Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teorías extendidas de gravitación como función del escalar de Kretschmann

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

P R E S E N T A :

Sarahí Silva García

TUTOR

Dr. Sergio Mendoza Ramos

Ciudad Universitaria, CDMX, 2022

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, María Francisca y José Antonio, a mis hermanas Claudia y Viridiana y a mi hermano Marco Antonio, por todo el amor y apoyo que siempre me han dado.

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Sergio Mendoza Ramos; por compartirme sus conocimientos, ideas y consejos; por apoyarme, inspirarme y motivarme, por su comprensión y también por sus enseñanzas de vida.

También quiero agradecer a mis sinodales el Dr. Pablo Padilla Longoria, el Dr. Xavier Nicolás Hernández Döring, el Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada y el Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuellar, por su apoyo en la revisión de este trabajo.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, por la formación académica recibida y al Instituto de Astronomía de la UNAM, por el apoyo y los servicios brindados.

Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida a través del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM, DGAPA-UNAM PAPIIT IN112019, IN110522.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Teconología (CONACyT) el apoyo en el proyecto (CB-2014-01 No. 240512).

Resumen

El objetivo principal del presente trabajo es desarrollar ecuaciones de campo que puedan describir los fenómenos gravitacionales. El análisis se desarrolla a partir de una relación arbitraria de la curvatura del espacio tiempo y la distribución de materia para posteriormente verificar si en algún límite, los modelos propuestos coinciden con teorías bien establecidas en tales límites. De manera puntual se emplean funciones del escalar de Kretschmann κ para describir la curvatura, mientras que la distribución de materia se abordará a partir de un lagrangiano de materia arbitrario.

El estudio de las ecuaciones aquí desarrolladas pretende explorar diferentes aspectos que podrían existir en la gravedad y que no necesariamente podrían estar cubiertos por la relatividad general. Sin embargo, se pretende poder formular un límite donde se recupere la gravedad newtoniana.

Capítulo 1

Introducción

§1.1. Principio de mínima acción

El cálculo de variaciones en general se utiliza para resolver problemas de optimización de funciones. Esta herramienta permite describir cómo se comporta la naturaleza empleando razonamientos matemáticos. De acuerdo con el principio de mínima acción, la trayectoria de una partícula libre, i.e. una partícula cuya presencia no modifica el estado de los campos presentes en el espacio, queda determinada por la asignación de un lagrangiano L tal que el movimiento del sistema satisface que la acción S tome un valor extremo en el intervalo de integración (Landau y Lifshitz, 1976):

$$S := \int_a^b L \, \mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

donde $L = \int \mathcal{L}\mathrm{dv}$ con $\mathcal{L}$ la densidad lagrangiana y dv el volumen de integración. El valor extremal se obtiene al igualar la primera variación δS a cero. El principio de mínima acción establece que una partícula seguirá tal trayectoria extrema y por tanto de dicha variación obtenemos ecuaciones diferenciales con las cuales podemos caracterizar el sistema. En otras palabras, la variación nula de la acción (1.1), i.e.:

$$\delta S = \delta \int_a^b L \, \mathrm{d}t = 0, \tag{1.2}$$

representa las ecuaciones de movimiento de la partícula libre i.e. ecuaciones diferenciales que satisface el sistema físico.

Para que las ecuaciones de movimiento sean covariantes la acción S debe ser una invariante relativista, es decir, una función escalar y por lo tanto el integrando $L\,\mathrm{d}t$ en la ecuación (1.1) es también una cantidad escalar.

La representación de la acción (1.1) y la introducción de un lagrangiano adecuado para la construcción de las ecuaciones de movimiento de una partícula libre, a través de la nulidad de la variación (1.2), es de carácter general; incluiso cuando se toman fenómenos relativistas.

§1.2. Ecuación geodésica

Por el principio de mínima acción, el movimiento de una partícula de prueba en un campo gravitacional entre dos puntos a y b en el espacio-tiempo, seguirá una trayectoria tal que su acción S tome un valor extremo:

$$S = -mc \int_a^b \mathrm{d}s, \tag{1.3}$$

donde m es la masa de la partícula libre, c es la velocidad de la luz y $\mathrm{d}s$ es el intervalo. El factor mc es una constante de acoplamiento que caracteriza a la partícula libre y se obtiene al comparar el intervalo $\mathrm{d}s$ en el límite de bajas velocidades con la expresión no-relativista del lagrangiano de una partícula libre (Landau y Lifshitz, 1997). El intervalo $\mathrm{d}s$ está dado por:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu, \tag{1.4}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico.

En la ecuación anterior y en lo sucesivo, los índices con letras griegas toman valores $0, 1, 2, 3$ y los latinos denotarán $1, 2, 3$; donde la coordenada 0 corresponde a la coordenada temporal y las otras tres son las coordenadas espaciales. Además se usa la convención de Einstein para la suma de índices covariantes y contravariantes repetidos. La signatura de la métrica empleada en este trabajo es (+,-,-,-).

Las variaciones nulas $\delta \int \mathrm{d}s = 0$ de la ecuación (1.3) producen la ecuación de movimiento de una partícula libre en un campo gravitacional (Landau y Lifshitz, 1997):

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{1.5}$$

donde $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ es la conexión Levi-Civita definida como:

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} := \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\mu}} \right). \tag{1.6}$$

La ecuación (1.5) es la ecuación geodésica en un espacio curvo. La relación (1.5) indica que la cuatro aceleración $\mathrm{d}^2 x^{\alpha}/\mathrm{d}s^2$ es igual a la cuatro fuerza $-m\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}(\mathrm{d}x^{\gamma}/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}x^{\beta}/\mathrm{d}s)$ que actúa sobre la partícula de prueba.

Como la conexión $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ contiene derivadas del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ se puede interpretar al tensor métrico como el potencial del campo gravitacional pues sus derivadas con respecto a las coordenadas determinan la fuerza del campo gravitacional que actúa sobre la partícula. Por otro lado en un espacio plano el segundo sumando de ecuación geodésica (1.5) se anula, de ahí que en un espacio plano una partícula libre tiene la propiedad de mantener una velocidad constante, como es esperado para un sistema inercial por la primera ley de Newton.

Otra forma de expresar la ecuación geodésica es mediante el operador diferencial D adecuado a un espacio-tiempo curvo y definido como:

$$DA^{\alpha} := \nabla_{\beta} A^{\alpha}\, \mathrm{d}x^{\beta} = \left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} A^{\gamma} \right) \mathrm{d}x^{\beta}, \tag{1.7}$$

de manera que se puede escribir la ecuación geodésica como (Landau y Lifshitz, 1997):

$$\frac{Du^{\mu}}{ds} = u^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\mu} = 0, \tag{1.8}$$

donde $u^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}s$ es la cuatro velocidad la cual satisface $u^{\mu}u_{\mu} = 1$ de acuerdo con la definición del intervalo (1.4). Como veremos más adelante, el movimiento geodésico de una partícula libre en un espacio-tiempo curvo solamente es válido para la teoría de relatividad general de Einstein en ausencia de gradientes de presión producida por los fluidos que curvan al campo, es decir, para partículas libres. En el caso de teorías extendidas o modificadas de gravitación esto también es en general cierto siempre y cuando no existan acoplamientos de curvatura-materia.

§1.3. Acción de Hilbert

Para comprender esta sección, se mencionará que el tensor de curvatura, o tensor de Riemann, $R^{\eta}{}_{\alpha\gamma\beta}$, es una medida de la curvatura de una variedad. En términos de la conexión

Levi-Civita se expresa como:

$$R^{\eta}{}_{\alpha\gamma\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}. \tag{1.9}$$

De aquí se define el tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ como:

$$R^{\eta}{}_{\alpha\eta\beta} = R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\gamma\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}, \tag{1.10}$$

y finalmente el escalar de curvatura, o escalar de Ricci, R está dado por:

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \tag{1.11}$$

En 1915 David Hilbert derivó las ecuaciones de campo de la teoría de la relatividad general de Einstein (Hilbert, 1915a). Hilbert propuso una acción tal que, al aplicar el principio de mínima acción, se obtiene la forma adecuada de las ecuaciones de campo. Dichas ecuaciones conservan la energía y el momento, son covariantes y en el límite de campo débil se recuperan las ecuaciones diferenciales básicas de la gravedad Newtoniana.

La acción propuesta consta de dos partes: una acción S_{grav} correspondiente al campo gravitacional y una acción S_{m} correspondiente a la materia que produce el campo gravitacional. Para poder recuperar las ecuaciones de la gravedad Newtoniana se espera en principio que las ecuaciones de campo no deban tener derivadas de los potenciales $g_{\mu\nu}$ mayores al segundo orden. Resulta que el escalar de Ricci R es el objeto geométrico el cual es proporcional al lagrangiano gravitacional (Landau y Lifshitz, 1997) pues en el límite de campo débil $R \sim \nabla^2\phi$, donde ϕ es el potencial escalar Newtoniano como se verá en la sección §1.5.

Así, la acción del campo gravitacional, o acción de Hilbert, está dada por:

$$S_{\mathrm{grav}} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}\;\mathrm{d}^4x, \tag{1.12}$$

donde G es la constante de gravitación y $\sqrt{-g}\;\mathrm{d}^4x$ es el elemento diferencial del hipervolumen en cuatro dimensiones, siendo $g = \det(g_{\alpha\beta})$ el determinante del tensor métrico. La integración se realiza sobre todo el 4-espacio y la constante de acoplamiento $c^3/16\pi G$ se obtiene del límite de campo débil para que las ecuaciones de campo resultantes converjan a la ecuación de Poisson gravitacional.

Por otra parte, la acción de materia S_{m} está dada por (Landau y Lifshitz, 1997):

$$S_{\mathrm{m}} = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x, \tag{1.13}$$

en donde $\mathcal{L}_m$ es la densidad lagrangiana.

La acción total $S = S_{\mathrm{grav}} + S_{\mathrm{m}}$ está dada entonces por:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x, \tag{1.14}$$

y dado que las variaciones nulas de la expresión anterior implican que $\delta \int R\sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \propto \delta \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x$ entonces la presencia de materia produce curvatura en el espacio.

§1.3.1. Tensor de energía-momento

La densidad lagrangiana en la ecuación (1.13) es función de la métrica $g^{\mu\nu}$ y sus derivadas con respecto a x^λ (Landau y Lifshitz, 1997), i.e.:

$$S_m = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m \left(g^{\mu\nu}, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x, \tag{1.15}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \delta \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \right\} \mathrm{d}^4 x, \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \delta g^{\mu\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \right) \delta g^{\mu\nu} \right\} \mathrm{d}^4 x. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Para simplificar esta expresión, se utiliza el teorema de Stokes que conecta una integral de una forma diferencial ω con una integral de su derivada exterior $\mathrm{d}\omega$:

Teorema 1 (Stokes): *Sea ω una k forma definida en una región abierta Ω de un espacio n-dimensional y sea M una superficie $(k+1)$-dimensional bien comportada en Ω, con frontera cerrada ∂M, entonces:*

$$\oint_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega. \tag{1.17}$$

La integral del lado izquierdo es una integral sobre la hipersuperficie cerrada ∂M de dimensión k, la cual es frontera a la hipersuperficie de dimension $k+1$ sobre la cual se efectúa *la integración del lado derecho de la ecuación anterior (Buck, 2003).*

El resultado expresado en la ecuación (1.17) se conoce como el teorema generalizado de Stokes, o simplemente teorema de Stokes y es en esencia el teorema fundamental de la geometría diferencial. Se reduce al teorema fundamental del cálculo en una dimensión y a los teoremas vectoriales en tres dimensiones de Gauss y de Stokes.

Ahora bien, de acuerdo al teorema de Stokes, el segundo sumando del lado derecho de la ecuación (1.16) es igual a una integral sobre la superficie espacial de todo el cuatro espacio y como los potenciales tienden a cero en el infinito espacial, dicho término queda anulado. Así pues:

$$\delta S_{\mathrm{m}} = \frac{1}{c}\int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \right) \right\} \delta g^{\mu\nu}\, \mathrm{d}^4 x. \tag{1.18}$$

En términos generales se define al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ como:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} := \frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \right). \tag{1.19}$$

Esta definición garantiza que el momento asociado al sistema físico en cuestión está formado por integrales del tensor $T_{\mu\nu}$ y dado que el momento del sistema es único, es posible mostrar que el tensor de energía-momento es simétrico (Landau y Lifshitz, 1997).

Es costumbre suponer que $\mathcal{L}_m$ depende sólo del tensor métrico y no de sus derivadas y por tanto el tensor de energía-momento es (Mendoza y Silva, 2021):

$$T_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\left(g^{\mu\nu}\right)}, \tag{1.20}$$

y por lo tanto:

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m. \tag{1.21}$$

Sustituyendo la expresión (1.19) en (1.18) resulta que la variación δS_m se puede escribir como:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x. \tag{1.22}$$

§1.3.2. Ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein

Como se muestra en el apéndice §C.1, la variación nula de la acción (1.14), i. e. $\delta S = 0$ produce las siguientes ecuaciones de campo (Landau y Lifshitz, 1997):

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \tag{1.23}$$

en las cuales conservan la energía y el momento pues la divergencia del lado izquierdo es cero (§B.1) y por tanto $\nabla^{\alpha} T_{\alpha\beta} = 0$. Además estas ecuaciones recuperan la gravedad Newtoniana en el límite de campo débil.

Las ecuaciones de campo (1.23) son las *ecuaciones de Hilbert-Einstein*. Estas ecuaciones se pueden reescribir calculando la traza de las mismas:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T, \tag{1.24}$$

y sustituyendo la expresión anterior para R en (1.23):

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right). \tag{1.25}$$

Estas ecuaciones relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la materia para describir la gravitación. No obstante, matemáticamente es posible construir ecuaciones de campo distintas que también relacionen a la curvatura con la materia de maneras más complejas para describir los fenómenos gravitacionales.

§1.4. Ecuación geodésica y nulidad de la divergencia covariante del tensor de energía-momento

La variación de la acción de materia (1.13) en términos del tensor de energía-momento (1.22) está dada por:

$$\delta S_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x = 0. \tag{1.26}$$

Usando el hecho de que la variación $\delta g^{\mu\nu}$ del tensor métrico se puede expresar como (Landau y Lifshitz, 1997):

$$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^{\nu} \xi^{\mu} + \nabla^{\mu} \xi^{\nu}, \tag{1.27}$$

para un campo vectorial de Killing ξ^α que satisface la ecuación de Killing:

$$\nabla^\nu \xi^\mu + \nabla^\mu \xi^\nu = 0, \tag{1.28}$$

entonces, la variación de la acción de materia es:

$$\delta S_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\left(\nabla^\nu \xi^\mu + \nabla^\mu \xi^\nu\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \frac{1}{c}\int T_{\mu\nu}\nabla^\mu \xi^\nu \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = 0, \tag{1.29}$$

donde la última igualdad se obtiene utilizando la simetría del tensor de energía-momento. Reescribiendo la expresión anterior como:

$$\frac{1}{c}\int \nabla_\mu\left(T^\mu_\nu \xi^\nu\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x - \frac{1}{c}\int \xi^\nu \nabla_\mu T^\mu_\nu \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = 0, \tag{1.30}$$

y usando el teorema de Stokes (1.17), el primer sumando del lado izquierdo de la ecuación anterior es un término frontera y por tanto:

$$\int \xi^\nu \nabla_\mu T^\mu_\nu \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = 0, \tag{1.31}$$

es decir:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \tag{1.32}$$

dada la arbitrariedad de la métrica $g^{\alpha\beta}$ o del vector ξ^α. La expresión anterior representa la conservación de la energía y el momento a través de la divergencia covariante nula del tensor de energía-momento.

