UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS APLICADAS A LA DIDÁCTICA DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIATURA EN FILOSOFÍA

PRESENTA:
OMAR SOLIS RAMOS

TUTOR-DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA ESPERANZA RODRÍGUEZ ZARAGOZA

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO, 2022

"Los sueños de las personas jamás terminan"
-*One Piece*

Agradecimientos

Antes que nada, quisiera agradecer infinitamente a cada persona que ha compartido una etapa de su vida conmigo. Sin embargo, el espacio es limitado y sepan que si no los he mencionado es porque estoy pensando en muchas personas en este momento. Pienso en aquellas personas con quienes compartí mi vida. En la música que me ayudó en mis caminos, en los animes y mangas que me dieron diversión en los días de ocio. En las personas que recientemente conocí. En los amigos que se fueron y que ya no están con nosotros. Agradezco especialmente a mi mamá, quien me dio la oportunidad de estudiar. A mis hermanos, por el apoyo brindado. A Mariana, por estar y por ser. Por las fotos, canciones y animes.

A Katia, porque caminando con ella es cuando más cercano he estado de la filosofía, porque me ha hecho muchas preguntas que no puedo responder, porque hemos sido los más mejores. A Esperanza, quien me aconsejó y enseñó que es más importante la cooperación que la competencia y a Fabián quien me notó y me incluyó antes que cualquier otro. A Cantera, por las oportunidades, las enseñanzas, los desafíos y las amistades.

A mi papá y tío que me enseñaron el oficio que me permitió pagar la universidad. A mis amigos de CCH que han estado, y también a quienes dejaron de estar. A Gabo y Manuel por ser frikis conmigo. A Simón y Pedro por quejarse. A Ale que me apoyó en Cantera. A Diego, Alexis, Tenderly y Lalo que me apoyaron mucho. A los alumnos de Alcalá que confiaron en mí. A quienes se fueron de mi vida, pero dejaron una huella importante en mí y me cambiaron para bien. A Ámbar, quien se ha convertido en una gran amiga. A Lalo, Gandhi, Alfonso, Raziel y Clemente que me acompañaron en mi corta estancia en mecánica. A Félix, quien me ayudó a encontrar mi vocación en la educación. A Kiba y Delfín, por los años de amistad. Al profesor Icaza por brindarme confianza en el servicio social. A Callejas, por los memes y por sus clases que disfruté mucho. Al Dr. Alcalá por compartir su espacio en lógica 2. A Martín, Lorena, Uriel y Denisse por su amistad. A Juan lógico, por las enseñanzas y la aventura de Nayarit. A las personas que conocí en mi última etapa de la facultad, en especial a Luz y Magby. A Karen González y Ana Laura Fonseca, cuyo trabajo inspiró mi tesis.

Finalmente, al PAPIME PE 402619 por el apoyo brindado en la realización de esta investigación.

Índice

Introducción

El objetivo de esta investigación es generar estrategias didácticas apoyadas en heurísticas para la enseñanza de la lógica proposicional en los programas de licenciatura en filosofía. Con ello se busca mostrar que el uso de las estrategias heurísticas puede mejorar el modo en que se enseña y aprende lógica proposicional al reducir el tiempo en que se solucionan ejercicios, reducir esfuerzo en la aplicación de los métodos tradicionales e incrementar el éxito de los alumnos en la solución de problemas de lógica proposicional.

La hipótesis de la que parto es que las estrategias heurísticas tienen una amplia utilidad en problemas matemáticos, esto a la luz de proyectos como el de George Pólya. Además, ya que las matemáticas guardan una relación muy cercana con la lógica, la didáctica de las matemáticas basada en heurísticas puede aplicarse también a la lógica proposicional, en tanto que las metodologías (métodos de demostración y decisión de fórmulas) de la lógica clásica formal son también instrumentos matemáticos.

Lo anterior es importante por distintos motivos, en primer lugar, la lógica proposicional es simbólica, emplea teoremas, demostraciones y métodos algorítmicos; un estudiante de filosofía que "huye" de las matemáticas puede encontrar bastante desalentador tener que estudiar una asignatura como ésta, lo que es peor, muchos estudiantes tienen una mala experiencia con las matemáticas, lo que puede ocasionar un mal desempeño en la asignatura. En segundo lugar, hay un problema siempre presente en cada curso y éste es el equilibrio entre los alumnos, es decir, siempre habrá alumnos que avancen sin problemas y otros con mayores dificultades. Si lo anterior lo agregamos al punto uno, es claro que tenemos un problema en nuestras manos. La didáctica basada en heurísticas promete incluir estrategias o planes que puedan coadyuvar a reducir esta brecha.

Ahora bien, en la práctica de la enseñanza de la lógica nos podemos enfrentar a distintas dificultades. La principal y más evidente es el hecho de que los alumnos responden de diferente manera ante una misma explicación. Habitualmente y como bien señalan las filósofas Karen González y Ana Laura Fonseca, tanto en matemáticas como en lógica, parece asumirse que sólo las herramientas de pensamiento abstracto o superior son las que intervienen en la solución de problemas lógicos (Fonseca y González, 2019). Si esto fuese así, las heurísticas no tendrían una razón muy significativa para ser incluidas en las estrategias didácticas, no obstante, estudios como el realizado por Landy y Goldstone

(Fonseca y González, 2019) muestran que factores contextuales como el modo en que se escriben las fórmulas tuvieron un impacto significativo en el éxito de solución por parte de los alumnos, lo cual indica que hay un factor contextual no abstracto jugando un rol en el proceso de solución de problemas.

Atender este tipo de cuestiones nos posiciona directamente en el ámbito de la Heurística porque no nos encontramos solucionando los problemas, sino que estamos proponiendo estrategias y/o herramientas auxiliares que nos permiten enfrentarlos.

Asimismo, si tomamos en cuenta que la lógica es una disciplina filosófica habitualmente ubicada en la etapa formativa básica de los planes de estudio de Filosofía, así como en algunos programas del nivel medio superior en las escuelas mexicanas, tenemos una razón importante para preocuparnos por su adecuada comprensión y, en consecuencia, por su adecuada enseñanza. Esto se debe a que en la asignatura se adquieren herramientas que son útiles en etapas posteriores del plan de estudios.

Además, la lógica es importante en el quehacer filosófico en tanto que provee de herramientas de análisis y conceptualización a quienes se encuentran en esta disciplina, como señala Guillermo González (G. González, 2010):

> (…) el filósofo auténtico no puede no comprender de lógica, si bien no es obligación de todos ser diestros en los sistemas lógicos, sí es un deber insoslayable del filósofo comprender los distintos movimientos de la razón, de no hacerlo es muy probable que el quehacer filosófico en que se afana sea vacuo, y en consecuencia estéril. (p. 1)

Si González Rivera tiene razón, la apuesta por metodologías que propicien el mejor aprendizaje de la lógica resulta de suma importancia, especialmente porque estudios como el de la lógica clásica suelen ser complicados para los alumnos y son necesarios para el desempeño más adecuado del ejercicio filosófico, por lo menos en su vertiente analítica.

La necesidad de que el docente busque estrategias, o bien las genere, presupone que el alumno suele encontrar dificultades para comprender los temas cuando son presentados bajo el esquema clásico de explicación, esto es, cuando el docente le explica los temas como una sucesión abstracta de reglas que se aplican algorítmicamente.

Ahora bien, la inclusión de las heurísticas no tiene que significar que todos los alumnos encuentran dificultades (Fonseca Y González, 2019) pues muchos de los que estudiamos el área, de hecho, aprendimos bajo el esquema clásico. No obstante, como estudiantes y después como formadores, (ya sea a nivel medio superior, profesional o a través de alternativas extracurriculares) hemos encontrado dificultades para hacer comprensibles los distintos métodos que deben de aplicarse en lógica clásica, además la asignatura es muy amplia y esto implica un ritmo de trabajo demandante cuando no tenemos las mejores herramientas didácticas.

Las dificultades comunes devienen de:

a) Deficiencias formativas por parte del alumno: cuando el alumno no ha adquirido las habilidades necesarias para trabajar con conceptos abstractos de la manera en que se realiza en matemáticas.
b) Deficiencias formativas por parte del docente: cuando el profesor no comprende adecuadamente tanto los conceptos como los métodos y encuentra dificultades para transmitirlos clara y concisamente.
c) Cuestiones anímicas: cuando el alumno se desanima al encontrarse con una materia muy similar a matemáticas y éste ha presentado dificultades previas en la misma.
d) Deficiencias didácticas: cuando el docente comprende los temas, pero no tiene buenas habilidades de comunicación ni una metodología didáctica que permita transmitir eficientemente los conocimientos
e) Cuestiones de interacción: cuando tanto el alumno como el docente no interactúan en la presentación y solución de dudas.

Aspectos técnicos como los anteriores pueden tener un impacto fuerte en la formación del alumno pues propicia que éste abandone el estudio de la asignatura, la acredite sin comprender ni adquirir las herramientas que ésta le provee y, en consecuencia, el alumno desarrolle su quehacer en la licenciatura, y en la filosofía, con una importante carencia de contenidos que, si bien no son indispensables, sí son significativos.

Lo anterior nos lleva a la importancia de la adecuada formación en lógica para la filosofía pues, aunque la lógica no es la única rama de la filosofía, sí es lo suficientemente importante para la argumentación y redacción coherente de un proyecto, cuestiones mínimas que demanda el estudio y profesión de quien se ha formado en filosofía. Ahora, si resulta importante tener una buena base argumentativo-analítica, podemos inferir que su ausencia propicia un quehacer filosófico desvirtuado por un mal uso de la razón (sea cual sea nuestra inclinación epistemológica).

Por ello es importante, para la filosofía, que el filósofo se instruya adecuadamente en sus habilidades formativas mínimas, la lógica incluida entre ellas. Si una alternativa promete mejorar el proceso de adquisición y transmisión de esas habilidades, vale la pena contemplarla.

Pero, si no es suficiente al nivel de la práctica filosófica, ya sea por los estilos o nuestras inclinaciones teóricas, a nivel profesional sí es requerido este aspecto formativo. El hecho de que la filosofía esté inserta en un contexto de profesionalización, demanda de sus estudiantes la adquisición de ciertas herramientas metodológicas y conceptuales propias de la disciplina.

Esto no quiere decir que entremos en la discusión de si la universidad forma o no filósofos, pues sea cual sea el caso, es responsabilidad de quien estudia una disciplina, estar al tanto de las tradiciones que comprenden la misma. Al ser la lógica una disciplina filosófica, es deber de quien estudia filosofía estar al tanto de, por lo menos, los aspectos básicos y útiles para su propia formación.

Asimismo, el profesor que instruye la asignatura debe tener los conocimientos mínimos para su enseñanza, así como estrategias útiles. No obstante, siempre habrá dificultades como las listadas con anterioridad. Esto implica que se busquen recursos metodológicos diferentes para su solución. Las estrategias heurísticas pueden ser uno de esos recursos.

Si partimos del supuesto de que este tipo de estrategias contribuyen a una mejor adquisición de los métodos de solución de los problemas de la lógica clásica, entonces vale la pena explorarlas con el fin de cumplir con el deber profesional de quien se encuentra formando estudiantes.

Así, a nivel profesional, las heurísticas son importantes porque son una alternativa que promete mejorar el proceso de enseñanza de una materia que suele presentar dificultades. Otro aspecto que motiva esta investigación es uno más personal ya que este proyecto concuerda con los esfuerzos realizados por crear estrategias y modelos de enseñanza y especialización en lógica clásica del Proyecto Cantera. Es importante crear estrategias que reduzcan el tiempo en que se solucionan los problemas porque justamente la proyección del Proyecto Cantera es la participación en la Olimpiada Internacional de Lógica (OIL) que organiza cada año la Academia Mexicana de Lógica (AML). En esta olimpiada, se hace uso de los conocimientos mínimos de la lógica clásica. Esto es, deducción natural, evaluación semántica de argumentos, simbolización, así como contenidos varios de la teoría de conjuntos a un nivel muy básico.

Lo cierto es que este tipo de certámenes evidencia que el estudiante promedio no ha aprendido o interiorizado las herramientas para enfrentar los ejercicios o bien, si las ha aprendido, no sabe cómo usarlas. Si pensamos en los esquemas de educación en los que se presupone que los contenidos pueden ligarse con una aplicación práctica (Fonseca Y González, 2019), podríamos esperar que un alumno que acredita un curso de lógica clásica pueda solucionar exitosamente este tipo de exámenes, la realidad es que no es así.

En mi experiencia personal en el Proyecto Cantera, una de mis principales dificultades fue comprender el modo en que los métodos como reducción al absurdo o la aplicación de reglas de inferencia y equivalencia, permitían analizar ejercicios de caballeros y bribones que son típicamente escritos a modo de acertijo. Asimismo, aún después de un par de años de experiencia en exámenes de este tipo, me encontré fracasando en pruebas como el test de Wason o el problema de Linda la cajera feminista (González, 2019)[1].

El fracasar en la solución correcta de estos ejercicios, evidenció lo que anticipa el análisis de Kahneman sobre éstos, es decir, que tenía problemas para analizar la información significativa de un problema y que no comprendía adecuadamente el uso del condicional material, aún después de unos tres años de estudio continuo en el área.

Afortunadamente, el trabajo conjunto con colegas del mismo Proyecto y de otras universidades, nos ayudó a plantear estrategias para afrontar problemas de este tipo. A lo largo de nuestro trabajo, desarrollamos estrategias que pueden catalogarse en dos tipos: básicas y avanzadas.

Las primeras son las que ocupan este proyecto ya que se refieren a la adquisición y enseñanza de los métodos básicos de la lógica proposicional. Esto se vincula directamente con la enseñanza en la medida en que estas estrategias encuentran su origen en las siguientes causas:

[1] Estas pruebas serán exploradas en el capítulo primero.

I. Los alumnos que suelen aproximarse al Proyecto Cantera lo hacen con la intensión de regularizarse en sus asignaturas, es decir, no tienen la intención de participar eficientemente en la OIL.

II. Las dificultades comunes de los alumnos se corresponden con problemas de análisis, es decir, aunque comprenden cuál es la función de los métodos y sus objetivos, no saben interpretar un problema para poder solucionarlo.

III. Los alumnos suelen asociar la materia con las matemáticas por el modo en que se les enseña y porque entienden a los procesos de demostración como series de aplicación de reglas sin contenido.

IV. Los alumnos no aclaran sus dudas en su curso ordinario por cuestiones anímicas y, en ocasiones, porque no están seguros de cómo presentar sus dudas.

Para ayudar a los compañeros de la comunidad estudiantil de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, en concordancia con los objetivos del Proyecto Cantera, se diseñaron cursos y asesorías donde comenzaron a crearse estrategias que ayudaran a la mejor comprensión de los temas.

Estas estrategias son caracterizadas como estrategias heurísticas ya que sirven para apoyar en la solución de los problemas y no como la solución misma de estos.

De este modo, la importancia de este proyecto, a nivel personal, es que permite modelar, clasificar y documentar dichas estrategias para su aplicación sistemática y su futura evaluación. Si las estrategias generadas por el Proyecto Cantera tuvieron un impacto en la eficiencia de sus miembros durante las últimas olimpiadas de lógica, entonces tenemos una buena razón para aplicarlas en la enseñanza de los contenidos de lógica clásica ya que, así como sirvieron para mejorar las habilidades de los compañeros más avanzados, han ayudado a mejorar las habilidades de aquellos que presentan más problemas para su comprensión.

En conclusión, el uso de las estrategias ofrece una alternativa prometedora para la enseñanza de la lógica clásica en distintos niveles formativos, asimismo, puede ser importante para los más interesados en alternativas para mejorar sus cursos y, también, puede serlo para aquellos que tienen dificultades, pues las estrategias contribuyen a superar y comprender las dificultades de un problema.

Teniendo todo lo anterior en cuenta, la presente investigación fue dividida en cuatro capítulos, los cuales tienen un objetivo encaminado al cumplimiento del objetivo general de este proyecto. En el primer capítulo, exploraré la noción de heurística y de lógica, esto con la finalidad de que los conceptos de heurística y lógica sean claros a lo largo del proyecto, asimismo, busco mostrar cómo se relacionan la lógica y la heurística, esto a la luz del problema de la racionalidad. Para ello, en el primer apartado mostraré la relación de la heurística con el problema de la racionalidad, después mostraré qué es una estrategia heurística, posteriormente describiré el concepto y su relación con las ciencias computacionales, todo esto con la intención de mostrar cómo influye la heurística en el proceso de solución de problemas. Después, en el quinto apartado, me dedicaré a explorar algunas consideraciones sobre el concepto de lógica, su definición y el quehacer de la lógica, una vez realizado esto, estableceré las relaciones existentes entre lógica y heurística. Cabe señalar que la mayor parte del primer capítulo estará basado en el proyecto de la filósofa Karen González.

A continuación, en el segundo capítulo, mostraré el modo en que la heurística se emplea para solucionar problemas matemáticos. Esto tiene dos objetivos, el primero es presentar un antecedente de estrategias heurísticas con fines didácticos y el segundo es mostrar la influencia de estas estrategias en el razonamiento y solución de problemas matemáticos, mismos que se consideran cercanos a la lógica. Para ello, en el primer apartado me dedicaré a mostrar algunas precisiones teóricas alrededor de la heurística, la hipótesis matemática y la demostración. Ahondaré en dos cuestiones centrales, la demostración por medio de la síntesis y del análisis. A continuación, exploraré y describiré el método de Pólya, trabajo pionero en la heurística aplicada en la didáctica de las matemáticas. Finalmente, exploraré qué son las heurísticas corporizadas y cómo estas influyen en la solución de problemas. Para este apartado me concentraré principalmente en los libros *Heurística, hipótesis y demostración en matemáticas* de la filósofa Atocha Aliseda y *How to solve it*, del matemático Pólya, así como un artículo de las filósofas Karen González y Ana Laura Fonseca.

Posterior a ello, dedicaré el tercer capítulo a la formulación de estrategias heurísticas centradas en la lógica proposicional. El objetivo será presentar estrategias basadas en heurísticas que reducen la cantidad de pasos para resolver problemas, así como de guías para la didáctica de distintos contenidos. Además de presentar un algoritmo de demostración seguro, completo y con pocas reglas, esto con la finalidad de reducir la brecha entre los alumnos más avanzados y aquellos que por distintos motivos se atrasan. Así, el capítulo se divide en estrategias para la semántica proposicional (los temas relacionados con valores de verdad) y estrategias para la deducción natural (los temas relacionados con la demostración y uso de teoremas). Finalmente, dedicaré un pequeño apartado con algunas guías útiles sobre la traducción.

En adelante, en el último capítulo, el objetivo es mostrar cómo se pueden integrar las estrategias del capítulo tres junto con una metodología didáctica basada en el método de Pólya expuesto en el capítulo dos. Esto lo realizaré aplicando el método a un par de ejemplos sencillos, con la finalidad de mostrar cómo las estrategias que reducen esfuerzo, los apoyos visuales y una guía para solucionar problemas, pueden contribuir a lograr un aprendizaje más profundo. Finalmente, presentaré las conclusiones de esta investigación.

Capítulo 1: Relaciones entre lógica y heurística

1.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es clarificar el modo en el que entenderemos el concepto de heurística, así como el concepto de lógica, con ello, tengo la finalidad de mostrar el modo en que ambos conceptos pueden relacionarse entre sí, así como con el problema de la racionalidad. Lo anterior es importante porque nos permitirá tener un marco común de referencia conceptual, clarificando y ejemplificando los conceptos que se emplearán en los capítulos posteriores. Comenzaré con el concepto de heurística distinguiéndolo de su uso como adjetivo y su uso como sustantivo. Me detendré ligeramente en algunos problemas relacionados con la racionalidad, mismos que permitirán establecer una relación preliminar entre la heurística y la lógica.

Así, en la primera sección me concentraré en la relación entre Heurística y racionalidad, para ello me basaré principalmente en el trabajo de la filósofa Karen González, así como en sus principales referencias al respecto del tema. El objetivo es mostrar cómo la investigación del concepto en ese campo lo sitúa como un sustantivo (la heurística sería el objeto de estudio) así como introducir al lector a los problemas que vinculan la heurística con la racionalidad. Lo anterior es importante porque durante toda la investigación estaré empleando el uso sustantivo y adjetivo del término.

En la siguiente sección, realizaré la revisión de la heurística como estrategias, me enfocaré en mostrar qué tipo de estrategias son heurísticas y qué ventajas tendrían frente a otras estrategias. Para ello me apoyaré en el proyecto desarrollado por Gigerenzer y el Grupo ABC, así como en el trabajo de Karen González.

A continuación, relacionaré la concepción de estrategias heurísticas con los procesos computacionales, estudiaré su participación en la optimización de la solución de un problema. Lo anterior tiene la finalidad de mostrar cómo una estrategia heurística puede mejorar el modo en que se enfrenta y se soluciona un problema.

Una vez explorado el concepto de heurística me detendré en el concepto de lógica, el objetivo es ofrecer una caracterización de lógica que será relacionada con la heurística en la sección final. Por último, ofreceré las conclusiones del capítulo, mostrando que tanto la lógica como la heurística se relacionan desde su participación en los paradigmas de racionalidad y desde la construcción de estrategias de solución y análisis de problemas.

1.2 Heurística y racionalidad

El objetivo de esta sección es mostrar la relación entre racionalidad y heurística, para ello me apoyaré en la revisión de un par de experimentos clásicos de la psicología cognitiva, la prueba de Wason y la prueba de Linda la cajera feminista. Con ello pretendo mostrar que la heurística puede entenderse como una especie de atajo de razonamiento. Ello tiene la finalidad de ofrecer una primera caracterización del concepto y bosquejar una primera relación con la lógica.

El concepto de heurística es de tipo polisémico, es decir, tiene distintas acepciones según el contexto en el cual se emplee. Etimológicamente, el concepto viene de la palabra griega *heurisko* que significa inventar, hallar, descubrir (González, 2019, p. 13).

El tratar un concepto polisémico trae algunos problemas, el principal de ellos es la vaguedad que puede surgir debido a un uso que no ha sido caracterizado adecuadamente. Cuando hablamos de heurística podemos entender distintas definiciones y cada una de ellas dependerá del contexto de uso. Existen múltiples investigaciones en las cuales se le encuentra en campos disciplinares variados, ya sea en el control de reactores, en el uso y aplicación de lógica difusa, en las ciencias cognitivas, o en las ciencias de la computación, por nombrar algunas. Aun cuando sea un concepto polisémico, hay algunos aspectos relevantes que pueden ser más o menos generalizables, particularmente cuando se le caracteriza de acuerdo con los contextos en los cuales se usa.

Un contexto de uso puede entenderse como una situación o un momento. Por ejemplo, cuando nos encontramos en una situación que involucre la toma de decisiones estamos en un contexto de toma de decisión, cuando nos encontramos en un momento para el cual tenemos que ofrecer justificaciones para una nueva teoría, o un nuevo conjunto de hipótesis, estamos en un contexto de justificación. De este modo, podemos encontrar los siguientes contextos:

- Contextos con abundante información: son aquellos en los cuales debemos analizar la información, pero la información analizada es abundante y tiene muchas variables. Un ejemplo de contexto con abundante información puede ser el análisis del comportamiento de la población de una ciudad respecto a un catálogo amplio de problemas que tienen lugar en esa ciudad (seguridad, salud, trabajo, etc.)

- Contextos con falta de información: son aquellos en los cuales debemos analizar información, pero tenemos variables que requieren ser determinadas y no contamos con los elementos suficientes para hacerlo y, en consecuencia, se dificulta tomar una decisión. Contextos de este tipo pueden situarse en el ámbito político cuando, para tomar una decisión, hace falta comprender distintos aspectos de una población, pero no se tiene conocimiento de todas las necesidades presentes en la misma.
- Contextos de toma de decisión: son aquellos en los cuales debemos tomar una decisión, ya sea que se nos solicite resolver una prueba o tengamos que elegir entre dos opciones. Un ejemplo de estos contextos puede ser la elección de la mejor ruta para llegar a nuestro trabajo.
- Contexto de descubrimiento: son aquellos en los cuales se ha encontrado información nueva al respecto de un fenómeno, ejemplos significativos pueden ser descubrimientos de evidencia fósil de una nueva especie, descubrimientos del modo en que funciona un fenómeno como la gravitación o la luz, etcétera.
- Contextos de demostración: son aquellos en los cuales se deben ofrecer demostraciones que justifiquen determinada información, suelen situarse después de los contextos de descubrimiento, o pueden ser simultáneos. Ejemplos de este tipo pueden ser el descubrimiento de una reacción entre dos sustancias y la justificación que describe y responde el porqué de dicha reacción.

Cada uno de esos contextos puede estar relacionado con uno o más campos disciplinares, por ejemplo, los contextos de abundante información y de falta de información pueden ser propios para las ciencias de la computación, pero también en áreas como la economía donde el estudio se centra en la toma de decisiones. Cuando hablamos de estos contextos, regularmente empleamos el concepto de heurística para referirnos a las estrategias que nos ayudan a manejar la información.

Así mismo, algunas investigaciones relacionan al concepto de heurística con la necesidad de caracterizar una metodología, como puede ser, la enseñanza de las matemáticas que fue propuesta por el matemático Pólya (Aliseda, 2000). De este modo, el concepto encuentra dos usos, uno como sustantivo y otro como adjetivo.

El uso sustantivo del concepto de heurística se encuentra en las investigaciones que pretenden definirle y caracterizarlo. Uno de los ejemplos más notables de estas investigaciones es la realizada por los psicólogos cognitivos Amos Tversky y Daniel Khaneman quienes inscriben a la heurística en el contexto de la racionalidad. Otra propuesta, en la misma línea, es la del grupo ABC (Adaptive Behavoir and Cognition), liderado por Gerd Gigerenzer, quienes sitúan a la heurística en el contexto de la racionalidad, pero con una interpretación diferente a la realizada por Khaneman y Tversky. Nos detendremos un poco en estas propuestas.

Como es bien sabido, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX inició un auge de la lógica formal. Las aplicaciones en matemáticas fueron amplias, así como lo fueron en las nacientes teorías de la computación y en áreas afines a la investigación del razonamiento, particularmente la psicología cognitiva. En un inicio, se plantea la existencia de un isomorfismo entre las estructuras lógicas y las estructuras del pensamiento humano, particularmente las operaciones del razonamiento. Este isomorfismo plantea que el funcionamiento de la lógica clásica (con su estructura normativa) describía el modo en el cuál, de hecho, razonamos. Con la intención de probar lo anterior, se diseñaron algunos experimentos.

Uno de los experimentos más notables es la prueba de Wason que fue planteada para evaluar si los participantes razonaban de acuerdo con las estructuras condicionales, es decir con las reglas para el condicional material de la lógica clásica. Bajo estas reglas, un condicional será la función que establece una relación de consecuencia entre una proposición que llamamos antecedente y otra que llamamos consecuente. En la oración "si llueve me mojo", el antecedente habla sobre el hecho de que llueva y el consecuente habla sobre el hecho de mojarse a causa de la lluvia. Las reglas del condicional son las siguientes:

- Verdadero cuando tanto el consecuente como el antecedente son verdaderos.
- Falso cuando el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso.
- Verdadero cuando el antecedente es falso y el consecuente es verdadero
- Verdadero cuando tanto el consecuente como el antecedente son falsos.

Como puede verse, sólo hay un caso en que las oraciones condicionales son falsas. Regresando a la prueba de Wason, en esta se presentan cuatro tarjetas a los participantes, ellos pueden ver solamente una de las caras de la tarjeta y se les ofrece una oración de tipo condicional. El ensayo consiste en solicitar a los participantes que seleccionen dos tarjetas que deben ser volteadas para saber si la oración planteada es verdadera o no lo es. (González, 2019, p. 73).

La prueba es la siguiente:

E	C	5	4

Indique cuáles de las cartas habría que voltear para determinar si el siguiente enunciado es verdadero:

"Si una carta tiene una vocal de un lado, entonces tiene un número impar del otro lado."

Si atendemos a las condiciones de validez del enunciado, sabremos que este es verdadero cuando ocurren los siguientes eventos:

a) Cuando una carta tenga una vocal de un lado y tenga un número impar del otro.

b) Cuando no tenga una vocal de un lado, pero sí un número impar del otro.

c) Cuando no tenga una vocal de un lado ni un número impar de otro.

Asimismo, será falsa sólo bajo el siguiente caso:

d) Cuando tenga una vocal de un lado y no tenga un número impar del otro.

Ya que tenemos tres combinaciones posibles para la verdad, el modo más simple sería probar la condición que hace falsa a la oración y una de las condiciones que la hacen verdadera. Así, la respuesta sería la siguiente:

- La carta 1 ya que, si al voltearla no encontramos un número impar, la oración será falsa (Caso en que es verdadera)
- La carta 4 ya que así nos aseguramos de que tras el número par no hay una vocal. (Caso en que es falsa)

Los participantes del estudio no realizaban la suposición d) y entonces erraban en la solución, es decir, no usaban adecuadamente el condicional material. Esto se debía a que verificaban correctamente los casos en que podía ser verdadero, pero no contemplaban la posibilidad de que fuera falso, es decir, no garantizaban que no fuera falso y ése era el error

(González, 2019, p. 74). Lo anterior significó que se cuestionara si realmente las personas razonan de acuerdo con estas estructuras.

Los resultados de este estudio y el de la falacia de la conjunción[2] (Kahneman, 2003, p. 709) pueden interpretarse como un problema de Heurística, como hicieron Gigerenzer y Kahneman. Ahora bien, independientemente de que sus posiciones fueran contrarias, ambos concordaban en que en la solución del problema intervenían ciertos atajos cognitivos[3] que incidían en el éxito de los participantes. La posición del primero es que estos atajos deben estudiarse para evitarse, la posición del segundo es que deben modelarse para aprovecharse.

Ahora bien, el experimento conocido como: Linda la cajera feminista, desarrollado por Amos Tversky y por Daniel Kahneman, mostró que las personas tenían un importante sesgo que iba en contra de uno de los axiomas de la probabilidad clásica. El experimento consistía en lo siguiente:

A los participantes se les brindó una serie de descripciones de la cajera, entre las cuales se encuentran las siguientes afirmaciones: “Linda tiene 31 años, es soltera, extrovertida y muy brillante. Se especializó en filosofía. Mientras era estudiante ella estaba muy involucrada en temas de discriminación y justicia social y también participó en protestas antinucleares” (González, 2019, p. 75).

Posteriormente, los participantes eran separados en dos grupos donde debían ordenar 8 afirmaciones que describían el empleo y actividad actual de linda en dos clasificaciones; el primer grupo debía ordenar las afirmaciones bajo el criterio de similitud con la descripción que ya conocían, el segundo debía ordenar las afirmaciones de acuerdo con su probabilidad. Dentro de las afirmaciones se encontraban las siguientes:

1) Linda es cajera de un banco
2) Linda es cajera de un banco y es activista feminista

La mayoría de los participantes respondieron que 2) era más probable que 1), lo cual es incorrecto pues la probabilidad de que un evento en conjunción con otro ocurra, es igual o menor a la probabilidad de que cualquiera de ellos ocurra por separado, esta es la falacia de la conjunción. El error consiste en que los participantes razonaron asociando los enunciados

---

[2] La falacia de la conjunción hace referencia a la inferencia de que dos eventos en conjunción son más probables que un evento singular. Más adelante profundizaré más en este concepto.

[3] Un atajo cognitivo es el acto de realizar inferencias rápidas que no requieren esfuerzo mental. Por ejemplo, al ver un objeto en una estufa es más sencillo inferir que el objeto está caliente y, en consecuencia, tomarlo con precaución en lugar de verificar su temperatura.

con la información inicial que les dieron y no de acuerdo con las leyes de la probabilidad clásica.

Si a lo anterior le sumamos la prueba de Wason, encontraremos el problema de que hay deficiencias generalizadas para resolver problemas que involucran a la lógica y la probabilidad.

Una vez encontrados los problemas señalados, los científicos se dieron a la tarea de investigar el fenómeno. Con estas investigaciones podemos hablar de un paradigma, o modelo, estándar de la racionalidad. Abordar en qué consiste este modelo, así como sus distintos matices excede los límites propuestos para esta investigación, no obstante, basta con tener en cuenta lo siguiente: se entiende como modelo estándar a aquel que acepta las leyes de la lógica clásica y de la probabilidad clásica como isomorfas de los principios del razonamiento.

Tanto el proyecto del grupo ABC, como el de Khaneman aceptan este modelo, la diferencia es que los primeros toman a las heurísticas como ventajas, mientras que el segundo lo hace como desventajas. El hecho de que las posiciones de Khaneman y Gigerenzer sean contrarias, no las hace necesariamente excluyentes. Son excluyentes en la interpretación del significado de las heurísticas, porque para uno son desventajas y para el otro son ventajas. Pero son incluyentes puesto que ambos ofrecen un modelo de explicación que las caracteriza sin abandonar el modelo estándar de la racionalidad. Kahneman elabora una lista amplia de heurísticas, describiéndolas, mostrando su funcionamiento, y describiendo los experimentos en los cuales fueron encontradas para poder evitarlas. Así mismo, ofrece una explicación de su funcionamiento, planteando la interacción de dos sistemas cognitivos, uno primario y otro secundario. Algunos heurísticos importantes son los de anclaje, resistencia a la pérdida y retrospectiva (Khaneman, 2011).

Por otra parte, Gigerenzer argumenta que las heurísticas, en tanto que son respuestas rápidas a situaciones ambientales, son potenciales herramientas de ahorro de recursos cognitivos. Para el autor, el uso de heurísticos nos puede hacer más exitosos siempre y cuando sean aplicados adecuadamente. El ejemplo más común es el heurístico que se basa en la asociación. Pensemos el siguiente ejemplo (adaptado de la traducción de González 2019. El ejemplo original y su descripción detallada puede verse en García Retamero y Dieckmann, 2006):

Nos preguntan qué ciudad tiene mayor población, la ciudad de México o la ciudad de Toluca, nosotros no tenemos idea de cuál es la respuesta correcta, sin embargo, tenemos datos más o menos generalizables sobre características asociadas con las ciudades grandes, como tener un equipo de fútbol, una universidad, o ser una capital, etc.

Cuando nos preguntan cuál de las ciudades presentadas tiene mayor población, podemos realizar estas asociaciones para tomar la decisión. Por ejemplo, en Toluca hay un equipo de fútbol, en la Ciudad de México hay 3 equipos de fútbol, en Toluca hay un aeropuerto, en la Ciudad de México hay un aeropuerto. En Toluca no hay un sistema de transporte colectivo Metro, en la Ciudad de México sí, además de los sistemas Metrobus, Cablebus, Tren Ligero y Trolebus.

A partir de las descripciones ofrecidas, podemos decir que la Ciudad de México es efectivamente más poblada que la ciudad de Toluca porque cumple con más características asociadas a una ciudad con una población densa. El heurístico de asociación en ocasiones, nos puede hacer fallar. Si en la pregunta comparan a la ciudad de Monterrey, con la ciudad de Hong Kong y nosotros no tenemos información del país chino, probablemente escojamos la ciudad de Monterrey porque es la que conocemos, aunque la ciudad de Hong Kong es definitivamente más grande. Para que los heurísticos no nos lleven este tipo de fallos, debemos evaluar los contextos en los cuales son más útiles y tener en cuenta que la aplicación del heurístico es falible.

