UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
COLEGIO DE FILOSOFÍA

UN ANÁLISIS SEMÁNTICO DEL DILEMA DE BENACERRAF

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

ALMA JAZMÍN CRUZ MARTÍNEZ

ASESOR:
DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., MAYO 2022

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis fue desarrollada gracias al apoyo de una beca del programa de "Tecnologías de la Información y Comunicación" de la DSSI-DGTIC y una beca PAPIIT-DGAPA del proyecto PAPIIT IA401717 "Pluralismo y normatividad en lógica y matemáticas".

Antes que nada, quiero agradecer a la vida, al universo, a Dios y a todos esos momentos, situaciones, desencuentros y encuentros que he vivido; a la Alma Jazmín de unos ayeres y a la Alma Jazmín de hoy, por echarle ganas, seguir adelante y llegar juntas hasta aquí hoy. Gracias por cada experiencia que he vivido y las que no, por los tropiezos y los aciertos, gracias a la vida por brindarme esta gran, gran, gran, oportunidad de poder estar hoy aquí.

¡Claro! Todo lo anterior no hubiera sido posible gracias a las maravillosas personas, momentos y circunstancias que han llegado, he sentido y he vivido. Gracias a mis maestros por inspirarme y guiarme en la filosofía, a Cristián Gutiérrez le debo mucho, no sólo su apoyo como mi asesor, sino también su apoyo como ser humano, por compartir sus conocimientos con tanta pasión, elocuencia y desinterés como solo él lo hace. Gracias por ayudarme, por tenderme la mano y estar presente en mi vida, muchas gracias, Cristián.

Gracias totales e infinitas a mis padres Lucia y Florencio, sin ellos nada de esto hubiera sido posible, para empezar gracias por cuidarme y criarme, por confiar en mí, enseñarme a ser una guerrera tal como lo son ustedes y mostrarme que siempre, siempre hay que seguir adelante, que la vida es una y hay que disfrutarla y vivirla, que sí se puede, siempre se puede. Gracias por la paciencia y el amor, gracias por el apoyo económico y moral, gracias por amarme como lo hacen y gracias por enseñarme a ser un poco más independiente; gracias por estar aquí, conmigo.

Gracias a mis hermanas Selene, Adriana y Guadalupe, y gracias a mis sobrinos Erick, Vania, Allison y el bebé Said, cada uno de ustedes me ha enseñado un poco más sobre la vida, sobre cómo vivir o cómo no; gracias por amarme como lo hacen, gracias por apoyarme y estar ahí conmigo, gracias por creer en mí.

Gracias a los amigos que han creído en mí, que me motivan y que me muestran lo valiosa que soy, lo fuerte que soy, así como lo son ellos. Gracias por reflejarnos juntos y llenarme de luz, los amo tanto.

Gracias a todas las personas que me han ayudado de una u otra manera en el camino de la filosofía y en el crecimiento personal, gracias por enseñarme a confiar y creer en mí, por amarme, por recordarme el amor hacia la filosofía, por aprender, descubrir y conocer. Muchas gracias.

Gracias también a todas esas personas que no creían en mí, que pensaban que estaba enloqueciendo, hablándoles de Platón o las lógicas no clásicas. Gracias a aquellas personas que ya no están presentes en mi vida, pero que en algún momento estuvieron, gracias por inspirarme y motivarme, porque poco a poquito, se logró.

Gracias a las Tecnologías de la Información por haber llegado a mi vida, por iluminarme y mostrarme que todo el conocimiento filosófico adquirido había servido y sigue sirviendo, que nada ha sido en balde y que todo pasa por una razón. Gracias.

Gracias a ti Jurgen por motivarme a terminar la tesis, por apoyarme y confiar en mí a pesar de todo. Gracias por amarme cómo lo haces.

Gracias a @almademin por llegar a mi vida a abrirme a conocer más personas, darme cuenta del potencial que tengo y enseñarme de nuevo el amor a la escritura y el compartir el conocimiento.

Gracias Alma Jazmín Cruz Martínez por echarle ganas y haberlo logrado, te lo mereces. Te amo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN **7**

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES FILOSÓFICOS DEL TEMA **13**

1.1 Introducción 13

1.2 La crisis de los fundamentos 15

1.3 ¿Qué es el realismo? 18

1.4. Tres escuelas de filosofía de las matemáticas a principios del siglo XX 24

1.4.1 Logicismo 25

1.4.1.1 Frege 26

1.4.1.2 Russell y Whitehead 27

1.4.1.3 La verdad matemática en el logicismo 29

1.4.2 Formalismo 30

1.4.2.1 La verdad matemática en el formalismo 33

1.4.3. Intuicionismo 34

1.4.3.1 La verdad matemática en el intuicionismo. 37

1.5 Los teoremas de Gödel y la verdad matemática 38

1.6 Conclusiones del capítulo 40

CAPÍTULO 2 DILEMA DE BENACERRAF. **42**

2.1 Introducción. 42

2.2 ¿Cuál es el dilema de Benacerraf? 44

2.3 Unificación de la semántica y epistemología para la verdad matemática. 45

2.4 Epistemología razonable en el conocimiento matemático. 48

2.5 Semántica 54

2.5.1 Semántica homogénea dentro del dilema. 56

2.6 Semántica homogénea de Tarski según Benacerraf. 61

2.7 Conclusiones del capítulo. 63

CAPÍTULO 3 LA SEMÁNTICA DE TARSKI. 65

3.1 Introducción. 65

3.2 Semántica de Tarski. 67

3.2.1 Primer escrito: "El concepto de verdad en los lenguajes formalizados" (1933) 67

3.2.2 Segundo Escrito: "La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica" (1944) 69

3.2.3 Tercer escrito: "Verdad y prueba" (1969) 71

3.3 Semántica heterogénea de Tarski. 76

3.3.1 Lenguaje formal. 77

3.3.2 Lenguaje natural. 77

3.3.3 Construcción del lenguaje formal. 78

3.3.4 Satisfacción 78

3.3.5 Equivalencia T 79

3.4 Verdad 81

3.5 Conclusiones del capítulo. 82

CAPÍTULO 4 UN ANÁLISIS SEMÁNTICO DEL DILEMA DE BENACERRAF. 84

4.1 Introducción. 84

4.2 Similitudes entre la semántica homogénea y la semántica formal de Tarski. 85

4.3 Diferencias entre la semántica homogénea y la semántica formal de Tarski. 87

4.4 Estado del dilema de Benacerraf sin la semántica de Tarski. 88

4.5 Conclusiones del capítulo. 90

CONCLUSIONES GENERALES. 92

BIBLIOGRAFÍA. 95

INTRODUCCIÓN

En la presente tesis se lleva a cabo un análisis semántico del Dilema de Benacerraf postulado por Paul Benacerraf en 1963 con el objetivo de solucionarlo a partir de su disolución.

En este Dilema de Benacerraf se postula que no existe una definición de verdad matemática desde una epistemología razonable y una semántica homogénea al mismo tiempo, es decir, que puede existir una definición de la verdad matemática desde la epistemología razonable[1] o una definición de la verdad matemática desde una semántica homogénea[2], pero no ambas.

Benacerraf sostiene que

> dos clases de preocupaciones, bastante distintas, han motivado separadamente las explicaciones de la naturaleza de la verdad matemática: (1) la preocupación por disponer de una teoría semántica homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje, y (2) la preocupación por que la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable. (Benacerraf, 2004, p. 233)

Es decir que las teorías filosóficas de las matemáticas que han intentado dar una explicación de la verdad matemática mediante una teoría semántica que implica un realismo ontológico y semántico, no explican cómo se adquiere el conocimiento matemático de objetos ajenos al ser humano satisfactoriamente. Y, las teorías que han intentado dar una explicación de la verdad matemática mediante una teoría epistémica han dejado de lado la conexión entre el conocimiento adquirido de la matemática y su relación con el mundo.

Y, dado que, Benacerraf solicita una explicación completa de la verdad matemática que nos expliqué cómo es que conocemos las verdades de la matemática y muestre el por qué una oración matemática es verdadera en el mundo, entonces ninguna explicación de la verdad matemática ofrecida por teorías filosóficas de las matemáticas fue satisfactoria.

---

[1] Una epistemología razonable o teoría epistémica razonable es una teoría filosófica que explica el conocimiento empírico y el conocimiento teórico en la misma teoría.

[2] Una semántica homogénea es una teoría filosófica que justifica la verdad de las oraciones realizadas en los lenguajes formales y en el lenguaje natural dentro de la misma teoría.

.

Esto fue así ya que, dado que ninguna teoría filosófica explica la verdad matemática completamente, la teoría filosófica no termina de explicar el fenómeno: que es la verdad matemática; además de que las teorías filosóficas de las matemáticas incompletas pueden ser susceptibles a contradicciones y entonces cualquier postulado que genere la teoría sería inútil.

Se han hecho varios intentos por darle una solución al dilema regularmente ofreciendo teorías epistémicas que sean compatibles con la teoría semántica homogénea. Sin embargo, no se han analizado específicamente las características que debe de cumplir la semántica homogénea que postula Benacerraf para ofrecer una definición de verdad matemática, ya que Benacerraf había indicado que la semántica homogénea por medio de la cual se puede y debe obtener una definición de la verdad matemática es la semántica de Tarski:

> Considero que sólo tenemos una explicación de ese estilo: la [semántica] de Tarski, y que su característica esencial es la de definir la verdad en términos de referencia (o satisfacción) sobre la base de un tipo particular de análisis sintáctico-semántico del lenguaje, y así que cualquier supuesto análisis genuino de la verdad matemática debe ser el análisis de un concepto de verdad por lo menos en el sentido de Tarski. (*Ibid.*, p.239)

Benacerraf acepta y postula a la semántica de Tarski como su teoría semántica homogénea mediante la cual se puede obtener una definición de verdad tanto en el sistema matemático, como en el lenguaje natural, ya que, como bien lo menciona Benacerraf:

> Una teoría de la verdad para el lenguaje en el que hablamos, argumentamos, teorizamos, matematizamos, etc., debe, de la misma manera, proporcionar condiciones de verdad similares para enunciados similares. Las condiciones de verdad asignadas a dos enunciados que contengan cuantificadores deberían reflejar de manera significativamente similar la contribución de los cuantificadores. Cualquier distanciamiento de una teoría así de homogénea tendría que estar fuertemente motivado para poder ser digno de consideración. (*Ibid.*, p.235)

Por lo que Benacerraf considera a la teoría semántica de Tarski como una teoría semántica homogénea mediante la cual podemos obtener una definición de verdad en el lenguaje formal y en el lenguaje natural. El problema comienza al estudiar la presentación hecha por Tarski de su propia teoría semántica como sólo una teoría semántica formal.

Tarski presenta a su teoría semántica como una semántica formal mediante la cual podemos obtener una definición de verdad para lenguajes formalizados tales como el matemático, no obstante, también nos dice que en todos los lenguajes naturales ‘hablados’ – “el significado del problema [de definición de verdad] es más o menos vago, y su solución puede ser únicamente aproximada” (Tarski, 1944, p.12). Es decir, la semántica de Tarski no está diseñada para dar una definición de verdad en el lenguaje natural, entonces, ¿por qué Benacerraf sigue considerando a la semántica de Tarski como la semántica homogénea de su dilema?, y, aún con la falta de la semántica homogénea ¿puede subsistir el Dilema de Benacerraf?

Es por lo anterior que en la presente tesis llevaré a cabo un análisis semántico del Dilema de Benacerraf como respuesta a la búsqueda de una definición satisfactoria de la verdad matemática teniendo como eje central la teoría semántica tarskiana aceptando o negando su justificación dentro del dilema. Argumentaré en favor de la hipótesis de que la semántica de Tarski no es la semántica homogénea que postula Benacerraf en su dilema, debido a que la semántica de Tarski es heterogénea al estar diseñada para los lenguajes formales y no para el lenguaje natural. De probar mi hipótesis, obtendría como consecuencia la disolución del dilema, es decir, una forma de solucionar el Dilema de Benacerraf.

El siglo XX fue una revolución en la filosofía de las matemáticas para brindar una definición y fundamentación de las matemáticas, por lo que varias corrientes filosóficas de las matemáticas como el logicismo, formalismo e intuicionismo ofrecieron su teoría propia acerca de lo que eran las matemáticas, qué eran los números, cómo definir la verdad y el conocimiento de una oración matemática. Al intentar dar una definición específica de lo que eran las matemáticas en cada diferente postura filosófica, no existía un consenso de lo que eran las matemáticas, de cómo conocerlas o ni de cómo definir la verdad de las matemáticas. A mediados del siglo XX Paul Benacerraf se dio cuenta de que no existía ninguna teoría filosófica general que brindara una definición de la verdad matemática desde una teoría semántica y una teoría epistémica al mismo tiempo, teniendo como consecuencia su famoso Dilema de Benacerraf.

Benacerraf es un filósofo de las matemáticas residente en Estados Unidos, quien, en 1973, postuló su famoso dilema en torno al conocimiento y la verdad en la filosofía de las matemáticas.

El dilema se construye a partir de las siguientes preguntas: ¿cómo explicamos la verdad matemática?, ¿cómo damos cuenta de nuestro conocimiento matemático?, ¿nuestra semántica es homogénea?, ¿nuestra semántica aplica en todos los contextos, incluyendo al matemático?, ¿nuestra epistemología es razonable?, ¿son compatibles nuestras concepciones de la verdad y del conocimiento en contextos matemáticos? Como resultado de su análisis y de las respuestas que ofrece a estas preguntas, Benacerraf concluye que nuestra mejor semántica (la tarskiana) es incompatible con nuestra mejor epistemología (en su caso la teoría causal del conocimiento).[3]

Alfred Tarski es un filósofo polaco que en 1944 publicó su primer escrito para definir la verdad en las oraciones matemáticas en los sistemas formalizados a partir de intuiciones clásicas como la correspondencia de la verdad de Aristóteles "decir de lo que es qué es y decir de lo que no es, que no es" (Aristóteles, Metafísica Γ, 727). A partir de estas intuiciones Tarski brindó una definición de la verdad en lenguajes formalizados que tienen una estructura especificada.

En su dilema, Benacerraf caracteriza a la semántica de Tarski de tres maneras principalmente: una semántica homogénea, referencial y general que certifica todas las verdades de cualquier lenguaje. Una semántica homogénea es aquella en la que el tratamiento para las oraciones del lenguaje natural y el lenguaje matemático es análogo, es decir, que la manera de analizar el significado de las oraciones matemáticas y no matemáticas sea parecida. Referencial quiere decir que, al ser una teoría del significado, en donde, para que una oración sea verdadera esta debe de contar con un referente que satisfaga la oración en el mundo, pero en el caso de la semántica tarskiana, se realiza una correspondencia entre lenguaje objeto y metalenguaje. Y general que certifica la verdad de todas oraciones tanto matemáticas como no matemáticas.

El objetivo general de mi tesis es analizar el Dilema de Benacerraf desde una perspectiva semántica siguiendo la semántica de Tarski. Busco encontrar una solución al dilema de Benacerraf desde el análisis semántico y para lograr dicho objetivo presentaré cuatro capítulos que tratará temas específicos del Dilema de Benacerraf.

En el primer capítulo hablaré acerca de los antecedentes filosóficos del Dilema de Benacerraf y las razones por las cuales éste se gestó. Es por ello por lo que en ese capítulo me centraré en el análisis contextual del siglo XIX y XX, desde la Teoría de conjuntos de Cantor, pasando por Dedekind, Frege, Hilbert, Brouwer, Gödel hasta llegar a Benacerraf.

[3] Una teoría causal del conocimiento es la teoría que afirma que un sujeto X conoce S de acuerdo con una relación causal referencial entre X y los referentes de los nombres, predicados y cuantificadores de S.

Comenzaré presentando el acontecimiento que en historia de las matemáticas se le conoce como "la crisis de los fundamentos" el cual surgió al no poder dar una explicación de las geometrías no euclidianas, ni del cálculo infinitesimal, de acuerdo con los métodos matemáticos que teníamos en ese entonces, primordialmente la teoría de conjuntos de Cantor. Esto con el objetivo de presentar el contexto histórico y conceptual que propició el surgimiento del Dilema de Benacerraf entenderemos mejor cómo está constituido.

En el segundo capítulo presentaré el Dilema de Benacerraf y explicaré porqué es considerado un dilema, analizando tanto la parte epistémica como la parte semántica del dilema, agregando un análisis de la semántica homogénea tarskiana que solicita Benacerraf para sustentar de su dilema. Realizaré un estudio de lo que es una semántica homogénea la cual, según Benacerraf, brinda una definición de la verdad en el lenguaje de la matemática y la verdad en el lenguaje natural.

En el tercer capítulo me centraré en la semántica de Tarski, desde el momento en el que la concibió como una semántica formal para dar una definición de verdad hasta los intentos por dar una definición de verdad en el lenguaje natural. Mi objetivo principal en este capítulo es explicar la definición de verdad formal a partir de la teoría semántica de Tarski es para lograr dicho objetivo mostraremos los puntos más importantes de cada una de sus tres obras, *El concepto de verdad en los lenguajes formalizados, La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica,* y *Verdad y Prueba,* notando el cambio en su postura de la definición de verdad en la semántica para lenguajes formales y lenguajes naturales.

Por último, en el cuarto capítulo llevaré a cabo una comparación entre la semántica homogénea del Dilema de Benacerraf presentada en el capítulo dos y la semántica de Tarski presentada en el capítulo 3, mostrando sus similitudes, sus diferencias, las razones por las cuales pudo ser considerada por Benacerraf como la semántica que sustenta su dilema y las consecuencias de la heterogeneidad de la semántica de Tarski en el Dilema de Benacerraf. Realizaré un análisis del estado del Dilema de Benacerraf después de una reinterpretación de la teoría semántica de Tarski. Al llevar a cabo éste último análisis concluiré que existe un error en la concepción del Dilema de Benacerraf, ya que, si bien es cierto que existen diversas maneras acerca de cómo definir la verdad matemática, ya sea desde la epistemología o la semántica, la semántica de Tarski en ningún momento es la semántica homogénea que nos presenta Benacerraf en su dilema y, al no existir dicho disyunto, el Dilema de Benacerraf queda disuelto.

Capítulo 1 Antecedentes filosóficos del tema

1.1 Introducción

El objetivo del presente capítulo es mostrar los antecedentes filosóficos del Dilema de Benacerraf a partir del surgimiento de la *crisis de los fundamentos matemáticos* y las diversas teorías filosóficas de las matemáticas que intentaron darle solución durante los siglos XIX y XX.

Durante este periodo surgieron varias teorías filosóficas de las matemáticas que explicaban la verdad de las oraciones de las matemáticas con diferentes posturas realistas y que fueron visibles hasta 1963 con el Dilema de Paul Benacerraf.

Es por esto por lo que, para entender el surgimiento del Dilema de Benacerraf y las exigencias solicitadas en él, conoceremos en el siguiente capítulo:

1. El surgimiento de la *crisis de los fundamentos.*
2. El surgimiento de las diversas teorías filosóficas que fundamentaron a las matemáticas.
3. La postura realista que cada teoría filosófica poseía.
4. La explicación de la verdad matemática de acuerdo con su postura realista de cada teoría filosófica.
5. Los problemas a los que se enfrentaron algunas teorías filosóficas en el momento de fundamentar su explicación de las matemáticas

Ahora bien, la *crisis de los fundamentos* surgió a partir de los nuevos descubrimientos matemáticos que presentaban una nueva teoría matemática diferente a la ya establecida y en la cual, los nuevos fenómenos matemáticos descubiertos no tenían lugar. Estos nuevos fenómenos matemáticos descubiertos fueron las geometrías no euclidianas y el cálculo infinitesimal.

Para encontrar una teoría matemática que brindase una explicación de las matemáticas ya conocidas en conjunción con los nuevos fenómenos matemáticos descubiertos, diversas teorías filosóficas brindaron una fundamentación de las matemáticas a partir de un tipo de realismo diferente en cada teoría, es decir, mientras que algunas teorías filosóficas se apoyaban en un realismo ontológico, otras teorías filosóficas se apoyaban en un realismo epistémico o un realismo semántico para explicar lo que eran las matemáticas y explicar la verdad matemática. Algunas de las corrientes filosóficas que brindaron una fundamentación de las matemáticas fueron el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.

No obstante, Paul Benacerraf se dio cuenta de que la postura realista que poseía cada teoría filosófica de las matemáticas imposibilitaba una compatibilidad entre las diversas teorías filosóficas de las matemáticas y, por lo tanto, imposibilitaba también una explicación completa de la verdad matemática.

Y es por esto por lo que en 1963 Benacerraf publica su dilema manifestando la inexistencia de una explicación completa de la verdad matemática y su insatisfacción ante este suceso. Lo cual, lo lleva a solicitar una teoría filosófica completa de las matemáticas que brinde una explicación de la verdad matemática desde un realismo epistémico, un realismo semántico y un realismo ontológico.

Sin más preámbulo, a continuación, los antecedentes filosóficos del Dilema de Benacerraf.

1. 2 La crisis de los fundamentos

¿Qué es un fundamento? Comencemos con una respuesta sobre su significado literal. De acuerdo con el diccionario de la RAE, un fundamento es un "principio y cimiento en que estriba y sobre el que se apoya un edificio u otra cosa" (RAE, 2020); en otras palabras, es la base sobre la cual se construye algo. Dentro de las matemáticas un fundamento es lo mismo, la base a partir de la cual se construye todo el demás conocimiento matemático es el cimiento sobre el que se construyen teorías más complejas como lo son la teoría de números, la geometría, la topología o el análisis matemático.

Al igual que en la construcción de edificaciones, si un fundamento matemático tiene fallas, es altamente probable que la construcción teórica matemática que era apoyada por ese fundamento caiga.[4] Gracias a que se tienen diferentes teorías y bases, es difícil que la ciencia matemática colapse, pero si los fundamentos de alguna rama de las matemáticas colapsa, todo el conocimiento que depende de estos fundamentos matemáticos sería puesto en duda, ya que sería posible el surgimiento de paradojas o contradicciones que no aseverarían el conocimiento obtenido mediante esta rama de las matemáticas.

Ahora bien, la matemática es considerada como una ciencia exacta en la que su conocimiento es necesario y universal y la cual brinda soporte a las demás ciencias (Alberto Dou, 1970, p. 9), es difícil imaginar que sus fundamentos fallen, puesto que, estos deberían de ser de forma tal, que nos proporcionasen dicho conocimiento universal y necesario, siendo entonces imperecederos, constantes, completos, correctos y consistentes. Son imperecederos porque el conocimiento matemático que se obtuvo en la antigüedad sigue vigente en nuestros días; son constantes porque el conocimiento matemático no sufrió grandes cambios de un día para otro, sino que el conocimiento se conservó tal cual era hasta nuestros días y seguro seguirá así en el futuro; es completa porque dentro de su sistema matemático explica los fenómenos que le interesan y es

[4] Si la matemática colapsa, entonces todos los procedimientos matemáticos y el conocimiento que eran obtenido mediante esta ciencia no tendrían validez. Si no podemos utilizar los procedimientos matemáticos porque no podemos justificar su validez, entonces la certificación de conocimiento que tenemos sobre el mundo obtenida por métodos matemática estaría en duda. Si los conocimientos que ya teníamos asentados sobre el mundo mediante métodos matemáticos no lo son, es decir, no son conocimiento certero sobre el mundo, todo nuestro conocimiento que implicara en cierta medida procesos matemáticos entraría en crisis. Y, dado que conocer es saber algo de un objeto o fenómeno, no tendríamos conocimiento ni matemático, ni de las demás ciencias que requieran utilizar la matemática.

consistente porque no hay contradicciones en su sistema, por ejemplo el teorema de Pitágoras.

Si los fundamentos de la matemática deben de ser de esta forma, entonces no es permisible que colapsen o que generen contradicciones, ya que la matemática es por sí misma un fundamento para las demás ciencias y sería posible que el conocimiento derivado de estos fundamentos colapse también. Si las matemáticas llegaran a colapsar sería entonces necesario encontrar una solución al fundamento de las matemáticas que sostenga todo el conocimiento matemático adquirido a lo largo de los años. Y, aunque la existencia de este hecho parezca irreal, el colapso de los fundamentos de las matemáticas sucedió a finales del siglo XIX.