Para el caso de un fluido ideal el tensor de energía-momento está dado por (Landau y Lifshitz (1997)):

$$T^{\mu\nu} = (p+e)\,u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \tag{1.33}$$

donde p es la presión, e la densidad de energía y u^μ la cuatro velocidad del fluido *. Así, la ecuación (1.32) es:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu \partial_\mu (p+e) + (p+e)\,\nabla_\mu\left(u^\mu u^\nu\right) - g^{\mu\nu}\partial_\mu p - p\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0. \tag{1.34}$$

La contracción de esta expresión con el tensor de proyección:

*En la expresión (1.33) y en lo subsecuente los valores de todas las cantidades termodinámicas como la presion, la densidad de energía, la entropía por unidad de volumen, etc. están medidas en su sistema propio de referencia (Landau y Lifshitz, 1997; Mendoza, 2015a).

$$h^{\sigma}_{\nu} = u^{\sigma} u_{\nu} - g^{\sigma}_{\nu}, \tag{1.35}$$

ortogonal a u_{σ} (pues $h^{\sigma}_{\nu} u_{\sigma} = 0$), resulta en:

$$h^{\sigma}_{\nu} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = -\left(p + e\right) u^{\mu} \nabla_{\mu} u^{\sigma} - h^{\sigma\mu} \partial_{\mu} p = 0, \tag{1.36}$$

es decir:

$$u^{\mu} \nabla_{\mu} u^{\sigma} = \frac{\mathrm{d}^2 x^{\sigma}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} u^{\mu} u^{\lambda} = -(p + e)^{-1} h^{\sigma\mu} \partial_{\mu} p. \tag{1.37}$$

La relación anterior es la ecuación de Euler relativista en cuatro dimensiones (Landau y Lifshitz, 1987; Mendoza, 2015a). Esta misma muestra que si los gradientes de presión en el fluido no son cero, el movimiento de las partículas de fluido es no-geodésico. Para el caso de polvo, i.e. $p = 0$ se obtiene la ecuación geodesica (1.8) para partículas de prueba.

Los resultados de esta sección implican que:

Teorema 2: *Si la divergencia-nula del tensor de energía-momento se satisface entonces el movimiento de partículas de polvo (partículas de prueba) es geodésico.*

Como corolario de este teorema, dado que la divergencia del lado izquierdo de las ecuaciones de Hilbert-Einstein tiene divergencia covariante nula, entonces se satisface la ecuación (1.32) y por lo tanto el movimiento de partículas de polvo (de prueba) es geodésico para la teoría general de la relatividad.

Más adelante veremos que esta propiedad no se satisface para otras teorías de gravitacion. Incluso para el caso de polvo la divergencia covariante del tensor de energía-momento es no-nula. Esto significa que no hay conservación de la energía y el momento y como veremos en los casos analizados en esta tesis, esta no-conservación se debe a la existencia de términos fuente geométricos.

§1.5. Límite de campo débil

En ausencia de campos gravitacionales, el espacio-tiempo es de Minkowski y el intervalo toma la forma:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \delta_{ik}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^k. \tag{1.38}$$

En otras palabras, la métrica $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ para un sistema coordenado isotrópico con coordenadas (t, x^1, x^2, x^3). El principio de equivalencia implica que cuando se agrega un campo gravitacional escalar newtoniano ϕ, la componente temporal de la métrica (Will, 2018):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \tag{1.39}$$

Esta corrección corresponde al límite de campo débil de la gravitación en donde $\phi/c^2 \ll 1$ y por lo tanto, las velocidades v de cualquier partícula de prueba son tales que $v \ll c$ (Will, 2018). El término $\propto \phi/c^2$ en la expresión anterior resulta ser una perturbación pequeña al valor del espacio-tiempo plano. Por esta razón aquí y en lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{O}(n) := \mathcal{O}(1/c^n)$. De esta manera, la ecuación anterior es aproximada a $\mathcal{O}(2)$ de perturbación en este sentido.

Ahora bien, en presencia de un campo gravitacional escalar débil ϕ en coordenadas isotrópicas, las componentes espaciales de la métrica serán las mismas, i.e.:

$$g_{ik} = -(1 + \lambda), \tag{1.40}$$

en donde λ es una cantidad de orden perturbativo $\mathcal{O}(2)$ y proporcional a una función que puede depender exclusivamente de la única cantidad física disponible: el campo escalar gravitacional ϕ, y por ser una cantidad de $\mathcal{O}(2)$, entonces $\lambda \propto \frac{\phi}{c^2}$ (Eddington, 1923).

Por todo lo anterior, el intervalo a $\mathcal{O}(2)$ de aproximación puede escribirse como (Barrientos et al., 2020):

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2\, \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2\gamma\phi}{c^2}\right) \delta_{kl}\, \mathrm{d}x^k\, \mathrm{d}x^l, \tag{1.41}$$

donde γ es una constante y se conoce como el primer parámetro post-newtoniano (Will, 2018). El parámetro γ está relacionado con la fenomenología de flexión de la luz y hasta ahora todas las observaciones realizadas en diversos sistemas astronómicos cuyos cocientes de masa a tamaño al cuadrado son semejantes o mucho mayores a los del sistema solar, resulta que $\gamma = 1.0$ (Will, 2018; Mendoza, 2015b).

En términos de coordenadas esfericas (t, r, θ, φ), la métrica descrita en la ecuación (1.41) queda determinada por los resultados del siguiente teorema (Mendoza, 2022):

Teorema 3: *La forma general de la métrica en coordenadas esféricas para cualquier teoría métrica de la gravedad a segundo orden de perturbación $\mathcal{O}(2)$ se puede escribir como:*

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}\right) c^2\, \mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{2\gamma r}{c^2}\frac{\mathrm{d}\phi(r)}{\mathrm{d}r}\right) \mathrm{d}r^2 - r^2\, \mathrm{d}\Omega^2, \tag{1.42}$$

o equivalentemente por una forma semejante a la métrica de Schwarzchild:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}\right) c^2\, \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{2\gamma r}{c^2}\frac{\mathrm{d}\phi(r)}{\mathrm{d}r}\right)} - r^2\, \mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.43}$$

Utilizando la métrica a $\mathcal{O}(2)$ de aproximación descrita en la ecuación (1.41) o equivalente cualquiera de sus expresiones expresadas en coordenadas esféricas tipo Schwarzschild en las ecuaciones (1.42) o (1.43) se puede calcular entonces el valor a $\mathcal{O}(2)$ de cualquier objeto geométrico, como por ejemplo, de la conexión Levi-Civita, del tensor de Riemann, del tensor de Ricci y del escalar de curvatura R. Dada la extensa complejidad algebraica que esto conlleva escribimos un código en maxima[**] y algunos resultados relevantes de este código se muestran en el apéndice §D.2. En particular, resulta que el escalar de Ricci a $\mathcal{O}(2)$ de perturbación está dado por:

$$^{(2)}R = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\phi. \tag{1.44}$$

Por otra parte, en la expresión para el tensor de energía-momento (1.33), la energía por unidad de volumen e consiste de dos términos aditivos:

$$e = \rho c^2 + \xi, \tag{1.45}$$

donde el primer termino del lado derecho en la expresión anterior representa a la densidad de energía en reposo para una densidad de masa ρ y ξ es puramente la densidad de energía interna del fluido.

En el límite de campo débil, todas las velocidades de las partículas -incluidas las velocidades microscópicas- son mucho menores que la velocidad de la luz, entonces la densidad de energía interna $\xi \ll \rho c^2$ y la presion $p \ll \rho c^2$ por lo que:

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2 u^\mu u^\nu, \tag{1.46}$$

a $\mathcal{O}(2)$ de aproximación. De aquí que la traza T del tensor de energía-momento esté dada por:

$$T := T^\nu_\nu = \rho c^2 u^\nu u_\nu = \rho c^2. \tag{1.47}$$

[**]El programa *Máxima* (*https://maxima.sourceforge.io/index.html*) es un Computer Algebra System libre el cual posee todos los elementos necesarios para trabajar objetos geométricos en geometría diferencial.

La sustitución directa de las expresiones (1.44) y (1.47) en la traza de las ecuaciones de Hilbert-Einstein (1.24) implica:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{1.48}$$

que corresponde a la ecuación de Poisson para gravitación Newtoniana, cuya solución general es:

$$\phi(r) = -G\int\frac{\rho' dv'}{|\vec{r}-\vec{r'}|}, \tag{1.49}$$

(Mendoza, 2015a) y en el caso de una masa puntual M en el origen:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}. \tag{1.50}$$

Lo anterior muestra que en el límite de campo débil las ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein corresponden a la gravitación newtoniana.

Por otra parte, el determinante g de la métrica (1.41) está dado por:

$$g = -\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)^3 = -\left(1-\frac{4\phi}{c^2}\right)+\mathcal{O}(4), \tag{1.51}$$

y por lo tanto:

$$\sqrt{-g} = \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)+\mathcal{O}(4). \tag{1.52}$$

La expresión correcta para el lagrangiano de materia en el caso de un fluido ideal está dada por (Mendoza y Silva, 2021):

$$\mathcal{L}_m = -e, \tag{1.53}$$

y por lo tanto en el caso del límite de campo débil:

$$\mathcal{L}_\mathrm{m} = -\rho c^2 + \mathcal{O}(0). \tag{1.54}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.44), (1.52) y (1.54) en la acción (1.14) se obtiene:

$$S = \frac{c}{8\pi G}\int\nabla^2\phi\,\mathrm{d}^4x - \frac{1}{4c\pi G}\int\phi\nabla^2\phi\,\mathrm{d}^4x - c\int\rho d^4x + \frac{2}{c}\int\phi\rho\,\mathrm{d}^4x. \tag{1.55}$$

Por el teorema de Stokes (1.17), la primer integral del lado derecho de la ecuación anterior es un término frontera y por lo tanto se anula al ser integrado en el infinito espacial. Ahora bien, utilizando la identidad (Arfken y Weber, 1999; Mendoza, 2015a):

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = |\nabla \phi|^2 + \phi \nabla^2 \phi, \tag{1.56}$$

la acción (1.55) toma la siguiente forma:

$$S = -\frac{1}{4c\pi G} \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \ \mathrm{d}^4 x + \frac{1}{4c\pi G} \int |\nabla \phi|^2 \ \mathrm{d}^4 x - c \int \rho \ \mathrm{d}^4 x + \frac{2}{c} \int \phi \rho \ \mathrm{d}^4 x, \tag{1.57}$$

donde nuevamente la integral del primer sumando del lado derecho en esta relación es un término frontera, el cual se anula. Por lo tanto:

$$S = \frac{1}{4c\pi G} \int |\nabla \phi|^2 \ \mathrm{d}^4 x - c \int \rho \ \mathrm{d}^4 x + \frac{2}{c} \int \phi \rho \ \mathrm{d}^4 x. \tag{1.58}$$

A continuación es preciso tener en cuenta que al tomar la variación de la acción (1.58) respecto al potencial ϕ, el segundo sumando del lado derecho es cero pues no depende de este, i.e.:

$$\delta \left(c \int \rho \ \mathrm{d}^4 x \right) = 0, \tag{1.59}$$

por lo que tal término no figura en la ecuación de la acción para obtener las ecuaciones de campo. Por este motivo, se considera que la acción de relatividad general en el límite de campo débil toma la siguiente forma:

$$S = \frac{2}{c} \int \left(\frac{1}{8\pi G} |\nabla \phi|^2 + \phi \rho \right) \ \mathrm{d}^3 x. \tag{1.60}$$

La integral que aparece en la expresión anterior está tomada sobre todo el 3-espacio y no sobre todo el 4-espacio de donde originalmente provenía. Esto se debe a que en el límite de campo débil la integración sobre la componente temporal es irrelevante para el resultado final ya que se supone un escenario estático. De esta manera, la densidad lagrangiana en este límite resulta ser:

$$\mathcal{L} = \frac{|\nabla \phi|^2}{8\pi G} + \rho \phi, \tag{1.61}$$

tal que usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos escalares, i.e.:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \tag{1.62}$$

se obtiene la ecuación de Poisson (1.48).

Capítulo 2

Teorías métricas de gravitación $f(R)$ y $f(R, \mathcal{L}_{\mathbf{m}})$

El interés por explorar otras ecuaciones que describan el campo gravitacional, surge de la discrepancia entre las predicciones de la gravitación Newtoniana y la relatividad general con las observaciones del movimiento de cuerpos a escalas de masa y tamaño muy diferentes a las de nuestro sistema solar. Otras motivaciones provienen de modelos cosmológicos. Por ejemplo, invariantes de curvatura de orden superior o acoplamientos no mínimos entre campos escalares de materia y geometría, permiten modelar el comportamiento inflacionario. En particular, diferentes eras inflacionarias estarían relacionadas con expresiones provenientes de los términos de orden superior en la expresión de la acción (Capozziello y Faraoni, 2010).

En este capítulo se analizarán las ecuaciones de campo de las teorías métricas [*] $f(R)$ y $f(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})$ en diferentes límites. En el capítulo anterior se mostró que en el límite de campo débil las ecuaciones de campo de relatividad general coinciden con el modelo de la gravedad Newtoniana. De la misma manera se espera que en determinados límites las

[*]Las teorías métricas de la gravedad describen a esta como una manifestación del espacio-tiempo curvo e incorporan el principio de equivalencia de Einstein. Los postulados de las teorías metricas de la gravedad son (Will, 2018):

1. El espacio-tiempo está dotado de una métrica.
2. Las lineas de mundo de los cuerpos de prueba son geodésicas de esa métrica.
3. En los marcos locales en caida libre, las leyes de la física no gravitacionales son las de la relatividad especial.

teorías extendidas de gravitación, i.e. teorías de gravitación que extienden los conceptos teóricos de la formulación Newtoniana y de la relatividad general, coincidan con modelos bien establecidos en los límites correspondientes. También se pueden analizar límites a teorías tipo MOND llamada Dinámica Newtoniana Modificada, la cual tiene el objetivo de explicar fenómenos astrofísicos mediante modificaciones a la ley de Newton de gravitación sin utilizar materia oscura no-bariónica (Milgrom, 1983; Famaey y McGaugh, 2012) y que por tanto construye una versión relativista de esta teoría.

§2.1. Teorías métricas $f(R)$

Para describir los fenómenos gravitacionales en términos de la relación curvatura-materia, Hilbert colocó en la acción del campo gravitacional el escalar R, el cual incluye información de la curvatura del espacio-tiempo. Sin embargo, nada prohibe generalizar la densidad lagrangiana gravitacional a ser una función analítica $f(R)$ del escalar de Ricci. Estas propuestas métricas son comunmente denominadas *teorías de gravitación* $f(R)$, de las cuales relatividad general es el caso más sencillo, pues $f(R) \propto R$.

La acción para una teoría de gravitacion $f(R)$ está dada por (Harko y Lobo, 2018):

$$S = \int f(R)\sqrt{-g}d^4x + \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\sqrt{-g}d^4x, \tag{2.1}$$

donde κ es una constante, y por lo tanto, las variaciones nulas $\delta S = 0$ de la acción anterior producen las siguientes ecuaciones de campo (§C.2):

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2}g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\Delta F(R) = -\frac{1}{2c}T_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

donde $F(R) := \mathrm{d}f(R)/\mathrm{d}R$ y $\Delta := \nabla^\alpha\nabla_\alpha$ es el operador de Laplace-Beltrami. Estas ecuaciones diferenciales de cuarto orden en la métrica $g_{\mu\nu}$ representan un conjunto de todas las teorías gravitacionales cuya acción del campo gravitacional queda descrita como una función del escalar R. La traza de estas ecuaciones es:

$$F(R)R - 2f(R) + 3\Delta F(R) = -\frac{1}{2c}T. \tag{2.3}$$

El caso:

$$f(R) = -\frac{c^3}{16\pi G}R, \tag{2.4}$$

reproduce la acción (1.14). La sustitución directa de (2.4) en las ecuaciones de campo (2.2) implican las ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein (1.23). En multiples aplicaciones es común suponer $f(R) \propto R^{\alpha}$, donde α es una consatente (Harko, 2010; Bernal et al., 2011; Mendoza et al., 2013; Mendoza, 2015b).