Por último, cuando hablamos de racionalidad en los términos de las pruebas presentadas, la situamos en un contexto de determinación. Es decir, la racionalidad estaría determinada por normas o reglas, la presencia de heurísticos evidencia que las reglas asociadas con la racionalidad (la lógica y la probabilidad clásicas[4]) no son las únicas que intervienen a la hora de enfrentarnos a un problema. En términos generales, podemos decir que las heurísticas intervienen en los procesos racionales como si fueran una especie de atajos que en algunas ocasiones coadyuvan a que cometamos errores y en otras nos ayudan a ser más exitosos (para una revisión más exhaustiva de las pruebas y ejemplos que

[4] Entiéndase por lógica clásica a las teorías lógicas basadas en los trabajos de Frege y Russell entre las que se encuentran la lógica proposicional y cuantificacional, todas caracterizadas por tener un grado alto de monotonía y cumplir con la regla del tercero excluido. En cambio, la probabilidad clásica es aquella en la que el cálculo de probabilidades se basa en eventos simples y no considera que la determinación de un evento condicione la probabilidad del resto de ellos.

clarifican mejor esta relación se sugiere revisar la siguiente bibliografía: Fonseca, 2008; Fonseca, 2014; González, 2019).

Por otra parte, hemos podido distinguir que cuando referimos al concepto de heurística de modo sustantivo lo estamos pensando como un objeto de estudio, en este caso el objeto de estudio sería la heurística ligada a los sesgos o atajos cognitivos. Hacer esta distinción es importante porque el modo en que nosotros estaremos trabajando el concepto implicará su uso sustantivo, pero también su uso adjetivo. Además, respecto a la caracterización de heurística como sesgo, puede entenderse como un "desvío" hacia un razonamiento que no está lógicamente estructurado, en este sentido, es similar a un atajo, ya que se desvía del camino lento y ordenado del razonamiento hacia uno rápido y frugal.

Por otra parte, cuando hablamos del uso adjetivo, referimos que aquello descrito como heurístico guarda una relación con alguna de las acepciones del término. Por ejemplo, cuando hablamos de estrategias para reducir recursos cognitivos, decimos que es una estrategia heurística situada en el contexto de la racionalidad. Cuando hablamos de estrategias para reducir información, hablamos de estrategias heurísticas situadas en un contexto computacional (no necesariamente cibernético). En general, basta con entender que la distinción del concepto como adjetivo, nos indica que el sujeto del adjetivo es parte del fenómeno heurístico en cualquiera de sus usos.

En conclusión, existen diversos estudios que han mostrado que las leyes de la lógica y de la probabilidad a las que comúnmente situamos como paradigma normativo de la racionalidad no son las únicas que intervienen en los que podríamos denominar actos racionales (resolver problemas, tomar decisiones, etc.) A los fallos del razonamiento que intervienen en la racionalidad los denominamos heurísticos y hay una discusión vigente respecto de si son útiles o son perjudiciales. Los casos estudiados por Khaneman y Tversky muestran cómo los heurísticos nos llevan a errores, mientras que la propuesta de Gigerenzer muestra una estrategia que nos puede ser útil en algunas ocasiones. En el siguiente apartado ahondaré más sobre la concepción de heurística que la sitúa en la creación de estrategias que nos son útiles para resolver y enfrentar problemas.

1.3 Estrategias heurísticas

En esta sección profundizaré en la caracterización de heurísticas como estrategias que nos ayudan a enfrentar problemas de una forma más efectiva. El objetivo es mostrar cómo se caracterizan, o, mejor dicho, qué es lo que distingue a las estrategias heurísticas de otro tipo de estrategias. Asimismo, pretendo mostrar que aun cuando pueden llevarnos a errores, también pueden ser benéficas y preferibles con respecto de métodos que sabemos que son seguros.

En primer lugar, introduciré dos conceptos: el concepto de mundos pequeños y el concepto de mundos grandes. Esto tiene la finalidad de mostrar cómo se comportan las estrategias heurísticas, en comparación con las estrategias tradicionales, frente a problemas que implican el manejo de información. De este modo, los mundos pequeños pueden entenderse como una caja que ha sido lo suficientemente acotada como para que los eventos que ocurren fuera de ella no afecten a los eventos que ocurren dentro de ella, y si los afectan no sea de forma significativa. Un ejemplo de mundo pequeño puede ser nuestra habitación, en ella las cosas sólo cambian cuando nosotros mismos las movemos y las interacciones con el exterior solamente repercuten dejando algo de polvo y quizás la entrada de algún insecto.

En cambio, los mundos grandes no están bien acotados o lo suficientemente acotados, en ellos hay muchos cambios y es difícil anticiparlos a diferencia de los mundos pequeños. Un ejemplo de mundo grande puede ser el que modelan las aerolíneas, estas contemplan los viajes de los usuarios, la disponibilidad de asientos, los horarios de los vuelos y hasta el peso permitido en cada avión; sin embargo, no pueden controlar el clima y por esta razón suele haber retrasos en los vuelos. La diferencia entre un mundo grande y un mundo pequeño es la cantidad de cosas que podemos anticipar, y en consecuencia tomar mejores decisiones. Cuando hablamos de la toma de decisiones y de los procesos que intervienen en ella nos referimos a la teoría de la decisión; los mundos pequeños pueden distinguirse con modelos estadísticos y probabilísticos sencillos y clásicos pero los mundos grandes son intratables. (González, 2019)

Ya que los mundos grandes se distinguen por tener mucha información, y que además esa información no es muy predecible, se requieren estrategias para la omisión de información de modo que podamos realizar inferencias sobre los eventos de los mundos grandes a partir del conocimiento que tenemos de mundos pequeños.

Gigerenzer y el grupo ABC propusieron a las heurísticas como estrategias útiles y que además ofrecen un mayor éxito, con respecto de las metodologías típicas y mucho más complejas. En un artículo del 2011, Gigerenzer afirma que, gracias a las heurísticas, es posible trabajar mejor con menor información. El hecho de que las heurísticas resultaran ser más adecuadas que los métodos estadísticos estándar, en mundos grandes, devino en el efecto denominado "menos es más". (Gigerenzer y Gaissmaier, 2011, p 453).

El efecto "menos es más", consta de estrategias heurísticas diseñadas para la omisión de información. En este sentido, se puede definir a la heurística como "una estrategia que ignora parte de la información con la meta de tomar decisiones más rápidamente, de manera general, y/o con más exactitud que con métodos más complejos" (Gigerenzer y Gaissmaier, 2011, p 453). Al ser una estrategia, la investigación en torno a la heurística ya no es solamente descriptiva, sino que adquiere un componente prescriptivo. La pregunta de la investigación con respecto de la heurística ahora es la siguiente: "¿cuándo deberían las personas confiar en una heurística más que en una estrategia compleja para hacer juicios más exactos?" (González, 2019, p 90).

En general, podemos situar a las estrategias heurísticas, a la manera en que Gigerenzer lo hace, de acuerdo con la siguiente caracterización:

Una estrategia heurística se compone de

1) reglas de búsqueda,
2) reglas de paro y
3) reglas de decisión

Las primeras describen la dirección que debe de tomar la búsqueda de la solución, las segundas especifican el momento en el cual debe detenerse una búsqueda, y, por último, las terceras especifican cómo debe de tomarse la decisión que presuntamente resuelve el problema. (Gigerenzer y Gaissmaier, 2011).

Para ejemplificar el funcionamiento de este procedimiento, retomemos el ejemplo de la densidad de población presentado con anterioridad. La pregunta del tamaño de la población de dos ciudades para la cual no tenemos mucha información disponible puede describirse de la siguiente forma:

i) Búsqueda de criterios asociados con las ciudades de alta densidad demográfica.

ii) La búsqueda termina cuando una de las dos ciudades cumple uno o más criterios y la otra no.

iii) La ciudad que cumpla con el criterio designado en la regla de paro será la opción que resuelva el problema.

En el primer ejemplo, se comparaban los criterios como el equipo de fútbol, que la ciudad fuera capital, que no tuviera una universidad, etc. La regla de paro es el cumplimiento de uno de estos criterios para una ciudad, pero no para la otra. Finalmente, escogíamos la ciudad que cumplía con el criterio de paro. Retomando el ejemplo, pensamos que Toluca tiene menor población porque tiene menos sistemas de transporte colectivo conocidos.

El uso de esta heurística no garantiza una respuesta correcta, pues puede fallar si no tenemos muchos datos de una de las ciudades, sin embargo, tiene un alto índice de éxito.

El criterio de selección de una y otra es el de adaptación al ambiente. Decimos que una estrategia está mejor adaptada a un ambiente si puede ofrecer un resultado exitoso, o el mejor resultado posible para la mayor cantidad de casos, eventos o hechos que conforman un problema. En otras palabras, el ambiente es el problema más su contexto; nosotros debemos seleccionar la estrategia o conjunto de estrategias que mejor se adapten al problema y los cambios propios del mismo (su contexto). En el proyecto de Gigerenzer, una estrategia es ecológica de acuerdo con su grado de adaptación y, en este sentido no habría estrategias buenas o malas sino apropiadas y no apropiadas. En general, no existe la mejor estrategia para mundos grandes, pero sí mejores estrategias que otras para determinados problemas.

Describir todo el proyecto de racionalidad ecológica excede los límites propuestos para esta investigación (un estudio más amplio en este respecto se encuentra en Fonseca, 2008 y Fonseca,2014), sin embargo, basta con tener en cuenta que deben considerarse los procesos cognitivos y el ambiente o el entorno en el que se encuentra el agente que realiza dichos procesos. Decimos que se trata de racionalidad ecológica porque no solamente contemplamos los factores inherentes al problema a enfrentar sino que también contemplamos los factores que tienen que ver con los agentes que participan en dicho problema; en el ejemplo del aeropuerto que ofrecí al inicio de la sección para hablar de los mundos grandes, el problema era administrar los vuelos de una aerolínea frente a los cambios del clima; el proyecto de racionalidad ecológica busca o intenta crear estrategias que nos ayuden a tomar decisiones en contextos como este.

De acuerdo con González (2019, p 96) los factores ambientales pueden situarse dentro de la siguiente caracterización:

- Ambientes bajo incertidumbre: Son aquellos en los cuales no existe un buen criterio para enfrentar el problema propuesto.
- Ambientes redundantes: Son aquellos en los cuales la información ambiental disponible se correlaciona entre sí.
- Ambientes sujetos al tamaño de la muestra: Son aquellos en los cuales el número de observaciones es relativa a la cantidad de información disponible.
- Ambientes con variabilidad en ponderaciones: Son aquellos donde la distribución del peso de la información es variable. La variabilidad puede ser uniforme o aleatoria.

Finalmente, un problema no solamente se determina desde él mismo, sino que está situado en distintos ambientes, cada uno con características diferentes para los cuales se requieren estrategias diferentes. El proponer estrategias heurísticas se debe a que los problemas pueden ser muy grandes y los métodos tradicionales (como las descripciones estadísticas clásicas) tomarían mucho tiempo, esfuerzo y probablemente no puedan modelar el problema enfrentado.

Ahora bien, el hecho de que las estrategias heurísticas puedan ser de ayuda en problemas de mundos grandes, no quiere decir que no puedan aplicarse en problemas más modestos pues, por su construcción a partir de las reglas de paro, búsqueda y decisión, pueden aplicarse a cualquier problema y su elección dependerá solamente de qué tan bien se adapten al ambiente del problema y qué tan efectivas sean a la hora de predecir o de ofrecer soluciones al problema enfrentado.

Por último, cabe señalar que la selección de las estrategias no es trivial, sino que sigue distintos principios metodológicos constituidos a partir del estudio de los modelos formales de heurísticas. Dichos principios son los siguientes:

- Pruebas comparativas contra pruebas singulares: Se deben de probar distintos modelos para evaluar cuál de ellos es mejor.

- Pruebas de individuos contra pruebas de grupos: Para documentar la diferencia entre una respuesta grupal y una respuesta individual.
- Probar el uso universal de las heurísticas contra el uso adaptativo: Investigar la razón por la cual se usan las heurísticas en situaciones ecológicamente racionales y no el por qué se usa una heurística en todas las situaciones.
- Predicción contra adecuación: Ya que las heurísticas son prescriptivas en el proyecto de Gigerenzer, se desea investigar su capacidad predictiva y no su capacidad para adecuarse a datos ya observados. (González, 2019, p 97-98)

En conclusión, las estrategias heurísticas se distinguen de otro tipo de estrategias por su capacidad de enfrentar problemas con abundante información. Los problemas con abundante información se sitúan en los mundos grandes, los cuales se caracterizan por tener muchas variables, relaciones y factores que pueden afectar nuestra toma de decisión. Las estrategias heurísticas pueden entenderse como estrategias constituidas por reglas de decisión que nos dicen cuándo elegir entre las distintas opciones del problema, reglas de búsqueda que nos ayudan a seleccionar las variables que pueden ayudarnos a solucionar un problema y las reglas de paro que nos dicen cuándo dejar de buscar y tomar una decisión. Finalmente, la elección de las estrategias no es trivial, pues no basta escoger cualquier estrategia de un catálogo, sino que hay que escoger la que mejor se adapte y esta elección se realiza con base en distintos criterios formulados a partir de la investigación formal de estas estrategias.

Comprender lo anterior es importante pues la concepción de estrategia heurística como una estrategia que comprende reglas de búsqueda, decisión y paro nos aproxima con otro campo de estudio que también estudia y propone heurísticas, a saber, la computación. Así mismo, Es importante para esta investigación en la medida en que hemos establecido los componentes de una estrategia heurística, de modo que más adelante propondré estrategias basadas en esta descripción. Por el momento, en el próximo apartado, explicaré la relación existente entre la heurística y los procesos computacionales.

1.4 Heurística y procesos computacionales

El objetivo de este apartado es mostrar la relación entre heurística y los procesos computacionales, para lograrlo emplearé la caracterización del apartado anterior mediante la cual se puede describir a una heurística como una estrategia que nos ayuda a enfrentar problemas. Para realizarlo, mostraré cómo la inclusión de una estrategia heurística puede mejorar un algoritmo computacional. Esto es importante en la medida en que un cómputo puede entenderse como una unidad de cálculo, o bien, como una unidad de procesamiento de información, actividad que realizamos día a día, frecuentemente en términos de procesos (como cuando se realiza una suma en una libreta). Ahora bien, antes de hablar de algoritmos hay que tener en cuenta dos conceptos, el concepto de costo y el de optimización.

El costo de un proceso computacional se define a partir de la cantidad de tiempo y memoria empleada para que un agente racional[5] resuelva un problema. La optimización trata de ofrecer procedimientos que nos permitan resolver un problema con la menor cantidad de costo posible.

Asimismo, cuando hablamos de un cómputo, nos referimos a la serie de operaciones que se realizan para obtener un resultado a partir de cierta información. El ejemplo que nos es más próximo son las operaciones matemáticas, sin embargo, los cálculos mentales para el procesamiento de información también pueden ser entendidos como operaciones, lo cual relaciona directamente el concepto con el enfoque anteriormente presentado, es decir, el cognitivo.

El ejemplo más famoso de la computación es el de la máquina de Turing, a partir del cual se definen conceptos técnicos como el de optimización y costo. En general, que el cómputo sea realizado por una persona o por una máquina es indistinto cuando lo que evaluamos es el proceso del cómputo, es decir la serie de operaciones necesarias para llegar al resultado deseado. Cuando estamos en el campo de la computación, hablamos de mecanismos automatizados mecánicamente.

Lo anterior, parece no guardar mucha relación con el tema que nos ocupa, sin embargo, es de vital importancia para entender el modo en el que la heurística puede ayudarnos a solucionar un problema. En las ciencias de la computación, a partir del siglo pasado, surgió un enfoque al que denominamos actualmente como Inteligencia Artificial (IA a partir de aquí).[6]

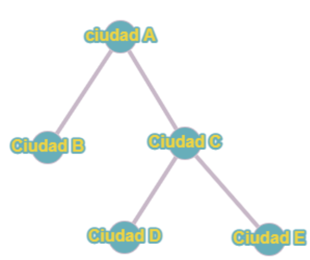
[5] Entiéndase por agente racional a una persona o una computadora capaz de realizar operaciones.

[6] Este enfoque de la computación es de especial interés para los filósofos debido a la amplia variedad de temas que tratan. Ya sea la lógica, la ética o incluso la ontología de los problemas que enfrenta son fuente de

La IA (para una mayor documentación pueden verse: Thomason, 2020 y Russell, S. J.& Norving, P. 2008), es un campo interdisciplinario en el que convergen distintas disciplinas como la lingüística, las ciencias de la computación, las ciencias cognitivas, la lógica, las matemáticas y muchas otras. En sus inicios, no se había planteado de una forma precisa y bien delimitada cuál era el objetivo de estos proyectos. No obstante, si algo guardan en común los distintos enfoques es que todos enfrentan problemas relacionados con tareas complejas. Las tareas complejas son aquellas que requieren cierto "grado" de inteligencia para ser resueltas.

Un ejemplo de tarea compleja puede ser tomar la decisión de cuál es la mejor ruta para ir de una ciudad a otra, o bien, encontrar qué procedimiento realiza una demostración matemática en la menor cantidad de pasos y de la forma más rápida posible. Para realizar lo anterior, se requiere entender cuál es la mejor forma de enfrentarse a los problemas que se presentan. Lo anterior, constituye un problema de búsqueda pues lo que interesa no es la solución del problema sino el camino para encontrarla. Los problemas de búsqueda son un tema clásico en el desarrollo de IA.

Ahora bien, los problemas de búsqueda pueden entenderse como una ramificación de estados, en los cuales un agente realiza un recorrido por las ramas del problema hasta que llega una solución. Una ramificación de estados es una representación gráfica mediante la cual representamos cada estado mediante un punto que se sitúa en un diagrama muy parecido a un árbol genealógico; cada estado puede tener diferentes ramas que lo conectan con distintos estados y puede representar cierta información. Por ejemplo, un estado puede representar el estar situado en la ciudad A de una ruta, las ramas representan las conexiones que tiene esa ciudad con otras ciudades, y las otras ciudades se representan mediante otros puntos. El siguiente diagrama puede sernos de ayuda para entender la ramificación:



debates y reflexiones muy fructíferas. Lamentablemente explorarlos aquí excede los límites para esta investigación, sin embargo, en el apartado siguiente sí nos concentraremos en el papel que ha jugado la lógica en esta disciplina, por lo menos de forma muy introductoria.

Los puntos donde se interceptan las ramas son nodos a los que llamaremos Estados. El punto inicial es el estado inicial y la solución es el estado objetivo, al que queremos llegar desde el estado inicial (Russell, S. J. & Norving, P., 2008). Cuando ramificamos un problema, requerimos definir ciertas funciones mediante las cuales comprobaremos si el estado en el que nos encontramos es el estado objetivo, en caso de no serlo continuamos la búsqueda. Si hasta aquí hemos sido perspicaces, habremos notado que este tipo de problemas consisten en la definición de una regla de búsqueda, una regla de paro, y una regla de decisión.

Ejemplificando, supongamos que debemos ir de la ciudad A hasta la ciudad B. Para realizar dicho traslado debemos de pasar antes por otras ciudades. Nuestro interés está concentrado en encontrar la mejor ruta, la cuál será determinada por la menor distancia de la ruta y el menor tiempo posible. El primer nodo de nuestra ramificación será la ciudad A, los nodos subsecuentes serán las ciudades a las cuales se puede llegar a partir de A. Una vez que el agente parte de A hacia un nuevo nodo, debe comprobar si este nodo es la ciudad objetivo, y lo hará cada vez que llegue a un nodo. Una vez que haya alcanzado el estado objetivo, ha encontrado una ruta que va de A hacia B. Posteriormente, deberá encontrar todos los recorridos posibles, compararlos con base en los criterios de distancia y tiempo de trayecto y así, decidir cuál es la mejor ruta posible. El anterior es un problema bastante difícil de resolver. De hecho, el encontrar una ruta entre ambas ciudades es un problema que ya es bastante grande debido a la gran variedad de caminos posibles. Existen distintas alternativas para enfrentar este problema, pero aquí describiremos solamente dos.

La primera alternativa es denominada *búsqueda ciega* en la cual se plantea un algoritmo mediante el que el agente realizará una búsqueda de una ruta entre ambas ciudades sin poseer información que le pueda ayudar a tomar una decisión, es decir, el agente no sabe si hay una conexión entre una ciudad y otra, o si por el contrario al tomar una determinada ruta, llegará a un callejón sin salida porque la ciudad a la que ha llegado no se conecta con otra ciudad. Este tipo de búsquedas son útiles en problemas pequeños en los cuales la información no tiene muchas variantes y, además, son métodos seguros pues siempre encontrarán una solución si el problema no es muy grande (Russell, S. J. & Norving, P., 2008).

Sin embargo, un hecho que puede disuadirnos de emplear esta metodología para resolver un problema de búsqueda es que, si bien es seguro, en búsquedas grandes es probable que no se llegue a una solución. O bien, llegar a una solución puede ser muy costoso en términos de memoria y de tiempo computacional. Cuando hablamos de problemas grandes, estamos situados en contextos donde debemos manejar mucha información, hay incertidumbre y falibilidad. Aquí es donde entra el segundo tipo de búsqueda, la *búsqueda informada*.

La búsqueda informada, a diferencia de la búsqueda ciega, emplea información característica del problema para, así, resolverlo de una forma que supere la metodología tradicional en términos de optimización. Pensemos lo siguiente, si nuestro objetivo es llegar de una ciudad a otra, conviene bastante saber cuáles de las ciudades a las que tomaremos como ruta no están conectadas entre sí, de esta forma evitamos caer en callejones sin salida. Asimismo, conviene saber si hay una conexión entre nuestra ciudad objetivo y otras ciudades o cuál es la distancia en línea recta desde la ciudad inicial y la ciudad objetivo. Agregar esta información al problema de búsqueda, mejora su eficiencia puesto que de un conjunto de datos que tiende a crecer, hemos eliminado información. El acto de eliminar información es una estrategia heurística (Russell, S. J.& Norving, P., 2008).

En su tesis doctoral, Karen González realiza un análisis detallado de la relación de la heurística con el desarrollo de IA. Como parte de su análisis clasifica en 4 rubros las definiciones de heurística presentes en la teoría de la Inteligencia Artificial. La clasificación es la siguiente (González 2019, p. 128)[7]:

1. Estrategias relacionadas con procesos de incertidumbre (aquí se abre una discusión sobre cuál es la relación entre algoritmos y heurísticas).
2. Estrategias que se usan cuando hay conocimiento incompleto.
3. Estrategias mejoradoras de procesos.
4. Guías para tomar decisiones.

Como se puede ver, en IA, las heurísticas son estrategias que se aplican en contextos muy similares a los que hemos estudiado cuando hablamos de la teoría cognitiva. Lo interesante, y que Karen González resalta, es la relación entre heurística y algoritmo. Asimismo, es

[7] Clasificación adaptada de González, en su caracterización añade también las definiciones con las que se relaciona cada rubro. He omitido las definiciones pues la caracterización de González es lo suficientemente clara como para capturar lo que las definiciones establecen.

importante recordar que el objetivo de los desarrolladores de IA es encontrar algoritmos que solucionen problemas complejos con el mejor rendimiento posible. Cuando un algoritmo emplea estrategias heurísticas, podemos decir que es un algoritmo heurístico. Sin embargo, en la teoría, parece haber una discrepancia entre encontrar un algoritmo para un problema y plantear una heurística para el mismo problema. Dicha discrepancia surge de las definiciones de cada uno de los conceptos, como bien sabemos la definición de heurística se sitúa en contextos de falibilidad, falta de información, etcétera. Mientras tanto, un algoritmo puede entenderse en términos generales como un procedimiento para solucionar un problema en una serie de pasos finitos y que garantiza la solución del problema. Al algoritmo puede caracterizársele como sigue:

1) Es un proceso o procedimiento que se guía por reglas o instrucciones.
2) Las reglas deben ser claras y mecánicas.
3) Los pasos por realizar deben ser finitos, al igual que el tiempo en el que se desarrollan.
4) El último paso es alcanzable y reconocible. (González, 2019, p. 133).

Como puede verse, las descripciones de un algoritmo se oponen a las descripciones de una heurística. Mientras que un algoritmo garantiza la solución a un problema, el uso de una heurística es falible y no garantiza ninguna solución. Asimismo, las reglas de un algoritmo son mecánicas, pero parece ser que las reglas de la heurística son relativas a distintos contextos y no suelen ser claras. Entonces, ¿cómo pueden relacionarse?

Llegados a este punto, quizás la mejor decisión sería no separar a un algoritmo de una estrategia de heurística, es decir, encontrar una forma de hacerlos converger sin que esto nos implique una contradicción dados los significados de ambos conceptos. En general el problema se centra en la vaguedad con la que se ha definido el concepto de "heurística" y que cuando se tiene un fin práctico en alguna disciplina parece interesar el resultado y no que comuniquemos, sin vaguedad, cuáles son las definiciones de nuestros términos.

Sin embargo, González logra capturar los rubros importantes a considerar en las definiciones de heurística, mismos que no son necesariamente excluyentes para la definición de algoritmo, puesto que entender a la heurística como un mejorador de un proceso constituye un gran atractivo a la hora de buscar un algoritmo que solucione un problema. Con esto quiero decir que los algoritmos pueden ser mejorados con la inclusión de estrategias heurísticas.

Asimismo, puede ser que la falla que encontramos al diseñar un algoritmo para un problema tenga origen en la falta de conocimiento sobre el mismo, campo en el que una heurística puede apoyarnos provisionalmente mientras conozcamos lo suficientemente bien el problema y podamos plantear un algoritmo que lo solucione sin necesidad de introducir elementos que puedan introducir incertidumbre o falibilidad (González 2019, Pp. 137-42). Por lo que, la consideración de estrategias heurísticas para el planteamiento de un algoritmo que solucione un problema puede resultar interesante, y no necesariamente requiere que consideremos cada una de las definiciones posibles sino la que nos sea más útil.

En conclusión, los algoritmos son métodos seguros mediante los cuales podemos resolver un problema. Las heurísticas son falibles, pero pueden integrarse en el planteamiento de un problema para mejorar los algoritmos que lo solucionan. Un ejemplo son los problemas de búsqueda donde las heurísticas ayudan a reducir información reduciendo la complejidad del problema. Tener en cuenta lo anterior es importante porque nos dota de los contenidos teóricos necesarios para enfrentar el problema planteado en esta investigación. En resumen, si un problema puede ser resuelto mediante un algoritmo, la solución puede mejorarse mediante la inclusión de una estrategia heurística. En la siguiente sección trataré el segundo tema a considerar en este capítulo, la lógica.

1.5 Lógica como sistema

En esta sección exploraré el concepto de lógica, el objetivo es mostrar el modo en que entiendo el concepto. Asimismo, se plantea delimitarlo para poder relacionarlo con el concepto de heurística en la sección siguiente.

En primer lugar, definir un concepto tan amplio como el de lógica es una tarea bastante complicada. Al igual que otros conceptos en filosofía, el concepto de lógica no encuentra una única definición y aunado a ello puede verse también como sustantivo, cuando hablamos del concepto mismo, y como adjetivo, cuando hablamos de las disciplinas que se dicen de sí mismas "lógicas". Siguiendo este problema, en una conferencia, el lógico Jean-Yves Béziau (2015) realiza una distinción entre lógica como razonamiento y lógica como teoría del razonamiento.

Esta distinción plantea dos niveles de la lógica, en el primer nivel nos encontramos con las estructuras mediante las cuales razonamos, en el segundo nivel con los marcos teóricos mediante los cuales establecemos sistemas que pretenden expresar el primer nivel. Es importante añadir que las teorías del razonamiento no son el razonamiento, al menos no dentro de esta caracterización. Es decir, lo que el lógico francés establece es que las teorías del razonamiento son lógica (uso adjetivo) pero no son la Lógica (uso sustantivo). De este modo, podríamos decir que los sistemas lógicos son teorías que pretenden expresar el modo en el que razonamos, pero la lógica sería el razonamiento mismo. No obstante, decidir lo anterior es bastante apresurado pues, como hemos visto en la primera sección de este capítulo, parece ser que el razonamiento no se compone únicamente de elementos lógicos, sino que también lo hace de elementos heurísticos. Mantener esta distinción, sin embargo, nos ayuda a anticipar que la lógica guarda una relación estrecha con el razonamiento, y, por tanto, con la racionalidad.

Por otra parte, en un evento reciente dentro del marco del día internacional de la lógica, la doctora Atocha Aliseda define la lógica (al menos a nivel de sistema) como los sistemas formales que conservan algún grado de monotonía (Lógica MX, 2020). Con lo cual nos da la pauta para una definición amplia de lógica pues no se concentra en un solo sistema o tradición, sino en un conjunto de prácticas y metodologías que tienen determinadas propiedades en común.

Ahora bien, si bien es cierto que la definición de lógica se sale por completo del objetivo de esta investigación, podemos concentrarnos en el aspecto de la lógica que la coloca como un sistema de alguna forma relacionado con el razonamiento. Esta forma de relacionarse con el razonamiento es similar a la que hemos visto en apartados anteriores, es decir, que los sistemas lógicos pueden ser, o al menos pretenden ser, descripciones normativas del razonamiento y/o del mundo.

Por otra parte, cuando entendemos a la lógica como un sistema, este sistema no es necesariamente formal (en sentido matemático), pues podemos hablar de lógica aristotélica tanto como de lógicas no clásicas. Lo interesante no es situarnos en sistemas particulares, por el momento lo conveniente es entender que el concepto de Lógica es amplio pero que tiene ciertas particularidades que le son inherentes. De esta forma, cuando hablemos de lógica la pensaremos como un sistema que se constituye por un conjunto de reglas que determinan sus enunciados, así como sus relaciones.

Lo anterior es parcialmente claro cuando en lugar de preguntarnos qué es la lógica, nos preguntamos cuál es su objeto de estudio. De este modo, el objeto de estudio de la lógica es una serie de propiedades tales como la consistencia, la consecuencia, la validez, etc. (Barceló, 2003). Que este es el objeto de estudio de la lógica queda claro en la medida en que los distintos sistemas, así como las distintas concepciones, suelen establecer normativamente en qué medida un objeto o hecho cumple o no con tales propiedades.

Claramente, cualquier objeto al que se le pueda predicar una propiedad lógica puede ser estudiado a través de esta, este hecho no es cambiante. Sin embargo, lo que sí puede cambiar es nuestro compromiso respecto del carácter de la lógica, lo que quiero decir es que podemos diferir en el modo en que concebimos a la lógica; para unos puede ser una ciencia y para otros sólo instrumentos que nos ayudan a realizar descripciones. Además, tradicionalmente podemos encontrar distintas posiciones sobre la lógica, tales como la tradición realista y la antirrealista. No hace falta escrudiñar en qué consisten estas dos tradiciones para darnos cuenta de que son antagonistas, pero sí podemos decir que mientras el realismo lógico se compromete con ciertos enunciados ontológicos respecto de la lógica, el antirrealismo no lo haría. Como ejemplo, el realismo se compromete con que las verdades lógicas son verdades independientemente de nuestros estados psicológicos, la lógica en este contexto sería objetiva (Barceló, 2003), en contraposición, el antirrealismo cuestionaría lo anterior. Esto es importante porque ejemplifica cómo distintas personas y tradiciones pueden pensar cosas diferentes respecto del mismo campo de estudio; lo importante es notar que independientemente de nuestras inclinaciones teóricas, todos empleamos las mismas técnicas, sistemas y metodologías lógicas.

Además, del mismo modo en el que hay concepciones filosóficas sobre la lógica realizadas por filósofos, hay concepciones filosóficas sobre la lógica realizadas por matemáticos; el enfoque de los primeros parece ser el uso de las metodologías lógicas para dar luz a determinados problemas en filosofía, mientras tanto, el enfoque matemático parece concentrarse en la creación y optimización de técnicas lógicas que tienen aplicaciones concretas en distintas áreas de las matemáticas, especialmente en aquellas que son aplicadas a los procesos computacionales en el campo de la IA. (Thomason, 2020)

Como podemos ver, existen sistemas lógicos con enfoques más matemáticos que filosóficos y viceversa. Asimismo, dependiendo de nuestras posiciones epistémicas nos comprometemos, o al menos tenemos qué, con determinadas implicaciones ya sean ontológicas o epistemológicas. Lo que sí es claro es que el objeto de la lógica parece ser el mismo, es decir, las propiedades lógicas como la consistencia, la relación de consecuencia lógica, la validez, la monotonía, etc.

De lo anterior se sigue que, cuando estamos estudiando un sistema lógico, realmente estamos estudiando las propiedades lógicas de dicho sistema, por una parte, y las aplicaciones del sistema por otra. Cuando nos encontramos estudiando lógica proposicional, se espera que comprendamos de qué manera una proposición es consecuencia de otra, en qué forma una prueba es consistente, así como qué modelos son incompatibles dentro del sistema para un conjunto de proposiciones. Pero no sólo estudiamos las propiedades, también las aplicamos a expresiones de lenguaje natural mediante una traducción al lenguaje de nuestro sistema lógico para su posterior evaluación, en este sentido, también hacemos uso de las aplicaciones del sistema.

Mientras tanto, cuando estudiamos lógica aristotélica, estudiamos las relaciones entre los términos, la validez de un silogismo, su estructura, la naturaleza de los juicios que emitimos. Pese a que la lógica aristotélica no es simbólica, esta sí tiene formas pues la caracterización de los silogismos es formal. Por su parte, la lógica aristotélica también nos sirve para evaluar argumentos tanto como para estructurar juicios de una forma adecuada.

La diferencia entre estudiar las propiedades lógicas dentro de un sistema y estudiar las aplicaciones propias del sistema radica en nuestro interés, si nuestra pregunta es "¿qué hace que ciertas relaciones sean válidas en este sistema"? Estamos estudiando las propiedades, si nuestra pregunta es "¿estos enunciados del sistema cumplen con esta propiedad?" Estamos estudiando la aplicación del sistema. Por ejemplo, si tomamos el siguiente conjunto de proposiciones:

$$\beta = \{p \rightarrow q, p\}$$

Y establecemos la siguiente relación:

$$\beta \vdash q$$

Cuando realizamos la demostración de que la relación es verdadera, estamos aplicando las reglas de la lógica; pero, si nos preguntamos bajo qué criterios establecemos que existe una relación de consecuencia entre el conjunto de proposiciones y la proposición relacionada con el conjunto, estamos estudiando la propiedad.

Eso mismo ocurre en los sistemas lógicos no simbólicos. Por ejemplo, en la lógica aristotélica aplicamos el sistema cuando decidimos si un silogismo es válido de acuerdo con la figura a la que pertenece. Pero cuando estudiamos la estructura misma de la figura, estamos estudiando las propiedades lógicas del sistema, pues no estamos demostrando silogismos, sino que estamos estudiando las reglas que nos permiten demostrar silogismos.

