UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
DIRECCIÓN GENERAL DE DIVULGACIÓN DE LA CIENCIA
FACULTAD DE CIENCIAS
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

LÓGICA COMO EPISTEMOLOGÍA EN CONDICIONES DE LABORATORIO

TESIS

QUE PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
(CON ESPECIALIDAD EN FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA)

PRESENTA:
LIC. FIL. EDUARDO UGALDE REYES

TUTOR PRINCIPAL :
DR. FAVIO EZEQUIEL MIRANDA PEREA
(FACULTAD DE CIENCIAS, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS-UNAM)

COMITÉ TUTOR:
DRA. ATOCHA ALISEDA LLERA (IIF-UNAM)
DR. LUIS ESTRADA GONZÁLEZ (IIF-UNAM)
DR. DAVID GAYTÁN CABRERA (FFyL-UNAM/ UACM)
DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ (FFyL-UNAM)

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 3 de marzo de 2022.

Once you have been struck with the beauty of a subject, devote your life to it!

Arend Heyting (1971)

A una estrella

Del celeste rebaño salió una estrella
y en fuga, la infinita bóveda incendió.
Lo azul tornaba en plata y al caer su estela,
de su paseo a mi mirada despertó.

Por bosque de mis pestañas atravesó
y en mis ojos vió do hacer su madriguera,
con herbácea porcelana recubrió
y de agua y luz, vistió vitral viva cueva.

Oh, vívida estrella que marchaste fuera
de iluminada, esférica e inmensa prisión;
tu blanco navegar, sigue, pasa y rueda
aperlando el firmamento de mi visión.
Fugaz lucero, tu caída resuena
sorda a la vista, pervive y arde en mi razón.

O shooting star
that fell into my eyes and through my body—:
Not to forget you. To endure.[1]

Eduardo Ugalde R. & Rainer M. Rilke.

[1] Rilke, Rainer Maria (1911-1920), Death, lines xvii-xix; in Ahead of All Parting: The Selected Poetry and Prose of Rainer Maria Rilke (1995), Mitchell, Stephen (ed. and translator), N.Y. : The Modern Library.

Agradecimientos

Durante mis años de formación he ido aprendiendo a identificar las señas por las que un buen libro se reconoce. Las señas son varias pero coloco al frente de todas ellas la siguiente: un buen libro es la puerta de entrada hacia otros buenos libros porque nos muestra que no se trata de una isla desgajada de otras tierras sino que constituye una porción de terreno al interior del continente que las une. En mi caso, al menos, así ocurrió. Fascinado por el sistema de deducción natural durante el breve recorrido que hace Kleene (1967) de este, pronto me condujo a Prawitz (1965) y una mención *au passant* en ese libro sobre recientes contribuciones al tema— en el segundo prefacio a la edición de 2006— me llevó a un artículo de von Plato (2009). A partir de ahí, encontré a Negri & von Plato (2001) y desde entonces he seguido en deducción natural los pasos de estos últimos dos autores. Contribuir sobre esa dirección, consiste en la expectativa que ha guiado la realización de este trabajo.

Esta meditación corresponde al reino de los fines en donde, en última instancia, busco hallar mutuo entendimiento. Pero, el proceso de composición que conllevó este trabajo obliga a la reflexión a emprender un salto de los fines a los medios— como diría Brouwer. En este sentido, lo que se ha dicho acerca de lo que caracteriza a un buen libro es tan válido y atinado como para designar a las personas que me ayudaron, acompañaron y alentaron— de manera tan diversa— durante la confección de esta tesis. Por un lado, el apelativo 'bueno' no sólo les viene como anillo al dedo para señalar, por decir, su gentileza y generosidad al tenderme la mano. De manera amplia, mi interacción con ellas ha sido fuente continua de incitaciones para transitar y expandir mis horizontes hacia territorios intelectuales (y hasta emotivos) más fecundos e interesantes. Por otro lado, como los buenos libros, en varios casos, conocer a unos me ha llevado a conocer a otros.

Agradezco muy sinceramente a mi director de tesis, el **Dr. Favio Ezequiel Miranda Perea**, por la guía científica que me ha brindado desde que le presenté las primeras pinceladas de lo que sería este proyecto y del que supo abstraer dado su estado de inmadurez, un genuino problema de investigación sobre el cual volcarse. Bajo su dirección, el proyecto no sólo tomó forma sino que lo elevó al nivel desde el cual es posible alcanzar la última frontera de la investigación en lógica y filosofía. De no ser por su orientación, las diversas iluminaciones que transpiraron sobre el tema en varias de nuestras discusiones habrían permanecido en la oscuridad. Pero tales iluminaciones no se limitan a la instrucción sino que se extienden al trato personal y al apoyo que me ha brindado. En una palabra, relacionarme profesionalmente con el Dr. Favio Miranda ha sido experimentar la verdad de un aforismo atribuido a Andrzej Grzegorczyk: *Logic is to improve human thinking in order to improve human existence.*

De igual modo, agradezco a los miembros del comité tutor porque todos ellos muy amablemente accedieron a revisar esta tesis y por tener la fortuna de contar con ellos a mi lado— desde la licenciatura al **Dr. David Gaytán Cabrera** y al **Dr. Cristian Gutiérrez Ramírez**, y a partir de la maestría a la **Dra. Atocha Aliseda Llera** y al **Dr. Luis Estrada González**—, empujando mi desarrollo profesional. En este sentido, merece especial mención de mi gratitud el que la Dra. Atocha Aliseda Llera, el Dr. Luis Estrada González y el Dr. Cristian Gutiérrez Ramírez, me hayan sugerido y puesto en contacto con el Dr. Favio Miranda para que tuviera al tutor apropiado para dirigirme la tesis. Nada pudo haber sido más atinado. Tan oportuna y decisiva fue su intervención que me salvaron de la soledad y la infelicidad en el mundo académico.

Durante la composición de este trabajo, conté con la ayuda de **Cecilia María Calderón Aguilar** para transcribir mi manuscrito al computador. Su intervención no se limitó a sólo ello porque además de haber tenido y disfrutado de su compañía— en una serie de eventos tan fascinantes como extraordinarios— absorbió varias de mis responsabilidades para que yo pudiera dedicarme exclusivamente a componer esta tesis. Ella es, en parte, responsable de lo que aquí se presenta en el siguiente sentido. Toda su ayuda y muchos de sus consejos tuvieron en mí el efecto que se esperaba: las ideas que aquí aparecen lo hacen como tal— como contenido— y no se quedaron resonando tan sólo en alguna caverna de mi mente o se desvanecieron en alguna conversación nocturna sobre Gentzen. Cordialmente, muchas gracias por todo.

También deseo agradecer a mis amigos habiendo tenido la fortuna de conocerlos durante los estudios de posgrado: **Alberto García Hernández, Arturo Gudiño Díaz**, **Jorge Luis Hernández Ochoa**, **Raymundo Meza Rivera**, **Marco Ornelas Cruces**, **Silvana Torres Campoy** y **Edgar U. Aguilera**. Cuando los conocí— he de reconocer— solía creer que sobre la teoría de la prueba no se ponía el Sol y que se trataba de un tema *non plus ultra*. Actualmente, lo sigo creyendo y hasta con mayor fervor, mas no por los mismos alegatos. En nuestras diversas charlas amistosas, en el debate, en nuestras reuniones, etc., ya no se asoma aquella dosis de dogmatismo que acompañaba a mi discurso cuando salía a relucir el tema— muchas veces, a la menor provocación; el resto, sin motivo aparente… La amistad nos ayuda a entendernos mejor al mostrarnos las diferentes cosas que hay y que uno no puede hacer por sí mismo porque, al fin y al cabo, para surcar nuevas aguas es menester salir del puerto.

Por último, agradezco a mi familia por su continuo amor y cuidado, especialmente a mi madre porque con entusiasmo siempre ha apoyado todas las empresas profesionales y personales que he emprendido.

Este trabajo de investigación fue financiado por el **CONACyT** durante el periodo del **01/agosto/2019** al **31/julio/2021**, por haber solicitado y obtenido la beca para cursar los estudios de **Maestría** en el **Programa de Maestría y Doctorado del Posgrado de Filosofía de la Ciencia de la UNAM**. De igual modo, se contó con el financiamiento del proyecto **UNAM DGAPA PAPIIT IN119920** durante el periodo del **7/septiembre/2021** al **7/diciembre/2021**. La obtención de estos apoyos contribuyeron a formar un espacio protegido que facilitó la administración inteligente de mi ocio para invertirlo en la investigación en lógica, dedicarme a la escritura de esta tesis sin muchos contratiempos y así fijar la residencia de mi vocación en la vida académica. A los responsables, colaboradores y personal administrativo del Programa del Posgrado de Filosofía de la Ciencia, del CONACyT y del PAPIIT IN119920, por la ayuda, interés, atenciones, orientación y facilidades que me brindaron, extiendo sinceramente mi agradecimiento. En cuanto a la realización material de esta tesis de maestría, su ejecución también fue posible gracias al apoyo brindado por la compañía de *software* **Texthelp** que se mostró interesada— en especial gracias a la intervención y gestión de **Carrie-Ann Gibson**— en experimentar los alcances de su programa **EquatIO** en la construcción de derivaciones tipo Gentzen, para lo cual concedieron el uso de la licencia del programa durante el periodo del **03/marzo/2021** al **03/marzo/2022** como parte de un estudio piloto. Agradezco a Carrie-Ann Gibson y a todo el equipo de EquatIO de Texthelp por su generosa ayuda.

TABLA DE CONTENIDOS

Introducción

Para el ojo crítico que escrute este trabajo, puede saltarle a la vista una cierta disparidad entre lo que sugiere el título y el contenido del mismo. Por un lado, el título parece evocar que lo que será objeto de indagación de este trabajo será la estrecha relación— y hasta dependencia— entre la lógica y la epistemología derivada de una cuestión que al interior de la filosofía de las matemáticas produce una tensión esencial: ¿qué tiene prioridad conceptual en el orden del conocimiento, el concepto de prueba (como avanza el *intuicionista*) o el concepto de verdad (como postula el *clásico*)?

La posición aquí desarrollada propugna que la noción de verdad es muy complicada como para ofrecer un punto de partida para fundamentar a la lógica. En cambio, el análisis intuicionista sobre el proceso de demostración conlleva— puesto que se persigue la cuestión en la vía constructiva— a considerar nociones más simples y más inmediatas tales como la noción de prueba o proyecto constructivo y, en este sentido, es contrastada con la posición del *clásico*. Por otro lado, buena parte del contenido de este trabajo consiste en preparar la maquinaria formal para bosquejar la prueba de normalización fuerte de la lógica proposicional intuicionista del sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación, **NG**.

Para el autor no cabe hablar de tal disparidad— ambos temas están presentes y entreverados— pero el lector muy bien hará en precaverse de que el autor puede decir misa. En todo caso, no se practica la operación de dar gato por liebre aunque el autor reconoce una deuda con su trabajo y con el lector en lo que toca a la elección del título para su tesis de maestría: aunque evocativo es incompleto, *mea culpa*. Mejor hubiera sido añadir un subtítulo que advirtiera hacia dónde van los tiros o adoptar, de plano, otro título: Esbozo de la Prueba de Normalización Fuerte del Sistema **NG**, o algo por el estilo. Por una especie de quijotismo, he estado tan embebido en el estudio de la obra de los lógicos Jan von Plato y Sara Negri que la elección del título surgió de una frase de Jan von Plato aparecida en Elements of Logical Reasoning (2013, p. 110)[2].

[2] *Elementary logic is even epistemology in laboratory conditions.*

Nada me pareció más adecuado que, versando este trabajo sobre un rompecabezas planteado por ambos lógicos sobre la prueba de normalización del sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación (**NG**), aludiera desde el título— por descontado o por capricho— a su obra. Sin embargo, adecuado o no, el asunto del título es *quaestio de nomine*. Más interesante resulta ver cómo se hilan en lo que sigue la tensión filosófica aludida y el rompecabezas lógico que plantea la prueba de normalización fuerte del sistema **NG.**

Tomando como punto de partida la pregunta ¿qué motiva el desarrollo de la teoría matemática?, el capítulo 1 abre con una breve excursión acerca de la naturaleza de la investigación en matemáticas, siguiendo la vía constructiva, como práctica de la ciencia. Aquí, lo que se propone— sin pretensión de clamar originalidad— es que tal desarrollo está motivado por el planteamiento de rompecabezas y en experimentar posibles soluciones. Pero, lo que realmente distingue al modo de proceder de la matemática de otras prácticas científicas es que está fundamentado en la noción de prueba. Una de las consecuencias epistemológicas más interesantes que se desprende de enfocar la práctica matemática de esta manera, radica en que la actividad matemática consistente en la verificación formal de pruebas es el aspecto más fundamental de la demostración de teoremas.

Desde la perspectiva intuicionista, se analiza lo que se entiende en la práctica matemática por demostrar una proposición y en qué consiste el proceso de verificación de una prueba. Es decir, la tesis verificacionista en relación con la teoría constructiva del significado y la interpretación **BHK**[3], entra en juego. Desde tal perspectiva se han ensayado muchas respuestas de carácter general, pero el enfoque practicado en este trabajo está orientado hacia la teoría estructural de la prueba de tal manera que arroje luz sobre algunos de los problemas que se desprenden de la prueba de normalización fuerte del sistema **NG**.

[3] Acrónimo de Brouwer-Heyting-Kolmogorov.

En este sentido, dos pruebas de normalización fuerte del sistema **NG** son consideradas— la de Negri-von Plato y la de Joachimski-Matthes— con el propósito de resolver el rompecabezas planteado por Sara Negri y von Plato: teniendo en cuenta el comportamiento combinatorio de los esquemas de conversión, ¿se pueden remover las restricciones a la estrategia de normalización que la prueba de Negri-von Plato emplea? Se comparan, pues, dos pruebas de un mismo resultado matemático, y aunque la prueba de Negri-von Plato no la desarrollamos sino la de Joachimski-Matthes, la comparación está en la dirección de contribuir a la clarificación de ambas.

Uno puede establecer de varias formas el mismo resultado, las cuales pueden ser equivalentes entre sí si concluyen lo mismo y, sin embargo, formalmente pueden ser muy distintas y proporcionar diferentes acercamientos técnicos para la solución de un problema. A lo largo del capítulo, se introduce gradualmente al lector a algunas de las problemáticas mencionadas. El capítulo concluye exponiendo algunas de las motivaciones acerca de cómo surgió el sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación como solución a otro rompecabezas concerniente a la normalización de derivaciones en el sistema de deducción natural usual, Gentzen-Prawitz, de la lógica proposicional.

En el capítulo 2, se expone a detalle la noción de normalización en teoría de la prueba y, a partir de ello, se procede a establecerse una comparación entre los sistemas de deducción natural **N** y **NG**; con ello como preludio, se introducen las convertibilidades[4] en deducción natural y se desarrollan *in toto* los esquemas de conversión que inciden en la prueba de normalización fuerte de la lógica proposicional intuicionista en el sistema **NG**.

El capítulo 3, por último, consiste en la presentación de lo que el Dr. Favio Miranda denominó "ingeniería en reversa de la prueba de normalización fuerte de

[4] El vocablo *convertibilidad* se emplea para traducir la voz *convertibility* del inglés. Pese a la sospecha de tratarse de un anglicismo, se trata, de hecho, de una palabra que figura en el español que expresa la cualidad de ser convertible. Se prefiere a *conversión* porque esta expresa, más bien, el resultado de convertir algo en otra cosa y no la propiedad de algo de poderse convertir. Irónicamente, su adopción tanto en español como en inglés resulta ser, respectivamente, de hispanizar o anglicanizar el vocablo latino *convertibilis*. Las convertibilidades que abordamos en este trabajo para el proceso de normalización son tres: *détours*, permutabilidades y simplificaciones.

Joachimski-Matthes". Con ello, nos referimos al trabajo de traducción formal del cálculo lambda ΛJ al sistema **NG** que se requirió para montar la maquinaria formal con la que puede efectuarse la prueba de normalización fuerte. Una prueba completa de que la lógica proposicional intuicionista en el sistema **NG** es fuertemente normalizable, resulta ser, *in extremis*, larga.[5] En cambio, lo que se ofrece, de manera más o menos detallada, es el bosquejo de la prueba de normalización fuerte del sistema **NG**.

A lo largo de este trabajo, las cuestiones que interesan al lógico y al filósofo de la ciencia están balanceadas porque para que la filosofía sea un punto de vista sobre otros puntos de vista, en particular la práctica científica, la filosofía debe ir montada a caballo de la ciencia. Es decir, la filosofía que aquí se practica no es una *filosofía sin lágrimas* y dada la naturaleza de la investigación no debe sorprender al lector que las tecnicalidades, especialmente las que conciernen al trabajo lógico para establecer y hacer explícita la maquinaria formal para esbozar la prueba de normalización, sean abundantes. Ello se debe, en parte, a que el estudio del sistema **NG** y sus propiedades formales están muy poco difundidas y también, en parte, a que de manera restringida la teoría estructural de la prueba se suele entender como las relaciones que cabe resaltar entre sistemas deductivos como la deducción natural y el cálculo de secuentes. En este trabajo, esta restricción no la observamos dado que seguimos muy de cerca el desarrollo de la prueba de normalización fuerte del cálculo lambda ΛJ de Joachimski-Matthes, lo cual implica, de hecho, retomar el análisis estructural *à la* Howard sobre las relaciones entre la deducción natural y el cálculo lambda.

Formalizar no consiste únicamente en traducir una teoría a un lenguaje formal, más importante resulta ser el hecho de que la formalización de una teoría nos pone en una mejor posición para capturar su estructura y "guiar a nuestra intuición en regiones muy abstractas para nuestra imaginación"(Whitehead & Russell 1910, p.2)[6]. En este sentido, el estudio de las propiedades metamatemáticas del sistema **NG**— en conjunto con las varias formalizaciones que se ofrecen del mismo **NLI**, **NG Typed**— y su traducción al cálculo lambda ΛJ, se ofrece como una contribución a la teoría interpretacional de la prueba. Con ello, se pone de manifiesto el hecho de que el

[5] Su desarrollo completo formará parte del proyecto de investigación para el doctorado, el cual es una continuación de este.

[6]Whitehead, Alfred & Russell, Bertrand (1910), Principia Mathematica Volume I, UK: Cambridge University Press.

intuicionismo es el fragmento persistente de la lógica que motiva y preserva la *maleabilidad computacional* del sistema **NG**.

Cuestiones acerca de la forma de una teoría, incluso cuando los contextos matemáticos son equivalentes, pueden proporcionarnos una guía heurística más acabada y, al final, apuntar hacia un mejor resultado.

§1.1. El problema: La Prueba de Normalización Fuerte del Sistema NG o Deducción Natural con Reglas Generales de Eliminación

"Mathematics is not a spectator sport. If you want to understand it then you must do it, you can't simply watch others do it".[7]
Harold Simmons.

Acerca de la naturaleza y *modus procedendi* de la lógica y la matemática como prácticas científicas, Russell en On Denoting (1905, p.47) comentó lo siguiente:

Una teoría lógica debe ser puesta a prueba por su capacidad para lidiar con rompecabezas y, reflexionando acerca de la lógica, resulta ser un plan saludable el suplir a la mente con tantos rompecabezas como sea posible pues estos sirven tanto el mismo propósito como los experimentos sirven en la ciencia física[8].

La observación de Russell— filosóficamente hablando— conserva mucha miga pese al abandono generalizado de la postura logicista en la filosofía de las matemáticas. En lo que sigue no hay ninguna pretensión de reanimar tal postura o las discusiones que incitó en su momento con respecto al formalismo o al intuicionismo en torno a las fundamentos de la matemática pues sabemos, como Poincaré (1902)[9], Hilbert (1904)[10] y Brouwer (1981)[11] apuntaron, que la matemática emplea principios que son irreducibles a principios lógicos — *i.e.*, la inducción matemática o el concepto de número. En cambio, la observación de Russell captura algunas motivaciones metodológicas y epistemológicas acerca del carácter de las ciencias formales que conserva un halo de verdad[12].

---

[7] Simmons, Harold (2000), Derivation and Computation: Taking the Curry-Howard Correspondence Seriously, USA: Cambridge University Press, p. xii.
[8] Russell, Bertrand (1905), On Denoting; in Marsh, Robert C. (ed.) (1956), Logic & Knowledge: Essays 1901-1950, G.B.: Unwyn Hyman (reprint 1998).
[9] Poincaré, Henri (1902), Science and Hypothesis; in The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science & Science and Method, G.B. Halstead (trans.), N.Y.: The Science Press (1921), p. 38 ss.
Poincaré llama a lo que conocemos como el principio de inducción matemática, "razonamiento por recurrencia", al cual caracteriza como "el razonamiento matemático *par excellence*" (Idem, p. 37).
[10] Hilbert, David (1904), On the Foundations of Logic and Arithmetic, G.B. Halstead (trans.). *The Monist, Vol. 15*, 1905, pp.338-352. Para evitar círculos viciosos en la fundamentación de la aritmética, Hilbert dirá que "es requisito desarrollar simultáneamente las leyes de la lógica y la aritmética" (Idem, p.340).
[11] Brouwer, L.E.J. (1981), Brouwer´s Cambridge Lectures on Intuitionism, D. van Dalen (ed.), USA: Cambridge University Press, pp. 4-10. Aunque Brouwer no afirmó como Poincaré que la inducción matemática "es el razonamiento matemático *par excellence",* algo similar se puede inferir de su formulación de lo que llamó "el primer acto del intuicionismo", principio por el cual es posible generar la serie de los números naturales.
[12] En el famoso Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 llevado a cabo en París, donde Hilbert presentó por primera vez sus 23 problemas matemáticos, en su discurso Hilbert comenta: "Siempre y cuando una rama de la ciencia ofrezca abundancia de problemas, entonces seguirá viva; la falta de problemas anticipa la extinción o la cesación del desarrollo independiente".(p. 407). Hilbert, David (1900), Mathematical Problems, Mary Winston

Desde la perspectiva de la teoría de la prueba, al menos, dos ideas son las que nos interesa destacar asociando un par de preguntas críticas para introducir el tema:

1) ¿Qué es lo que motiva el desarrollo de la teoría matemática en tal o cual dirección?

En general, la fuerza que impulsa al desarrollo de la matemática consiste en la resolución de **rompecabezas** puesto que propicia— al interior de una agenda de investigación—"la invención de métodos, herramientas, estrategias y conceptos para zanjar problemas"(Rav, 1999, p.6).[13]

2) ¿En qué puede consistir la experimentación en matemáticas?

Ofrecer evidencia acerca de un hecho matemático consiste en mostrar una prueba de ese hecho.

El acto de crear nuevas herramientas metodológicas y conceptuales es esencial para el razonamiento matemático y en la dirección hacia la **formalización** de la matemática, el formalizar una teoría permite la inteligibilidad y comunicabilidad de los resultados relevantes de una investigación haciendo que tales resultados sean susceptibles de **verificación**.

En las ciencias físicas, el método por el cual reconocemos y aceptamos un hecho, de acuerdo con alguna teoría, consiste— entre otras cosas— en evaluar la evidencia con respecto a ciertas hipótesis, la experimentación y la replicación experimental de los resultados. Las analogías y diferencias entre las ciencias experimentales y las formales se pueden multiplicar *ad libitum*. No obstante, en matemáticas constituye un hecho empírico que se manifiesta en nuestra actual práctica de razonar el que "la replicación del experimento consiste en [construir] una prueba que otros puedan leer, entender y validar" (Krantz, 2011, pp. vii-viii)[14].

Desde esta perspectiva, podemos decir que el análisis intuicionista de la lógica puede plantearse como una epistemología en condiciones de laboratorio porque estar en posesión de una prueba matemática, nos coloca, como agentes cognoscentes, en una posición desde la cual podemos juzgar la verdad de una proposición mediante la

---

Newson (trans.), *Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, Vol. 37 (4)*, June 2000 (reprint 1902), pp. 407-436.

[13] Rav, Yehuda (1999), Why Do We Prove Theorems?, *Philosophia Mathematica, 7(1)*, pp. 5-41.

[14] Krantz, Steven G. (2011), The Proof is in the Pudding, USA: Springer.

ejecución de computaciones. Conversamente, desde una perspectiva filosófica, la noción de prueba intuicionista abre la posibilidad de analizar la fundamentación de la epistemología desde una perspectiva constructiva como ha propuesto Sergei Artemov[15] tomando por caso la famosa caracterización tripartita del conocimiento (*creencia verdadera justificada*) y los contraejemplos Russell-Gettier formulados en contra de tal caracterización.

El propósito de este trabajo consiste en la articulación de estas dos ideas —resolución de rompecabezas y formalización/verificación— con respecto al análisis y reconstrucción de la **prueba de normalización** que Sara Negri y Jan von Plato han ofrecido para el sistema de **deducción natural con reglas generales de eliminación**, [16] **NG**[17]**.**

Cabe notar que el interés en este asunto sobre la normalización, además de ser un resultado metamatemático importante para la teoría de la prueba, también se trata de un problema con cierto *pedigree* en filosofía, por ejemplo, el llamado "último problema de Hilbert" (Negri & von Plato, 2011, pp. 1-2), el cual consiste en: **a)** hallar un criterio de simplicidad para las pruebas, o **b)** mostrar que ciertas pruebas son más simples que otras o **c)**, en general, desarrollar una teoría sobre los métodos de prueba en matemáticas. Normalización es un criterio con el que se cuenta, en la teoría de la prueba, para "medir" la 'simplicidad' de ciertas pruebas.

Sobre el sistema **NG**, Negri & von Plato han planteado el siguiente

[15] Artemov, Sergei (2017), Constructive Knowledge and the Justified True Belief Paradigm, *Indagatione Mathematicae* 29 (1), pp. 125-134.

[16] Negri, S & von Plato, J. (2001), Structural Proof Theory, USA: Cambridge University Press, pp. 198-201 y Negri, S. & von Plato, J. (2011), Proof Analysis: A Contribution to Hilbert´s Last Problem, USA: Cambridge University Press, pp.27-29.

[17] El nombre del sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación resulta ser muy largo para designarlo durante toda la exposición mediante ese nombre cada vez que se requiera. Los autores, Negri & von Plato, lo mencionan en varias de sus exposiciones o con el nombre largo, **NG**, **NI** con reglas generales de eliminación para el sistema de lógica intuicionista o **NK** para el sistema de lógica clásica, o **NLI**, cuando se trata de la variante de **ND** en estilo de secuentes. En Troelstra & Schwichtenberg (2000), pp. 226-227, se refieren al mismo mediante una designación *"ad hoc"*, **N***. Aquí, adoptamos la convención de nombrar a los sistemas basados en deducción natural como sistemas **N**, como se hace para distinguirlos de los sistemas tipo Hilbert, **H**, o de los sistemas tipo **G** basados en el cálculo de secuentes. Sin embargo, designaremos al sistema de deducción natural à la Negri-von Plato como **NG** en lugar de **N***. La razón principal es que **NG** es un nombre más sugerente que **N*** en un doble sentido: la **G** en **NG** es porque se trata de un sistema de deducción natural originalmente construido para establecer un isomorfismo con el cálculo de secuentes **G3ip,** pero también puede entenderse por **Generalized Elimination Rules**. Al sistema de deducción natural à la Gentzen-Prawitz, lo designamos simplemente como **N**, especificando, según sea el caso, su variante sea de lógica minimal, intuicionista o clásica agregando **M**, **I** o **K**, respectivamente, de ser necesario. Lo mismo aplicaría al caso de **NG** aunque en este trabajo la parte clásica queda excluida y la lógica intuicionista es la única que observaremos.

rompecabezas lógico al cual podemos considerar como la punta de un amplio e interesante proyecto de investigación: ¿Es susceptible de simplificarse el argumento para efectuar la prueba de normalización del sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación basándose en los "esquemas de conversión y en su comportamiento combinatorio"? (Negri & von Plato, 2011, pp. 27-29.) Sobre esta última cuestión, asoman varios problemas.

La prueba de normalización de Negri-von Plato emplea un "estilo de prueba" muy cercano al estilo de prueba con el que Gentzen originalmente formuló al sistema de deducción natural, al cual podemos llamar, siguiendo a Poincaré[18], "geométrico". Con esto nos referimos a la forma en que las derivaciones en el sistema **NG** tienen una representación diagramática bidimensional.

Esto último contrasta con la prueba de normalización de Joachimski-Matthes, en donde las derivaciones tienen una presentación lineal y que— para mantener la diferencia entre uno y otro estilo de codificación de pruebas haciendo uso de la misma analogía de manera un tanto holgada— llamamos "analítica" o "algebraica".

Esto supone que el problema consiste en:

A) Saber cómo traducir— de manera efectiva— entre el lenguaje de una teoría y otra los términos empleados que son relevantes para la prueba. Incidentalmente, balancear las similitudes y diferencias sintácticas entre distintas notaciones conlleva a homogeneizar la notación:

A.1) Con respecto a la primacía conceptual con que la sintaxis y las reglas de derivación de un lenguaje fueron diseñadas para capturar ciertas intuiciones de acuerdo con las motivaciones para desarrollar una teoría;

B) Lograr que la manipulación de entidades sintácticas sea una tarea más sencilla para poder trabajar a un nivel más confortable de abstracción;

C) Hacer que el resultado de normalización fuerte del sistema **NG** transite por el "seguro camino" de la lógica computacional.

Por otro lado, considerando que el sistema de deducción natural con reglas generales

[18] Poincaré, Henri (1905), The Value of Science; in The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science & Science and Method, G.B. Halstead (trans.), N.Y.: The Science Press (1921), pp. 210-212. En puridad, Poincaré no habla de estilos de prueba, más bien distingue entre dos tipos de mentalidades patentes en la práctica matemática: geómetras y analistas.

de eliminación es fuertemente normalizable y constituye un hecho matemático establecido[19], surge naturalmente la pregunta: ¿Cuál es el propósito de efectuar, de nuevo, la prueba?

Existen, al menos, como ha argüido el lógico John W. Dawson Jr (2015, p. 7)[20], cuatro razones que motivan la búsqueda de nuevas pruebas de resultados ya establecidos:

1) Corregir errores o llenar las lagunas que se perciben en un argumento;

2) Simplificar una prueba mediante la eliminación de hipótesis superfluas;

3) Extender el rango de validez de un teorema;

4) Hacer una prueba más perspicua.