§2.2. Movimiento geodésico de partículas de prueba en teorías $f(R)$

Para obtener la ecuación de movimiento de una partícula de prueba tomemos la divergencia covariante de la ecuación (2.2):

$$F(R)\nabla^{\mu}R_{\mu\nu}+R_{\mu\nu}\nabla^{\mu}F(R)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R)\nabla^{\mu}R-\Delta\nabla_{\nu}F(R)+\nabla_{\nu}\Delta F(R)=-\frac{1}{2c}\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

utilizando las identidades (B.2) y (B.8) se obtiene que el lado izquierdo de la expresión anterior se anula. Por lo tanto se satisfacen las condiciones del Teorema 2 con lo cual el movimiento de partículas de prueba es geodésico.

§2.3. Teorías métricas $f(R, \mathcal{L}_{\mathbf{m}})$ con acoplamientos de curvatura-materia

Las acciónes (1.14) y (2.1) fueron construidas con la idea en mente de que la presencia de materia curva al espacio. Ambas construcciones hacen que las ecuaciones de campo resultantes de la variación nula de la acción impliquen que una función de la curvatura del espacio sea igual a otra función de la materia. Esta propuesta fue la idea original de Einstein para la construcción de su teoría relativista de la gravitación. De manera más general, se puede considerar que esta relación entre materia y curvatura es mucho más extensa, de tal manera que incluso puedan existir acoplamientos entre la curvatura y la materia. Por esta razón, es posible construir una propuesta gravitacional de tal manera que la curvatura y la materia estén en principio acopladas de tal manera que la acción del campo gravitacional esté dada por (Harko, 2010; Harko y Lobo, 2018):

$$S=\int f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x. \tag{2.6}$$

De aquí que si:

$$f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) = -\frac{c^3}{16\pi G}R + \frac{1}{c}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}, \tag{2.7}$$

se obtiene la acción (1.14) de relatividad general y si:

$$f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) = f(R) + \frac{1}{c}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}, \tag{2.8}$$

se obtiene la acción (2.1) de las teorías gravitacionales $f(R)$.

Los casos de mayor interés para estas propuestas consisten en pensar en acoplamientos de curvatura-materia débiles:

$$f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) = f(R) + g(\mathcal{L}_{\mathrm{m}}), \tag{2.9}$$

para una función analítica g o bien en casos con acoplamientos de curvatura-materia fuertes como pueden ser:

$$f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) = f(R)g(\mathcal{L}_{\mathrm{m}}). \tag{2.10}$$

Como se muestra en el apéndice §C.2, las variaciones de la acción (2.6) producen las siguientes ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} F_R(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Delta - \nabla_\mu\nabla_\nu)F_R(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) - \frac{1}{2}\left[f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) - F_{Lm}(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})\mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right]g_{\mu\nu} = \\ -\frac{1}{2}F_{Lm}(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})T_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $F_R(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) := \partial f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})/\partial R$ y $F_{Lm}(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) := \partial f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})/\partial\mathcal{L}_{\mathrm{m}}$.

La traza de las ecuaciones (2.11) es:

$$F_R(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})R + 3\Delta F_R(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) - 2\left[f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) - F_{Lm}(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})\mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right] = -\frac{1}{2}F_{Lm}(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})T. \tag{2.12}$$

Las ecuaciones (2.2) se obtienen de sustituir el caso $f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) = f(R) + \mathcal{L}_{\mathrm{m}}/c$ en (2.11). Un caso de importante aplicación consiste en considerar:

$$f(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}) = aR^\alpha + b\mathcal{L}_{\mathrm{m}}^\beta, \tag{2.13}$$

y así, sustituyendo esta ecuación en la relación (2.11) se obtiene:

$$aeR^{e-1}R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Delta - \nabla_{\mu\nu}\nabla_{\mu\nu})\,aeR^{e-1} - \frac{1}{2}\left(aR^e + k{\mathcal{L}_m}^d - kd{\mathcal{L}_m}^d\right)g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}kd{\mathcal{L}_m}^{d-1}T_{\mu\nu}, \tag{2.14}$$

cuya traza es:

$$aR^e\,(e-2) + 2{\mathcal{L}_m}^d k\,(d-1) + 3ae\Delta R^{e-1} = \frac{1}{2}kd{\mathcal{L}_m}^{d-1}T. \tag{2.15}$$

§2.4. Movimiento no-geodésico de partículas de prueba en teorías $f(R, \mathcal{L}_{\mathbf{m}})$

Para obtener la ecuación de movimiento de una partícula de prueba tomemos la divergencia contravariante de la ecuación (2.11):

$$\begin{aligned} &(\nabla^\mu F_R\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}))\,R_{\mu\nu} + F_R\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,\nabla^\mu R_{\mu\nu} + (\nabla_\nu\Delta - \Delta\nabla_\nu)\,F_R\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,, \\ &-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_R\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,\nabla^\mu R - \frac{1}{2}F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,\nabla_\nu\mathcal{L}_{\mathrm{m}} + \frac{1}{2}\,(\nabla_\nu F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}))\,\mathcal{L}_{\mathrm{m}} \\ &+\frac{1}{2}F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,\nabla_\nu\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2}\,(\nabla^\mu F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}))\,T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,\nabla^\mu T_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por lo tanto, utilizando las identidades (B.2) y (B.8) se obtiene:

$$(\nabla_\nu F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}))\,\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = -\,(\nabla^\mu F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}))\,T_{\mu\nu} - F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,\nabla^\mu T_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

es decir:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -\nabla^\mu \ln\left[F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\right]\{\mathcal{L}_m g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\}\,, \tag{2.18}$$

que con ayuda de la expresión para el tensor de energía-momento (1.21) se puede escribir como:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -2\nabla^\mu \ln\left[F_{Lm}\,(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\right]\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{2.19}$$

La expresión anterior muestra que en términos generales, la divergencia covariante del tensor de energía-momento es diferente de cero incluso para el caso de polvo, en donde $\mathcal{L}_m = \rho c^2$ que considera el movimiento de partículas de prueba. El término fuente que aparece en el lado derecho de la ecuación (2.19) es de carácter puramente geométrico y por tanto será generalmente diferente de cero. Por lo tanto, las condiciones del Teorema 2 no se satisfacen y el movimiento de partículas libres en estas teorías de gravitacion $f(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})$ es en términos generales no-geodésico.

Para mostrar directamente que el movimiento de partículas libres es en efecto no-geodesico, procedamos de la siguiente manera.

El siguiente teorema, propuesto y demostrado por S. Mendoza en 2021, da validez a la ecuación de continuidad (Landau y Lifshitz, 1987):

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0, \tag{2.20}$$

para un fluido ideal, donde ρ es la densidad de masa del fluido.

Teorema 3: *La ecuación de continuidad* (2.20) *para un fluido ideal es válida si y sólo si el tensor de energía-momento satisface:*

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = k h^{\beta\lambda} A_\lambda, \tag{2.21}$$

para cualquier campo vectorial A_λ, una constante k y donde:

$$h^{\beta\lambda} := g^{\beta\lambda} - u^\beta u^\lambda, \tag{2.22}$$

es el operador de proyección.

Demostración: Para un fluido ideal la primera ley de la termodinámica es (Mendoza y Silva, 2021):

$$\mathrm{d}\left(\frac{e}{\rho}\right) = -p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{2.23}$$

la cual se puede escribir como:

$$\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\mathrm{d}P, \tag{2.24}$$

donde $\omega := e + p$ representa la entalpía por unidad de volumen. Sea $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = k h^{\alpha\beta} A_\alpha$ entonces la divergencia de (1.33) es:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha(\omega u^\alpha u^\beta) - g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha P = k h^{\alpha\beta} A_\alpha, \tag{2.25}$$

y así, contrayendo con u_β se obtiene:

$$u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \omega \nabla_\alpha u^\alpha - u^\alpha \nabla_\alpha P = 0, \tag{2.26}$$

donde se ha usado que $u_\beta \nabla_\alpha u^\beta = 0$. La expresión 2.26 se puede escribir como:

$$u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\rho}\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) + \rho u^\alpha \left\{\nabla_\alpha\left(\frac{\omega}{\rho} - \frac{1}{\rho}\nabla_P\right)\right\} = 0. \tag{2.27}$$

Usando la relación (2.24) el término entre llaves de la expresión anterior es nulo, y por lo tanto:

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0. \tag{2.28}$$

Ya que las implicaciones anteriores son válidas es ambos sentidos, el teorema 3 queda demostrado.

Corolario: *La ecuación de continuidad* (2.20) *es válida para un fluido ideal si el tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$ se conserva, i.e.:*

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.29}$$

Por tanto, a partir de la ecuación de contuinidad (2.20):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm m}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\rho\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right)\frac{{\rm d}\mathcal{L}_{\rm m}}{{\rm d}\rho}, \tag{2.30}$$

de aquí que la ecuación (2.19) queda como:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = -\nabla^\mu \ln\left[F_{Lm}\left(R,\mathcal{L}_{\rm m}\right)\right]\rho\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right)\frac{{\rm d}\mathcal{L}_{\rm m}}{{\rm d}\rho}. \tag{2.31}$$

Ahora bien, utilizando la ecuación (A.46), el tensor de energía-momento (1.21) es:

$$T_{\mu\nu} = \rho\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right)\frac{{\rm d}\mathcal{L}_m}{{\rm d}\rho} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\rm m}, \tag{2.32}$$

y así:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \nabla^\mu\left(\rho\frac{{\rm d}\mathcal{L}_m}{{\rm d}\rho}\right)\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right) + \rho\frac{{\rm d}\mathcal{L}_m}{{\rm d}\rho}\nabla^\mu\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right) - g_{\mu\nu}\nabla^\mu\mathcal{L}_{\rm m}. \tag{2.33}$$

Igualando las expresiones (2.31) y (2.33), se obtiene:

$$\begin{aligned} -\nabla^\mu \ln\left[F_{Lm}\left(R,\mathcal{L}_{\rm m}\right)\right]\rho\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right)\frac{{\rm d}\mathcal{L}_{\rm m}}{{\rm d}\rho} &= \nabla^\mu\left(\rho\frac{{\rm d}\mathcal{L}_m}{{\rm d}\rho}\right)\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right) \\ &\quad + \rho\frac{{\rm d}\mathcal{L}_m}{{\rm d}\rho}\nabla^\mu\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right) - g_{\mu\nu}\nabla^\mu\mathcal{L}_{\rm m}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Multiplicando la expresión anterior por $h^{\nu}_{\sigma}/\left(\rho\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_m}{\mathrm{d}\rho}\right)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_{\mu}\nabla^{\mu}u_{\sigma} = {} & \nabla^{\mu}\ln\left[F_{Lm}\left(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right)\right]\left(g_{\mu\sigma}-u_{\mu}u_{\sigma}\right) \\ & + \frac{\nabla^{\mu}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_m}{\mathrm{d}\rho}\right)}{\rho\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_m}{\mathrm{d}\rho}}\left(g_{\mu\sigma}-u_{\mu}u_{\sigma}\right) \\ & - \frac{\nabla^{\mu}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\rho\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_m}{\mathrm{d}\rho}}\left(g_{\mu\sigma}-u_{\mu}u_{\sigma}\right), \end{aligned} \tag{2.35}$$

y usando (2.30), la expresión anterior se simplifica como:

$$u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\sigma} = \nabla_{\mu}\ln\left[F_{Lm}\left(R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right)\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\rho}\right]\left(g^{\mu\sigma}-u^{\mu}u^{\sigma}\right) =: f^{\sigma}. \tag{2.36}$$

Este resultado implica que el movimiento de una partícula de prueba es no-geodésico pues el lado derecho de la ecuación (2.36) es un vector de fuerza f^{σ} que es distinto de cero generalmente.

Esta fuerza extra muestra nuevos aspectos de la gravitación que no están presentes ni en las ecuaciones de relatividad general, ni en las teorías $f(R)$. Nótese que en el caso de teorías extendidas de gravitacion $f(R)$ la función $f(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})$ está dada por la expresión (2.8) y por lo tanto la fuerza $f^{\nu} = 0$ para el caso de polvo.

Capítulo 3

Teorías métricas de gravitación como función del escalar de Kretschmann

La generalización más pronta hecha sobre la acción de Hilbert (1915b) la realizó Kretschmann (1918) postulando que una acción como función general del escalar de Ricci no debería ser la única forma de la densidad lagrangiana para explicar la fenomenología gravitacional. De esta manera Kretschmann postuló que la densidad lagrangiana gravitacional debería ser proporcional al escalar de Kretschmann

$$\kappa := R_{\alpha\beta\eta\theta} R^{\alpha\beta\eta\theta}. \tag{3.1}$$

Este escalar a su vez se puede escribir en términos de otros invariantes de curvatura construidos a partir del tensor de Riemann. Para una variedad pseudo-Riemaniana de 4 dimensiones se puede escribir como (Cherubini et al., 2002):

$$\kappa = C_{\sigma\lambda\mu\nu} C^{\sigma\lambda\mu\nu} + 2R_{\sigma\lambda} R^{\sigma\lambda} - \frac{1}{3} R^2, \tag{3.2}$$

donde $R_{\sigma\lambda}$ es el tensor de Ricci y $C_{\sigma\lambda\mu\nu}$ es el tensor de Weyl.

Para una densidad lagrangiana gravitacional proporcional a κ resulta que el divergente covariante de las ecuaciones de campo es identicamente igual a cero y entonces se motiva una conservación de energía y momento, así como garantizar la validez de trayectorias geodésicas para partículas libres. Sin embargo, dado que las ecuaciones de campo de Kretschmann son de cuarto orden, estas dejaron de ser consideradas interesantes para la comunidad, pero dado el reciente éxito de teorías extendidas de gravitación $f(R)$ y el hecho de que sus ecuaciones de campo sean de cuarto orden, es importante comenzar a realizar exploraciones con el escalar de Kretschmann.

El escalar de Kretschmann no es el único término que vale la pena explorar. Cabe señalar que uno puede también construir el invariante:

$$Q := R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

y las ecuaciones de campo resultan también ser de cuarto orden.

Existe una manera de evitar la aparición de términos de cuarto orden si se utiliza el escalar de Gauss-Bonnet

$$\mathcal{G} := R^2 - 4Q - \kappa, \tag{3.4}$$

pues si se define la acción gravitacional como:

$$S_{\mathrm{g}} \propto \int \mathcal{G} \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x, \tag{3.5}$$

resulta que como:

$$\sqrt{-g}\mathcal{G} = \partial_\alpha \mathcal{D}^\alpha, \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

en donde el cuatro-vector:

$$\mathcal{D}^\alpha := \sqrt{-g} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} {\epsilon_{\rho\sigma}}^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\mu\beta} \left[{R^\sigma}_{\nu\gamma\delta}/2 + \Gamma^\sigma_{\lambda\gamma} \gamma^\lambda \nu\sigma/3 \right], \tag{3.8}$$

entonces el término de Gauss-Bonnet es simplemente un término frontera y no reproduce ecuaciones de campo a menos que se acople con una función escalar o bien, se construya una acción gravitacional de tal forma que:

$$S_{\mathrm{g}} \propto \int \left(R/2 + f(\mathcal{G}) \right) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x, \tag{3.9}$$

para una función arbitraria $f(\mathcal{G})$. De esta manera el escalar de Gauss-Bonnet resulta últil para diversas aplicaciones pues los términos adicionales a los de las ecuaciones de Hilbert-Einstein son proporcionales a $\nabla_\mu \nabla_\nu f(\mathcal{G})$ (De Felice y Tsujikawa, 2009a,b). En términos generales, resulta que para evitar diversos grados de libertad tensoriales en las ecuaciones de campo la acción gravitacional:

$$S_{\mathrm{g}} \propto \int f(R, \mathcal{G}) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x, \tag{3.10}$$

evita estas complicaciones (De Felice y Tsujikawa, 2010).