Con el descubrimiento de los nuevos fenómenos matemáticos de la época como el cálculo infinitesimal, la teoría de números algebraica de Dedekind[5], la teoría de funciones riemanniana y weierstrassiana[6] y el análisis y las definiciones de los números reales, la teoría matemática establecida entro en crisis al no poder explicar dentro de su mismo sistema estos fenómenos recién descubiertos y no había manera de fundamentar el conocimiento matemático ya adquirido y el nuevo conocimiento matemático descubierto.

Por lo anterior diversas corrientes filosóficas conocidas ahora como filosofía de las matemáticas o filosofía primera matemática,[7] brindaron una solución a la *crisis de los fundamentos matemáticos* a partir de la creación de sistemas filosóficos que explicasen las matemáticas y justificaran su conocimiento matemático.

La llamada "crisis de los fundamentos" es la expresión que hace referencia al resquebrajamiento de teorías y paradigmas considerados como fundamentales en la matemática por varios siglos y que fueron puestos a prueba. Este evento causó mucho

---

[5] Estudio de los números enteros y racionales a partir de estructuras algebraicas o conjuntos, como anillos, grupos o campos.

[6] Es la teoría de análisis matemático, o sea, el estudio de los números reales, complejos y sus funciones.

[7] La filosofía de las matemáticas es el conjunto de investigaciones que brindan una respuesta a la *crisis de los fundamentos matemáticos* desde un enfoque filosófico, es decir, a partir de un conjunto sistemático se intenta dar una fundamentación a lo que son las matemáticas. A partir de una semántica, una ontología y una epistemología que explique el fenómeno y dé una solución. Este tipo de filosofía teórica no debe de confundirse con la *filosofía de la práctica matemática,* la cual, a diferencia de la *filosofía de las matemáticas,* toma a las matemáticas como una ciencia ya constituida desde donde se intenta comprender, entender y perfeccionar dicha ciencia desde ella misma, todo esto a partir del estudio de las prácticas matemáticas. Véase (Gower, 2000, p.1).

revuelo en el ámbito filosófico matemático puesto que, si consideramos a la matemática como una de las ciencias más exactas y precisas, de la cual es seguro obtener conocimiento ¿cómo puede esta ciencia estar fundamentada en la nada?

Ahora bien, ¿cómo fundamentamos la matemática? Esto se solucionó gracias al proyecto de *aritmetización del análisis*,[8] que dejó de apelar a la existencia de objetos como los números infinitesimales y, en su lugar, trabajo con secuencias de números reales para definir las nociones centrales del análisis. Quedaba pendiente la fundamentación de la existencia de secuencias infinitas, pues si bien parecía intuitivamente correcto apelar a ellas, no existía una justificación adecuada a nivel matemático que nos garantizara su existencia. Por lo que algunos matemáticos como Cantor decidieron estudiar las colecciones de carácter infinito, obteniendo a la teoría de conjuntos como resultado.

A partir de ese momento la teoría de conjuntos se usó, no sólo como una teoría de las secuencias de números reales, sino como una teoría general de los conjuntos. La cual en algún momento mostró tener suficiente poder para reconstruir todas las teorías matemáticas existentes en ese momento a partir de sus propios principios. Como bien lo dicen los miembros del grupo Bourbarki en 1949 "todas las teorías matemáticas pueden ser consideradas como extensiones de la teoría general de la teoría de conjuntos" (Bourbarki, 1949, p. 7) dado que esta teoría se presenta como "un elemento unificador y sistematizador de la matemática moderna" (Ferreiros, 1998, p. 389).

Todo marchaba a la perfección al postular a la teoría de conjuntos como fundamento de la ciencia matemática, sin embargo, los problemas no se hicieron esperar. A principios del siglo XX, se descubrió una antinomia que marcaría a la teoría de conjuntos, la famosa *Paradoja de Russell-Zermelo,*[9] causando un gran revuelo en la comunidad filosófica y

---

[8] Son los esfuerzos para explicar las matemáticas de manera rigurosa desde una perspectiva aritmética, siendo preferible al ser más entendible y clara.

[9] La paradoja de Russell-Zermelo es una paradoja descubierta de manera independiente por cada uno de nuestros dos autores, en esta paradoja la pregunta es ¿existe un conjunto compuesto por todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos? Si decimos que los conjuntos están definidos por una propiedad, ¿qué sucede con la propiedad de no contenerse a sí mismo? Un conjunto puede contenerse a sí mismo si la propiedad de ese conjunto es, por ejemplo, el conjunto de ideas abstractas, en donde dicho conjunto se pertenecería a sí mismo puesto que el concepto de "conjunto" es una idea abstracta; sin embargo, la propiedad de los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos es más problemática. Si decimos que el conjunto está creado a partir de la propiedad "no contenerse a sí mismo", si ese conjunto no se contiene a sí mismo, ese conjunto debería de contenerse a sí mismo; por otro lado, si ese conjunto se pertenece a sí mismo, no debería de contenerse a sí mismo, ya que no cumple la propiedad, encontrando así una paradoja.

matemática. Dentro de ese contexto, diferentes escuelas y corrientes filosóficas intentaron hallar una solución a la paradoja modificando y postulando axiomas para la Teoría de Conjuntos, surgiendo así los paradigmas filosóficos matemáticos ya bien conocidos, como el logicismo, formalismo e intuicionismo.

Dichas escuelas filosóficas intentaban ofrecer una respuesta a las siguientes preguntas: ¿cómo es posible arreglar la teoría de conjuntos para que continúe siendo un fundamento?, ¿la teoría de conjuntos es un fundamento necesario para las matemáticas?, ¿es posible reemplazar la teoría de conjuntos por algún otro fundamento?, donde cada corriente filosófica respondió las preguntas a su manera.[10]

No obstante, las diversas escuelas filosóficas al brindar una fundamentación de las matemáticas a partir de su sistema filosófico hicieron uso de posturas realistas, ya sea en ontología, epistemología o semántica. Y, es por eso por lo que en el siguiente apartado analizaremos la caracterización de cada una de estas posturas realistas que ayudaron a postular dentro de cada sistema filosófico el fundamento de las matemáticas.

1.3 ¿Qué es el realismo?

A través de los años ha habido diversas teorías que han optado por una postura realista en su sistema para probar o defender sus objetivos planteados. Son teorías en las que se plantea la existencia real de objetos u otros entes para sostener sus ideas, este “algo real” puede variar dependiendo de las necesidades de la teoría y de los objetivos que ésta se plantea.

En filosofía de las matemáticas ocurre lo mismo. Existen diversas teorías filosóficas matemáticas que apelan a la existencia de objetos, estas teorías están construidas de tal manera que resulta vital el apelar a una postura realista, ya sea que se pretenda conocer a dicho objeto real o que, a partir de la existencia real de ese algo, podamos conocer lo

[10] Aunque la crisis de los fundamentos fue de gran interés para la comunidad filosófica, para los matemáticos no había un gran problema. Si bien, estaban interesados en los resultados que se podían obtener a partir de la crisis, ellos debían de continuar con su trabajo matemático en donde sus teorías matemáticas convencionales funcionaban y no existía mayor problema al continuar su uso.

demás. Sea cual fuere el caso, si afirmamos que una teoría es realista o tiene una actitud realista, entonces estamos afirmando que los objetos tales que la teoría se compromete con ellos existen como objetos reales.[11]

No obstante, no todas las teorías que se dicen ser realistas son realistas de la misma manera. Es decir, así como los objetivos que pretende lograr una teoría pueden variar respecto de otra, también la manera en cómo los logra cambia. Es posible proponer un realismo dentro de cualquier teoría que nos explique algún sistema sí, pero puede explicarlo respondiendo a ¿cómo conocemos?, ¿qué conocemos? o ¿es verdad lo que conocemos?, en otras palabras, dar una respuesta epistémica, ontológica o semántica. Si bien nuestra teoría propone un realismo ontológico, no necesariamente ha de plantear un realismo semántico o epistémico, aunque existen teorías en las que todo su sistema sostiene una postura realista esto sucede ya que logra explicar de manera clara el conjunto de ideas que propone esta teoría. Por ejemplo, si aceptamos un realismo ontológico en matemáticas entonces estamos afirmando que los objetos matemáticos existen. Si este es el caso, garantizamos el conocimiento de la verdad de las oraciones matemáticas, puesto que, sería verificable la adecuación entre la proposición hecha y el objeto del cual estamos predicando, facilitando de esta manera la explicación semántica en nuestra teoría. Analizaremos esto con más detalle, más adelante.

Por las razones anteriores es menester conocer nuestra teoría, sus postulados, principios y consecuencias que conlleva el aceptarla o no, saber con qué nos estamos comprometiendo o cómo estamos concibiendo el mundo. Para entender mejor el realismo, remontémonos a uno de los primeros realistas, Platón, el cual planteaba un realismo en todos los aspectos de su teoría, *la teoría de las ideas.*

Platón (427-347 a.n.e.), nacido en la Antigua Grecia, dentro de su doctrina filosófica, el platonismo, postuló su *teoría de las ideas* o *reino de las ideas,* teoría filosófica en la que se plantea la existencia de un reino de objetos más allá de nuestra experiencia sensible. En ese reino existen las ideas abstractas de manera perfecta y universal, mientras que los objetos en la Tierra son partícipes de ellas sólo como una imitación de estos objetos perfectos, como bien lo dice Friend (2007) “existe un reino de

[11] Definimos teoría como el conjunto de ideas, reglas o principios dentro de un sistema que sirve para probar o defender un objetivo.

objetos perfectos lo bastante independiente del ser humano. Los objetos en el ‘Paraíso de Platón’ son perfectos y todo sobre la Tierra es una pálida imitación de estos objetos”[12] (p. 38). Estos objetos al ser tan perfectos son la base a partir de la cual podemos entender la complejidad del mundo sensible en la Tierra; es decir, nosotros podemos entender y conocer los objetos sobre la Tierra sólo porque forman parte de los objetos ideales que se encuentran en ese reino. Aunque esta idea puede sonar algo descabellada, el paraíso platónico nos ayuda a entender y explicar cómo es posible que nosotros tengamos conocimiento abstracto y podamos conocer el mundo sensible. En este punto de la teoría ya estamos tomando una actitud realista, realista en ontología puesto que las *ideas perfectas* existen realmente en una clase de *topus uranos*, pero no sólo encontramos este tipo de realismo en la *teoría de las ideas.*

También podemos observar que Platón defendía una postura realista epistémica. Para conocer las ideas perfectas que se encuentran en este reino perfecto, los seres humanos pensantes y racionales debemos de hacer uso de nuestra alma o razón.[13] Por medio de nuestra alma nosotros, los seres humanos, tenemos acceso a las ideas, ya que en algún momento nuestra alma se encontraba en ese reino perfecto , pero ésta se “cayó” en este mundo sensible apropiándose, mediante el cuerpo, de este mundo caótico y olvidándose del reino perfecto; sin embargo, dado que nosotros estuvimos en ese reino tenemos reminiscencias[14] de ese mundo abstracto y objetivo, es por esto que podemos conocer y entender el mundo sensible, en donde, aunque todo parece un sinsentido, nuestra razón puede organizarlo, conocerlo y entenderlo. Así, para Platón el alma existe y es gracias a ella que podemos conocer los objetos reales (ideas) que existen más allá de nosotros. En este sentido, dado que es a partir de la existencia de nuestra *alma* que conocemos, apelamos a un realismo epistémico.

Finalmente, podemos defender que Platón también era un realista en sentido semántico. Para él las matemáticas son un claro ejemplo de la existencia de este mundo.

---

[12] “there exists a realm of perfect objects quite independent of human beings. The objects in ‘Plato's heaven’ are perfect, and everything on earth is a pale imitation of them” La traducción es mía.

[13] Aquí tomamos al alma como sinónimo de intuición y razonamiento puesto que sólo a partir del alma es que podemos tener estas capacidades: razonamiento e intuición. Esta interpretación puede llegar a ser cuestionada sin embargo funciona muy bien para los objetivos en la escritura de este capítulo.

[14] Una reminiscencia es un recuerdo de estas ideas perfectas, mismas que podemos recordar mediante un proceso racional. La razón es la que nos permite recordar las ideas a las cuales tuvimos acceso directamente cuando estábamos en ese reino de la perfección.

Nosotros realizamos operaciones matemáticas, interactuamos con los números y sabemos que es verdad la operación suma 2 + 2 es igual a 4, sin embargo, jamás hemos experimentado sensorialmente los números, entonces ¿cómo sabemos que dicha oración es verdadera?

Si postulamos que los números son ideas que se encuentran en este reino perfecto, nosotros tenemos reminiscencias de los números y, es por eso que, cuando en este mundo sensible vemos la ejemplificación del número 2 en dos libros o dos niños, nosotros sabemos que estas instancias están siendo partícipes del *número dos* que se encuentra en este reino perfecto, como bien lo menciona Friend (2007) estas ideas universales existen, no importa si no somos capaces de concebirlas o dibujarlas, existen (p.38). Nosotros podemos concebir estas ideas de los números sólo a partir del razonamiento que poseemos dado por nuestra alma, y, dado que todos los seres humanos somos seres racionales, podemos conocer el *reino de las ideas*, las ideas abstractas, los conceptos.[15] De esta manera, los números existen, nuestra alma existe y la verdad de las proposiciones matemáticas es real, siendo entonces realistas ontológicos, epistémicos y semánticos.

Ahora bien, los siglos han pasado y nuestras teorías han cambiado. Con Platón veíamos una postura realista en todos los sentidos de su teoría, ahora, con las nuevas teorías postuladas y los descubrimientos hallados en el siglo XX ¿es posible postular un realismo? Platón postuló su *teoría de las ideas* para explicarnos cómo es el mundo, cómo lo conocemos y cómo interactuamos en él, pero las teorías actuales no necesariamente explican o intentan explicar todos estos objetivos al mismo tiempo. Así como las teorías han cambiado, las posturas realistas también. Si bien existen diversas teorías filosóficas de las matemáticas que son anti-realistas, existen muchas otras teorías que sí son realistas.

En la comunidad matemática existen fuertes intuiciones para inclinarnos hacia una postura realista en diversos ámbitos, ya que "los textos matemáticos hablan sobre descubrir verdades y encontrar pruebas de un teorema verdadero; [en donde] las oraciones sugieren que hay un reino de verdades ahí afuera y que nosotros tenemos el trabajo de

[15] Los seres humanos tenemos un correcto razonamiento sobre las ideas dado que todos los seres humanos somos racionales, sin embargo, sabemos que en ocasiones nuestro razonamiento se equivoca. Para darnos cuenta de los errores en nuestro razonamiento basta contrastarlo con otro ser humano y vislumbrar nuestro error.

entenderlas”[16] (Friend, 2007, p.28), ahora bien ¿qué son esas verdades?, ¿dónde se encuentran los objetos de los que hablan esas verdades?, ¿cómo las conocemos? Los filósofos de las matemáticas pueden tener diferentes actitudes realistas respecto de los elementos de una teoría matemática, ya sea, por ejemplo, que apelen a un realismo epistémico o un realismo semántico, pero no un realismo ontológico; sin embargo, lo que todos los filósofos realistas de las matemáticas sostienen es la existencia del valor de las matemáticas independientemente del ser humano (Friend, 2007, p.28), este no es creado, sino que es descubierto.

En la actualidad existen varias posturas realistas que se pueden encontrar en una teoría filosófica sobre las matemáticas, pero para saber por qué abogamos por una postura realista será necesario hacernos las siguientes preguntas: ¿qué es lo que consideramos como real?, ¿cómo lo conocemos? y ¿qué es lo que consideramos como verdadero?, en donde estas preguntas atienden a las ideas ontológicas, epistémicas, o semánticas respectivamente.

En una teoría encontramos una postura realista en ontología si se sostiene que dentro de la teoría filosófica existen objetos matemáticos independientes de nosotros, ya sean números, conjuntos, funciones u otros; no sabemos con exactitud qué son o dónde están, pero sí aceptamos que estos objetos matemáticos existen independientemente de nosotros.

En una teoría encontramos una postura realista epistémica si se afirma la existencia de un “acceso”, una manera por medio de la cual obtenemos conocimiento sobre algún objeto. Esta manera de conocer un objeto es real, este acceso mediante el cual conocemos el objeto en sí ya sea intuición, alma o razonamiento, nos brinda un conocimiento directo o indirecto sobre un objeto de estudio. Y también se puede considerar un realismo epistémico si damos por hecho que el conocimiento que tenemos sobre algún objeto es real, es decir, el conocimiento sobre ese objeto existe.

Por último, decimos que una postura es realista semánticamente si las oraciones declarativas obtenidas mediante esa teoría poseen un valor objetivo de verdad respecto

---

[16] “Mathematics texts talk about discovering truths and finding the proof for a true theorem; the sentences suggest that there is a realm of truths out there, and we have the job of understanding them” La traducción es mía.

del mundo, es decir, las oraciones obtenidas a partir de nuestro sistema serán o verdaderas o falsas, pero no ambas o ninguna (Tennant, 2017, p.26), de manera que una proposición de nuestro sistema siempre será verdadera o falsa, dado que es una declaración objetiva sobre el mundo. En ese sentido, se afirma que el conocimiento[17] adquirido a partir de la teoría matemática es real y objetivo, en otras palabras, el conocimiento adquirido mediante esa teoría tiene relación con el mundo (Gutiérrez, 2011, p.40).

Entre estos diferentes matices realistas aplicados a las teorías filosóficas matemáticas existe convergencia, pero también divergencia. Una postura realista ontológica puede sustentar que existen los objetos abstractos matemáticos, pero no necesariamente que los podamos conocer o que las oraciones que hablan de estos objetos sean verdaderas simplemente porque dichos objetos existen; para que sepamos que las oraciones sobre dichos objetos poseen el atributo de verdad es necesario tener una manera de acceder a dichos objetos y obtener así conocimiento sobre estos, pero en este caso, sólo se postula su existencia.

De manera inversa, una postura realista semántica puede afirmar que los resultados obtenidos de los procesos matemáticos son verdaderos, por lo tanto, afirma que existe una manera de acceder al conocimiento sobre algún objeto y que este objeto de conocimiento existe, en este caso, convergen las tres posturas realistas. Pero esta última conexión no es necesaria, por ejemplo, Geoffrey Hellman (1994) sostiene un realismo semántico y epistémico, pero no ontológico.

Mientras que con Platón encontramos los tres aspectos del realismo puesto que concedemos que los números existen en un mundo más allá del nuestro, aceptamos que es real la manera en cómo conocemos estos números por medio del alma (razonamiento) y, además, que el valor de verdad de las oraciones que predican sobre estos objetos es real.

Como hemos visto, la postura realista es una opción muy atractiva dentro del ámbito filosófico de las matemáticas. Cada postura realista tiene sus pros y sus contras. Sin embargo, existen teorías filosóficas matemáticas que modifican estas posturas realistas de acuerdo con su interés en la teoría e interacción con las matemáticas, tales como el

[17] Aquí utilizamos la palabra "conocimiento" como sinónimo de información, es decir que la información obtenida mediante muestra teoría tiene una relación objetiva con el mundo.

logicismo, formalismo e intuicionismo. En el primero encontramos un realismo en epistemología y semántica, en el segundo encontramos un realismo en epistemología y semántica y en el tercero encontramos un realismo en epistemología. Cada una de estas teorías posee matices diferentes en su realismo e incluso existieron personajes dentro de la misma escuela filosófica que utilizaron diferentes variedades del realismo para crear un sistema filosófico que fundamentase a las matemáticas.

En los apartados siguientes realizo un análisis breve y conciso de cada una de estas teorías.

1.4. Tres escuelas de filosofía de las matemáticas a principios del siglo XX

Como vimos en las secciones anteriores, el siglo XX fue el momento de "la crisis de los fundamentos", dado que, con los nuevos descubrimientos matemáticos y las nuevas nociones de las matemáticas se preguntaban ¿cuál era la esencia de las matemáticas?, buscando de esta manera, fundamentar las distintas ramas de las matemáticas para que éstas pudiesen justificar sus oraciones verdaderas. Al intentar brindar una solución a este problema surgieron varias escuelas filosóficas que dieron una respuesta a esa pregunta desde su perspectiva y manera de concebir las matemáticas, tales como: logicismo, estructuralismo, ficcionalismo, formalismo, intuicionismo, positivismo, etc.

En este trabajo sólo estudiaremos a grandes rasgos tres escuelas: el logicismo, el formalismo y el intuicionismo. Esto debido a que estas fueron las escuelas o tradiciones más influyentes en la filosofía de las matemáticas en la primera mitad del siglo XX y lo que más nos interesará de ellas son las respuestas que pueden ofrecer a las siguientes preguntas: ¿qué es la *verdad matemática*? y ¿cuál es el fundamento del conocimiento matemático? Esto será muy importante para entender la discusión del siguiente capítulo, que se centra en el dilema de Benacerraf.

1.4.1 Logicismo

El logicismo[18] es una escuela de filosofía de las matemáticas que se consolidó a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, y tuvo un gran acogimiento por parte de la comunidad filosófica en ese tiempo, ya que pretendía ofrecer los verdaderos fundamentos de las matemáticas en respuesta a la *crisis de los fundamentos* el logicismo fue una de las escuelas con mayor aceptación para resolver dichos problemas.

Como su nombre lo indica, la teoría filosófica logicista nos dice que el fundamento de las matemáticas es la lógica, en donde ya sea que se descubran o se construyan los fundamentos matemáticos estos siempre serán reducibles y explicados a partir de principios lógicos.[19] Es decir, la fundamentación[20] de las matemáticas dentro del logicismo siempre será obtenida a partir de principios lógicos, ya que es posible reducir las verdades matemáticas a verdades lógicas y los objetos matemáticos a objetos lógicos (de ser el caso).

Dentro del logicismo es posible encontrar por lo menos dos posturas predominantes, la de Gottlob Frege (1848-1925) y la de Bertrand Russell (1872-1970). En la postura de Frege se nos dice que sólo es posible fundamentar la aritmética lógicamente, es decir, sólo es posible reducir la aritmética a la lógica, pero no así la geometría; mientras que, en la postura de Russell y Whitehead es posible fundamentar toda la matemática lógicamente (e inclusive las demás ciencias). Sea cual fuera la postura logicista que estemos tomando, en ambos casos se cumplen dos condiciones primordiales:

1. Todos los objetos matemáticos son objetos lógicos.[21]

---

[18] Definimos lógica como la "parte de la filosofía que estudia las formas y principios generales que rigen el conocimiento y el pensamiento humano, considerado puramente en sí mismo, sin referencia a los objetos." (Oxford, 2019).

[19] Una buena pregunta aquí es, pero ¿qué es lógica? Si bien, el logicismo tuvo diferentes matices, de manera general la lógica hace referencia a los principios lógicos o al correcto razonamiento por medio de los cuales razonamos. Para esto, cada filósofo desarrolló su propio sistema. Véase MacFarlane (https://johnmacfarlane.net/FKL-offprint.pdf)

[20] Decimos que la lógica es el fundamento de las matemáticas porque sólo a partir de ésta podemos tener una comprensión clara acerca de los supuestos aritméticos que se estén formulando, creando un orden y un fundamento de las matemáticas a partir de la lógica.

[21] Por ejemplo, en la teoría de Frege, los números son extensiones de conceptos y las extensiones de conceptos son objetos lógicos.

2. La lógica es capaz de construir los primeros principios matemáticos. (Tennant, 2017, p.34)[22]

Si lo anterior es correcto, podemos concluir que la lógica es el fundamento de las matemáticas; ya que todos los objetos que constituyen el objeto de estudio de las matemáticas, de manera general o parcial, son objetos lógicos y a partir de la lógica se pueden construir o deducir los fundamentos de las matemáticas.