Entonces, ¿qué es lo que diferencia un sistema de otro si todos son lógicos?; lo que diferencia al sistema lógico de otro generalmente es la fuerza con la que admite, o se compromete, con ciertas propiedades. Lo que separa la lógica aristotélica de la lógica clásica formal, es que la lógica aristotélica tiene un corpus que se compromete directamente con el mundo, es decir que la lógica aristotélica es un sistema en el cual sus enunciados guardan una relación con el mundo (en algún sentido es realista) (Woods, 2020). Mientras tanto, los enunciados de la lógica clásica formal se comprometen también con esta relación, pero no en sentido estricto porque uno puede perfectamente hacer lógica proposicional sin verificar el contenido de sus proposiciones más allá de sus funciones de verdad. En otras palabras, la lógica clásica puede estudiarse sólo a partir de símbolos y definiciones, pero la lógica aristotélica sí requiere, en algún sentido, que estudiemos semántica y ontología (del propio sistema filosófico de Aristóteles). Lo que quiero decir es que los sistemas lógicos varían en función de sus compromisos epistemológicos, epistémicos u ontológicos. Por ejemplo, la lógica proposicional se aplica al modelaje de proposiciones, pero no al significado de los términos que están en esas proposiciones; en la proposición "el perro ladra" poco importa definir qué cosa es un perro o la acción de ladrar. Por otra parte, en la lógica Aristotélica sí importa saber qué cosa es un perro y qué cosas puede o no hacer un perro. En este sentido el enfoque epistemológico es diferente, en una tenemos conocimiento de las relaciones formales entre proposiciones, en la otra estudiamos también ontología[8]; en un sistema hablamos de símbolos y conjuntos de símbolos, en el otro hablamos del mundo que nos rodea (ontología) y un sistema tiene unas reglas, mientras que el otro tiene otras (son prácticas epistémicas diferentes).

[8] Cuando estudiamos silogismos, el significado de los conceptos es importante. Además, hay que recordar que, para Aristóteles, aquello de lo que se predica son las cosas mismas.

Por otra parte, anteriormente mencioné que la doctora Aliseda establece como lógicos a los sistemas con algún grado de monotonía. La monotonía es la propiedad lógica mediante la cual una prueba que es válida no dejará de ser válida. Sin embargo, hay casos mediante los cuales ciertas demostraciones dejan de ser válidas a la luz de nueva información. Claramente estudiar estas demostraciones a la luz de un sistema cuya monotonía es fuerte nos llevará a errores y en el peor de los casos a que no comprendamos el problema que enfrentamos; en contraposición, usar un sistema lógico que admite cambios de información nos permitirá entender dicho problema de una mejor manera. Aún con eso, no quiere decir que el sistema no conserve cierto grado de monotonía, sino que ésta ha sido, en algún sentido, debilitada.

Por otra parte, entender a la lógica en un sentido amplio es una buena oportunidad para caracterizar otros aspectos de la disciplina. Hasta ahora hemos visto la lógica como el estudio de un conjunto de propiedades entre las cuales se encuentran la validez, la consistencia y la monotonicidad. Esta concepción de la lógica es cercana a la idea de la lógica como modelo, claramente si vamos a entenderla como un sistema tendremos que admitir que su práctica implica el establecimiento de modelos. De acuerdo con Carlos Romero (2019), un modelo es una representación científica de un fenómeno, que abstrae o idealiza o de otra forma ignora algunos de sus aspectos para enfocarse en otros, es decir, un modelo es una representación de los fenómenos o sistemas modelados y es un objeto que se puede manipular para que nos provea información acerca de ellos.

Que la lógica pueda entenderse como modelo, significa que consta de una serie de técnicas para realizar representaciones abstractas de determinados fenómenos. Existe un particular interés en representar los fenómenos argumentativos, del razonamiento y de las relaciones formales entre enunciados en distintos contextos (matemáticos, por ejemplo). Ahora bien, así como los sistemas lógicos establecen descripciones sobre determinados fenómenos, el modo en el que establecemos esas descripciones implica una práctica. Cuando generamos modelos dentro de un determinado sistema lógico, realmente estamos aplicando dicho sistema, en este sentido, la lógica también es aplicada. Por ejemplo, si tenemos un acertijo como el que sigue:

- En la isla de los caballeros y los bribones, los caballeros siempre dicen la verdad y los bribones siempre mienten. ¿cuál de las siguientes oraciones no pudo ser dicha por un bribón?
  a) Soy un caballero y digo la verdad
  b) No soy un bribón o miento
  c) Soy un bribón

Lo que debemos realizar es encontrar la oración que no pudo decir un bribón y además dar una justificación. Para ello empleamos técnicas lógicas. La solución es sencilla, debemos entregar una oración que sea verdadera (porque los bribones no pueden mentir). Un bribón puede mentir y decir que es un caballero, puede decir también que no es un bribón, ¡pero jamás puede decir que es un bribón porque eso es verdad y él sólo puede mentir! Esta descripción ofrece un modelo que soluciona el problema y para el que hemos aplicado una regla lógica que dice que o mientes o dices la verdad, pero no ambas.

De este modo, caracterizar el componente aplicado de la lógica es importante porque esto quiere decir que su ejercicio implica una práctica. Una analogía entre la comprensión teórica de un fenómeno y su comprensión práctica puede ser la contraposición entre un científico que comprende de estructuras y fuerzas y un albañil, que aplica su conocimiento empírico para construir muros y bardas que no se caen (Romero, 2020)[9]. Por una parte, tenemos el conocimiento científico, y por otra el conocimiento empírico. La parte científica puede entenderse como un conjunto de teorías que se encargan de describir, modelar y explicar determinados fenómenos. La parte empírica puede entenderse como un conjunto de estrategias que empleamos habitualmente, como el razonamiento que hacemos previo a elegir la mejor ruta al trabajo. La ciencia lógica se encargaría entonces del estudio de las propiedades lógicas, de los sistemas y modelos. Mientras tanto, la práctica lógica sería el uso de esta en distintas aplicaciones, además, aun cuando no conozcamos los sistemas lógicos, sí realizamos razonamientos todo el tiempo.

Así, si bien no se ha definido por completo el concepto de Lógica, se han realizado distinciones pertinentes que permitirán relacionarla más adelante con la heurística. Mientras tanto, es conveniente establecer que cuando hablamos de lógica, generalmente, nos referimos a alguno(s) de los siguientes puntos:

[9] Ejemplo adaptado, la analogía de Romero es entre un artista y un científico.

- La lógica como modelo de fenómenos en los que intervienen las propiedades lógicas (Ciencia lógica).
- La lógica como un conjunto de técnicas para modelar fenómenos dentro de sistemas determinados por las propiedades lógicas (Lógica aplicada o bien, lógica práctica).
- La Lógica como razonamiento en sentido amplio (Béziau, 2015).
- La lógica como teorías del razonamiento (Béziau, 2015).
- La lógica como descripción normativa del razonamiento (González, 2019).
- La lógica como disciplina filosófica (Romero, 2020).
- La lógica como disciplina matemática (Barceló, 2003).
- La lógica como modelos que clarifican problemas filosóficos (Thomason, 2020).
- La lógica como modelos que optimizan procesos computacionales (Thomason, 2020).

En todos los casos y distinciones hay que tener en cuenta que siempre hay alguna propiedad lógica en cuestión. Desde la consecuencia lógica hasta la validez.

En conclusión, el concepto de lógica es muy amplio, pero en todo momento puede vincularse con el estudio de determinadas propiedades. Las propiedades que estudia la lógica son la consecuencia lógica, la validez, la consistencia, la monotonía o monotonicidad, la no contradicción, la identidad, etcétera. Cuando hablamos de lógica podemos referir distintas cosas, puede ser que hablemos de los modelos y técnicas lógicas, o bien, que hablemos de las prácticas que requieren la aplicación de algún modelo o técnica lógica. Además, es claro que el concepto está estrechamente ligado con el razonamiento y, en consecuencia, con la racionalidad. En el próximo apartado exploraré la relación entre lógica y heurística y el cómo ambas se vinculan a partir de la racionalidad.

1.6 Relación entre lógica y heurística

El objetivo de esta sección es mostrar la relación existente entre lógica y heurística, dicha relación se da con la racionalidad como puente, es decir la heurística y la lógica se relacionan en tanto que ambas participan en los fenómenos racionales. Retomaré el trabajo de la filósofa Karen González, mismo que servirá para establecer la relación mencionada.

Hasta ahora me he remitido solamente a una pequeña parte del trabajo de la filósofa Karen González, en cuya investigación sobre las relaciones existentes entre lógica y heurística realiza una exploración de dicha relación desde un enfoque multidisciplinario. Durante su investigación logra caracterizar el modo en el que se entiende a la heurística en cada una de las disciplinas y la relación que guarda con la lógica comprendida dentro de éstas.

La visión general es que existe una oposición entre heurística y lógica, mientras que la heurística se asocia a contextos de incertidumbre y falibilidad, a la lógica se le sitúa en contextos de seguridad y demostración. En la propuesta de la psicología cognitiva las heurísticas se oponían al razonamiento lógico y probabilístico. Esta oposición teórica explorada por la filósofa muestra como en ámbitos como la filosofía de la ciencia (distinguiendo entre contextos de descubrimiento y de justificación), las matemáticas (distinguiendo entre análisis y síntesis) y en las ciencias de la computación (distinguiendo entre heurística y algoritmo) se tiende a caracterizar tanto el concepto de heurística como el de lógica de forma en que resultan incompatibles.

Sin embargo, en dicha investigación la filósofa muestra cómo una definición amplia de la lógica no es necesariamente excluyente de los distintos criterios con los que se caracteriza a las heurísticas. Propuestas como la de Gigerenzer describen a las heurísticas como estrategias que pueden modelarse formalmente, es decir, que se les puede establecer bajo parámetros normativos. Mientras tanto, en las ciencias de la computación las heurísticas son usadas como mejoradoras de estrategias; los problemas de búsqueda que tenían estrategias heurísticas eran más aptos que aquellos que no las tenían, la búsqueda informada resolvía mejor los problemas que la búsqueda ciega. Ahora bien, el problema parecía no estar situado en la práctica, si no en la teoría.

Con esto lo que quiero decir es que el problema existe en un nivel semántico, es decir, no se tenía una caracterización lo suficientemente robusta que capturara a la noción de heurística. Aunado a ello, las nociones de lógica que explora la filósofa son parciales u oscuras, ejemplificando, en las ciencias cognitivas son parciales porque refieren solamente a la lógica clásica, en filosofía son oscuras porque el concepto es enunciado, pero no definido. De este modo, el trabajo de la filosofía se concentra en comprender qué es la heurística y de qué forma se relaciona con la lógica, asimismo, plantea los límites de las distintas acepciones del concepto de heurística.

Finalmente, después de una amplia revisión del concepto, la filosofía nos ofrece la siguiente definición:

Las heurísticas son procesos, reglas, estrategias o guías de razonamiento que se usan en atención a la resolución de problemas bajo condiciones de incertidumbre, falibilidad, a falta de conocimiento, y cuando se busca economizar recursos o hacer los procesos más eficientes. (González, 2019, P.169).

Con esta definición, la filósofa, captura los aspectos esenciales del concepto, y que pueden ser planteados en las distintas disciplinas a las que refiere su investigación. Las heurísticas como procesos, reglas, estrategias o guías de razonamiento capturan la idea de que existen patrones de razonamiento que pueden ser útiles para resolver algún problema (González, 2019). Al mismo tiempo, las sitúa bajo condiciones de incertidumbre, falibilidad y falta de conocimiento, contextos en los que se encuentran problemas grandes, de falta de información, exceso de información, o incluso del desconocimiento del problema a tratar (cuando hablamos de problemas emergentes). Finalmente, se les sitúa como estrategias para economizar recursos o mejorar los procesos, capturando con ello la aplicación de las heurísticas en las ciencias de la computación.

La caracterización de Karen González responde qué es la heurística, dónde, cuándo y cómo ocurre, sus aplicaciones y sus interacciones. Pero ¿cómo se relaciona con la lógica?

Como ya hemos visto, parece haber una oposición, no obstante, el hecho de que la heurística pueda definirse como reglas o guías sugiere que tiene un componente normativo que implica que las heurísticas puedan emplearse prescriptivamente. De este modo, que las heurísticas sean prescriptivas quiere decir que tienen criterios de interacción, o parámetros normativos. Que una heurística sea mejor que otra dependerá del contexto, es decir de la naturaleza del problema, esto sugiere que responde a distintas necesidades. Por ejemplo, si consideramos que tenemos información abundante para solucionar el problema usaremos una heurística que elimina información, en el caso contrario, si tenemos poca información disponible preferiremos una heurística que nos permita agregar información.

En áreas como la matemática, agregamos información para realizar demostraciones. Una de las demostraciones del teorema de Pitágoras consiste en proyectar líneas auxiliares para los lados del triángulo rectángulo, una vez proyectadas se construyen cuadrados para calcular sus tareas por separado y luego demostrar la relación existente entre los lados del triángulo (González, 2019).

Por su parte, la lógica en su caracterización como sistemas normativos puede entenderse como componentes de control. Que sea un componente de control quiere decir que la lógica establece qué relaciones, funciones, operaciones y estrategias serán válidas en una teoría, modelo o planteamiento de un problema. Claramente esta concepción de lógica es aplicada, pero la concepción de heurística que hemos planteado anteriormente también lo es. Las oposiciones entre lógica y heurística devenían de la reflexión sobre sus aplicaciones, la heurística parece aplicarse en contextos en los cuales la lógica no puede aplicarse, aparentemente.

Así, la lógica constituye elementos de control y no parece admisible que agreguemos elementos a nuestro sistema o modelo que sumen cierta incertidumbre. Normalmente pensamos que la lógica es segura, que sus estructuras son invariables y es siempre objetiva. Incluso la definición que presenté anteriormente la sitúa como una ciencia objetiva (por lo menos lo es si aceptamos la tesis del realismo). Pero esto sólo es admisible bajo una concepción determinada de lógica. Que tengamos incertidumbre en nuestras pruebas no parece razonable en sistemas como el de la lógica proposicional porque es un sistema con la capacidad de decidir cualquiera de sus proposiciones siempre y cuando no se pretenda decidir problemas de metalógica. Pero, tener herramientas para manejar la incertidumbre puede ser algo deseable si estamos trabajando una lógica no deductiva como lo es la abducción[10] (ejemplos de abducción pueden verse en Aliseda, 2000.).

En otras palabras, esta oposición no es generalizable a todo campo de la lógica ni a cada concepción de esta; asimismo, la inclusión de la heurística en la lógica (y viceversa) genera una nueva caracterización donde tenemos elementos de control por una parte (lógica) y guías de dirección por la otra (heurística). El anterior es el esquema de una búsqueda informada, también es el esquema de proyectos como los desarrollados por H. Simon, el proyecto de H. Simon constituyó la creación de sistemas computacionales que realizaban "descubrimientos" científicos de forma automatizada, los detalles del proyecto se encuentran en el capítulo 4 de la tesis de Karen González (González, 2019). Sus

[10] La lógica abductiva se caracteriza por realizar inferencias a la mejor explicación. Esto supone que, a la luz de nueva información, las inferencias pueden cambiar.

aplicaciones prácticas son una prueba de que la heurística y la lógica pueden converger en un proyecto y generar resultados positivos.

De este modo, podemos encontrar dos tipos de relación entre lógica y heurística. En el ámbito de la racionalidad, decimos que un agente es racional cuando a partir del cumplimiento de ciertas reglas es capaz de resolver ciertas tareas. Por ejemplo, un agente racional puede seguir las reglas de la lógica para realizar inferencias, puede aplicar las reglas de las matemáticas para realizar un cálculo aritmético cuando va de compras. También, un agente racional está en condición de tomar decisiones.

La primera relación entre lógica y heurística se da en el campo de la racionalidad, la toma de decisiones o la solución de tareas complejas no solamente implica el seguimiento de las reglas del razonamiento, o de la matemática que describe la tarea en cuestión; sino que también implica el uso de atajos cognitivos que prometen simplificar la tarea a la que nos enfrentamos. Cuando los participantes de la prueba de “Linda la cajera feminista” enfrentaron el problema de escoger qué descripción de la cajera era más probable, no solamente consideraron las probabilidades establecidas a partir de una relación matemática, sino que consideraron también la descripción de la cajera, razón por la cual fallaban. Sin embargo, en el caso de la elección de la ciudad con mayor población entre dos opciones, el atajo prometió ayudarnos sin necesidad de investigar la población de ambas ciudades para, después, comprobarla.

En todo momento estuvieron presentes los componentes normativos, tanto en el cálculo de las probabilidades como en la selección de una ciudad con mayor población hay criterios que debemos cumplir; sabemos que sólo una opción es correcta, sabemos que nuestra elección puede ser válida o inválida, incluso podemos anticipar que una opción correcta puede dejar de serlo si se cumplen ciertas condiciones, una ciudad que tiene una población mayor puede dejar de ser más densa demográficamente hablando con respecto a otra, si la ciudad que antes era más pequeña de pronto crece.

También, decimos que participa la lógica porque realizamos inferencias, que si bien pueden ser incorrectas no quiere decir que no tengan un proceso de razonamiento. Ya que los heurísticos participan también en ese proceso de inferencia, la relación entre lógica y heurística es muy estrecha, así, nuestras inferencias pueden estar siendo influenciadas por atajos cognitivos y el hecho de que en ocasiones nos ayuden puede parecer una fuerte razón para seguirlos empleando, aun cuando en ocasiones nos hacen fallar. De este modo la primera relación entre lógica y heurística se da a nivel cognitivo, cuando razonamos y realizamos inferencias.

Por otra parte, existe también una relación entre la lógica y la heurística en tanto que éstas se aplican en problemas para los cuales se requiere el manejo de información. Cuando aplicamos la heurística, generalmente, omitimos o agregamos información que nos puede ayudar a solucionar un problema. Nos permite establecer reglas específicas para problemas específicos, reglas que con un método general no podríamos introducir y que se basan en el conocimiento del problema enfrentado; por ejemplo, el cálculo de la mejor ruta entre distintas ciudades. Así mismo, cuando aplicamos la lógica lo que hacemos es definir las reglas del modelo con el que vamos a solucionar el problema, por ejemplo, la ruta de un punto A un punto B debe tener una dirección, la distancia entre dos puntos es siempre la misma, etcétera. La aplicación de la lógica sirve para crear componentes de control en la solución de un problema, la aplicación de la heurística sirve para manejar mejor la información de un problema.

Del mismo modo, se ha caracterizado a la heurística como reglas o guías de razonamiento, esto quiere decir que una de sus aplicaciones es el establecimiento de prescripciones, consejos o guías que pueden ayudar a un agente a resolver un problema. Por ejemplo, si un estudiante está enfrentando un problema de geometría, una estrategia heurística que funciona como guía de razonamiento es sugerirle que descomponga la figura geométrica de su problema en triángulos con la finalidad de aplicar los principios trigonométricos.

Finalmente, el hecho de que tanto heurística como lógica participen estrechamente en la solución de un problema puede sugerir que la racionalidad no solamente se compone de elementos de control, la concepción de la racionalidad como algo que es puramente lógico puede ser ampliada para incluir este tipo de procesos sin que ello signifique una clase de inconsistencia. Es decir, se puede seguir teniendo modelos normativos de racionalidad que incluyen incertidumbre o fenómenos difusos como la creatividad o la imaginación. Al mismo tiempo, se requiere ampliar la noción de lógica, pues no se trata de situarnos en un sistema en particular, sino de considerar las generalidades y confluencias de todos los sistemas, sean formales o no. Las implicaciones de ampliar las nociones de racionalidad y lógica exceden los límites de esta investigación, sin embargo, puede verse que, si estas son ampliadas, la inclusión de la heurística no es perjudicial, si no que puede ayudarnos a mejorar el modo en que entendemos y enfrentamos problemas de toda clase.

1.7 Conclusiones del capítulo

El objetivo del capítulo fue mostrar y aclarar el uso de los conceptos de lógica y heurística, así como su relación. Inicialmente vimos que ambos conceptos se relacionaban desde la psicología cognitiva con la resolución de problemas para los cuales la lógica se tomaba como un paradigma normativo. Posteriormente, vimos como la heurística se planteó como estrategias que ayudan a resolver problemas que situábamos en contextos con mucha información, típicamente denominados como mundos grandes. Posteriormente exploramos el modo en que la heurística puede incluirse en la creación de algoritmos y con ello mejorar procesos computacionales. A continuación, nos detuvimos en el concepto de lógica y vimos que éste se relaciona con el estudio de propiedades como la consecuencia lógica, pero que también se aplica a la hora de modelar problemas. Finalmente, la lógica y la heurística se relacionan en tanto que ambas interactúan, o son componentes de la resolución de problemas, así como de la racionalidad.

De todos los temas explorados en el capítulo se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. La lógica y la heurística no son necesariamente excluyentes ya que se ha mostrado que su interacción en la resolución de un problema puede ser eficiente y exitosa.
2. La lógica puede entenderse como componentes de control, en sentido normativo. Es decir, la lógica establece reglas y parámetros que deben ser cumplidos durante la solución de un problema.
3. La heurística puede entenderse como guías o reglas de razonamiento. También puede entenderse como estrategias que se pueden aplicar a problemas con abundante información o con falta de información. Asimismo, puede entenderse como atajos cognitivos que simplifican los procesos de toma de decisión.
4. Una relación estrecha entre lógica y heurística puede ser el punto de partida para el establecimiento de una noción de racionalidad más amplia, en la cual, se consideren

no sólo los principios lógicos, sino también otro tipo de procesos que intervienen en la razón como la heurística, y quizás la imaginación.

5. Ya que la heurística se puede aplicar en el mejoramiento de algoritmos, puede aplicarse a todo tipo de problemas que se resuelvan sistemáticamente.

Capítulo 2: Uso de estrategias heurísticas en la enseñanza de las matemáticas

2.1 Introducción

En el capítulo anterior exploré las relaciones entre el concepto de heurística y el de lógica. Mostré que el puente de unión entre ambos es la racionalidad y que hay componentes heurísticos y lógicos en el proceso de planteamiento y solución de problemas. Asimismo, se presentó la siguiente definición de heurística:

Las heurísticas son procesos, reglas, estrategias o guías de razonamiento que se usan en atención a la resolución de problemas bajo condiciones de incertidumbre, falibilidad, a falta de conocimiento, y cuando se busca economizar recursos o hacer los procesos más eficientes. (González, 2019, P.169).

Para este capítulo, me centraré en la aplicación de la heurística como procesos, reglas, estrategias o guías de razonamiento que se emplean en la solución de problemas, en este caso, matemáticos. El objetivo es mostrar una aplicación didáctica de la heurística en un campo afín al de la lógica proposicional, área para la cual se propondrán estrategias heurísticas en los capítulos posteriores. El campo afín son las matemáticas, ya que en ambos casos se cuenta con sistemas de argumentación mediante razonamientos y representación de la información mediante recursos simbólicos. Lo anterior servirá como ejemplo de que las heurísticas pueden ser aplicadas como un apoyo significativo en la resolución de problemas que requieren de razonamientos formales y abstractos. Para ello, emplearé como fuente al proyecto del matemático George Pólya, Cómo plantear y solucionar problemas (How to solve it), en el que incluye una serie de estrategias didácticas basadas en la heurística para el planteamiento y solución de problemas matemáticos.

Así, en el primer apartado describiré la relación entre heurística y matemáticas, esto con la finalidad de extender la relación *heurística-lógica* a la relación *heurística-lógica-matemáticas*. Con ello anticiparé las razones por las que vale la pena seguir el proyecto heurístico de Pólya.

En la segunda sección describiré el proyecto de Pólya y sus aplicaciones, mostraré la construcción de la solución de un problema a partir de dicho método, con ello pretendo mostrar las virtudes didácticas su proyecto heurístico. Finalmente, ejemplificaré la metodología exponiendo cómo se pueden resolver problemas de distintos tipos aplicando estrategias heurísticas a partir del análisis del problema. (Se propone un problema de cálculo)

Finalmente, describiré la propuesta de González y Fonseca (2020) sobre heurísticas para la semántica proposicional, esto con el objetivo de fijar el puente entre estrategias heurísticas para la enseñanza de las matemáticas y la enseñanza de la lógica clásica.

2.2 Heurística, hipótesis y demostración en matemáticas

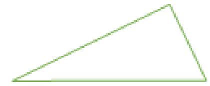
El objetivo de este apartado es mostrar la relación existente entre la heurística y las matemáticas, así como ejemplificar los procesos de argumentación y demostración. Con ello se busca ejemplificar el razonamiento matemático y su relación con la heurística. Anteriormente, he mostrado la relación entre heurística y lógica, de modo que en este apartado se pretende ampliar dicha relación. Para ello revisaré el texto *Heurística, hipótesis y demostración en matemáticas* de la matemática y filósofa Atocha Aliseda, en el cuál describe la relación planteada tomando como base el proyecto de Pólya.

En primer lugar, es necesario describir el proceso de solución de un problema matemático. ¿Cómo se resuelve un problema? De acuerdo con la filósofa (Aliseda, 2000) existen dos métodos de demostración de problemas matemáticos, la síntesis y el análisis.

El método de síntesis consiste en la prueba a partir de la meta, se parte de la conclusión realizando inferencias sobre el problema en cuestión, el proceso se realiza hasta encontrar una proposición conocida o demostrada, entonces se construye la demostración. Para ejemplificar realizaré la demostración del teorema de Pitágoras mediante el procedimiento de Bhaskara (la demostración fue adaptada del canal de YouTube Math in Black, puede verse: Demostración del Teorema de Pitágoras 3 | Bhaskara. (2020, 11 marzo)). Como bien sabemos, el teorema establece la siguiente relación:

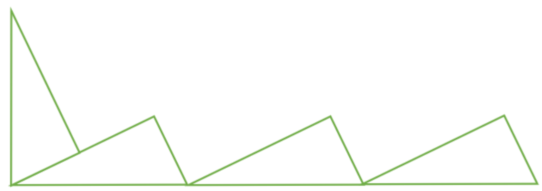
$$c^2 = a^2 + b^2$$

En el primer paso tomamos un triángulo rectángulo cualquiera:

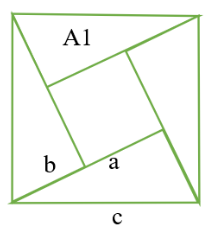


Proyectamos el triángulo 4 veces, de modo que cada uno comparta un vértice:

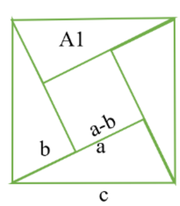
Notamos como los ángulos formados por los vértices son de 90 grados, de modo que los ángulos internos relacionados por el vértice suman 90 grados. Si giramos el triángulo de la izquierda, obtendremos un ángulo de 90 grados en la esquina inferior izquierda:



Repetimos el proceso hasta formar un cuadrado y nombramos sus lados y área como sigue:



Donde a es la longitud del cateto mayor y b es la longitud del cateto menor. Notamos cómo el lado del cuadrado interno está dado por la resta de los catetos, de modo que su lado es a menos b, lo asignamos a la figura:



Una vez construida la figura podemos establecer relaciones, dadas por las reglas para el cálculo del área del cuadrado formado. Por ejemplo, el área del cuadrado está dada por la suma del área de cada triángulo rectángulo (A1) y del cuadrado interno:

$$c^2 = 4(A1) + (a-b)^2$$

Usamos c porque es el lado del cuadrado, y además es la hipotenusa de cada triángulo. Ya que el área es Lado x Lado se representa como un número elevado a su segunda potencia. Por su parte, el cuadrado pequeño está dado por el cuadrado del lado que ya habíamos asignado. Ahora conviene desarrollar el área del triángulo que es base (a) por altura (b) entre dos:

$$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (a-b)^2$$

A continuación, desarrollamos las operaciones:

$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$$

Reducimos los términos de signo opuesto:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

El teorema queda demostrado.

El proceso consistió en partir de aquello que se quería demostrar, de la relación entre los catetos del triángulo, para ello se construyó una figura. Posteriormente se establecieron relaciones conocidas y se llegó al resultado esperado. En este método partimos de operaciones y transformaciones sin tomar en cuenta teoremas o axiomas. En contraposición, el método de análisis consiste en partir de teoremas o axiomas para realizar una demostración. Consideramos el conocimiento que tenemos y partimos hacia la solución.

La demostración más conocida del teorema de Pitágoras a través de proposiciones demostradas (teoremas) es la de Euclides (la demostración fue adaptada del canal de YouTube MateMauro. Puede consultarse en: Teorema de Pitágoras Demostración por Euclides. (2018, 13 noviembre)). La demostración puede construirse como sigue:

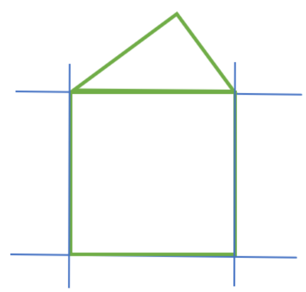
En primer lugar, partimos de la proposición 47 que dice: *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto*; en términos más sencillo podemos reescribir: *El cuadrado de la hipotenusa es proporcional a la suma del cuadrado de los catetos del triángulo*.

A partir de la definición del triángulo rectángulo emplearemos las proposiciones:

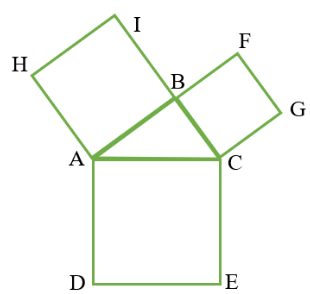
- Proposición 46: Trazar un cuadrado a partir de una recta dada (en este caso los lados del triángulo

- Proposición 31: Por un punto dado trazar una línea paralela a una recta dada (para la construcción del cuadrado)
- Proposición 29: La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el ángulo externo igual al interno y opuesto, y los ángulos internos del mismo lado iguales a dos rectos. (En términos sencillos esta proposición indica que una recta que pasa por dos paralelas formará ángulos de 90 grados)

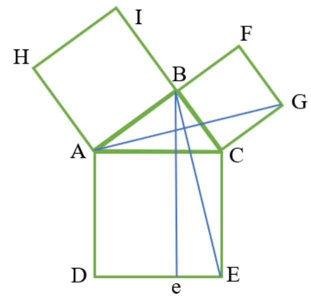
Aplicando las proposiciones obtenemos:



Una vez construido el primer cuadrado, realizaremos el mismo proceso para el resto de los lados y nombramos los vértices:



A continuación, trazaremos los segmentos $\overline{AG}$ y $\overline{BE}$. Además, trazaremos una línea paralela al segmento $\overline{CE}$ que pase por el punto B al que nombraremos $\overline{Be}$. Obtenemos:



Además, basados en la proposición 14 que establece que, *si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacente rectos y no están en el mismo lado de ella, ambas rectas estarán en línea recta.* Observamos cómo la recta $\overline{IB}$ forma dos ángulos rectos con las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{BF}$, de modo que se puede inferir el segmento $\overline{ABF}$ y así para cada recta que cumpla la condición.

Ahora bien, a partir de la figura podemos obtener las siguientes relaciones:

- El ángulo $\angle ACE$ es congruente con el ángulo $\angle BCG$ (ambos son rectos)
- Si al ángulo $\angle BCG$ le sumamos el ángulo $\angle ACB$ obtenemos el ángulo $\angle ACG$ (Figura 1)
- Si al ángulo $\angle ACE$ le sumamos el ángulo $\angle ACB$ obtenemos el ángulo $\angle BCE$ (Figura 2)

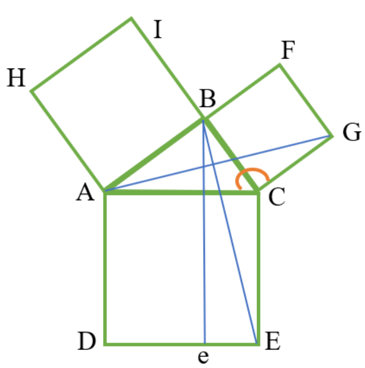


Figura 1

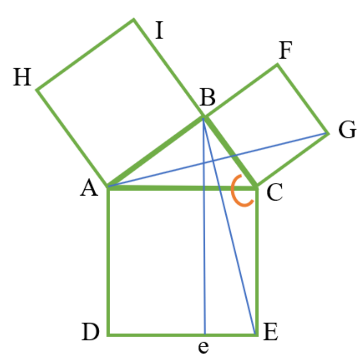
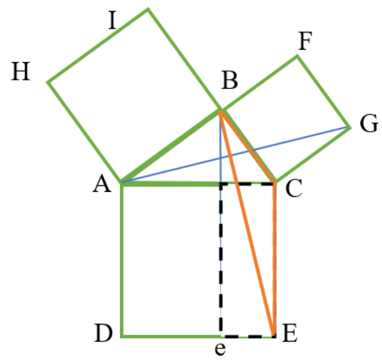


Figura 2

La proposición 2 dice que, *y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales*. Por lo que se puede inferir que los ángulos $\angle ACG$ y $\angle BCE$ son congruentes. Ya que los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CG}$ son iguales y los lados $\overline{CE}$ y $\overline{AC}$ son iguales, los triángulos ACG y BCE son congruentes. En la figura resaltamos el triángulo BCE:

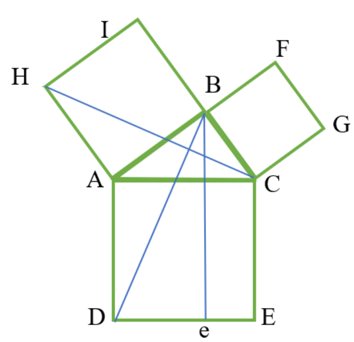


Al mismo tiempo agregamos una línea punteada que muestra cómo se forma un paralelogramo que cumple con lo siguiente:

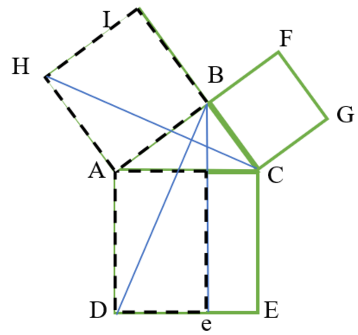
1. Tiene la misma base que el triángulo, en este caso $\overline{CE}$ y
2. ambos están dentro de las mismas paralelas ($\overline{Be}$ y $\overline{CE}$)

A continuación, empleamos la proposición 41 que dice que, *si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo*. En consecuencia, podemos inferir que $2BCE = Ce$

Aplicamos el mismo procedimiento para el triángulo ACG y el paralelogramo CF y obtendremos que $2ACF = CF$ ya que se cumple la proposición 41. Y ya que *los dobles de cosas iguales son iguales entre sí,* podemos inferir que los paralelogramos Ce y CF son iguales, ya que los dobles de los triángulos ACG y BCE son iguales entre sí. Una vez obtenido el resultado, podemos pasar a la otra parte del triángulo proyectando las líneas como sigue:



Una vez proyectadas, notamos que $\overline{Be}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ así que repetimos el procedimiento a fin de formar dos nuevos triángulos, HAC y BAD los cuáles serán congruentes. Asimismo, formamos los paralelogramos que comparten base con los triángulos como se indica en la figura:



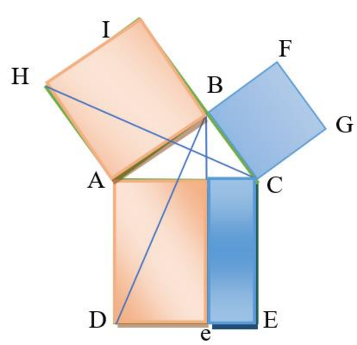
Para los triángulos resultantes también se cumple la proposición 41. Por lo tanto, podemos inferir que:

1. $2HAC = AL$
2. $2BAD = Ae$
3. $AL = Ae$

Por último, indicamos la congruencia de los paralelogramos en la figura y notamos la siguiente relación:

- El paralelogramo $DC = Ae + Ce$
- Ya que $Ae = AL$ y $CE = CF$, se tiene que $DC = AL + CF$

En conclusión, la suma de los paralelogramos proyectados con los catetos como lado (AB y BC) da como resultado, por congruencia de lados y ángulos, el paralelogramo proyectado sobre la hipotenusa (AC) como se muestra en la figura:



Dada esta argumentación, el teorema queda demostrado.