Proponemos expandir la lista anterior aduciendo otras razones que dependen más del punto de vista subjetivo del investigador— aunque no necesariamente— pero su incidencia en la práctica matemática no es menor y hasta motivan o complementan a las anteriores:

5) Incidir en el grado de sofisticación matemática de un resultado ya sea para reducirlo o extenderlo hacia resultados que emplean métodos más o menos conocidos;

6) Hacer que un cierto resultado matemático esté en consonancia con los objetivos de alguna agenda u orientación filosófica al interior de la práctica matemática como la matemática constructiva o la matemática clásica;

---

[19] Menciones en la literatura sobre deducción natural, sin pretensión de haberla agotado, que se refieren al resultado de Joachimski & Matthes (2003) las encontramos en Troelstra & Schwichtenberg (2000), Negri, S & von Plato, J. (2001), (2011) y (2015 [**83**]), pero también en Schroeder-Heister, P. (2014 [**46**]), Zimmermann, E. (2014 [**46**]), Dyckhoff, R. (2015 [**83**]), (2016 [**49**]), y Wansing, H. (2015 [**83**]). Al respecto, todas las menciones son de carácter divulgativo en el sentido de que informan sobre la existencia de tal resultado pero no lo desarrollan o hacen uso del mismo. Tesconi, L. (2004) expone la prueba de normalización fuerte del sistema **NG** como tesis de doctorado, pero desconocemos por completo el desarrollo de tal prueba o si es efectuado mirando de cerca el resultado de Joachimski & Matthes (2003) o echa mano de los métodos expuestos en Negri, S & von Plato, J. (2001) y (2011). Hay, sin embargo, otro trabajo de la misma autora, Tesconi, L. (2013), en donde recopila partes de su tesis doctoral y expone la normalización fuerte del fragmento implicacional positivo de la lógica intuicionista empleando un “método inspirado” en Joachimski & Matthes (2003). Existe otra tesis, aunque de maestría, de Georgaras, I. (2014), presentada y aprobada en la **School of Applied Mathematics and Natural Sciences** de la **National Technical University of Athens**, en donde se clama como probado el resultado de normalización fuerte para **NG** y un resultado similar para un sistema de secuentes con conclusión múltiple; no obstante, cuando las supuestas pruebas que se ofrecen son consultadas, salta a la vista el hecho de que el “desarrollo” coincide casi punto por punto con la exposición del capítulo 8 de Negri, S & von Plato, J. (2001), lo cual resulta ser nada informativo y hasta resulta ser, más bien, un timo. Este último juicio se extiende, de hecho, a toda la tesis porque uno puede leer porciones gigantescas de Structural Proof Theory (2001) en ella, excepto, claro está, en los agradecimientos o en la bibliografía.

[20] Dawson Jr., John W. (2010). Why Prove it Again?: Alternative Proofs in Mathematical Practice, USA: Birkhäuser.

7) Convencer a una audiencia distinta sobre la validez de un resultado cuando se emplean otros métodos o se implementan distintos enfoques para la búsqueda de la prueba de un resultado;

8) Verificar[21] o confirmar un resultado;

9) Formalizar totalmente una prueba mediante un programa de verificación asistida para así establecer una biblioteca de resultados matemáticos verificados.

Este proyecto de investigación encuentra su justificación en los puntos **4)** y **8)**, principalmente, observando los puntos **5)-7)** de manera incidental. La objeción principal a la prueba de normalización de Negri-von Plato del sistema **NG** es que es abstrusa y difícil de seguir. El punto crítico no consiste en señalar que se ofrece una prueba informal ahí donde se esperaría ver una prueba formal— lo cual es, dicho sea de paso, deseable—. En cambio, la prueba es difícil de implementar, y su implementación requiere detallarse con otras referencias bibliográficas para saber cómo encajan ciertas nociones, definiciones y conceptos "geométricos"— en especial la noción de *proof thread*— con el método de prueba que se exhibe porque la prueba de normalización de Negri y von Plato es presentada bajo laboriosos argumentos verbales que no explican claramente cómo usar la notación formal de la que echan mano.

Esto no es decir, *tout court*, que la prueba de Joachimski & Matthes sea más fácil de seguir que la prueba de Negri & von Plato. En gran medida, para sostener tal juicio, ello depende del nivel de sofisticación y familiaridad del agente verificador con los métodos de la deducción natural o del cálculo lambda. En este sentido, "para observar cómo funciona en realidad una prueba, entonces debemos atender a su ejecución o [simplemente] ejecutarla uno mismo" (Robinson, 2000, p.281)[22], en lugar de

[21] Vale la pena advertir que en filosofía de la ciencia corren, al menos, dos interpretaciones del vocablo verificar, ambas variantes exegéticas del *slogan* formulado por Moritz Schlick: el significado de una proposición es el método de verificación. La primera se asocia, precisamente, con la postura desarrollada por el empirismo lógico en relación a la distinción entre proposiciones científicas significativas y aquellas carentes de significado mediante el principio de verificación. Cayó en desuso dada la constricción tan fuerte que supone reducir la verificación (o falsificación) de un enunciado al sólo empleo de métodos empíricos. La segunda, la que aquí únicamente consideramos, goza de buena salud en la matemática constructiva y está relacionada con la crítica intuicionista a la matemática clásica, y al desarrollo de una teoría del significado basada en la interpretación **BHK**. Cf. Martin-Löf, Per (2013), Verificationism Then and Now in van der Schaar, Maria (ed) (2013), Judgement and The Epistemic Foundation of Logic, USA: Springer, pp. 3-14.

[22] Robinson, J.A.(2000), Proof=Guarantee + Explanation, *Intellectics and Computational Logic*, pp. 277-294.

recurrir a evidencia de carácter inductivo o empírico— como el confiar en que algún agente distinto del verificador está en posesión de la prueba en cuestión o se encuentra publicada en algún artículo o libro.

Una de las consecuencias de seguir el tratamiento de Negri & von Plato en Structural Proof Theory (2001) sobre la teoría de la prueba consiste en "obtener resultados sobre sistemas formales de prueba que tengan significación computacional" (p. xii) con el propósito de llevar a la lógica a que atienda algunos de los retos de la matemática computacional como la formalización de pruebas matemáticas o la implementación de mejores y más acabados editores de prueba. Esto último coincide con uno de los propósitos de Joachimski & Matthes (2003) cuando expresan que identifican pasos independientes en la prueba de normalización "con el prospecto de [lograr] una formalización verificable por computadora y un análisis teórico de las pruebas de normalización" (p.59). En suma, reconstruir y verificar la prueba de normalización fuerte del sistema **NG** consiste en lograr hacer un buen matrimonio entre los dos anteriores propósitos.

Las pruebas matemáticas como cualquier creación humana precisa y bien organizada— así como ocurre con una teoría científica o una obra de arte— cuando reflexionamos acerca de su inteligibilidad deben poder "sonar" en nuestra mente como cuando atendemos un concierto en el que la orquesta toca una sinfonía y no una rapsodia.

§1.2. Los resultados de normalización de Negri-von Plato vs. Joachimski-Matthes

Este rompecabezas lógico se plantea a la luz de los resultados obtenidos por Joachimski & Matthes (2003)[23] concernientes a la prueba de normalización fuerte del sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación. La prueba que estos últimos dos autores han mostrado procede de manera directa empleando una estrategia que consiste en la caracterización inductiva del conjunto de términos fuertemente normalizables mediante la asignación de tipos, en donde las conversiones terminan independientemente del orden en que se elijan resolver.

En contraste, la prueba de normalización del sistema de deducción con reglas generales de eliminación expuesta en Negri & von Plato (2011) ha sido caracterizada como normalización "cuasi-fuerte"[24] porque la estrategia implementada requiere suponer que no hay conversiones de simplificación en una derivación y posponer las conversiones sobre la implicación computando antes el resto de las conversiones para las otras conectivas lógicas, en caso de haberlas.

Ahora bien, esto plantea dos cuestiones que parecen relevantes para resolver algunos de los problemas que se desprenden del rompecabezas planteado por Negri & von Plato y que conciernen al método empleado en la prueba de normalización, y al objeto producido por el procedimiento:

1) ¿La estrategia de posponer y segmentar la prueba de normalización como ocurre en Negri & von Plato (2001, 2011) converge con la metodología de normalización fuerte de Joachimski & Matthes (2003)?

2) La prueba de normalización de Negri & von Plato (2001, 2011) se organiza segmentando una derivación en lo que dichos autores han llamado "hilos de prueba" (*proof threads*) de acuerdo con los esquemas de introducción y eliminación de las conectivas lógicas. En cambio, la prueba de normalización de Joachimski & Matthes (2003) para efectuarse procede con términos de prueba

[23] Joachimski, Felix & Matthes, Ralph (2003), Short Proofs of Normalization for the Simply-Typed **λ**-Calculus, Permutative Conversions and Gödel´s **T**. *Archive of Mathematical Logic, 42*, pp. 59-87.
[24] Negri, S. & von Plato, J. (2011), p. 29.

(*proof terms*). ¿Existe alguna relación entre los hilos de prueba y los términos de prueba del cálculo lambda en la demostración de normalización del sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación?

Lo que se colige del planteamiento de estas dos cuestiones es que el rompecabezas planteado por Negri & von Plato consiste en un problema de traducción entre sistemas lógicos: deducción natural y cálculo lambda, en ambas direcciones.[25] Filosóficamente hablando, esto consiste en proporcionar la interpretación computacional del sistema **NG**, lo cual extendería la correspondencia **Curry-Howard**. Por otro lado, el dar una solución al rompecabezas supone, además, aplicaciones prácticas que resultan interesantes para la teoría de la computación y la lógica matemática, sobre todo, en el área de asistentes de prueba automatizados como sería, por ejemplo, extender la técnica de normalización fuerte a la lógica lineal intuicionista con reglas generales de eliminación, el cual sigue siendo un problema abierto.[26] Sin embargo, antes de alcanzar esta perla hay que asistir al proceso bajo el cual se formó. Un primer paso en esta dirección consiste en la formalización del argumento de Joachimski & Matthes (2003) para la prueba de normalización fuerte del sistema **NG**, ello con el propósito de verificar el resultado.

[25] No será en el presente proyecto de investigación que estas y otras cuestiones queden zanjadas, sino en el subsecuente proyecto de investigación que se presentará como tesis de doctorado, aunque habrá algunos atisbos.
[26] Negri, Sara (2002), A Normalizing System of Natural Deduction for Intuitionistic Linear Logic, *Archive of Mathematical Logic* 41, pp. 789-810.

§1.3. La Noción de Prueba y su Relación con la Práctica Matemática

En matemáticas, el concepto de prueba juega un papel fundamental pues, de hecho, por este concepto el estudio de la matemática se distingue del resto de las actividades humanas dedicadas a la investigación científica. Por medio de una prueba se establece un teorema matemático cuya validez resulta independiente de su contrastación con la realidad física. Pero, cómo llegamos a establecer un teorema mediante una prueba o cómo es que podemos saber que en absoluto nos encontramos frente a una prueba de cierta proposición, conlleva a considerar un complejo de preguntas en los lindes entre la lógica y la filosofía.

Resulta difícil caracterizar telegráficamente la naturaleza de la actividad intelectual como ocurre en la práctica matemática, no obstante, el resultado de tal actividad aparece siempre asociado a la enunciación de fórmulas, proposiciones o teoremas de alguna teoría matemática en particular.

En general, el significado de una teoría matemática aparece enfocado desde dos puntos de vista: sintáctico y semántico. Para la perspectiva sintáctica, desarrollada en forma completa en la teoría de la prueba, una teoría matemática está caracterizada por la organización de los postulados—mediante reglas de formación y transformación, y axiomas— con los cuales se da a conocer la teoría como un sistema formal.[27] Esta caracterización formal sobre la organización de una teoría matemática prescinde de todo, o casi todo, acto interpretativo concerniente a la naturaleza de los objetos de la teoría previo a la introducción de los términos primitivos y los postulados de la teoría, excepto que el estudio del sistema formal se trata de un sistema simbólico, el cual es manipulado empleando un alfabeto por el cual podemos generar expresiones—términos y fórmulas— y a partir de ciertos axiomas y reglas computacionales es posible deducir nuevas expresiones. Desde esta perspectiva, los objetos últimos de una teoría matemática no se refieren a nada excepto a ellos mismos en su representación simbólica. En este sentido, una prueba formal es una secuencia finita de fórmulas, sin ningún significado, que resulta ser derivable según los axiomas y reglas de inferencia—

[27] Kleene, S.C.(1952), Introduction to Metamathematics, USA: Ishi Press International (reprint 2009), pp. 80-85.

con que se ha caracterizado a una teoría matemática— en donde a cada inferencia se le asigna una derivación formal cuya última fórmula constituye la demostración de una proposición. Aunque esto confiere simplicidad y objetividad al proceso de formalización de una teoría, y tal modo de proceder en la formalización de una teoría pone en primer plano a las pruebas como objeto de investigación matemática, una prueba no consiste únicamente en la expresión escrita de un mero objeto abstracto sobre el cual decimos que la ontología matemática se encuentra poblada. A diferencia del formalismo, la perspectiva intuicionista no mantiene que la actividad matemática sea reducible a una cuestión de mera competencia lingüística sino concierne, principalmente, en el estudio de construcciones mentales[28].

En discusiones filosóficas en torno a la noción de prueba, es sólito encontrar que el concepto de prueba pueda llegar a ser confundido[29] con el objeto de la prueba (*proof-object*)[30] o con el rastro de la prueba (*proof-track*), pero una prueba es un objeto matemático mucho más abstracto y complejo que no puede identificarse con el mero texto. (**Ver Figura 1.1.**)

$$\begin{array}{l}\text{Proof--track}\left\{\begin{array}{l}\Gamma\\ \vdots\end{array}\right.\\ \qquad\qquad\quad A\ \left.\right\}\text{Proof--object}\end{array}$$

Figura 1.1

En cambio, una prueba puede entenderse como una pieza incompleta de comunicación que requiere de la ejecución de una serie de actos cognitivos (*proof-acts*)

[28] En una nota al pie de página (1) de su tesis doctoral, Brouwer dirá: "Estrictamente hablando, la construcción de la matemática intuicionista es en sí misma una acción y no una ciencia; se constituye en una ciencia, *i.e*. una totalidad de secuencias causales repetibles en el tiempo, en una matemática de segundo orden que consiste en la consideración matemática de la matemática o sobre el lenguaje de la matemática; sólo ahí uno encuentra las conexiones causales en la manera en que, por un lado, sistemas matemáticos y símbolos matemáticos o ideas, por otro lado, se suceden unos a otros". Brouwer, L. E. J. (1907), On the Foundations of Mathematics, p.61; in Brouwer, L. E. J. (1975), Collected Works, Vol. I: Philosophy and the Foundations of Mathematics, Arend Heyting (ed.), The Netherlands: North-Holland Publishing Company.

[29] La cuestión incluso se planteó a un nivel fundacional entre el formalismo y el intuicionismo cuando Brouwer (1912, p.78) señala que la diferencia entre el formalismo y el intuicionismo no estriba en el carácter de exactitud que ambas escuelas atribuyen a "las leyes matemáticas como leyes de la naturaleza" sino en el *locus* dónde reside tal exactitud: "en el intelecto humano", de acuerdo al intuicionista, o "sobre el papel", según el formalista.

[30] Sobre las nociones *proof-act*, *proof-object* y *proof-track* puede consultarse: Sundholm, Göran (1998), Proofs as acts and proofs as objects, *Theoria,* 54, pp.187-216. No obstante, tales nociones provienen de Per Martin-Löf como se indica en tal artículo.

por los cuales se muestra, efectuando un procedimiento, cómo llegar al resultado estipulado (*proof-object*) y justificado en la demostración (*proof-track*) de alguna proposición matemática en cuestión. De aquí que sea imposible identificar la construcción lingüística con la secuencia de actos inferenciales[31], aunque podemos decir que el rastro lingüístico en la prueba acompaña la actividad constructiva y hasta es posible interpretarlo como si se tratara de un instructivo mediante el cual podemos repetir la experiencia de construir ciertos objetos[32] o lograr que otros la puedan experienciar.

La práctica matemática no se reduce a un mero “juego sintáctico”— como en ocasiones se ha criticado observando de cerca el *modus procedendi* de la posición formalista[33]— pues mediante una prueba podemos conferir significado a ciertas estructuras matemáticas y describir sus propiedades.

En ocasiones, la analogía entre la matemática y el ajedrez ha sido elaborada para llevar al absurdo la posición formalista más acérrima[34] en el siguiente sentido. La teoría sobre el ajedrez— simplificando groseramente— está caracterizada por la clase de reglas que describen al juego en su totalidad como los movimientos legales asignados a cada una de las piezas— y sus posibles combinaciones entre ellas— sobre el tablero para alcanzar una determinada posición ventajosa dada una partida.

Semejantemente, una teoría matemática está caracterizada por sus axiomas y

---

[31] Brouwer, L. E. J. (1927), On the domain of definition of functions; in van Heijenoort, Jean (ed.) (1967), From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, USA: Harvard University Press, f.n. 8, p. 460.

[32] Poincaré hablando sobre el papel de la creatividad en la matemática y la percepción de las manifestaciones de la intuición en una demostración para entender su significado, comenta lo siguiente: “A mí me parece entonces, en la repetición de un razonamiento aprendido, que yo lo hubiese inventado. Esto es a menudo una ilusión, pero incluso entonces, incluso si yo no fuese tan brillante como para haberlo inventado por mí mismo, yo mismo lo reinvento en tanto que lo repito.” (Poincaré, Henri (1908), Science and Method; in The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science & Science and Method, G.B. Halstead (trans.), N.Y.: The Science Press (1921), p. 385.

[33] Weyl, H. (1930), Levels of Infinity & Weyl, H. (1940), The Mathematical Way of Thinking; in Weyl, H. (2012), Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics and Philosophy, Pesic, Peter (ed.), USA: Dover Publications.

N.B. La frase “juego sintáctico” es, ciertamente, atribuible a Weyl en su crítica al método axiomático desarrollado por Hilbert y una de sus primeras apariciones como “el juego hipotético-deductivo” ocurre en Weyl, H. (1918), The Continuum: A Critical Examination of the Foundations of Analysis, USA: Dover Publications (reprint 2015), p.18. Sin embargo, otros autores críticos del formalismo también echaron mano de tal analogía como ocurre en Russell, Bertrand (1942), How to Become a Mathematician: The Art of Reckoning; in The Art of Philosophizing and other Essays, USA: Philosophical Library (reprint 2007), p.118. En Smoryński, Craig (2012), Adventures in Formalism, UK: College Publications, en especial el capítulo V, The Crisis of Intuition, ofrece en la primera sección un breve recorrido de la analogía del formalismo pre-hilbertiano con los juegos de mesa- ajedrez, cartas, etc.- que va desde el s.XIX. Notables críticos del formalismo en este sentido están: Paul David Gustav du Bois-Rymond, William Rowan Hamilton y Gottlob Frege.

[34] Un ejemplo de esta tendencia formalizante *in extremis* es la obra matemática de Nicolas Bourbaki expuesta en los *Éléments de Mathématique.*

reglas de inferencia—y los teoremas que se pueden derivar de ella. Un teorema matemático o una fórmula derivable encuentra su análogo en el ajedrez, si consideramos una cierta disposición de las piezas sobre el tablero en donde se nos pide alcanzar cierta posición que nos permita ganar la partida en un número finito de tiradas construyendo la secuencia de movimientos necesarios para llegar a tal resultado atendiendo exclusivamente a las reglas que rigen el movimiento de las piezas. Como ejemplo de ello, puede considerarse el forzar mate con rey cooperando con torre contra un sólo rey en menos de veinte movimientos.[35]

Análogamente, una contradicción o una fórmula inderivable corresponde en el ajedrez, por ejemplo, a la imposibilidad de tener durante una partida diez reinas de un color dado sobre el tablero.[36]

Desde una perspectiva intuicionista, la analogía entre la matemática y el ajedrez, según esta comparación, colapsa cuando observamos que ni en el ajedrez, ni en la matemática, el saber manipular las piezas de acuerdo a las reglas que rigen su movimiento o el estar familiarizado con los axiomas y reglas de una teoría matemática,

---

[35] Capablanca, José Raúl (1921), Chess Fundamentals (reissued 2018), USA: SDE Publishing, p.2.

[36] Smoryński, Craig (2007), Hilbert's Programme, p.324; in Menzler-Trott, Eckart (2007), Logic´s Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen, USA: American Mathematical Society.
Viz. Al comienzo de una partida, sólo se cuenta con dos reinas sobre el tablero que compiten entre sí en lados opuestos según toque jugar blancas o negras. Los peones son las únicas piezas del ajedrez que son capaces de “transmutar” en cualquier otra pieza, excepto en peón o rey, si un peón es capaz de alcanzar cualquier escaque de la fila 8 del tablero habiendo efectuado sólo movimientos legales. A esto se le conoce como coronar o promover un peón y hay ocho de estas piezas por color tanto para blancas como para negras. Suponiendo que durante una partida, blancas o negras, no se ha perdido a la reina con que comenzó la partida y se lograron coronar todos los peones en reinas, habrá nueve reinas de un color dado y por la regla de coronación, este número no puede aumentar porque ninguna otra pieza puede coronarse en ninguna otra aun cuando alcance cualquier escaque de la fila ocho. De igual modo, por la regla de coronación, el número máximo de reinas sobre el tablero durante una partida, blancas y negras, sólo puede ser dieciocho. Discutiendo este ejemplo con el Dr. Favio Miranda, surgió naturalmente la pregunta sobre el contenido de la regla de coronación: ¿Por qué un peón no puede ser coronado en rey? ¿Por qué un peón no puede ser coronado en peón? La primera pregunta se responde teniendo en cuenta el objeto del juego de ajedrez consistente en “atacar al rey del oponente de tal manera que no pueda escapar a su captura.” (Fischer, Bobby; Margulies, Stuart; Mosenfelder, Donn (1972), Bobby Fischer Teaches Chess, USA: Bantam Books, p.20.) Desde el punto de vista lógico, lo que tenemos es una descripción definida y el referente de esa frase descriptiva, es único. Si la relación entre la regla de coronación y el objeto del ajedrez no se observara, dejaríamos de jugar al ajedrez tal y como lo conocemos. Por otro lado, suponiendo que esto no fuera óbice para tener tantos reyes en el tablero como reinas como cuando coronamos peones, muchas partidas no se ganarían ni se perderían sino resultarían en empates porque un rey, por sí sólo, no puede dar mate. En cuanto a la restricción de no coronar un peón en otro peón, el Dr. Favio Miranda apuntó una genial observación: la partida no terminaría por entrar en un l*oop* causado por la regla de coronación irrestricta. El peón es la única pieza que se mueve en forma distinta para capturar y para avanzar, es decir, captura en diagonal moviéndose un escaque y avanza hacia al frente un escaque (o dos, una única vez cada peón sólo cuando estos se encuentran en la posición inicial). Suponiendo que llega un peón a la fila 8 y corona en peón. El peón no podría moverse en ninguna otra dirección mas que hacia adelante, entonces, siguiendo la regla de coronación y manteniendo fija la misma elección de peón por peón, volvemos al caso base de la regla según la cual un peón llegando a la fila 8 puede coronarse, y así *ad infinitum*. Además, sin esta restricción, se introduce un nuevo desenlace en las partidas en donde no se pierde, ni gana, ni hay empate: la partida es potencialmente infinita.

de ninguna manera nos provee *ipso facto*, respectivamente, o con una estrategia que nos permita anticipar el desenlace de cualquier partida o con una estrategia que nos permita derivar todos los teoremas de una teoría o discernir cuáles son inderivables. En ambos casos, para saber "jugar" las reglas deben internalizarse. Sin embargo, cabe apuntar una diferencia entre el ajedrez y la matemática. La exposición de las reglas en el ajedrez debe ocurrir antes de comenzar la partida en vista del *fair play*, lo cual no forma parte de ninguno de los momentos en los que una partida de ajedrez es analizable, *i.e.* apertura, medio juego y final de juego, porque tal exposición no es parte del juego. (Si no por otra cosa, al menos, debe presuponerse que se cuenta con entendimiento, de otra manera, ¿cómo podríamos decir que seguimos las reglas del ajedrez o que han sido violadas durante una partida si no aprehendiéramos, en principio, el contenido intuitivo de las reglas?). En cambio, en la matemática la exposición de las reglas de una teoría es parte de la misma actividad de la que se ocupa el matemático y no es considerado como un preludio sobre su quehacer sino parte y parcela porque la matemática, como ciencia, tiene la peculiaridad de definir su propio objeto de estudio a diferencia de otras prácticas científicas que obtienen su objeto desde afuera o se considera dado como ocurre en las ciencias físicas[37]. (De Mol & Primiero, 2014, p. 323.) Considerando la motivación original de Gerhard Gentzen al proponer el sistema de deducción natural— es decir, "establecer un formalismo que reproduzca tan precisamente como sea posible el razonamiento lógico real [como ocurre] en las pruebas matemáticas"[38]— al transformar la lógica axiomática de Hilbert en un sistema de reglas, podemos entrever que su intuición consistió en establecer que el contenido de una teoría matemática está codificado por las reglas que caracterizan a la teoría. Pero tal contenido, no se despliega de una vez por todas, de manera actual, al concebir las reglas sino sólo *in fieri* (de manera potencial) al efectuar pruebas.

En la práctica matemática, la referencia a las pruebas con las que se demuestra una proposición matemática funcionan muchas veces como cajas negras, en el sentido en que no todos los pasos por los cuales se llegó al resultado suelen ser explícitos y en su lugar encontramos frases como : "los detalles son engorrosos y se dejan en blanco

---

[37] De Mol, Liesbeth & Primiero, Giuseppe (2014), Facing Computing as Technique: Towards a History and Philosophy of Computing, Philos. Technol 27, pp. 321-326.

[38] von Plato, J. (2017), The Great Formal Machinery Works, USA: Princeton University Press, p. 261.

para que el lector los llene", "el resultado es evidente", etc.; o se ofrece al lector el tomar una decisión acerca de la verificación de un resultado sin apelar *in toto* al proceso lógico por el cual se llegó a la prueba: "si se quiere ver una prueba completa de tal teorema, véase a tal y tal autor". Sin embargo, tales expresiones no forman parte de los pasos de una prueba ni justifican el resultado porque la prueba es construida mediante la ejecución de actos inferenciales, no de creencia. En todo caso, tenemos fuertes convicciones asociadas a la transferencia de información y en escenarios en donde tenemos dificultades para probar un teorema, más allá de saber que se trata de un resultado derivable, ver la prueba nos pondría en la posición de poseer conocimiento. (Wigderson 2019, p.107)[39]. Lo que tenemos entonces, es una prueba de cero-conocimiento porque desconocemos por completo el procedimiento mas no el resultado. Esto pone sobre la mesa un problema que concierne a la noción de prueba y a la manera en que esta es llevada a la práctica pues a menudo nos las habemos con que "el rigor en matemáticas no es lo que se practica"— como decía Saunders Mac Lane— "sino que lo que hay a mano es un estándar de rigor absoluto" (Robinson, 2000, p.279). Naturalmente, esto sugiere una distinción entre pruebas formales y pruebas informales. Un criterio pragmático empezaría con la pregunta, ¿*cui bono*, a qué tipo de agente se le comunicará la prueba, a un agente humano o a una computadora? A menudo, el grado de detalle con el que se indican los pasos en una prueba formal ha sido calificado de abrumador y hasta contraproducente para el entendimiento de lo que la prueba está llamada a comunicar.[40]Desde ese punto de vista, una prueba informal es preferible en tanto que las ideas y no el formalismo son el *dramatis personae* de la prueba, y que podría encapsularse en lo que Riemann llamó el "verdadero principio de Dirichlet: solucionar problemas con un mínimo de ciegas calculaciones y un máximo de ideas visibles."(Weyl, 1953, p. 196.)[41]

Pero este punto crítico, aunque atinado, es parcial en tanto que una de las motivaciones principales durante la llamada "crisis de la matemática" era montar

---

[39] Wigderson, Avi (2019), Mathematics and Computation, USA: Princeton University Press. **NB**. Una prueba de cero-conocimiento es una prueba que ocurre en escenarios interactivos entre dos participantes, el probador y el verificador, en donde el probador clama tener la prueba de un teorema pero no enseña al verificador la construcción que realiza la proposición y al final de la interacción el verificador no sabe nada excepto que el resultado es verdad.
[40] Robinson, J.A.(2000), p. 292.
[41] Weyl, Hermann (1953), Axiomatic Versus Constructive Procedures, in Weyl, H. (2012), Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics and Philosophy, Pesic, Peter (ed.), USA: Dover Publications, pp. 191-202.

sistemas formales para que en las demostraciones matemáticas nos "ayudaran a ver claramente… las entidades involucradas con el propósito de que la mente [tuviera] el mismo tipo de experiencia de ellas como lo tiene del color rojo o el sabor de una piña"[42] (Russell, 1903, p.xv.). En este sentido, el hacer matemáticas— actividad constituida de actos mentales— también requiere de un soporte lingüístico. Además, hay pruebas matemáticas en las que el proceso de verificación ha resultado ser casi intratable para un agente humano estándar como la del último teorema de Fermat de Andrew Wiles, la prueba del teorema de los cuatro colores de Appel & Hanken, o la conjetura de Kepler de Hales[43], y el soporte de herramientas computacionales como los asistentes de prueba ha sido fundamental para verificar dichos resultados. Como remarcan Barendregt & Wiedijk (2005, p. 2370) una prueba matemática como las que requieren de un asistente de prueba es comparable a un iceberg, en el sentido en que "considerando todos sus detalles" un agente humano está al tanto de ellos un 10%, el 90% restante son inconscientes. Por otro lado, para tener el soporte de tales herramientas hay que diseñar el programa computacional para que el autómata lo ejecute. Barendregt & Wiedijk (2005, p. 2364) estiman que la formalización de una página de un libro de texto de nivel universitario toma alrededor de cinco días de trabajo invirtiendo ocho horas al día. Ahora bien, si la rigurosidad de la matemática reside básicamente en la capacidad de construir pruebas de proposiciones matemáticas, lo que no está en juego cuando comparamos una prueba formal con una prueba informal es la (falta o exceso de) precisión o rigor formal entre una y otra sino la inteligibilidad de la prueba misma. Pero, ¿qué es lo que buscamos establecer mediante una prueba, formal o informal?

