



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CAMBIOS CAUSADOS POR UN CAMPO MAGNÉTICO  
SOBRE LA TASA DE DECAIMIENTO DE UN BOSÓN  
Z A UN PAR DE FERMIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

MANUEL EMILIANO MONREAL CANCINO

TUTOR

DR. ÁNGEL SÁNCHEZ CECILIO



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres y mi hermano.*

# Agradecimientos

Agradezco enormemente a mi tutor, el Dr. Ángel Sánchez Cecilio, por brindarme su apoyo y amistad durante mi último tramo en la licenciatura. Por enseñarme lo maravilloso es la física de partículas e introducirme al mundo de la investigación científica.

A el M. en C. Jorge Igor Jaber Urquiza, por su amistad y enriquecedoras discusiones que me ayudaron sobremanera en el presente trabajo.

A los miembros del sínodo, el Dr. Eleazar Cuautle Flores, el Dr. Genaro Toledo Sánchez, el Dr. José Alejandro Ayala Mercado y el Dr. Eduardo Peinado Rodríguez, por sus valiosos comentarios y correcciones sobre el presente trabajo.

A mi madre Evelia Cancino Magaña, por su descomunal amor e incansable fortaleza que me han enseñado lo apasionante de la vida. A mi padre Manuel Monreal Macías, por sus insondables reflexiones y apoyo incondicional que me propulsaron a estudiar lo que amo sin reservas. A mi hermano Ricardo, por siempre creer en mí y ser el mejor acompañante que pude pedir para esta vida. Los amo.

A mis amigos de toda la vida Alan, Héctor, Luis y Raymundo, por los años de experiencias, risas, apoyos y crecimiento. Por ser la familia que elegí.

A Félix, Derzu, Luisa, Yamil, Carlos, Rafa y todas las amistades que formé durante la licenciatura, por crear recuerdos inolvidables y experiencias que valuaré por el resto de mi vida.

Finalmente, agradezco la beca de titulación otorgada por el proyecto PAPIIT IN118219 para la realización del presente trabajo.

# Resumen

En el presente trabajo se realiza un estudio sobre el efecto que tiene un campo magnético en un proceso físico relevante en la física de altas energías: la tasa de decaimiento de una partícula vectorial, masiva, sin carga a un par de fermiones cargados. En particular, el proceso que se estudia es

$$Z \longrightarrow \psi\bar{\psi}.$$

Para incorporar el efecto del campo en este proceso, se calcula la función de autoenergía a un lazo utilizando propagadores fermiónicos modificados por el campo magnético. Después, se calcula la parte imaginaria de esta cantidad, la cual está directamente relacionada con la tasa de decaimiento a través del teorema óptico.

Los resultados encontrados en este trabajo indican que la producción de fermiones, producto del decaimiento, es inhibida por la presencia del campo magnético.

Finalmente, se compara lo calculado en el presente trabajo con los resultados encontrados en otros trabajos donde se analizan decaimientos similares. Éste estudio se lleva a cabo con la finalidad de determinar el rol del espín en los procesos de decaimiento, por lo que se hace una comparación con el caso del decaimiento escalar-escalar ( $\varphi \rightarrow \varphi^*\varphi$ ) y el decaimiento escalar-fermiones ( $\varphi \rightarrow \psi^*\psi$ ).

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Construcción de la Teoría Electrodébil . . . . .	1
1.2. Teoría de Norma Electrodébil GSW y Rompimiento de Simetría . . . . .	5
1.2.1. Reglas de Feynman . . . . .	8
1.3. Función de Autoenergía . . . . .	9
1.4. Tasa de Decaimiento y Teorema Óptico . . . . .	10
1.5. Ecuación de Dirac . . . . .	11
1.6. Ecuación de Dirac con Campo Magnético . . . . .	15
<b>2. Tasa de Decaimiento en el Vacío</b>	<b>20</b>
2.1. Modelo de Interacción y Diagrama de Feynman . . . . .	20
2.1.1. Forma Analítica del Diagrama de Feynman . . . . .	22
2.2. Cálculo de la Función de Autoenergía . . . . .	23
2.2.1. Fórmula de Reducción LSZ en Bosones Masivos . . . . .	23
2.2.2. Cálculo de la Traza . . . . .	27
2.2.3. Integrales Gaussianas d-dimensionales . . . . .	28
2.2.4. Regularización Dimensional . . . . .	31
2.3. Parte Imaginaria de la Función de Autoenergía . . . . .	33
2.4. Tasa de Decaimiento en el Vacío . . . . .	36
<b>3. Tasa de Decaimiento con Campo Magnético</b>	<b>37</b>

