



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HOMOLOGÍA DE MORSE Y SUS
APLICACIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

RODRIGO MALAGÓN RODRÍGUEZ

TUTOR

DR. PIERRE MICHEL BAYARD



CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

La culminación del presente trabajo no sería posible sin las incontables muestras de apoyo que recibí durante mi estancia en la universidad. Aunque las siguientes alusiones no son exhaustivas, menciono a las personas que, desde distintas áreas, contribuyeron de manera determinante a la satisfactoria conclusión de esta etapa de mi vida.

A mi familia por darme aliento. Siempre estaré agradecido por el privilegio de estudiar que me han obsequiado.

A Hei, porque mucho de lo que soy lo debo a la fortuna de compartir el camino a su lado. Agradezco su lectura y sus aportaciones tan pertinentes.

A mis amigos, por regalarme el placer de compartir, con especial atención a Eu, por su incansable capacidad de acompañar y escuchar. A Giselle por ser mi Virgilio en momentos aciagos.

A mi asesor, Pierre Bayard, por su paciencia y conducción durante la realización de esta tesis. A mis sinodales, Natalia Jonard, Oscar Palmas, Vinicio Gómez y León Kushner, por su dedicación en la lectura de este trabajo. A mis profesores de la carrera, por guiar mi camino con su amplia sabiduría y calidez; en especial a Natalia por abrirme las puertas en el mundo de la docencia.

Parte de esta investigación fue realizada bajo la supervisión del Dr. José Antonio Vilches Alarcón, del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla, como parte del *Programa de apoyo a la titulación de egresados de la UNAM a través de estancia académica en el extranjero* (TEE), gestionado por la Dirección General de Cooperación e Internacionalización (DGECI). Agradezco a José Antonio Vilches y a Rafael Ayala por sus comentarios sobre esta tesis y por el tiempo que dedicaron a presentarme la perspectiva discreta de la Teoría de Morse.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Teoría de Morse y campos pseudogradientes	1
1.1. Funciones de Morse	1
1.2. Campos pseudogradientes adaptados a una función de Morse . . .	14
1.3. La condición de Smale	21
2. El espacio de ligaduras	27
2.1. El espacio de trayectorias	27
2.2. El espacio de ligaduras	30
3. El complejo y la homología de Morse	37
3.1. El complejo de puntos críticos y la diferencial	37
3.2. Variedades con frontera	39
3.3. Homología de Morse	42
4. La homología de Morse	53
4.1. Funtorialidad de la homología	53
4.2. Operaciones topológicas	58
4.3. Dualidad de Poincaré	60
4.4. Desigualdades de Morse	62
4.5. Sucesión exacta larga	63
5. Aplicaciones	65
5.1. Teorema de punto fijo de Brouwer	65
5.2. Polinomio de Poincaré	66
5.3. Homología del espacio proyectivo real	68

Teoría de Morse Discreta	71
A. Álgebra homológica	73

Introducción

La utilización de invariantes es de gran utilidad para distinguir espacios por su estructura topológica o diferenciable. Desde los albores de la topología, los invariantes numéricos y algebraicos han jugado un papel importante en esta disciplina. Un invariante de este último tipo lo constituyen los grupos de homología, que traducen información topológica en algebraica y son, con los grupos de homotopía, “los invariantes algebraicos que han provisto mayor entendimiento de la estructura de los espacios topológicos” [2].

Los grupos de homología se construyen a partir de un complejo de cadena, conformado por una familia de módulos $\{C_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ asociados entre sí por una colección de morfismos de módulos $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ llamados diferenciales del complejo. Estos morfismos satisfacen $\text{Im}(\partial_k) \subset \text{Ker}(\partial_{k-1})$ y la homología definida a partir del complejo es la sucesión de grupos abelianos $H_k = \text{Ker}(\partial_k)/\text{Im}(\partial_{k+1})$.

La teoría de Morse constituye un escenario conveniente para obtener invariantes, pues vincula la configuración de los puntos críticos de una función de Morse definida en una variedad con la estructura topológica de la variedad. En este trabajo se presenta la construcción, las propiedades y algunas aplicaciones de la homología de Morse, siguiendo como principal referencia el texto de Audin y Damian [1].

Por simplicidad, en el presente trabajo se utiliza el campo \mathbb{Z}_2 para construir la homología. La teoría presentada puede extenderse al empleo de \mathbb{Z} , como se comenta en [1]. Las consideraciones técnicas en ese caso utilizan orientaciones de variedades y los resultados de Latour [9, sección 2].

En el primer capítulo abordamos los contenidos básicos de la Teoría de Morse necesarios para obtener la homología de Morse. En particular, presentamos los conceptos de función de Morse, de índice de un punto crítico, de campo pseudo-gradiente adaptado a una función de Morse y la condición de Smale. El objetivo central del capítulo es demostrar la existencia y genericidad de pares de Morse-Smale (teoremas 1.1.8, 1.2.2 y 1.3.4).

El segundo capítulo está dedicado a estudiar el conjunto $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$, conformado por las ligaduras (trayectorias quebradas) de un campo pseudogradiante X que unen dos puntos críticos p y q . Al proporcionar una topología al espacio de ligaduras, se prueba su compacidad y su estructura de variedad (teoremas 2.2.6 y 2.2.8 y corolario 2.2.7). Estos resultados permiten definir el complejo de Morse.

El tercer capítulo se ocupa de la descripción de este complejo de cadena y la obtención de los grupos de homología. Dedicamos una sección intermedia a extender los conceptos al caso de variedades con frontera y finalizamos con la exposición de la independencia de la homología respecto al par de Morse-Smale empleado (teoremas 3.3.4 y 3.3.5).

El cuarto capítulo constituye un compendio de propiedades algebraicas de la homología de Morse. Estudiamos la functorialidad de la homología de Morse y su comportamiento con operaciones como la suma y el producto de espacios topológicos (proposiciones 4.1.5, 4.2.1 y 4.2.2). También presentamos la dualidad de Poincaré, las desigualdades de Morse y el teorema de existencia de la sucesión exacta larga adaptado al ámbito de la homología de Morse (teoremas 4.3.1, 4.4.2 y 4.5.1). Incluimos al final de esta tesis un apéndice de álgebra homológica que complementa el contenido de los capítulos 3 y 4.

En el quinto capítulo exponemos algunas aplicaciones de la homología de Morse dentro de la topología. Finalizamos el desarrollo de esta tesis con un breve comentario sobre la adaptación que se ha realizado en décadas recientes de la teoría de Morse al ámbito de los espacios discretos.

Por último, conviene realizar algunas aclaraciones sobre la terminología empleada en este trabajo. Para tratar los conceptos de geometría utilizamos la nomenclatura de Do Carmo [3] y Lee[10]; para los términos de topología y homología seguimos fundamentalmente los textos de Prieto [13] y Weibel [18]. Particularmente, nos referimos a las variedades diferenciables sin frontera simplemente como *variedades*. Cuando sea necesario, explicitaremos la vacuidad de la frontera. Asimismo, utilizamos el término *diferenciable* para aludir a funciones diferenciables de clase C^2 .¹ A continuación incluimos una tabla para clarificar el significado de los símbolos más usados en la presente tesis, correspondientes a conceptos geométricos y topológicos.

¹Así garantizamos las condiciones suficientes para emplear construcciones con la segunda derivada, como la hessiana de una función diferenciable.

Lista de símbolos

$T_p M$	espacio tangente a la variedad M en el punto p
X_p	campo vectorial X en el punto p
$X \cdot f$	evaluación del campo X en la función diferenciable f a lo largo de la variedad
$(\text{Hess } f)_p$	matriz hessiana de la función diferenciable f en el punto p
df_p	diferencial de la función diferenciable f en el punto p
$(\text{grad } f)_p$	campo gradiente de la función diferenciable f en el punto p
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	producto interior usual en \mathbb{R}^n
$\text{Crit}(f)$	conjunto de puntos críticos de la función diferenciable f
$N \pitchfork P$	transversalidad de las subvariedades $N, P \subset M$
$F : f_0 \simeq f_1$	existencia de una homotopía $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ entre dos aplicaciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$
\mathbb{B}^n	bola unitaria cerrada de dimensión n
$\mathring{\mathbb{B}}^n$	bola unitaria abierta de dimensión n
$\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	espacio proyectivo complejo de dimensión n
$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$	espacio proyectivo real de dimensión n

Capítulo 1

Teoría de Morse y campos pseudogradientes

En este capítulo presentamos los conceptos y resultados básicos que usaremos para construir el complejo y la homología de Morse de una variedad en capítulos posteriores.

1.1. Funciones de Morse

Definición 1.1.1 (Puntos críticos no degenerados y funciones de Morse).

- I. *Un punto crítico p de una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre una variedad suave M es no degenerado si la forma bilineal*

$$\begin{aligned} (d^2 f)_p : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\longmapsto X_p \cdot (Y \cdot f) \end{aligned} \tag{1.1}$$

es no degenerada, donde Y es cualquier campo de vectores que prolonga al vector $Y_p \in T_p M$.

- II. *Una función de Morse es una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cuyos puntos críticos son no degenerados y son puntos interiores de M .*

Notamos que la aplicación (1.1) está bien definida en el conjunto de puntos críticos de f . En efecto, como $X_p \cdot (Y \cdot f) - Y_p \cdot (X \cdot f) = df_p([X, Y]_p) = 0$ para cualquier campo X que prolongue a X_p y cualquier punto crítico p , entonces

$$X_p \cdot (Y \cdot f) = Y_p \cdot (X \cdot f) = Z_p \cdot (X \cdot f) = X_p \cdot (Z \cdot f) \tag{1.2}$$

para cualesquiera campos Y y Z que prolonguen a Y_p . La simetría de d^2f_p está dada por la primera igualdad en (1.2).

Asimismo, observamos que la condición de no degeneración de un punto crítico p es equivalente a que la matriz (simétrica) hessiana

$$\text{Hess}(f \circ \varphi^{-1})_0 = \left(\frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{ij} \quad (1.3)$$

sea no singular para cualquier carta φ alrededor de $p = \varphi^{-1}(0)$ con coordenadas (x_1, \dots, x_n) , pues dicha matriz representa a la forma bilineal (1.1) respecto a la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ del espacio tangente T_pM . Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.2. La función altura $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$ es una función diferenciable con dos puntos críticos $(0, \dots, 0, \pm 1)$. Consideremos las cartas (proyecciones)

$$\varphi_{\pm} : \overset{\circ}{\mathbb{S}}_{\pm}^n \rightarrow \overset{\circ}{\mathbb{B}}^n$$

donde $\overset{\circ}{\mathbb{S}}_{\pm}^n := \{x \in \mathbb{S}^n : \pm x_{n+1} > 0\}$ son los hemisferios (abiertos) superior e inferior de \mathbb{S}^n y $\varphi_{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ tiene inversa $\varphi_{\pm}^{-1}(x) = (x, \pm(1 - \|x\|^2)^{1/2})$. Entonces $(0, \dots, 0, \pm 1) = \varphi_{\pm}^{-1}(0)$ y se satisfacen las relaciones

$$\begin{cases} (f \circ \varphi_{\pm}^{-1})(x) = \pm(1 - \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial(f \circ \varphi_{\pm}^{-1})}{\partial x_i}(x) = \frac{\mp x_i}{(1 - \|x\|^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{\partial^2(f \circ \varphi_{\pm}^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\mp}{(1 - \|x\|^2)^{\frac{3}{2}}} \left((1 - \|x\|^2)\delta_{ij} + x_j x_i \right). \end{cases}$$

En particular obtenemos el cálculo de la matrices hessianas

$$\text{Hess}(f \circ \varphi_{\pm}^{-1})_0 = \left(\frac{\partial^2(f \circ \varphi_{\pm}^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{ij} = \mp (\delta_{ij}) = \mp I_n, \quad (1.4)$$

por lo que f es una función de Morse.

La simetría de la matriz hessiana (1.3), que es diagonalizable, sugiere como ejemplo de función de Morse a una forma cuadrática $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, cuyo único punto crítico es el origen y cuya matriz hessiana en el origen es una matriz diagonal con valores en la diagonal $2a_1, \dots, 2a_n$. Esta forma cuadrática es una función

de Morse exactamente cuando los valores a_1, \dots, a_n son no triviales. El siguiente resultado enuncia que, salvo un cambio de coordenadas, podemos reducir el estudio de las funciones de Morse a transformaciones afines de formas cuadráticas de este tipo. Seguiremos la exposición de Audin y Damian [1, teorema 1.3.1].

Teorema 1.1.3 (Lema de Morse). *Si p es un punto crítico no degenerado de una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces existe una carta $\varphi : (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que*

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2 \quad (1.5)$$

para algún $0 \leq k \leq n$.

Demostración. Como se trata de un resultado local, basta demostrarlo para el espacio euclidiano \mathbb{R}^n considerando al origen como el punto crítico no degenerado de la función de Morse.

Si $P \in O(n)$ es una matriz tal que $D = P^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{ij} P$ es diagonal¹, entonces el difeomorfismo lineal $g(y) = Py$ ofrece un cambio de coordenadas $(y_1, \dots, y_n) = g^{-1}(x_1, \dots, x_n) = P^t x$ alrededor de $0 \in \mathbb{R}^n$. Así la matriz hessiana de $f \circ g$ en $0 = g^{-1}(0)$ representa a la forma bilineal $(d^2 f)_0 : T_0 \mathbb{R}^n \times T_0 \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ respecto a la base $\gamma = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_0 \right\}$. Recalcamos que las matrices que representan a la forma bilineal $(d^2 f)_0$ respecto a las bases $\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right\}$ (inducida por la carta identidad) y γ están relacionadas por una congruencia usando la matriz invertible $P = g'(0)$, que es la matriz de cambio de base de γ a β [14, teorema 11.2]; a saber,

$$[(d^2 f)_0]_\gamma = P^t [(d^2 f)_0]_\beta P.$$

De donde,

$$\left(\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial y_j \partial y_i}(0) \right)_{ij} = [(d^2 f)_0]_\gamma = P^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{ij} P = D.$$

Por lo tanto, basta demostrar el teorema para el caso en que la hessiana de f en 0 es diagonal.

Probamos el resultado por inducción sobre la la dimensión del espacio euclidiano. Para una función suave de variable real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene a 0 como un punto crítico no degenerado se cumple que $f'(0) = 0$ y $f''(0) \neq 0$. Utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de f , obtenemos la expresión

$$f(x) = f(0) + f''(0) \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x) = f(0) \pm x^2 \left(\frac{|f''(0)|}{2} + \tilde{\epsilon}(x) \right), \quad (1.6)$$

¹Toda matriz simétrica real es ortogonalmente diagonalizable [14, teorema 10.16.2b].

donde $\tilde{\epsilon} = \pm\epsilon$ es una función suave que satisface $\tilde{\epsilon}(0) = 0$. Consideremos ahora la aplicación

$$\varphi(x) = x\sqrt{\frac{|f''(0)|}{2} + \tilde{\epsilon}(x)},$$

que está definida en una vecindad de 0 de la forma $V = \tilde{\epsilon}^{-1}(-|f''(0)|/2, |f''(0)|/2)$. Observamos que esta aplicación satisface

$$\varphi'(0) = \sqrt{\frac{|f''(0)|}{2}} \neq 0.$$

Por el teorema de la función inversa, la función φ es un difeomorfismo en una vecindad de 0. Además, para la coordenada $x_1 = \varphi(x)$ se satisface la relación

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1) = f(x) = f(0) \pm x^2 \left(\frac{|f''(0)|}{2} + \tilde{\epsilon}(x) \right) = f(0) \pm [\varphi(x)]^2 = f(0) \pm x_1^2,$$

que proporciona una descomposición de f como en la ecuación (1.5) para el caso base.

Consideramos ahora una función suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $n > 1$, que tiene al origen como punto crítico no degenerado y tal que la matriz hessiana de f en dicho punto es diagonal. Después de realizar un cambio de coordenadas apropiado h , utilizaremos una expresión similar a (1.6) para la función $\tilde{f} = f \circ h$ sobre la primera variable $x_1 \in \mathbb{R}$ de los puntos $(x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$. Comenzamos observando que las condiciones sobre f implican que

$$0 = (\text{grad } f)_{(0,0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(0,0) \right)$$

y la matriz hessiana

$$\text{Hess } f_{(0,0)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0,0) \right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0,0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(0,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(0,0) \end{pmatrix}$$

tiene rango completo. En particular, se satisfacen las relaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0,0) \neq 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Por el teorema de la función implícita, existe una función diferenciable $\psi : (W, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ definida en una vecindad abierta y conexa W de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\psi(y), y) = 0$ para toda $y \in W$. Además, el cálculo² del gradiente de la función trivial $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(\psi(y), y) = 0 \in \mathbb{R}$ en el origen ofrece información sobre $(\text{grad } \psi)_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\psi(0), 0), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\psi(0), 0) \right) \cdot \begin{pmatrix} (\text{grad } \psi)_0 \\ I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0, 0), 0, \dots, 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} (\text{grad } \psi)_0 \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0, 0) (\text{grad } \psi)_0. \end{aligned}$$

La segunda condición en (1.7) implica que $(\text{grad } \psi)_0 = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Consideremos el cambio de coordenadas dado por la aplicación $h(x_1, y) = (x_1 + \psi(y), y)$, definida en la vecindad abierta $\mathbb{R} \times W$ de $(0, 0)$ y tal que $h(0, 0) = (0, 0)$. En efecto, se trata de un difeomorfismo local pues la matriz jacobiana de h es

$$h'(x_1, y) = \begin{pmatrix} 1 & (\text{grad } \psi)_y \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

que es una matriz invertible para cualquier $(x_1, y) \in \mathbb{R} \times W$. En particular, $h'(0, 0) = I_n$ pues $(\text{grad } \psi)_0 = 0$.

Ahora consideramos la composición $\tilde{f} = f \circ h$. Bajo el cambio de coordenadas h , la función f satisface³

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} &= (f' \circ h) \cdot h' \cdot e_i = \left\langle (\text{grad } f) \circ h, \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle (\text{grad } f) \circ h, \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} [(\text{grad } f) \circ h], \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle (\text{grad } f) \circ h, \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle \\ &= \left\langle [(\text{Hess } f) \circ h] \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}, \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle (\text{grad } f) \circ h, \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

²Para conservar la claridad a lo largo de esta prueba, denotamos con “ \cdot ” al producto entre matrices o entre una matriz y un vector, según sea el caso.

³Denotamos por e_i al i -ésimo vector columna de la base canónica de \mathbb{R}^n .

Evaluando estas expresiones en el origen obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0, 0) &= \left\langle (\mathbf{grad} f)_{(0,0)}, \frac{\partial h}{\partial x_i}(0, 0) \right\rangle = \langle 0, e_i \rangle = 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j \partial x_i}(0, 0) &= \left\langle (\mathbf{Hess} f)_{(0,0)} \cdot e_j, e_i \right\rangle + \left\langle (\mathbf{grad} f)_{(0,0)}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}(0, 0) \right\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(0, 0) \end{cases}$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Es decir, \tilde{f} satisface las mismas hipótesis que f . Además, para cada $y \in W$ la función de variable real $\tilde{f}_y(x_1) = \tilde{f}(x_1, y)$ cumple

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_y(0) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(0, y) = \left\langle (\mathbf{grad} f)_{h(0,y)}, \frac{\partial h}{\partial x_1}(0, y) \right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{grad} f)_{(\psi(y), y)}, e_1 \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\psi(y), y) = 0, \end{aligned}$$

por la elección de ψ . Utilizamos (1.8) para estimar la segunda derivada de \tilde{f}_y en 0:

$$\begin{aligned} \tilde{f}''_y(0) &= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_1 \partial x_1}(0, y) \\ &= \left\langle [(\mathbf{Hess} f)_{h(0,y)}] \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}(0, y), \frac{\partial h}{\partial x_1}(0, y) \right\rangle + \left\langle (\mathbf{grad} f)_{h(0,y)}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_1}(0, y) \right\rangle \\ &= \left\langle [(\mathbf{Hess} f)_{(\psi(y), y)}] \cdot e_1, e_1 \right\rangle + \left\langle (\mathbf{grad} f)_{(\psi(y), y)}, \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_1}(0, y) \right\rangle \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\psi(y), y) + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}((\psi(y), y)), 0 \right\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\psi(y), y). \end{aligned}$$

Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\tilde{f}''_y(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\psi(y), y)$ no se anula y no cambia de signo en la vecindad conexa W de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, pues $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0, 0) \neq 0$ y la aplicación $y \mapsto (\psi(y), y)$ es continua. Tal como en el caso base, podemos expresar a la función \tilde{f}_y como

$$\tilde{f}_y(x_1) = \tilde{f}_y(0) \pm x_1^2 \left(\frac{|\tilde{f}''_y(0)|}{2} + \tilde{\epsilon}(x_1, y) \right),$$

donde $\tilde{\epsilon}(x_1, y) = \pm \epsilon(x_1, y) = \pm \frac{1}{x_1^2} (\tilde{f}(x_1, y) - \tilde{f}(0, y) - (x_1^2/2) (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\psi(y), y)))$ es una función suave tal que $\tilde{\epsilon}(0, y) = 0$. Recalamos que el signo \pm en esta expresión no cambia por la conexidad de W .

Observemos ahora que la aplicación suave

$$\sigma(x_1, y) = \left(x \left(\frac{|\tilde{f}_y''(0)|}{2} + \tilde{\epsilon}(x_1, y) \right)^{\frac{1}{2}}, y \right)$$

está definida en una vecindad del origen y tiene derivada

$$\sigma'(0, 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{|\tilde{f}_0''(0)|}{2}} & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, σ es un difeomorfismo en una vecindad de $(0, 0)$ tal que

$$(\tilde{f} \circ \sigma^{-1})(u_1, y) = \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(0, y) \pm u_1^2 \quad (1.9)$$

para las coordenadas $(u_1, y) = \sigma(x_1, y)$. Finalmente, notamos que la función $q(y) = \tilde{f}(0, y)$ definida en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ satisface la relación $(\text{grad } q)_0 = (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(0, 0), \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(0, 0)) = 0$ y tiene matriz hessiana diagonal no singular

$$\text{Hess } q_0 = \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j \partial x_i}(0, 0) \right)_{2 \leq i, j \leq n}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la función $q = f(0, \cdot)$, obtenemos a partir de (1.9) la descomposición

$$\begin{aligned} (f \circ h \circ \sigma^{-1} \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \tau^{-1}))(u_1, \dots, u_n) &= (\tilde{f} \circ \sigma^{-1} \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \tau^{-1}))(u_1, \dots, u_n) \\ &= (q \circ \tau^{-1})(u_2, \dots, u_n) \pm u_1^2 = \tilde{f}(0, 0) \pm u_1^2 - \sum_{i=2}^k u_i^2 + \sum_{k+1}^n u_i^2 \\ &= f(0, 0) \pm u_1^2 - \sum_{i=2}^k u_i^2 + \sum_{k+1}^n u_i^2 \end{aligned}$$

para algún difeomorfismo τ definido en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ con coordenadas $(u_2, \dots, u_n) = \tau(y)$. La aplicación $\varphi = (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \tau) \circ \sigma \circ h^{-1}$ es, salvo una permutación de coordenadas, la carta buscada. \square

Observamos que el número k en la ecuación (1.5) no depende de la carta φ . En efecto, la matriz que representa a la forma bilineal simétrica $d^2 f_p$ respecto a la base $\beta = \{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ inducida por φ es

$$\left(\frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}(0) \right)_{ij} = 2 \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

La inercia⁴ de la forma bilineal $d^2f_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ es la tripleta de números naturales $(n - k, k, 0)$ que, por la ley de inercia de Sylvester, sólo depende de la clase de congruencia de cualquier matriz que represente a la forma bilineal [14, teorema 11.27]. Por lo tanto, el número k es independiente de la base β y de la carta φ . La descomposición de f en (1.5) y la invariancia de k motivan el siguiente concepto.

Definición 1.1.4 (Índice de un punto crítico no degenerado). *El índice de un punto crítico no degenerado p de una función diferenciable f se define como el número natural $\text{Ind}(p, f) = k$ tal que la igualdad (1.5) se satisface para alguna carta $\varphi : (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. Cuando no haya ambigüedad, denotaremos esta cantidad por $\text{Ind}(p)$. Denotamos al conjunto de puntos críticos no degenerados de f de índice k por $\text{Crit}_k(f)$.*

Asimismo, denominaremos *carta de Morse* (asociada al par (M, f)) a cualquier carta φ que satisfaga una igualdad como en (1.5) y *dominio de Morse* a cualquier abierto de U que sea el dominio de una carta de Morse $\varphi : (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

Corolario 1.1.5. *Los puntos críticos no degenerados de una función diferenciable son aislados. Si la variedad es compacta, el conjunto de puntos críticos de una función de Morse definida en ella es finito.*

Demostración. En virtud del teorema 1.1.3, todo punto crítico no degenerado p de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ posee una carta de Morse φ como en (1.5) tal que

$$(\text{grad}(f \circ \varphi))_{(x_-, x_+)} = 2(-x_-, x_+)$$

para cada $x = (x_-, x_+)$ en la imagen de la carta. Luego, el único punto crítico de f en la vecindad de Morse de p es $\varphi^{-1}(0) = p$. Sea M una variedad suave compacta, f una función de Morse y un dominio de Morse Ω_p para cada punto $p \in \text{Crit}(f)$. Por la compacidad de M , existe una cubierta abierta de M de la forma $\{M - \text{Crit}(f)\} \cup \{\Omega_{p_1}, \dots, \Omega_{p_r}\}$, para un subconjunto finito $\{p_1, \dots, p_r\} \subset \text{Crit}(f)$. Por lo tanto, obtenemos

$$\text{Crit}(f) \subset \bigcup_{i=1}^r \Omega_{p_i}.$$

Como cada dominio de Morse Ω_p contiene un único punto crítico de f , entonces $\text{Crit}(f) = \text{Crit}(f) \cap \bigcup_{i=1}^r \Omega_{p_i} = \{p_1, \dots, p_r\}$. \square

⁴ Siguiendo la exposición en [14, teorema 11.27], consideramos la inercia de una forma bilineal simétrica definida en un espacio vectorial de dimensión finita como la tripleta (p, n, m) con p valores positivos, n negativos y m nulos en la diagonal de alguna matriz diagonal que la represente.