[42] Russell, Bertrand (1903), The Principles of Mathematics, USA: W.W. Norton & Company (2nd ed. Reissued 1996).
[43] Barendregt, Henk & Wiedijk, Freek (2005), The Challenge of Computer Mathematics, *Phil. Trans. R. Soc*. A 363, pp. 2351-2375.

§1.4. Los Rompecabezas Lógicos: La Forma Normal de un Rompecabezas Lógico según Turing y la Lógica Intuicionista como la Lógica de los Rompecabezas Lógicos

Alan Turing en un ensayo publicado en una revista de divulgación científica, Science News,[44] expone una versión informal de la tesis **Church-Turing** a la que instancia con la siguiente pregunta: ¿cómo uno puede decir si un rompecabezas tiene solución?

De acuerdo con Turing, un rompecabezas puede ser entendido como un reto consistente en la exhibición de un método por el cual sea posible dar una solución a una clase (potencialmente) infinita de rompecabezas que plantea un determinado problema. Un problema matemático como "el dar con la prueba de un teorema matemático dentro de un sistema axiomático", dice Turing, "es un muy buen ejemplo de un rompecabezas."(Turing, 1954, p.587.)

La similaridad entre un rompecabezas y otro, independientemente de su naturaleza concreta, es amena a la formalización y es susceptible de ser descrita de tal manera que la descripción del mismo se corresponda a la posición inicial de un rompecabezas más conocido echando mano de métodos mejor conocidos para la solución del rompecabezas menos conocido. Por ejemplo, dar mate en una partida de ajedrez comparado con el problema de encontrar la prueba formal de un teorema son procedimientos similares si identificamos las reglas que rigen el movimiento de las piezas con los axiomas de una teoría matemática y la expectativa de llegar al resultado final, ganar la partida o verificar el teorema.

En general, Turing dirá que la práctica matemática consiste en encontrar "la forma normal" o "estándar" de un rompecabezas y que esta búsqueda de su forma normal consiste en la manera de arreglar una situación hasta alcanzar una reducción simbólica aceptable de un problema, mediante la expresión matemática de su forma, teniendo en cuenta los actos que ocurren en el proceso de formalización y abstracción

[44] Turing, Alan (1954), Solvable and Unsolvable Problems; in Copeland, B. Jack (ed.) (2013), The Essential Turing: The Ideas That Gave Birth To The Computer Age; UK: Oxford University Press, pp. 576-596.

como “contar, copiar, comparar, sustituir” (Turing, 1954, p.588). “Esto significa que la forma normal para los rompecabezas es la del tipo de rompecabezas [afirma Turing] que se obtienen por sustitución”:

“Dado cualquier rompecabezas podemos encontrar un rompecabezas correspondiente por sustitución que es equivalente al mismo, en el sentido en que dada la solución de uno de ellos podemos fácilmente usarla para encontrar la solución del otro.” (Turing, 1954, p.588).

Esta proposición, carece de muchas cosas, en especial de precisión formal pero constituye una buena heurística. Llevada a la pregunta de la sección anterior, ¿qué es lo que establece y nos aporta una prueba?, podemos decir que mediante una prueba lo que buscamos mostrar es que ciertas relaciones entre objetos matemáticos se siguen, de hecho, de los postulados de una teoría. Con ello, se presuponen dos cosas al respecto sobre el papel de las pruebas en la práctica matemática (Robinson, 2000):

1) Una prueba actúa como una garantía que convence al lector, mediante evidencia, sobre la aseveración de un juicio acerca de una proposición matemática.

2) Una prueba explica por qué la aseveración de un juicio acerca de una proposición es correcta.

Lo que se indica en **1)**, concierne a la verificación sobre la correctitud de los pasos en los que una prueba es analizable y ello depende de la identificación de las varias partes de las que está compuesta— que se encuentran en una relación de dependencia entre sí— de acuerdo con los principios con los cuales se construyó y que son reconocidos por el agente que la examina.

En **2)** lo que se señala, concierne a la intuición de inteligibilidad, en el acto de construir la prueba echando mano de un método, de que el objeto de esa construcción satisface la expectativa de que un juicio acerca de una proposición sea verdadero.

Por otro lado, en lo que Alan Turing llamó la forma “normal de un rompecabezas” podemos encontrar una semejanza con lo que **L.E.J. Brouwer** (Brouwer, 1927) denominó la forma “canónica de una prueba”.[45] Como sabemos, para Brouwer la

[45] Brouwer, L.E.J. (1927), On the domain of definition of functions; in van Heijenoort, Jean (ed.) (1967), From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, USA: Harvard University Press, pp. 446-463. Dicha noción la entretuvo Brouwer en su análisis y demostración sobre ciertas propiedades del continuo intuicionista.

actividad del matemático consiste en la construcción mental de entidades. En la búsqueda de la demostración de una proposición matemática, los objetos construídos entran en una relación de dependencia entre sí mostrando una cierta estructura; es decir, construimos otro objeto, la prueba, echando mano de previas construcciones y lo que obtenemos como resultado es una construcción en donde están embebidas otras construcciones. Si en el análisis de una prueba, la estructura de la prueba puede descomponerse en inferencias estimadas elementales, entonces la prueba es canónica— siguiendo a Brouwer[46]. Ahora bien, la estructura así generada es, en general, infinita porque tal estructura captura todos los proyectos constructivos similares— si consideramos tal estructura como un "esquema de prueba" como la llama Kleene[47]— aunque su construcción lingüística sea, por necesidad, finita. A la luz de la interpretación intuicionista del infinito cuya concepción por la mente humana sólo puede ser potencial y no actual, tenemos un vistazo a dicha estructura no en la ejecución de todos los pasos en la prueba, lo cual es imposible, sino recurriendo a un método de acuerdo con el cual podamos asegurar que de "un cierto segmento inicial finito" (Brouwer, 1927, p. 461) de la prueba, éste sea construible de manera explícita siguiendo las operaciones que lo generaron.

Ahora bien, si en la formulación de la "forma normal de un rompecabezas" de la que habla Turing, sustituímos la noción de rompecabezas por la noción de prueba, podemos ver con mayor claridad la semejanza con Brouwer y que básicamente los dos convienen en lo mismo cuando habiendo seleccionado un problema matemático, usualmente, el planteamiento del problema captura una infinidad de problemas similares:

A) La noción de prueba tiene un sentido intencional consistente en proveer la solución para una clase potencialmente infinita de problemas.

B) Cuando el problema tiene una solución, la solución del mismo depende del estar en posesión de un método en el que se describa, de manera explícita, todos los procesos que un agente reconoce como los principios por cuales puede generar una prueba en un número finito de pasos.

[46] Brouwer, L.E.J. (1927), p. 460.
[47] Kleene, S. C. (1967), Mathematical Logic, USA: Dover Publications (reprint 2002), f.n. 27, p. 34.

C) El estar en posesión de un método nos permite construir pruebas para una clase potencialmente infinita de problemas.

Considerando el caso de la lógica proposicional intuicionista[48], los puntos **A)**, **B)** y **C)** quedan capturados en lo que conocemos como la interpretación **BHK**. (**Ver Tabla 1.1.**) La interpretación **BHK** puede considerarse como la motivación semántica que subyace a varios de los desarrollos de la lógica intuicionista en distintas direcciones como la lógica de predicados, la teoría de tipos intuicionista o la lógica modal. Como se ha observado, el sistema de "deducción natural es de naturaleza intuicionista" (Matthes, 2005, p. 206)[49] pues la interpretación **BHK** está internalizada en las reglas de introducción que Gentzen esquematizó.

En general, podemos decir que para el intuicionismo, el conocimiento matemático— el contenido de las proposiciones de una teoría— se obtiene mediante el acceso computacional que se desarrolla en la solución de un problema. Es decir, estamos en posición de emitir un juicio cuando contamos con la evidencia suficiente para hacerlo. De acuerdo con **Arend Heyting**, el significado de una proposición consiste en la búsqueda de la realización de una expectativa. Lo que resuelve o realiza tal expectativa es la construcción de un objeto— la prueba— que satisface la intención o se muestra la imposibilidad de satisfacerla bajo construcción alguna.[50] La explicación semántica de **Andrei Kolmogorov** es similar a la de Heyting con tal de que sustituyamos la noción de proposición por la noción de problema y reinterpretemos el sentido de que una proposición expresa la intención de resolver un problema, o que dicho problema es imposible de resolver porque carece de contenido[51]. Ahora, podemos notar que tal semántica no se construye como ocurre con los esquemas **T** de **Tarski**, en donde la noción de verdad es primitiva. En cambio, para la perspectiva intuicionista, la verdad es una noción derivativa de un par de nociones más elementales

---

[48] Para los propósitos de este trabajo, nuestra atención se fijará exclusivamente en la parte proposicional de la lógica intuicionista.
[49] Matthes, Ralph (2005), Non-strictly positive fixed points for classical natural deduction, *Annals of Pure and Applied Logic* 133, pp. 205-230.
[50] Heyting, Arend (1931), The Intuitionist Foundation of Mathematics, in Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (eds.) (1983), Philosophy of Mathematics: Selected Readings (2nd edition), USA: Cambridge University Press, pp. 52-60.
[51] Kolmogorov, Andrei N. (1932), On the Interpretation of Intuitionistic Logic, in Mancosu, Paolo (ed.) (1998), From Bouwer to Hilbert, UK: Oxford University Press, pp. 328-334.

como construcción y prueba. Sólo cuando podemos juzgar con evidencia el contenido de una proposición— es decir, mostrando una prueba— entonces podemos aseverar que tal proposición es verdadera. (**Ver Figura 1.2.**) La verdad de una proposición no tiene ningún significado para el intuicionista cuando se considera aparte de nuestro estado del conocimiento, sino que depende del mismo en lo que puede describirse como un proceso constructivo en el que ofrecemos evidencia a cada paso, en términos de prueba directa, para sostener un juicio.[52]

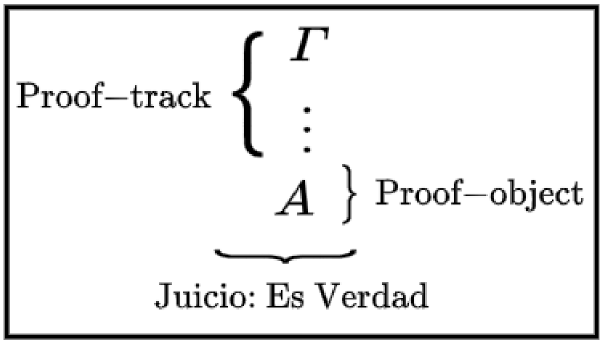


Figura 1.2

La diferencia fundamental entre el matemático *intuicionista* y el *clásico* concierne a la manera en que conciben la relación entre la noción de verdad y la noción de prueba. Para el *intuicionista*, verdad es una manera de juzgar la correctitud de una aseveración cuando la actividad constructiva del sujeto cognoscente, que se desenvuelve en el movimiento del tiempo, experimenta la realización de sus proyectos constructivos. La verdad no se predica sobre fórmulas sino sobre construcciones que el sujeto cognoscente reconoce como la evidencia necesaria para sostener un juicio. Es decir, una proposición no es verdadera antes de que tal proposición sea efectivamente probada.[53] El acto de probarla es lo que la hace verdadera. Construir una prueba es lo que permite tener experiencia de la verdad, experiencia mental a la que tenemos acceso mediante computaciones e inferencias.

Para el *clásico*, verdad es una propiedad que adscribe a aquello que yace fuera del desenvolvimiento de su actividad cognitiva e incluso la considera como algo irreductible y eterno. En cuanto a lo que constituye una prueba, para el *intuicionista* es

[52] Martin-Löf, Per (1987), Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof, *Synthese* 73, pp. 407-420.
[53]Heyting, Arend (1971),Intuitionism: An Introduction, The Netherlands: North-Holland Publishing Company, p. 3.

una actividad que preserva computabilidad; para el *clásico*, es la justificación de aquello que preserva la verdad[54].

Ahora bien, tomando en consideración las tres nociones principales— actos inferenciales, objeto de la prueba y rastro de la prueba— bajo las cuales el análisis intuicionista explica el proceso computacional por el cual estamos justificados a aseverar que conocemos una proposición matemática, nos permite establecer una epistemología de la práctica matemática centrada la verificación formal. Sin embargo, como ha sugerido Artemov 2017(pp.15-128), dicho análisis es posible reenfocarlo para tratar problemas filosóficos "tradicionales" que conciernen a la fundamentación de la epistemología pero abordando la cuestión desde un enfoque constructivo. En particular, la tan traída y problemática caracterización del conocimiento como *creencia verdadera justificada*— la cual ha sido en la filosofía contemporánea vapuleada y objeto de crítica mediante los contraejemplos Russell-Gettier— es susceptible de ser validada desde la epistemología intuicionista.

Las motivaciones para criticar tal paradigma acerca de lo que constituye el conocimiento son muy diversas, ninguna de las cuáles nos ocuparemos aquí y se han planteado, sobre todo, en contextos no-matemáticos. Al respecto, mejor, recomendamos al lector consultar la bibliografía pertinente al caso[55].

No obstante, la crítica de tal paradigma apunta hacia escenarios epistemológicos indeseables que también han sido observados en la posición *realista* asociada a los supuestos que entretiene el *clásico* como cuando afirma que conoce algo pero se proporcionan justificaciones erróneas :

1) Partiendo de "juicios ciegos y meras suposiciones." (Sundholm 2009, p. 272.)[56]

2) Reconoce la posibilidad de "verdades incognoscibles". (Sundholm 1994, p. 376.)[57]

3)Postula propiedades de objetos matemáticos (*fleeing properties*) mediante definiciones que admiten casos indecidibles. (Brouwer 1981, pp. 6-7.)

---

[54] van Atten, Mark (2004), On Brouwer, Canada: The Wadsworth Philosopher Series, p. 19.

[55] J. Ichikawa, M. Steup, in: Edward N. Zalta (Ed.), The Analysis of Knowledge, Summer 2018 ed., in: The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2018. URL https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/knowledge-analysis/.

[56] Sundholm, Göran (2009), A Century of Judgement and Inference, 1837-1936 in Haaparanta, Leila (ed.) (2009), The Development of Modern Logic, New York: Oxford University Press.

[57] Sundholm, G. (1994), Ontologic versus Epistemologic: Some Strands in the Development of Logic, 1837-1957, in Prawitz, D. & Westersähl (eds.) (1994), Logic and Philosophy of Science in Uppsala: Papers from the 9th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ejemplo de: **1)** Independientemente del proceso de contar, se cae una caja de cerillos al piso y sin ningún fundamento estimo que 48 de ellos cayeron fuera de la caja, y se encuentran en el piso. En una inspección más cercana del hecho, resulta que efectivamente 48 cerillos cayeron al suelo. **2)** No admite más que una formulación existencial (del tipo acusada de *teológica*) porque un ejemplo actual contradice la hipótesis. **3)** En el estado actual de nuestro conocimiento, se postula la existencia de una función que corre sobre el dominio de los números naturales definiéndose de la siguiente manera:

$f(x) := \{ 1\ si\ la\ Hipótesis\ de\ Riemann\ es\ verdad\ \ o\ \ 0\ si\ la\ Hipótesis\ de\ Riemann\ es\ falsa \}$

Sea x cualquier número natural, digamos 5, dado nuestro actual estado del conocimiento el contenido computacional de dicha función no es computable.[58]

Las pruebas matemáticas nos proporcionan el modelo computacional más estricto de verificación y los ejemplos anteriores ilustran cómo puede ofrecerse justificación errónea al juicio de que se conoce algo. No son los únicos que ocurren en matemáticas ni se limitan al modo de razonar del *clásico* aunque frecuentemente es representante del desenfreno. Como arguye Artemov 2017(p. 128), reinterpretando constructivamente la noción de *verdad* al modo intuicionista— es decir, una proposición es verdadera si existe una prueba de dicha proposición— y la noción de *creencia justificada* como "la justificación de esta proposición p está al alcance del agente y el agente la reconoce como tal, y la *creencia* del agente está basada en p y no en alguna otra evidencia extraña" (Artemov, 2017, p. 128), — como paralelamente ocurre en lógica cuando el agente verificador reconoce las condiciones de derivabilidad según la interpretación **BHK** y entiende la noción de prueba directa— entonces tenemos que el intuicionismo valida el paradigma según el cual estar en posesión de *creencia verdadera justificada* sobre algo es tener conocimiento sobre eso. Este tipo de análisis no es completo sino reductivo porque reduce el conocimiento al estar en posesión de evidencia de tal manera que la justificación de una aseveración sea constructiva. (Artemov, 2017, pp. 128-129.)

Pero, visto el conocimiento como un proceso dinámico analizable según los actos epistémicos que emprende un agente para llegar a conocer algo bajo ciertas

[58] Un ejemplo muy similar aparece en Sundholm, Göran (2009), p. 285.

condiciones, nos proporciona un mejor entendimiento acerca de cómo evaluar los contraejemplos Russell-Gettier dados ciertos componentes epistémicos (o en su defecto, ausencia) en una determina situación epistémica[59]. Una consecuencia interesante para la teoría de la prueba que deja entrever este análisis— desde el punto de vista epistemológico— es que probar una proposición y verificar una prueba se tratan de procesos indistinguibles.

La Interpretación BHK
1. Una prueba directa de la proposición $A \& B$ consiste en una prueba de A y una prueba B.
2. Una prueba directa de la proposición $A \vee B$ consiste en una prueba de A o en una prueba de B.
3. Una prueba directa de la proposición $A \supset B$ consiste en una prueba de B a partir de la hipótesis de que existe una prueba de la proposición A.
4. Una prueba directa de la proposición $\perp$ es imposible.

Tabla 1.1.

59 Como concluye Brouwer (1948): "La matemática intuicionista es arquitectura interior y la búsqueda por fundamentar la matemática es una indagación interna con consecuencias reveladoras y liberadoras, incluso en dominios no-matemáticos del pensamiento." (Cf. Benacerraf, P. & Putnam, H. (1983), p. 96.)

§1.5. El Sistema NG: Unas Gotas de Historia

Entendida de manera restringida, la teoría estructural de la prueba se refiere a las relaciones que cabe establecer entre sistemas **N** de deducción natural y sistemas **G** del cálculo de secuentes. De hecho, la motivación teórica que llevó a la formulación del sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación, **NG**, consistió en tratar de responder a la pregunta: ¿es posible hacer una traducción de una derivación empleando deducción natural con una derivación que eche mano del cálculo de secuentes, en la que no sólo se establezca el mismo resultado— de ser derivable— sino que se conserve la misma estructura y que "refleje el orden de aplicación de las reglas del cálculo de secuentes" en un sistema de deducción natural?[60]

La cuestión quedó zanjada estableciendo un isomorfismo entre sistemas de deducción natural y el cálculo de secuentes, a pesar de que ambos sistemas no comparten el mismo conjunto de reglas—como las reglas estructurales que son explícitas en el cálculo de secuentes, pero que en la deducción natural están ausentes. En particular, una primera dificultad para la deducción natural en ausencia de **reglas estructurales** consiste en saber cuál es la relación entre los resultados de normalización y la eliminación del corte (***cut-elimination***) en el cálculo de secuentes, o cómo interpretar la regla de contracción (***contraction***) y debilitamiento (***weakening***). Estos son algunos de los rompecabezas que motivaron la investigación sobre sistemas de deducción natural isomórficos al cálculo de secuentes[61]. Con respecto a las dificultades que plantea la relación entre normalización y la eliminación del corte, consideremos la fórmula de Ekman[62]:

$$\boxed{\neg (A \supset\subset \neg A)}$$

[60] von Plato, J.(2000), A Problem of Normal Form in Natural Deduction, *Math Log Quart*. 46, 1, pp. 121-124.
[61] von Plato, J.(2001) Natural Deduction with General Elimination Rules, *Arch. Math. Logic* 40, pp. 541-567; Negri & von Plato (2001); Negri & von Plato (2011); von Plato, J. (2017). The Great Formal Machinery Works, USA: Princeton University Press, Ch. 9.
[62] **$A \supset\subset B \stackrel{\text{def}}{=} (A\supset B)$ & $(B\supset A)$** .

Según **Jan Ekman**[63], hay pruebas no-canónicas en el cálculo proposicional de deducción natural— en su versión tanto intuicionista como clásica— que no tienen una prueba directa o que contienen una subderivación con la siguiente estructura:

$$\dfrac{A \supset \neg A \qquad \dfrac{\neg A \supset A \quad \neg A}{A} \supset E}{\neg A} \supset E$$

Esta clase de fórmulas con pruebas no-normalizables, la obtuvo Ekman trabajando sobre una traducción del lenguaje de la teoría de conjuntos *näive* al lenguaje de la lógica proposicional usando el sistema de deducción natural **NI** y **NK** de Prawitz (1965), con el propósito de encontrar un criterio sintáctico para abordar las paradojas. Su *dictum* al respecto, como el de Prawitz[64], es que las paradojas son argumentos no-normalizables.

La fórmula anterior se puede interpretar como la paradoja de Russell sustituyendo A por "la clase de todas las clases que no se contiene así misma pertenece a ella misma"[65]. Como estructura, la anterior derivación Ekman propuso tratarla como si fuera una nueva clase de convertibilidades a las anteriormente descritas para los sistemas **N** (*détours*, permutaciones y simplificaciones)[66] y a la que llamó **P-reducción**:[67]

[63] Ekman, Jan (1998), Propositions in Propositional Logic Provable Only By Indirect Proofs, Math. Logic Quart. 44, pp. 69-91

[64] Prawitz, Dag (1965), Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study, USA: Dover Publications (reprint 2006), Appendix A.

[65] Negri & von Plato (2001), p. 194.

[66] Ahora tan sólo se mencionan, pero en el siguiente capítulo serán objeto de indagación para entender a derechas en qué consiste el proceso de normalización. En una prueba ocurre: un *détour* cuando la conclusión de una regla de introducción es simultáneamente la premisa mayor de una regla de eliminación; una permutación, cuando la premisa mayor de una regla de eliminación es simultáneamente conclusión y premisa mayor de otra regla de eliminación; y una simplificación, cuando la conclusión de una regla de eliminación se obtiene sin necesidad de la regla de eliminación. Normalizar consiste en remover esas "redundancias" de la prueba con el propósito de simplificarla.

[67] Ekman, Jan (1998), p. 8.

$$\dfrac{A \supset \neg A \quad \dfrac{\neg A \supset A \quad \neg A}{A} \supset E}{\neg A} \supset E \qquad \underset{Conv}{\rightsquigarrow} \quad \neg A$$

Sin embargo, de admitirse tal convertibilidad no se propagan las propiedades de normalización en pruebas normales sino que se introducen contraejemplos. Dicha derivación, siguiendo a von Plato, es “indirecta” en el sentido en que la derivación de la conclusión, $\neg A$, puede reemplazarse por la hipótesis de $\neg A$,[68] pero tal reemplazo tiene el inconveniente de producir una derivación en donde $\neg A$ es obtenida por regla de introducción de la implicación aunque la conclusión, $\neg A$, es la conclusión de la regla de eliminación de la implicación, lo cual es redundante. Empleando el cálculo de secuentes **G3ip**[69], es posible construir una prueba de esa fórmula empleando sólo reglas lógicas sin tener que echar mano de ninguna regla estructural, en especial la regla de corte:

Derivación de la fórmula de Ekman en $G3ip$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \supset A, A \supset \neg A, A \vdash A \quad \dfrac{\neg A \supset A, \neg A, A \vdash A \quad \bot, \neg A \supset A, A \vdash \bot}{\neg A, \neg A \supset A, A \vdash \bot} L\supset}{\neg A \supset A, A \supset \neg A, A \vdash \bot} L\supset}{\neg A \supset A, A \supset \neg A, \vdash \neg A} R\supset \qquad \dfrac{A, A \supset \neg A \vdash A \quad \dfrac{\neg A, A \vdash A \quad \bot, A \vdash \bot}{\neg A, A \vdash \bot} L\supset}{A, \neg A \supset A \vdash \bot} L\supset}{\neg A \supset A, A \supset \neg A \vdash \bot} L\supset}{\dfrac{(A \supset\subset \neg A) \vdash \bot}{\vdash \neg (A \supset\subset \neg A)} R\supset} L\&$$

Pero ¿es posible obtener una prueba normal de la misma fórmula en deducción natural? ¿Hay algún procedimiento en deducción natural por el cual no sólo se pueda derivar el mismo resultado que en el cálculo de secuentes sino que conserve la misma estructura de la prueba?

La respuesta es afirmativa haciendo un cambio sobre la regla usual de

[68] von Plato (2000), p.21.
[69] Negri & von Plato (2001), pp. 25-46.

eliminación de la implicación que corresponda, por un lado, a la regla izquierda de la implicación en el cálculo de secuentes y, por otro lado, a la adopción de un principio de inversión más general como el que propugnaron **Gerhard Gentzen** y **Dag Prawitz** para justificar el significado de las conectivas lógicas. Las reglas usuales de eliminación, excepto la de la disyunción, tienen la característica de que la fórmula que aparece inmediatamente arriba de la línea de inferencia, aparece también, como parte propia, como subfórmula en la conclusión.

Para dar un trato homogéneo a todas las reglas de eliminación, se planteó hacer a todas las reglas "anormales" como en el caso de la eliminación de la disyunción, pero sin que se perdiera la propiedad de la subfórmula— condición sobre la que se apoya la noción de prueba normal o canónica.

El sistema de reglas de eliminación general para la deducción natural así obtenido es el desarrollado por Negri & von Plato. La derivación de la fórmula de Ekman tiene la siguiente forma:

Derivación de la fórmula de Ekman en NG

$$\dfrac{\dfrac{(A \supset\subset \neg A)^9 \qquad \dfrac{(\neg A \supset A)^8 \qquad \dfrac{\dfrac{(A \supset \neg A)^7 \quad A^3 \quad \dfrac{\neg A^2 \quad A^3 \quad \bot^1}{\bot}\,{\scriptstyle \supset E,1}}{\bot}\,{\scriptstyle \supset E,2}}{\neg A}\,{\scriptstyle \supset I,3} \qquad \dfrac{(A \supset \neg A)^7 \quad A^6 \quad \dfrac{\neg A^5 \quad A^6 \quad \bot^4}{\bot}\,{\scriptstyle \supset E,4}}{\bot}\,{\scriptstyle \supset E,5}}{\bot}\,{\scriptstyle \supset E,6}}{\bot}\,\&E,7,8}{\neg(A \supset\subset \neg A)}\,\supset I,9$$

Como puede observarse, la prueba tiene la misma estructura que la prueba efectuada en el cálculo de secuentes, es decir, es isomórfica (la derivación en **NG** utiliza las mismas reglas y conserva el mismo orden de aplicación que en **G3ip**) y se puede hacer una traducción de ida y vuelta en ambos sistemas empleando un algoritmo de reescritura.[70]

Las investigaciones de Ekman en torno al criterio sintáctico para encuadrar a las paradojas es, sin duda, un tema interesante pero que está fuera de los objetivos de este trabajo. Su mención, sin embargo, forma parte de la historia por la cual Negri &

[70] Negri & von Plato (2001), pp. 172-184; von Plato, J. (2013), Elements of Logical Reasoning, USA:Cambridge University Press, pp. 71-73.

von Plato formularon el sistema **NG** para resolver el problema de normalización que Ekman puso sobre la mesa al buscar establecer una correspondencia entre deducción natural y cálculo de secuentes.

§2.1. ¿Qué es normalizar?

"[...]Reason taught us to affirm or deny only where we are certain; and beyond our Knowledge we cannot do either."[71]
Jonathan Swift.

En general, la noción de normalización tiene un claro importe computacional— *grosso modo*— nos permite calcular, dada una función y un argumento, si un procedimiento nos conduce a algún resultado, considerado final, durante su ejecución. El propósito de normalizar consiste en lograr transformar una expresión matemática— de una determinada teoría— a una forma tal que sea irreducible, *i.e.* forma normal. Las formas normales de una teoría forman una subclase particular del tipo de *expresiones bien formadas* (***well-formed-expressions***) que pueden generarse a partir del lenguaje de una teoría. Por ejemplo, $5 + 2$ y 7 son expresiones aritméticas, y sabemos que $5 + 2 = 7$, pero $5 + 2$ no es una expresión aritmética en forma normal; en cambio, 7 es la forma normal de $5 + 2$. En la teoría de la prueba, normalizar consiste en un proceso computacional mediante el cual transformamos una derivación no-normal— al remover de ella todas las partes que resultan innecesarias para la justificación del resultado en la demostración empleando reglas de reescritura— que tiene como efecto general la simplificación del argumento. Si una derivación es normalizable, entonces la derivación tiene una forma normal. Hay varias nociones ligadas a la normalización que son fundamentales para la teoría de la prueba tales como la derivabilidad y la propiedad de la subfórmula. Dado un sistema de reglas que caracterizan a una teoría lógica, ¿cómo podemos discernir si una fórmula es o no derivable? Una fórmula es **derivable**, si existe una prueba de dicha fórmula pero, en general, esta pregunta es indecidible en lógicas suficientemente expresivas. No obstante, sabemos que hay varios sistemas formales en los que la indecibilidad no ejerce monopolio al responder la pregunta.

Como ocurre en el caso del lenguaje de la aritmética en donde la clase de *expresiones bien formadas* puede subdividirse entre la clase de expresiones en forma normal y la clase de expresiones en forma no-normal, en la teoría de la prueba

[71] Swift, Jonathan (ed.1735), Gulliver´s Travels, G.B.: Collins, p.286. **Viz**. Brouwer llamó pre-intuicionistas a Poincaré, Borel y Lebesgue. Es posible, dada esta cita, considerar a Swift como un pre- pre-intuicionista.

podemos distinguir algo semejante con respecto a la propiedad de derivabilidad. En este sentido, lo que resulta es la clase de pruebas bien formadas (***well-formed-proofs***) que puede subdividirse entre la subclase que contiene a los teoremas en forma normal y la subclase que contiene a los teoremas en forma no-normal. El parteaguas de esta distinción recae en la propiedad de una fórmula de ser **directamente derivable**. En el sistema proposicional de deducción natural con reglas generales de eliminación, tanto en su versión intuicionista como clásica, la respuesta a la pregunta ¿cómo saber si una fórmula es o no directamente derivable?, recibe una respuesta casi inmediata[72]:

Definición: <u>Derivabilidad Directa</u>. La propiedad de una fórmula de ser directamente derivable consiste en que una prueba de dicha fórmula es convertible a una prueba en la que la última regla empleada en la derivación, se trata de una regla de introducción.

