $p(W) := [\vec{w}_1 \wedge \dots \wedge \vec{w}_d]$. Esta aplicación está bien definida, ya que si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d\}$ son bases de W , los productos exteriores $\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_d = \lambda \vec{w}_1 \wedge \dots \wedge \vec{w}_d$ difieren solamente por un escalar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además, no es difícil probar que $p : G_{d,V} \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ es inyectiva [8].

La aplicación $p : G_{d,V} \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ es conocida como el *encaje de Plücker* y la d -variedad Grassmanniana se ve como un subconjunto del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\bigwedge^d V)$.

Definición 1.12 Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{C} , $\vec{v} \in V$ y $\omega \in \bigwedge^d V$. Decimos que \vec{v} divide a ω si existe $\vartheta \in \bigwedge^{d-1} V$ tal que $\omega = \vec{v} \wedge \vartheta$.

Como consecuencia de esta definición, \vec{v} divide a ω si y sólo si $\vec{v} \wedge \omega = 0$. El conjunto de todos los $\vec{v} \in V$ que dividen al d -vector $\omega \in \bigwedge^d V$ forman un subespacio vectorial de V , denotado por D_ω ,

$$D_\omega := \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \wedge \omega = 0\}.$$

Definición 1.13 Sean W un subespacio vectorial d -dimensional de V y $\omega \in \bigwedge^d V$ un d -vector no cero. Decimos que ω es *factorizable por W* si $\omega = a(\vec{w}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{w}_d)$ para algún $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para alguna base $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_d\}$ de W .

Los siguientes resultados pueden consultarse en [8].

Proposición 1.14 Un d -vector ω es factorizable por un subespacio W si y sólo si $D_\omega = W$.

Dado $\omega \in \bigwedge^d V$, la transformación $\Omega_\omega : V \rightarrow \bigwedge^{d+1} V$ definida como $\Omega_\omega(\vec{v}) := \omega \wedge \vec{v}$ es lineal ya que

$$\begin{aligned}\Omega_\omega(\vec{v}_1 + a\vec{v}_2) &= \omega \wedge (\vec{v}_1 + a\vec{v}_2) \\ &= \omega \wedge \vec{v}_1 + a\omega \wedge \vec{v}_2 = \Omega_\omega(\vec{v}_1) + a\Omega_\omega(\vec{v}_2).\end{aligned}$$

Corolario 1.15 Sea $\omega \in \bigwedge^d V$ no cero, entonces ω es factorizable por un subespacio W si y sólo si Ω_ω tiene rango $n - d$.

Lema 1.16 Sea $p : G_{d,V} \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ el encaje de Plücker y $\omega \in \bigwedge^d V$ no cero. Entonces $[\omega] \in p(G_{d,V})$ si y sólo si ω es factorizable por un subespacio W .

Proposición 1.17 El subconjunto $p(G_{d,V}) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^d V)$ es un conjunto algebraico proyectivo.

1.5. Teorema de Skolem-Mahler-Lech

En esta sección R denotará un anillo conmutativo con unidad 1.

Definición 1.18 Una sucesión $a(n)$ de elementos de R es una *sucesión de recurrencia lineal homogénea* si existe $k \in \mathbb{N}$ y $s_1, \dots, s_k \in R$ tales que

$$a(n+k) = s_1 a(n+k-1) + \cdots + s_{k-1} a(n+1) + s_k a(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

El polinomio

$$f(x) = x^k - s_1 x^{k-1} - \cdots - s_{k-1} x - s_k$$

asociado a la relación (1.1) es llamado su *polinomio característico*, y se dice, en este caso, que la relación es de *orden k* , con coeficientes s_1, \dots, s_k .

Las sucesiones de recurrencia lineal *no homogéneas* son de la forma

$$a(n+k) = s_1 a(n+k-1) + \cdots + s_{k-1} a(n+1) + s_k a(n) + s_{k+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad s_{k+1} \neq 0.$$

Si $a(n)$ es una sucesión no homogénea, observamos que

$$\begin{aligned}a(n+k+1) &= s_1 a(n+k) + \cdots + s_{k-1} a(n+2) + s_k a(n+1) + s_{k+1} \\ &= s_1 a(n+k) + \cdots + s_{k-1} a(n+2) + s_k a(n+1) + s_{k+1} + a(n+k) - a(n+k) \\ &= s_1 a(n+k) + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i+1} a(n+k-i) + s_{k+1} + a(n+k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} s_i a(n+k-i) - s_k a(n) - s_{k+1} \\ &= (s_1 + 1)a(n+k) + \sum_{i=1}^{k-1} (s_{i+1} - s_i) a(n+k-i) - s_k a(n).\end{aligned}$$

Entonces, esta sucesión satisface una relación de recurrencia homogénea de orden $k + 1$, con polinomio característico

$$F(x) = (x^k - s_1x^{k-1} - \cdots - s_{k-1}x - s_k)(x - 1).$$

Para una sucesión de recurrencia lineal de orden k , definida por la relación (1.1), los elementos $a(1), \dots, a(k)$ son llamados *valores iniciales*; éstos determinan todos los elementos de la sucesión. Además, si s_k es un elemento invertible de R entonces la sucesión puede continuarse para valores negativos, definiendo

$$a(0) := s_k^{-1} \left(a(k) - (s_1a(k-1) + \cdots + s_{k-1}a(1)) \right).$$

Los valores $a(-1), a(-2), \dots$ quedan definidos con (1.1).

Definición 1.19 Una *suma de potencias generalizada* es una suma finita de la forma

$$\sum_{i=1}^r A_i(n)\alpha_i^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

con coeficientes polinomiales $A_i \in R[n]$ de grado k_i y $\alpha_i \in R$ para cada i .

Cualquier sucesión en la cual cada uno de sus elementos es una suma de potencias generalizada es una sucesión de recurrencia lineal. Para demostrar este resultado definimos dos operadores sobre sucesiones, esto es, si $\{a(n)\}$ es cualquier sucesión, definimos

$$E(a)(n) := a(n+1) \quad \text{y} \quad \Delta(a)(n) := a(n+1) - a(n).$$

Observación 1.20 De manera inmediata, tenemos lo siguiente:

1. Si $\{a(n)\}, \{b(n)\}$ son dos sucesiones y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se satisface

$$E(a + \lambda b)(n) = E(a)(n) + \lambda E(b)(n) \quad \text{y} \quad \Delta(a + \lambda b)(n) = \Delta(a) + \lambda \Delta(b)(n).$$

2. Sea $k \in \mathbb{N}$. Si $\alpha \in R$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$(E - \alpha)(n^{k-1}\alpha^n) = \Delta(n^{k-1})\alpha^{n+1}.$$

3. Si $j < k$, entonces $\Delta^k(n^j) = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.21 Sea $A \in R[n]$ cualquier polinomio. Si $\alpha, \beta \in R$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(E - \beta)^k(A(n)\alpha^n) = \begin{cases} \Delta^k(A(n))\alpha^{n+k}, & \text{si, } \alpha = \beta, \\ \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} A(n+k-i)\alpha^{n+k-i}\beta^i, & \text{si, } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Prueba. La prueba se realiza por inducción sobre k . □

Proposición 1.22 Si $\{a(n)\}$ es una sucesión de sumas de potencias generalizadas, entonces es una sucesión de recurrencia lineal.

Prueba. Por hipótesis, existen $A_1, \dots, A_r \in R[n]$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a(n) = \sum_{i=1}^r A_i(n) \alpha_i^n$$

y el grado de cada polinomio $A_i(n)$ es $k_i - 1$. Usando la proposición anterior, se demuestra por inducción sobre r que

$$\prod_{i=1}^r (E - \alpha_i)^{k_i} (a(n)) = 0.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\prod_{i=1}^r (E - \alpha_i)^{k_i} = E^k - s_1 E^{k-1} - \dots - s_{k-1} E - s_k,$$

donde $k = \sum_{i=1}^r k_i$. Por lo tanto,

$$a(n+k) = s_1 a(n+k-1) + \dots + s_{k-1} a(n+1) - s_k.$$

Concluimos que $\{a(n)\}$ es una sucesión de recurrencia lineal. □

Definición 1.23 Sean a y d números enteros fijos con $d \geq 0$. Una *progresión aritmética de razón d* es una sucesión de números enteros de la forma

$$\{a + dk : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Teorema 1.24 [Skolem-Mahler-Lech][6] Sea $a(n)$ una sucesión de recurrencia lineal sobre un campo de característica cero. Entonces el conjunto de ceros de $a(n)$ consiste de un conjunto finito junto con una cantidad finita de progresiones aritméticas.

El siguiente resultado [10] será utilizado en el cuarto capítulo de esta tesis.

Teorema 1.25 Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ números complejos no cero, distintos entre sí y tales que ningún cociente de dos de ellos es raíz de la unidad. Si $p_1(n), \dots, p_r(n)$ son polinomios en la variable n con coeficientes en los complejos y distintos del polinomio cero, entonces la ecuación

$$\sum_{k=1}^r p_k(n) \alpha_k^n = 0$$

tiene una cantidad finita de soluciones en los números racionales.

A lo largo de los capítulos 2 y 3 utilizamos progresiones aritméticas por lo que es importante recordar un par de resultados.

Lema 1.26 En el anillo de los enteros \mathbb{Z} , sean $A_j = \{a_j + d_j k : k \in \mathbb{Z}\}$, $j = 1, \dots, n$, progresiones aritméticas de razón d_j . Si existe un número entero a tal que $a \in \bigcap_{j=1}^n A_j$, entonces

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = \{a + dk : k \in \mathbb{Z}\},$$

donde $d = [d_1, \dots, d_n]$ es el mínimo común múltiplo de d_1, \dots, d_n .

Prueba. La prueba se realiza por inducción, comenzando con el paso base $n = 2$. Supongamos que $a \in A_1 \cap A_2$ y consideramos la ecuación diofantina

$$d_2 x + d_1 y = a_1 - a_2. \quad (1.2)$$

Como $a \in A_1 \cap A_2$, entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} a &= a_1 + d_1 k_1 \\ a &= a_2 + d_2 k_2 \end{aligned}$$

De donde $d_2 k_2 - d_1 k_1 = a_1 - a_2$, por lo que $(k_2, -k_1)$ es una solución de la ecuación diofantina (1.2) y entonces todas sus soluciones son de la forma

$$x = k_2 + \frac{d_1}{(d_1, d_2)} k, \quad y = -k_1 - \frac{d_2}{(d_1, d_2)} k$$

con $k \in \mathbb{Z}$ y (d_1, d_2) el máximo común divisor de d_1 y d_2 .

Para probar que $A_1 \cap A_2 \subseteq \{a + dk : k \in \mathbb{Z}\}$ (d es el mínimo común múltiplo de d_1 y d_2), consideramos $c \in A_1 \cap A_2$. Es decir, existen $k'_1, k'_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $c = a_1 + d_1 k'_1 = a_2 + d_2 k'_2$. Por lo que $(k'_2, -k'_1)$ es solución de la ecuación diofantina (1.2), entonces

$$k'_1 = k_1 + \frac{d_2}{(d_1, d_2)} k.$$

Así,

$$c = a_1 + d_1 k_1 + \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)} k = a + dk$$

con d el mínimo común múltiplo de d_1 y d_2 .

Para probar que $A_1 \cap A_2 \supseteq \{a + dk : k \in \mathbb{Z}\}$, consideramos $c = a + dk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces $c = a_j + d_j k_j + dk$ ya que $a = a_j + d_j k_j$, $j = 1, 2$. Como $d = d_j k'_j$ con $k'_j \in \mathbb{Z}$, entonces $c = a_j + d_j (k_j + k'_j k)$. Por lo tanto, $c \in A_1 \cap A_2$.

Hipótesis de Inducción: Si $a \in \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j$, entonces

$$\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j = \{a + dk : k \in \mathbb{Z}\},$$

donde d es el mínimo común múltiplo de d_1, \dots, d_{n-1} .

Paso Inductivo: Sea $a \in \bigcap_{j=1}^n A_j$; como $\bigcap_{j=1}^n A_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j$, entonces por hipótesis de inducción

$$\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j = \{a + d'k : k \in \mathbb{Z}\},$$

donde d' es el mínimo común múltiplo de d_1, \dots, d_{n-1} . Así por el paso base,

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = \{a + dk : k \in \mathbb{Z}\},$$

donde d es el mínimo común múltiplo de d' y d_n , el cual coincide con el mínimo común múltiplo de d_1, \dots, d_n . \square

Lema 1.27 *Si $A = \{a + dk : k \in \mathbb{Z}\}$ es una progresión aritmética, entonces existe un único entero $a_0 \in \{0, \dots, d-1\}$ tal que A coincide con la progresión aritmética*

$$\{a_0 + dk : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Prueba. Por el algoritmo de la división se tiene que $a = a_0 + dk_2$ con $a_0 \in \{0, \dots, d-1\}$ y $k_2 \in \mathbb{Z}$. Denotamos por $A' = \{a_0 + dk : k \in \mathbb{Z}\}$. Vamos a demostrar que $A = A'$.

Si $a + dk$ es cualquier elemento de A , entonces $a + dk = a_0 + d(k + k_2)$. Así, $a + dk$ también es un elemento de A' . Por otro lado, si $a_0 + dk$ es cualquier elemento de A' , se tiene que $a_0 + dk = a + d(k - k_2)$. Es decir, $a_0 + dk$ también es un elemento de A . Por lo que A y A' coinciden.

Si suponemos que existe otro $a_1 \in \{0, \dots, d-1\}$ tal que A coincide con la progresión aritmética

$$\{a_1 + dk : k \in \mathbb{Z}\},$$

entonces $a = a_1 + dk_3$ para algún $k_3 \in \mathbb{Z}$ ya que $a \in A$. Entonces $a_0 - a_1 = d(k_3 - k_2)$. Esto implica que d divide a $a_0 - a_1$ por lo que $|a_0 - a_1| \geq d$, o bien, $a_0 - a_1 = 0$. Lo primero es imposible, pues $a_0, a_1 \in \{0, \dots, d-1\}$. Por lo tanto, $a_0 = a_1$. \square

Capítulo 2

Caso diagonalizable

En este capítulo consideramos la cuarteta (\mathbb{C}^m, X, Y, F) donde $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ son subespacios lineales de dimensión compleja complementaria, k y $m - k$ respectivamente; además F denotará un isomorfismo lineal de \mathbb{C}^m en sí mismo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la transformación $F^n : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ como $F^n = F \circ F \circ \dots \circ F$, la composición n veces de la transformación F . Como existe la transformación inversa F^{-1} de F , entonces para cada $n \in \mathbb{Z}^-$, se define $F^n : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ como $F^n = (F^{-1})^{|n|}$.

A lo largo del trabajo estudiamos el comportamiento dinámico de la función

$$\begin{aligned}\mu & : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, \dots, m\}, \\ \mu(n) & := \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y).\end{aligned}$$

Observación 2.1 Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tienen las siguientes afirmaciones.

- (a) El subespacio $F^n(X)$ tiene la misma dimensión compleja que X .
- (b) Los subespacios $F^n(X) \cap Y$ y $X \cap F^{-n}(Y)$ tienen la misma dimensión compleja.

Prueba. *Prueba del inciso (a).* Supongamos que el conjunto $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ es una base del subespacio X . Como F^n es isomorfismo lineal, entonces el conjunto $\{F^n(\vec{u}_1), \dots, F^n(\vec{u}_k)\}$ es linealmente independiente. Además, $\vec{y} \in F^n(X)$ si y sólo si existe un único $\vec{x} \in X$ tal que $F^n(\vec{x}) = \vec{y}$. Como $\vec{x} = \sum_{i=1}^k a_i \vec{u}_i$, entonces

$$F^n(\vec{x}) = F^n\left(\sum_{i=1}^k a_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i F^n(\vec{u}_i).$$

Por lo que, $\vec{y} \in F^n(X)$ si y sólo si $\vec{y} \in \langle F^n(\vec{u}_1), \dots, F^n(\vec{u}_k) \rangle$.

Prueba del inciso (b). Supongamos que el conjunto $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l\}$ es base del subespacio lineal $F^n(X) \cap Y$. Para cada \vec{y}_j existe un único $\vec{x}_j \in X$ tal que $F^n(\vec{x}_j) = \vec{y}_j$. Entonces los vectores $\vec{x}_j = F^{-n}(\vec{y}_j)$ son linealmente independientes. Por lo tanto,

$$\dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y) \leq \dim_{\mathbb{C}}(X \cap F^{-n}(Y)).$$

La otra desigualdad se prueba análogamente. \square

De esta manera, por el inciso (b) de la observación anterior, suponemos, sin pérdida de generalidad, que la dimensión compleja de X es menor o igual que la de Y , esto es, $k \leq m - k$.

Bajo la hipótesis de que F es diagonalizable tenemos los dos resultados siguientes. El primero de ellos relaciona la función μ con una ecuación en la que aparecen los valores propios de F . El segundo resultado nos dice que el conjunto de valores n tales que $\mu(n) > 0$ es la unión de un conjunto finito y una cantidad finita de progresiones aritméticas. La sección 2.1 de este capítulo consiste en la demostración de la primera proposición.

Proposición 2.2 Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ valores propios de $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$. Si F es un isomorfismo lineal diagonalizable, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\mu(n) > 0$ si y sólo si

$$\sum_{\sigma \in S_m} C_\sigma \Lambda_\sigma^n = 0, \quad (2.1)$$

donde S_m es el grupo simétrico, para cada $\sigma \in S_m$ se tiene que $C_\sigma \in \mathbb{C}$ y

$$\Lambda_\sigma = \lambda_{\sigma(1)} \cdots \lambda_{\sigma(k)} \quad y \quad \Lambda_\sigma^n = \underbrace{\Lambda_\sigma \cdots \Lambda_\sigma}_n.$$

Proposición 2.3 Sea $\Sigma := \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$. Si F es diagonalizable, entonces Σ consiste de un conjunto finito junto con una cantidad finita de progresiones aritméticas.

Prueba. Por la Proposición 2.2, $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \sum_{\sigma \in S_m} C_\sigma \Lambda_\sigma^n = 0\}$ y definimos

$$a(n) := \sum_{\sigma \in S_m} C_\sigma \Lambda_\sigma^n.$$

Esta expresión es una sucesión de sumas de potencias generalizadas (aunque puedan repetirse los Λ_σ) y por tanto es una sucesión de recurrencia lineal. Debido al Teorema 1.24 de Skolem-Mahler-Lech, Σ consiste de un conjunto finito junto con una cantidad finita de progresiones aritméticas. \square

Uno de los problemas de esta tesis es mostrar que existen casos en los cuales el conjunto Σ es finito, o bien, es una unión finita de progresiones aritméticas sin contener un conjunto finito que no esté relacionado con éstas. Para ello, en \mathbb{C}^m con $m \geq 2$, suponemos que el subespacio X tiene dimensión compleja igual a 1 y por lo tanto, la dimensión compleja de Y es igual a $m - 1$. Por la Proposición 2.2, para cada $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\mu(n) > 0$ si y sólo si

$$a_1 \lambda_1^n + \dots + a_m \lambda_m^n = 0, \quad (2.2)$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los valores propios de F .

Observación 2.4 La ecuación (2.2) se cumple si y sólo si

$$a_1 \Lambda_1^n + \dots + a_{m-1} \Lambda_{m-1}^n + a_m = 0,$$

donde $\Lambda_j = \lambda_j / \lambda_m$, $j = 1, \dots, m - 1$. Así,

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \Lambda_1^n + \dots + a_{m-1} \Lambda_{m-1}^n + a_m = 0\}.$$

Notación 2.5 Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_m|$. Para cada índice $j = 1, \dots, m-1$, expresamos el número complejo Λ_j como

$$\Lambda_j = R_j e^{i2\pi\theta_j},$$

donde $0 < R_j \leq 1$ es el módulo de Λ_j y $0 \leq \theta_j < 1$.

En \mathbb{C}^2 tenemos el siguiente resultado, el cual establece que el conjunto Σ cuando es finito tiene a lo más un elemento y en caso de ser infinito coincide con una progresión aritmética. Su demostración está en la sección 2.2.1 de este capítulo.

Teorema 2.6 Sean X y Y subespacios lineales 1-dimensionales de \mathbb{C}^2 , $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es un isomorfismo lineal diagonalizable y $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$. Con la notación anterior, se tienen los siguientes dos casos.

1. Si $a_1 a_2 = 0$, entonces el conjunto Σ es igual a \mathbb{Z} . Más aún, los subespacios X y Y son iguales y coinciden con alguno de los subespacios propios.
2. Si $a_1 a_2 \neq 0$ y
 - a) $R_1 \neq 1$, o bien, $\theta_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces el conjunto Σ tiene a lo más un elemento.
 - b) $R_1 = 1$, $\theta_1 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $(p, q) = 1$ y el conjunto Σ es no vacío, entonces existe un único número $n_0 \in \{0, \dots, q-1\}$ tal que

$$\Sigma = \{n_0 + qs : s \in \mathbb{Z}\}.$$

En \mathbb{C}^3 el resultado es similar en que el conjunto Σ es finito, o bien, es la unión finita de progresiones aritméticas sin contener un conjunto finito que no esté relacionado con las progresiones. La diferencia en este caso, es que en el caso finito, únicamente bajo ciertas condiciones obtenemos que Σ contiene a lo más dos elementos. Además, en el caso infinito, Σ consiste en la unión de a lo más dos progresiones aritméticas. La demostración de este teorema está en la sección 2.2.2 de este capítulo.

Teorema 2.7 Sean X y Y subespacios lineales de \mathbb{C}^3 tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ es un isomorfismo lineal diagonalizable y $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$. Con la notación 2.5, se cumple uno de los siguientes casos.

