



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Agujeros negros en rotación:  
Espaciotiempos de Kerr

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Kia Romero Hojjati

TUTOR

Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

Ciudad Universitaria, CDMX, 2022.





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Para el Tata, mi querido abuelo.



# Agradecimientos

Gracias a mi asesor el Dr. Oscar Palmas por dejarme tomar las riendas de este proyecto y por darme su valioso apoyo en todo momento. Ha sido una experiencia maravillosa. Gracias a la y los sinodales por sus valiosas observaciones. Finalmente, gracias a mis padres por el increíble apoyo que me dan, me siento profundamente agradecido de tenerlos como pilares en mi vida.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Contenido básico</b>	<b>1</b>
1.1. Geometría diferencial . . . . .	1
1.2. Geometría semi-riemanniana . . . . .	7
1.3. Geometría de Lorentz . . . . .	12
<b>2. Métrica de Kerr</b>	<b>19</b>
2.1. Coordenadas de Boyer-Lindquist . . . . .	19
2.2. Dominio de Boyer-Lindquist . . . . .	22
2.3. Identidades importantes . . . . .	23
<b>3. Bloques de Boyer-Lindquist</b>	<b>27</b>
3.1. Clasificación de la métrica de Kerr . . . . .	27
3.2. Bloques de Boyer-Lindquist . . . . .	29
3.3. Espaciotiempos de Kerr . . . . .	34
<b>4. Ecuaciones geodésicas</b>	<b>35</b>
4.1. Ecuaciones para $\varphi$ y $t$ . . . . .	36
4.2. Teorema de Carter . . . . .	37
4.3. Ecuaciones geodésicas de primer orden . . . . .	42
<b>5. Coordenadas Kerr-Estrella</b>	<b>45</b>
5.1. Construcción . . . . .	47
5.2. Extensión sobre los horizontes . . . . .	48
5.3. Estructura y clasificación . . . . .	51
<b>6. Subvariedades notables</b>	<b>55</b>
6.1. Región estacionaria, el límite estacionario y la ergoesfera . . . . .	55
6.2. Horizontes; subvariedades nulas . . . . .	60
6.3. Geometría del eje y el agujero blanco . . . . .	64
6.4. Estructura causal . . . . .	65
6.5. Espaciotiempo de Schwarzschild . . . . .	68
<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>





# Introducción

En **1905**, Albert Einstein publicó su célebre Teoría de la Relatividad Especial [Einstein, 1905]; posteriormente, en **1915** Einstein publicó su Teoría de la Relatividad General (RG) [Einstein, 1915], en la que propone que la gravedad es simplemente una manifestación de la curvatura del espaciotiempo; es decir, desarrolló una teoría geométrica de la gravitación. Aunque la teoría de la gravitación de Newton es muy efectiva en algunos casos, ésta presenta algunos problemas; por ejemplo, en la de predicción de la órbita de Mercurio. El primer gran logro de la RG fue corregir el error de predicción de la órbita de Mercurio. En **1916**, un año después de la publicación de la RG el astrónomo Karl Schwarzschild encontró la solución de las ecuaciones de la RG que modelan el campo gravitacional de una estrella, aislada y con simetría esférica [Schwarzschild, 1916]. Dicho modelo es el *espaciotiempo de Schwarzschild* el cual solo depende de la masa de la estrella y reemplazó el modelo estelar de Newton.

En **1920** Arthur Eddington realizó un experimento en donde se encontró que las trayectorias de los rayos de luz se veían afectadas por la presencia de materia, tal y como predijo Einstein [Dyson et al., 1920]. Los agujeros negros aparecieron en la literatura hasta **1939**, cuando R. Oppenheimer y H. Snyder publicaron un artículo [Oppenheimer and Snyder, 1939] en donde mostraron que cuando los recursos termonucleares de una estrella lo suficientemente masiva son consumidos, la estrella experimentará un colapso gravitacional indefinido. Este descubrimiento hizo relevante el modelo de Schwarzschild para una estrella de masa  $M$  y radio menor que  $2M$ , en unidades geométricas. Más tarde se encontró que la indeterminación de las componentes de la métrica de Schwarzschild en  $r = 2M$  no era precisamente una singularidad del espaciotiempo sino un ‘horizonte’, un lugar que delimita la región de donde ni siquiera la luz podía escapar.

El siguiente gran avance fue incluir la rotación de la estrella, ya que toda estrella presenta una rotación. En **1954**, A. Z. Petrov dio una clasificación para el tensor de Weyl [Petrov, 1954], que es la parte con traza cero del tensor de curvatura, por tanto dicha clasificación aplica a espaciotiempos con tensor de curvatura con traza cero, es decir, Ricci planos. La familia de haces de luz radialmente entrantes y salientes del espaciotiempo de Schwarzschild indica que tiene el llamado Tipo D de Petrov. En **1963** el físico Roy Kerr analizó la estructura algebraica de tensores métricos del tipo D de Petrov, lo que dio como resultado la métrica de Kerr [Kerr, 1963]. La métrica de Kerr generaliza la métrica de Schwarzschild, incluyendo la rotación. Es decir, depende de dos parámetros:

masa y momento angular. En **1967-68** R. H. Boyer y R. W Lindquist introdujeron su célebre sistema coordinado que hizo más accesible a la solución de Kerr [Boyer and Lindquist, 1967]. Finalmente, una serie de resultados por parte de Werner Israel [Israel, 1967], Brandon Carter [Carter, 1971], Stephen Hawking [Hawking, 2005] y David Robinson [Robinson, 2009], entre otros, mostró que las propiedades de una estrella después de un colapso gravitacional se reducen finalmente a su masa y su giro. Esto presenta una familia de métricas de Kerr que dependen de los parámetros  $M$  y  $a$ .

El objetivo de esta tesis es explorar las implicaciones del giro que tiene la teoría de la RG en el modelo de Kerr, y cómo éste cambia si jugamos con el parámetro de giro  $a$  dejando la masa constante  $M > 0$ . El análisis geométrico desarrollado aquí se debe en su gran mayoría a Barrett O’Neill (1924-2011), plasmado en su libro *The geometry of Kerr black holes* publicado en 1995 [O’Neill, 2014].

En el primer capítulo de esta tesis introduciré los conocimientos básicos para entender la tesis. En el segundo capítulo se definirá la métrica de Kerr sobre una variedad suave con ayuda de las coordenadas de Boyer-Lindquist y se obtendrán propiedades básicas de ésta.

En el tercer capítulo se exhibirán los lugares en dicha variedad donde no están definidas las coordenadas de Boyer-Lindquist, lo que hará evidente a cada ‘bloque’ de Boyer-Lindquist y se verán las propiedades básicas de éstos. También se distinguirán los casos notables de giro:  $a^2 < M^2$ ,  $a^2 = M^2$  y  $a^2 > M^2$ .

En el cuarto capítulo, como consecuencia del Teorema de Carter, se encontrarán las ecuaciones geodésicas para el espaciotiempo de Kerr, lo que nos permitirá obtener dos familias de curvas, las llamadas congruencias nulas principales salientes y entrantes que modelan la trayectoria de haces de luz apuntado directamente fuera o dentro del agujero negro, respectivamente.

El quinto capítulo es dedicado a la construcción de un sistema coordinado que extiende al de Boyer-Lindquist, incluyendo los horizontes; para este procedimiento es vital describir las congruencias nulas principales.

En el sexto y último capítulo se estudiarán las subvariedades notables que dan forma a los espaciotiempos de Kerr y se estudiará cómo cambian en cada categoría de giro.

Finalmente, se advierte al lector con tendencias formales que aquí no encontrará la definición más formal de un agujero negro (o agujero blanco); ya que involucra teoría que no será usada en esta tesis [Chruściel, 2020] (ver la discusión posterior al corolario 6.11). Se ha mencionado gran parte de la literatura clásica de este tema, pero para una perspectiva más moderna puede consultar, además del ya mencionado libro *The geometry of Kerr black holes* [O’Neill, 2014], las siguientes referencias para una lectura introductoria: [Carroll, 1997] y [d’Inverno, 1992]; si quiere profundizar más en el tema, puede consultar: [Visser, 2007], [Poisson, 2002] y [Chruściel, 2020].

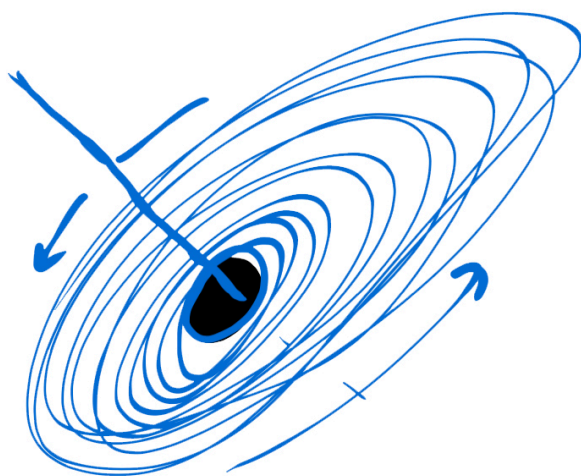


Figura 1: Bosquejo de un agujero negro de Kerr.



# Capítulo 1

## Contenido básico

En este capítulo haré mención de la teoría básica necesaria para entender esta tesis. La gran mayoría de resultados se dejarán sin pruebas, las cuales se pueden encontrar principalmente en [O'Neill, 1983] y [O'Neill, 2014]. La herramienta principal usada en esta tesis es la geometría diferencial, específicamente la geometría de Lorentz.

### 1.1. Geometría diferencial

#### Variedades suaves

**Definición 1.1.** Un sistema coordenado (de dimensión  $n$ ) de un espacio topológico  $S$ , es un homeomorfismo  $\xi : U \rightarrow \xi(U)$  donde  $U$  y  $\xi(U)$  son subconjuntos abiertos de  $S$  y  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Podemos escribir  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ , así cada  $x^i$  es llamada función coordenada.

**Definición 1.2.** Una variedad  $C^k$ -suave  $M$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, junto con un conjunto  $\mathcal{A}$  de sistemas coordenados (de dimensión  $n$ ) tales que:

1. Para todo punto  $p \in M$  existe  $\xi \in \mathcal{A}$  tal que  $p$  está en el dominio de  $\xi$ .
2. Los sistemas coordenados son compatibles, esto es, para cualesquiera sistemas coordenados  $\xi, \eta \in \mathcal{A}$  se tiene que  $\xi \circ \eta^{-1}$  es una función de clase  $C^k$  entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Usualmente  $\xi \circ \eta^{-1}$  es llamado cambio de coordenadas. Decimos que  $\xi \circ \eta^{-1}$  es suave si es suave en todo punto de  $M$ .

El conjunto  $\mathcal{A}$  es llamado ‘atlas  $C^k$  de  $M$ ’ o ‘estructura diferenciable  $C^k$  de  $M$ ’. Asumiremos que  $\mathcal{A}$  contiene a todos los sistemas coordenados en  $M$  compatibles con los ya existentes. Decimos que  $M$  es una variedad suave si  $k = \infty$ . En esta tesis, todas las variedades en cuestión serán suaves.

Dadas dos variedades suaves  $M$  y  $N$ , su producto cartesiano  $M \times N$  es también una variedad suave, con atlas definido por las coordenadas producto.

Si  $\xi$  y  $\eta$  son sistemas coordenados de  $M$  y  $N$  entonces,  $(\xi \times \eta)(p, q) = (\xi(p), \eta(q))$  define un sistema coordenado para  $M \times N$ .

**Observación 1.3.** Ya definido el concepto de variedad suave, podemos definir una nueva variedad  $M$  a partir de la noción de un sistema coordenado generalizado  $\eta$  que mapea una vecindad de  $M$  sobre una variedad suave  $Q$  de dimensión  $n$  (en lugar de  $\mathbb{R}^n$ ). De esta forma podemos dotar a  $M$  de un atlas de sistemas coordenados componiendo sistemas coordenados generalizados de  $M$  con sistemas coordenados de  $Q$ .

Un ejemplo importante en esta tesis es el de la 2-esfera. Considere  $\mathbb{S}^2$  la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ ; las coordenadas esféricas de  $\mathbb{R}^3$  proporcionan el sistema de coordenadas de dimensión dos,  $\xi = (\theta, \varphi)$  sobre  $\mathbb{S}^2$ . Por convención supondré que  $\theta$  es la colatitud y  $\varphi$  el ángulo longitudinal, esto es  $\theta \in (0, \pi)$  y  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . De este modo, el sistema coordenado  $\xi$  no cubre por completo a la esfera, en efecto los polos no están incluidos así como tampoco un semicírculo máximo que conecta a estos polos. Considere la función  $\varphi$  con co-dominio  $\mathbb{S}^1$ , así las coordenadas generalizadas  $(\theta, \varphi)$  ahora cubren a toda la 2-esfera, salvo por los polos.

## Funciones suaves

**Definición 1.4.** 1. Una función entre variedades suaves,  $\psi : M \rightarrow N$  es suave en  $p$  si y solo si existen sistemas coordenados  $\xi, \eta$  de  $M$  y  $N$  respectivamente, donde  $p$  está en el dominio de  $\xi$  y  $\psi(p)$  está en el dominio de  $\eta$ , tales que  $\eta \circ \psi \circ \xi^{-1}$  es  $C^\infty$  entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

2. Si además  $\psi : M \rightarrow N$  es suave en  $M$ , invertible y de inversa suave, se dice que  $\psi$  es un difeomorfismo y que las variedades  $M$  y  $N$  son difeomorfas.

3.  $\mathfrak{F}(M)$  es el conjunto de funciones suaves de  $M$  en  $\mathbb{R}$ .

Se puede probar que el requerimiento de compatibilidad de sistemas coordenados en un atlas suave implica que los sistemas coordenados mismos sean suaves; más aún, cada uno de estos es un difeomorfismo entre su dominio y su imagen.

## Vectores tangentes

**Definición 1.5.** Un vector tangente a  $M$  en  $p \in M$  es una función  $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cualesquiera  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$  y  $c \in \mathbb{R}$  se cumplen:

1.  $v(cf + g) = cv(f) + v(g)$  ( $v$  es  $\mathbb{R}$ -lineal).
2.  $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$  (identidad de Leibniz).

El conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  es denotado por  $T_pM$  y es llamado el *espacio tangente de  $M$  en  $p$* .  $T_pM$  es un espacio vectorial de la misma dimensión que  $M$ .

**Observación 1.6.** Dado un sistema de coordenadas  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$  de  $M$ , para cada  $p$  en el dominio de  $\xi$  se tienen  $n$  vectores coordenados  $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$  definidos por:

$$\partial_i|_p(f) = \frac{\partial}{\partial u_i}(f \circ \xi^{-1})(\xi(p)), \quad f \in \mathfrak{F}(M),$$

donde  $(u_1, \dots, u_n)$  son las coordenadas euclidianas de  $\mathbb{R}^n$ . Usualmente se escribe

$$\partial_i|_p(f) = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} f \right) (p).$$

**Teorema 1.7.** Si  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$  es un sistema coordenado, entonces, para toda  $p$  en el dominio de  $\xi$  y para todo  $v \in T_p M$ ,  $v$  se escribe de manera única como

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_p.$$

Esto es, un sistema coordenado induce una base para el espacio tangente de cada punto en su dominio.

**Definición 1.8.** La unión disjunta de todos los espacios tangentes de una variedad suave es llamado haz tangente de  $M$ .

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

El haz tangente de una variedad suave de dimensión  $n$ , resulta ser una variedad suave de dimensión  $2n$ .

## Diferencial de una función suave

**Definición 1.9.** Dada una función suave entre variedades suaves,  $\psi : M \rightarrow N$ , para cada  $p \in M$  definimos la transformación lineal  $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} N$  llamada *el diferencial de  $\psi$  en  $p$* . El diferencial de  $\psi$  en  $p$  está definido por la siguiente regla de correspondencia:

$$d\psi_p(v)(f) = v(f \circ \psi), \quad \text{para toda } f \in \mathfrak{F}(M).$$

El diferencial de una función suave entre variedades  $\psi : M \rightarrow N$  es lineal y puede pensarse como una aplicación entre los haces tangentes:

$$\begin{aligned} d\psi : TM &\rightarrow TN \\ v_p \in T_p M &\mapsto d\psi_p(v_p) \in T_{\psi(p)} N. \end{aligned}$$

**Proposición 1.10.** Se cumple la regla de la cadena y la identidad de Leibniz:

1. Dadas dos funciones suaves entre variedades suaves  $\psi : M \rightarrow N$  y  $\phi : N \rightarrow S$ , se tiene que

$$d(\phi \circ \psi)_p = d\phi_{\psi(p)} \circ d\psi_p.$$



2. Dadas  $f, g \in \mathfrak{F}(M)$  se cumple,  $d(fg)_p = f(p)dg_p + g(p)df_p$ .

**Teorema 1.11.** *Dada una función suave entre variedades  $f : M \rightarrow N$  tal que  $df_p$  es invertible para algún  $p \in M$  entonces, existe una vecindad  $U$  de  $p$  tal que  $f|_U$  es un difeomorfismo. Si  $f$  es biyectiva y  $df_p$  es invertible para toda  $p \in M$  entonces,  $f$  es un difeomorfismo (global).*

## Campos vectoriales

**Definición 1.12.** Un campo vectorial suave sobre una variedad suave  $M$  es una aplicación  $X : M \rightarrow TM$  tal que

1.  $X(p) \in T_pM$ , para todo  $p \in M$ .
2. Para cada  $f \in \mathfrak{F}(M)$  la aplicación  $Xf : p \in M \mapsto X(p)(f) \in \mathbb{R}$  es suave (i.e.,  $X$  es suave).

El conjunto de campos vectoriales suaves en  $M$  es denotado por  $\mathfrak{X}(M)$ . Se omitirá el apellido ‘suave’ ya que los campos vectoriales mencionados en este texto serán siempre suaves

Es importante no confundir  $Xf$  con  $fX$ ; el primero es una función suave de  $M$  en  $\mathbb{R}$ , el segundo es el campo vectorial  $p \in M \mapsto f(p)X(p)$ . La suma de campos vectoriales y su multiplicación por funciones suaves (como mostrado arriba) está bien definida (punto a punto). Por el teorema 1.7 tenemos que, dado un sistema coordenado  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$  en una variedad suave  $M$ , y un campo  $V \in \mathfrak{X}(U)$ :

$$V = \sum_{i=1}^n V(x^i)\partial_i.$$

Los campos  $\partial_1, \dots, \partial_n$  son llamados *campos coordenados*<sup>1</sup> del sistema coordenado  $\xi$ , y  $V(x^i) = V^i$  son las coordenadas  $\xi$  de  $V$  (en el dominio de  $\xi$ ). Se dice que *los campos coordenados generan al haz tangente de  $U$* , donde  $U$  es el dominio de  $\xi$ .

**Definición 1.13.** Dada una variedad suave  $M$  y dos campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  definimos el *corchete de Lie* de  $X$  y  $Y$  como el campo vectorial  $[X, Y]$  caracterizado por;

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \text{ para toda } f \in \mathfrak{F}(M).$$

Un resultado clásico es que dado un sistema coordenado  $\xi$ , los campos coordenados inducidos cumplen:

$$[\partial_i, \partial_j] = 0, \text{ para cualesquiera } i, j = 1, \dots, n.$$

Esto es resultado del llamado ‘Teorema de Parciales Cruzadas’.

<sup>1</sup>Es bien sabido que cualquier abierto  $U$  de una variedad suave  $M$ , también es una variedad suave y de la misma dimensión, además  $T_pM = T_pU$  para cualquier  $p \in U$ . A su vez, se sabe que cualquier campo  $X \in \mathfrak{X}(U)$  es extendible a un campo en  $M$ .

## Curvas integrales

Cada campo vectorial  $V$  en una variedad suave  $M$  induce una EDO en dicha variedad; las soluciones de esta EDO son las *curvas integrales de  $V$* . Más precisamente, la curva<sup>2</sup>  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva integral de  $V \in \mathfrak{X}(M)$  si y solo si  $\alpha'(s) = V(\alpha(s))$  para toda  $s \in I$ , donde  $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)}M$  está definido como

$$\alpha'(s)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{ds}(s).$$

Dado un sistema coordenado  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ , tenemos que:

$$\alpha'(s) = \sum_{i=1}^n \alpha'(s)(x^i) \partial_i$$

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d(x^i \circ \alpha)}{ds} = V^i(\xi \circ \alpha).$$

La suavidad del campo vectorial  $V$  asegura la validez del Teorema de Existencia y Unicidad para las soluciones de esta EDO. Por tanto, para cada  $p \in M$  existe una única curva integral  $\alpha_p$  del campo vectorial  $V$  tal que  $\alpha_p(0) = p$ .

**Definición 1.14.** Dado un campo vectorial  $V$  completo (i.e., todas sus curvas integrales están definidas sobre  $\mathbb{R}$ ) definimos, dado  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_s : M &\rightarrow M \\ q &\mapsto \alpha_q(s) \end{aligned}$$

La familia de funciones  $\{\Psi_s : s \in \mathbb{R}\}$  es llamado el *flujo de  $V$* . Si  $V$  no es completo, el flujo se define localmente: Para cada  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  y  $\varepsilon > 0$  tal que para cada  $q \in U$  la curva  $\alpha_q$  está definida por lo menos en el intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Se define  $\Psi_s : U \rightarrow M$  para  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  como en el caso completo. Para aligerar la notación en el desarrollo de la teoría para esta tesis se denotará  $\{\Psi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  al flujo de un campo vectorial.

**Proposición 1.15.** Si  $\{\Psi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  es el flujo de un campo vectorial completo  $V$ , entonces:

1.  $\Psi_0$  es la identidad de  $M$  en  $M$ .
2.  $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$  para todos  $s, t \in \mathbb{R}$ .
3.  $\Psi_{-s} = (\Psi_s)^{-1}$  para toda  $s \in \mathbb{R}$ . Es decir,  $\Psi_s$  es un difeomorfismo para toda  $s \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>2</sup>Una curva sobre una variedad diferenciable  $M$  es una función suave que va de un abierto conexo de  $\mathbb{R}$  en  $M$ .

En el caso  $V$  no completo, tenemos las mismas propiedades de manera local. Esto es, dado  $p \in M$  consideramos la vecindad  $U$  y  $\varepsilon > 0$  como en la definición local de flujo. Se cumple que  $\Psi_0$  es la identidad de  $U$  en  $U$ , si  $s, t, s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$ , y  $\Psi_s$  es un difeomorfismo de  $U$  en su imagen para  $s$  suficientemente pequeño.

Dado un difeomorfismo  $\psi$  entre variedades suaves  $M$  y  $N$ , es posible ‘empujar’ los campos de  $M$  para definir campos en  $N$  a través de  $\psi$ . Este procedimiento es conocido como *pushforward*: Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , y  $q \in N$

$$\psi_*(X)(q) = d\psi_{\psi^{-1}(q)}(X(\psi^{-1}(q))).$$

De este modo, tenemos que dado un sistema coordenado  $\xi$  sobre  $M$ , digamos  $\xi : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , si  $e_1, \dots, e_n$  son los campos vectoriales constantes canónicos sobre  $V$ , entonces  $\xi_*\partial_i = e_i$ , o equivalentemente  $(\xi^{-1})_*e_i = \partial_i$  en  $U$ .

## Formas diferenciales

Consideremos una variedad suave  $M$ ; para cada  $p \in M$  definimos el espacio cotangente  $T_pM^*$  como el espacio vectorial dual a  $T_pM$ .

**Definición 1.16.** Una 1-forma  $\omega$  es un campo suave de covectores, es decir,

1.  $\omega_p \in T_pM^*$  para todo  $p \in M$ .
2. Para todo campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  la función  $p \mapsto \omega_p(X(p))$  es suave.

Por simplicidad se omitirá el subíndice que indica sobre cuál espacio tangente actúa la forma diferencial.

El diferencial de una función  $f \in \mathfrak{F}(M)$  es una 1-forma. Esta 1-forma  $df$ , es la 1-forma dual del campo vectorial llamado *gradiente de  $f$* , denotado  $\text{grad } f$ . El teorema 1.7 y el álgebra lineal muestran que, en un sistema coordenado  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$  las formas  $dx^1, \dots, dx^n$  son la base dual de  $\partial_1, \dots, \partial_n$ . Por tanto, dada una 1-forma  $\omega$  se tiene que, en  $U$  dominio del sistema  $\xi$ ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega(\partial_i) dx^i.$$

Similar al procedimiento de empujar un campo, existe el procedimiento de ‘jalar’ una forma solo que no es necesario tener un difeomorfismo. Dada una función suave  $\psi : M \rightarrow N$  entre variedades suaves  $M$  y  $N$ , consideremos una 1-forma  $\omega$  sobre  $N$ , entonces la siguiente 1-forma en  $M$  es conocido como el *pullback* de  $\omega$  bajo  $\psi$ : Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\psi^*\omega(X) = \omega(d\psi(X)).$$

## 1.2. Geometría semi-riemanniana

### Métricas semi-riemannianas

**Definición 1.17.** Dado un espacio vectorial  $E$  sobre  $\mathbb{R}$ , una forma bilineal simétrica es una función  $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

1.  $g(ax + by, z) = ag(x, z) + bg(y, z)$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $x, y, z \in E$ .
2.  $g(x, y) = g(y, x)$  para todos  $x, y \in E$ .

Además, decimos que  $g$  es no degenerada si para todo  $y \in V$   $g(x, y) = 0$  entonces,  $x = 0$ .

**Definición 1.18.** Dada una variedad suave  $M$ , decimos que  $(M, g)$  es una variedad semi-riemanniana si  $g$  le asigna a cada punto  $p \in M$  una forma bilineal, simétrica y no degenerada sobre  $T_p M$  de manera suave. Esto último es, para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $g(X, Y) : p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$  es una función suave. El objeto  $g$  es llamado *tensor métrico semi-riemanniano* o *métrica semi-riemanniana*.

Consideremos una variedad semi-riemanniana  $(M, g)$  y un sistema coordenado  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ . Las funciones suaves  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$  son llamadas *componentes de la métrica  $g$  en coordenadas  $\xi$* . Por tanto, en el dominio de  $\xi$  se cumple que,

$$g = \sum_{i=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

donde  $\otimes$  es el producto tensorial clásico<sup>3</sup>. Comúnmente se expresa a la métrica  $g$  a través del llamado *elemento de línea  $ds^2$* , que a cada punto de  $p$  asocia la forma cuadrática de  $g_p$ . En coordenadas  $\xi$  ésta se expresa como:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n g_{ij} dx^i dx^j,$$

donde la expresión se  $dx^i dx^j$  se define cómo:

$$(dx^i dx^j)(X) = dx^i \otimes dx^j(X, X),$$

i.e.,  $(dx^i dx^j)(X) = dx^i(X) dx^j(X)$ . La identidad de polarización permite extraer el tensor métrico  $g$  del elemento de línea  $ds^2$ .