1.4.1.1 Frege

Para Frege "los conceptos y los primeros principios de la aritmética y el análisis [infinitesimal] se encuentran en los conceptos del entendimiento"[23] (Tennant, 20017, p.35), los cuales podemos entender a partir de la lógica. Si queremos entender los principios de la aritmética es necesario dar un paso atrás y darnos cuenta de que sus principios están fundados en nuestro razonamiento y que, para poder entenderlos y formalizarlos necesitamos auxilio de la lógica. Por lo que, si queremos saber cuál es el fundamento de la aritmética, primero debemos de entender su razonamiento matemático (álgebra y cálculo). Los principios de la aritmética los entendemos a partir de un razonamiento lógico; en donde, a partir de un sistema formal deductivo lógico, obtendremos el fundamento de los teoremas matemáticos.[24] Frege asegura que podemos fundamentar los principios de la aritmética a partir de un sistema formal deductivo lógico, ya que las matemáticas no son más que el desarrollo de nuestro entendimiento, por lo que los números son extensiones de conceptos y son independientes del tiempo y espacio.[25]

---

[22] "1. All the objects forming the subject matter of those branches of mathematics are logical objects; and 2. Logic [...] is capable of furnishing definitions of the primitive concepts of these branches of mathematics, allowing one to derive the mathematician's 'first principles' therein as results within Logic itself.". La traducción es mía.

[23] "The concepts and first principles of arithmetic and analysis are to be found in the concepts of the understanding." La traducción es mía.

[24] Este sistema formal deductivo lógico lo desarrolla Frege en la *Conceptografía* (1879). Con este sistema se funda la lógica contemporánea.

[25] Se formaliza el razonamiento matemático a partir del razonamiento lógico, en donde las verdades de la lógica y las verdades de la matemática son verdades analíticas (siguiendo la distinción del conocimiento de Kant). En sentido estricto, las verdades de las matemáticas sólo son una subclase de las verdades lógicas.

Nosotros podemos conocer los fundamentos lógicos de la matemática dado que, para Frege, los objetos matemáticos son objetos lógicos existentes, tienen realidad ontológica, y los podemos conocer y descubrir a plenitud, afirmando o no la veracidad de las proposiciones de la matemática respecto del descubrimiento de estos objetos lógicos. Por lo que el valor de verdad asignado a una oración de la matemática es objetivo. Como bien lo dice Friend: "las verdades matemáticas son independientes del ser humano" (2007, p. 49). El logicismo de Frege es un realismo ontológico, epistemológico y semántico.

En resumen, Frege aseguraba que los fundamentos de la aritmética (sólo la aritmética y de las disciplinas que se pueden reconstruir a partir de ella) estaban dados por los objetos lógicos que tienen una existencia independiente del ser humanos[26], y, en donde, a partir del estudio de estos objetos lógicos, podemos deducir los principios y los teoremas matemáticos mediante su sistema formal lógico deductivo. Los objetos matemáticos existen dado que son objetos lógicos y estos son independientes de la experiencia sensible.

1.4.1.2 Russell y Whitehead

El logicismo de Russell y Whitehead se puede considerar una extensión del logicismo de Frege, aunque con algunas variaciones. Si bien Russell y Whitehead también consideraban que la lógica era el fundamento de la aritmética, para ellos la lógica no sólo fundamentaba esta rama de las matemáticas, sino que también podía fundamentar todas las demás ramas de las matemáticas (como la geometría) e incluso las demás ciencias, como por ejemplo las ciencias sociales.[27]

Para fundamentar las verdades de la matemática (y las demás ciencias), Russell y Whitehead hicieron uso de su famosa *teoría de tipos*[28] en la que los fundamentos de la

[26] El realismo de Frege es diferente del realismo de Platón, ya que, para sustentar su realismo 1) reduce la aritmética a la lógica y 2) sostiene que la lógica es objetiva. (Friend, 2007, p.49-50).

[27] En ese sentido, el logicismo de estos dos autores es un logicismo fuerte, dado que esta rama filosófica nos brinda un fundamento para todo el conocimiento científico.

[28] Procedimiento para estructurar la lógica formal (matemática) con él se introduce una diferenciación de los objetos de distintos niveles (tipos). Su objetivo es excluir de la lógica y de la teoría de los conjuntos las paradojas o antinomias. (Diccionario filosófico, 1968)

matemática son construidos a partir de principios lógicos y a partir de ahí las demás ciencias, es decir, es una fundamentación jerárquica.

Una diferencia notoria respecto de Frege es que, si bien, con Frege los fundamentos de las matemáticas eran descubiertos mediante principios lógicos (puesto que los objetos lógicos existían ontológicamente) para Russell y Whitehead nosotros construimos dichos fundamentos; esto aplica no sólo a los fundamentos de la matemática,[29] sino que también a los fundamentos de la ciencia en general. En este sentido, nosotros (los seres humanos) desarrollamos nuestro conocimiento sobre las verdades de las matemáticas y de la ciencia.[30] Sin embargo, eso no quiere decir que la veracidad de las oraciones de la matemática dependan de nosotros, sino que al contrario, una proposición matemática es verdadera o no lo es y podemos verificarlo a partir del uso de nuestras herramientas matemáticas (funciones, ecuaciones, etc.), en dónde la veracidad de una proposición matemática no dependerá de la creación del ser humano, sino del cumplimiento de los principios matemáticos que han sido fundamentados y demostrados lógicamente. Por ejemplo: al utilizar la función suma aplicada al 2 y al 2, obtenemos como resultado el 4. Y la oración declarativa del sistema, 2+2=4, es verdadera, ya que es un resultado objetivo obtenido a partir de nuestras herramientas matemáticas ya fundamentadas lógicamente.

Si bien, el fundamento de las matemáticas recae en los principios de la lógica, nosotros tenemos cierto control en la construcción del conocimiento ya que nosotros construimos los fundamentos de las matemáticas, pero esto no hace que los fundamentos sean arbitrarios, pues podemos saber si estos existen y si las proposiciones matemáticas que hablan de ellos son verdaderas o no.[31]

---

[29] Anti-realismo ontológico.

[30] Anti-realistas epistémicos.

[31] En sentido estricto, Russell no propone un fundamento tradicional para las matemáticas, pues desde su punto de vista su verdad no está en duda. Más bien lo que hace es ofrecer un método de reconstrucción de las verdades de las matemáticas a partir de las verdades de la lógica. En este sentido, a nivel epistemológico, quienes más ganan son los lógicos, pues pueden demostrar que de sus principios se pueden deducir las verdades de las matemáticas que son aceptadas y están bien fundamentadas por sí mismas. Es así como, el fundamento de los principios lógicos propuestos por Russell es, por lo menos en parte, que de ellos se derivan las verdades de la matemática que de antemano sabíamos eran correctas.

1.4.1.3 La verdad matemática en el logicismo

Como vimos en los apartados anteriores, el logicismo es la doctrina filosófica que nos dice que el fundamento de las matemáticas se reduce a principios lógicos, es decir, que a partir de herramientas lógicas podemos derivar o construir los principios y los teoremas de las matemáticas. Sin embargo, ¿cómo entendemos la verdad matemática dentro del logicismo?

Si afirmamos que el fundamento de las matemáticas (total o parcialmente) es la lógica, entonces el sustento para la verdad de las proposiciones matemáticas también será derivado a partir de la lógica; para que una verdad de la matemática lo sea, necesita estar fundamentada en verdades lógicas que permitirán que las verdades matemáticas sean: analíticas, necesarias lógicamente y *a priori*, dado que sólo hacemos uso de nuestro razonamiento correcto y nada más. Para hablar sobre la verdad de las matemáticas no necesitamos interactuar con el mundo sensible, sólo hacemos uso de nuestro razonamiento y nuestra capacidad de abstracción. Un buen logicista es capaz de demostrar que las verdades matemáticas son verdades lógicas analíticas, dado que, a partir de definiciones y demás herramientas lógicas somos capaces de demostrar que las verdades lógicas lo son en virtud de los conceptos y, por lo tanto, también las verdades matemáticas, porque “la verdad lo es en virtud de los significados lingüísticos lógicos” o en relación con el significado del concepto. (Tennant, 2017, p. 1).[32]

La verdad matemática dentro de la teoría filosófica logicista es explicada a partir de una teoría epistémica, en donde la teoría epistémica garantiza la veracidad de las proposiciones realizadas en las matemáticas, (ya sean teoremas o axiomas), mediante la fundamentación de esos principios de manera lógica. Para que un teorema sea verdadero debe de estar fundado en la lógica y se debe de poder expresar la justificación lógica-epistémica para que dicho teorema o axioma sea verdadero. Es decir, se realiza una justificación lógica del por qué un teorema matemático o axioma es verdadero a partir de su fundamentación lógica, ya sea construido o deducido, las verdades de la matemática sólo lo serán respecto de las verdades de la lógica y éstas, a partir de nuestro conocimiento o manera de conocer, como bien lo dice Neil Tennant “la verdad de las matemáticas es

---

[32] “The truths of logic are paradigm cases of analytic truths. They are true solely by virtue of the meanings of the linguistic expressions involved in expressing them” La traducción es mía.

una pieza dentro de la verdad lógica. Lo mismo sucede con la necesidad y el carácter *a priori* del conocimiento en cuestión."[33] (2017, p.1) En otras palabras, las oraciones de las matemáticas son verdades, son necesarias, son analíticas y son *a priori* dado que están fundamentadas lógicamente.

1.4.2 Formalismo

El formalismo en filosofía de las matemáticas es la "matematización" de un problema filosófico, es el resultado de fundamentar las matemáticas en el siglo XX con la idea de que las matemáticas no necesitan otra fundamentación más que aquella que las matemáticas mismas pueden proveer. Se llama "formalismo" ya que su objetivo es mostrar a las matemáticas de manera formal y no material, es decir, considerar a las matemáticas sólo como formas, tales como: numerales, letras o signos y no de manera material, como el considerar a los números inmersos en alguna interpretación en relación con el mundo o con el ser humano (por ejemplo, considerar a los números entes abstractos ajenos a nuestra existencia o postular un problema matemático inserto dentro de algún paradigma social).

En las interpretaciones materiales de las matemáticas se ofrecen consideraciones por las cuales un problema matemático, axioma o teorema debe de satisfacer una interpretación de las matemáticas pretendida (cualquiera que sea este). Sin embargo, para el formalismo las matemáticas no deben de satisfacer ninguna interpretación externa más allá de las matemáticas mismas puesto que las oraciones matemáticas no tienen ningún significado[34] (Friend, 2007, p.147) y uso más allá que sólo servir como herramientas.

El formalismo fue una doctrina filosófica de las matemáticas que, al igual que sus contemporáneos, intentó brindar una solución a la crisis de los fundamentos, uno de sus mayores representantes fue Hilbert.

---

[33] "The mathematical certainty (within that branch) is of a piece with certainty about logical truth. The same holds for necessity; and for the a priori character of the knowledge concerned." La traducción es mía.

[34] One of the main characteristics of formalism is the view that mathematical sentences are literally meaningless. La traducción es mía.

David Hilbert (1862-1943), proponía una fundamentación de las matemáticas a partir de las mismas matemáticas y principios lógicos. Su proyecto consistía en formalizar las matemáticas y estudiar dichos sistemas axiomáticos formales a partir de la matemática misma, en donde se buscaba que los sistemas tuvieran una consistencia interna y fuesen lo suficientemente poderosos para demostrar todas las verdades de la matemática. A este programa de fundamentación de las matemáticas se le conoce como el programa de Hilbert que surgió en 1925 y que comenzó con su teoría de la prueba en 1917.

El *programa de Hilbert* constaba de cuatro pasos principalmente:

1. Formalizar la matemática clásica
2. Demostrar la consistencia de su sistema formal matemático.
3. Demostrar la completitud de su sistema formal matemático.
4. Encontrar un método formal que determine la validez de todas las fórmulas del cálculo de predicados.

Hilbert se encontraba siempre fiel a su *axioma de solubilidad* “Todo problema matemático bien planteado tiene solución”.

La *Teoría de la Prueba* de Hilbert ofrece una fundamentación de las matemáticas a partir de demostrar la consistencia dentro de un sistema matemático en específico. Es decir, Hilbert nos dice que en realidad no es necesario buscar un fundamento más allá de las matemáticas (como el logicismo), puesto que las propias matemáticas funcionan. Para esto Hilbert, mediante su teoría de la prueba y su programa, intenta demostrar que no existe ninguna contradicción en los fundamentos de la matemática, llevándolo a cabo mediante demostraciones entre los nuevos descubrimientos matemáticos realizados y los descubrimientos de la matemática clásica.

La teoría de la prueba fue el primer acercamiento de Hilbert al intentar brindar una solución a la fundamentación de las matemáticas. En este caso, intentaba resolver el problema mediante un “arreglo estructurado de las fórmulas que pudieran exhibirse en concreto y examinarse en todas sus partes” (Torres, 2007, p.37). Esta teoría de la prueba consistió en cinco puntos principales:

1. cálculo lógico,
2. inferencia formal,
3. prueba formal,

4. consistencia,
5. completud.

El cual demostraba dentro de un sistema formal finito, un lenguaje establecido, axiomas y reglas de inferencia, pruebas lógico-matemáticas que sustentaban un teorema o postulado. Dentro de dicho sistema axiomático-formal, se mantiene la consistencia[35][36] y completud[37] del mismo sistema, ya que "Hilbert quería asegurar la fundamentación de las matemáticas contra las contradicciones dando procedimientos finitos y rigurosos para trabajar en las matemáticas" (Friend, 2007, p.153).[38]

Esta teoría de la prueba estuvo muy bien, sin embargo, Hilbert se dio cuenta que la resolubilidad de las matemáticas era relativa respecto a la teoría de la ciencia en la cual se estuviese aplicando la teoría de la prueba, es decir, se realizaba una prueba por casos para la fundamentación de las matemáticas, pero él buscaba una fundamentación de las matemáticas absoluta. Del mismo modo Hilbert se dio cuenta que la resolubilidad de la fundamentación de las matemáticas debería de ser combinatoria, es decir, matemática, creando entonces su famoso programa.

El programa de Hilbert es muy similar a su teoría de la prueba, sin embargo, con éste se busca ofrecer de manera universal y válida una fundamentación a las matemáticas. Recordemos sus cuatro pasos para lograrlo:

1. Formalización de la teoría,
2. demostración de su consistencia,
3. demostración de su compleción,
4. creación de un método que determine la validez universal del cálculo de predicados. (Torres, 2007, p. 39-40)

[35] Consistencia es una limitación primitiva sin justificación. (Friend, 2007, p. 151)

[36] La consistencia es la propiedad que tienen los sistemas formales cuando no es posible deducir una contradicción dentro del sistema lógico.

[37] La completud es la propiedad que tienen los sistemas formales cuando para toda fórmula del lenguaje del sistema, o bien es un teorema o bien su negación lo es. Esto es, existe una prueba para cada fórmula o para su negación.

[38] "Hilbert wanted to secure the foundations of mathematics against contradiction by giving finite and rigorous procedures for working in mathematics." La traducción es mía.

Como bien lo dice Friend "Hilbert sostuvo un gran énfasis en la axiomatización de las teorías de las matemáticas y en brindar deducciones rigurosas de los teoremas en esas teorías"[39] (2007, p.154). De ahí la importancia de Hilbert en el formalismo, así como su intención de ofrecer de una vez por todas una fundamentación a las matemáticas de manera universal y formal.

1.4.2.1 La verdad matemática en el formalismo

Como ya vimos en la sección anterior, el formalismo interactúa con las matemáticas de manera formal y no material.

En el formalismo, lo que importa es manipular los símbolos matemáticos de acuerdo con las reglas establecidas, los axiomas impuestos y las reglas de inferencia dadas, sin importar que los resultados de las oraciones matemáticas se utilicen dentro del área de la física o el área médica, puesto que son símbolos que cumplen una función dentro de un "juego" en el cual se obtiene un resultado. De esta manera, una oración matemática es el resultado de una serie de reglas que se cumplen, en donde, si se cumplen las reglas establecidas para obtener una oración matemática en específico en ese momento, se dice que la oración matemática es verdadera, de lo contrario, es falsa, recordando que no tiene alguna interpretación o sentido más allá que una representación sucesiva de signos.[40] En específico, la verdad de las matemáticas dentro del formalismo se puede deducir a partir de procedimientos matemáticos o procedimientos combinatorios, los cuales se demuestran dentro de un sistema formal finito un teorema. Es por esto por lo que una oración matemática es el resultado de una sucesión de símbolos y nada más, sin alguna interpretación semántica detrás (no se apela en ningún momento a un modelo pretendido o favorito).

El formalista es anti-realista ontológico, ya que los objetos matemáticos no existen (o si existen no son relevantes para la fundamentación de las matemáticas), solamente son símbolos. Tampoco es un realista semántico, ya que las matemáticas dentro del

---

[39] "Hilbert placed great emphasis on the axiomatization of mathematical theories, and on giving rigorous deductions of theorems in those theories." La traducción es mía.

[40] "The meaning of the mathematical symbols is derivative, not literal and, strictly speaking, dispensable." (Friend, 2007, p. 147).

formalismo no poseen interpretación alguna, lo que implica que las oraciones de la matemática no pueden tener un valor de verdad único e independiente de los contextos que sirven para interpretarlas. Sin embargo, el formalista sí se compromete con que las oraciones de la matemática tienen un valor de verdad determinado respecto de un sistema axiomático particular (son verdaderas si son derivables en él y falsas si su negación es derivable).[41] Por último, tampoco se es un realista epistémico, ya que no es necesario ninguna teoría epistémica que nos explique cómo conocemos los números, ya que estos no existen, sino que solo son símbolos.

Para saber si una oración de las matemáticas es verdadera o no, ésta debe de ser demostrada o su negación debe ser demostrada. La demostración de la oración matemática se realiza dentro del sistema formal mismo, mediante la teoría de la prueba; sin embargo, si no es posible deducir ni la oración matemática ni su negación dentro del sistema formal, será necesario demostrar la imposibilidad de la solución de la oración matemática dada en un nivel meta-matemático del mismo sistema formal, encontrando así, una solución del porqué no es posible deducir dicha oración matemática y encontrando una resolución al problema dado.[42]

1.4.3. Intuicionismo

El intuicionismo es la escuela en filosofía de las matemáticas en donde se afirma que nosotros conocemos, entendemos e interactuamos con las matemáticas a partir de nuestra intuición temporal de los objetos matemáticos, es decir, por medio de nuestra mente (Iemhoff, 2020). La intuición es la habilidad mental que tenemos para interactuar con las matemáticas, ya sean números o funciones, toda la matemática está fundamentada en nuestra intuición. Dicha teoría filosófica de las matemáticas fue introducida por L.E.J. Brouwer (1881-1966) a principios del siglo XX y logró tener un gran auge dentro de la comunidad matemática.

---

[41] Se puede decir que se es un realista semántico ya que los valores de verdad son objetivos, es decir, son o verdaderos o falsos, pero no ambos (siempre y cuando el sistema sea consistente).

[42] Este último caso no sucede si el sistema es completo y de ahí el interés de Hilbert por demostrar la compleción de los sistemas.

Esta teoría filosófica de las matemáticas surge como respuesta a la crisis de los fundamentos y como reacción en contra de las teorías logicistas y formalista de esa época, ya que Brouwer creía que se olvidaban de lo más importante, la mente, al momento de hablar sobre las matemáticas.

Los tres principios de un intuicionista son los siguientes:

1. Los objetos matemáticos se construyen directamente en la intuición pura, siendo por ello previos al lenguaje y a la lógica.
2. Las leyes que rigen el comportamiento de dichos objetos derivan de su construcción, no de la lógica, como pretenden Frege, Russell y los logicistas.
3. En la matemática no es admisible ninguna teoría que rebase el marco de lo dable en la intuición, como sostienen Hilbert y los cantorianos. (Torres, 2005, p.15)

En otras palabras, lo único que importa dentro de las matemáticas y que puede fundamentarla es la intuición. Todo lo que entendemos y conocemos sobre las matemáticas es dado a partir de nuestra intuición, nuestra mente. Los objetos matemáticos son dados o construidos mentalmente; si los objetos matemáticos son construidos, entonces se debe de indicar la manera de obtener dichos objetos matemáticos mentalmente a partir de los objetos matemáticos ya dados o ya definidos. Los únicos objetos matemáticos ya dados son los números naturales, ya que estos son construidos de manera inmediata en la mente del matemático, es decir, los números naturales son una evidencia intuitiva (Torres, 2005, p.16). La construcción mental es primigenia y es innata a cualquier ser humano racional.

Dadas las características del intuicionismo de Brouwer, si bien esta teoría trajo consigo muchos adeptos y expresó de manera explícita las ideas que ya se tenían durante la época, también trajo consigo diversas consecuencias a las matemáticas y la lógica, no solamente del siglo XX, sino también a la lógica clásica y con ella, consecuencias extrañas acerca de cómo entender las matemáticas y, en específico, la verdad matemática.

Algunas de las consecuencias que trae consigo el intuicionismo son las siguientes:

1. La aritmética no se puede justificar mediante un fundamento axiomático, pues la intuición precede a dicha estructura. La inducción matemática es una intuición fundamental, no sólo un axioma. (Es decir, no podemos expresar mediante axiomas nuestra intuición pura de las matemáticas).

2. La matemática debe suministrar métodos y criterios constructivos para determinar en un número finito de pasos los objetos con los que trata. Toda prueba debe ser constructiva. En particular, dado que el infinito actual no tiene un fundamento constructivo, tampoco tiene cabida en la matemática. Sólo se admite el infinito en potencia (es decir, se rechaza la teoría de conjuntos de Cantor).
3. La existencia de los objetos matemáticos depende de la posibilidad de construcción de los objetos mismos; por tanto, "existen" sólo aquellos entes matemáticos que son construidos.
4. El principio del tercero excluido no siempre es válido con relación a proposiciones en las que se hace referencia a conjuntos infinitos. (Torres. 2005, p.16)

El punto número uno afirma que los sistemas axiomáticos no pueden ser el fundamento de las matemáticas, dado que la intuición es en sí el fundamento de las matemáticas que antecede a un sistema axiomático formal; además de que la intuición no puede ser expresada mediante axiomas o ningún lenguaje, natural o artificial, a lo más, el lenguaje nos sirve para comunicar la construcción de nuestra intuición en otras mentes (Gutiérrez, 2015, p. 12).

El punto número dos nos dice que el intuicionismo no acepta pruebas constructivas a menos que estas sean finitas, es decir, sólo acepta pruebas constructivas matemáticas finitas, por lo que hablar sobre el infinito en las matemáticas no es posible. El punto número tres nos dice que no se acepta la existencia objetos ideales más allá de nuestra mente, nuestra intuición, como bien lo dice Gutiérrez (2015) "El uso de representaciones de objetos que no eran accesibles a la intuición; a saber, la representación de objetos ideales [...] Los intuicionistas los rechazan" (p.13), por lo que los objetos lógicos de los cuales habla Frege no tenían sentido.

Por último, el punto número cuatro plantea que, dado que los intuicionistas no aceptan ninguna prueba matemática que no sea construida mediante la intuición, no se acepta el *principio del tercer excluso,* ya que se debe de probar la afirmación de una oración mediante herramientas intuicionistas, de no ser el caso de lograrse dicha hazaña, se debe de probar la negación de dicha oración matemática. Por lo mismo, también se rechaza la prueba por reducción al absurdo y el Axioma de Solubilidad[43], ya que cualquier afirmación debe de ser demostrada mediante procesos finitos intuitivos.

1.4.3.1 La verdad matemática en el intuicionismo.

En el intuicionismo matemático para que una oración de la matemática sea verdadera esta debe de ser demostrada mediante nuestra intuición, es decir, se lleva a cabo una construcción mental que demuestre la verdad de dicha oración. Cabe recalcar que una prueba matemática dentro del intuicionismo debe de ser finita y que, tanto la afirmación o negación de una oración de la matemática deben de ser demostradas mediante los objetos matemáticos ya dados, dado que, el que no podamos demostrar la negación de una oración de la matemática (que tengamos una prueba de la imposibilidad de demostrar dicha negación) no implica que tengamos una demostración de la oración original (recordemos su rechazo a la reducción al absurdo).