1. Si $a_1 a_2 a_3 = 0$, entonces el conjunto Σ tiene a lo más un elemento, es una progresión aritmética, o bien, coincide con \mathbb{Z} .
2. Si $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ y
 - a) $R_1 < 1$ o $R_2 < 1$, entonces el conjunto Σ tiene una cantidad finita de elementos,
 - b) $R_1 = R_2 = 1$ y $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para $j = 1$ o $j = 2$, entonces el conjunto Σ tiene a lo más dos elementos,
 - c) $R_1 = R_2 = 1$, $\theta_j = \frac{p_j}{q_j}$, $(p_j, q_j) = 1$ para $j = 1, 2$ y Σ no es vacío, entonces

- 1) $\Sigma = \{n_1 + qs : s \in \mathbb{Z}\}$, donde $q = [q_1, q_2]$ es el mínimo común múltiplo de q_1 y q_2 , $n \in \{0, \dots, q-1\}$, o bien,
- 2) $\Sigma = \{n_1 + qs : s \in \mathbb{Z}\} \cup \{n_2 + qs : s \in \mathbb{Z}\}$, donde n_1 y n_2 son elementos distintos de $\{0, \dots, q-1\}$.

En \mathbb{C}^m , con $m \geq 4$, obtenemos una cota superior para la cantidad de progresiones aritméticas si cada uno de los cocientes Λ_j es raíz de la unidad. Además, bajo esta condición obtenemos un subespacio invariante bajo una iteración de F . Las demostraciones de estos teoremas están en la sección 2.2.3 de este capítulo.

Teorema 2.8 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales con $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m-1$, $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ es un isomorfismo lineal diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Si para cada $1 \leq j \leq m-1$ se tiene

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_m} = e^{i2\pi \frac{p_j}{q_j}}, \quad (p_j, q_j) = 1$$

y el conjunto

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\} = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \Lambda_1^n + \dots + a_{m-1} \Lambda_{m-1}^n + a_m = 0\}$$

no es vacío, entonces se tiene uno de los siguientes casos.

1. Si $a_j \neq 0$ para todo índice j , entonces el conjunto Σ es la unión de a lo más q progresiones aritméticas (donde q es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_{m-1}),
2. Si $a_j = 0$ para algún índice j , entonces el conjunto Σ es la unión de a lo más \hat{q} progresiones aritméticas, donde \hat{q} es el mínimo común múltiplo de

$$q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_m$$

si $j < m$, o \hat{q} es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_{m-2} si $j = m$.

Teorema 2.9 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales con $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m-1$, $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ es un isomorfismo lineal diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Si para cada $1 \leq j \leq m-1$ se tiene

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_m} = e^{i2\pi \frac{p_j}{q_j}}, \quad (p_j, q_j) = 1$$

y existe $n \in \Sigma \cap \{0, \dots, q-1\}$, entonces el subespacio $X_n = F^n(X)$ es invariante bajo la transformación F^q .

2.1. Prueba de la dinámica de intersección para X de dimensión k

Para demostrar la Proposición 2.2 utilizaremos el siguiente resultado, el cual relaciona para cada entero n el valor de $\mu(n)$ con cualesquiera bases de los subespacios X y Y .

Lema 2.10 Sean $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}\}$ bases de los subespacios X y Y respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(n) = 0$ si y sólo si

$$F^n(\vec{u}_1) \wedge \dots \wedge F^n(\vec{u}_k) \wedge \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{m-k} \neq 0.$$

Prueba. Usando el inciso (a) de la Proposición 1.11, tenemos que

$$F^n(\vec{u}_1) \wedge \dots \wedge F^n(\vec{u}_k) \wedge \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{m-k} \neq 0$$

si y sólo si el conjunto de vectores $\{F^n(\vec{u}_1), \dots, F^n(\vec{u}_k), \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}\}$ es linealmente independiente. Como $\mu(n) = 0$ si y sólo si $F^n(X) \cap Y = \{0\}$, basta probar que $F^n(X) \cap Y = \{0\}$ ocurre si y sólo si los vectores $F^n(\vec{u}_1), \dots, F^n(\vec{u}_k), \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}$ son linealmente independientes.

Si consideramos la combinación lineal

$$\sum_{i=1}^k a_i F^n(\vec{u}_i) + \sum_{i=1}^{m-k} b_i \vec{v}_i = 0,$$

entonces $\sum_{i=1}^k a_i F^n(\vec{u}_i) = -\sum_{i=1}^{m-k} b_i \vec{v}_i$. Como la parte izquierda de esta igualdad es un elemento de $F^n(X)$ y la parte derecha es un elemento de Y , entonces $\sum_{i=1}^k a_i F^n(\vec{u}_i) = 0 = \sum_{i=1}^{m-k} b_i \vec{v}_i$. Por la independencia lineal de los conjuntos $\{F^n(\vec{u}_1), \dots, F^n(\vec{u}_k)\}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}\}$ se tiene que $a_i = 0$, $b_i = 0$ para todo i . Por lo que los vectores

$$F^n(\vec{u}_1), \dots, F^n(\vec{u}_k), \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}$$

son linealmente independientes. □

Prueba de la Proposición 2.2. Como F es un isomorfismo lineal, entonces cada uno de sus valores propios es distinto de cero. Además, por ser diagonalizable existe una base $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ de \mathbb{C}^m compuesta por vectores propios de F , esto es, $F(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$ para cada $j = 1, \dots, m$.

Si el conjunto $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ es base de X y el conjunto $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}\}$ es base de Y , entonces expresamos cada vector \vec{u}_j, \vec{v}_r , como combinación lineal de la base B ,

$$\begin{aligned} \vec{u}_j &= \sum_{i=1}^m a_{j,i} \vec{x}_i & 1 \leq j \leq k, \\ \vec{v}_r &= \sum_{l=1}^m b_{r,l} \vec{x}_l & 1 \leq r \leq m-k. \end{aligned}$$

Con la siguiente observación tenemos específicamente a cada vector $F^n(\vec{u}_j)$ como combinación lineal de los elementos de B . La demostración de este resultado se realiza al final de esta prueba.

Observación 2.11 Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces para cada $1 \leq j \leq k$ se cumple

$$F^n(\vec{u}_j) = \sum_{i_j=1}^m a_{j,i_j} \lambda_{i_j}^n \vec{x}_{i_j}. \tag{2.3}$$

Por el Lema 2.10, $\mu(n) > 0$ si y sólo si

$$F^n(\vec{u}_1) \wedge \cdots \wedge F^n(\vec{u}_k) \wedge \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{m-k} = 0.$$

Usando las propiedades de los multivectores, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} 0 &= F^n(\vec{u}_1) \wedge \cdots \wedge F^n(\vec{u}_k) \wedge \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{m-k} \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^m a_{1,i_1} \lambda_{i_1}^n \vec{x}_{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_k=1}^m a_{k,i_k} \lambda_{i_k}^n \vec{x}_{i_k} \right) \wedge \\ &\quad \wedge \left(\sum_{l_1=1}^m b_{1,l_1} \vec{x}_{l_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{l_{m-k}=1}^m b_{m-k,l_{m-k}} \vec{x}_{l_{m-k}} \right) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \lambda_{\sigma(1)}^n \cdots a_{k,\sigma(k)} \lambda_{\sigma(k)}^n b_{1,\sigma(k+1)} \cdots b_{m-k,\sigma(m)} \right) \vec{x}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x}_m \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} C_\sigma \Lambda_\sigma^n \right) \vec{x}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x}_m. \end{aligned}$$

Como $\vec{x}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x}_m \neq 0$, entonces $\sum_{\sigma \in S_m} C_\sigma \Lambda_\sigma^n = 0$. \square

Prueba de la Observación 2.11. La demostración se hará primero por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ tenemos que

$$F(\vec{u}_j) = F\left(\sum_{i_j=1}^m a_{j,i_j} \vec{x}_{i_j}\right) = \sum_{i_j=1}^m a_{j,i_j} F(\vec{x}_{i_j}) = \sum_{i_j=1}^m a_{j,i_j} \lambda_{i_j} \vec{x}_{i_j}.$$

La hipótesis de inducción es que se satisface (2.3) para alguna $n > 1$. Como F es lineal, se tiene que

$$\begin{aligned} F^{n+1}(\vec{u}_j) &= F(F^n(\vec{u}_j)) = F\left(\sum_{i_j=1}^m a_{j,i_j} \lambda_{i_j}^n \vec{x}_{i_j}\right) \\ &= \sum_{i_j=1}^m a_{j,i_j} \lambda_{i_j}^n F(\vec{x}_{i_j}) = \sum_{i_j=1}^m a_{j,i_j} \lambda_{i_j}^{n+1} \vec{x}_{i_j}. \end{aligned}$$

Para el caso en que $n < 0$, tenemos que F^{-1} es la transformación inversa de F , entonces

$$\vec{x}_j = F^{-1}F(\vec{x}_j) = F^{-1}(\lambda_j \vec{x}_j) = \lambda_j F^{-1}(\vec{x}_j),$$

por lo que $F^{-1}(\vec{x}_j) = \lambda_j^{-1} \vec{x}_j$. Así, los escalares $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ son valores propios de F^{-1} . Como $n < 0$, entonces $n = -|n|$, lo cual implica que $F^n = (F^{-1})^{|n|}$. Por lo tanto, se satisface (2.3). \square

2.2. Análisis del conjunto Σ para X de dimensión 1 y $m \geq 2$

Antes de proceder con las pruebas de los Teoremas 2.6, 2.7 y 2.8, demostraremos un resultado que será utilizado más adelante.

Proposición 2.12 Sea un número $r \in \mathbb{N}$, con $r \geq 2$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si se satisface que

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{r-1}| < |\lambda_r|,$$

entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n = 0\}$ es finito.

Prueba. Si $n \geq 0$, entonces $a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n = 0$ si y sólo si

$$a_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_r} \right)^n + \dots + a_{r-1} \left(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} \right)^n + a_r = 0.$$

Como $|\lambda_j|/|\lambda_r| < 1$ para todo $j < r$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_r} \right)^n + \dots + a_{r-1} \left(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} \right)^n + a_r \right) = a_r.$$

Usando la definición de límite, tenemos que para $\varepsilon = |a_r| > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left| a_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_r} \right)^n + \dots + a_{r-1} \left(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} \right)^n \right| < |a_r|,$$

de donde

$$|a_1\lambda_1^n + \dots + a_{r-1}\lambda_{r-1}^n| < |a_r\lambda_r^n|.$$

Lo cual implica que

$$0 < |a_r\lambda_r^n| - |a_1\lambda_1^n + \dots + a_{r-1}\lambda_{r-1}^n| \leq |a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n|,$$

por lo que $a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n \neq 0$ para todo $n \geq N$.

Si $n < 0$ entonces $n = -n'$, donde $n' = |n|$ y

$$a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n = a_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^{n'} + \dots + a_r \left(\frac{1}{\lambda_r} \right)^{n'}.$$

Por lo que $a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n = 0$ si y sólo si

$$a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{n'} + \dots + a_r \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_r} \right)^{n'} = 0.$$

De manera que

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \left(a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{n'} + \dots + a_r \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_r} \right)^{n'} \right) = a_1,$$

lo cual implica, como en el caso anterior, que existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n \neq 0$ para toda $n \leq -N'$. Concluimos que el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n = 0\}$ es finito. \square

Corolario 2.13 Sea un número $r \in \mathbb{N}$, con $r \geq 2$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si se satisface que

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{r-1}| < |\lambda_r|,$$

entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}^+ : a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n = 0\}$ es finito.

Corolario 2.14 Sea un número $r \in \mathbb{N}$, con $r \geq 2$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si se satisface que

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{r-1}| \leq |\lambda_r|,$$

entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}^- : a_1\lambda_1^n + \dots + a_r\lambda_r^n = 0\}$ es finito.

2.2.1. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^2

Una de las hipótesis del Teorema 2.6 es que el isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es diagonalizable y sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denotemos por $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ a la base formada por los vectores propios de F .

Como ambos subespacios X y Y tienen dimensión compleja igual a 1, supongamos $X = \langle \vec{u}_1 \rangle$ y $Y = \langle \vec{v}_1 \rangle$. Expresamos estos vectores como combinación lineal de los elementos de la base B ,

$$\vec{u}_1 = u_{1,1}\vec{x}_1 + u_{2,1}\vec{x}_2, \quad \vec{v}_1 = v_{1,1}\vec{x}_1 + v_{2,1}\vec{x}_2.$$

Antes de probar el teorema, tenemos el siguiente resultado, el cual describe al conjunto Σ dadas las bases de los subespacios X y Y .

Lema 2.15 *Con la notación anterior, el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ coincide con el conjunto*

$$\{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = 0\},$$

donde $a_1 = u_{1,1}v_{2,1}$ y $a_2 = -u_{2,1}v_{1,1}$.

Prueba. Por el Lema 2.10, $\mu(n) > 0$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 = 0$. Como $F^n(\vec{u}_1) = u_{1,1}\lambda_1^n\vec{x}_1 + u_{2,1}\lambda_2^n\vec{x}_2$, entonces

$$F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 = (u_{1,1}v_{2,1}\lambda_1^n - u_{2,1}v_{1,1}\lambda_2^n)\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2.$$

Por lo que se obtiene la ecuación

$$a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = 0 \tag{2.4}$$

Por lo tanto, $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = 0\}$. \square

Prueba del Teorema 2.6, caso 1. Si $a_1a_2 = 0$, entonces ambos deben ser cero, pues se satisface (2.4) y $\lambda_j \neq 0$. Por lo tanto, $a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Además, de la definición de a_1 y a_2 (ver Lema 2.15) tenemos que $u_{1,1}v_{2,1} = 0$ y $u_{2,1}v_{1,1} = 0$. Si $u_{1,1} = 0$, entonces $v_{1,1} = 0$ pues $u_{2,1} \neq 0$ ya que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$. Así, X y Y coinciden con el subespacio propio $\langle \vec{x}_2 \rangle$. Si $v_{2,1} = 0$, de manera análoga se tiene que X y Y coinciden con el subespacio propio $\langle \vec{x}_1 \rangle$ (Figura 2.1). \square

Prueba del Teorema 2.6, caso 2. Si $a_1a_2 \neq 0$, entonces reescribimos la ecuación (2.4) como

$$\Lambda_1^n + \frac{a_2}{a_1} = 0,$$

donde $\Lambda_1 = \lambda_1/\lambda_2$. Además, $\Lambda_1 = R_1e^{i2\pi\theta_1}$, donde R_1 es el módulo de Λ_1 y $0 \leq \theta_1 < 1$.

Prueba caso 2 a). Supongamos que existen $n, n' \in \Sigma$, entonces

$$\Lambda_1^n = \Lambda_1^{n'} = -\frac{a_2}{a_1},$$

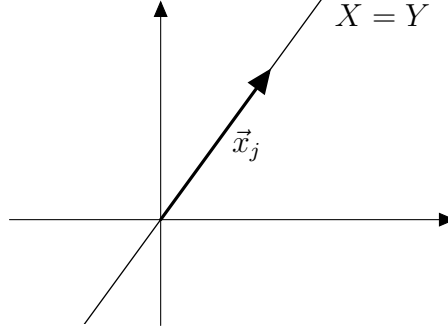


Figura 2.1: Los subespacios X y Y son iguales y coinciden con un subespacio propio

esto implica que $\Lambda_1^{n-n'} = 1$. Así, tenemos que

$$R_1^{n-n'} e^{i2\pi\theta_1(n-n')} = 1.$$

Si $R_1 \neq 1$, entonces $n = n'$. Por otra parte, si $R_1 = 1$ y $\theta_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, como $e^{i2\pi\theta_1(n-n')} = 1$, entonces el producto $\theta_1(n-n')$ debe ser un número entero, por lo que $n = n'$. Así, en cualquier caso, el conjunto Σ tiene a lo más un elemento.

Prueba caso 2. b) Supongamos que $n_0 \in \Sigma$ y vamos a denotar por A a la progresión aritmética

$$\{n_0 + qs : s \in \mathbb{Z}\}.$$

Primero, consideremos cualquier elemento $n \in \Sigma$. Como $R_1 = 1$ y $\theta_1 = \frac{p}{q}$, entonces el producto $\frac{p}{q}(n - n_0)$ es un número entero. Así, q divide a $(n - n_0)$ (porque p y q son coprimos), esto es, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n - n_0 = qs.$$

Por lo que $n \in A$. Recíprocamente, si el número entero n es cualquier elemento de la progresión aritmética A , existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $n = n_0 + qs$ y

$$\Lambda_1^n = \Lambda_1^{n_0} \Lambda_1^{qs} = \Lambda_1^{n_0} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Por lo tanto, $n \in \Sigma$ y concluimos que el conjunto Σ coincide con la progresión aritmética A . Además $n_0 \in \{0, \dots, q-1\}$ por el Lema 1.27. \square

A continuación veremos ejemplos en los que Σ es vacío, tiene un elemento, o bien, es una progresión aritmética. Para cada uno de ellos, el isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tiene como base de vectores propios a la base canónica, esto es, $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. De este modo, si $X = \langle (u_1, u_2) \rangle$ y $Y = \langle (v_1, v_2) \rangle$, por la prueba hecha tenemos que

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : u_1 v_2 \lambda_1^n - u_2 v_1 \lambda_2^n = 0\},$$

donde λ_1, λ_2 son los valores propios.

Ejemplo 2.16 Supongamos que $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = i$ son los valores propios de F , por lo que $\Lambda_1 = -i/2$, de donde $R_1 = 1/2$ y $\theta_1 = 3/4$.

1. Si $X = \langle(1, i)\rangle$ y $Y = \langle(i, 1)\rangle$, entonces

$$\Sigma = \left\{ n \in \mathbb{Z} : \left(\frac{1}{2}\right)^n + i^n = 0 \right\} = \emptyset.$$

2. Si $X = \langle(1, i)\rangle$ y $Y = \langle(-i, 1)\rangle$, entonces

$$\Sigma = \left\{ n \in \mathbb{Z} : \left(\frac{1}{2}\right)^n - i^n = 0 \right\} = \{0\}.$$

Ejemplo 2.17 Supongamos que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = i$ son los valores propios de F , por lo que $\Lambda_1 = -i$, de donde $R_1 = 1$ y $\theta_1 = 3/4$.

1. Si $X = \langle(1, i)\rangle$, $Y = \langle(-i, 2)\rangle$, entonces

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : 2 - i^n = 0\} = \emptyset.$$

2. Si $X = \langle(1, i)\rangle$, $Y = \langle(i, 1)\rangle$, entonces

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : 1 + i^n = 0\} = \{2 + 4s : s \in \mathbb{Z}\}.$$

2.2.2. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^3

Una de las hipótesis del Teorema 2.7 es que el isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ es diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denotemos por $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ a la base formada por vectores propios de F .

En este caso, los subespacios X y Y son tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$. Supongamos que $X = \langle\vec{u}_1\rangle$ y $Y = \langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle$. Expresamos estos vectores como combinación lineal de los elementos de la base B ,

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_{1,1}\vec{x}_1 + u_{2,1}\vec{x}_2 + u_{3,1}\vec{x}_3, \\ \vec{v}_1 &= v_{1,1}\vec{x}_1 + v_{2,1}\vec{x}_2 + v_{3,1}\vec{x}_3, \\ \vec{v}_2 &= v_{1,2}\vec{x}_1 + v_{2,2}\vec{x}_2 + v_{3,2}\vec{x}_3. \end{aligned}$$

Como en la sección anterior, antes de probar el teorema, tenemos el siguiente resultado, el cual describe al conjunto Σ dadas las bases de los subespacios X y Y .

Lema 2.18 *Con la notación anterior, el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ coincide con el conjunto*

$$\{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + a_3\lambda_3^n = 0\},$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= u_{1,1}(v_{2,1}v_{3,2} - v_{3,1}v_{2,2}), \\ a_2 &= u_{2,1}(v_{3,1}v_{1,2} - v_{1,1}v_{3,2}), \\ a_3 &= u_{3,1}(v_{2,1}v_{1,2} - v_{1,1}v_{2,2}). \end{aligned}$$

Prueba. Por el Lema 2.10, $\mu(n) > 0$ si y sólo si $F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$, notemos que

$$\begin{aligned} F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= \left(\sum_{k=1}^3 u_{k,1} \lambda_k^n \vec{x}_k \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^3 v_{k,1} \vec{x}_k \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^3 v_{k,2} \vec{x}_k \right) \\ &= (a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n + a_3 \lambda_3^n) \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos la ecuación

$$a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n + a_3 \lambda_3^n = 0 \quad (2.5)$$

Por lo tanto, $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n + a_3 \lambda_3^n = 0\}$. \square

Prueba del Teorema 2.7, caso 1. Si $a_1 a_2 a_3 = 0$, entonces alguno de los tres es cero. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a_3 = 0$, entonces $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n = 0\}$. Por el Teorema 2.6, el conjunto Σ tiene a lo más un elemento, es una progresión aritmética, o bien, coincide con \mathbb{Z} . \square

Prueba del Teorema 2.7, caso 2. Como $a_1 a_2 a_3 \neq 0$, entonces la ecuación (2.5) se cumple si y sólo si

$$\Lambda_1^n + A_2 \Lambda_2^n + A_3 = 0,$$

donde $\Lambda_j = \lambda_j / \lambda_3$, $j = 1, 2$ y $A_l = a_l / a_1$, $l = 2, 3$. Así,

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \Lambda_1^n + A_2 \Lambda_2^n + A_3 = 0\}.$$

Para cada índice $j = 1, 2$, expresamos el número complejo Λ_j como

$$\Lambda_j = R_j e^{i2\pi\theta_j},$$

donde R_j es su módulo y $0 \leq \theta_j < 1$. Recordemos que estamos suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$, de donde $0 < R_1 \leq R_2 \leq 1$.

Observación 2.19 Las soluciones de la ecuación $x_1 + A_2 x_2 + A_3 = 0$ son

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : (x_1, x_2) = z(-A_2, 1) + (-A_3, 0), z \in \mathbb{C}\}.$$

De esta manera, $n \in \Sigma$ si y sólo si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$-(A_2 z + A_3) = \Lambda_1^n \quad \text{y} \quad z = \Lambda_2^n \quad (2.6)$$

Esto implica que $|A_2 z + A_3| = |\Lambda_1|^n = R_1^n$ y $|z| = |\Lambda_2|^n = R_2^n$, es decir,

$$\left| z + \frac{A_3}{A_2} \right| = \frac{R_1^n}{|A_2|} \quad (2.7)$$

y

$$|z| = R_2^n \quad (2.8)$$

Geoméricamente, la ecuación (2.7) implica que z pertenece a una circunferencia \mathcal{C}_1^n con centro en $-A_3/A_2 \neq 0$ y radio $R_1^n/|A_2|$. La ecuación (2.8) implica que z pertenece a una circunferencia \mathcal{C}_2^n con centro en el origen y radio R_2^n (ver Figura 2.2).