Como puede notarse, los procedimientos de análisis y síntesis son efectivos. En ambos casos se formulan hipótesis que apoyan la argumentación de la solución del problema mediante inferencias. El problema es que en ninguno de los dos casos se explicitó cuál fue la razón para la elección de los pasos en la inferencia. En el primer método se proyectó el mismo triángulo varias veces, en el segundo se proyectaron líneas auxiliares, la cuestión es: ¿por qué?, ¿cómo sabe el matemático qué camino seguir?, ¿cuál es la próxima inferencia, el próximo paso a la demostración?

Aliseda señala que usualmente no se considera como parte de la demostración a las razones de emplear unos y otros recursos, y que se le atribuye a la sagacidad del matemático (Aliseda, 2000, p.15). Sin embargo, Pólya se caracteriza por diseñar un proyecto que se concentra justamente en estas razones que comúnmente se asocian con los procesos psicológicos del matemático y no propiamente de las demostraciones. El proyecto de Pólya será estudiado con mayor profundidad en el próximo apartado, por el momento conviene concluir que los procedimientos típicos de demostración en matemáticas pueden ir de axiomas y teoremas al resultado o bien, del resultado a las condiciones necesarias para su obtención. Podemos decir que se trata de un pensamiento "hacia adelante" (análisis) y pensamiento "hacia atrás" (síntesis).

2.3 ¿Cómo plantear problemas?

Hasta ahora vimos que un problema puede solucionarse mediante el método de síntesis y/o análisis. Sin embargo, encontramos que las razones para la elección de recursos e inferencias que apoyan la demostración parecen ser triviales y, generalmente, atribuidas a la creatividad y sagacidad del matemático (Aliseda, 2000). El objetivo de este capítulo es mostrar un antecedente de una metodología heurística para la didáctica de problemas que implican razonamiento lógico-matemático. La razón principal para exponer este proyecto es para asentar el origen del primer antecedente de una metodología heurística para la didáctica de problemas matemáticos.

El método de Pólya consiste en las siguientes etapas:

1. Entender el problema
2. Hacer un plan

3. Llevar a cabo el plan
4. Analizar la solución

Cada una de las etapas va acompañada de preguntas sugeridas, estas deben ser planteadas por el docente, o bien, quien se enfrenta al problema debe plantearse las preguntas. Del mismo modo, debe entenderse que dichas preguntas deben incentivar la atención del alumno y no sugerir "de más", pues se han planteado para que el alumno comprenda sus propios procesos de razonamiento y no sólo encuentre una respuesta rápidamente. A continuación, exploraremos cada etapa:

- Entender el problema: ¿Cuál es la incógnita, los datos, la condición?, ¿se puede satisfacer la condición?, ¿es suficiente para la incógnita?, ¿insuficiente?, ¿redundante?, ¿contradictoria? Dibuja una figura. Introduce una notación clara para plantear el problema. Separa las partes de la condición. Escríbelas. (Aliseda, 2000, p. 17)

La primera etapa consta de determinar el tipo de problema y sus condiciones, se trata de clarificar el objetivo. Claramente no todas las preguntas serán necesarias, por ejemplo, las preguntas sobre la incógnita y la información pertenecen a problemas donde la instrucción es "Hallar", mientras que las preguntas que refieren a la condición pueden pertenecer, además, a problemas donde la indicación es "Demostrar".

"Demostrar" y "Hallar" son diferentes pero muy comunes, cuando tenemos un triángulo rectángulo del cuál conocemos el valor de los catetos, lo que debemos hacer es hallar el valor de la hipotenusa. Cuando tenemos un problema que dice: *Demostrar si la función:* $f(x) = x^2 + x + 1$ *es continua*, el objetivo es satisfacer la condición "Ser una función continua".

En ambos casos lo importante no es realizar las operaciones o demostraciones, ni siquiera debemos plantear aún cómo solucionar el problema, el objetivo real es entender qué debemos hacer. Las preguntas planteadas no sólo nos ayudan a identificar una meta, también nos permiten comprender con qué recursos contamos, cuáles son los enunciados, las definiciones, incluso podemos representar el problema con un dibujo. Entender el problema es el primer paso.

- Hacer un plan: ¿Has visto este problema antes?, ¿en forma diferente?, ¿conoces algún problema relacionado?, ¿algún teorema que pueda servir?, ¿conoces algún problema similar con la misma incógnita o con una incógnita similar? Dado un problema relacionado ya resuelto, ve si puedes usar su resultado o tal vez su método, ¿podría ayudar algún elemento auxiliar? Replantea el problema. Vuélvelo a plantear de manera distinta. Regresa a las definiciones. Resuelve primero algún problema similar. ¿Es más accesible, más general, especial, análogo?, ¿resuelve alguna parte del problema?, ¿guarda parte de la condición?, ¿qué otros datos pueden determinar la incógnita?, ¿cambia la incógnita?, ¿los datos?, ¿los dos? Acerca los dos problemas lo más posible. ¿Usaste todos los datos?, ¿toda la conclusión?, ¿todas las nociones esenciales? (Aliseda, 2000, p. 17)

"Lo esencial en la solución de un problema es concebir la idea de un plan" (Pólya, 1989, p.30), sin embargo, para ello requerimos de experiencia, de algún apoyo, de alguna buena idea. Generalmente, podemos realizar pruebas que, aunque sean infructuosas nos ayudan a saber cuáles caminos son incorrectos, pero también podemos contar con la experiencia del profesor. Para ello, el profesor debe recordar su experiencia con otros problemas, qué dificultades tuvo, qué operaciones le ayudaron a ser más exitoso (Pólya, 1989, p. 30). Es claro que la ejecución del plan depende en gran medida de la experiencia, de la capacidad para recordar otros problemas, otras experiencias.

La idea de esta etapa no es implementar el plan, sino analizarlo de tal modo que podamos tener una idea más o menos clara sobre qué recursos nos pueden ser de ayuda. Por ejemplo, en la sección anterior, cuando demostramos el teorema de Pitágoras según el método de Euclides, primero proyectamos cuadrados alrededor de nuestro triángulo, y luego descompusimos las figuras en triángulos, gracias a ello establecimos semejanzas según las reglas de la geometría. Una vez realizado para una parte del problema, lo hicimos para la otra parte porque ya nos había funcionado. El problema original era relacionar un cuadrado con otro cuadrado (formado por la hipotenusa) y lo logramos, es importante notar cómo demostramos un problema más pequeño antes del problema principal pero que compartían parte de la misma información (la hipotenusa de un triángulo rectángulo). El objetivo de este punto no es ejecutar el plan si no que debemos comenzar a plantearlo, el segundo paso es encontrar los recursos que nos pueden ser de ayuda.

- Llevar a cabo el plan: Revisa cada paso. ¿Lo ves claro?, ¿lo puedes probar? (Aliseda, 2000, p. 18)

La ejecución del plan consta no sólo de su realización, hay que meditar lo que realizamos, su justificación. Si empleamos un teorema hay que tratar de recordar su definición, su enunciado y/o demostración. Los pasos deben ser consistentes. En la demostración del teorema de Pitágoras cada paso consistió en la presentación de una proposición que nos ayudaba, en la construcción de las rectas auxiliares y en el establecimiento de las relaciones que podíamos inferir. Para los pasos construíamos una figura, indicábamos los nombres de los lados, de las relaciones, usábamos una notación adecuada. La ejecución del plan debe ser ordenada, debemos poder regresar a la prueba y comprender lo que hemos hecho.

- Analiza la solución: ¿Está bien el resultado?, ¿el argumento?, ¿se deriva el resultado de manera diferente?, ¿se puede ver de primera intención? ¿puedes usar el resultado en otro problema?, ¿el método? (Aliseda, 2000, p. 18)

Finalmente, debemos regresar sobre nuestros pasos, meditar la importancia de lo que hemos realizado. Demostrar el teorema de Pitágoras no es algo de poco mérito si consideramos su gran cantidad de aplicaciones, pero la demostración no sólo sirve para justificar el teorema, sino que el método de la demostración por relaciones de triángulos podría ayudarnos a probar la ley de senos o la ley de cosenos (que se basan en el teorema de Pitágoras). Si hemos probado la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, ¿no convendría descomponer una figura en triángulos rectángulos cuando enfrentemos otro problema?

Analizar la solución no sólo es una mirada retrospectiva a nuestro procedimiento, se trata de interiorizar nuestro resultado, nuestro razonamiento. Hay que verificar que no hayamos cometido errores y, sobre todo, relacionar el problema con otros problemas de modo que podamos fortalecer el punto dos del plan.

Finalmente, el método de Pólya consta de la realización de las preguntas sin que ellas induzcan la respuesta y faciliten el esfuerzo intelectual del alumno, por lo menos no si deseamos que mejore en la solución de los problemas. Para clarificar mejor la metodología resolveremos un problema aplicando la metodología de Pólya, el ejemplo será desarrollado como diálogo.

Ejemplo: Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

-Profesor: ¿Cuál es la incógnita?, ¿qué es lo que solicita el problema?

-hallar la rapidez con que se llena el depósito de agua.

-Profesor: es correcto, pero ¿hay alguna condición o es un problema general?

- Hay una condición, se requiere saber cuál es esa rapidez cuando la profundidad es de 6 metros.

-Profesor: ¿Cuáles son los datos del problema?

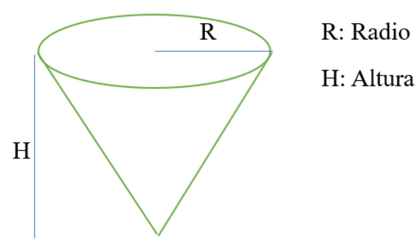
- El depósito es cónico y está apoyado sobre el vértice, además, se llena con una razón de 9 litros por segundo. Sabemos que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera es de 5 metros.

- Profesor: ¿Cómo representamos el problema?

-Podemos dibujar un sólido cónico, pero como está apoyado sobre el vértice, debemos dibujarlo con la base circular apuntando hacia arriba.

-Profesor: Correcto, realicen el dibujo y no olviden indicar la notación apropiada.

-El resultado es el siguiente:



-Profesor: Bien, pero ¿cómo podemos resolver el problema?

-Como se llena el depósito, es un problema de volumen, podemos proponer el cálculo del volumen del cono

-Profesor: ¿alguna otra sugerencia?

-mmm, ¿puede ser que usemos derivadas? El problema es de rapidez o cambio, la derivada muestra el cambio de una variable

-Profesor: en ese caso, ¿cuál es la variable que cambia?

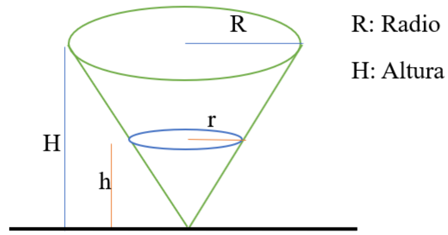
-el volumen lo hace, con respecto del tiempo

-Profesor: ¿cómo podemos representar el cambio?

-indicado el cambio de volumen entre dos puntos, lo podemos hacer dibujando un cono más pequeño pero semejante al original.

- *Profesor: represénténlo agregando la notación.*

-Obtenemos lo siguiente:



-Profesor: es correcto. Recordemos que la velocidad de llenado es de 9m/s, y que el volumen del cono está dado por el tercio del área de la base por la altura. Es decir:

$$v(t) = \frac{1}{3}\pi r(t)^2 h(t)$$

*-El radio **r** no lo conocemos, pero las secciones de cono son congruentes, podemos calcularlo por una relación de semejanza usando:*

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$$

Sustituyendo los valores conocidos obtenemos la siguiente relación, conviene indicar que se trata de un cambio en el tiempo como $r(t)$[11]*:*

$$\frac{r(t)}{5} = \frac{h(t)}{10}$$

Sustituyendo los valores conocidos obtenemos:

$$r(t) = \frac{5h(t)}{10} = \frac{1}{2}h(t)$$

-Profesor: excelente, ahora conocemos la razón de cambio del radio, pero necesitamos conocer el volumen dada la altura h= 6. ¿qué plan proponen?

-Lo más sensato sería crear la función del volumen y luego derivarla respecto del tiempo para calcular los cambios de altura, será posible porque el radio ya está expresado en términos de la altura.

[11] En cálculo cuando expresamos una función, colocamos los argumentos de la función entre paréntesis. En este caso, el radio, altura y otras magnitudes cambiaran con el tiempo, por eso decimos que es una función del tiempo como *f(t), r(t), etc.*

-Profesor: correcto, realicemos el plan y obtengamos el resultado. Lo primero será la función del volumen:

Sustituyendo en la ecuación de volumen y simplificando la expresión:

$$v(t) = \frac{1}{3}\pi\, h(t)(\frac{1}{2}h(t))^2$$

$$v(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{4}\;\pi\, h(t)\; h(t)^2$$

$$v(t) = \frac{1}{12}\pi\, h(t)^3$$

Expresando la razón de cambio en metros, recordemos que el cambio ya es la derivada del volumen:

$$v´(t) = \frac{9l}{s} = \frac{9m^3}{1000s}$$

Derivando ecuación del volumen:

$$v(t) = \frac{1}{12}\pi\, h(t)^3$$

$$v´(t) = \frac{\pi}{12}3h(t)^2$$

$$v´(t) = \frac{3\pi}{12}h(t)^2 = \frac{\pi}{4}h(t)^2$$

Igualamos la ecuación del cambio del volumen con la razón del cambio porque son iguales:

$$\frac{9m^3}{1000s} = \frac{\pi}{4}h(t)^2$$

Finalmente sustituimos $h(t)$*= 6 y calculamos la diferencia de h:*

$$\frac{9m^3}{1000s} = \frac{\pi}{4}h´(t)^2 = \frac{\pi}{4}36\; h´(t)$$

$$\frac{9m^3}{1000s}(4) = \pi 36 h´(t)$$

$$36m^3 = 1000s\;\pi 36m^2 h´(t)$$

$$\frac{36m^3}{36m^2} = 1000s\;\pi h´(t)$$

$$1m = 1000s\,\pi h'(t)$$

$$\frac{1m}{1000s\,\pi} = h'(t)$$

$$h'(t) = \frac{1}{1000s\,\pi}\frac{m}{s}$$

-Profesor: Correcto, hemos encontrado la razón de cambio cuando la altura es de 6m. ¿qué podemos rescatar de este problema?

-podemos recurrir a las derivadas cuando se estudia el cambio de valores de una variable

-plantear relaciones de semejanza nos puede ayudar, si nos falta información en otro problema similar quizás podamos usar teorema de Pitágoras.

- Es importante recordar las ecuaciones para el volumen y área de las figuras más comunes, los problemas de aplicación lo requieren.

-Profesor: ¡así es!, finalmente recuerden que siempre debemos tratar de representar el problema mediante un diagrama, o figura, que nos ayude a imaginarlo correctamente.

El método de Pólya se basa en la analogía, pues busca problemas o soluciones análogas a los que enfrentamos. Asimismo, depende de la práctica constante y de la guía adecuada del docente. Las preguntas deben ser generales y deductivas, de modo que hagan que el alumno piense el problema. Si el objetivo es mejorar el modo en que resolvemos, planteamos y enfrentamos problemas, vale la pena considerar también el proceso en que resolvemos el problema, eso incluye los fallos, las ideas, las preguntas, etc.

En conclusión, el método de Pólya se centra en el planteamiento del problema, su principal interés son los recursos que pueden ayudar a concentrar la atención del alumno en el problema, para así, lograr que proponga en la solución. Podemos agregar, también, que existen distintos tipos de problemas matemáticos, los problemas de "Hallar" y los problemas de "Demostrar"; el problema del ejemplo fue un problema del tipo "Hallar" pues se empleó información característica del problema y no se demostraron proposiciones generales, el ejercicio del teorema de Pitágoras fue uno del tipo "Demostrar". Por último, la metodología de Pólya es heurística dentro de la definición de heurística empleada en esta investigación, lo es pues las preguntas e indicaciones fungen como guías de razonamiento que, no obstante, siguen sin garantizar la solución del problema.

Finalmente, el método no es plenamente efectivo. Recordemos que las heurísticas son falibles y este método fallará cuando los alumnos tengan poca experiencia y si las preguntas son demasiado generales o son inductivas; en el caso del ejemplo presentado, se tenían condiciones ideales como supuesto (los alumnos participan, los alumnos tienen las nociones necesarias para atender el problema, etc.). No obstante, representa un precedente importante que ya ha sido replicado por otros pensadores como Lakatos[12] (Para ahondar en la versión heurística de Lakatos se sugiere consultar Lakatos, I. (1978)). En el próximo capítulo mostraré otro tipo de propuesta con las heurísticas como herramientas didácticas, ejemplificaré que las heurísticas pueden aplicarse no sólo al proceso de solución de un problema sino también a su presentación.

2.4 Heurísticas corporizadas.

En este apartado explicaré la definición de una heurística corporizada. Para ello me basaré en el artículo de González y Fonseca (2020), titulado Heurísticas para la enseñanza de la semántica del cálculo proposicional (el artículo fue presentado como ponencia en el EIDL-SILLA 2019 y posteriormente publicado como artículo en: Jasso, Jesús, & Conforti, Claudio, & Jasso, Elizabeth, 2020). Con esto tengo la finalidad, primero, de formar el puente entre el primer capítulo donde se asoció a las heurísticas con la racionalidad (en este caso será con la cognición) y, segundo, de mostrar un antecedente del uso de heurísticas como metodología didáctica de la lógica clásica, en este caso para la semántica proposicional.

Como hemos visto, las heurísticas se entienden como "procesos, reglas, estrategias o guías de razonamiento que se usan en atención a la resolución de problemas bajo condiciones de incertidumbre, falibilidad, a falta de conocimiento, y cuando se busca economizar recursos o hacer los procesos más eficientes" (González, 2019, P.169); cuando nos situamos en el aprendizaje, estamos refiriendo a los procesos de razonamiento asociados con la resolución de problemas. Los problemas de índole matemática y lógica

[12] En *Pruebas y Refutaciones* Lakatos realiza un recorrido por la historia de las matemáticas mostrando cómo recursos asociados a la imaginación o la creatividad ayudaron a solucionar problemas matemáticos. Este recorrido lo realiza en las notas al pie de la obra, mientras tanto, el contexto de cuerpo principal del trabajo es la interacción entre un profesor y un grupo de alumnos que buscan demostrar un teorema. La demostración del teorema es realizada con apoyo de guías heurísticas del mismo tipo que las de Pólya, con preguntas y guías, con analogías, con variaciones del problema, etc.

suelen ser descritos como abstractos y esto es así porque su solución, presentación, argumentación, etc., se realiza de acuerdo con las reglas de los sistemas, independientemente del agente que enfrenta el problema.

En primera instancia, puede parecer que los problemas que son puramente abstractos sólo requieren de razonamientos de la misma naturaleza, es decir, que no se requieren recursos perceptuales sino solamente la actividad intelectual. Lo anterior, suele situarse en la idea de que los procesos cognitivos pueden explicarse en términos computacionales, es decir, bajo esquemas algorítmicos que requieren sólo de las reglas del sistema en cuestión. Por ende, lo cognitivo sería independiente de la percepción, del contexto material y social del agente (Fonseca y González, 2019).

En segunda instancia, se puede tener el supuesto de que existen diferentes capacidades cognitivas, unas superiores enfocadas en los problemas abstractos y otras inferiores enfocadas en los problemas perceptuales o como apoyo periférico de las capacidades superiores. Las capacidades superiores son asociadas con lo simbólico, reafirmando la idea de que los factores contextuales del agente no influyen en sus capacidades para resolver el problema simbólico (Fonseca y González, 2019).

Lo anterior propicia que la atención en la solución de un problema y, en consecuencia, de la didáctica, se concentre en la identificación de estructuras abstractas y las metodologías más apropiadas para la solución del problema. Esto no es ajeno a lo que de hecho debemos realizar, como vimos en el ejemplo del apartado anterior, la solución se logró ya que se identificaron los aspectos abstractos del problema. Sin embargo, parte de lo que propició la solución fue el supuesto de la experiencia de los alumnos imaginarios y del profesor que apoyaba con las preguntas adecuadas, aspectos claramente ajenos al problema planteado. Además, en el primer capítulo vimos que factores ajenos al problema planteado incidían en la solución, como ocurrió con el experimento de Linda la cajera feminista y la prueba de Wason.

Finalmente, se puede agregar que la visión tradicional de la docencia coloca al docente al frente como un experto del tema que dicta a los alumnos, estos últimos no forman parte de la didáctica, sino que se concentran en los argumentos del profesor, en otras palabras, el aprendizaje se subordina a la transmisión de información de un agente activo (docente) a un agente pasivo (alumnos). Lo anterior puede ser ampliamente discutido y, de hecho, su cuestionamiento llevó a una teoría del aprendizaje situado donde se niegan los supuestos anteriores y se considera que el aprendizaje es un proceso más bien colectivo y contextualizado más que uno individual (Fonseca y González, 2019). Es decir, que el aprendizaje surge en contextos colaborativos y que son significativos para el alumno.

La propuesta de González y Fonseca (2019) hace énfasis en los aspectos situados y no en los supuestos clásicos antes mencionados. En primer lugar, argumentan que la idea de que el razonamiento lógico-simbólico sea amodal (que no importa la presentación ni el formato sino las reglas sintácticas) es errónea. Para mostrarlo se basan en diferentes investigaciones que muestran que la presentación de la información (factor perceptual) incide directamente en el éxito de solución de problemas. En su artículo, Fonseca y González (2019, p. 260) presentan un experimento que ofrece el mismo problema de matemáticas, pero con variaciones de espacios, el experimento consiste en presentar el ejercicio con tres notaciones como se muestra a continuación:

a) Consistente: los espacios coinciden con la forma correcta de realizar la operación

$$h + \quad q * t \quad + n = h + \quad t * q \quad + n$$

b) Inconsistente: los espacios no coinciden con la forma correcta de realizar la operación

$$h + p \quad * \quad m + f \ = t + p \quad * \quad m + f$$

c) Neutral: no hay agrupamiento en particular

$$t + j * n + e = n + e * t + j$$

La hipótesis fue que, si el razonamiento matemático emplea agrupación visual entonces, la presentación de los problemas con diferencias espaciales debería influenciar en forma sistemática el orden de las operaciones de validación del ejercicio (Fonseca y González, 2019), es decir, si un factor visual incidía en el razonamiento matemático, entonces al modificar la presentación de un problema, la solución debería verse influenciada por dicha presentación. Los resultados del experimento fueron los esperados, los símbolos espacialmente cercanos se resolvieron como si estuvieran relacionados sintácticamente, sin tomar en cuenta las reglas de la jerarquía de operaciones aritméticas, esto significa que en la notación consistente (espacios de acuerdo con la jerarquía correcta) se aplicaron las operaciones correctamente y, en la notación inconsistente (espacios no acordes con la jerarquía correcta) se aplicaron las operaciones incorrectamente.

Al respecto, Fonseca y González (2019, p. 261) concluyen que “la manera en que presentamos visualmente la información a nuestros estudiantes puede ayudar o dificultar su comprensión de la jerarquía de las operaciones a realizar”, por lo que se pueden establecer heurísticas corporizadas tomando en cuenta que factores como la presentación o agrupación de símbolos pueden incidir en la solución de un problema.

Llegados a este punto, podemos definir a la heurística corporizada como una serie de guías, instrucciones o recursos que ponen atención a los aspectos perceptuales y contextuales de un problema. Un ejemplo puede ser el uso de recursos visuales como colores, flechas, entre otros. Al ser un tipo de heurísticas basadas en la percepción de los símbolos, se pueden usar recursos posicionales (como espacios o tablas). En la propuesta de las filósofas (Fonseca y González, 2019, pp. 262-266), se ofrecen las siguientes heurísticas en atención a la notación de la lógica clásica:

1. Uso de símbolos diferentes, para evitar confusiones, por ejemplo: usar & y ∨ para la conjunción y la disyunción respectivamente, en lugar de ∧ y ∨ ya que estos últimos son parecidos y pueden confundirse.
2. Uso de diferentes tipos de signos de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes), todos tienen la misma función y no hay una razón para usar diferentes símbolos, no obstante, su uso puede ayudar a identificar más fácilmente las proposiciones relacionadas, otro apoyo visual es distinguir agrupaciones modificando el tamaño del símbolo, por ejemplo:

$$(((p \rightarrow q)\&\,(r\ \rightarrow q)) \rightarrow r)\ \&s$$

$$\Big(((p \rightarrow q)\&(r\ \rightarrow q)) \rightarrow r\Big)\ \&s$$

$$\{[(p \rightarrow q)\&\,(r \rightarrow q)] \rightarrow r\}\&s$$

3. Distribución espacial del orden de las operaciones, esto con la finalidad de identificar su jerarquía correctamente gracias al mayor espacio. Esta heurística puede agregarse a la del punto anterior resultando:

$$\{[(p \rightarrow q)\ \&\ (r \rightarrow q)]\ \ \rightarrow\ \ r\}\ \ \&\ \ s$$

$$(p \rightarrow q)\ \&\ (r \rightarrow q)$$

4. Distribución espacial de los elementos de los argumentos. Esta estrategia es útil ya que en la semántica proposicional los argumentos se colocan en una sola fórmula. La heurística consiste en introducir la regla de la eliminación de la conjunción y escribir el argumento en forma horizontal del siguiente modo:
    - $\{[(p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow s)] \,\&\, p\} \quad \rightarrow \quad s$
    - Aplicando la heurística:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ p \\ \hline s \end{array}$$

5. Uso de colores. Esta estrategia propone distinguir entre paréntesis o incluso secciones de las fórmulas mediante el uso de diferentes colores, en términos visuales será más sencillo identificar las fórmulas y sus relaciones.

Por último, resta agregar que la propuesta de las filósofas no se limita sólo a los aspectos posicionales, sino que emplean también heurísticas para el cálculo de la semántica proposicional, esto es, para la elaboración de tablas de verdad, reducción al absurdo y árboles semánticos, recursos empleados en la decisión de argumentos y fórmulas.

Por otra parte, hay que mencionar que las estrategias corporizadas se centran en los recursos perceptuales, es decir, en cómo la información de un problema es presentada y representada. Asimismo, hemos visto que el modo en que la información es presentada influye en la solución de un problema, por lo que vale la pena crear estrategias de solución de problemas que contemplen este hecho. Del mismo modo, hay que recordar que ya hemos mostrado otro tipo de estrategias heurísticas que se basan en el algoritmo de búsqueda, y que consisten en una regla de búsqueda, una regla de decisión y una regla de paro. Estas últimas son empleadas en atención de la información del problema, es decir, son aplicadas al procedimiento de solución y no al proceso de comprensión y representación del problema. Las heurísticas de este tipo podemos concebirlas como heurísticas formales y las heurísticas perceptuales como heurísticas corporizadas. Es importante señalar que ambos tipos de estrategias participan en la solución de problemas y, en consecuencia, en las actividades cognitivas (de aprendizaje, por lo que son relevantes para la propuesta didáctica) y racionales (en tanto que la solución de problemas requiere razonamientos, argumentación, lógica, etc.).

En conclusión, en este apartado vimos que existen distintos supuestos sobre el aprendizaje, uno de ellos es que las capacidades superiores son las asociadas con los problemas abstractos y las inferiores sirven de apoyo. El supuesto sobre la cognición parece indicar que existe la creencia de que los problemas de representación simbólica (abstractos) no requieren de actividades perceptuales (como el modo de presentar la información), sino solamente de las reglas de los sistemas y de las capacidades superiores de los agentes. No obstante, los estudios expuestos por las filósofas Karen González y Laura Fonseca muestran que hay argumentos que contradicen esta visión, ya que los factores perceptuales influyen en el modo en que solucionamos una prueba.

Por esta razón, las filósofas (Fonseca y González, 2019) propusieron un modelo basado en estrategias heurísticas corporizadas para la enseñanza del cálculo de la semántica proposicional. Finalmente, considero que el trabajo realizado por las filósofas constituye un importante antecedente para el proyecto propuesto en esta investigación ya que se enfoca en distintas estrategias basadas en una metodología heurística para la solución de problemas en lógica.

2.5 Conclusiones del capítulo

El objetivo del capítulo fue mostrar cómo las estrategias heurísticas pueden aplicarse a las áreas que requieren de razonamientos y argumentación de tipo lógico-matemática, misma que se caracteriza por el uso de recursos simbólicos y abstractos. Con esto se buscó ejemplificar los antecedentes para modelos didácticos basados en heurísticas y, al mismo tiempo, se ejemplificaron dichos modelos.

En el primer apartado se mostraron los métodos de síntesis y análisis. Vimos cómo el análisis consistía en realizar una prueba mediante la argumentación ordenada que parte de axiomas y otras proposiciones demostradas, hacia la conclusión deseada. Mientras tanto, la síntesis consistía en la realización de la prueba partiendo de la conclusión y agregando elementos o recursos que nos pudieran ayudar para realizar inferencias hasta que encontráramos alguna proposición conocida. Pese a que ambos métodos permitían solucionar el problema, notamos cómo la atención se centraba en la prueba y no parecía haber énfasis en la elección de los recursos, los pasos, o incluso los fallos; es decir, notamos que en las demostraciones existía un componente no señalado y que habitualmente se le asociaba con la creatividad o sagacidad del matemático. Este componente es de tipo heurístico.

En el segundo apartado exploramos la propuesta del matemático Pólya que, justamente, consiste en la atención de este componente. Vimos que la demostración del problema era tan importante como el proceso de demostración y que una buena estrategia didáctica era formular un programa basado en la comprensión del problema, la proyección de un plan, la ejecución del plan y la reflexión de la solución. Este programa didáctico ponía especial énfasis en preguntas o guías de razonamiento que pudieran apoyar al alumno en la solución del problema, haciéndolo partícipe activo de la solución y no un simple agente pasivo que sólo escucha. Argumentamos que estas estrategias son heurísticas basados en la definición propuesta en el primer capítulo, que las describe como "procesos, reglas, estrategias o guías de razonamiento que se usan en atención a la resolución de problemas" (González, 2019, P.169).

Finalmente, se mostró la caracterización de la heurística corporizada como un tipo de estrategias que ponían atención a recursos perceptuales mientras que las heurísticas formales se caracterizaron como aquellas propuestas para la solución del problema. Es decir, las primeras sirven para presentar y representar la información y las segundas para el uso y manejo de esa información, esto en el contexto de la solución de problemas lógico-matemáticos. Lo anterior se sustentó en las críticas realizadas a los supuestos de que las actividades cognitivas asociadas con la solución de problemas simbólicos no se veían afectadas por factores ajenos al propio problema, es decir, que para la solución sólo se empleaban las reglas sintácticas del problema y no había incidencia de otros factores. Sin embargo, lo que las críticas mostraron es que había factores, como el posicionamiento de los símbolos, que incidían en las respuestas a los problemas teniendo primacía por sobre las reglas sintácticas asociadas a estos. Lo anterior sirvió como justificación de la propuesta de una serie de estrategias heurísticas corporizadas para la mejor representación de las fórmulas de la semántica proposicional, con ello se creó un recurso didáctico en apoyo de los alumnos. Asimismo, las filósofas Karen González y Laura Fonseca crearon estrategias corporizadas y formales para la semántica proposicional[13], con lo que sentaron un precedente de metodología heurística para la didáctica de la lógica clásica formal.

Por último, hemos visto diferentes estrategias para los razonamientos lógico-matemáticos. Vimos los modelos de Pólya, Fonseca y González, y cómo estos pueden ayudar a la solución de problemas que involucran este tipo de razonamiento. En el próximo capítulo propondré una serie de estrategias heurísticas tanto formales como corporizadas en atención de los temas más recurrentes y mínimos de un curso de lógica proposicional.

[13] Este tipo de estrategias serán exploradas con mayor detenimiento en el próximo capítulo. Por el momento es pertinente la siguiente aclaración. Heurística Formal: son aquellas estrategias en atención de la información o planteamiento de un problema; Heurística corporizada: son aquellas estrategias en atención del modo en que se presenta la información de un problema (redacción, colores, recursos visuales, auditivos, etc.)

Capítulo 3: Modelado de estrategias heurísticas para la lógica proposicional

3.1 Introducción

En el primer capítulo realicé una breve acotación del concepto de lógica. En este capítulo retomaré la idea de que la lógica puede entenderse como cualquier sistema de relaciones que conserve un grado de monotonía y que, además, la disciplina se concentra en el estudio de las propiedades de la lógica o bien, en las aplicaciones de los sistemas derivados de estos estudios.

El objetivo de este capítulo será ofrecer una serie de estrategias heurísticas que pueden aplicarse para la enseñanza de algunos de esos sistemas. Me concentraré específicamente en los rubros de la semántica proposicional y la deducción natural del sistema de la lógica proposicional. Además, agrego que no tomaré en cuenta otras formas de estudio de estos sistemas como la lógica clásica proposicional modal, la lógica cuantificacional o de predicados y el estudio de la lógica proposicional axiomática; situados en la lógica clásica formal. Asimismo, cabe señalar que, de ahora en adelante, cuando hable de lógica clásica estaré refiriendo únicamente a los rubros de la lógica proposicional.

La razón de generar estas estrategias obedece a distintas motivaciones, la principal es que el estudio de los temas de lógica clásica puede resultar poco deseable para alumnos que han tenido una mala experiencia con las materias asociadas al razonamiento simbólico, tales como las matemáticas o la física. Tal como señalan Fonseca y González (2019), los alumnos no siempre han tenido buenas experiencias con la enseñanza de estas materias y, aunado a ello, los sistemas tradicionales de enseñanza suelen concentrase en los alumnos "mejor dotados" o en estrategias que no siempre son de apoyo para todos los alumnos.

Otra razón para ofrecer este tipo de estrategias es que durante el tiempo que he pertenecido al Proyecto Cantera[14] (para más información sobre el Proyecto Cantera y su funcionamiento y didáctica puede consultarse Chaves-Paredes J. y Solis-Ramos, O. 2019), he logrado identificar diversas dificultades que tienen los alumnos. Dichas dificultades

[14] El Proyecto Cantera es una instancia del Seminario Permanente de Investigación en Filosofía de la Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán. El proyecto se dedica, entre otras cosas, al estudio de la lógica clásica formal con miras a la competencia en la Olimpiada Internacional de Lógica organizada por la Academia Mexicana de Lógica. Otro de los objetivos del Proyecto Cantera es el apoyo a los alumnos de la FES Acatlán con asesorías sobre los distintos temas de lógica que los alumnos ven en su programa educativo.

suelen intensificarse en los tópicos de deducción natural donde los alumnos tienen que hacer demostraciones, pero también se han mostrado deficiencias en la elaboración de los métodos de la semántica proposicional. Asimismo, los alumnos no siempre son conscientes de la finalidad de los métodos, esto es, confunden el estudio de las propiedades lógicas con el estudio de las técnicas lógicas. Cabe añadir que al tener mala experiencia con las matemáticas y siendo estas técnicas lógicas un tipo de matemáticas (Barceló, 2004), los alumnos presentan problemas relacionados con una mala disposición para el estudio de estas, pues les resultan difíciles.