Como toda demostración matemática está dada por nuestra intuición, si aceptamos algo parecido a los "axiomas" estos deberán de ser demostrados igualmente, mediante construcciones mentales y comunicados solamente mediante el lenguaje, ya sea natural o artificial. Por lo que toda regla de inferencia también debe de estar sustentada mediante la intuición; es decir, se construye un sistema matemático intuicionista en el que se demuestra (mediante construcciones y pruebas finitas) cada oración matemática.

Dentro del intuicionismo, al menos el de Brouwer, se sostiene un antirrealismo ontológico, dado que los objetos ideales no existen y los objetos matemáticos (genuinos) son sólo aquellos que podemos construir dentro de nuestra mente y que compartimos en el tiempo. De la misma manera se sostiene un antirrealismo semántico, ya que los valores de verdad de una oración matemática no sólo están fijados en dos matices, verdad o falsedad, donde si no se es falso, entonces se es verdadero; ya que como vimos las reglas de inferencia y demostrabilidad deben de estar dictados por nuestra intuición y no en formalismos matemáticos. Sin embargo, cabe aclarar que una vez que se realizan las construcciones y demostraciones pertinentes, una oración de la matemática sí tendrá un

[43] Recordemos que el Axioma de Solubilidad es el axioma que postula Hilbert afirmando que cualquier problema matemático bien planteado tiene una solución, puesto que solo se necesitaría formalizar el problema y demostrar la afirmación o la negación del problema matemático planteado.

valor de verdad determinado y éste no podrá cambiar (en ese momento ya se puede hablar de un realismo semántico, pero sólo para las oraciones que han sido demostradas). Por último, encontramos un realismo epistémico ya que la manera de demostrar las oraciones de la matemática solamente se da a partir de la intuición, de nuestra mente y nada más.

De esta manera, la verdad matemática está dictada solamente a partir de nuestra intuición y de las construcciones mentales. Cualquier oración de la matemática debe de estar fundamentada y demostrada por nuestra intuición y comunicada por el lenguaje.

1.5 Los teoremas de Gödel y la verdad matemática

Como bien vimos en las secciones anteriores, existieron diversas escuelas filosóficas que intentaban fundamentar las matemáticas a partir de diversos procedimientos y posturas filosóficas. Tanto los formalistas como los logicistas creían que la fundamentación de las matemáticas debería de darse a partir de un sistema, ya sea axiomático formal o deducido lógicamente. Sin embargo, lo que dichos personajes no vislumbraron fue que sus sistemas para una fundamentación total de las matemáticas tenían fallas. Como bien lo dice Ruiz (1985) “La noción clásica de una matemática, en la que se metía en el mismo saco a la geometría, a la aritmética, etc., partía de la estructura axiomática como criterio definitorio de la ‘unidad’. Gödel destruye esto, puesto que ningún sistema formal puede dar cuenta de la estructura de la mayoría de las partes de las matemáticas; se requieren varios sistemas formales, y esto no basta aún” (p.14), por lo que los dos teoremas de Gödel vienen a demostrarnos estos problemas.

En su tesis doctoral, Gödel presentó un teorema relevante para la discusión, el cual habla acerca de la “completitud semántica”,[44] en donde “toda fórmula válida del lenguaje del cálculo de predicados es derivable en dicho cálculo, es decir, el cálculo de predicados es completo respecto al conjunto de fórmulas válidas” (Torres, 2007, p.41). Esto quiere decir que todo sistema axiomático es completo independientemente de los axiomas establecidos, en donde cualquier fórmula universalmente válida será demostrada

[44] Recordemos que Hilbert al ser formalista no estaba interesado en una completitud semántica, pero sí en una completitud demostrable.

dentro del sistema.[45] Este hallazgo funcionó muy bien para el *programa de Hilbert* hasta ese momento. Sin embargo, el mismo Gödel dio dos resultados referentes a la incompleción de la aritmética que representaron un fuerte golpe al formalismo.

El primer teorema de incompleción para la aritmética demostraba que el sistema para la aritmética (y cualquier otro en el que se pudiera formalizar la misma, fuese consistente y recursivamente axiomatizable) era incompleto para la negación. Es decir, que existían oraciones del sistema tales que ni ellas ni su negación eran teoremas del sistema. Esto implica que el sistema no puede decidir sobre todas las oraciones de la matemática.

El segundo teorema de incompleción de Gödel dice que "ninguna teoría consistente que contenga una formalización de la aritmética recursiva puede probar su propia consistencia" (Torres, 2007, p. 41). Esto quiere decir que cualquier sistema que se proponía como una alternativa para la fundamentación completa de las matemáticas fracasaría, dado que, si el sistema es consistente (y este sería un requisito para que fuera una buena fundamentación), entonces el sistema no es completo y no puede demostrar su propia consistencia.

Lo anterior socavaba fuertemente el proyecto formalista ya que todo el proyecto se basaba en:

1. Formalizar a las matemáticas por completo.
2. Demostrar la consistencia del sistema formal.
3. Demostrar la verdad de todas las oraciones de la matemática mediante axiomas y reglas de inferencia.
4. Encontrar un método formal que determine la validez de todas las fórmulas del cálculo de predicados.
5. Demostrar que no existía ninguna contradicción en los fundamentos de la matemática.

Y, de acuerdo con el primer postulado de Gödel, dado que el proyecto formalista formalizaba las oraciones de las matemáticas y suponía la consistencia de su sistema

[45] Esto quiere decir que las fórmulas de la matemática u oraciones de la matemática universalmente válidas seguirán siendo demostrables dentro del sistema ya que no dependen en sí de los axiomas postulados, por lo que se pueden derivar dentro del sistema.

formal, entonces el proyecto formalista de Hilbert era incompleto para la negación o lo que es lo mismo, el sistema formal de Hilbert es incompleto y no puede brindar una fundamentación completa de todas las oraciones de las matemáticas mediante su sistema formal, que es justo lo que Hilbert intentaba evitar. Y, de acuerdo con el segundo teorema de Gödel, dado que Hilbert utilizaba el mismo sistema formal para probar la consistencia del mismo sistema, entonces el sistema formal de Hilbert jamás encontraría una prueba de consistencia de su proyecto formalista.

Así que los intentos por fundamentar las matemáticas mediante sistemas formales fueron desechados, puesto que eran incompletos y la demostración de su consistencia era inexistente, ya que "la completud no se puede alcanzar en el dominio de la aritmética; ninguna teoría consistente que contenga una formalización de la aritmética recursiva puede probar su propia consistencia" (Ferreiros, 2007, p.412).

1.6 Conclusiones del capítulo

En el capítulo anterior expuse la situación de las matemáticas y la filosofía de las matemáticas alrededor del siglo XIX y XX. Inicié hablando de la crisis de los fundamentos matemáticos, hablé de realismo ontológico, realismo epistémico y realismo semántico, continué con la explicación del surgimiento de tres teorías filosóficas de las matemáticas (logicismo, formalismo e intuicionismo) como respuesta a la crisis de los fundamentos, mostré cómo concibieron la verdad matemática las tres teorías filosóficas a partir de posturas realistas, (si es que las tuvieron), y mostré como los teoremas de incompleción de Gödel frustraron el proyecto formalista de Hilbert para fundamentar las matemáticas.

En el logicismo se intentó fundamentar a las matemáticas a partir de reducir las matemáticas a expresiones lógicas, por lo que se planteó un realismo ontológico de los objetos lógicos por parte de Frege, un realismo semántico de las oraciones matemáticas por parte de Frege y Russel, ya que la verdad de las oraciones matemáticas es descubierta, pero no un realismo epistémico, dado que no existe para ellos ninguna propiedad que nos permita acceder a los objetos matemáticos, sino que los seres humanos construimos las demostraciones de la verdad matemática en el sistema lógico formal.

En el formalismo se intentó fundamentar a las matemáticas a partir de formalizar a la matemática mediante la misma matemática, creando un sistema formal con axiomas y reglas de inferencia. Este sistema formal pretendía ser consistente y demostrar que no existía ninguna contradicción en los fundamentos de las matemáticas. En el formalismo no se planteó ningún tipo de realismo, ya que lo único que nos importa son las demostraciones matemáticas para las matemáticas.

En el intuicionismo se intentó fundamentar a las matemáticas a partir de demostraciones provenientes de nuestra intuición o nuestra mente, en donde ninguna oración es verdadera o falsa hasta que sea demostrada. En esta teoría filosófica se hizo uso de un realismo epistémico, ya que la manera en cómo conocemos las verdades de la matemática es mediante nuestra intuición y esta existe.

El surgimiento de los teoremas de Gödel mostró problemas principalmente en la teoría filosófica formalista, ya que nos demostró que cualquier sistema formal axiomatízable que intentara demostrar todas las oraciones de las matemáticas era incompleto y que incluso, la demostración de la consistencia del sistema formal mediante el mismo sistema era indemostrable, frustrando entonces el intento de fundamentar todas las matemáticas mediante el proyecto formalista de Hilbert.

EL capítulo anterior sirvió para mostrar el contexto histórico y filosófico de las matemáticas en el siglo XIX y XX y mostró algunas de las teorías filosóficas de las matemáticas que utiliza Benacerraf para hablar de las explicaciones de la verdad matemática a partir de teorías semánticas o epistémicas que poseen posturas realistas o antirrealistas.

Capítulo 2 Dilema de Benacerraf.

2.1 Introducción.

El Dilema de Benacerraf surge a mediados del siglo XX. Después de que la mayoría de las escuelas filosóficas de las matemáticas intentaron brindar una solución a la *crisis de los fundamentos matemáticos* dando una respuesta a la pregunta ¿qué son las matemáticas?, y explicar en conjunto la teoría matemática clásica y los nuevos descubrimientos matemáticos de la época.

Ahora bien, las teorías filosóficas de las matemáticas dieron también una explicación de la verdad matemática según posturas realistas o antirrealistas. Las explicaciones de la verdad matemática brindadas fueron dadas siguiendo teorías epistémicas o teorías semánticas, pero no hubo ninguna teoría filosófica de las matemáticas que explicase la verdad matemática a partir de ambas teorías, epistémica y semántica.

De este hecho se dio cuenta Benacerraf y en 1963 crea su dilema como manifestación de la inexistencia de una explicación de la verdad matemática completa, es decir, una explicación de la verdad matemática a partir de una teoría epistémica y una teoría semántica en conjunto.

Benacerraf solicitó una explicación de la verdad matemática en conjunto porque:

> Las explicaciones de la verdad que tratan el discurso matemático y no-matemático de manera significativamente parecida, lo consiguen al precio de dejar sin explicar cómo podemos tener algún conocimiento matemático en absoluto; mientras que aquellas que atribuyen a las proposiciones de matemáticas el tipo de condiciones de verdad que está claro que sabemos obtener, lo consiguen a expensas de fracasar a la hora de conectar estas condiciones con algún análisis de enunciados que muestre cómo las condiciones asignadas son condiciones de su *verdad*. (Benacerraf, 2004, p.234).

Es decir que las teorías filosóficas de las matemáticas que han intentado dar una explicación de la verdad matemática mediante una teoría semántica que implica un realismo ontológico y semántico, no explican cómo se adquiere el conocimiento matemático de objetos ajenos al ser humano satisfactoriamente. Y, las teorías que han intentado dar una explicación de la verdad matemática mediante una teoría epistémica han dejado de lado la conexión entre el conocimiento adquirido de la matemática y su relación con el mundo.

Y, dado que, Benacerraf solicita una explicación completa de la verdad matemática que nos expliqué cómo es que conocemos las verdades de la matemática y muestre el por qué una oración matemática es verdadera en el mundo, entonces ninguna explicación de la verdad matemática ofrecida por teorías filosóficas de las matemáticas fue satisfactoria. Esto fue así ya que, dado que ninguna teoría filosófica explica la verdad matemática completamente, la teoría filosófica no termina de explicar el fenómeno, que es la verdad matemática; además de que las teorías filosóficas de las matemáticas incompletas pueden ser susceptible a contradicciones y entonces cualquier postulado que genere la teoría sería inútil.

Es por lo anterior que en el siguiente capítulo haré un análisis del Dilema de Benacerraf comenzando con la explicación de cómo surgió y por qué se requiere de una teoría epistémica razonable y una teoría semántica homogénea en conjunto para solucionar el dilema y dar una explicación completa de la verdad matemática. Continuaré explicando los matices de cada una de estas teorías, la teoría epistémica razonable y la teoría semántica homogénea. Concluiré con la caracterización de la semántica de Tarski postulada por Benacerraf como la semántica homogénea para solucionar su dilema.

Una vez realizado el análisis del Dilema de Benacerraf en el siguiente capítulo 2, realizaré en el capítulo 3 un análisis de la semántica de Tarski propuesta por Benacerraf como la semántica homogénea necesaria para solucionar su dilema y brindar una respuesta completa para definir la verdad matemática.

2.2 ¿Cuál es el dilema de Benacerraf?

En 1963, después del surgimiento de las posturas filosóficas surgidas para brindar una fundamentación a las matemáticas estudiadas en el capítulo anterior (formalismo, intuicionismo y logicismo), Paul Benacerraf se dio cuenta que existían diversas teorías filosóficas de las matemáticas que intentaban dar una explicación a la *verdad matemática*, pero que lo hacían de acuerdo con una teoría semántica o una epistémica, pero no ambas. Como bien lo dice Benacerraf (2004):

> Sostengo que dos clases de preocupaciones, bastante distintas, han motivado separadamente las explicaciones de la naturaleza de la verdad matemática: (1) la preocupación por disponer de una teoría semántica homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje, y (2) la preocupación por que la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable. Mi tesis general consistirá en que casi todas las explicaciones del concepto de verdad matemática pueden identificarse como sirviendo a uno u otro de estos propósitos a expensas del otro. (p.233)

Es decir, si nuestra teoría filosófica de las matemáticas nos brinda una explicación de la verdad matemática de acuerdo con una explicación epistémica (razonable), deja de lado la explicación semántica, y viceversa, si nuestra teoría filosófica de las matemáticas nos brinda una explicación de la verdad matemática desde una semántica homogénea, nos deja sin explicar la verdad matemática desde la postura epistémica. Esta resolución pudiera funcionar, ya que, para brindar una explicación de la verdad matemática podríamos optar por una de las dos explicaciones de acuerdo con nuestros fines y no existir ningún dilema, sin embargo, Benacerraf (2004) agrega "puesto que creo que cualquier explicación adecuada debe abordar ambas preocupaciones, me encuentro profundamente insatisfecho con cualquier parte de la semántica y epistemología que pretenda explicar la verdad y el conocimiento tanto dentro como fuera de la matemática" (p.234). En este momento, surge el famoso Dilema de Benacerraf, en donde definimos un dilema como "un argumento que está formado por dos proposiciones contrarias y disyuntivas, [y que], al conceder o negar cualquiera de estas dos proposiciones, queda demostrado aquello que se quería probar" (Pérez y Merino, 2014)

Para Benacerraf, es de suma importancia que una teoría filosófica de las matemáticas nos brinde una explicación de la verdad matemática desde ambas posturas, semántica y epistémica, dado que "cualquier explicación filosóficamente satisfactoria de la verdad, la referencia, el significado y el conocimiento debe abarcar todos estos conceptos y debe ser adecuada para todas las proposiciones a las que estos conceptos se aplican" (Benacerraf, 2004, p.234) y las teorías epistémicas que explican la verdad matemática, dejan sin explicar la verdad matemática en relación con la referencia y el significado de las verdades matemáticas con el mundo; y las teorías semántica que explican la verdad matemática, dejan sin explicar la manera de conocer las verdades matemática satisfactoriamente, lo cual convierte a estas teorías filosóficas de las matemáticas en insatisfactorias.

Si una teoría epistémica nos explica el conocimiento empírico, pero falla al explicarnos el conocimiento teórico (que son las verdades matemáticas), puede ser incorrecta incluso en el tipo de conocimiento que la misma teoría explica. Y lo mismo sucede con las teorías semánticas que realizan una diferenciación entre oraciones matemáticas y no matemáticas "tal distanciamiento podría manifestarse, por ejemplo, en una teoría que proporcione una explicación de la contribución de los cuantificadores al razonamiento matemático que sea distinta de la habitual en el razonamiento cotidiano sobre lápices, elefantes y vicepresidentes." (*Ibid.*, p.235), por lo que habría una diferenciación del significado de verdad en oraciones que tuviesen relación con la matemática y las oraciones que no la tengan, pero dado que no hay ninguna diferenciación notable en nuestro razonamiento al hablar de lápices o números, la semántica debe de ser homogénea.

Necesitando entonces una explicación adecuada de la verdad matemática.

2.3 Unificación de la semántica y epistemología para la verdad matemática.

Ahora bien, Benacerraf termina su dilema pidiendo una teoría filosófica de las matemáticas que brinde una explicación de la verdad matemática conjunta entre semántica y epistemología, puesto que, de ser el caso, al fin podríamos obtener una teoría completa de la verdad matemática y de esta manera, unificar dos teorías filosóficas que se creían contrarias. Benacerraf está muy interesado en la existencia de una teoría de la verdad conjunta dado que, si se llegase a encontrar, esta teoría representaría una explicación filosófica global de las matemáticas e incluso una explicación filosófica global en general de cualquier fenómeno. Como bien lo dice Benacerraf (2004):

> Debemos siempre tener en mente que lo que está en juego es nuestra concepción filosófica global. Argüiré que, *como concepción global*, es insatisfactoria, no tanto porque carezcamos de una explicación aparentemente satisfactoria de la verdad matemática, o porque carezcamos de una explicación aparentemente satisfactoria del conocimiento matemático, sino porque carecemos de cualquier explicación que las combine a ambas satisfactoriamente. (p.235)

Esto sucede porque si nosotros no ofrecemos ninguna explicación conjunta, entonces ninguna teoría de la verdad matemática que se ofrezca será satisfactoria dado que se estaría ignorando la interdependencia de nuestro conocimiento en las diferentes áreas y la explicación del conocimiento de manera general (*ídem*).[46]

De esta manera, la teoría de la verdad matemática que nos pide Benacerraf debe de cumplir las siguientes características:

1) Debe de explicar la verdad de las matemáticas desde una semántica y epistemología de manera conjunta.
2) Esta semántica debe de ser homogénea, es decir, debe de ser la misma semántica utilizada en las oraciones matemáticas y en el lenguaje natural.
3) La epistemología debe de ser razonable, es decir, debe de justificar cómo adquirimos nuestro conocimiento matemático y no matemático, o sea explicar cómo conocemos.
4) Ambas explicaciones de la verdad matemática constituirán solamente una explicación filosófica global de la verdad matemática.

Primero, para Benacerraf es de vital importancia que la explicación de la *verdad matemática* esté compuesta por una semántica y epistemología de manera conjunta, ya que

> Las explicaciones de la verdad que tratan el discurso matemático y no-matemático de manera significativamente parecida, lo consiguen al precio de dejar sin explicar cómo podemos tener algún conocimiento matemático en absoluto; mientras que aquellas que atribuyen a las proposiciones de matemáticas el tipo de condiciones de verdad que está claro que sabemos obtener, lo consiguen a expensas de fracasar a la hora de conectar estas condiciones con algún análisis de enunciados que muestre cómo las condiciones asignadas son condiciones de su *verdad*. (*Ibid.,* p.234).

---

[46] El buscar una explicación de la verdad matemática en conjunto representa la rivalidad que ha existido por años entre realistas y antirrealistas ontológicos. Si bien, la explicación semántica estándar que tenemos es el *Platonismo*, la explicación epistémica estándar que tenemos es el *Aristotelismo* y en la época moderna el *Formalismo*. Si se logra encontrar una solución a dicho dilema, representaría hacer las paces entre ambas posturas.

En el momento en el que se logre tener la explicación conjunta de la verdad matemática, tendremos una teoría satisfactoria de la verdad matemática, en la que se explique de manera amplia la manera de conocer las oraciones matemáticas y las justificaciones para que tales oraciones matemáticas posean o no, un valor de verdad predeterminado. Evitando de esta manera, los problemas previamente mencionados.

Segundo. La semántica que nos pide Benacerraf en esta teoría debe de ser homogénea, dado que:

> Una teoría de la verdad para el lenguaje en el que hablamos, argumentamos, teorizamos, matematizamos, etc., debe, de la misma manera, proporcionar condiciones de verdad similares para enunciados similares. Las condiciones de verdad asignadas a dos enunciados que contengan cuantificadores deberían reflejar de manera significativamente similar la contribución de los cuantificadores. Cualquier distanciamiento de una teoría así de homogénea tendría que estar fuertemente motivado para poder ser digno de consideración. (Benacerraf, 2004, p.235)

Esto es, si decidimos optar por una semántica que no sea homogénea, debemos de dar razones suficientes para que consideremos diferentes a las oraciones matemáticas y las oraciones no matemáticas. En el caso en que se aceptara dicho supuesto, se tendrían que ofrecer especificaciones para aceptar que las oraciones matemáticas sean diferentes en nuestro lenguaje y por tal motivo, poseer una teoría de la verdad, diferente. Esto también tendría repercusiones en nuestra teoría epistémica que debe converger con nuestra teoría semántica; por lo anterior, el aceptar una teoría semántica no homogénea trae consigo más desventajas que beneficios y no garantiza una explicación filosófica global de la verdad matemática.

Tercero. La epistemología que nos pide Benacerraf debe de ser razonable, esto es:

> Una explicación del conocimiento que *parece* funcionar para ciertas proposiciones empíricas sobre objetos físicos de tamaño medio, pero que falla a la hora de explicar el conocimiento más teórico, es insatisfactoria; no sólo porque sea incompleta, sino porque también puede ser incorrecta, incluso como una explicación de las cosas que parece abarcar de manera bastante adecuada. (*Í*dem)[47]

Con las teorías epistémicas que han ido surgiendo a lo largo de los años, debe de haber alguna capaz de explicar la verdad matemática. Si bien, dicha teoría epistémica puede hablarnos sobre el conocimiento experimental o empírico, la misma teoría debe de ser capaz también de explicar nuestro conocimiento más abstracto, es decir, racional. De

---

[47] Aquí vemos como Benacerraf nos recuerda las teorías epistémicas empiristas. De nuevo nos recuerda las rivalidades que han existido para hablar acerca de la verdad matemática y en este caso, desde la postura epistémica, explicar la verdad entre un empirismo o racionalismo.

esta manera, la teoría epistémica elegida podrá explicarnos nuestro conocimiento sensible y no sensible, explicando cómo conocemos, de ser el caso, los objetos matemáticos y justificamos la verdad de las oraciones matemáticas.

Cuarto. La teoría de la verdad que pide Benacerraf debe de ser global, es decir, esta teoría de la verdad debe de poder utilizarse en el ámbito matemático y no matemático, desde su semántica y su epistemología, ya que ambas teorías (que serán una sola), explicarán mediante una semántica homogénea el significado de las oraciones en el lenguaje natural y el lenguaje matemático, y, en donde, mediante una epistemológica razonable se explicará el conocimiento sensible y abstracto.

2.4 Epistemología razonable en el conocimiento matemático.

Una teoría epistémica razonable es la teoría que nos pide Benacerraf para explicar adecuadamente la verdad matemática. Esta teoría debe de cumplir con dos características principales:

1) La epistemología razonable debe de coincidir con una semántica homogénea. Es decir, esta teoría epistémica debe de explicarnos cómo tenemos conocimiento tanto de manera empírica como el conocimiento teórico o más abstracto.
2) La epistemología debe explicar adecuadamente el conocimiento matemático.

De acuerdo con el punto uno, dicha teoría filosófica debe ser capaz de explicar el conocimiento tanto del mundo sensible, como el conocimiento teórico, es decir, que sea una teoría epistémica homogénea. Esto es así dado que, si bien, una buena teoría epistémica puede explicarnos cómo conocemos e interactuamos con el mundo sensible, nosotros requerimos de una teoría epistémica que explique también el conocimiento teórico, como lo es el estudio de los números y las matemáticas y, además, que dicha teoría compagine con una semántica homogénea. En otras palabras, esta teoría epistémica debe darnos a conocer las condiciones de verdad de las oraciones referenciales en relación con el mundo y también darnos a conocer las condiciones de verdad de las oraciones matemáticas, explicando de esta manera cómo tenemos conocimiento empírico y teórico.