A continuación presentamos un par de funciones de Morse provistas de cartas de Morse como en (1.5). Para el primer ejemplo seguimos el libro de Milnor [12, observación 1.4.2].

Ejemplo 1.1.6. La función f definida en el espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ en coordenadas homogéneas por $f(z_0 : \dots : z_n) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n |z_k|^2} \sum_{k=0}^n k |z_k|^2$ es una función de Morse. En efecto, consideremos las cartas

$$\varphi_r : U_r = \{(z_0 : \dots : 1 : z_{r+1} : \dots : z_n), z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}\} \longrightarrow \mathbb{B}^{2n}, \quad 0 \leq r \leq n,$$

dadas por

$$\varphi_r(z_0 : \dots : 1 : z_{r+1} : \dots : z_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|z\|^2}} (\operatorname{Re}(z_0), \operatorname{Im}(z_0), \dots, \operatorname{Re}(z_n), \operatorname{Im}(z_n)),$$

donde $z = (z_0, \dots, z_{r-1}, z_{r+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ y cuyo inverso es

$$\varphi_r^{-1}(x) = \left(\frac{x_0 + iy_0}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} : \dots : 1 : \frac{x_{r+1} + iy_{r+1}}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} : \dots : \frac{x_n + iy_n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \right)$$

para $x = (x_0, y_0, \dots, y_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n, y_n) \in \varphi_r(U_r) \subset \mathring{\mathbb{B}}^{2n}$. Observamos que, para x y z correspondientes, se cumple $\|x\|^2 = \|z\|^2 / (1 + \|z\|^2)$ y, por lo tanto, $1 - \|x\|^2 = (1 + \|z\|^2)^{-1}$. Luego, obtenemos el cálculo de f en $\varphi_r(U_r)$:

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi_r^{-1})(x) &= \frac{1}{1 + \|z\|^2} \left(r + \sum_{k \neq r} k |z_k|^2 \right) = r(1 - \|x\|^2) + (1 - \|x\|^2) \sum_{k \neq r} k \frac{(x_k^2 + y_k^2)}{1 - \|x\|^2} \\ &= r - \sum_{k \neq r} r(x_k^2 + y_k^2) + \sum_{k \neq r} k(x_k^2 + y_k^2) = r + \sum_{k \neq r} (k - r)(x_k^2 + y_k^2) \\ &= f(u_r) - \sum_{0 \leq k < r} |k - r|(x_k^2 + y_k^2) + \sum_{r < k \leq n} |k - r|(x_k^2 + y_k^2), \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde $u_r = (0 : \dots : 1 : \dots : 0)$ tiene un 1 en la r -ésima posición. La expresión (1.10) tiene, salvo un cambio de coordenadas lineal, la forma de (1.5). Más aún, esto demuestra que la función f tiene exactamente $n + 1$ puntos críticos, a saber, los puntos u_r con $0 \leq r \leq n$. El índice de cada uno de estos puntos es, respectivamente, $\operatorname{Ind}(u_r) = 2r$.

Ejemplo 1.1.7. Consideremos la función altura f definida en \mathbb{S}^n y las cartas φ_{\pm} del ejemplo 1.1.2. Sea $g : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n$ la biyección dada por $g(x) = (2 - \|x\|^2)^{1/2} x$. Esta aplicación es invariante en \mathbb{S}^{n-1} y cumple $g(0) = 0$. Además, observamos que

$$g'(0) = \left(\delta_{ij} (2 - \|x\|^2)^{1/2} - \frac{x_i x_j}{(2 - \|x\|^2)^{1/2}} \right)_{ij} (0) = (\sqrt{2} \cdot \delta_{ij})_{ij} = \sqrt{2} I_n,$$

por lo que g se restringe a un difeomorfismo en una vecindad abierta $V \subset \mathring{\mathbb{B}}^n$ alrededor de 0. Sean $\Omega_{\pm} = \varphi_{\pm}^{-1}(g(V))$ vecindades alrededor de los puntos críticos $(0, \dots, \pm 1)$. Comprobamos que las cartas $\phi_{\pm} := g^{-1} \circ \varphi_{\pm} : \Omega_{\pm} \rightarrow V$ satisfacen

$$\begin{aligned} (f \circ \phi_{\pm}^{-1})(x) &= (f \circ \varphi_{\pm}^{-1})((2 - \|x\|^2)^{1/2}x) = \pm(1 - (2 - \|x\|^2)\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \pm((1 - \|x\|^2)^2)^{\frac{1}{2}} = \pm 1 \mp \|x\|^2 \\ &= f(0, \dots, \pm 1) \mp \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Luego ϕ_{\pm} son cartas de Morse y los polos $(0, \dots, 1)$ y $(0, \dots, -1)$ son puntos críticos de f de índice n y 0, respectivamente.⁵ Más aún, la definición de las parametrizaciones ϕ_{\pm}^{-1} se puede extender naturalmente a \mathbb{B}^n como

$$\phi_{\pm}^{-1}(x) = (g(x), \pm 1 \mp \|x\|^2) = ((2 - \|x\|^2)^{1/2}x, \pm 1 \mp \|x\|^2), \tag{1.12}$$

y la condición (1.11) se satisface para cada $x \in \mathbb{B}^n$.

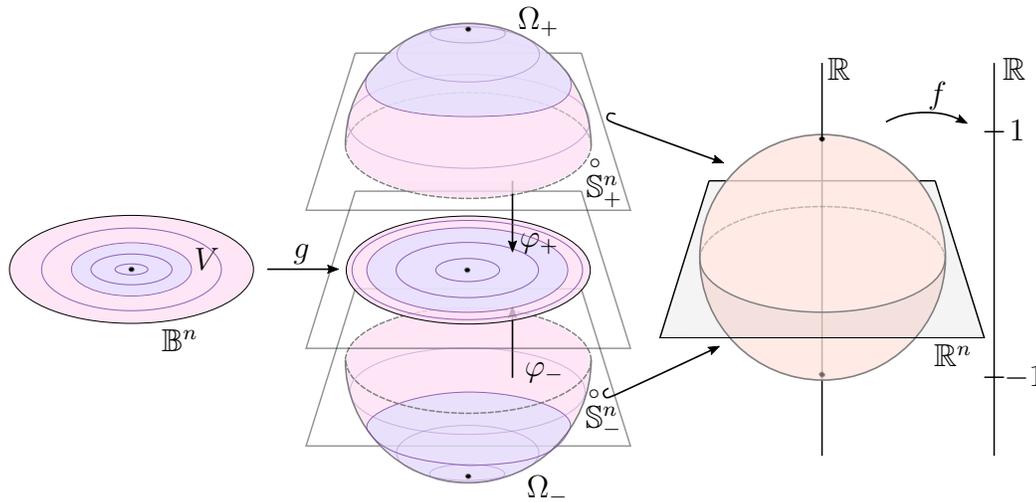


Figura 1.1: Cartas de Morse para la función altura en la esfera.

⁵Nótese que esta propiedad sobre los índices también es evidente en los signos de la diagonal de la matriz hessiana de $(f \circ \varphi_{\pm}^{-1})$ calculada en (1.4).

Ahora presentamos el resultado fundamental de existencia y genericidad de funciones de Morse (aplicable a variedades encajadas en un espacio euclidiano) adaptando la exposición en [1, secciones 1.2a-b] y [12, lema 6.3].

Teorema 1.1.8 (Existencia y genericidad de funciones de Morse). *Sea M una subvariedad del espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Entonces:*

I. *La función diferenciable*

$$f_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \|x - p\|^2 = \langle x - p, x - p \rangle$$

es una función de Morse para casi todo punto $p \in \mathbb{R}^n$.

II. *Toda función diferenciable puede ser aproximada (en un sentido C^1) por una función de Morse uniformemente en cualquier subconjunto compacto de M .*

Demostración. El teorema de Sard afirma que el conjunto de valores no regulares de una función diferenciable entre variedades suaves tiene medida cero [7, p.39]. Utilizaremos este resultado después de probar que el conjunto de puntos $p \in \mathbb{R}^n$ para los que f_p es una función de Morse coincide con el conjunto de valores regulares de una aplicación suave.

Sea m la dimensión de M y $\psi = (x_1, \dots, x_n)$ una parametrización de M alrededor de un punto genérico $q = \psi(0) \in M$. Denotamos por $u = (u_1, \dots, u_m)$ a las coordenadas del dominio de ψ de tal manera que el espacio tangente $T_{\psi(u)}M$ se puede identificar con el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n generado por los vectores $\frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u) = (\frac{\partial x_1}{\partial u_i}(u), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_i}(u)) \in \mathbb{R}^n$ para $i = 1, \dots, m$. Obtenemos los cálculos

$$\begin{cases} \frac{\partial f_p}{\partial u_i} &= \frac{\partial (f_p \circ \psi)}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \psi - p, \psi - p \rangle = \left\langle 2(\psi - p), \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 f_p}{\partial u_j \partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_j} \left\langle 2(\psi - p), \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_j}, \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right\rangle + 2 \left\langle \psi - p, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial u_i} \right\rangle. \end{cases} \quad (1.13)$$

En particular, destacamos que los elementos de la imagen de ψ que son puntos críticos de f_p son exactamente los puntos $\psi(u) \in M$ tales que

$$0 = \frac{\partial f_p}{\partial u_i}(u) = \left\langle \psi(u) - p, \frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u) \right\rangle, \quad i = 1, \dots, m,$$

es decir, los puntos $\psi(u)$ tales que $\psi(u) - p \perp T_{\psi(u)}M$. Como podemos cubrir a M con estas parametrizaciones genéricas ψ , los puntos críticos de f_p son los puntos $x \in M$ tales que $x - p \perp T_x M$.

Recordamos que el haz normal de M (respecto a \mathbb{R}^n) se puede definir como $NM = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_x M^\perp)$. Si $\{\omega_i(u) : 1 \leq i \leq n\}$ es una base ortonormal para $T_{\psi(u)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, tal que el conjunto $\{\omega_1(u), \dots, \omega_m(u)\}$ genera a $T_{\psi(u)}M$, entonces

$$\tilde{\psi}(\tilde{u}) = (x, y) = \left(\psi(u), \sum_{k=m+1}^n v_k \omega_k \right)$$

es una parametrización de NM alrededor de $(q, 0) = \tilde{\psi}(0, 0)$ con coordenadas $\tilde{u} = (u, v) = (u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Se define sobre NM la aplicación suave $E(x, y) = x - y$ que, bajo las coordenadas proporcionadas por $\tilde{\psi}$, cumple

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial u_j} = \frac{\partial(E \circ \tilde{\psi})}{\partial u_j} = \frac{\partial \psi}{\partial u_j} - \sum_{k=m+1}^n v_k \frac{\partial \omega_k}{\partial u_j}, & j = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial E}{\partial v_j} = \frac{\partial(E \circ \tilde{\psi})}{\partial v_j} = \frac{\partial \psi}{\partial v_j} - \sum_{k=m+1}^n \frac{\partial v_k}{\partial v_j} \omega_k = -\omega_j, & j = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

Observemos que la matriz con descomposición⁶

$$A(u) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial u_m}(u), \omega_{m+1}(u), \dots, \omega_n(u) \right)$$

es una matriz invertible pues $\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right\}$ es una base para $T_{\psi(u)}M$ y $\{\omega_i\}$ lo es para el complemento $T_{\psi(u)}M^\perp$. Además, multiplicando la matriz transpuesta de A por la matriz jacobiana de $E \circ \tilde{\psi}$, obtenemos

$$\begin{aligned} A^t \cdot (E \circ \tilde{\psi})' &= \left(\begin{array}{c|c} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle - \sum_{k=m+1}^n v_k \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \frac{\partial \omega_k}{\partial u_j} \right\rangle & -\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \omega_j \right\rangle \\ \hline * & -\langle \omega_i, \omega_j \rangle \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \right\rangle - \sum_{k=m+1}^n v_k \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \frac{\partial \omega_k}{\partial u_j} \right\rangle & 0 \\ \hline * & -I_{n-m} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la no singularidad de $A(u)$ para cualquier u en el dominio de ψ implica que $(x, y) = \tilde{\psi}(u, v) \in NM$ es un punto crítico de E si y sólo si la matriz de

⁶Consideramos aquí a los vectores $\frac{\partial \psi}{\partial u_i}$ y ω_i como vectores columna.

tamaño $m \times m$

$$B(u, v) = \left(\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u) \right\rangle - \sum_{k=m+1}^n v_k \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \omega_k}{\partial u_j}(u) \right\rangle \right)_{ij}$$

no tiene rango completo. Por otra parte, utilizando la ortogonalidad $\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right\} \perp \{ \omega_k \}$ y (1.13), podemos expresar los elementos de B como

$$\begin{aligned} B(u, v)_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u) \right\rangle + \sum_{k=m+1}^n v_k \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial u_i}(u), \omega_k(u) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_j \partial u_i}(u), v \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\psi(u)-v}}{\partial u_j \partial u_i}(u). \end{aligned}$$

Finalmente, recordamos que f_p no es una función de Morse cuando existe $q \in \text{Crit}(f_p)$ un punto crítico degenerado. Equivalentemente, la función f_p no es de Morse si y sólo si existe un punto $q \in M$ y una parametrización ψ alrededor de $q = \psi(0)$ tales que $q - p \in T_\psi M$ y la matriz hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j}(0) \right)_{ij} = 2B(0, q - p)_{ij}$$

no tiene rango completo, es decir, $p = q - (q - p) = E(q, q - p)$ es un valor crítico de E . Por el teorema de Sard, el conjunto

$$\{p \in \mathbb{R}^n : p \text{ es valor regular de } E\} = \{p \in \mathbb{R}^n : f_p \text{ es función de Morse}\}$$

es denso en \mathbb{R}^n .

Para probar la segunda parte del teorema tomemos una función diferenciable cualquiera $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ y el encaje $h : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dado por $h(x) = (g(x), x)$. Para un punto $r = (c, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ consideremos la función $f_r(y) = \|y - r\|^2$ de la primera parte. Entonces $f_r \circ h$ es una función de Morse siempre que f_r lo sea, pues h es un encaje. Obtenemos el cómputo de la composición

$$\begin{aligned} (f_r \circ h)(x) &= (c - g(x))^2 + \|x - p\|^2 \\ &= c^2 - 2cg(x) + g(x)^2 + \|x - p\|^2, \end{aligned}$$

con una aproximación

$$\frac{c^2 - (f_r \circ h)(x)}{2c} - g(x) = -\frac{1}{2c} (g(x)^2 + \|x - p\|^2).$$

Sea K un subconjunto compacto de M . Denotemos $R = \sup_{x \in K} \|x\|$ y $L = \sup_K |g| + \sup_K \|\text{grad } g\|$. Por la primera parte del teorema, podemos elegir $r = (c, p) \in \mathbb{R}^n$ con $c > 0$ arbitrariamente grande y $\|p\| < 1$ tal que f_r sea de Morse. Así la función aproximante $F_r(x) = \frac{c^2 - (f_r \circ h)(x)}{2c}$ es de Morse y se obtienen las cotas

$$\begin{aligned} \sup_K \|F_r - g\| &\leq \frac{1}{2c} (L^2 + (R + 1)^2), \\ \sup_K \|\text{grad}(F_r - g)\| &\leq \frac{1}{2c} (2L^2 + 2(R + 1)) = \frac{1}{c} (L^2 + R + 1). \end{aligned}$$

□

1.2. Campos pseudogradientes adaptados a una función de Morse

Hemos presentado las propiedades básicas del conjunto de puntos críticos de una función de Morse sobre una variedad compacta. Éste se utilizará en el capítulo 3 para construir el primer ingrediente del complejo de Morse (una sucesión de módulos). La obtención del segundo componente del complejo (morfismos entre módulos) exige proporcionar una estructura que relacione los puntos críticos de la función. Para esto utilizamos el flujo de un campo que une dichos puntos.

Definición 1.2.1 (Campo pseudogradiente adaptado). *Un campo pseudogradiente adaptado a una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo de vectores X en M que satisface:*

- I. $df_p(X_p) \leq 0$ para todo $p \in M$ y la igualdad se cumple si y sólo si $p \in \text{Crit}(f)$.
- II. Para cada $p \in \text{Crit}(f)$ existe un dominio de Morse Ω alrededor de p tal que $X_q = -(\text{grad } f)_q$ para cada $q \in \Omega$, donde el gradiente se obtiene a partir de la estructura riemanniana inducida en el dominio de Morse Ω por la carta de Morse correspondiente.

Observamos que la condición I. implica que la función f decrece a lo largo del flujo de X , pues si γ es una curva integral de X , entonces

$$\frac{\partial(f \circ \gamma)}{\partial t}(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = df_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) \leq 0.$$

1.2. CAMPOS PSEUDOGRADIENTES ADAPTADOS A UNA FUNCIÓN DE MORSE 15

Por facilidad nos referiremos en ocasiones a un campo de vectores que satisfaga las condiciones I. y II. simplemente como un *campo pseudogradiante*. Ahora proporcionamos el resultado fundamental sobre la existencia de estos campos (para el caso compacto) siguiendo el texto de Audin y Damian [1, sección 2.1.c].

Teorema 1.2.2 (Existencia de campos pseudogradientes adaptados). *Sea M una variedad compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Entonces existe un campo pseudogradiante adaptado a f .*

Demostración. Por el corolario 1.1.5, $\text{Crit}(f) = \{p_1, \dots, p_r\}$. Consideremos una colección de dominios de Morse $\{\Omega_{p_i} : 1 \leq i \leq r\}$ que cumple, tal como en la demostración del corolario 1.1.5, que cada vecindad Ω_{p_i} tiene un único punto crítico p_i . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los dominios de Morse no se intersecan. Para cada $p \notin \text{Crit}(f)$ consideremos Ω_p el dominio de un carta cualquiera φ_p alrededor de p tal que $\Omega_p \cap U = \emptyset$, para alguna vecindad U del conjunto finito $\text{Crit}(f)$. Sea $F = \{\Omega_i : 1 \leq i \leq r'\}$ una subcubierta finita de $\{\Omega_{p_i} : 1 \leq i \leq r\} \cup \{\Omega_p : p \notin \text{Crit}(f)\}$ tal que $\Omega_i = \Omega_{p_i}$ para $i = 1, \dots, r$.

Denotemos por φ_i a la carta con dominio Ω_i y definamos localmente los campos

$$X_p^i = -(d\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \left(\text{grad} (f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \right), \quad i = 1, \dots, r'.$$

Tomando una partición de la unidad $\{h_i : 1 \leq i \leq r'\}$ subordinada a la cubierta F , extendemos la definición de cada campo:

$$\tilde{X}_p^i = \begin{cases} h_i(p)X_p^i, & p \in \Omega_i, \\ 0, & p \notin \Omega_i. \end{cases}$$

Afirmamos que $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{r'} \tilde{X}^i$ es un campo pseudogradiante adaptado a f . En efecto, si $p \in \Omega_i$ entonces

$$\begin{aligned} df_p(X_p^i) &= -d(f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \left(\text{grad} (f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \right) \\ &= -\left\langle \text{grad} (f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}, \text{grad} (f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \right\rangle \\ &= -\left\| \text{grad} (f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} \right\|^2 \\ &\leq 0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

y la igualdad se cumple exactamente cuando $\varphi_i(p)$ es un punto crítico de $f \circ \varphi_i^{-1}$, es decir, cuando $p \in \text{Crit}(f)$. En general,

$$df_p(\tilde{X}_p) = \sum_{i: p \in \Omega_i} h_i(p)df_p(X_p^i) \leq 0.$$

Como $h_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, r'$, entonces la igualdad ocurre exactamente cuando cada término en la suma se anula. Asimismo la condición $\sum_{i=1}^{r'} h_i = 1$ implica que existe j tal que $p \in \Omega_j$ y $h_j(p) \neq 0$, de donde,

$$df_p(X_p^j) = 0.$$

Por la observación posterior a (1.14), la igualdad anterior implica que $p \in \text{Crit}(f)$.

Por otro lado, la construcción de la colección $\{\Omega_p : p \notin \text{Crit}(f)\}$ (disjunta dominio a dominio con una vecindad de $\text{Crit}(f)$) y la hipótesis de disjunción entre los dominios de Morse implican que alrededor de un punto crítico cualquiera p_i existe una vecindad donde el campo \tilde{X} coincide con el campo $X_q^i = -(d\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(q)}(\text{grad}(f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(q)}) = -(\text{grad } f)_q$. \square

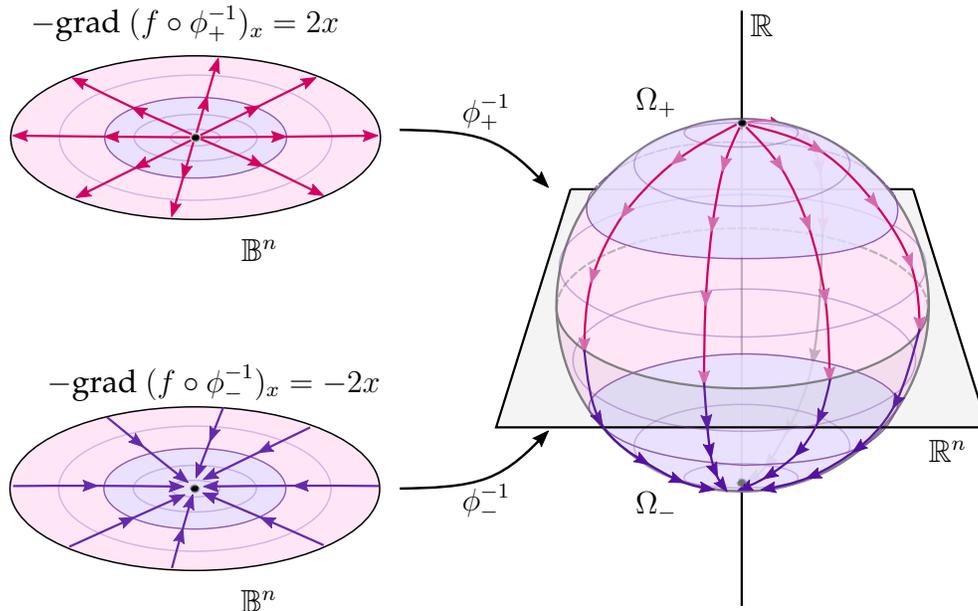


Figura 1.2: Trayectorias del campo pseudogradiante adaptado a la función altura en la esfera.

Ejemplo 1.2.3. A continuación construimos un campo pseudogradiante en \mathbb{S}^n adaptado a la función altura f a partir del ejemplo 1.1.7. Empleando las cartas de Morse ϕ_{\pm} de

1.2. CAMPOS PSEUDOGRADIENTES ADAPTADOS A UNA FUNCIÓN DE MORSE 17

dicho ejemplo y siguiendo la demostración del teorema 1.2.2, un campo pseudogradiante \tilde{X} adaptado a f debe coincidir con los campos

$$X_q^\pm = (d\phi_\pm^{-1})_{\phi_\pm(q)}(-\mathbf{grad}(f \circ \phi_\pm^{-1})_{\phi_\pm(q)}), \quad (1.15)$$

en unos subconjuntos abiertos de los dominios Ω_\pm alrededor de $(0, \dots, \pm 1)$, respectivamente. Desarrollamos la expresión (1.15) a partir de (1.11) y (1.12), tomando $x = \phi_\pm(q) \in \phi_\pm(\Omega_\pm) = V \subset \mathbb{B}^n$:

$$\begin{aligned} X_q^\pm &= (d\phi_\pm^{-1})_x(-\mathbf{grad}(f \circ \phi_\pm)_x) = (d\phi_\pm^{-1})_x(\pm 2x) = \pm 2(\phi_\pm^{-1})'(x) \cdot x \\ &= \pm 2 \begin{pmatrix} g'(x) \\ \mathbf{grad}(f \circ \phi_\pm)_x \end{pmatrix} \cdot x = \pm 2 \begin{pmatrix} (2 - \|x\|^2)^{1/2} I_n - \left(\frac{x_i x_j}{(2 - \|x\|^2)^{1/2}} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ \mp 2x \end{pmatrix} \cdot x \\ &= \pm 2 \begin{pmatrix} (2 - \|x\|^2)^{1/2} x - \frac{\|x\|^2}{(2 - \|x\|^2)^{1/2}} x \\ \mp 2\|x\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \pm 2 \begin{pmatrix} \frac{2(1 - \|x\|^2)}{(2 - \|x\|^2)^{1/2}} x \\ \mp 2\|x\|^2 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} \pm \frac{1 - \|x\|^2}{(2 - \|x\|^2)^{1/2}} x \\ -\|x\|^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

Notamos que la definición anterior de los campos X^\pm puede extenderse para cualquier $x \in \mathring{\mathbb{B}}^n$, esto es, para cualquier $q = \phi_\pm(x) \in \phi_\pm^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^n) = \mathring{\mathbb{S}}_\pm^n$. En este caso la densidad de $\mathring{\mathbb{S}}_+^n \cup \mathring{\mathbb{S}}_-^n$ nos permite dar una definición global del campo \tilde{X} prescindiendo de la partición de la unidad:

$$\tilde{X}_q = 4 \begin{pmatrix} \pm \frac{1 - \|x\|^2}{(2 - \|x\|^2)^{1/2}} x \\ -\|x\|^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad q = \phi_\pm^{-1}(x) \in \phi_\pm^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^n).$$

Por el lema de Morse y por la propiedad local II. en la definición 1.2.1, para comprender cómo se comporta el flujo del campo alrededor de un punto crítico basta entender la naturaleza del gradiente negativo de una aplicación $q(x) = q(0) - \langle x_-, x_- \rangle + \langle x_+, x_+ \rangle$ en una vecindad del origen, donde $x = (x_-, x_+) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. En este caso, el flujo del gradiente negativo $X_x = -(\text{grad } q)_x = -2(-x_-, x_+) = 2(x_-, -x_+)$ satisface

$$\varphi^t(x) = \varphi^t(x_-, x_+) = (x_- e^{2t}, x_+ e^{-2t}). \quad (1.16)$$

Las trayectorias de este flujo constituyen una familia de hipérbolas ortogonales a los conjuntos de nivel $N_c = q^{-1}(q(0) + c) = \{(x_-, x_+) \in \mathbb{R}^n : \|x_+\|^2 = c + \|x_-\|^2\}$. Asimismo, la forma del flujo permite definir un tipo particular de dominios de Morse adaptados al flujo del campo pseudogradiante. Siguiendo la notación empleada por Latour [9, capítulo 2] y empleada en [1], consideraremos

$$U(\epsilon, \eta) = \{(x_-, x_+) \in \mathbb{R}^n : |q(x_-, x_+) - q(0)| < \epsilon, \|x_-\|^2 \|x_+\|^2 < \eta(\epsilon + \eta)\}, \quad \epsilon, \eta > 0,$$

y los subconjuntos de la frontera

$$\begin{aligned} \partial_+ U(\epsilon, \eta) &= \{(x_-, x_+) \in \mathbb{R}^n : q(x_-, x_+) - q(0) = +\epsilon, \|x_-\|^2 \leq \eta\}, \\ \partial_- U(\epsilon, \eta) &= \{(x_-, x_+) \in \mathbb{R}^n : q(x_-, x_+) - q(0) = -\epsilon, \|x_+\|^2 \leq \eta\}. \end{aligned}$$

Resaltamos que toda imagen de un dominio de Morse Ω , bajo la carta de Morse correspondiente φ , contiene un abierto $U(\epsilon, \eta)$ para ϵ, η suficientemente pequeños y, por lo tanto, podemos suponer que trabajamos con dominios de Morse cuyas imágenes coinciden con vecindades de esta forma. Precisamos esta situación en la siguiente definición.