Un caso muy particular de todo lo anterior fue producido por John Forbes Nash Jr. (Channuie et al., 2021). Esta acción consiste en colocar una función del escalar de Ricci y el escalar (3.3) en la densidad lagrangiana. Tal acción tiene la siguiente forma:

$$S_{\mathrm{g}} = \int \left(2R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - R^2\right) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x, \tag{3.11}$$

la cual contiene una ponderación de los términos cuadráticos del tensor de Ricci y el esaclar de curvatura. En el capítulo 4 se presentará la ecuación que se obtiene de la acción (3.11), la cual es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden.

Otra motavación para proponer una densidad lagrangiana gravitacional como función del escalar de Kretschmann es que, como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein en relatividad general implican que el escalar de curvatura es cero en regiones de vacio, incluso cuando existe una curvatura real en dicha región. Esto no sucede así para el caso del escalar de Kretschmann que es una excelente representación de la curvatura en el espacio-tiempo. Por ejemplo, para el caso de un agujero negro de Schwarzschild, el escalar de Kretschmann está dado por $\kappa = 48m^2/r^6$. De aquí se infiere rápidamente que en el radio de Schwarzschild el valor de κ es finito y por lo tanto la divergencia que ocurre en la métrica de Schwarzschild para dicho radio es una singularidad de coordenadas. De manera general, el escalar de Kretschmann puede utilizarse como un identificador de singularidades de curvatura en un espacio-tiempo dado (Henry, 2000).

§3.1. Teorías métricas $f(\kappa)$

A fin de obtener las ecuaciones de campo sin acoplamientos de materia propongamos una acción del campo gravitacional usando como densidad lagrangiana una función arbitraria $f(\kappa)$ del escalar de Kretschmann κ dada por:

$$S = \int f(\kappa) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_{\mathrm{m}} \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x, \tag{3.12}$$

y por tanto:

$$\delta S = \delta \int \left(f(\kappa) + \frac{1}{c}\mathcal{L}_\mathrm{m} \right) \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = \int \big(\sqrt{-g}F(\kappa)\delta\kappa + f(\kappa)\delta\sqrt{-g} + \frac{1}{2c}T_{\eta\alpha}\sqrt{-g}\ \delta g^{\eta\alpha} \big)\, \mathrm{d}^4x = 0, \tag{3.13}$$

donde $F(\kappa) := \partial f(\kappa)/\partial\kappa$ y el último término del integrando anteior se sigue de la expresión (1.22). Utilizando las fórmulas para las variaciones $\delta\sqrt{-g}$ y $\delta\kappa$ obtenidas en las ecuaciones (A.4) y (A.34) de los apéndices §A.1 y §A.5 se obtiene:

$$\delta S = \int \big\{ -\frac{1}{2}f(\kappa)g_{\eta\alpha}\delta g^{\eta\alpha} + 4F(\kappa)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi}\nabla_\xi\nabla_\epsilon\delta g^{\eta\alpha} + 2F(\kappa)R_\alpha^{\ \nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\eta\alpha} + \frac{1}{2c}T_{\eta\alpha}\delta g^{\eta\alpha}\big\}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = 0. \tag{3.14}$$

Ahora bien, dado que:

$$F(\kappa)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi}\nabla_\xi\nabla_\epsilon\delta g^{\eta\alpha} = \nabla_\xi\left(F(\kappa)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi}\nabla_\epsilon\delta g^{\eta\alpha}\right) - \nabla_\epsilon\left(\delta g^{\eta\alpha}\nabla_\xi\left(F(\kappa)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi}\right)\right) + \left(\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(F(\kappa)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi}\right)\right)\delta g^{\eta\alpha}, \tag{3.15}$$

y como los dos primeros términos del lado derecho de la expresión anterior resultan ser términos frontera de la variación (3.14) de acuerdo al teorema de Stokes (1.17), entonces la expresión (3.14) es:

$$\delta S = \int \big\{ -\frac{1}{2}f(\kappa)g_{\eta\alpha} + 2F(\kappa)R_a^{\ \nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon} + 4\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(F(\kappa)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi}\right) + \frac{1}{2c}T_{\eta\alpha}\big\}\sqrt{-g}\delta g^{\eta\alpha}\mathrm{d}^4x = 0, \tag{3.16}$$

y por lo tanto:

$$-\frac{1}{2}f(\kappa)g_{\eta\alpha} + 2F(\kappa)R_\alpha^{\ \nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon} + 4\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(F(\kappa)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi}\right) = -\frac{1}{2c}T_{\eta\alpha}. \tag{3.17}$$

Éstas ecuaciones de campo representan un conjunto de teorías métricas de gravitación en función del escalar de Kretschmann.

§3.1.1. Teorías métricas $f(\kappa) = a\kappa$

El caso más inmediato es que la función del escalar de Kretschmann sea proporcional al escalar mismo, i.e. $f(\kappa) = a\kappa$ con a una constante real. Así, la ecuación de campo es:

$$-\frac{1}{2}a\kappa g_{\eta\alpha} + 2aR_{\alpha}{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon} - 4ag_{\beta\eta}g_{\nu\alpha}\nabla_\epsilon\nabla_\xi R^{\beta\epsilon\xi\nu} = -\frac{1}{2c}T_{\eta\alpha}, \tag{3.18}$$

y su traza está dada por:

$$\nabla_\epsilon\nabla_\xi R^{\epsilon\xi} = -\frac{1}{8ac}T, \tag{3.19}$$

o bien utilizando la nulidad del divergente covariante del tensor de Einstein, (3.19) es:

$$\nabla_\epsilon\nabla^\epsilon R = -\frac{1}{4ac}T. \tag{3.20}$$

Ahora bien, los resultados del apéndice §B.3 muestran que en un escenario estático en el límite de campo débil:

$$\nabla^e\nabla_e{}^{(2)}R = -\nabla^2{}^{(2)}R, \tag{3.21}$$

a $\mathcal{O}(2)$ de aproximación. En consecuencia, las ecuaciones (3.20) se pueden expresar en simetría esférica como:

$$\nabla^2\left({}^{(2)}R\right) = -\frac{1}{4ac}{}^{(2)}T. \tag{3.22}$$

Para el caso de polvo, $T = \rho c^2$ y por lo tanto, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\nabla^2\left({}^{(2)}R\right) = -\frac{c}{16\pi Ga}\rho = -\frac{c}{16\pi Ga}\nabla^2\phi_N, \tag{3.23}$$

donde ϕ_N es el potencial newtoniano que satisface la ecuación de Poisson (1.48). Por lo tanto:

$$\nabla^2\left({}^{(2)}R + \frac{c}{16\pi Ga}\phi_N\right) = 0, \tag{3.24}$$

y así:

$${}^{(2)}R + \frac{c}{16\pi Ga}\phi_N = \frac{C_1}{r} + C_2, \tag{3.25}$$

con C_1 y C_2 constantes reales, y así con ayuda de la ecuación (1.44) implica que el potencial gravitacional ϕ en el límite de campo débil está dado por:

$$\nabla^2\phi = \frac{c^3}{32\pi Ga}\phi_N - \frac{c^2C_1}{2r} - \frac{c^2C_2}{2}. \tag{3.26}$$

Si consideramos una masa puntual M que poduce el campo gravitacional, entonces ϕ_N tiene la forma (1.50) y así, la relación anterior es:

$$\nabla^2\phi = -\frac{c^3M}{32\pi ar} - \frac{c^2C_1}{2r} - \frac{c^2C_2}{2}, \tag{3.27}$$

cuya solución general es:

$$\phi = -\frac{c^3M}{64\pi a}r - \frac{c^2C_1}{4}r - \frac{c^2C_2}{12}r^2 + \frac{C_3}{r} + C_4, \tag{3.28}$$

Ahora bien, para asegurar que el potencial se anule en infinito espacial, entonces escojamos $C_1 = -Mc/16\pi a$, $C_2 = C_4 = 0$ y $C_3 = -GM$ para que:

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \tag{3.29}$$

Por lo tanto, existe el caso tal que en límite de campo débil se recupera el potencial newtoniano a segundo orden de perturbación. Un análisis mas detallado de esto puede realizarse hasta $\mathcal{O}(4)$ de aproximación para calcular una parametrización post-Newtoniana (PPN) y comparar con las mediciones de los parámetros PPN (Will, 2018), pero dicho análisis abarca un tópico mucho más allá de los estudios realizados en esta tesis.

§3.1.2. Teorías métricas $f(\kappa) = a\kappa^e$

Para el caso $f(\kappa) = a\kappa^e$ las ecuaciones de campo en vacío son:

$$-\frac{1}{2}a\kappa^e g_{\eta\alpha} + 2ae\kappa^{e-1}R_{\alpha}{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon} - 4aeg_{\beta\eta}g_{\nu\alpha}\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(\kappa^{e-1}R^{\beta\epsilon\xi\nu}\right) = 0, \tag{3.30}$$

cuya traza es:

$$(e-1)\kappa^e + 2e\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(\kappa^{e-1}R^{\epsilon\xi}\right) = 0. \tag{3.31}$$

En adelante se considerará el caso especial $e = 1/2$ pues $\kappa^{1/2}$ tiene dimensiones de curvatura, y así:

$$-\frac{1}{2}\kappa^{\frac{1}{2}} + \nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(\kappa^{-\frac{1}{2}}R^{\epsilon\xi}\right) = 0. \tag{3.32}$$

Para analizar estas ecuaciones en el límite de campo de débil usaremos la métrica (1.43). Posteriormente, mediante un enfoque perturbativo en el parámetro $1/c$ se obtiene que a orden cero la relación $\phi = C/r$, con C una constante real, es solución de tales ecuaciones. El código utilizado se muestra en el apendice §D.2.2.

Una vez más se puede identificar la constante C como $-GM$, y por lo tanto:

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \tag{3.33}$$

Es así que en el límite de campo débil a orden cero se recupera el potencial gravitacional newtoniano. Cabe mencionar que la métrica empleada se consideró hasta segundo orden de perturbación, por esto se esperaría obtener resultados de las ecuaciones de campo hasta segundo orden, sin embargo, dado el tiempo de computo, se optó por limitarse al resultado a orden cero de perturbación de las ecuaciones de campo como una primer aproximación en la dirección del resultado deseado.

§3.2. Teorías métricas $f(\kappa, \mathcal{L}_\mathbf{m})$ con acoplamientos de curvatura-materia

Análogamente a la sección §2.3, se considerará un acoplamiento entre la curvatura y la materia de tal manera que la acción del campo gravitacional esté dada por:

$$S = \int f(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m})\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x, \tag{3.34}$$

tal que si:

$$f(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m}) = f(\kappa) + \frac{1}{c}\mathcal{L}_\mathrm{m}, \tag{3.35}$$

se obtiene la acción (3.17) de las teorías $f(\kappa)$.

Tomando la variación de la acción (3.34) resulta:

$$\begin{aligned} \delta S = \int \big\{ &\sqrt{-g}F_\kappa(\kappa, \mathcal{L}_m)\delta\kappa + \sqrt{-g}F_{Lm}(\kappa, \mathcal{L}_m)\delta\mathcal{L}_m \\ &+ f(\kappa, \mathcal{L}_m)\delta\sqrt{-g}\big\}\, \mathrm{d}^4x = 0, \end{aligned} \tag{3.36}$$

donde $F_\kappa(\kappa, \mathcal{L}_m) := \partial f(\kappa, \mathcal{L}_m)/\partial\kappa$ y $F_{Lm}(\kappa, \mathcal{L}_m) := \partial f(\kappa, \mathcal{L}_m)/\partial\mathcal{L}_m$. Utilizando las expresiones (A.39), (A.4) y (A.34) se obtiene:

$$\delta S = \int \Bigg\{ 4F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_{\eta\ \ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi} \nabla_\xi \nabla_\epsilon \delta g^{\eta\alpha} + 2F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_\alpha^{\ \nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon} \delta g^{\eta\alpha} - \frac{1}{2} f(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) g_{\eta\alpha} \delta g^{\eta\alpha}$$
$$+ F_{Lm}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) \left(\frac{1}{2} g_{\eta\alpha}\mathcal{L}_\mathrm{m} + \frac{1}{2} T_{\eta\alpha} \right) \delta g^{\eta\alpha} \Bigg\} \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = 0. \quad (3.37)$$

Analogamente al caso $f(\kappa)$, se puede reescribir el primer sumando del lado derecho para factorizar $\delta g^{\eta\alpha}$ y por el teorema de Stokes (1.17) los terminos frontera se anulan, reduciendo así la ecuación (3.37) como:

$$\delta S = \int \Bigg\{ -\frac{1}{2} f(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) g_{\eta\alpha} + 2F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_\alpha^{\ \nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon} + 4\nabla_\epsilon \nabla_\xi \left(F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_{\eta\ \ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi} \right)$$
$$+ F_{Lm}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) \left(\frac{1}{2} g_{\eta\alpha}\mathcal{L}_\mathrm{m} + \frac{1}{2} T_{\eta\alpha} \right) \Bigg\} \sqrt{-g}\delta g^{\eta\alpha}\mathrm{d}^4x = 0, \quad (3.38)$$

y por lo tanto:

$$-\frac{1}{2} f(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) g_{\eta\alpha} + 2F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_\alpha^{\ \nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon} + 4\nabla_\epsilon \nabla_\xi \left(F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_{\eta\ \ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi} \right)$$
$$+ F_{Lm}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) \frac{1}{2} g_{\eta\alpha}\mathcal{L}_\mathrm{m} + F_{Lm}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) \frac{1}{2} T_{\eta\alpha} = 0. \quad (3.39)$$

Éstas ecuaciones de campo representan un conjunto de teorías métricas de gravitación en función del escalar de Kretschmann con un acoplamiento entre curvatura y materia.

§3.3. Ecuación de movimiento de partículas de prueba en teorías $f(\kappa, \mathcal{L}_\mathbf{m})$

La divergencia contravariante de la ecuación (3.39) es:

$$\nabla^\eta T_{\eta\alpha} = g_{\eta\alpha} \frac{F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m})}{F_{Lm}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m})} \nabla^\eta \kappa - 4F_{Lm}^{-1}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) \nabla^\eta \left(F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_\alpha^{\ \nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon} \right)$$
$$-8F_{Lm}^{-1}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) \nabla^\eta \nabla_\epsilon \nabla_\xi \left(F_\kappa(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) R_{\eta\ \ \alpha}^{\ \epsilon\ \ \xi} \right) - 2\nabla^\eta \ln \left[F_{Lm}(\kappa,\mathcal{L}_\mathrm{m}) \right] \frac{\partial \mathcal{L}_\mathrm{m}}{\partial g^{\eta\alpha}}. \quad (3.40)$$

Usando el resultado (2.33) y contrayendo la expresión (3.40) con el tensor de proyección h_σ^α se obtiene:

$$u^\eta \nabla_\eta u^\sigma = -\frac{4h^\sigma_\alpha}{\rho F_{Lm}(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m})\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\rho}} \nabla_\eta \left(F_\kappa(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m}) R^{\alpha\nu\xi\epsilon} R^\eta{}_{\nu\xi\epsilon} + 2\nabla_\epsilon \nabla_\xi \left(F_\kappa(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m}) R^{\eta\epsilon\alpha\xi} \right)\right)$$
$$-h^{\sigma\eta} \left(\nabla_\eta \ln \left[F_{Lm}(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m}) \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\rho} \right] - \frac{F_\kappa(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m})}{\rho F_{Lm}(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m})\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}\rho}} \nabla_\eta \kappa \right), \tag{3.41}$$

donde el lado derecho de la expresión anterior es en general distinto de cero y por lo tanto la ecuación es no-geodésica, incluso para polvo, i.e. para partículas de prueba.