Prueba caso 2. a) En este caso, la hipótesis es que $R_1 < 1$, o bien, $R_2 < 1$.

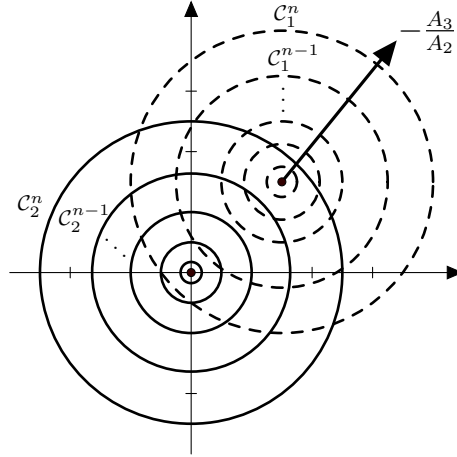


Figura 2.2: Circunferencias

- Si $R_1 < R_2 < 1$, es decir, $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$, entonces por la Proposición 2.12, el conjunto Σ es finito.
- Si $R_1 < 1$ y $R_2 = 1$, entonces $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}_2^n$ no depende de n y es la circunferencia unitaria con centro en el origen. Mientras que para cada $n \in \mathbb{Z}$, \mathcal{C}_1^n es una circunferencia cuyo centro es $-A_3/A_2$ y radio $r_n := R_1^n/|A_2| \in \mathbb{R}^+$. Como $R_1 < 1$ se satisface

$$\begin{cases} r_n \rightarrow 0 & \text{si } n \rightarrow \infty \\ r_n \rightarrow \infty & \text{si } n \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.9)$$

Si $|A_3| \neq |A_2|$, entonces el centro $-A_3/A_2$ de cada \mathcal{C}_1^n tiene módulo distinto de 1 (ver Figura 2.3). De (2.9) tenemos que existe un número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, o bien, $n \leq -N$, entonces $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_1^n = \emptyset$. Por lo tanto, Σ es finito.

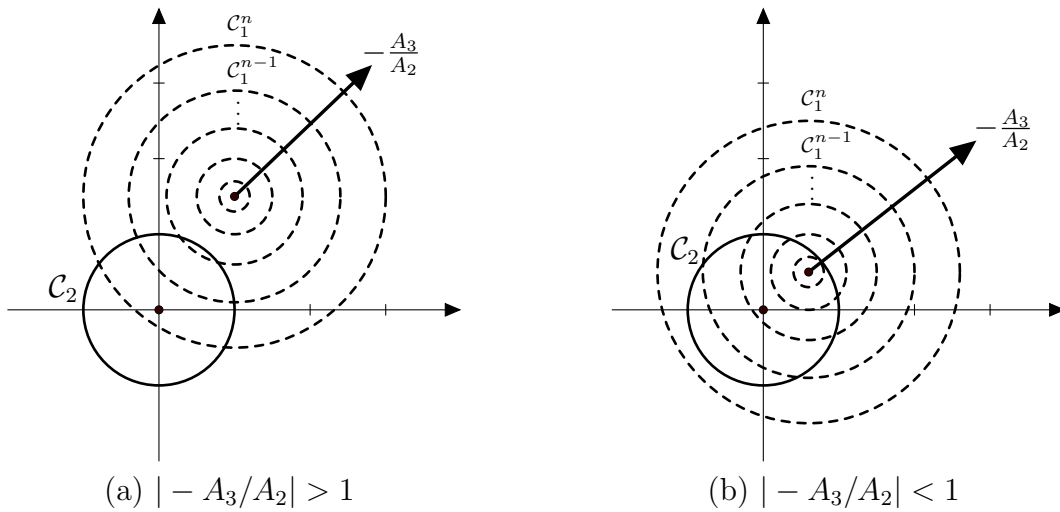


Figura 2.3: \mathcal{C}_1^n y \mathcal{C}_2

Si $|A_3| = |A_2|$ (ver Figura 2.4), el conjunto Σ tiene a lo más un elemento. En efecto, si $n, n' \in \Sigma$, entonces

$$\Lambda_1^n = -A_2\Lambda_2^n - A_3, \quad (2.10)$$

$$\Lambda_1^{n'} = -A_2\Lambda_2^{n'} - A_3. \quad (2.11)$$

Como $n' = n+s$ para algún $s \in \mathbb{Z}$, entonces, por (2.11) tenemos que $\Lambda_1^{n+s} = -A_2\Lambda_2^{n+s} - A_3$. Usando (2.10) para sustituir Λ_1^n , obtenemos

$$\begin{aligned} A_2\Lambda_2^n(\Lambda_2^s - \Lambda_1^s) &= A_3(\Lambda_1^s - 1) \\ |A_2|^2|\Lambda_2^n|^2|\Lambda_2^s - \Lambda_1^s|^2 &= |A_3|^2|\Lambda_1^s - 1|^2 \\ |\Lambda_2^s - \Lambda_1^s|^2 &= |\Lambda_1^s - 1|^2. \end{aligned}$$

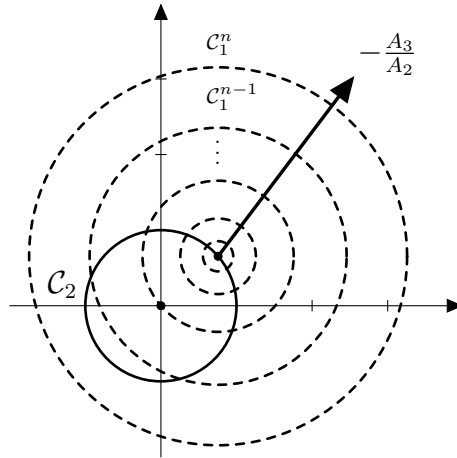


Figura 2.4: C_1^n y C_2 cuando $|A_3| = |A_2|$

Como

$$|\Lambda_2^s - \Lambda_1^s|^2 = 1 - 2R_1^s \cos(2\pi k(\theta_2 - \theta_1)) + R_1^{2s}$$

y

$$|\Lambda_1^s - 1|^2 = R_1^{2s} - 2R_1^s \cos(2\pi s\theta_1) + 1;$$

entonces

$$\cos(2\pi s(\theta_2 - \theta_1)) = \cos(2\pi s\theta_1).$$

Esta última igualdad se cumple cuando $2\pi s(\theta_2 - \theta_1) = -2\pi s\theta_1 + 2\pi s'$, para algún $s' \in \mathbb{Z}$ (porque coseno es una función periódica y par). Si $s \neq 0$, es decir, n y n' son distintas, tenemos que $\theta_2 = \frac{s'}{s}$, esto implica $\Lambda_2^s = 1$ y $\Lambda_1^{n'} = \Lambda_1^n$, pero esto es una contradicción porque $R_1^{n'-n} \neq 1$. Por lo tanto, $s = 0$ y así $n' = n$.

- Finalmente, si $R_1 = R_2 < 1$, significa que $|\lambda_1| = |\lambda_2| < |\lambda_3|$. El número entero n satisface la ecuación (2.5) si y sólo si

$$A'_1 + A'_2\Lambda_2^n + \Lambda_3^n = 0,$$

donde $A'_j = a_j/a_3$ y $\Lambda'_j = \lambda_j/\lambda_1$. Así, $n \in \Sigma$ si y sólo si

$$-z = \Lambda_2^n \quad \text{y} \quad A'_2 z - A'_1 = \Lambda_3^n, \quad (2.12)$$

donde $|\Lambda'_2| = 1$. Análogamente al caso anterior, el conjunto Σ es finito.

Prueba caso 2. b) En este caso, la hipótesis es $R_1 = R_2 = 1$ y $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para $j = 1$ o $j = 2$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tanto $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C}_1^n$ como $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}_2^n$ no dependen de n . Son circunferencias de radios $1/|A_2|$ y 1 respectivamente para cada $n \in \mathbb{Z}$ (ver Figura 2.5).

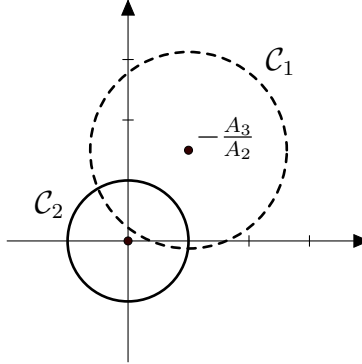


Figura 2.5: $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, entonces Σ es el conjunto vacío. Por el contrario, si existe $z_1 \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ que satisface (2.6) para algún $n \in \mathbb{Z}$, entonces no existe ningún otro $n' \in \mathbb{Z}$ que satisfaga (2.6) con z_1 . En efecto, si existiera $n' \in \mathbb{Z}$ tal que $\Lambda_1^{n'} = -(A_2 z_1 + A_3)$ y $\Lambda_2^{n'} = z_1$, entonces $\Lambda_1^n = \Lambda_1^{n'}$, de donde $\Lambda_1^{n-n'} = 1$. Como $\Lambda_1^{n-n'} = e^{i(n-n')2\pi\theta_1}$ entonces debe ocurrir que $(n-n')\theta_1 = s$ para algún $s \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $n-n' = 0$. En conclusión, para cada punto z en $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, se satisface la condición (2.6) a lo más para una $n \in \mathbb{Z}$. Como dos circunferencias tienen a lo más dos puntos en común, entonces el conjunto Σ tiene a lo más dos elementos.

Prueba caso 2. c) En este caso, la hipótesis es $R_1 = R_2 = 1$ y $\theta_j = \frac{p_j}{q_j}$, $(p_j, q_j) = 1$ para $j = 1, 2$. Como la intersección $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ tiene a lo más dos elementos, tenemos tres casos.

- Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$, entonces el conjunto Σ es vacío.
- Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{z_1\}$ definimos

$$\Sigma_{z_1}^1 := \{n \in \mathbb{Z} : \Lambda_1^n = -(A_2 z_1 + A_3)\} \quad \text{y} \quad \Sigma_{z_1}^2 := \{n \in \mathbb{Z} : \Lambda_2^n = z_1\}.$$

Así, el conjunto Σ coincide con la intersección $\Sigma_{z_1}^1 \cap \Sigma_{z_1}^2$. Si $\Sigma_{z_1}^1 \cap \Sigma_{z_1}^2 \neq \emptyset$, entonces cada uno de estos conjuntos es una progresión aritmética (la prueba es análoga a la prueba del Teorema 2.6, caso 2. b)). Por el Lema 1.27, existe un único $n_1 \in \{0, \dots, q-1\}$ (donde q es el mínimo común múltiplo de q_1 y q_2) tal que

$$\Sigma_{z_1}^1 \cap \Sigma_{z_1}^2 = \{n_1 + qs : s \in \mathbb{Z}\}.$$

- Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{z_1, z_2\}$, con $z_1 \neq z_2$, definimos de manera similar como en el caso anterior

$$\Sigma_{z_1} := \Sigma_{z_1}^1 \cap \Sigma_{z_1}^2 \quad \text{y} \quad \Sigma_{z_2} := \Sigma_{z_2}^1 \cap \Sigma_{z_2}^2.$$

Así, $\Sigma = \Sigma_{z_1} \cup \Sigma_{z_2}$. Y como en el caso anterior, si Σ_{z_1} y Σ_{z_2} son no vacíos, entonces existen $n_1, n_2 \in \{0, \dots, q-1\}$ distintos tales que

$$\Sigma = \{n_1 + qs : s \in \mathbb{Z}\} \cup \{n_2 + qs : s \in \mathbb{Z}\}.$$

Por lo tanto, el conjunto Σ es la unión de a lo más dos progresiones aritméticas. □

Para concluir esta sección, establecemos un ejemplo donde el conjunto Σ es la unión de dos progresiones aritméticas (los ejemplos para los demás casos pueden obtenerse modificando convenientemente los ejemplos dados en la sección anterior).

Ejemplo 2.20 Sea $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ el isomorfismo lineal cuya base de vectores propios es $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y sus valores propios son

$$\lambda_1 = e^{i\frac{2}{7}\pi}\lambda_3, \quad \lambda_2 = e^{i\frac{2}{5}\pi}\lambda_3 \quad y \quad \lambda_3 = e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

Así, tenemos que $\Lambda_1 = e^{i\frac{2}{7}\pi}$ y $\Lambda_2 = e^{i\frac{2}{5}\pi}$, de donde $R_1 = R_2 = 1$, $\theta_1 = 1/7$ y $\theta_2 = 1/5$. Si $X = \langle(1, 1, 1)\rangle$, entonces

$$\begin{aligned} F^5(X) &= \langle(\lambda_1^5, \lambda_2^5, \lambda_3^5)\rangle = \langle(e^{i\frac{10}{7}\pi}, 1, 1)\rangle, \\ F^7(X) &= \langle(\lambda_1^7, \lambda_2^7, \lambda_3^7)\rangle = \langle(1, e^{i\frac{14}{5}\pi}, 1)\rangle, \\ F^{35}(X) &= \langle(\lambda_1^{35}, \lambda_2^{35}, \lambda_3^{35})\rangle = \langle(1, 1, 1)\rangle = X. \end{aligned}$$

De esta manera, consideramos $Y = \langle(e^{i\frac{10}{7}\pi}, 1, 1), (1, e^{i\frac{14}{5}\pi}, 1)\rangle$ y de inmediato obtenemos que $F^5(X), F^7(X) \subseteq Y$. Por lo tanto, $\Sigma = \{5 + 35s : s \in \mathbb{Z}\} \cup \{7 + 35s : s \in \mathbb{Z}\}$.

2.2.3. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^m , $m \geq 4$

Desarrollamos esta sección bajo la hipótesis de que el isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ es diagonalizable con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denotamos por $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ a la base formada por vectores propios de F en \mathbb{C}^m , $m \geq 4$.

Los subespacios X y Y son tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 1$. Por la Proposición 2.2, existen números complejos a_1, \dots, a_m (que dependen de las bases de X y Y) tales que $n \in \Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y) > 0\}$ si y sólo si

$$a_1\lambda_1^n + \dots + a_m\lambda_m^n = 0, \tag{2.13}$$

Si $a_j \neq 0$ para todo j , se cumple la ecuación (2.13) si y sólo si

$$\Lambda_1^n + A_2\Lambda_2^n + \dots + A_{m-1}\Lambda_{m-1}^n + A_m = 0, \tag{2.14}$$

donde $\Lambda_j = \lambda_j/\lambda_m$ y $A_j = a_j/a_1$, $1 \leq j \leq m$.

Antes de comenzar la prueba del Teorema 2.8 construiremos conjuntos que relacionan la soluciones de la ecuación (2.14) con el conjunto Σ .

Lema 2.21 Si $A_2, \dots, A_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces las soluciones de la ecuación

$$x_1 + A_2x_2 + \dots + A_{m-1}x_{m-1} + A_m = 0$$

son

$$\left\{ (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1} : (x_1, \dots, x_{m-1}) = \left(\sum_{i=1}^{m-2} z_i - A_m, -\frac{z_{m-2}}{A_2}, \dots, -\frac{z_1}{A_{m-1}} \right) \right\},$$

donde z_1, \dots, z_{m-2} son números complejos cualesquiera.

Prueba. Es claro que si $z_1, \dots, z_{m-2} \in \mathbb{C}$, entonces

$$(x_1, \dots, x_{m-1}) = \left(\sum_{i=1}^{m-2} z_i - A_m, -\frac{z_{m-2}}{A_2}, \dots, -\frac{z_1}{A_{m-1}} \right)$$

satisface la ecuación

$$x_1 + A_2x_2 + \dots + A_{m-1}x_{m-1} + A_m = 0.$$

Por otro lado, si es cierto que

$$x_1 + A_2x_2 + \dots + A_{m-1}x_{m-1} + A_m = 0,$$

entonces

$$x_1 = -(A_2x_2 + \dots + A_{m-1}x_{m-1} + A_m).$$

Consideramos $z_{m-j} = A_jx_j$ con $j \geq 2$, entonces

$$(x_1, \dots, x_{m-1}) = \left(\sum_{i=1}^{m-2} z_i - A_m, -\frac{z_{m-2}}{A_2}, \dots, -\frac{z_1}{A_{m-1}} \right).$$

De esta manera se obtiene el resultado. □

Por el lema anterior, $n \in \Sigma$ si y sólo si existe $\vec{z} = (z_1, \dots, z_{m-2}) \in \mathbb{C}^{m-2}$ tal que

$$\begin{aligned} \Lambda_1^n &= \sum_{i=1}^{m-2} z_i - A_m, \\ \Lambda_j^n &= -\frac{z_{m-j}}{A_j}, \quad 2 \leq j \leq m-1. \end{aligned}$$

Así, para cualquier $\vec{z} = (z_1, \dots, z_{m-2}) \in \mathbb{C}^{m-2}$, definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Sigma_{\vec{z}}^1 &= \left\{ n \in \mathbb{Z} : \Lambda_1^n = \sum_{i=1}^{m-2} z_i - A_m \right\}, \\ \Sigma_{\vec{z}}^j &= \left\{ n \in \mathbb{Z} : \Lambda_j^n = -\frac{z_{m-j}}{A_j} \right\}, \quad 2 \leq j \leq m-1. \end{aligned}$$

Observación 2.22 Sea n cualquier número entero. Entonces, $n \in \Sigma$ si y sólo si existe $\vec{z} \in \mathbb{C}^{m-2}$ tal que

$$n \in \bigcap_{j=1}^{m-1} \Sigma_{\vec{z}}^j.$$

Notación 2.23 Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_m|$. Expresamos los números complejos $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1}$ como

$$\Lambda_j = R_j e^{i2\pi\theta_j}, \quad 1 \leq j \leq m-1,$$

donde $0 < R_j \leq 1$ y $0 \leq \theta_j < 1$.

Teorema 2.24 Sea \vec{z} cualquier vector de \mathbb{C}^{m-2} , entonces, con la notación anterior se tienen los siguientes tres casos.

1. Si $R_j < 1$ para algún índice j , entonces el conjunto $\Sigma_{\vec{z}}^j$ tiene a lo más un elemento.
2. Si $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para algún índice j , entonces el conjunto $\Sigma_{\vec{z}}^j$ tiene a lo más un elemento.
3. Si $R_j = 1$, $\theta_j \in \mathbb{Q}$ ($\theta_j = p_j/q_j$, con $(p_j, q_j) = 1$) para algún índice j y existe $n \in \Sigma_{\vec{z}}^j$, entonces el conjunto $\Sigma_{\vec{z}}^j$ coincide con la progresión aritmética

$$\{n + q_j s : s \in \mathbb{Z}\}.$$

Prueba. *Prueba de 1.* Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $R_1 < 1$ y $n, n' \in \Sigma_{\vec{z}}^1$. Entonces

$$\Lambda_1^n = \sum_{i=1}^{m-2} z_i - A_m = \Lambda_1^{n'},$$

de donde $\Lambda_1^{n-n'} = 1$. Así $R_1^{n-n'} = 1$ pero $R_1 < 1$, por lo que $n = n'$. Por lo tanto, el conjunto $\Sigma_{\vec{z}}^1$ tiene a lo más un elemento.

Prueba de 2. Análogamente, si $\theta_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $R_1 = 1$ (de otra manera es el caso anterior) y $n, n' \in \Sigma_{\vec{z}}^1$, se llega a $\Lambda_1^{n-n'} = 1$, es decir,

$$e^{i2\pi\theta_1(n-n')} = 1.$$

Esto implica que existe un número entero s tal que $\theta_1(n - n') = s$. Como $\theta_1 \notin \mathbb{Q}$ entonces $n = n'$. Por lo tanto, el conjunto $\Sigma_{\vec{z}}^1$ tiene a lo más un elemento.

Prueba de 3. Como en los casos anteriores, supongamos sin pérdida de generalidad que $R_1 = 1$, $\theta_1 = p_1/q_1$ con $(p_1, q_1) = 1$ y existe $n \in \Sigma_{\vec{z}}^1$. Denotemos por A a la progresión aritmética

$$\{n + q_1 s : s \in \mathbb{Z}\}.$$

Si n' es cualquier elemento de $\Sigma_{\vec{z}}^1$ distinto de n , entonces $\Lambda_1^{n'-n} = 1$. Por lo que,

$$\frac{p_1}{q_1}(n' - n) = s$$

para algún $s \in \mathbb{Z}$. Como $(p_1, q_1) = 1$ entonces q_1 divide a $n' - n$, de tal manera que $n' = n + q_1 s'$ para algún $s' \in \mathbb{Z}$. Por lo que n' es elemento de A .

Si $n + q_1 s$ es cualquier elemento de A se tiene que

$$\Lambda_1^{n+q_1 s} = e^{i2\pi(n+q_1 s)\frac{p_1}{q_1}} = e^{i2\pi n\frac{p_1}{q_1}} e^{i2\pi p_1 s} = \Lambda_1^n.$$

Así, $n + q_1 s$ también es elemento de $\Sigma_{\vec{z}}^1$ y por lo tanto, los conjuntos $\Sigma_{\vec{z}}^1$ y A coinciden. \square

Lema 2.25 *Sea \vec{z} cualquier vector de \mathbb{C}^{m-2} . Si $R_j = 1$, $\alpha_j = p_j/q_j$ con $(p_j, q_j) = 1$ para todo índice j y el conjunto $\bigcap_{j=1}^{m-1} \Sigma_{\vec{z}}^j$ es no vacío, entonces existe un único $n \in \{0, \dots, q-1\}$ (donde $q = [q_1, \dots, q_{m-1}]$ es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_{m-1}), tal que*

$$\bigcap_{j=1}^{m-1} \Sigma_{\vec{z}}^j = \{n + qs : s \in \mathbb{Z}\}.$$

Prueba. Por el inciso 3 del Teorema 2.24 se tiene que

$$\Sigma_{\vec{z}}^j = \{n' + q_j s : s \in \mathbb{Z}\}$$

para cada $1 \leq j \leq m-1$. Como el conjunto $\bigcap_{j=1}^{m-1} \Sigma_{\vec{z}}^j$ es no vacío, por los Lemas 1.26 y 1.27, existe un único $n \in \{0, \dots, q-1\}$ tal que

$$\bigcap_{j=1}^{m-1} \Sigma_{\vec{z}}^j = \{n + qs : s \in \mathbb{Z}\},$$

Con lo que concluimos el resultado. \square

Prueba del Teorema 2.8. Recordemos que las hipótesis de este teorema son que para cada $1 \leq j \leq m-1$ se tiene

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_m} = e^{i2\pi\frac{p_j}{q_j}}, \quad (p_j, q_j) = 1$$

y el conjunto Σ es no vacío.