Definición 1.2.4 (Dominio de Morse adaptado). *Un dominio de Morse adaptado es un dominio de Morse Ω que es la preimagen bajo la carta de Morse correspondiente φ de un conjunto de la forma $U(\epsilon, \eta)$. Además denotamos*

$$\partial_{\pm} \Omega = \varphi^{-1}(\partial_{\pm} U(\epsilon, \eta)).$$

El siguiente resultado muestra que en una variedad compacta todo punto pertenece a una trayectoria del campo pseudogradiante que eventualmente se acerca a un punto crítico.

Proposición 1.2.5. *Si M es una variedad compacta, X un campo pseudogradiante adaptado a una función de Morse f definida en M y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva integral de X , entonces existen $a, b \in \text{Crit}(f)$ tales que*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = a \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = b.$$

1.2. CAMPOS PSEUDOGRADIENTES ADAPTADOS A UNA FUNCIÓN DE MORSE 19

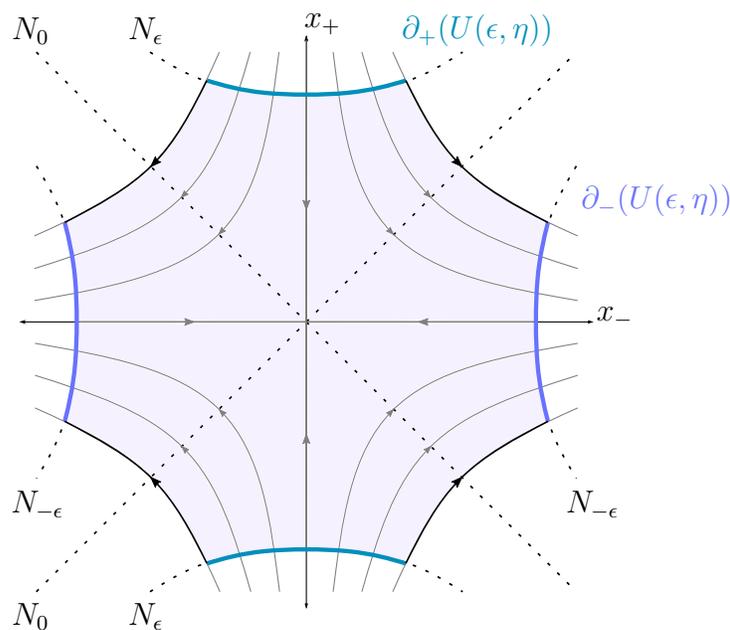


Figura 1.3: Vecindad $U(\epsilon, \eta)$ y flujo de un campo pseudogradiiente.

Demostración. Comenzamos mencionando que la compacidad de M implica que el campo de vectores es completo, es decir, tiene un flujo definido en el conjunto \mathbb{R} [10, corolario 9.17]. Por la forma de dicho flujo (bajo una carta de Morse) en (1.16), para probar la primera relación basta demostrar que existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y una carta de Morse $\varphi_a : \Omega_a \rightarrow \mathbb{R}^n$ alrededor de algún punto crítico a tal que $\gamma(t_0) \in \Omega_a$ y $(\varphi_a \circ \gamma)(t_0) = (x_-, 0)$. En tal caso, se cumplirá

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\varphi_a^{-1} \circ \varphi_a \circ \gamma)(t) = \varphi_a^{-1}(\lim_{t \rightarrow -\infty} (x_- e^{2(t-t_0)}, 0)) = \varphi_a^{-1}(0, 0) = a.$$

Supongamos que esta condición no se satisface. Afirmamos que existe un valor $T < 0$ y una vecindad abierta Ω de $\text{Crit}(f)$ tal que $\gamma(t) \notin \Omega$ para cada $t \leq T$. En efecto, si $\gamma(t_0) \in \Omega_c$ para algún dominio de Morse Ω_c correspondiente a una carta de Morse φ_c , entonces se cumple

$$(\varphi_c \circ \gamma)(t) = (x_- e^{2(t-t_0)}, x_+ e^{-2(t-t_0)}), \quad x_+ \neq 0, \quad (1.17)$$

en una vecindad de $t_0 \in \mathbb{R}$. Podemos suponer en tal caso que $\varphi_c(\Omega_c) = U(\epsilon, \eta)$ para algunos $\epsilon, \eta > 0$ y $q = f \circ \varphi_c$. El límite cuando $t \rightarrow -\infty$ de la expresión en la

segunda coordenada de (1.17) es divergente. Así la trayectoria de γ proviene del exterior de $\Omega_c = \varphi_c^{-1}(U(\epsilon, \eta))$ dado que $U(\epsilon, \eta)$ es una vecindad acotada. Por otro lado, observamos que la definición del abierto $U(\epsilon, \eta)$ adaptado a los conjuntos de nivel y las trayectorias implica que $\gamma^{-1}(\Omega_c) \subset (f \circ \gamma)^{-1}(f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon)$. Más aún, la igualdad de estos conjuntos ocurre debido a que f decrece a lo largo del flujo. De hecho, este conjunto es un intervalo abierto

$$\gamma^{-1}(\Omega_c) = (f \circ \gamma)^{-1}(f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon) = (t^+, t^-),$$

donde $(f \circ \gamma)(t^\pm) = f(c) \pm \epsilon$. Como $\text{Crit}(f)$ es finito, podemos hacer este análisis una cantidad finita de veces y obtener un número $T < 0$ tal que $\gamma(t) \notin \Omega = \bigcup_{c \in \text{Crit}(f)} \Omega_c$ para cada $t \leq T$. Como $M - \Omega$ es un conjunto compacto, entonces $\delta = \sup\{df_p(X_p) : p \in M - \Omega\} < 0$. Luego para cada $t \leq T$ obtenemos

$$(f \circ \gamma)(T) - (f \circ \gamma)(t) = \int_t^T \frac{d(f \circ \gamma)}{ds} ds = \int_t^T df_{\gamma(s)}(X_{\gamma(s)}) ds \leq \delta(T - t).$$

De donde,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (f \circ \gamma)(t) \geq \lim_{t \rightarrow -\infty} (f \circ \gamma)(T) - \delta(T - t) = +\infty,$$

lo cual es una contradicción pues la función f es acotada en la variedad compacta M . De manera análoga se prueba que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$ es un punto crítico. \square

Terminamos esta sección presentando las variedades estables e inestables, que serán fundamentales para proporcionar la última condición necesaria en la construcción del complejo de Morse.

Definición 1.2.6 (Variedades estables e inestables). *Sea p un punto crítico de una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y X un campo pseudogradiante adaptado a f . La variedad estable de X en p se define como el conjunto*

$$W_X^s(p) = \{q \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(q) = p\}.$$

La variedad inestable de X en p como

$$W_X^u(p) = \{q \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(q) = p\},$$

donde φ es el flujo de X . Cuando no haya confusión, denotaremos a estos conjuntos por $W^s(p)$ y $W^u(p)$, respectivamente.

Por la forma (1.17) del flujo en un dominio de Morse Ω alrededor de un punto crítico p , se cumple que

$$\dim(\Omega \cap W^s(p)) = \dim(M) - \text{Ind}(p) \quad \& \quad \dim(\Omega \cap W^u(p)) = \text{Ind}(p).$$

En general tenemos el siguiente resultado. La prueba de este hecho se encuentra en el texto de Audin y Damian [1, proposición 2.1.5.].

Proposición 1.2.7. *Las variedades estable e inestable de un campo pseudogradiante X adaptado a una función de Morse f en un punto p son subvariedades de M . Además se cumple*

$$\dim(W^u(a)) = \text{codim}(W^s(a)) = \text{Ind}(a)$$

para cada $a \in \text{Crit}(f)$.

1.3. La condición de Smale

Para concluir la exposición de los conceptos empleados en la construcción del complejo de Morse, debemos establecer una condición que garantice la trivialidad de la doble composición de la diferencial del complejo. Este hecho estará garantizado por la transversalidad entre variedades estables e inestables.

Definición 1.3.1 (Condición de Smale). *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y X un campo pseudogradiante adaptado a f . El campo X satisface la condición de Smale si todas las variedades estables e inestables se intersecan transversalmente, es decir,*

$$W^u(p) \pitchfork W^s(q)$$

para cualesquiera $p, q \in \text{Crit}(f)$. En tal caso, decimos que (f, X) es un par de Morse-Smale (definido en M).

Ejemplo 1.3.2. *Consideramos el caso del toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ generado por la revolución de una circunferencia alrededor del subespacio vectorial generado por $e_1 = (1, 0, 0)$. La función altura $f(x, y, z) = z$ restringida al toro \mathbb{T}^2 , posee cuatro puntos críticos (en orden descendiente) a, b, c, d con índices 2, 1, 1 y 0, respectivamente. Además, la función induce un campo gradiente X que no satisface la condición de Smale, pues los dos puntos críticos b y c de índice 1 tales que $f(b) > f(c)$ poseen variedades inestable y estable, respectivamente, que no se intersecan transversalmente. De hecho, en este caso $W^u(b) = W^s(c)$, con $\dim(W^u(b)) = 1 < 2 = \dim(\mathbb{T}^2)$.*

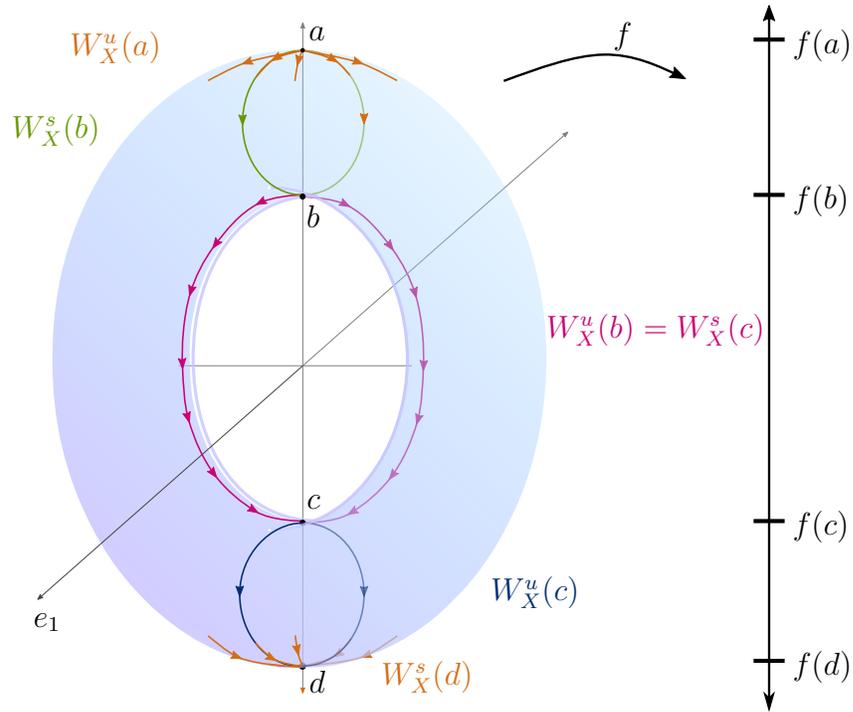


Figura 1.4: Función altura en el toro y campo pseudogradiiente adaptado X que no satisface la condición de Smale.

Recordamos que una implicación capital de la transversalidad entre dos subvariedades $N, P \subset M$ consiste en la realización de la intersección $N \cap P$ como una subvariedad de M que satisface $\text{codim}(N \cap P) = \text{codim}(N) + \text{codim}(P)$ o, equivalentemente, $\text{dim}(N \cap P) = \text{dim}(N) + \text{dim}(P) - \text{dim}(M)$ [7, p. 30].

Observamos que si (f, X) es un par de Morse-Smale y $p, q \in \text{Crit}(f)$ son puntos distintos que cumplen que $W^u(p) \cap W^s(q)$ es no vacío, entonces existe $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$ y se satisface

$$f(p) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(\varphi^t(x)) > \lim_{t \rightarrow +\infty} f(\varphi^t(x)) = f(q),$$

pues f decrece a lo largo de las curvas integrales de X y $p \neq q$. Además, como $t \mapsto \varphi^t(x)$ es una curva integral no trivial, entonces $x \notin \text{Crit}(f)$ y, por lo tanto,

$$0 \neq X_x = \frac{\partial \varphi^t(x)}{\partial t}(0) \in T_x(W^u(p) \cap W^s(q)).$$

Concluimos que si $W^u(p) \cap W^s(q)$ es no vacío y $p \neq q$, entonces

$$\begin{aligned} 0 < \dim(W^u(p) \cap W^s(q)) &= \dim(W^u(p)) + \dim(W^s(q)) - \dim(M) \\ &= \text{Ind}(p) + (\dim(M) - \text{Ind}(q)) - \dim(M) \\ &= \text{Ind}(p) - \text{Ind}(q). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Por lo tanto, para verificar la condición de Smale en un campo pseudogradien-
te X , basta demostrar la transversalidad $W^u(p) \pitchfork W^s(q)$ para el caso $\text{Ind}(p) > \text{Ind}(q)$. Más aún, ofrecemos un hecho que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Proposición 1.3.3. *Sean (f, X) un par de Morse-Smale en M , p, q puntos críticos que satisfacen $\text{Ind}(p) > \text{Ind}(q)$ y $\alpha \in (f(q), f(p)) \subset \mathbb{R}$ un valor regular. Entonces $W^u(p) \cap W^s(q)$ es transversal a $f^{-1}(\alpha)$ y la subvariedad $(W^u(p) \cap W^s(q)) \cap f^{-1}(\alpha)$ tiene dimensión $\text{Ind}(p) - \text{Ind}(q) - 1 \geq 0$.*

Demostración. Si $x \in W^u(p) \cap W^s(q) \cap f^{-1}(\alpha)$ entonces X_x es un elemento no trivial de $T_x(W^u(p) \cap W^s(q))$ tal que $X_x \notin \text{Ker}(df_x) = T_x(f^{-1}(\alpha))$. Por lo tanto, el cálculo

$$\dim(T_x(W^u(p) \cap W^s(q)) + T_x(f^{-1}(\alpha))) \geq 1 + (\dim(M) - 1) = \dim(M)$$

implica la transversalidad $(W^u(p) \cap W^s(q)) \pitchfork f^{-1}(\alpha)$. Luego, la intersección $(W^u(p) \cap W^s(q)) \cap f^{-1}(\alpha)$ es una subvariedad de M de dimensión

$$\begin{aligned} \dim((W^u(p) \cap W^s(q)) \cap f^{-1}(\alpha)) &= \dim(W^u(p) \cap W^s(q)) + \dim(f^{-1}(\alpha)) - \dim(M) \\ &= \text{Ind}(p) - \text{Ind}(q) + (\dim(M) - 1) - \dim(M) \\ &= \text{Ind}(p) - \text{Ind}(q) - 1. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema muestra que podemos sustituir un campo pseudogradien-
te cualquiera por uno que satisfaga la condición de Smale. El resultado fue
originalmente probado por Smale en [16]. Exponemos la versión presentada por
Audin y Damian [1, teorema 2.2.5].

Teorema 1.3.4 (Teorema de Smale). *Sea M una variedad compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con valores críticos no repetidos⁷ $\alpha_1 > \dots > \alpha_r$. Sea X un campo pseudogradien-
te adaptado a f cuyo flujo es transversal a la frontera ∂M . Entonces existe
un campo X' tal que:*

⁷Es decir, f restringida a $\text{Crit}(f)$ es inyectiva.

- I. (f, X') es un par de Morse-Smale.
- II. $X' = X$ en una vecindad de $\text{Crit}(f)$.
- III. X' es una aproximación de X .

Para probar el teorema 1.3.4 y aclarar la noción de proximidad que consideramos en III., basta considerar el siguiente resultado⁸. Una prueba detallada de esta proposición puede encontrarse en [1, lema 2.2.8]. Aquí probamos que el campo modificado X' de la proposición 1.3.5 es un campo pseudogradiante adaptado a la función de Morse.

Proposición 1.3.5. *Sea X un campo pseudogradiante (cuyo flujo es transversal a ∂M) adaptado a una función de Morse f definida sobre una variedad suave compacta M con valores críticos no repetidos $\alpha_1 > \dots > \alpha_r$. Si $\delta > 0$ satisface*

$$\alpha_{i+1} + 2\delta < \alpha_i, \quad i = 1, \dots, r-1,$$

entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un campo de vectores X' tal que

- I. $X' = X$ en el complemento del subconjunto compacto $K = \bigcup_{i=1}^r f^{-1}[\alpha_i + \delta, \alpha_i + 2\delta]$.
- II. $\sup \|X - X'\| = \sup_K \|X - X'\| < \epsilon$.
- III. $W^u(p_i) \pitchfork W^s(p_j)$, $i, j = 1, \dots, r$. □

En efecto, dado este resultado, resta demostrar que el campo X' de la proposición 1.3.5 sigue siendo un campo pseudogradiante adaptado a f . Sea Ω_i un dominio de Morse alrededor del punto crítico p_i con valor crítico $\alpha_i = f(p_i)$. Consideremos dichos dominios de tal manera que $\Omega_i \subset M - K$. Tomemos $\tau > 0$ tal que

$$-\tau = \sup_{p \in M - \Omega} df_p(X_p) < 0,$$

con $\Omega = \bigcup_{i=1}^r \Omega_i$. Aplicando la proposición 1.3.5 al número

$$\epsilon = \frac{\tau}{1 + \sup_K \|\text{grad } f\|} > 0,$$

⁸La norma utilizada en la proposición 1.3.5 es la norma inducida por alguna estructura riemanniana definida sobre la variedad compacta, que se puede encajar en un espacio euclidiano.

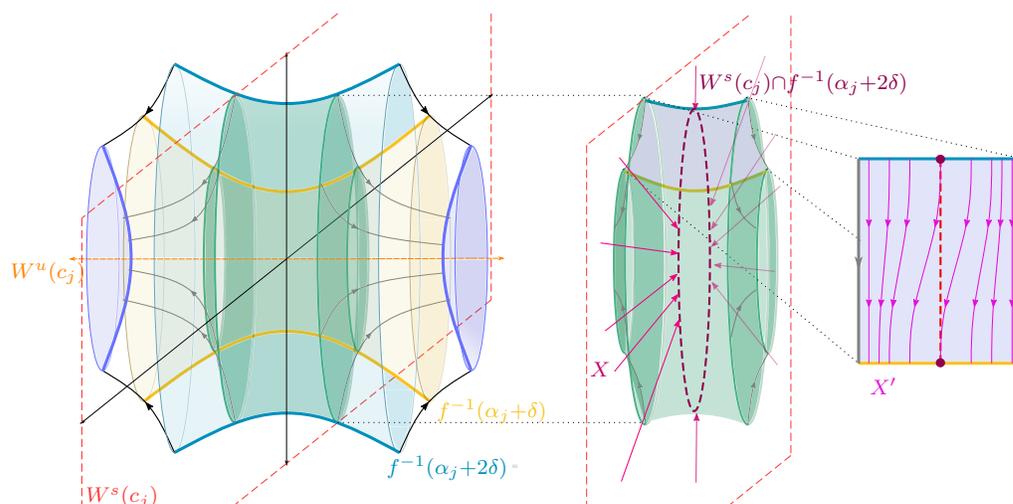


Figura 1.5: Campo modificado X' en una vecindad de Morse del punto crítico c_j a partir del campo X .

obtenemos

$$\begin{aligned}
 df_p(X') &< |df_p(X' - X)| - \tau = |\langle (\text{grad } f)_p, (X' - X)_p \rangle| - \tau \\
 &\leq \|(\text{grad } f)_p\| \cdot \|(X - X')_p\| - \tau \\
 &\leq \|(\text{grad } f)_p\| \cdot \epsilon - \tau \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

para cada $p \in K$. Como $X' = X$ en la vecindad abierta $M - K$ de $\text{Crit}(f)$ y X es un campo pseudogradiiente adaptado a f , entonces en general

$$df_p(X'_p) \leq 0$$

para cada $p \in M$ y la igualdad se cumple exactamente en $\text{Crit}(f)$. Por lo tanto, X' es un campo pseudogradiiente adaptado a f que satisface la condición de Smale.

Recalamos que el teorema 1.3.4 retiene amplia generalidad, pues toda función de Morse puede ser reemplazada por una función de Morse con valores críticos no repetidos arbitrariamente cercana (en sentido C^1), como comentan Audin y Damian [1, sección 2.2.c]. Concluimos este capítulo con una aplicación directa de esta observación en conjunción con los teoremas 1.1.8, 1.2.2 y 1.3.4.

Corolario 1.3.6. *Sea M una variedad compacta. Entonces existe un par de Morse-Smale (f, X) definido en M .* \square

Capítulo 2

El espacio de ligaduras

En este capítulo presentamos y estudiamos el conjunto de ligaduras (trayectorias quebradas) entre dos puntos críticos de la variedad, estructura necesaria para la definición de la diferencial del complejo de Morse. A lo largo de este capítulo utilizaremos una variedad compacta M provista de un par de Morse-Smale (f, X) y un flujo φ asociado al campo X .

2.1. El espacio de trayectorias

En estas dos primeras secciones consideraremos dos puntos críticos p y q tales que $\text{Ind}(p) > \text{Ind}(q)$ y $f(p) > f(q)$ ¹. La intersección $W_X^u(p) \cap W_X^s(q)$ es una subvariedad conformada por todos los puntos de la variedad que se encuentran sobre alguna curva integral de X que une p con q . Para referirse de manera sintética a este conjunto proporcionamos la siguiente definición.

Definición 2.1.1 (Espacio de puntos intermedios). *Sean p y q puntos críticos de f . Llamamos espacio de puntos intermedios (de p y q) a la variedad*

$$\mathcal{I}_X(p, q) = W_X^u(p) \cap W_X^s(q) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = p \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = q\}.$$

La observación fundamental que hacemos sobre este espacio es que, aunque tiene la topología inducida por las variedades estable e inestable, podemos descomponerlo topológicamente como un producto particularmente útil empleando la compacidad de la variedad M .

¹En realidad, para estudiar las trayectorias nos interesa únicamente el caso en que se cumple la condición $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ para $p \neq q$.

Lema 2.1.2. *Sea $\alpha \in (f(q), f(p))$ un valor regular de f . Entonces*

$$\mathcal{I}_X(p, q) \approx (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R}.$$

Demostración. La proposición 1.3.3 asegura la transversalidad $\mathcal{I}_X(p, q) \pitchfork f^{-1}(\alpha)$ y que $\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)$ es una subvariedad (con dimensión $\dim(\mathcal{I}_X(p, q)) - 1$). Definimos la aplicación del producto topológico al espacio de puntos intermedios

$$\hat{\varphi} : (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{I}_X(p, q),$$

como la restricción del flujo $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$. Recordamos que la definición del flujo en \mathbb{R} es posible por la compacidad de M [10, corolario 9.17]. Recalcamos que cada punto en $\mathcal{I}_X(p, q)$ está unido a exactamente un punto del conjunto de nivel $f^{-1}(\alpha)$ por una trayectoria del campo. Por la inyectividad de las trayectorias (f es decreciente a lo largo del flujo), deducimos que $\hat{\varphi}$ es una biyección.