Ahora bien, de acuerdo con el segundo punto, requerimos una explicación epistémica de las matemáticas de manera racional, dado que, consideramos a los números como entes abstractos, puesto que no tenemos interacción sensorial con estos, es decir, yo jamás he olido, visto, o palpado al número dos. Sin embargo, todos sabemos que tenemos conocimiento matemático, así como tenemos conocimiento sobre el mundo sensible, como el ver los árboles o degustar la comida, por ejemplo, sabemos que 2 más 2 es igual a 4 o que 11 menos 5 es igual a 6, pero ¿cómo conocemos las oraciones matemáticas? Lo anterior nos demuestra que, de alguna manera, nuestro conocimiento matemático debe de ser parecido a nuestro conocimiento del mundo sensible, es decir, debe de haber cierto tipo de relación entre el objeto de conocimiento (en este caso los objetos matemáticos) y el conocedor.

El conocimiento matemático lo es de verdades universalmente válidas, como es el caso de la función suma presentada anteriormente, y sabemos que tenemos ese conocimiento, pero ¿cómo? Hemos explicado anteriormente que debe de existir una conexión entre una semántica homogénea y una epistemología razonable, es decir, que debemos de conocer las condiciones de verdad por las cuales una oración de la matemática es verdadera así como conocemos las condiciones de verdad de oraciones referentes al mundo; en donde quizás no todas las verdades de las matemática, sean cognoscibles, pero sí algunas, siendo por eso que debemos llegar a conocer las condiciones de verdad de las oraciones matemáticas. El tener conocimiento matemático se resume entonces al conocer las condiciones de verdad de una oración matemática o, en otras palabras, el saber cómo se satisfacen las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas. Es por eso por lo que, la epistemología que explique cómo tenemos conocimiento matemático debe contener al menos los siguientes dos puntos principales:

1) El conocimiento matemático se adquirirá definiendo las condiciones de verdad de una oración matemática.
2) Esta explicación del conocimiento matemático también nos servirá para explicar cómo tenemos conocimiento empírico.

De acuerdo con estos dos puntos, a lo largo del tiempo han existido dos maneras distintas de entender y explicar el conocimiento matemático, ya sea a partir de un realismo ontológico o a partir de demostraciones sintácticas. Benacerraf identifica estas dos posturas filosóficas con el nombre de explicaciones del conocimiento estándar y explicaciones del conocimiento combinatorias.

Las explicaciones del conocimiento estándar son aquellas explicaciones en donde se requiere de un realismo ontológico, es decir, los objetos matemáticos existen en un lugar independiente del tiempo y del espacio en el cual nosotros tenemos un acceso especial para conocerlos y crear teorías matemáticas a partir de ellos.

La manera de conocer estos objetos matemáticos radica en el uso de un acceso privilegiado del cual sólo los seres humanos somos partícipes. Este tipo de acceso privilegiado ha adquirido diferentes nombres, ya sea una intuición o un razonamiento,[48] sin embargo el uso de este acceso es siempre el mismo en todas las teorías epistémicas de manera estándar, como bien lo explica el realista y platonista Gödel, "tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos de tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, la intuición matemática" (1981, p.359). Siendo por este medio, la intuición matemática, que podemos conocer las oraciones de la matemática gracias a esta relación de "acceso" que existe entre los seres cognoscentes y el objeto a conocer, las matemáticas.

De esta manera, esta teoría estándar nos permite 1) explicar cómo tenemos conocimiento matemático, que es mediante la *intuición matemática* y 2) hacer uso de una semántica homogénea, pues el referente de las oraciones de verdad lo conocemos directamente, ya sea de tipo sensorial o de manera intuitiva, cumpliendo con las dos características de Benacerraf para tomar una epistemología razonable, entonces ¿por qué Benacerraf no acepta a esta teoría epistémica como el canon para su epistemología razonable?, la respuesta es simple, por la misma intuición matemática.

Benacerraf nos dice que está insatisfecho con este tipo de teorías ya que el apelar a una "intuición matemática" resulta ser una "analogía superficial" para el conocimiento matemático. Si bien conocemos los objetos físicos de acuerdo con una conexión directa con ellos, es decir, que "aceptamos como conocimiento sólo las creencias que podemos relacionar adecuadamente con nuestras facultades cognoscitivas" (Benacerraf, 2004, p.248) mediante una relación causal entre el sujeto cognoscente y el objeto a conocer, los objetos matemáticos no parecen tener una relación directa con nosotros.

---

[48] Como se presentó en el subtema 1.3 ¿qué es el realismo?

Gödel puede decir que el conocimiento matemático se deriva a partir de "intuiciones más directas" que son los axiomas y que a partir de ellos se derivan las demás oraciones matemáticas, pero, aun así, ningún teórico participe de la teoría estándar del conocimiento termina de explicarnos cómo es que tenemos este conocimiento más directo de los axiomas, ¿por qué se nos obliga a aceptarlos como verdaderos? Lo único que Benacerraf termina por aplaudir es su intento de homogeneidad, pues la teoría del conocimiento estándar intenta explicar el conocimiento tanto sensorial como teórico de manera similar, de acuerdo con una conexión directa.

Ahora bien, las explicaciones combinatorias son aquellas que parten de demostraciones matemáticas para afirmar que una oración de la matemática es verdadera, es decir, la fundamentación de la verdad matemática radica en la demostración de una oración matemática, ya sean escritas o habladas. Las explicaciones del conocimiento combinatorias no requieren un realismo ontológico pues no se centran en la existencia de objetos matemáticos. Lo único que nos interesa saber de las oraciones matemáticas es que funcionan y que están en concordancia con nuestro sistema matemático, es decir, en este tipo de explicaciones se construye regularmente un sistema matemático en donde se hace uso de axiomas, reglas de inferencia y un lenguaje dado, en los cuales se demuestran las oraciones de la matemática y, de esta manera, es la manera en cómo se obtiene el conocimiento matemático. Como dice Benacerraf: el conocimiento matemático se obtiene y se transmite en gran medida mediante estas demostraciones. En suma, este aspecto del conocimiento matemático, sus medios de producción y transmisión (esencialmente lingüísticos) da su impulso a la clase de concepciones que llamo "combinatorias" (*Ibid.,* p.249).

Todas nuestras interacciones para afirmar que una oración de la matemática es verdadera se basan en demostraciones, ya sean escritas o habladas y no se requiere afirmar la existencia de un referente matemático, sino simplemente demostrar la oración matemática. En este caso, nosotros sabemos que una oración de la matemática es verdadera si se demuestra dicha oración, de lo contrario, de acuerdo con el matiz demostrativo en el que se encuentre dicha oración, o a) la oración es falsa, o b) falta encontrar una demostración que nos demuestre la falsedad de dicha oración y, en algunos casos, aceptamos una oración de la matemática aceptando como verdaderos los postulados necesarios para que funcione una teoría matemática en específico.

Con esta teoría del conocimiento, se puede explicar las condiciones de verdad de una oración matemática, cumpliendo con el punto número uno de la epistemología deseada por Benacerraf, pero este tipo de teorías del conocimiento no nos explican ¿cómo tenemos conocimiento del mundo empírico?

Dado que las teorías del conocimiento combinatorias están diseñadas para obtener un conocimiento matemático a partir de demostraciones matemáticas, dejan de lado el mundo empírico, es decir, hacen una división tajante entre el conocimiento matemático y el conocimiento sensible. Las oraciones matemáticas e incluso los axiomas matemáticos son aceptados o postulados dentro de un sistema matemático, pero no nos explica cómo es que tenemos conocimiento empírico a partir de demostraciones, y aun teniéndolo, no es clara la explicación del conocimiento empírico obtenido de demostraciones ¿cómo se conecta con la realidad? De esta manera, este tipo de teorías del conocimiento combinatorias se descartan de la epistemología razonable deseada por Benacerraf:

> Tales concepciones evitan lo que me parece ser la ruta necesaria hacia una explicación de la verdad. [...] las concepciones 'combinatorias' nos ofrecen condiciones verdad cuya satisfacción o no satisfacción pueden determinar los simples mortales, pero el precio que pagan es su incapacidad para conectar esas llamadas 'condiciones de verdad' con la verdad de las proposiciones para las cuales son condiciones. (2004, p. 252)

Por último, encontramos el tipo de conocimiento convencionalista. En este tipo de teorías se afirma que el conocimiento está dado a partir de convenciones humanas respecto al mundo, es decir, que aceptamos una oración como verdadera después de que se ha convenido que así debe de ser. En este tipo de conocimiento, aceptamos que tenemos conocimiento matemático y lógico, pero que este es así en virtud de los convenios explícitos establecidos, es decir, está dado por un idealismo subjetivo. De esta manera, tenemos conocimiento matemático y sabemos que lo es, lo aceptamos, así como tenemos conocimiento empírico, todo radica en los convenios explícitos.

La razón por la que Benacerraf no acepta este tipo de teorías es que, a pesar de que cumplen con el punto uno y dos, pues nos explica cómo tenemos conocimiento matemático y que este tipo de conocimiento resulte ser acorde con una semántica homogénea,[49] la manera en cómo sostiene su epistemología es muy problemático. El argumento es el siguiente.

[49] Pues nos explica las condiciones de verdad de oraciones empíricas también, es decir, mediante acuerdos

Si decimos que todo nuestro conocimiento matemático y lógico está dado a partir de convenciones explícitas, entonces cada oración lógica y matemática ha sido establecida a partir de estas convenciones. Las oraciones de la matemática son bastantes, para poder acordar la veracidad de cada una de las oraciones de la matemática, se tiene que aceptar su veracidad de manera general. Para dar el valor de verdad de muchas oraciones matemáticas se requiere de una lógica que nos ayude a aceptar como verdaderas las oraciones matemáticas y lógicas. Sin embargo, si no contamos con ninguna lógica, puesto que apenas estamos aceptando sus postulados, no podemos aceptar las oraciones de verdad de la matemática y la lógica. No obstante, sí tenemos verdades y conocimiento lógico y matemático, por lo que tenemos una contradicción. Este tipo de teoría del conocimiento es contradictorio y no funciona para ser la epistemología deseada por Benacerraf como epistemología razonable y, si, aun así, aceptamos que de alguna manera es posible establecer un acuerdo con un conjunto finito de oraciones matemáticas, al establecer su verdad por convención encontramos otros problemas.

Si decimos que, de alguna manera, hemos establecido el valor de verdad a un conjunto finito de oraciones matemáticas, tal que resultan pertenecer formalizados a la lógica de primer orden ¿decir que son verdaderas las oraciones las haría verdaderas? Y no solamente en el ámbito matemático, sino también en el lenguaje natural, ya que buscamos una semántica homogénea.

Para demostrar que el decir que las oraciones verdaderas no lo son sólo por decirlo, Benacerraf hace uso de la teoría semántica tarskiana hablando sobre la *Convención T.* La convención T es un requisito de definición de verdad recursivo para un lenguaje particular, es decir que, para que un conjunto de oraciones sea verdadero éste puede serlo a partir de una distribución (recursiva) de valores de verdad, reconvirtiéndose la teoría de conocimiento convencionalista en una teoría de la verdad que satisfaga la convención T (*Ibid.*, p.251). De esta manera, un conjunto dado de oraciones puede ser verdadero utilizando la convención T.

Benacerraf hace hincapié en que la teoría de la verdad de Tarski es semántica, esto quiere decir que no sólo se requiere de la convención T, sino que también se requiere un "análisis de la verdad en términos de los conceptos 'referenciales' de nombrar, predicación, satisfacción y cuantificación" (*Ídem*). Es decir que, para que una oración de la matemática sea verdadera no basta el sólo convenir que lo es, puesto que, aunque se realice su acuerdo de veracidad de manera recursiva, esta oración tiene que contar con una referencia, pues "una definición [de la verdad] que no proceda mediante las cláusulas recursivas habituales para las formas gramaticales habituales puede no ser adecuada, incluso la convención T. La explicación debe de proceder mediante la referencia y la satisfacción [dada por la semántica]" (*Ídem*). Por lo que cualquier definición de verdad debe de ser explicada, para Benacerraf, mediante referencia, para él, la verdad está relacionada directamente con su referente.

De esta manera, si decimos que una oración matemática es verdadera sólo por convención nos deja insatisfechos, pues 1) la teoría del conocimiento tiene contradicciones y 2) si deseamos una teoría epistémica acorde con una semántica homogénea, entonces ésta debe de contar con un referente, lo cual no hace la teoría convencionalista.

Las teorías epistémicas presentadas anteriormente han sido posturas para entender nuestro conocimiento, sin embargo, ninguna de las opciones anteriores cumple con los requisitos para ser una epistemología razonable. Veamos qué sucede con el lado semántico.

2.5 Semántica

La semántica o teoría de la verdad referencial es el otro lado del dilema de Benacerraf. Recordemos que Benacerraf busca una explicación de la verdad matemática de acuerdo con una epistemología razonable y una semántica homogénea y que la búsqueda de una teoría epistémica razonable analizada en el capítulo anterior no resultó. Veamos ahora qué sucede con la búsqueda de una semántica homogénea referencial.

Definimos semántica como la "parte de la lingüística que estudia el significado de las expresiones lingüísticas" (Oxford Languages, 2021), es decir que, a partir de la semántica podemos analizar el significado de las oraciones, palabras, jergas, refranes, entre otras expresiones lingüísticas y, en específico, analizar el significado de las oraciones matemáticas.

El estudio de la semántica es importante ya que nos indicará el momento en el que una oración matemática sea verdadera de acuerdo con sus herramientas utilizadas, pues, como ya lo había mencionado Benacerraf, se requiere de un "análisis de la verdad en términos de los conceptos 'referenciales' de nombrar, predicación, satisfacción y cuantificación" (2004, p.251), para hablar sobre la verdad. Lo anterior sólo lo puede realizar la semántica referencial tal y cómo lo solicita Benacerraf.

El análisis de las expresiones lingüísticas debe de ser capaz de certificar que la explicación de la verdad matemática sea realmente una explicación de la *verdad matemática*. (Benacerraf, 2004, p.251). Es decir, que por medio de esta semántica estemos confirmando que el juicio verdadero de una oración matemática, sea realmente verdadera, en donde "la explicación debería implicar condiciones de verdad para las proposiciones matemáticas que sean condiciones de su verdad de manera evidente (y no *simplemente*, digamos, de su carácter de teorema en algún sistema formal)" (*Ídem.*), por lo que fácilmente podremos afirmar cuando un juicio sea verdadero o no lo sea; esta facilidad de juicio estará ampliamente comprometida con una epistemología razonable.[50]

La distinción que debe de tener esta semántica es que, para certificar la verdad de las oraciones matemáticas, esta semántica debe de poder certificar también la veracidad de las demás oraciones del lenguaje natural. Esto es porque, si existiese una semántica específica sólo para las oraciones de las matemáticas y otra semántica específica para las oraciones del lenguaje natural, entonces en el momento de afirmar la veracidad de una oración matemática no tendríamos la total certeza de que dicha oración sea realmente verdadera o no; es decir, no tendríamos cómo contrastar la afirmación de la verdad en esa oración matemática, así como la veracidad de una oración en el lenguaje natural con el mundo real.

La semántica solicitada por Benacerraf está en relación con la verdad dado que, para hablar de la verdad, se necesita hacer uso del significado de las oraciones matemáticas en el que el significado de una oración esté en correspondencia directa con su significante para afirmar la veracidad de dicha oración. Si el significado de la oración matemática está en correspondencia directa con su significante y se satisfacen las condiciones de verdad establecidas en el juicio, entonces dicha oración es verdadera, de

[50] Si obtenemos una explicación de la verdad matemática mediante sistemas formales y por condiciones evidentes (como afirmamos las verdades empíricas), podremos encontrar más fácilmente una teoría epistémica que nos explique cómo conocemos los fenómenos que se nos presentan de manera evidente independiente de ser fenómenos matemáticos o no.

lo contrario, dicha oración es falsa. De esta manera Benacerraf está siguiendo la idea de verdad aristotélica "decir de lo que es, que es y decir de lo que no es, que no es", para eso hacemos uso de la semántica.

Para hablar sobre la verdad matemática Benacerraf solicita el uso de una semántica homogénea referencial ya que nos brinda un gran apoyo al momento de analizar el por qué una oración matemática es verdadera o falsa, pero ¿a que se refiere exactamente con semántica homogénea? Eso lo trataremos en la siguiente sección.

2.5.1 Semántica homogénea dentro del dilema.

Se entiende por semántica homogénea a aquella que estudia y considera a las oraciones de la matemática y las oraciones del lenguaje natural, incluidas aquellas que hablan del mundo físico, por igual; esto implica que se ocupan las mismas herramientas para analizar todas estas oraciones y que el análisis será el mismo para oraciones con la misma estructura sin importar cuál sea el tipo de objetos de los que hablan. Así, en cualquier oración del lenguaje (ya sea natural o matemático) se lleva a cabo un mismo análisis hacia estas oraciones obteniendo su significado sin distinguir si se tratan de oraciones matemáticas o no matemáticas, si refieren a objetos físicos o abstractos. De acuerdo con Benacerraf, regularmente creemos y funcionamos con esta idea semántica.

La semántica cumple un gran papel en la teoría de la verdad solicitada por Benacerraf, dado que esta disciplina determina si una oración del lenguaje es verdadera o no lo es. A partir de una semántica homogénea se nos muestran las condiciones de verdad de una oración matemática de manera evidente (no sólo dentro de un sistema formal) y se nos brindan las herramientas referenciales para certificar la verdad de dicha oración. Es así como, teniendo dos oraciones del lenguaje con la misma estructura, una matemática y otra no matemática, nuestra semántica homogénea asigna condiciones de verdad similares a ambas oraciones (por lo menos, a nivel estructural). Lo podemos apreciar en el siguiente ejemplo con las siguientes dos oraciones:

1) Hay al menos dos estudiantes de filosofía mayores que Jazmín.
2) Hay al menos dos números primos mayores que el número 2.

De acuerdo con una semántica homogénea, si llevamos a cabo su formalización y cuantificación lógico-gramatical de las 2 oraciones anteriores su representación sería la siguiente:

3) $\exists x \exists y\, (\sim(x=y)\ \&\ Px\ \&\ Py\ \&\ (Mxj\ \&\ Myj))$

Parece natural el pensar que la oración (3) representa adecuadamente la forma lógico-gramatical de las oraciones (1) y (2), pues al momento de hacer coincidir los cuantificadores, constantes y variables todo parece encajar, como bien lo dice Benacerraf (2004): "sugiero que si hemos de cumplir este requisito [una semántica homogénea], no deberíamos de estar satisfechos con una explicación que fracase al tratar (1) y (2) de manera similar, en base al modelo (3)", por lo que, si optamos por una semántica homogénea, resulta natural el tratar a las oraciones (1) y (2) de manera similar. El problema comienza cuando intentamos realizar el ejercicio inverso, es decir, el interpretar desde la oración (3) el significado para la oración (1) y (2), ya que comenzamos a notar las variadas condiciones de verdad y referencias que hacen verdadera cada oración.

Comencemos con la primera oración. Si analizamos las oraciones (1) y (3) parece claro que (3) expresa la forma lógico-gramatical de (1). Siendo entonces (1) verdadera sí y sólo si al reemplazar las variables 'x' y 'y' por dos sujetos que cumplan el predicado monádico 'P' y la relación del predicado diádico M (ser mayores) respecto la constante 'j' (Jazmín), será verdadera esa oración. Por lo que la oración (1) será verdadera si existen al menos dos estudiantes de filosofía mayores que Jazmín, ya que se estará cumpliendo la forma lógico-gramatical expresada en (3).

Continuemos con la segunda oración. Cuando consideramos a (3) como la representación de la forma lógico-gramatical de (2) estamos diciendo que deben de existir al menos dos números primos mayores que el número 2 para que la oración (2) sea verdadera. Si bien, afirmamos en el párrafo anterior que la oración (1) es verdadera respecto de la oración (3) porque existen los sujetos 'x' y 'y' que cumplen con los predicados 'P' y 'M', en la oración (2) no tenemos la certeza de que existan dichos números primos que ocupen el lugar de las variables 'x' y 'y', pues, aunque sabemos que dichos objetos "existen" conceptualmente, no existe una referencia directa para afirmar la verdad de la oración tal como lo desea Benacerraf. Es más, no es claro que nosotros, como seres humanos, podamos tener acceso a dichos objetos, incluso si no ponemos en duda su existencia.

Si consideramos que (3) es la representación lógico-gramatical de (2) entonces, de acuerdo con el cuantificador existencial añadido al inicio de la oración (3) y con las condiciones necesarias que se deben de cumplir para que la oración (2) sea verdadera ¿estamos afirmando que existen los números? Es aquí donde comenzamos con los problemas de un realismo ontológico.

Para resolver este problema y dar una explicación de la verdad matemática desde una postura semántica tenemos dos opciones: u optamos por una semántica homogénea la cual abarque también dentro de su explicación el ámbito matemático o no optamos por dicha semántica homogénea y construimos una semántica especial que dé cuenta de la verdad matemática.

Si aceptamos que debemos de tener dicha semántica homogénea, entonces debemos de aceptar que la oración (3) sea la representación lógico-gramatical de (2) así como de (1); pero si no queremos aceptar un realismo ontológico de los números para hablar de su verdad, entonces debemos de dejar a un lado el sueño de la semántica homogénea y proponer una semántica especial para las matemáticas, en la cual el comprometerse con la existencia de los números no sea una opción, pero que nos explique la verdad semántica de una oración matemática.

Como ya hemos mencionado anteriormente, existen varias razones para optar por una semántica homogénea, una de ellas es para garantizar la veracidad de nuestros juicios matemáticos y no matemáticos, sin embargo, si somo reacios al aceptar la existencia ontológica de los números, también existen otras opciones filosóficas de las matemáticas que nos pueden ayudar a dar explicaciones de la verdad matemática. Benacerraf nos presenta 4 diferentes posturas que nos brindan explicaciones de la verdad matemática, las cuales él las llama “combinatorias”, estas son llamadas así ya que se “asignan valores de verdad a los enunciados de la aritmética sobre la base de ciertos hechos sintácticos (generalmente demostrativos) sobre ellos” (Benacerraf, 2004, p.237). Esto es, dadas ciertas oraciones matemáticas, como axiomas, y ciertas reglas de inferencia, podemos afirmar que una oración resultante o teorema, sea verdadero o falso de acuerdo con los valores de verdad asignados a las oraciones precedentes y al rol jugado por las reglas de inferencia.

Un ejemplo claro de una postura combinatoria es la propuesta por Hilbert, presentada en el capítulo anterior. Hilbert nos da una explicación de la verdad matemática a partir de pruebas sintácticas, elementos ideales y una *prueba de consistencia para el sistema completo de la aritmética de primer orden.* En dicho método para la explicación de las verdades de la matemática Hilbert introduce "elementos ideales" como un recurso cómodo para hacer más simple y elegante la teoría de las cosas que realmente importan (Benacerraf, 2004, p.237), algo parecido a los puntos en el infinito de la geometría proyectiva[51]. Si al momento de probar un teorema ya habiendo introducido los elementos ideales la prueba no lleva a ninguna contradicción, entonces la introducción de dichos elementos ideales está justificada y se ha probado la verdad de una oración matemática. Siendo de esta manera como Hilbert explica la verdad de las oraciones de la matemática, a partir de demostraciones sintácticas y consistencia matemática.

Otro ejemplo son las posturas filosóficas de la matemática que definen a la verdad como derivable formalmente a partir de axiomas dados dentro de un sistema particular S. Dichas teorías filosóficas matemáticas prueban la verdad de las oraciones matemáticas a partir de axiomas y reglas de inferencia. Cada premisa está dentro de un sistema dado y tiene un valor asignado, así que solamente se deben de seguir las reglas y obtener el valor de cada teorema dentro de ese sistema S. En este tipo de teorías vemos como un valor de verdad está adscrito desde el inicio por el teórico, conociendo a detalle las razones por las cuales una oración matemática resultante es verdadera o falsa. El valor de verdad de una oración matemática surge de la combinación del valor de verdad de las premisas y las reglas de inferencia.