Prueba de 1. En este caso tenemos que $a_j \neq 0$ para todo índice j . Como $\Sigma \neq \emptyset$, existe $n' \in \Sigma$. De la Observación 2.22, existe $\vec{z} \in \mathbb{C}^{m-2}$ tal que $n' \in \Sigma_{\vec{z}}^j$ para cada $1 \leq j \leq m-1$. Por el Lema 2.25, existe un único número $n \in \{0, \dots, q-1\}$ tal que

$$n' \in \bigcap_{j=1}^{m-1} \Sigma_{\vec{z}}^j = \{n + qs : s \in \mathbb{Z}\},$$

donde q es el mínimo común múltiplo de q_1, \dots, q_{m-1} . El entero n' es cualquier elemento de Σ , entonces el conjunto Σ es la unión de a lo más q progresiones aritméticas.

Prueba de 2. La prueba se realiza por inducción sobre $m \geq 4$. En el caso $m = 4$ tenemos que

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + a_3\lambda_3^n + a_4\lambda_4^n = 0\}.$$

La hipótesis en este inciso es que $a_j = 0$ para algún índice j , supongamos sin pérdida de generalidad que $a_4 = 0$ y $a_j \neq 0$ si $j \neq 4$. Así,

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + a_3\lambda_3^n = 0\},$$

y por el Teorema 2.7, el conjunto Σ consiste de a lo más dos progresiones aritméticas distintas cuya razón es \hat{q} , el mínimo común múltiplo de q_1, q_2 .

Cuando $m > 4$, tenemos

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1\lambda_1^n + \cdots + a_m\lambda_m^n = 0\}.$$

Como $a_j = 0$ para algún índice j , supongamos sin pérdida de generalidad que $j < m$ y $a_k \neq 0$ para $k \neq j$; entonces

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \hat{a}_1\hat{\lambda}_1^n + \cdots + \hat{a}_{m-1}\hat{\lambda}_{m-1}^n = 0\},$$

donde $\hat{a}_k = a_k$, $\hat{\lambda}_k = \lambda_k$ si $k < j$ y $\hat{a}_k = a_{k+1}$, $\hat{\lambda}_k = \lambda_{k+1}$ si $k \geq j$. Como $m - 1 \geq 4$, por la prueba del inciso anterior, tenemos que Σ consiste de a lo más \hat{q} progresiones aritméticas. \square

Prueba del Teorema 2.9. En este teorema también tenemos por hipótesis que para cada $1 \leq j \leq m - 1$ se tiene

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_m} = e^{i2\pi\frac{p_j}{q_j}}, \quad (p_j, q_j) = 1.$$

Supongamos que $n \in \Sigma \cap \{0, \dots, q - 1\}$. Como X es un subespacio lineal tal que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$, entonces $X = \langle \vec{u} \rangle$ y

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^m u_j \vec{x}_j,$$

donde $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ son los vectores propios de F . Así, $X_n = F^n(X)$ es generado por el vector

$$F^n(\vec{u}) = \sum_{j=1}^m u_j \lambda_j^n \vec{x}_j,$$

entonces

$$\begin{aligned} F^q(F^n(\vec{u})) &= \sum_{j=1}^m u_j \lambda_j^{n+q} \vec{x}_j = \lambda_m^q \sum_{j=1}^m u_j \frac{\lambda_j^{n+q}}{\lambda_m^q} \vec{x}_j \\ &= \lambda_m^{n+q} \sum_{j=1}^m u_j \lambda_j^n \Lambda_j^q \vec{x}_j, \end{aligned}$$

pero $\Lambda_j^q = 1$ para todo j , así,

$$F^q(F^n(\vec{u})) = \lambda_m^{n+q} F^n(\vec{u}).$$

Por lo tanto, X_n es invariante bajo F^q . \square

Capítulo 3

Caso no diagonalizable

En este capítulo consideramos la cuarteta (\mathbb{C}^m, X, Y, F) donde $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ son subespacios lineales de dimensión compleja complementaria, k y $m - k$ respectivamente; además F denotará un isomorfismo lineal de \mathbb{C}^m en sí mismo. La función $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, \dots, m\}$ está definida como $\mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y)$.

A diferencia del capítulo anterior, ahora consideramos el caso en el que F es un isomorfismo lineal no diagonalizable, con $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ sus valores propios, ninguno de ellos cero. Bajo esta hipótesis también obtenemos un resultado similar al de la Proposición 2.2, con la diferencia que los coeficientes de la ecuación son polinomios en la variable n .

Proposición 3.1 *Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ valores propios de $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$. Si F es un isomorfismo lineal no diagonalizable, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(n) > 0$ si y sólo si*

$$\sum_{\sigma \in S_m} P_{\sigma}(n) \Lambda_{\sigma}^n = 0, \quad (3.1)$$

donde S_m es el grupo simétrico y para cada $\sigma \in S_m$ se tiene que $\Lambda_{\sigma} = \lambda_{\sigma(1)} \cdots \lambda_{\sigma(k)}$ y $P_{\sigma}(n)$ es un polinomio de grado a lo más $k(m - 1)$.

Cabe mencionar que los polinomios $P_{\sigma}(n)$ dependen de las bases elegidas para los subespacios X y Y ; la demostración de este resultado se encuentra en la sección 3.1 de este capítulo. Con esta proposición probamos que el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$, en este caso, también consiste en la unión de un conjunto finito y una cantidad finita de progresiones aritméticas.

Proposición 3.2 *Sea $\Sigma := \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$. Si F no es diagonalizable, entonces Σ consiste de un conjunto finito junto con una cantidad finita de progresiones aritméticas.*

Prueba. Por la Proposición 3.1, $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \sum_{\sigma \in S_m} P_{\sigma}(n) \Lambda_{\sigma}^n = 0\}$ y definimos

$$a(n) := \sum_{\sigma \in S_m} P_{\sigma}(n) \Lambda_{\sigma}^n.$$

Esta expresión es una sucesión de sumas de potencias generalizadas y por tanto, es una sucesión de recurrencia lineal. Debido al Teorema 1.24 de Skolem-Mahler-Lech, Σ consiste de un

conjunto finito junto con una cantidad finita de progresiones aritméticas. \square

Notemos que aunque F no es diagonalizable, existe una base $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ tal que la matriz asociada a F con respecto a B es la suma directa,

$$[F]_B = J_1 \oplus \dots \oplus J_l = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{pmatrix},$$

donde J_i es una matriz cuadrada y diagonal en la cual cada elemento de la diagonal es λ_i , o bien, es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

La base B es llamada *base canónica de Jordan* y cada J_i es un *bloque de Jordan* (ver [7] para más información). Cabe destacar que si cada J_i es una matriz diagonal, entonces F es diagonalizable. En este capítulo estamos suponiendo que al menos una matriz J_i no es diagonal.

Para mostrar casos en los que el conjunto Σ es finito, o bien, consiste de progresiones aritméticas comenzamos el análisis en los espacios complejos \mathbb{C}^2 y \mathbb{C}^3 . En \mathbb{C}^2 , si el isomorfismo lineal F no es diagonalizable, entonces tiene un único valor propio λ . En este caso, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en la sección 3.2.1 de este capítulo.

Teorema 3.3 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^2$ subespacios lineales de dimensión compleja uno y $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ un isomorfismo lineal. Si F no es diagonalizable, con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ su único valor propio, entonces el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ coincide con \mathbb{Z} , o bien, tiene a lo más un elemento.

En \mathbb{C}^3 , si el isomorfismo lineal F no es diagonalizable, entonces la matriz $[F]_B$ asociada a F con respecto a la base B consta de un único bloque de Jordan, o bien, consta de dos bloques. Por esta razón, obtenemos los siguientes dos teoremas, cuyas demostraciones se encuentran en la sección 3.2.2 de este capítulo.

Teorema 3.4 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^3$ subespacios lineales tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ un isomorfismo lineal no diagonalizable. Si $[F]_B$ es un único bloque de Jordan, entonces el conjunto Σ coincide con \mathbb{Z} , o bien, tiene a lo más dos elementos.

Teorema 3.5 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^3$ subespacios lineales tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ un isomorfismo lineal no diagonalizable. Si $[F]_B$ consiste de dos bloques de Jordan, entonces el conjunto Σ es finito, coincide con \mathbb{Z} , o bien, es una progresión aritmética (distinta de \mathbb{Z}).

El Teorema 3.4 da pie a una generalización en \mathbb{C}^m , $m \geq 4$, si la matriz $[F]_B$ es un único bloque de Jordan. La demostración del siguiente resultado se encuentra en la sección 3.2.3 de este capítulo.

Teorema 3.6 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales con $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 1$, $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un isomorfismo lineal no diagonalizable. Si $[F]_B$ es un único bloque de Jordan, entonces el conjunto Σ coincide con \mathbb{Z} , o bien, tiene a lo más $2(m - 1)$ elementos.

3.1. Prueba de la dinámica de intersección para X de dimensión k

El isomorfismo lineal F no es diagonalizable, sin embargo, existe una base $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ tal que $[F]_B = D + G$, donde D es una matriz diagonal y G es una matriz nilpotente de grado a lo más m .

Lema 3.7 Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ es base del subespacio X , entonces para cualquier número n se satisface

$$F^n(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=0}^{m-i} P_{i,l,j}(n) \lambda_i^l \right) \vec{x}_i, \quad 1 \leq j \leq k, \quad (3.2)$$

donde $P_{i,l,j}(n)$ es un polinomio en la variable n de grado a lo más $m - 1$.

Prueba. Las matrices D y G son de la forma $D = (d_{i,j})$

$$d_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

y $G = (g_{i,j})$

$$g_{i,j} = \begin{cases} s_{i,j} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 1 \end{cases}$$

donde los λ_i son los valores propios de F y $s_{i,j} \in \{0, 1\}$. Sabemos que $DG = GD$, por lo que si $n \geq m$, entonces

$$(D + G)^n = \sum_{l=0}^{m-1} \binom{n}{l} D^{n-l} G^l$$

ya que $G^m = 0$.

Observación 3.8 Si $1 \leq l < m$, entonces $G^l = (g_{i,j}(l))$ es una matriz tal que

$$g_{i,j}(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i + l \\ \prod_{r=i}^{j-l} s_{r,r+1} & \text{si } j = i + l \leq m \end{cases}, \quad (3.3)$$

donde $g_{i,j}(1) = g_{i,j}$.

La demostración de esta observación se realiza por inducción sobre l y se encuentra al final de esta sección. Expresamos cada vector \vec{u}_j como combinación lineal de los elementos de B

$$\vec{u}_j = \sum_{r=1}^m u_{r,j} \vec{x}_j, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Notemos que $G^l(\vec{u}_j) = (g_{i,1}(l, \vec{u}_j))$, con $1 \leq i \leq m$, es una matriz de $m \times 1$ donde la i -ésima entrada es

$$g_{i,1}(l, \vec{u}_j) = \sum_{r=1}^m g_{i,r}(l) u_{r,j} = g_{i,i+l}(l) u_{i+l,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > m-l \\ \prod_{r=i}^j s_{r,r+1} u_{i+l,j} & \text{si } i \leq m-l \end{cases}.$$

Entonces, la matriz $(D^{n-l}G^l)(\vec{u}_j) = (a_{i,1}(l, \vec{u}_j))$ es una matriz de $m \times 1$ donde la i -ésima entrada es

$$a_{i,1}(l, \vec{u}_j) = \sum_{r=1}^m d_{i,r}^{n-l} g_{r,1}(l, \vec{u}_j) = d_{i,i}^{n-l} g_{i,1}(l, \vec{u}_j) = \lambda_i^{n-l} g_{i,i+l}(l) u_{i+l,j}$$

de donde

$$a_{i,1}(l, \vec{u}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > m-l \\ \prod_{r=i}^j s_{r,r+1} u_{i+l,j} \lambda_i^{n-l} & \text{si } i \leq m-l \end{cases}.$$

Por lo tanto, la matriz $F^n(\vec{u}_j) = (D + G)^n(\vec{u}_j)$ es una matriz de $m \times 1$ tal que la i -ésima entrada, con $1 \leq i \leq m$, es

$$\begin{aligned} b_{i,1}(\vec{u}_j) &= \binom{n}{0} \lambda_i^n u_{i,j} + \sum_{l=1}^{m-1} \binom{n}{l} a_{i,1}(l, \vec{u}_j) \\ &= \binom{n}{0} \lambda_i^n u_{i,j} + \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} g_{i,i+1}(1) u_{i+1,j} + \cdots + \binom{n}{m-i} g_{i,m}(m-i) u_{m,j} \\ &= \sum_{l=0}^{m-i} \bar{P}_{i,l,j}(n) \lambda_i^{n-l} \end{aligned}$$

donde $\bar{P}_{i,l,j}(n) = \binom{n}{l} g_{i,i+l}(l) u_{i+l,j}$, es un polinomio de grado a lo más $m-1$ en la variable n . Además, como cada $\lambda_i \neq 0$ entonces

$$b_{i,1}(\vec{u}_j) = \sum_{l=0}^{m-i} \frac{\bar{P}_{i,l,j}(n)}{\lambda_i^l} \lambda_i^n = \sum_{l=0}^{m-i} P_{i,l,j}(n) \lambda_i^n.$$

Así, tenemos que para cada índice j , con $1 \leq j \leq k$,

$$F^n(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=0}^{m-i} P_{i,l,j}(n) \lambda_i^n \right) \vec{x}_i, \quad 1 \leq j \leq k,$$

□

Prueba de la Proposición 3.1. Supongamos que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}\}$ es base del subespacio Y y expresamos cada uno de estos vectores como combinación lineal de los elementos de la base B ,

$$\vec{v}_r = \sum_{l_r=1}^m v_{l_r,r} \vec{x}_{l_r}, \quad 1 \leq r \leq m-k.$$

Por el Lema 2.10, $\mu(n) > 0$ si y sólo si

$$F^n(\vec{u}_1) \wedge \dots \wedge F^n(\vec{u}_k) \wedge \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{m-k} = 0.$$

Usando las propiedades de los multivectores, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} 0 &= F^n(\vec{u}_1) \wedge \dots \wedge F^n(\vec{u}_k) \wedge \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{m-k} \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^m b_{i_1,1}(\vec{u}_1) \vec{x}_{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_k=1}^m b_{i_k,1}(\vec{u}_k) \vec{x}_{i_k} \right) \wedge \\ &\quad \wedge \left(\sum_{l_1=1}^m v_{l_1,1} \vec{x}_{l_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{l_{m-k}=1}^m v_{l_{m-k},m-k} \vec{x}_{l_{m-k}} \right) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1}(\vec{u}_1) \dots b_{\sigma(k),1}(\vec{u}_k) v_{\sigma(k+1),1} \dots v_{\sigma(m),m-k} \right) \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_m. \end{aligned}$$

Como $\vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_m \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1}(\vec{u}_1) \dots b_{\sigma(k),1}(\vec{u}_k) v_{\sigma(k+1),1} \dots v_{\sigma(m),m-k} \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{l=0}^{m-\sigma(1)} P_{\sigma(1),l,1}(n) \lambda_{\sigma(1)}^n \right) \dots \left(\sum_{l=0}^{m-\sigma(k)} P_{\sigma(k),l,k}(n) \lambda_{\sigma(k)}^n \right) v_{\sigma(k+1),1} \dots v_{\sigma(m),m-k} \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} P_{\sigma}(n) (\lambda_{\sigma(1)} \dots \lambda_{\sigma(k)})^n \\ &= \sum_{\sigma \in S_m} P_{\sigma}(n) \Lambda_{\sigma}^n. \end{aligned}$$

□

Prueba de la Observación 3.8. Para $l = 2$ se tiene que $G^2 = (g_{i,j}(2))$, donde

$$g_{i,j}(2) = \sum_{r=1}^m g_{i,r} g_{r,j} = g_{i,i+1} g_{i+1,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+2 \\ s_{i,i+1} s_{i+1,i+2} & \text{si } j = i+2 \leq m \end{cases}$$

Supongamos que para $l > 2$, la matriz G^l satisface (3.3). Como $G^{l+1} = G^l G = (g_{i,j}(l+1))$ donde

$$g_{i,j}(l+1) = \sum_{r=1}^m g_{i,r}(l) g_{r,j} = g_{i,i+l}(l) g_{i+l,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+l+1 \\ \prod_{r=i}^{j-1} s_{r,r+1} & \text{si } j = i+l+1 \end{cases},$$

concluimos la afirmación. □

3.2. Análisis del conjunto Σ para X de dimensión 1 y $m \geq 2$

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, en \mathbb{C}^2 , en el caso en el que el isomorfismo F no es diagonalizable, la matriz $[F]_B$ con respecto a la base canónica de Jordan $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es un único bloque. Esto es,

$$[F]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es el valor propio de F .

Sin embargo, en el espacio complejo \mathbb{C}^3 tenemos dos casos, esto es, la matriz $[F]_B$ con respecto a la base canónica de Jordan $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ tiene la forma

$$\text{caso 1: } [F]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{o bien, caso 2: } [F]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son los valores propios de F . Es por esta razón que el análisis del conjunto Σ está dividido en dos casos.

3.2.1. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^2

El isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tiene un único valor propio $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y su matriz asociada con respecto a la base canónica de Jordan $B = \vec{x}_1, \vec{x}_2$ es un único bloque. Por esta razón, tenemos que

$$(F - \lambda I)(\vec{x}_2) = \vec{x}_1, \tag{3.4}$$

$$(F - \lambda I)^2(\vec{x}_2) = 0, \tag{3.5}$$

donde la transformación $I : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es la identidad.

Antes de probar el Teorema 3.3, veremos dos resultados que serán de utilidad. El primero de ellos describe explícitamente las imágenes de los elementos de B bajo F^n .

Lema 3.9 *Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$F^n(\vec{x}_1) = \lambda^n \vec{x}_1 \quad \text{y} \quad F^n(\vec{x}_2) = n\lambda^{n-1} \vec{x}_1 + \lambda^n \vec{x}_2$$

Prueba. Vamos a probar la afirmación por inducción sobre n (cuando $n \in \mathbb{N}$). Para $n = 1$, por (3.4) y (3.5), se cumple que

$$\begin{aligned} F(\vec{x}_1) &= \lambda \vec{x}_1, \\ F(\vec{x}_2) &= \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2. \end{aligned}$$

Supongamos que para $n > 1$ se satisface $F^n(\vec{x}_1) = \lambda^n \vec{x}_1$ y $F^n(\vec{x}_2) = n\lambda^{n-1} \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2$. Entonces,

$$F^{n+1}(\vec{x}_1) = F(F^n(\vec{x}_1)) = F(\lambda^n \vec{x}_1) = \lambda^{n+1} \vec{x}_1$$

y

$$\begin{aligned} F^{n+1}(\vec{x}_2) &= F(F^n(\vec{x}_2)) = F(n\lambda^{n-1} \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2) = n\lambda^n \vec{x}_1 + \lambda^n \vec{x}_1 + \lambda^{n+1} \vec{x}_2 \\ &= (n+1)\lambda^n \vec{x}_1 + \lambda^{n+1} \vec{x}_2. \end{aligned}$$

Por lo que se tiene el resultado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $F^{-1}(\vec{x}_1) = \frac{1}{\lambda} \vec{x}_1$ y $F^{-1}(\vec{x}_2) = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{x}_1 + \frac{1}{\lambda} \vec{x}_2$, entonces para $n \in \mathbb{Z}^-$, $F^n = (F^{-1})^{|n|}$, y así la prueba se hace de manera análoga. \square

Como $\dim_{\mathbb{C}}(X) = \dim_{\mathbb{C}}(Y) = 1$, entonces $X = \langle \vec{u}_1 \rangle$ y $Y = \langle \vec{v}_1 \rangle$, de manera que

$$\vec{u}_1 = u_{1,1} \vec{x}_1 + u_{2,1} \vec{x}_2, \quad \vec{v}_1 = v_{1,1} \vec{x}_1 + v_{2,1} \vec{x}_2.$$

Lema 3.10 *Con la notación anterior, si $\mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(x) \cap Y)$ y $\Sigma := \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$, entonces*

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda^n + a_2 n \lambda^{n-1} = 0\},$$

donde $a_1 = u_{1,1} v_{2,1} - u_{2,1} v_{1,1}$ y $a_2 = -u_{2,1} v_{2,1}$.

Prueba. Por el Lema 2.10, $\mu(n) > 0$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 = 0$. Como

$$F^n(\vec{u}_1) = (u_{1,1} \lambda^n + u_{2,1} n \lambda^{n-1}) \vec{x}_1 + u_{2,1} \lambda^n \vec{x}_2,$$

entonces

$$F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 = (u_{1,1} v_{2,1} \lambda^n + u_{2,1} v_{2,1} n \lambda^{n-1} - u_{2,1} v_{1,1} \lambda^n) \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2.$$

Por lo que se obtiene la ecuación

$$a_1 \lambda^n + a_2 n \lambda^{n-1} = 0 \tag{3.6}$$

Por lo tanto, $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda^n + a_2 n \lambda^{n-1} = 0\}$. \square

Prueba del Teorema 3.3. Por el lema anterior, $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda^n + a_2 n \lambda^{n-1} = 0\}$, como $\lambda \neq 0$, entonces la ecuación (3.6) se satisface si y sólo si

$$a_1 + \frac{a_2}{\lambda} n = 0 \tag{3.7}$$

Si $a_2 = 0$, entonces $a_1 = 0$ y esto implica que Σ coincide con \mathbb{Z} . Si $a_2 \neq 0$, entonces (3.7) es un polinomio en la variable n de grado 1, por lo que tiene una única raíz en \mathbb{C} . Por lo tanto, el conjunto Σ tiene a lo más un elemento, cuando dicha raíz es entera. \square

3.2.2. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^3

Como hemos mencionado, tenemos dos casos cuando el isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ no es diagonalizable. Los casos dependen de si la matriz $[F]_B$ consiste de un solo bloque de Jordan o de dos.