Demostraremos ahora que $\hat{\varphi}$ es una función abierta. Sean $U \times (a, b) \subset (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R}$ un abierto básico y $y = \hat{\varphi}(x, s) \in \hat{\varphi}(U \times (a, b))$. Entonces $U = V \cap (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha))$ para algún abierto V de M alrededor de x . El resultado será consecuencia de la existencia de una base de vecindades de caja² (abiertas) de x en M de la forma

$$W_x^\epsilon = \varphi(W \times (-\epsilon, \epsilon)) = \{\varphi^t(y) : y \in W \quad \& \quad -\epsilon < t < \epsilon\},$$

donde W es una vecindad (abierto) de x en la subvariedad $f^{-1}(\alpha)$ y $\epsilon > 0$. Tomamos $0 < \epsilon < \min\{b - s, s - a\}$ y $W \subset V \cap f^{-1}(\alpha)$. Como $\varphi^s : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo, en particular es una aplicación abierta y por lo tanto $\varphi^s(W_x^\epsilon) = \varphi^s(\varphi(W \times (-\epsilon, \epsilon))) = \varphi(W \times (s - \epsilon, s + \epsilon))$ es un conjunto abierto en M tal que $y = \varphi(x, s) \in \varphi^s(W_x^\epsilon)$. La invariancia de $\mathcal{I}_X(p, q)$ bajo el flujo implica

$$\begin{aligned} \varphi^s(W_x^\epsilon) \cap \mathcal{I}_X(p, q) &\subset \varphi((V \cap f^{-1}(\alpha)) \times (a, b)) \cap \mathcal{I}_X(p, q) \\ &= \varphi(U \times (a, b)) = \hat{\varphi}(U \times (a, b)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos una vecindad abierta $\varphi^s(W_x^\epsilon) \cap \mathcal{I}_X(p, q)$ de y en $\mathcal{I}_X(p, q)$ contenida en $\hat{\varphi}(U \times (a, b))$. Concluimos que $\hat{\varphi}$ es un homeomorfismo. \square

Notamos que el cociente $\mathcal{I}_X(p, q)/\mathbb{R}$ inducido por la acción del grupo \mathbb{R} en $\mathcal{I}_X(p, q)$ dada por

$$r \cdot x = \varphi^r(x), \quad r \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

²Este tipo de vecindades son utilizadas por Audin y Damian, por ejemplo, para probar la existencia de pares de Morse-Smale [1, teorema 2.2.8].

representa de manera natural al conjunto de trayectorias de X que unen p con q , pues las curvas integrales en $\mathcal{I}_X(p, q)$ son exactamente las órbitas de esta acción. Esta cualidad motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.3 (Espacio de trayectorias). *El espacio de trayectorias entre los puntos críticos p y q es el cociente*

$$\mathcal{L}_X(p, q) = \mathcal{I}_X(p, q)/\mathbb{R} = (W_X^u(p) \cap W_X^s(q))/\mathbb{R},$$

bajo la acción (2.1).

En la siguiente proposición ofrecemos una manera de identificar a este espacio con una subvariedad de M .

Proposición 2.1.4. *Sea $\alpha \in (f(q), f(p))$ un valor regular de f . Entonces*

$$\mathcal{L}_X(p, q) \approx \mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha).$$

Demostración. El lema 2.1.2 proporciona un homeomorfismo

$$\hat{\varphi} : (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{I}_X(p, q).$$

Sea $\pi : \mathcal{I}_X(p, q) \longrightarrow \mathcal{I}_X(p, q)/\mathbb{R} = \mathcal{L}_X(p, q)$ la proyección inducida por el cociente y $\pi_1 : (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha))$ la proyección del producto al primer factor. Notamos que π es una aplicación de identificación³ por construcción de la topología del cociente y π_1 lo es por ser una función suprayectiva y abierta [13, teorema IV.2.34]. Además $\hat{\varphi}$ pone en correspondencia las fibras de π_1 con las órbitas de $\mathcal{I}_X(p, q)$. Luego, $\pi \circ \hat{\varphi}$ y π_1 son dos aplicaciones de identificación compatibles. Concluimos que la aplicación $\pi \circ \hat{\varphi}$ pasa al cociente como un homeomorfismo⁴ entre $\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)$ y $\mathcal{L}_X(p, q)$ que asigna a cada $x \in \mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)$ la trayectoria del campo que pasa por x (representada por $\pi(x)$):

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R} & \xrightarrow[\approx]{\hat{\varphi}} & \mathcal{I}_X(p, q) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ \mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha) & \xrightarrow[\approx]{\quad\quad\quad} & \mathcal{L}_X(p, q) \end{array}$$

□

³Una función suprayectiva $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ entre espacios topológicos es una identificación, o aplicación de identificación, si Y tiene la topología inducida por X a través de f , esto es, $\tau_2 = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \tau_1\}$.

⁴Para ello se utiliza la Propiedad universal de las identificaciones [13, teorema IV.2.22].

Resaltamos que los homeomorfismos exhibidos en las proposiciones 2.1.2 y 2.1.4 no dependen del valor regular α .

La construcción del complejo se basa en la posibilidad de contar las trayectorias (los elementos de $\mathcal{L}_X(p, q)$) entre dos puntos de índice consecutivo. En dicho caso, $\mathcal{I}_X(p, q)$ es una 1-variedad y $\mathcal{L}_X(p, q) \approx \mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)$ es un espacio discreto (tiene dimensión 0).

2.2. El espacio de ligaduras

Expondremos ahora un espacio que generaliza el concepto de trayectoria e incluye a las trayectorias quebradas que unen más de dos puntos críticos.

Definición 2.2.1 (Espacio de ligaduras). *Sean p, q dos puntos críticos tales que $f(p) > f(q)$. El espacio de ligaduras entre los puntos críticos p y q se define como la unión disjunta*

$$\bar{\mathcal{L}}_X(p, q) = \bigcup_{(c_0, \dots, c_m) \in C_{p,q}} \prod_{i=1}^m \mathcal{L}_X(c_i, c_{i+1}),$$

donde $C_{p,q}$ es el conjunto de tuplas de la forma (c_0, \dots, c_m) , para algún $m > 0$, tales que $p = c_0, \dots, c_m = q \in \text{Crit}(f)$, $\text{Ind}(c_i) > \text{Ind}(c_{i+1})$ y $f(c_i) > f(c_{i+1})$ para $i = 0, \dots, m-1$.

Llamaremos a cada elemento del conjunto $\bar{\mathcal{L}}_X(p, q)$ una ligadura entre p y q . Asimismo, cada ligadura de la forma $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m)$ con al menos dos elementos en la tupla ($m \geq 2$) será denominada una trayectoria quebrada entre p y q .

Ejemplo 2.2.2. *Consideramos el caso del toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ y la función altura f del ejemplo 1.3.2. Después de realizar una modificación del campo como en la proposición 1.3.5, se obtiene un campo X que satisface la condición de Smale ilustrado en la Figura 2.1.*

Esta variedad compacta, con esta función de Morse, tiene exactamente un punto crítico a de índice 2, dos puntos críticos b y c de índice 1 y un punto crítico d de índice 0. Por lo tanto, obtenemos un espacio de ligaduras entre los puntos extremos a y d dado por

$$\bar{\mathcal{L}}_X(a, d) = \mathcal{L}_X(a, d) \cup (\mathcal{L}_X(a, b) \times \mathcal{L}_X(b, d)) \cup (\mathcal{L}_X(a, c) \times \mathcal{L}_X(c, d)).$$

Un elemento del primer sumando es cualquier trayectoria del campo que una a con d . Un miembro del segundo sumando es la ligadura (trayectoria quebrada) (ℓ_1, ℓ_2) donde ℓ_1 une a con b y ℓ_2 une b con d .

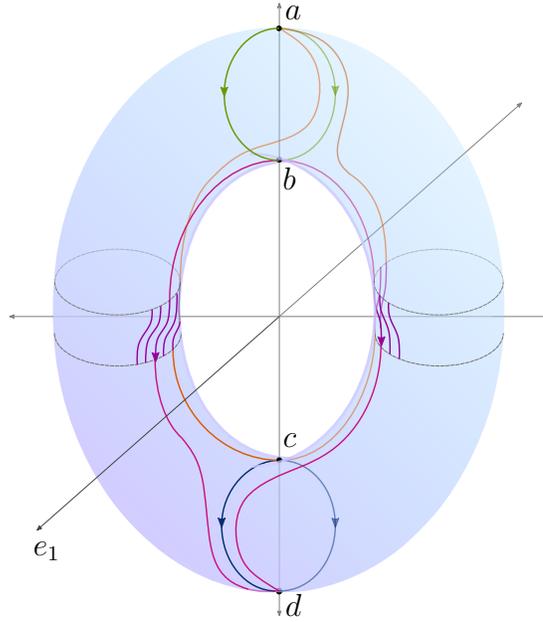


Figura 2.1: Trayectorias del campo modificado X en \mathbb{T}^2 .

Tal como pone de relieve el ejemplo anterior, cuando $\text{Ind}(p) = \text{Ind}(q) + 2$ la estructura de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ puede entenderse en dos partes disjuntas:

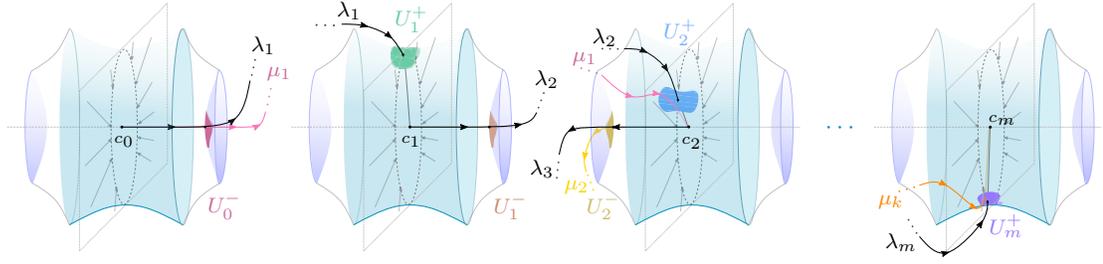
$$\overline{\mathcal{L}}_X(p, q) = \mathcal{L}_X(p, q) \cup \left(\bigcup_{\text{Ind}(c)=\text{Ind}(p)-1} \mathcal{L}_X(p, c) \times \mathcal{L}_X(c, q) \right). \quad (2.2)$$

Cuando $\text{Ind}(p) = \text{Ind}(q) + 1$ tenemos simplemente $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q) = \mathcal{L}_X(p, q)$.

Para estudiar el espacio de ligaduras, definiremos en él una topología siguiendo a Audin y Damian [1], que adaptan el trabajo de Latour [9, capítulo 2].

Definición 2.2.3 (Topología del espacio de ligaduras). Sea $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathcal{L}_X(c_0, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}_X(c_{m-1}, c_m) \subset \overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ una ligadura entre p y q . Sean Ω_i dominios de Morse adaptados alrededor de cada punto crítico c_i . Definimos para cada $i = 1, \dots, m$ el punto λ_{i-1}^- como la intersección de λ_i con $\partial_- \Omega_{i-1}$ y el punto λ_i^+ como la intersección de λ_i con $\partial_+ \Omega_i$. Sea U_i^\pm una vecindad del punto λ_i^\pm en $\partial_\pm \Omega_i$ (contenido en el subconjunto de nivel correspondiente a $\partial_\pm \Omega_i$). Denotamos las colecciones de vecindades obtenidas por

$$\mathbf{U}^+ = (U_1^+, \dots, U_m^+), \quad \mathbf{U}^- = (U_0^-, \dots, U_{m-1}^-),$$

Figura 2.2: Vecindad de una ligadura λ .

y llamaremos a $(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ un par de colecciones de vecindades asociado a λ .

Definimos la vecindad de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ en $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ inducida por el par $(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ como el conjunto $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ cuyos elementos son las ligaduras $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ para las que existe una sucesión de índices $1 = i_0 < \dots < i_k = m$ tal que

- I. $\mu_j \in \mathcal{L}_X(c_{i_{j-1}}, c_{i_j})$,
- II. μ_j interseca a las fronteras $\partial\Omega_{i_{j-1}}$ y $\partial\Omega_{i_j}$ dentro de las vecindades $U_{i_{j-1}}^-$ y $U_{i_j}^+$, respectivamente,

para cada $j = 1, \dots, k$. La topología de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ es la topología inducida por la base de vecindades formada por los conjuntos de la forma $\mathcal{W}(\lambda, \mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ donde $\lambda \in \overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ y $(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ es un par de colecciones de vecindades asociado a λ .

Enfatizamos que la condición $k \leq m$ (necesaria en la definición) implica que las ligaduras cercanas a λ tienen a lo más la misma cantidad de quiebres que λ . Las observaciones principales que haremos sobre la topología de este espacio las condensamos en el siguiente resultado.

Proposición 2.2.4. *El espacio $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ es 2-numerable y su topología coincide en $\mathcal{L}_X(p, q)$ con la topología cociente de $\mathcal{L}_X(p, q)$ dada por la definición 2.1.3.⁵*

Demostración. Sean $c_1, \dots, c_r \in M$ todos los puntos críticos tales que

$$\text{Ind}(p) > \text{Ind}(c_\alpha) \geq \text{Ind}(c_{\alpha+1}) > \text{Ind}(q), \quad \alpha = 1, \dots, r-1.$$

⁵La proyección cociente es la aplicación de identificación π descrita en la demostración de la proposición 2.1.4.

Denotemos $c_0 = p$ y $c_{r+1} = q$. Fijemos dominios de Morse adaptados $\Omega_0, \dots, \Omega_{r+1}$ alrededor de cada punto crítico y sea \mathcal{V} una base numerable de la topología de la variedad M . Sea una sucesión $0 = \alpha_0 < \dots < \alpha_m = r + 1$ tal que

$$\text{Ind}(c_{\alpha_i}) > \text{Ind}(c_{\alpha_{i+1}}), \quad i = 0, \dots, m - 1, \quad (2.3)$$

y tomemos colecciones de abiertos básicos $V_1^+, \dots, V_m^+ \in \mathcal{V}$ y $V_0^-, \dots, V_{m-1}^- \in \mathcal{V}$ tales que $U_i^\pm = V_i^\pm \cap \partial_\pm \Omega_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para $i = 0, \dots, m$. Denotemos $\mathbf{U}^+ = (U_1^+, \dots, U_m^+)$ y $\mathbf{U}^- = (U_0^-, \dots, U_{m-1}^-)$. Definimos $\mathcal{W}(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ como el conjunto de puntos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ para los que existe una sucesión $0 = i_0 < \dots < i_k = m$ tal que $\lambda_j \in \overline{\mathcal{L}}_X(c_{\alpha_{i_{j-1}}}, c_{\alpha_{i_j}})$ y λ_j interseca las fronteras $\partial\Omega_{\alpha_{i_{j-1}}}$ y $\partial\Omega_{\alpha_{i_j}}$ dentro de $U_{i_{j-1}}^-$ y $U_{i_j}^+$, respectivamente. Éste es un conjunto abierto de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$. Como hay una cantidad finita de sucesiones de índices que cumplen (2.3) y \mathcal{V} es numerable, entonces la colección de todos los conjuntos de la forma $\mathcal{W}(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ es una familia numerable y es además una base para la topología de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$.

Para estudiar el subespacio $\mathcal{L}_X(p, q)$ con la topología inducida por $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$, basta tomar la sucesión de índices $0 = \alpha_0 < \alpha_1 = r + 1$. En esta caso, los conjuntos $\mathcal{W}(\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)$ descritos en el párrafo anterior son los conjuntos de trayectorias $\lambda \in \mathcal{L}_X(p, q)$ que intersecan a las fronteras $\partial_- \Omega_0$ y $\partial_+ \Omega_{r+1}$ en abiertos de la base \mathcal{V} de la variedad. Asumiendo, sin pérdida de generalidad, que los conjuntos de nivel en los que se encuentran estas fronteras corresponden a valores regulares y usando el homeomorfismo de la proposición 2.1.4, concluimos que esta topología para $\mathcal{L}_X(p, q)$ coincide con la topología original, es decir, la topología cociente. \square

Ahora ofrecemos un resultado de topología, cuya demostración se puede consultar en [13, sección VIII.2], y el teorema principal sobre la topología del espacio de ligaduras.

Proposición 2.2.5. *Un espacio topológico 2–numerable es secuencialmente compacto si y sólo si es compacto.* \square

Teorema 2.2.6 (Compacidad del conjunto de ligaduras). *El conjunto de ligaduras $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ es compacto.*

Demostración. La prueba de este enunciado se puede hallar en el trabajo de Latour [9, proposición 2.6]. Aquí puntualizaremos algunos pasos de la demostración. En virtud de las proposiciones 2.2.4 y 2.2.5, basta demostrar que cada sucesión en $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ tiene una subsucesión convergente (es decir, el espacio es secuencialmente compacto). Una sucesión $(\ell^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ tiene una subsucesión en alguno

de los uniendos de la definición de $\bar{\mathcal{L}}_X(p, q)$ y, por lo tanto, podemos suponer que es de la forma

$$\ell^n = (\ell_1^n, \dots, \ell_m^n) \in \mathcal{L}_X(p, c_1) \times \cdots \times \mathcal{L}_X(c_{m-1}, q), \quad c_j \in \text{Crit}(f).$$

Observamos que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_j^n = \lambda_j = (\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,k_j}) \in \mathcal{L}_X(c_{j-1}, c'_{j,1}) \times \cdots \times \mathcal{L}_X(c'_{j,k_j-1}, c_j), \quad c'_{j,h} \in \text{Crit}(f),$$

para $j = 1, \dots, m$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell^n = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{m,k_m}) \in \bar{\mathcal{L}}_X(p, q)$. En efecto, esto es cierto debido a que todo par de colecciones de vecindades

$$\mathbf{U}^+ = (U_{1,1}^+, \dots, U_{j_m,m}^+), \quad \mathbf{U}^- = (U_{1,0}^-, \dots, U_{m,k_m-1}^-),$$

asociado a $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ se restringe a pares de colecciones de vecindades

$$\mathbf{U}_j^+ = (U_{j,1}^+, \dots, U_{j,k_j}^+), \quad \mathbf{U}_j^- = (U_{j,0}^-, \dots, U_{j,k_j-1}^-),$$

asociados a cada $\lambda_j \in \bar{\mathcal{L}}_X(c_{j-1}, c_j)$, que cumplen

$$\mathcal{W}(\lambda_1, \mathbf{U}_1^+, \mathbf{U}_1^-) \times \cdots \times \mathcal{W}(\lambda_m, \mathbf{U}_m^+, \mathbf{U}_m^-) \subset \mathcal{W}((\lambda_1, \dots, \lambda_m), \mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-).$$

Luego, basta demostrar que cada sucesión componente $(\ell_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$, compuesta por trayectorias en $\mathcal{L}_X(c_{j-1}, c_j)$, tiene una subsucesión convergente en el espacio de ligaduras correspondiente $\bar{\mathcal{L}}_X(c_{j-1}, c_j)$ para extraer, componente a componente, la subsucesión de $(\ell^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en $\bar{\mathcal{L}}_X(p, q)$. Probaremos este resultado para $\mathcal{L}_X(p, q)$.

Sea $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de trayectorias entre p y q , es decir, $\ell_n \in \mathcal{L}_X(p, q)$. Fijemos dominios de Morse adaptados Ω_p y Ω_q alrededor de cada punto p y q , respectivamente. Como cada punto de intersección ℓ_n^- (de ℓ_n con $\partial_- \Omega_p$) pertenece al conjunto compacto $W^u(p) \cap \partial_- \Omega_p \approx \mathbb{S}^{\text{Ind}(p)-1}$, entonces, salvo la extracción de una subsucesión, existe $p^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^- \in W^u(p) \cap \partial_- \Omega_p$.

Consideremos la trayectoria $\lambda_1(t) = \varphi^t(p^-)$. Si λ_1 termina en q podemos concluir, recordando la equivalencia topológica de la proposición 2.1.4, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \lambda_1 \in \mathcal{L}_X(p, q).$$

En caso contrario, tomemos $c_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_1(t) \in \text{Crit}(f)$, que satisface $\text{Ind}(p) > \text{Ind}(c_1)$. Como φ^t es un difeomorfismo para cada $t > 0$ y $\lambda_1(t)$ yace eventualmente en un dominio de Morse adaptado Ω_1 de c_1 , entonces ℓ_n penetra eventualmente el

dominio Ω_1 , para n suficientemente grande, en un punto $d_n^+ \notin W^s(c_1)$. Luego ℓ_n sale de Ω_1 por otro punto $d_n^- \in \partial_- \Omega_1$ y, por la forma del campo en un dominio de Morse expuesta en (1.16), se satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^- \in W^u(c_1) \cap \partial_- \Omega_1.$$

Repitiendo la construcción de λ_1 , primero para el punto $c_1^- = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^-$ y sucesivamente (a lo más $\text{Ind}(p) - \text{Ind}(q) - 1$ veces), obtenemos una ligadura $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ que es el límite de alguna subsucesión de $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Como consecuencia del teorema 2.2.6 podemos afirmar que si $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ es discreto, entonces es finito por compacidad. Por lo tanto, a partir de las observaciones finales de la sección 2.1 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.7. *Si $\text{Ind}(p) = \text{Ind}(q) + 1$ entonces $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q) = \mathcal{L}_X(p, q)$ y es un conjunto finito.* \square

Ahora presentamos el resultado central de esta sección, concerniente a la estructura de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ como variedad con frontera en un caso particular.

Teorema 2.2.8 (Estructura de variedad con frontera del conjunto de ligaduras). *Si $\text{Ind}(p) = \text{Ind}(q) + 2$, entonces $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ es una 1-variedad con frontera tal que*

$$\partial \overline{\mathcal{L}}_X(p, q) = \bigcup_{\text{Ind}(c) = \text{Ind}(p) - 1} \mathcal{L}_X(p, c) \times \mathcal{L}_X(c, q).$$

Demostración. Por la descomposición disjunta en (2.2), resta ver que las trayectorias quebradas (λ_1, λ_2) son puntos frontera de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$. Audin y Damian [1, proposición 3.2.7] demuestran que, alrededor de cada trayectoria quebrada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, existe un encaje $\psi : [0, \delta) \rightarrow \overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$, diferenciable en $(0, \delta)$, que cumple

$$\begin{cases} \psi(0) &= (\lambda_1, \lambda_2), \\ \psi(s) &\in \mathcal{L}_X(p, q), \quad 0 < s < \delta. \end{cases}$$

Además, este encaje satisface que si $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{L}_X(p, q)$ que converge a λ , entonces la sucesión yace eventualmente en $\psi([0, \delta))$. Aquí refinamos únicamente la conclusión de su demostración para explicar por qué el teorema se deriva fácilmente de la existencia de este encaje.

Basta demostrar que $\psi([0, \delta))$ es una vecindad de λ en $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$. La prueba es de carácter topológico y utilizaremos que $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ es 1-numerable al ser un espacio

2–numerable. Sea $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de vecindades de λ en $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ numerable y anidada.⁶ Si $\psi([0, \delta])$ no fuese una vecindad de λ , entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ podríamos escoger $\ell_n \in U_n - \psi([0, \delta])$. En tal caso $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \lambda$, ya que $\ell_k \in U_k \subset U_n$ para cada $k \geq n$, lo cual contradiría las propiedades de ψ . Por lo tanto, existe un abierto $U \subset \psi([0, \delta])$ de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ tal que $\lambda \in U$. Más aún, utilizando que ψ es un encaje, existe $0 < \epsilon < \delta$ tal que $[0, \epsilon] \subset \psi^{-1}(U)$. Luego, $V = \psi([0, \epsilon]) \subset U$ es un abierto de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ tal que $\lambda \in V$. La aplicación $\psi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una carta alrededor del punto frontera λ . \square

Para terminar esta sección, ofrecemos algunos resultados fundamentales para la construcción del complejo que se deducen de los teoremas 2.2.6 y 2.2.8. Primero recordamos la conocida clasificación de las 1–variedades compactas y conexas, que puede consultarse en el libro de Prieto [13, teorema XI.3.2] o bien en el texto de Audin y Damian [1, teorema 2.3.2].

Teorema 2.2.9 (Clasificación de 1–variedades). *Sea V una 1–variedad compacta y conexa.*

I. Si $\partial V = \emptyset$ entonces $V \approx \mathbb{S}^1$.

II. Si $\partial V \neq \emptyset$ entonces $V \approx [0, 1]$. \square

Corolario 2.2.10. *Si V es una 1–variedad compacta entonces ocurre exactamente una de las siguientes situaciones:*

I. $\partial V = \emptyset$,

II. ∂V es la suma topológica (discreta)

$$\partial V \approx \prod_{i=1}^r \{0, 1\},$$

donde $0 < r < \infty$ es la cantidad de componentes conexas de V con frontera. \square

Corolario 2.2.11. *Si $\text{Ind}(p) = \text{Ind}(q) + 2$ entonces $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ es una 1–variedad compacta con frontera tal que*

$$\partial \overline{\mathcal{L}}_X(p, q) = \bigcup_{\text{Ind}(c) = \text{Ind}(p) - 1} \mathcal{L}_X(p, c) \times \mathcal{L}_X(c, q)$$

tiene un número par de elementos. \square

⁶Puede obtenerse a partir de una base de vecindades numerable $(\tilde{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ simplemente tomando $U_n = \tilde{U}_1 \cap \dots \cap \tilde{U}_n$.

Capítulo 3

El complejo y la homología de Morse

En el presente capítulo exponemos la definición del complejo y la homología de Morse, abordamos el caso de las variedades con frontera y exponemos la propiedad fundamental de invariancia de la homología.

3.1. El complejo de puntos críticos y la diferencial

Definición 3.1.1 (Complejo de Morse sobre \mathbb{Z}_2). Sea M una variedad compacta y (f, X) un par de Morse-Smale definido en M . Definimos el complejo de Morse de M asociado al par (f, X) , denotado por $C(f, X) = (C_\bullet(f), \partial_\bullet^X)$, de la siguiente manera:

- I. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos $C_k(f)$ como el \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial libremente generado¹ por los puntos críticos de f de índice k , es decir,

$$C_k(f) = \bigoplus_{a \in \text{Crit}_k(f)} \mathbb{Z}_2 a.$$

Este espacio vectorial constituye el k -ésimo \mathbb{Z}_2 -módulo del complejo de cadena.