Dado un punto  $p$  en una variedad semi-riemanniana  $M$  se obtiene la matriz  $g_{ij}(p)$ ; se tiene que  $g_p$  es no degenerada si y solo si  $g_{ij}(p)$  es invertible, si y solo si  $\det(g_{ij}(p)) \neq 0$ . Esta caracterización resultará más útil en la práctica que la definición original.

---

<sup>3</sup>La definición de producto tensorial es válida para tensores de todo tipo, pero en este caso lo podemos definir con la siguiente regla de correspondencia:  $dx^i \otimes dx^j(X, Y) = dx^i(X) dx^j(Y)$

Un ejemplo importante de una variedad semi-riemanniana es el espacio semi-euclidiano de dimensión  $n$  e índice  $\nu$ , denotado  $\mathbb{R}_\nu^n$ . Dotamos a  $\mathbb{R}^n$  con la siguiente métrica: consideremos  $\nu \leq n$ ,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (dx^i)^2,$$

donde  $\varepsilon_i = -1$ , si  $i \leq \nu$  y  $\varepsilon_i = 1$  si  $i > \nu$ .

**Definición 1.19.** Una función  $\psi$  entre variedades semi-riemannianas  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  es llamada isometría si  $\psi$  es un difeomorfismo y cumple con la identidad

$$h_{\psi(p)}(d\psi(x), d\psi(y)) = g_p(x, y), \text{ para todo } p \in M \text{ y para todos } x, y \in T_p M$$

Es decir,  $\psi$  preserva la métrica; si esto sucede decimos que  $M$  y  $N$  son isométricos.

Podemos definir el concepto de pullback para tensores métricos. Dada una variedad semi-riemanniana  $(N, h)$  y una variedad suave  $M$ , si existe una función  $\psi : M \rightarrow N$  entonces  $\psi^*h(x, y) = h(d\psi(x), d\psi(y))$  es llamado el pullback de  $h$  bajo  $\psi$  y es un tensor métrico sobre  $M$ . De este modo, dado un difeomorfismo  $\psi$  entre variedades semi-riemannianas  $(M, g)$  y  $(M, h)$ ,  $\psi$  es una isometría si y solo si  $g = \psi^*h$  si y solo si  $h = (\psi^{-1})^*g$ .

La expresión de la métrica y elemento de línea de una variedad producto en términos de la métrica y elemento de línea de cada factor es algo que será usado frecuentemente en esta tesis. Considere las variedades semi-riemannianas  $(M_1, g_1)$  y  $(M_2, g_2)$ . Entonces la variedad producto  $M_1 \times M_2$  carga la métrica semi-riemanniana

$$g = \pi_1^*g_1 + \pi_2^*g_2 : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2)$$

para todos  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  vectores tangentes<sup>4</sup> a  $M_1 \times M_2$ , donde  $\pi_i$  es la proyección de  $M_1 \times M_2$  a  $M_i$ ,  $i = 1, 2$ . Usualmente se escribe  $g = g_1 + g_2$  omitiendo las proyecciones. De este modo, podemos escribir a los elementos de línea de manera similar:  $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ .

## Derivada covariante

El concepto de derivada covariante nos permitirá definir la derivada de un campo vectorial con respecto a otro. Para ello presentamos el Teorema Fundamental de la Geometría Semi-Riemanniana:

**Teorema 1.20.** *Dada una variedad semi-riemanniana  $(M, g)$ , existe una única función  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que,*

1.  $\nabla_Y X$  es  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en  $Y$ , es decir  $\nabla_{fY+Z} X = f\nabla_Y X + \nabla_Z X$  para toda  $f \in \mathfrak{F}(M)$  y  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

<sup>4</sup>Recuerde que para todo  $(p, q) \in M_1 \times M_2$ ,  $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_p M_1 \times T_q M_2$ .

2.  $\nabla_Y X$  es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $X$ .
3.  $\nabla_Y(fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X$  para toda  $f \in \mathfrak{F}(M)$ .
4.  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$  (Libre de torsión).
5.  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$  para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  (Compatibilidad con la métrica).

$\nabla$  es conocida como la conexión de Levi-Civita, y  $\nabla_X Y$  es la derivada covariante de  $Y$  respecto a  $X$ .

La primera propiedad del teorema anterior hace que la expresión  $\nabla_v X$  esté bien definida (punto a punto). Esto es,  $(\nabla_V X)(p) = \nabla_v X$  con  $V(p) = v$ . En particular, dada una curva  $\alpha$  y un campo  $V$  sobre  $\alpha$ , la expresión

$$\frac{\nabla}{ds} X = \nabla_{\alpha'} \hat{X}$$

está bien definida y es llamada la derivada covariante de  $X$  a lo largo de  $\alpha$ . Donde,  $\hat{X} \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $\hat{X}(\alpha(s)) = X(s)$ . Se dice que  $X$  es paralelo si y solo si  $\frac{\nabla}{ds} X = 0$ .

Luego, la compatibilidad con la métrica da una identidad sumamente útil:

$$\frac{d}{ds} g(X(\alpha(s)), Y(\alpha(s))) = g\left(\frac{\nabla}{ds} X(\alpha(s)), Y(\alpha(s))\right) + g\left(\frac{\nabla}{ds} Y(\alpha(s)), X(\alpha(s))\right)$$

Es importante recordar cómo es que la conexión de Levi-Civita de una subvariedad se relaciona a la conexión de Levi-Civita de la variedad total. Consideremos una subvariedad  $P$  de  $M$ . Consideremos  $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$  entonces, la conexión de Levi-Civita de  $P$  está dada por  $(\nabla_X \hat{Y})^T$ , donde  $\hat{Y} \in \mathfrak{X}(M)$  es una extensión de  $Y$  y  $v^T$  denota la proyección ortogonal de  $v \in T_p M$  sobre  $T_p P$ .

## Geodésicas

Las geodésicas son curvas sumamente importantes ya que cargan con información clave de la variedad en cuestión; en nuestro contexto serán las trayectorias tomadas por partículas en caída libre o rayos de luz. Esto se precisará más adelante.

**Definición 1.21.** Dada una variedad semi-riemanniana  $(M, g)$ , y una curva  $\alpha$  en  $M$ , la curva  $\alpha$  es una geodésica si y solo si cumple con la ecuación de autoparalelismo:

$$\frac{\nabla}{ds} \alpha' = 0$$

para todo valor de su parámetro.

En el contexto físico, el lado izquierdo de la ecuación de autoparalelismo es usado para expresar la aceleración. De este modo la ecuación de autoparalelismo se lee físicamente como la condición para que una trayectoria tenga velocidad

constante.

Por otro lado, la teoría de ecuaciones diferenciales nos asegura que para todo  $p \in M$  y  $v \in T_p M$  existe una única geodésica (de dominio maximal)  $\gamma_v$  tal que  $\gamma_v(0) = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ . La ecuación de autoparalelismo es, en general, un sistema de ecuaciones ordinarias de segundo orden no autónomas, casi imposible de resolver de manera exacta (en la mayoría de los casos). Para ello es conveniente usar métodos lagrangianos (i.e., variacionales). Sea  $\mathfrak{L} : TM \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave definida por la siguiente regla de correspondencia  $\mathfrak{L}(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$ . Ahora, considere una curva  $\alpha$  en  $M$ , entonces dado un sistema coordenado  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$  para  $M$ , esto define un sistema coordenado para  $TM$ . Las coordenadas de la curva  $\alpha'$  en  $TM$  están dadas por  $(x^1, \dots, x^n, x'^1, \dots, x'^n)$ . Tenemos que  $\alpha$  es una geodésica si y solo si se cumplen las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x'^j}(\alpha') \right] = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i}(\alpha') \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Este resultado se consigue con métodos variacionales y un cálculo directo, además de la bibliografía ya recomendada puede consultar: [Poisson, 2002] y [Bär, 2013]. Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán usadas en el Capítulo 4.

## Campos de Killing

**Definición 1.22.** Consideremos  $X$  un campo vectorial sobre una variedad semi-riemanniana  $(M, g)$ . La derivada de Lie de  $g$  a lo largo de  $X$  está dada por:

$$(L_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]), \quad \text{para } Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

**Definición 1.23.** Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Decimos que  $X$  es un campo de Killing<sup>5</sup> si y solo si  $L_X g = 0$ .

Otra definición de un campo de Killing equivalente a la anterior, exige que los flujos (local o globalmente definidos) sean isometrías.

**Proposición 1.24.** Consideremos un campo vectorial  $X$  sobre una variedad semi-riemanniana  $(M, g)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $X$  es de Killing.
2.  $Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Y, [X, Z]])$  para todos  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .
3.  $g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$  para todos  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Demostración.* Sean  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Primero, supongamos que  $L_X g(Y, Z) = 0$ , esto es, si y solo si

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) &= 0 \\ \Leftrightarrow Xg(Y, Z) &= g([X, Y], Z) + g([Y, [X, Z]]). \end{aligned}$$

<sup>5</sup>La noción de campo vectorial de Killing se debe a Wilhelm Killing.

Esto muestra que las primeras dos afirmaciones son equivalentes. Luego, para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  cualesquiera, por la compatibilidad de la métrica de la conexión de Levi-Civita:  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ , si suponemos que la afirmación 2 es válida tenemos:

$$g([X, Y], Z) + g([Y, [X, Z]]) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

si y solo si

$$g([X, Y] - \nabla_X Y, Z) + g([X, Z] - \nabla_X Z, Y) = 0.$$

Finalmente, como la conexión de Levi-Civita es libre de torsión se tiene que la última igualdad es equivalente a:

$$g(-\nabla_Y X, Z) + g(-\nabla_Z X, Y) = 0.$$

Esto prueba que las afirmaciones 2 y 3 son equivalentes.  $\square$

**Proposición 1.25.** *Si  $X$  es un campo de Killing sobre  $M$  y  $\gamma$  es una geodésica entonces,  $g(X(\gamma), \gamma')$  es constante.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}g(X(\gamma(s)), \gamma'(s)) &= g\left(\frac{\nabla}{ds}X(\gamma(s)), \gamma'(s)\right) + g\left(\frac{\nabla}{ds}\gamma'(s), X(\gamma(s))\right) \\ &= g(\nabla_{\gamma'(s)}X(\gamma(s)), \gamma'(s)) \\ &= -g(\nabla_{\gamma'(s)}X(\gamma(s)), \gamma'(s)) = 0 \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es resultado de la tercera equivalencia de la Proposición anterior.  $\square$

## Subvariedades totalmente geodésicas

**Definición 1.26.** Sea  $(M, g)$  una variedad semi-riemanniana y  $P$  una subvariedad de  $M$ . Decimos que  $P$  es totalmente geodésica si y solo si para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  que son tangentes a  $P$ ,  $\nabla_X Y$  es tangente a  $P$ .

**Proposición 1.27.** *Sea  $P$  una variedad totalmente geodésica de  $M$  y  $\gamma$  una geodésica de  $M$ . Si  $\gamma$  toca a  $P$  en  $\gamma(s_0)$  y  $\gamma'(s_0) \in T_{\gamma(s_0)}P$  entonces,  $\gamma$  permanece en  $P$  para  $s$  cercano a  $s_0$ .*

*Demostración.* Recordemos que la conexión de Levi-Civita de  $P$  está dada por  $(\nabla_X \hat{Y})^T$ , pero por ser totalmente geodésica tenemos que  $(\nabla_X \hat{Y})^T = \nabla_X \hat{Y}$ , donde  $X \in \mathfrak{X}(P)$  y  $\hat{Y}$  es una extensión de un campo  $Y \in \mathfrak{X}(P)$ . Por tanto, la ecuación de autoparalelismo de  $P$  implica, localmente, la ecuación de autoparalelismo de  $M$ . Por unicidad de condiciones iniciales de geodésicas, tenemos que  $\gamma$  es geodésica de  $P$ , cercano a  $\gamma(s_0)$ .  $\square$

**Corolario 1.28.** *Sea una geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tangente en un punto a una subvariedad, cerrada y totalmente geodésica  $P$  entonces,  $\gamma'(s) \in TP$  para toda  $s \in I$ .*



*Demostración.* Recordemos que las geodésicas están definidas en conjuntos abiertos, conexos de  $\mathbb{R}$ . Dicho esto, gracias a la proposición anterior  $I_P = \{s \in I : \gamma(s) \in P\}$  es abierto, pero como  $P$  es cerrado  $I_P = (\gamma)^{-1}(P)$  es cerrado. Por conexidad de  $I$  tenemos que  $I = I_P$  ya que  $I_P$  es no vacío por hipótesis.  $\square$

Se puede probar que el regreso del resultado anterior también es cierto.

**Proposición 1.29.** *Sea  $P$  un subconjunto de una variedad semi-riemanniana  $M$ , si  $P$  cumple con alguna de las siguientes afirmaciones, entonces  $P$  es una subvariedad, cerrada y totalmente geodésica.*

1.  $P$  es el conjunto de puntos fijos de una isometría  $\psi : M \rightarrow M$ , o
2.  $P$  es el conjunto de ceros de un campo de Killing.

*Demostración.* La prueba de este resultado usará la aplicación exponencial. Para cada  $p \in P$  sea  $F_p = \{v \in T_p M : d\psi_p(v) = v\}$ . Este conjunto es claramente un subespacio vectorial de  $T_p M$ . Por tanto, dado  $v \in F_p$  tenemos que

$$\psi(\gamma_v) = \gamma_{d\psi(v)} = \gamma_v$$

donde  $\gamma_v$  es la geodésica en  $M$  con condiciones iniciales  $\gamma_v(0) = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ . Por tanto,  $\exp_p(F_p \cap \mathcal{D}_p) \subset P$ , donde  $\mathcal{D}_p \subset T_p M$  es un abierto tal que  $(\exp_p)|_{\mathcal{D}_p}$  es un difeomorfismo. Lo anterior prueba que  $(\exp_p)^{-1}$  define un sistema coordenado para  $P$  cercano a  $p$ , por tanto  $P$  es una subvariedad de  $M$ . Como  $\psi$  es en particular continua, se tiene que los puntos fijos de  $\psi$  es un conjunto cerrado. Finalmente, la ecuación

$$\psi(\gamma_v) = \gamma_{d\psi(v)} = \gamma_v$$

implica el resultado del Corolario 1.28. Como fue mencionado, esto implica que  $P$  es una variedad totalmente geodésica. Esto prueba que la primera afirmación implica que  $P$  es una subvariedad, cerrada y totalmente geodésica. Para ver que la segunda afirmación conduce al mismo resultado, aplicar el argumento anterior al flujo de dicho campo de Killing.  $\square$

## 1.3. Geometría de Lorentz

### Espacios vectoriales de Lorentz

**Definición 1.30.** Sea  $E$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión  $n$ . Consideremos una forma bilineal, simétrica y no degenerada  $g$  sobre  $E$ . Decimos que  $(E, g)$  es un espacio vectorial con producto escalar de dimensión  $n$ . Si además  $g$  es definido positivo decimos que  $(E, g)$  es un espacio vectorial con producto interior (de dimensión  $n$ ). Dado  $v \in E$  denotamos a  $|v| = \sqrt{|g(v, v)|}$ .

**Lema 1.31.** *Consideremos un espacio vectorial con producto escalar  $(E, g)$  tal que  $E \neq \{0\}$ . Entonces, existe una base ortonormal de  $E$ , más aún cualquier conjunto ortonormal  $e_1, \dots, e_k$  con  $k < n$  puede ser completado a una base ortonormal.*

*Demostración.* Como  $g$  es no degenerado y  $E \neq \{0\}$ , existe  $v \in E$  tal que  $g(v, v) \neq 0$ , así  $e_1 = v/|v|$ . Consideremos un conjunto ortonormal  $e_1, \dots, e_k$  con  $k < n$ . Probaré que existe  $e_{k+1}$  tal que  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$  es un conjunto ortonormal: Denotemos

$$W = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\} \text{ y } W^\perp = \{x \in E : g(x, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Tenemos que  $W^\perp$  es un espacio vectorial (ver definición 1.34), y  $g$  restringido a  $W^\perp$  es no degenerado. Por tanto, existe  $x \in W^\perp$  tal que  $g(x, x) \neq 0$ , sea  $e_{k+1} = x/|x|$ . Inductivamente tenemos el resultado deseado.  $\square$

Cada base ortonormal tiene asociadas las constantes  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ . Resulta que el número de signos negativos y positivos es independiente de la base. El número de signos negativos es denotado por  $\nu$  y es llamado el *índice* de  $E$ . Este hecho hace evidente que todo espacio vectorial con producto escalar  $(E, g)$  de dimensión  $n$  e índice  $\nu$  es isométrico a  $\mathbb{R}_\nu^n$ .

**Definición 1.32.** Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión  $n \geq 2$  con producto escalar  $g$ , decimos que  $E$  es de Lorentz si y solo si es isométrico a  $\mathbb{R}_1^n$ .

Esto es, existe una base dual de  $E$ ,  $e_1^*, \dots, e_n^*$  tal que

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i^*(u) e_i^*(v), \quad \forall u, v \in E$$

donde,  $\varepsilon_1 = -1$  y  $\varepsilon_i = +1$  para toda  $i > 1$ .

**Definición 1.33.** Sea  $E$  un espacio vectorial de Lorentz y  $v \in E$ ,

1.  $v$  es tipo espacio o espacial si  $v = 0$  o si  $g(v, v) > 0$ ,
2.  $v$  es tipo tiempo o temporal si  $g(v, v) < 0$ ,
3.  $v$  es tipo luz o nulo si  $v \neq 0$  y  $g(v, v) = 0$ .

La clasificación anterior es llamado *carácter causal* y se extenderá a cierto tipo de variedades semi-riemannianas y curvas sobre éstas.

**Definición 1.34.** Dado  $v$  un vector en espacio vectorial de Lorentz  $E$ , definimos el complemento ortogonal a  $v$  como  $v^\perp = \{x \in E : g(v, x) = 0\}$ . Claramente,  $v^\perp$  es un subespacio vectorial de  $E$ .

Luego, consideramos  $W = \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}$  entonces  $W^\perp$  se define cómo  $\bigcap_{i=1}^k w_i^\perp$  es decir,  $W^\perp = \{v \in E : g(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$ .

**Lema 1.35.** Sea  $v \in E$  un vector tipo tiempo, entonces  $(v^\perp, g|_{v^\perp})$  es un espacio vectorial con producto interno y además  $E = \mathbb{R}v \oplus v^\perp$ . Es decir, todo vector  $x \in v^\perp$  es espacial.

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que  $g(v, v) \neq 0$ ; el Lema 1.31 asegura que existe una base ortonormal  $e_1, \dots, e_n$  tal que  $e_1 = v/|v|$ . Ahora, consideremos  $u \in v^\perp$  entonces en términos de la base recién encontrada:  $u = \sum_{i=2}^n u_i e_i$ , note que  $u_1 = g(u, v) = 0$ . Por tanto,  $g(u, u) = \sum_{i=2}^n u_i^2 \geq 0$  y la igualdad se cumple si y solo si  $u = 0$ . Esto prueba que  $v^\perp$  es un espacio vectorial con producto interno. Luego, tenemos que  $v^\perp$  es el espacio vectorial generado por  $e_2, \dots, e_n$ . Esto prueba que  $E = \mathbb{R}e_1 \oplus e_1^\perp$  y como  $\mathbb{R}e_1 = \mathbb{R}v$  y  $e_1^\perp = v^\perp$  el resultado se sigue.  $\square$

**Definición 1.36.** El conjunto  $\Lambda$  de todos los vectores nulos en  $E$  es llamado el cono nulo o cono de luz.

Veamos que  $\Lambda$  tiene dos componentes conexas, denotadas  $\Lambda_+$ ,  $\Lambda_-$ . Tomando una base ortonormal de  $E$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la ecuación

$$\sum_{i=2}^n x_i^2 = x_1^2$$

es la forma canónica de un cono<sup>6</sup>. Ahora, dado  $v \in E$  un vector temporal tenemos que  $E = \mathbb{R}v \oplus v^\perp$ , por tanto cada vector nulo  $u \in \Lambda$  se descompone como  $u = av + x$  con  $x \in v^\perp$ . Note que  $a \neq 0$  ya que  $u$  debe ser nulo, de esta manera las componentes conexas de  $\Lambda$  están determinadas por el signo que pueda tomar  $a$ , por lo que  $\Lambda_+ = -\Lambda_-$ .

**Definición 1.37.** El conjunto  $\mathfrak{T}$  de vectores temporales en  $E$  es llamado cono temporal.

$\mathfrak{T}$  tiene dos componentes conexas  $\mathfrak{T}_+$ ,  $\mathfrak{T}_-$ . Cada una de estas componentes es un cono abierto, además  $-\mathfrak{T}_+ = \mathfrak{T}_-$ . A continuación se probarán las aseveraciones anteriores: Primero note que  $\mathfrak{T} = \{v \in E : g(v, v) < 0\}$  por lo que es un conjunto abierto. Luego consideremos  $v \in \mathfrak{T}$  tal que  $g(v, v) = -1$ , entonces para todo  $u \in \mathfrak{T}$  se tiene que  $u = av + x$  donde  $x \in v^\perp$ , note que la función  $u \mapsto a$  es continua: La proyección ortogonal  $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}v$  es continua y  $g(\pi(v), v) = ag(v, v) = -a$ . Luego,  $a \neq 0$ , ya que de lo contrario  $u = x \in v^\perp$  sería un vector espacial. Así, el signo de  $a$  determina las componentes conexas de  $\mathfrak{T}$ . Finalmente, dado  $u \in \mathfrak{T}_+$  se tiene que  $u = av + x$  con  $a > 0$  y  $x \in v^\perp$  por tanto  $\lambda u \in \mathfrak{T}_+$  para todo  $\lambda > 0$ , por tanto  $\mathfrak{T}_+$  es un cono, análogamente  $\mathfrak{T}_-$  es un cono y además  $-\mathfrak{T}_+ = \mathfrak{T}_-$ .

El siguiente corolario será muy usado en el contenido de esta tesis.

**Corolario 1.38.** *Dos vectores temporales  $u, v$  están en el mismo cono temporal si y solo si  $g(u, v) < 0$ .*

<sup>6</sup>La definición más general de un cono contenido en un espacio vectorial  $E$  es:  $C \subset E$  es un cono si y solo si para todo  $x \in C$ ,  $\lambda x \in C$  para todo  $\lambda > 0$ . Esta definición la satisfacen también  $\Lambda$ ,  $\Lambda_+$  y  $\Lambda_-$ , ya que si  $v$  es nulo, entonces  $\lambda v$  es nulo para todo  $\lambda > 0$  y  $\text{sgn}(\lambda a) = \text{sgn}(a)$  donde  $a$  es el escalar que determina las componentes conexas del cono de luz  $\Lambda$ .

*Demostración.* Consideremos la función continua  $f : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = g(u, x)$ . Observe que  $f(u) < 0$ , por tanto si  $u \in \mathfrak{T}_+$  tenemos por conexidad que  $f(x) < 0$  para todo  $x \in \mathfrak{T}_+$ . Además, como consecuencia del Lema 1.35 tenemos que  $f$  nunca es cero. Finalmente, si  $v \in \mathfrak{T}_- = -\mathfrak{T}_+$  entonces  $-v \in \mathfrak{T}_+$  por lo tanto  $0 > f(-v) = g(-v, u) = -g(v, u)$ .  $\square$

Se puede probar que la frontera de  $\mathfrak{T}_\pm$  es justamente  $\Lambda_\pm \cup \{0\}$ , eligiendo apropiadamente los signos. Apoyados en este hecho podemos definir los conos causales como  $\mathfrak{T}_\pm \cup \Lambda_\pm$ , que también son conexos, y extender el resultado anterior: Dado un vector temporal  $u$  y un vector causal  $v$  (i.e.,  $v$  es temporal o nulo) entonces, están en el mismo cono causal si y solo si  $g(u, v) < 0$ . Los conos  $\Lambda_\pm \cup \mathfrak{T}_\pm$  son llamados *conos causales*.

**Definición 1.39.** Sea  $W$  un subespacio de  $(E, g)$  (espacio vectorial de Lorentz). Decimos que

1.  $W$  es espacial si  $g|_W$  es positivo definido,
2.  $W$  es temporal si  $g|_W$  es no degenerado y de índice 1,
3.  $W$  es nulo si  $g|_W$  es degenerado.

**Lema 1.40.** *Dados dos vectores nulos  $u, v \in E$ , entonces  $u, v$  son ortogonales si y solo si son colineales.*

*Demostración.* El regreso es inmediato: supongamos que  $u = kv$  para algún  $k \in \mathbb{R}$  entonces  $g(v, u) = kg(v, v) = 0$ . Ahora supongamos que  $u, v$  vectores nulos, ortogonales y linealmente independientes, entonces  $\text{span}\{u, v\} \setminus \{0\}$  es un conjunto de vectores nulos: Considere  $x \in \text{span}\{u, v\} \setminus \{0\}$ , i.e.,  $x = au + bv$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces,

$$\begin{aligned} g(x, x) &= g(au + bv, au + bv) \\ &= a^2g(u, u) + 2abg(u, v) + b^2g(v, v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si perdida de generalidad supongamos que existe un vector temporal en  $E$ , así que el lema 1.35 asegura que existe un subespacio vectorial  $W$  espacial de dimensión  $n - 1$ , a saber el complemento ortogonal de dicho vector temporal. Finalmente,  $\text{span}\{u, v\} \cap W = \{0\}$  ya que  $\text{span}\{u, v\}$  consta de puros vectores nulos (salvo el origen) y  $W$  es espacial. Por lo tanto, la dimensión del subespacio  $\text{span}\{u, v\} \oplus W$  es  $n + 1$ , lo que es una contradicción.  $\square$

**Lema 1.41.** *Si  $W$  es un subespacio nulo de  $E$ , entonces*

1. *Existe un vector  $d \in W \setminus \{0\}$  único (salvo multiplicación escalar) tal que  $d$  es ortogonal a todo vector en  $W$  ( $d \perp W$ ). Además  $d$  es un vector nulo.*
2. *Todo vector en  $W \setminus \mathbb{R}d$  es espacial.*

*Demostración.* Por definición  $g|_W$  es degenerado, por lo que existe  $d \in W$  tal que  $d \neq 0$  y  $d \perp W$ . En particular  $g(d, d) = 0$  por lo que  $d$  es un vector nulo, esto prueba la primera afirmación. Luego, consideremos  $x \in W \setminus \mathbb{R}d$ , en particular  $d \perp x$  veremos que  $x$  no puede ser nulo ni temporal: Si  $x$  es temporal, por el Lema 1.35 tenemos que  $d$  es espacial, lo que es una contradicción. Si  $x$  es nulo, por el resultado anterior tenemos que  $x$  y  $d$  son colineales, es decir,  $x \in \mathbb{R}d$  lo que es una contradicción.  $\square$

## Variedades de Lorentz

En esta sección se definirán los conceptos clave para dar una noción rigurosa de un espaciotiempo.