Otra teoría combinatoria de las matemáticas también son las posturas en las que consideran a los axiomas de Peano[52] como analíticos y otras posturas convencionalistas en las que parece que aun cuando aceptan una semántica estándar[53], la manera en la que conciben la verdad en las oraciones matemáticas y las oraciones del lenguaje natural es diferente, es decir que tratan a los referentes de las oraciones matemáticas y no matemáticas de manera diferentes.

[51] La geometría proyectiva estudia las llamadas propiedades descriptivas de las figuras geométricas, como la pertenencia de un punto a una recta, que dos puntos estén alineados o que dos rectas se corten en un punto.

[52] Los axiomas de Peano son un conjunto de axiomas de segundo orden para la aritmética que definen a los números naturales.

[53] L semántica estándar es la semántica que acepta la existencia de los referentes de una oración.

En todas estas teorías combinatorias podemos explicar la verdad de las oraciones matemáticas de diversas maneras, ya sea que se asignen valores de verdad desde un inicio a las premisas de una prueba formal, o se apele a una justificación de la verdad a partir de la consistencia dentro de un sistema. En cualquiera de estas posturas existe una marcada diferencia en la manera explicar la verdad de las oraciones de la matemática respecto las oraciones del lenguaje natural, pues al ser teorías combinatorias utilizan tanto herramientas sintácticas y semánticas para exponer y justificar la verdad de las oraciones matemáticas. Dichas teorías combinatorias podrían ser una opción para hablar sobre la verdad de las oraciones de las matemáticas y el conocimiento matemático, pero recordemos el dilema de Benacerraf respecto a la necesidad de una semántica homogénea "Las condiciones de verdad asignadas a dos enunciados que contengan cuantificadores deberían reflejar de manera significativamente similar la contribución de los cuantificadores" (2004, p.235) si decidimos optar por una semántica que no sea homogénea, debemos de dar razones suficientes para que consideremos diferentes a las oraciones matemáticas y las oraciones no matemáticas

Benacerraf solicita una teoría semántica homogénea, puesto que tenemos fuertes intuiciones acerca de que el significado tanto de las oraciones matemáticas y no matemáticas es similar en donde "cualquier distanciamiento de una teoría así de homogénea tendría que estar fuertemente motivado para poder ser digno de consideración" (Benacerraf, 2004, p.235). Es así como tanto la oración (1) y la oración (2) en nuestro anterior ejemplo, podrían ser expresadas lógico-gramaticalmente por la oración (3). Si concebimos que sólo tenemos un lenguaje natural en el que nos comunicamos y teorizamos, queda claro que este mismo lenguaje natural debe asignar significado a las oraciones que estemos profiriendo sin importar acerca de lo que se esté predicando. Si nosotros mencionamos que nuestra semántica matemática y no matemática es diferente esto tiene como consecuencia el aceptar que el significado dentro de nuestro mismo lenguaje natural es diferente al predicar oraciones matemáticas y no matemáticas.

La semántica que manejamos en el lenguaje natural al ser estándar trae consigo varios beneficios como el poder saber que una oración, cuál sea, es verdadera o no, siendo fácil, accesible y rápida. Sin embargo, si aceptamos que la semántica matemática es diferente de la semántica "estándar" que manejamos no quedan claro las razones y los momentos en que dicha semántica diferente comienza a interactuar en el ámbito matemático más que cuando pronunciamos oraciones matemáticas. Las anteriores semánticas combinatorias si bien pueden dar explicaciones de verdades de las oraciones matemáticas, no pueden ofrecer razones suficientes para aceptar que las oraciones matemáticas sean diferentes en nuestro lenguaje y por tal motivo, posean una semántica diferente, puesto que, al hacer uso de éstas nos resulta muy difícil crear una conexión entre la semántica combinatoria o formal y la semántica estándar al no haber referentes de significado.

No obstante, ¿podría existir una semántica homogénea en la que podemos dar explicaciones de la verdad matemática y no matemática que no nos comprometa con un realismo ontológico en relación con los números? De acuerdo con Benacerraf, la semántica de Tarski puede hacerlo y la presenta como la mejor opción para mantener una semántica homogénea en las explicaciones de la verdad matemática y no matemática.

2.6 Semántica homogénea de Tarski según Benacerraf.[54]

Benacerraf nos dice que para brindar una solución a su dilema se encuentra la semántica de Tarski. En esta semántica se mantiene la homogeneidad al hablar sobre la verdad de las oraciones, pues a partir de esta semántica podemos hablar sobre la verdad en las oraciones matemáticas y no matemáticas, y además no nos compromete con un mismo estatus ontológico entre los objetos matemáticos y los objetos sensibles. Para Benacerraf, la semántica de Tarski es la mejor opción.

Benacerraf nos comenta que a partir de la semántica de Tarski podemos analizar las proposiciones matemáticas en términos de nombres y cuantificadores de manera homogénea, es decir, no haciendo distinciones si se trata de oraciones matemáticas o no matemáticas, obteniendo un análisis adecuado semántico de los conceptos y cuantificadores. También con la semántica de Tarski podemos analizar los conceptos en términos de las propiedades que adscriben a los objetos dentro de sus dominios de discurso, pues como bien lo menciona Benacerraf (2004):

---

[54] Aunque Benacerraf postula a la semántica de Tarski como una solución a su dilema siendo la semántica homogénea que buscaba. Parece ser que, desde el inicio del planteamiento del dilema, Benacerraf presenta las características de cómo debe de ser la semántica homogénea de acuerdo con su creencia de lo que es la semántica de Tarski, es decir, que Benacerraf se basa en la semántica de Tarski para definir la semántica homogénea y entonces dar pie a su dilema.

> Una concepción no es automáticamente ‘combinatoria’ si interpreta que las proposiciones matemáticas versan sobre asuntos combinatorios, bien sean autorreferenciales, bien de otro modo. Pues tal concepción podría analizar las proposiciones matemáticas de manera ‘estándar’ en términos de los nombres y cuantificadores que puedan contener y en términos de las propiedades que adscriben a los objetos dentro de sus dominios de discurso. (P. 238).

Es decir, la semántica de Tarski nos brinda un mismo análisis del significado hacia las oraciones matemáticas y no matemáticas, lo cual, con dicho análisis, nos proveerá de un análisis de la verdad dirigido a las oraciones matemáticas.

El atractivo más distinguido de la semántica de Tarski es su homogeneidad al interpretar el significado de las oraciones en cualquier disciplina y esto lo logra gracias a que abarca el lenguaje en su conjunto. A partir de un análisis semántico del lenguaje en general, podemos hacer un análisis de las demás disciplinas y en este caso, de las oraciones de la matemática. Al obtener dicho análisis de las oraciones matemáticas podremos justificar la verdad de estas oraciones y al mismo tiempo realizamos un mismo análisis lógico uniforme a cualquier disciplina en cuestión.

Al ser partícipes de una semántica así de homogénea y con tanta generalidad podremos certificar las oraciones verdaderas de las matemáticas, pues ya no sólo serán verdaderos los teoremas en un sistema dado S, sino que la verdad de ese mismo teorema estará justificada por nuestra semántica homogénea; siendo entonces la oración matemática realmente verdadera.

La semántica de Tarski continúa definiendo la verdad en términos referenciales o satisfactorios sobre la base de un tipo particular de análisis sintáctico-semántico del lenguaje en donde “cualquier supuesto análisis genuino de la verdad matemática debe ser el análisis de un concepto que sea un concepto de verdad por lo menos en el sentido de Tarski” (*Ibid.,* p.239)

La semántica referencial homogénea que buscaba Benacerraf ha sido encontrada, pues ahora podemos aplicar un mismo análisis semántico a las oraciones (1) y (2) siendo interpretadas y descritas lógico-gramaticalmente en la oración (3). En esta semántica de Tarski se define a la verdad de acuerdo con la referencia o satisfacción de una oración, en donde, el análisis a realizar dependerá del tipo de oración que se predique, pero se mantendrá una misma semántica; es decir, la semántica tarskiana nos habla del significado y verdad de las oraciones en cualquier disciplina. Sin embargo, por lo menos en la forma en la que Benacerraf la presenta, la semántica tarskiana sigue siendo incompatible con una epistemología razonable, pues tal como otras propuestas, requiere de nosotros tener acceso a los objetos matemáticos.

2.7 Conclusiones del capítulo.

En el capítulo anterior analicé el Dilema de Benacerraf, sus orígenes y la necesidad de contar con una teoría filosófica de las matemáticas completa que expliqué la verdad matemática desde una teoría epistémica razonable y una teoría semántica homogénea.

Comencé por la explicación de lo que es un dilema y cómo surgió el dilema de Benacerraf a partir de las explicaciones de la verdad matemática por parte de teorías epistémicas y teorías semánticas separadas. Continué con la unificación de la teoría semántica y la teoría epistémica para dar una respuesta satisfactoria de la verdad matemática. Expliqué las características de lo que es una teoría epistémica razonable y de porqué esta teoría debe de dar una explicación de la verdad matemática. Expliqué las características de una teoría semántica homogénea y del porqué esta teoría debe de dar una explicación de la verdad matemática. Por último, presenté a la teoría semántica de Tarski como la semántica homogénea que solicita Benacerraf para dar una explicación adecuada de la verdad matemática.

Ahora bien, el dilema de Benacerraf surgió ante la necesidad de una explicación de la verdad matemática desde una teoría epistémica y una teoría semántica en conjunto, porque aquellas explicaciones de la verdad matemática que lo hacían desde una teoría epistémica explicaron cómo conocíamos la verdad matemática, pero no el referente que hacía verdaderas a esas oraciones; y aquellas explicaciones de la verdad matemática que lo hacían desde una teoría semántica explicaron el referente que hacía verdaderas a las oraciones matemáticas, pero no explicaron cómo conocíamos al referente mismo.

Benacerraf agrega que debía de haber una unificación de ambas teorías porque además de que las teorías filosóficas de las matemáticas que explicaban la verdad matemática eran incompletas, las teorías epistémicas podrían ser incorrectas[55] y contradictorias por la incompletitud y que las teorías semánticas incompletas podrían

[55] En un sistema lógico formal la corrección es la propiedad del sistema que asegura que todos los teoremas del sistema se sigan de acuerdo con los axiomas y reglas postulados en este.

afirmar la existencia de dos tipos de verdades diferentes, el matemático y el no matemático.

Dado que no queremos un sistema lógico-formal incorrecto y contradictorio porque violaría las mismas reglas del sistema y el probar cualquier teorema en el sistema sería trivial, y que tenemos fuertes intuiciones de que sólo existe un tipo de verdad independientemente del tema que se esté hablando, entonces se necesitaba de una teoría filosófica de las matemáticas que explique la verdad matemática completa.

Una teoría epistémica razonable es la teoría filosófica que explica el conocimiento empírico y el conocimiento teórico en la misma teoría y una teoría semántica homogénea es la teoría filosófica que justifica la verdad de las oraciones realizadas en los lenguajes formales y en el lenguaje natural dentro de la misma teoría.

Benacerraf postula a la teoría semántica de Tarski como la semántica homogénea que justifica en su mismo sistema la verdad de las oraciones matemáticas y no matemáticas. Es por esto por lo que en el siguiente capítulo analizaré la semántica de Tarski como la semántica homogénea presentada por Benacerraf y que podría darle una solución parcial al Dilema de Benacerraf.

Capítulo 3 La semántica de Tarski.

3.1 Introducción.

Benacerraf solicita una teoría filosófica de las matemáticas que explique la verdad matemática desde una teoría semántica homogénea y una teoría epistémica razonable, esto es, una teoría semántica que nos explique la verdad de las oraciones matemáticas y no matemáticas sin distinción del tema del cual hable la oración y una teoría epistémica que nos explique nuestro conocimiento matemático y no matemático.

En el capítulo anterior vimos que no existió una solución por parte de las teorías epistémicas que nos brindase una explicación satisfactoria de la verdad matemática,[56] sin embargo, Benacerraf postula a la *Teoría semántica de Tarski* como la semántica homogénea que puede brindar una explicación de la verdad matemática de manera homogénea y referencial, es decir, contando con un realismo semántico y un realismo ontológico.

Benacerraf nos presentó la teoría semántica de Tarski, afirmándola como:

- Homogénea.
- Referencial.
- Certificadora de la verdad matemática.

No obstante, como mostraré en el siguiente capítulo, la semántica de Tarski, a pesar de poseer algunas características presentadas por Benacerraf, no es la semántica homogénea que postula Benacerraf como solución a su dilema. Para comenzar, la semántica de Tarski es una semántica formal[57] y no una semántica homogénea.[58]

[56] Aunque podría profundizar en la explicación de más teorías epistémicas para encontrar una solución por el lado epistémico al Dilema de Benacerraf, me limitaré a analizar detalladamente el lado semántico del dilema para lograr su disolución.

[57] Una semántica formal es una teoría de la verdad que explica la verdad sólo en sistemas formales.

[58] Una semántica homogénea es una teoría de la verdad que explica la verdad en sistemas formales y no formales.

El objetivo del siguiente capítulo es analizar la semántica formal de Tarski para conocer la solución semántica presentada por Benacerraf a su dilema y lograr la disolución del dilema en el capítulo siguiente.

Es por esto por lo que el objetivo del presente capítulo es mostrar la definición de verdad formal de Tarski a partir de su teoría semántica. Para lograr dicho objetivo mostraré los puntos más importantes de cada una de sus tres obras:

1. 1931. *El concepto de verdad en los lenguajes formalizados.*
2. 1944. *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica.*
3. 1969. *Verdad y prueba.*

y mostraré el cambio de postura de la definición de verdad en la semántica para lenguajes formales y lenguajes naturales.

Al analizar la semántica formal de Tarski como solución a la semántica homogénea presentada por Benacerraf a su dilema se logrará su disolución en el capítulo 4.

3.2 Semántica de Tarski.

La concepción de la semántica de Tarski ha sufrido varios cambios a lo largo de su trayectoria con diferentes enfoques acerca de cómo concebir una definición del término verdad. Si bien, es cierto que en cualquier momento de su trabajo Tarski siempre consideró al concepto “verdad” como un concepto semántico, también es cierto que la concepción de dicho término, así como su proyecto han cambiado de perspectiva durante el desarrollo del proyecto. En esta sección presentaremos qué es lo que entendemos como semántica tarskiana expresada a lo largo de su trayectoria filosófica. Siendo así que, para Tarski

> La semántica es una disciplina que, hablando en términos generales, se ocupa de ciertas relaciones entre las expresiones de un lenguaje y los objetos (o "estados de hecho") "a los que se refieren" dichas expresiones. Como ejemplos típicos de conceptos semánticos podríamos mencionar los conceptos de designación, satisfacción y definición. (A. Tarski, 1944, p.10)

El proyecto de Tarski consta de 3 grandes escritos: “El concepto de verdad en los lenguajes formalizados” (1933), “La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica” (1944) y “Verdad y prueba” (1969), en ellos Tarski nos describe cómo es que podemos obtener una definición de la verdad desde una perspectiva lógica-matemática siguiendo la idea aristotélica “decir de lo que es, que es y decir de lo que no es, que no es”, por lo que la definición del concepto de verdad de Tarski intentará ser lo más medible, cuantificable y correspondentista posible respecto de una postura formal, es decir, la correspondencia no se realiza literalmente entre el lenguaje y el mundo, sino que, al ser una semántica formal o teoría de la verdad formal, entonces debe de existir una correspondencia entre un lenguaje objeto y un metalenguaje.

El concepto de verdad que intenta obtener Tarski quedará entonces inserto dentro de su famosa *Teoría semántica de la verdad formal* que tratará de seguir las características ya mencionadas.

3.2.1 Primer escrito: “El concepto de verdad en los lenguajes formalizados” (1933)

Ahora bien, para obtener una definición de verdad primero que nada Tarski nos presenta limitantes y lugares específicos en los que podemos obtener la definición semántica del concepto de verdad. Si bien sabemos que la semántica es la parte de la lingüística que se encarga del estudio de las expresiones y su significado, es decir, estudia la relación concepto-objeto; el obtener una definición del concepto verdad a partir de una relación correspondentista en el lenguaje natural dadas estas condiciones resulta una tarea ardua. Es por esto por lo que Tarski nos menciona que para obtener una definición del concepto de verdad deben de cumplirse las siguientes condiciones:

1) Sólo es posible obtener una definición del concepto de verdad dentro de los lenguajes formalizados.
2) El concepto de verdad dentro de los lenguajes formalizados sólo es posible con lenguajes de orden finito como el cálculo de clases.

Lo anterior es el caso ya que dentro del lenguaje natural o coloquial existen contradicciones, antinomias, no existen reglas sintácticas definidas, por lo que el obtener una definición del concepto de verdad dentro de este lenguaje infinito, semánticamente cerrado[59] y sin reglas resulta imposible.

Por otra parte, Tarski también nos menciona que es posible obtener una definición semántica del concepto de verdad dentro de lenguajes formalizados de orden finito, pero que los lenguajes formalizados que sean más robustos no contarán con una definición formalmente correcta ni materialmente adecuada[60] del concepto de verdad, ya que podemos caer en los mismos problemas que encontrábamos en el lenguaje natural y la definición del término “verdad" no cumpliría con las características postuladas por Tarski. Este mismo lenguaje formalizado y finito debe de ser ordenado, es decir, debe de contener reglas sintácticas básicas que nos permitan distinguir entre el lenguaje objeto y el metalenguaje del mismo lenguaje formalizado, por lo que este lenguaje nunca se cierra[61] y jamás va a permitir insertar el metalenguaje dentro del lenguaje objeto.

---

[59] Un lenguaje “semánticamente cerrado” es el lenguaje en todo su conjunto sin ninguna diferenciación. Es decir, no hay asignación de un lenguaje objeto ni metalenguaje; una misma expresión puede dar diversas relaciones de significado.

[60] Esta es la definición que Tarski pretende obtener del concepto de verdad, una definición es materialmente adecuada si una oración que resulta ser verdadera en sentido tarskiano, también lo es intuitivamente, y viceversa; es decir, que la noción intuitiva de verdad es coextensional con la definición tarskiana. Una definición es formalmente correcta si la definición de la verdad considera la forma lógica de la oración.

[61] Un lenguaje cerrado es un lenguaje realiza un análisis de sí mismo a partir de sí mismo. Un lenguaje abierto sí posee diferenciación del lenguaje en su análisis, es decir, un lenguaje objeto y un metalenguaje.

Por último, es importante hacer notar que los conceptos semánticos como verdad, satisfacción, denotación, definición, designación, entre otros, son análogos, es decir, poseen el mismo estatus semántico de nivel 1, por lo que se encuentran en relación directa: el concepto presentado y el objeto del mundo. La verdad se presenta en relación con el cumplimiento de dicho juicio con el mundo y el término "verdad" puede ser intercambiado por el término "satisfacción" o "denotación".

Hasta este momento estas son las ideas generales presentadas en el primer escrito de la obra de Tarski "El concepto de verdad en los lenguajes formalizados", ahora veamos qué es lo que sucede en los siguientes escritos.

3.2.2 Segundo Escrito: "La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica" (1944)

En el segundo escrito de Tarski algunas ideas cambiaron y también han surgido nuevas. Algunas de las modificaciones que podemos encontrar en sus ideas respecto como nos las había presentado en el primer escrito son:

1. El lenguaje natural deja de ser considerado un lenguaje lleno de contradicciones, puesto que, al no contener ninguna estructura en específico, no puede contener contradicciones ni niveles metalingüísticos.
2. Encontramos una jerarquización de los términos semánticos.

Tarski se da cuenta que el lenguaje natural al no contener ninguna estructura bien definida no puede contener contradicciones, ya que una misma expresión puede significar dos cosas totalmente distintas y no por eso estaría siendo parte de una contradicción. Si bien, esto representa un cambio de perspectiva hacia el lenguaje natural el cual nos puede brindar alguna esperanza para obtener una definición de "verdad" en este tipo de lenguaje, aún no es posible obtenerla, pues el lenguaje natural sigue sin cumplir las características especificadas para la construcción del concepto de verdad.

Respecto el segundo cambio, como habíamos visto anteriormente el concepto de "verdad" era análogo a los demás términos semánticos, es decir, podían intercambiarse los diversos términos semánticos entre sí, como "verdad" o "designar" dentro de la teoría semántica de Tarski, pues bien, ahora realizar dicha acción resulta imposible.

Tarski se da cuenta que para obtener una definición de "verdad" de manera correspondentista el concepto de "verdad" debe de contener un estatus semántico diferente a los demás términos semánticos, ya que necesita servirse de ellos para obtener tal definición, por lo que crea una jerarquía interna de niveles en el uso de términos semánticos, en donde el término semántico "verdadero" es de naturaleza lógica distinta respecto los demás términos semánticos, es decir, el término "verdad" posee un estatus semántico superior a los demás términos, como "denotar" o "satisfacer".

Este último cambio en la concepción del término de "verdad" puede apreciarse de manera más clara en el momento en que Tarski nos presenta su nueva *definición de verdad,* "una definición formalmente correcta y materialmente adecuada de 'verdad' se da a partir de un *proceso indirecto* que se apoya en la noción semántica de *satisfacción* y que *define mediante recursividad la verdad*" [las cursivas son mías] (Juan Nuño, 1971, p.113). Es aquí cuando a partir de esta definición Tarski nos presenta su *método de satisfacción y recursión para definir la verdad,* el método es el siguiente:

1. Considerar a toda sentencia del tipo "x es p" como una *función sentencial*.
2. Sustituir todas las variables de la función.
3. Alcanzar el caso límite en el que la *función sentencial* es *satisfecha* por todas las sustituciones válidas de sus variables.
4. Si se cumplen los tres puntos anteriores, entonces la oración "x es p" será necesariamente verdadera en ese contexto lingüístico.[62]

En este momento podemos apreciar que la verdad se entiende como un concepto extensional, es decir, para que una oración dentro de un contexto lingüístico específico sea verdadera, ésta necesita estar satisfecha por todas las posibles sustituciones de sus variables mediante la recursión; en donde las sustituciones serán representadas de manera extensional y no intensional, es decir, se deben de especificar dentro del contexto lingüístico finito las sustituciones de las variables. Cuando se termine este proceso entonces dicha oración será verdadera.

De acuerdo con lo anterior, podemos apreciar dos puntos, 1) el concepto de verdad es de naturaleza semántica distinta que los demás términos semánticos, es decir, se

[62] Consideramos al "modelo pretendido" lo mismo que el "contexto lingüístico" o interpretación.

encuentra en un nivel superior y 2) para que una oración del lenguaje formal sea verdadera esta debe de tratarse como una función sentencial en las que sus variables sean satisfechas por recursión. El concepto semántico de verdad hace uso del concepto semántico de satisfacción.

Tarski propone que el concepto de "verdad" es de naturaleza semántica distinta de los demás términos semánticos, ya que "este término semántico de naturaleza lógica expresa una propiedad de oraciones", es decir, no sólo expresa una relación entre un objeto y el mundo, sino que también abarca la *clase de sentencias verdaderas* (*ibid.*, p.114).

Por último, Tarski nos menciona que si bien, aún no podemos encontrar una definición adecuada y material del concepto de verdad para el lenguaje natural, nos deja entrever una posibilidad para obtener una definición fragmentada del concepto de verdad en este lenguaje. Esto es porque, así como nosotros traducimos del lenguaje natural al lenguaje formal algunas oraciones para convertirlas en una función sentencial y que, dentro del sistema formal podemos afirmar la veracidad de esa oración, quizá sea posible de alguna manera que, dada cierta cantidad de oraciones que logren ser traducidas y que sean verdaderas, si las juntamos quizá puedan brindar una definición parcial de verdad del lenguaje natural.

Resumiendo, las 3 nuevas ideas de la *teoría de verdad de Tarski:*

1. La verdad recurre a la noción semántica (más básica) de satisfacción.
2. La verdad queda definida extensionalmente
3. Es posible quizás definir la verdad en el lenguaje natural de manera fragmentada.

Hasta aquí las ideas propuestas por Tarski en su segundo escrito, ahora veamos cómo se termina gestando su proyecto en su último escrito semántico "Verdad y prueba".