En general, una fórmula que cumpla con la propiedad de ser directamente derivable a partir del sistema de reglas de una teoría, se le conoce como una **prueba normal** o **canónica**, o **prueba directa**. Cuando no es este el caso, decimos que se trata de una prueba con una forma **no-canónica** o **no-normalizada**, o de una **prueba indirecta**. Distinguir entre pruebas canónicas y no-canónicas, no es querer decir que unas pruebas sean válidas y las otras inválidas, respectivamente, como cuando hablamos de proposiciones y decimos que una proposición es verdadera o falsa. Una proposición falsa sigue siendo una proposición, pero no ocurre lo mismo cuando se trata de una prueba porque una "prueba inválida" no es, en puridad, ninguna prueba.

La condición de una prueba normal en el sistema **N** consiste en que las premisas mayores de reglas de eliminación no hayan sido obtenidas por regla de introducción o por la regla de eliminación de la disyunción. En contraste, una prueba normal o canónica en el sistema **NG** corresponde a la construcción de la derivación de una proposición en la que las premisas mayores de reglas de eliminación sean hipótesis[73]. Más arriba se mencionó la relación entre el último problema de Hilbert y la

[72] von Plato, J.(2013), p.45.
[73] Negri, S & von Plato, J. (2001), pp. 9 y 201.

normalización. En general, resulta difícil caracterizar qué es lo que haría a una prueba ser 'simple' o cómo es que una prueba pueda 'simplificarse' pero Gentzen mediante la noción de normalización introdujo un criterio metamatemático que permite distinguir la prueba de una proposición de acuerdo a la manera (directa o indirecta pero siguiendo los postulados de la teoría) en la que se puede construir su estructura.

Una prueba canónica tiene una forma peculiar (**Ver Figura 2.1**) que consiste en que la derivación comienza con reglas de eliminación (parte analítica) y termina con reglas de introducción (parte sintética). En la parte analítica, las reglas de eliminación nos permiten inferir "hacia adelante" a partir de ciertas hipótesis y, por dualidad, en la parte sintética las reglas de introducción nos permiten inferir "hacia atrás" para establecer la conclusión (Pfenning, 2000, p.87).[74] Durante la búsqueda de la prueba, caso de que la haya, estas dos estrategias deben coincidir. En cambio, una prueba no-canónica tiene pasos sancionados como *détours*, permutaciones o simplificaciones (en general, las llamadas convertibilidades) que rompen con esta estructura, pero que dados los esquemas de conversión puede transformarse en una prueba canónica.

$$\boxed{\overbrace{A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_m}^{\substack{\text{Parte Analítica}\\ E-Reglas}},\ \underbrace{\ldots,\ A_{n-1},\ A_n}_{\substack{\text{Parte Sintética}\\ I-Reglas}}.}$$

Figura 2.1

El sistema **NG** emplea árboles de derivación como ocurre en la presentación del sistema **N** originalmente creado por Gentzen[75] y posteriormente retomada por Prawitz[76]. Menos que responder *in toto* a una cuestión de estilo, los árboles de derivación en contraste con la forma lineal— como ocurre en la presentación del sistema **N** de Kleene [77] o de Fitch, por ejemplo— permiten conceptualizar de manera más clara, empleando

[74] Pfenning, Frank (2000), Structural Cut Elimination I: Intuitionistic and Classical Logic, *Information and Computation* 157, pp. 87-141.
[75] Negri, S. & von Plato, J (2011), p. 1.
[76] Prawitz, D. (1965), Chapter I and Appendix C.
[77] Kleene, S. (1967), pp. 50-58.

diagramas geométricos, cómo afectan los esquemas de conversión la normalización de una prueba, situación que la forma lineal parece “encubrir”[78].

Para ilustrar este último punto, comparemos la demostración del siguiente teorema $\vdash((A \vee B)\&(A \vee C)) \supset (A \vee (B\&C))$ empleando árboles de derivación con la demostración en forma lineal del mismo teorema.

En **NG**, la derivación del teorema en forma normal es:

$$\cfrac{\cfrac{((A\vee B)\&(A\vee C))^1 \qquad \cfrac{(A\vee B)^2 \quad \cfrac{A^4}{A\vee(B\&C)}\vee I \quad \cfrac{(A\vee C)^3 \quad \cfrac{A^6}{A\vee(B\&C)}\vee I \quad \cfrac{\cfrac{B^5 \quad C^7}{B\&C}\&I}{A\vee(B\&C)}\vee I}{A\vee(B\&C)}\vee E,7,6}{A\vee(B\&C)}\vee E,4,5}{A\vee(B\&C)}\&E,3,2}{((A\vee B)\&(A\vee C))\supset(A\vee(B\&C))}\supset I,1$$

La versión normalizada del teorema en **N** es:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{((A\vee B)\&(A\vee C))^1}{A\vee B}\&E_1 \quad \cfrac{A^2}{A\vee(B\&C)}\vee I \quad \cfrac{\cfrac{((A\vee B)\&(A\vee C))^1}{A\vee C}\&E_2 \quad \cfrac{A^4}{A\vee(B\&C)}\vee I \quad \cfrac{\cfrac{B^3 \quad C^5}{B\&C}\&I}{A\vee(B\&C)}\vee I}{A\vee(B\&C)}\vee E,5,4}{A\vee(B\&C)}\vee E,2,3}{((A\vee B)\&(A\vee C))\supset(A\vee(B\&C))}\supset I,1$$

[78] von Plato, J. (2013), p. 31.

Ahora, empleando un generador de pruebas automatizado para obtener la derivación lineal,[79] el autómata arrojó la siguiente demostración:

```
1     assume (A + B) & (A + C).
2       A + B.
      &E1 1
3       A + C.
      &E2 1
4       assume A.
5         assume A.
6           A + B & C.
      +I1 5
7         therefore A => A + B & C.
      =>I 5,6
8         A + B & C.
      =>E 7,4
9       therefore A => A + B & C.
      =>I 4,8
10      assume B.
11        assume C.
12          B & C.
      &I 10,11
13          A + B & C.
      +I2 12
14        therefore C => A + B & C.
      =>I 11,13
15        A + B & C.
      +ES 3,9,14
16      therefore B => A + B & C.
      =>I 10,15
17      A + B & C.
      +ES 2,9,16
18    therefore (A + B) & (A + C) => A + B & C.
      =>I 1,17
```

Resulta interesante comparar la estructura de las tres pruebas entre sí. Por ejemplo, el diagrama de la prueba en **N** está a un paso de la estructura de la derivación en **NG** si convertimos la fórmula $((A \vee B)\&(A \vee C))$ en la premisa mayor de E— en su versión generalizada— en lugar de producir dos clones de esa misma hipótesis en la prueba. La prueba automatizada está vertida en el sistema **N**, de modo que una comparación "justa" debe hacerse con el árbol generado por las reglas de **N** pese a que la derivación no sea normal bajo ningún criterio. En el análisis de la deducción,[80] *i.e.*, las justificaciones que se encuentran en la línea inmediatamente inferior del número de paso para la inclusión de las fórmulas en la derivación, puede verse la codificación de

[79] http://teachinglogic.liglab.fr/DN/ **N.B.** El programa que generó la prueba que se exhibe arriba, está implementado en Ocaml y utiliza las reglas de derivación del sistema **N** *à la* Gentzen-Prawitz. Sería interesante lograr implementar el sistema **NG** en un asistente de prueba como Coq que nos permita mecanizar las pruebas de normalización y así, logrando una implementación más adecuada, señalar y corregir el tipo de imperfecciones como las que exhibe el autómata implementado en Ocaml.

[80] Kleene, S. (1967), **fn** 34 p. 40.

un árbol de derivación empleando un algoritmo de traducción[81].

Observando la justificación de los pasos 5-9, construimos el siguiente árbol de derivación:

$$\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^5}{A\vee(B\&C)}\vee I}{A\supset(A\vee(B\&C))}\supset I, 5 \quad A^4}{A\vee(B\&C)}\supset E}{A\supset(A\vee(B\&C))}\supset I,\ 4}$$

En la versión lineal de la prueba, hay un *détour* sobre la implicación en los pasos 7-8 que se corresponden en el árbol de derivación con el par de reglas $\supset I - \supset E$, pasos totalmente innecesarios como redundantes.

Por otro lado, la derivación lineal tiene otros pasos innecesarios como inusuales en formulaciones estándar de sistemas **ND** que no son convertibilidades— los cuales están asociados a la forma de las reglas con las que está programado el autómata, como asumir dos veces la hipótesis A con distinta etiqueta (pasos 4 y 5) o la descarga de las hipótesis B y C mediante $\supset I$ (pasos 14 y 16, respectivamente) para después usar $\vee E$ como si la aplicación de la regla fuera en un sistema tipo Hilbert (pasos 15 y 17)— pero que, de igual modo, hacen que el árbol de derivación sea aún más grande que cualquiera de las dos derivaciones anteriores y no lo podamos exhibir en la página. Esta comparación da una intuición más palpable, con respecto a lo que constituye normalizar una derivación y el modo de tratar las convertibilidades, acerca de las ventajas de emplear árboles de derivación en sistemas **ND** *versus* la forma lineal.

Por último, señalamos que para probar normalización del sistema de deducción natural hay, por lo menos, dos estrategias:

A) Por traducción entre sistemas **G** y **N**. Estableciendo una correspondencia entre deducción natural y el cálculo de secuentes apropiado, como vimos más arriba, se traduce una derivación no-normal del sistema **N** al sistema **G** elegido, observando que en la derivación no se emplee la regla de corte, y se vuelve a

[81] von Plato, J. (2013), pp. 32-33.

traducir la derivación al sistema **N.** El resultado consistirá, entonces, en una derivación normal.

B) Probando directamente normalización haciendo uso de reglas computacionales para convertir cualquier redundancia sancionada y transformar una derivación a su forma normal.

El curso indicado por el punto **B)** para la demostración de normalización fuerte del sistema **NG** es el que seguimos en este trabajo, el cual será objeto del siguiente capítulo.

§2.2. ND *à la* Negri-von Plato vs. ND *à la* Gentzen-Prawitz

El sistema **NG** (ND à la Negri-von Plato) introduce, al menos, con respecto al sistema **N** (ND à la Gentzen-Prawitz) dos variaciones a las formalizaciones usuales de la deducción natural:

A) Generaliza el principio de inversión,

B) Todas las reglas de eliminación se asemejan a la regla usual de $\vee E$.

El llamado principio de inversión fue designado por Dag Prawitz (Prawitz, 1965, pp. 32-35) para nombrar una intuición que emana de Gerhard Gentzen acerca del contenido de las reglas lógicas según la cual "las introducciones presentan, por así decirlo, las definiciones de los signos en cuestión y las eliminaciones son, de hecho, consecuencias de [asumir tales definiciones]." (Negri & von Plato, 2015, p. 240.)[82] La motivación del principio, de acuerdo con Gentzen y Prawitz, consiste en observar que las reglas de introducción nos indican el modo de conocer el significado de una proposición más compleja, la que introduce la regla en cuestión, cuando contamos con evidencia suficiente para construirla— siguiendo la interpretación **BHK**. Las reglas de eliminación, en cambio, nos proveen del modo en que podemos usar correctamente tales proposiciones más complejas toda vez que conocemos los principios por los cuales generarlas. La discusión se reduce, desde un punto de vista lógico, al modo bajo el cual podemos justificar las reglas de eliminación a partir de las reglas de introducción, corrección local (***local soundness***) y al modo por el cual asumiendo las reglas de eliminación podemos reconstruir la prueba de una proposición usando las reglas de introducción, completitud local (***local completeness***).[83] (Pfenning, 2009, p.1.) Cuando estas dos propiedades coinciden, tenemos armonía entre reglas de introducción y reglas de eliminación. El caso paradigmático para instanciar el primer criterio, corrección local, es considerar las reglas computacionales que remueven a los *détours* en una derivación; por ello, Prawitz asume que el teorema de normalización es consecuencia de asumir el principio de inversión (Prawitz, 1965, p.34). El segundo

[82] Negri, S. & von Plato, J.(2015), Meaning in Use, in Wansing, H.(ed.) (2015). *Dag Prawitz on Proofs and Meaning*. Springer International Publishing, pp. 239-257.
[83] Pfenning, Frank (2009), Lecture Notes on Harmony.
https://www.cs.cmu.edu/~fp/courses/15317-f09/lectures/03-harmony.pdf

criterio, completitud local, lo vemos en lo que se conoce como η**-expansiones**[84]. En general, podemos decir que las reglas de eliminación no introducen ninguna clase de información nueva que por medio de las reglas de introducción no pudiéramos haber obtenido por simple inspección.

En Negri & von Plato, el principio es generalizado con la motivación ulterior de encontrar y no sólo justificar las reglas de eliminación para **NG**. Su formulación es la siguiente: "Cualquier consecuencia que se siga de los principios directos para derivar una proposición debe seguirse de esa proposición." (Negri & von Plato, 2001, p. 6) Aquí, lo que se entiende por los principios directos no es otra cosa que la interpretación **BHK**. Ahora bien, Negri & von Plato consideran que la formulación Gentzen-Prawitz del principio de inversión para determinar las reglas de eliminación está un poco limitada, en el sentido en que las reglas de eliminación usuales, a excepción de $\vee E$, concluyen fórmulas que son subfórmulas propias de la premisa mayor, como es observable, por ejemplo, al efectuar los esquemas de conversión de los *détour* en donde el resultado de las conversiones nos remite al caso base de los principios. (El caso base de los principios, considerando $A\&B$, sería concluir A y B por separado, la generalización sugiere concluir cualquier cosa que se siga de los principios toda vez que se introdujo la fórmula $A\&B$.) En cambio, lo que ellos buscan es tener control total de todas las consecuencias que se siguen de haber introducido una proposición más compleja por medio de una regla de introducción, y ello incluye el caso en el que podamos usar recursivamente los principios por los cuales construimos e introducimos proposiciones, lo cual complejiza la tarea de normalizar, aunque es uniforme, pues se consideran todas las combinaciones posibles entre los esquemas de conversión.

El punto de su observación, informada por las investigaciones de **Per Martin-Löf**, consiste en notar que las reglas de introducción nos proporcionan objetos canónicos y una definición inductiva del conjunto de fórmulas derivables en el sistema; las reglas de eliminación corresponden a un principio recursivo de prueba por el cual podemos descomponer una prueba formal en los elementos canónicos que reconocemos mediante las reglas de introducción.(von Plato, 2003, p.198.)[85]

---

[84]Troelstra & Schwichtenberg (2000), pp. 205-209.
[85] von Plato, J.(2003), Rereading Gentzen, Synthese, 173, pp.195- 209.

¶ Generación Inductiva de Derivaciones en el Sistema NG

Asumimos familiaridad del lector con el sistema de deducción natural Gentzen-Prawitz[86] aunque exhibimos sus reglas de eliminación en la **Figura 2.2**. para facilitar su consulta y contrastarlas con las de **NG**.[87] Introducimos a continuación la generación inductiva de derivaciones en el sistema **NG:**

Caso Base: Si A es una fórmula, entonces el simple nodo nombrado como A constituye el árbol de derivación más simple, en donde tenemos una deducción de A a partir de la hipótesis abierta A sin haber efectuado ninguna descarga:

$$\boxed{A}$$

Caso Inductivo: Si existen derivaciones A, B, C ,etc de fórmulas cualesquiera a partir de contextos $(\Gamma, \Delta, \Theta, \ldots,)$ arbitrarios, entonces podemos construir nuevas derivaciones mediante las siguientes reglas de introducción y eliminación para las conectivas $\&, \vee, \supset, \bot$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\&B}\&I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\Delta,\ [A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\&E,\ 1,\ 2$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{A\vee B}\vee I_l \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\vee B}\vee I_r \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Delta,\ [A^m]^1\\ \vdots\\ C\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Theta,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\vee E,\ 1,2$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,\ [A^m]^1\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\supset B}\supset I\ ,\ 1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Theta,\ [B^n]^1\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\supset E,\ 1$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{C}\bot E$$

[86] Prawitz, Dag (1965).

[87]No presentamos las reglas de introducción del sistema **N** aparte porque resultan ser las mismas que las reglas de introducción del sistema **NG**.

Las diferencias entre uno y otro sistema están motivadas por las reglas de eliminación y con ello, las extensiones de las convertibilidades a reglas de eliminación que en la formulación usual de **N** no aparecen. El cambio introducido por Negri & von Plato a las reglas de eliminación del sistema **N**, lo vemos a detalle (**<u>Figura 2.3.</u>**) sobre las reglas $\&E$ y $\supset E$ de **NG**, en donde C es una fórmula cualquiera, consecuencia arbitraria, de haber asumido una prueba de $A\&B$, por un lado, o una prueba de $A \supset B$ y A, por otro. Ahora, C es arbitraria en el sentido en que es la consecuencia que se sigue de una prueba de $A\&B$ y de haber asumido por separado A y B**,** que son los constituyentes de la conjunción según la interpretación **BHK**. En el caso de la implicación, si C se sigue de B , entonces se sigue de $A \supset B$ y A. El caso base sería concluir B teniendo $A \supset B$ y A.

Reglas de Eliminación de N (Gentzen$-$Prawitz)			
$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix}}{A}\&E_l \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix}}{B}\&Er$	$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta, [A^m]^1\\ \vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Theta, [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\vee E,\ 1,2$	$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{B}\supset E$	$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{C}\bot E$

<u>Figura 2.2</u>

Reglas Generales de Eliminación para $\&$, $\supset$
$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta, [A^m]^1, [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\&E,\ 1,2$
$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Theta, [B^n]^1\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\supset E,\ 1$

<u>Figura 2.3</u>

La generalización de las reglas de eliminación de **N** está modelada sobre el esquema de la regla $\vee E$, en dos sentidos:

1) Es la única regla de eliminación que descarga hipótesis y,

2) Como dijera Girard, es la única regla de **ND** en donde "la presencia parasitaria de la fórmula C no guarda ningún nexo estructural con la fórmula que es eliminada" (Girard, 1990, p.73).[88]

En otras palabras, la conclusión de la regla no es subfórmula de la premisa mayor como ocurre en las reglas usuales $\&E$ y $\supset E$. De esta manera, el "mal comportamiento" de $\vee E$ se extiende al resto todas las reglas de eliminación.

Relacionado con la diferencia en el comportamiento entre las reglas de eliminación de **NG** y **N**, mencionamos otra diferencia concerniente al **3)** uso de etiquetas de descarga. Usualmente, **N** cuenta con etiquetas para marcar las hipótesis activas en una derivación y suele indicarse colocando a la fórmula asumida entre corchetes un superíndice numérico $[A]^{1}$. Cuando la fórmula es descargada en la derivación, el número con el cual se indicó la fórmula en cuestión se escribe a un lado de la regla en que se utilizó, generalmente $\supset I$. La única regla de eliminación de **N** que cuenta con etiquetas de descarga es $\vee E$. Ahora, **NG** también cuanta con etiquetas para marcar las hipótesis y el mecanismo es el mismo que en **N**; pero en **NG** todas las reglas de eliminación, excepto $\perp E$, descargan lo que se llaman "hipótesis auxiliares" (Negri & von Plato, 2001, p. 171). Esto está indicado en los esquemas cuando usamos alguna regla de eliminación que descarga hipótesis ($\&E, \ \vee E \ y \ \supset E$), colocando, también, un superíndice a la fórmula asumida y descargada por la regla en cuestión escribiendo ese número a un lado de la regla utilizada. Para evitar confusiones, en el diagrama donde presentamos la generación inductiva de derivaciones, todas las hipótesis auxiliares cuentan con etiqueta de descarga pero no están etiquetadas las hipótesis, excepto la fórmula $[A]^{1}$ que aparece en $\supset I$. Como indican Negri & von Plato (2001, p.166), en deducción natural tenemos control sobre el número de veces que en una derivación usamos una hipótesis y lo indicamos colocando a la fórmula

[88] Girard, Jean-Yves (1990), Proofs and Types, G.B.: Cambridge University Press.

asumida entre corchetes un superíndice alfanumérico, $\left[A^{\ \ m}\right]$. Esto último, indica un cambio sutil pero importante entre **N** y **NG**. En **N**, las hipótesis abiertas forman colecciones de fórmulas, es decir, conjuntos[89]. A estas colecciones de hipótesis también se les conoce como contextos, y las indicamos en los diagramas mediante el uso de letras griegas seguida de tres puntos suspensivos en vertical colocándolos por encima de una fórmula, como sigue:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array}$$

En la versión lineal del diagrama, la interpretación del secuente $\Gamma \vdash A$ en **NG** y **N** es la misma, es decir, cuando $\Gamma := \emptyset$, entonces $\Gamma \vdash A$ es teorema.

En **NG**, las hipótesis abiertas forman multiconjuntos, es decir, conjuntos en donde importa registrar la multiplicidad de sus elementos a diferencia de los conjuntos.

La generalización del sistema **N**— de la cual resulta **NG**— al principio puede requerir de nosotros mayor esfuerzo reflexivo cuando usamos las reglas del nuevo sistema para derivar pero, como suele ocurrir en la práctica matemática, a la larga la operación de complicar las cosas se termina por ajustar al principio de economía del pensamiento e incrementar la sofisticación de nuestro razonamiento lógico.

Es posible, asumiendo **composicionalidad** de derivaciones, obtener las reglas de eliminación **NG** usando las reglas usuales de eliminación de **N,** y viceversa.

Entendemos por composicionalidad lo que se sigue del teorema de composición de derivaciones, el cual exhibimos pero no probamos.[90]

Teorema: <u>Teorema de Composición de Derivaciones.</u> Si hay una derivación de A partiendo de Γ y una derivación de C a partir de A, Δ, entonces hay una derivación de C partiendo de Γ, Δ.

[89] Cf. Prawitz, D. (1965), Ch. 1.
[90] Una prueba de este teorema puede encontrarse en von Plato (2013), pp. 200-205.

Este teorema se esquematiza, mediante regla, de la siguiente manera en **NG**:

$$Si \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array} \quad y \quad \begin{array}{c} A, \Delta \\ \vdots \\ B \end{array} \quad entonces, \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A, \Delta \\ \vdots \\ B \end{array}$$

Comp en NG

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\text{Comp}$$

Comp en NLI

Otra manera de esquematizar esta regla, la provee la deducción natural en estilo de secuentes, el sistema **NLI**[91]. Composicionalidad es una propiedad con la que cuentan los sistemas **ND**, en general, aunque no es explícita. Su explicación informal es, observando la práctica matemática, semejante al uso de lemas para probar un teorema,[92] en donde A partiendo de Γ es un lema ya probado y por el cual no es necesario asumir la hipótesis de A cuando derivamos B partiendo de Δ y A, de modo que le "pegamos" la prueba que ya teníamos de A a la derivación de B partiendo de Γ, Δ. A esto, lo conocemos también como sustitución.

El análogo de la regla de **Comp** en el cálculo de secuentes es la regla de corte y juega un papel fundamental en la prueba de normalización de **NG** cuando esta regla se asume explícitamente[93]. En el sistema **NG**, se trata de una regla admisible, es decir, al considerar derivable la conclusión de la regla se muestra que las premisas también son derivables.

Por ejemplo, para derivar las reglas de **NG** usando las reglas de **N** (**Ver Figura 2.4.**), el principio para derivar $A\&B$ dice que es necesario contar con una prueba de A y de B. Asumiendo $A\&B$ y derivando por separado A y B, y suponiendo una consecuencia arbitraria C a partir de A y B, entonces llegamos a la regla de eliminación general $\&E$.

[91] Gentzen introdujo varias formulaciones, en sus manuscritos, de su sistema **N** de deducción natural, entre ellas el sistema **NLI** para estudiar las conexiones entre deducción natural y el cálculo de secuentes. Cf. Prawitz, D. (1965), Appendix C. **NLI** es el acrónimo, en alemán, de "cálculo natural logístico intuicionista." El sistema que se presenta de **NLI** está en von Plato, J. (2013), Elements of Logical Reasoning, USA: Cambridge University Press, p. 199.
[92] Negri, S. & von Plato, J. (2011), p. 88.
[93] von Plato, J. (2013), pp. 198-219.

En sentido contrario, usando las reglas generales de eliminación es posible volver a las reglas usuales de eliminación. Ello ocurre cuando instanciamos la consecuencia arbitraria C como $C := A$ o $C := B$ en E, o $C := B$ en $\supset E$, y escribimos entre corchetes en la línea de las premisas la derivación de A o B a partir de $A\&B$, o de B partiendo de $A \supset B$ y A, pero indicando su descarga efectiva en la conclusión como se muestra en la **Figura 2.5**. De esta manera, lo que obtenemos es un "caso degenerado" de las reglas generales de eliminación que corresponde a la forma usual de las reglas de eliminación.

De las Reglas de Eliminación de N a las Reglas Generales de Eliminación de NG	
$\begin{array}{c} \Delta, \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ \dfrac{A\&B}{A}\&E_1\end{array} , \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ \dfrac{A\&B}{B}\&E_2\end{array} \\ \vdots \\ C \end{array}$	$\begin{array}{c} \Theta, \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ A \supset B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots \\ A\end{array}}{B} \supset E \\ \vdots \\ C \end{array}$

Figura 2.4

Obsérvese que en la **Figura 2.4** omitimos escribir la multiplicidad de las fórmulas $A\&B$. Esto no responde a nada, excepto a observar un criterio pragmático al escribir los esquemas y mantenerlos lo más simples posible.

De las Reglas Generales de Eliminación de NG a las Reglas de Eliminación de N	
$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ A\&B\end{array} \qquad [A]^1}{A}\&E, 1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ A\&B\end{array} \qquad [B]^2}{B}\&E, 2$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots \\ A \supset B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots \\ A\end{array} \qquad [B]^1}{B} \supset E, 1$

Figura 2.5

Introducimos el sistema **NLI** con reglas generales de eliminación (**Ver Tabla 2.1.**)

porque nos proporcionará una base cómoda para traducir y adornar al sistema **NG** en su versión tipada, **NG Typed**, aunque su uso será explícito hasta el siguiente capítulo.

NLI con Reglas Generales de Eliminación
$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A\&B}\&I \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A\&B \quad \Delta, [A^m]^1, [B^n]^2 \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\&E, 1, 2$
$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_l I \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\vee_r I \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Delta, [A^m]^1 \vdash C \quad \Theta, [B^n]^2 \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C}\vee E, 1, 2$
$\dfrac{\Gamma, [A^m]^1 \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}\supset I, 1 \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \supset B \quad \Delta \vdash A \quad \Theta, [B^n]^1 \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C}\supset E, 1$
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}Hyp \qquad \dfrac{}{\Gamma, \perp \vdash C}\perp E$

<u>**Tabla 2.1**</u>

§2.3. Normalización y Convertibilidades

Para comenzar a perfilar adecuadamente el tópico que nos concierne, es decir la normalización de las derivaciones en el sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación, conviene considerar primero lo que conocemos como esquemas de conversión[94]. Se tratan de reglas computacionales que nos permiten, en última instancia, transformar a toda prueba no-normalizada en una prueba normal.

Los esquemas de conversión no son una novedad que introduce el sistema de deducción natural **NG** a lo que ya se conocía sobre normalización en deducción natural. Su consideración en la teoría de la prueba, más bien, ocurre tan pronto como Gerhard Gentzen desarrolló el sistema de deducción hacia finales de 1932. De entre los esquemas de conversión conocidos por Gentzen están los *détours*— ***Umwege***, como Gentzen los llamó— y permutaciones que "enmascaran" algún *détour*[95] como aparecen en un manuscrito de su tesis doctoral no publicado en donde Gentzen bosquejó los pormenores de una prueba de normalización para el fragmento intuicionista de deducción natural[96] teniendo en cuenta la remoción de tales convertibilidades. Posteriormente, los esquemas de conversión fueron redescubiertos y detalladamente descritos en Prawitz 1965— el *locus classicus* de deducción natural— tanto para el caso de los *détours* como las permutaciones[97]. En Prawitz 1971[98], se agrega a la lista de esquemas de conversión a las simplificaciones.

Definición:<u>Derivación normal en N</u>. Una derivación es normal si ninguna premisa mayor de una regla de eliminación fue derivada por una $I - regla$ o mediante $\vee E$.

[94] Negri & von Plato (2011), pp. 23-25.
[95] Un *détour "*enmascarado" por una permutación se presenta cuando entre el par de reglas **I-E** sancionado por el *détour*, hay de por medio una instancia de otra regla de eliminación.
[96] von Plato (2017), pp. 275-277 y Gentzen, Gerhard & von Plato, Jan (2008), Gentzen's Proof of Normalization for Natural Deduction, *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 14, Number 2, pp. 240-257.
[97] En Prawitz (1965), hay un asomo de la simplificación como una convertibilidad en un párrafo: "Una aplicación de $\vee$E o $\exists$E en una deducción, se dice que es redundante si tiene alguna de las premisas menores cuya hipótesis no es descargada."(p.49.)
[98] Prawitz, Dag (1971), Ideas and Results in Proof Theory. *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,* 235-307.

Dag Prawitz fue quien, de hecho, hiciera ciudadano de primera clase al estudio de la normalización en deducción natural enfocando la atención en el análisis de las convertibilidades desde la teoría de la prueba, y bautizara a las convertibilidades como mejor las conocemos[99].

Lo que resulta novedoso, no obstante, de implementarse las modificaciones propuestas por Negri & von Plato a las reglas de eliminación del sistema de deducción natural **Gentzen-Prawitz**, es que los esquemas de conversión, en especial las permutaciones y las simplificaciones, se extienden a todas las reglas de eliminación.