§3.4. Teorías métricas $f(\kappa, \mathcal{L}_m) = a\kappa^e + b\mathcal{L}_m^d$

Considerando una relación de potencias entre κ y $\mathcal{L}_\mathrm{m}$ i.e. $f(\kappa, \mathcal{L}_m) = a\kappa^e + b\mathcal{L}_m^d$, se obtienen las ecuaciones de campo:

$$-\frac{1}{2} a\kappa^e g_{\eta\alpha} + \frac{1}{2} b{\mathcal{L}_\mathrm{m}}^d g_{\eta\alpha}(d-1) + 2ae\kappa^{e-1} R_\alpha{}^{\nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon}$$
$$-2ae g_{\beta\eta} g_{\nu\alpha} \nabla_\epsilon \nabla_\xi \left(\kappa^{e-1} R^{\beta\epsilon\xi\nu} \right) + \frac{1}{2} bd{\mathcal{L}_\mathrm{m}}^{d-1} T_{\eta\alpha}, = 0, \tag{3.42}$$

cuya traza es:

$$a\kappa^e - b{\mathcal{L}_\mathrm{m}}^d(d-1) - ae\kappa^e - ae\nabla_\epsilon \nabla_\xi \left(\kappa^{e-1} R^{\epsilon\xi} \right) = \frac{1}{4} bd{\mathcal{L}_\mathrm{m}}^{d-1} T. \tag{3.43}$$

En adelante se analizará el caso $e = 1$ y $d = 4/3$* i.e. $f(\kappa, \mathcal{L}_m) = a\kappa + b\mathcal{L}_m^{4/3}$ y así la traza (3.43) está dada por:

$$\nabla_\epsilon \nabla^\epsilon R = -\frac{2b}{3a} {\mathcal{L}_m}^{4/3} \left(1 + \frac{T}{\mathcal{L}_\mathrm{m}} \right). \tag{3.44}$$

En el límite de campo débil se considerará un escenario estático y utilizando (3.21), (1.44), (1.47) y (1.54) se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} \{ r \left(\frac{2}{c^2} \nabla^2 \phi \right) \} = 0, \tag{3.45}$$

*Esta elección se hizo únicamente para facilitar la obtención de la ecuación de la gravedad newtoniana en el límite de campo débil.

que se reduce a:

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}r^4}(r\phi) = 0, \tag{3.46}$$

cuya solución general es:

$$\phi = C_1 r^2 + C_2 r + \frac{C_3}{r} + C_4, \tag{3.47}$$

donde se impuso la condición de simetría esférica sobre el potencial. Finalmente para que el potencial se anule en infinito la única constante distinta de cero debe ser C_3. Además, por consistencia con las ecuaciones de la gravedad newtoniana se deduce que dicha constante es $-GM$:

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \tag{3.48}$$

por lo tanto, a segundo orden de perturbación existe el caso tal que se recupera el potencial gravitacional newtoniano.

Capítulo 4

Teorías métricas de gravitación como función del escalar de Kretschmann y el escalar de Ricci

Los modelos que se muestran a continuación están inspirados en la acción propuesta por John F. Nash (3.11). En vacío, las ecuaciones de campo resultantes de la acción de Nash son:

$$N^{\alpha\beta} = \Delta G^{\alpha\beta} + G^{\rho\sigma}\left(2R_{\rho\ \sigma}^{\ \alpha\ \beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R_{\rho\sigma}\right) = 0, \tag{4.1}$$

donde $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein y el término $N^{\alpha\beta}$ se denomina tensor de Nash. Las ecuaciones 4.1 tienen la particularidad de que la traza es $\Delta R = 0$, lo cual implica que el escalar de curvatura R satisface la ecuación de onda en el 4-espacio curvo. Esto abre posibilidades para modelar ondas gravitacionales (Channuie et al., 2021). Además cualquier métrica en vacío con $R = 0$ cumple tanto las ecuaciones de campo de Einstein como las ecuaciones del modelo de Nash.

Otro rasgo de la teoría de Nash es que, como se muestra en el apéndice §B.4, es libre de divergencia, i.e.:

$$\nabla^{\alpha}N_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.2}$$

En lo siguiente se presentan modelos de teorías métricas gravitacionales como función del escalar de Kretschmann y el escalar de Ricci. La relación entre el escalar de Kretschmann y el escalar usado por Nash está dada por la expresión (3.2), i. e.:

$$2R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - R^2 = \kappa - C^{\alpha\beta\eta\sigma}C_{\alpha\beta\eta\sigma} - \frac{2}{3}R^2 \tag{4.3}$$

§4.1. Teorías métricas $f(\kappa, R)$

Supongamos que la acción está dada por:

$$S = \int f(\kappa, R)\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x + \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x, \tag{4.4}$$

donde $f(\kappa, R)$ es una función arbitraria de los escalares de Kretschmann κ y de Ricci R, de tal forma que:

$$\begin{aligned}\delta S = \int \Big\{ & F_\kappa(\kappa, R)\delta(\kappa)\sqrt{-g} + F_R(\kappa, R)\delta(R)\sqrt{-g} + f(\kappa, R)\delta\sqrt{-g} \\ & + \frac{1}{c}\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{m}})\sqrt{-g} + \frac{1}{c}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}\delta\sqrt{-g}\Big\}\mathrm{d}^4x = 0,\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $F_\kappa(\kappa, R) := \partial f(\kappa, R)/\partial K$ y $F_R(\kappa, R) := \partial f(\kappa, R)/\partial R$. Utilizando las ecuaciones (A.4), (A.23), (A.34) y (A.39) se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta S = \int \Big\{ & 2F_\kappa(\kappa, R)R_\alpha{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\eta\alpha} + F_R(\kappa, R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\kappa, R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ & + 4F_\kappa(\kappa, R)R_\eta{}^\epsilon{}_\alpha{}^\xi\nabla_\xi\nabla_\epsilon\delta g^{\eta\alpha} + F_R(\kappa, R)g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu} \\ & - F_R(\kappa, R)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2c}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\Big\}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

El cuarto, quinto y sexto sumandos del lado derecho de la ecuación anterior se pueden reescribir para factorizar la variación del tensor métrico. Al igual que en el desarrollo de las ecuaciones de campo de las teorías $f(\kappa)$, por el teorema de Stokes (1.17), existen términos frontera que quedan anulados, y así los términos distintos de cero son:

$$\begin{aligned}\delta S = \int \Big\{ & 4\nabla_\epsilon\nabla_\xi F_\kappa(\kappa, R)R_\eta{}^\epsilon{}_\alpha{}^\xi + 2F_\kappa(\kappa, R)R_\alpha{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon} \\ & + F_R(\kappa, R)R_{\eta\alpha} - \nabla_\alpha\nabla_\eta F_R(\kappa, R) + g_{\eta\alpha}\nabla^\mu\nabla_\mu F_R(\kappa, R) \\ & - \frac{1}{2}f(\kappa, R)g_{\eta\alpha} + \frac{1}{2c}T_{\eta\alpha}\Big\}\delta g^{\eta\alpha}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = 0,\end{aligned} \tag{4.7}$$

i.e.:

$$4\nabla_\epsilon \nabla_\xi \left(F_\kappa(\kappa, R) R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \xi} \right) + 2F_\kappa(\kappa, R) R_\alpha^{\ \nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon} + F_R(\kappa, R) R_{\eta\alpha}$$
$$-\nabla_\alpha \nabla_\eta F_R(\kappa, R) + g_{\eta\alpha} \Delta F_R(\kappa, R) - \frac{1}{2} g_{\eta\alpha} f(\kappa, R) = -\frac{1}{2c} T_{\eta\alpha}. \qquad (4.8)$$

§4.1.1. Teorías métricas $f(\kappa, R) = A\kappa + BR$

La propuesta más sencilla consiste en una combinación lineal de los escalares κ y R. Sustituyendo en las ecuaciones de campo (4.8) la relación $f(\kappa, R) = A\kappa + BR$ con A y B constantes reales, en vacío se obtiene:

$$4A\nabla_\epsilon \nabla_\xi R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \xi} + 2AR_a^{\ \nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon} + BR_{\eta\alpha} - \frac{1}{2} A g_{\eta\alpha} \kappa - \frac{1}{2} B g_{\eta\alpha} R = 0, \qquad (4.9)$$

cuya traza es:

$$4A\nabla_\epsilon \nabla_\xi R^{\epsilon\xi} - BR = 2A\nabla_\epsilon \nabla^\epsilon R - BR = 0. \qquad (4.10)$$

En el límite de campo débil se considerará un escenario estático y utilizando la relación (3.21) las ecuaciones anteriores son:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(r^{(2)}R \right) = -\frac{B}{2A} {}^{(2)}R, \qquad (4.11)$$

mediante el cambio de variable $u = rR$ se obtiene:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{B}{2A} u, \qquad (4.12)$$

cuya solución es:

$$u = C_1 e^{\sqrt{-\frac{B}{2A}} r} + C_2 e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}} r}, \qquad (4.13)$$

con C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias. Las soluciones reales existen para $B/A \leq 0$, y así:

$${}^{(2)}R = \frac{C_1 e^{\sqrt{-\frac{B}{2A}} r}}{r} + \frac{C_2 e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}} r}}{r}. \qquad (4.14)$$

Para evitar la divergencia de R en infinito espacial es necesario que $C_1 = 0$ y así:

$$^{(2)}R = \frac{C_2 e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}}r}}{r}, \tag{4.15}$$

ahora bien:

$$\nabla^2\phi = -\frac{c^2 C_2}{2}\frac{e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}}r}}{r}, \tag{4.16}$$

y por lo tanto:

$$\phi = -\frac{c^2 C_2 A}{B}\frac{e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}}r}}{r} + \frac{C_3}{r} + C_4, \tag{4.17}$$

con $C_4 = 0$ para garantizar un espacio asintóticamente plano, i.e.:

$$\phi = -\frac{c^2 C_2 A}{B}\frac{e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}}r}}{r} + \frac{C_3}{r}. \tag{4.18}$$

Es conveniente elegir: $C_2 = \delta GMB\xi/Ac^2$ y $C_3 = -GM\xi$, de manera que para $\delta = 0$ se recupera el potencial newtoniano y tanto δ como ξ son parámetros que permiten determinar la escala donde los términos correspondientes actúan. Así:

$$\phi = -\delta GM\xi\frac{e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}}r}}{r} - \frac{GM\xi}{r}, \tag{4.19}$$

o bien:

$$\phi = -\frac{GM\xi}{r}\left(1 + \delta e^{-\sqrt{-\frac{B}{2A}}r}\right), \tag{4.20}$$

Por lo tanto en el límite de campo débil se obtiene una modificación del potencial newtoniano similar al potencial de Yukawa (De Martino et al., 2018). Según De Martino et al. (2018), los modelos de teorías gravitacionales $f(R)$ que presentan una corrección de este estilo en el límite de campo débil pueden usarse para calcular la precesión orbital con un enfoque clásico.

§4.1.2. Teorías métricas $f(\kappa, R) = A\kappa^a + BR^b$

Para una relación de potencias entre κ y R i.e. $f(\kappa, R) = A\kappa^a + BR^b$ con A, B, a y b constantes reales, en vacío se obtienen las ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned}4\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(F_\kappa(\kappa,R)R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \xi}\right)+2F_\kappa(\kappa,R)R_a^{\ \nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}+F_R(\kappa,R)R_{\eta\alpha}\\ -\nabla_\alpha\nabla_\eta F_R(\kappa,R)+g_{\eta\alpha}\Delta F_R(\kappa,R)-\frac{1}{2}g_{\eta\alpha}f(\kappa,R)=0,\end{aligned} \tag{4.21}$$

cuya traza es:

$$4aA\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(\kappa^{a-1}R^{\epsilon\xi}\right)+3bB\Delta R^{b-1}+2A\,(a-1)\,\kappa^a+B\,(b-2)\,R^b=0, \tag{4.22}$$

para el caso especial $a=1$ y $b=1/2$ las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\Delta R=0. \tag{4.23}$$

Por lo tanto se recuperan las mismas ecuaciones escalares que en el modelo propuesto por Nash en vacío. Además como se mostró en la sección §3.1.1, estas ecuaciones escalares en límite de campo débil recuperan el potencial newtoniano para una fuente puntual de campo gravitacional M en el origen de coordenadas.

§4.2. Teorías métricas $f(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathbf{m}})$ con acoplamientos de curvatura-materia

Considerando un acoplamiento entre la curvatura y la materia de tal manera que la acción del campo gravitacional esté dada por:

$$S=\int f(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x. \tag{4.24}$$

Las ecuaciones de campo son entonces:

$$\begin{aligned}4\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(F_\kappa(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})R_{\eta\ \alpha}^{\ \epsilon\ \xi}\right)+2F_\kappa(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})R_a^{\ \nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\\ +F_R(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})R_{\eta\alpha}-\nabla_\alpha\nabla_\eta F_R(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})+g_{\eta\alpha}\Delta F_R(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})\\ +\frac{1}{2}g_{\eta\alpha}F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}\left(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right)\mathcal{L}_{\mathrm{m}}+\frac{1}{2}F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}\left(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right)T_{\eta\alpha}-\frac{1}{2}g_{\eta\alpha}f(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})=0,\end{aligned} \tag{4.25}$$

tal que si:

$$f(\kappa,R,\mathcal{L}_{\mathrm{m}})=f(\kappa,R)+\frac{1}{c}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}, \tag{4.26}$$

se obtienen las ecuaciones (4.8).

§4.3. Ecuación de movimiento de partículas de prueba en teorías $f(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathbf{m}})$

La divergencia contravariante de la ecuación (4.25) es:

$$\nabla^{\eta} T_{\eta\alpha} = -4F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}^{-1}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\,\nabla^{\eta}\left(F_{\kappa}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}) R_{\alpha}{}^{\nu\xi\epsilon} R_{\eta\nu\xi\epsilon} + 2\nabla_{\epsilon}\nabla_{\xi}\left(F_{\kappa}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}) R_{\eta}{}^{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\xi}\right)\right) + g_{\eta\alpha}\frac{F_{\kappa}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})}{F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})}\nabla^{\eta}\kappa - 2\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\partial g^{\eta\alpha}}\nabla^{\eta}\ln\left[F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\right]. \tag{4.27}$$

Ahora bien, usando el resultado (2.33) y contrayendo la expresión (4.27) con el tensor de proyección h_{σ}^{α} se obtiene:

$$u^{\eta}\nabla_{\eta}u^{\sigma} = -\frac{4h_{\alpha}^{\sigma}}{\rho F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\rho}}\nabla_{\eta}\left(F_{\kappa}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}) R^{\alpha\nu\xi\epsilon} R^{\eta}{}_{\nu\xi\epsilon} + 2\nabla_{\epsilon}\nabla_{\xi}\left(F_{\kappa}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}) R^{\eta\epsilon\alpha\xi}\right)\right) - h^{\eta\sigma}\left(\nabla_{\eta}\ln\left[F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\rho}\right] - \frac{F_{\kappa}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})}{\rho F_{\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\rho}}\nabla_{\eta}\kappa\right), \tag{4.28}$$

y como el lado derecho de la expresión anterior es en general distinto de cero, la ecuación es no-geodésica.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

En el presente trabajo se expusieron múltiples modelos de teorías extendidas de gravitación. Para cada modelo se partió de proponer una función para la acción de curvatura y materia. Posteriormente, mediante variaciones nulas de la acción se obtuvieron las correspondientes ecuaciones de campo y finalmente, las ecuaciones obtenidas se analizaron en el límite de campo débil en busca de coincidir con modelos consistentes con las observaciones.