3.2.3 Tercer escrito: "Verdad y prueba" (1969)

Al igual que en el segundo escrito, Tarski en este tercer escrito realiza cambios definitivos en sus ideas acerca de la concepción semántica de la verdad, en donde, en algunas de sus ideas para ser sustentadas requiere añadir métodos nuevos. El total de cambios realizados por Tarski en este tercer escrito son 6, que dividiremos para su explicación en 3 cambios menores y 3 cambios mayores. Comencemos con los cambios menores.

Los cambios menores que realiza Tarski en su teoría semántica de la verdad son:

1. Mostrar que el término “verdad” tiene diversas modalidades de uso.
2. Definir la expresión “materialmente adecuada” aplicada a la *definición general de verdad.*
3. Tratar las antinomias desde una percepción histórica-metodológica del lenguaje natural.

Y los cambios mayores son:

1. Analizar la tesis reduccionista que tiende a eliminar el término “verdad” del uso lingüístico-lógico.
2. Mostrar una posible definición parcial de verdad no contradictoria en el lenguaje natural.
3. Presentar mecanismos definitorios parciales de verdad para las ciencias empíricas.

Comencemos explicando los cambios menores dentro de la *teoría semántica de la verdad* de Tarski.

Tarski nos dice que el término “verdad” tiene distintas modalidades de uso y que esto lo podemos apreciar en el día a día, pues, así como nosotros podemos hablar acerca de la verdad en una oración matemática, también podemos hablar acerca de la verdad respecto a hechos referentes al mundo. A esto Tarski lo llama posición normativa y descriptiva, en la cual, la posición normativa atiende a la corrección del juicio, es decir ser verdadero en un sistema y la posición descriptiva atiende a la frecuencia y modalidad del uso del término verdad, más comúnmente utilizado en el lenguaje natural (*ibid.,* p. 116).

El segundo cambio de ideas que realiza Tarski es aclarar y explicar a qué se refiere con una definición de verdad *materialmente adecuada*. Si bien, en los anteriores escritos siempre se nos mencionó que la definición de verdad debe de ser formalmente correcta y materialmente adecuada para los lenguajes formales, es en su tercer escrito cuando nos brinda las características de una definición de verdad materialmente adecuada como parte de una definición general de verdad, es decir, abarcando también el lenguaje natural.

Una definición general de verdad materialmente adecuada lo es cuando tiene como *consecuencia lógica* todas las equivalencias de la oración con la siguiente forma: "'p' es verdadera si y sólo si p" (*ibid.,* p.117), si se cumple que dentro del sistema se obtienen como consecuencia lógica todas las oraciones equivalentes de "'p' es verdadera si y sólo p", entonces esa oración será verdadera. Como vemos de nuevo, para que una oración en general sea verdadera, esta tiene que cumplir con la satisfacción de sus variables, tal y como lo habíamos visto en la definición de verdad formal.

Por último, en su tercer cambio Tarski nos expresa de nuevo su descontento con las antinomias, que si bien, ya desistió de la idea de creer que había contradicciones en el lenguaje natural, las antinomias siguen existiendo y estas representan una enfermedad que debilita el sistema de la lógica, aunque si bien son comúnmente encontradas en nuestro lenguaje natural, nos aconseja elegir bien nuestros términos de uso para evitar caer en estas antinomias. Ahora analicemos los cambios mayores.

Entre los cambios mayores que realiza Tarski es la nueva concepción de la idea semántica de la verdad, ya que, además de mostrar al concepto de verdad sólo desde una perspectiva cerrada y fija que debe de encajar en un sistema formal, acepta el abrirse a aceptar una posible definición de verdad en el lenguaje natural, que quizás no cuente con las mismas propiedades que un lenguaje formal, pero que sea lo más acercado a una *definición general de la verdad*.

El primer cambio mayor que realiza Tarski es afirmar que tenemos la noción de la verdad en nuestro ser, es decir, el concepto de verdad está más apegado a la espiritualidad humana del cual podemos hacer uso en cualquier ámbito lingüístico. Lo anterior se puede apreciar cuando se encuentra debatiendo en contra de los nihilistas lógicos como Kotarbinsky, pues Tarski afirma que "la teoría nihilista de la verdad elimina la noción de verdad del acervo conceptual del espíritu humano" (*ibid.*, p.118); ya que, si bien, Kotarbinsky afirmaba que no se podía utilizar el término verdad dentro del área lógica debido a las grandes contradicciones y oscuridad que trae consigo este término, Tarski afirma que si negamos el uso del término dentro de dicha área, entonces cancelamos también el concepto de verdad del espíritu humano.

El segundo cambio mayor que nos muestra Tarski es un "esquema que funciona como definición general de verdad dado a partir de un fragmento del lenguaje natural" (*ibid.*, p.120), en donde si bien, en su primer escrito afirmaba que era imposible encontrar un método que nos dijera cómo definir la verdad de manera semántica y formal, ahora Tarski crea un esquema para obtener una definición de verdad parcial y general.

Para lograr una definición parcial de la verdad en el lenguaje natural hace uso de la semi-formalización del lenguaje natural (L). Dicho lenguaje parcial (L) debe de

a) poseer reglas sintácticas,

b) poseer un número finito de sentencias,

c) poseer una distinción de lenguaje objeto y metalenguaje.

Estas mismas características las observábamos al obtener una definición de verdad para lenguajes formalizados, sin embargo, para obtener una definición de verdad en el lenguaje natural también se deben de seguir los siguientes pasos:

1. Tabular las sentencias dentro del sistema como en el siguiente ejemplo: s_1, s_2, s_3, …, s_n
2. Para cada una de las sentencias finitas se construye una definición parcial de verdad. Es decir, se es verdadero en s_1, en s_2...
3. La definición parcial de verdad se obtiene por recursión y sustitución.
4. Se aplica la suma lógica de todas las definiciones parciales obtenidas

Lo anterior podemos resumirlo de la siguiente forma "para cada sentencia 'x' de (L), x es verdadera si y sólo sí o bien s_1, y x es idéntica a 's_1', o bien si s_2 y x es idéntica a 's_2', o bien … s_n y x es idéntica a 'n'" (*ibid.*, p. 121).

Como podemos apreciar continua la noción de una definición parcial de la verdad formalmente correcta y materialmente adecuada de manera extensional al igual que en su sistema formal, permitiéndonos una posibilidad de obtener una definición general parcial de verdad dada por su esquema.

El último cambio que agrega Tarski es el afirmar que también podemos predicar verdad en las ciencias empíricas. Si bien, con su método anterior sobre la semi-formalización del lenguaje natural podemos obtener verdades parciales del lenguaje natural, también es posible utilizar este tipo de maquinaria para hablar de la verdad en las ciencias empíricas.

Tarski nos dice que si bien obtenemos una definición de la verdad de manera parcial en el lenguaje natural, dicha aceptación y corrección de la definición está en riesgo pues, al hacer la partición de lenguaje natural y analizar las sentencias que deben de ser verdaderas en ese lenguaje (L) corremos el riesgo de que dichas sentencias sean falsas al no encontrarse en su contexto lingüístico adecuado o de lo contrario, demostrar que las sentencias son verdaderas debido a la postulación de axiomas innecesarios. Es por eso por lo que Tarski solicita la ayuda de las ciencias empíricas en el momento en el que estén utilizando la semi-formalización del lenguaje natural, ya que se corre el riesgo de falsear lo verdadero y satisfacer lo falso en su esquema general de definición de verdad.

Tarski dice que se deben de introducir procedimientos que proporcionen criterios parciales de verdad específicos de cada ciencia o de cada grupo de ciencias como las matemáticas. Para esto se debe de realizar un análisis de verdad orientada a la ciencia estudiada, es decir, cada ciencia empírica tiene la posibilidad de obtener una definición parcial de verdad materialmente adecuada y formalmente correcta a partir de su esquema general parcial de verdad; no obstante, al estar latente la posibilidad de errar en la definición, cada ciencia empírica debe de analizar la estructura de la formalización del lenguaje parcial, los axiomas aceptados y la sintaxis de dicho lenguaje para obtener oraciones verdaderas satisfechas y oraciones falsas insatisfechas.

Como vimos a lo largo de los tres escritos de Tarski su idea acerca de la concepción semántica de la verdad cambió con el tiempo. Si bien en el inicio estaba totalmente convencido de que no se podía obtener una definición de verdad en el lenguaje natural, a lo largo de su proyecto vemos como esta idea se va transformando hasta afirmar que es posible obtener sólo una definición parcial de verdad, que si bien no es general cómo lo deseábamos, al menos resulta ser un apoyo al momento de hablar de la verdad en el uso del lenguaje natural. Entre sus ideas semánticas más importantes a destacar, son:

- Para hablar acerca del concepto de verdad se requiere de una jerarquización de términos semánticos.
- Para que una oración sea formalmente verdadera ésta debe de ser satisfactoria en un sistema.
- La definición de verdad siempre es extensional.

- El concepto de verdad puede estar inserto en distintas perspectivas.
- Quizás sea posible obtener definiciones parciales de verdad en el lenguaje natural.

Como vemos, hemos obtenido ideas nuevas e incluso diferentes durante el proyecto semántico de la verdad de Tarski. Ahora ya tenemos herramientas para contrastar la semántica de Tarski tal como Tarski la presenta en comparación con la idea de la teoría semántica de Tarski que nos presentaba Benacerraf. En la siguiente sección haremos hincapié en mostrar que, aunque los métodos para obtener una definición semántica de la verdad en el lenguaje natural y en el lenguaje formal son parecidos, el uso de herramientas o esquemas semánticos para obtener una definición de la verdad es diferente en cada caso, por lo que no existe una teoría semántica homogénea tal y como lo planteó Benacerraf.

3.3 Semántica heterogénea de Tarski.

Ahora bien, como vimos en la sección anterior, Tarski concibe de manera diversa la teoría semántica de la verdad a lo largo de su proyecto, haciendo notar que en un principio sólo podíamos brindar una definición de la verdad desde la semántica aplicada a lenguajes formalizados finitos y pequeños, mientras que ya en su último trabajo, Tarski nos dice que quizás sea posible crear un esquema que nos ayude a obtener una definición semántica de la verdad aplicada a un fragmento del lenguaje natural. Sin embargo, recordemos las palabras de Benacerraf afirmando que la teoría semántica de Tarski es homogénea, ¿lo es?

Gracias al análisis que hemos realizado al principio de este tercer capítulo, podemos apreciar claramente que si bien, al final del proyecto de Tarski es posible aplicar un método al lenguaje natural para obtener una definición semántica de la verdad, este método no es el mismo para obtener la definición semántica de la verdad para lenguajes formalizados y en específico, para lenguajes como el lenguaje matemático. No obstante, si buscamos obtener una teoría semántica que nos explique de manera general y homogénea qué es la verdad de una vez y para siempre, esta tarea resulta imposible. Para apreciarlo con mayor claridad en esta sección llevaremos a cabo un análisis de las diferencias de estos dos métodos para obtener una definición semántica de la verdad, tanto en lenguaje formal como en lenguaje natural. Mostraré que la teoría semántica de

Tarski esta diseñada solamente para definir la verdad en lenguajes formales, mientras que, si se quiere obtener una definición de la verdad en el lenguaje natural completo con la teoría semántica de Tarski es imposible.

3.3.1 Lenguaje formal.

Tarski define como lenguajes formalizados a aquellos lenguajes en los que sólo "nos referimos únicamente a la forma de las expresiones implicadas" (Tarski, 1944, p.12) es decir, los lenguajes formalizados son aquellos en los que solamente nos importa la forma de la oración, la estructura del lenguaje y no el contenido de cada oración, pues es a partir de la forma de cada oración y de la estructura del lenguaje que sabremos si una oración resulta ser verdadera o falsa. Esto es así ya que, además de solamente centrarnos en la formalización del lenguaje, también hacemos uso de *reglas de inferencia, axiomas y teoremas*, las cuales, en conjunto, nos ayudan a obtener el valor de verdad de cada oración, ya que como bien lo dice Tarski "en un lenguaje de este tipo las únicas oraciones que se pueden admitir como válidas son los teoremas" (*ídem.*). En este sentido, las únicas oraciones que son consideradas verdaderas son aquellas que se pueden demostrar a partir de los axiomas y de las reglas de la lógica. Este tipo de lenguaje es regularmente usado en las demostraciones matemáticas.

3.3.2 Lenguaje natural.

El lenguaje natural es el lenguaje del día a día, llámese chino, japonés, coreano, inglés, español o turco, éste es el lenguaje a partir del cual nos comunicamos en la sociedad y en el cuál surgen los demás lenguajes formales (dependiendo de la cultura). Sin embargo, este tipo de lenguaje es muy extenso y trae consigo paradojas, antinomias, infinidad de oraciones y multitud de expresiones. Como bien lo menciona Tarski: todos los lenguajes naturales "hablados" - el significado del problema [de definición de verdad] es más o menos vago, y su solución puede ser únicamente aproximada. (Tarski, 1944, p.12). Es por esto, que, para obtener una definición semántica parcial de la verdad es necesario hacer una "traducción" de una oración del lenguaje natural al lenguaje formal.

3.3.3 Construcción del lenguaje formal.

Como bien lo hemos visto, el lenguaje formal solamente se centra en la forma de las oraciones matemáticas representadas por letras o formas, por ejemplo, el símbolo *p* que representa la oración “Jazmín usa lentes”, toda esta oración está representada por la letra *p.* Ahora bien, para deducir el valor de verdad de esa oración, dicha oración debe de estar inserta en un contexto lingüístico, es decir un lenguaje formal el cual nos permite deducir mediante reglas de inferencia el valor de la oración.

Para construir el lenguaje formal debemos de seguir los siguientes pasos:

1) Seleccionar un contexto lingüístico preciso.
2) El contexto lingüístico debe de ser finito y bien limitado.
3) Definir reglas sintácticas a usar en el lenguaje, tales como las reglas de inferencia.
4) Definir claramente el lenguaje objeto y el metalenguaje.
5) Nunca combinar el metalenguaje dentro del lenguaje objeto.

Con estos cinco pasos podemos crear un lenguaje formal en el podamos definir, a partir del estudio realizado por el metalenguaje hacia el lenguaje objeto, el concepto de verdad para este lenguaje formal en específico. Ya que, como bien lo menciona Tarski:

> Existen ciertas condiciones generales bajo las que la estructura de un lenguaje se considera perfectamente especificada. Para especificar la estructura de un lenguaje, tenemos que caracterizar de forma inequívoca la clase de palabras y expresiones que van a ser significativas. En concreto, tenemos que indicar todas las palabras que hayamos decidido utilizar sin definirlas previamente, a las que se denomina "términos no definidos (o primitivos)"; además tenemos que establecer reglas de definición para introducir términos definidos o nuevos. Asimismo, hay que establecer los criterios que permitan distinguir dentro de una clase de expresiones aquellas a las que denominados "oraciones". Por último, hay que formular las condiciones bajo las que una oración del lenguaje puede aseverarse. (Tarski, 1944, p.12)

3.3.4 Satisfacción

La satisfacción es la relación entre los objetos y oraciones del lenguaje. Es decir, la satisfacción se relaciona directamente con el objeto de estudio, que en este caso son las oraciones del lenguaje objeto, ya que estas cumplirán la propiedad de ser verdaderas o no al ser analizadas en el metalenguaje. La satisfacción de una oración dada una secuencia infinita de objetos se da cuando los espacios libres de una oración (las variables libres de una fórmula) son interpretadas apelando a los objetos en la secuencia y la oración resulta verdadera. La definición de satisfacción es formal.

Tarski define a la *satisfacción* como la herramienta que certifica que una oración sea verdadera, la cual funciona de la siguiente manera:

a) Considerar a toda sentencia del tipo “x es p” como una *función sentencial*.
b) Sustituir todas las variables de la función.
c) Alcanzar el caso límite en el que la *función sentencial* es *satisfecha* por todas las sustituciones válidas de sus variables.
d) Si se cumplen los tres puntos anteriores, entonces la oración “x es p” será necesariamente verdadera en ese contexto lingüístico.

Aquí podemos ver a la satisfacción como certificadora de verdad, en la que cada función sentencial u oración es satisfecha por todas las sustituciones válidas de sus variables, es decir, si la función sentencial es satisfecha con todas sus variables en todos los casos, entonces esa oración será verdadera. Obteniendo así la definición de la verdad a partir de la definición de satisfacción.

3.3.5 Equivalencia T

Además del método de satisfacción también es precioso hablar de la equivalencia T o la equivalencia *Truth* (de la verdad), que es el criterio para la adecuación material de la verdad. La equivalencia T nos permite analizar la verdad de una oración en particular, ya que, como bien lo dice Tarski: “[la equivalencia T es] una definición parcial de la verdad, que da cuenta de la verdad de una oración individual. La definición general tiene que ser, en cierto sentido, una conjunción lógica de todas estas definiciones parciales” (Tarski, 1944, p.10). Recordemos que la teoría de la verdad de Tarski es semántica, por lo que para asegurar la verdad de una oración debe de haber una relación entre el lenguaje en el que predicamos la oración con su designación o referente en el mundo. Es por esto por lo que la definición de verdad de Tarski también es materialmente adecuada, pues debe de haber una adecuación entre el nombre de la oración y el hecho designado en el mundo.

Ahora bien, la equivalencia T resulta ser un esquema que deben de seguir las oraciones para que de manera individual se pueda diagnosticar la verdad o falsedad de esa oración. La equivalencia T no debe entonces de entenderse como la definición de la verdad tarskiana, pues como bien lo dice Tarski, la definición de verdad "es decir de lo que es, que es, y decir de lo que no es, que no es", por lo que, aunque la equivalencia T nos puede ayudar a esclarecer la definición de verdad, este esquema por sí sólo no representa la definición semántica de la verdad tarskiana. Esto se debe a que esta definición también debe de ser materialmente adecuada y formalmente correcta.

La oración de ejemplo que utiliza Tarski en sus escritos para explicarnos el funcionamiento de la equivalencia T es, con regularidad, "la nieve es blanca", en donde esta oración es verdadera cuando de hecho la nieve es blanca (en el mundo). Para obtener la definición de verdad en esta oración apoyados en el esquema T, debemos de hacer un análisis a la expresión de la oración de la siguiente forma:

(a) *"La nieve es blanca" es verdadera sí y sólo si la nieve es blanca.*

En este momento, al manifestar la oración anterior de esa manera, ya se encuentra escrita de acuerdo con la forma de la equivalencia T.

La estructura de la oración (a) tiene dos partes, la oración "la nieve es blanca" con comillas y *la nieve es blanca* sin comillas. Esto es porque, dada la oración anterior, la primera oración con comillas representa el nombre de la oración, mientras que la oración sin comillas se usa para referirse a un hecho en el mundo, en donde el valor de verdad que nosotros definimos es el valor del nombre de la oración porque es la oración que nosotros expresamos mediante el uso de nuestro lenguaje.

Ahora bien, la equivalencia T consta entonces de dos partes: nombre de la oración y la oración (que es usada), los cuales pueden ser intercambiados por otras oraciones y nombres de oraciones como:

"Jazmin usa lentes" es verdadera sí y sólo sí Jazmín usa lentes.

"Tarski escribió la teoría semántica de la verdad" es verdadera sí y sólo si Tarski escribió la teoría semántica de la verdad.

(T) X es verdadera sí y sólo sí p.

Como bien lo dice Tarski: "Llamaremos a cualquiera de estas equivalencias (en las que 'p' sustituye a cualquier oración del lenguaje a la que la palabra 'verdadero' se refiere, y 'X' reemplaza al nombre de la oración) 'una equivalencia de la forma (T)'" (Tarski, 1944, p. 10), las cuales nos servirán para definir individualmente la verdad de una oración según la semántica de Tarski.

La equivalencia T, es un esquema que funciona como herramienta para determinar el valor de verdad de los enunciados en el cual notamos la diferencia entre el nombre de una oración predicada y la oración misma o estado de hecho en el mundo. Para que el nombre de la oración sea verdadera debe de ser satisfecha, de manera correspondentista, por la oración en el mundo; no obstante para obtener una definición semántica en un sistema formal, no basta con el esquema T, ya que éste esquema solo se aplica a una oración individual; para obtener una definición de la verdad en un sistema formal esta debe de estar compuesta de manera conjunta con las demás equivalencias T realizadas a las demás oraciones y además cumplir los puntos anteriores como la satisfacción y la recursión ya mencionados antes.

Con esto concluye la última sección, mostrando que el lenguaje natural y el lenguaje formal son diferentes y la manera en cómo definimos la verdad en los lenguajes formales es a partir de la satisfacción, la recursión y la equivalencia T.

3.4 Verdad

Ahora bien, es momento de hacer una diferenciación entre verdad, satisfacción y validez lógica. Si bien, hemos entendido que para Tarski la verdad se obtiene a partir de la satisfacción de funciones sentenciales u oraciones en un modelo pretendido o secuencia y que, también, existen tanto oraciones abiertas como cerradas, es decir, oraciones del tipo:

a) $(g\ (x_1, x_4))$

b) $\neg\exists x_1\ (f(x_1)\wedge \neg f(x_1))$

En donde en el inciso a) la función sentencial es abierta porque no contiene ningún cuantificador dentro del lenguaje de primer orden que abarque a las variables x_1 y x_4 y que en la oración del inciso b) sí encontramos una función sentencial cerrada ya que contiene un cuantificador de primer orden, o sea, el cuantificador existencial que está abarcando la variable x_1, en ambas oraciones podemos hablar de satisfacción de una oración, pero no en ambas podemos hablar de verdad y mucho menos validez lógica.

Para Tarski el que una oración abierta sea satisfecha quiere decir que existe una secuencia tal que satisface la oración. Siendo el inciso a), si definimos g como "es mayor" con la secuencia <4,3,2,1>, la secuencia satisface la función sentencial del inciso a) porque el número 1 es mayor que el número 4. Es decir, de acuerdo con la función sentencial y las variables libres dentro de ésta, pueden existir secuencias que satisfagan la oración, pero también pueden existir otras secuencias que no satisfagan la oración.

A diferencia de las oraciones abiertas, que solamente pueden ser satisfechas o no, las oraciones cerradas son o verdaderas o falsas. Esto sucede ya que una oración cerrada es satisfecha por todas las secuencias o no lo es por ninguna, ya que no tiene variables libres que dependen de la interpretación. Siendo por esto que una oración cerrada es verdadera cuando es satisfecha por todas las secuencias y una oración es falsa cuando no es satisfecha por ninguna secuencia en una interpretación. Por último, cuando una oración cerrada es satisfecha por todas las secuencias y además esa oración es satisfecha por todas las secuencias en cualquier modelo de interpretación, entonces dicha oración posee validez lógica.

Como podemos notar, la satisfacción de las oraciones siempre está presente, independientemente de que sean oraciones abiertas o cerradas, no obstante, mientras las oraciones abiertas pueden solamente ser satisfechas, las oraciones cerradas pueden ser verdaderas o incluso ser válidas lógicamente en cualquier interpretación. La satisfacción sigue siendo la herramienta semántica para definir la verdad de una oración.

3.5 Conclusiones del capítulo.

A lo largo de este tercer capítulo analizamos la semántica de Tarski tal y como él lo describe en sus tres escritos, "El concepto de verdad en los lenguajes formalizados" (1931), "La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica" (1944) y "Verdad y prueba" (1969), como resultado mostré los cambios en su postura y en su concepción acerca de la definición del concepto de verdad y en la manera en cómo obtener dicha definición. No obstante, los puntos que nos deben de quedar claros son:

- El concepto de verdad es entendido mediante la noción de satisfacción.
- La definición del término verdad es extensional, es decir, se presentan las oraciones que son verdaderas dentro de una clase.
- La definición de verdad se obtiene a partir de la recursión y satisfacción de funciones sentenciales.
- Es posible dar una definición de verdad en un contexto lingüístico específico y finito.
- Debe de existir una diferenciación entre lenguaje y metalenguaje en el lenguaje formalizado
- Una definición de verdad que abarque todo el lenguaje natural no existe, sin embargo, podemos dar una definición parcial de verdad a fragmentos del lenguaje natural después de una traducción formal.
- Es posible ofrecer una definición parcial de verdad a las ciencias empíricas.
- La equivalencia T no es la definición de verdad.