Esto último contrasta con la anterior estrategia para probar normalización en deducción natural consistente en fragmentar al sistema de reglas en donde no se consideren a la disyunción o al cuantificador existencial como ocurre en Prawitz 1965. *Per contra*, para no lidiar con esta restricción en el sistema de deducción natural **Negri-von Plato**, todas las reglas de eliminación son modificadas de tal manera que se comportan como la regla de eliminación de la disyunción en el arreglo **Gentzen-Prawitz**. Consecuencia de esto último es que la observación de distinguir entre reglas donde la conclusión es subfórmula de alguna de las premisas, o a la inversa, con el propósito de mantener en paralelo las estrategias de normalización sobre los *détours* y las permutaciones, se vuelve superflua. En cambio, basta solamente considerar un único criterio para juzgar si una prueba es o no normal:

Definición: <u>Derivación normal en NG</u>. Una derivación normal comienza con aplicaciones de reglas generales de eliminación, posiblemente ninguna, en donde las premisas mayores son asumidas como hipótesis y termina con reglas de introducción.

[99] Hay otros nombres en la literatura para las convertibilidades que presentamos. Por ejemplo, en Girard, Jean-Yves (2011), The Blind Spot: Lectures on Logic, Switzerland: European Mathematical Society; lo que llamamos *détour* es mencionado como *cut* (p. 78), y lo que llamamos permutación es nombrado como *commutative cut* (pp .84-85).

§Détours

Un *détour* ocurre en una derivación cuando se aplica una regla de introducción a las premisas y se continúa con la aplicación de una regla de eliminación sobre la misma conectiva que se introdujo. Esto resulta en la derivación de la premisa mayor de una regla de eliminación mediante una regla de introducción para después eliminar la conectiva así introducida aplicando una regla de eliminación. De hecho, lo que aparece como conclusión en un *détour* es independiente de la sucesión de reglas introducción-eliminación, $I - E$.

Definición: En una derivación, la instancia de una regla de eliminación cuya premisa mayor fue obtenida mediante la aplicación de una regla de introducción constituye un *détour*.

Tratándose de una aplicación redundante de reglas de introducción y eliminación, la rutina es removible de la derivación. El sistema de deducción natural que estamos considerando se compone de tres reglas de introducción y cuatro reglas de eliminación. Hay reglas de introducción para la conjunción $\&$, la disyunción $\vee$ y la implicación $\supset$, como se desprende del caso de considerar el significado de las conectivas en términos de pruebas siguiendo la interpretación **BHK**. A cada una de estas reglas le corresponde un dual como regla de eliminación, y adicionalmente se cuenta con la regla de eliminación del *falsum,* $\perp$. Como no tenemos una prueba de una falsa aseveración o de una contradicción, *falsum*— siendo el caso límite de una conectiva 0-aria— no tiene regla de introducción como estipula la interpretación **BHK** por lo tanto, carece de *détours* como esquemas de conversión.

¶ Esquema de conversión para los *détours* sobre la conjunción:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Delta \\ \vdots & \vdots \\ A & B\end{array}}{A \& B}\,\&I \qquad \begin{array}{c}\Theta,\ [A^m]^1,\ [B^n]^2 \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\,\&E,\ 1,2
$$

$$\Downarrow Conv$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} & \Gamma & \Delta \\ & \vdots & \vdots \\ \Theta, & A^m\ , & B^n \end{array} \\
\vdots \\
C
\end{array}
$$

Si observamos la parte de abajo que resulta de convertir los *détours* sobre la conjunción, podemos notar con mayor claridad lo que arriba se explicaba, es decir, la conclusión obtenida en la derivación que aparecen en la parte inferior no dependen de la combinación de reglas de introducción y eliminación. Lo que tenemos, en cambio, es la sustitución de todas las hipótesis descargadas por clones de su derivación.

¶ Esquemas de conversión para los *détours* sobre la disyunción:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{array}}{A\vee B}\vee I \qquad \begin{array}{c}\Delta,\ [A^m]^1\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Theta,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\vee E,\ 1,\ 2\\[3ex]
\Downarrow Conv\\[3ex]
\Gamma\\ \vdots\\ \Delta,\quad A^m\\ \vdots\\ C
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\vee B}\vee I \qquad \begin{array}{c}\Delta,\ [A^m]^1\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Theta,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\vee E,\ 1,\ 2\\[3ex]
\Downarrow Conv\\[3ex]
\Gamma\\ \vdots\\ \Theta,\quad B^n\\ \vdots\\ C
\end{array}
$$

¶ Esquema de conversión para los *détours* sobre la implicación:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A^m]^1\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\supset B}\supset I,\,1 \qquad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Theta,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\supset E,\,2$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ \Gamma,\ A^m\\ \vdots\\ \Theta,\ B^n\\ \vdots\\ C\end{array}$$

§Permutaciones

Los esquemas de conversión permutativa conforman una clase mucho más habitada que la clase conformada por los *détours*. Dada una derivación, nos las habemos con una permutación cuando derivamos la premisa mayor de una regla de eliminación mediante una aplicación de otra regla de eliminación. A modo de aclarar la situación, los *détours* y las permutaciones tienen un punto en común: en ambas conversiones se deriva la premisa mayor de una regla de eliminación. La diferencia radica en uno y otro caso, en que la premisa mayor en el *détour* se deriva aplicando una regla de introducción, en la permutación la premisa mayor es obtenida de la aplicación de una regla de eliminación.

Definición: En una derivación la instancia de una regla de eliminación cuya premisa mayor fue obtenida por medio de la aplicación de otra regla de

eliminación, constituye una <u>conversión permutativa</u>.

Teniendo en cuenta la elección estándar de las conectivas para formalizar la lógica intuicionista de primer orden en un sistema de deducción natural, hay 36 conversiones de permutaciones cuando agregamos las reglas de eliminación para los cuantificadores universal y existencial[100]. No obstante, en este trabajo nos limitamos a prestar atención sólo a la parte proposicional del tal sistema de deducción natural y por ello basta considerar las cuatro reglas de eliminación que se han presentado y sus combinaciones. En este sentido, consideramos los siguientes 16 esquemas de conversión siguiendo la organización que se presenta en la **<u>Tabla 2.2.</u>**

PERMUTABILIDADES DEL SISTEMA NG	$\& E$	$\vee E$	$\supset E$	$\bot E$
$\& E$	$\& E - \& E$ **<u>1.1</u>**	$\& E - \vee E$ **<u>1.2</u>**	$\& E - \supset E$ **<u>1.3</u>**	$\& E - \bot E$ **<u>1.4</u>**
$\vee E$	$\vee E - \& E$ **<u>2.1</u>**	$\vee E - \vee E$ **<u>2.2</u>**	$\vee E - \supset E$ **<u>2.3</u>**	$\vee E - \bot E$ **<u>2.4</u>**
$\supset E$	$\supset E - \& E$ **<u>3.1</u>**	$\supset E - \vee E$ **<u>3.2</u>**	$\supset E - \supset E$ **<u>3.3</u>**	$\supset E - \bot E$ **<u>3.4</u>**
$\bot E$	$\bot E - \& E$ **<u>4.1</u>**	$\bot E - \vee E$ **<u>4.2</u>**	$\bot E - \supset E$ **<u>4.3</u>**	$\bot E - \bot E$ **<u>4.4</u>**

<u>Tabla 2.2.</u>

[100] Negri & von Plato 2011, p. 23.

$$1.1.: \text{ Permutabilidad } \&E - \&E$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta,[A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix}}{C\&D}\,\&E,\ 1,2 \qquad \begin{matrix}\Theta,\ [C^k]^3,\ [D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,\&E,\ 3,4$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Delta,[A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Theta,\ [C^k]^3,\ [D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\,\&E,\ 3,4}{E}\,\&E,\ 1,2$$

$$1.2.: \text{ Permutabilidad } \&E - \vee E$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta,[A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix}}{C\vee D}\,\&E\ 1,2 \qquad \begin{matrix}\Theta,\ [C^k]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma,\ [D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\vee E,\ 3,4$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Delta,[A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Theta,\ [C^k]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma,\ [D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\vee E,\ 3,4}{E}\,\&E,\ 1,2$$

$$1.3.: \text{Permutabilidad } \&E- \supset E$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ C\supset D\end{array}}{C\supset D}\&E,\ 1,2 \qquad \begin{array}{c}\Theta\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma,\ [D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{array}}{E}\supset E,\ 3$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Delta,[A^m]^1,[B^n]^2\\ \vdots\\ C\supset D\end{array} \quad \begin{array}{c}\Theta\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma,\ [D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{array}}{E}\supset E,\ 3}{E}\&E,\ 1,2$$

$$1.4.: \text{Permutabilidad } \&E - \bot E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\frac{\bot}{C}\bot E}\&E,\ 1,2$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\&B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[A^m]^1,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ \dfrac{\bot}{C}\bot E\end{array}}{C}\&E,\ 1,2$$

2.1.: Permutabilidad $\vee E - \&E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Delta,[A^m]^1\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Theta,[B^n]^2\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix}}{C\&D}\;\vee E,\;1,2\qquad\begin{matrix}\Sigma,\;[C^k]^3,\;[D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\;\&E,\;3,4$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\quad\dfrac{\begin{matrix}\Delta,[A^m]^1\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma,[C^k]^3,\;[D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\;\&E,\;3,4\quad\dfrac{\begin{matrix}\Theta,[B^n]^2\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma,[C^k]^5,\;[D^l]^6\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\;\&E,\;5,6}{E}\;\vee E,\;1,2$$

2.2.: Permutabilidad $\vee E - \vee E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Delta,[A^m]^1\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Theta,[B^n]^2\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix}}{C\vee D}\;\vee E,\;1,2\qquad\begin{matrix}\Sigma,\;[C^k]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi,\;[D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\;\vee E,\;3,4$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\quad\dfrac{\begin{matrix}\Delta,[A^m]^1\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma,[C^k]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi,[D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\;\vee E,\;3,4\quad\dfrac{\begin{matrix}\Theta,[B^n]^2\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma,[C^k]^5\\ \vdots\\ E\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi,[D^l]^6\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\;\vee E,\;5,6}{E}\;\vee E,\;1,2$$

2.3. : Permutabilidad $\vee E- \supset E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta,[A^m]^1\\ \vdots\\ C\supset D\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Theta,[B^n]^2\\ \vdots\\ C\supset D\end{matrix}}{C\supset D}\vee E\,1,2 \qquad \begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ C^k\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi,\ [D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\supset E\,3$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Delta,[A^m]^1\\ \vdots\\ C\supset D\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ C^k\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Pi,\ [D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\supset E\,3 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Theta,[B^n]^2\\ \vdots\\ C\supset D\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma\\ \vdots\\ C^k\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Pi,\ [D^l]^4\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\supset E\,4}{E}\vee E\,1,2$$

2.4 : Permutabilidad $\vee E- \bot E$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta,\ [A^m]^1\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\dfrac{\bot}{C}\bot E}\vee E,\ 1,2$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta,\ [A^m]^1\\ \vdots\\ \dfrac{\bot}{C}\bot E\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta,\ [B^n]^2\\ \vdots\\ \dfrac{\bot}{C}\bot E\end{matrix}}{C}\vee E,\ 1,2$$

3.1.: Permutabilidad $\supset E - \& E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Theta,[B^n]^1\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix}}{C\&D}\supset E,\ 1 \qquad \begin{matrix}\Sigma,[C^k]^2,\ [D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\&E,\ 2,3$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{matrix}\Theta,[B^n]^1\\ \vdots\\ C\&D\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Sigma,[C^k]^2,\ [D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\&E,\ 2,3}{E}\supset E,\ 1$$

3.2.: *Permutabilidad* $\supset E - \vee E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Theta,[B^n]^1\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix}}{C\vee D}\supset E,\ 1 \qquad \begin{matrix}\Sigma,\ [C^k]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi,\ [D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\vee E,\ 2,\ 3$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{matrix}\Theta,[B^n]^1\\ \vdots\\ C\vee D\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Sigma,[C^k]^2\\ \vdots\\ E\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Pi,[D^l]^3\\ \vdots\\ E\end{matrix}}{E}\vee E,\ 2,\ 3}{E}\supset E,\ 1$$

$$3.3.:\ \textit{Permutabilidad}\ \supset E\text{–}\supset E$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ A\end{array}\quad \begin{array}{c}\Theta,\ [B^n]^1\\ \vdots\\ C\supset D\end{array}}{C\supset D}\supset E,\ 1 \qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ C\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Pi,\ [D^l]^2\\ \vdots\\ E\end{array}}{E}\supset E,\ 2$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ A\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\Theta,\ [B^n]^1\\ \vdots\\ C\supset D\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ C\end{array}\quad \begin{array}{c}\Pi,\ [D^l]^2\\ \vdots\\ E\end{array}}{E}\supset E,\ 2}{E}\supset E,\ 1$$

$$3.4.:\ \textit{Permutabilidad}\ \supset E\text{–}\perp E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ A\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Theta,\ [B^n]^1\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\dfrac{\perp}{C}\perp E}\supset E,\ 1$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A\supset B\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ A\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Theta,\ [B^n]^1\\ \vdots\\ \dfrac{\perp}{C}\perp E\end{array}}{C}\supset E,1$$

4.1.: Permutabilidad $\perp E - \& E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A\& B}\perp E \qquad \begin{array}{c}\Delta, [A^m]^1, [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\& E,\ 1,2$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\perp}{C}\perp E$$

4.2.: Permutabilidad $\perp E - \vee E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A \vee B}\perp E \qquad \begin{array}{c}\Delta, [A^m]^1\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Theta, [B^n]^2\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\vee E,\ 1,2$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\perp}{C}\perp E$$

4.3.: Permutabilidad $\perp E- \supset E$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{A \supset B}\perp E \qquad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Theta, [B^n]^1\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\supset E,\ 1$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\perp}{C}\perp E$$

4.4 : Permutabilidad $\perp E- \perp E$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\frac{\perp}{C}\perp E}\perp E$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\perp}{C}\perp E$$

Observando los esquemas de conversión permutativa, nos podemos deshacer de la conversión permutando hacia arriba la aplicación de la regla de eliminación "secundaria" por encima de la regla de eliminación "principal" en la derivación. Esto tiene como resultado la disminución de la altura del subárbol de prueba de la fórmula en la regla de eliminación permutada, pero deja intacta la altura de las demás derivaciones. Aun cuando en el resultado final de la conversión la derivación aparezca más "adornada", la complejidad de la derivación decrece y se torna la prueba en un objeto más simple de la misma fórmula.

Este fenómeno sintáctico tiene un efecto curioso sobre los esquemas de conversión permutativa de $\perp E$ cuando se trata de la regla principal [101]. Lo que podemos ver es que cualquier sucesión de reglas de eliminación después de $\perp E$, colapsa en una única aplicación de $\perp E$ en el árbol de prueba tras ejecutar la conversión. Esto muestra que ninguna regla es permutable por encima de $\perp E$. ¿A qué se debe esto?

Podemos bosquejar una respuesta a esta pregunta indagando sobre la explicación del significado de una proposición en términos de la construcción de pruebas de sus componentes. De acuerdo con la interpretación **BHK**, $\perp$ se trata de una proposición que carece de cualquier prueba, por lo que obtener una prueba directa de dicha proposición— o de sus componentes— resulta en una imposibilidad.

Esto se relaciona de manera directa— mediante la propiedad de la subfórmula— con la normalización de las pruebas y la consistencia del sistema intuicionista de deducción natural.

Definición: <u>Propiedad de la Subfórmula</u>. Todas las fórmulas en una derivación normal son subfórmulas de las hipótesis abiertas o de la última fórmula en una derivación.

Telegráficamente, normalizar una prueba consiste en revisar que en una derivación todas las fórmulas en una derivación normal, una vez que se han aplicado las conversiones, se conserve la propiedad de que todas las fórmulas de las hipótesis abiertas o de la conclusión. Esto es, normalizar garantiza que la propiedad de la subfórmula sea preservada a lo largo de cualquier derivación. Desde esta perspectiva, una prueba de simple consistencia puede obtenerse de manera casi inmediata como corolario de la propiedad de la subfórmula bajo el siguiente hilo argumental:

<u>Simple Consistencia</u>. Ningún teorema puede concluir $\perp$. Si tal no fuera el caso,

[101] Esquemas 4.1-4.4 de la Tabla 1.1 de Conversiones Permutativas.

entonces tendríamos algún componente de la proposición $\perp$ que no ha sido descargado en la conclusión, pero esto último es absurdo porque $\perp$ no tiene miembros componentes.

Otra perspectiva del mismo fenómeno, la ofrece el cálculo de secuentes. Suponiendo que tenemos un árbol en el que cierran todas las ramas, es imposible permutar cualquier regla de introducción o eliminación por encima del secuente $\perp, \Gamma \vdash C$, por la razón de que éste último secuente, al igual que $A, \Gamma \vdash A$, es tratado como un axioma o secuente inicial.

§Simplificaciones

Por último, basta revisar la tercera clase de esquemas de conversión, la simplificación. Este esquema de conversión se encuentra descrito en Prawitz (1971, p. 254) para el sistema de deducción natural Gentzen-Prawitz con el propósito de remover aplicaciones redundantes de $\vee E$ y $\exists E$. En una derivación tenemos una instancia de simplificación cuando aparece una ocurrencia de la regla $\vee E$, en donde alguna de las premisas menores, al menos una de ellas, no es descargada por la regla en cuestión. Como anteriormente se mencionó, el sistema **NG** extiende los esquemas de conversión a todas las reglas de eliminación porque unifica los criterios de una derivación normal al hacer que todas las reglas de eliminación se comporten como la regla $\vee E$. En este sentido, usando reglas de eliminación general los esquemas de conversión de la simplificación se extienden para $\& E$ y $\supset E$.

Definición: En una derivación, la instancia de una regla de eliminación que no descarga las hipótesis que debería descargar[102] para obtener la conclusión de la regla en cuestión, $(\& E, \ \vee E, \ \supset E)$ **constituye una simplificación.**

[102] Podemos entender esta condición, "descargar las hipótesis que debería descargar la regla de eliminación en cuestión para obtener la conclusión", observando el comportamiento de las reglas de eliminación en **NG**. En el caso de **vE**, para concluir **C** es necesario haber asumido **A**, **B**. Semejantemente, tratándose de **&E**, para derivar **C** se obtuvo necesariamente de asumir **A&B** y de haber descargado **A** y **B**; y en el caso de **⊃E**, **C** se deriva necesariamente de haber asumido **A** y **A⊃B**.

¶ Esquemas de conversión de simplificación para $\vee E$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[A^m]^1,\Theta\\ \vdots\\ C\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E,1 \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta\\ \vdots\\ C\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[B^n]^1,\Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E,1$$

$$\Downarrow Conv \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow Conv$$

$$\begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{matrix}\Theta\\ \vdots\\ C\end{matrix}$$

Descarga incompleta

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee E$$

$$\Downarrow Conv \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow Conv$$

$$\begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{matrix}\Theta\\ \vdots\\ C\end{matrix}$$

Descarga vacua

Para la simplificación de $\vee E$**,** consideramos dos casos generales, cada caso con dos subcasos, ambos semejantes. Al primer caso lo llamamos **descarga incompleta** de $\vee E$, y estamos frente a la situación en donde una de las hipótesis[103] auxiliares de la disyunción, izquierda o derecha, no es asumida. Consecuencia de esto último es que al ejecutar $\vee E$ en la derivación, una de las hipótesis auxiliares no es descargada por la regla en cuestión. Por otro lado, C, la conclusión, ya aparece como premisa en la derivación por lo que la aplicación de la regla de eliminación es innecesaria. Al segundo caso, lo llamamos **descarga vacua** de $\vee E$ porque ninguna de las hipótesis auxiliares

[103] Las hipótesis auxiliares son las fórmulas que suponemos y descargamos cuando inferimos mediante una regla de eliminación, cuando estas fórmulas son supuestas como derivaciones las llamamos derivaciones auxiliares. Cf. Negri & von Plato (2001, p. 171).

es asumida y, en consecuencia, tampoco son descargadas por $\vee E$. Esto último introduce un no-determinismo, lo cual nos permite elegir concluir cualquiera de las derivaciones auxiliares que aparecen como premisas.

¶ Esquema de conversión de simplificación para $\&E$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Delta\\ \vdots & \vdots \\ A\&B & C\end{array}}{C}\,\&E \\[2ex] \Downarrow Conv \\[2ex] \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ C\end{array}\end{array}}$$

¶ Esquema de conversión de simplificación para $\supset E$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{ccc}\Gamma & \Delta & \Theta\\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A \supset B & A & C\end{array}}{C}\,\supset E \\[2ex] \Downarrow Conv \\[2ex] \begin{array}{c}\Theta\\ \vdots\\ C\end{array}\end{array}}$$

Los modos de actuar de los esquema de simplificación para $\&E$ y $\supset E$ son semejantes a la manera en que funciona el esquema de simplificación de $\vee E$ cuando la descarga es vacua. El punto de usar los esquemas de simplificación consiste en que la regla de eliminación en cuestión, $\vee E$, $\& E$ o $\supset E$, cuando no descarga hipótesis entonces su uso es innecesario porque lo que nos permitiría concluir la regla— la derivación auxiliar— de antemano es asumida como premisa.

En este capítulo hemos revisado la noción de normalización, presentado las convertibilidades que afectan a las derivaciones del sistema **NG** y expuesto a gran detalle todos los esquemas de conversión que se necesitan para efectuar la prueba de normalización fuerte de la lógica proposicional intuicionista en el sistema **NG**.

Ahora, como reglas de reescritura, los esquemas de conversión tienen el propósito de hacer de una derivación no-normal que puede llegar a ser un objeto bastante complejo en un objeto más simple. Sin embargo, esto necesita ciertas cualificaciones. En el caso de los *détours*, en efecto, removemos el par de reglas $I - E$ que la derivación no requiere pero al hacerlo mediante la operación de sustitución o composición, lo que estamos reemplazando son las hipótesis asumidas temporalmente por sus pruebas. Desde la perspectiva metamatemática, la prueba de una fórmula siempre será un objeto más complejo que una hipótesis porque una prueba como objeto de una teoría tiene una estructura tal que justifica la verificación de un resultado mientras que en el caso de las hipótesis, su justificación está por verse. Las permutabilidades, en contraste con los *détours*, no afectan la estructura original— en el sentido de reemplazar a un objeto simple por uno más complejo como se acaba de observar desde la perspectiva metamatemática— de la derivación con respecto al resultado de la conversión, en todo caso, manipulamos al árbol de derivación empleando sus mismas partes y lo “reacomodamos”. En el caso de las simplificaciones, la moraleja consiste en no emplear una regla de eliminación cuando la derivación auxiliar se obtiene, de hecho, sin emplear la regla de eliminación en cuestión.

Estos son los recursos que, en principio, se requieren para efectuar la prueba de normalización. Sin embargo, como se mencionó en la introducción y en el capítulo 1 de este trabajo, nos interesa estudiar el comportamiento combinatorio de los esquemas de conversión con el propósito de levantar las restricciones de la estrategia de normalización de la prueba de Negri-von Plato. Esto será, en parte, llevado a cabo en el siguiente capítulo siguiendo de cerca la implementación de la prueba de normalización fuerte de Joachimski-Matthes. Con ello, se mostrará:

1) La generalización que se puede llevar a cabo sobre los esquemas de conversión,

2) La construcción de un conjunto que captura a todos los términos fuertemente normalizables, el conjunto SN. Consecuencia de esto último, es que se introduce un principio inductivo de prueba mediante la definición de un término de ser fuertemente normalizable y la definición del conjunto SN, lo que nos permitirá generar de manera inductiva la prueba de normalización fuerte del sistema **NG**.

En lo que sigue, entre otras cosas, veremos cómo es que los lambda términos[104] capturan la estructura de los diagramas.

[104] Por *lambda términos* entendemos, en general, como la clase de expresiones bien formadas que se construye de acuerdo a las reglas que caracterizan a las variedades del cálculo lambda según se considere (no tipado, simplemente tipado, segundo orden tipado, tipos dependientes de tipos,...,etc.). Aquí, sólo nos encargamos del segundo. La expresión traduce del inglés la voz *lambda terms,* la cual usualmente aparece escrita en la literatura existente como λ-*terms.* Se ha preferido esta expresión por encima de *términos lambda*, como atinadamente sugirió la Dra. Atocha Aliseda, pese al riesgo de asumir que la elección se trata de un calco. En efecto, su sugerencia parece más acorde al genio del idioma español y suprimiría un anglicismo, pero uno que podríamos considerar al límite. No la adoptamos, en cambio, porque: **1)** el paso de una a otra lo permite el uso del hipérbaton en el idioma español; **2)** adoptando al español la costumbre de sustituír *lambda* por λ en la expresión λ-*términos* como podría ocurrir en inglés, el paralelismo de traducciones terminológicas entre ambos lenguajes naturales es palpable y hasta deseable para transitar por la literatura. Pese a los inconvenientes que puede acarrear el uso de la expresión *lambda términos*, pensamos que presta un buen servicio.

§3.1. NG y la Teoría de Tipos. Adornando NG: Deducción Natural Tipada con Reglas Generales de Eliminación o NG Typed

“Anyone interested in mastering [natural deduction with general elimination rules] should try to come up with one's own proof of normalization and see oneself make a mistake in the process. Then try giving a correct proof”[105].

Andre Scedrov.

Si al sistema de deducción natural **NG** que hemos presentado en la sección anterior— tomando como base al sistema **NLI** en donde la relación de derivabilidad es explícita y no sólo esquemática— le añadimos tipos, entonces lo que obtenemos es el sistema de deducción natural **NG Typed**. Añadir tipos a las derivaciones diagramáticas de **NG** responde a la misma motivación básica de la correspondencia Curry-Howard, es decir, hacer corresponder en un sistema lógico a cada fórmula demostrable con el conjunto de derivaciones que prueban esa fórmula.

Ahora, es importante observar que hay varias ideas involucradas en lo anterior y vale la pena desenvolverlas porque la correspondencia Curry-Howard es una contribución profunda en lógica matemática que va más allá de resaltar superficialmente las semejanzas entre sistemas deductivos y sistemas computacionales— como puede consultarse en el mapeo que presentamos en la **Tabla 3.1**.[106]

Siguiendo a Philip Wadler (2014, p.75)[107], la importancia conceptual de la correspondencia Curry-Howard está basada en tres ideas importantes involucradas. Por un lado, la correspondencia nos dice que para cada proposición (fórmula[108]) en

[105] La frase proviene de Scedrov, Andre (1989), Normalization Revisited; in Gray, John W. & Scedrov, Andre (eds.), Contemporary Mathematics 92, USA: American Mathematical Society, pp. 357-370; pero está truqueada. De lo que habla Scedrov es del cálculo lambda polimórfico; de hecho, lo único que hemos reemplazado de la frase original es “polymorphic lambda calculus” por “natural deduction with general elimination rules” porque lo que comunica se puede decir punto por punto sobre la prueba de normalización del sistema **NG**.

[106] La tabla 3.1. que presentamos está basada en una tabla semejante que aparece en: S∅rensen, M.H. & Urzyczyn, P. (2006), Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, The Netherlands: Elsevier, p. 89.

[107] Wadler, Philip (2014), Propositions as Types, *Communications of the Association for Computing Machinery*, 58: 75–84.

[108] Como han notado Negri & von Plato (2001, p.2), en filosofía es una cuestión disputada lo que se entiende por una proposición; pero en lógica puede ocurrir una cierta ambigüedad si consideramos la perspectiva puramente sintáctica y la perspectiva semántica. Por un lado, una proposición puede ser vista como una expresión simbólica generable en un lenguaje formal y, por el otro lado, como el contenido que expresa una oración indicativa. En este sentido una proposición es un objeto abstracto que puede representarse bajo una oración o una fórmula, así como se ha dicho más arriba que una prueba es un objeto abstracto representable mediante una derivación. Para cortar con el debate, por proposición se entiende fórmula en un sentido amplio.

deducción existe un tipo en el cálculo lambda, y viceversa. A esta idea se le conoce como: **Proposiciones como Tipos**. Por otro lado, para cada prueba de una proposición en deducción natural existe un programa en cálculo lambda, y viceversa. Esta otra idea se le conoce como: **Pruebas como Programas**. Aún más, el procedimiento para normalizar una prueba en deducción natural se corresponde en el cálculo lambda con el procedimiento de reducir o evaluar un programa, y viceversa. A esto último se le conoce como: **Normalización de Pruebas como Evaluación de Programas**. Consecuencia de todo lo anterior es que, si un término en forma normal del cálculo lambda es tipable, entonces la función computacional que satisface la especificación define una derivación normal en deducción natural, y viceversa.

Deducción Natural	**Cálculo Lambda**
Proposición	**Tipo**
Prueba	**Término (*proof-term*)**
Normalización de Pruebas	**Normalización de Términos (Reducción)**
Convertibilidades: ***Détour*** **Permutación** **Simplificación**	***Redex:*** **Beta-redex** **Pi-redex** **Kappa-redex**
Reglas de Introducción	**Constructores**
Reglas de Eliminación	**Destructores**

Tabla 3.1

Podemos pensar que **NG Typed** es la versión diagramática tipo Gentzen del cálculo lambda ΛJ, la extensión del cálculo lambda con tipos simples $\Lambda^{\rightarrow}$, que Joachimski & Matthes (2003. p. 77) sistematizaron "inspirados en la generalización de los árboles de derivación de von Plato".

La diferencia entre el sistema **NG Typed** y la prueba de normalización fuerte que presentamos, con respecto al sistema ΛJ desarrollado por Joachimski & Matthes (2003) y la prueba de normalización fuerte que dan del mismo, consiste en que mientras ΛJ

formaliza el fragmento implicacional positivo de la lógica intuicionista con disyunciones, **NG Typed** es la formalización completa de la lógica proposicional intuicionista (**Ver Tabla 3.2.**) siguiendo el mismo método de prueba de Joachimski & Matthes (2003) pero extendiéndolo al resto de las conectivas e incorporando algunos cambios de Matthes[109] (2005, p. 208 ss.) para lidiar con la noción de eliminaciones y eliminaciones múltiples, y remozando la notación para no complicar la sintaxis haciendo uso de la notación de vectores.