**Definición 1.42.** Una variedad de Lorentz es una variedad semi-riemanniana de dimensión  $n \geq 2$  tal que todos sus planos tangentes son espacios vectoriales de Lorentz, es decir de índice 1.

La clasificación *causal* de vectores (temporal, espacial y nulo) es extendible tanto a curvas, como variedades de Lorentz: Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es temporal (nulo, espacial) si todo vector  $X(p)$  es temporal (espacial, nulo). Similarmente, una curva  $\alpha$  es temporal (espacial, nula) si todo vector  $\alpha'(s)$  es temporal (espacial, nulo).

**Definición 1.43.** Una variedad de Lorentz  $M$  es temporalmente orientable si admite un campo vectorial definido en toda  $M$  que no sea espacial (i.e., que los vectores sean nulos o temporales). En particular, dicho campo nunca es cero.

La orientabilidad temporal se puede pensar como una elección suave de conos causales, es decir, para cada punto en  $M$ , elegimos alguna componente conexa del cono de luz  $\mathfrak{T}$  en  $T_pM$ . Ya elegida una orientación (i.e., un campo vectorial no espacial que nunca es cero) los conos causales que contengan a los vectores de la orientación son llamados *conos futuros* y los otros, *conos pasados*.

**Definición 1.44.** Un espaciotiempo es una 4-variedad de Lorentz, conexa, junto con una orientación temporal.

Un vector temporal (o nulo)  $v$  apunta hacia el futuro si y solo si  $v$  está en el cono futuro, en otro caso se dice que  $v$  apunta hacia el pasado. Recuerde que el cono de luz es la frontera topológica del cono temporal, por lo que el término cono futuro (o pasado) puede referirse al cono de luz o cono temporal que esté contenido en el cono causal futuro dependiendo del contexto, por lo que no provocará confusión.

La noción de espaciotiempo es clave para la teoría de la Relatividad General, desarrollada por Albert Einstein. A muy grosso modo, una de sus aportaciones para la física fue dar la relación explícita entre curvatura (representada por el tensor de Einstein<sup>7</sup>) y masa-energía (representado por el tensor de energía-

<sup>7</sup>El tensor de Einstein está definido como  $\text{Ric} - \frac{1}{2}sg$ , donde  $\text{Ric}$  es el tensor de Ricci,  $s$  es la curvatura escalar y  $g$  el tensor métrico.

momento<sup>8</sup>) sobre un espaciotiempo. Así los espaciotiempos que cumplen con la relación encontrada por Einstein cargan con una geometría tal que las partículas que están bajo la influencia gravitacional de una masa central se mueven en geodésicas. El primer espaciotiempo de este estilo fue encontrado por Karl Schwarzschild, semanas después de que Einstein publicara su teoría de la Relatividad General. La estrella que produce el espaciotiempo de Schwarzschild no gira, es decir es un caso sumamente idealizado. Casi 50 años más tarde Roy Kerr descubrió el espaciotiempo donde dicha estrella sí gira. Como veremos, este giro trae consecuencias geométricas sumamente interesantes.

Un hecho importante, que no será abordado con rigor, pero que es importante mencionar es que la familia de espaciotiempos de Kerr son asintóticamente planos. Esto quiere decir que la geometría de estos espaciotiempos se vuelve casi plana (sin ningún efecto gravitacional) cuando se encuentra muy alejado del objeto masivo modelado.

---

<sup>8</sup>El tensor de energía momento representa el flujo de masa/energía sobre el espaciotiempo en cuestión.



## Capítulo 2

# Métrica de Kerr

Esta tesis se centra en el estudio geométrico de los ‘espaciotiempos de Kerr’, una familia de espaciotiempos donde cada elemento representa un agujero negro sin carga<sup>1</sup> y con rotación, cada uno con masa y giro distintos. Estos espaciotiempos se pueden describir mediante muchos sistemas de coordenadas usados en la literatura; aquí serán usadas las coordenadas de Boyer-Lindquist, que son extremadamente útiles para modelar la perspectiva de un observador a una distancia considerable del agujero negro.

### 2.1. Coordenadas de Boyer-Lindquist

Empezaremos dotando a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$  con una estructura lorentziana, usando coordenadas pseudo-esféricas; esto puede pensarse como el uso de coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^3$  más una coordenada temporal  $t$  en  $\mathbb{R}$ , ignorando la restricción  $r > 0$ . De esta forma tenemos el sistema de coordenadas  $\xi = (t, r, \theta, \varphi)$  donde  $(t, r)$  parametriza a  $\mathbb{R}^2$  y  $(\theta, \varphi)$  a  $\mathbb{S}^2$ , salvo por los polos (vea el ejemplo después de la observación 1.3), recuerde que la coordenada  $\theta$  es el ángulo polar. Como se recalcará al final de la tesis, hay una buena razón para creer que la región  $r < 0$  no tiene relevancia física, pero sí tiene importancia geométrica por lo que será objeto de estudio. Hay dos parámetros importantes que determinarán la geometría de los espaciotiempos de Kerr: la masa  $M$  y el momento angular por unidad de masa  $a$ . Se tomará a  $M$  como una constante positiva, aunque esto es una suposición que no se tiene a priori de las ecuaciones de Einstein; de hecho, el llamado problema de la masa positiva resultó ser un problema altamente no trivial; ver [Schoen and Yau, 1979]. Por otro lado, el signo de  $a$  se traducirá en la dirección de giro de la masa central modelada por los espaciotiempos de Kerr, de modo que no perderemos generalidad tomando a  $a$ , también, como una constante positiva. A lo largo de esta tesis aparecerán ciertas expresiones que

---

<sup>1</sup>El modelo de espaciotiempo que incluye la carga así como el giro y masa es el modelo de Newman o Kerr-Newman, puede ver [Wald, 2010].



conviene abreviar de una vez:

$$C = \cos \theta, \quad S = \sin \theta, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 C^2, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

Presentamos la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist. Considerando los campos coordenados  $\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi$ , tenemos los siguientes coeficientes no nulos de la métrica  $g$ :

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \frac{2Mr}{\rho^2} - 1, \\ g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta}, \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2, \\ g_{\varphi\varphi} &= S^2 \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 S^2}{\rho^2} \right], \\ g_{t\varphi} = g_{\varphi t} &= \frac{-2MraS^2}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Así, el elemento de línea de la métrica de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist es:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + 2g_{\varphi t}d\varphi dt.$$

Dados  $M, a > 0$ , la variedad  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$  con la métrica anterior se le llamará informalmente espaciotiempo de Kerr, aunque esto representa en realidad la familia de espaciotiempos de Kerr. Este nombre adquirirá carácter formal a lo largo de esta tesis, pero por lo pronto es un buen apodo. Ahora se harán unos comentarios importantes acerca de los espaciotiempos de Kerr y las coordenadas de Boyer-Lindquist.

**Observación 2.1.** Al detener el giro (fijando  $a = 0$ ), las funciones  $\rho^2$  y  $\Delta$  toman la forma  $\rho^2 = r^2$  y  $\Delta = r^2 - 2Mr$ . Además, el término cruzado de la métrica de Kerr se anula ( $g_{t\varphi} = 0$ ). Por tanto, la matriz que representa a la métrica de Kerr es diagonal. A este espaciotiempo se le conoce como *espaciotiempo de Schwarzschild*.

**Observación 2.2.** Si además de detener el giro hacemos  $M = 0$ , la métrica resultante es la de Minkowski, el espaciotiempo más sencillo de todos, plano y en ausencia de cualquier efecto gravitacional.

**Observación 2.3.** Como la coordenada  $\theta$  aparece solamente bajo las funciones  $S^2$  y  $C^2$ , la métrica es invariante ante el cambio a la coordenada  $\theta$ , por  $\pi - \theta$  (o equivalentemente, por  $\theta - \pi$ ).

A continuación mencionamos dos propiedades importantes de los espaciotiempos de Kerr, aunque éstas no serán discutidas con más detalle.

**Observación 2.4.** Los espaciotiempos de Kerr son asintóticamente planos, es decir para radios muy grandes el espaciotiempo de Kerr es cada vez más similar al de Minkowski. Además, éstos son Ricci planos lo que significa que el tensor de Ricci, que resulta de contraer el tensor de curvatura, es siempre cero.

Los campos de Killing son una excelente forma de expresar la simetría de un espaciotiempo, ya que su flujo define una isometría.

**Proposición 2.5.** *Los campos canónicos  $\partial_t, \partial_\varphi$  son campos de Killing.*

*Demostración.* Por la proposición 1.24, se tiene que un campo vectorial  $X$  es de Killing si y solo si para cualesquiera campos  $V$  y  $W$  se tiene:

$$Xg(V, W) = g([X, V], W) + g(V, [X, W]).$$

En el caso de que  $X$  sea un campo básico coordinado, digamos  $\partial_i$  entonces, considerando el sistema coordinado de Boyer-Lindquist  $\psi$ , tenemos que en  $U$ , dominio de  $\xi$ :

$$\left[ \partial_i, \sum_j V^j \partial_j \right] = \sum_j [\partial_i, V^j \partial_j] = \sum_j \partial_i V^j \partial_j$$

ya que para todo  $i, j \in \{t, r, \theta, \varphi\}$ ,  $[\partial_i, \partial_j] = 0$ . Así, tenemos que en  $U$ :

$$\begin{aligned} g([\partial_i, V], W) &= g\left(\sum_j \partial_i V^j \partial_j, \sum_k W^k \partial_k\right) \\ &= \sum_{j,k} W^k \partial_i V^j g(\partial_j, \partial_k) \\ &= \sum_{j,k} W^k \partial_i V^j g_{jk}. \end{aligned}$$

Por tanto, invirtiendo los papeles de  $V$  y  $W$  obtenemos otra ecuación similar, que al sumarla con la primera se obtiene,

$$g([\partial_i, V], W) + g(V, [\partial_i, W]) = \sum_{j,k} \partial_i (V^j W^k) g_{jk}, \text{ en } U.$$

Note que también se usó la identidad de Leibniz en el lado derecho de la igualdad anterior. Por otro lado, tenemos que, también en  $U$ :

$$\begin{aligned} \partial_i g(V, W) &= \partial_i g\left(\sum_j V^j \partial_j, \sum_k W^k \partial_k\right) \\ &= \sum_{jk} \partial_i [V^j W^k g(\partial_j, \partial_k)] \\ &= \sum_{jk} [\partial_i (V^j W^k) g_{jk} + V^j W^k \partial_i g_{jk}]. \end{aligned}$$

Finalmente, de todo lo anterior dados  $V$  y  $W$  campos vectoriales entonces,

$$\partial_i g(V, W) = g([\partial_i, V], W) + g(V, [\partial_i, W])$$

si y solo si

$$\sum_{jk} V^j W^k \partial_i g_{jk} = 0.$$

Como los campos  $V$  y  $W$ , y la vecindad  $U$ , fueron arbitrarios, tenemos que  $\partial_i$  es de Killing si y solo si, para todo  $j, k \in \{t, r, \theta, \varphi\}$ ,  $\partial_i g_{jk} = 0$ . Como las variables  $t$  y  $\varphi$  no aparecen en las expresiones de la métrica, se tiene el resultado deseado.  $\square$

El resultado anterior asegura que los flujos locales de  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$  son isometrías. Esto es, las aplicaciones  $t \mapsto t + \varepsilon$  y  $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon'$  son isometrías para  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  suficientemente pequeñas. Se puede pensar que la geometría del agujero negro de Kerr es invariante bajo traslaciones pequeñas en  $\varphi$  y  $t$ .

Lo anterior es fácilmente mostrado a partir del hecho que los campos en cuestión son básicos: Considerando el sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist  $\xi$  de dominio  $U$ , entonces en dicho dominio:

$$\partial_i = (\xi^{-1})_* e_i$$

donde los campos  $e_i$  son los campos constantes canónicos de  $\mathbb{R}^4$ . Así, si  $\Psi_s$  es el flujo de  $\partial_i$ , y  $\Phi_s$  es el flujo del campo canónico coordinado constante  $e_i$  en  $\xi(U) \subset \mathbb{R}^4$ , entonces:

$$\Psi_s = \xi^{-1} \circ \Phi_s \circ \xi.$$

Es decir, dado  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  y  $p \in U$  se tiene que  $\Psi_s(p)$  está dado por:

$$p \mapsto (t, r, \theta, \varphi) \mapsto (t + s, r, \theta, \varphi) \mapsto \xi^{-1}((t + s, r, \theta, \varphi))$$

en el caso  $i = t$ ; cualquier otro caso es análogo. Por eso es conveniente abreviar estas isometrías como  $t \mapsto t + \varepsilon$ , esto no genera ambigüedad siempre y cuando se trabaje en la región de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$  en donde las coordenadas de Boyer-Lindquist estén bien definidas.

## 2.2. Dominio de Boyer-Lindquist

A continuación, se precisarán los lugares donde las coordenadas de Boyer-Lindquist no están bien definidas.

**Observación 2.6.** Las coordenadas de Boyer-Lindquist fallan en el *eje de rotación definido por*  $\mathbb{E} : S = \sin \theta = 0$ . En esencia, esto se debe a la falla de las coordenadas esféricas en los polos, y se abordará en la siguiente sección. También ocurre que las componentes de la métrica de Kerr en estas coordenadas se indeterminan en  $\Delta = 0$  y  $\rho^2 = 0$ .

1. Fijando nuestra atención en la condición  $\Delta = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{\Delta = 0\} = \{r^2 - 2Mr + a^2 = 0\} \\ &= \{r = r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \{r = r_+ = M + (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\} \sqcup \{r = r_- = M - (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \mathcal{H}_- \sqcup \mathcal{H}_+, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{H}_\pm := \{r = r_\pm\}$ .

2. Ahora, la condición  $\rho^2 = 0$  se traduce en:

$$\begin{aligned}\Sigma &:= \{\rho^2 = 0\} = \{r^2 + a^2 C^2 = 0\} \\ &= \{r = 0, C = \cos \theta = 0\} \\ &= \left\{r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}\right\}.\end{aligned}$$

**Observación 2.7.** Haciendo uso de la Observación 2.1, notamos que en  $a = 0$  (Schwarzschild)  $\mathcal{H}_- = \Sigma : r = 0$  y  $\mathcal{H}_+ : r = 2M$  por lo que el espaciotiempo de Schwarzschild tiene un solo horizonte<sup>2</sup>.

El lector debe notar que la variedad de Lorentz introducida aún no cumple con las condiciones de ser un espaciotiempo, ya que no se ha dado una orientación temporal. Peor aún, la variedad  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 \setminus (\Sigma \cup \mathcal{H})$  ni siquiera es conexas. Primero es importante introducir identidades que nos serán de gran utilidad a lo largo de esta tesis.

## 2.3. Identidades importantes

**Lema 2.8.** *Las componentes de la métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist satisfacen:*

$$g_{\varphi\varphi} + aS^2 g_{\varphi t} = (r^2 + a^2)S^2, \quad (2.1)$$

$$g_{\varphi t} + aS^2 g_{tt} = -aS^2, \quad (2.2)$$

$$ag_{\varphi\varphi} + (r^2 + a^2)g_{\varphi t} = \Delta aS^2, \quad (2.3)$$

$$ag_{\varphi t} + (r^2 + a^2)g_{tt} = -\Delta. \quad (2.4)$$

*Demostración.* (2.1)

$$\begin{aligned}g_{\varphi\varphi} + aS^2 g_{\varphi t} &= S^2 \left( r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 S^2}{\rho^2} \right) + aS^2 \left( \frac{-2MraS^2}{\rho^2} \right) \\ &= S^2(r^2 + a^2) + \frac{1}{\rho^2} (2Mra^2 S^4 - 2Mra^2 S^4).\end{aligned}$$

(2.2)

$$g_{\varphi t} + aS^2 g_{tt} = \frac{-2MraS^2}{\rho^2} + aS^2 \left( \frac{2Mr}{\rho^2} - 1 \right) = -aS^2.$$

---

<sup>2</sup>El radio  $r = 2M$  es llamado el radio de Schwarzschild, expresado en unidades geométricas.

(2.3)

$$\begin{aligned}
ag_{\varphi\varphi} + (r^2 + a^2)g_{\varphi t} &= aS^2 \left( r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2S^2}{\rho^2} \right) + (r^2 + a^2) \left( \frac{-2MraS^2}{\rho^2} \right) \\
&= aS^2 \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} (a^2(S^2 - 1) - r^2) \right] \\
&= aS^2 \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} (-\rho^2) \right] \\
&= aS^2 \Delta.
\end{aligned}$$

(2.4)

$$\begin{aligned}
ag_{\varphi t} + (r^2 + a^2)g_{tt} &= a \left( \frac{-2MraS^2}{\rho^2} \right) + (r^2 + a^2) \left( \frac{2Mr}{\rho^2} - 1 \right) \\
&= -(r^2 + a^2) + \frac{2Mr}{\rho^2} (r^2 + a^2 - a^2S^2) \\
&= -(r^2 + a^2) + 2Mr \\
&= -\Delta. \quad \square
\end{aligned}$$

Las identidades anteriores pueden expresarse como un producto de vectores especiales.

**Definición 2.9.** Los campos vectoriales canónicos de Kerr están dados por

$$V = (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi, \quad W = \partial_\varphi + aS^2\partial_t.$$

A la luz del Lema 2.8 tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
g(V, \partial_\varphi) &= \Delta aS^2, & g(V, \partial_t) &= -\Delta, \\
g(W, \partial_\varphi) &= (r^2 + a^2)S^2, & g(W, \partial_t) &= -aS^2.
\end{aligned}$$

**Lema 2.10.** *Los campos canónicos cumplen:*

$$g(V, V) = -\Delta\rho^2, \quad g(W, W) = \rho^2S^2, \quad g(V, W) = 0.$$

*Demostración.* Para la primera afirmación,

$$\begin{aligned}
g(V, V) &= g(V, (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi) = (r^2 + a^2)g(V, \partial_t) + ag(V, \partial_\varphi) \\
&= (r^2 + a^2)(-\Delta) + a(\Delta aS^2) = \Delta[-r^2 - a^2(S^2 - 1)] = -\Delta\rho^2.
\end{aligned}$$

Para la segunda,

$$\begin{aligned}
g(W, W) &= g(W, \partial_\varphi + aS^2\partial_t) = g(W, \partial_\varphi) + aS^2g(W, \partial_t) \\
&= (r^2 + a^2)S^2 - a^2S^4 = S^2[r^2 + a^2(1 - S^2)] = S^2\rho^2.
\end{aligned}$$

Para la tercera,

$$\begin{aligned}
g(V, W) &= g(V, \partial_\varphi + aS^2\partial_t) = g(V, \partial_\varphi) + aS^2g(V, \partial_t) \\
&= \Delta aS^2 + aS^2(-\Delta) = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

El siguiente resultado asegura que, fuera del eje (i.e.,  $S \neq 0$ ), la matriz  $(g_{ij})_{ij}$  es no degenerada en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 \setminus (\Sigma \cup \mathcal{H})$ .

**Lema 2.11.**  $\det(g_{ij}) = -\rho^4 S^2$ .

*Demostración.*

$$\det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\varphi} \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{\varphi t} & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = \frac{\rho^4}{\Delta} (g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2).$$

De lo anterior, basta analizar la expresión  $g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2$ :

$$\begin{aligned} g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2 &= \left( \frac{2Mr}{\rho^2} - 1 \right) \left( r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2S^2}{\rho^2} \right) S^2 - \frac{4M^2r^2a^2S^4}{\rho^4} \\ &= \frac{2Mra}{\rho^2} S^2 + \frac{2Mr^3}{\rho^2} S^2 - a^2 - r^2 - \frac{2Mra^2S^2}{\rho^2} S^2 \\ &= S^2 \left[ -a^2 - r^2 + \frac{2Mr(r^2 + a^2 - a^2S^2)}{\rho^2} \right] = S^2(-\Delta). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\det(g_{ij}) = -\rho^4 S^2$ . □

Esto concluye el capítulo; hemos delimitado las regiones donde las coordenadas de Boyer-Lindquist funcionan bien, y nombrado aquellas en donde no. También, he presentado identidades que serán usadas a lo largo de la tesis. En el siguiente capítulo veremos cómo las regiones presentadas hasta ahora cambian al variar el parámetro  $a$ , dejando fija la masa  $M$ .



## Capítulo 3

# Bloques de Boyer-Lindquist

Como fue discutido en el capítulo anterior, los conjuntos problemáticos para la métrica en las coordenadas de Boyer-Lindquist son, precisamente,  $\mathcal{H}$ ,  $\Sigma$  y el eje de rotación. Los conjuntos  $\mathcal{H}_{\pm}$  son conocidos como *horizontes*, mientras que  $\Sigma$  es la famosa *singularidad*. A continuación se harán observaciones importantes de los horizontes y la singularidad.

**Observación 3.1.** Para  $a > 0$ ,  $\Sigma$  está definida por dos ecuaciones:  $r = 0$  y  $\cos \theta = 0$ . El conjunto  $\Sigma$  está, por tanto, parametrizado por las coordenadas  $(t, \varphi)$ . Dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  podemos notar que  $\Sigma_0 = \{t = t_0, r = 0, \theta = \pi/2\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$  es un anillo ya que la única coordenada libre es  $\varphi$  que parametriza a un círculo. Por esto,  $\Sigma$  es llamada *singularidad de anillo*, y aparece como una consecuencia del giro: Fijando  $a = 0$ , se tiene que  $\rho^2 = r^2$ ; por tanto,  $\Sigma$  es parametrizada por  $(t, \theta, \varphi)$ ; si tomamos nuevamente una sección temporal podemos ver claramente la existencia de una esfera topológica a través del tiempo.

### 3.1. Clasificación de la métrica de Kerr

Los horizontes  $\mathcal{H}_{\pm}$  están definidos por las raíces del polinomio  $\Delta$ . Los tres casos que surgen del estudio del discriminante, más el caso  $a = 0$  dan pie a una clasificación muy natural de los espaciotiempos de Kerr que depende de la relación entre la masa y el giro. Al variar el parámetro de giro  $a$ , dejando fijo el parámetro de masa  $M$ , se obtienen las siguientes métricas:

<b>Schwarzschild</b>	$a = 0$
<b>Kerr lento</b>	$0 < a^2 < M^2$
<b>Kerr extremo</b>	$a^2 = M^2$
<b>Kerr rápido</b>	$M^2 < a^2$

Podemos notar las primeras cualidades de éstas, observando la forma general de las raíces del polinomio  $\Delta$ :

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}.$$



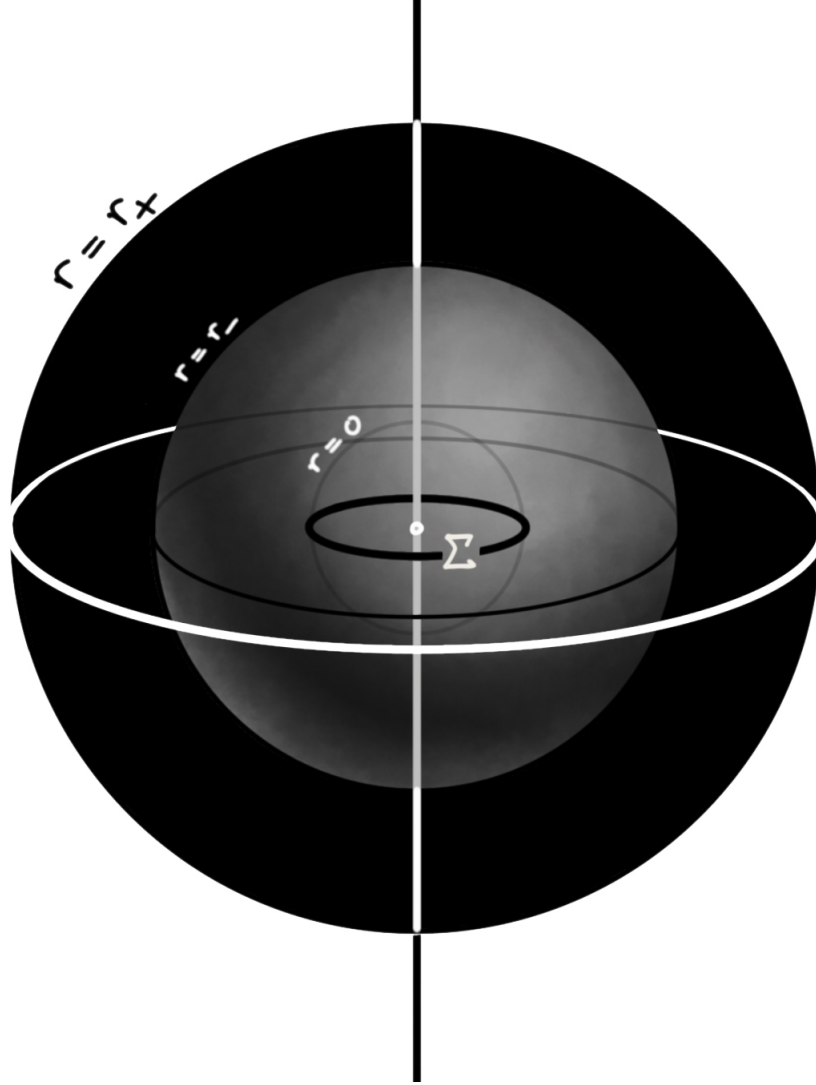


Figura 3.1: Una forma de visualizar un espacio-tiempo de Kerr es fijando la coordenada  $t = t_0$ . Así,  $\{t_0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , a través del homeomorfismo  $(r, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \mapsto e^r p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , donde se está considerando a  $\mathbb{S}^2$  como la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ . Esta figura hace uso de este homeomorfismo, muestra un espacio-tiempo de Kerr lento ( $a^2 < M^2$ ) con la condición  $t = t_0$ . Se pueden apreciar dos horizontes que dividen a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$  en tres regiones:  $\{r > r_+\}$ ,  $\{r_+ < r < r_-\}$  y  $\{r < r_-\}$ . Ambos horizontes están del lado  $r > 0$  y la singularidad de anillo  $\Sigma$  yace sobre la esfera topológica  $r = 0$ .