Caso 1: $[F]_B$ es un bloque de Jordan.

En este caso, tenemos que $(F - \lambda_1 I)^3(\vec{x}_3) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= (F - \lambda_1 I)^2(\vec{x}_3), \\ \vec{x}_2 &= (F - \lambda_1 I)(\vec{x}_3).\end{aligned}$$

Observación 3.11 *En este caso, se satisface*

$$\begin{aligned}F(\vec{x}_1) &= \lambda_1 \vec{x}_1, \\ F(\vec{x}_2) &= \vec{x}_1 + \lambda_1 \vec{x}_2, \\ F(\vec{x}_3) &= \vec{x}_2 + \lambda_1 \vec{x}_3.\end{aligned}$$

Prueba. Como

$$0 = (F - \lambda_1 I)^3(\vec{x}_3) = (F - \lambda_1 I)(\vec{x}_1),$$

entonces $F(\vec{x}_1) - \lambda_1 \vec{x}_1 = 0$ por lo que $F(\vec{x}_1) = \lambda_1 \vec{x}_1$.

Análogamente, de

$$(F - \lambda_1 I)^2(\vec{x}_3) = (F - \lambda_1 I)(\vec{x}_2),$$

tenemos que $F(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \lambda_1 \vec{x}_2$.

Finalmente, de $\vec{x}_2 = (F - \lambda_1 I)(\vec{x}_3)$, tenemos $F(\vec{x}_3) = \vec{x}_2 + \lambda_1 \vec{x}_3$. □

El siguiente lema describe explícitamente las imágenes de los elementos de la base B bajo F^n con $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.12 *Si $[F]_B$ es un bloque de Jordan, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene*

$$\begin{aligned}F^n(\vec{x}_1) &= \lambda_1^n \vec{x}_1 \\ F^n(\vec{x}_2) &= n\lambda_1^{n-1} \vec{x}_1 + \lambda_1^n \vec{x}_2 \\ F^n(\vec{x}_3) &= \frac{n(n-1)}{2} \lambda_1^{n-2} \vec{x}_1 + n\lambda_1^{n-1} \vec{x}_2 + \lambda_1^n \vec{x}_3\end{aligned}$$

Prueba. La prueba comienza por inducción en \mathbb{Z}^+ y se continua de manera análoga a la prueba hecha en el Lema 3.9. □

Como $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, entonces $X = \langle \vec{u}_1 \rangle$ y $Y = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, de manera que

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= u_{1,1} \vec{x}_1 + u_{2,1} \vec{x}_2 + u_{3,1} \vec{x}_3, \\ \vec{v}_1 &= v_{1,1} \vec{x}_1 + v_{2,1} \vec{x}_2 + v_{3,1} \vec{x}_3, \\ \vec{v}_2 &= v_{1,2} \vec{x}_1 + v_{2,2} \vec{x}_2 + v_{3,2} \vec{x}_3,\end{aligned}$$

Lema 3.13 Con la notación anterior, si $\mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(x) \cap Y)$ y $\Sigma := \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$, entonces

$$\Sigma = \left\{ n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda_1^n + n a_2 \lambda_1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_3 \lambda_1^{n-2} = 0 \right\}.$$

donde a_1, a_2 y a_3 dependen de los vectores \vec{u}_1, \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Prueba. Por el Lema 2.10, $\mu(n) > 0$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$. Como

$$F^n(\vec{u}_1) = \left(u_{1,1} \lambda_1^n + u_{2,1} n \lambda_1^{n-1} + \frac{u_{3,1} n(n-1)}{2} \lambda_1^{n-2} \right) \vec{x}_1 + (u_{2,1} \lambda_1^n + u_{3,1} n \lambda_1^{n-1}) \vec{x}_2 + u_{3,1} \lambda_1^n \vec{x}_3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= \left[\left(u_{1,1} \lambda_1^n + u_{2,1} n \lambda_1^{n-1} + \frac{u_{3,1} n(n-1)}{2} \lambda_1^{n-2} \right) v_{2,1} v_{3,2} \right. \\ &\quad - \left(u_{1,1} \lambda_1^n + u_{2,1} n \lambda_1^{n-1} + \frac{u_{3,1} n(n-1)}{2} \lambda_1^{n-2} \right) v_{3,1} v_{2,2} \\ &\quad - (u_{2,1} \lambda_1^n + u_{3,1} n \lambda_1^{n-1}) v_{1,1} v_{3,2} + (u_{2,1} \lambda_1^n + u_{3,1} n \lambda_1^{n-1}) v_{3,1} v_{1,2} \\ &\quad \left. + u_{3,1} v_{1,1} v_{2,2} \lambda_1^n - u_{3,1} v_{2,1} v_{1,2} \lambda_1^n \right] \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 \end{aligned}$$

de donde obtenemos la ecuación

$$a_1 \lambda_1^n + n a_2 \lambda_1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a_3 \lambda_1^{n-2} = 0 \quad (3.8)$$

Por lo tanto, el conjunto Σ coincide con el conjunto de soluciones de la ecuación (3.8). \square

Prueba del Teorema 3.4. Por el lema anterior, Σ coincide con las soluciones de la ecuación (3.8). Como $\lambda_1 \neq 0$, entonces dicha ecuación se satisface si y sólo si

$$a_1 + n \frac{a_2}{\lambda_1} + \frac{n(n-1)a_3}{2\lambda_1^2} = 0. \quad (3.9)$$

Si $a_2 = a_3 = 0$, entonces $a_1 = 0$ y por tanto, el conjunto Σ coincide con \mathbb{Z} . Si $a_2 \neq 0$, o bien, $a_3 \neq 0$, entonces (3.9) es un polinomio de grado a lo más 2 en la variable n , por lo que tiene a lo más dos raíces en \mathbb{C} . Por lo tanto, el conjunto Σ tiene a lo más dos elementos. \square

Caso 2: $[F]_B$ es la suma directa de dos bloques de Jordan.

En este caso, la base de Jordan $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ es tal que $\vec{x}_1 = (F - \lambda_1 I)(\vec{x}_2)$ y

$$\begin{aligned} (F - \lambda_1 I)^2(\vec{x}_2) &= 0 \\ (F - \lambda_2 I)(\vec{x}_3) &= 0. \end{aligned}$$

Así, tenemos la siguiente observación.

Observación 3.14 *Se satisface que*

$$\begin{aligned} F(\vec{x}_1) &= \lambda_1 \vec{x}_1, \\ F(\vec{x}_2) &= \vec{x}_1 + \lambda_1 \vec{x}_2, \\ F(\vec{x}_3) &= \lambda_2 \vec{x}_3. \end{aligned}$$

El siguiente lema describe explícitamente las imágenes de los elementos de la base B bajo F^n con $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.15 *Si $[F]_B$ es la suma directa de dos bloques de Jordan, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene*

$$\begin{aligned} F^n(\vec{x}_1) &= \lambda_1^n \vec{x}_1 \\ F^n(\vec{x}_2) &= n\lambda_1^{n-1} \vec{x}_1 + \lambda_1^n \vec{x}_2 \\ F^n(\vec{x}_3) &= \lambda_2^n \vec{x}_3 \end{aligned}$$

Prueba. La prueba comienza por inducción en \mathbb{Z}^+ y se continua de manera análoga a la prueba hecha en el Lema 3.9. \square

Como $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$, entonces $X = \langle \vec{u}_1 \rangle$ y $Y = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, de manera que

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= u_{1,1} \vec{x}_1 + u_{2,1} \vec{x}_2 + u_{3,1} \vec{x}_3, \\ \vec{v}_1 &= v_{1,1} \vec{x}_1 + v_{2,1} \vec{x}_2 + v_{3,1} \vec{x}_3, \\ \vec{v}_2 &= v_{1,2} \vec{x}_1 + v_{2,2} \vec{x}_2 + v_{3,2} \vec{x}_3, \end{aligned}$$

Lema 3.16 *Con la notación anterior, si $\mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y)$ y $\Sigma := \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$, entonces*

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda_1^n + n a_2 \lambda_1^{n-1} + a_3 \lambda_2^n = 0\}.$$

donde a_1, a_2 y a_3 dependen de los vectores \vec{u}_1, \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Prueba. Por el Lema 2.10, $\mu(n) > 0$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$. Como

$$F^n(\vec{u}_1) = (u_{1,1} \lambda_1^n + u_{2,1} n \lambda_1^{n-1}) \vec{x}_1 + u_{2,1} \lambda_1^n \vec{x}_2 + u_{3,1} \lambda_2^n \vec{x}_3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= [(u_{1,1} \lambda_1^n + u_{2,1} n \lambda_1^{n-1}) v_{2,1} v_{3,2} - (u_{1,1} \lambda_1^n + u_{2,1} n \lambda_1^{n-1}) v_{3,1} v_{2,2} \\ &\quad - u_{2,1} v_{1,1} v_{3,2} \lambda_1^n + u_{2,1} v_{3,1} v_{1,2} \lambda_1^n \\ &\quad + u_{3,1} v_{1,1} v_{2,2} \lambda_2^n - u_{3,1} v_{2,1} v_{1,2} \lambda_2^n] \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3. \end{aligned}$$

Factorizando λ_1^n y λ_2^n , obtenemos la ecuación

$$a_1 \lambda_1^n + n a_2 \lambda_1^{n-1} + a_3 \lambda_2^n = 0 \tag{3.10}$$

Por lo tanto, el conjunto Σ coincide con el conjunto de soluciones de la ecuación (3.10). \square

Prueba del Teorema 3.5. Por el lema anterior, Σ coincide con las soluciones de la ecuación (3.10).

- a) Si $a_1 a_2 \neq 0$ y $a_3 = 0$, entonces el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda_1^n + n a_2 \lambda_1^{n-1} = 0\}$ tiene a lo más un elemento como en la prueba del Teorema 3.3.
- b) Si $a_1 = 0$ y $a_2 a_3 \neq 0$, entonces $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : n a_2 \lambda_1^{n-1} + a_3 \lambda_2^n = 0\}$. Supongamos que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ y reescribiendo tenemos que

$$n \frac{a_2}{\lambda_1} \Lambda^n + a_3 = 0,$$

donde $\Lambda = \lambda_1/\lambda_2$. Como $|\Lambda| < 1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a_2}{\lambda_1} \Lambda^n + a_3 = a_3.$$

Análogamente a la prueba de la Proposición 2.12 tenemos que $n a_2 \lambda_1^{n-1} + a_3 \lambda_2^n = 0$ para una cantidad finita de $n > 0$. Si $n < 0$, entonces $n = -|n|$ por lo que se satisface

$$n a_2 \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{|n|+1} + a_3 \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{|n|} = 0,$$

entonces

$$a_2 \lambda_1 - \frac{a_3}{|n|} \Lambda^{|n|} = 0.$$

Por lo que,

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} a_2 \lambda_1 - \frac{a_3}{|n|} \Lambda^{|n|} = a_2 \lambda_1$$

y análogamente a la prueba de la Proposición 2.12 tenemos que $n a_2 \lambda_1^{n-1} + a_3 \lambda_2^n = 0$ para una cantidad finita de $n < 0$.

El caso en el que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ es análogo a lo realizado. Finalmente, si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, entonces $|\Lambda| = 1$. Siendo así, Σ tiene a lo más dos elementos. En efecto, si n y n' están en Σ , entonces

$$n \frac{a_2}{\lambda_1} \Lambda^n = n' \frac{a_2}{\lambda_1} \Lambda^{n'},$$

de donde $|n| = |n'|$, entonces $n = n'$ o bien $n = -n'$. Por lo tanto, el conjunto Σ siempre es finito.

- c) Si $a_2 = 0$, entonces $\Sigma = \{n \in \Sigma : a_1 \lambda_1^n + a_3 \lambda_2^n = 0\}$. Por el Teorema 2.6, el conjunto Σ tiene a lo más un elemento, coincide con \mathbb{Z} , o bien, es una progresión aritmética.
- d) Si $a_1 a_2 a_3 \neq 0$, entonces $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : a_1 \lambda_1^n + n a_2 \lambda_1^{n-1} + a_3 \lambda_2^n = 0\}$. Si $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, procedemos como en el inciso b), pues tenemos

$$a_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n + n \frac{a_2}{\lambda_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n + a_3 = 0,$$

o bien,

$$a_1 + n \frac{a_2}{\lambda_1} + a_3 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = 0,$$

de manera que Σ es finito.

Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ y consideramos n y n' que satisfacen la ecuación (3.10), entonces

$$\left(a_1 + n \frac{a_2}{\lambda_1}\right) \Lambda^n = \left(a_1 + n' \frac{a_2}{\lambda_1}\right) \Lambda^{n'},$$

donde $\Lambda = \lambda_1/\lambda_2$. Por lo que

$$\left|a_1 + n \frac{a_2}{\lambda_1}\right|^2 = \left|a_1 + n' \frac{a_2}{\lambda_1}\right|^2. \quad (3.11)$$

En lo siguiente usaremos las expresiones:

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1 + id_1 \\ \frac{a_2}{\lambda_1} &= c_2 + id_2 \end{aligned}$$

con $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$. Entonces

$$\left|a_1 + n \frac{a_2}{\lambda_1}\right|^2 = (c_1 + nc_2)^2 + (d_1 + nd_2)^2 = c_1^2 + 2nc_1c_2 + n^2c_2^2 + d_1^2 + 2nd_1d_2 + n^2d_2^2$$

y

$$\left|a_1 + n' \frac{a_2}{\lambda_1}\right|^2 = (c_1 + n'c_2)^2 + (d_1 + n'd_2)^2 = c_1^2 + 2n'c_1c_2 + n'^2c_2^2 + d_1^2 + 2n'd_1d_2 + n'^2d_2^2.$$

De la igualdad (3.11), tenemos

$$(n - n')(2c_1c_2 + 2d_1d_2) + (n^2 - n'^2)(c_2^2 + d_2^2) = 0,$$

$$(n - n')(2c_1c_2 + 2d_1d_2 + (n + n')(c_2^2 + d_2^2)) = 0.$$

Si $n \neq n'$, entonces

$$2c_1c_2 + 2d_1d_2 + (n + n')(c_2^2 + d_2^2) = 0.$$

De esta manera, obtenemos que Σ coincide con \mathbb{Z} cuando $c_2^2 + d_2^2 = 0$. En el caso en que $c_2^2 + d_2^2 \neq 0$, entonces

$$n' = -\frac{2(c_1c_2 + d_1d_2)}{c_2^2 + d_2^2} - n,$$

por lo que el conjunto Σ tiene a lo más dos elementos.

□

3.2.3. Prueba de la descripción de Σ en \mathbb{C}^m , $m \geq 4$

En esta sección consideramos un isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ no diagonalizable con un único valor propio $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es decir, existe una base canónica de Jordan $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ tal que $(F - \lambda I)^m(\vec{x}_m) = 0$ y

$$\vec{x}_j = (F - \lambda I)^{m-j}(\vec{x}_m), \quad 1 \leq j \leq m-1.$$

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} F(\vec{x}_1) &= \lambda \vec{x}_1 \\ F(\vec{x}_j) &= \vec{x}_{j-1} + \lambda \vec{x}_j, \quad 2 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Lema 3.17 Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$F^n(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} \vec{x}_k, \quad (3.12)$$

donde $\binom{n}{j-k} = 0$ si $j-k > n$.

Prueba. La prueba se hará por inducción. Para $n=1$ tenemos que, para $j > 1$ (para $j=1$ es evidente),

$$\sum_{k=1}^j \binom{1}{j-k} \lambda^{1-(j-k)} \vec{x}_k = \vec{x}_{j-1} + \lambda \vec{x}_j = F(\vec{x}_j).$$

Supongamos que se satisface (3.12) para n y probemos para $n+1$. Tenemos que

$$F^{n+1}(\vec{x}_j) = F(F^n(\vec{x}_j)) = F\left(\sum_{k=1}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} \vec{x}_k\right) = \sum_{k=1}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} F(\vec{x}_k).$$

Si $j=1$, entonces $F^{n+1}(\vec{x}_1) = \lambda^{n+1} \vec{x}_1$. Si $j > 1$, entonces

$$F^{n+1}(\vec{x}_j) = \binom{n}{j-1} \lambda^{(n+1)-(j-1)} \vec{x}_1 + \sum_{k=2}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} (\vec{x}_{k-1} + \lambda \vec{x}_k).$$

Como

$$\sum_{k=2}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} (\vec{x}_{k-1} + \lambda \vec{x}_k) = \sum_{k=2}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} \vec{x}_{k-1} + \sum_{k=2}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{(n+1)-(j-k)} \vec{x}_k,$$

de donde

$$\sum_{k=2}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} \vec{x}_{k-1} = \sum_{k=1}^{j-1} \binom{n}{j-k-1} \lambda^{(n+1)-(j-k)} \vec{x}_k,$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^j \binom{n}{j-k} \lambda^{n-(j-k)} (\vec{x}_{k-1} + \lambda \vec{x}_k) &= \binom{n}{j-2} \lambda^{(n+1)-(j-1)} \vec{x}_1 + \sum_{k=2}^{j-1} \binom{n+1}{j-k} \lambda^{(n+1)-(j-k)} \vec{x}_k \\ &\quad + \binom{n}{0} \lambda^{n+1} \vec{x}_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F^{n+1}(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j \binom{n+1}{j-k} \lambda^{(n+1)-(j-k)} \vec{x}_k$$

□

Observación 3.18 Para cada $1 \leq j \leq m$ se cumple

$$F^{-1}(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \lambda^{-(1+j-k)} \vec{x}_k.$$

Prueba. Sabemos que $F(\vec{x}_1) = \lambda \vec{x}_1$, entonces $\vec{x}_1 = \lambda F^{-1}(\vec{x}_1)$, por lo que

$$F^{-1}(\vec{x}_1) = \lambda^{-1} \vec{x}_1 = \sum_{k=1}^1 (-1)^{1-k} \lambda^{-(1+1-k)} \vec{x}_k$$

Consideremos $1 < j < m$ y supongamos que se satisface

$$F^{-1}(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \lambda^{-(1+j-k)} \vec{x}_k,$$

vamos a probar que se cumple la igualdad para $j+1$.

Como $F(\vec{x}_{j+1}) = \vec{x}_j + \lambda \vec{x}_{j+1}$ tenemos que $\vec{x}_{j+1} = F^{-1}(\vec{x}_j) + \lambda F^{-1}(\vec{x}_{j+1})$, de donde

$$\begin{aligned} F^{-1}(\vec{x}_{j+1}) &= -\lambda^{-1} F^{-1}(\vec{x}_j) + \lambda^{-1} \vec{x}_{j+1} = -\lambda^{-1} \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \lambda^{-(1+j-k)} \vec{x}_k + \lambda^{-1} \vec{x}_{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{j+1-k} \lambda^{-(1+j+1-k)} \vec{x}_k \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F^{-1}(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \lambda^{-(1+j-k)} \vec{x}_k$$

para todo $1 \leq j \leq m$.

□

Con esta observación expresamos a $F^{-n}(\vec{x}_j)$, $n \in \mathbb{Z}^+$ de manera análoga al Lema 3.17.