Las ventajas de trabajar en ΛJ con respecto a **NG** son notables, en el sentido en que podemos "comprimir" las derivaciones diagramáticas de **NG** a sólo su "esencia", la cual es visible en el código de la prueba. Semejantemente, lo mismo podría decirse de **NG Typed** pero con la diferencia de que, con respecto a **NG**, los esquemas diagramáticos de **NG Typed** están más cargados de información porque en ellos se hace explícita la correspondencia entre pruebas y términos— característica que comparte con los términos de prueba de ΛJ . Ello se debe a que en los diagramas de **NG Typed**, se hace explícita la función computacional que en los diagramas de **NG**, aunque presente al "ojo entrenado", de alguna manera, ocurre sólo como una insinuación. De hecho, borrando de los diagramas de **NG Typed** los términos de prueba aunque conservando las fórmulas, volvemos a **NG**. En sentido contrario, los términos de prueba de ΛJ pueden ser vistos como la versión linealizada de los diagramas de **NG** y **NG Typed,** y con ello, como se verá, la manipulación sintáctica de los códigos de prueba facilita el estudio del comportamiento combinatorio de los esquemas diagramáticos porque en ellos se codifica todo un árbol de derivación, lo cual implica dar una respuesta al rompecabezas de Negri & von Plato (2011, p. 29) que planteamos en el capítulo 1.

Cabe mencionar, como se hizo en la introducción, que no presentamos la prueba completa de normalización fuerte de la lógica proposicional intuicionista sino un esbozo. Por otro lado, el esbozo de la prueba de normalización fuerte del sistema **NG** lo presentamos echando mano directamente de la maquinaria formal del sistema ΛJ que extendimos en este trabajo con respecto a la presentación original en Joachimski &

[109] Matthes, Ralph (2005), Non-strictly positive fixed points for classical natural deduction, Annals of Pure and Applied Logic 133, 205-230.

Matthes (2003). La razón de proceder de esta manera es que conforme aumenta la complejidad de una derivación, el diagrama comienza por ser un objeto intratable como para desplegarlo en una página; por otro lado, la propiedad de normalización fuerte del sistema **NG** sólo se ha aclarado a través del estudio del sistema ΛJ.

Reglas de Introducción y Eliminación de NG Typed	
$$\frac{\Gamma \vdash r : A \qquad \Delta \vdash s : B}{\Gamma, \Delta \vdash pair(r,s) : A \& B}\&I$$	
$$\frac{\Gamma \vdash r : A\&B \qquad \Delta, x : A^m,\ y : B^n \vdash t : C}{\Gamma, \Delta \vdash\ g\,\mathrm{proj}(r,\ x.y.t) : C}\&E$$	
$$\frac{\Gamma \vdash r : A}{\Gamma \vdash inl\, r : A \vee B} \vee I$$	$$\frac{\Gamma \vdash s : B}{\Gamma \vdash inr\, s : A \vee B} \vee I$$
$$\frac{\Gamma \vdash r : A \vee B \qquad \Delta,\ x : A^m \vdash s : C \qquad \Theta, y : B^n \vdash t : C}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash case(r,\ x.s,\ y.t) : C} \vee E$$	
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash s : B}{\Gamma \vdash \lambda x.s : A \supset B} \supset I$$	
$$\frac{\Gamma \vdash r : A \supset B \qquad \Delta \vdash s : A \qquad \Theta, y : B^n \vdash t : C}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash\ gapp(r,\ s,\ y.t) : C} \supset E$$	
$$\frac{}{\Gamma,\ x : A \vdash x : A} Hyp$$	$$\frac{\Gamma \vdash r : \bot}{\Gamma \vdash efq(r) : C} \bot E$$

Tabla 3.2.

§Definición del sistema $\Lambda J^{\&\vee\supset\bot}$

A continuación presentamos toda la batería[110] de conceptos, definiciones, y reglas por las que está constituída la maquinaria formal del sistema ΛJ, la cual es una exposición preparatoria y necesaria para presentar el esbozo de la prueba de normalización fuerte de la lógica proposicional intuicionista al final de este capítulo.

Términos. Los términos $r, s, t \in \Lambda J$, los generamos a partir de un suministro potencialmente infinito de variables x, y, z con la siguiente gramática:

$$\Lambda J \ni r,\ s,\ t ::= \begin{array}{l} x \mid pair\,(r,s) \mid inl\,r \mid inr\,s \mid \lambda x.r \\ g\text{proj}\,(r,\ x.y.t) \mid case\,(r,\ x.p,\ y.t) \mid gapp\,(r,\ s,\ y.t) \mid efq\,(r) \end{array}$$

Informalmente, haciendo un paralelismo entre los términos de ΛJ con las reglas de **NG**:

ΛJ	**NG**
x (es una hipótesis cualquiera)	Hyp
$pair(r, s)$	$\&I$
$inl(s)$ (por ***in**jection **l**eft*) e $inr(s)$ (*por **in**jection **r**ight*)	$\vee I$
$\lambda x.r$	$\supset I$
$gproj(r, x.y.t)$(por ***g**eneralized **proj**ection*)	$\&E$
$case(r, x.s, y.t)$	$\vee E$
$gapp(r, s, y.t)$(por ***g**eneralized **app**lication*)	$\supset E$
$efq(r)$ (por ***e**x **f**also **q**uodlibet*)	$\bot E$

[110] Con respecto a definiciones, conceptos y reglas del cálculo lambda, muchas de ellas provinieron de diversas fuentes pero hacemos extenso uso de las que provienen en Joachimski-Matthes (2003), Matthes (2005), Hindley & Seldin (2008), Nederpelt & Geuvers (2014), de las notas de clase del Dr. Favio Miranda Perea así como también las que ha preparado en conjunto con la Dra. Lourdes del Carmen González Huesca para sus diversos cursos impartidos en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

En la construcción de un $\lambda - término$, de acuerdo con nuestra gramática, las variables pueden ocurrir de tres modos[111]:

1) Libres (*free*), **2)** Ligadas (*bound*) y **3)** Ligantes (*binding*).

Ejemplo:

a) Usando Hyp como principio constructivo de un $\lambda - término$: $x,\ y,\ z$, se tratan de ejemplos de variables libres.

b) Usando $\lambda x.r,\ gproj(r, x.y.t),\ case(r, x.s, y.t)$ y $gapp(r, s, y.t)$ como último paso constructivo de un $\lambda - término$: La variable x en $\lambda x.r$ es ligante y las presencias de x en dicha r son ligadas; similarmente, $x.y.t$ en $gproj(r, x.y.t)$, $x.y$ son variables ligadas en t; en $case(r, x.s, y.t)$, las variables x, y están ligadas respectivamente en s, t; y finalmente en $gapp(r, s, y.t)$, la variable y está ligada en t.

* Ahora, es importante notar que $\lambda x.r$ y r, son $\lambda - términos$ pero no lo son expresiones como λ, λx o $x.r$, aunque bien puede ocurrir que se traten de expresiones que ocurran en un $\lambda - término$.

[111] Cf. Hindley, J. Roger & Seldin, Jonathan R. (2008), Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction, USA: Cambridge University Press (reprint 2010).), pp. 6-7. Nederpelt, Rob & Geuvers, Herman (2014), Type Theory and Formal Proof: An Introduction, USA: Cambridge University Press, p. 8. Estas misma distinciones también ocurren en lógica de primer orden por el uso de los cuantificadores, sólo que muy a menudo no se suelen distinguir en los libros de textos. La única excepción que conozco que no sigue esta omisión es Kleene (1952), pp. 76-80.

<u>Definición del conjunto FV</u> <u>(**F**ree **V**ariables)</u> **<u>de un λ-término.</u>**

Entendemos por $FV(r)$, el conjunto de variables libres de r:

$FV(\lambda - término)$
1) $FV(x)=\{x\}$
2) $FV(pair\ (r\ s))=FV(r)\ \cup\ FV(s)$
3) $FV(inl\ r)=FV(r)$
4) $FV(inr\ s)=FV(s)$
5) $FV(\lambda x.r)=FV(r)\ \backslash\{x\}$
6) $FV(gproj(r,x.y.t))=FV(r)\ \cup\ FV(t)\ \backslash\{x,y\}$
7) $FV(case(r,x.s,y.t))=FV(r)\ \cup\ FV(s)\ \backslash\{x\}\cup\ FV(t)\ \backslash\{y\}$
8) $FV(gapp(r,s,y.t))=FV(r)\ \cup\ FV(s)\ \cup\ FV(t)\ \backslash\{y\}$
9) $FV(efq(r))=FV(r)$

Seguimos a Joachimski & Matthes (2003, p. 62) en la adopción de la notación de punto como en $\lambda x.r$ para evitar el uso de paréntesis en $\lambda x(r)$,[112] su alcance sintáctico se extiende hacia la derecha lo más lejos posible; las comas denotan concatenación y elongación entre las ocurrencias de expresiones en un término.

<u>Tipos</u>. Definimos a los tipos, a quienes también llamamos fórmulas, mediante la metavariable α que se extiende sobre un conjunto potencialmente infinito de variables de tipos:

$$\boxed{A,\ B,\ C,\ D,\ E ::= \alpha \mid \perp \mid A\&B \mid A \vee B \mid A \supset B.}$$

[112] Como ocurre, por ejemplo, en von Plato (2013) pp. 206-209.

Alpha-equivalencia. A la relación de $\alpha - equivalencia$ también se le conoce como $\alpha - conversión$ y decimos que dos términos r_1, r_2 son $\alpha - equivalentes$ si y sólo si r_1 y r_2 difieren entre sí únicamente en el nombre de las variables ligadas. En símbolos, esta operación la denotamos como $r_1 \equiv_\alpha r_2$. Bajo la relación de $\alpha - equivalencia$, los $\lambda - términos$ forman clases de equivalencia $módulo \equiv_\alpha$ en las que los términos individuales pueden ser vistos como miembros representativos de tales clases[113]. El acto de reemplazar variables no debe afectar el *status* de las variables libres o ligadas en un $\lambda - término$.

Ejemplos:

$$gproj(r, x.y.pair\ (x, y)) \equiv_\alpha gproj(r, w.z.pair\ (w, z)),$$

pero

$gproj(z, x.y.inr(pair(x, y)\ )) \equiv_\alpha gproj(w, x.y.inr(pair\ (x, y)))$, **es una falacia** puesto que la variable libre z se sustituyó por la variable libre w.

Sustitución. El acto de reemplazar variables no debe afectar el *status* de las variables libres en un $\lambda - término$. Nótese que la operación de sustitución es total puesto que las condiciones laterales en los incisos **(3)**,**(6)**, **(7)** y **(9)** siempre se pueden hacer cumplir usando $\alpha - equivalencia$. Utilizamos la noción de sustitución libre de capturas a la que denotamos como $r[x := p]$ para efectuar la sustitución de la variable x por p en r sustituciones, y damos una definición recursiva:

$(1a)\ x\,[x := p] \equiv p$

$(1b)\ y\,[x := p] \equiv y$

$(2)\ \ (pair\,(r, s))\,[x := p] \equiv pair\,(r\,[x := p],\ s\,[x := p]).$

$(3)\ \ (g\text{proj}\,(r,\ u.y.t))\,[x := p] \equiv g\text{proj}\,(r\,[x := p],\ u.y.t\,[x := p])\ \ si\ \ u,\ y \neq x\ \ \text{y}\ \ u,\ y \notin FV\,(p).$

$(4)\ \ (inl\ r)\,[x := p] \equiv inl\,(r\,[x := p])$

$(5)\ \ (inr\ s)\,[x := p] \equiv inr\,(s\,[x := p])$

$(6)\ \ (case\,(r,\ u.s,\ y.t))\,[x := p] \equiv case\,(r\,[x := p],\ u.s\,[x := p],\ y.t\,[x := p])\ \ si\ \ u,\ y \neq x\ \ \text{y}\ \ u,\ y \notin FV\,(p).$

$(7)\ \ (gapp\,(r,\ s,\ u.t))\,[x := p] \equiv gapp\,(r\,[x := p],\ s\,[x := p],\ u.t\,[x := p])\ \ si\ \ u \neq x\ \ \text{y}\ \ u \notin FV\,(p).$

$(8)\ \ (efq\ \ r)\,[x := p] \equiv efq\,(r\,[x := p])$

$(9)\ (\ \lambda y.r)\,[x := p] \equiv (\lambda y.r\,[x := p])\ si\ y \neq x\ \ \text{y}\ \ y \notin FV\,(p).$

---

[113] Hindley, J. Roger & Seldin, Jonathan P. (2008), p.277.

<u>Beta-reducción</u>. Introducimos la definición del mecanismo de β-reducción. Las cláusulas aparecen por separado para facilitar la lectura porque, como se mencionó más arriba, al tratar de manera completa con el sistema de conectivas de la lógica proposicional intuicionista, tenemos reglas de β-reducción para las conectivas &, ∨, ⊃ :

$$
\begin{array}{l}
\quad \mathit{Base}: \\
g\,\mathrm{proj}\,(\mathit{pair}\,(r,s),\ x.\,y.\,t) \longrightarrow \beta_{\&} \quad t\,[x,\ y := r,\ s] \\
\mathit{case}\,(\mathit{inl}\,r,\ x.\,p,\ y.\,t) \longrightarrow \beta_{\vee_l} \quad p\,[x := r] \\
\mathit{case}\,(\mathit{inl}\,s,\ x.\,p,\ y.\,t) \longrightarrow \beta\vee_r \quad t\,[y := s] \\
\mathit{gapp}\,(\lambda x.\,r,\ s,\ y.\,t) \longrightarrow \beta_{\supset} \quad t\,[y := r\,[x := s]]
\end{array}
$$

$$
\mathit{Compatibilidad}: \ \text{Si} \quad r \longrightarrow \beta\, r',\ \ s \longrightarrow \beta\, s',\ \ p \longrightarrow \beta\, p',\ \ t \longrightarrow \beta\, t' \quad \text{entonces}
$$

$$
\begin{array}{c}
g\,\mathrm{proj}\,(\mathit{pair}\,(r,s),\ x.y.t) \longrightarrow \beta_{\&}\ \ g\,\mathrm{proj}\,(\mathit{pair}\,(r',s),\ x.y.t) \\
g\,\mathrm{proj}\,(\mathit{pair}\,(r,s),\ x.y.t) \longrightarrow \beta_{\&}\ \ g\,\mathrm{proj}\,(\mathit{pair}\,(r,s'),\ x.y.t) \\
g\,\mathrm{proj}\,(\mathit{pair}\,(r,s),\ x.y.t) \longrightarrow \beta_{\&}\ \ g\,\mathrm{proj}\,(\mathit{pair}\,(r',s),\ x.y.t') \\
\mathit{pair}\,(r,s) \longrightarrow \beta_{\&}\ \ \mathit{pair}\,(r',s) \\
\mathit{pair}\,(r,s) \longrightarrow \beta_{\&}\ \ \mathit{pair}\,(r,s')
\end{array}
$$

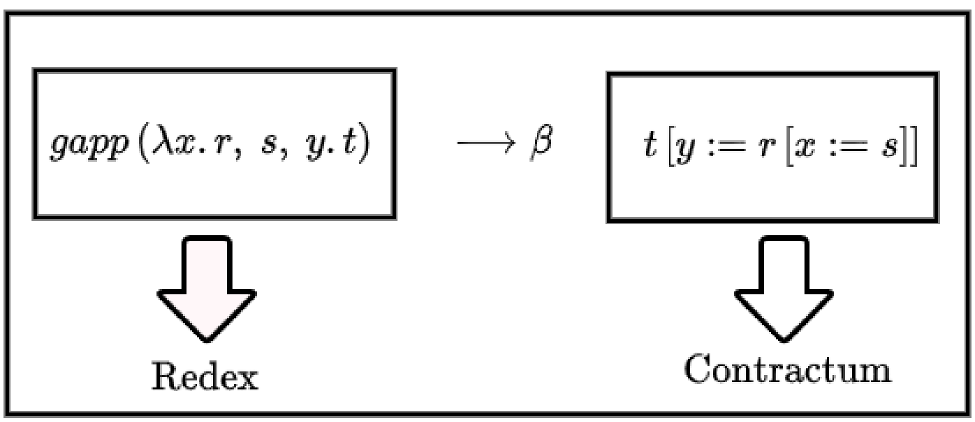
$$
\begin{array}{c}
\mathit{case}\,(\mathit{inl}\,r,\ x.p,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\vee_l}\ \ \mathit{case}\,(\mathit{inl}\,r',\ x.p,\ y.t) \\
\mathit{case}\,(\mathit{inl}\,r,\ x.p,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\vee_l}\ \ \mathit{case}\,(\mathit{inl}\,r,\ x.p',\ y.t) \\
\mathit{case}\,(\mathit{inl}\,r,\ x.p,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\vee_l}\ \ \mathit{case}\,(\mathit{inl}\,r,\ x.p,\ y.t') \\
\mathit{inl}\,r \longrightarrow \beta\vee_l\ \ \mathit{inl}\,r'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathit{case}\,(\mathit{inr}\,s,\ x.p,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\vee_r}\ \ \mathit{case}\,(\mathit{inr}\,s',\ x.p,\ y.t) \\
\mathit{case}\,(\mathit{inr}\,s,\ x.p,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\vee_r}\ \ \mathit{case}\,(\mathit{inr}\,s,\ x.p',\ y.t) \\
\mathit{case}\,(\mathit{inr}\,s,\ x.p,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\vee_r}\ \ \mathit{case}\,(\mathit{inr}\,s,\ x.p,\ y.t') \\
\mathit{inr}\,s \longrightarrow \beta_{\vee_r}\ \ \mathit{inr}\,s'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathit{gapp}\,(\lambda x.r,\ s,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\supset}\ \ \mathit{gapp}\,(\lambda x.r',\ s,\ y.t) \\
\mathit{gapp}\,(\lambda x.r,\ s,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\supset}\ \ \mathit{gapp}\,(\lambda x.r,\ s',\ y.t) \\
\mathit{gapp}\,(\lambda x.r,\ s,\ y.t) \longrightarrow \beta_{\supset}\ \ \mathit{gapp}\,(\lambda x.r,\ s,\ y.t') \\
\lambda x.r \longrightarrow \beta_{\supset}\ \ \lambda x.r'
\end{array}
$$

Para facilitar la lectura de las reglas anteriores distinguimos las partes del término de prueba que entran en la reducción. De manera preliminar, distinguimos las partes de un $\lambda - término$, el subtérmino r de $\lambda x. r$, lo conocemos como el **cuerpo de la abstracción**, λx es la **cabeza del término** y el punto . separa la **variable de la cabeza**[114] (variable ligante) de las variables ligadas (posiblemente cero).

$\lambda x. r$	$\lambda - término$
λx	**Cabeza**
x	**Variable de la cabeza**
r	**Cuerpo de la abstracción**

En el diagrama de abajo, a la expresión que aparece en la parte izquierda se le conoce como *redex* (por ***red****ucible* ***ex****pression*) y a la parte derecha como *contractum* o reducto:



En el *contractum*, como puede verse, efectuamos una operación de sustitución en donde reemplazamos en el cuerpo de la abstracción r, la variable ligada x por el término s, y a la variable ligada y en t, la reemplazamos por el término r.

Las reglas de β-reducción codifican la manera de resolver los *détours* sobre la

[114] Mejor conocida en inglés como *head variable.*

conjunción, la disyunción y la implicación como los esquemas que se presentaron en la sección anterior para el sistema **NG**. La versión diagramática en **NG Typed** de estas reglas como esquemas de conversión tienen la siguiente estructura y se corresponden con el caso base de las reglas de β-reducción de ΛJ:

Conversión de Détour $\&I - \&E$ en NG Typed
$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash r:A \quad \Delta\vdash s:B}{\Gamma,\Delta\vdash pair(r,s):A\&B}\&I \qquad \Theta,\ x:A,\ y:B\vdash\ t:C}{\Gamma,\Delta,\Theta\vdash g\,\mathrm{proj}\,(pair\,(r,s),\ x.\,y.\,t):C}\&E \quad Conv\ \Rightarrow\ \Gamma,\Delta,\Theta\vdash t\,[x,y:=r,s]:C$

Conversión de Détour $\vee I - \vee E$ en NG Typed
$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash r:A}{\Gamma\vdash inl\,r: A\vee B}\vee I \qquad \Delta,x:A\vdash p:C \qquad \Theta,y:B\vdash t:\ C}{\Gamma,\Delta,\Theta\vdash case\,(inl\,r,\ x.\,p,\ y.\,t):C}\vee E \quad Conv\ \Rightarrow\ \Gamma,\Delta\vdash p\,[x:=r]:C$
$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash s:B}{\Gamma\vdash inr\,s: A\vee B}\vee I \qquad \Delta,x:A\vdash p:C \qquad \Theta,y:B\vdash t:\ C}{\Gamma,\Delta,\Theta\vdash case\,(inr\,s,\ x.\,p,\ y.\,t):C}\vee E \quad Conv\ \Rightarrow\ \Gamma,\Theta\vdash t\,[y:=s]:C$

Conversión de Détour $\supset I - \supset E$ en NG Typed
$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\,x:A\vdash r:B}{\Gamma\vdash \lambda x.r: A\supset B}\supset I \qquad \Delta\vdash\ s:A \qquad \Theta,\ y:\ B\ \vdash t:C}{\Gamma,\Delta,\Theta\vdash\ gapp\,(\lambda x.\,r,\ s,\ y.\,t):C}\supset E \quad Conv\ \Rightarrow\ \Gamma,\Delta,\Theta\vdash\ t\,[y\ :=r\ [x:=s]]:C$

Pi-reducción. Las reglas de **π**-reducción de ΛJ se corresponden con los diagramas de **NG** para resolver las conversiones permutativas y tenemos varios casos. Los números que en esta lista aparecen en rojo y entre corchetes, también se corresponden con la enumeración de la **Tabla 2.2.**[115] del capítulo anterior:

$g\text{proj}\,(g\text{proj}\,(r,\ x.\,y.\,t), w.\,z.\,t) \longrightarrow \pi\ g\text{proj}\,(r,\ x.\,y.\,g\text{proj}\,(s,\ w.\,z.\,t))$	[1.1.]
$case\,(g\text{proj}\,(r,\ x.\,y.\,t), w.\,t,\ z.\,p) \longrightarrow \pi\ g\text{proj}\,(r,\ x.\,y.\,case\,(s,\ w.\,t,\ z.\,p))$	[1.2.]
$gapp\,(g\text{proj}\,(r,\ x.\,y.\,t), t,\ w.\,p) \longrightarrow \pi\ g\text{proj}\,(r, x.\,y.\,gapp\,(s,\ t,\ w.\,p))$	[1.3.]
$efq\,(g\text{proj}\,(r,\ x.\,y.\,t)) \longrightarrow \pi\ g\text{proj}\,(r, x.\,y.\,efq\,(s))$	[1.4.]
$g\text{proj}\,(case\,(r,\ x.\,s,\ y.\,t), w.\,z.\,p) \longrightarrow \pi\ case\,(r,\ x.\,g\text{proj}\,(s,\ w.\,z.\,p),\ y.\,g\text{proj}\,(t,\ w.\,z.\,p))$	[2.1.]
$case\,(case\,(r,\ x.\,s,\ y.\,t), w.\,p,\ z.\,q) \longrightarrow \pi\ case\,(r,\ x.\,case\,(s,\ w.\,p,\ z.\,q),\ y.\,case\,(t,\ w.\,p,\ z.\,q))$	[2.2.]
$gapp\,(case\,(r,\ x.\,s,\ y.\,t), p,\ w.\,q) \longrightarrow \pi\ case\,(r, x.\,gapp\,(s,\ p,\ w.\,q),\ y.\,gapp\,(t,\ p,\ w.\,q))$	[2.3.]
$efq\,(case\,(r,\ x.\,s,\ y.\,t)) \longrightarrow \pi\ case\,(r, x.\,efq\,(s),\ y.\,efq\,(t))$	[2.4.]
$g\text{proj}\,(gapp\,(r,\ s,\ y.\,t), w.\,z.\,p) \longrightarrow \pi\ gapp\,(r,\ s,\ y.\,g\text{proj}\,(t,\ w.\,z.\,p))$	[3.1.]
$case\,(gapp\,(r,\ s,\ y.\,t), w.\,p,\ z.\,q) \longrightarrow \pi\ gapp\,(r,\ s,\ y.\,case\,(t,\ w.\,p,\ z.\,q))$	[3.2.]
$gapp\,(gapp\,(r,\ s,\ y.\,t), p,\ w.\,q) \longrightarrow \pi\ gapp\,(r, s,\ y.\,gapp\,(t,\ p,\ w.\,q))$	[3.3.]
$efq\,(gapp\,(r,\ s,\ y.\,t)) \longrightarrow \pi\ gapp\,(r, s,\ y.\,efq\,(t))$	[3.4.]
$g\text{proj}\,(efq\,(r), x.\,y.\,t) \longrightarrow \pi\ efq\,(r)$	[4.1.]
$case\,(efq\,(r), x.\,s,\ y.\,t) \longrightarrow \pi\ efq\,(r)$	[4.2.]
$gapp\,(efq\,(r), s,\ y.\,t) \longrightarrow \pi\ efq\,(r)$	[4.3.]
$efq\,(efq\,(r)) \longrightarrow \pi\ efq\,(r)$	[4.4.]

Eliminaciones. Joachimski & Matthes (2002, p.61) introdujeron los conceptos y la notación de eliminación y eliminación múltiple como una abreviación metasintáctica para denotar iteraciones finitas de ocurrencias de reglas de eliminación. Las eliminaciones múltiples sobre un término las denotan con $\vec{S}$ como en:

$$\boxed{(\lambda x.\,r)\,(s, z.\,t)\vec{S}}$$

En este ejemplo, en particular, tenemos una caracterización sintáctica de un $\beta - redex$ implicativo. La notación de vectores, de acuerdo con Joachimski & Matthes, fue introducida con el propósito de reemplazar conceptos geométricos como ramas y segmentos finales en una derivación que forman parte de la

[115] Cf. p. 53.

maquinaria para probar normalización fuerte como ocurre en Prawitz (1965, 1971). Sin embargo, el uso de la notación de vectores se vuelve muy "pesada" de leer y de seguir. Por ello, introducimos y adaptamos la notación de Matthes (2005) para corregir estos inconvenientes y conservar la conceptualización de eliminaciones múltiples.

Eliminaciones Simples. Definimos el conjunto de eliminaciones simples de manera inductiva mediante la siguiente gramática, en donde $\star$ es un símbolo nuevo de carácter metasintáctico que denota una prueba desconocida, aunque no se trata de un término, y el símbolo e denota siempre una eliminación:

$$\boxed{\mathbf{e} ::= \ case\,(\bigstar,\ x.\,s,\ y.\,t) \mid g\,\mathrm{proj}\,(\bigstar,\ x.\,y.\,t) \mid gapp\,(\bigstar,\ s, y.\,t) \mid efq\,(\bigstar)}$$

Podemos escribir $e[r]$ por el término e, *par abus de la notation*, en donde la sustitución trata al símbolo $\star$ como si se tratara de un término, sustitución textual, aunque debe observarse que esto sólo ocurre en nuestra metasintaxis (Matthes, 2005, p. 208).

Ahora, habiendo introducido la abreviación metasintáctica e, es posible compactar la anterior lista de reglas de π −reducción de manera drástica:

$$\boxed{\begin{array}{rl} e\,[case\,(r, x.\,s, y.\,t)] \longrightarrow \pi & case\,(r, x.\,e\,[s], y.\,e\,[t]). \\ e\,[g\,\mathrm{proj}\,(r, x.\,y.\,t)] \longrightarrow \pi & g\,\mathrm{proj}\,(r, x.\,y.\,e\,[t]). \\ e\,[gapp\,(r, s, x.\,t)] \longrightarrow \pi & gapp\,(r, s, x.\,e\,[t]). \\ e\,[efq\,(r)] \longrightarrow \pi & efq\,(r). \end{array}}$$

De hecho, dada la generalidad y alcance de estas reglas, las dieciséis reglas anteriores, de **1.1.-4.4.**, son casos particulares de estas cuatro reglas.