El espaciotiempo de Schwarzschild presenta un único horizonte  $\mathcal{H} : r = 2M$ , ya que una de las raíces coincide con la singularidad ( $r = 0$ ). Por otro lado, si aumentamos el giro un poco, vemos que en el caso Kerr lento se presentan dos horizontes, fruto de las dos raíces de multiplicidad uno del polinomio  $\Delta$ , a saber,

$$\mathcal{H}_{\pm} : r = M \pm (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Notemos que el único horizonte en el caso de Schwarzschild está posicionado a un radio mayor, comparado con el horizonte exterior  $\mathcal{H}_+$  del caso Kerr lento, es decir si  $a^2 < M^2$  entonces:

$$2M > M + (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Esto muestra que el horizonte cambia de posición en presencia de rotación. Pareciera que la rotación del espaciotiempo de Kerr ‘comprime’ los horizontes, al menos, en comparación al caso Kerr lento, como mostraremos a continuación.

Partiendo de un espaciotiempo de Kerr lento ( $a^2 < M^2$ ), podemos aumentar el parámetro de giro ( $a$ ), vemos que los horizontes  $\mathcal{H}_{\pm}$  se acercan uno al otro, hasta llegar a una velocidad crítica de giro ( $a^2 = M^2$ ), en donde los horizontes colapsan [ $(M^2 - a^2) \rightarrow 0$  si  $a \rightarrow M$ ]. Aquí,  $\Delta$  presenta una raíz de multiplicidad dos dada por  $r = M$ , lo que produce un solo horizonte. Es decir, el caso Kerr extremo presenta dos horizontes forjados en uno.

Finalmente, el caso Kerr rápido  $\Delta$  no tiene raíces reales. ¡No hay horizontes! Se dice que hay una ‘singularidad desnuda’ ya que no hay horizonte que cubra a la singularidad del exterior. Asombrosamente, hasta el día de hoy no se ha observado un agujero negro con una singularidad desnuda. La Hipótesis de Censura Cósmica fue desarrollada por Roger Penrose y predice que es imposible que existan singularidades sin ningún horizonte que las cubra (puede consultar [Wald, 2010]). Una de las razones por las cuales esta hipótesis es aceptada son las implicaciones causales. En el último capítulo de esta tesis veremos que en la región más interior de los espaciotiempos de Kerr existe una ‘máquina del tiempo’ que en el caso de Kerr rápido estará causalmente conectada con la región más exterior.

Ahora presentaremos los bloques de Boyer-Lindquist. Como hemos visto, es necesario (por ahora) eliminar a los horizontes para tener una métrica bien definida. Como consecuencia, la variedad en donde sí están definidas las coordenadas se desconecta en dos o más componentes conexas, dependiendo del parámetro de giro.

## 3.2. Bloques de Boyer-Lindquist

**Definición 3.2.** Los bloques de Boyer-Lindquist están definidos como las componentes conexas de  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2) \setminus \Sigma \cup \mathcal{H}$  separadas por los horizontes, éstas están dadas por restricciones a la coordenada radial de Boyer-Lindquist:

1. En el caso Kerr lento, donde admite dos horizontes dados por  $r_{\pm}$ ,

$$\mathbf{I} : r > r_+$$

$$\mathbf{II} : r_- < r < r_+$$

$$\mathbf{III} : r < r_-$$

2. En Kerr extremo, donde  $r_{\pm} = M$ ,

$$\mathbf{I} : r > M$$

$$\mathbf{III} : r < M$$

3. En el caso Kerr rápido, donde no hay horizontes.

$$\mathbf{I} = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2) \setminus \Sigma$$

En el caso extremo, el bloque **II** está totalmente aplastado por los horizontes, es decir es vacío. En el caso rápido, la ausencia de horizontes hace que los bloques **I** y **III** sean indistinguibles uno del otro, es decir  $\mathbf{I} = \mathbf{III}$ . **Por lo que es conveniente pensar que los tres bloques están presentes en cualquier caso.** La separación en tres bloques solo es totalmente apreciable en el caso lento, cuando la rapidez de giro no ha degenerado ningún bloque, o no ha hecho desaparecer ningún horizonte.

Una ventaja de las coordenadas de Boyer-Lindquist, es que al hacer el parámetro de giro igual a cero, obtenemos el espaciotiempo de Schwarzschild. A pesar de esto, el espaciotiempo de Schwarzschild es excluido de la familia de espaciotiempos de Kerr y será analizado de manera independiente. La razón no será justificada totalmente en esta tesis, aunque el lector podrá ser observador y notar el uso de la hipótesis  $a > 0$  en la prueba de algunos resultados, especialmente en el capítulo 6.<sup>1</sup>

## Falla de las coordenadas sobre el eje

Ahora, abordaré el problema de la falla sobre el eje de giro  $\mathbb{E} : S = 0$  que le ocurre a la métrica, expresada en coordenadas de Boyer-Lindquist. Recordemos que el elemento de línea de la esfera unitaria es:  $d\Omega^2 = d\theta^2 + S^2 d\varphi^2$ .

**Lema 3.3.** *En la 2-esfera unitaria ( $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ) sin los polos  $(0, 0, \pm 1)$ , se tiene que:*

$$g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = \rho^2 d\Omega^2 + \left(1 + \frac{2Mr}{\rho^2}\right) a^2 S^4 d\varphi^2.$$

<sup>1</sup>Resulta ser que la singularidad presenta un problema de la variedad misma, no de las coordenadas, por lo que la desconexión de bloque es irremediable. Roger Penrose mostró que las llamadas singularidades provocan que los espaciotiempos que las contengan sean geodésicamente incompletos. Puede consultar [Poisson, 2002] y [O'Neill, 2014].

*Demostración.* Sustituyendo las expresiones explícitas de la métrica del lado izquierdo, obtenemos:

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 &= \rho^2 d\theta^2 + S^2 \left( r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{\rho^2} S^2 \right) d\varphi^2 \\ &= \rho^2 (d\theta^2 + S^2 d\varphi^2) + S^4 \left( a^2 + \frac{2Mr a^2}{\rho^2} \right) d\varphi^2 \\ &= \rho^2 d\Omega^2 + \left( 1 + \frac{2Mr}{\rho^2} \right) a^2 S^4 d\varphi^2. \quad \square \end{aligned}$$

El elemento de línea de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist está dado por:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + 2g_{\varphi t}d\varphi dt.$$

Con ayuda del lema 3.3, el problema de extender la métrica de Kerr sobre el eje de giro se reduce a extender la métrica de la 2-esfera euclidiana sobre los polos.

**Corolario 3.4.** *La métrica de Kerr restringida al eje de giro  $\mathbb{E}$  ( $S = 0$ ) en coordenadas de Boyer-Lindquist se expresa como:*

$$ds^2|_{\mathbb{E}} = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + \rho^2 d\Omega^2.$$

*Demostración.* Primero, notemos que si  $S = 0$  entonces  $g_{\varphi t} = 0$ . De esta forma, el lema anterior nos permite ver claramente que en el eje  $\mathbb{E}$ ,

$$g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = \rho^2 d\Omega^2,$$

lo que implica que el elemento de línea de la métrica de Kerr toma la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + \rho^2 d\Omega^2. \quad \square$$

Ya que,  $\rho^2$ , ni  $g_{tt}$ , ni  $g_{rr}$  se anulan en el eje, la métrica de Kerr es no degenerada en  $\mathbb{E}$ , si y solo si,  $d\Omega^2$  es no degenerado en los polos. Por tanto, aunque las coordenadas de Boyer-Lindquist no cubren el eje  $\mathbb{E}$ , la métrica de Kerr sí está bien definida en  $\mathbb{E}$ .

Hasta ahora tenemos, virtualmente, tres variedades de Lorentz de dimensión cuatro: a saber los bloques **I**, **II** y **III**. La naturaleza causal de estas variedades de Lorentz está determinada por el carácter causal de los campos vectoriales coordenados y los canónicos  $V$  y  $W$ .

## Propiedades de los bloques

**Teorema 3.5.** *Excluyendo el eje de rotación  $\mathbb{E}$ , se tiene que:*

1.  $\partial_\theta$  y  $W$  siempre son tipo espacio,
2.  $\partial_r$  es tipo espacio en **I**  $\cup$  **III** y es tipo tiempo en **II**,

3.  $V$  es tipo tiempo en  $\mathbf{I} \cup \mathbf{III}$  y tipo espacio en  $\mathbf{II}$ .

Más aún, los campos vectoriales  $\{\partial_\theta, \partial_r, V, W\}$  son ortogonales dos a dos.

*Demostración.* La prueba es consecuencia directa del lema 2.10 y de la forma explícita de las componentes de la métrica; también es importante recordar que  $\rho^2 > 0$ .

1.

$$g(\partial_\theta, \partial_\theta) = g_{\theta\theta} = \rho^2 > 0$$

$$g(W, W) = \rho^2 S^2 > 0$$

2.

$$g_{rr} = g(\partial_r, \partial_r) = \frac{\rho^2}{\Delta} \Rightarrow \text{sgn}(g_{rr}) = \text{sgn}(\Delta)$$

3.

$$g(V, V) = -\Delta\rho^2 \Rightarrow \text{sgn}(g(V, V)) = -\text{sgn}(\Delta)$$

Ahora, como  $\Delta > 0$  en  $\mathbf{I} \cup \mathbf{III}$  y  $\Delta < 0$  en  $\mathbf{II}$  se tiene el carácter causal afirmado en el teorema.

Finalmente, como  $g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = g_{\theta t} = 0$  entonces, los vectores  $\partial_r, \partial_\theta$  son ortogonales entre sí y ambos son ortogonales tanto a  $\partial_t$  como a  $\partial_\varphi$ . Por tanto, como  $V$  y  $W$  están generados por  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$ , y por el lema 2.8,  $g(V, W) = 0$ . Esto finaliza la prueba del teorema.  $\square$

El teorema muestra de manera explícita que los tres bloques de Boyer-Lindquist son orientables en el sentido temporal, sin embargo esta orientación temporal será usada exclusivamente para los bloques  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{III}$ . El bloque  $\mathbf{II}$  será dotado de una orientación temporal más adelante, cuando hayamos unido todos los bloques en un solo espaciotiempo.

**Observación 3.6.** Como el lector habrá notado, la gran ventaja de los vectores canónicos  $V$  y  $W$  es que conservan su carácter causal en cada bloque, contrario al caso de  $\partial_\varphi$  y  $\partial_t$ . A continuación se puntualizará este fenómeno. Excluyendo al eje  $\mathbb{E}$ :

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi} > 0 &\Leftrightarrow S^2 \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 S^2}{\rho^2} \right] > 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 S^2}{\rho^2} > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, para  $r > 0$ ,  $\partial_\varphi$  es espacial. Además, si  $r \rightarrow -\infty$  entonces,

$$\frac{2Mr a^2 S^2}{\rho^2} \rightarrow 0$$

por lo que para  $r \ll -1$ ,  $\partial_\varphi$  es espacial. Por otro lado, la componente de la métrica  $g_{t\varphi}$  en  $\theta = \pi/2$  toma la forma

$$r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2}{r^2} = r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r},$$

que cuando  $r$  se acerca a 0 por la izquierda, esta componente tiende a  $-\infty$ . Lo que prueba que para  $\theta = \pi/2$  es posible tomar  $r < 0$  con  $|r|$  lo suficientemente pequeño para que  $\partial_\varphi$  sea temporal.

Por otro lado,  $g_{rt} = g(\partial_r, \partial_t) = 0$ , es decir  $\partial_r$  y  $\partial_t$  son ortogonales. Como  $\partial_r$  es tipo tiempo en **II**, se tiene que  $\partial_t$  es tipo espacio en **II**. El carácter causal de  $\partial_t$  en los bloques **I** y **III** varía. Note que cuando  $|r| \rightarrow \infty$ ,

$$g_{tt} \rightarrow -1$$

Por lo que para  $|r| \gg 0$  el carácter causal de  $\partial_t$  es temporal. Es importante notar que el carácter causal de  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$  analizado aquí se conserva en el eje, ya que  $\partial_\varphi(p) = 0$  si y solo si  $p \in \mathbb{E}$ , esto es consecuencia de la falla de coordenadas esféricas en los polos de la esfera. Finalmente, la componente de la métrica  $g_{tt}$  no se ve afectada por la condición  $S = 0$ . Así las cosas, vemos que hay regiones en **I** y **III**, tales que  $g_{tt} > 0$ :

$$g_{tt} = -1 + \frac{2Mr}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2}(r^2 - 2Mr + C^2 a^2) > 0 \Leftrightarrow r \in (b_-, b_+)$$

donde  $b_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - C^2 a^2}$ . La región delimitada por  $r = b_\pm$  es llamada *ergoesfera* y será analizada más adelante.

Del teorema 3.5 y las observaciones anteriores podemos dar una interpretación razonable por bloque.

*Bloque I.* Este bloque es llamado exterior de Kerr. Desde nuestra perspectiva ( $r \gg 0$ ), este primer bloque representa nuestro lado del universo, respecto al agujero negro. En el exterior de Kerr, las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  pueden ser interpretadas como la intuición indica, es decir,  $t$  mide el tiempo y el resto representa al espacio en coordenadas esféricas. Esta interpretación solo es válida cuando  $\partial_t$  es un campo temporal, es decir, para  $r$  suficientemente grande. También es importante notar que la orientación temporal que impone el campo canónico  $V$  es consistente con la interpretación anterior, ya que  $V$  y  $\partial_t$  yacen en el mismo cono temporal: Por el Corolario 1.38:

$$g(V, \partial_t) = -\Delta < 0, \quad \text{en } \mathbf{I} \cup \mathbf{III}.$$

*Bloque II.* Este bloque está encerrado entre los dos horizontes. Aquí la interpretación se vuelve turbia ya que  $t$  ahora es una coordenada espacial y  $r$  una coordenada temporal. De aquí la celebre frase ‘el espacio y el tiempo cambian de lugar’. En el capítulo 6 se volverá más clara la geometría de este fenómeno.

*Bloque III.* En este bloque, los campos vectoriales del teorema 3.5 adquieren la misma naturaleza causal que en el exterior de Kerr. Más aún, la región contenida en **III**, definida por  $g_{tt} < 0$ , carga con la interpretación de las coordenadas

de Boyer-Lindquist análoga a la del primer bloque, con la excepción de que, ahora,  $-r$  mide la distancia al centro. También veremos que, en el bloque **III**, la gravedad repele en lugar de atraer. Es por eso que, el bloque **III** es conocido como el lado del agujero blanco, ya que alguien en este bloque podría presenciar un fenómeno opuesto (gravitacionalmente) al que nosotros podríamos observar.

### 3.3. Espaciotiempos de Kerr

Ahora que tenemos una buena idea del comportamiento de cada bloque, podemos dar una definición formal que integra los conceptos vistos hasta ahora.

**Definición 3.7.** Un *espaciotiempo de Kerr* es una variedad suave  $K$  con estructura de espaciotiempo tal que satisface lo siguiente:

1. Una unión disjunta (finita) de bloques de Boyer-Lindquist es densa en  $K$ .
2. Existen funciones suaves  $\tilde{r}$  y  $\tilde{C}$  en  $K$ , tales que en cada bloque de Boyer-Lindquist coinciden con  $r$  y  $C = \cos\theta$ , respectivamente. (Se omitirá la tilde de ahora en adelante).
3. Existe una única isometría  $\epsilon : K \rightarrow K$ , llamada *isometría ecuatorial*, tal que la restricción en cada bloque de Boyer-Lindquist mapea la coordenada  $\theta$  a  $\pi - \theta$ , dejando el resto de las coordenadas sin cambios.
4. Existen dos campos de Killing únicos (salvo múltiplos escalares)  $\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_\varphi$  en  $K$  tales que restringidos a cada bloque de Boyer-Lindquist, coinciden con los campos coordenados  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$ , respectivamente.

En particular, los bloques de Boyer-Lindquist son espaciotiempos, ya que el teorema 3.5 muestra de manera explícita que cada bloque es (temporalmente) orientable. Note que, las funciones  $\Delta$  y  $\rho^2$ , y los campos canónicos  $V$  y  $W$  están bien definidos; esto es asegurado por los puntos 2 y 4 de la definición anterior.

**Definición 3.8.** Dado un espaciotiempo de Kerr  $K$ ,

1. El eje de giro  $\mathbb{E} = \mathbb{E}(K)$  es el conjunto de ceros del campo de Killing  $\tilde{\partial}_\varphi$ ,  $\mathbb{E} = \{p \in K : \tilde{\partial}_\varphi = 0\}$ .
2. El plano ecuatorial  $Eq = Eq(K)$  es el conjunto de puntos fijos de la isometría ecuatorial  $\epsilon$ .

Por los resultados 1.28 y 1.29, el eje  $\mathbb{E}$  y el plano ecuatorial  $Eq$  son subvariedades cerradas totalmente geodésicas de  $K$ . Esto implica que, si una geodésica de Kerr  $\gamma$  es tangente en un punto al eje  $\mathbb{E}$ , o al plano ecuatorial  $Eq$  entonces,  $\gamma$  es siempre tangente a  $\mathbb{E}$  o  $Eq$ , respectivamente. También es importante notar que, en general, el eje  $\mathbb{E}$  tiene dos componentes conexas dadas por  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , que son isométricas bajo  $\epsilon$ . Finalmente, para  $|r|$  suficientemente grande,  $\mathbb{E}$  es precisamente el eje de rotación del agujero negro de Kerr.

## Capítulo 4

# Ecuaciones geodésicas

El objetivo principal de este capítulo es encontrar un sistema de ecuaciones para las geodésicas de Kerr; la herramienta principal son las primeras integrales de las ecuaciones geodésicas. Recuerde que, dado un campo vectorial  $X$  sobre una variedad suave  $M$ , una primera integral  $f$  es una función de la variedad en los reales tal que  $f$  es constante a lo largo de las curvas integrales de  $X$ . Las primeras integrales de las ecuaciones geodésicas son primeras integrales del flujo geodésico sobre la variedad  $TM$ . A continuación se precisará esta definición.

### Primeras integrales

Una *primera integral de las ecuaciones geodésicas* (o simplemente, primera integral) sobre una variedad semi-riemanniana  $M$  es una función  $k : TM \rightarrow \mathbb{R}$  tal que es constante a lo largo de geodésicas, es decir, para cada geodésica  $\gamma$ , la aplicación  $s \mapsto k(\gamma(s), \gamma'(s))$  es constante. Una primera observación es que la asignación de constantes  $\gamma \mapsto k(\gamma)$  determina por completo a  $k$ : Para cada punto  $p \in M$  y  $v \in T_p M$  existe una única geodésica (de dominio maximal)  $\gamma_v$  que pasa por  $p$  y con velocidad  $v \in T_p M$ . Por tanto, la aplicación  $v \mapsto k(\gamma_v)$  determina la primera integral  $k$ . Para aligerar la notación, escribiremos  $k(\gamma)$  en lugar de  $k(\gamma(s), \gamma'(s))$ .

La siguiente definición explota el hecho que, dado un campo de Killing  $X$  y una geodésica  $\gamma$ , la función  $s \mapsto g(X(\gamma(s)), \gamma'(s))$  es constante, es decir, cada campo de Killing define una primera integral (vea la proposición 1.25).

**Definición 4.1.** Dada una geodésica  $\gamma$  en un espaciotiempo de Kerr, presentamos las primeras integrales definidas por:

1. La constante  $\mathbf{E}(\gamma) = -g(\gamma'(s), \tilde{\partial}_t(\gamma(s)))$  es la *energía*.
2. La constante  $\mathbf{L}(\gamma) = g(\gamma'(s), \tilde{\partial}_\varphi(\gamma(s)))$  es el *momento angular* alrededor del eje de rotación.

Teniendo bien clara la definición anterior, se escribirá  $\mathbf{E}(\gamma) = -g(\gamma', \tilde{\partial}_t)$  y  $\mathbf{L}(\gamma) = g(\gamma', \tilde{\partial}_\varphi)$ .



Los nombres de estas primeras integrales son consecuencia de su interpretación para el caso de geodésicas temporales, para  $r$  suficientemente grande (en el bloque **I**). Físicamente, las geodésicas temporales representan partículas en caída libre, es decir con velocidad constante (ver la discusión posterior a la definición 1.21). Es importante recalcar que las primeras integrales serán usadas para todo el espaciotiempo de Kerr y para geodésicas de cualquier carácter causal.

Consideramos  $\gamma$  una geodésica de Kerr arbitraria; i.e., una geodésica en un espaciotiempo de Kerr. Entonces, haciendo uso de las coordenadas podemos escribir:

$$\gamma' = t' \partial_t + r' \partial_r + \theta' \partial_\theta + \varphi' \partial_\varphi. \quad (4.1)$$

Recordemos que  $V = (r^2 + a^2) \partial_t + a \partial_\varphi$  y  $W = a S^2 \partial_t + a \partial_\varphi$ .

**Definición 4.2.** Sea  $\gamma$  una geodésica de Kerr. Definimos las siguientes funciones:

$$\mathbb{P} = -g(\gamma', V), \quad \mathbb{D} = g(\gamma', W).$$

**Observación 4.3.** Dada una geodésica de Kerr  $\gamma$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\gamma)$  y  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\gamma)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= -g(\gamma', V) \\ &= -g(\gamma', [r^2 + a^2] \partial_t + a \partial_\varphi) \\ &= -[(r^2 + a^2)g(\gamma', \partial_t) + ag(\gamma', \partial_\varphi)] \\ &= (r^2 + a^2)\mathbf{E} - a\mathbf{L} \end{aligned}$$

Es decir,  $\mathbb{P}$  solo es función de la coordenada radial  $r$  de la geodésica  $\gamma$ . Similarmente, veamos que  $\mathbb{D}$  es función de  $\theta$ .

$$\mathbb{D} = g(\gamma', W) = aS^2 g(\gamma', \partial_t) + g(\gamma', \partial_\varphi) = \mathbf{L} - aS^2 \mathbf{E},$$

por lo que podemos escribir:

$$\mathbb{P}(r) = (r^2 + a^2)\mathbf{E} - a\mathbf{L}, \quad \mathbb{D}(\theta) = \mathbf{L} - aS^2 \mathbf{E}.$$

Incluso, si  $\gamma$  no es una geodésica, las expresiones anteriores siguen siendo válidas. Pero la energía y el momento angular no necesariamente son constantes, por lo que (a priori) las funciones  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{P}$  dependen de todas las coordenadas de  $\gamma$ , a saber,  $(t, r, \theta, \varphi)$ .

## 4.1. Ecuaciones para $\varphi$ y $t$

**Teorema 4.4.** Dada una geodésica de Kerr  $\gamma$ , sus coordenadas de Boyer-Lindquist satisfacen

$$\begin{aligned} \rho^2 \varphi' &= \frac{\mathbb{D}}{S^2} + \frac{a\mathbb{P}}{\Delta}, \\ \rho^2 t' &= a\mathbb{D} + (r^2 + a^2) \frac{\mathbb{P}}{\Delta}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Un primer paso es expresar a las funciones  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{P}$  con ayuda de la expresión (4.1):

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &= g(\gamma', W) = g(t'\partial_t + r'\partial_r + \theta'\partial_\theta + \varphi'\partial_\varphi, W), \\ \mathbb{P} &= -g(\gamma', V) = g(t'\partial_t + r'\partial_r + \theta'\partial_\theta + \varphi'\partial_\varphi, V).\end{aligned}$$

Por el teorema 3.5,  $\{\partial_r, \partial_\theta, V, W\}$  es una familia ortogonal. Más aún, por las observaciones posteriores al lema 2.8 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &= \varphi'g(\partial_\varphi, W) + t'g(\partial_t, W) = \varphi'[(r^2 + a^2)S^2] + t'(-aS^2), \\ \mathbb{P} &= -[g(\partial_\varphi, V) + t'g(\partial_t, V)] = -\varphi'(\Delta aS^2) + t'(\Delta).\end{aligned}$$

Reescribiendo estas ecuaciones obtenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} r^2 + a^2 & -a \\ -aS^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}/S^2 \\ \mathbb{P}/\Delta \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema anterior es

$$r^2 + a^2 - a^2S^2 = \rho^2 > 0.$$

Así, podemos obtener un sistema para  $\varphi'$  y  $t'$ . Usaremos la identidad  $A^{-1} = \det(A)^{-1}A^T$ ; esto produce el sistema:

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ aS^2 & r^2 + a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{D}/S^2 \\ \mathbb{P}/\Delta \end{pmatrix}.$$

Esto finaliza la prueba del teorema.  $\square$

**Observación 4.5.** La ecuación para  $\varphi'$  del teorema anterior está bien definida en el eje  $\mathbb{E} : S = 0$ : si la geodésica  $\gamma$  toca el eje entonces  $\mathbf{L} = 0$ . Ya que  $\partial_\varphi = 0$  en el eje  $\mathbb{E}$ , por tanto  $\mathbb{D}/S^2 = -a\mathbf{E}$ .

Del teorema anterior, dadas las coordenadas  $r, \theta$  de una geodésica  $\gamma$ , podemos plantear un sistema de ecuaciones para  $\varphi'$  y  $t'$ .

## 4.2. Teorema de Carter

Resta encontrar ecuaciones para  $r$  y  $\theta$ , eso será una consecuencia del Teorema de Carter.

**Definición 4.6.** Dada una geodésica de Kerr  $\gamma$ , definimos la primera integral  $\mathfrak{q}$  dada por:

$$\mathfrak{q}(\gamma) = g(\gamma', \gamma').$$

**Lema 4.7.** Dada una geodésica de Kerr  $\gamma$  sus coordenadas de Boyer-Lindquist cumplen la siguiente identidad:

$$-\frac{1}{\Delta}\rho^4 r'^2 + \mathfrak{q}r^2 + \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} = \rho^4 \theta'^2 - \mathfrak{q}a^2 C^2 + \frac{\mathbb{D}^2}{S^2},$$

donde  $\mathbb{D} = \mathbf{L} - aS^2\mathbf{E}$  y  $\mathbb{P} = (r^2 + a^2)\mathbf{E} - a\mathbf{L}$ .