La problemática anterior se intensifica en la medida en que los procesos de enseñanza de la lógica en filosofía son similares a los procesos de enseñanza en matemáticas, esto es, se enseñan mediante la presentación de las reglas del sistema en cuestión, pero no se profundiza mucho en diferentes estrategias según las necesidades de cada alumno, o bien, se profundiza en estas estrategias, pero no se explicita las bondades del estudio realizado. Dicho de otra forma, se enseña lógica como un proceso mecánico de aplicación de reglas sin profundizar mucho en la razón de dicho estudio.

Aunado a ello, si se profundiza en el estudio de la lógica con carencias en las técnicas lógicas, es posible caer en confusiones o que la literatura especializada resulte ilegible. Por otra parte, si se profundiza demasiado en los métodos se corre el riesgo de que el alumno confunda las técnicas lógicas (métodos de decisión, algoritmos de demostración, etc.) con el estudio real de la lógica (las propiedades lógicas). Ahora bien, si combinamos estas dos posibilidades con el hecho de que el estudio de la lógica parece de difícil comprensión (por su cercanía con las matemáticas), parece que nos situamos frente a un panorama poco favorable para la disciplina.

No obstante, Fonseca y González (2019) hacen bien al señalar que no todos enfrentamos los mismos problemas y que la mayoría podemos resolver los problemas lógicos efectivamente y dentro de los marcos tradicionales. Sin embargo, ellas ofrecen una serie de estrategias útiles para mejorar el proceso de enseñanza, lo cual puede beneficiar tanto a los alumnos que no tienen dificultades como aquellos que sí las tienen. Tales estrategias son heurísticas y se basan en la comprensión de las metodologías lógicas.

Así, en este capítulo me enfocaré en describir las estrategias heurísticas que pueden ser aplicadas en las áreas de la lógica clásica formal que han sido designadas para esta investigación. Realizaré una revisión de los métodos tradicionales y los compararé con el método heurístico propuesto. Lo anterior tiene la finalidad de mostrar las ventajas obtenidas gracias a la inclusión de estrategias heurísticas. Esto para ofrecer una alternativa de solución a las problemáticas antes planteadas.

Por otra parte, antes de pasar a los contenidos específicos de lógica, es necesario introducir brevemente la noción de Didáctica de la Lógica con la finalidad de mostrar en qué forma las estrategias planteadas pueden contribuir, en primer lugar, en el modo en que se planea un programa de lógica formal y, en segundo lugar, coadyubar en la solución de problemas asociados al desempeño de los alumnos en la materia.

3.2 Didáctica de la Lógica

La didáctica es un concepto perteneciente a la Pedagogía, por lo que su uso deberá situarse en el ámbito de la educación. De acuerdo con Picardo Et. Al. (2005) "la Didáctica, siendo teoría de la enseñanza, se ocupa de dos procesos mutuamente relacionados: la instrucción y la educación en clase" (p. 88). La instrucción se asocia con la adquisición del conocimiento y saber requerido para conocer y transformar la realidad, por lo que la instrucción puede entenderse como el proceso que permite la adquisición de hábitos y destrezas. (Picardo Et. Al., 2005, p. 77). Por otra parte, la educación se relaciona con los aspectos que guardan relación con la formación de la personalidad de los alumnos, así como con las particularidades que estimulan, dirigen e impulsan los actos del estudiante (Picardo Et. Al., 2005, p. 77-78).

Del mismo modo, la didáctica es la disciplina que capacita al docente en atención de que pueda facilitar el aprendizaje de sus estudiantes para lo cual, debe de contar con los recursos técnicos para la enseñanza y aprendizaje, así como con los materiales o recursos que fungen como medios para llevar a cabo su función de educador. Así mismo, la didáctica provee al docente de al menos los siguientes aspectos (Picardo Et. Al., 2005, p. 75 -76):

a) Experiencias metodológicas de diferentes teorías o corrientes
b) Investigación educativa
c) Materiales y tecnologías

d) Planificación

Por su parte, pensar en la didáctica de la lógica nos sitúa en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina. No obstante, no hay un acuerdo generalizado sobre qué y cómo enseñar en un curso de lógica. Como mencioné en el primer capítulo, la lógica es un tema bastante amplio con una tradición milenaria, por lo que es común que los contenidos de la asignatura excedan el tiempo previsto para esta. Un ejemplo es que la lógica clásica formal comprende tópicos que van desde el álgebra booleana hasta la introducción a la lógica modal.

En consecuencia, es necesario delimitar bien los contenidos del curso ya que muchos temas pueden saturar de información, pero si no son suficientes pueden ocasionar carencias posteriores. Por ejemplo, si el alumno no comprende bien el uso de las reglas de inferencia y equivalencia de la lógica proposicional, tendrá dificultades cuando estudie lógica cuantificacional, en contraposición, si se estudian muchos sistemas formales, es probable que el alumno no comprenda bien cada sistema. En este sentido, la planificación didáctica es fundamental para lograr los objetivos formativos, o por lo menos la mayoría de ellos.

Del mismo modo, tanto como importa la planificación, es necesario que el docente tenga un claro conocimiento de los contenidos a impartir y, en medida de lo posible, que esté entendido en alternativas metodológicas respecto a los mismos contenidos. Al respecto de lo anterior, una opción son los esfuerzos que la Academia Mexicana de Lógica realiza al impartir el Taller de Didáctica de la Lógica, en el que se presentan diferentes alternativas didácticas para temas previstos en distintas áreas de la Lógica, así como de los planes de estudio que contemplan a la disciplina.

En general, puede entenderse a la Didáctica de la Lógica desde dos niveles, 1) la investigación respecto de la didáctica general en la que se evalúan las metodologías y/o estrategias didácticas que servirán en la clase y durante la labor docente y 2) donde la investigación se concentra en los contenidos específicos de la Lógica y las diversas alternativas para su enseñanza.

Respecto del tema de esta investigación, la lógica proposicional suele encontrarse en los primeros semestres de los planes de estudio de la licenciatura en filosofía, y en ocasiones se le estudia en el nivel medio superior o bachillerato. Los contenidos típicos de la asignatura se dividen en dos grandes grupos, el estudio de la semántica proposicional y en la demostración formal de argumentos. Además de estos, en el nivel de licenciatura se estudia también la lógica cuantificacional o de predicados, así como teoría de conjuntos, o bien, lógica axiomática. Sobre la lógica proposicional, esta es un antecedente directo para los diferentes sistemas de la lógica formal, pues retoman conceptos, métodos o problemas que tienen su origen en el estudio formal de las proposiciones. En consecuencia, se requiere una buena formación en esta área de la lógica, objetivo que puede ser cumplido a través de la didáctica de la lógica, ya sea en la investigación de metodologías de enseñanza, planificación de programas de estudio o estrategias que ponen atención en el modo en que se enseñan contenidos específicos. Las estrategias que propondré más adelante ponen atención en el modo en que se enseñan los contenidos específicos de la lógica proposicional, por lo que no propondré estrategias didácticas relacionadas con la planeación de cursos, trabajo en clase, evaluación, etc.

En el siguiente apartado expondré los temas relacionados con la semántica proposicional, presentando los métodos tradicionales y proponiendo una alternativa heurística para su implementación y enseñanza. Esto con la finalidad de mostrar cómo estas estrategias podrían ayudar a mejorar el desempeño de los alumnos al simplificar los métodos tradicionales bajo los cuales se rige la instrucción de los alumnos de lógica formal. Así mismo, ya que la lógica proposicional es un antecedente formativo para otros sistemas de lógica formal, conviene prestar atención al modo en que se enseñan sus contenidos, esto con la finalidad de generar alternativas de planificación de los cursos de lógica. No obstante, esto último requiere un estudio más detallado que puede ser desarrollado posteriormente.

3.3 Estrategias heurísticas para la semántica proposicional

El estudio de la semántica de proposiciones puede enfocarse en dos grupos. Por una parte, tenemos el estudio abstracto de conjuntos de proposiciones y, por otra, nos encontramos con el estudio del valor semántico de proposiciones específicas. Los cursos tradicionales se enfocan en el segundo grupo.

Cuando hablamos del valor semántico de una proposición, referimos su posibilidad de valor de verdad. Para la lógica clásica, el valor de verdad de una proposición cualquiera se define por la función: $P(v) = \{1,0\}$ donde p representa una proposición, "1", "0" representan los valores verdadero y falso respectivamente y v es la función de verdad.

Asimismo, el sistema de la lógica clásica define cinco operaciones primitivas basadas en las interacciones posibles entre una proposición y otra. Dichas conectivas son: Negación (~), conjunción (&), disyunción (∨), implicación/condicional (→), doble implicación/bicondicional (↔). Ya que la posibilidad de valor de verdad está dada por una base binaria, las funciones de verdad para cada conectiva estarán dadas por la función:

$$Tamaño\ de\ la\ tabla = 2^n$$

Donde dos representa la base binaria y "n" el número de proposiciones diferentes relacionadas.

Para las funciones elementales tendremos un valor semántico de cuatro posibilidades, para una proposición atómica será solamente de dos posibilidades. Las funciones de verdad tienen distintas aplicaciones, decidir una fórmula no es más que poder representar la posibilidad de su valor de verdad, atendiendo a las posibles combinaciones de valores de verdad de sus proposiciones componentes y de sus conectivas. A la investigación de la función de verdad de una fórmula se le denomina como "elaboración de una tabla de verdad", pues los valores asignados a dicha fórmula son representados en una matriz tabular. La tabla de verdad de las funciones básicas se representa como sigue:

P	Q	P&Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0

Para el caso de la negación, ésta invierte el valor de verdad de la fórmula que ella afecta, de la siguiente forma:

P	~P
1	0
0	1

El método de tablas de verdad tiene distintas aplicaciones, la principal y más interesante para el estudiante de filosofía es la decisión de argumentos; si un argumento es formalizable (que se puede expresar en términos de proposiciones formales o símbolos), es decidible en los términos de la lógica clásica[15]. Decidir un argumento es importante porque nos permite saber si estamos frente a un argumento válido o un argumento inválido. La noción Lógica de fondo es la de consecuencia lógica, que nos indica que un argumento es válido cuando la conclusión es una consecuencia lógica de las premisas propuestas en el argumento. Es decir, cuando de la verdad de las premisas se sigue la verdad de la conclusión. Para comprobar que esto es así, podemos elaborar la tabla de verdad de un argumento. Cuando para cada combinación posible el resultado de la tabla de verdad sea siempre verdadero, el argumento será válido. De lo contrario será contingente o contradictorio.

Un argumento siempre verdadero es un argumento tautológico, un argumento contradictorio es siempre falso. Un argumento contingente es a veces verdadero y a veces falso. Cuando decidimos una fórmula podemos decir de ella que cumple con alguna de las características previamente mencionadas. Las funciones de verdad básicas, por ejemplo, son contingentes, pues son verdaderas en algunas ocasiones y falsas en otras. A continuación, se explica el método.

3.3.1 Tablas de verdad

El método de tablas de verdad es el más sencillo, consta de investigar cada una de las combinaciones posibles de valores de verdad, de las proposiciones atómicas, en un argumento. Este método es seguro y además es finito, por lo que se puede construir un algoritmo para su implementación. El método tradicional de elaboración de tablas de verdad sigue el siguiente algoritmo:

1. Se identifica la conectiva principal del argumento, en este caso es la función exterior a los signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves):

Por ejemplo, en la fórmula:

$$((P \rightarrow Q)\&R) \rightarrow S$$

La conectiva principal es el condicional que no ha sido agrupado entre paréntesis

2. Se asigna una columna para cada proposición de la tabla.
3. Se asigna una columna para cada relación del argumento.

[15] Siempre y cuando el argumento evaluado no implique en sí mismo nociones metalógicas como la autorreferencia y su correspondiente del lenguaje natural también pueda ser decidido.

4. Se asigna a cada uno de los valores posibles para las proposiciones atómicas. Para ello realizamos una iteración de la función del tamaño de la tabla, dividida por 2. Se realiza una iteración por cada proposición hasta que el valor de la función iteración (i) sea igual a 1. Los valores obtenidos son asignados con una distribución de un valor por fila de la tabla.

Por ejemplo: Si tenemos 3 proposiciones (P, Q, R), el tamaño de la función será:

$$tamaño\ de\ la\ tabla = 2^3 = 8$$

La asignación para la primera proposición será dada por la iteración:

$$i_1 = \frac{8}{2} = 4$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 1 será: P = {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}, es decir 4 posibles verdaderos, 4 posibles falsos.

La asignación para la segunda proposición será dada por la iteración:

$$i_2 = \frac{i_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 2 será: Q = {1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0}

La asignación para la tercera proposición será dada por la iteración:

$$i_3 = \frac{i_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 3 será: R = {1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0}

5. Una vez realizada la asignación de cada uno de los valores de las proposiciones atómicas, se comparan las relaciones resultantes con las funciones elementales (se inicia siguiendo el orden de los signos de agrupación. Por ejemplo, si en la fila tenemos una función condicional con un 0 como antecedente y un 1 como consecuente tenemos que buscar esa incidencia en la función básica del condicional, y colocaremos el valor correspondiente al condicional en dicha incidencia. Lo anterior se realiza para cada fila y columna de la tabla de verdad.

P	Q	P→Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

6. Una vez realizado el paso 5, se observa el valor de verdad de la conectiva principal, se le caracteriza como tautología, contingencia o contradicción según sea el caso.

Con este algoritmo podemos decidir cualquier fórmula, y, en consecuencia, cualquier argumento. Es importante tener en cuenta que el tamaño de la tabla crece exponencialmente de acuerdo con el número de proposiciones atómicas presentes en el argumento, así como sus relaciones. Lo anterior puede ser algo disuasivo, pues un argumento con muchas proposiciones tendrá muchas filas en su tabla de verdad. A continuación, aplicaremos el algoritmo para decidir una fórmula de tres proposiciones atómicas.

Ejercicio. Decidir si la siguiente fórmula es contingente, tautológica contradictoria.

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \vee C)$$

1. La conectiva principal es el condicional fuera de paréntesis, las secundarias son la disyunción y el condicional del paréntesis de la izquierda, luego el condicional de A y B.
2. Asignación de columnas para cada proposición atómica:

A	B	C

3. Asignación de columnas para las funciones:

A	B	C	$((A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	C)	$\rightarrow$	$(A \vee C)$

4. Asignación de los valores de las proposiciones atómicas:

$$tamaño\ de\ la\ tabla = 2^3 = 8$$

La asignación para la primera proposición será dada por la iteración:

$$i_1 = \frac{8}{2} = 4$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 1 será: A = {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}, es decir 4 posibles verdaderos, 4 posibles falsos.

La asignación para la segunda proposición será dada por la iteración:

$$i_2 = \frac{i_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 2 será: $B = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

La asignación para la tercera proposición será dada por la iteración:

$$i_3 = \frac{i_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 3 será: $C = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$
1	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

5. Confrontación de cada combinación de valores para las funciones. Iniciamos con los paréntesis que tienen menos proposiciones del lado de las premisas, luego la conclusión y finalmente el condicional principal.

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$
1	1	1	1				
1	1	0	1				
1	0	1	0				
1	0	0	0				
0	1	1	1				
0	1	0	1				
0	0	1	1				
0	0	0	1				

Segundo condicional:

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$
1	1	1	1	1			
1	1	0	1	0			
1	0	1	0	1			
1	0	0	0	1			
0	1	1	1	1			
0	1	0	1	0			
0	0	1	1	1			
0	0	0	1	0			

Disyunción:

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$
1	1	1	1	1			1
1	1	0	1	0			1
1	0	1	0	1			1
1	0	0	0	1			1
0	1	1	1	1			1
0	1	0	1	0			0
0	0	1	1	1			1
0	0	0	1	0			0

Condicional final:

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$
1	1	1	1	1		1	1
1	1	0	1	0		1	1
1	0	1	0	1		1	1
1	0	0	0	1		1	1
0	1	1	1	1		1	1
0	1	0	1	0		1	0
0	0	1	1	1		1	1
0	0	0	1	0		1	0

6. Cada uno de los casos es verdadero. Por lo tanto, es una tautología.

El método tradicional, para resolver esta tabla de verdad, ha sido corto. Sin embargo, para casos más grandes se vuelve más complicado ya que la tabla crece según la cantidad de proposiciones y de relaciones. Cuando la tabla tiene 5 relaciones y 3 proposiciones tendremos una tabla de 5 columnas (más la columna de las proposiciones atómicas), y 8 filas. Ya que el método consiste en comparar la incidencia en cada intersección fila-columna, resulta un total de 40 comparaciones.

La alternativa propuesta es la siguiente heurística:

Casos posibles (reglas de búsqueda):

1. Si una parte de la conjunción es falsa, la conjunción es falsa.
2. Si una parte de la disyunción es verdadera, la disyunción es verdadera.
3. Cuando el antecedente de una fórmula es falso, el condicional es verdadero.
4. Cuando el consecuente de una fórmula es verdadero, el condicional es verdadero.
5. Cuando las partes de un bicondicional sean diferentes, el bicondicional será falso.
6. La negación invierte el valor de verdad
7. Si una regla no se cumple, el valor de verdad es el contrario al que las reglas indican para la conectiva. Si no se cumple 2, el valor de la disyunción será verdadero. Si no se cumplen 3 y 4 el valor del condicional será falso. Etc.

Las reglas de decisión son las siguientes:

- Siempre que se satisfaga cualquiera de estas reglas, coloca el valor que ella indica. De lo contrario evalúa la otra parte de la fórmula, o cambia de regla según sea necesario.
- Una vez decidida una conectiva, no es necesario corroborar la otra parte de la fórmula. El resultado será el mismo.

Resolveremos el mismo argumento que en el método tradicional con este método, respetaremos el algoritmo hasta el paso 5 (qué es el que decide la fórmula en el método anterior).

Ejercicio. Decidir si la siguiente fórmula es contingente, tautológica o contradictoria.

$$((A \to B) \to C) \to (A \vee C)$$

1. La conectiva principal es el condicional fuera de paréntesis, las secundarias son la disyunción y el condicional del paréntesis de la izquierda, luego el condicional de A y B.
2. Asignación de columnas para cada proposición atómica:

A	B	C

3. Asignación de columnas para las funciones:

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$

4. Asignación de los valores de las proposiciones atómicas:

$$tamaño\ de\ la\ tabla = 2^3 = 8$$

La asignación para la primera proposición será dada por la iteración:

$$i_1 = \frac{8}{2} = 4$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 1 será: $A = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$, es decir 4 posibles verdaderos, 4 posibles falsos.

La asignación para la segunda proposición será dada por la iteración:

$$i_2 = \frac{i_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 2 será: $B = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

La asignación para la tercera proposición será dada por la iteración:

$$i_3 = \frac{i_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

De este modo el valor de verdad de la proposición 3 será: $C = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$

A	B	C	$((A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	C)	$\rightarrow$	$(A \vee C)$
1	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

5. Aplicación de las estrategias heurísticas:

Aplicaremos la heurística 2 en el consecuente principal, obtenemos:

A	B	C	$((A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	C)	$\rightarrow$	$(A \vee C)$
1	1	1					1
1	1	0					1
1	0	1					1
1	0	0					1
0	1	1					1
0	1	0					
0	0	1					1
0	0	0					

Nota cómo hemos puesto los valores "1" cuando A o C eran verdaderas.

1. Como hemos decidido parte del consecuente, podemos aplicar la regla heurística 4 (Cuando el consecuente de una fórmula es verdadero, el condicional es verdadero) y decidir una parte de la conectiva principal. Aplicando la regla obtenemos:

A	B	C	$((A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	C)	$\rightarrow$	$(A \vee C)$
1	1	1				1	1
1	1	0				1	1
1	0	1				1	1
1	0	0				1	1
0	1	1				1	1
0	1	0					
0	0	1				1	1
0	0	0					

A las filas que no hemos decidido les aplicamos la regla 3 (cuando el antecedente de una fórmula es falso, el condicional es verdadero) para el condicional de A y B Obtenemos:

A	B	C	$((A \rightarrow B)$	$\rightarrow$	C)	$\rightarrow$	$(A \vee C)$
1	1	1				1	1
1	1	0				1	1
1	0	1				1	1
1	0	0				1	1
0	1	1				1	1
0	1	0	1				
0	0	1				1	1
0	0	0	1				

Finalmente, el condicional restante no cumple ninguna de las reglas para el condicional, por lo que aplicamos la regla 7 (si una regla no se cumple, el valor de verdad es el contrario al que las reglas indican para la conectiva), colocando el valor contrario a las reglas del condicional.

Ya que las reglas del condicional indican casos verdaderos, su incumplimiento indica casos falsos:

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$
1	1	1				1	1
1	1	0				1	1
1	0	1				1	1
1	0	0				1	1
0	1	1				1	1
0	1	0	1	0			
0	0	1				1	1
0	0	0	1	0			

Una vez determinado como falso, aplicamos lar regla 3 para antecedentes falsos.

A	B	C	$((A \to B)$	$\to$	C)	$\to$	$(A \vee C)$
1	1	1				1	1
1	1	0				1	1
1	0	1				1	1
1	0	0				1	1
0	1	1				1	1
0	1	0	1	0		1	
0	0	1				1	1
0	0	0	1	0		1	

6. La fórmula es una tautología.

En un primer momento, puede parecer que no hay gran diferencia entre ambos métodos. Sin embargo, recordemos que el paso 5 del algoritmo tradicional indica que debemos contrastar cada una de las interpretaciones posibles para cada función, es decir, debemos evaluar cada interacción entre fila y columna presente en la tabla; esto es, 32 comparaciones. El método ofrecido ha decidido la fórmula omitiendo más de la mitad de la información, además, no tiene un orden fijo para el inicio de la evaluación y ésta puede realizarse a partir de la conclusión o de las premisas. Sin embargo, el lector familiarizado con estos temas notará que hay un elemento no descrito en el ejemplo mostrado, esto es, los criterios de elección para el inicio del método.

Las estrategias heurísticas no se limitan a la reducción del trabajo en el método, sino que se pueden aplicar al modo en que el método puede ser aplicado. En el ejemplo se pudo elegir iniciar por el condicional de A y B, y a partir de esa elección ir aplicando las otras reglas, en contraposición, se eligió iniciar por la conclusión. La elección, como ya se mencionó, no fue arbitraria, sino que se basó en otras estrategias heurísticas. Estas estrategias pueden caracterizase como guías de elección, que nos indicarán cómo iniciar los métodos. En el caso del método de tablas de verdad podemos formular las siguientes heurísticas:

1. Elección 1: Si la conectiva de la conclusión de un argumento es una disyunción o un condicional, inicia por la conclusión del argumento aplicando las reglas 2, 3 o 4.
2. Elección 2: Si dos premisas atómicas son relacionadas por el condicional o la conjunción y, además una de ellas fue determinada mediante la primera iteración (la primera mitad de sus valores son "1" y la segunda mitad "0") inicia con la regla 3 o la regla 1.
3. Elección 3: Las proposiciones atómicas de las iteraciones 1 y 2 siempre determinan una mayor cantidad de casos, inicia por las secciones de la tabla que las relacionen.
4. Elección 4: Siempre que tengas dudas sobre el inicio elige las secciones con menos símbolos. Si la conclusión del argumento es una premisa atómica inicia por la conclusión. Si la conclusión tiene más relaciones que las premisas, inicia por las premisas.

Recomendaciones para el docente:

- El uso del pizarrón permite omitir las columnas de asignación y colocar los valores directamente debajo de las proposiciones; realiza este método, pero hasta el momento en que los alumnos ya se han familiarizado con el procedimiento (no importa si es el clásico o el propuesto), la finalidad es disminuir la cantidad de símbolos en los que deben concentrarse
- El método de tablas presentado es parcial, pero puede emplearse para concluir toda la tabla. Un ejercicio puede ser concluir el resto de la tabla

- Usa colores o indicadores (flechas o marcas) que indiquen al alumno qué parte de la tabla se está resolviendo
- Usa diferentes tipos de paréntesis para simplificar la identificación de jerarquías de operaciones
- Diferencia los símbolos de la conjunción. Es preferible emplear & porque no se confunde con el símbolo de la disyunción.
- No uses como ejemplo argumentos con más de 4 proposiciones diferentes, en lugar de ello es preferible tener una mayor variedad de conectivas (agregar más columnas en lugar de filas).

En conclusión, el método de tablas de verdad es el primero que se aprende comúnmente, sin embargo, el crecimiento exponencial de la función vuelve complicado decidir argumentos a partir de 5 proposiciones atómicas, donde el valor del tamaño de la función será de 32 filas o interpretaciones y un mínimo de 4 columnas o relaciones; esto sumaría un total de 128 comparaciones como mínimo. El algoritmo clásico sería muy extenuante, pero la metodología propuesta, tomando en cuenta las heurísticas de elección, lo puede simplificar bastante. Aun así, si lo que nos interesa es decidir la validez de un argumento, en otras palabras, saber si es tautológico, contingente o contradictorio, podemos valernos de un método más potente para la decisión de este. Dicho método es conocido como reducción semántica, dónde, para saber si un argumento es válido, suponemos que es inválido y, posteriormente, buscamos una contradicción. Para saber si es contradictorio, suponemos que es verdadero y buscamos una contradicción. A continuación, profundizaremos más en este tema.

3.3.2 Reducción al absurdo

Las reducciones semánticas son métodos mediante los cuales suponemos valores de verdad de una interpretación posible para una fórmula. El procedimiento es por contradicción, si queremos demostrar que un argumento es válido, suponemos el caso en el que no lo es y si encontramos una contradicción habremos mostrado que nuestra suposición de invalidez no puede ser construida, es decir, el argumento es válido. Por el contrario, si queremos mostrar que un argumento es contradictorio, lo supondremos como verdadero y si encontramos una contradicción sabemos que no existe interpretación alguna que vuelva verdadero dicho argumento. Si al aplicar ambos procedimientos a una fórmula no se encuentra contradicción alguna, la fórmula será contingente.

Para los cursos regulares, interesa decidir si el argumento es válido o no. Cuando un argumento es contingente es inválido, del mismo modo que cuando es contradictorio. Ya que el interés se concentra solamente en la validez de los argumentos y no en la decisión del carácter de una fórmula (si es tautológica, contingente o contradictoria), los cursos suelen centrarse solamente en la reducción del argumento evaluándolo como inválido. Este método es conocido como reducción al absurdo.

A diferencia de la elaboración de una tabla de verdad, el procedimiento de reducción al absurdo es mucho más sencillo. El algoritmo que describe el procedimiento es el siguiente:

1. Identificación de la conectiva principal, será la exterior a los signos de agrupación.
2. Identificación del caso o casos que hacen falsa a la fórmula.
3. Asignación de los valores de verdad correspondientes al caso identificado en el punto 2, falseando la conectiva principal.
4. Siempre que se ha designado el valor para una fórmula atómica, este valor debe ser sustituido en cada aparición de dicha fórmula.
5. Siempre que se ha designado el valor para una conectiva lógica, debe investigarse el caso o casos mediante los cuales dicha fórmula adquiere el valor designado.
6. Si se da el caso descrito en el punto 5 y dicha conectiva tiene más de una interpretación mediante la cual puede asignársele el valor designado por la suposición, debe realizarse cada una de las suposiciones.
7. Los pasos 4, 5 y 6 deben aplicarse hasta que la fórmula sea decidida.
8. El procedimiento termina cuando se han revisado cada una de las posibles asignaciones de verdad para el caso supuesto. Si hay contradicción es válido, sino la hay, no lo es.

A continuación, se realizará el método.

Ejercicio. Mediante una reducción al absurdo, muestra que el siguiente argumento es inválido o válido, según sea el caso.

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E)))\ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1. La conectiva principal es el condicional que tiene como consecuente a la disyunción entre la negación de B y E.
2. El condicional es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.
3. Se asignan los valores anteriores. Resulta:

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E)))\ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1 0 0

4. Se han designado los valores de la conjunción y la disyunción. Dichos valores se satisfacen cuando las partes de la conjunción son verdaderas y ambas partes de la disyunción son falsas.
5. Realizamos las asignaciones correspondientes:

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E)))\ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1 1 **1** 0 **0** 0 **0**

6. En el paso anterior decidimos el valor de la proposición E. Asignamos dicho valor a cada aparición de la fórmula.

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E)))\ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1 0 1 1 0 0 0 0

7. En 5, decidimos que las partes de la conjunción principal en las premisas deben ser verdaderas. Sus partes son, a su vez, verdaderas, por lo que sus partes también deben serlo. Por otra parte, la negación de B es falsa, por lo que B es verdadera. Asignamos los valores correspondientes:

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E)))\ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1 1 **1** 0 1 1 1 **1** 0 0**1** 0 0

8. Ahora hemos decidido el valor de B, podemos asignarlo a sus apariciones. Ya que una aparición está negada, asignamos también el valor de la negación.

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E))) \ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1 **01** 1 1 0 1 1 1 1 0 01 0 0

9. Además, en el paso 7, hemos decidido que la negación de D es verdadera, por lo que D es falsa. Podemos asignar también ese valor.

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E))) \ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1 01 1 **0** 1 0 1 **0** 1 1**0** 0 01 0 0

10. En el paso 9 decidimos una parte de una disyunción (la de la negación de A y D) y la disyunción ya había sido designada como verdadera. Para conservar dicha asignación la negación de A debe ser verdadera, por tanto, A será falsa. Realizamos dicha asignación.

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E))) \ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1**0** 1 01 1 0 1 0 1 **10** 1 0 1 10 0 01 0 0

11. Al realizar la asignación, decidimos una parte del condicional en que la negación de A es verdadera. Para conservar dicha asignación, el consecuente debe ser verdadero. Ya que una parte del consecuente es falsa y se trata de una disyunción, la otra parte debe ser verdadera. La otra parte es la proposición C, podemos asignarla como verdadera en sus apariciones.

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E))) \ \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

10 1 01 1 **1** 1 0 1 **1** 0 1 10 1 0 1 10 0 01 0 0

12. Hemos decidido cada fórmula atómica, el resto será decidir las conectivas faltantes. Obtenemos:

$$(((\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)) \wedge (D \vee (C \rightarrow E))) \wedge ((\neg A \vee D) \wedge \neg D)) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

10 1 01 1 1 1 0 1 1 0 0 1 10 1 0 1 10 0 01 0 0

13. Buscamos en la asignación si hay valores contradictorios o casos imposibles. Si observamos la parte sombreada, notaremos que hay una disyunción cuyo valor es verdadero, pero sus partes son falsas (caso en que es falsa). Esto es una contradicción, luego, el argumento es válido.

Aunque el algoritmo de la reducción al absurdo parece haberse resuelto en más pasos, en realidad su ejecución es óptima en comparación a la elaboración de una tabla de verdad parcial. El algoritmo en sí mismo ya es rápido, sin embargo, puede optimizarse ligeramente si se le agregan un par de heurísticas, en este caso se requiere una heurística corporizada que consiste en modificar la presentación de la información. Para este caso se sugiere que el paso 1, de identificación de conectiva principal, sea modificado.

En primer lugar, conviene recordar que la presentación de los argumentos en este método está dada por la siguiente estructura sintáctica:

$$(\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&\, \alpha_3 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_n) \rightarrow \beta$$

Donde alfa representa proposiciones cualesquiera y beta representa la conclusión del argumento. En este punto pueden agregarse diferentes tipos de signos de agrupación como una heurística corporizada orientada a identificar qué proposiciones están relacionadas entre sí. Sin embargo, esto no es suficiente, pues la presentación del argumento puede modificarse aún más. Como puede verse, las premisas del argumento están agrupadas por medio de conjunciones. En este caso, podemos introducir la que después será caracterizada como una regla de inferencia, a saber, la regla de la simplificación o eliminación de la conjunción con la finalidad de lograr:

1. Reducir la cantidad de símbolos del problema
2. Introducir la notación de los temas siguientes (deducción natural) así como la noción intuitiva de simplificación.

La heurística consiste en lo siguiente:

- Indicar al alumno que separe en un renglón diferente cada fórmula agrupada por una conjunción siempre y cuando ésta se encuentre en las premisas del argumento.

- La conclusión (consecuente del condicional), deberá colocarse a la derecha de las premisas, acompañada del símbolo “por lo tanto” ($\therefore$), o bien, bajo las premisas separándola mediante una línea.

El resultado será presentar el argumento bajo la estructura sintáctica que acostumbramos en deducción natural, obteniendo cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 & \\ \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \\ \dots & \\ \alpha_n & \therefore \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_n \\ \hline \beta \end{array}$$

El algoritmo seguirá el mismo procedimiento de asignación de valores de verdad, sin embargo, el procedimiento cambiará su estructura visualmente. Este tipo de heurística es corporizada, pues se enfoca en la presentación del problema y no en su solución.

Para optimizar el algoritmo, se deberán investigar las condiciones de verdad de cada una de las fórmulas separadas. Este procedimiento se realizará simultáneamente, es decir en un solo paso. Con ello, se busca identificar los puntos clave que permiten resolver el problema. Cada que realicemos una asignación, investigaremos las condiciones de verdad resultantes. Asimismo, siempre que encontramos una negación, colocamos el valor de verdad correspondiente a la fórmula con la que interactúa (cuando sabemos el valor de la negación) o a la negación (cuando sabemos el valor de la fórmula). Resolveremos el mismo ejercicio del algoritmo clásico para observar las diferencias.

Ejercicio. Mediante una reducción al absurdo, muestra que el siguiente argumento es inválido o válido, según sea el caso.

$$([\{\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)\}\&\{D \vee (C \rightarrow E)\}]\&\{(\neg A \vee D)\&\neg D\}) \rightarrow (\neg B \vee E)$$

1. Separamos cada conjunción de las premisas. Lo realizaremos respetando el orden de los signos de agrupación. Cada que separamos, eliminamos los signos de agrupación correspondientes.

$$[\{\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)\}\&\{D \vee (C \rightarrow E)\}]$$

$$\{(\neg A \vee D)\&\neg D\}$$

2. Como sigue habiendo conjunciones, volvemos a separar:

$$\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)$$
$$D \vee (C \rightarrow E)$$
$$\neg A \vee D$$
$$\neg D$$

3. Ya que hemos eliminado las conjunciones, agregamos la conclusión.

   $\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)$

   $D \vee (C \rightarrow E)$

   $\neg A \vee D$

   $\neg D \qquad \therefore \quad \neg B \vee E$

4. Ahora que hemos separado las fórmulas asignamos los valores de verdad. La fórmula de la conclusión debe ser falsa y las fórmulas de las premisas deben ser verdaderas de acuerdo con la suposición del método.