- II. Para cada $a \in \text{Crit}_k(f)$, definimos la diferencial ∂_k^X en a como

$$\partial_k^X(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(a, b)b \in C_{k-1}(f),$$

¹Consideraremos al espacio generado por el vacío como el espacio trivial. En otras palabras, cuando no hay puntos críticos de índice k entonces $C_k(f) = 0$. En particular, $C_k(f) = 0$ cuando $k \notin \{0, \dots, \dim(M)\}$.

donde $n_X(a, b)$ es la clase módulo 2 de la cardinalidad del conjunto (finito) de trayectorias $\mathcal{L}_X(a, b)$ con $b \in \text{Crit}_{k-1}(f)$. Para obtener $\partial_k^X : C_k(f) \rightarrow C_{k-1}(f)$, se extiende linealmente su definición.

Ejemplo 3.1.2. Ilustramos el cálculo del complejo de Morse con un par de casos. Consideremos el par de Morse-Smale (f, X) definido en el toro \mathbb{T}^2 del ejemplo 2.2.2. El conjunto de puntos críticos $\text{Crit}(f) = \{a, b, c, d\}$ induce los \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales

$$C_2(f) \cong \mathbb{Z}_2, \quad C_1(f) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad C_0(f) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Podemos obtener los valores n_X de la definición de la diferencial ∂^X como

$$n_X(a, b) = n_X(a, c) = 2 = 0, \quad n_X(b, d) = n_X(c, d) = 2 = 0.$$

Luego,

$$\partial_2^X(a) = 0b + 0c = 0, \quad \partial_1^X(b) = \partial_1^X(c) = 0d = 0,$$

por lo que la diferencial ∂^X es trivial. El complejo de Morse de \mathbb{T}^2 asociado a (f, X) está representado por el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_3(f) & \xrightarrow{\partial_3^X} & C_2(f) & \xrightarrow{\partial_2^X} & C_1(f) & \xrightarrow{\partial_1^X} & C_0(f) & \xrightarrow{\partial_0^X} & C_{-1}(f) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ahora obtenemos el cálculo del complejo de Morse del espacio $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ asociado al par (f, X) , donde f es la función f del ejemplo 1.1.6 y X es cualquier campo pseudogradient adaptado a f que satisfaga la condición de Smale. Por la descomposición de los puntos críticos de f obtenida en el ejemplo 1.1.6, tenemos

$$C_k(f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , k \text{ es par,} \\ 0 & , k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Luego, cada diferencial $\partial_k^X : C_k(f) \rightarrow C_{k-1}(f)$ debe ser trivial. De manera esquemática, el complejo de Morse de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ asociado a (f, X) es:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \cdots & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{2r}(f) & \xrightarrow{\partial_{2r}^X} & C_{2r-1}(f) & \xrightarrow{\partial_{2r-1}^X} & \cdots & \xrightarrow{\partial_1^X} & C_0(f) & \xrightarrow{\partial_0^X} & C_{-1}(f) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Para terminar la exposición de la construcción del complejo debemos demostrar que ∂_X es en efecto una diferencial para el complejo. Esta situación la expresamos en el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3. *Si M es una variedad compacta y (f, X) es un par de Morse-Smale definido en M , entonces*

$$\partial_{k-1}^X \circ \partial_k^X = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Demostración. Equivalentemente, probaremos que la composición se anula en todos los elementos de la base de $C_k(f)$. Si $a \in \text{Crit}_k(f)$ entonces

$$\begin{aligned} (\partial_{k-1}^X \circ \partial_k^X)(a) &= \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(a, b) \cdot \partial_{k-1}^X(b) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(a, b) \cdot \left(\sum_{c \in \text{Crit}_{k-2}(f)} n_X(b, c) c \right) \\ &= \sum_{c \in \text{Crit}_{k-2}(f)} \left(\sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(a, b) \cdot n_X(b, c) \right) c. \end{aligned}$$

Luego, $(\partial_{k-1}^X \circ \partial_k^X)(a) = 0$ exactamente cuando

$$\sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(a, b) \cdot n_X(b, c) = 0 \quad (3.2)$$

para cada $c \in \text{Crit}_{k-2}(f)$. Observamos que el producto de clases $n_X(a, b) \cdot n_X(b, c)$ es la reducción módulo 2 de la cardinalidad del conjunto $\mathcal{L}_X(a, b) \times \mathcal{L}_X(b, c)$ y, por lo tanto, la cantidad en el miembro izquierdo de (3.2) es la reducción módulo 2 de la cardinalidad del conjunto

$$\bigcup_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \mathcal{L}_X(a, b) \times \mathcal{L}_X(b, c).$$

Por el corolario 2.2.11, concluimos que la igualdad (3.2) siempre ocurre y, por lo tanto, se satisface la relación (3.1). \square

3.2. Variedades con frontera

En esta sección exponemos la construcción del complejo de Morse para el caso de variedades con frontera. Consideraremos una variedad M compacta con frontera.

Si X es un campo pseudogradiante (adaptado a alguna función de Morse definida en M) que es transversal a ∂M , entonces las variedades estables e inestables del campo X se intersecan en el interior de la variedad. Así la definición de par de Morse-Smale se extiende de manera natural al caso de las variedades con frontera.

Definición 3.2.1. *Un par de Morse-Smale definido en una variedad M con frontera es un par (f, X) constituido por una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y un campo X entrante o saliente² en M tal que $(f|_{\text{int}(M)}, X|_{\text{int}(M)})$ es un par de Morse-Smale definido en $\text{int}(M)$.*

De manera análoga al caso sin frontera, si p y q son puntos críticos y $\alpha \in (f(q), f(p))$ es un valor regular de f , entonces el espacio de puntos intermedios $\mathcal{I}_X(p, q) = W^u(p) \cap W^s(q)$ es homeomorfo a un subconjunto abierto de la variedad $(\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R}$, a saber,

$$\mathcal{I}_X(p, q) \approx \mathcal{D} \cap [(\mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)) \times \mathbb{R}],$$

donde $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R}$ es el dominio del flujo de X . Con esta adaptación, obtenemos de manera análoga al caso sin frontera, en la proposición 2,1,4, el homeomorfismo

$$\mathcal{L}_X(p, q) \approx \mathcal{I}_X(p, q) \cap f^{-1}(\alpha).$$

La conclusión análoga que se deriva de este hecho es que $\mathcal{L}_X(p, q)$ es una 0-variedad cuando p y q tienen índices consecutivos.

La prueba de la compacidad de $\overline{\mathcal{L}}_X(p, q)$ pasa directamente para el caso con frontera haciendo la observación de que el argumento para obtener la ligadura λ al final de la prueba del teorema 2.2.6 permanece válido. En efecto, no podemos concluir directamente la propiedad la proposición 1.2.5 si $\partial M \neq \emptyset$, pero si $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_X(p, q)$ es una sucesión de trayectorias, ℓ_n^- es el punto de intersección de cada trayectoria ℓ_n con la frontera de una vecindad de Morse alrededor de p y $p_- = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^-$, entonces necesariamente la curva integral de X que pasa por p_- está definida en \mathbb{R} , parte de p y termina en un algún punto $c \in \text{Crit}(f)$. Así, el caso de variedades con frontera admite la definición 3.1.1 del complejo de Morse y la propiedad (3.1) de la diferencial correspondiente.

Para finalizar esta sección, presentamos la existencia de pares de Morse-Smale para variedades con frontera. Emplearemos los resultados de existencia de los capítulos 1 y 2, así como el siguiente concepto.

Definición 3.2.2. *El doble de la variedad M es el espacio de adjunción que se obtiene de identificar en la suma topológica (ajena) de dos copias de la variedad M a las fronteras a través del difeomorfismo $id : \partial M \rightarrow \partial M$:*

$$2M = M \cup_{id} M = (M \sqcup M) / x \sim x \quad , \quad x \in \partial M.$$

²Nombraremos de esta manera a campos que apunten *hacia adentro* o *hacia afuera* de la variedad, respectivamente

Si M es una variedad compacta con frontera, entonces $2M$ es una variedad compacta (sin frontera) [10, teorema 9.29]. Por lo tanto, se pueden aplicar los resultados de existencia expuestos hasta el momento para la variedad $2M$ y restringir el análisis a alguno de los dos subespacios de $2M$ difeomorfos a M . Sin embargo, se debe precisar inicialmente el comportamiento del campo pseudogradiiente alrededor de ∂M . Explícitamente, construiremos un campo en $2M$ que sea *entrante* en una de las copias y *saliente* en la otra. Esta condición dual permitirá diferenciar las dos construcciones posibles del complejo para variedades con frontera. Siguiendo a Lee [10, capítulo 9.4], emplearemos vecindades *de collar* alrededor de la frontera de la variedad.

Proposición 3.2.3 (Existencia de pares de Morse-Smale para variedades con frontera). *Sean M una variedad con frontera y $\phi : (-1, 1) \times \partial M \rightarrow V$ un difeomorfismo sobre una vecindad abierta $V \subset 2M$ tal que existen dos subespacios M_-, M_+ de $2M$ difeomorfos a M que cumplen $\phi([0, 1) \times \partial M) \subset M_-$, $\phi((-1, 0] \times \partial M) \subset M_+$ y $M_- \cap M_+ = \phi(\{0\} \times \partial M)$. Entonces existe un par de Morse-Smale (f, X) definido en $2M$ tal que X es un campo entrante en M_- y saliente en M_+ .*

Demostración. Consideremos la vecindad abierta $U = \phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \partial M) \subset V$ y una partición de la unidad $\{\psi_1, \psi_2\}$ subordinada a la cubierta abierta $\{V, 2M - \bar{U}\}$ de $2M$. Definamos en U la función $g(\phi(t, x)) = t$, que se extiende a una función $\tilde{g} = \psi_1 g$ en $2M$. Observamos que $Y = \text{grad } \tilde{g}$ es un campo de vectores que no se anula en U y que se restringe al campo $\phi_*(\frac{\partial}{\partial t})$ en U . Por lo tanto, se trata de un campo entrante en M_- y saliente en M_+ .

Podemos cambiar \tilde{g} por una función de Morse suficientemente cercana a \tilde{g} (en un sentido C^1) en el conjunto compacto $K = \bar{U}$ que, por lo tanto, tenga un gradiente entrante en M_- y saliente en M_+ . Además, podemos asegurar que dicha función no tenga puntos críticos en U . En efecto, si $\varphi : 2M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un encaje, entonces $0 < \inf_{\varphi(K)} \|\text{grad } (\tilde{g} \circ \varphi^{-1})\|$, pues \tilde{g} no tiene puntos críticos en K . Luego, en virtud del teorema 1.1.8 existe una función de Morse $h : \varphi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{\varphi(K)} \|\text{grad } (h - (\tilde{g} \circ \varphi^{-1}))\| < \inf_{\varphi(K)} \|\text{grad } (\tilde{g} \circ \varphi^{-1})\|,$$

de donde,

$$\begin{aligned} \|(\text{grad } h)_x\| &\geq \|\text{grad } (\tilde{g} \circ \varphi^{-1})_x\| - \|\text{grad } (h - (\tilde{g} \circ \varphi^{-1}))_x\| \\ &\geq \inf_{\varphi(K)} \|\varphi \circ \tilde{g}\| - \sup_{\varphi(K)} \|\text{grad } (h - \varphi \circ \tilde{g})\| > 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

para cada $x \in \varphi(K)$. Así la función de Morse $f = h \circ \varphi : 2M \rightarrow \mathbb{R}$ no tiene puntos críticos en $K = \overline{U}$. De esta manera, $Y' = \text{grad } f$ es un campo pseudogradiiente adaptado a f que es entrante en M_- y saliente en M_+ .

Utilizando el teorema 1.3.4, podemos sustituir Y' por un campo X que satisfaga la condición de Smale para f . Subrayamos que no hay pérdida de generalidad en suponer que f tiene valores críticos no repetidos para poder aplicar directamente el teorema, pues f puede ser reemplazada por una función de Morse con valores críticos no repetidos arbitrariamente cercana (en un sentido C^1) que, por lo tanto, cumpla las propiedades deseadas de f (3.3). Asimismo, notamos que las modificaciones hechas al campo Y' en el teorema se efectúan en una vecindad de los puntos críticos de f . Por lo tanto, X permanece entrante en M_- y saliente en M_+ . \square

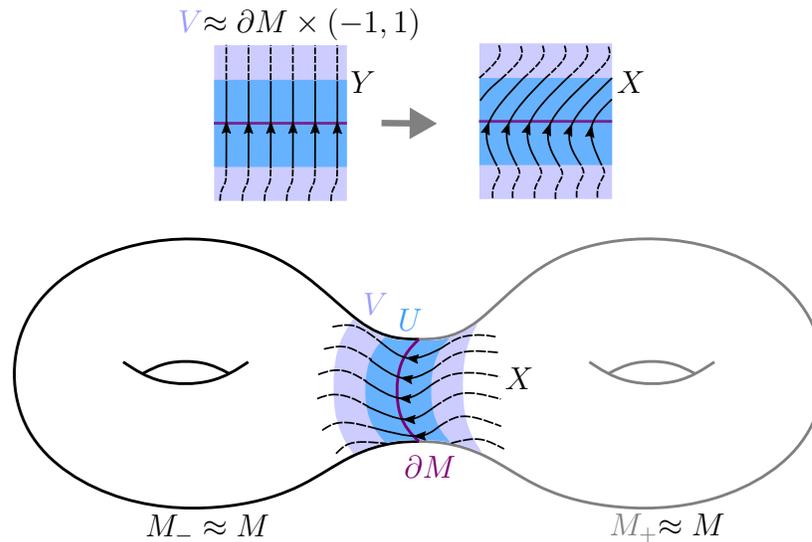


Figura 3.1: Construcción del par de Morse-Smale sobre el doble de la variedad.

3.3. Homología de Morse

En esta sección proporcionamos la definición y la primera propiedad de invariancia de la homología de Morse de una variedad compacta.

Definición 3.3.1 (Homología de Morse sobre \mathbb{Z}_2). *Sea M una variedad compacta (con o sin frontera). La homología de Morse de la variedad M asociada a un par de Morse-Smale (f, X) se denota por $H(M, f, X) = H_\bullet(C(f, X))$ y es la homología generada por el complejo de Morse $C(f, X)$:*

$$H_k(C(f, X)) = H_k(C_\bullet(f), \partial_\bullet^X) = \frac{\text{Ker}(\partial_k^X)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^X)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Siguiendo la exposición de Audin y Damian [1, capítulo 3.4] presentamos la construcción de un morfismo de complejos de cadena³ que relaciona los complejos de Morse inducidos por distintos pares de Morse-Smale. Para ello utilizaremos el siguiente concepto.

Definición 3.3.2. *Una homotopía eventualmente estable entre dos funciones de Morse $f_0, f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una homotopía $F : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (diferenciable en el interior de su dominio) tal que*

$$\begin{cases} F_t = F(\cdot, t) = f_0, & t \leq \frac{1}{3}, \\ F_t = F(\cdot, t) = f_1, & t \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Recalamos que para todo par de funciones de Morse $f_0, f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ existe una homotopía eventualmente estable definida por

$$F(x, t) = f_0(x) + \frac{h(t - \frac{1}{3})}{h(t - \frac{1}{3}) + h(\frac{2}{3} - t)} \cdot (f_1(x) - f_0(x)) \quad (3.4)$$

donde

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

con la cota

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \leq C \cdot (f_0(x) - f_1(x)), \quad C = \sup_{t \in [0, 1]} \frac{d}{dt} \frac{h(t - \frac{1}{3})}{h(t - \frac{1}{3}) + h(\frac{2}{3} - t)} \in [0, +\infty).$$

Lema 3.3.3. *Sean (f_0, X_0) y (f_1, X_1) pares de Morse-Smale definidos en una variedad compacta M . Toda homotopía eventualmente estable $F : f_0 \simeq f_1$ induce un morfismo de complejos de cadena $\Phi^F : C(f_0, X_0) \rightarrow C(f_1, X_1)$ que tiene las siguientes propiedades:*

³Véase la definición A.0.2

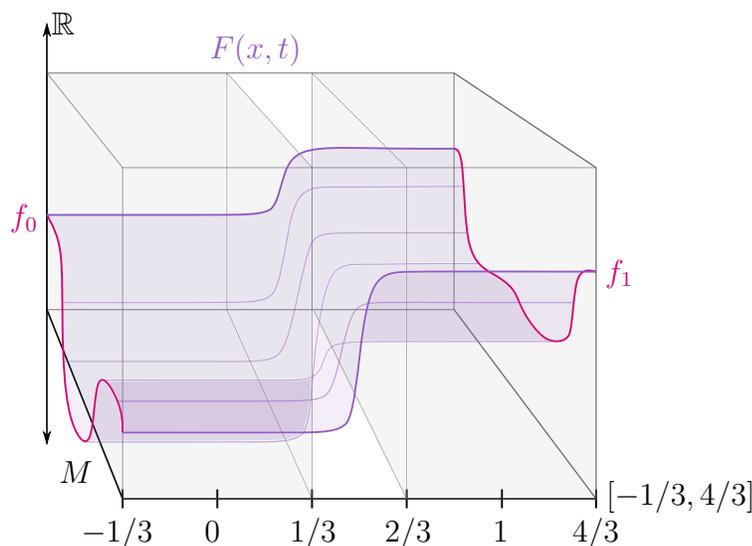


Figura 3.2: Homotopía eventualmente estable entre f_0 y f_1 .

- I. Si $f_0 = f_1$ y $F_t = f_0$ para cada $t \in [0, 1]$, entonces $\Phi^F = \text{id}_{C(f_0, X_0)}$.
- II. Sean (f_2, X_2) un par de Morse-Smale definido en M y $G : f_1 \simeq f_2$ una homotopía eventualmente estable. Si $H : f_0 \simeq f_2$ es una homotopía eventualmente estable, entonces $\Phi^G \circ \Phi^F$ y Φ^H son morfismos de complejos de cadena homotópicos⁴.

Demostración. Aquí presentamos únicamente la construcción del morfismo. La prueba detallada de las propiedades I. y II. se puede encontrar en [1, teorema 3.4.2]. Dividimos la construcción en tres partes.

Paso 1.

Iniciamos extendiendo la definición de F al conjunto $M \times [-\frac{1}{4}, \frac{4}{3}]$ y tomamos una función diferenciable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} + g' < 0$ en $M \times (0, 1)$. Por ejemplo, a partir de la homotopía particular en (3.4) se puede considerar cualquier función $g(t) = R(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{10})$ con $R > 0$ suficientemente grande de tal manera que

$$g'(t) < -C \cdot \sup_M |f_0 - f_1|, \quad t \in (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}).$$

Sea $\tilde{F} = F + g : M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta en M , entonces φ se extiende a una carta $\tilde{\varphi}(x, t) = (\varphi(x), t) = (y, t)$ en $U \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$, para la cual se

⁴Véase la definición A.0.5

cumple

$$\left(\text{grad} (\tilde{F} \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \right)_{(y,t)} = \left(\frac{\partial(F \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial y_1}(y,t), \dots, \frac{\partial(F \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial y_n}(y,t), \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + g'(t) \right).$$

Observamos que como F es eventualmente estable entonces $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0$ para $t \notin [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ y por lo tanto $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(x,t) = g'(t)$ para $t \notin [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Por la elección de g deducimos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + g'(t) < 0, & t \in (0,1), \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + g'(t) = 0, & t = 0,1, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + g'(t) > 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos críticos de \tilde{F} en $U \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ son elementos de $(U \times \{0\}) \cup (U \times \{1\})$. En estos casos ($t = 0, 1$), notamos que $\text{grad} (\tilde{F} \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{(y,t)} = 0$ exactamente cuando

$$0 = \frac{\partial(F \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial y_j}(y,t) = \frac{\partial f_t \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j}(y,t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Aplicando este argumento a cualquier carta en M concluimos que

$$\text{Crit}(\tilde{F}) = (\text{Crit}(f_0) \times \{0\}) \cup (\text{Crit}(f_1) \times \{0\}). \quad (3.5)$$

Más aún, si φ es carta alrededor de $a \in \text{Crit}(f_0)$ y $-\frac{1}{3} < t < \frac{1}{3}$, obtenemos el cálculo

$$(\tilde{F} \circ \tilde{\varphi}^{-1})(y,t) = F(x,t) + g(t) = f_0(x) + g(t).$$

Luego, la matriz

$$\text{Hess} (\tilde{F} \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{(a,0)} = \begin{pmatrix} \text{Hess} (f_0)_a & 0 \\ 0 & g''(0) \end{pmatrix}$$

es invertible, es decir, $(a, 0)$ es un punto crítico no degenerado de \tilde{F} . Además, la concavidad de g en una vecindad de $t = 0$ implica que $g''(0) < 0$ y por lo tanto

$$\text{Ind}((a, 0), \tilde{F}) = \text{Ind}(a, f_0) + 1, \quad a \in \text{Crit}(f_0).$$

Como $F_t = f_1$ para $\frac{2}{3} < t < \frac{4}{3}$ y $g''(1) > 0$, un cálculo análogo implica que todo punto de la forma $(a, 1) \in \text{Crit}(f_1) \times \{1\}$ es un punto crítico no degenerado de \tilde{F} y se satisface

$$\text{Ind}((a, 1), \tilde{F}) = \text{Ind}(a, f_1), \quad a \in \text{Crit}(f_1).$$

Paso 2.

Separando los conjuntos cerrados $K_0 = M \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}]$ y $K_1 = M \times [\frac{5}{6}, \frac{4}{3}]$ con sendas vecindades abiertas disjuntas $U = M \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ y $V = M \times (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, podemos definir en $M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$ el campo pseudogradiiente adaptado a \tilde{F} dado por⁵

$$X = \psi_0 X_0 + \psi_1 X_1 - (\text{grad } g) = \psi_0 X_0 + \psi_1 X_1 - g' \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.6)$$

donde (ψ_0, ϕ_0) y (ψ_1, ϕ_1) son particiones de la unidad subordinadas a las cubiertas abiertas $(U, M - K_0)$ y $(V, M - K_1)$. Este campo satisface

$$\begin{cases} X|_{K_0} = X_0 - g' \frac{\partial}{\partial t}, \\ X|_{K_1} = X_1 - g' \frac{\partial}{\partial t}. \end{cases}$$

Recalcamos que $\text{Crit}(\tilde{F}|_{K_0}) = \text{Crit}(f_0) \times \{0\}$. Si denotamos por Ψ al flujo de $X|_{K_0}$ entonces $\Psi^s = (\gamma_0^s, \gamma^s)$ donde γ_0^s es el flujo de X_0 en M y γ^s el de $-g' \frac{\partial}{\partial t}$ en $[-1/3, 1/6]$. Observamos que las condiciones de g' implican que

$$\frac{\partial \gamma^s(t)}{\partial s} = -g'(\gamma^s(t)) \begin{cases} < 0, & t < 0, \\ = 0, & t = 0, \\ > 0, & t > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

es decir, $s \mapsto \gamma^s(t)$ es decreciente para $t < 0$, creciente para $t > 0$ y constante para $t = 0$. Por lo tanto, las trayectorias de $X|_{K_0}$ que conectan dos puntos críticos $(a, 0), (b, 0) \in \text{Crit}(f_0) \times \{0\}$ son exactamente las trayectorias de la forma $s \mapsto (\gamma_0^s, 0)$ donde γ_0^s es una trayectoria de X_0 que conecta a y b . Entonces $X|_{K_0}$ satisface la condición de Smale dado que $W_{X|_{K_0}}^u((a, 0)) = W_{X_0}^u(a) \times [-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}]$ para cada $a \in \text{Crit}(f_0)$ y X_0 satisface la condición de Smale en M . Además, tenemos el cómputo

$$n_{X|_{K_0}}((a, 0), (b, 0)) = n_{X_0}(a, b), \quad a \in \text{Crit}(f_0), b \in \text{Crit}_{\text{Ind}(a)-1}(f_0). \quad (3.8)$$

Por lo tanto, $(C_\bullet(\tilde{F}|_{K_0}), \partial_\bullet^{X|_{K_0}}) \cong (C_{\bullet-1}(f_0), \partial_\bullet^{X_0})$.

Con un razonamiento análogo, $(\tilde{F}|_{K_1}, \partial_\bullet^{X|_{K_1}})$ es un par de Morse-Smale tal que $(C_\bullet(\tilde{F}|_{K_1}), \partial_\bullet^{X|_{K_1}}) \cong (C_\bullet(f_1), \partial_\bullet^{X_1})$.

Paso 3.

Modificamos X en un campo \tilde{X} que satisfaga la condición de Smale, coincida con X en una vecindad W de $\text{Crit}(\tilde{F})$ en $K_0 \cup K_1$ y sea suficientemente cercano

⁵Esta definición está fundada en el hecho de que $T_{(x,t)}(M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]) \cong T_x M \oplus T_t[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]$.