*Demostración.* Primero, notemos que, como  $\{\partial_r, \partial_\theta, V, W\}$  es una familia ortogonal (teorema 3.5) y  $\text{span}\{\partial_t, \partial_\varphi\} = \text{span}\{V, W\}$ , entonces existen  $c, d$  funciones reales tales que:

$$\gamma' = r'\partial_r + \theta'\partial_\theta + cV + dW.$$

Un cálculo directo muestra que:

$$g(\gamma', V) = g(V, V)c \quad \text{y} \quad g(\gamma', W) = g(W, W)d.$$

Por el lema 2.10, y de la definición de  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{P}$  obtenemos:

$$\gamma' = r'\partial_r + \theta'\partial_\theta + \frac{\mathbb{P}}{\Delta\rho^2}V + \frac{\mathbb{D}}{\rho^2S^2}W.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} &= g(\gamma', \gamma') \\ &= r'^2g(\partial_r, \partial_r) + \theta'^2g(\partial_\theta, \partial_\theta) + \left(\frac{\mathbb{P}}{\Delta\rho^2}\right)^2g(V, V) + \left(\frac{\mathbb{D}}{\rho^2S^2}\right)^2g(W, W) \\ &= r'^2\frac{\rho^2}{\Delta} + \theta'^2\rho^2 - \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta\rho^2} + \frac{\mathbb{D}^2}{\rho^2S^2}. \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia del lema 2.10 y la forma explícita de las componentes de la métrica. Lo anterior implica que:

$$\rho^2\mathfrak{q} = r'^2\frac{\rho^4}{\Delta} + \theta'^2\rho^4 - \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} + \frac{\mathbb{D}^2}{S^2}.$$

Expandiendo el lado izquierdo obtenemos:

$$r^2\mathfrak{q} + a^2C^2\mathfrak{q} = r'^2\frac{\rho^4}{\Delta} + \theta'^2\rho^4 - \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} + \frac{\mathbb{D}^2}{S^2}.$$

Un reordenamiento da el resultado deseado.  $\square$

La identidad correspondiente al lema anterior da una ecuación diferencial acoplada, para  $r$  y  $\theta$ . El lado derecho solo depende de  $\theta$ , mientras que el izquierdo depende tanto de  $r$  como de  $\theta$ . A priori, esto no es suficiente para concluir que ambas expresiones deben estar igualadas a una constante. Un resultado sumamente importante probado por Brandon Carter, en 1968, muestra que, en efecto, las expresiones sí son iguales a una constante.

**Teorema 4.8** (Carter). *Dada una geodésica de Kerr  $\gamma$  existe una constante asociada  $\mathcal{K}(\gamma) = \mathcal{K}$  tal que las coordenadas  $\theta$  y  $r$  de la geodésica  $\gamma$  satisfacen:*

$$\rho^4r'^2 = \mathbf{R}(r) = \Delta(\mathfrak{q}r^2 - \mathcal{K}) + \mathbb{P}^2, \quad (4.2)$$

$$\rho^4\theta'^2 = \mathbf{\Theta}(\theta) = \mathcal{K} + \mathfrak{q}a^2C^2 - \mathbb{D}^2/S^2. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Como es visto en un curso de geometría diferencial, las geodésicas pueden ser caracterizadas como los puntos críticos de la variación de la energía (ver [Bär, 2013]). Esto es equivalente a la ecuación de autoparalelismo,  $\frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0$ , y es comúnmente conocido como ‘la derivación lagrangiana de las ecuaciones de las geodésicas’ (puede ver [O’Neill, 1983]). Dada una curva  $\gamma$ , de parámetro  $s$ , definimos el funcional lagrangiano como:

$$\mathfrak{L}(\gamma, \gamma') = \frac{1}{2}g(\gamma', \gamma').$$

Para encontrar una expresión explícita para el lagrangiano, comenzamos escribiendo:

$$\gamma' = t'\partial_t + r'\partial_r + \theta'\partial_\theta + \varphi'\partial_\varphi.$$

Por lo tanto:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}[g_{tt}t'^2 + g_{rr}r'^2 + g_{\theta\theta}\theta'^2 + g_{\varphi\varphi}\varphi'^2 + 2g_{t\varphi}t'\varphi']$$

lo que implica:

$$\partial_\theta \mathfrak{L} = \underbrace{\frac{1}{2}[\partial_\theta g_{rr}r'^2 + \partial_\theta g_{\theta\theta}\theta'^2]}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}[\partial_\theta g_{tt}t'^2 + \partial_\theta g_{t\varphi}t'\varphi' + \partial_\theta g_{\varphi\varphi}\varphi'^2]}_{(2)}$$

Analizando el término (1),

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{2} \left[ r'^2 \partial_\theta \left( \frac{\rho^2}{\Delta} \right) + \theta'^2 \partial_\theta (\rho^2) \right] \\ &= -a^2 SC \left[ \frac{r'^2}{\Delta} + \theta'^2 \right] \\ &= \frac{-a^2 SC}{\rho^4} \left( \mathfrak{q}\rho^2 + \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} - \frac{\mathbb{D}^2}{S^2} \right). \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia de la prueba del Lema 4.7:

$$\rho^2 \mathfrak{q} = \frac{r'^2}{\Delta} + \theta'^2 - \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta \rho^4} + \frac{\mathbb{D}^2}{\rho^4 S^2}.$$

Por otro lado, escribiremos la expresión (2) como  $At' + B\varphi'$ , lo que obliga a que:

$$A = \frac{1}{2}[\partial_\theta g_{tt}t' + \partial_\theta g_{\varphi t}\varphi'], \quad B = \frac{1}{2}[\partial_\theta g_{\varphi t}t' + \partial_\theta g_{\theta\theta}\theta'].$$

Recuerde que las últimas tres ecuaciones correspondientes al Lema 2.8 son:

$$\begin{aligned} g_{\varphi t} + aS^2 g_{tt} &= -aS^2, \\ ag_{\varphi\varphi} + (r^2 + a^2)g_{\varphi t} &= \Delta aS^2, \\ ag_{\varphi t} + (r^2 + a^2)g_{tt} &= -\Delta. \end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial respecto a  $\theta$ , obtenemos:

$$\partial_\theta g_{\varphi t} + aS^2 \partial_\theta g_{tt} + 2aSCg_{tt} = -2aSC, \quad (4.4)$$

$$a\partial_\theta g_{\varphi\varphi} + (r^2 + a^2)\partial_\theta g_{\varphi t} = \Delta a2SC, \quad (4.5)$$

$$a\partial_\theta g_{\varphi t} + (r^2 + a^2)\partial_\theta g_{tt} = 0. \quad (4.6)$$

Usando las dos últimas expresiones en  $A$  y  $B$ , respectivamente,

$$A = \frac{1}{2a} [at' - (r^2 + a^2)\varphi'] \partial_\theta g_{tt},$$

$$B = \frac{1}{2a} [at' - (r^2 + a^2)\varphi'] \partial_\theta g_{t\varphi} + \Delta SC\varphi'.$$

En la prueba del teorema 4.4 se hizo uso de la expresión:

$$\frac{\mathbb{D}}{S^2} = (r^2 + a^2)\varphi' - at';$$

por tanto, se tiene que:

$$A = \frac{-\mathbb{D}}{S^2 2a} \partial_\theta g_{tt}, \quad B = \frac{-\mathbb{D}}{S^2 2a} \partial_\theta g_{t\varphi} + \Delta SC\varphi',$$

lo que implica que:

$$At' + B\varphi' = -\frac{\mathbb{D}}{2aS^2} \underbrace{[\partial_\theta g_{tt}t' + \partial_{\varphi t} g_{\varphi t} \varphi']}_T + \Delta SC\varphi'^2.$$

Usando las ecuaciones para  $\varphi'$  y  $t'$  obtenidas en el teorema 4.4,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta g_{tt} \left[ a\mathbb{D} + (r^2 + a^2) \frac{\mathbb{P}}{\Delta} \right] + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta g_{\varphi t} \left[ \frac{\mathbb{D}}{S^2} + \frac{a\mathbb{P}}{\Delta} \right] \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left[ \partial_\theta g_{tt} a\mathbb{D} + \partial_\theta g_{\varphi t} \frac{\mathbb{D}}{S^2} \right] + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\left[ \frac{\mathbb{P}}{\Delta} \partial_\theta g_{tt} (r^2 + a^2) + a \frac{\mathbb{P}}{\Delta} \partial_\theta g_{\varphi t} \right]}_0 \\ &= \frac{\mathbb{D}}{\rho^2 S^2} (aS^2 \partial_\theta g_{tt} + \partial_\theta g_{\varphi t}). \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es consecuencia de la expresión (4.6). Más aún, la ecuación (4.4) se reescribe como:

$$aS^2 \partial_\theta g_{tt} + \partial_\theta g_{\varphi t} = -2aSC(1 + g_{tt})$$

por lo tanto,

$$T = -\frac{\mathbb{D}}{\rho^2 S^2} 2aSC(1 + g_{tt}) = -\frac{4\mathbb{D}}{\rho^4 S^2} aSCMr.$$

La ecuación para  $\varphi'$  en el teorema 4.4 nos permite escribir  $\varphi'^2$  en términos de  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{P}$ . De todo lo anterior, (2) es igual a:

$$\begin{aligned} At' + B\varphi' &= \underbrace{\frac{\mathbb{D}^2}{S^3\rho^4}(2MrC)}_{-T\mathbb{D}/2aS^2} + \frac{1}{\rho^4} \overbrace{\left[ \frac{a\mathbb{P}}{\Delta} + \frac{\mathbb{D}}{S^2} \right]^2}_{\varphi'^2} \Delta SC \\ &= \frac{\mathbb{D}^2}{S^3\rho^4}(2MrC) + \frac{SC}{\rho^4} \left[ \frac{a^2\mathbb{P}^2}{\Delta} + 2\frac{a\mathbb{D}\mathbb{P}}{S^2} + \frac{\mathbb{D}^2\Delta}{S^4} \right]. \end{aligned}$$

Ha llegado la esperada hora de calcular (1) + (2):

$$\begin{aligned} (1) + (2) &= \frac{-a^2SC}{\rho^4} \left( \mathfrak{q}\rho^2 + \frac{\mathbb{P}^2}{\Delta} - \frac{\mathbb{D}^2}{S^2} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbb{D}^2}{S^3\rho^4}(2MrC) + \frac{SC}{\rho^4} \left( \frac{a^2\mathbb{P}^2}{\Delta} + 2\frac{a\mathbb{D}\mathbb{P}}{S^2} + \frac{\mathbb{D}^2\Delta}{S^4} \right) \\ &= \frac{\mathbb{D}C}{\rho^4S^3} [\mathbb{D}(2Mr + S^2a^2 + \underbrace{r^2 - 2Mr + a^2}_{\Delta}) + 2aS^2\mathbb{P}] - \frac{\mathfrak{q}a^2SC}{\rho^2} \\ &= \frac{\mathbb{D}C}{\rho^4S^3} [\mathbb{D}(r^2 + S^2a^2 + a^2) + 2aS^2\mathbb{P}] - \frac{\mathfrak{q}a^2SC}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Para poder eliminar el término  $\mathbb{P}$ , notamos que:

$$\mathbb{P} + a\mathbb{D} = (r^2 + a^2)\mathbf{E} - a\mathbf{L} + a\mathbf{L} - a^2S^2\mathbf{E}.$$

Como  $\rho^2 = r^2 + (1 - S^2)a^2$ ,

$$\mathbb{P} + a\mathbb{D} = \mathbf{E}\rho^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P} = \mathbf{E}\rho^2 - a\mathbb{D},$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} (1) + (2) &= \frac{\mathbb{D}C}{\rho^4S^3} [\mathbb{D}(r^2 + S^2a^2 + a^2) + 2aS^2(\mathbf{E}\rho^2 - a\mathbb{D})] - \frac{\mathfrak{q}a^2SC}{\rho^2} \\ &= \frac{\mathbb{D}C}{\rho^4S^3}\rho^2(\mathbb{D} + 2aS^2\mathbf{E}) - \frac{\mathfrak{q}a^2SC}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{\mathbb{D}C}{S^3}(\mathbb{D} + 2aS^2\mathbf{E}) - \mathfrak{q}a^2SC \right]. \end{aligned}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada  $\theta$  nos da la relación:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta};$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho^2\theta') = \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{\mathbb{D}C}{S^3}(\mathbb{D} + 2aS^2\mathbf{E}) - \mathfrak{q}a^2SC \right].$$

Para integrar esta expresión es conveniente reescribirla; multiplicando por  $2\theta'$  obtenemos:

$$2(\rho^2\theta')\frac{\partial}{\partial s}(\rho^2\theta') = 2\theta'\frac{\mathbb{D}C}{S^3}(\mathbb{D} + 2aS^2\mathbf{E}) - 2\theta'qa^2SC$$

Ahora, notemos que:

$$\partial_\theta\mathbb{D} = -2aSC\mathbf{E} \quad y \quad \partial_\theta\left(\frac{\mathbb{D}^2}{S^2}\right) = \frac{2S^2\mathbb{D}\partial_\theta\mathbb{D} - \mathbb{D}^2SC}{S^4},$$

lo que vuelve evidente la integrabilidad:

$$2(\rho^2\theta')\frac{\partial}{\partial s}(\rho^2\theta') = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathbb{D}^2}{S^2}\right)}_{\theta'\partial_\theta(\mathbb{D}^2/S^2)} - 2\theta'qa^2SC.$$

Por lo tanto,

$$(\rho^2\theta')^2 = \frac{\mathbb{D}^2}{S^2} + qa^2C^2 + \mathcal{K},$$

donde  $\mathcal{K}$  es la constante de integración. Esto da como resultado la ecuación (4.3). Además, implica que el lado derecho de la ecuación correspondiente al lema 4.7, es constante. Por lo tanto, el lado izquierdo debe ser igual a la misma constante  $\mathcal{K}$ , lo que implica la ecuación (4.2).  $\square$

### 4.3. Ecuaciones geodésicas de primer orden

Consideremos una geodésica  $\gamma$  en un espaciotiempo de Kerr  $K$ . El trabajo anterior nos ha permitido asegurar que las coordenadas de Boyer-Lindquist de  $\gamma$  cumplen con el sistema de ecuaciones que llamaremos *sistema de ecuaciones geodésicas de primer orden*:

$$\begin{aligned} \rho^2 t' &= a\mathbb{D} + (r^2 + a^2)\mathbb{P}/\Delta, \\ \rho^2 r' &= \pm\sqrt{\mathbf{R}(r)}, \\ \rho^2 \theta' &= \pm\sqrt{\Theta(\theta)}, \\ \rho^2 \varphi' &= \mathbb{D}/S^2 + a\mathbb{P}/\Delta, \end{aligned}$$

donde  $\Theta(\theta) = \mathcal{K} + qa^2C^2 - \mathbb{D}^2/S^2$  y  $\mathbf{R}(r) = (qr^2 - \mathcal{K})\Delta + \mathbb{P}^2$ .

En general, dado un espaciotiempo  $M$  y un abierto  $\mathcal{D}$  de  $M$ , una *congruencia sobre  $\mathcal{D}$*  es la familia de curvas integrales de un campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$ , tal que para todo  $p \in \mathcal{D}$ ,  $X(p) \neq 0$ . Una *congruencia geodésica* es tal que las curvas integrales correspondientes son geodésicas de un mismo carácter causal. Existen dos congruencias geodésicas nulas sumamente importantes, pues son la herramienta principal para extender el espacio de Kerr sobre los horizontes.

**Proposición 4.9.** *Dado un espaciotiempo de Kerr  $K$ , los campos nulos definidos por:*

$$X_{\pm} = \pm\partial_r + \frac{V}{\Delta}$$

*definen dos congruencias geodésicas nulas llamadas congruencias nulas principales.*

*Demostración.* Primero veamos que, en efecto, los campos son nulos:

$$g(X_{\pm}, X_{\pm}) = (\pm 1)^2 g_{rr} + \frac{g(V, V)}{\Delta^2} = \frac{\rho^2}{\Delta} - \frac{\rho^2 \Delta}{\Delta^2} = 0.$$

Luego, consideremos una curva integral  $\alpha(s)$  del campo  $X_{\pm}$ . Veamos que las coordenadas de dicha curva  $\alpha(s) = (t, r, \theta, \varphi)$  satisfacen el sistema de ecuaciones geodésicas de primer orden. Note que  $\mathfrak{q}(\alpha') = g(\alpha', \alpha') = 0$  ya que  $X_{\pm}$  es un campo nulo. Luego, un cálculo directo muestra las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\alpha) &= g(\alpha', W(\alpha)) = g(X_{\pm}, W) = 0, \\ \mathbb{P}(\alpha) &= -\frac{1}{\Delta}(-\Delta\rho^2) = \rho^2. \end{aligned}$$

Aquí se hizo uso de la ortogonalidad y de la identidad  $g(V, V) = -\rho^2\Delta$ . Recuerde que:

$$\mathbb{P}(\alpha) = (r^2 + a^2)\mathbf{E}(\alpha) - a\mathbf{L}(\alpha), \quad \mathbb{D}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha) - aS^2\mathbf{E}(\alpha).$$

Es importante recalcar que, como no sabemos que  $\alpha$  sea una geodésica, entonces ni la energía ni el momento angular son necesariamente constantes. Dicho esto vemos que:

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2)\mathbf{E} - a\mathbf{L} &= \rho^2, \\ \mathbf{L} - aS^2\mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos,  $\mathbf{E} = 1$  y  $\mathbf{L} = aS^2$ . Observe que la curva  $\alpha$  tiene coordenada  $\theta$  constante, ya que el campo  $X_{\pm} \in \text{span}\{\partial_r, V\}$ . Esto permite hacer un procedimiento idéntico al hecho para obtener las ecuaciones para  $\varphi'$  y  $t'$  (teorema 4.4). Por lo tanto, las coordenadas  $\varphi'$  y  $t'$  de la curva  $\alpha$  satisfacen:

$$\begin{aligned} \rho^2 t' &= (r^2 + a^2)\rho^2/\Delta, \\ \rho^2 \varphi' &= a\rho^2/\Delta. \end{aligned}$$

Finalmente, el lema 4.7 y el Teorema de Carter dan dos expresiones en coordenadas de la primera integral definida por la constante de Carter  $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K}(\alpha, \alpha') = -\frac{1}{\Delta}\rho^4 r'^2 + \mathfrak{q}(\alpha)r^2 + \frac{\mathbb{P}(\alpha)^2}{\Delta} = \rho^4 \theta'^2 - \mathfrak{q}(\alpha)a^2 C^2 + \frac{\mathbb{D}(\alpha)^2}{S^2}.$$

De todo lo anterior y llevando la atención a la segunda expresión para  $\mathcal{K}$ , notamos que  $\mathcal{K}(\alpha, \alpha') \equiv 0$ . Por lo tanto, las expresiones para  $\mathcal{K}$  proporcionan las



ecuaciones para  $r'$  y  $\theta'$ :

$$\begin{aligned}\rho^2 r' &= \pm \rho^2, \\ \rho^2 \theta' &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\alpha$  cumple con el sistema de ecuaciones geodésicas de primer orden, lo que finaliza la prueba.  $\square$

**Observación 4.10.** El sistema que llamamos *ecuaciones geodésicas de primer orden*, en efecto sustituye el uso de las ecuaciones de auto-parallelismo, que son ecuaciones ordinarias acopladas de segundo orden, cuya complejidad las hace casi imposibles de tratar.

## Capítulo 5

# Coordenadas Kerr-Estrella

Para extender el espaciotiempo de Kerr sobre los horizontes usaremos las ecuaciones geodésicas de primer orden obtenidas en el capítulo anterior.

### Problemas sobre los horizontes

Primero, es importante tener una buena idea del comportamiento de las coordenadas de Boyer-Lindquist cerca de los horizontes. Para ello, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 5.1.** *Sea  $\alpha$  una curva temporal que apunta al futuro con coordenadas  $t, r, \theta$  y  $\varphi$ , supongamos que parte del exterior de Kerr, cruza al horizonte  $\mathcal{H}_+$  en  $s = s_0$  y nunca toca al eje  $\mathbb{E}$ . Entonces, si  $s \rightarrow s_0$  se tiene que las coordenadas de  $\alpha$  cumplen*

$$\frac{dt}{ds} = t' \rightarrow +\infty \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{ds} = \varphi' \rightarrow +\infty.$$

*Demostración.* Supongamos que para toda  $s < s_0$ ,  $\alpha(s) \in \mathbf{I}$ , es decir,  $\alpha$  cae al horizonte  $\mathcal{H}_+$  desde el exterior de Kerr. Entonces, la coordenada  $r$  de  $\alpha$  tiende a  $r_+$  cuando  $s \rightarrow s_0$ . Consideremos las coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$  de la curva  $\alpha$ . Notemos que, cuando  $s \rightarrow s_0$  entonces, como  $\alpha$  no toca al eje ( $S \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta} \rightarrow +\infty, \\ g_{\theta\theta} &= \rho^2 \rightarrow g_{\theta\theta}(\alpha(s_0)) > 0, \\ g_{\varphi\varphi} &= S^2 \left[ r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2S^2}{\rho^2} \right] \rightarrow g_{\varphi\varphi}(\alpha(s_0)) > 0, \\ g_{\varphi t} &= -\frac{2MraS^2}{\rho^2} \rightarrow g_{\varphi t}(\alpha(s_0)) < 0. \end{aligned}$$

Por la observación subsecuente al teorema 3.5, tenemos que  $g_{tt} > 0$  si y solo si,  $r \in (b_-, b_+)$ , donde  $b_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - C^2 a^2}$ . Note que, fuera del eje  $b_+ >$

$r_+ > r_- > b_-$ , y como  $\alpha$  cruza al horizonte en  $s_0$ , por continuidad, se tiene que  $g_{tt}(\alpha(s)) > 0$  en una vecindad de  $s_0$ . Como  $\alpha$  es tipo tiempo y por la discusión anterior, para  $s$  suficientemente cercano a  $s_0$ :

$$0 > g(\alpha', \alpha') = \underbrace{t'^2 g_{tt} + r'^2 g_{rr} + \theta'^2 g_{\theta\theta} + \varphi'^2 g_{\varphi\varphi}}_{>0} + 2\varphi' t' \underbrace{g_{\varphi t}}_{<0}.$$

Más aún, la parte positiva tiende a infinito, lo que obliga a que

$$\varphi' t' \longrightarrow +\infty.$$

Por otro lado, consideremos la hipersuperficie  $N = \{t = t_0\}$ , parametrizada por las coordenadas  $r, \theta, \varphi$ . Note que los campos coordenados  $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi$  generan al haz tangente de  $N$  y son todos espaciales en  $\mathbf{I}$ , más aún hemos visto que son ortogonales dos a dos. Por lo tanto,  $N \cap \mathbf{I}$  es una hipersuperficie espacial, y como  $\text{grad } t$  es ortogonal a  $\partial_\varphi, \partial_r, \partial_\theta$  se tiene que,  $\text{grad } t$  es ortogonal a  $N$ . Como consecuencia,  $\text{grad } t$  es temporal en  $\mathbf{I}$  y como

$$g(\text{grad } t, \partial_t) = dt(\partial_t) = \partial_t(t) = 1 > 0.$$

Recuerde que, el campo  $\partial_t$  apunta hacia el futuro cuando es temporal, por lo tanto,  $\text{grad } t$  debe apuntar hacia el pasado en todo el bloque  $\mathbf{I}$ . Por lo tanto,  $g(\text{grad } t, \alpha') > 0$ , pues  $\alpha'$  apunta hacia el futuro por hipótesis. Es decir,

$$t' = g(\text{grad } t, \alpha') > 0, \quad \text{siempre que } \alpha \in \mathbf{I}.$$

Como,  $\varphi' t' \rightarrow \infty$  cuando  $s \rightarrow s_0$ , concluimos que para  $s$  suficientemente cercano a  $s_0$ , se cumple necesariamente que  $\varphi' > 0$ .

Finalmente, la parte positiva de  $g(\alpha', \alpha')$  está compuesta por cuatro sumandos positivos. Por lo tanto,  $g(\alpha', \alpha') < 0$  implica que:

$$-2g_{\varphi t}\varphi' t' > g_{tt}t'^2 > 0 \quad \text{y} \quad -2g_{\varphi t}\varphi' t' > g_{\varphi\varphi}\varphi'^2 > 0.$$

Esto finaliza la prueba ya que, como  $g_{\varphi t}$  tiene límite finito cuando  $s \rightarrow s_0$ , si  $\varphi' \rightarrow +\infty$ , entonces,  $t' \rightarrow +\infty$  y viceversa.  $\square$

**Observación 5.2.** Para un observador en la región definida por  $g_{tt} < 0$ , la coordenada  $t$  es temporal, por lo que desde su perspectiva, el objeto representado por  $\alpha$  nunca toca al horizonte ya que mientras el tiempo de dicho observador tiende a  $+\infty$ ,  $\alpha$  cae (asintóticamente) aceleradamente en espiral ( $\varphi' \rightarrow +\infty$ ) al horizonte. Podemos argumentar este comportamiento al suponer que el objeto que cae manda señales de luz de manera constante hacia la zona  $g_{tt} < 0$ , modelado con curvas de la congruencia nula principal definida por el campo

$$X_{+-} = \partial_r + V/\Delta = -\partial_r + \frac{(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\varphi}{\Delta}.$$

El factor  $1/\Delta$  muestra que la señal emitida al momento del cruce con el horizonte alcanza valores de  $\varphi'$  y  $t'$  infinitos por lo que dicha señal no podrá alcanzar un evento en la zona  $g_{tt} < 0$  con coordenadas  $t$  y  $\varphi$  finitas.

Con la intención de extender el espaciotiempo de Kerr sobre los horizontes, retomamos las congruencias nulas principales obtenidas en el capítulo anterior. Estas son familias de geodésicas, por lo que están profundamente relacionadas con la geometría del espaciotiempo de Kerr. Recordemos que estas curvas están definidas, en cada bloque, por las coordenadas de Boyer-Lindquist,

$$r' = \pm 1, \quad \theta' = 0, \quad \varphi' = \frac{a}{\Delta}, \quad t' = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}.$$

Consideremos el exterior de Kerr, es decir, el bloque **I**. Si  $r' = -1$  la geodésica nula en cuestión se dice *entrante*, en cambio, si  $r' = +1$  la geodésica se dice *saliente*. Sea  $\gamma$  una curva de alguna congruencia nula principal. Notemos que  $\gamma$  apunta hacia el futuro; como  $V$  es temporal en **I**, y da la orientación temporal a este bloque, y además:

$$g(\gamma', V) = g(\pm\partial_r + \frac{1}{\Delta}V, V) = -\rho^2 < 0.$$

Se concluye que la geodésica nula  $\gamma$  apunta hacia el futuro. Se pueden usar ambas congruencias nulas principales (entrantes y salientes) para construir dos extensiones del espaciotiempo de Kerr. Luego, a partir de estas extensiones, se construye una extensión maximal al espaciotiempo de Kerr (consultar [O'Neill, 2014]). Nuestro objetivo es extender el espaciotiempo de Kerr lo suficiente para poder analizar los horizontes  $\mathcal{H}_\pm$  como superficies nulas, y para ello basta analizar las congruencias entrantes.