3.1. Modelo de Interacción y Diagrama de Feynman con Campo Magnético . . .	37
3.2. Cálculo de la Función de Autoenergía con Campo Magnético . . . . .	40
3.2.1. Integrales Gaussianas d-dimensionales . . . . .	40
3.2.2. Aproximación de Campo Débil para bajas velocidades . . . . .	44
3.2.3. Parte Imaginaria de la Función de Autoenergía . . . . .	48
3.3. Tasa de Decaimiento con Campo Magnético . . . . .	50
<b>4. Cambios en la Tasa de Decaimiento Producto del Campo Magnético</b>	<b>52</b>
4.1. Aproximación de bajas velocidades . . . . .	52
4.2. El rol del espín en el decaimiento . . . . .	56
4.2.1. Comparación con el caso escalar . . . . .	56
4.2.2. Comparación con el caso sin espín . . . . .	58
<b>Conclusiones</b>	<b>60</b>
<b>Apéndice</b>	<b>63</b>
<b>A. Trazas</b>	<b>63</b>
A.1. Cálculo de la traza sin campo . . . . .	63
A.2. Análisis de las trazas con campo . . . . .	64
A.3. Cálculo de la traza con campo . . . . .	69
<b>B. Integrales Gaussianas</b>	<b>70</b>
B.1. Integrales en el caso sin campo . . . . .	71
B.2. Integrales en el caso con campo . . . . .	73
<b>C. Regularización Dimensional</b>	<b>76</b>
<b>D. Equivalencia con la Regla de Oro de Fermi</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En el presente trabajo de tesis se llevó a cabo un análisis sobre los efectos que tiene un campo magnético sobre la tasa de decaimiento de un bosón vectorial, masivo y neutro a un par de fermiones cargados, que dentro del contexto de la teoría electrodébil podría ser un estudio relevante. En el FCC (Future Circular Collider) se producirá una cantidad cuantiosa de decaimientos, como los estudiados en el presente trabajo, que permitirá realizar determinaciones sobre propiedades del leptón- $\tau$  [1], por lo que estudios específicos sobre el decaimiento, como el aquí presentado, podrían ser importantes en un futuro.

En el presente capítulo se abordan de forma breve los precedentes teóricos e históricos necesarios para realizar el estudio sobre los cambios producidos por un campo magnético externo en la tasa de decaimiento de un bosón vectorial masivo y neutro. En particular, se describe brevemente la teoría electrodébil en donde el campo vectorial masivo, descrito en esta tesis, tiene realidad física en el bosón  $Z$ , el cual tiene un acoplamiento con distintos fermiones del modelo estándar.

### 1.1. Construcción de la Teoría Electrodébil

En el Modelo Estándar de las Partículas Elementales (ME), se condensa gran parte del conocimiento que se tiene de las partículas [2, 3]. Especialmente, este formalismo dota al estudio de partículas elementales de un poderoso conjunto de métodos para computar distintas cantidades físicas observables de relevancia para la investigación a nivel básico de la física de altas energías.

Dentro del ME se describen todas las interacciones posibles entre las partículas elementales: la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza fuerte. En el caso particular del presente trabajo, es importante conocer como emergen las primeras dos fuerzas fundamentales listadas: las interacciones electromagnética y débil [4].

Históricamente, el desarrollo de la primera teoría cuántica de campos sobre las interacciones débiles fue construida por Enrico Fermi (1934) [5] para la explicación del decaimiento  $\beta$ . Apoyándose en una analogía con el decaimiento  $\gamma$ , Fermi propone una interacción de cuatro fermiones para el decaimiento de un núcleo como se muestra en la figura 1.1.