Sobre las teorías en función del escalar de Kretschmann se partió del caso más sencillo, una relación lineal $f(\kappa) = a\kappa$, obteniendo que en límite de campo débil, a $\mathcal{O}(1/c^2)$, se recupera el potencial newtoniano. Posteriormente se analizó una relación de potencias dada por $f(\kappa) = a\kappa^e$ y una vez obtenidas las ecuaciones de campo se optó por analizar el caso especial $f(\kappa) = a\kappa^{1/2}$, pues $\kappa^{1/2}$ tiene dimensiones de curvatura. En este caso, el límite de campo débil de las ecuaciones de campo se calculó usando perturbaciones $\mathcal{O}(1/c)$, mediante un código en Maxima. Sin embargo sólo se obtuvieron resultados a orden cero. Tomando en cuenta que la métrica se consideró hasta segundo orden (del mismo parámetro) sería preciso obtener resultados de las ecuaciones de campo hasta segundo orden, lo cual no fue posible debido al extenso tiempo de cálculo computacional. Se obtuvo como resultado que a orden cero $\phi = C/r$, con C una constante, es solución a las ecuaciones en el límite de campo débil.

Otro aspecto de las teorías en función del escalar de Kretschmann se exploró con un acoplamiento arbitrario de materia de la forma $f(\kappa, \mathcal{L}_m)$, para el caso lineal $f(\kappa, \mathcal{L}_m) = a\kappa + q\mathcal{L}_m$ se analizó el acoplamiento con el campo de una masa puntual en el centro de coordenadas y en el límite de campo débil se recuperó el potencial newtoniano. En comparación con las teorías $f(R, \mathcal{L}_m) = aR + b\mathcal{L}_m$, usando el escalar de Kretschmann se obtiene una ecuación diferencial de cuarto orden del potencial escalar gravitacional, mientras que con el escalar de Ricci se obtiene la ecuación de Poisson, ambas igualadas a la distribución de materia por una constante. Por las condiciones de frontera ambas conducen al mismo resultado. Continuando el análisis de los modelos $f(\kappa, \mathcal{L}_m)$, se propuso una relación de potencias dada por $f(\kappa, \mathcal{L}_m) = a\kappa^e + b\mathcal{L}_m^d$. Una vez obteniendo las ecuaciones correspondientes, con el objetivo de facilitar el analisis en el límite de campo débil (debido al extenso tiempo de cómputo que requiere calcular el límite este tipo de ecuaciones), se consideró el caso especial $f(\kappa, \mathcal{L}_m) = a\kappa + b\mathcal{L}_m^{4/3}$ para el cual se obtuvo que existe el caso donde se recupera potencial newtoniano.

Al comparar los modelos lineales de las teorías métricas $f(R)$ y $f(\kappa)$ se observa que aquéllos en función del escalar de Kretschmann conducen a ecuaciones no homogéneas o de orden superior, en comparación con los modelos en función del escalar de Ricci, como es de esperarse al colocar un término cuadrático en la acción. Sin embargo ambos conducen al mismo potencial escalar gravitacional en el límite de campo débil en casos específicos. En cuanto a los modelos propuestos como una ley de potencias, los modelos en función del escalar de Ricci se pueden abordar mediante las teorías $f(\chi)$, las cuales permiten obtener un límite consistente con la teoría MOND y una versión relativista de esta (Bernal et al., 2011). Por otro lado, para los modelos en función del escalar de Kretschmann, el análisis se limitó a mostrar la existencia de casos específicos cuyas ecuaciones recuperan el potencial Newtoniano en el límite de campo débil. Sobre las ecuaciones de movimiento (obtenidas a partir de la divergencia de las ecuaciones de campo de las teorías $f(R, \mathcal{L}_\mathrm{m})$ y $f(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m})$), resulta que en el caso $f(R) + \mathcal{L}_\mathrm{m}/c$ el movimiento de las partículas es geodésico (excepto si los gradientes de presión del fluido son distintos de cero) mientras que para una relación general $f(R, \mathcal{L}_\mathrm{m})$ el movimiento no necesariamente es geodésico incluso si los gradientes de presión del fluido son cero. Aún así para una $\mathcal{L}_\mathrm{m}$ dada se puede definir una $f_{Lm}(R, \mathcal{L}_\mathrm{m})$ tal que haya conservación. En el caso de las teorías $f(\kappa, \mathcal{L}_\mathrm{m})$ el movimiento de las partículas de prueba tampoco es geodésico en términos generales. Este último resultado puede interpretarse como una fuerza extra sobre la partícula de prueba.

Para finalizar se analizaron teorías en función del escalar de Kretschmann y el escalar de Ricci $f(\kappa, R)$. Para la relación lineal $f(\kappa, R) = a\kappa + BR$ en el límite de campo débil se obtuvo un potencial con un término del tipo newtoniano y un segundo término tipo Yukawa. Teorías con tales límites han sido utilizadas para calcular la precesión orbital como muestran De Martino et al. (2018) para las medidas de la precesión de algunos movimientos planetarios. En cuanto a la relación de potencias $f(\kappa, R) = a\kappa^a + BR^b$ se mostró que para el caso especial especial $a = 1$ y $b = 1/2$ el escalar de curvatura R satisface la ecuación de onda, además de recuperar el potencial newtoniano en el límite de campo débil para una masa puntual M situada en el origen de coordenadas. A diferencia de la ecuaciones en vacío de relatividad general, que sólo admite ondas gravitacionales transversales, el hecho de que las ecuaciones de vacío de estas teorías satisfacen la ecuación de onda permite también ondas de compresión (Nash, 2015). Finalmente, la ecuación de movimiento de partículas de prueba en teorías $f(\kappa, R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}})$ es en general no-geodésica que, como se mencionó anteriormente, representa una fuerza adicional. Cabe señalar que fuerzas de este estilo están presentes incluso en relatividad general cuando los gradientes de presión son distintos de cero.

En general las teorías extendidas de gravitación producen términos en las ecuaciones de campo que no figuran en las ecuaciones de la relatividad general, incluso algunas teorías extendidas, en el límite de campo débil, presentan términos adicionales al potencial newtoniano que podrían funcionar como correcciones útiles que respondan a fenómenos gravitacionales observados. Es así que las correcciones permiten explorar nuevos aspectos de la gravitación los cuales podrían ser aplicados en estudios astrofísicos.

Apéndice A

Variaciones

El objetivo de los siguientes desarrollos es obtener la variación de las expresiones correspondientes en términos de la variación del tensor métrico $g^{\mu\nu}$.

§A.1. Variación de $\sqrt{-g}$

La variación de $\sqrt{-g}$ es:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g, \tag{A.1}$$

y la variación del determinante g es (Mendoza, 2015a):

$$\delta g = \delta(det g_{\alpha\beta}) = (\delta g_{00} \times \text{menor de} g_{00}) + (\delta g_{01} \times \text{menor de} g_{01}) + ... \tag{A.2}$$

Como la matriz $g^{\alpha\beta}$ es la matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$ entonces $g^{\alpha\beta}$ está formada por los menores de $g_{\alpha\beta}$ entre g. Por lo tanto, los menores de $g_{\alpha\beta}$ son iguales a $gg^{\alpha\beta}$ (Mendoza, 2015a). Así:

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{A.3}$$

Por lo tanto:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{A.4}$$

§A.2. Variación de la conexión $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$

A partir de la nulidad de la derivada covariante de $g_{\mu\nu}$:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}, \tag{A.5}$$

se sigue que:

$$\frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - (\delta g_{\alpha\nu})\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - (\delta g_{\mu\alpha})\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - g_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - g_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} = 0, \tag{A.6}$$

$$\nabla_{\lambda}\left(\delta g_{\mu\nu}\right) - g_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - g_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} = 0. \tag{A.7}$$

Análogamente de $\nabla_{\nu} g_{\lambda\mu} = 0$ y $\nabla_{\mu} g_{\lambda\nu} = 0$ se obtiene:

$$\nabla_{\nu}\left(\delta g_{\lambda\mu}\right) - g_{\alpha\mu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - g_{\lambda\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0, \tag{A.8}$$

$$\nabla_{\mu}\left(\delta g_{\lambda\nu}\right) - g_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} - g_{\lambda\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = 0, \tag{A.9}$$

al sumar (A.8), (A.9) y restar (A.7) si la conexión es simétrica en los índices de abajo, i.e. libre de torsión, resulta:

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\{\nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} - \nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\nu}\} \tag{A.10}$$

§A.3. Variación del tensor de Riemann $R^{\alpha}{}_{\nu\xi\epsilon}$

El tensor de Riemann es (Landau y Lifshitz, 1997):

$$R^{\alpha}{}_{\nu\xi\epsilon} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}}{\partial x^{\xi}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\xi}}{\partial x^{\epsilon}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\Gamma^{\gamma}_{\nu\epsilon} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon}\Gamma^{\gamma}_{\nu\xi}, \tag{A.11}$$

calculando la variación:

$$\delta R^{\alpha}{}_{\nu\xi\epsilon} = \frac{\partial \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}}{\partial x^{\xi}} - \frac{\partial \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\xi}}{\partial x^{\epsilon}} + \delta\left(\Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\right)\Gamma^{\gamma}_{\nu\epsilon} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\epsilon} - \delta\left(\Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon}\right)\Gamma^{\gamma}_{\nu\xi} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon}\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\xi}, \tag{A.12}$$

y usando la derivada covariante de $\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}$:

$$\nabla_{\xi}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon} = \frac{\partial \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}}{\partial x^{\xi}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\epsilon} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\xi}\delta\Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon} - \Gamma^{\gamma}_{\xi\epsilon}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}, \tag{A.13}$$

entonces:

$$\frac{\partial \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon}}{\partial x^{\xi}} = \nabla_{\xi}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\epsilon} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\epsilon} + \Gamma^{\gamma}_{\nu\xi}\delta\Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon} + \Gamma^{\gamma}_{\xi\epsilon}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}. \tag{A.14}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\xi}}{\partial x^{\epsilon}} = \nabla_{\epsilon}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\xi} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon}\delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\xi} + \Gamma^{\gamma}_{\nu\epsilon}\delta\Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi} + \Gamma^{\gamma}_{\epsilon\xi}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma}. \tag{A.15}$$

Al sustituir (A.14) y (A.15) en (A.12) y considerando que la conexión es simétrica en los índices inferiores resulta:

$$\delta R^{\alpha}{}_{\nu\xi\epsilon} = \nabla_{\xi}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\epsilon\nu}\right) - \nabla_{\epsilon}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\xi\nu}\right) \tag{A.16}$$

§A.4. Variación del escalar de Ricci R

El escalar de Ricci es:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \tag{A.17}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, el cual se expresa como (Landau y Lifshitz, 1997):

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \tag{A.18}$$

De esta manera:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \tag{A.19}$$

Utilizando la variación del tensor de Ricci (A.16) con $\alpha = \xi$ y renombrando los indices libres se obtiene:

$$\delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = \nabla_{\alpha}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\right) - \nabla_{\nu}\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\right). \tag{A.20}$$

Sustituyendo en la expresión anterior la variación de la conexión (A.10) entonces:

$$\begin{aligned}\delta R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = {} & \nabla_{\alpha}\left(\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\{\nabla_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} - \nabla_{\lambda}\delta g_{\nu\mu}\}\right) \\ & - \nabla_{\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\{\nabla_{\alpha}\delta g_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\alpha} - \nabla_{\lambda}\delta g_{\alpha\mu}\}\right),\end{aligned} \tag{A.21}$$

y así, distribuyendo las derivadas covariantes y multiplicando por el tensor métrico $g^{\mu\nu}$, se obtiene:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}. \tag{A.22}$$

Finalmente, sustituyendo el resultado anterior en (A.19), la variación del escalar de Ricci es:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\delta g^{\mu\nu} \tag{A.23}$$

§A.5. Variación del escalar de Kretschmann κ

El escalar de Kretschmann se define como $\kappa = R_{\alpha\beta\gamma\mu}R^{\alpha\beta\gamma\mu}$ entonces:

$$\delta\kappa = \delta R_{\alpha\beta\gamma\mu}R^{\alpha\beta\gamma\mu} = \delta\left(R_{\alpha\beta\gamma\mu}\right)R^{\alpha\beta\gamma\mu} + R_{\alpha\beta\gamma\mu}\delta R^{\alpha\beta\gamma\mu}. \tag{A.24}$$

Desarrollando el segundo sumando de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\mu}\delta R^{\alpha\beta\gamma\mu} &= R_{\alpha\beta\gamma\mu}\big\{g^{\nu\beta}g^{\xi\gamma}g^{\epsilon\mu}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\eta\alpha} + g^{\eta\alpha}g^{\xi\gamma}g^{\epsilon\mu}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\nu\beta} \\ &+ g^{\eta\alpha}g^{\nu\beta}g^{\epsilon\mu}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\xi\gamma} + g^{\eta\alpha}g^{\nu\beta}g^{\xi\gamma}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\epsilon\mu} + g^{\eta\alpha}g^{\nu\beta}g^{\xi\gamma}g^{\epsilon\mu}\delta R_{\eta\nu\xi\epsilon}\big\}, \end{aligned} \tag{A.25}$$

y por lo tanto, renombrando índices y utilizando las simetrías del tensor de Riemann se obtiene:

$$R_{\alpha\beta\gamma\mu}\delta R^{\alpha\beta\gamma\mu} = 4R_\alpha{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\eta\alpha} + R^{\eta\nu\xi\epsilon}\delta R_{\eta\nu\xi\epsilon}. \tag{A.26}$$

Sustituyendo (A.26) en (A.24):

$$\delta\kappa = 2R^{\eta\nu\xi\epsilon}\delta R_{\eta\nu\xi\epsilon} + 4R_\alpha{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\eta\alpha}. \tag{A.27}$$