## 5.1. Construcción

El objetivo aquí es dar un sistema de coordenadas donde  $\gamma$  sea una curva coordenada (i.e.,  $\gamma$  es curva integral de algún campo coordenado, salvo parametrización). Por lo tanto, tenemos que 'reparar' las coordenadas  $t$  y  $\varphi$  en  $\Delta = 0$ . Consideremos las siguientes funciones llamadas *funciones coordenadas de Kerr\** (léase Kerr-estrella):

$$t^* = t + T(r), \quad \varphi^* = \varphi + A(r),$$

donde la función temporal  $T(r)$  y la función angular  $A(r)$  son cualesquiera funciones tales que:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \quad \frac{dA}{dr} = \frac{a}{\Delta}.$$

Esta definición asegura que cada geodésica nula principal entrante  $\gamma$  cumple que  $r' = -1$  y  $\theta' = 0$ ; además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\varphi^* \circ \gamma) &= (\varphi^*)' = \varphi' + \frac{dA}{dr}r' = 0, \\ \frac{d}{ds}(t^* \circ \gamma) &= (t^*)' = t' + \frac{dT}{dr}r' = 0. \end{aligned}$$

**Proposición 5.3.** *Para cada bloque de Boyer-Lindquist  $B = \text{I, II, III}$ , la transformación:*

$$\xi^* = (t^*, r, \theta, \varphi^*)$$

*es un sistema coordenado en  $B \setminus \mathbb{E}(B)$ . Estas coordenadas son llamadas coordenadas Kerr\*.*

*Demostración.* De la definición de las funciones coordenadas Kerr\*, observamos que  $\varphi = \varphi^* - A(r)$  y  $t = t^* - T(r)$ . Por lo tanto, la transformación definida por:

$$(t^*, r, \theta, \varphi^*) \longmapsto (t^* - T(r), r, \theta, \varphi^* - A(r))$$

es la inversa de  $\xi^* \circ \xi^{-1}$ , donde  $\xi$  es el sistema coordenado de Boyer-Lindquist. Por lo tanto, como  $\xi$  es un sistema coordenado se concluye que  $\xi^*$  es biyectiva.

Ahora, calculemos la matriz Jacobiana de la transformación  $\xi^* \circ \xi^{-1}$ . Un cálculo directo muestra que:

$$\text{Jac}(\xi^* \circ \xi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & (r^2 + a^2)/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a/\Delta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $\det(\text{Jac}(\xi^* \circ \xi^{-1})) = 1$  en  $B \setminus \mathbb{E}(B)$ . Se concluye que  $\xi^* \circ \xi^{-1}$  es un difeomorfismo y por lo tanto,  $\xi^*$  es un sistema coordenado.  $\square$

Recapitulando, los bloques de Boyer-Lindquist pueden ser acomodados de manera natural en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ . El problema es que, en las coordenadas de Boyer-Lindquist, la métrica de Kerr no está definida en los límites de estos bloques (los horizontes). Este problema se volvió visible al mostrar que una partícula que cae al agujero negro de Kerr aparenta una eterna caída en forma de espiral infinita para observadores lo suficientemente lejanos. Esto es arreglado por las funciones  $A(r)$  y  $T(r)$ , ya que contrarrestan el comportamiento explosivo de las coordenadas  $\varphi$  y  $t$  para radios cercanos a  $r_{\pm}$ .

## 5.2. Extensión sobre los horizontes

Primero se mostrará la relación entre los campos coordenados de Kerr\* y de Boyer-Lindquist.

**Lema 5.4.** *Los campos coordenados asociados a las coordenadas Kerr\* denotados por  $\{\partial_t^*, \partial_r^*, \partial_\theta^*, \partial_\varphi^*\}$  cumplen que*

$$\partial_t^* = \partial_t, \quad \partial_\theta^* = \partial_\theta, \quad \partial_\varphi^* = \partial_\varphi, \quad \partial_r^* = \partial_r - \frac{V}{\Delta}.$$

*Demostración.* El teorema 1.7 asegura que, dado un sistema coordenado  $\xi = (x^1, \dots, x^n)$  sobre una variedad semi-riemanniana  $M$ , alrededor de un punto  $p \in M$  se tiene que para todo  $v \in T_p M$

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_p$$

Para expresar cada campo coordenado de las coordenadas de Boyer-Lindquist en términos de los campos coordenados del sistema  $\xi^*$ , notemos primero que  $\theta^* = \theta$  y  $r = r^*$ . Entonces,

$$\partial_i(j^*) = \delta_{ij} \quad \forall i \in \{t, \theta, \varphi\}, \quad \forall j \in \{t, r, \theta, \varphi\},$$

ya que las funciones coordenadas  $t^*$  y  $\varphi^*$  difieren de  $t$  y  $\varphi$  solamente por funciones que dependen de  $r$ . Sólo faltaría ver qué ocurre con el campo radial  $\partial_r^*$ . La dependencia de las funciones angular y temporal dan los coeficientes no nulos de  $\partial_r$  en términos de la base coordenada asociada a  $\xi^*$ :

$$\begin{aligned} \partial_r(t^*) &= \frac{dT}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \\ \partial_r(\varphi^*) &= \frac{dA}{dr} = \frac{a}{\Delta}, \\ \partial_r(r) &= +1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\partial_r = \partial_r^* + \frac{1}{\Delta}[(a^2 + r^2)\partial_t^* + a\partial_\varphi^*].$$

Finalmente, como  $\partial_t^* = \partial_t$  y  $\partial_\varphi^* = \partial_\varphi$ , se tiene que el vector entre corchetes en la expresión para  $\partial_r$ , es exactamente  $V$ . Un despeje muestra el resultado deseado.  $\square$

**Corolario 5.5.** *La métrica de Kerr expresada en las coordenadas Kerr\* tiene el siguiente elemento de línea*

$$ds^2 = g_{tt}dt^{*2} + 2g_{\varphi t}d\varphi^*dt^* + g_{\varphi\varphi}d\varphi^{*2} + \rho^2d\theta^2 + 2dt^*dr - 2aS^2d\varphi^*dr.$$

Más aún,  $\det(g_{ij}^*) = -\rho^2S^4$ .

*Demostración.* Para calcular el elemento de línea es necesario primero calcular las componentes de la métrica en las coordenadas Kerr\*. Para ello, notamos que el resultado anterior muestra que el único campo diferente entre los coordenados de Boyer-Lindquist y Kerr\*, es el campo radial. Por esto,  $g_{ij} = g_{ij}^* = g(\partial_i^*, \partial_j^*)$  para todos  $i, j$  distintos de  $r$ . Recordemos que  $g(V, \partial_\varphi) = \Delta a S^2$  y  $g(V, \partial_t) = -\Delta$ , lo que da como resultado:

$$\begin{aligned} g_{r\varphi}^* &= g(\partial_r^*, \partial_\varphi) = g(\partial_r - \Delta^{-1}V, \partial_\varphi) = -\Delta^{-1}g(V, \partial_\varphi) = -aS^2, \\ g_{rt}^* &= g(\partial_r^*, \partial_t) = g(\partial_r - \Delta^{-1}V, \partial_t) = -\Delta^{-1}g(V, \partial_t) = 1. \end{aligned}$$

Luego, como las curvas integrales de  $\partial_r^* = -X_-$  forman exactamente la congruencia principal nula entrante, en particular los vectores tangentes definen un campo nulo. Además,  $\partial_\theta$  es ortogonal a los campos  $\partial_r$  y  $V$ . Se concluye que,  $g_{r\theta}^* = g_{r\theta} = 0$ . Finalmente, expresando el elemento de línea como

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

y usando los cálculos anteriores obtenemos la forma deseada:

$$ds^2 = g_{tt}dt^{*2} + 2g_{t\varphi}dt^*d\varphi^* + g_{\varphi\varphi}d\varphi^{*2} + \rho^2d\theta^2 + 2dt^*dr - 2aS^2d\varphi^*dr.$$

Ahora calcularemos el determinante de la métrica en las coordenadas Kerr\*. Es conveniente intercambiar los últimos dos renglones de la matriz  $g_{ij}^*$ , lo que se traduce en un cambio de signo del determinante:

$$\det(g_{ij}^*) = \begin{vmatrix} g_{tt} & 1 & 0 & g_{t\varphi} \\ 1 & 0 & 0 & -aS^2 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ g_{t\varphi} & -aS^2 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = -\rho^2 \begin{vmatrix} g_{tt} & 1 & g_{t\varphi} \\ 1 & 0 & -aS^2 \\ g_{t\varphi} & -aS^2 & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}$$

Ahora, usaremos las identidades (1.1) y (1.2) del lema 2.8 para obtener

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}^*) &= -\rho^2 \left[ \overbrace{g_{\varphi\varphi} + aS^2g_{\varphi t}}^{(1.1)} + aS^2 \overbrace{(g_{tt}aS^2 + g_{\varphi t})}^{(1.2)} \right] \\ &= -\rho^2[(r^2 + a^2)S^2 - aS^2(aS^2)]. \end{aligned}$$

Note que el término entre corchetes es igual a  $\rho^2S^2$  por la identidad  $r^2 + a^2 - S^2a^2 = \rho^2$ . Se sigue el resultado deseado.  $\square$

Este último corolario muestra explícitamente que, en efecto, logramos extender la métrica de Kerr sobre los horizontes  $\mathcal{H}$ . Esto como consecuencia de que la única componente de la métrica de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist que fallaba en  $\Delta = 0$  era  $g_{rr}$  y ésta fue, exitosamente, eliminada de el elemento de línea  $ds^2$ . Más aún no se han agregado términos que se indeterminen en los horizontes, esto es claro al ver el elemento de línea obtenido en el lema anterior.

**Definición 5.6.** Un espaciotiempo Kerr\* es

1. Una variedad suave  $K^* = \mathbb{R}^2(t^*, r) \times \mathbb{S}^2(\theta, \varphi^*) \setminus \Sigma$ , donde los paréntesis indican cuáles coordenadas parametrizan a cada factor de la variedad producto.
2.  $K^*$  está equipada con la métrica dada por el corolario 5.5 que se extiende sobre el eje  $\{S = 0\}$ . Además la singularidad  $\Sigma$ , como siempre, está definida por la ecuación  $\rho^2 = 0$ .
3. Dotamos a  $K^*$  con la orientación temporal dada por el campo nulo globalmente definido  $-\partial_r^*$ .

**Observación 5.7.** Recuerde que cuando  $\partial_t$  es un campo temporal, éste define la misma orientación temporal que  $V$ . Así mismo,  $-\partial_r^*$  es consistente con la orientación temporal dada en los bloques **I** y **III**, ya que  $g(-\partial_r^*, V) = -\rho^2 < 0$ . Por otro lado, note que,  $g(\partial_r, -\partial_r^*) = \rho^2 > 0$  lo que implica que, con la orientación temporal en el bloque **II** dada por el vector temporal  $\partial_r$  es opuesta a la orientación definida por  $-\partial_r^*$ . Por esta razón se decidió no dotar de una orientación temporal específica al segundo bloque, hasta ahora.

### 5.3. Estructura y clasificación

El siguiente resultado muestra que las coordenadas Kerr\* extienden a las coordenadas Boyer-Lindquist.

**Proposición 5.8.** *Considere un bloque de Boyer-Lindquist  $B \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ . Definimos la transformación  $j = \xi^{-1} \circ \xi^*$ ,*

$$j : B \setminus \mathbb{E}(B) \rightarrow B \setminus \mathbb{E}(B)$$

*Esto es,  $\xi \circ j \circ \xi^{-1} = \xi^* \circ \xi^{-1} : (t, r, \theta, \varphi) \mapsto (t+T(r), r, \theta, \varphi+A(r)) = (t^*, r, \theta, \varphi^*)$ . Entonces,  $j$  tiene una (única) extensión suave a una isometría  $\mathbf{J}$  que mapea  $B$  a un subconjunto abierto de  $K^*$  llamado  $B^*$ .*

*Demostración.* Primero que nada, notemos que la métrica dada por el corolario 5.5 es un cambio de coordenadas de la métrica de Kerr. Es decir, la métrica de Kerr\* es, por definición,  $g^* = ((\xi^*)^{-1} \circ \xi)^* g$ ; donde  $g$  es la métrica de Kerr. Por lo tanto,  $j = \xi^{-1} \circ \xi^*$  es una isometría;

$$(j^{-1})^* g = g^* \Rightarrow j^* g^* = g$$

Luego, para definir a la extensión  $\mathbf{J}$ , consideremos a  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Ahora, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  definimos el mapeo de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{S}^2$  por la regla de correspondencia  $p \mapsto R_\lambda(p)$  donde  $R_\lambda$  es la rotación sobre el eje  $z$  a un ángulo  $\lambda$ . Es decir,

$$R_\lambda(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\text{sen } \lambda & 0 \\ \text{sen } \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Note que la aplicación  $(\lambda, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \mapsto R_\lambda(p) \in \mathbb{S}^2$  es suave<sup>1</sup>. Definimos la transformación  $\mathbf{J}$  con la regla de correspondencia

$$(t, r, p) \in B \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 \mapsto (t^*, r, R_{A(r)}(p)) \in K^* \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2.$$

Es importante notar que  $\mathbf{J}$  está bien definida en el eje, además  $J(B) = B^*$  donde  $B^* = (B, g^*)$ .

Ahora, analizaremos la aplicación  $\mathbf{J}$  bajo las coordenadas de Boyer-Lindquist; Dado  $r \in \mathbb{R}$  es evidente que la transformación  $R_{A(r)}$  deja invariante a la coordenada  $\theta$ , y a la coordenada  $\varphi$  la mapea a  $\varphi + A(r) = \varphi^*$ . Finalmente,  $R_{A(r)}$  preserva la métrica euclidiana, es decir, la coordenada  $r$  también es invariante ante  $\mathbf{J}$  (ver figura 5.1). Esto prueba que  $\mathbf{J}$  es, en efecto, una extensión de  $j$ . Es decir,

$$j = \mathbf{J}|_{B \setminus \mathbb{E}(B)}.$$

De lo anterior y como  $j$  es una isometría, se tiene que, para todo campo vectorial  $X$  sobre  $B$ , la función

$$f_X : p \in B \setminus \mathbb{E}(B) \mapsto g(X(p), X(p)) - \mathbf{J}^* g^*(X(p), X(p))$$

<sup>1</sup>Más aún esta aplicación resulta ser analítica ya que es analítica en  $\lambda$  y lineal en  $p$ . Esto no es usado en esta tesis pero al construir la extensión maximal al espaciotiempo de Kerr es necesaria la propiedad de ser analítica [O'Neill, 2014].



es la constante cero. Luego, como  $g$  y  $j^*g^*$  se extienden sobre el eje  $\mathbb{E}(B)$  entonces,  $f_X$  también es extensible sobre el eje, y por continuidad,  $f_X = 0$  en  $B$ . Por tanto, como  $X$  fue arbitrario,  $\mathbf{J}^*g^* = g$ , es decir  $\mathbf{J}$  es una isometría. La razón por la que esta extensión es única es que los bloques de Boyer-Lindquist son conexos, y como se está extendiendo a  $j$  definido en un conjunto abierto  $(B \setminus \mathbb{E}(B))$ , cualesquiera dos extensiones deben coincidir ellas tanto como sus diferenciales en todos los puntos de dicho abierto.<sup>2</sup>  $\square$

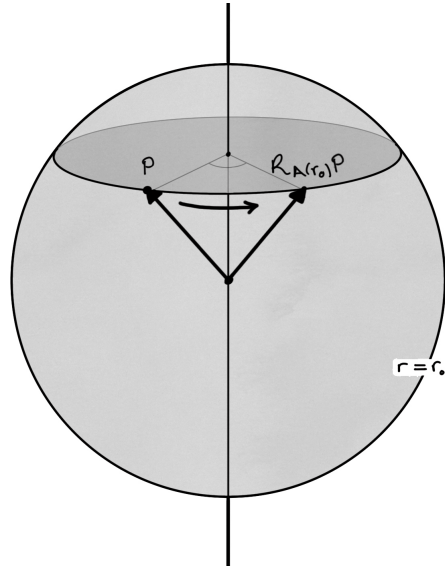


Figura 5.1: Esta figura muestra cómo actúa  $R_{A(r_0)}$  sobre  $\{r_0\} \times \mathbb{S}^2$ .

**Observación 5.9.** La proposición anterior muestra que los espaciotiempos Kerr\* son de Kerr, con la ventaja de incluir todos los bloques en un solo espaciotiempo. A dichos bloques se les dota de la orientación dada por la definición 5.6. También, es importante mencionar que esta construcción es válida para cualquier espaciotiempo de Kerr; lento, extremo y rápido:

1. **El espaciotiempo de Kerr lento** contiene los tres bloques de Boyer-Lindquist, separados por dos horizontes  $\mathcal{H}_\pm = \{r = r_\pm\}$ .
2. **El espaciotiempo de Kerr extremo** tiene dos bloques (**I** y **III**), separados por un solo horizonte  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\pm = \{r = M\}$ .
3. **El espaciotiempo de Kerr rápido** tiene un solo bloque (**I = III**) y ningún horizonte.

<sup>2</sup>Dadas dos variedades semi-riemannianas, conexas  $M$  y  $N$ , y dos isometrías  $f, g : M \rightarrow N$  tales que  $f(p) = g(p)$  y  $df_p = dg_p$ , entonces  $f \equiv g$ ; puede revisar la proposición 62 de [O'Neill, 1983].

Con el trabajo ya hecho, tenemos la posibilidad de estudiar exactamente cómo es que los horizontes juegan un papel de separación causal en los espaciotiempos de Kerr<sup>\*</sup>; esto será abordado en el siguiente capítulo.



## Capítulo 6

# Subvariedades notables

### 6.1. Región estacionaria, el límite estacionario y la ergoesfera

En esta sección diseccionaremos los espaciotiempos de Kerr<sup>\*</sup> en sus subvariedades más importantes. A continuación, veremos que hay una región en la que es imposible permanecer quieto; esto divide dicho espaciotiempo Kerr<sup>\*</sup> en tres regiones: la región estacionaria, el límite estacionario y la ergoesfera. Lo primero, es precisar lo que es un observador estacionario:

Definimos un *observador* como una trayectoria temporal que apunta al futuro, con vector tangente unitario en todo punto. Luego, un *campo de observadores* es un campo vectorial, temporal que apunta al futuro y unitario. De este modo, cada curva integral de un campo de observadores es naturalmente un observador. Note que esto implica que dichos observadores estén parametrizados por longitud de arco, parámetro comúnmente llamado tiempo propio. Cada observador asociado a  $U$  es llamado  $U$ -observador.

**Definición 6.1.** Dado un espaciotiempo  $M$  y un campo de observadores  $U$  en  $M$ ,

1. Si existe una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  suave y positiva tal que  $fU$  es un campo de Killing entonces decimos que  $M$  es estacionario relativo a  $U$ .
2. Si  $M$  es estacionario relativo a  $U$  y además la distribución  $U^\perp$  es integrable<sup>1</sup>, se dice que  $M$  es estático.

Dado un espaciotiempo  $M$  estacionario respecto a  $U$ , los flujos locales de  $fU$  son isometrías que llevan a cada  $U$ -observador en sí mismo modificando la

<sup>1</sup>Una distribución (suave) de dimensión  $k$  de una variedad suave  $M$  se define como  $\sqcup_{p \in M} D_p$  donde  $D_p$  es un subespacio vectorial de  $T_p M$  de dimensión  $k$ . La suavidad se tiene si para todo  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  (de  $p$ ) y  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$  tales que  $\text{span}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\} = D_q$  para todo  $q \in U$ . Decimos que dicha distribución es integrable si existe una familia de subvariedades  $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tales que  $\sqcup_{\alpha \in A} N_\alpha = M$  (i.e., definen una foliación) y además cada subvariedad  $N_\alpha$  cumple que  $T_p N_\alpha = D_p$ .

parametrización de dicho observador (su tiempo propio). Esto implica que, para cada  $U$ -observador, al menos localmente, el universo (la métrica) no cambia con el tiempo. Si además  $M$  es estático, cada hoja de la foliación asociada a la distribución  $U^\perp$  es una variedad espacial de dimensión 3, una ‘rebanada’ temporal en la que todos los  $U$ -observadores que la atraviesan estarán de acuerdo. Esto puede ser pensado como la concepción Newtoniana del tiempo: por lo menos para los  $U$ -observadores el tiempo sí será absoluto.

**Proposición 6.2.** Sean  $\mathfrak{E} \subset \mathbf{I}$  y  $\mathfrak{E}' \subset \mathbf{III}$  abiertos definidos por  $g_{tt} < 0$ . Entonces,  $\mathfrak{E}$  y  $\mathfrak{E}'$  son ambos estacionarios respecto a  $\partial_t$ .

*Demostración.* Como  $g_{tt}$  nunca se anula en  $\mathfrak{E} \cup \mathfrak{E}'$ , entonces la función  $1/|g_{tt}|$  es suave y está bien definida. Dicho esto, claramente el campo vectorial

$$U = \frac{\partial_t}{|g_{tt}|}, \quad g(\partial_t, \partial_t) = g_{tt}$$

es un campo de observadores en ambos  $\mathfrak{E}$  y  $\mathfrak{E}'$ . Finalmente, se tiene el resultado ya que el campo  $\partial_t$  es de Killing.<sup>2</sup>  $\square$

Ya definida la región estacionaria formada por  $\mathfrak{E} \cup \mathfrak{E}' \cup \mathbf{II}$ , podemos recurrir al espaciotiempo lento de Kerr, donde se aprecia plenamente el florecimiento de el espaciotiempo de Schwarzschild en los espaciotiempos de Kerr, producto de la rotación del agujero negro.

**Proposición 6.3.** Dado un espaciotiempo lento de Kerr  $K^*$ , el conjunto definido por  $L = \{g_{tt} = 0\}$  es una hipersuperficie disconexa tal que, fuera del eje,  $L$  está contenida en  $\mathbf{I} \cup \mathbf{III}$ , y separa la región estacionaria  $\{g_{tt} < 0\}$  de la región  $\{g_{tt} > 0\}$ . Más aún,  $L$  es tipo tiempo fuera de los horizontes.

*Demostración.* Primero, note que

$$g_{tt} = -1 + \frac{2Mr}{\rho^2} =: \frac{\ell}{\rho^2}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_{tt} = 0 &\Leftrightarrow \ell = r(2M - r) - a^2 S^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow r = b_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 C^2}. \end{aligned}$$

Note que  $r_\pm = b_\pm$  si y solo si  $C = 1$ , es decir,  $L$  coincide con los horizontes, solamente en el eje. Por tanto, fuera del eje,  $b_- < r_- < r_+ < b_+$ ; esto muestra la ubicación de  $L$  respecto a los bloques. Luego, para ver que, en efecto,  $\ell = 0$  determina una hipersuperficie, consideramos

$$d\ell = 2(M - r)dr - 2a^2 SCd\theta.$$

<sup>2</sup>Resulta que esta afirmación no se puede extender al caso estático: se puede probar que la distribución  $\partial_t^\perp$  no es integrable en ningún conjunto abierto, puede consultar [O’Neill, 2014]

## 6.1. REGIÓN ESTACIONARIA, EL LÍMITE ESTACIONARIO Y LA ERGOESFERA 57

Como  $K^*$  es el espaciotiempo de Kerr lento, se tiene que  $a^2 < M^2$  lo que implica que  $M^2 - a^2C^2$  nunca se anula en  $L$ . Por lo tanto, nunca se cumple que  $M = r$  lo que implica que  $d\ell$  no se anula en  $L$ . Esto prueba que  $L$  es una hipersuperficie. Finalmente, note que

$$d\ell(\partial_t) = d\ell(\partial_\varphi) = 0,$$

lo que implica que  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$  son tangentes a  $L$ . Luego, para completar una base, fijamos nuestra atención en los subespacios generados por  $\partial_r$  y  $\partial_\theta$ , y un cálculo directo muestra que el campo vectorial  $X = a^2SC\partial_r + (r - M)\partial_\theta$  es tangente a  $L$ :

$$d\ell(X) = 2(M - r)a^2SC - 2a^2SC(M - r) = 0.$$

Además,  $X$  es ortogonal a  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$  por lo que forman una base para  $T_pL$ , para todo  $p \in L$ . Finalmente,  $\partial_\varphi$  es espacial y, por definición,  $\partial_t$  es nulo en  $L$ . Por otro lado,

$$g(X, X) = (a^2SC)^2g_{rr} + (M - r)^2g_{\theta\theta} > 0,$$

donde  $g_{rr} = \rho^2/\Delta > 0$  en  $\mathbf{I} \cup \mathbf{III}$  y  $g_{\theta\theta}$  siempre es mayor que cero. Por tanto,  $T_pL$  es generado por  $\{\partial_t, \partial_\varphi, X\}$  o equivalentemente, por  $\{X, V, W\}$ . Esto exhibe que  $L$  es una hipersuperficie temporal (fuera del eje) ya que cada espacio tangente contiene un solo vector temporal.  $\square$

El límite estacionario también es llamado *horizonte de Killing*, ya que es la hipersuperficie en donde el campo de Killing  $\partial_t$  hace su transición de ser temporal a espacial, es decir en donde éste se vuelve nulo.

**Observación 6.4.** Las componentes conexas del límite estacionario están dadas por  $r = b_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2C^2}$ . La separación (radial) de estas componentes conexas está dada por

$$|b_+ - b_-| = 2\sqrt{M^2 - a^2C^2};$$

es decir, está controlada por  $M^2 - a^2C^2$ . Podemos ver que la separación máxima ocurre cuando  $C = 0$ , es decir en el plano ecuatorial, donde  $b_+ = 2M$  (el radio de Schwarzschild). Por otro lado, la separación mínima ocurre cuando  $C = 1$ , es decir en el eje, controlada por  $M^2 - a^2$ . Por tanto mientras  $a$  esté más cercano a  $M$  las componentes conexas del límite estacionario estarán cada vez más cerca como veremos a continuación.