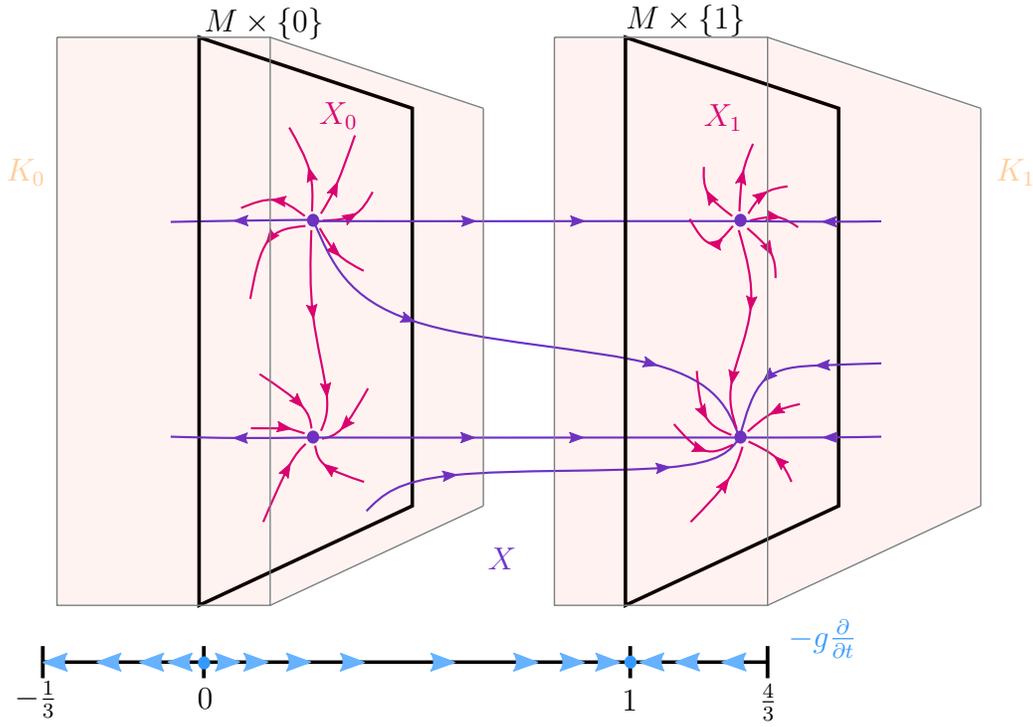


Figura 3.3: Construcción del campo X .

a X (en un sentido C^1). Tal como en [1, proposición 3.4.3] obtenemos un campo pseudogradiiente adaptado a \tilde{F} que satisface la condición de Smale y cumple

$$\begin{cases} (C_\bullet(\tilde{F}|_{W \cap K_0}), \partial^{\tilde{X}|_{W \cap K_0}}) \cong (C_\bullet(\tilde{F}|_{K_0}), \partial_\bullet^{X|_{K_0}}) \cong (C_{\bullet-1}(f_0), \partial_\bullet^{X_0}), \\ (C_\bullet(\tilde{F}|_{W \cap K_1}), \partial^{\tilde{X}|_{W \cap K_1}}) \cong (C_\bullet(\tilde{F}|_{K_1}), \partial_\bullet^{X|_{K_1}}) \cong (C_\bullet(f_1), \partial_\bullet^{X_1}). \end{cases} \quad (3.9)$$

Dado que la modificación del campo X en el campo \tilde{X} ocurre en $W \subset K_0 \cup K_1$, entonces las trayectorias de \tilde{X} tienen el mismo comportamiento (3.7) que las de X en $M \times (\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ y por lo tanto recorren $M \times [0, 1]$ desde puntos críticos en $\text{Crit}(f_0) \times \{0\}$ hasta puntos críticos en $\text{Crit}(f_1) \times \{1\}$. En particular, esta observación implica que

$$n_{\tilde{X}}((a, 1), (b, 0)) = 0, \quad a \in \text{Crit}(f_1), \quad b \in \text{Crit}(f_0). \quad (3.10)$$

Utilizando (3.5) y los isomorfismos (3.9), podemos descomponer los espacios vectoriales del complejo $C(\tilde{F}, \tilde{X})$ como

$$C_k(\tilde{F}) = C_k(\tilde{F}|_{W \cap K_0}) \oplus C_k(\tilde{F}|_{W \cap K_1}) \cong C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si consideramos $\partial_k^{\tilde{X}} : C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1) \longrightarrow C_{k-2}(f_0) \oplus C_{k-1}(f_1)$, entonces por (3.8) y por la observación en (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} \partial_k^{\tilde{X}}(a) &= \partial_k^{\tilde{X}}((a, 0)) = \sum_{(b,s) \in \text{Crit}_{k-1}(\tilde{F})} n_{\tilde{X}}((a, 0), (b, s))(b, s) \\ &= \sum_{b \in \text{Crit}_{k-2}(f_0)} n_{X_0}(a, b)(b, 0) + \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f_1)} n_{\tilde{X}}((a, 0), (b, 1))(b, 1) \\ &= \partial_{k-1}^{X_0}(a) \oplus \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f_1)} n_{\tilde{X}}((a, 0), (b, 1))b \end{aligned}$$

para cada $a \in \text{Crit}_{k-1}(f_0)$ y

$$\begin{aligned} \partial_k^{\tilde{X}}(a) &= \partial_k^{\tilde{X}}((a, 1)) = \sum_{(b,s) \in \text{Crit}_{k-1}(\tilde{F})} n_{\tilde{X}}((a, 1), (b, s))(b, s) \\ &= \sum_{b \in \text{Crit}_{k-2}(f_0)} n_{\tilde{X}}((a, 1), (b, 0))(b, 0) + \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f_1)} n_{X_1}(a, b)(b, 1) \\ &= \partial_k^{\tilde{X}_1}(a) \end{aligned}$$

para cada $a \in \text{Crit}_k(f_1)$. Así $\partial_k^{\tilde{X}}$ tiene una descomposición

$$\partial_k^{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \partial_{k-1}^{X_0} & 0 \\ \Phi_{k-1}^F & \partial_k^{X_1} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $\Phi_{k-1}^F : C_{k-1}(f_0) \longrightarrow C_{k-1}(f_1)$ es el morfismo de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales $\Phi_{k-1}^F(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(f_1)} n_{\tilde{X}}((a, 0), (b, 1))b$. La condición de complejo de cadena de $(C_\bullet(\tilde{F}), \partial_\bullet^{\tilde{X}})$ implica

$$0 = \partial^{\tilde{X}} \circ \partial^{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \partial^{X_0} \circ \partial^{X_0} & 0 \\ \Phi^F \circ \partial^{X_0} + \partial^{X_1} \circ \Phi^F & \partial^{X_1} \circ \partial^{X_1} \end{pmatrix},$$

de donde,

$$0 = \Phi^F \circ \partial^{X_0} + \partial^{X_1} \circ \Phi^F = \Phi^F \circ \partial^{X_0} - \partial^{X_1} \circ \Phi^F,$$

pues $1 \equiv -1$ (mód 2). Concluimos que Φ^F es un morfismo de complejos de cadena. \square

Teorema 3.3.4 (Invariancia de la homología de Morse). *Sean M una variedad compacta y $(f_0, X_0), (f_1, X_1)$ pares de Morse-Smale definidos en M . Entonces*

$$H_k(M, f_0, X_0) \cong H_k(M, f_1, X_1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. En virtud del lema 3.3.3, si $F : f_0 \simeq f_1$ y $G : f_1 \simeq f_0$ son homotopías eventualmente estables, entonces $\Phi^G \circ \Phi^F$ y $\text{id}_{C(f_0, X_0)}$ son morfismos de complejos de cadena homotópicos. Análogamente $\Phi^F \circ \Phi^G$ y $\text{id}_{C(f_1, X_1)}$ son homotópicos. Por las propiedades del funtor de homología en las proposiciones A.0.4 y A.0.6, se satisfacen las relaciones

$$\begin{cases} \text{id}_{H_*(M, f_0, X_0)} = (\text{id}_{C(f_0, X_0)})_* = (\Phi^G \circ \Phi^F)_* = \Phi_*^G \circ \Phi_*^F, \\ \text{id}_{H_*(M, f_1, X_1)} = (\text{id}_{C(f_1, X_1)})_* = (\Phi^F \circ \Phi^G)_* = \Phi_*^F \circ \Phi_*^G. \end{cases}$$

Por lo tanto $\Phi_*^F : H_*(M, f_0, X_0) \longrightarrow H_*(M, f_1, X_1)$ es una familia de isomorfismos de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales. \square

Como comentario final, observamos que la construcción del par de Morse-Smale (\tilde{F}, \tilde{X}) se puede replicar por completo para el caso en que $\partial M \neq \emptyset$, pues la definición de X en (3.6) y la condición $\psi_0, \psi_1 \geq 0$ implican que X permanece entrante (saliente) si los dos campos X_0 y X_1 son entrantes (resp. saliente). Para este caso, consideramos la variedad diferenciable $M \times (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ para la construcción de (\tilde{F}, \tilde{X}) , cuya frontera es $\partial M \times (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. Recalcamos que la homología de Morse sólo depende de la variedad y de la elección del tipo de campo (entrante o saliente).

Teorema 3.3.5. *Si M es una variedad compacta con frontera y $(f_0, X_0), (f_1, X_1)$ son pares de Morse-Smale tales que X_0 y X_1 son entrantes (salientes)*

$$H_k(M, f_0, X_0) \cong H_k(M, f_1, X_1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

\square

La invariancia de la homología de Morse permite considerar la siguiente notación, que está bien definida salvo isomorfismos.

Definición 3.3.6. *Sea M una variedad compacta.*

- I. *Si $\partial M = \emptyset$, denotamos $HM_*(M)$ a la homología de Morse de la variedad M asociada a cualquier par de Morse-Smale definido en M .*
- II. *Si $\partial M \neq \emptyset$, denotamos $HM_*^-(M)$ ($HM_*^+(M)$) a la homología de Morse de M asociado a cualquier par de Morse-Smale definido en M cuyo campo sea entrante (resp. saliente).*

Ejemplo 3.3.7. A partir del ejemplo 3.1.2, en el que $\partial = 0$ para los dos espacios discutidos, obtenemos las homologías correspondientes:

$$HM_k(\mathbb{T}^2) = H_k(\mathbb{T}^2, f, X) = \frac{\text{Ker}(\partial_k^X)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^X)} = C_k(f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 2, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & k = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, 1, 2, \end{cases}$$

$$HM_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, f, X) = \frac{\text{Ker}(\partial_k^X)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^X)} = C_k(f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k \text{ es par}, \\ 0, & k \text{ es impar}. \end{cases}$$

Ejemplo 3.3.8. Sea $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura definida por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$, la cual es una función de Morse con exactamente dos puntos críticos: el máximo y el mínimo, de índice n y 0 , respectivamente⁶. Si (f, X) es cualquier par de Morse-Smale para f , entonces el complejo $C(f, X)$ es necesariamente

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} C_n(f) \cong \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} C_0(f) \cong \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \dots$$

por lo que

$$HM_k(\mathbb{S}^n) = H_k(\mathbb{S}^n, f, X) = \frac{\text{Ker}(\partial_k^X)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^X)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, n, \\ 0, & k \neq 0, n. \end{cases}$$

Ejemplo 3.3.9. Si g es la restricción de la función f del ejemplo 3.3.8 al hemisferio inferior $\mathbb{S}_-^n = \{x \in \mathbb{S}^n : x_{n+1} \leq 0\}$, entonces \mathbb{S}_-^n tiene exactamente un punto crítico de g , a saber, el mínimo de la función. Si X es un campo pseudogradient adaptado a g y entrante en \mathbb{S}_-^n , entonces (g, X) es un par de Morse-Smale en \mathbb{S}_-^n tal que $C(g, X)$ es

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} C_0(g) \cong \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \dots$$

por lo que

$$HM_k^-(\mathbb{S}_-^n) = H_k(\mathbb{S}_-^n, g, X) = \frac{\text{Ker}(\partial_k^X)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^X)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

⁶Véase el ejemplo 1.2.3.

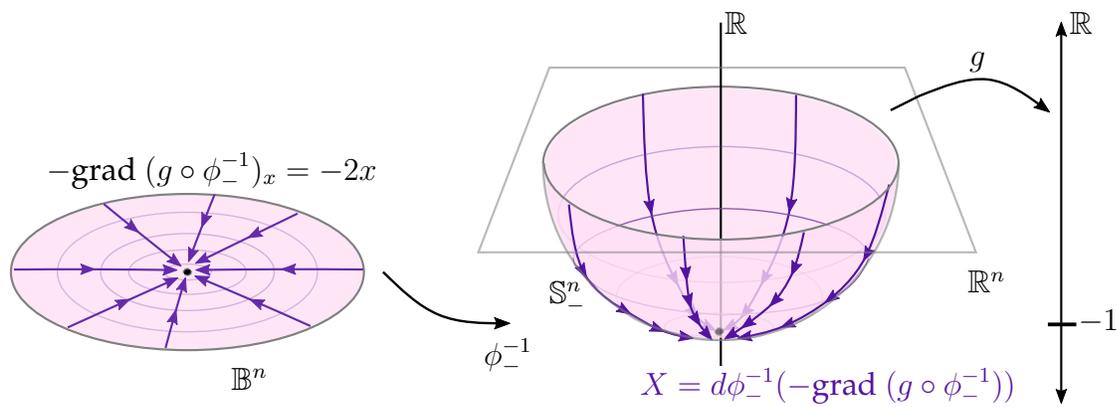


Figura 3.4: Campo pseudogradiante X adaptado a la función g y entrante en el hemisferio inferior a partir del ejemplo 1.2.3.

Capítulo 4

La homología de Morse

En este capítulo exponemos las propiedades algebraicas de la homología de Morse. Seguimos un orden ligeramente diferente al planteado en [1, capítulo 4], conservando la esencia de las pruebas. Las definiciones y argumentos técnicos se pueden consultar en el Apéndice A.

4.1. Funtorialidad de la homología

Toda función diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre dos variedades compactas M y N induce morfismos de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales $HM_k(f) : HM_k(M) \rightarrow HM_k(N)$. En esta sección presentamos la construcción de la familia $HM_*(f)$ en etapas sucesivas.

Difeomorfismos

Notamos que si f es un difeomorfismo y (g, X) es un par de Morse-Smale en M entonces $(g \circ f^{-1}, df(X))$ es un par de Morse-Smale en N tal que $a \in \text{Crit}_k(g)$ si y sólo si $f(a) \in \text{Crit}_k(g \circ f^{-1})$, por lo que f induce un isomorfismo de complejos de cadena

$$f_\bullet : C(g, X) \rightarrow C(g \circ f^{-1}, df(X)), \quad (4.1)$$

tal que $f_k(a) = f(a)$ para cada $a \in \text{Crit}_k(g)$.

Definición 4.1.1. *Sea $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades compactas. Se define $HM_*(f)$ como la familia de morfismos de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales inducidos en*

homología por el morfismo de complejos de cadena f_\bullet , es decir¹

$$HM_k(f) = ((f_\bullet)_*)_k : HM_k(M) \longrightarrow HM_k(N), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observamos que $HM_*(f)$ está bien definido salvo isomorfismo. En efecto, si (g_0, X_0) y (g_1, X_1) son pares de Morse-Smale en M y $F : M \times [-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una homotopía eventualmente estable entre g_0 y g_1 , entonces $G = F \circ (f^{-1} \times \text{id}_{[-1/3, 4/3]})$ es una homotopía eventualmente estable entre $g_0 \circ f^{-1}$ y $g_1 \circ f^{-1}$. Tal como en (4.1), consideremos los isomorfismos de complejos de cadena $f_\bullet^i : C_\bullet(g_i, X_i) \longrightarrow C_\bullet(g_i \circ f^{-1}, df(X_i))$ para $i = 0, 1$. A partir de la construcción del morfismo de complejos de cadena del lema 3.3.3 obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C_k(g_0) & \xrightarrow{f_k^0} & C_k(g_0 \circ f^{-1}) \\ \downarrow \Phi_k^F & & \downarrow \Phi_k^G \\ C_k(f_1) & \xrightarrow{f_k^1} & C_k(g_1 \circ f^{-1}) \end{array}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando el funtor de homología obtenemos

$$\begin{array}{ccc} H_k(M, g_0, X_0) & \xrightarrow{((f_\bullet^0)_*)_k} & H_k(N, g_0 \circ f^{-1}, df(X_0)) \\ \downarrow (\Phi_*^F)_k & & \downarrow (\Phi_*^G)_k \\ H_k(M, g_1, X_1) & \xrightarrow{((f_\bullet^1)_*)_k} & H_k(N, g_1 \circ f^{-1}, df(X_1)) \end{array} \quad (4.2)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$, donde los morfismos verticales son isomorfismos.

Si $f : M \longrightarrow N$ y $h : N \longrightarrow P$ son difeomorfismos entre variedades, entonces la condición $(h \circ f)_\bullet = h_\bullet \circ f_\bullet$ y las propiedades algebraicas del funtor de homología en la proposición A.0.4 implican que

$$HM_*(h \circ f) = HM_*(h) \circ HM_*(f). \quad (4.3)$$

Más aún, $HM_*(\text{id}_M) = \text{id}_{HM_*(M)}$.

Inclusiones

Si $f = i : M \hookrightarrow N$ es la inclusión de M en N y (g, X) es un par de Morse-Smale en M , entonces existe un par de Morse-Smale (\tilde{g}, \tilde{X}) en N que extiende a (g, X) tal

¹Aquí empleamos la notación del Apéndice A. Véase la definición A.0.3.

que $\text{Crit}_k(g) \subset \text{Crit}_k(\tilde{g})$ y $\partial_k^{\tilde{X}}|_{C_k(g)} = \partial_k^X$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ [1, proposición 4.6.3]. La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} & C_k(g) & \xrightarrow{\partial_k^X} & C_{k-1}(g) & \xrightarrow{\partial_{k-1}^X} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{k+1}^{\tilde{X}}} & C_k(\tilde{g}) & \xrightarrow{\partial_k^{\tilde{X}}} & C_{k-1}(\tilde{g}) & \xrightarrow{\partial_{k-1}^{\tilde{X}}} & \cdots \end{array}$$

implica que $i : M \rightarrow N$ induce un morfismo inyectivo de complejos de cadena $i_\bullet : C(g, X) \rightarrow C(\tilde{g}, \tilde{X})$ tal que $i_k(a) = a$ para cada $a \in \text{Crit}_k(g)$. De manera análoga al caso de los difeomorfismos, obtenemos la siguiente definición (válida salvo isomorfismos).

Definición 4.1.2. Sea M una subvariedad de N y $i : M \hookrightarrow N$ la inclusión. Se define $HM_*(i)$ como la familia de morfismos de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales tal que $HM_k(i) = ((i_\bullet)_*)_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Asimismo, si $j : N \hookrightarrow P$ es la inclusión de N como subvariedad de P , entonces

$$HM_*(j \circ i) = HM_*(j) \circ HM_*(i). \quad (4.4)$$

Encajes

Recordamos que todo encaje $f : M \rightarrow N$ se puede factorizar como la composición de un difeomorfismo y una inclusión:

$$\begin{array}{ccc} & & f(M) \\ & \nearrow \approx & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Extendemos la definición del funtor HM_k al caso de los encajes de la siguiente manera.

Definición 4.1.3. Si $f : M \rightarrow N$ es un encaje entonces se define $HM_k(f) = HM_k(i) \circ HM_k(\hat{f})$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, donde $\hat{f} : M \rightarrow f(M)$ es la restricción de f a su imagen.

Análogamente, obtenemos a partir de los casos anteriores (4.3) y (4.4) la observación

$$HM_*(g \circ f) = HM_*(g) \circ HM_*(f) \quad (4.5)$$

para cualquier par de encajes $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$.

Funciones diferenciables

Para el caso general en que $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable, consideramos un encaje $\varphi : M \rightarrow \mathbb{B}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como φ es una inmersión inyectiva entonces (f, φ) es una inmersión inyectiva. La compacidad de M implica que (f, φ) es un encaje [17, proposición 1.31].

Consideremos el encaje $i_N^m : N \rightarrow N \times \mathbb{B}^m$ dado por $i_N^m(x) = (x, 0)$. Sea (g, X) un par de Morse-Smale en N . Definimos el campo

$$\tilde{X}_{(x,y)} = (X_x, -y) \in T_x(N) \times \mathbb{R}^m \cong T_{(x,y)}(N \times \mathbb{B}^m), \quad (4.6)$$

y la aplicación $\tilde{g} : N \times \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{g}(x, y) = g(x) + \frac{1}{2}\|y\|^2$. Entonces (\tilde{g}, \tilde{X}) es un campo de Morse-Smale en $N \times \mathbb{B}^m$ para el cual se cumple que $(i_N^m)_\bullet : C(g, X) \rightarrow C(\tilde{g}, \tilde{X})$ es un isomorfismo, pues los únicos puntos críticos de \tilde{g} son de la forma $(a, 0) = i_N^m(a)$ para $a \in \text{Crit}(g)$ y toda trayectoria de \tilde{X} entre dos puntos críticos es la imagen de una trayectoria de X bajo i_N^m . Por lo tanto, $HM_*(i_N^m)$ es una familia de isomorfismos de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales. Del diagrama (no conmutativo)

$$\begin{array}{ccc} & & N \times \mathbb{B}^m \\ & \nearrow^{(f, \varphi)} & \uparrow i_N^m \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad (4.7)$$

y de la invertibilidad de $HM_*(i_N^m)$ obtenemos la definición de $HM_*(f)$:

Definición 4.1.4. Si $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable y $\varphi : M \rightarrow \mathbb{B}^m$ es cualquier encaje, entonces se define la familia de morfismos de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales $HM_*(f)$ por

$$HM_k(f) = HM_k(i_N^m)^{-1} \circ HM_k(f, \varphi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Recalamos que esta definición no depende de la elección del encaje φ ni de la dimensión m [1, pp. 91-92] y para el caso en que f es un encaje, recuperamos salvo isomorfismo la definición anterior de $HM_*(f)$. Condensamos las observaciones realizadas en (4.3), (4.4) y (4.5) en el resultado análogo para el caso de funciones diferenciables.

Proposición 4.1.5. Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son funciones diferenciables entre variedades compactas entonces $HM_*(g \circ f) = HM_*(g) \circ HM_*(f)$ y $HM_*(\text{id}_M) = \text{id}_{HM_*(M)}$.

Demostración. Demostraremos la primera parte. Sean $\varphi : M \rightarrow \mathbb{B}^m$ y $\psi : N \rightarrow \mathbb{B}^n$ encajes. Consideremos el encaje $j = (g, \psi) \times \text{id}_{\mathbb{B}^m} : N \times \mathbb{B}^m \rightarrow P \times \mathbb{B}^{n+m}$ tal que $j(x, y) = (g(x), \psi(x), y)$. Obtenemos el siguiente diagrama, donde el diagrama sólido es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & P \times \mathbb{B}^{n+m} & \\
 & & & \nearrow j & \uparrow i_{P \times \mathbb{B}^n}^m \\
 & & N \times \mathbb{B}^m & & P \times \mathbb{B}^n \\
 & \nearrow (f, \varphi) & \uparrow i_N^m & \nearrow (g, \psi) & \uparrow i_P^n \\
 M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P
 \end{array} \tag{4.8}$$

Observamos que $j \circ (f, \varphi) = (g \circ f, \psi \circ f, \varphi) : M \rightarrow P \times \mathbb{B}^{n+m}$ es una aplicación que tiene la forma $(g \circ f, \tau)$ donde $\tau = (\psi \circ f, \varphi) : M \rightarrow \mathbb{B}^{n+m}$ es un encaje. Además, $i_{P \times \mathbb{B}^n}^m \circ i_P^n = i_P^{n+m}$, por lo que el diagrama (no conmutativo)

$$\begin{array}{ccc}
 & P \times \mathbb{B}^{n+m} & \\
 (g \circ f, \tau) = j \circ (f, \varphi) \nearrow & \uparrow i_P^{n+m} & \\
 M & \xrightarrow{g \circ f} & P
 \end{array}$$

puede ser empleado para definir $HM_*(g \circ f)$ tal como en la definición 4.1.4. Luego, empleando la functorialidad de HM_* para el caso de los encajes y la conmutatividad del diagrama sólido en (4.8), tenemos el cálculo

$$\begin{aligned}
 HM_*(g \circ f) &= HM_*(i_P^{n+m})^{-1} \circ HM_*(g \circ f, \tau) \\
 &= HM_*(i_P^n)^{-1} \circ HM_*(i_{P \times \mathbb{B}^n}^m)^{-1} \circ HM_*(j) \circ HM_*(f, \varphi) \\
 &= HM_*(i_P^n)^{-1} \circ HM_*(g, \psi) \circ HM_*(i_N^m)^{-1} \circ HM_*(f, \varphi) \\
 &= HM_*(g) \circ HM_*(f).
 \end{aligned}$$

□

Finalizamos esta sección recalcando el siguiente hecho, que está implícito en la definición del functor HM_* para difeomorfismos y que resulta inmediato a partir de la proposición 4.1.5.

Corolario 4.1.6. Si M y N son variedades compactas difeomorfas, entonces $HM_k(M) \cong HM_k(N)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. □

4.2. Operaciones topológicas

En este apartado estudiamos el comportamiento de la homología de Morse con la suma y el producto topológicos de variedades.