Lema 3.19 Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$F^{-n}(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \frac{(n+j-k-1)!}{(j-k)!(n-1)!} \lambda^{-(n+j-k)} \vec{x}_k.$$

Prueba. La prueba se hará por inducción sobre n . Para $n = 1$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \frac{(1+j-k-1)!}{(j-k)!(1-1)!} \lambda^{-(1+j-k)} \vec{x}_k = \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \lambda^{-(1+j-k)} \vec{x}_k = F^{-1}(\vec{x}_j)$$

Supongamos que para $n > 1$ se satisface

$$F^{-n}(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \frac{(n+j-k-1)!}{(j-k)!(n-1)!} \lambda^{-(n+j-k)} \vec{x}_k.$$

Tenemos que $F^{-(n+1)}(\vec{x}_j) = F^{-1}(F^{-n}(\vec{x}_j))$ para toda j . Entonces

$$\begin{aligned} F^{-(n+1)}(\vec{x}_j) &= F^{-1} \left(\sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \frac{(n+j-k-1)!}{(j-k)!(n-1)!} \lambda^{-(n+j-k)} \vec{x}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \frac{(n+j-k-1)!}{(j-k)!(n-1)!} \lambda^{-(n+j-k)} F^{-1}(\vec{x}_k) \\ &= \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \frac{(n+j-k-1)!}{(j-k)!(n-1)!} \lambda^{-(n+j-k)} \left(\sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} \lambda^{-(1+k-l)} \vec{x}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^k (-1)^{j-l} \frac{(n+j-k-1)!}{(j-k)!(n-1)!} \lambda^{-(n+1+j-l)} \vec{x}_l \end{aligned}$$

Por lo que

$$F^{-(n+1)}(\vec{x}_j) = \sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} P_{l,j}(n) \lambda^{-(n+1+j-l)} \vec{x}_l \quad (3.13)$$

donde

$$P_{l,j}(n) = \sum_{k=l}^j \frac{(n+j-k-1)!}{(j-k)!(n-1)!}, \quad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq m, \\ 1 \leq l \leq j. \end{array}$$

Afirmación: Para todo $1 \leq j \leq m$ se satisface

$$P_{l,j}(n) = \frac{((n+1)+j-l-1)!}{(j-l)!((n+1)-1)!}. \quad (3.14)$$

Si $j = 1$, entonces $l = 1$ y

$$P_{1,1}(n) = \sum_{k=1}^1 \frac{(n+1-k-1)!}{(1-k)!(n-1)!} = 1 = \frac{((n+1)+1-1-1)!}{(1-1)!((n+1)-1)!}.$$

Ahora supongamos que es cierto para $1 < j < m$, es decir, se cumple

$$P_{l,j}(n) = \frac{((n+1)+j-l-1)!}{(j-l)!((n+1)-1)!}$$

para toda $l \leq j$ y vamos a demostrar la igualdad para $j + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{l,j+1}(n) &= \sum_{k=l}^{j+1} \frac{(n + (j + 1) - k - 1)!}{((j + 1) - k)!(n - 1)!} = \sum_{k=l-1}^j \frac{(n + j - k - 1)!}{(j - k)!(n - 1)!} \\
&= \frac{(n + j - (l - 1) - 1)!}{(j - (l - 1))!(n - 1)!} + \sum_{k=l}^j \frac{(n + j - k - 1)!}{(j - k)!(n - 1)!} \\
&= \frac{(n + j - (l - 1) - 1)!}{(j - (l - 1))!(n - 1)!} + P_{l,j}(n) \\
&= \frac{(n + j - l)!}{(j - l + 1)!(n - 1)!} + \frac{((n + 1) + j - l - 1)!}{(j - l)!((n + 1) - 1)!} \\
&= \frac{(n + (j + 1) - l)!}{((j + 1) - l)!n!} = \frac{((n + 1) + (j + 1) - l - 1)!}{((j + 1) - l)!((n + 1) - 1)!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la afirmación. Regresando a la demostración del Lema, sustituimos (3.14) en (3.13) y obtenemos

$$F^{-(n+1)}(\vec{x}_j) = \sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{((n + 1) + j - l - 1)!}{(j - l)!((n + 1) - 1)!} \lambda^{-(n+1+j-l)} \vec{x}_l,$$

lo cual lo reescribimos como

$$F^{-(n+1)}(\vec{x}_j) = \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \frac{((n + 1) + j - k - 1)!}{(j - k)!((n + 1) - 1)!} \lambda^{-(n+1+j-k)} \vec{x}_k.$$

Concluimos lo que queríamos demostrar. □

Como $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 1$, entonces $X = \langle \vec{u}_1 \rangle$ y $Y = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-1} \rangle$. Cada uno de estos vectores lo expresamos como combinación lineal de la base B ,

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \sum_{k=1}^m u_k \vec{x}_k \\
\vec{v}_j &= \sum_{k=1}^m v_{k,j} \vec{x}_k, \quad 1 \leq j \leq m - 1.
\end{aligned}$$

Observación 3.20 Si $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$F^n(\vec{u}_1) = \lambda^n \sum_{j=1}^m Q_j^+(n) \vec{x}_j,$$

donde

$$Q_j^+(n) = \sum_{k=j}^m \binom{n}{k-j} \lambda^{-(k-j)} u_k$$

es un polinomio en la variable n de grado $m - j$ y

$$F^{-n}(\vec{u}_1) = \lambda^{-n} \sum_{j=1}^m Q_j^-(n) \vec{x}_j,$$

donde

$$Q_j^-(n) = \sum_{k=j}^m (-1)^{k-j} \frac{(n+k-j-1)!}{(k-j)!(n-1)!} \lambda^{-(k-j)} u_k$$

es un polinomio en la variable n de grado $m - j$

Prueba. Tenemos que

$$\begin{aligned} F^n(\vec{u}_1) &= \sum_{k=1}^m u_k F^n(\vec{x}_k) = \sum_{k=1}^m u_k \left(\sum_{l=1}^k \binom{n}{k-l} \lambda^{n-(k-l)} \vec{x}_l \right) \\ &= \lambda^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^k \binom{n}{k-l} \lambda^{-(k-l)} u_k \vec{x}_l \\ &= \lambda^n \sum_{j=1}^m Q_j^+(n) \vec{x}_j. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} F^{-n}(\vec{u}_1) &= \sum_{k=1}^m u_k F^{-n}(\vec{x}_k) = \sum_{k=1}^m u_k \left(\sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} \frac{(n+k-l-1)!}{(k-l)!(n-1)!} \lambda^{-(n+k-l)} \vec{x}_l \right) \\ &= \lambda^{-n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} \frac{(n+k-l-1)!}{(k-l)!(n-1)!} \lambda^{-(k-l)} u_k \vec{x}_l \\ &= \lambda^{-n} \sum_{j=1}^m Q_j^-(n) \vec{x}_j. \end{aligned}$$

□

Lema 3.21 *Con la notación anterior. Si $\mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y)$ y $\Sigma := \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ entonces*

$$\Sigma = \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma} Q_{\sigma(1)}^+(n) = 0 \right\} \cup \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma} Q_{\sigma(1)}^-(n) = 0 \right\}.$$

donde los coeficientes a_{σ} son constantes que dependen de los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-1}$ y S_m es el grupo simétrico.

Prueba. Sabemos que $\mu(n) > 0$ si y sólo si $F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{m-1} = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned} F^n(\vec{u}_1) \wedge \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{m-1} &= \left(\lambda^n \sum_{j=1}^m Q_j^+(n) \vec{x}_j \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^m v_{k,1} \vec{x}_j \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^m v_{k,m-1} \vec{x}_j \right) \\ &= \left(\lambda^n \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) Q_{\sigma(1)}^+(n) \underbrace{v_{\sigma(2),1} \dots v_{\sigma(m),m}}_{a_{\sigma}} \right) \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_m, \end{aligned}$$

como $\lambda^n \vec{x}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x}_m \neq 0$ entonces

$$\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^+(n) = 0.$$

De manera análoga se obtiene que

$$\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^-(n) = 0.$$

□

Prueba del Teorema 3.6. Por el Lema 3.21 tenemos que

$$\Sigma = \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^+(n) = 0 \right\} \cup \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^-(n) = 0 \right\}.$$

Si cada $a_\sigma = 0$, entonces Σ coincide con \mathbb{Z} . Si $a_\sigma \neq 0$ para algún $\sigma \in S_m$, entonces $Q_{\sigma(1)}^+(n)$ y $Q_{\sigma(1)}^-(n)$ son polinomios en la variable n de grado $m - \sigma(1)$. Así, las expresiones

$$\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^+(n) \quad \text{y} \quad \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) a_\sigma Q_{\sigma(1)}^-(n)$$

son polinomios de grado a lo más $m - 1$ en la variable n , ya que $1 \leq \sigma(1) \leq m$. De esta manera, cada uno de estos polinomios tiene a lo más $m - 1$ raíces en \mathbb{C} . Por lo tanto, Σ tiene a lo más $2(m - 1)$ elementos (aquellas que sean enteras). □

Capítulo 4

Conjetura de clasificación de Arnold

En este capítulo continuamos trabajando con X y Y subespacios lineales del espacio complejo m -dimensional \mathbb{C}^m , $m > 1$, de dimensiones complementarias k y $m - k$ respectivamente. Consideramos también un operador lineal $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, la función $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida como $\mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y)$ y el conjunto

$$\Sigma := \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}.$$

Rosales-González [13] enunció por primera vez la conjetura de clasificación de Arnold, la cual trata de establecer una caracterización geométrica de los subespacios lineales X y Y cuando el conjunto Σ es infinito.

Conjetura de clasificación de Arnold (CCA). *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *El conjunto Σ es infinito.*
- (ii) *Existen números enteros a, q con $0 \leq a < q$ y un subespacio j -dimensional V invariante bajo F^q tal que para $\widehat{X} = F^a(X)$, los números*

$$\begin{aligned}\alpha &:= \dim_{\mathbb{C}}(\widehat{X} \cap V), \\ \beta &:= \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V),\end{aligned}$$

satisfacen que $\alpha + \beta > j$.

En [13], el autor demuestra que si existen tales enteros a, q y el subespacio j -dimensional V , entonces el conjunto Σ es infinito. La prueba es debido a la invarianza de V bajo F^q , ya que $F^{qs}(V) = V$ para cualquier entero $s \in \mathbb{Z}$. Así, $\dim_{\mathbb{C}}(F^{qs}(\widehat{X} \cap V)) = \dim_{\mathbb{C}}(\widehat{X} \cap V) = \alpha$, por lo que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}(F^{qs+a}(X) \cap Y) &\geq \dim_{\mathbb{C}}(F^{qs+a}(X) \cap Y \cap V) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(F^{qs}(\widehat{X}) \cap V) + \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V) - \dim_{\mathbb{C}}((F^{qs}(\widehat{X}) \oplus Y) \cap V) \\ &\geq \alpha + \beta - j > 0.\end{aligned}$$

De esta manera, el conjunto Σ contiene a la progresión aritmética $\{a + qs : s \in \mathbb{Z}\}$ y se concluye que Σ es infinito.

El primer resultado de este capítulo es sobre la otra implicación de CCA, demostramos que es cierta cuando el subespacio X es de dimensión 1.

Teorema 4.1 Sean $X, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ subespacios lineales de dimensión compleja k y $m - k$ respectivamente; y $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un isomorfismo lineal y $m \geq 2$. Si $k = 1$ (o bien $m - k = 1$) y el conjunto

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y) > 0\}$$

es infinito, entonces existen enteros a, q con $0 \leq a < q$ y un subespacio lineal j -dimensional V , invariante bajo F^q , tales que para $\widehat{X} = F^a(X)$ los números

$$\begin{aligned}\alpha &:= \dim_{\mathbb{C}}(\widehat{X} \cap V), \\ \beta &:= \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V),\end{aligned}$$

satisfacen la desigualdad $\alpha + \beta > j$.

Prueba. Por la Observación 2.1 basta considerar el caso $k = 1$ pues el caso $m - k = 1$ es análogo. Como F es un isomorfismo lineal, entonces por las proposiciones 2.3 y 3.2, el conjunto Σ consiste de un conjunto finito junto con una cantidad finita de progresiones aritméticas. Por hipótesis, Σ es infinito, entonces contiene al menos una progresión aritmética, esto es, existen enteros a, q con $0 \leq a < q$ tales que

$$\{a + ql : l \in \mathbb{Z}\} \subseteq \Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y) > 0\}.$$

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\dim_{\mathbb{C}}(F^n(X)) = 1$, por lo que $F^{a+ql}(X) \subseteq Y$ para toda $l \in \mathbb{Z}$, en particular $\widehat{X} = F^a(X) \subseteq Y$. Sea V el subespacio j -dimensional generado por el conjunto $\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} F^{a+ql}(X)$. Este subespacio es invariante bajo F^q , además $\widehat{X} \subseteq V \subseteq Y$ y

$$\begin{aligned}\alpha &= \dim_{\mathbb{C}}(\widehat{X} \cap V) = 1 \\ \beta &= \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V) = j.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha + \beta = 1 + j > j$. □

Para continuar con el análisis de la conjetura de clasificación de Arnold, suponemos que los subespacios X y Y son tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) > 1$. Como la dimensión compleja del subespacio Y es complementaria a la de X , entonces el primer espacio complejo a estudiar es \mathbb{C}^4 . Antes de enunciar el teorema, establecemos la siguiente definición.

Definición 4.2 Decimos que un operador lineal $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tiene k -resonancias si existen dos subconjuntos distintos $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ de $\{1, \dots, m\}$, con $i_1 < \dots < i_k$ y $j_1 < \dots < j_k$, tales que

$$(\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^p = (\lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k})^p$$

para algún $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Observación 4.3 Cualquier operador lineal $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ sin k -resonancias es no degenerado y diagonalizable.

Prueba. Supongamos que F tiene un valor propio cero, sin pérdida de generalidad $\lambda_1 = 0$. Entonces

$$(\lambda_1 \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k})^p = 0 = (\lambda_1 \lambda_{j_2} \cdots \lambda_{j_k})^p$$

para cualquier $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y cualesquiera subconjuntos $\{1, i_2, \dots, i_k\}, \{1, j_2, \dots, j_k\}$ de $\{1, \dots, m\}$. Esto es una contradicción porque F no tiene k -resonancias, por lo tanto, ningún valor propio de F es cero (F es no degenerado).

Si suponemos que F tiene dos valores propios iguales, sin pérdida de generalidad, $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces

$$(\lambda_1 \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k})^p = (\lambda_2 \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k})^p$$

para cualquier $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, donde $i_2 > 2$. Nuevamente, esto es una contradicción. Por lo tanto, F es diagonalizable. \square

Así, bajo la hipótesis de que el isomorfismo lineal $F : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ no tiene 2-resonancias, entonces la segunda implicación de CCA es cierta.

Teorema 4.4 Sean X, Y dos subespacios 2-dimensionales de \mathbb{C}^4 y $F : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ un operador lineal sin 2-resonancias. Si el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ es infinito, entonces existe un subespacio j -dimensional V de \mathbb{C}^4 , invariante bajo F , tal que los números

$$\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(X \cap V) \quad y \quad \beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V)$$

satisfacen que $\alpha + \beta > j$.

La demostración de este teorema se encuentra en la sección 4.2.1 de este capítulo. Cabe destacar que esta prueba usa en mayor medida las propiedades de los 2-vectores y las $m - 2$ formas que recordamos en las secciones 1.3 y 1.2. Además, de las cosas más interesantes de esta prueba, es que a cada s -vector le asociamos una gráfica (de manera dual también a cada s -forma) y en la sección 4.1 demostramos propiedades sobre estas gráficas. Por ello, es pertinente recordar la definición de gráfica (ver [5] para más información).

Definición 4.5 Una *gráfica* G es una tripleta ordenada $(V(G), E(G), f_G)$ consistente de un conjunto no vacío de *vértices* $V(G)$, un conjunto de *aristas* $E(G)$ (ajeno a $V(G)$) y una *función de incidencia* f_G que asocia cada arista de G con un par no ordenado de vértices de G (no necesariamente distintos). Si e es una arista de G y u, v son vértices tales que $f_G(e) = uv$, entonces se dice que e *une* a u y v o bien u y v son *adyacentes*; los vértices u y v son llamados los *extremos* de e . La gráfica es *simple* si cada arista es asociada con un par de vértices distintos y existe una única arista para cada par de vértices.

Finalmente, si $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ es la base de \mathbb{C}^m , $m \geq 4$, formada por los vectores propios de F , entonces tenemos el siguiente resultado. Su prueba se encuentra en la sección 4.2.2 de este capítulo.

Teorema 4.6 Sean $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ un operador lineal sin 2-resonancias, X y Y subespacios de \mathbb{C}^m , $m \geq 4$, tales que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 2$. Si el subespacio X no está contenido en

ningún subespacio generado por algún subconjunto de la base B , el subespacio Y es distinto de cualquier subespacio generado por algún subconjunto de B , y el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ es infinito, entonces existen números enteros a, q , con $0 \leq a < q$ y un subespacio j -dimensional V de \mathbb{C}^m , invariante bajo F^q , tal que los números $\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(F^a(X) \cap V)$ y $\beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V)$ satisfacen que $\alpha + \beta > j$.

4.1. Los soportes de un s -vector y una s -forma

Recordemos que en las secciones 1.2 y 1.3, denotamos al espacio vectorial de las s -formas en \mathbb{C}^m sobre \mathbb{C} por $\bigwedge^s(\mathbb{C}^{m*})$ y al espacio de los s -vectores en \mathbb{C}^m sobre \mathbb{C} por $\bigwedge^s \mathbb{C}^m$.

Si $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ es una base de \mathbb{C}^m tenemos las formas básicas $x_j^* : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq m$, definidas como $x_j^*(\vec{v}) = v_j$, donde $\vec{v} = \sum_{l=1}^m v_l \vec{x}_l$. El conjunto

$$B^s := \{\varphi_I^* = x_{i_1}^* \wedge \dots \wedge x_{i_s}^* : I = \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, m\}, i_1 < \dots < i_s\}$$

es una base del espacio vectorial $\bigwedge^s(\mathbb{C}^{m*})$ y el conjunto

$$B_s := \{E_I = \vec{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \vec{x}_{i_s} : I = \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, m\}, i_1 < \dots < i_s\}$$

es una base del espacio vectorial $\bigwedge^s \mathbb{C}^m$.

Dado un s -vector w , definimos en la sección 1.4 el subespacio vectorial D_w como

$$D_w = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^m : \vec{v} \wedge w = 0\}$$

y el operador lineal $\Omega_w : \mathbb{C}^m \rightarrow \bigwedge^{s+1} \mathbb{C}^m$ definido como $\Omega_w(\vec{v}) = \vec{v} \wedge w$. Además, este operador tiene rango $(m-s)$ si y sólo si w es factorizable por un subespacio s -dimensional W (ver Definición 1.13). En efecto ya que D_w es el núcleo de Ω_w , el cual es s -dimensional si y sólo si $D_w = W$.

Ahora bien, si U es un subespacio $(m-s)$ -dimensional de \mathbb{C}^m generado por el conjunto de vectores linealmente independientes $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{m-s}\}$, entonces el $(m-s)$ -vector $u = \vec{u}_1 \wedge \dots \wedge \vec{u}_{m-s}$ define una aplicación $\varphi_u^* : \underbrace{\mathbb{C}^m \times \dots \times \mathbb{C}^m}_{s \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface

$$\varphi_u^*(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s) = a_{1, \dots, m}, \quad \text{donde } u \wedge \vec{z}_1 \wedge \dots \wedge \vec{z}_s = a_{1, \dots, m} E_{1, \dots, m}$$

Claramente, φ_u^* es una s -forma en \mathbb{C}^m ya que el producto exterior es multilineal y alternante.

Definición 4.7 Sea U un subespacio $(m-s)$ -dimensional de \mathbb{C}^m y φ^* una s -forma. Decimos que φ^* es *factorizable por U* si $\varphi^* = a\varphi_u^*$ para algún $(m-s)$ -vector u factorizable por U y algún número $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Sean w un s -vector y ψ^* una s -forma en \mathbb{C}^m . Expresándolas en términos de las bases B_s y B^s , tenemos que

$$w = \sum_{\substack{I = \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ i_1 < \dots < i_s}} a_I E_I,$$

y

$$\psi^* = \sum_{\substack{J = \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ j_1 < \dots < j_s}} b_J \varphi_J^*.$$

Definición 4.8 Sea $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ una base de \mathbb{C}^m y w un s -vector (o bien, φ^* una s -forma). El *soporte de w* (análogamente el *soporte de φ^**) respecto a la base B de \mathbb{C}^m , denotado por $\text{supp}(w)$ ($\text{supp}(\varphi^*)$), es la gráfica simple tal que

1. su conjunto de vértices es el subconjunto definido como

$$\begin{aligned} V(\text{supp}(w)) &= \{i \in I : I \subseteq \{1, \dots, m\}, a_I \neq 0\} \\ (V(\text{supp}(\varphi^*)) &= \{j \in J : J \subseteq \{1, \dots, m\}, b_J \neq 0\}), \end{aligned}$$

2. su conjunto de aristas está conformado por las aristas $e_{i_l, i_{l+1}}$ que unen los vértices i_l e i_{l+1} , $l = 1, \dots, s - 1$, para cada $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ tal que $a_I \neq 0$ (análogamente para las aristas del soporte de φ^*).

Ejemplo: en \mathbb{C}^5 consideremos el 3-vector

$$w = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 - \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_4 + 3\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_4.$$

El soporte de w tiene cuatro vértices $V(\text{supp}(w)) = \{1, 2, 3, 4\}$ y cinco aristas

$$E(\text{supp}(w)) = \{e_{1,2}, e_{2,3}, e_{1,3}, e_{3,4}, e_{2,4}\},$$

como se ve en la Figura 4.1.

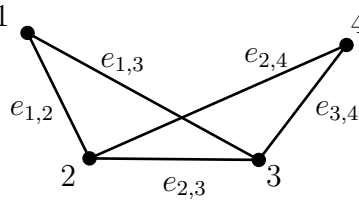


Figura 4.1: Soporte del 3-vector w

Observación 4.9 Sea W un subespacio s -dimensional de \mathbb{C}^m . Si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s\}$ y $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s\}$ son bases distintas de W , entonces los soportes de $v = \vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_s$ y $w = \vec{w}_1 \wedge \dots \wedge \vec{w}_s$ respecto a la base B de \mathbb{C}^m son exactamente la misma gráfica. En efecto ya que cualquier \vec{w}_j lo expresamos como combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s\}$, por lo que $w = cv$ con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Debido a esta observación, dado un subespacio W denotamos por $\text{supp}(W)$ al soporte con respecto a la base B de cualquier s -vector v factorizable por W .

Lema 4.10 Sean W un subespacio 2-dimensional de \mathbb{C}^m , $m \geq 4$ y un 2-vector

$$w = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{i,j} E_{i,j}$$

factorizable por W . Si $I = \{i_1, i_2\}$ y $J = \{j_1, j_2\}$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq m$ son tales que $I \cap J = \emptyset$ y $a_I \neq 0$, entonces

$$a_{l_1, l_2} a_{l_3, l_4} - a_{l_1, l_3} a_{l_2, l_4} + a_{l_1, l_4} a_{l_2, l_3} = 0 \quad (4.1)$$

donde $\{l_1, \dots, l_4\} = \{i_1, i_2, j_1, j_2\}$ con $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$. Más aún, en \mathbb{C}^4 , un 2-vector w es factorizable por W si y sólo si se cumple (4.1).

Prueba. Primero vamos a demostrar el lema para $I = \{1, 2\}$ y $J = \{3, 4\}$. Esto es, $l_i = i$ con $i = 1, 2, 3, 4$.