En efecto, si llevamos nuestra atención al caso Kerr extremo ( $a^2 = M^2$ ) notamos que en el eje ( $S = 0$ ),  $b_\pm$  se reduce a  $M$ , es decir son iguales. Por tanto, las componentes conexas de  $L$  se tocan en  $r = M$  y se pierde la suavidad:  $d\ell = 2(r - M)dr + 2a^2SCd\theta = 0$ . Por otro lado, considerando a Kerr rápido ( $a^2 > M^2$ ) se tiene que las raíces de  $\ell$ , es decir  $b_\pm$  no siempre están definidas, sin embargo  $L$  recupera suavidad en el eje: Dado un punto sobre  $L : r = b_\pm$ , su coordenada radial cumple  $r = M$  si y solo si  $b_+ = b_- = M$  si y solo si  $M^2 - a^2C^2 = 0$ . Por tanto, el término  $d\ell$  se reduce a  $2a^2SCd\theta$  que se anula si y solo si  $2SC = 2\sin(2\theta) = 0$ , es decir, en  $\theta = 0, \pi/2$ . Esto presenta una contradicción ya que  $\cos(0) = 1$  y  $\cos(\pi/2) = 0$ , por tanto es imposible que  $d\ell$  se anule en  $\ell = 0$  si  $a^2 > M^2$  (ver figura 6.1).

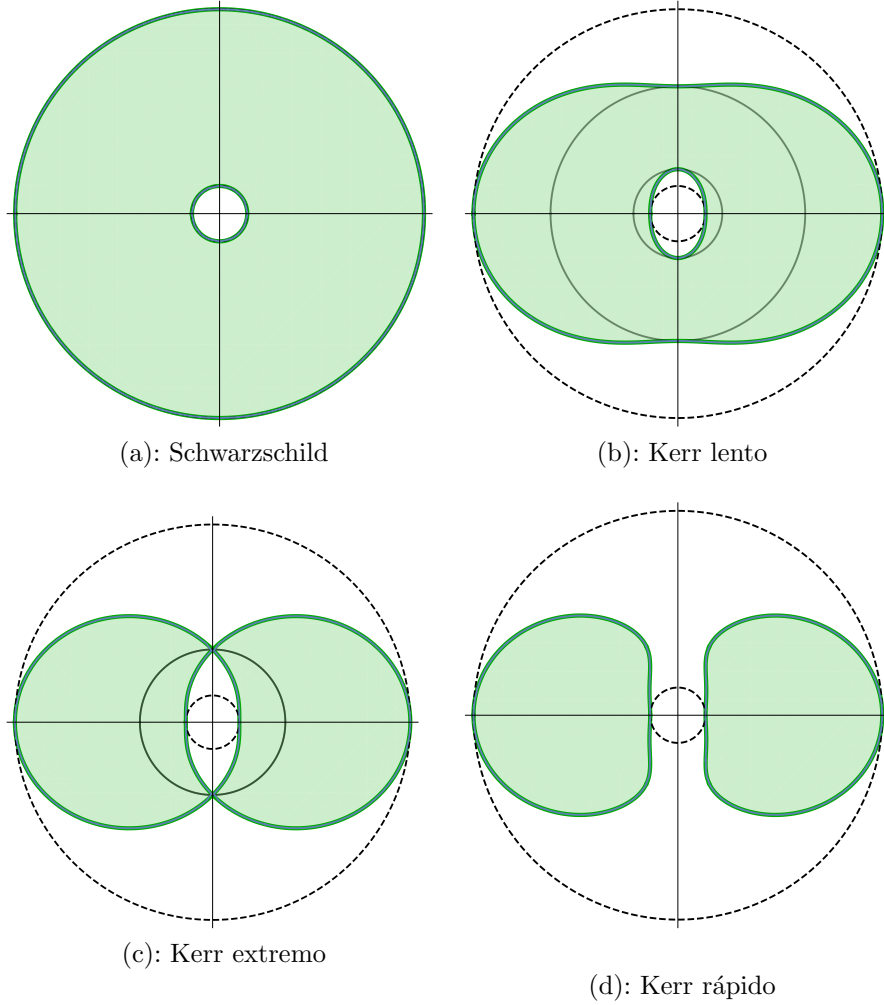


Figura 6.1: La zona sombreada muestra una sección de la ergoesfera en distintos casos, tomando en cuenta las coordenadas  $(r, \theta)$  representadas en coordenadas polares  $e^r, \theta$  (de la misma forma que en la figura 3.1). En el caso con giro ( $a \neq 0$ ) los círculos punteados exterior e interior corresponden a  $r = 2M$  y  $r = 0$ , respectivamente. En el caso de Schwarzschild, se traslapan horizontes, límite estacionario y singularidad en los radios límite  $r = 2M$  y  $r = 0$ . Aumentando el giro al caso lento podemos ver cómo la ergoesfera se achata en los polos y los horizontes se acercan entre sí; el exterior se comprime y el interior se hincha, separándose de  $r = 0$  y por tanto de la singularidad. También podemos apreciar cómo los horizontes tocan al límite estacionario en el eje. Aumentando el giro aún más al caso extremo, ambos horizontes colapsan en uno y el límite estacionario pierde suavidad en el eje. Finalmente, en el caso rápido los horizontes desaparecen y la ergoesfera se separa.

**Definición 6.5.** Sea  $K^*$  un espaciotiempo Kerr\*. La región donde el campo de Killing  $\partial_t$  es tipo espacio  $\{g_{tt} > 0\}$ , es llamada la *ergoesfera*. La ergoesfera está delimitada por el límite estacionario y contiene al bloque **II** en caso de existir. Denotamos:

$$\mathcal{E} = \{g_{tt} > 0\} \cap \mathbf{I} \quad y \quad \mathcal{E}' = \{g_{tt} > 0\} \cap \mathbf{III}.$$

Para adquirir intuición sobre la ergoesfera, supongamos que somos un observador en la región estacionaria, registrando la trayectoria de un objeto que está dentro de la ergoesfera, ver la observación 5.2. Nosotros veríamos que, sin importar la resistencia que imponga dicho objeto, éste no tendría más remedio que girar en la dirección de giro del agujero negro, es decir, la coordenada  $\varphi$  de dicho objeto resultaría ser estrictamente creciente. Esto fue mostrado en la demostración de la proposición 5.1. Para mostrar que  $\varphi' > 0$ , solo es necesaria la condición de que  $\partial_t$  sea espacial, es decir, que dicho objeto esté dentro de la ergoesfera. Veremos que este fenómeno no es solo una curiosidad, ya que puede ser aprovechado para intercambiar masa por energía y momento angular como discutiremos a continuación. Recordemos que la energía y el momento angular de una curva  $\gamma$  están definidos como

$$\mathbf{E}(\gamma) = -g(\partial_t, \gamma') \quad y \quad \mathbf{L}(\gamma) = g(\partial_\varphi, \gamma').$$

**Observación 6.6.** Dada una curva  $\gamma$  temporal o nula, tal que apunta hacia el futuro entonces  $g(\partial_t, \gamma') < 0$  en la región estacionaria (donde  $\partial_t$  es temporal), es decir, tiene energía positiva. Por otro lado, si  $\gamma$  se encuentra dentro de la ergoesfera, dicha energía puede adquirir valores negativos, ya que  $\partial_t$  es un campo espacial. Más aún, si  $\gamma$  es una geodésica entonces la energía y el momento angular son constantes por lo que el signo de dichas constantes puede ser encontrado a partir de ver cuáles regiones cruza.

La ergoesfera presenta una oportunidad para intercambiar masa por energía y momento angular usando al agujero negro de Kerr; esto es llamado *proceso de Penrose*, en honor a Sir Roger Penrose:

Consideremos una partícula material en caída libre  $\gamma$  (i.e., una geodésica temporal que apunta al futuro) que cae desde la región estacionaria  $\mathcal{E}$ , a la ergoesfera  $\mathcal{E}'$ . Por la observación anterior, podemos asegurar que  $\mathbf{E}(\gamma)$  es positiva. Ahora supongamos que, dentro de la ergoesfera,  $\gamma$  se divide en dos partículas libres,  $\alpha$  y  $\beta$ . Es decir,  $\alpha$  y  $\gamma$  también son geodésicas temporales que apuntan al futuro. La ecuación  $\gamma' = \alpha' + \beta'$  en el momento de separación asegura la conservación de energía-momento por lo tanto,  $\mathbf{E}_\gamma = \mathbf{E}_\alpha + \mathbf{E}_\beta$  y  $\mathbf{L}_\gamma = \mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\beta$ . Suponiendo que la trayectoria de  $\alpha$  sale, de nuevo, a la región estacionaria, y  $\beta$  cruza el horizonte  $\mathcal{H}_+$  de tal manera que  $\mathbf{E}_\beta < 0$ . Tenemos que la partícula  $\alpha$  sale con más energía que con la que  $\gamma$  entró:

$$\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{E}_\gamma - \mathbf{E}_\beta = \mathbf{E}_\gamma + |\mathbf{E}_\beta| > \mathbf{E}_\gamma.$$

Además, en  $\mathbf{I}$ ,  $V$  es un campo vectorial temporal que apunta al futuro. Por tanto  $g(V, \beta') < 0$ , lo que implica que:

$$(r^2 + a^2)g(\beta', \partial_t) + ag(\beta', \partial_\varphi) = \underbrace{-(r^2 + a^2)\mathbf{E}_\beta + a\mathbf{L}_\beta}_{>0} < 0.$$



Por lo tanto, de  $\mathbf{L}_\beta < 0$  concluimos que

$$\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_\gamma - \mathbf{L}_\beta = \mathbf{L}_\gamma + |\mathbf{L}_\beta| > \mathbf{L}_\gamma.$$

Así la partícula  $\alpha$ , también, tiene más momento angular que  $\gamma$ . Desde una perspectiva exterior, esto se traduce en que la partícula que entró intercambió masa por energía y momento angular. Para más detalles puede consultar [Poisson, 2002].

## 6.2. Horizontes; subvariedades nulas

**Proposición 6.7.** *En  $K^*$ , cada horizonte  $\mathcal{H}_\pm$  es una hipersuperficie nula, cerrada, conexa y totalmente geodésica, con conos futuros apuntando en la dirección de  $-\partial_r^*$ . La restricción de el campo canónico  $V|_{\mathcal{H}_\pm}$  es el único campo nulo que es normal (y tangente) a  $\mathcal{H}_\pm$ . Más aún, las curvas integrales de  $V$  en  $\mathcal{H}_\pm$  pueden ser reparametrizadas a geodésicas llamadas reposofotones<sup>3</sup>, que generan a  $\mathcal{H}_\pm$ .*

*Demostración.* Recuerde que el espaciotiempo  $K^*$  es la variedad suave  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 \setminus \Sigma$  por lo que dada cualquier constante no nula  $\lambda \in \mathbb{R}$  se tiene que la variedad  $\mathbb{R} \times \{r = \lambda\} \times \mathbb{S}^2$  es difeomorfa a  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ ; ya que no incluye ningún punto de la singularidad  $\Sigma$ . En particular, si  $a \neq 0$ , tomamos  $\lambda = r_\pm$  (esto incluye todos los espaciotiempos de Kerr), y se concluye que para un observador estacionario, cada horizonte  $\mathcal{H}_\pm$  es una esfera topológica, a través del tiempo.

De lo anterior, el horizonte (salvo el eje) está parametrizado por las coordenadas  $\{t^*, \theta, \varphi^*\}$ . Esto implica que  $\{\partial_t, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$  genera a el haz tangente de  $\mathcal{H}_\pm$ . Por lo tanto, el determinante de la métrica de Kerr<sup>\*</sup> restringida a  $\mathcal{H}_\pm$  está dado por:

$$\begin{vmatrix} g_{tt} & 0 & g_{t\varphi} \\ 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{\varphi t} & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = g_{\theta\theta} \underbrace{(g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2)}_{-S^2\Delta} = -\rho^2 S^2 \Delta.$$

Reconocemos el término entre paréntesis que fue calculado en la demostración del lema 2.11. Recuerde que,  $g_{ij} = g_{ij}^*$  para  $i, j$  distintos de  $r$ .

El cálculo anterior muestra que la métrica se vuelve degenerada en los horizontes, salvo en el eje. Sin embargo, la continuidad nos asegura que la métrica debe permanecer degenerada sobre el eje  $S = 0$ . Por otro lado, recordemos que  $g(V, V) = -\rho^2 \Delta$ ; por lo tanto, el campo canónico  $V$  es nulo sobre  $\mathcal{H}_\pm$ . Luego, como  $V$  es una combinación lineal de  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$  entonces  $V$  es tangente a  $\mathcal{H}_\pm$ . Como resultado de lo anterior, y por el álgebra lineal de Lorentz tenemos que, para todo  $p \in \mathcal{H}_\pm$ ;

$$T_p \mathcal{H}_\pm = V(p)^\perp.$$

Ahora, mostraré que  $\mathcal{H}_\pm$  es totalmente geodésico, es decir, dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}_\pm)$ :

$$\forall p \in \mathcal{H}_\pm, \nabla_Y X(p) \in T_p \mathcal{H}_\pm.$$

<sup>3</sup>Esta es una traducción literal de ‘restphotons’ [O’Neill, 2014]

Para ello, considere  $V_{\pm} = (r_{\pm}^2 + a^2)\partial_t^* + a\partial_{\varphi}^*$ , la restricción de  $V$  sobre  $\mathcal{H}_{\pm}$ , respectivamente. Los campos  $V_{\pm}$  son de Killing, ya que son combinaciones lineales constantes de los campos de Killing  $\partial_t$  y  $\partial_{\varphi}$ . Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}_{\pm})$  como la conexión de Levi-Civita es compatible con la métrica tenemos que:

$$g(\nabla_X Y, V) = Xg(Y, V) - g(Y, \nabla_X V) = -g(Y, \nabla_X V).$$

La última igualdad es consecuencia de que  $V$  es siempre normal a los horizontes y por tanto, perpendicular a cualquier campo tangente a ellos. Intercambiando los papeles de  $X$  y  $Y$  obtenemos,  $g(\nabla_X Y, V) = -g(X, \nabla_Y V)$ . Luego, como  $V = V_{\pm}$  en  $\mathcal{H}_{\pm}$  y  $V_{\pm}$  es de Killing podemos aplicar la proposición 1.24 para así obtener:

$$g(\nabla_Y X, V_{\pm}) = g(X, \nabla_Y V_{\pm})$$

por lo tanto,

$$g(\nabla_X Y, V_{\pm}) = -g(\nabla_Y X, V_{\pm}).$$

Por otro lado, la simetría de la conexión de Levi-Civita provee la identidad;  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ . Luego,  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}_{\pm})$  entonces,  $g([X, Y], V_{\pm}) = 0$ . Lo que implica

$$g(\nabla_X Y, V_{\pm}) = g(\nabla_Y X, V_{\pm})$$

Por lo tanto,  $g(\nabla_X Y, V_{\pm}) = 0$ , es decir  $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{H}_{\pm})$ , lo que prueba que, fuera del eje,  $\mathcal{H}_{\pm}$  es totalmente geodésico<sup>4</sup>. Pero que sea totalmente geodésica implica que es mínima [O'Neill, 1983]. Por continuidad, y haciendo un procedimiento análogo al usado en la demostración de la proposición 5.8, podemos asegurar que  $\mathcal{H}_{\pm}$  es totalmente geodésico, incluyendo al eje. Finalmente, sea  $\gamma$  una geodésica nula de Kerr tal que  $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}\mathcal{H}_{\pm}$ , por definición  $\gamma$  es una curva nula. Luego, como  $\mathcal{H}_{\pm}$  es una variedad totalmente geodésica cerrada entonces  $\gamma$  es una curva nula siempre tangente a  $\mathcal{H}_{\pm}$ . Nuevamente, el álgebra lineal de Lorentz indica que,

$$\gamma'(s)^{\perp} = T_{\gamma(s)}\mathcal{H}_{\pm} = V(\gamma(s))^{\perp}$$

Por lo tanto,  $\gamma'(s)$  y  $V(\gamma(s))$  deben ser siempre colineales y por tanto, las curvas integrales de  $V_{\pm}$  pueden ser reparametrizadas para ser geodésicas nulas.  $\square$

**Observación 6.8.** Note que la hipótesis  $a \neq 0$  es usada para incluir al horizonte interior. El caso  $a = 0$  (Schwarzschild) admite un solo horizonte, el exterior. Por tanto, este resultado es válido para el único horizonte de Schwarzschild.

El siguiente resultado muestra en qué sentido se puede afirmar que los reposofotones fluyen sobre los horizontes. Es útil recordar la relación entre los campos coordenados de Boyer-Lindquist y Kerr\*  $\partial_i^* = \partial_i$  para  $i \neq r$ .

**Corolario 6.9.** *Consideremos el flujo  $\{\Phi_s\}$  del campo de Killing  $\partial_{\varphi}^*$ . En  $\mathcal{H}_{\pm}$  el campo  $\partial_{\varphi}^*$  es espacial, y el flujo de dicho campo espacial, manda curvas integrales del campo  $V = V_{\pm} = (r_{\pm}^2 + a^2)\partial_t^* + a\partial_{\varphi}^*$  en curvas integrales del mismo campo. Esto es, reposofotones en reposofotones.*

<sup>4</sup>Varios autores piden que los horizontes sean superficies mínimas y nulas [Chruściel, 2020]

La siguiente prueba también funciona para el campo de Killing  $\partial_t^*$ , en lugar de  $\partial_\varphi^*$ .

*Demostración.* Recuerde que los horizontes  $\mathcal{H}_\pm$  están parametrizados por las coordenadas Kerr\*;  $(t^*, \theta, \varphi^*)$ . Consideremos  $p \in \mathcal{H}_\pm$ , recordemos que dado  $\Phi_s \in \{\Phi_s\}$ ,  $\Phi_s(p) = \beta(s)$  donde  $\beta$  es curva integral de  $\partial_\varphi^*$  tal que  $\beta(0) = p$ . Note que la única coordenada de  $\beta$  que no es constante es  $\varphi^*$ , esto por ser  $\beta$  curva integral del campo coordenado  $\partial_\varphi^*$ . Por tanto,  $\Phi_s(\mathcal{H}_\pm) \subseteq \mathcal{H}_\pm$ . Luego, como  $\partial_\varphi^*$  es de Killing,  $\{\Phi_s\}$  es una familia de isometrías, por tanto cada  $\Phi_s$  manda geodésicas en geodésicas y además conservan su carácter causal. Así las cosas, consideremos un reposofotón  $\gamma$  en  $\mathcal{H}_\pm$ , y una isometría  $\Phi_s \in \{\Phi_s\}$ . Entonces,  $\Phi_s \circ \gamma$  es una geodésica nula contenida en  $\mathcal{H}_\pm$ , el resultado anterior asegura que,  $\Phi_s \circ \gamma$  debe ser un reposofotón, ya que  $V_\pm$  es el único campo nulo tangente a los horizontes (salvo múltiplo escalar), y  $\mathcal{H}_\pm$  es una subvariedad cerrada y totalmente geodésica.  $\square$

El resultado anterior es sumamente interesante, ya que muestra que los horizontes son los lugares donde la gravedad es lo suficientemente fuerte como para hacer orbitar a la luz. ¡Sí, la luz también puede orbitar!

**Observación 6.10.** Note que las congruencias principales nulas salientes son haces de luz que buscan salir del agujero negro: Primero, las ecuaciones que describen a dichas congruencias en coordenadas Kerr\* son:

$$(t^*)' = 2(r^2 + a^2)/\Delta, \quad r' = 1, \quad \theta' = 0, \quad (\varphi^*)' = 2a/\Delta.$$

Esta representación no está bien definida en los horizontes,  $\Delta = 0$ , pero su extensión es inmediata. Consideremos  $N = \partial_r^* + (2/\Delta)V$  el campo vectorial asociado a las ecuaciones anteriores. Es decir, las congruencias nulas principales no son más que curvas integrales de  $N$ , con la parametrización geodésica (i.e., la parametrización obtenida de las ecuaciones geodésicas<sup>5</sup>). Para extender estas congruencias, es necesario abandonar la parametrización geodésica. Definimos el campo vectorial  $N^*$  como:

$$N^* = (\Delta/2)N = (\Delta/2)\partial_r^* + V.$$

Este nuevo campo tiene la ventaja de que está bien definido en los horizontes. Además, sus curvas integrales son reparametrizaciones de las congruencias nulas principales salientes. Note que  $N^*$  apunta hacia el futuro: Recuerde que  $\partial_r^* =$

---

<sup>5</sup>Esta parametrización modela el flujo de luz para observadores usando coordenadas de Boyer-Lindquist.

$\partial_r - V/\Delta$  y  $g(V, V) = -\Delta\rho^2$ , entonces,

$$\begin{aligned} g(N^*, -\partial_r^*) &= g((\Delta/2)\partial_r^* + V, -\partial_r^*) \\ &= -(\Delta/2) \underbrace{g_{rr}^*}_0 - g(V, \partial_r^*) \\ &= -g(V, \partial_r - V/\Delta) \\ &= \underbrace{-g(V, \partial_r)}_0 + (1/\Delta)g(V, V) = -\rho^2 < 0. \end{aligned}$$

Dicho esto podemos decir que las curvas integrales de  $N^*$  son la representación global de las congruencias nulas principales salientes. Así las cosas, para cada punto en un espaciotiempo  $Kerr^*$  existe una única congruencia principal nula saliente que pasa por ese punto, así como una entrante, pero eso ya lo sabíamos. También es importante notar que el campo  $N^*$  restringido a los horizontes  $\mathcal{H}$  es justamente  $V$ , por tanto los reposofotones son en realidad haces de luz intentando escapar, amarrados por la atracción gravitacional del agujero negro de Kerr, provocando que su coordenada radial quede fija.

## El horizonte de eventos

**Corolario 6.11.** *Consideremos un espaciotiempo  $Kerr^*$ ,  $K^*$ , y una curva temporal o nula  $\gamma$  tal que  $\gamma'$  apunta siempre hacia el futuro y nunca es colineal a  $V$ . Entonces, si  $\gamma(0) \in \mathcal{H}$  se tiene que,  $\gamma'(0) \notin T_{\gamma(0)}\mathcal{H}$ , es decir, corta transversalmente a  $\mathcal{H}$ . Más aún, la coordenada  $r$  de  $\gamma$  cumple que  $r'(0) < 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}\mathcal{H}$ , como  $T_{\gamma(0)}\mathcal{H}$  es un subespacio nulo de  $T_{\gamma(0)}K^*$  entonces, cualquier vector fuera de la línea generada por  $V(\gamma(0))$  debe ser espacial. Por lo tanto,  $\gamma'(0)$  es un vector espacial, lo que presenta una contradicción. Ahora, veamos que  $r'(0) < 0$ . Observe que:

$$g(\text{grad } r, \partial_j^*) = dr(\partial_j^*) = \delta_{rj}$$

esto implica que, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  distinto de cero,  $\text{grad } r$  es normal a la superficie definida por  $r = \lambda$ . En particular,  $\text{grad } r$  es normal a  $\mathcal{H}$ , por tanto,  $\text{grad } p(\gamma(0))$  es un vector nulo. Más aún,  $\text{grad } r$  apunta hacia el futuro, ya que:

$$g(\text{grad } r, -\partial_r^*) = -1, \quad \text{en } \mathcal{H}.$$

Lo que implica que, como  $\gamma'$  apunta hacia el futuro,  $g((\text{grad } r)(\gamma(0)), \gamma'(0)) < 0$ , es decir,  $r'(0) < 0$ .  $\square$

El resultado anterior muestra que cualquier partícula material o rayo de luz (que no sea un reposofotón) que toque a algún horizonte, está obligada a cruzarlo. Más aún, el cruce debe ocurrir de manera que la coordenada radial,  $r$ , de dicha partícula sea decreciente. Por tanto, los horizontes solo se pueden cruzar en una dirección, de afuera hacia adentro, y todo lo que cruza ya nunca podrá regresar al bloque anterior. Esto es, el horizonte exterior delimita la región

en donde la gravedad es tan fuerte que ni la luz puede escapar de ésta (i.e., un agujero negro). Por otro lado, el horizonte interior delimita una región donde materia y luz pueden entrar, pero no retornar (i.e., un agujero blanco).

Esto será lo más cerca que estaremos a una noción formal de un agujero negro o agujero blanco, ya que sus definiciones más formales implican la completación conforme del espaciotiempo en cuestión, en este caso los espaciotiempos de Kerr. Esto resulta ser un tema no trivial que se escapa de los fines de esta tesis, pero se puede revisar [Chruściel, 2020] y [Penrose and Rindler, 1984].

**Proposición 6.12.** *Consideremos un espaciotiempo Kerr\*  $K^*$  y un punto  $p \in K^*$ . Entonces,  $p \in \mathbf{I}$  si y solo si, existe una curva temporal que apunta hacia el futuro tal que  $\gamma(0) = p$  y  $r(\gamma(s)) \rightarrow +\infty$  cuando  $s \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Como fue discutido anteriormente, ninguna partícula fuera del bloque  $\mathbf{I}$  puede cruzar el horizonte  $\mathcal{H}_+$  por lo que solo resta probar una implicación:

Dada  $\lambda \in (0, 1)$ , consideremos una modificación del campo que define a la congruencia nula principal saliente:

$$X_\lambda = \lambda \partial_r + \frac{V}{\Delta}.$$

Veamos que es un campo temporal en  $\mathbf{I}$ :

$$g(X_\lambda, X_\lambda) = \lambda^2 g_{rr} - \frac{\rho^2}{\Delta} = \frac{(\lambda^2 - 1)}{\Delta} < 0, \quad \text{en } \mathbf{I}.$$

Además,  $X_\lambda$  apunta hacia el futuro:

$$\begin{aligned} g(-\partial_r^*, X_\lambda) &= g(-\partial_r + \Delta^{-1}V, X_\lambda) \\ &= -\lambda g_{rr} - \rho^2 = -\rho^2(\Delta^{-1}\lambda + 1) < 0, \quad \text{en } \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Por tanto, dada una curva integral  $\gamma$  de  $X_\lambda$  tal que  $\gamma(0) = p$  cumple que  $r(\gamma(s)) = \lambda s \rightarrow +\infty$  cuando  $s \rightarrow +\infty$ .  $\square$

El resultado anterior muestra que el horizonte exterior  $\mathcal{H}_+$  es un *horizonte de eventos*, ya que el bloque  $\mathbf{I}$  es la región en la que es posible escapar hacia  $r = +\infty$  y la frontera es justamente  $\mathcal{H}_+$ .