La semántica de Tarski o teoría semántica de Tarski se nos presenta como una herramienta mediante la cual podemos ofrecer una definición de verdad a los lenguajes formalizados y presentar, de esta manera, en este lenguaje en específico a las oraciones que cumplen con la propiedad de ser verdaderas, puesto que satisfacen su corrección y adecuación con el mundo y con el sistema formal. No obstante, si analizamos esta teoría semántica presentada por Tarski en comparación con la teoría semántica deseada que nos presentaba Benacerraf en el capítulo anterior encontramos muchas diferencias. Terminaremos de analizar en el siguiente capítulo la semántica de Tarski y la semántica homogénea pretendida por Benacerraf en el siguiente y último capítulo.

Capítulo 4 Un análisis semántico del Dilema de Benacerraf.

4.1 Introducción.

En los capítulos anteriores hemos llevado a cabo un análisis acerca de el dilema de Benacerraf y la semántica de Tarski, puesto que, como bien lo mencionaba Benacerraf, la teoría semántica de Tarski es postulada como la semántica homogénea que define el concepto de verdad para lenguajes formales y lenguajes naturales. No obstante, como vimos en el capítulo anterior, la semántica de Tarski no es homogénea, pero sí brinda una definición del concepto de verdad para el lenguaje formal, entonces ¿qué sucede con el dilema de Benacerraf? Este tema es el que analizaremos en el siguiente capítulo.

La semántica de Tarski había sido tomada por Benacerraf como el modelo de una semántica homogénea, es decir, como la teoría semántica a partir de la cual se brinda una definición de verdad para lenguajes formales y naturales. No obstante, en el capítulo tres vimos que la semántica de Tarski no trata de la misma manera al lenguaje formal y al natural De ahí que el objetivo de este cuarto capítulo es:

1) Analizar las similitudes y diferencias entre la semántica de Tarski y la semántica homogénea de Tarski que presenta Benacerraf en su dilema.
2) Revisar el estado del dilema de Benacerraf después de la falta de la semántica homogénea de Tarski.

El estudio del siguiente capítulo es de esta manera ya que a lo largo de la tesis analizamos el dilema de Benacerraf, las razones por las cuales había surgido el dilema y la interpretación de la teoría semántica de Tarski que Benacerraf le había dado. Por lo anterior, en este último capítulo analizaremos el estado del Dilema de Benacerraf después de una reinterpretación de la teoría semántica de Tarski.

4.2 Similitudes entre la semántica homogénea y la semántica formal de Tarski.

Si bien, existen muchas diferencias entre la semántica homogénea presentada por Benacerraf y la semántica de Tarski, también existen muchas similitudes, por las cuales podríamos llegar a interpretar a la semántica de Tarski como una semántica homogénea tal como la que requiere Benacerraf en su dilema, pero no es el caso que la semántica de Tarski sea una semántica homogénea. Para argumentar en favor de lo anterior, en esta sección vamos a presentar las similitudes entre la semántica de Tarski y la semántica homogénea que solicita Benacerraf.

Benacerraf en su dilema nos decía que requería una semántica homogénea que cumpliera con los siguientes requisitos:

1) Ser una semántica referencial o correspondentista con el mundo.
2) Realizar un análisis de la verdad en términos de los conceptos referenciales como, nombrar, predicar, satisfacer y cuantificar.
3) Ser una semántica general que certifique la verdad matemática.
4) Ser una semántica que trate de igual manera oraciones que hablan de cuestiones matemáticas y cuestiones mundanas si es que estas oraciones cumplen con las mismas características cuantificacionales.
5) Ser una semántica que no nos comprometa con un mismo estatus ontológico entre los elementos presentados en distintas oraciones.
6) Ser una semántica que utilice los mismos métodos para obtener la veracidad de las oraciones independientemente de su contenido.
7) Mostrar las condiciones que hacen a una oración verdadera.

Estas características parecen ser cumplidas semántica de Tarski, pues:

1. La semántica de Tarski sí es una semántica referencial, ya que se mantiene una relación en un contexto lingüístico específico entre el metalenguaje y el lenguaje objeto. Si bien, Benacerraf solicita que la semántica homogénea sea referencial en tanto que las oraciones del lenguaje estén en correspondencia directa con el mundo, Tarski posee una semántica referencial, pero sólo entre el lenguaje objeto y el metalenguaje.

2. Tarski también utiliza términos referenciales en su semántica para realizar un análisis de la verdad, como satisfacer, denotar, cuantificar y nombrar, no obstante, el nivel semántico que poseen estos términos es el mismo entre ellos, la única excepción es el término verdad, que, se encuentra en un nivel sintáctico superior.

3. Si bien, la semántica de Tarski no es una semántica general, sí puede certificar la verdad de las oraciones matemáticas, ya que el modelo o la interpretación que satisface la fórmula, al satisfacerla te asegura que es verdadera.

4. Tarski también acepta que dadas dos oraciones que tienen la misma estructura lógico-gramatical expresadas en el lenguaje de primer orden sean manejadas de la misma manera sin importar su contenido, puesto que lo que importa en la teoría semántica formal de Tarski es la forma de la oración y no el contenido de esta. De esta manera, si traducimos oraciones del lenguaje natural al lenguaje formal, podremos deducir la verdad de esas oraciones formalmente.

5. Tarski tampoco se compromete con un estatus ontológico respecto de los objetos presentados en las secuencias. Si bien, dichos objetos de la secuencia pueden satisfacer una fórmula, estos objetos no poseen un estatus ontológico definido, es decir si existen o no, no nos interesa, simplemente sirven para satisfacer la función sentencial.

6. Tarski al utilizar su teoría semántica formal para deducir la verdad de una oración utiliza los mismos pasos para deducir la verdad de cualquier oración, ya sea una oración formal o una oración natural que se traduce a una oración formal. Los pasos que sigue Tarski, como ya vimos anteriormente, son los siguientes: definir un lenguaje específico contextual, definir su metalenguaje y su lenguaje objeto.

7. La semántica formal de Tarski al ser formal y contar con una diferenciación entre metalenguaje y lenguaje objeto, especificar sus axiomas, reglas de inferencias y sus fórmulas, nos muestra claramente las condiciones o el camino por el cual deducimos el que una oración sea verdadera o no, ya que es satisfecha por un modelo de interpretación.

4.3 Diferencias entre la semántica homogénea y la semántica formal de Tarski.

Ahora bien, ya que analizamos las similitudes que existen entre la semántica homogénea solicitada por Benacerraf y la semántica de Tarski, es momento de analizar sus diferencias, y que constituyen las razones por las cuales, la semántica homogénea que solicita Benacerraf no puede ser la semántica de Tarski.

Benacerraf nos dice en su dilema que la semántica homogénea, de la cual debe de provenir una definición de verdad matemática, debe de ser:

1. Una semántica homogénea.

Pero sabemos que la semántica de Tarski es meramente formal y que la idea de una semántica general es imposible, ya que, si aceptamos un lenguaje cerrado, es decir, un mismo lenguaje en el que prediquemos la verdad de las oraciones, pueden surgir antinomias y paradojas ya que analizamos con el mismo lenguaje al lenguaje mismo.

2. Una definición de verdad absoluta.

Sabemos que en la semántica de Tarski es imposible obtener una definición absoluta, fija e inamovible, ya que la verdad se deduce caso por caso dependiendo del contexto lingüístico. Si queremos una verdad absoluta, ésta debería de estar inserta en un lenguaje cerrado y de nuevo encontraríamos muchas paradojas en las que sería imposible deducir la verdad de una oración.

3. Provenir de un lenguaje homogéneo.[63]

Nuevamente. Sabemos que para definir la verdad de una oración en la semántica de Tarski ésta debe de provenir de un lenguaje específico y en dicho contexto se deducirá la verdad de la oración. Este contexto lingüístico debe definir su metalenguaje y lenguaje objeto, los cuales dejan de ser homogéneos.

4. Analizar el significado de las oraciones matemáticas.

[63] Considero un lenguaje homogéneo a un lenguaje en el que no hay diferenciación entre lenguaje objeto y metalenguaje.

Si bien, al poseer un contenido las oraciones del lenguaje natural pueden surgir variadas interpretaciones, el lenguaje formal sólo es la forma de la oración y es lo que nos importa. Lo que signifique cada oración matemática en el análisis formal no es de nuestro interés.

5. Analizar de manera análoga oraciones naturales y oraciones formales.

Si bien, las oraciones del lenguaje natural y el lenguaje formal no son los mismos, comenzando por el contenido de sus oraciones y continuando con la estructura lógica gramatical de las oraciones, la manera de analizar dichas oraciones tampoco es la misma.

En las oraciones del lenguaje formal ya se tiene definidas su estructura lógico-gramatical y el sistema en el que se deducirá la verdad de la oración en donde se asignará un modelo que satisfaga la oración; las oraciones del lenguaje natural parten desde una interpretación para ser "traducidas" a un lenguaje formal. Siendo que con la semántica de Tarski analizar una oración en el lenguaje natural no sucede sino hasta que se formaliza y se específica su contexto lingüístico para definir la verdad de la oración traducida. Por lo que nunca se da una definición de la verdad para el lenguaje natural en general, sino que se fragmenta el lenguaje natural y en cierto contexto lingüístico en una oración particular traducida y formalizada se define su verdad.

4.4 Estado del dilema de Benacerraf sin la semántica de Tarski.

Ahora bien, como podemos apreciar existen tanto similitudes como diferencias entre la semántica del dilema de Benacerraf y la semántica de Tarski. Si bien existen razones por las cuales podemos considerar a la semántica de Tarski como una la semántica ideal para brindar una definición de la verdad para las oraciones matemáticas, al hacer un análisis acerca de los demás puntos que debe de cumplir la semántica homogénea que presenta Benacerraf en su dilema, la semántica de Tarski no los cumple, comenzando con la homogeneidad.

Ahora bien, recordemos que una semántica homogénea es aquella que considera de igual manera a oraciones del lenguaje natural y el lenguaje matemático y el no hacerlo "tendría que estar fuertemente motivado para poder ser digno de consideración" (Benacerraf, 2004, p.235), es por esto por lo que Benacerraf solicitaba una teoría semántica homogénea, que representara nuestras intuiciones de las oraciones verdaderas, tanto para las oraciones del lenguaje natural y para las oraciones de la matemática. Para lograr dicho objetivo, es decir, brindar una definición de la verdad matemática desde una semántica homogénea, Benacerraf postula a la semántica de Tarski que, Benacerraf pensaba, cumplía con sus características establecidas:

1. Ser homogénea
2. Certificar la veracidad de las oraciones de la matemática.
3. Ser referencial.

No obstante, la teoría semántica de Tarski no satisface los criterios planteados por Benacerraf para una semántica homogénea, puesto que, como bien lo dice Tarski: todos los lenguajes naturales "hablados" - el significado del problema [de definición de verdad] es más o menos vago, y su solución puede ser únicamente aproximada. (Tarski, 1944, p.12), siendo por esto y por los métodos presentados por Tarski en el capítulo 3 las razones por las cuales no existe ninguna teoría semántica homogénea por parte de Tarski que brinde una definición de la verdad tanto para oraciones formales como para oraciones naturales y aunque puede existir una método parcial para definir la verdad de una oración del lenguaje natural, solo es una definición parcial, ya que la teoría semántica de Tarski está pensada específicamente para oraciones del lenguaje formal. Si lo anterior es el caso, entonces ¿qué sucede con el dilema de Benacerraf?

Para Benacerraf hay un dilema en la filosofía de las matemáticas, debido a que no existe ninguna teoría filosófica que brinde una definición de la verdad matemática desde una teoría epistémica razonable y una teoría semántica, como bien lo menciona:

> Sostengo que dos clases de preocupaciones, bastante distintas, han motivado separadamente las explicaciones de la naturaleza de la verdad matemática: (1) la preocupación por disponer de una teoría semántica homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje, y (2) la preocupación por que la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable. Mi tesis general consistirá en que casi todas las explicaciones del concepto de verdad matemática pueden identificarse como sirviendo a uno u otro de estos propósitos a expensas del otro. (Benacerraf, 2004, p.233)

Y agrega:

> [C]ualquier supuesto análisis genuino de la verdad matemática debe ser el análisis de un concepto que sea un concepto de verdad por lo menos en el sentido de Tarski (p.239)

Mostrándonos que la teoría semántica que postula Benacerraf en su dilema es la semántica de Tarski.

Ahora bien, si decimos que un dilema es “un argumento que está formado por dos proposiciones contrarias y disyuntivas, [y que], al conceder o negar cualquiera de estas dos proposiciones, queda demostrado aquello que se quería probar” (Pérez y Merino, 2014) y que, además, Benacerraf quiere una teoría de la verdad matemática que brinde explicaciones de su verdad, tanto desde una postura semántica y una postura epistémica, puesto que “cualquier explicación adecuada debe abordar ambas preocupaciones” (Benacerraf, 2004, p.234), entonces, la formalización del dilema de Benacerraf queda expresado de la siguiente manera:

B) P v Q

Teniendo en cuenta que P es igual a la teoría semántica homogénea y Q es igual a la teoría epistémica, y si decimos que la teoría semántica homogénea que postula Benacerraf es la de Tarski, es decir, que P es igual a T (P=T) y decimos que ¬T, porque la teoría semántica de tarski no es homogénea, entonces ¬P, por lo que la formalización del dilema sería la siguiente:

B) P v Q

¬P

PLT. Q

Independientemente de que tengamos Q, es decir, la teoría epistémica razonable, recordemos la definición de dilema, “un argumento que está formado por dos proposiciones contrarias y disyuntivas” (Pérez y Merino, 2014), al no tener las dos proposiciones contrarias y disyuntivas, no existe algún dilema. Es decir, un dilema es un argumento que está conformado por dos opciones y no es el caso que ambas proposiciones se cumplan al mismo tiempo. No obstante, si no tenemos ambas opciones, entonces no existe algún dilema y queda disuelto.

4.5 Conclusiones del capítulo.

En este último capítulo hemos llevado a cabo un análisis de los capítulos dos y tres de esta misma tesis. En este capítulo confrontamos las ideas por las cuales considerábamos al dilema de Benacerraf como un dilema a partir de un análisis semántico, analizamos las razones por las cuáles la semántica de Tarski no es homogénea, tal como pensaba Benacerraf y disolvimos el Dilema de Benacerraf.

Para mostrar la disolución del Dilema de Benacerraf primero analizamos las similitudes entre la semántica homogénea que solicita Benacerraf y la semántica de Tarski postulada por Benacerraf como la semántica homogénea. Después, llevamos a cabo un análisis de las diferencias entre las dos teorías semánticas, haciendo notar las razones por las cuales la semántica de Tarski no cumple principalmente con la homogeneidad que requiere Benacerraf en su dilema. Y, por último, mostramos las razones por las cuales el Dilema de Benacerraf queda disuelto por falta de un disyunto, es decir, el disyunto de la semántica homogénea.

Si bien, han habido varios intentos por tratar de resolver el Dilema de Benacerraf tratando de conjuntar una teoría semántica homogénea y una teoría epistémica razonable e incluso, han habido más intentos por resolver el Dilema de Benacerraf al ofrecer diversas teorías epistémicas razonables que fuesen compatibles con la semántica de Tarski, no habían habido grandes estudios o análisis por parte de la semántica homogénea, puesto que el mismo Benacerraf ya la consideraba como la semántica homogénea que da pie a su dilema, pero hemos demostrado que esto no es así.

La resolución final del Dilema de Benacerraf es que éste no existe, puesto que queda disuelto al no existir la semántica homogénea pretendida por Benacerraf, ya que su modelo era la semántica de Tarski, pero como hemos visto, la semántica de Tarski fue diseñada para definir la verdad en oraciones del lenguaje formal y no para definir la verdad en oraciones del lenguaje natural, en donde, si bien, puede existir un esquema parcial y general para definir la verdad en las oraciones del lenguaje natural, dicho esquema no brinda una teoría semántica homogénea, siendo por esto que queda disuelto el Dilema de Benacerraf.

CONCLUSIONES GENERALES.

A lo largo de esta tesis llevamos a cabo un análisis semántico del Dilema de Benacerraf a partir de la semántica tarskiana, mostrando las razones por las cuales éste surge, la manera en que Benacerraf interpreta la semántica de Tarski mostrándolo como una semántica homogénea en su dilema, la semántica de Tarski como lo expone el propio Tarski y una solución al dilema a partir de su propia eliminación.

En el capítulo uno analicé la situación de las Matemáticas y la filosofía de las matemáticas en el siglo XIX y siglo XX en lo que se intentaba dar una definición, conceptualización y formalización acerca de lo que eran las matemáticas a partir de respuestas logicistas, formalistas e intuicionistas, sin embargo, el descubrimiento del teorema de Gödel trajo consigo problemas para estas mismas teorías filosóficas de las matemáticas. En este capítulo se mostraron las teorías filosóficas de las matemáticas que brindaron diversas definiciones de la verdad matemática, que más tarde Benacerraf las clasificaría como teorías de la verdad matemática semánticas o epistémicas.

En el capítulo 2 analizamos el Dilema de Benacerraf que surge a partir del esfuerzo que realizan las distintas teorías filosóficas de las matemáticas por definir lo que son las matemáticas y con ellas, por definir lo que es la verdad matemática. Pronto Benacerraf se da cuenta de que las definiciones de la verdad matemática son dadas a partir de teorías epistémicas y teorías semánticas que no brindaban una teoría filosófica general de la verdad matemática, es decir, que no encontramos en ninguna teoría filosófica una definición del concepto de verdad matemática desde una semántica homogénea y una epistemología razonable al mismo tiempo.

Es por esto por lo que, en el segundo capítulo muestro que Benacerraf postula su Dilema de Benacerraf, en donde se establece que una buena teoría filosófica de las matemáticas debe de brindar una definición del concepto de verdad desde una teoría semántica homogénea y una teoría epistémica al mismo tiempo y que, de no hacerlo, la teoría filosófica presentada para ofrecer una definición de la verdad matemática será insatisfactoria e incluso que esta teoría nos puede llevar a contradicciones. En este mismo dilema Benacerraf postula a la teoría semántica de Tarski cómo la semántica homogénea que debe de tomarse en cuenta para definir el concepto de verdad de las matemáticas a la cual se debe de agregar la teoría epistémica razonable para que ambas teorías juntas logren una definición satisfactoria y válida de la verdad matemática.

En el capítulo 3 se llevó a cabo un análisis de la teoría semántica de Tarski para mostrar principalmente que esta teoría no era una teoría semántica homogénea como la planteaba Benacerraf, si no que, más bien, Tarski presenta esta teoría semántica para definir la verdad de manera formal en los lenguajes formalizados y que, sí bien, encontramos en sus escritos tardíos un intento por definir la verdad en el lenguaje natural a partir de agregados en su teoría semántica, la teoría semántica de Tarski sigue sin considerarse una teoría semántica homogénea puesto que Tarski en ningún momento considera a su teoría semántica como una teoría semántica homogénea o general para brindar definiciones de la verdad en todo el lenguaje.

Tarski postula que, para obtener una definición satisfactoria de verdad en los lenguajes formalizados, el lenguaje no debe de ser cerrado, sino que debe de haber una heterogeneización del lenguaje a partir de un lenguaje objeto y un metalenguaje, debe de ser finito y debe de contar con un lenguaje definido. El lenguaje natural al no contener estas características deja de ser considerado de igual manera que el lenguaje formal y, por lo tanto, deja de ser susceptible a una definición del concepto de verdad a partir de los métodos brindados en la semántica de Tarski. Es decir, la teoría semántica de Tarski no es homogénea porque no considera al lenguaje formal y al lenguaje natural de igual manera para definir la verdad, mientras que Benacerraf solicitaba una teoría semántica que brindara una definición de la verdad tanto para oraciones naturales y para oraciones formales, la semántica de Tarski solo se aplica a lenguajes formales.

En el cuarto capítulo se lleva a cabo un análisis comparativo entre capítulo 2 y el capítulo 3 de esta tesis. Analizamos las similitudes y diferencias entre la semántica homogénea de Benacerraf que plantean su dilema y la semántica de Tarski como el mismo Tarski nos lo presenta en sus obras. A partir de este análisis contrastamos que la semántica del Dilema de Benacerraf y la semántica de Tarski no son los mismos y que al postular a la semántica de Tarski como la semántica homogénea del dilema deja sin un disyunto al Dilema de Benacerraf causando su disolución del propio dilema.

Por lo anterior concluimos que el Dilema de Benacerraf tal y como está planteado no existe, ya que al faltar el disyunto semántico el dilema automáticamente se disuelve. Si bien, Benacerraf nos mostró un punto que las teorías filosóficas de las matemáticas estaban cometiendo al definir la verdad matemática, la existencia del dilema no se sostiene.

Al ser la teoría semántica de Tarski solo formal, esta teoría semántica puede incluso unirse a teorías epistémicas que brinden una definición de verdad matemática, causando de nuevo la eliminación del dilema. No obstante, la creación o surgimiento de una teoría semántica homogénea como la plantea Benacerraf es un reto que quizá muy pocos estén interesados en resolver gracias al surgimiento de la pluralidad en varios campos filosóficos, evitando dar una respuesta absoluta e inamovible acerca del cómo definir la verdad de las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA.

Balaguer, Mark (2009). “Realism and Anti-Realism in mathematics.” *Philosophy of Mathematics* (35-101). Doi: http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-51555-1.50006-7

Benacerraf, Paul (1973). “Mathematical Truth.” *The Journal of Philosophy*, *70*(19), 661-679. Recuperado de http://links.jstor.org/sici?sici=0022-362X%2819731108%2970%3A19%3C661%3AMT%3E2.0.CO%3B2-V

Benacerraf, Paul (2004). “La verdad matemática”, *ÁGORA*, *23*(2), 233-253

Benito, Carlos. La paradoja de Russell. *Revista Libertalia*. Recuperado de https://www.revistalibertalia.com/single-post/2018/03/19/La-paradoja-de-Russell

Boubarki, N. (1949). “Foundations of mathematics for the Working Mathematician.” *Jour. Symb. Logic*, *14*, 1-8

Dou, Alberto (1970). *Fundamentos de las matemáticas*. Barcelona, España: Labor, S. A.

Ferreiros, D. José (2004). Un episodio de la crisis de los fundamentos: 1904. *La Gaceta de RSME*, *7*(2), 449-467

Ferreiros, D. José (1998). El enfoque conjuntista en matemáticas. *La Gaceta de RSME*, *1*(3), 389-412

Friend, Michelle (2007). *Introducing Philosophy of Mathematics*. Trowbridge, Inglaterra: Cromwell Press.

Gödel, Kurt (1981). *Obras completas*. Alianza, Madrid.

Gómez, M. (2001). Notas sobre el Wahrheitsbegriff, I. *Análisis filosófico*, *21*(1), 5-41.

Gowers, W. T. (2000). *The two cultures of mathematics*. Recuperado de https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf

Gutiérrez, C. (2011). *Estructuralismo, Teoría de Conjuntos y Teoremas de Categoricidad*. Tesis de maestría. UNAM, México, México.

Gutiérrez, C. (2015). *¿Es la hipótesis del continuo una proposición absolutamente indecidible? Un estudio filosófico*. Tesis de doctorado. UNAM, México, México.

Iemhoff, Rosalie. (2020). Intuitionism in the Philosophy of Mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Recuperado de https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/intuitionism/

Nuño, Juan (1975). Teoría de la verdad en Tarski. *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía, 5*(13), 109-127.

Tarski, Alfred (1931) *The concept of truth in formalized languages.*

Tarski, Alfred (1944). *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica.* Dialnet. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3867056&orden=336201&info=link

Tarski, Alfred (1944). "The Semantic Conception of Truth: and the Foundations of Semantics." *Philosophy and Phenomenological Research, 4*(3), 341-376. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/2102968

Tennat, Neil (2017). Logicism and Neologicism. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Recuperado de https://plato.stanford.edu/entries/logicism/

Torres A. Carlos (2005). El intuicionismo de Brouwer. *Revista Digital Universitaria*. 6(1), 15-16.

Torres A. Carlos (2007). ¿Ignoramus et ignorabimus? *Revistas UNAM, 1*. Recuperado de http://www.journals.unam.mx/index.php/afil/article/view/31430/29064