Proposición 4.2.1 (Homología de la suma de dos variedades). *Sea $M \amalg N$ la suma topológica de dos variedades compactas M y N . Entonces $HM_*(M \amalg N) \cong HM_*(M) \oplus HM_*(N)$.*

Demostración. Sea $P = M \amalg N$. Dos pares de Morse-Smale (f, X) y (g, Y) definidos en M y N , respectivamente, inducen el par de Morse-Smale $(f \oplus g, X \oplus Y)$ en P , para el cual se satisface

$$\text{Crit}_k(f \oplus g) = \text{Crit}_k(f) \amalg \text{Crit}_k(g)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Así $C_*(f \oplus g) = C_*(f) \oplus C_*(g)$. Además, cada trayectoria de $X \oplus Y$ está contenida (por conexidad) en N o en P y es entonces una trayectoria de X o de Y . Obtenemos la relación $\partial_{\bullet}^{X \oplus Y} = \partial_{\bullet}^X \oplus \partial_{\bullet}^Y$. Por lo tanto, la homología de P está dada por

$$\begin{aligned} HM_k(P) &\cong H_k(P, f \oplus g, X \oplus Y) = \frac{\text{Ker}(\partial_k^X) \oplus \text{Ker}(\partial_k^Y)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^X) \oplus \text{Im}(\partial_{k+1}^Y)} \cong \frac{\text{Ker}(\partial_k^X)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^X)} \oplus \frac{\text{Ker}(\partial_k^Y)}{\text{Im}(\partial_{k+1}^Y)} \\ &\cong HM_k(M) \oplus HM_k(N). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.2.2 (Fórmula de Künneth). *Si M y N son variedades compactas, entonces*

$$HM_k(M \times N) \cong (HM_*(M) \otimes HM_*(N))_k = \bigoplus_{i+j=k} HM_i(M) \otimes HM_j(N), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sean $P = M \times N$ y $(f, X), (g, Y)$ pares de Morse-Smale definidos en M y N , respectivamente. Por la proposición A.0.9 y la invariancia de la homología respecto a pares de Morse-Smale (teorema 3.3.4), basta demostrar que existe un complejo de Morse de P isomorfo al producto tensorial de los complejos $C(f, X)$ y $C(g, Y)$. De manera natural, consideramos la función de Morse $h = f + g : P \rightarrow \mathbb{R}$ con un campo pseudogradiante adaptado $Z = (X, Y)$. Recalcamos que $\text{Crit}(h) = \text{Crit}(f) \times \text{Crit}(g)$. Más aún, tomando productos de cartas de Morse, es fácil notar que $\text{Ind}((a, b), h) = \text{Ind}(a, f) + \text{Ind}(b, g)$. Luego, obtenemos la relación

$$\text{Crit}_k(h) = \bigcup_{i+j=k} \text{Crit}_i(f) \times \text{Crit}_j(g).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C_k(h) &= \bigoplus_{i+j=k} \text{span}_{\mathbb{Z}_2}(\text{Crit}_i(f) \times \text{Crit}_j(g)) \\ &\cong^{\Phi_k} \bigoplus_{i+j=k} C_i(h) \otimes C_j(h) = (C(f, X) \otimes C(g, Y))_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde $\Phi_k(a, b) = a \otimes b$, para cada $(a, b) \in \text{Crit}_i(f) \times \text{Crit}_j(g)$ con $i + j = k$. Además, los isomorfismos Φ_k inducen un isomorfismo de complejos de cadena.²

Para probar esta última afirmación, comenzamos notando que si $a, c \in \text{Crit}(f)$ y $b, d \in \text{Crit}(g)$ son puntos tales que $a \neq c$ y $b \neq d$, entonces la observación en (1.18) implica que $\mathcal{L}_Z((a, b), (c, d)) = \mathcal{L}_X((a, c)) \times \mathcal{L}_Y(b, d)$ es no vacío sólo si

$$\begin{aligned} \text{Ind}((a, b), h) &= \text{Ind}(a, f) + \text{Ind}(b, g) \geq (\text{Ind}(c, f) + 1) + (\text{Ind}(d, g) + 1) \\ &= \text{Ind}((c, d), h) + 2. \end{aligned}$$

Sean $(a, b), (c, d) \in \text{Crit}(h)$ tales que $\text{Ind}((a, b)) = k = \text{Ind}((c, d)) + 1$, $\text{Ind}(a) = i$ y $\text{Ind}(b) = j$. Entonces

$$\mathcal{L}_X((a, b), (c, d)) = \begin{cases} \{c_a\} \times \mathcal{L}_Y(b, d), & a = c, \text{Ind}(d) = j - 1, \\ \mathcal{L}_X(a, c) \times \{c_b\}, & b = d, \text{Ind}(c) = i - 1, \\ \emptyset, & a \neq c, b \neq d, \end{cases}$$

donde c_x denota la trayectoria constante en el punto x . Así obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_k^Z(a, b) &= \sum_{(c, d) \in \text{Crit}_{k-1}(h)} n_Z((a, b), (c, d)) \cdot (c, d) \\ &= \sum_{d \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(b, d) \cdot (a, d) + \sum_{c \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, c) \cdot (c, b). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\partial^X \otimes \partial^Y)_k(a \otimes b) &= (\partial_X^j \otimes \text{id}_{C_j(g)} + \text{id}_{C_i(f)} \otimes \partial_Y^i)(a \otimes b) \\ &= \sum_{c \in \text{Crit}_{i-1}(f)} n_X(a, c) \cdot (c \otimes b) + \sum_{d \in \text{Crit}_{j-1}(g)} n_Y(b, d) \cdot (a \otimes d). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Luego, la relación $\Phi_k^{-1} \circ \partial_k^Z \circ \Phi_k = (\partial^X \otimes \partial^Y)_k$ obtenida de (4.10) y (4.11) implica que la familia de isomorfismos $\{\Phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un isomorfismo de complejos de cadena. \square

²Véase la definición A.0.8.

4.3. Dualidad de Poincaré

A continuación exponemos un resultado que relaciona los grupos de homología de una variedad entre sí de acuerdo al índice de los puntos críticos generadores. Comenzamos notando que si (f, X) es un par de Morse-Smale en la variedad M compacta (con o sin frontera) de dimensión n , entonces $(-f, -X)$ es un par de Morse-Smale en M para el que se verifica la condición (tomando cartas de Morse):

$$\text{Crit}_k(f) = \text{Crit}_{n-k}(-f), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $a, b \in \text{Crit}(f) = \text{Crit}(-f)$, entonces $\text{Ind}(a, -f) > \text{Ind}(b, -f)$ si y sólo si $\text{Ind}(a, f) = n - \text{Ind}(a, -f) < n - \text{Ind}(b, -f) = \text{Ind}(b, f)$. Por otro lado, si φ^t es el flujo de X , entonces φ^{-t} es el flujo de $-X$, por lo que $W_{-X}^u(a) = W_X^s(a)$ y $W_{-X}^s(b) = W_X^u(b)$. Así, se satisface

$$\mathcal{L}_{-X}(a, b) = \frac{W_{-X}^u(a) \cap W_{-X}^s(b)}{\mathbb{R}} = \frac{W_X^u(b) \cap W_X^s(a)}{\mathbb{R}} = \mathcal{L}_X(b, a),$$

y, por lo tanto, $n_{-X}(a, b) = n_X(b, a)$. Además, para el caso en que M es una variedad con frontera, X es entrante si y sólo si $-X$ es saliente.

A partir de las observaciones anteriores, obtenemos la expresión de la diferencial del complejo inducido $C(-f, -X)$ en un punto $a \in \text{Crit}_k(f) = \text{Crit}_{n-k}(-f)$:

$$\partial_{n-k}^{-X}(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_{n-k-1}(-f)} n_{-X}(a, b) \cdot b = \sum_{b \in \text{Crit}_{k+1}(f)} n_X(b, a) \cdot b. \quad (4.12)$$

En un diagrama (no conmutativo) tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(f) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} & C_k(f) & \xrightarrow{\partial_k^X} & C_{k-1}(f) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \cdots & \longleftarrow & C_{n-k-1}(-f) & \xleftarrow{\partial_{n-k}^{-X}} & C_{n-k}(-f) & \xleftarrow{\partial_{n-k+1}^{-X}} & C_{n-k+1}(f) & \longleftarrow & \cdots \end{array} \quad (4.13)$$

Teorema 4.3.1 (Dualidad de Poincaré). *Si M es una variedad compacta de dimensión n , entonces*

$$\begin{cases} HM_k(M) \cong HM_{n-k}(M), & k \in \mathbb{Z}, \quad \partial M = \emptyset, \\ HM_k^-(M) \cong HM_{n-k}^+(M), & k \in \mathbb{Z}, \quad \partial M \neq \emptyset. \end{cases}$$

Demostración. Sea (f, X) un par de Morse-Smale en M y consideremos el par inducido $(-f, -X)$. El diagrama (4.13) sugiere una dualidad entre los complejos. En

efecto, demostraremos que el complejo inferior en (4.13) es el complejo dual³ de $C(f, X)$.

Dado que $\text{Crit}(f)$ es finito, sabemos que todos los espacios $C_k(f) = C_{n-k}(-f)$ tienen dimensión finita. Luego,

$$C_{n-k}(-f) = C_k(f) \stackrel{\Phi_k}{\cong} (C_k(f))^*, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $\Phi_k(a) = a^*$ para cada $a \in \text{Crit}_k(f)$. Ahora probamos que los isomorfismos lineales Φ_k inducen un isomorfismo de complejos de cadena, expresado en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n-k+1}(-f) & \xrightarrow{\partial_{n-k+1}^{-X}} & C_{n-k}(-f) & \xrightarrow{\partial_{n-k}^{-X}} & C_{n-k-1}(f) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \Phi_{k-1} & & \downarrow \Phi_k & & \downarrow \Phi_{k+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & (C_{k-1}(f))^* & \xrightarrow{(\partial_k^X)^*} & (C_k(f))^* & \xrightarrow{(\partial_{k+1}^X)^*} & (C_{k+1}(f))^* & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Sea $a \in \text{Crit}_k(f)$. Por un lado, tenemos a partir de (4.12)

$$(\Phi_{k+1} \circ \partial_{n-k}^{-X})(a) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k+1}(f)} n_X(b, a) \cdot \Phi_{k+1}(b) = \sum_{b \in \text{Crit}_{k+1}(f)} n_X(b, a) \cdot b^*,$$

de donde,

$$[(\Phi_{k+1} \circ \partial_{n-k}^{-X})(a)](c) = n_X(c, a)$$

para cada $c \in \text{Crit}_{k+1}(f)$. Por otro lado,

$$((\partial_{k+1}^X)^* \circ \Phi_k)(a) = (\partial_{k+1}^X)^*(a^*) = a^* \circ \partial_{k+1}^X,$$

por lo cual

$$[((\partial_{k+1}^X)^* \circ \Phi_k)(a)](c) = a^* \left(\sum_{b \in \text{Crit}_k(f)} n_X(c, b) \cdot b \right) = n_X(c, a)$$

para cada $c \in \text{Crit}_{k+1}(f)$. Como ambas aplicaciones lineales coinciden en la base de $C_{k+1}(f)$, entonces

$$(\Phi_{k+1} \circ \partial_{n-k}^{-X})(a) = ((\partial_{k+1}^X)^* \circ \Phi_k)(a).$$

³Véase la definición A.0.10.

Por lo tanto, la familia de isomorfismos $\{\Phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un isomorfismo de complejos de cadena. Por la proposición A.0.11, tenemos

$$H_k(C(f, X)) \cong H_k(C(f, X)^*) \cong H_k((C_{n-\bullet}(-f), \partial_{n-\bullet}^{-X})) = H_{n-k}(C(-f, -X)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por la invariancia de la homología respecto a pares de Morse-Smale (teoremas 3.3.4 y 3.3.5) concluimos

$$\begin{cases} HM_k(M) \cong HM_{n-k}(M), & k \in \mathbb{Z}, \quad \partial M = \emptyset, \\ HM_k^-(M) \cong HM_{n-k}^+(M), & k \in \mathbb{Z}, \quad \partial M \neq \emptyset. \end{cases}$$

□

4.4. Desigualdades de Morse

En este apartado exponemos una consecuencia clásica de la teoría de Morse siguiendo [1, sección 4.4]. Además, incluimos una forma más general del resultado –las desigualdades fuertes de Morse (III.)– enunciada por Milnor [12, sección 5].

Definición 4.4.1. Sean M una variedad compacta y (f, X) un par de Morse-Smale definido en M . Denotamos

$$c_k(f) = \dim(C_k(f)), \quad b_k = \dim(HM_k(M)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 4.4.2 (Desigualdades de Morse). Sean M una variedad compacta de dimensión n y (f, X) un par de Morse-Smale definido en M . Entonces

- I. $c_k(f) \geq b_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$,
- II. $\chi(M) := \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k(f)$,
- III. $\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} c_j(f) \geq \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} b_j$ para cada $k = 0, \dots, n$.

Demostración. Para probar I. basta observar que $H_k(C(f, X))$ es un cociente del subespacio $\text{Ker}(\partial_k^X) \subset C_k(f)$, por lo que

$$c_k(f) = \dim(C_k(f)) \geq \dim(\text{Ker}(\partial_k^X)) \geq \dim(H_k(C(f, X))) = b_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora notamos que cada espacio vectorial $C_j(f)$ tiene una descomposición (como en A.8):

$$C_j(f) \cong \text{Ker}(\partial_j^X) \oplus \text{Im}(\partial_j^X) \cong \text{Im}(\partial_{j+1}^X) \oplus H_j(C(f, X)) \oplus \text{Im}(\partial_j^X).$$

Denotando $d_j = \dim(\text{Im}(\partial_j^X))$, tenemos la relación $c_j(f) - b_j = d_{j+1} + d_j$ para cada $j = 0, \dots, k$. Luego la condición III. se deduce del cómputo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \cdot (c_j(f) - b_j) &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \cdot (d_{j+1} + d_j) \\ &= d_{k+1} + (-1)^k d_0 = d_{k+1} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como caso particular, $d_{n+1} = \dim(\text{Im}(\partial_{n+1}^X)) = 0$. Del cálculo en (4.14) se obtiene la relación

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j c_j(f) - \sum_{j=0}^n (-1)^j b_j = (-1)^n \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \cdot (c_j(f) - b_j) = (-1)^n d_{n+1} = 0,$$

que prueba II. □

Recalamos que, a diferencia de las cantidades $c_k(f)$, los números b_k sólo dependen de la variedad M y, en general, serán denotados por $b_k(M)$. Así las desigualdades I. dan una cota inferior (intrínseca a la variedad) para el número de puntos críticos de una función de Morse. Más aún, por el corolario 4.1.6, si M y N son variedades difeomorfas, entonces

$$b_k(M) = \dim(HM_k(M)) = \dim(HM_k(N)) = b_k(N), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.15)$$

4.5. Sucesión exacta larga

Concluimos este capítulo con la exposición de un resultado clásico en álgebra homológica adaptado al contexto de la homología de Morse.

Teorema 4.5.1 (Sucesión exacta larga). *Sean M, N y P variedades compactas (con o sin frontera) y $(f, X), (g, Y)$ y (h, Z) sendos pares de Morse-Smale. Si la sucesión*

$$0 \longrightarrow C(f, X) \xrightarrow{u} C(g, Y) \xrightarrow{v} C(h, Z) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta⁴ de morfismos de complejos de cadena, entonces existe una sucesión

⁴Véase la definición A.0.12.

exacta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \cdots & \longrightarrow & H_{k+1}(C(h, Z)) \\
 & & & \swarrow \partial^{k+1} & \\
 H_k(C(f, X)) & \xrightarrow{(u_*)_k} & H_k(C(g, Y)) & \xrightarrow{(v_*)_k} & H_k(C(h, Z)) \\
 & & & \swarrow \partial^k & \\
 H_k(C(f, X)) & \xrightarrow{(u_*)_{k-1}} & \cdots & &
 \end{array}$$

La prueba es rutinaria y de carácter técnico. Una demostración completa y directa de este resultado se puede consultar en el texto de Rotman [15, teorema 6.10]. Siguiendo esta referencia, aquí solamente precisamos la definición del morfismo ∂ , el cual se obtiene del siguiente diagrama conmutativo con columnas exactas. El recorrido de la cacería de diagrama se muestra con flechas punteadas.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(f, X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} & C_k(f, X) & \xrightarrow{\partial_k^X} & C_{k-1}(f, X) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow u_{k+1} & & \downarrow u_k & & \downarrow u_{k-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(g, Y) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^Y} & C_k(g, Y) & \xrightarrow{\partial_k^Y} & C_{k-1}(g, Y) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow v_{k+1} & & \downarrow v_k & & \downarrow v_{k-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{k+1}(h, Z) & \xrightarrow{\partial_{k+1}^Z} & C_k(h, Z) & \xrightarrow{\partial_k^Z} & C_{k-1}(h, Z) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Sea $c \in \text{Ker}(\partial_k^Z) \subset C_k(h, Z)$. La suprayectividad de v_k implica que existe $b \in C_k(g, Y)$ tal que $v_k(b) = c$. Como v es un morfismo de complejos, entonces

$$(v_{k-1} \circ \partial_k^Y)(b) = (\partial_k^Z \circ v_k)(b) = \partial_k^Z(c) = 0,$$

por lo que $\partial_k^Y(b) \in \text{Ker}(v_{k-1}) = \text{Im}(u_{k-1})$. Por la inyectividad de u_{k-1} , existe un único elemento $a \in u_{k-1}^{-1}(\partial_k^Y(b))$. La clase $a + \text{Im}(\partial_k^X)$ está bien definida (i.e. $a \in \text{Ker}(\partial_{k-1}^X)$) y es independiente de los representantes $c \in \text{Ker}(\partial_k^Z)$ y $b \in v_k^{-1}(c)$ [15, proposición 6.9]. El morfismo $\partial_k : H_k(C(h, Z)) \rightarrow H_{k-1}(C(f, X))$ está dado por

$$\partial_k(c + \text{Im}(\partial_{k+1}^Z)) = a + \text{Im}(\partial_k^X) = (u_{k-1}^{-1} \circ \partial_k^Y \circ v_k^{-1})(c) + \text{Im}(\partial_k^X).$$

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo exponemos algunas aplicaciones de las herramientas desarrolladas en el capítulo 4.

5.1. Teorema de punto fijo de Brouwer

Presentamos una demostración del teorema de punto fijo de Brouwer utilizando las propiedades functoriales de la homología de Morse, adaptadas a un caso particular de variedades con frontera.

Teorema 5.1.1 (Punto fijo de Brouwer para funciones diferenciables). *Toda aplicación diferenciable $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ tiene un punto fijo.*

Demostración. El caso $n = 1$ se deriva del teorema del valor intermedio para la función continua $f - \text{id}_{[-1,1]}$. Probamos el caso $n > 1$. Supongamos que f no tiene un punto fijo. Consideremos la función diferenciable $g : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ definida por

$$g(x) = x + \left(-\langle x, u \rangle + \sqrt{\langle x, u \rangle^2 + 1 - \|x\|^2} \right) u, \quad u = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|},$$

que asigna a cada $x \in \mathbb{B}^n$ la intersección de \mathbb{S}^{n-1} con la semirrecta que parte de $f(x)$ y pasa por x .

Siguiendo la construcción del funtor HM_* en la sección 4.1 y la definición 4.1.4, podemos extender naturalmente la definición de HM_* al caso en que $M = \mathbb{B}^n$ es una variedad con frontera $N = \partial M = \mathbb{S}^{n-1}$. El diagrama no conmutativo (4.7)

correspondiente es:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{B}^n \\ & \nearrow^{(g, \text{id}_{\mathbb{B}^n})} & \uparrow i_{\mathbb{S}^{n-1}}^n \\ \mathbb{B}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^{n-1} \end{array}$$

Además, si \tilde{X} es el campo (4.6) en $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{B}^n$, entonces $(g, \text{id}_{\mathbb{B}^n})_*(\tilde{X})$ es un campo entrante en \mathbb{B}^n , por lo que la familia de morfismos inducida por el encaje $(g, \text{id}_{\mathbb{B}^n})$ cumple

$$HM_*(g, \text{id}_{\mathbb{B}^n}) : HM_*^-(\mathbb{B}^n) \longrightarrow HM_*(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Del mismo modo, HM_* se puede definir para i exactamente como en la definición 4.1.2; en este caso

$$HM_*(i) : HM_*(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow HM_*^-(\mathbb{B}^n).$$

Luego, a partir de la funtorialidad de HM_* como en la proposición 4.1.5, tenemos

$$HM_k(i) \circ HM_k(g) = \text{id}_{HM_k^-(\mathbb{B}^n)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En particular, obtenemos un isomorfismo de grupos

$$HM_{n-1}^-(\mathbb{B}^n) \xrightarrow{HM_{n-1}(g)} HM_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2,$$

Por otro lado, como \mathbb{B}^n y \mathbb{S}_-^n (el hemisferio inferior) son difeomorfos, entonces $HM_{n-1}^-(\mathbb{B}^n) \cong HM_{n-1}^-(\mathbb{S}_-^n) \cong 0$ en virtud del corolario 4.1.6 y el ejemplo 3.3.9, una contradicción. Concluimos que f tiene un punto fijo. \square

5.2. Polinomio de Poincaré

En esta sección obtenemos una aplicación de la fórmula de Künneth (proposición 4.2.2) utilizada para distinguir espacios producto.

Definición 5.2.1. Sea M una variedad compacta de dimensión n . Definimos el polinomio de Poincaré de M como

$$P_M(t) = \sum_{k=0}^n b_k(M) \cdot t^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particular, la evaluación del polinomio de Poincaré de una variedad en $t = -1$ calcula la característica de Euler de la variedad, es decir,

$$p_M(-1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot b_k(M) = \chi(M). \quad (5.1)$$

Proposición 5.2.2. *Sean M y N dos variedades compactas. Entonces $p_{M \times N} = p_M \cdot p_N$.*

Demostración. Sean n y r las dimensiones de M y N , respectivamente. A partir de la fórmula de Künneth en la proposición 4.2.2 obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} b_k(M \times N) &= \dim \left(\bigoplus_{i+j=k} HM_i(M) \otimes HM_j(N) \right) \\ &= \sum_{i+j=k} \dim(HM_i(M)) \cdot \dim(HM_j(N)) = \sum_{i+j=k} b_i(M) \cdot b_j(N) \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_{M \times N}(t) &= \sum_{k=0}^{n+r} b_k(M \times N) \cdot t^k = \sum_{k=0}^{n+r} \left(\sum_{i+j=k} b_i(M) \cdot b_j(N) \right) \cdot t^k \\ &= \left(\sum_{i=0}^n b_i(M) \cdot t^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^r b_j(N) \cdot t^j \right) = p_M(t) \cdot p_N(t). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.2.3. *Consideremos las siguientes 4-variedades, que son productos de esferas de dimensión menor o igual que 4:*

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathbb{S}^4, & M_2 &= \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1, & M_3 &= \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \\ M_4 &= \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, & M_5 &= \mathbb{T}^4 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Utilizando la proposición 5.2.2 calculamos los polinomios de Poincaré de cada variedad:

$$\begin{aligned} p_{M_1}(t) &= 1 + t^4, & p_{M_2}(t) &= (1 + t^3)(1 + t) = 1 + t + t^3 + t^4, \\ p_{M_3}(t) &= (1 + t^2)^2 = 1 + 2t^2 + t^4, & p_{M_4}(t) &= (1 + t^2)(1 + t)^2 = 1 + 2t + 2t^2 + t^4, \\ p_{M_5}(t) &= (1 + t)^4 = 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3 + t^4. \end{aligned}$$

Por la invariancia de los coeficientes del polinomio de Poincaré bajo difeomorfismos comentada en (4.15), concluimos que los espacios (5.2) no son difeomorfos tomados dos a dos.

5.3. Homología del espacio proyectivo real

En este apartado obtenemos la homología de Morse del espacio proyectivo real \mathbb{RP}^n utilizando el teorema de existencia de la sucesión exacta larga (teorema 4.5.1).

Proposición 5.3.1.

$$HM_k(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Demostración. Sea $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / \{x, -x\}$ la aplicación cociente que identifica puntos antipodales de \mathbb{S}^n . Esta función es un difeomorfismo local, por lo que una función de Morse $f : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{R}$ induce una función de Morse $\tilde{f} = f \circ p$ en \mathbb{S}^n tal que

$$\text{Crit}_k(\tilde{f}) = p^{-1}(\text{Crit}_k(f)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

es decir, $a \in \text{Crit}_k(\tilde{f})$ si y sólo si $-a \in \text{Crit}_k(\tilde{f})$. Además, si (f, X) es un par de Morse-Smale, entonces (\tilde{f}, \tilde{X}) es un par de Morse-Smale con $\tilde{X}_x = (p^*(X))_x = (dp_x)^{-1}(X_{p(x)})$. Luego γ es una curva integral de \tilde{X} exactamente cuando $p \circ \gamma$ lo es de X . Por lo tanto, γ es una trayectoria de \tilde{X} si y sólo si $-\gamma$ lo es, de donde,

$$n_{\tilde{X}}(a, b) = n_{\tilde{X}}(-a, -b), \quad \text{Ind}(a) = \text{Ind}(b) + 1. \quad (5.3)$$

Ahora observamos que p induce, por extensión lineal, un morfismo de complejos $p_\bullet : C_\bullet(\tilde{f}, \tilde{X}) \rightarrow C_\bullet(f, X)$. Para cada $\beta \in \text{Crit}(f)$ elegimos una numeración de la fibra $p^{-1}(\beta) = \{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\}$. Así $p(\tilde{\beta}_1) = p(\tilde{\beta}_2) = \beta$ y $\tilde{\beta}_2 = -\tilde{\beta}_1$. Como p es una aplicación cubriente, si σ es una trayectoria de X que une dos puntos críticos de índice consecutivo $p(a)$ y β de f , entonces existe un único levantamiento¹ $\Gamma_a(\sigma)$ de σ que parte de a y cumple $p \circ (\Gamma_a(\sigma)) = \sigma$. Recalamos que el levantamiento $\Gamma_a(\sigma)$ es trayectoria de \tilde{X} . Notemos que todo levantamiento de este tipo termina en un punto de la fibra $p^{-1}(\beta) = \{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\}$. Obtenemos la biyección

$$\mathcal{L}_X(p(a), \beta) \xrightarrow{\Gamma_a} \mathcal{L}_{\tilde{X}}(a, \tilde{\beta}_1) \sqcup \mathcal{L}_{\tilde{X}}(a, \tilde{\beta}_2), \quad \text{Ind}(a, \tilde{f}) = \text{Ind}(\beta, f) + 1. \quad (5.4)$$

¹En principio, σ está definida en \mathbb{R} y el levantamiento obtenido al escoger un punto en la fibra $\sigma^{-1}(0)$ "inicia al infinito" en a o en $-a$. Entonces escogemos, de los dos posibles levantamientos de σ , aquel (único) levantamiento $\Gamma_a(\sigma) = \tilde{\sigma}$ para el que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\sigma}(t) = a$.

A partir de (5.4), tenemos

$$\begin{aligned}
(\partial_k^X \circ p)(a) &= \sum_{\beta \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(p(a), \beta) \beta = \sum_{\beta \in \text{Crit}_{k-1}(f)} [n_{\tilde{X}}(a, \tilde{\beta}_1) + n_{\tilde{X}}(a, \tilde{\beta}_2)] \beta \\
&= \sum_{\beta \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_{\tilde{X}}(a, \tilde{\beta}_1) p(\tilde{\beta}_1) + n_{\tilde{X}}(a, \tilde{\beta}_2) p(\tilde{\beta}_2) \\
&= \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(\tilde{f})} n_{\tilde{X}}(a, b) p(b) = (p_{k-1} \circ \partial_k^{\tilde{X}})(a)
\end{aligned}$$

para cada $a \in \text{Crit}_k(f)$.