Como el 2-vector w es factorizable por W , entonces el operador lineal $\Omega_w : \mathbb{C}^m \rightarrow \bigwedge^3 \mathbb{C}^m$ definido como $\Omega_w(\vec{v}) = \vec{v} \wedge w$ tiene rango $m - 2$. Observemos que

$$\begin{aligned} \Omega_w(\vec{x}_l) &= \vec{x}_l \wedge \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{i,j} E_{i,j} \right) \\ &= \sum_{l < i < j \leq m} a_{i,j} E_{l,i,j} - \sum_{1 \leq i < l < j \leq m} a_{i,j} E_{i,l,j} + \sum_{1 \leq i < j < l} a_{i,j} E_{i,j,l} \end{aligned}$$

con $1 \leq l \leq m$ y la matriz $[\Omega_w]_B^{B_3}$ asociada a Ω_w tiene rango $m - 2$. Esto quiere decir que cualesquiera m renglones de esta matriz son linealmente dependientes. Consideramos los m renglones correspondientes a $E_{1,2,3}$, $E_{1,2,4}$, $E_{1,3,4}$, $E_{2,3,4}$ y $E_{1,2,l}$ con $5 \leq l \leq m$ para formar la matriz

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{2,3} & -a_{1,3} & a_{1,2} & 0 & \\ a_{2,4} & -a_{1,4} & 0 & a_{1,2} & 0 \\ a_{3,4} & 0 & -a_{1,4} & a_{1,3} & \\ 0 & a_{3,4} & -a_{2,4} & a_{2,3} & \\ \hline & & C & & D \end{array} \right),$$

donde C es la matriz $(m - 4) \times 4$

$$C = \begin{pmatrix} a_{2,5} & -a_{1,5} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2,m} & -a_{1,m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y D es la matriz $(m - 4) \times (m - 4)$ diagonal

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Como los renglones de la matriz A son linealmente dependientes, entonces su determinante es cero, por lo que

$$0 = \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{2,3} & -a_{1,3} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,4} & -a_{1,4} & 0 & a_{1,2} \\ a_{3,4} & 0 & -a_{1,4} & a_{1,3} \\ 0 & a_{3,4} & -a_{2,4} & a_{2,3} \end{pmatrix} \det(D),$$

de donde

$$(a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3})^2 a_{1,2}^{m-4} = 0,$$

pero $a_{1,2} \neq 0$ por hipótesis, por lo tanto,

$$a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3} = 0. \quad (4.2)$$

Para el caso general, consideramos una función biyectiva $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que $\sigma(i_1) = 1$, $\sigma(i_2) = 2$, $\sigma(j_1) = 3$ y $\sigma(j_2) = 4$. Reordenando la base B como $\widehat{B} = \{\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(m)}\}$, tenemos que el 2-vector w se expresa como

$$w = \sum_{1 \leq \sigma(i) < \sigma(j) \leq m} a_{\sigma(i), \sigma(j)} E_{\sigma(i), \sigma(j)}$$

donde $a_{\sigma(i_1), \sigma(i_2)} \neq 0$ y aplicamos lo hecho en el caso anterior.

Para $m = 4$, tenemos que $B_3 = \{E_{1,2,3}, E_{1,2,4}, E_{1,3,4}, E_{2,3,4}\}$ por lo que la matriz $[\Omega_w]_B^{B_3}$ coincide con la parte superior izquierda de la matriz A . El 2-vector w es factorizable por W si y sólo si la matriz $[\Omega_w]_B^{B_3}$ tiene rango 2 por lo que se satisface la igualdad (4.2). Recíprocamente, si se satisface (4.2) se puede verificar que todos los menores de orden 3 de la matriz $[\Omega_w]_B^{B_3}$ son cero pero siempre habrá un menor de orden 2 distinto de cero. \square

A continuación demostraremos un resultado necesario para probar un lema análogo al anterior para una 2-forma.

Lema 4.11 *Sea W un subespacio $(m-s)$ -dimensional de \mathbb{C}^m , w un $(m-s)$ -vector factorizable por W ,*

$$w = \sum_{I=\{i_1, \dots, i_{m-s}\} \subseteq \{1, \dots, m\}} a_I E_I$$

y $\varphi^* = \varphi_w^*$ la s -forma factorizable por W ,

$$\varphi^* = \sum_{J=\{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \{1, \dots, m\}} b_J \varphi_J^*.$$

Si $J = \{j_1, \dots, j_s\}$ y $J' = \{j'_1, \dots, j'_{m-s}\}$ con $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq m$, $1 \leq j'_1 < \dots < j'_{m-s} \leq m$ son tales que $J \cap J' = \emptyset$, entonces

$$b_J E_{1, \dots, m} = a_{J'} E_{j'_1, \dots, j'_{m-s}} \wedge E_{j_1, \dots, j_s}.$$

Prueba. Recordemos que $\varphi_J^* = x_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge x_{j_s}^*$, entonces $\varphi^*(\vec{x}_{j_1}, \dots, \vec{x}_{j_s}) = b_J$ ya que

$$\varphi^* = \sum_{J=\{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \{1, \dots, m\}} b_J \varphi_J^*.$$

Por otro lado,

$$w \wedge \vec{x}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{x}_{j_s} = a_{J'} E_{j'_1, \dots, j'_{m-s}} \wedge E_{j_1, \dots, j_s}$$

y por definición de φ^* tenemos que $b_J E_{1, \dots, m} = w \wedge \vec{x}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{x}_{j_s}$, por lo tanto,

$$b_J E_{1, \dots, m} = a_{J'} E_{j'_1, \dots, j'_{m-s}} \wedge E_{j_1, \dots, j_s}.$$

□

El resultado siguientes es un análogo al Lema 4.10 enunciado para las 2-formas.

Lema 4.12 *Sea W un subespacio $(m-2)$ -dimensional de \mathbb{C}^m , $m \geq 4$ y una 2-forma*

$$\varphi^* = \sum_{1 \leq i < j \leq m} b_{i,j} x_i^* \wedge x_j^*$$

factorizable por W . Si $I = \{i_1, i_2\}$ y $J = \{j_1, j_2\}$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq m$, son tales que $I \cap J = \emptyset$ y $b_I \neq 0$, entonces

$$b_{l_1, l_2} b_{l_3, l_4} - b_{l_1, l_3} b_{l_2, l_4} + b_{l_1, l_4} b_{l_2, l_3} = 0 \quad (4.3)$$

donde $\{l_1, \dots, l_4\} = \{i_1, i_2, j_1, j_2\}$ con $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$. Más aún, en \mathbb{C}^4 , una 2-forma φ^ es factorizable por W si y sólo si se cumple (4.3).*

Prueba. Como en la prueba del Lema 4.10 vamos a considerar primero el caso $I = \{1, 2\}$ y $J = \{3, 4\}$. El caso general, que no presentamos, se hace con una biyección conveniente $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$.

Como φ^* es factorizable por W , existe un $(m-2)$ -vector w factorizable por W , tal que $\varphi^* = \varphi_w^*$. Expresamos a w en términos de la base B_{m-2} ,

$$w = \sum_{1 \leq i < j \leq m} c_{(i,j)'} E_{(i,j)'}$$

donde

$$(i, j)' = \{i_1, \dots, i_{m-2}\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}, \quad i_1 < \cdots < i_{m-2}.$$

Como $\{i, j\} \cap (i, j)' = \emptyset$, por el Lema anterior, se cumple

$$b_{i,j} E_{1, \dots, m} = c_{(i,j)'} E_{(i,j)'} \wedge E_{i,j},$$

de donde

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= c_{3,4, \dots, m}, & b_{2,3} &= c_{1,4, \dots, m}, \\ b_{1,3} &= -c_{2,4, \dots, m}, & b_{2,4} &= -c_{1,3,5, \dots, m}, \\ b_{1,4} &= c_{2,3,5, \dots, m}, & b_{3,4} &= c_{1,2,5, \dots, m}. \end{aligned}$$

El operador lineal $\Omega_w : \mathbb{C}^m \rightarrow \bigwedge^{m-1} \mathbb{C}^m$ tiene rango 2 porque w es factorizable por W y

$$\begin{aligned}\Omega_w(\vec{x}_l) &= \vec{x}_l \wedge \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} c_{(i,j)'} E_{(i,j)'} \right) \\ &= \sum_{i=l < j \leq m} (-1)^{l-1} c_{(i,j)'} E_{(j)'} + \sum_{1 \leq i < j=l} (-1)^l c_{(i,j)'} E_{(i)'}\end{aligned}$$

con $1 \leq l \leq m$. Su matriz asociada $[\Omega_w]_B^{B^{m-1}}$ es de rango 2, esto quiere decir que cualquier menor de orden mayor o igual que 3 debe ser cero. Vamos a considerar el menor formado por las primeras 4 columnas y los renglones correspondientes a $E_{(1)'}$, $E_{(2)'}$, $E_{(3)'}$ y $E_{(4)'}$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} 0 & c_{(1,2)'} & -c_{(1,3)'} & c_{(1,4)'} \\ c_{(1,2)'} & 0 & -c_{(2,3)'} & c_{(2,4)'} \\ c_{(1,3)'} & -c_{(2,3)'} & 0 & c_{(3,4)'} \\ c_{(1,4)'} & -c_{(2,4)'} & c_{(3,4)'} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

de donde

$$c_{(1,2)'}c_{(3,4)'} - c_{(1,3)'}c_{(2,4)'} + c_{(1,4)'}c_{(2,3)'} = 0$$

y sustituyendo obtenemos

$$b_{1,2}b_{3,4} - b_{1,3}b_{2,4} + b_{1,4}b_{2,3} = 0 \quad (4.4)$$

lo que se quería demostrar.

Para $m = 4$, la matriz $[\Omega_w]_B^{B^{m-1}}$ coincide con la matriz anterior. Si φ^* es factorizable por W , entonces dicha matriz tiene rango 2 y se satisface la igualdad (4.3). Recíprocamente, si se satisface (4.3), todos los menores de orden 3 son cero pero siempre hay un menor de orden 2 distinto de cero. \square

Lema 4.13 *Sea W un subespacio 2-dimensional de \mathbb{C}^m y w un 2-vector factorizable por W , con*

$$w = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Si el soporte de w tiene dos aristas definidas por $I = \{i_1, i_2\}$ y $J = \{j_1, j_2\}$ tales que $I \cap J = \emptyset$, entonces contiene a las aristas e_{i_1, j_1} y e_{i_2, j_2} , o bien, a las aristas e_{i_1, j_2} y e_{i_2, j_1} .

Prueba. Sea $\{l_1, \dots, l_4\}$ el conjunto $\{i_1, i_2, j_1, j_2\}$ tal que $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$. Por el Lema 4.10 se cumple que

$$a_{l_1, l_2} a_{l_3, l_4} - a_{l_1, l_3} a_{l_2, l_4} + a_{l_1, l_4} a_{l_2, l_3} = 0.$$

Como I y J definen dos aristas en el soporte de w , entonces $a_{i_1, i_2} a_{j_1, j_2} \neq 0$, esto obliga a que uno de los términos de la igualdad anterior también sea distinto de cero. Así, las aristas e_{i_1, j_1} y e_{i_2, j_2} están en el soporte de w (Figura 4.2 (a)), o bien las aristas e_{i_1, j_2} y e_{i_2, j_1} lo están (Figura 4.2 (b)). \square

De la misma manera, se puede probar el resultado análogo a este lema para una 2-forma, usando el Lema 4.12.



(a) $e_{i_1,j_1}, e_{i_2,j_2} \in E(\text{supp}(w))$ (b) $e_{i_1,j_2}, e_{i_2,j_1} \in E(\text{supp}(w))$

Figura 4.2: Aristas que contiene el soporte de w

Lema 4.14 *Si el soporte de una 2-forma factorizable por un subespacio $(m - 2)$ -dimensional de \mathbb{C}^m contiene dos aristas definidas por $I = \{i_1, i_2\}$ y $J = \{j_1, j_2\}$ tales que $I \cap J = \emptyset$, entonces también contiene a las aristas e_{i_1,j_1} y e_{i_2,j_2} , o bien, a las aristas e_{i_1,j_2} y e_{i_2,j_1} .*

En una gráfica G , un *camino* es una sucesión finita no vacía $\mathcal{C} = V_0, e_1, V_1, e_2, V_2, \dots, e_r, V_r$ cuyos términos son vértices y aristas alternadamente, tales que para $1 \leq i \leq r$, los extremos de la arista e_i son los vértices V_{i-1} y V_i . El camino \mathcal{C} es un *paseo* si sus aristas son distintas por pares y es una *trayectoria* si es un paseo y sus vértices son distintos por pares. Una gráfica G es conexa si y sólo si existe una trayectoria entre cualquier par de vértices.

Lema 4.15 *Sea W un subespacio 2-dimensional de \mathbb{C}^m y w un 2-vector factorizable por W . Si W no está contenido en ningún subespacio generado por algún subconjunto de la base B de \mathbb{C}^m , entonces el soporte de w contiene a todos los vértices $\{1, \dots, m\}$ y es una gráfica conexa. Más aún, cualquier par de vértices son adyacentes o existe una trayectoria de longitud 2 que los conecta.*

Prueba. Tenemos que

$$w = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a_{i,j} \vec{x}_i \wedge \vec{x}_j = \sum_{I = \{i_1, i_2\} \subseteq \{1, \dots, m\}} a_I E_I$$

y por definición, los vértices del soporte de w es el conjunto

$$V(\text{supp}(w)) = \{i \in \{1, \dots, m\} : i \in I, a_I \neq 0\}.$$

Supongamos que existe $l \in \{1, \dots, m\}$ que no está en $V(\text{supp}(w))$, esto quiere decir que si $l \in I$ entonces $a_I = 0$. Como w es factorizable por W , entonces para todo $\vec{v} \in W$ se satisface $\vec{v} \wedge w = 0$.

Si $\vec{v} = \sum_{i=1}^m v_i \vec{x}_i$, entonces al desarrollar $\vec{v} \wedge w$ obtenemos una combinación lineal de elementos de la base de los 3-vectores B_3 , por lo que cada coeficiente debe ser cero. En particular $a_I v_l = 0$ para todo I , entonces $v_l = 0$. Esto implica que $W \subseteq \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{l-1}, \vec{x}_{l+1}, \dots, \vec{x}_m \rangle$ lo cual es una contradicción a la hipótesis.

Para la segunda parte, supongamos que i_1 y j_1 son vértices del soporte de w , con $i_1 < j_1$. Si $L = \{i_1, j_1\}$ es tal que $a_L \neq 0$, entonces existe la arista que une a los vértices i_1 y j_1 ; por lo tanto, i_1 y j_1 están conectados. Si $a_L = 0$, consideramos $I = \{i_1, i_2\}$ y $J = \{j_1, j_2\}$ (con

el orden adecuado) tales que $a_I a_J \neq 0$. Cuando $i_2 = j_2$, la trayectoria $\{i_1, i_2, j_1\}$ conecta a i_1 con j_1 . Cuando $i_2 \neq j_2$, entonces $I \cap J = \emptyset$ y por el Lema 4.13 existen las aristas e_{i_1, j_2} y e_{i_2, j_1} , por lo que los vértices i_1 y j_1 están conectados por la trayectoria $\{i_1, i_2, j_1\}$. Concluimos que el soporte de w es conexo y que cualquier par son adyacentes o existe una trayectoria de longitud 2 que los conecta. \square

Definición 4.16 Sea G una gráfica y a un vértice de G . Decimos que un vértice b de G es *vecino* de a si existe la arista ab . El conjunto de vecinos de a es llamado *vecindad de a* y es denotado por $N(a)$.

Lema 4.17 Sea W un subespacio 2-dimensional de \mathbb{C}^m , w un 2-vector factorizable por W y $a \in V(\text{supp}(w))$. Si $b \in N(a)$ y $c \notin N(a)$, entonces existe la arista $e_{b,c}$. Además, si $b, c \notin N(a)$, entonces no existe la arista $e_{b,c}$.

Prueba. Como $b \in N(a)$, existe la arista $e_{a,b}$ pero no la arista $e_{a,c}$ ya que $c \notin N(a)$. Por el lema anterior b y c son adyacentes o existe una trayectoria de longitud 2 que los conecta. Si suponemos que existe la trayectoria $\{b, d, c\}$ de longitud 2, con $d \neq a$, entonces $\{a, b\} \cap \{d, c\} = \emptyset$. Por el Lema 4.13 existen las aristas $e_{a,d}$ y $e_{b,c}$, con lo que queda demostrado la primera parte del resultado.

Para la segunda parte, supongamos que $b, c \notin N(a)$, es decir, no existen las aristas $e_{a,b}$ y $e_{a,c}$. Como a es un vértice del soporte de w , debe existir al menos un $d \in N(a)$ por definición de soporte. Si suponemos que existe la arista $e_{b,c}$, entonces por el Lema 4.13 deben existir las aristas ab y dc o bien, las aristas $e_{a,c}$ y $e_{d,b}$. Cualquiera de los dos casos es una contradicción, por lo tanto, no existe la arista $e_{b,c}$. \square

Si W es un subespacio $(m-2)$ -dimensional y no contiene a ningún subespacio generado por la base B , entonces establecemos resultados análogos para una 2-forma factorizable por W .

Lema 4.18 Sea W un subespacio $(m-2)$ -dimensional de \mathbb{C}^m y φ^* una 2-forma factorizable por W . Si W no contiene a ningún subespacio generado por algún subconjunto de la base B de \mathbb{C}^m , entonces el soporte de φ^* contiene a todos los vértices $\{1, \dots, m\}$ y es una gráfica conexa. Más aún, cualesquiera dos vértices son adyacentes o existe una trayectoria de longitud 2 que los conecta.

Prueba. Como φ^* es factorizable por W , existe un $(m-2)$ -vector w factorizable por W tal que $\varphi^* = \varphi_w^*$. Así,

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \sum_{I=\{i_1, i_2\} \subseteq \{1, \dots, m\}} b_I \varphi_I^*, \\ w &= \sum_{J=\{i_1, \dots, i_{m-s}\} \subseteq \{1, \dots, m\}} a_J E_J.\end{aligned}$$

Supongamos que existe $l \in \{1, \dots, m\}$ que no es vértice del soporte de φ^* , es decir, $b_L = 0$ para todo $L = \{l_1, l_2\}$ tal que $l \in L$. Observemos que para cada $I = \{i_1, i_2\}$ tenemos que $I' = \{1, \dots, m\} \setminus I$ y por el Lema 4.11 se cumple que

$$b_I E_{1, \dots, m} = a_{I'} E_{I'} \wedge E_I.$$

Como $l \notin I$ para todo $b_I \neq 0$, entonces $l \in I'$ para todo $a_{I'} \neq 0$, esto implica que $\vec{v} \wedge w = 0$ para todo $\vec{v} = c\vec{x}_l$ con $c \in \mathbb{C}$, por lo que $\langle \vec{x}_l \rangle \subseteq W$ lo que es una contradicción a la hipótesis.

La prueba que el soporte de φ^* es una gráfica conexa y que cualesquiera dos de sus vértices son adyacentes o existe una trayectoria de longitud 2 que los conecta, es análoga a la prueba del Lema 4.15. \square

Lema 4.19 *Sea W un subespacio $(m-2)$ -dimensional de \mathbb{C}^m , φ^* una 2-forma factorizable por W y $a \in V(\text{supp}(\varphi^*))$. Si $b \in N(a)$ y $c \notin N(a)$, entonces existe la arista bc . Además, si $b, c \notin N(a)$, entonces no existe la arista bc .*

Prueba. La prueba es análoga a la prueba del Lema 4.17. \square

4.2. Pruebas de CCA para X de dimensión 2 y $m \geq 4$

Recordemos que X y Y son subespacios de \mathbb{C}^m tales que $\dim(X) = k$ y $\dim(Y) = m - k$. Denotemos por \hat{x} al k -vector factorizable por X y su expresión como combinación lineal de la base B_k ,

$$\hat{x} = \sum_{\substack{I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ i_1 < \dots < i_k}} a_I E_I.$$

Análogamente, denotemos por φ^* a la k -forma factorizable por Y y su expresión como combinación lineal de la base B^k ,

$$\varphi^* = \sum_{\substack{J = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}, \\ j_1 < \dots < j_k}} b_J \varphi_J^*.$$

Lema 4.20 *Con la notación anterior, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. El conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ es infinito.
2. Para cualquier multi índice $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ se cumple $a_I b_I = 0$;
3. El subconjunto $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ define una trayectoria en el soporte de \hat{x} si y sólo si la trayectoria I no existe en el soporte de φ^* .

Prueba. Los enunciados 2 y 3 son equivalentes por las definiciones de soportes de \hat{x} y de φ^* . Tenemos que $\mu(n) = \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y) > 0$ si y sólo si para cualquier k -vector \hat{x}_n factorizable por $F^n(X)$ y cualquier $(m-k)$ -vector \hat{y} factorizable por Y se cumple

$$\hat{x}_n \wedge \hat{y} = 0. \tag{4.5}$$

Como F no tiene k -resonancias, entonces es un isomorfismo lineal diagonalizable, por lo que

$$\hat{x}_n = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} a_I F^n(\vec{x}_{i_1}) \wedge \dots \wedge F^n(\vec{x}_{i_k}) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} a_I (\Lambda_I)^n E_I,$$

donde $\Lambda_I = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$. Sustituyendo en (4.5), tenemos

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} a_I (\Lambda_I)^n \widehat{y} \wedge E_I = 0$$

y por definición de la k forma $\varphi^* = \varphi_{\widehat{y}}^*$ tenemos que $\varphi_{\widehat{y}}^*(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_k}) E_{1, \dots, m} = \widehat{y} \wedge E_I$, entonces

$$\left(\sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} a_I (\Lambda_I)^n \varphi_{\widehat{y}}^*(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_k}) \right) E_{1, \dots, m} = 0.$$

Por otro lado, como φ^* es una k -forma, entonces la expresamos como combinación lineal de los elementos de la base B^k ,

$$\varphi^* = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, m\}} b_J \varphi_J^*$$

de donde tenemos

$$\sum_I \sum_J a_I b_J (\Lambda_I)^n \varphi_J^*(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_k}) = 0$$

y $\varphi_J^*(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_k}) = \delta_{I,J}$ donde $\delta_{I,J} = 0$ si $I \neq J$ y $\delta_{I,J} = 1$ si $I = J$. Por esta razón, la igualdad (4.5) se cumple si y sólo si

$$\sum_I a_I b_I (\Lambda_I)^n = 0. \quad (4.6)$$

El conjunto Σ es infinito si y sólo si la igualdad (4.6) se satisface para una cantidad infinita de valores n , esto es posible si $a_I b_I = 0$ para todo multi índice I por el Teorema 1.25 ya que F no tiene k -resonancias. \square

4.2.1. Prueba del Teorema 4.4

Recordemos que las hipótesis del Teorema 4.4 son que los subespacios X y Y de \mathbb{C}^4 tienen dimensión compleja igual a 2, el operador lineal $F : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ no tiene 2 resonancias y el conjunto $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \mu(n) > 0\}$ es infinito.