A continucación se procede a calcular la variación de $R^{\eta\nu\xi\epsilon}\delta R_{\eta\nu\xi\epsilon}$. Considerando el resultado (A.16) reescribamos $\delta R_{\eta\nu\xi\epsilon}$ de la siguiente manera:

$$R^{\eta\nu\xi\epsilon}\delta R_{\eta\nu\xi\epsilon} = R^{\eta\nu\xi\epsilon}\left(g_{\eta\alpha}\left(\nabla_\xi\left(\delta\Gamma^\alpha_{\epsilon\nu}\right) - \nabla_\epsilon\left(\delta\Gamma^\alpha_{\xi\nu}\right)\right) - R^\alpha{}_{\nu\xi\epsilon}g_{\eta\beta}g_{\alpha\mu}\delta g^{\beta\mu}\right), \tag{A.28}$$

de tal forma que usando (A.10) para desarrollar $R^{\eta\nu\xi\epsilon}g_{\eta\alpha}\left(\nabla_\xi\left(\delta\Gamma^\alpha_{\epsilon\nu}\right) - \nabla_\epsilon\left(\delta\Gamma^\alpha_{\xi\nu}\right)\right)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}R^{\eta\nu\xi\epsilon}g_{\eta\alpha}\left(\nabla_\xi\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\epsilon\nu}\right)-\nabla_\epsilon\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\xi\nu}\right)\right)=&\frac{1}{2}R^{\eta\nu\xi\epsilon}g_{\eta\alpha}g^{\alpha\beta}\{\nabla_\xi\nabla_\epsilon\left(-g_{\beta\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\right)\\&+\nabla_\xi\nabla_\nu\left(-g_{\beta\phi}g_{\epsilon\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\right)-\nabla_\xi\nabla_\beta\left(-g_{\epsilon\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\right)\\&-\nabla_\epsilon\nabla_\xi\left(-g_{\beta\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\right)-\nabla_\epsilon\nabla_\nu\left(-g_{\beta\phi}g_{\xi\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\right)\\&+\nabla_\epsilon\nabla_\beta\left(-g_{\xi\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\right)\}.\end{aligned}\tag{A.29}$$

Reescribiendo los últimos 3 sumandos mediante las simetrías del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}R^{\eta\nu\xi\epsilon}g_{\eta\alpha}\left(\nabla_\xi\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\epsilon\nu}\right)-\nabla_\epsilon\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\xi\nu}\right)\right)=&R^{\beta\nu\xi\epsilon}\{-\nabla_\xi\nabla_\epsilon g_{\beta\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}-\nabla_\xi\nabla_\nu g_{\beta\phi}g_{\epsilon\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\\&+\nabla_\xi\nabla_\beta g_{\epsilon\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}\},\end{aligned}\tag{A.30}$$

y usando las simetrías del tensor de Riemann así como la primer identidad de Bianchi entonces:

$$R^{\eta\nu\xi\epsilon}g_{\eta\alpha}\left(\nabla_\xi\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\epsilon\nu}\right)-\nabla_\epsilon\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\xi\nu}\right)\right)=-2R^{\beta\epsilon\xi\nu}\nabla_\xi\nabla_\epsilon g_{\beta\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}.\tag{A.31}$$

Sustituyendo esta expresión en (A.28) resulta:

$$R^{\eta\nu\xi\epsilon}\delta R_{\eta\nu\xi\epsilon}=-2R^{\beta\epsilon\xi\nu}\nabla_\xi\nabla_\epsilon g_{\beta\phi}g_{\nu\varphi}\delta g^{\phi\varphi}-R^{\eta\nu\xi\epsilon}R^{\alpha}{}_{\nu\xi\epsilon}g_{\eta\beta}g_{\alpha\mu}\delta g^{\beta\mu}.\tag{A.32}$$

Llegando a este punto podemos sustituir la relación anterior en la expresión (A.27) para obtener la variación del escalar de Kretschmann en términos de variaciones del tensor métrico:

$$\delta\kappa=-4R^{\beta\epsilon\xi\nu}\nabla_\xi\nabla_\epsilon g_{\beta\eta}g_{\nu\alpha}\delta g^{\eta\alpha}+2R_{\alpha}{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\eta\alpha}.\tag{A.33}$$

Finalmente, la variación del escalar de Kretschmann es:

$$\delta\kappa=4R_{\eta}{}^{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\xi}\nabla_\xi\nabla_\epsilon\delta g^{\eta\alpha}+2R_{\alpha}{}^{\nu\xi\epsilon}R_{\eta\nu\xi\epsilon}\delta g^{\eta\alpha}.\tag{A.34}$$

§A.6. Variación de la densidad lagrangiana de materia $\mathcal{L}_m$

Para obtener la variación de la densidad lagrangiana de materia $\mathcal{L}_m$ partimos del tensor energía-momento (1.21):

$$T_{\mu\nu}=2\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\partial g^{\mu\nu}}-g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{m}},\tag{A.35}$$

suponiendo que $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m \left(g^{\mu\nu}, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right)$ para así obtener:

$$\delta \mathcal{L}_m = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}} \delta \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}. \tag{A.36}$$

Considerando el caso en el que $\mathcal{L}_m$ no dependa de $\partial g^{\mu\nu} / \partial x^\lambda$ entonces:

$$\delta \mathcal{L}_m = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}, \tag{A.37}$$

y así, sustituyendo (A.37) en (A.35) resulta:

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_\mathrm{m}}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\mathrm{m}. \tag{A.38}$$

De esta expresión se puede obtener la variación de $\mathcal{L}_\mathrm{m}$ en términos del tensor de energía-momento y variaciones del tensor métrico:

$$\delta \mathcal{L}_\mathrm{m} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\mathrm{m} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{A.39}$$

§A.7. Variación de la densidad de masa ρ

Partiendo de la ecuación de continuidad:

$$\nabla_\mu \left(\rho u^\mu \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} \rho u^\mu \right)}{\partial x^\mu} = 0, \tag{A.40}$$

y por lo tanto:

$$u^\mu \delta \rho = - \frac{\rho}{\sqrt{-g}} u^\mu \delta \sqrt{-g} - \rho \delta u^\mu. \tag{A.41}$$

Ahora para reescribir la variación en términos de $g^{\mu\nu}$ se la calcula la unitariedad de la cuatro velocidad u^μ, i.e.:

$$\delta (u^\mu u_\mu - 1) = 0, \tag{A.42}$$

i.e.:

$$2 g_{\mu\nu} \delta u^\nu = - u^\nu \delta g_{\mu\nu}, \tag{A.43}$$

pero como $\delta g_{\gamma\eta} = - g_{\eta\mu} g_{\gamma\nu} \delta g^{\mu\nu}$, entonces:

$$2\delta u^{\nu} = u_{\beta}\delta g^{\nu\beta}, \tag{A.44}$$

sustituyendo (A.4) y (A.44) en (A.41):

$$u_{\mu}u^{\mu}\delta\rho = \frac{1}{2}\rho u_{\mu}u^{\mu}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\rho u_{\mu}u_{\beta}\delta g^{\mu\beta}, \tag{A.45}$$

como $u_{\mu}u^{\mu} = 1$, entonces:

$$\delta\rho = \frac{1}{2}\rho\left(g_{\mu\nu} - u_{\mu}u_{\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}, \tag{A.46}$$

se obtiene la variación de la densidad de masa.

Apéndice B

Identidades

§B.1. Divergencia del tensor de Einstein

El tensor de Einstein es:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \tag{B.1}$$

Para demostrar que su divergencia covariante es nula, i.e.:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{B.2}$$

comenzamos por la segunda identidad de Bianchi:

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma\lambda} + \nabla_\nu R_{\rho\mu\sigma\lambda} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma\lambda} = 0. \tag{B.3}$$

Multiplicando la relación anterior por $g^{\gamma\mu}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda}$ se obtiene:

$$\nabla_\mu \left(g^{\gamma\mu}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda}R_{\nu\rho\sigma\lambda}\right) + \nabla_\nu \left(g^{\gamma\mu}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda}R_{\rho\mu\sigma\lambda}\right) + \nabla_\rho \left(g^{\gamma\mu}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda}R_{\mu\nu\sigma\lambda}\right) = 0. \tag{B.4}$$

Dadas las simetrías y contracciones del tensor de Riemann se obtiene entonces:

$$\nabla_\mu \left(g^{\gamma\mu}R\right) - \nabla_\nu R^{\gamma\nu} - \nabla_\rho R^{\gamma\rho} = 0. \tag{B.5}$$

Por lo tanto, renombrando indices y usando las simetrías de la métrica y las del tensor de Ricci R resulta:

$$\nabla_\mu \left(g^{\gamma\mu}R\right) - 2\nabla_\mu R^{\mu\nu} = 0, \tag{B.6}$$

y por lo tanto:

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} R \right) = 0. \tag{B.7}$$

§B.2. Demostración de la identidad $\left(\nabla_\nu \Delta - \Delta \nabla_\nu\right) F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathbf{m}}\right) = -\left(\nabla^\mu F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathbf{m}}\right)\right) R_{\mu\nu}$

Para demostrar la relación:

$$\left(\nabla_\nu \Delta - \Delta \nabla_\nu\right) F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right) = -\left(\nabla^\mu F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right)\right) R_{\mu\nu}, \tag{B.8}$$

partimos de que el término del lado izquierdo de la igualdad anterior:

$$\left(\nabla_\nu \Delta - \Delta \nabla_\nu\right) F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right) = \left(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu\right) \nabla^\mu F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right), \tag{B.9}$$

y usando la identidad de Ricci (Synge y Schild, 2020):

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu\right) V^\beta = R^\beta{}_{\alpha\mu\nu} V^\alpha, \tag{B.10}$$

donde V^β es un vector arbitrario, entonces:

$$\left(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu\right) \nabla^\mu = R^\mu{}_{\alpha\nu\mu} \nabla^\alpha. \tag{B.11}$$

Así, el término del lado derecho de la ecuación (B.9) es:

$$R^\mu{}_{\alpha\nu\mu} \nabla^\alpha F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right) = -R_{\mu\nu} \nabla^\alpha F_R \left(R, \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\right), \tag{B.12}$$

con lo cual la relación (B.8) queda demostrada.

§B.3. Demostración de la identidad $\Delta^{(2)} R = -\nabla^{2\,(2)} R$ en un escenario estático en el límite de campo débil

El operador Laplace Beltrami aplicado a un escalar Φ se puede escribir como (Mendoza, 2015a):

$$\Delta \Phi = \nabla^\alpha \nabla_\alpha \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\sqrt{-g} g^{\beta\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \right). \tag{B.13}$$

De acuerdo con el principio de equivalencia y como el 4-espacio tiene la propiedad de ser localmente plano, entonces en el límite de campo débil se puede escribir el tensor métrico igual al espacio plano más una corrección:

$$g^{\beta\alpha} = \eta^{\beta\alpha} + {}^{(2)}\mathrm{g}^{\beta\alpha}, \tag{B.14}$$

cuyo determinante a $\mathcal{O}(1/c^2)$ está dado por:

$$g = \det(g^{\alpha\beta}) = -1 - {}^{(2)}\mathrm{g}^{00} + {}^{(2)}\mathrm{g}^{11} + {}^{(2)}\mathrm{g}^{22} + {}^{(2)}\mathrm{g}^{33}, \tag{B.15}$$

y por lo tanto (B.13) es:

$$\Delta\Phi = \left(1 + \frac{1}{2}M\right)\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left\{\left(\eta^{\alpha\beta}\left(1 - \frac{1}{2}M\right) + g^{\beta\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right\}{}^{(2)}\Phi, \tag{B.16}$$

donde:

$$M := -{}^{(2)}\mathrm{g}^{00} + {}^{(2)}\mathrm{g}^{11} + {}^{(2)}\mathrm{g}^{22} + {}^{(2)}\mathrm{g}^{33}, \tag{B.17}$$

Desarrollando la expresión (B.16) se obtiene:

$$\Delta\Phi = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Phi + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left\{\left(g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}M\eta^{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right\}\Phi + \frac{1}{2}M\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\Phi. \tag{B.18}$$

De esta relación se sigue que:

$$\Delta^{(2)}R = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}{}^{(2)}R = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right){}^{(2)}R, \tag{B.19}$$

a $\mathcal{O}(1/c^2)$. Finalmente en un escenario estático donde $\partial^2/\partial t^{2\,(2)}R = 0$, la relación anterior es:

$$\Delta^{(2)}R = -\nabla^{2\,(2)}R. \tag{B.20}$$

§B.4. Divergencia del tensor de Nash

El tensor de Nash es:

$$N^{\alpha\beta} = \Delta G^{\alpha\beta} + G^{\rho\sigma}\left(2R_{\rho\ \sigma}^{\ \alpha\ \beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R_{\rho\sigma}\right), \tag{B.21}$$

cuya divergencia está dada por:

$$\nabla^{\alpha}N_{\alpha\beta} = \nabla^{\alpha}\Delta G_{\alpha\beta} + \nabla^{\alpha}\left(G_{\rho\sigma}\left(2R^{\rho\ \sigma}_{\ \alpha\ \beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R^{\rho\sigma}\right)\right), \tag{B.22}$$

usando:

$$\left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\right)\Pi^{\alpha\beta}{}_{\lambda\Omega} = R^{\alpha}{}_{\theta\mu\nu}\Pi^{\theta\beta}{}_{\lambda\Omega} + R^{\beta}{}_{\theta\mu\nu}\Pi^{\alpha\theta}{}_{\lambda\Omega} - R^{\theta}{}_{\lambda\mu\nu}\Pi^{\alpha\beta}{}_{\theta\Omega} - R^{\theta}{}_{\Omega\mu\nu}\Pi^{\alpha\beta}{}_{\lambda\theta}, \tag{B.23}$$

el término $\nabla^{\alpha}\Delta G_{\alpha\beta}$ es:

$$\nabla^{\alpha}\Delta G_{\alpha\beta} = R^{\rho\mu}\nabla_{\mu}G_{\rho\beta} + G_{\rho\beta}\nabla^{\mu}R^{\rho}_{\mu} - G_{\alpha\rho}\nabla^{\mu}R^{\rho\ \alpha}_{\ \beta\ \mu} - 2R^{\rho\ \alpha}_{\ \beta\ \mu}\nabla^{\mu}G_{\alpha\rho}. \tag{B.24}$$

Sustituyendo (B.1) y (B.24) en (B.22) resulta:

$$\begin{aligned}\nabla^{\alpha}N_{\alpha\beta} =& R^{\pi\mu}\nabla_{\mu}R_{\pi\beta} - \frac{1}{2}R^{\mu}_{\beta}\nabla_{\mu}R + R_{\pi\beta}\nabla^{\mu}R^{\pi}_{\mu} - R_{\alpha\pi}\nabla^{\mu}R^{\pi\ \alpha}_{\ \beta\ \mu} - R^{\mu\nu}\nabla_{\beta}R_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}R\nabla_{\beta}R + 2R_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}R^{\mu\ \nu}_{\ \alpha\ \beta} - R\nabla^{\alpha}R_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{B.25}$$

usando $2\nabla^{\nu}R_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}R$ la expresión anterior es:

$$\nabla^{\alpha}N_{\alpha\beta} = R^{\pi\mu}\nabla_{\mu}R_{\pi\beta} - R_{\alpha\pi}\nabla^{\mu}R^{\pi\ \alpha}_{\ \beta\ \mu} - R^{\mu\nu}\nabla_{\beta}R_{\mu\nu} + 2R_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}R^{\mu\ \nu}_{\ \alpha\ \beta}, \tag{B.26}$$

y finalmente como $R^{\pi\mu}\nabla_{\mu}R_{\pi\beta} - R^{\mu\nu}\nabla_{\beta}R_{\mu\nu} = -R_{\alpha\pi}\nabla^{\mu}R^{\pi\ \alpha}_{\ \beta\ \mu}$ la divergencia del tensor de Nash es:

$$\nabla^{\alpha}N_{\alpha\beta} = 0. \tag{B.27}$$

Apéndice C

Ecuaciones de campo

§C.1. Ecuaciones de campo de relatividad general

La variación nula de la acción (1.14) es:

$$-\frac{c^3}{16\pi G}\int\left(R\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}\delta R\right)\mathrm{d}^4x+\frac{1}{c}\int\left(\mathcal{L}_m\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}\delta\mathcal{L}_m\right)\mathrm{d}^4x=0. \tag{C.1}$$