Por otro lado, definimos la aplicación $q_\bullet : C_\bullet(f, X) \rightarrow C_\bullet(\tilde{f}, \tilde{X})$ dada por $q_k(\alpha) = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2$ para cada $\alpha \in \text{Crit}_k(f)$. Observamos que se trata de un morfismo de complejos de cadena, pues usando (5.3) y (5.4):

$$\begin{aligned}
(\partial_k^{\tilde{X}} \circ q_k)(\alpha) &= \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(\tilde{f})} [n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_1, b) + n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_2, b)] b = \sum_{b \in \text{Crit}_{k-1}(\tilde{f})} [n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_1, b) + n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_1, -b)] b \\
&= \sum_{\beta \in \text{Crit}_{k-1}(f)} [n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1) + n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_1, -\tilde{\beta}_1)] \tilde{\beta}_1 + [n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) + n_{\tilde{X}}(\tilde{\alpha}_1, -\tilde{\beta}_2)] \tilde{\beta}_2 \\
&= \sum_{\beta \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(\alpha, \beta) \tilde{\beta}_1 + n_X(\alpha, \beta) \tilde{\beta}_2 = \sum_{\beta \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(\alpha, \beta) q_{k-1}(\beta) \\
&= (q_{k-1} \circ \partial_k^X)(\alpha)
\end{aligned}$$

para cada $\alpha \in \text{Crit}_k(f)$. Comprobamos que

$$0 \longrightarrow C_\bullet(f, X) \xrightarrow{q_\bullet} C_\bullet(\tilde{f}, \tilde{X}) \xrightarrow{p_\bullet} C_\bullet(f, X) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Para probar la exactitud en $C_\bullet(\tilde{f}, \tilde{X})$, basta ver que si $\text{Crit}_k(\tilde{f}) = \{a_1, -a_1, \dots, a_m, -a_m\}^2$ y $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j^+ a_j + \lambda_j^- (-a_j) \in C_k(\tilde{f}, \tilde{X})$ con $\lambda_j^\pm \in \mathbb{Z}_2$, entonces la igualdad

$$0 = p(v) = \sum_{j=1}^m (\lambda_j^+ + \lambda_j^-) p(a_j)$$

²Recalamos que el signo menos de estos elementos indica que $-a_i$ es antípoda de a_i (inverso en \mathbb{R}^{n+1}), mas no inverso aditivo en el espacio $C_k(\tilde{f})$.

es equivalente³ a $\lambda_j^+ = \lambda_j^-$ para cada $j = 1, \dots, m$, esto es,

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j^+ (a_j + (-a_j)) = q \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^+ p(a_j) \right).$$

Por el teorema 4.5.1, concluimos que existe una sucesión exacta en homología

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots & \text{-----} & \rightarrow & HM_{n+1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong 0 \\
 & & & & & \text{-----} & \nearrow & \partial^{n+1} \\
 HM_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xleftarrow{(q_*)_n} & HM_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}_2 & \text{-----} & \xrightarrow{(p_*)_n} & HM_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & & \\
 & & & & \nearrow & \partial^n & & \\
 HM_{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xleftarrow{(q_*)_{n-1}} & HM_{n-1}(\mathbb{S}^n) \cong 0 & \text{-----} & \xrightarrow{(p_*)_{n-1}} & HM_{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & & \\
 & & & & \nearrow & \partial^{n-1} & & \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & \nearrow & \partial^1 & & \\
 HM_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xleftarrow{(q_*)_0} & HM_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}_2 & \text{-----} & \xrightarrow{(p_*)_0} & HM_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & & \\
 & & & & \nearrow & \partial^0 & & \\
 HM_{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong 0 & \xleftarrow{} & \cdots & \text{-----} & \rightarrow & \cdots & &
 \end{array} \tag{5.5}$$

Por exactitud en las primeras dos líneas de (5.5), $(q_*)_n$ es un morfismo inyectivo, por lo que $HM_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong 0$, o bien $HM_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ con $(q_*)_n$ un isomorfismo. En el primer caso, la exactitud en la segunda línea de (5.5) implica que $(p_*)_n : \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ es un morfismo inyectivo, una contradicción. Luego, $HM_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$, $(q_*)_n$ es un isomorfismo y $(p_*)_n = 0$. De manera análoga, se demuestra que $(q_*)_0 = 0$ y $(p_*)_0$ es un isomorfismo.

Asimismo, se deduce sucesivamente (utilizando la exactitud de (5.5)) que los morfismos de la forma ∂^k con $1 \leq k \leq n$ y los morfismos $(q_*)_n$ y $(p_*)_1$ son isomorfismos (marcados con flechas sólidas), mientras que el resto de los morfismos son triviales (denotados con flechas punteadas). Concluimos que

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(p_*)_0} HM_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\partial^1} HM_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\partial^2} \cdots \xrightarrow{\partial^n} HM_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{(q_*)_n} \mathbb{Z}_2.$$

□

³En este caso, tenemos la expresión $\text{Crit}_k(f) = \{p(a_1), \dots, p(a_m)\}$.

Teoría de Morse Discreta

Los resultados expuestos en este trabajo pueden adaptarse a espacios de naturaleza combinatoria. Forman [5] propuso una definición de función de Morse para complejos CW —aplicable a complejos simpliciales abstractos— y demuestra que ésta induce una versión discreta del campo pseudogradiiente de la teoría de Morse clásica.

El campo gradiente discreto puede entenderse como una colección V de pares $\{\sigma \subset \tau\}$ de símlices de dimensión consecutiva, pensando a σ como la cola de una flecha que apunta hacia τ (véase [6, sección 3]). El concepto análogo al de trayectoria de un campo continuo es, en este contexto, una sucesión de símlices

$$\sigma_0 \subset \tau_0 \supset \sigma_1 \subset \tau_1 \supset \cdots \supset \sigma_r, \quad r > 0,$$

llamada un V -camino, tal que $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ y $\{\sigma_i \subset \tau_i\} \in V$ para cada $i = 0, \dots, r-1$. A partir de esta idea se obtiene una homología generada por un complejo de cadena

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} M_p \xrightarrow{\partial_p} M_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots$$

donde M_p es \mathbb{Z} -módulo libre generado por los p -símlices críticos orientados. Tal como en el caso continuo, la diferencial está determinada por el número de V -caminos que unen símlices críticos de dimensión consecutiva, contados con multiplicidad [6, teorema 7.3]. Más aún, esta homología calcula la homología simplicial del complejo (véase [5, secciones 7-8] o [8, sección 7.4]).

El estudio de esta nueva perspectiva de la teoría de Morse y su aplicación a problemas que relacionan espacios continuos y discretos (como las triangulaciones) constituyen una línea de investigación que puede continuar al presente trabajo.

Apéndice A

Álgebra homológica

En esta sección ofrecemos un compendio de las herramientas y resultados algebraicos empleados en la exposición de la homología de Morse y sus propiedades. Seguiremos como referencias centrales los textos de Weibel [18] y Dold[4]. Consideraremos un anillo con unidad R . Cuando sea necesario, explicitaremos el uso del campo \mathbb{Z}_2 .

Definición A.0.1 (Complejo de cadena y homología). *Un complejo de cadena $C = (C_\bullet, \partial_\bullet)$ está compuesto por una familia de R -módulos $C_\bullet = \{C_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y una familia de morfismos de R -módulos $\partial_\bullet = \{\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, denominados diferenciales, tales que $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. La homología de un complejo de cadena $C = (C_\bullet, \partial_\bullet)$ es una familia de R -módulos $H_*(C) = \{H_k(C)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definida por*

$$H_k(C) = \frac{\text{Ker}(\partial_k)}{\text{Im}(\partial_{k+1})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El R -módulo $H_k(C)$ se denomina el k -ésimo grupo de homología de C .

Definición A.0.2 (Morfismos de complejos de cadena). *Un morfismo de complejos de cadena $u : (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$ es una familia de morfismos de R -módulos $u_k : C_k \rightarrow D_k$ tal que $\tilde{\partial}_k \circ u_k = u_{k-1} \circ \partial_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. En un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & \dots \\ & & \downarrow u_k & & \downarrow u_{k-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{k+1}} & D_k & \xrightarrow{\tilde{\partial}_k} & D_{k-1} & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{k-1}} & \dots \end{array} \quad (\text{A.1})$$

Se definen las siguientes dos operaciones entre morfismos de complejos de cadena:

- I. La composición de dos morfismos de cadena $u : C \rightarrow D$, $v : D \rightarrow E$ se define como el morfismo de complejos de cadena $v \circ u : C \rightarrow E$ de composiciones índice a índice, es decir, $(v \circ u)_k = v_k \circ u_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.
- II. La suma de dos morfismos de complejos de cadena $u, v : C \rightarrow D$ se define como el morfismo $u + v : C \rightarrow D$ de sumas índice a índice, es decir, $(u + v)_k = u_k + v_k : C_k \rightarrow D_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Observamos que la condición (A.1) permite definir un morfismo en homología a partir de u . En efecto, el cálculo $(\tilde{\partial}_k \circ u_k)(\text{Ker}(\partial_k)) = (u_{k-1} \circ \partial_k)(\text{Ker}(\partial_k)) = 0$ implica que cada morfismo u_k se restringe a un morfismo

$$u_k : \text{Ker}(\partial_k) \rightarrow \text{Ker}(\tilde{\partial}_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Además, si $b = \partial_{k+1}(a) \in \text{Im}(\partial_{k+1})$, entonces $u_k(b) = \tilde{\partial}_{k+1}(u_{k+1}(a)) \in \text{Im}(\tilde{\partial}_{k+1})$.

Definición A.0.3 (Inducción de morfismos en homología). Sea $u : C = (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow D = (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$ un morfismo de complejos de cadena. El morfismo inducido en homología por u es la familia de morfismos de R -módulos $(u_*)_k : H_K(C) \rightarrow H_k(D)$ tal que

$$(u_*)_k(x + \text{Im}(\partial_{k+1})) = u_k(x) + \text{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}), \quad x \in \text{Ker}(\partial_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Proposición A.0.4. Si $u, v : (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$, $w : (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet) \rightarrow (E_\bullet, \hat{\partial}_\bullet)$ son morfismos de complejos de cadena, entonces¹

- I. $(w \circ u)_* = w_* \circ u_*$.
- II. $(u + v)_* = u_* + v_*$.
- III. $(-u)_* = -(u_*)$.

Demostración. Sean $x \in \text{Ker}(\partial_k)$ y $k \in \mathbb{Z}$. Denotando $\bar{x} = x + \text{Im}(\partial_{k+1})$, obtenemos

$$\begin{aligned} ((w \circ u)_*)_k(\bar{x}) &= w_k(u_k(x)) + \text{Im}(\hat{\partial}_{k+1}) = ((w_*)_k)(u_k(x) + \text{Im}(\tilde{\partial}_{k+1})) \\ &= ((w_*)_k \circ (u_*)_k)(x + \text{Im}(\partial_{k+1})) = ((w_*) \circ (u_*))_k(\bar{x}). \end{aligned}$$

¹Tal como para los morfismos de complejos de cadena, la composición y suma de dos familias de morfismos de R -módulos en homología se realiza índice a índice: $(w_* \circ u_*)_k = (w_*)_k \circ (u_*)_k$ y $(u_* + v_*)_k = (u_*)_k + (v_*)_k$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}
((u + v)_*)_k(\bar{x}) &= (u + v)_k(x) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}) = (u_k(x) + v_k(x)) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}) \\
&= (u_k(x) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1})) + (v_k(x) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1})) \\
&= (u_*)_k(x + \mathbf{Im}(\partial_{k+1})) + (v_*)_k(x + \mathbf{Im}(\partial_{k+1})) = (u_* + v_*)_k(\bar{x}),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
((-u)_*)_k(\bar{x}) &= (-u)_k(x) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}) = -u_k(x) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}) \\
&= -(u_k(x) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1})) \\
&= -((u_*)_k(x + \mathbf{Im}(\partial_{k+1}))) = (-u_*)_k(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Concluimos que las igualdades I., II. y III. se satisfacen. \square

Definición A.0.5 (Homotopía de morfismos). *Un morfismo de complejos de cadena $u : (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$ es nulhomotópico si existe una familia de morfismos de R -módulos $s_k : C_k \rightarrow D_{k+1}$ tal que $u_k = \tilde{\partial}_{k+1} \circ s_k + s_k \circ \partial_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. En un diagrama (no conmutativo):*

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & & \swarrow s_k & \downarrow u_k & \swarrow s_{k-1} & & & \\
\cdots & \longrightarrow & D_{k+1} & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{k+1}} & D_k & \xrightarrow{\tilde{\partial}_k} & D_{k-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Los morfismos de complejos de cadena $u, v : C \rightarrow D$ son homotópicos si $u - v : C \rightarrow D$ es nulhomotópico.

Proposición A.0.6. *Si $u : (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$ es nulhomotópico, entonces $u_* = 0$. Además, si $v : (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$ es homotópico a u entonces $u_* = v_*$.*

Demostración. Sea $\{s_k : C_k \rightarrow D_{k+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia de morfismos de R -módulos tal que $u_k = \tilde{\partial}_{k+1} \circ s_k + s_k \circ \partial_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Si $x \in \text{Ker}(\partial_k)$ entonces

$$\begin{aligned}
(u_*)_k(x + \mathbf{Im}(\partial_{k+1})) &= \tilde{\partial}_{k+1}(s_k(x)) + s_k(\partial_k(x)) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}) \\
&= \tilde{\partial}_{k+1}(s_k(x)) + s_k(0) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}) \\
&= \tilde{\partial}_{k+1}(s_k(x)) + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}) \\
&= 0 + \mathbf{Im}(\tilde{\partial}_{k+1}).
\end{aligned}$$

La segunda parte de la proposición es cierta pues si u es homotópico a v entonces

$$u_* = v_* + (u - v)_* = v_* + 0 = v_*.$$

\square

Definición A.0.7 (Suma directa de complejos). Sea $C^\alpha = (C_\bullet^\alpha, \partial_\bullet^\alpha)$ una familia de complejos de cadena. Se define la suma directa de la familia de complejos como

$$\bigoplus_\alpha C^\alpha = \left(\bigoplus_\alpha C_\bullet^\alpha, \bigoplus_\alpha \partial_\bullet^\alpha \right),$$

donde $(\bigoplus_\alpha \partial_k^\alpha) \circ i_k^\beta = \partial_k^\beta : C_k^\beta \longrightarrow C_{k-1}^\beta \subset \bigoplus_\alpha C_{k-1}^\alpha$ para cada inclusión $i_k^\beta : C_k^\beta \hookrightarrow \bigoplus_\alpha C_k^\alpha$ y $k \in \mathbb{Z}$.

La propiedad principal relacionada con la suma directa de complejos consiste en la conmutatividad con la homología, es decir,

$$H_k \left(\bigoplus_\alpha C^\alpha \right) \cong \bigoplus_\alpha H_k(C^\alpha), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.2})$$

Definición A.0.8 (Producto tensorial de complejos). El producto tensorial de dos complejos de cadena $C = (C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $D = (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$ se define como el complejo de cadena $C \otimes D = \left((C \otimes D)_\bullet, (\partial \otimes \tilde{\partial})_\bullet \right)$ tal que

$$(C \otimes D)_k = \bigoplus_{i+j=k} C_i \otimes D_j, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y

$$(\partial \otimes \tilde{\partial})_k = \bigoplus_{i+j=k} (\partial_i \otimes \text{id}_{D_j}) + (-1)^i (\text{id}_{C_i} \otimes \tilde{\partial}_j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La distributividad del producto tensorial sobre sumas directas implica la distributividad en cadenas:

$$\left(\bigoplus_\alpha C^\alpha \right) \otimes D \cong \bigoplus_\alpha (C^\alpha \otimes D). \quad (\text{A.3})$$

Proposición A.0.9. Sean $C = (C_\bullet, \partial_\bullet)$ y $D = (D_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet)$ complejos de cadena sobre \mathbb{Z}_2 . Entonces

$$HM_k(C \otimes D) \cong (HM_*(C) \otimes HM_*(D))_k = \bigoplus_{i+j=k} HM_i(C) \otimes HM_j(D), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.4})$$

Demostración. Notamos que el factor $(-1)^i$ de la expresión (A.4) desaparece por la elección del anillo. Comenzamos con el caso en que C es de la forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_r = \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad (\text{A.5})$$

Como \mathbb{Z}_2 es un campo, entonces $\mathbb{Z}_2 \otimes E \cong E$ para cualquier \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial E [11, proposición IV.1.3]. Así obtenemos la descomposición

$$\begin{cases} (C \otimes D)_k = \bigoplus_{i+j=k} C_i \otimes D_j \cong \mathbb{Z}_2 \otimes D_{k-r} \cong D_{k-r}, \\ (\partial \otimes \tilde{\partial})_k \cong \text{id}_{\mathbb{Z}_2} \otimes \tilde{\partial}_{k-r} \cong \tilde{\partial}_{k-r}, \end{cases}$$

pues $\partial_\bullet = 0$. Luego, $H_k(C \otimes D) \cong H_{k-r}(D)$. Por otro lado, la condición $\partial_\bullet = 0$ implica $H_k(C) = C_k/0 = C_k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$(H_*(C) \otimes H_*(D))_k = \bigoplus_{i+j=k} C_i \otimes H_j(D) \cong \mathbb{Z}_2 \otimes H_{k-r}(D) \cong H_{k-r}(D) \cong H_k(C \otimes D)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Si C es cualquier complejo de cadena de la forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_r \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad (\text{A.6})$$

entonces C es la suma directa de complejos de la forma (A.5), pues \mathbb{Z}_2 es un campo. Tal como en [4, lema 9.12], el resultado en este caso se sigue de la conmutatividad de la homología con sumas directas (A.2) y de la distributividad (A.3).

Si C es un complejo de la forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_r \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad (\text{A.7})$$

donde ∂_r es un isomorfismo, entonces $H_*(C) = 0$, por lo que $H_*(C) \otimes H_*(D) = 0$. Por otro lado, tenemos la descomposición

$$\begin{cases} (C \otimes D)_k \cong (C_r \otimes D_{k-r}) \oplus (C_{r-1} \otimes D_{k-r+1}), \\ (\partial \otimes \tilde{\partial})_k \cong (\partial_r \otimes \text{id}_{D_{k-r}} + \text{id}_{C_r} \otimes \tilde{\partial}_{k-r}) \oplus (\text{id}_{C_{r-1}} \otimes \tilde{\partial}_{k-r+1}), \end{cases}$$

pues $\partial_{r-1} = 0$. Un elemento $x = (\sum_i c_i \otimes d_i) \oplus (\sum_j c'_j \otimes d'_j) \in (C_r \otimes D_{k-r}) \oplus (C_{r-1} \otimes D_{k-r+1})$ tal que $x \in \text{Ker}((\partial \otimes \tilde{\partial})_k)$ satisface las relaciones

$$\begin{cases} 0 = \sum_i c_i \otimes \tilde{\partial}_{k-r}(d_i) \in C_r \otimes D_{k-r-1}, \\ 0 = \sum_i \partial_r(c_i) \otimes d_i + \sum_j c'_j \otimes \tilde{\partial}_{k-r+1}(d'_j) \\ = \sum_i \partial_r(c_i) \otimes d_i - \sum_j c'_j \otimes \tilde{\partial}_{k-r+1}(d'_j) \in C_{r-1} \otimes D_{k-r}. \end{cases}$$

Aplicando el morfismo $\partial_r^{-1} \otimes \text{id}_{D_{k-r}} : C_{r-1} \otimes D_{k-r} \longrightarrow C_r \otimes D_{k-r}$, tenemos

$$\sum_i c_i \otimes d_i = \sum_j \partial_r^{-1}(c'_j) \otimes \tilde{\partial}_{k-r+1}(d'_j).$$

Luego,

$$\begin{aligned} x &= \sum_j \partial_r^{-1}(c'_j) \otimes \partial_{k-r+1}(d'_j) \oplus \sum_j c'_j \otimes d'_j \\ &= (\partial \otimes \tilde{\partial})_{k+1} \left(\sum_j \partial_r^{-1}(c'_j) \otimes d'_j \right) \in \text{Im} \left((\partial \otimes \tilde{\partial})_{k+1} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_*(C \otimes D) = 0 = H_*(C) \otimes H_*(D)$.

Para el caso general, notamos que la condición de campo de \mathbb{Z}_2 implica que cada espacio C_k se puede descomponer como

$$C_k \cong \text{Ker}(\partial_k) \oplus E_k \cong \text{Im}(\partial_{k+1}) \oplus H_k(C) \oplus E_k \quad (\text{A.8})$$

para algún subespacio $E_k \cong C_k / \text{Ker}(\partial_k)$ de C_k . Además, ∂_k se anula en $\text{Im}(\partial_{k+1}) \oplus H_k(C) \cong \text{Ker}(\partial_k)$ y se restringe a un isomorfismo $\partial_k : E_k \xrightarrow{\cong} \text{Im}(\partial_k)$. Luego C es la suma directa de los complejos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \vdots & & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E_{k+1} & \xrightarrow{\cong} & \text{Im}(\partial_{k+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_k \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E_k \xrightarrow{\cong} \text{Im}(\partial_k) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

Como estos complejos son de la forma (A.6) y (A.7), el resultado se sigue de la conmutatividad de la homología con sumas directas (A.2) y de la distributividad (A.3). \square

Definición A.0.10 (Complejo dual). *Sea $C = (C_\bullet, \partial_\bullet)$ un complejo de cadena. El complejo dual de C se define como el complejo $C^* = (C^*_\bullet, \partial^*_\bullet)$ dado por*

$$\begin{aligned} C^*_k &= \text{Hom}_R(C_k, R), & \partial^*_k &: C^*_{k-1} \longrightarrow C^*_k, \\ & & f &\longmapsto f \circ \partial_k \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. En un diagrama, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longleftarrow & C_{k+1}^* & \xleftarrow{\partial_{k+1}^*} & C_k^* & \xleftarrow{\partial_k^*} & C_{k-1}^* & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Proposición A.0.11. Si R es un campo y cada espacio C_k del complejo $C = (C_\bullet, \partial_\bullet)$ tiene dimensión finita, entonces $H_\bullet(C) \cong H_\bullet(C^*)$.

Demostración. Hacemos las observaciones fundamentales²

$$\begin{cases} \text{Ker}(\partial_{k+1}^*) &= \{f \in C_k^* : (f \circ \partial_k)(C_k) = 0\} = (\text{Im}(\partial_{k+1}))^0, \\ \text{Im}(\partial_k^*) &= \{f \circ \partial_k : f \in C_{k-1}^*\} = (\text{Ker}(\partial_k))^0, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Recalamos, como en (A.8), que cada espacio C_k se puede descomponer como

$$C_k \cong \text{Ker}(\partial_k) \oplus E_k \cong \text{Im}(\partial_{k+1}) \oplus H_k(C) \oplus E_k$$

para algún subespacio $E_k \subset C_k$. Por otro lado, recordamos que si $V = S \oplus T$, entonces $S^0 \cong T^*$ [14, teorema 3.16]. Refinando este resultado para el caso en que V tiene dimensión finita, concluimos que $S^0 \cong T^* \cong T$. Por lo tanto, utilizando la finitud de la dimensión de C_k , obtenemos a partir de (A.9):

$$H_k(C^*) = \frac{(\text{Im}(\partial_{k+1}))^0}{(\text{Ker}(\partial_k))^0} \cong \frac{H_k(C) \oplus E_k}{E_k} \cong H_k(C), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Definición A.0.12 (Sucesiones exactas de morfismos). Una sucesión de morfismos de complejos de cadena

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^n = (C_\bullet^n, \partial_\bullet^n) \xrightarrow{\delta^n} C^{n-1} = (C_\bullet^{n-1}, \partial_\bullet^{n-1}) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \cdots$$

es exacta si

$$\text{Im}(\delta_k^{n+1}) = \text{Ker}(\delta_k^n), \quad k \in \mathbb{Z}$$

para cada n .

²Aquí $X^0 = \{f \in Y^* : f(X) = 0\}$ denota al anulador del subespacio lineal $X \subset Y$.

Bibliografía

- [1] Michèle Audin y Mihai Damian, *Théorie de Morse et Homologie de Floer*, Savoirs Actuels, EDP Sciences y CNRS Éditions, 2010.
- [2] Jean Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900 - 1960*, Primera Edición, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, Boston, MA, 2009.
- [3] Manfredo Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Segunda impresión, Mathematics. Theory and applications, Springer, Boston, 1992.
- [4] Albrecht Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [5] Robin Forman, *Morse theory for cell complexes*, Advances in Mathematics **134** (1998), 90–145.
- [6] _____, *A user's guide to discrete Morse theory*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **48** (2002).
- [7] Victor Guillemin y Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [8] Kevin P. Knudson, *Morse Theory: Smooth and Discrete*, World Scientific, 2015.
- [9] François Latour, *Existence de 1-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de De Rham*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **80** (1994), 135–194.
- [10] John Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Segunda edición, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, NY, 2012.
- [11] Emilio Lluis-Puebla, *Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica*, Segunda edición, Sociedad Matemática Mexicana, 2008.
- [12] John Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 51, Princeton Univ. Press, 1969.
- [13] Carlos Prieto de Castro, *Topología Básica*, Segunda edición, Ediciones científicas universitarias, Fondo de Cultura Económica, Cd. de México, 2013.
- [14] Steven Roman, *Advanced Linear Algebra*, Segunda edición, Graduate Texts in Mathematics, vol. 135, Springer-Verlag, New York, NY, 2005.
- [15] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Segunda Edición, Universitext, Springer, New York, NY, 2009.

- [16] Stephen Smale, *On gradient dynamical systems*, *Annals of Mathematics* **74** no. 1 (1961), 199–206.
- [17] Héctor Sánchez y Oscar Palmas, *Geometría Riemanniana*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
- [18] Charles Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.