Para ilustrar la correspondencia con los tres formalismos desarrollados en este trabajo entre las reglas de π-reducción de ΛJ con los esquemas de conversión de **NG** y

NG Typed, consideramos la permutación **3.1**:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ r{:}A\supset B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ s{:}A\end{array}\quad \begin{array}{c}\Theta, y{:}[B^n]^1\\ \vdots\\ t{:}C\&D\end{array}}{C\&D}\supset E,1 \qquad \begin{array}{c}\Sigma, w{:}[C^k]^2,\ z{:}[D^l]^3\\ \vdots\\ p{:}E\end{array}}{E}\,\&E,\ 2,3$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ r{:}A\supset B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \vdots\\ s{:}A\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\Theta, y{:}[B^n]^1\\ \vdots\\ C\&D\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma, w{:}[C^k]^2,\ z{:}[D^l]^3\\ \vdots\\ t{:}E\end{array}}{E}\,\&E,\ 2,3}{E}\supset E,\ 1$$

π**<u>-reducción 3.1. en NG</u>**

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash r{:}\,A\supset B\quad \Delta,\ s{:}A,\quad \Theta,\ y{:}B^n\vdash t{:}C\&D}{\Gamma\vdash gapp(r,\ s,\ y.t){:}C\&D}\supset E\qquad \Sigma,\ w:C^k,\ z:D^l\ \vdash\ p:\ E}{\Gamma,\Delta,\Theta,\Sigma\ \vdash\ g\,\mathrm{proj}\,(gapp\,(r,\ s,\ y.\,t),\ w.\,z.\,p):\ E}\,\&E$$

$$\Downarrow Conv$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash r{:}\ A\supset B\quad \Delta,\ s{:}A\quad \dfrac{\Theta,\ y{:}B^n\vdash t{:}C\&D\quad \Sigma,\ w{:}C^k,\ z{:}D^l\vdash p{:}\ E}{\Theta,\Sigma\vdash g\,\mathrm{proj}(t,\ w.y.p){:}C\&D}\,\&E}{\Gamma,\Delta,\Theta,\Sigma\ \vdash\ gapp\,(r,\ s,\ y.\,g\,\mathrm{proj}\,(t,\ w.\,y.\,p)):\ E}\supset E$$

π**<u>-reducción 3.1 en NG Typed</u>**

$$g\,\mathrm{proj}\,(gapp\,(r,\ s,\ y.\,t), w.\,z.\,p)\ \longrightarrow\pi\ gapp\,(r,\ s,\ y.\,g\,\mathrm{proj}\,(t,\ w.\,z.\,p))$$

π**<u>-reducción 3.1 en</u>** ΛJ

<u>Kappa-reducción</u>. La simplificación como convertibilidad en ΛJ fue formalizada por Joachimski & Matthes (2003, p. 80) para la aplicación generalizada y la llamaron κ-reducción. Sin embargo, es fácil extenderla para los otros dos casos que presentamos para **NG**:

$$
\boxed{
\begin{array}{llll}
g\,\mathrm{proj}\,(r,\ x.\,y.\,t) & \longrightarrow_{\kappa_{\&}} & t & si\ x,\ y \notin FV\,(t) \\
case\,(r,\ x.\,s,\ y.\,t) & \longrightarrow_{\kappa_{\vee}} & t & si\ y \notin FV\,(t) \\
case\,(r,\ x.\,y.\,t) & \longrightarrow_{\kappa_{\vee}} & s & si\ x \notin FV\,(s) \\
gapp\,(r,\ s,\ y.\,t) & \longrightarrow_{\kappa_{\supset}} & t & si\ y \notin FV\,(t)
\end{array}
}
$$

En el capítulo anterior, mostramos los esquemas de simplificación para $\vee E$ y distinguimos dos casos, descarga incompleta y descarga vacua. Las dos reglas de $\kappa_{\vee}$ −reducción capturan ambos casos de forma general, observando que la descarga vacua introduce un no-determinismo en una prueba por casos cuando $x \notin FV(s)\ o\ \ y \notin FV(t)$, por lo que es lícito elegir descargar cualquiera de las premisas secundarias que están en lugar de los disyuntos. El resultado de esta elección, nos remite a lo que se reduce una derivación cuando hay una descarga incompleta por $\vee E$. Para inyectarle intuición "geométrica" a estas reglas, mostramos el esquema de simplificación $\kappa_{\&}$ en el sistema **NG Typed**. En el diagrama, en el *redex* y en el código de la prueba (parte inferior de la regla), se puede apreciar que por la descarga vacua en $\&E$ también tenemos un ligado vacuo:

$$
\boxed{
\begin{array}{c}
\dfrac{\Gamma \vdash r:\ A\&B \qquad \Delta \vdash\ t : C}{\Gamma, \Delta \vdash g\,\mathrm{proj}\,(r,\ x.\,y.\,t) : C}\,\&E \\[2ex]
\Downarrow Conv \\[2ex]
\Delta \vdash\ t : C
\end{array}
}
$$

<u>Simplificación</u> $\kappa_{\&}$ **<u>en NG Typed</u>**

Formas normales. Dada una relación binaria $\rightarrow \subseteq T^{2}$, un término $r \in T$ está en forma normal si y sólo si no existe un término $s \in T\ tal\,que\ r \rightarrow s$. Las formas normales de $\Lambda J^{\vee\supset\perp}$ las generamos con la siguiente gramática:

$$NF \ni r,\ s,\ t ::= \quad x \mid pair\,(r, s) \mid inl\ s \mid inr\ s \mid \lambda x.r \mid g\,\mathrm{proj}\,(x,\ y.z.t) \mid case\,(x,\ y.p,\ z.t) \mid gapp\,(x,\ s,\ y.t) \mid efq\,(r)$$

Si comparamos esta gramática de NF(por ***N****ormal* ***F****orm*) con la gramática que genera los términos de ΛJ presentada arriba, se trata prácticamente de la misma formulación. Sin embargo, el cambio es palpable cuando notamos que ahí donde estaba el término r ocupando el lugar de la premisa mayor en una regla de eliminación, ahora aparece x como una variable cualquiera. La razón de este cambio responde a la definición que dan Negri & von Plato (2001, p.9) sobre una derivación normal:

Definición: Forma Normal en NG. Una derivación está en forma normal si y sólo si todas las premisas mayores de reglas de eliminación son hipótesis.

Es importante observar que en el proceso de normalización de una derivación hay dos criterios en juego que, aunque al final coinciden, tienen distintas motivaciones conceptuales[116]. Por un lado, normalizar consiste en remover los *redex* en una derivación de acuerdo a la relación de reducibilidad $\longrightarrow\beta\pi\kappa$[117]; por otro lado, normalizar consiste en transformar una derivación de tal manera que todas las premisas mayores de reglas de eliminación sean hipótesis. Este último criterio está motivado por el teorema de G. Mints (Negri & von Plato, 2001, pp. 201-202) sobre el cálculo de secuentes, según el cual en reglas izquierdas las premisas principales pueden restringirse a que sean hipótesis propiamente.

La consecuencia del teorema de Mints para **NG**, consiste en que las premisas mayores en reglas de eliminación son hipótesis propiamente si son inderivables. El teorema de Mints puede considerarse como una aplicación de la normalización.

[116] Esta observación se debe al Dr. Favio Miranda y transpiró en una de las muchas discusiones que hemos tenido sobre el tema.
[117] $\longrightarrow\beta\pi\kappa := \longrightarrow\beta \cup \longrightarrow\pi \cup \longrightarrow\kappa$

<u>Teorema de Mints</u>: Si $\Gamma \vdash C$, entonces existe una derivación en donde todas las premisas mayores de reglas de eliminación son hipótesis propiamente.

<u>Esbozo de prueba del Teorema de Mints</u>[118]: Supongamos que A es una premisa mayor derivable. Si A tuviera una derivación normal, la última regla aplicada en la derivación sería una regla de introducción pues si terminara en una regla de eliminación, habría hipótesis sin descargar. Entonces, por la hipótesis de que A es una premisa mayor derivable, efectuamos una sustitución de A por su derivación normal y con ello introducimos un *détour*. Las conversiones no introducen nuevas premisas mayores de reglas de eliminación y los *détours* producen fórmulas de conversión más simples. Sustituyendo premisas mayores derivables de reglas de eliminación por su conversión, el proceso eventualmente termina y nos quedamos con una derivación con hipótesis propiamente.

La prueba del teorema de Mints resulta ser una consecuencia de que siempre existan formas normales, es decir, que el sistema sea fuertemente normalizable.

<u>Normalización fuerte</u>. Dada una relación binaria $\rightarrow \subseteq T^{2}$, un término r es fuertemente normalizable si y sólo si no hay una secuencia infinita de reducciones que empieza con r. Una formulación más positiva de esto último la obtenemos con la siguiente definición inductiva:

$$\boxed{\frac{\forall r' \left(r \longrightarrow r' \;\Rightarrow\; r' \in \mathbf{sn} \right)}{r \in \mathbf{sn}}}$$

El contenido de la regla es aproximadamente el siguiente: un término $r \in \Lambda J$ es fuertemente normalizable, $r \in sn$, si en todo paso unitario de reducción, $r \rightarrow r'$, el reducto r' es fuertemente normalizable, *i.e.*, $r' \in sn$, entonces $r \in sn$. Como remarcan Joachimski & Matthes (2002, p. 64) “el conjunto sn constituye la parte bien fundada, de la relación de reducibilidad”, es decir, afirmar que un término es

118 von Plato, Jan (2003). Natural Deduction: Some Recent Developments, Technische Universität Dresden; Summary of Four Lectures at the Summer School of Proof Theory, Computation and Complexity. https://www.mv.helsinki.fi/home/negri/dresum.pdf

fuertemente normalizable, $r \in sn$, equivale a afirmar la expresión: no hay ninguna secuencia de reducción infinita que comienza con r. En una palabra, todo proceso de reducción es finito, es decir, termina.

La relación de reducción es la que nos da acceso a los términos de ΛJ en forma normal, NF, elementos de sn. Por otro lado, lo que muestra la relación de reducción es cómo la propiedad de normalización se hereda entre términos cuando están en forma normal.

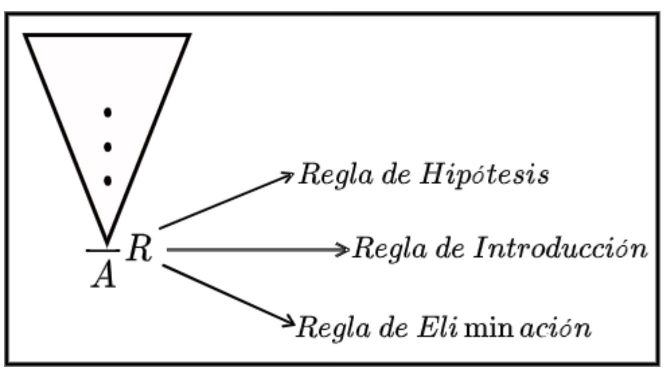
El método de Joachimski & Matthes (2003) para establecer normalización fuerte consiste en caracterizar inductivamente al conjunto de los términos fuertemente normalizables de ΛJ.

Conviene hacer completamente explícita la estructura sobre la que corre la inducción porque la estructura como el procedimiento inductivo se repiten con frecuencia. De acuerdo con la definición inductiva de **NG**, una prueba normal puede terminar con alguna de las siguientes reglas de derivación:

1) $H - prueba$, si termina con regla de Hipótesis (Hyp)[119];

2) $I - prueba$, si termina con alguna regla de Introducción $(\&I,\ \lor I,\ \supset I)$;

3) $E - prueba$, si termina con alguna regla de Eliminación $(\&E,\ \lor E,\ \supset E,\ \bot E)$.



Como el esbozo de la prueba que se ofrece echa mano de la maquinaria formal del sistema $\Lambda J^{\&\lor\supset\bot}$, presentamos en paralelo los tres casos anteriores en el

[119] Las nociones de ***H***-prueba, ***I***-prueba y ***E****-prueba* resultaron de una sugerencia del Dr. Favio Miranda, lo mismo que las nociones de ***Var****iables*, ***I****-términos*, y ***E****-términos*.

jargon apropiado para $\Lambda J^{\&\vee\supset\perp}$:

1. $Variables$: x
2. $I - términos$: $inl\ s,\ inr\ s,\ pair(r,s),\ \lambda x.r$
3. $E - términos$: $case(r,x.s,y.t),\ gproj(r,x.y.t),\ gapp(r,s,y.t),\ efq(r)$

<u>Eliminaciones Múltiples</u>. Definimos inductivamente el conjunto de eliminaciones múltiples, ME (por ***M****ultiple* ***E****limination*), mediante las siguientes reglas:

$$\boxed{\frac{}{\bigstar\ \in \mathbf{ME}} \qquad \frac{e\ \in \mathbf{e} \quad E\ \in \mathbf{ME}}{e[\bigstar := E]\ \in \mathbf{ME}}}$$

De nuevo, la sustitución puede tratar al símbolo $\star$ como si se tratara de un término, y toda eliminación múltiple ($\star$, $E \in ME$) tiene exactamente una ocurrencia del símbolo $\star$. La gramática de ME es como sigue:

$$\boxed{\mathbf{ME} := \bigstar \mid e[E]}$$

Denotamos una eliminación múltiple mediante las letras E, F,..., y variaciones de las mismas. Escribimos $e[E]$ por $e[\star := E]$ y $E[r]$ por $E[\star := r]$. Semejantemente, $e[E[r]] = (e[E])\ [r]$, y para toda $E \neq \star$ es de la forma $F[e]$.

Intuitivamente, una eliminación múltiple consiste en una derivación que termina en regla de eliminación ($E - prueba$) en donde la premisa mayor se obtuvo:

1) por una prueba que desconocemos, $\star$, o **2)** se trata de una $E - prueba$ cuya premisa mayor se obtuvo por una regla de eliminación, cuya premisa mayor, a su vez, también se obtuvo por regla de eliminación, …, *ad libitum*.

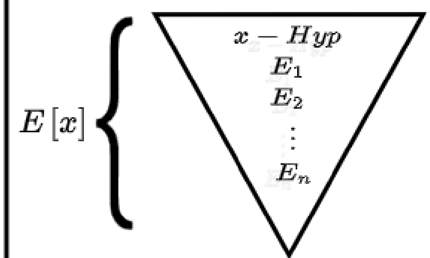
De manera que, lo que tenemos en una eliminación múltiple es una anidación de ocurrencias (posiblemente cero) de reglas de eliminación— conformando una secuencia— en la derivación de la premisa mayor de una $E - prueba$. Es posible tratar una secuencia de eliminaciones múltiples *en bloc*.

Para efectos ilustrativos, exhibimos un segmento de la secuencia de términos que se puede formar a partir de la gramática de ME y que son manejables de acuerdo a las reglas de derivación de SN:

$$
\begin{aligned}
E_0 &:= \bigstar \\
E_1 &:= case(\bigstar,\ x.s,\ y.t) \\
E_2 &:= g\,\mathrm{proj}(\bigstar,\ x.y.t) \\
E_3 &:= gapp(\bigstar,\ r, y.t) \\
E_4 &:= efq(\bigstar) \\
E_5 &:= case(case(\bigstar,\ x.s,\ y.t),\ w.p,\ z.q) \\
E_6 &:= g\,\mathrm{proj}(case(\bigstar,\ x.s,\ y.t),\ w.z.q) \\
E_7 &:= gapp(case(\bigstar,\ x.s,\ y.t),\ p,\ w.q) \\
E_8 &:= efq(case(\bigstar,\ x.s,\ y.t)) \\
E_9 &:= case(g\,\mathrm{proj}(\bigstar,\ x.y.t),\ w.p,\ z.q) \\
E_{10} &:= g\,\mathrm{proj}(g\,\mathrm{proj}(\bigstar,\ x.y.t),\ w.z.q) \\
E_{11} &:= gapp(g\,\mathrm{proj}(\bigstar,\ x.y.t),\ p,\ w.q) \\
E_{12} &:= efq(g\,\mathrm{proj}(\bigstar,\ x.y.t)) \\
&\vdots \\
E_n &:= (e\,[E])\,[r]
\end{aligned}
$$

Ahora, considerando la manera en que se comportan las reglas de eliminación de **NG**— a saber, todas ellas descargan hipótesis— y los esquemas de conversión como se presentaron en el capítulo anterior, podemos preguntarnos habiendo introducido la noción de eliminaciones sencillas y eliminaciones múltiples en ΛJ: ¿Qué relación guardan entre sí las nociones y los objetos de una teoría con la otra? En concreto: ¿Las nociones de eliminación de ΛJ capturan alguna pieza de información codificada en los esquemas de conversión de **NG**?

La respuesta es afirmativa para esta última pregunta. Los esquemas de conversión los obtuvimos, de acuerdo a cierto arreglo, combinando las reglas de introducción con reglas de eliminación— en el caso de los *détours*— y combinando las reglas de eliminación con reglas de eliminación— en el caso de las permutaciones. Ahora, imaginemos que tomamos uno de los esquemas de reglas de eliminación de **NG**, por ejemplo $\vee E$, y en la derivación de la premisa mayor de la regla insertáramos otro esquema de regla de eliminación, y en la derivación de la premisa mayor de esa otra regla de eliminación, insertáramos otro esquema de regla de eliminación. El proceso puede continuar pero no indefinidamente. Si la derivación es normal, eventualmente llegaremos a una regla de eliminación en donde necesariamente la premisa mayor de esa regla es una hipótesis. La forma que evoca la construcción de este esquema de eliminaciones múltiples en **NG** se asemeja a las *matrioshki.* Nos servimos de esta noción de eliminación múltiple para esquematizar en un diagrama cómo el proceso de normalización se codifica en ΛJ y lo instanciamos en una de las reglas del conjunto SN(al cual introducimos enseguida):



$$\frac{E[x],\ s,\ t \in SN}{case\,(E[x],\ y.\,s,\ z.\,t) \in SN}\,Var\ case$$

<u>Definición del Conjunto SN.</u> SN, es el conjunto de términos— que eventualmente probaremos— que contiene a todos los términos fuertemente normalizables que estamos interesados en capturar, *i.e.*, $SN \subseteq sn$. La caracterización de SN está dirigida por la sintaxis, es decir, podemos reconocer y reconstruir, a partir del código de la prueba, *proof-term*, la prueba correspondiente en **NG** empleando árboles de derivación, por ejemplo. Al conjunto SN lo definimos inductivamente mediante varias reglas, las cuales son exhaustivas y capturan por completo la noción de forma normal de una derivación de Negri & von Plato. Para facilitar su manejo, las reglas de SN las exhibimos en cinco grupos, ***Var***, ***INT***, ***ELIM***, β y $\boldsymbol{\pi}$:

$Regla\ Var\ de\ SN$
$\dfrac{}{x \in SN}\,Var$

Reglas INT de SN	*Reglas ELIM de SN*
$\dfrac{r,\ s \in SN}{pair\,(r,s) \in SN}\,pair$	$\dfrac{E\,[x],\ t \in SN}{g\,\mathrm{proj}\,(E\,[x],\ w.\,y.\,t) \in SN}\,g\,\mathrm{proj}$
$\dfrac{r \in SN}{inl\, r \in SN}\,inl$ $\qquad$ $\dfrac{s \in SN}{inr\, s \in SN}\,inr$	$\dfrac{E\,[x],\ s\ ,\ t \in SN}{case\,(E\,[x],\ y.\,s,\ z.\,t) \in SN}\,case$
$\dfrac{t \in SN}{\lambda x.\, t \in SN}\,\lambda$	$\dfrac{E\,[x],\ s,\ t \in SN}{gapp\,(E\,[x],\ s,\ x.\,t) \in SN}\,gapp$
	$\dfrac{E\,[x] \in SN}{efq\,(E\,[x]) \in SN}\,efq$

Reglas β de SN	*Reglas π de SN*
$\dfrac{E\,[t\,[w,\ y\ :=\ r,\ s]],\ r,\ s \in SN}{E\,[g\,\mathrm{proj}\,(pair\ (r,s),\ y.\,w.\,t)]}\,\beta\, pair$	$\dfrac{E\,[g\,\mathrm{proj}\,(F\,[x],\ y.\,w.\,e\,[t])] \in SN}{E\,[e\,[g\,\mathrm{proj}\,(F\,[x],\ y.\,w.\,t)]]}\,\pi\ g\,\mathrm{proj}$
$\dfrac{E\,[p\,[x := r]],\ E\,[t],\ r \in SN}{E\,[case\,(inl\ r,\ x.\,p,\ y.\,t)]}\,\beta\, inl$	$\dfrac{E\,[case\,(F\,[x],\ y.\,e\,[p],\ z.\,e\,[t])] \in SN}{E\,[e\,[case\,(F\,[x],\ y.\,p,\ z.\,t)]] \in SN}\,\pi\ case$
$\dfrac{E\,[t\,[y := s]],\ E\,[p],\ s \in SN}{E\,[case\,(inr\ s,\ x.\,p,\ y.\,t)]}\,\beta\, inr$	
$\dfrac{E\,[t\,[y := r\,[x := s]]],\ r,\ s\ \in SN}{E\,[gapp\,(\lambda x.\, r,\ s,\ y.\,t)]}\,\beta\,\lambda$	$\dfrac{E\,[gapp\,(F\,[x],\ s,\ y.\,e\,[t])] \in SN}{E\,[e\,[gapp\,(F\,[x],\ s,\ y.\,t)]]\ \in SN}\,\pi\ gapp$
	$\dfrac{E\,[efq\,([t])] \in SN}{E\,[e\,[efq\,(t)]]\ \in SN}\,\pi\ efq$

Asociando tipos o fórmulas a las reglas de SN, podemos ver esquemas conocidos de **NG.** Así, por ejemplo, en el grupo de la regla ***Var*** tenemos la regla de hipótesis, el grupo ***INT*** contiene a las reglas de introducción y el grupo ***ELIM*** a las reglas de eliminación. En el grupo β**,** tenemos los esquemas de conversión de los *détour* y, en el grupo $\boldsymbol{\pi}$, tenemos a las permutabilidades. No hay un grupo $\boldsymbol{\kappa}$ de conversiones en SN de manera explícita porque, de hecho, estas conversiones quedan capturadas en el grupo de reglas ***ELIM***.

La tarea de checar todos los pasos unitarios de reducción en un término complejo, se simplifica al análisis de un reducto estándar y algunos subtérminos. Ahora, todas las reglas están en su versión más general. Obtenemos los casos particulares, si de las reglas de SN quitamos parte de sus adornos que aparecen como las e, E y F. En el grupo de reglas $\boldsymbol{\pi}$, por ejemplo, si sustituímos las e— habiendo abstraído la E y removiendo las F pero conservando las $[x]$— por cualquier regla de eliminación, obtenemos todas las permutabilidades de **NG** analizadas del capítulo anterior. Semejantemente, ocurre lo mismo con las reglas del grupo β**.** El poder de abstracción y generalidad que tienen estas reglas es impresionante porque capturan todas las convertibilidades y las formas normales de **NG**. En cuanto a la lectura de las reglas, debe observarse que todas ellas hacen explícito el sujeto de la reducción en el término. Otro punto a observar, es que las reglas de SN tienen la misma bidireccionalidad que las reglas de Gentzen de la deducción natural. De arriba hacia abajo, la lectura enfatiza que las reglas nos dan una definición inductiva de los términos fuertemente normalizables. En sentido contrario, de abajo hacia arriba, las reglas nos pueden servir como una guía para alcanzar cierto fin. Así ocurre con las reglas β y $\boldsymbol{\pi}$ que tienen una estructura condicional de premisas a conclusión, en donde reconocemos en la parte de abajo al *redex* y, en la parte de arriba, la manera en la que se resuelve la conversión. De hecho, la única regla de SN que tiene cero-premisas y pasa directamente a la conclusión es la regla ***Var***.

§3.2. Esbozo de la Prueba de Normalización Fuerte de NG *à la* Joachimski-Matthes

¶ Preludio

La prueba de normalización fuerte del sistema **NG** es un objeto complejo en varios sentidos. De principio a fin, hay 17 reglas que probar, con varios subcasos e inducciones anidadas, habiendo internalizado el funcionamiento de la maquinaria lógica de Joachimski & Matthes. En otras palabras, la prueba es larga y hasta monótona pero se trata de un objeto constructible, bien organizado e inteligible. En líneas generales, la prueba de Joachimski & Matthes tiene un enfoque local. Esto quiere decir que los pasos de reducción se van efectuando sobre los fragmentos críticos de un término de prueba, *i.e*, aquellos segmentos de una derivación en donde reconocemos un *redex,* lo cual permite modularizar la prueba de normalización fuerte.

En contraste, la prueba de Negri & von Plato tiene un enfoque global. Con ello se quiere apuntar a que su metodología exige que se esté tratando con una derivación completa (Negri & von Plato, 2001, p. 196-201) en la que se hayan identificado todos los hilos de prueba, para después asociar a cada hilo de prueba un multiconjunto de fórmulas convertibles; luego ordenar los hilos de prueba lexicográficamente de acuerdo a la posición y altura de las premisas mayores en el hilo. En este sentido, vale la pena hacer la siguiente observación. La prueba de normalización de Negri-von Plato emplea la maquinaria formal desarrollada por Prawitz (1965, 1971) e implementa la estrategia de normalización de Gentzen (Gentzen & von Plato, 2008), la cual consiste en postergar los *détours* sobre la implicación y resolver antes el resto de las conversiones.

Una primera dificultad con este enfoque, además del problema de inteligibilidad que supone la definición y construcción de los hilos de prueba (Negri & von Plato, 2001, p.196 y Negri & von Plato, 2011, pp.26-27), consiste en que, en general, los pasos de reducción o conversión siempre se resuelven de manera local sobre un segmento determinado de alguna prueba y no sobre la prueba vista como un todo. ¿Para qué plantear la estrategia de normalización a nivel global si las convertibilidades terminan por resolverse siempre a nivel local? Otra dificultad de la estrategia de Negri & von Plato, consiste en que eligen para efectuar su procedimiento de reducción el suponer que la derivación está libre de conversiones de simplificación; por otro lado, emplean una estrategia de reducción que consiste en posponer la reducción de los *détours* sobre la implicación una vez que se hayan resuelto el resto de las conversiones. En cuanto a la primera restricción, suponer que una derivación está libre de simplificaciones, no es tan grave porque las simplificaciones constituyen más una monserga técnica que un verdadero problema. Lo realmente complicado y escabroso de la normalización viene con tratar las permutabilidades y los *détours*. La última restricción, principalmente, es la que hace que la prueba de normalización de Negri & von Plato se quede corta como para ser caracterizada como fuerte. De hecho, la llaman "cuasi-fuerte", como señalamos en la introducción y en el capítulo 1, pero esto es otra manera de decir que lo que establece su prueba es que **NG** es débilmente normalizable. El propósito de nuestro trabajo ha consistido en tender un puente entre ambos resultados, es decir, los de Negri & von Plato (2001) y Joachimski & Matthes (2003). En concreto, este puente es apreciable en tanto que podemos transitar entre derivaciones de sistemas formales, mediante traducciones, a través de los árboles de derivación de **NG** (pasando por **NLI, NG Typed**) a la forma lineal de las mismas en los hilos de prueba de ΛJ, y viceversa.

¶ Esquematización de la Prueba de Normalización Fuerte del Sistema NG

Habiendo presentado la maquinaria formal para efectuar la prueba de normalización fuerte del sistema **NG**, procedemos a bosquejar su estructura. La prueba consta de tres fases:

1) Definición del conjunto SN, el cual captura la intuición acerca de cómo se hereda entre términos la propiedad de normalización fuerte de premisas a conclusión, de acuerdo a las reglas que caracterizan al conjunto SN.

2) Probar que $SN \subseteq sn$. Esto se hace demostrando que el conjunto sn queda cerrado bajo las propiedades de sustitución y reducción $\longrightarrow_{\beta\pi\kappa}$ ($\longrightarrow_{\beta\pi\kappa} := \longrightarrow_{\beta} \cup \longrightarrow_{\pi} \cup \longrightarrow_{\kappa}$). Esto último se puede demostrar si en las reglas de SN, sustituímos SN por sn y mostramos que estas nuevas reglas siguen siendo válidas.

3) Los términos que codifican a una derivación pertenecen a SN:

$$Si\ \ \Gamma \vdash r{:}\, A,\ entonces\ \ r\ \in\ SN.$$

Esto se prueba haciendo inducción sobre la relación de derivabilidad. La normalización fuerte es consecuencia de todo lo anterior.
Por la parte **3)**:

$$Si\ \ \Gamma \vdash r{:}\, A,\ entonces\, r\ \in\ SN.$$

Por lo tanto, por la parte **2)**, $r \in sn$. ❙

§4.Conclusiones

“Formal proofs of even quite elementary theorems tend to be long. As a price for having analyzed logical deduction into simple steps, more of those steps have to be used”[120].
S.C. Kleene

Un buen cierre para este trabajo sería colocar unas cuantas reflexiones en torno a la pregunta: ¿por qué normalizar?

Normalizar pruebas formales está muy al punto cuando lo que queremos mostrar en nuestras pruebas es que gozan de una propiedad muy peculiar, la cual consiste en que su construcción— cuando existe— puede proceder de manera directa siguiendo los postulados de una teoría, como los sistemas lógicos tipo Gentzen o del cálculo lambda fundamentados en la interpretación **BHK**.

Es fácil imaginar que dada esta respuesta le siga otra pregunta en la misma vena (retórica) que la anterior: ¿y, para qué queremos tener pruebas directas?

Tener pruebas directas de resultados matemáticos es poder contar a mano con un criterio por el cual nos es posible decidir teniendo dos pruebas de un mismo resultado, cuál es más simple que la otra (Negri & von Plato 2011, p.1).

Cabe pensar en la posibilidad de que un intercambio de preguntas y respuestas de este tipo, acabe por generar un diálogo escéptico entre las partes y que al final del mismo se vuelva a la pregunta inicial pero, esta vez incitando una respuesta como la que ofreció un artista que pintaba cuando se le preguntó: ¿por qué pinta? — “Yo pinto y basta”—. Semejantemente, a la pregunta “¿por qué normalizar?”, a veces uno sólo quisiera responder: Normalizo y basta—.

Aunque resulta tentador contestar a la pregunta de esa manera, vale la pena ser un poco más prolijo si no se quiere correr el riesgo de: **1)** confirmar el malentendido de que la normalización es un tema que sólo preocupa al lógico *intuicionista* y no al *clásico*; **2)** perder de vista el panorama que se ha ido dibujando en lo anteriormente expuesto, es decir, que la normalización es un procedimiento de decisión fundamental para el teórico de la prueba.

Una de las cosas que se ha dicho al comienzo es que las pruebas son objetos ubicuos en la práctica matemática y su importancia es tal que resulta abigarrado pensar

[120] Kleene (1952), p.86.

que pueda considerarse como establecido un resultado matemático sin que encuentre su plena justificación, precisamente, en una prueba.

Ahora, esto lo único que soslaya es el hecho de que, en la comunicación de resultados, las transacciones que ocurren entre las diversas áreas de la matemática transcurren empleando una divisa que les es común a todas ellas: la prueba matemática. Con ello, no se dice que las pruebas sean el único objeto con que cuenta la práctica matemática pero que, en todo caso, son fundamentales.

La teoría de la prueba, desde la perspectiva de Hilbert, surgió de la necesidad de hacer de las pruebas un genuino objeto de indagación para el matemático con el propósito de asegurar cada teorema mediante un examen crítico de los procedimientos que el matemático emplea al hacer demostraciones. Si consideramos lo que Gentzen declara en su tesis doctoral como su propósito al desarrollar un sistema lógico que permita ver, lo más cerca posible, la manera en que se demuestran teoremas en la práctica matemática (Negri & von Plato, 2011.), podemos considerar a la deducción natural y al cálculo de secuentes como una doble contribución a la visión de Hilbert. La novedad introducida por Gentzen, a parte del uso de árboles de derivación, es la codificación del razonamiento hipotético y su sistematización en las reglas que caracterizan a los sistemas **ND**.