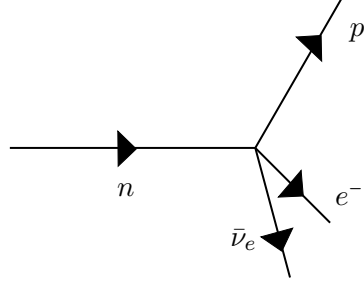


Figura 1.1: Interacción de cuatro fermiones para el decaimiento  $\beta$  de un neutrón ( $n$ ) a protón ( $p$ ), electrón ( $e^-$ ) y antineutrino del electrón ( $\bar{\nu}_e$ ) en la teoría de Fermi [5].

En el momento en el cual Fermi desarrolló su teoría, los neutrones y protones eran considerados partículas elementales por lo que los procesos de decaimiento  $\beta$  fueron intuitivamente representados como puntuales. De esta forma, Fermi propuso una *corriente* de interacción débil entre el neutrón y el protón similar al caso de la electrodinámica cuántica. Propuso una amplitud corriente-corriente de la forma

$$A\bar{\psi}_p(x)\gamma^\mu\hat{\psi}_n(x)\bar{\psi}_e(x)\gamma_\mu\hat{\psi}_\nu(x) \quad (1.1)$$

donde  $A$  es una constante relacionada con  $G_F$  la constante de Fermi,  $\gamma^\mu$  las matrices de Dirac y  $\hat{\psi}(x)$  los biespinores representantes de las partículas fermiónicas. Dada la analogía usada por Fermi, los biespinores usados para representar a la corriente débil deberían ser parecidos a los usados en la electrodinámica cuántica y deberían cumplir las mismas propiedades.

Más tarde, en 1957 Chien-Shiung Wu *et al* realizaron un experimento para probar, por primera vez, que la paridad no se conserva bajo interacciones de fuerza débil [6]; sugiriendo de esta forma una corrección sobre la formulación dada por Fermi. La operación de paridad consiste en

$$\mathbf{P} : \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

propiedad que define a los vectores y permite diferenciarlos de los vectores axiales. Un vector axial muy conocido es el momento angular  $\ell = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ , el cual bajo paridad transforma como

$$\mathbf{P} : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow (-\mathbf{U}) \times (-\mathbf{V}) = \mathbf{U} \times \mathbf{V}, \quad (1.3)$$

por lo que un vector axial no transforma igual que un vector.

De forma similar, la transformación  $P$  permite establecer una la diferencia entre escalares y pseudoescalares, los cuales transforman de forma diferente, esto es

$$\begin{array}{ll} \textit{Escalar} & \mathbf{P} : \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \rightarrow (-\mathbf{U}) \cdot (-\mathbf{V}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \\ \textit{Pseudoescalar} & \mathbf{P} : \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \rightarrow (-\mathbf{U}) \cdot ((-\mathbf{V}) \times (-\mathbf{W})) = -\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}). \end{array}$$

Para tomar en cuenta la presencia de vectores axiales y pseudoescalares, la teoría desarrollada por Fermi fue modificada. En la formulación de la teoría electrodébil las 4-corrientes

fermiónicas axiales tienen la forma

$$\tilde{\psi}_1(x, t)\gamma_\mu\gamma_5\hat{\psi}_2(x, t), \quad (1.4)$$

donde

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (1.5)$$

se conoce como la matriz gamma 5 de Dirac.

Con todo lo anterior, se observa que es posible describir corrientes axiales fermiónicas, por lo que, si se quiere introducir a la teoría de Fermi pseudoescalar invariante de Lorentz, éste debería de ser como

$$A_\mu V^\mu = A^0 V^0 - \vec{A} \cdot \vec{V}, \quad (1.6)$$

donde  $A^\mu$  es un 4-vector axial y  $V^\mu$  es un 4-vector. Esto probaría ser la clave para la construcción de la interacción débil, ya que las corrientes participantes en la interacción corriente-corriente de Fermi serían ciertas combinaciones de las corrientes de tipo  $V$  (vectorial) y de tipo  $A$  (axial). En particular, la teoría desarrollada en 1958 por Sudarshan y Marshak, y publicada por Feynman y Gell-Mann, la conocida *Teoría V - A*, se propone una interacción débil del tipo  $\bar{u}_e - \gamma_\mu(1 - \gamma_5)u_\nu$  [7].