Prueba del Teorema 4.4. Consideremos la base $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$ de \mathbb{C}^4 compuesta por vectores propios de F , \widehat{x} el 2-vector factorizable por X con

$$\widehat{x} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} a_{i_1, i_2} \vec{x}_{i_1} \wedge \vec{x}_{i_2}$$

y φ^* la 2-forma factorizable por Y con

$$\varphi^* = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 4} b_{j_1, j_2} x_{j_1}^* \wedge x_{j_2}^*.$$

Tenemos que el conjunto Σ es infinito si y sólo si $a_{i,j} b_{i,j} = 0$ para todo i, j , $1 \leq i < j \leq 4$ por el Lema 4.20.

Si suponemos que X es generado por algún subconjunto de la base B , entonces $V = X$. Es invariante bajo F ya que $F(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i$, $\alpha = 2$ y existen una infinidad de valores $n \in \mathbb{Z}$ tales que $\mu(n) > 0$. Dado que $F^n(X) \subseteq X$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (por ser X invariante bajo F), entonces $\beta \geq 1$. Por lo tanto, $\alpha + \beta > \dim_{\mathbb{C}}(V)$. Análogamente, si Y es generado por algún subconjunto de B , consideramos $V = Y$.

Supongamos que ni X ni Y están generados por subconjuntos de B . Bajo esta condición tenemos las siguientes observaciones:

1. Los soportes de \hat{x} y de φ^* contienen al menos dos aristas distintas. En efecto, si el soporte de \hat{x} contiene únicamente una arista, entonces $\hat{x} = a_{i_1, i_2} \vec{x}_{i_1} \wedge \vec{x}_{i_2}$ por definición de soporte, por lo que X estaría generado por un subconjunto de B . Análogamente para el soporte de φ^* .
2. Cualquier par de aristas en el soporte de \hat{x} , o en el de φ^* , tienen un vértice en común. En efecto, supongamos sin pérdida de generalidad que los vértices $I = \{1, 2\}$ y $J = \{3, 4\}$ definen aristas en el soporte de \hat{x} , entonces $a_{1,2} a_{3,4} \neq 0$ y $b_{1,2} = b_{3,4} = 0$ ya que $a_{i,j} b_{i,j} = 0$ para todo i, j . Además, por el Lema 4.13 el soporte de \hat{x} debe contener a las aristas $e_{1,3}$ y $e_{2,4}$, o bien, a las aristas $e_{1,4}$ y $e_{2,3}$. En el primer caso, tenemos que $a_{1,3} a_{2,4} \neq 0$ lo que implica que $b_{1,3} = b_{2,4} = 0$, entonces

$$\varphi^* = b_{1,4} x_1^* \wedge x_4^* + b_{2,3} x_2^* \wedge x_3^*.$$

De esta manera, $b_{1,4} b_{2,3} \neq 0$ (no pueden ser cero ambos porque Y no está generado por un subconjunto de la base B) pero esto es una contradicción pues por el Lema 4.14 el soporte de φ^* debería contener a las aristas $e_{1,2}$ y $e_{3,4}$, o bien, a las aristas $e_{1,3}$ y $e_{2,4}$. Análogamente para el soporte de φ^* .

Supongamos que $a_{1,2} a_{2,3} \neq 0$ (en otro caso basta con reordenar la base B), como cualquier par de aristas del soporte de \hat{x} debe tener un vértice en común, entonces

$$E(\text{supp}(\hat{x})) \subseteq \{e_{1,2}, e_{2,3}, e_{1,3}\}.$$

De la hipótesis $a_{1,2} a_{2,3} \neq 0$ tenemos que $b_{1,2} = b_{2,3} = 0$ por lo que

$$E(\text{supp}(\varphi^*)) \subseteq \{e_{1,3}, e_{1,4}, e_{2,4}, e_{3,4}\}.$$

Caso 1: El soporte de φ^* contiene a la arista $e_{1,3}$, es decir, $b_{1,3} \neq 0$. Entonces $a_{1,3} = 0$ y $b_{2,4} = 0$ porque cualesquiera dos aristas del soporte de φ^* tienen un vértice en común. Así,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= a_{1,2} \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 + a_{2,3} \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3, \\ \varphi^* &= b_{1,3} x_1^* \wedge x_3^* + b_{1,4} x_1^* \wedge x_4^* + b_{3,4} x_3^* \wedge x_4^*, \end{aligned}$$

con $a_{1,2} a_{2,3} b_{1,3} \neq 0$ y $b_{1,4} \neq 0$ o bien $b_{3,4} \neq 0$. Consideremos el subespacio 1-dimensional

$$V = \langle \vec{x}_2 \rangle, \tag{4.7}$$

es invariante bajo F ya que $F(\vec{x}_2) = \lambda_2 \vec{x}_2$. Si $\vec{v} = a \vec{x}_2$ es cualquier vector en V , tenemos que $\vec{v} \wedge \hat{x} = 0$, por lo que $\vec{v} \in X$ y entonces

$$\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(X \cap V) = 1.$$

Como φ^* es factorizable por Y , entonces existe un 2-vector \widehat{y} tal que $\varphi^* = \varphi_{\widehat{y}}^*$, por esta razón

$$\widehat{y} = -b_{1,3}\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_4 + b_{1,4}\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 + b_{3,4}\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2.$$

Así, para cualquier vector \vec{v} en V se tiene $\vec{v} \wedge \widehat{y} = 0$ por lo que $\vec{v} \in Y$ y entonces

$$\beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V) = 1.$$

Concluimos que $\alpha + \beta = 2 > \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Caso 2: El soporte de φ^* no contiene a la arista $e_{1,3}$, es decir, $b_{1,3} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\widehat{x} &= a_{1,2}\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 + a_{2,3}\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 + a_{1,3}\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 \\ \varphi^* &= b_{1,4}x_1^* \wedge x_4^* + b_{2,4}x_2^* \wedge x_4^* + b_{3,4}x_3^* \wedge x_4^*\end{aligned}$$

con $a_{1,2}a_{2,3} \neq 0$ y dos de los coeficientes de φ^* distintos de cero. En este caso, consideramos el subespacio 3-dimensional

$$V = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle,$$

el cual claramente es invariante bajo F . Sea $\vec{v} = \sum_{i=1}^4 v_i \vec{x}_i$ un vector en el subespacio X , entonces

$$\begin{aligned}0 &= \vec{v} \wedge \widehat{x} \\ &= (a_{2,3}v_1 - a_{1,3}v_2 + a_{1,2}v_3)\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 + a_{1,2}v_4\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_4 \\ &\quad + a_{2,3}v_4\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_4 + a_{1,3}v_4\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_4.\end{aligned}$$

Cada coeficiente de esta igualdad debe ser cero pues los $\vec{x}_i \wedge \vec{x}_j \wedge \vec{x}_l$ son linealmente independientes, en particular $a_{1,2}v_4 = 0$, lo cual implica que $v_4 = 0$. Por esta razón $X \subseteq V$ y entonces

$$\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(X \cap V) = 2.$$

Como φ^* es factorizable por Y , entonces existe un 2-vector \widehat{y} tal que $\varphi^* = \varphi_{\widehat{y}}^*$, por esta razón

$$\widehat{y} = -b_{1,4}\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 - b_{2,4}\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 + b_{3,4}\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2.$$

Si $\vec{v} = \sum_{i=1}^4 v_i \vec{x}_i$ es un vector en el subespacio Y , entonces

$$\begin{aligned}0 &= \vec{v} \wedge \widehat{y} \\ &= (-b_{1,4}v_1 - b_{2,4}v_2 + b_{3,4}v_3)\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 + b_{3,4}v_4\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_4 \\ &\quad - b_{1,4}v_4\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_4 - b_{2,4}v_4\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_4\end{aligned}$$

de donde cada coeficiente debe ser cero pues los $\vec{x}_i \wedge \vec{x}_j \wedge \vec{x}_l$ son linealmente independientes, lo cual implica que $v_4 = 0$. Por esta razón $Y \subseteq V$ y entonces

$$\beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V) = 2.$$

Concluimos que $\alpha + \beta = 4 > 3 = \dim_{\mathbb{C}}(V)$. □

4.2.2. Prueba del Teorema 4.6

Finalmente, probamos la implicación (i) \Rightarrow (ii) de CCA para $m \geq 4$. Recordemos que las hipótesis del Teorema 4.6 son que los subespacios X y Y de \mathbb{C}^m satisfacen que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - 2$ y el isomorfismo lineal F no tiene 2-resonancias. Además, el subespacio X no está contenido en ningún subespacio generado por algún subconjunto de la base de vectores propios de F y el subespacio Y es distinto de cualquier subespacio generado por algún subconjunto de dicha base.

Prueba del Teorema 4.6. Realizaremos la prueba por inducción sobre m . Para $m = 4$, se cumple por el Teorema 4.4. Sea $m > 4$ y supongamos que el resultado es cierto en $\mathbb{C}^{m'}$ con $4 \leq m' < m$.

Para m , denotemos por $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ a la base de \mathbb{C}^m formada por los vectores propios de F y consideremos \hat{x} un 2-vector factorizable por X . Como X no está contenido en ningún subespacio generado por algún subconjunto de la base B , por el Lema 4.15, el soporte de \hat{x} contiene a todos los vértices $\{1, \dots, m\}$ y cualquier par de ellos son adyacentes o existe una trayectoria de longitud 2 que los conecta.

Sea v cualquier vértice del soporte de \hat{x} y una biyección $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que

$$N(v) = \{\sigma(1), \dots, \sigma(t)\} \quad \text{y} \quad \sigma(t+1), \dots, \sigma(m) \notin N(v).$$

Reordenamos $B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_t, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s\}$ de tal forma que

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{u}_{\sigma(1)}, & \vec{y}_1 &= \vec{u}_{\sigma(t+1)}, \\ & \vdots & & \vdots \\ \vec{x}_t &= \vec{u}_{\sigma(t)}, & \vec{y}_s &= \vec{u}_{\sigma(m)}. \end{aligned}$$

Como v es un vértice del soporte de \hat{x} , entonces existe al menos otro vértice u tal que $u \in N(v)$, esto quiere decir que $t > 0$. Además, como $v \notin N(v)$, entonces $s > 0$, donde $t + s = m$.

Tenemos que

$$\hat{x} = \sum_{i,j} c_{i,j} \vec{x}_i \wedge \vec{y}_j + \sum_{1 \leq i < j \leq t} d_{i,j} \vec{x}_i \wedge \vec{x}_j$$

donde $c_{i,j} \neq 0$ ya que $\sigma(i) \in N(v)$ y $\sigma(j) \notin N(v)$ (Lema 4.17); por el mismo resultado, los coeficientes de $\vec{y}_i \wedge \vec{y}_j$, son igual a cero, pues $\sigma(t+i), \sigma(t+j) \notin N(v)$.

Sea φ^* una 2-forma factorizable por Y ; al considerar su expresión en términos de la base B^2 de las 2-formas, tenemos que los coeficientes de $x_i^* \wedge y_j^*$ deben ser igual a cero pues $c_{i,j} \neq 0$ (Lema 4.20). Así,

$$\varphi^* = \sum_{1 \leq i < j \leq t} e_{i,j} x_i^* \wedge x_j^* + \sum_{1 \leq i < j \leq s} f_{i,j} y_i^* \wedge y_j^*.$$

Si suponemos que $e_{i,j} f_{k,l} \neq 0$ para algún $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, t\}$ y algún $\{k, l\} \subseteq \{1, \dots, s\}$, entonces el soporte de φ^* contiene a las aristas definidas por $I = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ y $J = \{\sigma(t+k), \sigma(t+l)\}$

tales que $I \cap J = \emptyset$. Por el Lema 4.14, también contiene a las aristas definidas por $\{\sigma(i), \sigma(t+k)\}$ y $\{\sigma(j), \sigma(t+l)\}$, o bien a las aristas definidas por $\{\sigma(j), \sigma(t+k)\}$ y $\{\sigma(i), \sigma(t+l)\}$. Cualquier caso nos lleva a una contradicción porque sabemos que los coeficientes de $x_i^* \wedge y_k^*$ y $x_j^* \wedge y_k^*$ son igual a cero. Por lo que si $e_{i,j} \neq 0$ para algún $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, t\}$, entonces $f_{k,l} = 0$ para todo $\{k, l\} \subseteq \{1, \dots, s\}$ y viceversa. Por esta razón tenemos dos casos.

Caso 1: $e_{i,j} = 0$ para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, t\}$, entonces

$$\varphi^* = \sum_{1 \leq i < j \leq s} f_{i,j} y_i^* \wedge y_j^*.$$

Como φ^* es factorizable por Y , existe un $(m-2)$ -vector \hat{y} factorizable por Y tal que $\varphi^* = \varphi_{\hat{y}}^*$, por lo que

$$\hat{y} = \sum_{I=\{i_1, \dots, i_{s-2}\} \subseteq \{1, \dots, s\}} g_I \vec{x}_1 \wedge \dots \wedge \vec{x}_t \wedge \vec{y}_{i_1} \wedge \dots \wedge \vec{y}_{i_{s-2}},$$

donde $|g_I| = |f_{i,j}|$ y $\{i, j\} = \{1, \dots, s\} \setminus \{i_1, \dots, i_{s-2}\}$. Denotemos por $W = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_t \rangle$ y $Z = \langle \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_s \rangle$. Para cualquier $\vec{v} \in W$ se tiene que $\vec{v} \wedge \hat{y} = 0$, por lo que $W \subsetneq Y$.

Si $X \cap W \neq \{0\}$, entonces el subespacio V invariante bajo F buscado es W ya que

$$\alpha = \dim_{\mathbb{C}}(X \cap V) \geq 1, \quad \beta = \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V) = t$$

y $\alpha + \beta > t = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Si $X \cap W = \{0\}$, consideremos la proyección $\pi : \mathbb{C}^m \rightarrow Z$ definida como

$$\pi \left(\vec{v} = \sum_{1 \leq i \leq t} x_i \vec{x}_i + \sum_{1 \leq j \leq s} y_j \vec{y}_j \right) = \sum_{1 \leq j \leq s} y_j \vec{y}_j.$$

Claramente, la proyección π es lineal, su núcleo es W y además el subespacio $\tilde{X} = \pi(X)$ de Z es 2-dimensional, de aquí $s \geq 2$.

Consideramos el subespacio $\tilde{Y} = \pi(Y)$ de Z y la restricción de $\pi|_Y$, entonces

$$\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{Y}) = \dim_{\mathbb{C}}(Y) - \dim_{\mathbb{C}}(W) = m - 2 - t = s - 2$$

ya que $m = t + s$. Esto implica que $s > 2$, pues si $s = 2$, entonces $Y = W$ lo cual es una contradicción.

Observemos que el operador lineal $\tilde{F} : Z \rightarrow Z$ definido como $\tilde{F}(\vec{v}) = \pi \circ F \circ \pi^{-1}(\vec{v})$ es un isomorfismo, además $\vec{v} \in \tilde{F}^n(\tilde{X}) \cap \tilde{Y}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si existe $\vec{w} \in X$ tal que $\vec{w} \in F^n(X) \cap Y$, con $\pi(F^n(\vec{w})) = \vec{v}$. De esta manera, si $\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} : \dim_{\mathbb{C}}(F^n(X) \cap Y) > 0\}$ es infinito, entonces $\tilde{\Sigma} = \{n \in \mathbb{Z} : \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{F}^n(\tilde{X}) \cap \tilde{Y}) > 0\}$ también es infinito.

Observemos que Z es isomorfo a \mathbb{C}^s . Si $s = 3$, entonces $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{Y}) = 1$ y por el Teorema 4.1, existen enteros a, q , $0 \leq a < q$ y un subespacio \tilde{j} -dimensional \tilde{V} de Z invariante bajo \tilde{F}^q tal

que los números $\tilde{\alpha} = \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{F}^a(\tilde{X}) \cap \tilde{V})$ y $\tilde{\beta} = \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{Y} \cap \tilde{V})$ satisfacen $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} > \tilde{j}$.

Si $4 \leq s$, por hipótesis de inducción existe un subespacio \tilde{j} -dimensional \tilde{V} de Z invariante bajo \tilde{F} tal que los números $\tilde{\alpha} = \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{X} \cap \tilde{V})$ y $\tilde{\beta} = \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{Y} \cap \tilde{V})$ satisfacen $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} > \tilde{j}$.

En cualquiera de los dos casos, consideramos el subespacio j -dimensional $V = \pi^{-1}(\tilde{V})$. Es invariante bajo F^q ya que si $\vec{v} \in V$, entonces $\pi(\vec{v}) \in \tilde{V}$, por lo que $\tilde{F}^q(\pi(\vec{v})) \in \tilde{V}$; como $\tilde{F}^q(\pi(\vec{v})) = \pi(F^q(\vec{v}))$ y $\pi(V) = \tilde{V}$ (porque π es suprayectiva), entonces $F^q(\vec{v}) \in V$.

De $\pi(V) = \tilde{V}$ tenemos que $\pi(F^a(X) \cap V) = \tilde{F}^a(\tilde{X}) \cap \tilde{V}$ y $\pi(Y \cap V) = \tilde{Y} \cap \tilde{V}$. Denotemos por $\tilde{t} = \dim_{\mathbb{C}}(V \cap W)$ y al considerar la restricción $\pi|_V : V \rightarrow \tilde{V}$ tenemos que

$$j = \dim_{\mathbb{C}}(V) = \tilde{t} + \tilde{j}.$$

Análogamente, al considerar las restricciones $\pi|_{F^a(X) \cap V}$ y $\pi|_{Y \cap V}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \dim_{\mathbb{C}}(F^a(X) \cap V) = \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{F}^a(\tilde{X}) \cap \tilde{V}) = \tilde{\alpha} \\ \beta &= \dim_{\mathbb{C}}(Y \cap V) = \dim_{\mathbb{C}}(\tilde{Y} \cap \tilde{V}) + \dim_{\mathbb{C}}(V \cap W) = \tilde{\beta} + \tilde{t}. \end{aligned}$$

Por lo que $\alpha + \beta = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{t} > \tilde{j} + \tilde{t} = j$.

Caso 2: $f_{i,j} = 0$ para todo $\{i,j\} \subseteq \{1, \dots, s\}$, entonces

$$\varphi^* = \sum_{1 \leq i < j \leq t} e_{i,j} x_i^* \wedge x_j^*.$$

Como φ^* es factorizable por Y , existe un $(m-2)$ -vector \hat{y} factorizable por Y tal que $\varphi^* = \varphi_{\hat{y}}^*$, por lo que

$$\hat{y} = \sum_{I=\{i_1, \dots, i_{t-2}\} \subseteq \{1, \dots, t\}} g_I \vec{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \vec{x}_{i_{t-2}} \wedge \vec{y}_1 \wedge \dots \wedge \vec{y}_s,$$

donde $|g_I| = |e_{i,j}|$ y $\{i,j\} = \{1, \dots, t\} \setminus \{i_1, \dots, i_{t-2}\}$. Para cualquier $\vec{v} \in Z$ se tiene que $\vec{v} \wedge \hat{y} = 0$, de donde obtenemos que $Z \subsetneq Y$.

Si $X \cap Z \neq \{0\}$, consideramos $V = Z$ y tenemos que $\alpha + \beta > \dim_{\mathbb{C}}(V)$. Si $X \cap Z = \{0\}$ procedemos de manera análoga al caso anterior usando la proyección $\pi : \mathbb{C}^m \rightarrow W$. \square

Referencias

- [1] Arnold, V. I. (1990a). Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 21(1), 1–10, <https://doi.org/10.1007/bf01236277>.
- [2] Arnold, V. I. (1990b). Dynamics of intersections. En P. Rabinowitz y E. Zehnder (Eds.), *Analysis, et cetera* (pp. 77–84). Boston: Academic Press, Inc.
- [3] Arnold, V. I. (1993). Bounds for Milnor numbers of intersections in holomorphic dynamical systems. En L. Goldberg y A. Phillips (Eds.), *Topological Methods in Modern Mathematics* (pp. 379–390). Houston, TX: Publish or Perish.
- [4] Artin, M. y Mazur, B. (1965). On periodic points. *Ann. Math.*, 81(1), 82–99, <https://doi.org/10.2307/1970384>.
- [5] Bondy, A. y Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*. Springer London.
- [6] Everest, G., van der Poorten, A., Shparlinski, I., y Ward, T. (2003). *Recurrence Sequence*. USA: AMS.
- [7] Friedberg, S. H., Insel, A. J., y Spence, L. E. (1989). *Linear Algebra*. Prentice Hall, Inc.
- [8] Harris, J. (1992). *Algebraic Geometry*. Springer, New York, NY.
- [9] Lakshmibai, V. y Brown, J. (2010). *The Grassmannian Variety*. Springer, New York, NY.
- [10] Mahler, K. (1957). On the Taylor coefficients of rational functions. *Math. Proc. Cambridge*, 53(2), 39–48, <https://doi.org/10.1017/s0305004100032552>.
- [11] Rosales-González, E. (1991). Growth of periodic orbits of dynamical systems. *Funct. Anal. Appl.*, 25, 254–262, <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF01080077>.
- [12] Rosales-González, E. (1992). On the growth of the number of long periodic solutions of differential equations. *Funct. Anal. Appl.*, 26, 99–105, <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF01075269>.
- [13] Rosales-González, E. (1995a). Intersection dynamics on Grassmann manifolds. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 2, 129–138.
- [14] Rosales-González, E. (1995b). Milnor numbers in dynamical systems. En D. T. Lê, K. Saito, y B. Teissier (Eds.), *Singularity Theory* (pp. 627–634). World Scientific Publishing.
- [15] Shub, M. y Sullivan, D. (1974). A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps. *Topology*, 13, 189–191, [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(74\)90009-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(74)90009-3).