Sustituyendo las expresiones (A.23), (A.4) y (A.39) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{split}-\frac{c^3}{16\pi G}\delta\int\left(\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu}-g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}-R\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\mathrm{d}^4x\\ +\frac{1}{c}\int\left(\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\mathrm{m}\delta g^{\mu\nu}+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}-\mathcal{L}_m\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\mathrm{d}^4x=0,\end{split} \tag{C.2}$$

donde:

$$g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu}=g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\left(\nabla_\alpha\nabla_\nu-\nabla_\nu\nabla_\alpha\right)\delta g_{\lambda\mu}, \tag{C.3}$$

y

$$g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\left(\nabla_\alpha\nabla_\lambda-\nabla_\lambda\nabla_\alpha\right)\delta g_{\mu\nu}, \tag{C.4}$$

son términos frontera nulos por el teorema de Stokes. Así, (C.2) es:

$$\int\left(-\frac{c^3}{16\pi G}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{2c}T_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x=0, \tag{C.5}$$

con lo cual las ecuaciones de campo son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{C.6}$$

§C.2. Ecuaciones de campo de las teorías métricas $f(R, \mathcal{L}_\mathbf{m})$

La variación nula de la acción (2.6) es:

$$\int \left(\sqrt{-g}F_R(R,\mathcal{L}_m)\delta R + \sqrt{-g}F_{Lm}(R,\mathcal{L}_m)\delta\mathcal{L}_m + f(R,\mathcal{L}_m)\delta\sqrt{-g}\right) \mathrm{d}^4x = 0, \tag{C.7}$$

donde $F_R(R,\mathcal{L}_m) = \partial f(R,\mathcal{L}_m)/\partial R$ y $F_{Lm}(R,\mathcal{L}_m) = \partial f(R,\mathcal{L}_m)/\partial\mathcal{L}_m$. Sustituyendo las expresiones (A.23), (A.4) y (A.39) en la ecuación anterior implica que:

$$\begin{aligned} &\int \Big(\sqrt{-g}F_R(R,\mathcal{L}_m)\left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\right) \\ &+\sqrt{-g}F_{Lm}(R,\mathcal{L}_m)\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\mathrm{m}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}f(R,\mathcal{L}_m)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\Big) \mathrm{d}^4x = 0, \end{aligned} \tag{C.8}$$

donde:

$$\begin{aligned} F_R(R,\mathcal{L}_m)g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu} &= g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha(F_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla_\nu\delta g_{\lambda\mu}) \\ &- g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\nu(\nabla_\alpha(F_R(R,\mathcal{L}_m))\delta g_{\lambda\mu}) \\ &+ g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\nu\nabla_\alpha(F_R(R,\mathcal{L}_m))\delta g_{\lambda\mu}, \end{aligned} \tag{C.9}$$

y

$$\begin{aligned} F_R(R,\mathcal{L}_m)g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha(F_R(R,\mathcal{L}_m)\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}) \\ &- g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\lambda(\nabla_\alpha(F_R(R,\mathcal{L}_m))\delta g_{\mu\nu}) \\ &+ g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}\nabla_\lambda\nabla_\alpha(F_R(R,\mathcal{L}_m))\delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Descartando los términos frontera al realizar la integral (C.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} &\int \Big(F_R(R,\mathcal{L}_m)R_{\mu\nu} - \nabla_\nu\nabla_\mu(F_R(R,\mathcal{L}_m)) + g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha(F_R(R,\mathcal{L}_m)) \\ &+\frac{1}{2}F_{Lm}(R,\mathcal{L}_m)\left(g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\mathrm{m} + T_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}f(R,\mathcal{L}_m)g_{\mu\nu}\Big)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x = 0, \end{aligned} \tag{C.11}$$

con lo cual las ecuaciones de campo son:

$$F_R(R, \mathcal{L}_m)R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Delta - \nabla_\nu\nabla_\mu)F_R(R, \mathcal{L}_m)$$
$$-\frac{1}{2}[f(R, \mathcal{L}_m) + F_{Lm}(R, \mathcal{L}_m)\mathcal{L}_\mathrm{m}]g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{Lm}(R, \mathcal{L}_m)T_{\mu\nu}. \tag{C.12}$$

Sutituyendo el caso:

$$f(R, \mathcal{L}_\mathrm{m}) = f(R) + \frac{1}{c}\mathcal{L}_\mathrm{m}, \tag{C.13}$$

se obtienen las ecuaciones:

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2}g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\Delta F(R) = -\frac{1}{2c}T_{\mu\nu}, \tag{C.14}$$

de las teorías $f(R)$.

Apéndice D

Cálculos con *Maxima*

§D.1. Tensores de curvatura en *Maxima*

Maxima (*https://maxima.sourceforge.io/index.html*) es un sistema de álgebra computacional de código abierto basado en DOE-MACSYMA. En el presente trabajo el paquete utilizado fue CTENSOR, donde la notación para el tensor de Riemann es (Toth, 2005):

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\eta} = \frac{\partial \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}, \tag{D.1}$$

de manera que se cumple la siguiente relación respecto al tensor de Riemann $R^{\eta}{}_{\alpha\gamma\beta}$ definido en la introducción:

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\eta} = R^{\eta}{}_{\alpha\gamma\beta}. \tag{D.2}$$

Por otro lado, la definición del tensor de Ricci empleada en el paquete CTENSOR es:

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta\eta}{}^{\eta}. \tag{D.3}$$

Finalmente, extendiendo esta definición al tensor de Riemann $R^{\eta}{}_{\alpha\gamma\beta}$ definido en la introducción:

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta\eta}{}^{\eta} = \delta^{\gamma}_{\eta}\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\eta} = \delta^{\gamma}_{\eta}R^{\eta}{}_{\alpha\gamma\beta} = R^{\eta}{}_{\alpha\eta\beta} = R_{\alpha\beta}, \tag{D.4}$$

se obtiene el tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ tal como fue definido en la introducción. Por lo tanto, la expresión utilizada para el tensor de Ricci, en el presente trabajo y en el paquete CTENSOR, es la misma.

§D.2. Códigos

Los siguientes códigos están basados en el código MEXICAS (Métric EXtended-gravity Incorporated through a Computer Algebraic System *https://www.mendozza.org/sergio/mexicas/*), desarrollado para su uso en *Maxima* para resolver perturbaciones en una teoría métrica de la gravedad (Mendoza et al., 2013).

§D.2.1. Escalar de Ricci a $\mathcal{O}(1/c^2)$

El objetivo de este código es calcular el escalar de Ricci a orden de parturbación $\mathcal{O}(1/c^2)$, usando la métrica (1.43). El resultado es ${}^{(2)}R = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\phi$.

```
maxima << EOF

/* En lo siguiente epsilon=1/c y f(r) es el potencial escalar
gravitacional. */
/* [wxMaxima: input   start ] */
load(ctensor)$
csetup()$
4;
y;
[r,theta,phi,t];
1;
1;
-(1-2*(epsilon^2)*r*diff(f(r),r))^(-1);
-r^2;
- r^2 * sin(theta)^2;
1+2*(epsilon^2)*f(r);
n;
n;
/* [wxMaxima: input   end   ] */

/* Una vez introducida la metrica, se calcula el escalar de
Ricci a orden cero O(0), para esto se toma el limite cuando
```

```
la velocidad de la luz c tiende a infinito , esto es cuando
epsilon tiende a cero. */

R0 : limit(scurvature(),epsilon,0);

/* El escalar de Ricci a segundo orden O(2) se calcula
utilizando el escalar de Ricci a O(0). Primero se calcula solo
el segundo orden (o equivalentemente, el segundo orden menos
el orden cero): */

R2 : limit(epsilon^(-2) * (scurvature() - R0), epsilon,0);

/* Finalmente el escalar de Ricci a segundo orden es: */

R : R0 + epsilon^2 * R2;

EOF
```

§D.2.2. Modelo $f(\kappa) = a\kappa^{1/2}$ en el límite de campo débil

El siguiente código desarrolla la ecuación escalar (3.32) a $\mathcal{O}(1/c)$, usando la métrica (1.43). El resultado es $\phi = C/r$ con C una constante arbitraria, es solución de la ecuación (3.32) a $\mathcal{O}(1/c^2)$.

```
#!/bin/sh

maxima <<EOF

/* En lo siguiente epsilon=1/c y f(r) es el potencial escalar
gravitacional. */

load(ctensor)$
csetup()$
```

```
4;
y;
[r,theta,phi,t];
1;
1;
-(1-2*(epsilon^2)*r*diff(f(r),r))^(-1);
-r^2;
- r^2 * sin(theta)^2;
1+2*(epsilon^2)*f(r);
n;
n;


assume(r>0)$

lriemann (false)$
uriemann (false)$

/* rinvariant() es el escalar de Kretschmann */

rinvariant()$

a: (-1/2)*rinvariant()^(1/2)$

/* limite a orden cero */
a0 : limit(a,epsilon,0)$
/* limite a segundo orden */
a2 : limit(epsilon^(-2)*(a-a0),epsilon,0)$

s1 : fullratsimp(a0 + (epsilon^(-2))*a2)$

/* En lo siguiente se desarrollara el segundo sumando de la
ecuacion 3.32 */
```

```
/* tensor de ricci contravariante */

for i:1 thru 4 step 1 do for j:1 thru 4 step 1 do
uuric[i,j] : 0$

for i:1 thru 4 step 1 do for j:1 thru 4 step 1 do for s:1 thru 4 step 1 do
uuric[i,j] : uuric[i,j] + ug[i,s]*uric[s,j]$


for i:1 thru 4 step 1 do
d11[i] : 0$

for i:1 thru 4 step 1 do for j:1 thru 4 step 1 do
d11[i] : d11[i] + diff((rinvariant()^(-1/2))*uuric[i,j],ct_coords[j])$


for i:1 thru 4 step 1 do
d12[i] : 0$

for i:1 thru 4 step 1 do for s:1 thru 4 step 1 do for m:1 thru 4 step 1 do
d12[i] : d12[i] + mcs[s,m,i]*(rinvariant()^(-1/2))*uuric[s,m]$


for i:1 thru 4 step 1 do
d13[i] : 0$

for i:1 thru 4 step 1 do for s:1 thru 4 step 1 do for m:1 thru 4 step 1 do
d13[i] : d13[i] + mcs[m,s,s]*(rinvariant()^(-1/2))*uuric[i,m]$

for i:1 thru 4 step 1 do
d1[i] : d11[i] + d12[i] + d13[i]$


d21 : 0$
```

```
for i:1 thru 4 step 1 do
d21 : d21 + diff(d1[i],ct_coords[i])$

d22 : 0$

for i:1 thru 4 step 1 do for s:1 thru 4 step 1 do
d22 : d22 + mcs[i,s,s]*d1[i]$

scal : d21 + d22$

sol : fullratsimp(scal)$

limo0 : limit(sol,epsilon,0)$
limo2 : limit(epsilon^(-2)*(sol-limo0),epsilon,0)$

s2 : fullratsimp(limo0 + (epsilon^(-2))*limo2)$

ecorden2 : fullratsimp(s1 + s2)$

/* Se propone f(r)=1/r como solucion */

%,f(r)=1/r$
res : ev (%,diff)$
solucion : fullratsimp(res);

EOF
```

Bibliografía

Arfken, G. B. y Weber, H. J., 1999. Mathematical methods for physicists.

Barrientos, E., Bernal, T. y Mendoza, S., 2020. Relativistic extensions of MOND using metric theories of gravity with curvature-matter couplings and their applications to the accelerated expansion of the Universe without dark components.

Bernal, T., Capozziello, S., Hidalgo, J. y Mendoza, S., 2011. Recovering MOND from extended metric theories of gravity. *The European Physical Journal C*, **71**(11), 1794.

Buck, R. C., 2003. *Advanced calculus*. Waveland Press.

Capozziello, S. y Faraoni, V., 2010. *Beyond Einstein gravity: A Survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics*, vol. 170. Springer Science & Business Media.

Channuie, P., Momeni, D. y Al Ajmi, M., 2021. On Nash theory of gravity with matter contents. *International Journal of Modern Physics A*, **36**(02), 2150006.

Cherubini, C., Bini, D., Capozziello, S. y Ruffini, R., 2002. Second order scalar invariants of the Riemann tensor: applications to black hole spacetimes. *International Journal of Modern Physics D*, **11**(06), 827–841.

De Felice, A. y Tsujikawa, S., 2009a. Construction of cosmologically viable f (G) gravity models. *Physics Letters B*, **675**(1), 1–8.

De Felice, A. y Tsujikawa, S., 2009b. Solar system constraints on f (G) gravity models. *Physical Review D*, **80**(6), 063516.

De Felice, A. y Tsujikawa, S., 2010. f(R) Theories. *Living Reviews in Relativity*, **13**(1). ISSN 1433-8351. URL `http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2010-3`.

De Martino, I., Lazkoz, R. y De Laurentis, M., 2018. Analysis of the Yukawa gravitational potential in f (R) gravity. I. Semiclassical periastron advance. *Physical Review D*, **97**(10), 104067.

Eddington, A. S., 1923. *The mathematical theory of relativity*. The University Press.

Famaey, B. y McGaugh, S. S., 2012. Modified Newtonian dynamics (MOND): observational phenomenology and relativistic extensions. *Living reviews in relativity*, **15**(1), 1–159.

Harko, T., 2010. The matter Lagrangian and the energy-momentum tensor in modified gravity with nonminimal coupling between matter and geometry. *Physical Review D*, **81**(4). ISSN 1550-2368. URL http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.044021.

Harko, T. y Lobo, F. S., 2018. *Extensions of f (R) gravity: curvature-matter couplings and hybrid metric-Palatini theory*, vol. 1. Cambridge University Press.

Henry, R. C., 2000. Kretschmann scalar for a Kerr-Newman black hole. *The Astrophysical Journal*, **535**(1), 350.

Hilbert, D., 1915a. Die grundlagen der physik.(erste mitteilung.). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, **1915**, 395–408.

Hilbert, D., 1915b. Grundlagen der Physik, Erste Mitteilung, vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915. *Nachrichten von der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, Math-physik. Klasse*, **1915**, 395–407.

Kretschmann, E., 1918. Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate, A. Einsteins neue und seine ursprüngliche Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, **358**(16), 575–614.

Landau, L. y Lifshitz, E., 1987. Theoretical Physics, vol. 6, Fluid Mechanics.

Landau, L. D. y Lifshitz, E., 1976. Theoretical Physics. Vol. 1. *Mechanics. Moscow, Nauka*.

Landau, L. D. y Lifshitz, E., 1997. Theoretical Physics. Vol. 2. *The classical theory of fields*.

Mendoza, S., 2015a. *Astrofísica Relativista*.

Mendoza, S., 2015b. MOND as the basis for an extended theory of gravity. *Canadian Journal of Physics*, **93**(2), 217–231.

Mendoza, S., 2022. General form of the metric in spherical coordinates for any metric theory of gravity to second order of perturbation. Article in preparation.

Mendoza, S., Bernal, T., Hernandez, X., Hidalgo, J. y Torres, L., 2013. Gravitational lensing with f (χ)= χ 3/2 gravity in accordance with astrophysical observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **433**(3), 1802–1812.

Mendoza, S. y Silva, S., 2021. The matter Lagrangian of an ideal fluid. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **18**(4).

Milgrom, M., 1983. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *The Astrophysical Journal*, **270**, 365–370.

Nash, J., 2015. Lecture by John F. Nash Jr. An interesting equation.

Synge, J. L. y Schild, A., 2020. *Tensor calculus*. University of Toronto Press.

Toth, V., 2005. Tensor manipulation in GPL Maxima. *arXiv preprint cs/0503073*.

Will, C. M., 2018. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge university press.