Hasta ahora se ha hecho un recuento breve sobre el desarrollo histórico de la descripción de la fuerza débil a través de una interacción “corriente-corriente”, llamado de esta forma por la estructura de la amplitud (1.1). Esta formulación fue exitosa en predecir amplitudes de probabilidad a bajas energías, pero sufría de una patología importante en la forma de la violación de unitariedad en el modelo [5]. Esto último se observa al considerar el proceso

$$\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-, \quad (1.7)$$

cuya sección transversal crece con el cuadrado de la energía en el centro de masa, esto es

$$\sigma \approx G_F^2 E^2, \quad (1.8)$$

con  $G_F$  la constante de Fermi.

Por otro lado, la sección transversal total para partículas sin espín puede escribirse como la suma sobre el momento angular de las secciones transversales de ondas parciales [5]

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_J (2J + 1) |f_J|^2, \quad (1.9)$$

donde  $|f_J|$  es la amplitud de la onda parcial para momento angular  $J$  y  $k$  es el momentum del centro de masa. Como consecuencia de la unitariedad, la amplitud de onda parcial puede ser descrita en términos de un cambio de fase  $\delta_J$  como

$$f_J = e^{i\delta_J} \sin \delta_J, \quad (1.10)$$

de tal forma que  $|f_J| \leq 1$ . Por lo tanto, existe una cota superior sobre la sección transversal

parcial

$$\sigma_J \leq \frac{4\pi(2J+1)}{k^2}, \quad (1.11)$$

la cual decrece conforme la energía del centro de masa aumenta. Al comparar las Ecs. (1.8) y (1.11), es fácil notar que existe una discrepancia en el resultado de la sección transversal total. Esto se relaciona directamente con el hecho de que la constante de Fermi  $G_F$  no es un factor adimensional [5].

Una formulación posterior que buscaba resolver esta patología, propone la transferencia de una partícula bosónica vectorial intermediaria; esto es nuevamente, la analogía esencial de Fermi con la prolífica electrodinámica cuántica. En este ajuste, la estructura de cuatro puntos de la interacción de la fuerza débil es sustituida por una de tres puntos que se encuentra, por ejemplo, en la electrodinámica cuántica, esto es

$$G_F (\bar{\psi}\hat{\psi}) \cdot (\bar{\psi}\hat{\psi}) \longrightarrow g\bar{\psi}\gamma_\mu\hat{\psi}\hat{W}^\mu, \quad (1.12)$$

donde  $g$  es una constante que tiene dimensiones de energía y  $\hat{W}$  representa un campo bosónico. Como las corrientes débiles son vectoriales se debe de asumir que el campo  $\hat{W}$  también es vectorial (espín-1) de tal forma que la nueva estructura sea invariante de Lorentz. También se debe considerar que la masa del bosón es distinta de cero ya que las interacciones débiles son de corto alcance, a diferencia de la electrodinámica cuántica que consta de interacciones a largo alcance dado que la masa del fotón es 0.

El hecho de cambiar la estructura de la interacción con el propósito de tener una constante de acoplamiento adimensional es necesario pero no suficiente para evitar los comportamientos no físicos predichos por la teoría [5]. Por lo que es, nuevamente, imprescindible tomar a la electrodinámica cuántica como referente para proceder con la modelación de la teoría.

Al introducir el vector bosónico intermediario  $\hat{W}^\mu$ , se vuelve evidente que la diferencia fundamental entre el estudio fenomenológico de la fuerza electromagnética y la fuerza débil es la ausencia o presencia de masa en el bosón intermediario de la fuerza. Dada esta diferencia fundamental, se encontró que la clave para solventar los problemas del modelo con un bosón masivo intermediario se remedian si se considera, como en el caso de la electrodinámica cuántica, una teoría invariante de norma. Normalmente, las teorías invariantes de norma requieren que los campos de norma sean no masivos; sin embargo, esto se arregla mediante la introducción de un campo escalar que da origen a un vacío no trivial que lleva a un rompimiento espontáneo de la simetría local.

Con esto se concluye la recapitulación y motivación histórica detrás de la fuerza débil. En la siguiente sección se desarrolla el marco teórico que se usará a lo largo del presente trabajo. La teoría que se usará es una extensión natural de las ideas previamente presentadas, en donde las patologías mencionadas no estén presentes. Esta teoría es mejor conocida como la Teoría de Norma Electrodébil de Glashow-Salam-Weinberg [5].