Dicho esto, conviene establecer un criterio para mantener las cosas claras. Hablo de la tan traída invocación del filósofo de la ciencia, ya clásica por cierto, de insistir en distinguir entre el contexto de descubrimiento y el contexto de justificación. En este caso, al respecto de qué es una prueba y cuál es el proceso de validación de una prueba. El esqueleto del argumento, *cum grano salis*, es una buena heurística para saber en dónde se encuentra situado el metamatemático. Cómo la prueba de una proposición matemática es descubierta, lo que se entendería por contexto de descubrimiento, es un proceso que muchas veces desconocemos, casi por completo, a menos que tengamos acceso directo a la mente del matemático que la inventó y al tipo de idiosincrasias que lo motivaron— y aun teniendo tal acceso, seguiría siendo en extremo dudoso saber cómo proceder. Pero tampoco estamos, por decir, a oscuras porque tenemos acceso al sistema de proposiciones que construye. En este sentido, la justificación de una prueba es una tarea que emplea métodos racionales aun cuando la racionalidad a la que se apela para realizar dicha tarea, no sea por completo codificada por ningún método o una colección de ellos. Ante todo, conviene no exagerar y ser más morigerado que cuando se ha usado tal criterio en filosofía porque cuando es visto de cerca el "punto de vista científico", es decir cuando se usa, se trata del "punto de vista común" pero superdotado. "La reflexión es anterior a la ciencia, la ciencia es su refinación", como sugería Émile Durkheim. De manera que lo que proponían Hilbert y Gentzen, sería más adecuado considerarlo como el proyecto de poder contar con una teoría que funcionara como un inventario de los métodos de prueba con los que cuenta el matemático en el ejercicio de su práctica. Mediante la crítica de la práctica matemática *à la* Euclides,[121] Hilbert introdujo los sistemas axiomáticos. Con la *crítica de la crítica*, Gentzen introdujo los sistemas de reglas. La teoría de la prueba se ha ido constituyendo como el refinamiento formal del análisis de las pruebas en lógica pura y acerca de cómo este análisis puede extenderse hacia la formalización de teorías matemáticas (Negri & von Plato 2004, p. 507)[122]. La dirección ha sido constructiva y, en este sentido, se suelen distinguir dos grandes áreas de estudio al interior de la teoría de la prueba:

1) Teoría estructural de la prueba[123], cuyo objeto de estudio consiste en examinar a las pruebas matemáticas como un proceso mediante el cual llegamos a conocer los teoremas de una teoría o la validez de un argumento. (Prawitz 1971, p. 237). Este proceso es estudiado mediante el análisis de la estructura combinatoria que exhiben las pruebas formales y uno de sus métodos centrales es la normalización y la eliminación del corte. (Troelstra & Schwichtenberg, 2000, p. 1). Se considera a Gentzen con la introducción de los sistemas deductivos de deducción natural y el cálculo de secuentes, como pivote en el cambio de marcha en la teoría de la prueba.

[121] La organización de una teoría matemática mediante axiomas se debe a Euclides. Sin embargo, en la axiomatización *à la* Euclides, el sistema de objetos de la teoría es interpretado desde afuera y previo al acto de organizar a la teoría en postulados porque se suponía que los axiomas expresaban propiedades del mundo real. Para distinguir esta axiomática de la introducida por Hilbert— la cual recibe el nombre de *axiomática formal*— seguimos a Kleene 1967 (p. 191) llamándola *axiomática material*.

[122] Negri, S. & von Plato J. (2004), Proof systems for lattice theory, *Mathematical Structures in Computer Science*, 14, pp. 507-526.

[123] En Prawitz (1971) y en otros trabajos subsecuentes esta área también es conocida como teoría general de la prueba. Semejantemente, la teoría de la prueba reductiva es otro nombre con el que se le conoce a la teoría de la prueba interpretacional.

2) Teoría interpretacional de la prueba[124] se le conoce al uso de métodos sintácticos— a menudo teniendo en cuenta una motivación semántica— para efectuar traducciones de una teoría formal en otra (Troelstra & Schwichtenberg, 2000, p. 1.) considerando ciertas constricciones de índole epistemológica, por ejemplo, si ambas teorías tienen nociones primitivas en común, etc. (Prawitz, 1971, pp. 237-238.)

El punto central de este enfoque, como lo hubiera puesto Turing, es reducir un rompecabezas matemático del que no tenemos una solución a otro rompecabezas matemático del que tenemos respuesta. Esta área es la que tiene más historia e indudablemente su fundador fue Hilbert. En una primera fase del programa de Hilbert, probar la consistencia del análisis mediante métodos finitarios, es un ejemplo del enfoque que se buscó indagar en esa área. Algunas otras contribuciones posteriores son la traducción Gödel-Gentzen de la aritmética clásica a la aritmética de Heyting, la correspondencia Curry-Howard, el sistema **NG** y su relación con el cálculo de secuentes— en particular el sistema **G3ip**— entre otros, como lo que se ha hecho en este trabajo en la traducción del cálculo ΛJ a **NG Typed** y de **NG Typed** a **NG**.

Desde esta perspectiva, una de las cuestiones más interesantes que ha surgido de este análisis al ser enfocado sobre las dificultades que conlleva la prueba de normalización fuerte del sistema **NG** es que— desde el punto de vista de la comunicación, validación y experimentación de resultados matemáticos— de hecho, la verificación formal de una prueba constituye el aspecto central de la teoría matemática. En efecto, se ha dicho que las pruebas tienen un papel fundamental para la práctica matemática pero no son las pruebas en sí lo que ha impulsado el desarrollo de la teoría matemática sino que el desarrollo de la matemática formal, se ha constituído en torno al estudio del proceso de verificación por el que pasan las pruebas.

El proceso de verificación formal de una prueba consiste en evaluar que todos aquellos objetos que postula como derivables una teoría matemática, aparezcan en la demostración de la proposición mediante la ejecución de pasos inferenciales— los cuales ocurren a nivel local en un argumento demostrativo. En este sentido, podemos

[124] Cf. pié de página anterior, *i.e*. 113.

decir que el proceso de verificación de una prueba es simplemente proporcionar un modelo eficiente sobre cómo computar juzgando la transmisión y preservación de la evidencia constructiva de una premisa a otra siguiendo los postulados de una teoría. Como proceso computacional, en la verificación de una prueba se procede evaluando simples pasos en los que se busca corroborar si ciertos objetos de naturaleza simple tienen o no cierta propiedad. Esto ha sido, precisamente, lo que se ha desarrollado en esta tesis estudiando la manera cómo la propiedad de normalización fuerte se hereda entre derivaciones normales en el sistema **NG**. El análisis nos ha puesto en una mejor posición para apreciar con mayor detenimiento la *maleabilidad computacional* del sistema. Con ello, nos referimos a que la estructura matemática de las derivaciones normales de **NG** codifican un proceso dinámico, el contenido computacional de **NG**. Este contenido computacional, además, puede ser puesto en correspondencia con el contenido computacional de otros sistemas formales— en apariencia— tan distintos entre sí como el cálculo de secuentes y el cálculo lambda. Sobre esto, el breve recuento que se ha hecho acerca de lo que motivó la formulación de **NG**, su funcionamiento y las varias formalizaciones que dimos acerca del sistema— **NLI**, **NG Typed** y su traducción al cálculo lambda ΛJ— ponen de manifiesto este aspecto.

De ninguna manera consideramos que hemos llegado a cerrar el círculo o que nos encontremos al final de la calle. Al contrario, hay muchas cosas por hacer. Una de las más inmediatas estriba en proporcionar una prueba completa— con lujo de detalles— de la normalización fuerte de la lógica proposicional intuicionista en el sistema **NG** a la luz de la prueba constructiva del mismo resultado siguiendo la metodología de Joachimski & Matthes (2003) teniendo en cuenta el comportamiento combinatorio de los esquemas de conversión— como sólo ha sido bosquejado en el capítulo tres— con el prospecto de llevar tal formalización a donde querían estos dos autores: mecanizar la prueba.

En nuestra investigación hemos dado varios pasos hacia esa dirección:

1) Hemos desarrollado todos los esquemas de conversión de **NG**, especialmente los que corresponden a las permutabilidades, como no aparecen en la literatura existente sobre el tema. (**Ver Tabla 2.2, p. 57 y ss.**)

2) Extendiendo la metodología de Joachimski & Matthes (2003) al resto de las conectivas de la lógica proposicional intuicionista, hemos proporcionado una formalización completa de dicha lógica en el sistema **NG**. (**Ver pp. 74-76, 87-91, 92-93**.)

3) Aunque el resultado es parcial, al estudiar la prueba de normalización de Joachimski & Matthes (2003) bajo el enfoque de ingeniería en reversa, hemos localizado algunos de los puntos flacos sobre los que se sostenían los resultados de normalización de Negri & von Plato (2001, 2011) y hemos respondido positivamente al rompecabezas que habían formulado sobre el sistema **NG**. (**Ver pp. 87-90, 95-97**.)

4) Hemos puesto sobre la mesa un método para probar de manera directa la normalización fuerte del sistema **NG** que resulta ser, desde el punto de vista intuicionista, más palatable que el método empleado por Negri-von Plato y un tanto menos arcano con respecto a la notación que Joachimski-Matthes originalmente emplearon para formalizar al sistema ΛJ. Para ser más precisos, lo que hemos hecho es tender un puente entre dos enfoques sobre métodos de prueba para efectuar la normalización del sistema **NG**. Negri & von Plato al estilo "geométrico" probaron que **NG** es débilmente normalizable— o 'cuasi-fuerte' como ellos lo llaman— mientras que Joachimski & Matthes establecieron que ΛJ — la versión "analítica" de **NG**— es fuertemente normalizable. La pregunta que se formula uno de inmediato es: ¿cómo se puede extender el resultado de normalización fuerte de ΛJ a **NG**?

Una de las ventajas metodológicas del estilo analítico de la prueba de Joachimski-Matthes es que no emplea nociones geométricas ni las requiere— *i.e.*, rama principal, hilo de prueba, etc.— como ocurre en el caso del método de Negri-von Plato. Las suplen con una caracterización de normalización fuerte mediante la definición inductiva del conjunto de términos fuertemente normalizables— la cual está dirigida por la sintaxis. Por otro lado, la prueba de Joachimski-Matthes es modular a diferencia de la prueba global de Negri-von

Plato, lo cual permite enfocar la atención al comportamiento combinatorio de los esquemas de conversión analizando un reducto a la vez en lugar de todos posibles reductos en una derivación. Una desventaja, sin embargo, notable, consiste en que la notación utilizada por Joachimski-Matthes para la formalización del sistema ΛJ es repelente *in extremis* al lector y hay que estar extraordinariamente motivado para entender la maquinaria formal que presentan en su artículo. Consecuencia de esto último, es que muchas de las innovaciones formales y metodológicas empleadas en la prueba de Joachimski-Matthes quedan obliteradas o en segundo plano por lo arduo que resulta leer su trabajo en su notación.

Para fundamentar la teoría de la prueba, Hilbert propuso establecer una distinción entre el tipo de proposiciones por las que está conformada una teoría matemática (Hilbert, 1925)[125]. Por un lado están las **proposiciones reales**, las cuales capturan el "contenido intuitivo" de una teoría y tienen una representación simbólica concreta mediante el uso de métodos finitarios con los que Hilbert restringió a la metamatemática. Ejemplo de proposiciones reales es la existencia de números naturales, la noción de infinito potencial, los resultados que se pueden alcanzar en la aritmética de los naturales, o la derivación de un teorema intuicionista escrito sobre papel. Por otro lado están las **proposiciones ideales**, las cuales no tienen una contraparte concreta en nuestra experiencia o en la naturaleza como la noción de infinito actual, la estructura intuicionista de una prueba, o la aritmética transfinita, por ejemplo. Sin embargo, la adición de las proposiciones ideales con las proposiciones reales en una teoría matemática, tiende a hacer las conexiones entre los postulados que definen a un sistema formal algo más simple y perspicuo (Hilbert, 1925, p. 373 ss). No sólo en matemáticas sino, en general, en la ciencia encontramos una amalgamación de proposiciones ideales y reales en su modo de proceder. Al fin y al cabo, la ciencia es un intento por organizar vastos dominios de nuestra experiencia que nuestros sentidos e intuición encuentran desperdigados entre sí, bajo una misma estructura que los abarque a todos ellos.

[125] Hilbert, David (1925), On the Infinite, in Heijenoort (1967), pp. 367-392.

El desarrollo de la matemática formal requiere de lo que von Neumann (1947)[126] denominó como la fase de de-empirización, la cual consiste en distanciarse del estímulo empírico que pudo haber inspirado la formulación de una teoría. Sin embargo, cuando la distancia entre la teoría y la práctica comienza a ser muy grande o la endogamia teórica es practicada hasta el colmo (von Neumann, 1947, p.196), se corre el riesgo de degenerar la práctica matemática de *la science pour la science* a una expresión perteneciente al barroco o del alto barroco. Cuando esto ocurre, el remedio sugerido es recurrir a la fuente del estímulo empírico para examinar críticamente lo que se hace en la práctica y rejuvenecer la teoría. Una examinación crítica de este tipo durante la crisis de la matemática, al interior del programa formalista llevó a Hilbert a formular la teoría de la prueba. Semejantemente, cuando estaba bien difundida la idealización de Hilbert de formalizar la matemática en sistemas de axiomas, por razones pragmáticas, quizás, llegó Gentzen a reformar la teoría de la prueba con la formalización de la matemática en sistemas de reglas. Lo que sugieren estos cambios es que siempre hay que estar atentos a la diferencia, a los cambios en la interpretación del significado de algún concepto o a los cambios en la manera en que se ejerce la práctica. Del mismo modo en que Hilbert sugería que una ciencia viva es aquella en donde no escasean los problemas, las crisis en la ciencia son cosa permanente cuando se trata de dar cuenta sobre su desarrollo. La crisis de la matemática, sin duda, no acabó en las primeras tres décadas del siglo XX. Otras le siguieron y con ellas vinieron otros avances teóricos. Un indicativo de esto lo sugiere el aumento en la complejidad de las pruebas matemáticas, por ejemplo, el teorema de los cuatro colores, el último teorema de Fermat, etc. Actualmente, la matemática pasa por una de ellas y la podemos denominar como la crisis de las *matemáticas románticas*, siguiendo a Barendregt & Wiedijk (2005, pp. 2370-2371), la cual consiste a oponerse en la práctica matemática al uso de asistentes de prueba para verificar resultados matemáticos mediante el argumento de que una prueba debe ser un objeto que pueda ser recorrido tan sólo por la mente, como una manera de defender su elección de construir pruebas informales vs. una formalización completa. En esto, como en muchos asuntos

[126] von Neumann, John (1947), The Mathematician, in Heywood, R.B. (ed.), The Works of the Mind, USA: University of Chicago Press, pp.180- 196.

humanos, hay más prejuicios e ideologías en juego que realidades. Las *matemáticas cool*, es decir, la práctica matemática de definir, probar y computar haciendo uso de asistentes computarizados, no van a reemplazar la intuición, ni la imaginación ni la creatividad de un agente humano cuando construye una prueba apoyándose en un asistente. Al contrario, lo que se busca es que haya una cierta armonía entre ambos estilos de practicar la matemática y hasta intercambios. Teniendo esta dirección en cuenta en la que encontramos al desarrollo de la matemática formal, ahora sí retomemos la pregunta inicial de estas conclusiones: ¿por qué normalizar?

Normalizamos pruebas formales para extraer su contenido computacional, el cual puede ser particularmente importante o interesante, o no. Lo realmente importante e interesante de extraer el contenido computacional de una prueba estriba en que seguramente ese contenido será utilizado para construir otra prueba y, a su vez, iterando de esta manera, será la base de un nuevo desarrollo. En particular, la base que hemos presentado para la formalización de la prueba de normalización fuerte de la lógica proposicional intuicionista en el sistema **NG**, remueve una serie de referencias de autores que mencionan el resultado de Joachimski & Matthes mas no lo prueban y saca, por decir, del estado de ostracismo al resultado. Un posible desarrollo de lo que hemos presentado, por ejemplo, sería extender el resultado de normalización fuerte a la lógica lineal intuicionista como lo ha expresado Sara Negri en su artículo[127] al formular en un sistema de deducción natural con reglas generales de eliminación dicha lógica. Desarrollar la formalización de la matemática *à la* Hilbert-Gentzen ha hecho posible ver a la matemática como una colección de pruebas, dice Gaisi Takeuti[128], independientemente del punto de vista que se asuma con respecto a ella: platonismo, anti-platonismo, intuicionismo, nominalismo, etc. (Takeuti, 1987, p.1.)

Otro nuevo desarrollo pero en la dirección de las matemáticas *cool*, consiste en la creación de bibliotecas[129] de resultados matemáticos verificados y en este tipo de proyectos encontramos, una vez más, una amalgama de objetos reales e ideales como los que inspiraron a d'Alembert y Diderot a escribir la *Encyclopédie* con el propósito de:

[127] Negri, Sara (2002), A Normalizing System of Natural Deduction for Intuitionistic Linear Logic, *Archive of Mathematical Logic* 41, pp. 789-810.
[128] Takeuti, Gaisi (1987), Proof Theory (2nd ed), USA: Dover Publications (reprint 2013).
[129] https://math-comp.github.io/

"Reunir todo el conocimiento diseminado por la faz de la tierra, exponer el sistema general a los hombres con quienes vivimos y para transmitirlo a los hombres que vendrán después de nosotros; a fin de que los trabajos de siglos pasados no pasen por cosa inútil para los siglos que nos sucederán, para que nuestros descendientes al estar mejor instruidos se vuelvan, a su vez, más virtuosos y felices, y que no muramos sin el mérito de ser parte del género humano"[130].

Sobre la relación entre lo real y lo ideal, en matemáticas y en la ciencia, al menos, la moraleja es clara: para hablar de lo concreto se requieren altas dosis de abstracción.

[130]Supra voce Encyclopédie. Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, etc., Diderot, Denis et d'Alembert, Jean le Rond (eds.). University of Chicago: ARTFL Encyclopédie Project (Spring 2021 Edition), Robert Morrissey and Glenn Roe (eds), http://encyclopedie.uchicago.edu/.

Bibliografía

1. Artemov, Sergei (2017).Constructive Knowledge and the Justified True Belief Paradigm, *Indagatione Mathematicae* 29 (1), pp. 125-134.

2. van Atten, Mark (2004). On Brouwer, Canada: The Wadsworth Philosopher Series.

3. Barendregt, Henk & Wiedijk, Freek (2005). The Challenge of Computer Mathematics, *Philosophical Transactions of the Royal Soc*iety A 363, pp. 2351-2375.

4. Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (eds.) (1983). Philosophy of Mathematics: Selected Readings (2nd edition), USA: Cambridge University Press.

5. Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1907). On the Foundations of Mathematics in **8**.

6. Brouwer, L.E.J. (1912). Intuitionism and Formalism in **4**.

7. Brouwer, L.E.J. (1927). On the Domain of Definition of Functions in **20**.

8. Brouwer, L.E.J. (1975). Collected Works, Vol. I: Philosophy and the Foundations of Mathematics, Arend Heyting (ed.), The Netherlands: North-Holland Publishing Company.

9. Brouwer´s Cambridge Lectures on Intuitionism (1981). D. van Dalen (ed.), USA: Cambridge University Press (reprint 2011).

10. Capablanca, José Raúl (1921). Chess Fundamentals (reissued 2018), USA: SDE Publishing.

11. Dawson Jr., John W. (2010). Why Prove it Again?: Alternative Proofs in Mathematical Practice, USA: Birkhäuser.

12. Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, etc., Denis Diderot et Jean le Rond d'Alembert (eds.). University of Chicago: ARTFL Encyclopédie Project (Spring 2021 Edition), Robert Morrissey and Glenn Roe (eds), http://encyclopedie.uchicago.edu/.

13. Dyckhoff, R. (2015). Cut Elimination, Substitution and Normalization in **83**.

14. Dyckhoff, R. (2016). Some Remarks on Proof-Theoretic Semantics in **49**.

15. Ekman, Jan (1998). Propositions in Propositional Logic Provable Only by Indirect Proofs, *Mathematical. Logic Quarterly*. 44, pp. 69-91.

16. Georgaras, I. (2004). Natural Deduction with General Elimination Rules and a Proof of Hauptsatz without Multicut. (Master's Thesis: National Technical University of Athens.)

    https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/handle/123456789/39585

17. Fischer, Bobby; Margulies, Stuart; Mosenfelder, Donn (1972). Bobby Fischer Teaches Chess, USA: Bantam Books.

18. Girard, Jean-Yves (1990). Proofs and Types, G.B.: Cambridge University Press.

19. Girard, Jean-Yves (2011). The Blind Spot: Lectures on Logic, Switzerland: European Mathematical Society.

20. van Heijenoort, Jean (ed.) (1967). From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, USA: Harvard University Press.

21. Heyting, Arend (1931). The Intuitionist Foundation of Mathematics in 4.

22. Heyting, Arend (1971). Intuitionism: An Introduction, The Netherlands: North-Holland Publishing Company.

23. Hilbert, David (1900). Mathematical Problems, Mary Winston Newson (trans.), *Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, Vol. 37 (4)*, June 2000 (reprint 1902), pp. 407-436.

24. Hilbert, David (1904). On the Foundations of Logic and Arithmetic, G.B. Halstead (trans.). *The Monist, Vol. 15*, 1905, pp. 338-352.

25. Hilbert, David (1925). On the Infinite, in 20.

26. Hindley, J. Roger & Seldin, Jonathan P. (2008). Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction, USA: Cambridge University Press (reprint 2010).

27. J. Ichikawa, M. Steup, in: Edward N. Zalta (Ed.), The Analysis of Knowledge, Summer 2018 ed., in The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2018. URL https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/knowledge-analysis/.

28. Joachimski, Felix & Matthes, Ralph (2002). Short Proofs of Normalization for the Simply-Typed **λ**-Calculus, Permutative Conversions and Gödel´s **T**. *Archive of Mathematical Logic, 42*, pp. 59-87.

29. Krantz, Steven G. (2011). The Proof is in the Pudding, USA: Springer.

30. Kleene, Stephen Cole (1952). Introduction to Metamathematics, USA: Ishi Press International (reprint 2009).

31. Kleene, S.C. (1967). Mathematical Logic, USA: Dover Publications (reprint 2002).

32. Kolmogorov, Andrei N. (1932), On the Interpretation of Intuitionistic Logic, in 33.

33. Mancosu, Paolo (ed.) (1998). From Bouwer to Hilbert, UK: Oxford University Press.

34. Martin-Löf, Per (1987), Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof, *Synthese* 73, pp. 407-420.

35. Martin-Löf, Per (2013), Verificationism Then and Now in 66 (reprint 1995).

36. Matthes, Ralph (2005), Non-strictly positive fixed points for classical natural deduction, *Annals of Pure and Applied Logic* 133, pp. 205-230.

37. Menzler-Trott, Eckart (2007). Logic´s Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen, USA: American Mathematical Society.

38. De Mol, Liesbeth & Primiero, Giuseppe (2014). Facing Computing as Technique: Towards a History and Philosophy of Computing, Philos. Technol 27, pp. 321-326.

39. Nederpel, Rob & Geuvers, Herman (2014). Type Theory and Formal Proof: An Introduction, USA: Cambridge University Press.

40. Negri, Sara (2002), A Normalizing System of Natural Deduction for Intuitionistic Linear Logic, *Archive of Mathematical Logic* 41, pp. 789-810.

41. Negri, S & von Plato, J. (2001). Structural Proof Theory, USA: Cambridge University Press.

42. Negri, S. & von Plato J. (2004), Proof systems for lattice theory, *Mathematical Structures in Computer Science*, 14, pp. 507-526.

43. Negri, S. & von Plato, J. (2011). Proof Analysis: A Contribution to Hilbert´s Last Problem, USA: Cambridge University Press.

44. Negri, S. & von Plato, J.(2015). Meaning in Use in 83.

45. von Neumann, John (1947). The Mathematician, in Heywood, R.B. (ed.), The Works of the Mind, USA: University of Chicago Press.

46. Pereira, L. C., Haeusler, E. H., & Paiva, V. D. (2014). *Advances in natural deduction: A celebration of Dag Prawitz's work*, USA: Springer Verlag.

47. Pfenning, Frank (2000). Structural Cut Elimination I: Intuitionistic and Classical Logic, *Information and Computation* 157, pp. 87-141.

48. Pfenning, Frank (2009). Lecture Notes on Harmony. https://www.cs.cmu.edu/~fp/courses/15317-f09/lectures/03-harmony.pdf

49. Piecha, T., & Schroeder-Heister, P. J. (2016). Advances in proof-theoretic semantics, USA: Springer Verlag.

50. von Plato, J.(2000). A Problem of Normal Form in Natural Deduction, *Math Log Quart*. 46, 1, pp. 121-124.

51. von Plato, J.(2001). Natural Deduction with General Elimination Rules, *Arch. Math. Logic* 40, pp. 541-567.

52. von Plato, Jan (2003). Natural Deduction: Some Recent Developments, Technische

Universität Dresden; Summary of Four Lectures at the Summer School of Proof Theory, Computation and Complexity. https://www.mv.helsinki.fi/home/negri/dresum.pdf

53. von Plato, J.(2003). Rereading Gentzen, *Synthese*, 173, pp.195- 209.

54. von Plato, J. (2013). Elements of Logical Reasoning, USA:Cambridge University Press.

55. von Plato, J. (2017). The Great Formal Machinery Works, USA: Princeton University Press.

56. Poincaré, Henri (1908). Science and Method; in The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science & Science and Method, G.B. Halstead (trans.), N.Y.: The Science Press (1921).

57. Poincaré, Henri (1905). The Value of Science; in The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science & Science and Method, G.B. Halstead (trans.), N.Y.: The Science Press (1921).

58. Prawitz, Dag (1965). Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study, USA: Dover Publications (reprint 2006).

59. Prawitz, D. (1971). Ideas and Results in Proof Theory. *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,* pp. 235-307.

60. Rav, Yehuda (1999). Why Do We Prove Theorems?, *Philosophia Mathematica, 7(1)*, pp. 5-41.

61. Rilke, Rainer Maria (1911-1920), Ahead of All Parting: The Selected Poetry and Prose of Rainer Maria Rilke (1995), Mitchell, Stephen (ed. and translator), N.Y. : The Modern Library.

62. Robinson, J.A.(2000). Proof=Guarantee+Explanation, *Intellectics and Computational Logic*, pp. 277-294.

63. Russell, Bertrand (1903). The Principles of Mathematics, USA: W.W. Norton & Company (2nd ed. Reissued 1996).

64. Russell, Bertrand (1905). On Denoting; in Marsh, Robert C. (ed.) (1956), Logic & Knowledge: Essays 1901-1950, G.B.: Unwyn Hyman (reprint 1998).

65. Russell, Bertrand (1942). How to Become a Mathematician: The Art of Reckoning; in The Art of Philosophizing and other Essays, USA: Philosophical Library (reprint 2007).

66. van der Schaar, Maria (ed) (2013). Judgement and The Epistemic Foundation of Logic, USA: Springer.

67. Schroeder-Heister, Peter (2014), Generalized Elimination Inferences, Higher-Level Rules, and the Implications-as-Rules Interpretation of the Sequent Calculus in **46**.

68. Scedrov, Andre (1989). Normalization Revisited; in Gray, John W. & Scedrov, Andre (eds.), Contemporary Mathematics 92, USA: American Mathematical Society, pp. 357-370.

69. Simmons, Harold (2000). Derivation and Computation: Taking the Curry-Howard Correspondence Seriously, USA: Cambridge University Press

70. Smoryński, Craig (2007). Hilbert's Programme, p.324; in Menzler-Trott, Eckart (2007), Logic´s Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen, USA: American Mathematical Society.

71. Smoryński, Craig (2012). Adventures in Formalism, UK: College Publications.

72. Sundholm, Göran (1994). Ontologic versus Epistemologic: Some Strands in the Development of Logic, 1837-1957, in Prawitz, D. & Westersähl (eds.) (1994), Logic and Philosophy of Science in Uppsala: Papers from the 9th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

73. Sundholm, Göran (1998). Proofs as acts and proofs as objects, *Theoria,* 54, pp.187-216.

74. Sundholm, Göran (2009). A Century of Judgement and Inference, 1837-1936 in Haaparanta, Leila (ed.) (2009), The Development of Modern Logic, New York: Oxford University Press.

75. Swift, Jonathan (ed.1735). Gulliver´s Travels, G.B.: Collins Clear Type Press (reprint 1972).

76. S∅rensen, M.H. & Urzyczyn, P. (2006), Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, The Netherlands: Elsevier.

77. Takeuti, Gaisi (1987), Proof Theory (2nd ed), USA: Dover Publications (reprint 2013).

78. Tesconi, Laura.(2004). A Strong Normalization Theorem for Natural Deduction with General Elimination Rules*. (Tesi Di Dottorato*: Università di Pisa.)

79. Tesconi, L. (2013). Essays in structural proof theory, Italy: Edizioni ETS.

80. Troelstra, A. S., & Schwichtenberg, H. (2000). Basic proof theory. Cambridge University Press.

81. Turing, Alan (1954). Solvable and Unsolvable Problems; in Copeland, B. Jack (ed.) (2013), The Essential Turing: The Ideas That Gave Birth To The Computer Age; UK: Oxford University Press.

82. Wansing, Heinrich (2015). Prawitz, Proofs and Meaning in **83**.

83. Wansing, H.(ed.) (2015). Dag Prawitz on Proofs and Meaning, USA: Springer Verlag.

84. Weyl, Hermann. (1918). The Continuum: A Critical Examination of the Foundations of Analysis, USA: Dover Publications (reprint 2015).

85. Weyl, H. (1930). Levels of Infinity in 88.

86. Weyl, H. (1940). The Mathematical Way of Thinking in 88.

87. Weyl, H. (1953). Axiomatic Versus Constructive Procedures in 88.

88. Weyl, H. (2012). Levels of Infinity: Selected Writings on Mathematics and Philosophy, Pesic, Peter (ed.), USA: Dover Publications.

89. Whitehead, Alfred & Russell, Bertrand (1910). Principia Mathematica, Volume I, UK: Cambridge University Press.

90. Wigderson, Avi (2019), Mathematics and Computation, USA: Princeton University Press.

91. Zimmermann, Ernst (2014). Decomposition of Reduction in 46.

Índice de Diagramas, Figuras y Tablas