   $\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)$

   1

   $D \vee (C \rightarrow E)$

   1

   $\neg A \vee D$

   1

   $\neg D \qquad\qquad \therefore \neg B \vee E$

   1 0

   Investigamos la cantidad de casos disponibles en que se satisface la asignación realizada

   $\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)$ **Tres casos**

   1

   $D \vee (C \rightarrow E)$ **Tres casos**

   1

   $\neg A \vee D$ **Tres casos**

   1

   $\neg D$ **Un caso** $\qquad \therefore \neg B \vee E$ **Un caso**

   1 0

5. Comenzamos con las fórmulas que tienen menos casos, realizamos las asignaciones que satisfacen el valor de verdad. Una vez obtenidos los valores, se asignan aquellos que sean de fórmulas atómicas a las apariciones de esas fórmulas. Ya que habrá asignaciones, la cantidad de casos posibles que satisfacen las suposiciones cambiará:

   $\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)$ **Tres casos**

   1 01

   $D \vee (C \rightarrow E)$ **Un caso**

   0 1 0

   $\neg A \vee D$ **Un caso**

   1 0

   $\neg D$ **Determinada** $\therefore \neg B \vee E$ **Determinada**

   10 01 0 0

6. Una vez realizada la asignación, investigamos las condiciones de verdad para las fórmulas restantes.

$\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)$ **Tres casos posibles**

1 01

$D \vee (C \rightarrow E)$ **Satisfacible cuando el condicional es verdadero**

0 1 0

$\neg A \vee D$ **Satisfacible cuando la negación de A sea verdadera**

1 0

$\neg D$ **Determinada** $\therefore \neg B \vee E$ **Determinada**

10 01 0 0

7. Asignamos los valores que satisfacen a las fórmulas que ya podemos decidir, cuando una de ellas sea atómica, asignamos dicho valor a sus apariciones en otras fórmulas. Investigamos las condiciones de verdad resultantes.

$\neg A \rightarrow (\neg B \vee C)$ **Satisfacible cuando C es verdadera**

10 1 01 1 **1**

$D \vee (C \rightarrow E)$ **Satisfacible cuando C es falsa**

0 1 **0** 1 0

$\neg A \vee D$

10 1 0

$\neg D$ $\therefore \neg B \vee E$

10 01 0 0

8. Llegados a ese punto, hemos encontrado dos condiciones contradictorias, por una parte, C debe ser verdadera y por otra falsa. Con esto probamos que el argumento es válido.

Ahora que hemos realizado el método, hemos logrado optimizarlo con una reducción de pasos. El procedimiento de análisis de condiciones de verdad de las fórmulas requiere que el alumno comprenda las funciones de verdad de los conectivos básicos. Si el alumno comprende bien las funciones y las aplica en cada uno de los pasos, las condiciones para satisfacer las fórmulas se irán reduciendo. Este método termina cuando se encuentran condiciones contradictorias, a saber, que una condición es contradictoria con otra. Con esto ya no es necesario realizar la asignación de verdad. Asimismo, el poder visualizar la información separada permite trabajar con fórmulas pequeñas de forma independiente, minimizando el esfuerzo y obteniendo los mismos resultados.

Ya que la estructura del método es siempre la misma, el procedimiento puede volverse mecánico con lo que al cabo de un poco de práctica el alumno podrá decidir argumentos cada vez más complejos.

Ya que el objetivo principal de un curso regular es decidir la validez de los argumentos, y no decidir si son contradictorios, no explicaré el método de reducción a lo verdadero[16], pero basta suponer que para este método se busca lograr que el condicional principal de un argumento sea verdadero, en cuyo caso se requieren 3 interpretaciones. Además, es importante señalar que este método, y el de reducción a lo verdadero, permiten

[16] El método es igual a la reducción a lo absurdo, salvo que en él se supone el o los modelos que harían verdadero a un argumento. Cuando queremos decidir si un argumento no es contradictorio, debemos emplear este método, cuando no es posible construir un modelo o interpretación en que el argumento sea verdadero, sabremos que es contradictorio. Si es posible construir el modelo y, al mismo tiempo, podemos construir un modelo que haga falsa a la fórmula, habremos mostrado que el argumento en cuestión es contingente.

decidir cualquier fórmula no importando cuál es su conectiva principal, para ello simplemente deben de investigarse los casos característicos de cada método, para la reducción al absurdo falsear la fórmula, para la reducción de lo verdadero hacerla verdadera.

Finalmente, se tienen las siguientes estrategias heurísticas de decisión:

1. Elección 5: Inicia por la asignación con menos casos a satisfacer. Si la suposición es que la fórmula es verdadera, comienza con las conjunciones, luego los bicondicionales y después disyunción o implicación. Si la suposición es que la fórmula es falsa, inicia por el condicional o la disyunción, luego bicondicionales y después conjunciones.
2. Elección 6: Si inicias por la fórmula con menos casos, su determinación podrá determinar partes de otras fórmulas, siempre elige la que tenga menos casos después de cada asignación.

Recomendaciones para el docente:

- La regla de simplificación se puede explicar intuitivamente, pero no hay que indicarla todavía como una regla de inferencia, sino como un recurso que puede aplicarse *únicamente* a las conjunciones.
- Prueba cambiar la conectiva principal, presenta el problema en la forma "¿pueden las siguientes proposiciones ser verdaderas al mismo tiempo?"
- Guía a los alumnos con el apoyo de las siguientes preguntas: "¿qué asignación hace que la siguiente fórmula sea falsa?", "¿Qué casos hacen falsa a la conectiva?", etc. deben ser preguntas abiertas, no inductivas preferentemente.
- Varía los ejercicios, por ejemplo, ofrece el argumento, pero indica que una proposición atómica será siempre verdadera o falsa (No uses la notación para constantes de verdad), este recurso le ayudará al alumno a ver el modo en que una asignación modifica las condiciones de un problema.

En conclusión, el método de Reducción al absurdo ya es óptimo, pero un ligero cambio en su presentación puede ayudar significativamente. En primer lugar, hay una reducción de símbolos y el procedimiento se concentra en casos por fórmula, reduciendo el tiempo del ejercicio. El método propuesto se basa en la comprensión del problema y el planteamiento de las condiciones que lo solucionan. El método mediante la búsqueda de condiciones se apoya en la heurística de elección de la fórmula con menos casos (a menos casos es mayor la posibilidad de determinar otra fórmula del problema), y la heurística corporizada de reescritura de la información; esto es, pasar de un argumento con muchos signos de agrupación a uno con menos signos y en diferentes filas.

3.4 Estrategias heurísticas para la deducción natural

Se conoce como deducción natural a la demostración de argumentos mediante reglas sintácticas, teoremas que han sido probados en el sistema. Estos temas suelen ser más complicados porque, a diferencia de los anteriores, no emplean valores de verdad sino la obtención de nuevas fórmulas a partir de las fórmulas del argumento.

Los temas de deducción natural son completamente simbólicos, no se hacen evaluaciones de las proposiciones en los términos semánticos y, aunque se hicieran, estas evaluaciones sólo nos dirían que la relación expresada en el argumento es válida, pero no cuenta con una demostración "argumentada" formalmente. Que una demostración esté argumentada formalmente quiere decir que se han empleado teoremas (reglas) que muestran cómo es que la conclusión se obtiene de las premisas.

Llegados a este punto, cabe señalar que contamos con dos tipos de reglas, las primeras son de inferencia y nos ayudan a obtener fórmulas nuevas a partir de las fórmulas con las que ya contamos; las segundas son de equivalencia y nos ayudan a obtener fórmulas nuevas, pero que son equivalentes a alguna de las fórmulas con las que contábamos[17]. Lo habitual sería ir realizando demostraciones mediante las reglas de inferencia y una vez dominadas agregar las reglas de equivalencia para dotar al alumno de un mayor catálogo de estrategias.

Asimismo, una posible estrategia sería comenzar con inferencias sencillas que requieran sólo de las reglas de simplificación y las reglas de la implicación, una vez comprendidas agregar reglas para la disyunción y finalizar con los dilemas constructivos y destructivos. Esta estrategia puede ser suficiente, y normalmente lo es ya que no implica dar el catálogo completo de reglas y que el alumno "se las arregle" para realizar las demostraciones.

[17] Podemos decir que las reglas de equivalencia son una especie de reescritura de una relación o una forma de definir una fórmula en términos de otras conectivas diferentes. Esto es válido porque tienen el mismo contenido semántico, es decir, comparten la misma función de verdad.

Del mismo modo, las reglas de equivalencia pueden enseñarse introduciendo primero ejercicios donde los alumnos transformen fórmulas (sin que esto implique que realice demostraciones). Estas reglas también pueden clasificarse y se pueden establecer estrategias para su enseñanza mediante recursos visuales. En el primer subapartado ofreceré una forma de explicar las diferentes reglas, en el siguiente subapartado explicaré en términos generales en qué consisten los diferentes métodos de demostración y, finalmente, propondré una alternativa didáctica que consta de un único método de demostración que combina las virtudes de los diferentes métodos.

3.4.1 Explicación de reglas de inferencia y equivalencia

A continuación, explicaré el funcionamiento de las diferentes reglas de equivalencia e inferencia. Para las reglas de equivalencia expondré primero la regla y después los pasos para la obtención de una fórmula equivalente a partir de una fórmula dada. Del lado izquierdo del bicondicional (≡) estará la fórmula de partida mientras que del lado derecho (indicado por un asterisco) estarán las fórmulas obtenidas a partir de cada paso. Para las reglas de inferencia ofreceré un ejemplo de lenguaje natural en los casos que suelen causar mayor confusión.

1. Doble negación:

$$\sim\sim P \equiv P$$

Cuando tengas dos negaciones consecutivas y que no estén separadas por signos de agrupación puedes eliminarlas[18]

2. Ley de De Morgan:

$$\sim(P \& Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \& \sim Q$$

Las leyes de De Morgan pueden entenderse como reglas que transforman una disyunción en una conjunción y viceversa, para ello se emplean las negaciones. El procedimiento es sencillo:

[18] Aunque no se "eliminan" propiamente hablando, hay que recordar que los alumnos tienen una formación en matemáticas que emplea el verbo "Cancelar" para referir reducciones de fórmulas. No es conveniente precisar demasiado en asuntos semánticos de este tipo, lo que es importante es que el alumno comprenda que puede dar ese paso en el que reduce una fórmula a otra más sencilla.

- Señala la disyunción o conjunción deseada, y en una nueva fórmula cámbiala por la correspondiente:

$$P \vee Q \equiv P\&Q *$$ [19]

$$P\&Q \equiv P \vee Q *$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim(P\&Q) *$$

$$\sim(P\&Q) \equiv \sim(P \vee Q) *$$

- En la nueva fórmula colocaste las proposiciones relacionadas, pero ahora debes negarlas:

$$P \vee Q \equiv \sim P\&\sim Q *$$

$$P\&Q \equiv \sim P \vee \sim Q *$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim(\sim P\&\sim Q) *$$

$$\sim(P\&Q) \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q) *$$

- Finalmente debes negar la fórmula obtenida por completo, si no tiene signos de agrupación, colócalos:

$$P \vee Q \equiv \sim(\sim P\&\sim Q) *$$

$$P\&Q \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q) *$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim\sim(\sim P\&\sim Q) *$$

$$\sim(P\&Q) \equiv \sim\sim(\sim P \vee \sim Q) *$$

Recuerda que las dobles negaciones "~~" son equivalentes a una afirmación, no olvides eliminarlas:

$$P \vee Q \equiv \sim(\sim P\&\sim Q) *$$

$$P\&Q \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q) *$$

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P\&\sim Q *$$

$$\sim(P\&Q) \equiv \sim P \vee \sim Q *$$

[19] El asterisco indica que es la fórmula obtenida según la evolución de pasos. Para seguir el procedimiento, véase los cambios en la fórmula marcada por el asterisco, para ver el origen de la fórmula véase la parte izquierda del bicondicional.

3. Implicación material

$$P \to Q \equiv \sim P \vee Q$$

La implicación material cambia de disyunción a implicación y viceversa.

- Toma la primera sección de la fórmula (el primer disyunto o el antecedente) y niégalo:

$$P \to Q \equiv \sim P \to Q *$$

$$P \vee Q \equiv \sim P \vee Q *$$

$$\sim P \to Q \equiv P \to Q *$$

$$\sim P \vee Q \equiv P \vee Q *$$

- Finalmente cambia la conectiva de condicional a disyunción y viceversa:

$$P \to Q \equiv \sim P \vee Q *$$

$$P \vee Q \equiv \sim P \to Q *$$

$$\sim P \to Q \equiv P \vee Q *$$

$$\sim P \vee Q \equiv P \to Q *$$

4. Falsa implicación

$$P \& Q \equiv \sim(P \to \sim Q)$$

La falsa implicación cambia de conjunción a implicación y viceversa

- Primero niega la segunda parte de la fórmula, el consecuente o segundo coyunto:

$$P \& Q \equiv P \& \sim Q *$$

$$P \to Q \equiv P \to \sim Q *$$

$$\sim(P \& Q) \equiv \sim(P \& \sim Q) *$$

$$\sim(P \to Q) \equiv \sim(P \to \sim Q) *$$

- Cambia de conjunción a implicación según sea el caso:

$$P \& Q \equiv P \to \sim Q *$$

$$P \to Q \equiv P \& \sim Q *$$

$$\sim(P \& Q) \equiv \sim(P \to \sim Q) *$$

$$\sim(P \to Q) \equiv \sim(P \& \sim Q) *$$

- Finalmente, niega la fórmula completa, si no hay signos de agrupación, agrégalos:

$$P\&Q \equiv \sim(P \rightarrow \sim Q) *$$
$$P \rightarrow Q \equiv \sim(P\&\sim Q) *$$
$$\sim(P\&Q) \equiv P \rightarrow \sim Q *$$
$$\sim(P \rightarrow Q) \equiv P\&\sim Q *$$

5. Transposición

$$P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P$$

La regla es transparente, cambia el lugar del antecedente con el consecuente, pero niega ambas proposiciones.

6. Conmutación, asociación y agrupación:

Cuando las conectivas son disyunciones o conjunciones y son iguales, se pueden cambiar de lugar las proposiciones (conmutación), se pueden cambiar de lugar los paréntesis (asociación), y se pueden eliminar o agregar paréntesis como se desee (agrupación).

$P \vee Q \vee R \equiv P \vee R \vee Q$ Nota como la Q y la R cambiaron de lugar (conmutación)

$P\&(Q\&R) \equiv (P\&Q)\&R$ Nota como los paréntesis cambiaron de lugar (asociación)

$P\&Q\&R \equiv \{(P\&Q)\&R\}$ Nota como los paréntesis fueron agregados (agrupación)

7. Distribución

$$P \vee (Q\&R) \equiv (P \vee Q)\&(P \vee R)$$
$$P\&(Q \vee R) \equiv (P\&Q) \vee (P\&R)$$

La distribución puede aplicarse cuando una fórmula relaciona una premisa atómica con una compuesta siempre y cuando la relación principal sea una conjunción y la secundaria sea una disyunción, o bien, la disyunción sea la relación principal y la secundaria la conjunción.

- En primer lugar, tomaremos la proposición atómica y la colocaremos entre dos paréntesis diferentes:

$$P \vee (Q\&R) \equiv (P)(P) *$$
$$P\&(Q \vee R) \equiv (P)\ (P) *$$

- Agregamos la conectiva principal dentro de cada paréntesis:

$$P \vee (Q\&R) \equiv (P \vee)(P \vee) *$$
$$P\&(Q \vee R) \equiv (P\&)\ (P\&) *$$

- Dentro del primer paréntesis colocaremos la primera variable de la fórmula compuesta, la segunda la colocaremos dentro del segundo paréntesis:

$$P \vee (Q \& R) \equiv (P \vee Q)(P \vee R) *$$

$$P \& (Q \vee R) \equiv (P \& Q)\ (P \& R) *$$

- Finalmente, colocaremos la conectiva de la fórmula compuesta como conectiva principal (relacionando ambos paréntesis):

$$P \vee (Q \& R) \equiv (P \vee Q) \& (P \vee R) *$$

$$P \& (Q \vee R) \equiv (P \& Q) \vee (P \& R) *$$

Todas las reglas pueden hacerse en sentido contrario, en el caso de la distribución el proceso será:

- Toma la proposición que se repite y escríbela en una nueva fórmula:

$$(P \vee Q) \& (P \vee R) \equiv P *$$

$$(P \& Q) \vee (P \& R) \equiv P *$$

- Añade a la proposición la conectiva que la relacionaba:

$$(P \vee Q) \& (P \vee R) \equiv P \vee *$$

$$(P \& Q) \vee (P \& R) \equiv P \& *$$

- En un paréntesis agrega las proposiciones que se encontraban relacionadas con la proposición repetida:

$$(P \vee Q) \& (P \vee R) \equiv P \vee (QR) *$$

$$(P \& Q) \vee (P \& R) \equiv P \& (QR) *$$

- Relaciona las proposiciones del paréntesis mediante la conectiva principal de la fórmula original:

$$(P \vee Q) \& (P \vee R) \equiv P \vee (Q \& R) *$$

$$(P \& Q) \vee (P \& R) \equiv P \& (Q \vee R) *$$

8. Exportación

$$(P \& Q) \to R \equiv P \to (Q \to R)$$

- Cambia la primer conectiva (de derecha a izquierda) de conjunción a condicional, según sea el caso:

$$(P \& Q) \to R \equiv (P \to Q) \to R *$$

$$P \to (Q \to R) \equiv P \& (Q \to R) *$$

- A continuación, mueve de posición los paréntesis, si están a la izquierda muévelos a la derecha, si están a la derecha, muévelos a la izquierda:

$$(P\&Q) \rightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \rightarrow R) *$$
$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P\&Q) \rightarrow R *$$

9. Simplificación

1. $P\&Q$

____

2. P
3. Q

La regla de simplificación nos sirve para "separar" fórmulas unidas por la conjunción, la estrategia es sencilla, "Siempre que hay una conjunción como conectiva principal de una fórmula, puedes separar sus partes en nuevas premisas".

10. Conjunción

1. P
2. Q

____

3. $P\&Q$

La regla de la conjunción nos sirve pata "unir" premisas, la estrategia es sencilla, "Siempre que requieras unir dos premisas en una sola hazlo empleando la conjunción".

11. MPP, MTP

Las reglas de Modus Ponens (MPP) y Modus Tollens (MTT) son reglas para la "eliminación" del condicional. Funcionan como sigue:

1. $P \rightarrow Q$
2. P

____

3. Q

MPP: Si se tiene la implicación $(P \rightarrow Q)$ y en otra premisa se tiene el antecedente de esa implicación (P), puede eliminarse el condicional, como ya se contaba con P, ahora se cuenta con Q. Esto se puede leer:

“Cuando se habla de una causa y una consecuencia, y se comprueba la causa, se puede inferir la consecuencia”, es decir, “Si llueve, me mojo. Llueve. Por lo tanto, me mojo”

1. $P \rightarrow Q$
2. $\sim Q$

____

3. $\sim P$

MTP: Si se tiene la implicación $(P \rightarrow Q)$ y en otra premisa se tiene el consecuente negado de esa implicación $(\sim Q)$, puede eliminarse el condicional y obtener el antecedente negado. Esto se puede leer: “Cuando se habla de una causa y una consecuencia, y se comprueba que no se tiene la consecuencia, se puede inferir que tampoco se ha dado la causa (porque si la causa se diera, se daría también la consecuencia), es decir, “Si llueve, me mojo. No me mojé, No ha llovido”.

12. Silogismo disyuntivo:

1. $P \vee Q$
2. $\sim Q$

____

3. P

El silogismo disyuntivo es una regla que permite “eliminar” disyunciones. Para ello, cuando se tiene la disyunción $P \vee Q$ y la negación de alguno de los dos disyuntos (ya sea de P o de Q), se puede eliminar la disyunción y obtener el disyunto no negado. Esto se puede leer: “En una disyuntiva se tienen dos opciones, se sabe que una no fue elegida, por lo tanto, la otra disyunción debió haber sido elegida”, es decir, “O bien voy al cine o al parque. No fui al cine. Por lo tanto, fui al parque”.

13. Adición

1. P

____

2. $P \vee Q$

La regla de adición nos permite agregar información no contenida en las premisas (una nueva proposición) siempre y cuando esta sea añadida mediante una disyunción. Es recomendable su uso cuando la conclusión tiene proposiciones que no existen en las premisas.

14. Dilemas

Los dilemas pueden considerarse como versiones extendidas de modus ponens o de modus tollens según sea el caso. Veamos su funcionamiento:

Dilema constructivo:

1. $P \rightarrow Q$
2. $R \rightarrow S$
3. $P \vee R$

____

4. $Q \vee S$

Se puede leer como sigue, "Tenemos dos relaciones de causa y efecto (1 y 2) y además tenemos la disyunción de ambas causas (3), pero al ser una disyunción no sabes exactamente cuál de ellas tenemos. No podemos inferir ambas consecuencias, pero si sabemos que tenemos alguna de las dos causas, seguramente tendremos alguna de las dos consecuencias. Aunque no sabemos cuál (4). Es decir, "Si voy al cine, falto a mi cita con el doctor. Si voy al parque, falto a la escuela. O bien fui al cine o bien al parque. Por lo tanto, o falté a mi cita con el doctor, o falté a la escuela."

Dilema destructivo:

1. $P \rightarrow Q$
2. $R \rightarrow S$
3. $\sim Q \vee \sim S$

____

4. $\sim P \vee \sim R$

Se puede leer como sigue: "Tenemos dos relaciones de causa y efecto (1, 2) y, además, sabemos que alguno de los dos efectos no se dio (3). Si el efecto no se da, sabemos que no se da la causa, pero al no saber cuál de los dos efectos no se dio, no sabemos cuál de las causas no se dio. Pero sabemos que algún efecto no se dio, por eso podemos decir que alguna de las causas no se dará, aunque no sepamos cuál. Es decir: "Si voy al cine, falto a mi cita con el doctor. Si voy al parque, falto a la escuela. O bien no fui al cine o bien no fui al parque. Por lo tanto, o no falté a mi cita con el doctor, o no falté a la escuela."

Estas no son todas las reglas, pero son las más empleadas, además de que las otras pueden ser deducidas de las ya presentadas. Lo importante es notar que la explicación se dio en términos de guías del tipo “realiza x”, “identifica x”, “intercambia x”; lo importante a la hora de explicar las reglas no sólo es presentar su estructura a modo de formulario, es necesario describir la regla e indicar su función. Saber que las leyes de De Morgan permiten cambiar de una disyunción a una conjunción es muy importante porque da una pista sobre lo que podemos aplicar a las fórmulas que tienen esas conectivas en ellas. Explicar el Modus Ponens en términos de causa-efecto permite que el alumno lo asocie con la noción de consecuencia (que es lo que expresa el conectivo), a diferencia de simplemente decir “si P entonces, Q y luego P, por lo tanto, Q”, que para el alumno podría no decirle algo relevante porque en la lectura de la regla no es explícito que hay una relación de consecuencia.

La explicación de las reglas en términos que apoyen su aplicación por parte del alumno ya es una buena estrategia didáctica (aunque no necesariamente heurística[20]), porque dota al alumno de las herramientas que requiere para poder realizar demostraciones. Las estrategias propuestas para las reglas son las siguientes:

1. Explicar primero las reglas de equivalencia. Con esto se quita la carga de la indicación “demuestra el argumento”, concentrando la atención del alumno primero en la aplicación de las reglas, para que una vez las aplique adecuadamente pueda usarlas en una demostración.
2. Mostrar que las reglas de equivalencia pueden aplicarse a cualquier conectiva de una fórmula, no importando que no sea la principal. Por ejemplo:

- $\sim(P \rightarrow (P \vee R))$ aplicando implicación material en la disyunción obtenemos: $\sim(P \rightarrow (\sim P \rightarrow R))$
- $\sim(P \rightarrow (P \vee R))$ aplicando falsa implicación al condicional obtenemos: $P \& \sim(P \vee R))$

3. Usar colores o algún indicador visual que muestre los cambios que le ocurren a una fórmula en cada paso, por ejemplo, en un De Morgan:

   $\sim(P \rightarrow Q) \vee (P \equiv Q)$ Formula original

   $\sim(P \rightarrow Q) \& (P \equiv Q)$ Cambiamos disyunción por conjunción

   $\sim\sim(P \rightarrow Q) \& \sim(P \equiv Q)$ Negamos ambos coyuntos

[20] Podría no ser heurística cuando no se introducen elementos auxiliares, apoyos visuales u otro tipo de recursos que apoyen a la explicación. Por ejemplo: la repetición de las aplicaciones puede ser una buena estrategia didáctica, pero no es heurística.

$(P \to Q)\&{\sim}(P \equiv Q)$ Quitamos la doble negación

${\sim}\big((P \to Q)\&{\sim}(P \equiv Q)\big)$ Ponemos toda la fórmula entre paréntesis y la negamos

También se pueden emplear flechas para señalar el lugar de la fórmula que cambió.

4. Agrupar las reglas por tipos, por ejemplo, Ley de De Morgan, Implicación material, Falsa implicación, Equivalencia material y Exportación, son reglas en las que la conectiva cambia. En Conmutación, Agrupación, Asociación, Distribución[21] y Transposición no cambia la conectiva, sino el orden de las proposiciones o los paréntesis.
5. Explicar las reglas de inferencia mediante ejemplos sencillos de lenguaje natural. Por ejemplo, entender un Modus ponens es más sencillo con un ejemplo como "Si llego tarde, no tendré asistencia. Llegué tarde. Por lo tanto, no tendré asistencia" a la simple presentación de la regla. Los ejemplos de lenguaje natural clarifican las nociones porque son más cercanos al alumno en comparación con el lenguaje simbólico.

3.3.2 Métodos de demostración, estructura general

Las demostraciones en deducción natural pueden realizarse según distintas formas de prueba. Algunas de ellas son la prueba directa, por contradicción, prueba condicional y resolución[22]. Lo más común es que se inicie por el método de prueba directa, después el método de prueba condicional y finalmente por contradicción y resolución. Cada uno de los métodos tiene sus ventajas, por ejemplo, la prueba directa no emplea en la demostración la negación de lo que quiere demostrar, en cambio, el método de resolución cuenta con una única regla de inferencia.

A continuación, mostraré la estructura general de cada método y ofreceré recomendaciones (estrategias heurísticas) para su implementación.

[21] Como en cada generalización, hay excepciones. El caso de la distribución no cambia sus conectivas sino sólo el orden de las relaciones; no obstante, en tanto que una proposición se repite (o se reduce en sentido contrario), podemos decir que "hay algo más" que cambia, aunque esta discusión resulta poco relevante, lo importante de la clasificación de reglas es que el alumno identifique qué regla o reglas puede aplicar según el problema que enfrenta y las conectivas que aparecen en dicho problema.

[22] Hay algunas otras como refutación y árboles semánticos. Pero los métodos listados son los más comunes.

1. Prueba directa

El método de prueba directa parte del conjunto de premisas, después obtiene la conclusión buscada mediante inferencias. La estructura es la siguiente:

$$\text{Premisas}\begin{cases}\alpha_1\\ \dots\\ \alpha_n \qquad \therefore \beta \qquad \text{Conclusión}\end{cases}$$

$$-----$$

$$\text{Demostración}\begin{cases} Inferencia_1 \\ \dots \\ inferencia_n\end{cases}$$

$$\beta \qquad \text{Conclusión inferida}$$

Lo que el diagrama muestra es que de un conjunto de premisas dadas debe inferirse una conclusión. La conclusión se obtiene a partir de una serie de inferencias. Las inferencias son realizadas por medio de las reglas de inferencia y las reglas de equivalencia, es importante indicar que cada premisa se numera, así como cada inferencia, por lo que cada paso realizado debe indicarse mediante el nombre de la regla aplicada y el número de la prueba que le corresponde.

Las estrategias propuestas para este método son las siguientes:

1. Si hay premisas atómicas (P, Q, R, etc.) verifica si es posible realizar MPP, MTT o Silogismo disyuntivo (SD). Recuerda que en el caso de MTP la proposición debe ser la negación del consecuente, si la premisa es Q, puedes buscar una fórmula $P \to \sim Q$, y aplicar la regla. Lo mismo aplica para el Silogismo Disyuntivo.
2. Siempre que la conclusión tiene proposiciones que no están en el conjunto de premisas, esas proposiciones se obtienen empleando la regla de adición y, probablemente, algún silogismo disyuntivo.
3. Si tienes fórmulas de dos o más términos y están negadas, intenta usar las leyes de De Morgan (especialmente cuando la conectiva es disyunción) o Falsa implicación (cuando la conectiva sea implicación). Esto podría permitirte usar después simplificación o alguna otra regla. Por ejemplo:

   $\sim((P \to Q) \vee (P \equiv Q))$ Formula original

   $\sim(P \to Q) \& \sim(P \equiv Q)$ Formula después de De Morgan

   $\sim(P \to Q)$ Simplificación

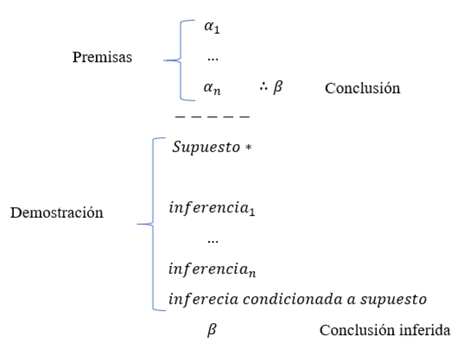
$P\&{\sim}Q$ Falsa implicación (volvimos a aplicar la estrategia)

P Ahora hemos obtenido una proposición atómica

4. Siempre que hay una fórmula en conjunción, intenta simplificarla, después verifica si puedes aplicar la estrategia 1.
5. Si no tienes muchas ideas de por dónde iniciar la demostración, intenta aplicar algunas reglas de equivalencia a la conclusión. Basado en la conectiva principal de la conclusión, piensa mediante qué reglas pudo haber sido obtenida. Si es un condicional, pudo ser un silogismo hipotético o una implicación material, independientemente de la respuesta correcta, tener una idea de qué reglas pueden anteceder a la conclusión ya representa una buena pista.
6. Observa las proposiciones que están en la conclusión, identifica en qué premisas se encuentran (no importa si están negadas o no), esto te puede dar una pista sobre qué reglas se pueden aplicar a las premisas. Analiza las premisas, así como analizaste la conclusión mediante la estrategia 5.

2. Prueba condicional

El método de prueba condicional introduce dos reglas, la primera será un *supuesto* que consiste en agregar una premisa adicional gracias a la cual se puede demostrar el argumento y, en algún punto de la demostración, se debe realizar una *condicionalización* mediante la cual, la inferencia queda condicionada al supuesto empleado previamente. Es importante señalar que este tipo de pruebas sólo pueden aplicarse en argumentos de los que se puede probar su validez (semántica) pero que el conjunto de premisas no es suficiente para demostrar la conclusión. Su estructura es la siguiente:



Lo que el diagrama muestra es que la conclusión se puede inferir, pero con el paso adicional de que se ha añadido una proposición que no existía en las premisas y que es necesaria para realizar la demostración, finalmente se condicionan las pruebas dependientes del supuesto y se infiere la conclusión (en caso de que no se haya inferido ya con la condicionalización). Hay que agregar que las inferencias condicionadas se indican con espaciado hacia la derecha (o una línea que las separa del resto de inferencias). Las estrategias propuestas para este método son las siguientes:

1. Si la conclusión tiene un condicional, agrega el antecedente de dicho condicional como premisa adicional, de este modo, cuando hagas la condicionalización el ejercicio quedará demostrado.
2. Si la conclusión tiene una disyunción, agrega como premisa adicional al primer disyunto negado.
3. Sigue las estrategias del método tradicional.

3. Prueba por contradicción

La prueba por contradicción es similar a la reducción al absurdo. Lo que se busca es satisfacer la condición que haría falso al argumento, esto es que las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Por esta razón, se agrega la conclusión negada y se realizan inferencias, si se encuentra cualquier contradicción, la conclusión se sigue por contradicción y el argumento es válido[23]. Su estructura es la siguiente:

$$\text{Premisas} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \qquad \therefore \beta \qquad \text{Conclusión} \end{array} \right.$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

$$\text{Demostración} \left\{ \begin{array}{l} Conclusión\ Negada * \\ inferencia_1 \\ \ldots \\ inferencia_n(contradicción) \end{array} \right.$$

$$\beta \qquad \text{Conclusión por contradicción}$$

Lo que el diagrama indica es que a la demostración se ha agregado la conclusión negada, posteriormente se realizan inferencias hasta que se obtiene una contradicción.

[23] Realmente no se sigue por la contradicción sino por el uso de las reglas de adición y el silogismo disyuntivo. Una vez que se tiene P y en otra premisa $\sim P$, se añade la conclusión a cualquiera de ellas por medio de la adición resultando $P \vee conclusión$. Como se cuenta con la negación de P, por silogismo disyuntivo se infiere la conclusión. Sin embargo, para ahorrar este proceso (que además sería repetitivo), conviene escribir la conclusión e indicar que se sigue por la contradicción hallada.

Finalmente se infiere la conclusión por la contradicción inferida a partir de las premisas y la negación de la conclusión. Las estrategias propuestas son las siguientes:

1. Al agregar la conclusión negada, si la conclusión no es una proposición atómica, emplea ley de De Morgan o Falsa implicación. El objetivo es aplicarle a la conclusión todas las reglas posibles a fin de reducir su complejidad o inferir sus proposiciones simples (negadas o no).
2. El objetivo no es demostrar la conclusión, tenlo en cuenta, sólo debes encontrar una contradicción. Para ello lo más sencillo es buscar inferir las proposiciones atómicas una a una hasta hallar una de ellas y su negación.
3. Una vez hallada la contradicción, no olvides colocar la conclusión en el paso siguiente e indicar que se ha obtenido por contradicción.
4. Para que no pierdas de vista las inferencias, señala con algún asterisco o flecha las proposiciones simples inferidas.
5. Las estrategias presentadas en el método de prueba directa también son útiles en este método.

4. Resolución

El método de resolución es similar al de la prueba por contradicción con la diferencia de que emplea solamente una regla de inferencia y unas cuantas reglas de equivalencia. El método consiste en escribir el argumento en su *Forma Normal Conjuntiva* (FNC) y posteriormente aplicar la única regla de inferencia. La estructura del método es la siguiente:

Premisas $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \quad \therefore \beta \end{array} \right.$ Conclusión

$- - - - -$

Demostración $\left\{ \begin{array}{l} Premisas\ definidas\ en\ disynción \\ \\ Premisas\ en\ FNC \\ Inferencia_1 \\ \ldots \\ inferencia_n(clausula\ vacía) \end{array} \right.$

β Conclusión por resolución

Lo que el diagrama indica es que primero se deben escribir todas las fórmulas empleando disyunciones y, cuando una fórmula compuesta esté negada, introducir las negaciones, para eso se emplean las siguientes definiciones:

- $\sim\sim P_{def} = P$
- $(P \to Q)_{def} = \sim P \vee Q$
- $\sim(P \to Q)_{def} = P \& \sim Q$
- $\sim(P \& Q)_{def} = \sim P \vee \sim Q$
- $\sim(P \vee Q)_{def} = \sim P \& \sim Q$
- $P \vee (Q \& R)_{def} = (P \vee Q) \& (P \vee R)$
- $(P \leftrightarrow Q)_{def} = (P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$
- $(P \leftrightarrow Q)_{def} = (\sim P \vee Q) \& (\sim Q \vee P)$
- $\sim(P \leftrightarrow Q)_{def} = (\sim P \& Q) \vee (P \& \sim Q) = (P \& \sim Q) \vee (\sim P \& Q)$

Una vez definidas todas las premisas como disyunciones, se realiza lo mismo con la negación de la conclusión. A continuación, se escribe el argumento en su *Forma Normal Conjuntiva*, esto es, como una serie de conjunciones cuyos coyuntos son formulas atómicas o su negación, o bien, fórmulas cuya conectiva es la disyunción.