### 6.3. Geometría del eje y el agujero blanco

Ahora analizaremos las propiedades geométricas del eje  $\mathbb{E} : S = 0$ : Recordemos que  $\mathbb{E}$  es cerrado y desconexo, tiene dos componentes conexas, el eje norte  $\theta = 0$  y el eje sur  $\theta = \pi$ . Además  $\mathbb{E}$  resulta ser el conjunto de ceros del campo de Killing  $\partial_\varphi^*$ . Podemos encontrar coordenadas para cualquiera de estas componentes, haciendo  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$  y eliminando la coordenada  $\varphi^*$ : El elemento de línea Kerr\* es:

$$ds^2 = g_{tt}dt^{*2} + 2g_{t\varphi}dt^*d\varphi^* + g_{\varphi\varphi}d\varphi^{*2} + \rho^2d\theta^2 + 2dt^*dr - 2aS^2d\varphi^*dr.$$

Por tanto, el elemento de línea del eje  $\mathbb{E}(t^*, r)$  está dado por

$$ds^2|_{\mathbb{E}} = g_{tt}dt^{*2} + 2dt^*dr = (g_{tt}dt^* + 2dr)dt^* = \omega dt^*,$$

donde  $\omega = g_{tt}dt^* + 2dr$ . Note que en  $S = 0$  se cumple que  $g_{tt} = -\Delta/(r^2 + a^2)$ , por tanto,

$$ds^2|_{\mathbb{E}} = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \omega = -\Delta/(r^2 + a^2)dt^* + 2dr = 0 \quad \text{ó} \quad dt^* = 0.$$

Veamos que  $ds^2|_{\mathbb{E}} = 0$  define dos familias de curvas nulas sobre los ejes: El haz tangente de  $\mathbb{E}$  es generado por los campos vectoriales  $\partial_t$  y  $\partial_r^*$ , luego  $dt^*(\partial_r^*) = 0$ , y como la dimensión de  $\mathbb{E}$  es dos, se tiene que  $\partial_r^*$  genera por completo a los subespacios definidos por  $dt^* = 0$ . Por tanto,  $dt^* = 0$  define el conjunto de curvas integrales del campo nulo  $\partial_r^*$ , esto es, la congruencia nula principal entrante. Por otro lado, recuerde que  $N^* = (\Delta/2)\partial_r^* + V$ ,  $dr = dr^*$ ,  $\partial_t = \partial_t^*$ , y  $\partial_\varphi = \partial_\varphi^* = 0$  en  $\mathbb{E}$ . Así,  $N^*|_{\mathbb{E}} = (\Delta/2)\partial_r^* + (r^2 + a^2)\partial_t^*$ , por tanto

$$\omega(N^*) = (-\Delta/(r^2 + a^2))(r^2 + a^2) + 2(\Delta/2) = 0.$$

Es decir, las curvas definidas por  $\omega = 0$  son exactamente las curvas integrales de  $N^*$ , esto es, la congruencia nula principal saliente.

Para estudiar el flujo de dichas congruencias sobre el eje, con su parametrización hacia el futuro, es decir como curvas integrales de  $N^*$  y  $-\partial_r^*$ , basta analizar la componente radial de dichos campos. Dado que la coordenada radial de  $-\partial_r^*$  es igual a  $-1$ , se tiene que las curvas integrales de este campo proceden desde  $r = +\infty$  a  $r = -\infty$ . Por otro lado, la componente radial de  $N^*$  es  $(\Delta/2)$ . En **I**, las curvas integrales de dicho campo van desde  $r > r_+$  hasta  $r = +\infty$ . En los horizontes, los reposofotones tienen la coordenada radial constante. En el bloque **II** tenemos  $(\Delta/2) < 0$ , por lo que las curvas nulas principales salientes, sorprendentemente, fluyen desde el valor límite  $r = r_+$  hasta  $r = r_-$ . Finalmente, en el bloque **III** pareciera que dichas curvas pretenden entrar al agujero negro desde el tercer bloque; en este bloque  $\Delta/2 > 0$ , por lo que la coordenada radial de las curvas nulas principales va desde  $r = -\infty$  hasta  $r = r_-$ .

El rango de las curvas principales nulas salientes y entrantes recién discutido es válido no solo en el eje  $\mathbb{E}$ . Pero las propiedades del eje discutidas muestran un comportamiento extraño en el bloque **III**; un rayo de luz viajando sobre el eje  $\mathbb{E}$  entrando al agujero negro desde el bloque **III** jamás toca al horizonte  $\mathcal{H}_-$ . Es decir, ¡el campo gravitacional de Kerr en el bloque **III** pareciera repeler, no atraer! Concluimos que el bloque **III** no es análogo al bloque **I** sino más bien su opuesto (gravitacional), un *agujero blanco*.

## 6.4. Estructura causal y la máquina del tiempo de Carter

**Proposición 6.13.** *Consideremos un espaciotiempo de Kerr lento, en los bloques **I** y **II** no existen curvas nulas o temporales que sean cerradas.*

*Demostración.* Sea  $N$  la hipersuperficie  $\{t = t_0\}$  parametrizada por  $r, \varphi, \theta$ , entonces  $\{\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$  generan a cada espacio tangente de  $N$  fuera del eje, además en  $\mathbf{I} \setminus \mathbb{E}$  estos campos son espaciales y ortogonales dos a dos y espaciales. Por tanto, fuera del eje se tiene que  $\det(g|_N) > 0$  y por continuidad  $N$  es espacial en todo el bloque  $\mathbf{I}$ . Note que  $\text{grad } t$  es normal a  $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi$ , y por tanto:

$$(\text{grad } t(p))^\perp = T_p N \quad \forall p \in N.$$

Sea  $\alpha$  una curva cerrada en  $\mathbf{I}$ , entonces, todas sus coordenadas son cíclicas; en particular,  $t(\alpha(s))$  lo es, por tanto, existe un parámetro  $s_0$  tal que  $t'(s_0) = 0$ , es decir,  $g(\text{grad } t(\alpha(s_0)), \alpha'(s_0)) = 0$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que,  $t_0 = t(\alpha(s_0))$ , así,  $\alpha(s_0) \in T_{\alpha(s_0)}N$ , por tanto,  $\alpha$  no puede ser temporal ni nula. Para el bloque  $\mathbf{II}$  se hace un argumento análogo, intercambiando  $t$ , por  $r$ : Así, la hipersuperficie  $M = \{r = r_0\} \cap \mathbf{II}$  es tal que los espacios tangentes están generados por los campos espaciales  $\partial_t, \partial_\theta, \partial_\varphi$ , el resto de la prueba se sigue de forma totalmente análoga.  $\square$

**Definición 6.14.** La región donde el campo vectorial  $\partial_\varphi$  es temporal es conocida como la máquina del tiempo de Carter,

$$\mathbb{T} = \{g_{\varphi\varphi} < 0\} \subset \mathbf{III}.$$

**Lema 6.15.** Dado  $p \in \mathbf{III}$  con coordenadas de Boyer-Lindquist  $(t_0, r_0, \theta_0, \varphi_0)$  existe una constante  $k > 0$  tal que para cualesquiera números  $\delta \geq k$  y  $\varphi$ , existe

1. Una curva temporal  $\alpha$  tal que apunta al futuro y conecta a  $p$  con el punto con coordenadas  $(t_0 + \delta, \hat{r}, \pi/2, \varphi) \in \mathbb{T}$  y,
2. Una curva temporal  $\beta$  tal que apunta hacia el pasado y conecta a  $p$  con el punto de coordenadas  $(t_0 - \delta, \hat{r}, \pi/2, \varphi) \in \mathbb{T}$ .

*Demostración.* Por la observación 3.6, es posible elegir  $\hat{r} < 0$  con  $|\hat{r}|$  lo suficientemente pequeño tal que  $(t, \hat{r}, \pi/2, \varphi) \in \mathbb{T}$ , para cualesquiera  $\varphi$  y  $t$ . Luego, sea  $\alpha_1(s)$  una curva contenida en el bloque  $\mathbf{III}$  con coordenadas de Boyer-Lindquist  $(t_0, r(s), \theta(s), \varphi_0)$ . Requerimos que dicha curva conecte a los puntos  $p$  y el punto con coordenadas  $(t_0, \hat{r}, \pi/2, \varphi_0)$ . Dado  $A > 0$  consideremos la curva definida por las coordenadas de Boyer-Lindquist

$$\alpha(s) = (At(s) + t_0, r(s), \theta(s), \varphi_0 + Aas),$$

donde  $t(s)$  satisface la ecuación diferencial  $\frac{dt}{ds} = r^2 + a^2$ . Así las cosas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= r'(s)\partial_r + \theta'(s)\partial_\theta + As\partial_\varphi + A(r^2 + a^2)\partial_t \\ &= \alpha'_1 + A[a\partial_\varphi + (r^2 + a^2)] \\ &= \alpha'_1 + AV(\alpha(s)). \end{aligned}$$

Ahora, es importante notar que  $\alpha'_1$  y  $V$  son ortogonales, ya que el campo  $V$  es ortogonal a ambos  $\partial_r$  y  $\partial_\theta$ . Dicho esto, un cálculo directo muestra que

$$g(\alpha', \alpha') = g(\alpha'_1, \alpha'_1) - A^2 g(V, V) = g(\alpha'_1, \alpha'_1) - A^2 \Delta \rho^2.$$

Luego, como **III** es abierto y no contiene a los conjuntos cerrados definidos por  $\Delta = 0$  y  $\rho^2 = 0$ , tenemos que  $-A^2 \Delta \rho^2 < 0$ , por tanto podemos asegurar que para  $A$  suficientemente grande,  $\alpha$  es temporal. Más aún, apunta hacia el futuro; recuerde que el campo  $V$  es temporal y apunta hacia el futuro en **III**, por tanto

$$g(\alpha', V) = Ag(V, V) < 0.$$

Finalmente, podemos extender a  $\alpha$  a una curva integral de los campos temporales que apuntan al futuro,  $V$  o  $-\partial_\varphi$ . Extendiendo  $\alpha$  a una curva integral de  $V$ , haciendo crecer ambas coordenadas  $t$  y  $\varphi$  simultáneamente, y extendiendo a una curva integral de  $-\partial_\varphi$  podemos hacer que  $\varphi$  decrezca a cualquier valor requerido. La existencia de la constante  $k$  es producto de que la coordenada  $t$  de  $\alpha$  satisface

$$\frac{dt}{ds} = g(\text{grad } t, \alpha') = A(r^2 + a^2) \geq Aa^2 > 0$$

es decir, es estrictamente creciente; como  $-\partial_t$  no es un campo temporal que apunta hacia el futuro, no podremos regular la coordenada  $t$  así como hicimos para  $\varphi$ . Esto prueba el primer inciso del lema, para el segundo inciso procedemos de forma casi análoga, simplemente intercambiamos los papeles de  $A$  por  $-A$ ,  $V$  por  $-V$ , y  $-\partial_\varphi$  por  $\partial_\varphi$ .  $\square$

El proceso de extensión se hace de la siguiente manera. Supongamos que  $\alpha$  cumple con la ecuación diferencial  $\alpha'(s) = X(\alpha(s))$ . Digamos que queremos extender a la curva  $\alpha$  a una curva integral de un campo vectorial  $Y$  definido en el intervalo  $[0, 1]$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , consideremos una curva  $\gamma$  definida en  $[0, \varepsilon]$  tal que  $\gamma'(s) = (\varepsilon - s)X(\gamma(s)) + sY(\gamma(s))$ , suponiendo que  $\gamma(0) = \alpha(1)$  entonces satisface,  $\gamma'(0) = \varepsilon\alpha'(1)$  y  $\gamma'(\varepsilon) = \varepsilon Y(\gamma(\varepsilon))$ . Ahora, podemos tomar funciones pastel en los extremos que escalen los vectores de manera adecuada para ser curvas integrales de  $X$  y  $Y$  en los extremos.

**Teorema 6.16.** *Para todos puntos  $p, q \in \text{III}$ , existe una curva temporal que apunta hacia el futuro y conecta a  $p$  con  $q$ . Es decir, todos los eventos en **III** están causalmente conectados.*

*Demostración.* La curva requerida será construida a partir de tres segmentos; el lema que recién probamos será la herramienta fundamental para construir los segmentos extremos. Supongamos que los puntos  $p$  y  $q$  tienen coordenadas  $(t_0, r_0, \theta_0, \varphi_0)$  y  $(t_1, r_1, \theta_1, \varphi_1)$ , respectivamente. Por el lema anterior, para  $p$  existe  $k_0 > 0$  tal que si  $\delta_0 \geq k_0$ , existe una curva temporal que apunta hacia el futuro  $\alpha$  tal que conecta a  $p$  con el punto de coordenadas  $(\tilde{t}, \hat{r}, \theta, \tilde{\varphi})$ , donde  $\tilde{t} = \delta_0 + t_0$ .

Por otro lado, dado  $B > 0$  definimos la curva  $\lambda$  en coordenadas de Boyer-Lindquist; para  $s \geq 0$

$$\lambda(s) = (\tilde{t} - s, \hat{r}, \pi/2, \tilde{\varphi} - Bs).$$



donde  $\hat{r}$  es como en el lema anterior; esto asegura que  $\lambda$  permanezca siempre en  $\mathbb{T}$ . Por otro lado,  $\lambda' = -B\partial_\varphi - \partial_t$  entonces  $g(\lambda', \lambda') = B^2g_{\varphi\varphi} - 2Bg_{\varphi t} + g_{tt}$ . Como las componentes de la métrica sólo dependen de  $r$  y  $\theta$ , se tiene que  $g(\lambda', \lambda')$  es constante. Luego, como  $g_{\varphi\varphi} < 0$ , para  $B$  suficientemente grande  $\lambda$  tiene carácter temporal. Ahora, veremos su orientación temporal: recuerde que en el primer capítulo se vió que  $g(V, \partial_t) = -\Delta$  y  $g(V, \partial_\varphi) = \Delta a S^2$  pero  $S = 1$  en  $\lambda$ , así las cosas

$$\begin{aligned} g(\lambda', V) &= g(-B\partial_\varphi - \partial_t, V) \\ &= -B(\Delta a) - (-\Delta) = \Delta(1 - aB), \end{aligned}$$

lo que es negativo para  $B > 1/a$ , ya que  $\Delta > 0$  en **III**. Es necesario notar que la coordenada  $t$  de  $\lambda$  satisface  $dt/ds = -1$ , por lo que es estrictamente decreciente. Finalmente por el lema anterior, para  $q$  existe  $k_1 > 0$  tal que si  $\delta_1 \geq k_1$  existe una curva temporal  $\beta$  que apunta al pasado, tal que conecta a  $q$  con el punto de coordenadas  $(\bar{t}, \hat{r}, \pi/2, \bar{\varphi})$ , donde  $\bar{t} = t_1 - k_1$ , requerimos que  $\lambda$  pueda conectarse a la curva  $\beta$ . Para que dicha conexión sea posible, es necesario que el punto de inicio de  $\lambda$  tenga coordenada  $t$  mayor que  $\bar{t}$ , es decir  $\tilde{t} > \bar{t}$ . Tomamos  $\delta_0$  tal que  $\tilde{t} = t_0 + \delta_0 > t_1 + k_1$ , de esta manera aseguramos que  $\lambda$  alcanzará eventualmente al punto con coordenadas  $(\bar{t}, \hat{r}, \pi/2, \bar{\varphi})$ .

Resta ajustar apropiadamente a  $\tilde{\varphi}$  y  $\bar{\varphi}$  para que la coordenada  $\varphi$  de  $\lambda$  alcance a  $\bar{\varphi}$  a partir de  $\tilde{\varphi}$  de manera simultánea con los requerimientos de la coordenada  $t$ . Esto es posible ya que el lema anterior no pone ninguna restricción a la coordenada  $\varphi$ . Por lo tanto, la curva  $\alpha \cup \lambda \cup (-\beta)$  está bien definida, es temporal y apunta hacia el futuro. Esto finaliza la prueba.  $\square$

La máquina del tiempo yace en el bloque **III** dentro de la singularidad de anillo (3.6) y prueba que el tercer bloque es *vicioso*, esto es, que existen curvas temporales cerradas, lo que hace difícil de creer que este agujero blanco sea un posible fenómeno natural.

## 6.5. Espaciotiempo de Schwarzschild

Finalmente haré breve mención del caso sin giro (i.e., Schwarzschild) para realmente sentir el impacto que tiene el giro en las subvariedades notables estudiadas en este capítulo. Como fue mencionado en el primer capítulo, haciendo  $a = 0$  en las componentes de la métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist obtenemos la métrica de Schwarzschild, que podemos escribir de la siguiente forma a través del elemento de línea:

$$ds^2 = -h dt^2 + h^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad h(r) = 1 - 2M/r$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + S^2 d\varphi^2$  es el elemento de línea de la 2-esfera euclidiana. La función  $h$  tomó el papel del polinomio  $\Delta$ . Recordemos que la forma general de las raíces del polinomio  $\Delta$  es  $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ , fijando  $a = 0$  podemos notar que uno de los horizontes, el interior, está traslapado con la singularidad  $r = 0$ ,

mientras que la otra raíz coincide con el único cero de la función  $h$ ,  $r = 2M$ . Por tanto, la métrica de Schwarzschild es no degenerada en los llamados *bloques de Schwarzschild*, **I** :  $r > 2M$  y **II** :  $0 < r < 2M$  separados por el único horizonte  $\mathcal{H} : r = 2M$ . Similar al caso de Kerr, el horizonte de Schwarzschild resulta ser una subvariedad nula totalmente geodésica con todas las propiedades del llamado horizonte exterior expuestas en el capítulo anterior. Similarmente, dichos bloques poseen las propiedades expuestas en el teorema 3.5.

La región estacionaria está ahora definida por  $h > 0$ , es decir para  $r > 2M$ , por lo tanto el límite estacionario coincide con el único horizonte y la singularidad  $\Sigma : r = 0$ .





# Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue explorar una familia de espaciotiempos que exhibe cómo las propiedades gravitacionales (i.e., geométricas) de una familia de espaciotiempos son afectadas por el giro de la masa central en cuestión, a diferencia de lo establecido por la ley de gravitación de Newton. Esto a través de los espaciotiempos de Kerr, que son soluciones a las ecuaciones de Einstein. Una de las primeras consecuencias del giro es la forma de la singularidad  $\Sigma$ ; Por un lado, para el caso  $a = 0$ ,  $\Sigma : r = 0$  es una esfera topológica a través del tiempo. Por otro lado, si  $a \neq 0$  tenemos que dicha singularidad toma forma de anillo (a través del tiempo).

Un hecho importante que no fue incluido en esta tesis es que una singularidad vuelve geodésicamente incompleto<sup>6</sup> a un espaciotiempo, es decir, cualquier geodésica que toque dicha singularidad tiene un dominio maximal propiamente contenido en  $\mathbb{R}$ . Apoyados de esto, podemos concluir que el giro abre la región  $r < 0$  ya que la singularidad no evita que una partícula cruce de  $r > 0$  a  $r < 0$ . Esta región contiene a la máquina del tiempo de Carter, que hace al bloque **III** vicioso.

Otra consecuencia del giro que marca una diferencia importante entre Schwarzschild y Kerr es la posición de los horizontes: Si  $a = 0$  el (único) horizonte se encuentra en  $r = 2M$ , pero si  $0 < a^2 < M^2$  el horizonte exterior se encuentra en  $r = r_+ < 2M$  es decir el horizonte exterior se comprime como consecuencia de la rotación. A su vez, el horizonte interior se separa del radio  $r = 0$  y por lo tanto, también se separa de la singularidad. Conforme se hace crecer el parámetro  $a$ , los dos horizontes colapsan en uno, aplastando la región **II**. Finalmente el único horizonte desaparece uniendo ambos bloques restantes en uno.

La última consecuencia importante estudiada fue la posición del límite estacionario. Mostramos que en el caso sin giro, el límite estacionario coincide con el único horizonte y la singularidad. Como consecuencia, la ergoesfera no es accesible desde el exterior. En el caso Kerr lento, la compresión del horizonte exterior desvela la ergoesfera y hace el proceso de Penrose posible (ver 6.6). El pedazo de la ergoesfera que sale hacia el exterior (bloque **I**) es donde la rotación del agujero negro fuerza a que toda partícula en esta región gire con él.

---

<sup>6</sup>Para el caso particular de un espaciotiempo de Kerr puede consultar [O'Neill, 2014] y para una visión más general puede ver [Poisson, 2002]. Los teoremas de singularidades desarrolladas por Penrose y Hawking, entre otras cosas, dan condiciones para la formación de estas singularidades, puede consultar [Penrose, 1972].

Para este análisis se extendieron las coordenadas de Boyer-Lindquist sobre los horizontes. Esto fue posible gracias al Teorema de Carter que dio pie a encontrar el sistema de ecuaciones geodésicas de primer orden y así definir las congruencias nulas principales que modelaron gran parte de la estructura geométrica de los espaciotiempos de Kerr. Estas congruencias además de ayudarnos a construir la extensión de coordenadas, dan información sobre la posición de los conos de luz. Como consecuencia de esto vimos que los horizontes son subvariedades cerradas, nulas y totalmente geodésicas. En particular esto muestra que los conos de luz son tangentes a estos horizontes provocando una separación causal en los bloques. También mostramos la existencia de una esfera de fotones que rodea al agujero negro, los llamados reposofotones. Estos fluyen sobre los horizontes mediante los flujos de los campos de Killing  $\partial_t$  y  $\partial_\varphi$ . Finalmente, el bloque **III** modela una especie de opuesto gravitacional a un agujero negro, un agujero blanco.

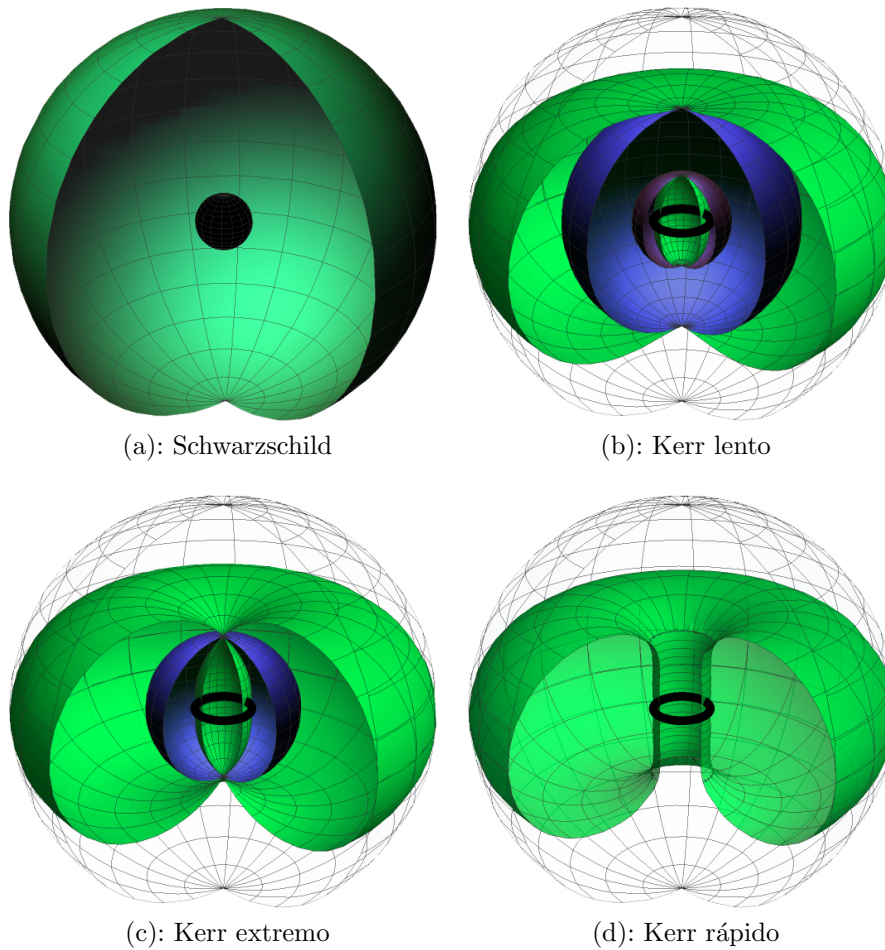


Figura 6.2: Se grafica de la manera usual la ergoesfera, horizontes y singularidad. Se aprecia el surgimiento de los espaciotiempos de Kerr como consecuencia de la rotación.





# Bibliografía

- [Bär, 2013] Bär, C. (2013). *Differential Geometry, Summer term 2013*. Geometry in Postdam.
- [Boyer and Lindquist, 1967] Boyer, R. H. and Lindquist, R. W. (1967). Maximal analytic extension of the kerr metric. *Journal of mathematical physics*, 8(2):265–281.
- [Carroll, 1997] Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*.
- [Carter, 1971] Carter, B. (1971). Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 26(6):331.
- [Chruściel, 2020] Chruściel, P. T. (2020). *Geometry of Black Holes*, volume 169. Oxford University Press.
- [d’Inverno, 1992] d’Inverno, R. A. (1992). Introducing einstein’s relativity. *Introducing Einstein’s relativity by RA D’Inverno*. New York: Oxford University Press.
- [Dyson et al., 1920] Dyson, F. W., Eddington, A. S., and Davidson, C. (1920). IX. a determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333.
- [Einstein, 1905] Einstein, A. (1905). Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, 4.
- [Einstein, 1915] Einstein, A. (1915). *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*. Gedruckt in der Reichsdruckerei.
- [Hawking, 2005] Hawking, S. W. (2005). Information loss in black holes. *Physical Review D*, 72(8):084013.
- [Israel, 1967] Israel, W. (1967). Event horizons in static vacuum space-times. *Physical review*, 164(5):1776.

- [Kerr, 1963] Kerr, R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, 11(5):237.
- [O’Neill, 1983] O’Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press.
- [O’Neill, 2014] O’Neill, B. (2014). *The geometry of Kerr black holes*. Courier Corporation.
- [Oppenheimer and Snyder, 1939] Oppenheimer, J. R. and Snyder, H. (1939). On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56(5):455.
- [Penrose, 1972] Penrose, R. (1972). *Techniques in differential topology in relativity*. SIAM.
- [Penrose and Rindler, 1984] Penrose, R. and Rindler, W. (1984). *Spinors and space-time: Volume 2, Spinor and twistor methods in space-time geometry*, volume 2. Cambridge University Press.
- [Petrov, 1954] Petrov, A. Z. (1954). The classification of spaces defining gravitational fields. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Gosudarstvennogo Universiteta im. VI Ulyanovicha-Lenina [Scientific Proceedings of Kazan State University]*, 114:55–69.
- [Poisson, 2002] Poisson, E. (2002). An advanced course in general relativity. *Lecture notes at University of Guelph*.
- [Robinson, 2009] Robinson, D. (2009). Four decades of black hole uniqueness theorems. *The Kerr spacetime: Rotating black holes in general relativity*, pages 115–143.
- [Schoen and Yau, 1979] Schoen, R. and Yau, S.-T. (1979). On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 65(1):45–76.
- [Schwarzschild, 1916] Schwarzschild, K. (1916). Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 189–196.
- [Visser, 2007] Visser, M. (2007). The kerr spacetime: A brief introduction. *arXiv preprint arXiv:0706.0622*.
- [Wald, 2010] Wald, R. M. (2010). *General relativity*. University of Chicago press.