Posteriormente, se aplica la regla de resolución que consiste en emparejar las cláusulas (coyuntos) que cumplen la forma:

$$(P_1 \vee P_2 \vee r \vee \dots \vee P_n)$$
$$(Q_1 \vee Q_2 \vee \sim r \vee \dots \vee Q_n)$$

Que cumplen con la condición de que una posee una fórmula que es la negación de una fórmula en otra cláusula. Al unirlas, las fórmulas, que eran la negación una de la otra, se eliminan creando una nueva cláusula. Como resultado se obtendrá una cláusula como sigue:

$$(P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \vee \; Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n \;)$$

El proceso se repite hasta que se infiere una cláusula vacía de la forma $\alpha \& \sim \alpha$. Si se puede inferir una cláusula vacía, el método estará concluido y la demostración realizada.

Las estrategias heurísticas para este método serán presentadas en el siguiente subapartado.

3.3.3 Algoritmo de resolución abreviado como primer método de demostración

El algoritmo o método de resolución ya fue explicado en el apartado anterior. En este apartado mostraré su implementación para, posteriormente proponer la forma abreviada del método.

Demostrar el siguiente argumento:

1. $\sim(B \leftrightarrow \sim D)\&\sim(\sim A\&\sim D)$
2. $\sim E$
3. $\sim(\sim E\&(\sim C \vee D)) \therefore \quad (\sim B \vee A)$

En primer lugar, definimos cada premisa en términos de la disyunción[24]:

4. $(\sim B \vee D)\&(\sim D \vee B)\&(A \vee D)$ def $\leftrightarrow$ en 1; def $\sim(\alpha\&\beta)$ en 1
5. $(E \vee (C\&\sim D))$ def $\sim(\alpha\&\beta)$ en 3; def $\sim(\alpha \vee \beta)$ en 3

La proposición 5 aún no se define por completo, el siguiente paso sería aplicar la definición distributiva:

6. $(E \vee C)\&(E \vee \sim D)$ def $\alpha \vee (\beta\&\gamma)$ en 5

Ahora negamos la conclusión y la definimos en términos de la disyunción:

7. $\sim(\sim B \vee A)$ Conclusión negada
8. $B\ \&\sim A$ def $\sim(\alpha \vee \beta)$ en 7

Ahora escribimos todo en FNC:

9. $(\sim B \vee D)\&(\sim D \vee B)\&(A \vee D)\&(E \vee C)\&(E \vee \sim D)\&B\ \&\sim A\&\sim E$ FNC

Agrupamos las cláusulas que cumplen la condición de tener dos fórmulas que son negación una de la otra:

10. $((B \vee \sim B)\&D)\&(\sim D \vee B)\&((\sim A \vee A)\&D)\&((\sim E \vee E)\&C)\&((\sim E \vee E)\&\sim D)$

Aplicamos resolución y reducimos todas las cláusulas de la forma $\sim\alpha \vee \alpha$:

11. $D\&(\sim D \vee B)\&\ D\ \&\ C\ \&\sim D$

Volvemos a aplicar el método hasta tener sólo proposiciones atómicas:

12. $((D \vee \sim D)\&B)\&\ D\ \&\ C\ \&\sim D$
13. $B\ \&\ D\ \&\ C\ \&\sim D$

Observamos cómo tenemos dos proposiciones atómicas que son la negación una de la otra. Esto es una cláusula vacía, por lo que el argumento queda demostrado.

Hasta este momento el algoritmo de resolución puede parecer más complicado. El paso adicional de colocar en FNC las fórmulas y luego emparejar las cláusulas mediante un

[24] La premisa 2 no es definida porque es una proposición atómica negada. Sólo se pueden definir las proposiciones compuestas o moleculares. Además, se han realizado las definiciones en un solo paso, asumiendo que el docente ha seguido la indicación de mostrar primero las leyes de equivalencia y que, al momento de la presentación del algoritmo, los alumnos ya dominan la transformación de fórmulas.

procedimiento similar a la distribución es confuso. Esta es una de las razones por las que puede parecernos menos atractivo. Además, el procedimiento incluye a la conclusión negada, por lo que no es diferente de una prueba por contradicción. Entonces, ¿por qué emplear este método? La razón no es trivial, si bien es cierto que el método contiene un par de pasos confusos, realmente tiene menos reglas, incluso las definiciones ofrecidas pueden acotarse a sólo 5 reglas de equivalencia y una regla de inferencia. Esto es, un método que demuestra cualquier argumento mediante 6 reglas.

Pero si esto no es suficientemente atractivo, se le pueden agregar un par de heurísticas para modificar la presentación del método. Por ejemplo, cuando los alumnos resolvían tablas de verdad se acostumbraron a ver las premisas del argumento unidas por varias conjunciones, después, en la reducción al absurdo, se acostumbraron a separarlas. El argumento de resolución está pensado para la inferencia lógica automatizada (véase Russell, S. J. & Norving, P. (2008)) y por eso se agrupan las fórmulas como conjuntos de cláusulas, pero para un alumno esto no es necesario. La propuesta de método abreviado consiste en lo siguiente:

1. Definir los conectivos en términos de la disyunción, para ello se proponen estas únicas reglas:

- Equivalencia material

$$P \leftrightarrow Q \equiv (\sim P \vee Q)\&(\sim Q \vee P)$$

- Ley de De Morgan

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P\&\sim Q$$

$$\sim(P\&Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

- Implicación Material

$$P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$$

- Distribución

$$P \vee (Q\&R) \equiv (P \vee Q)\&(P \vee R)$$

- Doble negación

$$\sim\sim P \equiv P$$

2. Agregar la regla de la simplificación, esto es, omitir el paso de la escritura en FNM y separar las fórmulas (aplicar simplificación) lo más posible (como en la propuesta de Reducción al absurdo).

3. Cambiar la regla de resolución por la regla de Silogismo Disyuntivo (SD).[25]
4. Indicar con color, flechas o asteriscos las formas atómicas afirmadas o negadas. Esto para poder identificarlas con rapidez a la hora de aplicar SD.
5. Indicar las siguientes propiedades (Opcional):

$$P\&Q\&R \equiv (P\&Q)\&R \equiv P\&(Q\&R)$$

$$P\&Q \equiv Q\&P$$

$$P\&P \equiv P$$

$$P \vee P \equiv P$$

$$P \vee (Q\&{\sim}Q) \equiv P$$

$$P\&(Q \vee {\sim}Q) \equiv P$$

A continuación, aplicaré el método abreviado al mismo ejercicio:

Demostrar el siguiente argumento:

1. ${\sim}(B \leftrightarrow {\sim}D)\&{\sim}({\sim}A\&{\sim}D)$
2. ${\sim}E*$ Marcamos la proposición[26]
3. ${\sim}\big({\sim}E\&({\sim}C \vee D)\big) \therefore \quad ({\sim}B \vee A)$

- En el primer paso aplicamos simplificación a 1 (recordemos que es más fácil trabajar con fórmulas pequeñas). Posteriormente será más sencillo aplicar De Morgan y Equivalencia Material:

4. ${\sim}({\sim}A\&{\sim}D)$ Simplificación en 1
5. ${\sim}(B \leftrightarrow {\sim}D)$ Simplificación en 1
6. $A \vee D$ * De Morgan en 4
7. ${\sim}\big(({\sim}B \vee {\sim}D)\&(D \vee B)\big)$ Equivalencia Material en 5

[25] En este punto puede suscitarse una discusión ya que la regla de resolución es la que le da el nombre al método. Sin embargo, considero que lo más relevante del método es justamente su reducción de la cantidad de reglas requeridas. Además, la misma regla de resolución se ve justificada asumiendo otras propiedades como la distribución para la obtención de una cláusula con la forma $\{p_1, p_2, \dots p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, \{\alpha, {\sim}\alpha\}\}$ para después reducirla por la regla $(\alpha \vee {\sim}\alpha) \equiv \top$ y al quedar en conjunción con el resto de las cláusulas, eliminarla mediante $\top \& \alpha \equiv \alpha$. Sin embargo, la aplicación de la regla de simplificación evita la distribución de la cláusula, con ello ya no se aplicarán las reglas para la tautología en negación y disyunción, sino que la fórmula y su negación serán eliminadas por medio del silogismo disyuntivo.

[26] Recordemos que una sugerencia es marcar proposiciones atómicas (negadas o no) para recordarnos que con ellas ya estamos en posibilidad de aplicar SD. En este caso, si encontramos la proposición E en disyunción con otra fórmula, podemos reducirla:

Notamos que ha resultado una negación exterior en 7, así que podemos aplicar De Morgan, al hacerlo quedarán negados los coyuntos que ya son disyunciones, por lo que podemos volver a aplicar De Morgan:

8. $\sim(\sim B \vee \sim D) \vee \sim(D \vee B)$ De Morgan en 7

De momento 8 es algo compleja, por lo que seguiremos con la proposición 3. Hay que indicar que para reducir 8 debemos encontrar $\sim B \vee \sim D$ o bien $D \vee B$

9. $E \vee \sim(\sim C \vee D)$ De Morgan en 3
10. $\sim(\sim C \vee D)$ SD en 2 , 9
11. $C \,\&\sim D$ De Morgan en 10
12. C * Simplificación en 11
13. $\sim D$ * Simplificación en 11

Ya que agotamos nuestras premisas, agregamos la conclusión negada:

14. $\sim(\sim B \vee A)$ Conclusión negada
15. $B\&\sim A$ De Morgan 14
16. B * Simplificación 15
17. $\sim A$ * Simplificación 15
18. D * SD en 17, 6
19. $D\&\sim D$ Contradicción 18, 13

El método resulta más largo, pero la reducción de reglas permite que el alumno concentre su atención sólo en pocas reglas y un único objetivo, reducir fórmulas hasta hallar una contradicción. Por supuesto, el desarrollo fue lineal, para mejorarlo se sugieren las siguientes estrategias:

1. Siempre inicia por la negación de la conclusión y redúcela lo más posible.
2. Inicia con las premisas que compartan proposiciones con la conclusión, las contradicciones se dan a partir de la negación de la conclusión por lo que es más probable encontrarla en premisas que comparten proposiciones.
3. Siempre que tengas una proposición atómica, verifica si no es la negación de otra proposición.
4. Da preferencia a las conectivas más sencillas y con menos paréntesis, en orden de prioridad inicia por premisas que tienen conjunción, condicional,

conjunciones o disyunciones negadas, fórmulas que se pueden distribuir, fórmulas con bicondicional.

Para ver cómo se mejora el algoritmo con estas indicaciones realizaré otro ejemplo con la diferencia de que haré los comentarios como nota al pie, indicando cómo se emplean las estrategias

Ejercicio. Demostrar el siguiente argumento:

1. $\sim(P \leftrightarrow \sim Q) \& \sim(\sim R \& \sim Q)$
2. $\sim S \rightarrow \sim(\sim T \vee Q)$
3. $\sim S$ $**$ $\therefore$ $\sim P \vee R$

----

4. $\sim(\sim P \vee R)$ Conclusión negada[27]
5. $P \& \sim R$ De Morgan, 4
6. P $**$ Simplificación, 5
7. $\sim R$ Simplificación, 5[28]
8. $\sim(\sim R \& \sim Q)$ Simplificación, 1 [29]
9. $\sim(P \leftrightarrow \sim Q)$ Simplificación, 1
10. $R \vee Q$ De Morgan, 9 [30]
11. Q $**$ SD 10, 7
12. $S \vee \sim(\sim T \vee Q)$ Implicación material 2[31]
13. $\sim(\sim T \vee Q)$ SD, 3, 13
14. $T \& \sim Q$ De Morgan 13
15. $\sim Q$ Simplificación 14
16. $Q \& \sim Q$ Contradicción 11, 15

De este modo queda demostrado el argumento. Ahora sin pasos innecesarios e incluso sin usar toda la información, pues omitimos la proposición del paso 9.

---

[27] Iniciamos con la conclusión negada

[28] Agotamos todo lo que se puede hacer con la conclusión, nota como se aplicaron simplificaciones siempre que se pudo

[29] Porque comparte premisas con la conclusión

[30] Lo preferimos porque es más sencillo hacer Ley de De Morgan que la equivalencia material y aumentar símbolos.

[31] La preferimos porque comparte variable con 3 y 11, además su conectiva principal es condicional.

En general este método es eficiente, se recomienda como primer método porque sirve para cualquier argumento de lógica proposicional y no hay que tener reserva en la dificultad de los ejercicios a diferencia del método directo en el que hay que ir introduciendo poco a poco las reglas de inferencia y limita mucho la cantidad de conectivas que tienen los ejercicios.

Lo interesante es que el alumno puede realizar demostraciones efectivamente. El darle un método con pasos fáciles de seguir y que no implican el uso de muchas reglas puede ayudar mejorando su autoestima, esto es, se le otorga un pequeño estímulo que consta de la satisfacción de poder realizar las demostraciones porque tiene un método que puede seguir y en el que se puede seguir con bastante facilidad los pasos (porque son pocas reglas).

Ahora bien, la intención de este método no es descuidar los otros métodos, sino que se busca que el alumno tenga éxito en las pruebas desde el inicio y, posteriormente, se le pueden ir dando el resto de las reglas y los métodos con la finalidad de hacerle ver que había más opciones, pero con la ventaja de que podrá siempre regresar a la versión sencilla de la demostración, una que le es familiar. Con esto se estimula a los alumnos a los que "se les da bien" la materia agregando cada vez más recursos, pero no se desatiende a los que tienen dificultades. La inclusión de este método promete reducir la brecha entre los alumnos. Y su principal ventaja con respecto del método de prueba directa es que en este método sí hay una clara indicación de cómo iniciar la demostración. Finalmente, se dejan las siguientes recomendaciones al docente:

- Iniciar con el método de resolución abreviado, continuar con la prueba por contradicción agregando las reglas de Modus Ponens, Modus Tollens y Silogismo Hipotético.
- Hay que indicar que hay otras reglas, como las propiedades listadas previamente o el resto de las reglas de inferencia y equivalencia, cuando la mayoría de los alumnos puedan mostrar un buen desempeño.
- Continuar el tema con el método de prueba directa, donde el reto es realizar la demostración sin el uso de la conclusión negada. Para este momento se espera un buen uso de las reglas de inferencia y equivalencia, además de nociones y estrategias de cómo ir avanzando en la demostración.

- Concluir con la prueba condicional para mostrar que no todos los argumentos válidos se pueden demostrar por prueba directa.

3.4 Traducción

Hasta ahora, hemos visto los aspectos semánticos y sintácticos de las técnicas lógicas. exploramos un par de algoritmos de decisión de fórmulas y una propuesta de algoritmo para la demostración de argumentos. Sin embargo, las proposiciones no siempre se nos presentan formalizadas, es más, casi siempre debemos traducirlas del lenguaje natural. En este apartado veremos cómo pasar del lenguaje natural al formal con el objetivo de mostrar un par de estrategias que nos sirvan de apoyo.

El lenguaje natural puede entenderse como aquel que usamos cotidianamente, puede ser inglés, español o algún otro tipo de idioma. El lenguaje de símbolos que usamos en la lógica es un lenguaje formal, construido a partir de unas reglas definidas en el propio sistema. Como todo lenguaje, el lenguaje formal tiene sus reglas de sintaxis que nos indican qué sucesiones de símbolos son correctas y cuáles no, así mismo, determina qué elementos pertenecen al sistema y cuáles no. En el caso de la lógica proposicional, en términos generales, se dice que "P es una proposición", así como su negación. Lo mismo ocurre para las proposiciones "P entonces Q", "P y Q", P o Q" y "P si y solo si Q". Finalmente, se define a una proposición como una afirmación que puede ser verdadera o falsa.

Ahora bien, es por esta definición que podemos hacer una traducción entre el lenguaje natural y el lenguaje de la lógica proposicional, esto se debe a que en el lenguaje natural tenemos un tipo de expresiones que cumplen con las características de una proposición, estas son las oraciones aseverativas o afirmativas. Discutir sobre si todas las proposiciones son oraciones es un asunto trivial (para esta investigación), ya que por ahora lo importante es comprender que podemos pasar de expresiones como "si llueve me mojo" a una fórmula "$P \rightarrow Q$", que representa formalmente la expresión entre comillas del lenguaje natural.

A este ejercicio lo denominamos traducción, ya que traduce las expresiones del lenguaje natural al lenguaje formal y viceversa. Llegados a este punto, podemos imaginar que como todo lo que hemos visto hasta ahora, hay reglas que debemos de cumplir. Así como las proposiciones formales tienen una asignación de posibles valores de verdad, estas pueden tener una asignación de una proposición del lenguaje natural que se define en un diccionario de traducción. Dicho de otro modo, las proposiciones formales nos sirven para representar proposiciones del lenguaje natural y para ello empleamos un diccionario de traducción que nos dice qué proposición está siendo representada. Del mismo modo, cada proposición formal (p, q, r, etc.) puede representar solamente a una proposición del lenguaje natural en un mismo argumento.

Finalmente, así como las proposiciones pueden ser representadas formalmente, las relaciones entre proposiciones también pueden ser representadas. Esta representación se da con base en la función que tiene la relación existente entre dos proposiciones, siguiendo las siguientes equivalencias:

- Condicional (→): Se formaliza con el símbolo del condicional material a todas las relaciones entre dos proposiciones que establecen que una se condiciona a la otra; ya sea que la primera condicione a la segunda, o la segunda condicione a la primera.
- Bicondicional (↔): Se formaliza con el símbolo del bicondicional a todas las relaciones entre dos proposiciones que establecen que la primera se condiciona a la segunda y la segunda se condiciona a la primera al mismo tiempo.
- Conjunción (&): Se formaliza con el símbolo de la conjunción a todas las relaciones entre dos proposiciones que establecen una relación de unión entre la primera y la segunda. En este rubro entran las listas, las comparaciones (pero, en cambio, sino, etc.) y las adiciones (aunado a, del mismo modo, asimismo, etc.).
- Disyunción (∨): se formaliza con el símbolo de la disyunción a todas las relaciones entre dos proposiciones en las cuales hay una bifurcación. Existen dos tipos, la primera es inclusiva y admite la verdad simultánea de las dos proposiciones relacionadas (o una pera o una manzana, o fui al cine o a la escuela, etc.). En cambio, la segunda, no admite la verdad simultánea de ambas proposiciones (o vivo o muero, o soy alto o soy bajo, etc.).
- Negación (¬): se formaliza con una negación toda partícula del lenguaje natural que cumple con la función de negar, o bien, se emplea una negación y una proposición para formalizar un antónimo. Por ejemplo, si "C: Luis es casado" para "Luis es soltero" usaremos $\neg C$.

Sin embargo, las indicaciones anteriores son insuficientes para realizar traducciones eficientemente. Las reglas son transparentes, pero su aplicación requiere práctica. En primer lugar, debemos lograr que el alumno comprenda que una proposición formal puede representar cualquier proposición del lenguaje natural sin importar su símbolo (puede ser p, a, z, g, etc.), y la relación entre una y otra quedará establecida por un diccionario de traducción que debe colocarse siempre entre nuestra proposición formal y nuestra proposición del lenguaje natural. Es decir, realmente no importa el símbolo que empleemos para hacer la traducción, lo que importa es que el símbolo cumpla con las reglas de la lógica proposicional (ser una letra del alfabeto) y que esté bien establecida su relación con la proposición que representa.

En segundo lugar, el alumno debe de comprender la diferencia entre proposiciones simples (un sujeto y un predicado), compuestas (un sujeto y dos predicados), y relacionales (una acción y dos sujetos que intervienen en ella). Las primeras se formalizan como una variable proposicional, las segundas usan conectivas lógicas y las terceras se pueden representar mediante conjunciones (aunque es poco práctico y no suele verse en este sistema lógico) o en el lenguaje de la lógica de predicados.

Además, las proposiciones que tienen negación se formalizan extrayendo la negación, por ejemplo, para la proposición "hoy no lloverá" usaremos el diccionario "P: hoy lloverá" y en nuestro argumento formal la representaremos como "$\neg P$".

Finalmente, el aspecto más complicado de la traducción no es hacer la representación simbólica, sino la comprensión de la proposición del lenguaje natural. Para ejemplificar esto podemos plantear una expresión ambigua como "me pegas y me enojo". Esta expresión está relacionada mediante una "y" de modo que rápidamente podemos formalizarla con una conjunción, sin embargo, la expresión también podría estar indicando una relación condicional, es decir, esta expresión puede significar lo mismo que la expresión "si me pegas, me enojo". Esta ambigüedad es propia de la proposición en lenguaje natural y para resolverlas debemos comprender (o al menos tratar) su significado con mucha claridad. Afortunadamente, no todas las expresiones son ambiguas, pero la relación entre ellas no siempre es clara. Por ejemplo, en una disyunción debemos identificar si es inclusiva o no y esto depende totalmente del significado de los disyuntos, si son antónimos sería exclusiva, pero para saber si son antónimos debemos remitirnos al significado de las proposiciones (ser soltero o ser casado, por ejemplo). Este mismo hecho afecta a otros símbolos gramaticales, las comas pueden representar una condición o una conjunción y la diferencia entre una y otra es la función que está cumpliendo. Es decir, si la coma es una lista, será una conjunción, pero si una de las partes que separa comienza con una partícula que exprese una condición (si, solo si, si solo, etc.), entonces será un condicional.

Del mismo modo, expresiones donde la dirección del condicional no es la habitual pueden ser confusas, por ejemplo, en la expresión "solo si me ayudas aprobaré el examen" no es muy transparente el sentido de la condición. Podemos usar el diccionario "a: me ayudas"; "e: apruebo el examen" y pretender formalizarlo en el orden en que aparecen en la oración, es decir como "$a \rightarrow e$" (si me ayudas pasare el examen), pero al compararla con la expresión original hay algo que falta. En la primera expresión es necesario recibir ayuda para aprobar, pero en la segunda no, y entonces nuestra formalización no es correcta. Para solucionar este problema debemos enfocarnos en el significado de la oración, en este caso la necesidad de la ayuda puede traducirse como "si no me ayudas, no aprobaré el examen", y en lenguaje formal sería "$\neg a \rightarrow \neg e$". Esta formalización, no obstante, tiene negaciones y podría confundirnos, pero si aplicamos la regla de transposición obtenemos $e \rightarrow a$, en cuyo caso podemos leerla como "si apruebo el examen, entonces me ayudaste". Comprobar que nuestra formalización es correcta es sencillo, pensemos en el caso en que ambas partes del condicional son verdaderas (aprobó el examen y recibió ayuda), esto satisface el sentido de la oración original, y lo único que podría negarla sería que nuestro estudiante ficticio pase el examen sin ayuda. Pero, al formalizar como lo hemos hecho, eso hace que nuestro antecedente sea verdadero, pero el consecuente falso, resultando claramente en la falsedad de la expresión. Es decir, sólo en el caso en que se recibió ayuda se pasó el examen (y también se contempla el hecho de que se puede reprobar aun recibiendo ayuda). Lo anterior es sólo uno de los casos donde debemos comprender bien la expresión condicional, otros ejemplos pueden ser oraciones condicionales con las partículas: "en cambio", "a menos qué", "cuando", etc.

Con esto, lo que quiero mostrar es que formalizar depende del conocimiento de las equivalencias de traducción (tanto para proposiciones como relaciones) y de la experiencia de quien realiza las traducciones. Claro que, como en los temas anteriores, hay algunas estrategias que nos serán de gran ayuda. Las estrategias siguientes son un ejemplo:

- Identifica si en las expresiones a formalizar hay antónimos, si los hay usa sólo un símbolo para ambos y la negación en uno de ellos. (si "S" representa ser soltero, usa "~S" para representar ser casado").
- Usa letras que te recuerden la expresión de lenguaje natural. Si formalizas "la puerta es azul o verde", usa "A" para azul y "V" para verde.
- Si un enunciado no es transparente, léelo varias veces e interpreta su significado. Puedes anotar tus opciones e ir descartando las que no logran describirlo adecuadamente.
- Para que los alumnos se familiaricen con la traducción, es recomendable usar ejercicios de traducción al mismo tiempo que se ven los otros temas. Por ejemplo, en la demostración se puede dar el argumento en lenguaje natural para que sea formalizado y demostrado. Otra práctica puede ser escribir en lenguaje natural cada uno de los pasos de nuestra demostración.
- Implementa gradualmente la notación de la lógica de predicados, pero sin indicar que se trata de ella. Por ejemplo, en la expresión "Luis huye de Juan" usa "H_{lj}" pero "sólo para recodar quién huye de quien". Esto puede ayudar en casos donde se tienen sólo dos acciones, pero varios sujetos que las cumplen (por ejemplo, 5 sujetos que mienten o dicen la verdad).

3.5 Conclusiones del capítulo

Al inicio del capítulo se mencionó que hay una diferencia entre aprender las técnicas lógicas y estudiar las propiedades lógicas. Si un alumno tiene deficiencias en el manejo de las técnicas lógicas (métodos de decisión, algoritmos de demostración, traducción, etc.) difícilmente podrá estudiar las propiedades lógicas y es probable que la bibliografía especializada le sea muy complicada. El problema es que las técnicas lógicas están muy ligadas al razonamiento matemático, lo que puede ocasionar que los alumnos que han tenido problemas con este tipo de razonamiento tengan un mal desempeño. En atención a este problema, durante todo el capítulo me enfoqué en ofrecer propuestas que modificaron el modo en el que tradicionalmente se aprenden distintas técnicas, como la elaboración de tablas de verdad, las traducciones semánticas y los métodos de demostración.

Asimismo, los métodos propuestos integran a las heurísticas del modo en el que han sido concebidas en los capítulos anteriores, es decir, fueron integradas para simplificar los algoritmos y mejorar su eficiencia, del mismo modo se agregaron en su versión corporizada modificando el modo en el que se presentaban distintos problemas y no en atención a su solución.

En general, se ofrecieron propuestas que reducían la cantidad de esfuerzo en la implementación de distintas técnicas, ya sea que se elaboraran tablas parciales de verdad o se implementara un algoritmo de resolución reducido. El objetivo de plantear estas técnicas bajo el objetivo de una reducción de pasos era ofrecer a los alumnos más avanzados técnicas más potentes, del mismo modo, se integraron estrategias que hicieran que los alumnos que presentan problemas pudieran aprender un método seguro que les garantizaba la solución del problema. Finalmente, se mostró una propuesta de elaboración de curso donde se proponía iniciar con ejercicios de equivalencias de fórmulas para que los alumnos tuvieran un acercamiento a su aplicación sin que esto implicara la carga de una demostración.

Por último, al final introduje las nociones de traducción en las cuales se hizo un especial énfasis en la comprensión de las expresiones antes de pasar a su simbolización. Si bien es cierto que ofrecían un par de estrategias que pueden ser de ayuda, esta actividad requiere de práctica constante por lo que se sugirió su integración a lo largo de todo el curso.

Lo mostrado en este capítulo, aunque muy técnico, es la primera parte de la inclusión de estrategias heurísticas para la didáctica de la lógica. En relación con las estrategias heurísticas, es importante recordar que estas surgen no sólo en el mejoramiento de algoritmos (técnicas lógicas en este apartado), sino que también tienen un importante impacto en la solución de problemas. En el capítulo siguiente exploraré el uso en el planteamiento y solución de problemas, mostrando como la integración de las estrategias propuestas en este capítulo, más el tratamiento de un problema mediante una metodología heurística (como la de Pólya) mejora nuestro rendimiento solucionando problemas más avanzados.

Capítulo 4: Integración de estrategias heurísticas

4.1 Introducción

En el capítulo anterior mostré distintas propuestas que servían para reducir la cantidad de esfuerzo empleado en distintos métodos de la lógica proposicional, entre ellos la elaboración de tablas parciales de verdad, la reducción al absurdo incorporando la regla de simplificación y el método de resolución abreviado. Sin embargo, el empleo de técnicas que reducen tiempo y obtienen el mismo resultado (decidir fórmulas o demostrar argumentos) no es equivalente a la adquisición de los conocimientos rigurosos del estudio de la lógica, aún en sus niveles iniciales. El hecho es que, es posible que seamos muy buenos aplicando las técnicas lógicas, pero no podamos resolver problemas que requieren razonamiento lógico. Esto se debe a que nos hemos concentrado mucho en los métodos y no a las variedades de problemas que los requieren para su solución.

Un caso análogo ocurre en matemáticas, podremos ser muy buenos resolviendo sistemas de ecuaciones, pero es probable que, si siempre lo hemos hecho con ecuaciones ya planteadas, al enfrentarnos a un ejercicio donde se requiere formalizar el problema (planteando ecuaciones) no logremos solucionarlo porque no entendemos que el problema muestra la relación entre dos variables en un mismo sistema. Pongamos un ejemplo de esto en lógica.

En los acertijos lógicos de caballeros y bribones se nos solicita determinar quién es Bribón y quién es Caballero con base en una frase dicha por ellos. Ya que sabemos que los caballeros siempre dicen la verdad y los bribones siempre mienten está claro que se trata de un ejercicio de decisión de fórmulas donde se deben satisfacer siempre las condiciones antes planteadas. Solucionar un problema de este tipo simplemente requiere que formalicemos las expresiones de los caballeros y los bribones y busquemos un modelo que satisfaga la condición de que las proposiciones de los caballeros son siempre verdaderas y las de los bribones son falsas.

¿En qué podría fallar un alumno? Lo primero en lo que puede fallar es que no comprende lo suficientemente bien qué es lo que debe de hacer, el alumno puede elaborar tablas de verdad (método seguro para este tipo de problemas) e incluso sabe hacer suposiciones de modelos pues las ha hecho en la reducción al absurdo, pero si no puede plantear el problema en forma adecuada no podrá solucionarlo, o bien le será muy difícil, o bien, lo solucionará por mera casualidad. Aunado a ello, es posible que lo solucione sin comprender con claridad cuál fue el razonamiento que lo ayudó a enfrentar el problema.

Lo anterior, entonces, implica que del uso de las herramientas lógicas (aún cuando es óptimo) no se sigue que seamos buenos razonadores lógicos. Un ejemplo de esto es que la prueba de Wason, que estudiamos en el primer capítulo, también era errado por personas dedicadas a la lógica formal (González, 2019). Así, el problema central es que conocer los métodos o técnicas lógicas no es suficiente para enfrentar problemas lógicos.

Para enfrentar este problema propondré la implementación del método de Pólya visto en el segundo capítulo. Con ello pretendo integrar las estrategias heurísticas orientadas a la solución de problemas, con las estrategias heurísticas orientadas al mejoramiento de métodos lógicos propuestas en el capítulo anterior. El objetivo es tratar de disminuir la brecha existente entre ser buen aplicador de métodos y un buen razonador lógico.

4.2 Resolución de problemas de lógica proposicional

Hasta ahora he mostrado que las heurísticas pueden entenderse como una clase de estrategias que aplicamos cuando requerimos respuestas rápidas, o bien, mejorar procesos. Estas estrategias pueden plantearse de diferentes formas, entre las que exploramos su versión como mejoradoras de procesos (algoritmo de búsqueda, reglas de ponderación en decisión, etc.), su versión corporizada (la integración de elementos perceptuales como el color, símbolos, etc.) y su versión como método solucionador de problemas (método de Pólya).

Recapitulando, la versión mejoradora de procesos incluía modos en los cuales podíamos realizar determinadas actividades ahorrando tiempo porque habíamos preferido una decisión sobre otra, este tipo de tipo de estrategias fueron aplicadas en el capítulo anterior para mejorar el método de tablas de verdad y el algoritmo de resolución. Si ponemos atención, la introducción heurística nos indicaba o sugería cómo empezar el método con la promesa de usar menos pasos y garantizar la solución.

Del mismo modo, la versión corporizada fue implementada en el algoritmo de resolución para que este nos fuera más sencillo de tratar, y lo mismo se aplicó al método de reducción al absurdo. En este caso, se trata de recursos que parecen triviales, pero como

Fonseca y González (2020) mostraron, este tipo de recursos pueden jugar un rol de importancia significativa.

Finalmente, el método de Pólya se concentraba en mostrar un modo en que se podían enfrentar problemas de demostración matemática, para los cuales se requiere tanto el conocimiento de las herramientas matemáticas, como la experiencia y pericia para su aplicación en toda clase de problemas. En este punto también distinguimos la diferencia entre los problemas del tipo "hallar" y "demostrar"; los primeros buscaban la satisfacción de una condición y los segundos el establecimiento de una relación matemática. En ambos casos, se requería de una buena argumentación.

El objetivo de este apartado es integrar estas tres características en la solución de problemas lógicos del nivel de la lógica proposicional, para ello emplearé ejercicios en los que destacaré las estrategias empleadas. Es importante aclarar que en este caso los problemas están en el nivel de la lógica como técnicas y no como la investigación de las propiedades lógicas[32].

En primer lugar, recordemos que el método de Pólya se distingue por el uso de fases o etapas, en la primera debemos concentrarnos en entender el problema, después podemos realizar un plan, posteriormente llevar a cabo el plan y finalmente, analizar la situación. Una vez que tenemos esto claro, podemos pasar a la solución de un problema.

Problema: Te encuentras vacacionando en la isla de los caballeros y los bribones. En ella, todos los habitantes son o bien caballeros, o bien bribones, pero no ambas cosas; los caballeros siempre dicen la verdad y los bribones siempre mienten. En una fiesta, encontraste dos gemelas idénticas, una mentía y la otra decía la verdad. Sus nombres eran Sandra y Paola, pero no sabes quién es quién. Después de saludarte, una de ellas te dijo "soy Sandra si Paola dice la verdad". Si se busca determinar quién lo dijo y si decía o no la verdad ¿Cuál de las siguientes opciones es la correcta?

a) Lo dijo Paola, mintiendo
b) Lo dijo Sandra, mintiendo

[32] Ya antes he mencionado que existe una diferencia entre el estudio de las técnicas lógicas (más cercana a las matemáticas) y el estudio de las propiedades lógicas (más cercano a la lógica y filosofía). En este punto, el enfoque de solución de problemas debe concentrarse en el primer nivel, pues considero que el segundo es demasiado amplio y abstracto para un curso regular de lógica básica. Esto no quiere decir que los problemas más profundos no existan en este nivel, sino que es importante concentrarse primero en la adquisición de herramientas para poder enfrentarlos.

c) *Lo dijo Paola, diciendo la verdad*
d) *Lo dijo Sandra, diciendo la verdad*
e) *No hay información suficiente para determinarlo*

Paso 1: comprensión del problema (determinación de variables, objetivos, etc.).

En el primer paso debemos analizar el problema, detectar la información útil y desechar todo aquello que no lo sea. En este caso, la única información útil es la que nos habla sobre los interlocutores. Es decir, que o bien mienten o bien dicen la verdad. Por ello podemos establecer:

1. Hay alguien que sólo dice verdades
2. Hay alguien que sólo miente

Ya que se trata de **decir la verdad o de mentir**, es claro que lo evaluado será una oración o conjunto de oraciones (si fueran más de una). Hay que identificar cuál es esa oración. En este caso es: "Soy Sandra si Paola dice la verdad". Una vez identificada, ¿qué tipo de oración es?, claramente es una oración condicional.

Finalmente, el objetivo es determinar quién dijo la oración, y si lo dijo mintiendo o no. Este es un problema del tipo "hallar" porque hay que encontrar un escenario que satisfaga la condición para los caballeros y bribones (decir la verdad o no). Hay que notar que cada una de las opciones de respuesta agrega una condición.

Paso 2. Crear un plan (estrategias, métodos, etc.).

Este es un ejercicio donde se trabaja con valores de verdad, por lo que requiere de un método de decisión de fórmulas. Además, la oración dada está en lenguaje natural, es necesario formalizarla. En cuyo caso, lo primero será realizar la traducción a lógica clásica y después elegir un método de decisión de fórmulas. Se sugiere suposición de casos o interpretaciones (es lo mismo que se hace en la reducción al absurdo).

Pero, además, hay que observar que hay dos enunciados complicados, uno es "Sandra dice la verdad" y "Paola dice la verdad", no es posible usar V para ambos. En este caso, se podría usar un subíndice sólo para identificar de quién se habla. Sandra dice la verdad puede expresarse como Vs[33]. Para las oraciones de "Lo dijo…" simplemente se puede usar la inicial del nombre de Sandra o Paola.

---

[33] Esta es una heurística corporizada, agrega una notación auxiliar que ayuda a reconocer los agentes. Más adelante, el alumno notará que simplemente introdujo la notación de lógica de predicados, pero de momento es importante no sobrecargarlo de conceptos. Lo que sí es importante es indicar al alumno que esto es un

Finalmente, las opciones de respuesta se pueden ver como condiciones, es mejor suponer cada una de ellas como la correcta y ver si la oración se puede satisfacer.

Paso 3. Ejecutar el plan:

Lo primero es formalizar la oración "Soy Sandra, si Paola dice la verdad", resultando:

$$V_p \rightarrow S$$ [34]

Ahora hay que evaluarla tomando como base las condiciones:

a) *Lo dijo Paola, mintiendo*

Esta opción nos dice que Paola dijo la oración, pero mintió. Si esto es cierto, entonces el condicional es falso (ya que mintió), por lo que asignamos esos valores:

V_p	$\rightarrow$	S
1	0	0

Notemos que, si lo dijo Paola, entonces es falso que sea Sandra (lo cual se mantiene). Pero, la proposición V_p dice que Paola dice la verdad, y nuestra condición es que Paola miente. Esto es una contradicción. Por lo que este caso debe ser eliminado.

b) *Lo dijo Sandra, mintiendo*

Esta oración nos dice que Sandra dijo la oración, pero mintió. Igual que en el caso anterior, la proposición formalizada debe ser falsa. Por lo que se asignan esos valores.

V_p	$\rightarrow$	S
1	0	0

Ahora veamos que, si aceptamos esta opción, estamos aceptando que Sandra no dijo la oración (porque es falso el consecuente). Pero la opción dice que fue Sandra, por lo que es una contradicción, y esta opción se elimina.

c) *Lo dijo Paola, diciendo la verdad*

En esta opción nos dice que fue Paola, por lo que el consecuente es Falso, Pero además nos indica que dice la verdad. Resultando:

V_p	$\rightarrow$	S
	1	0

recurso visual que nos está ayudando (igual que marcarlas con algún color y otros parecidos) y que lo importante es formalizar bien las relaciones entre las proposiciones.

[34] Hay que recordar que la causa (o antecedente) se denota por las partículas "si", "siempre que", etc.

Para que este caso puede ser satisfecho, debemos hacer que el antecedente sea falso. Por lo que Paola tendría que mentir. Pero la opción nos dice que Paola no miente. Esto es una contradicción y se elimina la opción.

d) Lo dijo Sandra, diciendo la verdad

En este caso, nos dice que fue Sandra y dice la verdad. Por lo que el condicional es verdadero y el consecuente también:

V_p	→	S
	1	1

En este momento, podemos hacer que Paola mienta (para que sea bribón) y esto no cambiará el valor de verdad del condicional ni genera contradicción. Por lo que es una respuesta correcta.

e) No hay información suficiente para determinarlo

Ya que el problema se pudo determinar, esta opción es evidentemente falsa.

Paso 4: Evaluar o analizar nuestro razonamiento.

En este caso, hay algunas cosas a destacar. Por ejemplo, una formalización puede tener unos recursos que nos ayuden a identificarla rápidamente, como la inicial del nombre de quien la enuncia. También se puede introducir una notación con subíndices. Otra cosa por destacar para el futuro es que cuando hay condiciones de verdad, solo hay que satisfacer esas condiciones y no todos los modelos (este es el mismo principio de la reducción al absurdo), por lo que realmente no se aplicó algo realmente nuevo.

¿Qué pasa cuando hay más de una oración a evaluar?, esta es, quizás, una de las preguntas más complicadas alrededor de estos problemas. Cuando se trata se una sola oración es simple, pero cuando hay más de una debemos considerar quién dijo la frase (y su posible naturaleza de bribón o caballero) así como el hecho de que todas las oraciones forman parte de un mismo conjunto de expresiones. En ocasiones, puede ocurrir que una oración haga referencia a otra, por ejemplo "lo que dijo Paola es falso si yo soy un bribón". En la evaluación es conveniente acompañar a los alumnos en estas suposiciones, realizando preguntas de escenarios ficticios sobre el problema que acaban de solucionar para que ellos mismos hagan un ejercicio de reflexión sobre lo que pasaría en estos casos. Esto es importante porque ayuda al alumno a plantear analogías con otros problemas, entender que pequeñas variaciones generan problemas nuevos pero que, esencialmente, pueden enfrentarse de formas similares.

A continuación, desarrollaré otro ejercicio que integre las estrategias para la deducción natural.

Ejercicio: tomando el siguiente conjunto de proposiciones $\{r, t \rightarrow w, z, p \leftrightarrow w, \sim(\sim t \vee q)\}$ *¿Cuál de los siguientes conjuntos de proposiciones no se sigue de este?*

a) $\{p \vee q, w \vee \sim w\}$
b) $\{\sim q \,\&p, z, r \rightarrow t\}$
c) $\{\sim\sim p, \sim\sim t\&z, \sim q\}$
d) $\{w \rightarrow \sim w, t\&(r\&w)\}$
e) $\{\sim q, s \vee t\}$

Paso 1: comprensión del problema.

En este caso, se trata de un ejercicio del tipo demostrar. Hay que desarrollar una argumentación que muestre que los elementos del primer conjunto no implican a una de las opciones de respuestas. El problema también puede desarrollarse como uno del tipo hallar, hay que observar que la noción importante es la de consecuencia lógica, en la que ya vimos que una proposición no se sigue de otra cuando la primera es verdadera y la segunda falsa. En ambos casos podemos plantear algo como lo siguiente:

$$\{conjunto\ inicial\} \rightarrow \{conjunto\ de\ las\ opciones\}$$

Entonces podemos usar dos métodos, uno con valores de verdad, y otro con inferencias y equivalencias. O incluso, combinarlos.

Paso 2: hacer un plan.

Podemos aplicar el método de resolución abreviado. Si no podemos encontrar una contradicción, quiere decir que el conjunto usado no está contenido en el original. Además, observado cada conjunto, hay algunas fórmulas que se pueden simplificar. El plan será el siguiente:

1. Realizar equivalencias en el conjunto inicial para tener un conjunto de premisas simples o en disyunción.
2. Determinar con las fórmulas obtenidas las condiciones de verdad para decidir qué conjunto no está implicado.
3. Verificar cada opción.

Paso 3: desarrollar el plan

Tomemos el conjunto original y realicemos algunas equivalencias. Lo primero será separar las fórmulas y colocarlas en renglones independientes[35].

1. r
2. $t \rightarrow w$
3. z
4. $p \leftrightarrow w$
5. $\sim(\sim t \vee q)$

Ahora podemos aplicar las equivalencias que ya conocemos y pasar cada fórmula a los términos de la disyunción o conjunción. Obtenemos:

1. r
2. $\sim t \vee w$ *I. Material*
3. z
4. $(p \rightarrow w)\&(w \rightarrow p)$ *Equivalencia material*
5. $t \,\&\, \sim q$ *De Morgan*

Recordemos que una de nuestras estrategias en deducción natural es simplificar siempre las conjunciones, por lo que las simplificaremos en la premisa 4 y transformaremos a disyunción cada condicional de sus coyuntos. Lo mismo aplica para 5. Obtenemos:

1. r
2. $\sim t \vee w$
3. z
4. $\sim p \vee w$
5. $\sim w \vee p$
6. t
7. $\sim q$

Con 6 y 7 hemos agregado dos nuevas proposiciones atómicas. Recordemos que una de las estrategias también era verificar si con ellas podíamos aplicar el silogismo disyuntivo. Notemos que 6 y 2 se pueden reducir para obtener “w”, al ser una nueva

[35] Recordemos que esta heurística corporizada nos ayuda porque no vemos todas las fórmulas juntas y nos podemos concentrar sólo en las que nos interesan.

premisa atómica aplicamos nuevamente la estrategia y este resultado nos permite obtener “p” usando 5:

1. r
2. w
3. z
4. $\sim p \vee w$
5. p
6. t
7. $\sim q$

Finalmente, 5 y 4 se pueden reducir a “w” y como esa premisa ya existía, podemos reducirla también. El resultado es el siguiente:

1. r
2. w
3. z
4. p
5. t
6. $\sim q$

Ahora, aquí se puede hacer un esfuerzo mental y como ejercicio podemos preguntarnos qué significan estas fórmulas que hemos obtenido. Esto es importante porque nos ayuda a repasar la noción de consistencia que, en un nivel básico como este, podemos definir como la propiedad de que todas las fórmulas de un conjunto puedan ser verdaderas simultáneamente en al menos una interpretación. Esto es importante porque si no fuera así tendríamos un conjunto explosivo[36], por lo que ahora podemos realizar una anotación para la descripción de nuestro problema. Si un conjunto de fórmulas consistente implica a otro, el segundo debe ser también consistente y simultáneamente verdadero con el primero.

Con esto en mente, podemos determinar las siguientes condiciones:

1. $r = 1$
2. $w = 1$
3. $z = 1$

[36] Aquí podemos preguntarles a los alumnos qué pasaría si del conjunto de premisas original hubiéramos obtenido una fórmula y su negación. Ellos deben poder ver que, si esto pasa, entonces todos los conjuntos de otras fórmulas están implicados por contradicción, y no habría una respuesta correcta, o todas lo serían.

4. $p\ = 1$
5. $t = 1$
6. $\sim q = 1$

Sustituiremos cada uno de estos valores en las fórmulas de los diferentes conjuntos. Aquel que de como resultado una fórmula falsa, será la opción que buscamos (recordemos que la pregunta es cuál no está implicado)

a) $\{p \vee q, w \vee \sim w\}$

p	$\vee$	q	&	w	$\vee$	$\sim w$
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*

**Consistente*

b) $\{\sim q\ \&p, z, r \rightarrow t\}$

$\sim q$	&	p	&	z	&	r	$\rightarrow$	t
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

**Consistente*

c) $\{\sim\sim p, \sim\sim t\&z, \sim q\ \}$ *Simplificando doble negación:* $\{p, t\&z, \sim q\ \}$

t	&	z	&	p	&	$\sim q$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

**Consistente*

d) $\{w \rightarrow \sim w, t\&(r\&w)\}$ *simplificando conjunciones:* $\{w \rightarrow \sim w, t, r, w)\}$

w	$\rightarrow$	$\sim w$	&	t	&	r	&	w
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*

**Inconsistente*

e) $\{\sim q, s \vee t\}$

$\sim q$	&	s	&	t
1	*1*	*1*	*1*	*1*

**Consistente*

La opción correcta es la d, ya que es la única que es inconsistente con el conjunto de premisas.

Paso 4: Evaluar o analizar nuestro razonamiento

Siempre que tenemos fórmulas grandes en un conjunto de premisas, podemos ver la forma de reducirlas, o, mejor dicho, realizar inferencias o equivalencias que nos permitan encontrar proposiciones simples que sean más fáciles de manejar. El plan consistió justamente en esto, lo cual fue un esfuerzo adicional antes de resolver el problema, pero que nos ahorró esfuerzo en la solución, pues obtuvimos un único modelo para realizar las pruebas necesarias[37]. Los problemas del tipo: *¿qué se sigue de…?* Tienen implícita la noción de consecuencia lógica, y por ello podemos usar estrategias tanto de los métodos de decisión como de demostración. Otra alternativa es un método híbrido como el que hemos usado. Ahora, ¿pudimos haberlo hecho mejor?, en este caso pudimos encontrar la respuesta más rápido si cambiábamos de enfoque, es decir, buscar en las opciones de respuesta un esquema que fuera contradictorio. Para que quede claro podemos desarrollarlo:

1. $(w \rightarrow \sim w)\&(t\&(r\&w)$
2. $w \rightarrow \sim w$ simplificación
3. t simplificación
4. r simplificación
5. w simplificación
6. $\sim w \vee \sim w$ s. disyuntivo
7. $\sim w$ tautología
8. $\sim w \,\&\, w$ conjunción 7,5 / contradicción

De la opción correcta se seguía una contradicción, por lo que no podía estar implicada en un conjunto consistente de premisas. Sin embargo, en este caso ha sido más útil el método tomado pues muestra cómo se pueden combinar diferentes técnicas para solucionar un problema.

En resumen, el método toma las etapas propuestas por Pólya, solo que en este caso se han aplicado directamente a la solución del problema y he omitido el planteamiento de preguntas que permitía comprender el problema. Las preguntas del método deben ser abiertas o deductivas, que den oportunidad de que los alumnos desarrollen sus ideas, es importante tomarlas en cuenta, aún cuando nos parezcan rebuscadas o no sean las mejores

[37] Una de las estrategias propuestas en el método de Pólya es resolver versiones más simples de un problema para luego enfrentar el problema real. Una forma de realizar esto último, en matemáticas, es descomponer una figura geométrica en triángulos rectángulos y valerse del teorema de Pitágoras o las relaciones trigonométricas para encontrar las medidas y/o ángulos de la figura original. En este ejercicio realizamos algo similar, lo primero fue inferir los valores de verdad que hacían consistente al conjunto (esto es, demostrar qué interpretación haría consistente al conjunto de premisas), para luego usar esa información y demostrar qué conjuntos, de los propuestos, podían ser consistentes con el original.

opciones, ya que este método se basa en la experiencia que sólo se puede adquirir mediante el ensayo y el error.

Finalmente, el método heurístico para problemas lógicos puede construirse como sigue:

1. Comprensión del problema

- ¿Qué se busca solucionar en el problema?, ¿hay condiciones de verdad?, ¿hay información que no sea relevante?, ¿he resuelto un problema como este antes?, ¿puedo modificar este problema para que sea más sencillo?, ¿se puede solucionar?, ¿puedo plantear una versión más sencilla del mismo problema?
- ¿De qué información dispongo?, ¿hay fórmulas demasiado complejas?, ¿hay condiciones de verdad?, ¿hay alguna definición que me ayude a comprenderlo?, ¿la notación es clara?, ¿puedo usar otra notación?, ¿entiendo todos los conceptos?
- ¿Qué quiere decir cada enunciado del problema?, ¿hay enunciados que no sean útiles?, ¿hay enunciados ambiguos?, ¿es claro el sentido de las implicaciones?

2. Creación/elección de un plan

- ¿Empleo un método seguro pero largo, o uno que aún no domino bien?, ¿requiero enfrentar el problema con equivalencias o con valores de verdad?, ¿puedo usar un método que conozco o una parte de este?, ¿puedo ordenar la información de otra forma equivalente?, ¿con qué métodos me siento más seguro?, ¿puedo ver relación entre la información que tengo y aquella a la que quiero llegar?, ¿qué tipo de problema estoy enfrentando y qué métodos funcionan mejor con estos problemas?

3. Ejecución del plan

- Durante el planteamiento:
  - Verificar que la simbolización es correcta.
  - Observar las conclusiones (u opciones de respuesta) para comprenderlas.
  - Identificar las fórmulas que nos parezcan complicadas y reescribirlas a una versión más sencilla siempre que sea posible.
  - Procurar no tener cadenas largas de símbolos, si es posible separarlos en renglones diferentes.
  - En enunciados grandes, construir las simbolizaciones por partes.

    - Usar símbolos, colores y otros recursos visuales que nos ayuden a no confundirnos.
- Durante la ejecución:
    - Aplicar simplificaciones a fórmulas en conjunción.
    - De las premisas atómicas verificar si con ellas se puede realizar MPP, MTP o SD.
    - Aplicar De Morgan para trabajar fórmulas que tienen negaciones fuera de los signos de agrupación.
    - Seleccionar un método cómodo de demostración o de decisión según sea el caso.
    - Si es posible, emplear un método óptimo (por ejemplo, los desarrollados en el capítulo 3 o cualquier otro que sea accesible).

4. Reflexión/evaluación de los razonamientos aplicados

- Reflexionar nuestro procedimiento y reconstruirlo, plantearse: ¿pude ser más eficiente?, ¿pude aplicar otro método?, ¿mi procedimiento es claro para otra persona?, ¿puedo explicar claramente mi procedimiento?, ¿qué pasa si hago variaciones a este problema?, ¿podría resolver un problema similar con la experiencia adquirida en este?
- Rehacer el ejercicio aplicando un método diferente.
- Exponer a otros el procedimiento empleado y comentar áreas de oportunidad.
- Hay que recordar que la solución de problemas no requiere un método específico, sino el que mejor se acopla a nuestras necesidades.

4.3 Conclusiones del capítulo

En este capítulo exploré la solución a dos problemas de lógica que requieren de las técnicas lógicas para su solución, pero que no se resuelven siguiendo los pasos de la deducción natural o la elaboración de una tabla de verdad. Para enfrentarlos, se aplicó el método de Pólya visto en el capítulo dos.

El método de Pólya consiste en cuatro etapas, las cuales consisten en comprender el problema, planear una solución, ejecutar el plan y evaluar el trabajo realizado. Durante estos procesos se pueden realizar preguntas que estimulan al alumno a que dé ideas de solución, sin importar que estas parezcan extrañas, o estén equivocadas. Durante la etapa de comprensión se debe entender bien el problema, incluso replantearlo si es posible. La etapa de planeación implica que hagamos analogías con experiencias previas, que busquemos los recursos de los que disponemos para la solución del problema. En la ejecución debemos estar atentos a nuestros procedimientos y tratar de ser conscientes del porqué realizamos tal o cuál acción. Finalmente, la evaluación nos ayudará a comprender mejor nuestro proceso de razonamiento, esto tiene la finalidad de encontrar áreas de oportunidad, errores, replicar el ejercicio y, sobre todo, sumar experiencia.

Además, esta forma de proceder es importante porque nos ayuda a plantear un proceso general de solución de problemas que viene acompañado de guías o preguntas que nos pueden ayudar a encontrar la solución. Al mismo tiempo, tiene el potencial de integrar las estrategias vistas en el capítulo 3, esto durante la ejecución del plan, con lo que se busca que nuestro proceso de solución incluya los métodos con los que nos sentimos más cómodos y no nos fuerce a la aplicación de un solo método. Esto, por supuesto, no quiere decir que no podamos aplicarlos, sino que lo ideal es primero comprender y solucionar un problema, para luego intentar otros procedimientos con la confianza de que ya lo hemos podido resolver, después de todo, ¿qué tendría de interesante o estimulante plantear problemas y esperar que los alumnos los solucionen exactamente como nosotros lo haríamos?

Finalmente, la utilidad de integrar esta forma de enfrentar problemas es que permite un diálogo con el alumno durante todo el proceso y, en general, el protagonista es el alumno y no el docente. Que el alumno tenga un papel más activo promete incentivar su confianza y lo convierte en una entidad activa, superando al receptor pasivo que sólo repite los procesos mecánicos de temas como los vistos en el capítulo 3 y que, en el peor de los casos, simplemente olvidará al finalizar la asignatura ya que no representaron ninguna utilidad o valor para él.

Conclusiones

El objetivo general de esta investigación fue **g**enerar estrategias didácticas apoyadas en heurísticas para la enseñanza de la lógica proposicional en nivel licenciatura. Como objetivos secundarios se buscó mostrar que el uso de estrategias heurísticas mejora la enseñanza de la lógica proposicional en al menos los siguientes rubros:

- Reduce el tiempo en que se realizan los ejercicios.
- Reduce el esfuerzo en la solución de problemas lógicos.
- Incrementa el éxito en las soluciones de distintos problemas al proveer un método seguro de solución.

Del mismo modo, mostrar que las estrategias heurísticas del programa de Pólya, en matemáticas, pueden integrarse en la enseñanza de la lógica proposicional. El objetivo principal fue cumplido en los capítulos tres y cuatro, al generar estrategias frugales para la solución de ejercicios e implementar la metodología de Pólya para la solución de problemas. Con ello se cumple también uno de los objetivos secundarios. Los objetivos secundarios referentes al esfuerzo y al incremento del éxito requieren de un estudio posterior, para el cuál esta tesis podrá fungir como marco teórico. El objetivo referente a la reducción del tiempo en la solución de ejercicios puede probarse a partir de las estrategias del capitulo tres. En resumen, el segundo objetivo secundario ha sido satisfecho parcialmente.

Al respecto de la investigación en general, resumo que en el primer capítulo mostré que existen deficiencias generalizadas en la atención y solución de problemas que involucran el razonamiento lógico y probabilístico. La teoría de dos tradiciones tuvo especial atención en este problema; por una parte, la tradición de heurística y sesgo liderada por Kahneman y Tversky argumentó que estos fallos eran sesgos cognitivos generalizados que impactaban en las capacidades de los agentes, por lo que debían estudiarse para evitarse en medida de lo posible. En contraposición, la tradición de la racionalidad ecológica encabezada por Gigerenzer y el grupo ABC propuso que estos atajos de razonamiento eran potencialmente benéficos, especialmente en problemas donde se requería tratar con abundante información.

En ambos casos, el fenómeno se asoció con la heurística y con lo que llamamos "modelo estándar de racionalidad" para el cual las leyes de la lógica y probabilidad clásicas se aceptan como normativas del razonamiento. A lo largo del capítulo mostré el modo en que el fenómeno heurístico se relaciona con la lógica, especialmente en el contexto de la racionalidad. Vimos cómo las heurísticas ocurrían a nivel cognitivo, lo quisiéramos o no y que, de alguna manera, podían ser aprovechadas. Su uso se instauró en la solución de problemas de mundos grandes, y tenía una importante aplicación en las ciencias de la computación, especialmente en el desarrollo de la inteligencia artificial.

Además, a lo largo de este capítulo se presentó una relación antagónica entre la lógica y la heurística. La principal razón de esta contraposición fue que la lógica es segura mientras que la heurística es falible, no obstante, apoyado en el proyecto de Karen González, mostré que esta aparente incompatibilidad no se sostenía para todos los casos. Lo anterior fue especialmente cierto si nuestra concepción de lógica se ampliaba y no se limitaba a un solo sistema formal, incluso, a un solo método de realizar inferencias.

Al final concluí que la lógica y la heurística no eran incompatibles ya que una podía fungir como una especie de sistema de control y la otra como guías en atención al manejo óptimo de la información. Además, la lógica y la heurística parecían estar presentes inevitablemente en el proceso de solución de problemas, y a lo largo de nuestra concepción de racionalidad, por lo que su estudio en este campo (solución de problemas) puede ser interesante y muy significativo.

Al final, también ofrecí la definición de heurística de la Dra. Karen González, quien la define como:

Las heurísticas son procesos, reglas, estrategias o guías de razonamiento que se usan en atención a la resolución de problemas bajo condiciones de incertidumbre, falibilidad, a falta de conocimiento, y cuando se busca economizar recursos o hacer los procesos más eficientes. (González, 2019, P.169).

Definición que captura los distintos usos y acepciones del término.

A continuación, en el capítulo dos. Me enfoqué en mostrar el modo en que la heurística ha servido como la base de una metodología didáctica de las matemáticas, así como su inherente participación en la solución de problemas de este tipo. El objetivo fue ampliar la ya mostrada relación entre lógica y heurística a las matemáticas, esto debido a la clara relación entre la lógica proposicional (isomorfa del álgebra booleana) y las matemáticas. Además, se buscó sentar un precedente de metodología didáctica basada en heurística.

En primer lugar, mostré un par de ejemplos de demostración, en los que se ejemplificó la demostración “hacia adelante” y “hacia atrás”, con la finalidad de ejemplificar este proceso en matemáticas. El objetivo fue que al final de la demostración se notara que existía un aspecto muy importante del proceso de la demostración que no podría verse directamente en esta, este aspecto eran los procesos psicológicos que llevaban al matemático a las inferencias de la demostración. Se argumentó que estos procesos estaban relacionados con la heurística en el sentido en que eran posibles gracias a la experiencia del matemático a su manejo de la información al enfrentar el problema.

Con esto en mente, exploré la metodología de Pólya, que consiste en cuatro etapas que tienen el objetivo de cultivar la sagacidad del matemático. Para ello, las diferentes etapas convertían al alumno en un agente activo y no pasivo, siendo este partícipe de la solución del problema mientras que el docente se convertía en un guía que contribuía con su experiencia.

El método de Pólya fue heurístico porque se basaba en la prescripción de guías de razonamiento que tenían la posibilidad de ayudar a los alumnos pero que podían, potencialmente, fallar bajo distintas condiciones como que las guías revelaran la respuesta, que los alumnos no tuvieran mucha experiencia, entre otras.

Aunado a ello, en la sección final del capítulo, se presentó el antecedente directo a esta investigación, que es el proyecto de Fonseca y González en el que desarrollaron una serie de estrategias basadas en la heurística y propuestas para la semántica proposicional. Las filósofas también mostraron que hay factores ajenos como la representación del problema que inciden en el éxito de solución de este. Basados en este hecho se precisó que la heurística puede ser corporizada cuando la estrategia o guía de razonamiento se aplica al planteamiento y presentación de un problema, en contraste, la heurística formal es aquella que se emplea en atención de la información y procedimiento de solución de un problema.

Teniendo todo lo anterior en cuenta, la definición de heurística, su cercanía con las matemáticas y la lógica, así como su uso para la generación de estrategias didácticas, en el tercer capítulo me enfoqué en desarrollar y presentar una serie de estrategias útiles para los diversos contenidos de un programa de lógica proposicional. En ellos puse atención, principalmente, en la optimización de los métodos típicos de decisión y demostración de fórmulas o argumentos, esto en atención al segundo objetivo secundario de esta investigación.

A lo largo del tercer capítulo, mostré que cinco reglas y la elaboración parcial de tablas de verdad permitía decidir un argumento o fórmula cualquiera. Además, se agregó la heurística que sugiere trabajar siempre con fórmulas más sencillas (con menos variables) porque eran más sencillas de abordar. Al respecto de la decisión mediante la reducción al absurdo, se integraron las heurísticas corporizadas propuestas por González y Fonseca en las que se agregó la regla de eliminación de la conjunción al método de reducción al absurdo para reducir la cantidad de símbolos a tratar. Asimismo, mantuve la idea de trabajar con la fórmula más sencilla, pero en este caso la sencillez se basaba en la cantidad de casos que la hacían verdadera o falsa, según lo necesario en el método.

Los temas posteriores fueron los de deducción natural, en los que me concentré en dos principales problemas, el primero fue sobre el cómo se enseñan y presentan las reglas de inferencia y equivalencia y, el segundo, en los métodos de demostración. Para el primer caso propuse una serie de recursos corporizados que podrían ayudar a una comprensión más sencilla del procedimiento de equivalencia de fórmulas y también para inferencias sencillas. En el segundo describí el funcionamiento general de diferentes métodos de demostración, con la finalidad de identificar el modo en que estos funcionan. Lo anterior tuvo la finalidad de ofrecer un método completo de demostración que, en sus requisitos, tuviera pocas fórmulas pero que pudiera demostrar cualquier argumento. El método propuesto fue una variación del algoritmo de resolución, para el que se agregó una heurística corporizada que separaba las cláusulas de la Forma Normal Conjuntiva y agregaba una única regla de inferencia. Este método también se vio mejorado con la inclusión de estrategias heurísticas formales, como la indicación de iniciar siempre por el manejo de la conclusión negada.

Finalmente, agregué un pequeño apartado con algunas guías o precisiones sobre el tema de la traducción. Cabe señalar que los distintos aparatados contaron con instrucciones al docente sobre cómo presentar estos métodos, consejos o guías que podrían ayudar en diferentes situaciones didácticas.

La conclusión del capítulo fue que el ahorro de recursos cognitivos por parte de los alumnos (al facilitar los métodos) podría coadyubar a la reducción de las brechas entre ellos (entre alumnos que suelen tener mucho éxito en las pruebas y los que no), ya que al incrementar el éxito de los alumnos y ofrecerles un método que garantiza su éxito (si lo siguen adecuadamente) podría mejorar su autoestima.

Finalmente, en el cuarto capítulo, propuse la integración de los conocimientos del capítulo tres y el método de Pólya. Esto con la finalidad de incentivar el estudio bajo problemas que implicaban el uso de los métodos lógicos y el razonamiento y planteamiento de problemas. Esto debido a que la mera aplicación mecánica de métodos como los propuestos en el capítulo 3 no garantizaba el mejoramiento de las aptitudes lógicas de los alumnos.

Para mostrar cómo podían integrarse, se aplicó el programa de Pólya a la solución de problemas lógicos en los que se empleó una metodología semántica y una híbrida, ambas basadas en recursos expuestos en el capítulo tres (heurísticos incluidos). Aunado a ello, se agregó la importancia de incluir al alumno en el proceso de solución, escuchando sus propuestas y convirtiéndolo poco a poco en un agente más activo.

Al respecto del alcance de la investigación, en este caso me he concentrado en explorar solamente los contenidos de la lógica proposicional, así como exponer brevemente algunos aspectos teóricos alrededor del concepto de heurística, puesto que este no es muy estudiado en la etapa formativa en filosofía (aunque sí uno muy relacionado que es el de abducción). La meta cumplida fue la de generar un primer catálogo de estrategias potencialmente útiles, descritas a la luz de las definiciones de los conceptos de heurística formal y corporizada. Asimismo, aproximé una metodología común en didáctica de las matemáticas a la didáctica de la lógica, misma que, si bien parece existir en diferentes programas, no suele ser tan evidente su aplicación. El trabajo realizado, por supuesto, tiene la oportunidad de ser probado posteriormente, para lo cuál se puede investigar su eficacia mediante un estudio empírico. Dicho estudio empírico queda propuesto para otra investigación e interesados en el tema de la didáctica de la lógica.

Otro aspecto útil de esta investigación es que puede ampliarse a otros contendidos como la lógica de predicados, la teoría de conjuntos, entre otros temas vistos también en lógica y matemáticas. Cabe señalar que la creación de estrategias depende de los objetivos de los cursos, por ejemplo, en este caso el objetivo fue siempre la decisión o demostración de argumentos, pero a un informático podría interesarle el aspecto algorítmico, por lo que estas estrategias no serían las más apropiadas para ese propósito. No obstante, sostengo que este enfoque es especialmente útil en contextos introductorios, es decir, cursos donde el objetivo no sea la demostración constante de teoremas, sino, más bien, el cultivo de las habilidades analíticas de los alumnos, esto en atención a la solución de distintos tipos de problemas que involucran el razonamiento lógico matemático.

Finalmente, este enfoque promete reducir la brecha existente entre los alumnos más experimentados y los menos experimentados, puesto que provee a los segundos de una herramienta que les permite competir con los primeros, y, a los primeros, los incentiva con otro tipo de retos (los problemas propuestos en el capítulo 4). Describir los aspectos anímicos y psicológicos presentes en el éxito y fracaso de los alumnos en materias de lógica es otra investigación potencial que puede realizarse a partir de este proyecto.

Por último, el capítulo primero brinda la oportunidad de ahondar en el problema de la racionalidad a la luz del fenómeno heurístico. Actualmente hay una línea de investigación en este campo, en la que participa la filósofa Ana Laura Fonseca y que se denomina racionalidad situada. Por lo que una posible continuación de este proyecto puede darse también en esa dirección.

Referencias

Aliseda, A. (2000). Heurística, hipótesis y demostración en matemáticas. UNAM.

Barceló, A. (2003). ¿Qué tan matemática es la lógica matemática?. Diánoia XLVIII. UNAM.

Béziau, J. (2015, septiembre 7–8). Logicidad [Conferencia]. Logic is not logic, CDMX, México. http://www.filosoficas.unam.mx/sitio/sitio/logicidad

Fonseca, A. & González, K. (2020). Heurísticas para la enseñanza del cálculo proposicional. En: Jasso, Jesús, & Conforti, Claudio, & Jasso, Elizabeth (2020) Lógica(s), Argumentación y Pensamiento Crítico: Didáctica, Problemas y Discusiones. AML. Editorial Torres Asociados.

Gigerenzer, G. & Gaissmaier, W. (2011). Heuristic decision Making. Annual Review of Phycology. 62, Pp. 451-482. https://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev-psych-120709-145346

González, K. (2019). Relaciones entre lógica y heurística: un análisis filosófico de sus alcances y limitaciones. Tesis Doctoral. UNAM.

González, G. (2010). *Ars Logicorum*. UNAM..

Khaneman, D. (2011). Thinking, Fast and Slow. Farrar, Straus and Giroux.

Lógica MX. (2021, 20 enero). Mesa Redonda: Aplicaciones de la lógica. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=eW2rSQk9sso&t=3632s

MateMauro. (2018, 13 noviembre). Teorema de Pitágoras - Demostración por Euclides (Libro I - Proposición 47). YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=cZSgnON3nJs&t=868s

Math in Black. (2020, 11 marzo). Demostración del Teorema de Pitágoras 3 | Bhaskara. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8fgQMxY5CQE

Picardo O. & Escobar J. C. & Pacheco, R. (2005). Diccionario Enciclopédico de Ciencias de la Educación. Centro de Investigación Educativa Colegio García Flamenco.

Pólya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas.

Romero, C. (2019). Lógica básica. Una introducción al arte del razonamiento.

Russell, S. J. & Norving, P. (2008). Inteligencia artificial. Un enfoque moderno. Pearson.

Thomason, R. (2020). Logic and Artificial Intelligence. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/logic-ai

Woods, J. (2019). Mathematical logic as mathematics, not logic: how it got that way. En: Jasso, Jesús, & Conforti, Claudio, & Jasso, Elizabeth (2020) Lógica(s), Argumentación y Pensamiento Crítico: Didáctica, Problemas y Discusiones. AML. Editorial Torres Asociados.

Bibliografía

Copi, I. (2001). Lógica simbólica. Compañía Editorial Continental.

Fonseca, A. (2008). Heurística y modelos de la racionalidad. Un caso de estudio: El proyecto del grupo ABC. Tesis de maestría. UNAM.

_____. (2014). De la Racionalidad Ecológica al Razonamiento Situado. Las Heurísticas como Cognición Distribuida. Tesis Doctoral. UNAM.

García, R. & Dieckmann A. (2006). Una versión crítica del enfoque de los heurísticos rápidos y frugales. Revista latinoamericana de psicología, 38. Pp. 509-532. http://www.scielo.org.co/pdf/rlps/v38n3/v38n3a05.pdf

García, Z. & Ballon, J.C. (2003). Introducción a la lógica. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Fondo Editorial.

Gigerenzer, G. & Todd, P. & Grupo ABC. (1999). Simple Heuristics that Make Us Smart. Oxford University.

Kelman, M. (2011). The Heuristics Debate. Oxford University Press

Khaneman, D. (2003). A Perspective of Judgment and choice. Mapping Bounded Rationality. American Psychologist, 58. Pp. 697- 720. DOI 10.1037/0003-066X.58.9.697

Lakatos, I. (1978). Pruebas y Refutaciones. Lógica del descubrimiento matemático. Alianza.

Martínez, A. (2000). Teorema de Pitágoras. Originalidad de las demostraciones de E. García Quijano. Gaceta de la Real Sociedad Matemática de Española. Vol. 3, No. 2. Pp. 277-296.

Pólya, G. (1973). How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press.