## 1.2. Teoría de Norma Electro débil GSW y Rompimiento de Simetría

En 1961 Sheldon Glashow [8] publicó el primer artículo relacionado a la unificación de las interacciones electromagnéticas y débiles, su teoría requería la existencia de procesos neutros débiles. En 1967 Abdus Salam [9] y Steven Weinberg [10] efectuaron un rompimiento de simetría al modelo desarrollado por Glashow, y obtuvieron que la unificación de las interacciones electromagnéticas y débiles proviene del rompimiento espontáneo de simetría del grupo:  $SU(2)_L \times U(1)_Y^1$ , cuyo resultado es la producción de bosones de norma masivos  $W^\pm$ ,  $Z^0$  y uno no masivo  $\gamma$  (el fotón) mediadores de las interacciones electromagnética y débil.

En el modelo de Weinberg y Salam el rompimiento de simetría se lleva a cabo mediante el *Mecanismo de Higgs* [11–15].

El Lagrangiano de la teoría electro débil de Weinberg y Salam (considerando el campo de Higgs) *previo* al rompimiento de la simetría [16] tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + i\bar{R}\gamma^\mu D_\mu R + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \\ & + \frac{m_h^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - G_e (\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^\dagger L) \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(W)} \cdot \mathbf{G}^{(W)\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(B)} F^{(B)\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde los espinores  $L$  y  $R$  corresponden<sup>2</sup>, respectivamente, al doblete  $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}$  (con isospín débil  $I_3 = \frac{1}{2}$  para el neutrino e isospín débil  $I_3 = -\frac{1}{2}$  para el electrón izquierdo) y el singulete  $R = e_R$ . En esta formulación la relación de Gell-Mann–Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (1.14)$$

establece una conexión entre la carga electromagnética  $Q$ , el isospín débil  $I_3$  y la hipercarga  $Y$ .

En el Lagrangiano de la Ec. (1.13),  $\phi$  corresponde a un doblete de isospín de campos escalares complejos, llamado campo de Higgs. Realizar perturbaciones sobre el estado base de este campo es lo que provocará el rompimiento de simetría y la creación de las masas bosónicas el cual tiene la forma

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

En la Ec. (1.13) también está presente la derivada covariante, que opera de la siguiente forma

<sup>1</sup> $SU(2)_L$  es conocido como el grupo especial unitario de grado dos izquierdo y  $U(1)_Y$  es el grupo unitario de grado uno de hipercarga.

<sup>2</sup>Es importante hacer esta diferenciación entre espinores izquierdos y derechos dado que la interacción débil se da solo con fermiones izquierdos.

$$\begin{aligned}
\text{Doblete de } SU(2) : & & D_\mu &= \partial_\mu - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu \\
\text{Singulete de } SU(2) : & & D_\mu &= \partial_\mu + ig'B_\mu,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  representa a las matrices de Pauli. Para los campos de norma se tienen

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\mu\nu}^{(W)} &= \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\
F_{\mu\nu}^{(B)} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu
\end{aligned} \tag{1.17}$$

donde  $\mathbf{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$  es el campo de norma asociado al isoespín débil y  $B_\nu$  es el campo de norma asociado a la hipercarga.

Finalmente, los demás parámetros que aparecen en la Ec. (1.16)  $m_h$  es la masa del bosón de Higgs,  $\lambda$  es la constante de autointeracción del campo de Higgs,  $g$  es la constante de acoplamiento de isoespín débil,  $g'$  es la constante de acoplamiento de hipercarga y  $G_e$  es la constante de acoplamiento entre el campo fermiónico y el campo de Higgs.

Es importante reconocer que el signo del término de masa del campo de Higgs nos dicta la forma de su potencial. En el caso de la Ec. (1.13), el mínimo del potencial se encuentra en

$$v \equiv (\phi^\dagger \phi)_0 = \frac{m_h^2}{\lambda}. \tag{1.18}$$

Al elegir el estado base de la teoría en

$$(\phi)_0 = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

la teoría puede ser desarrollada alrededor de este estado, de modo que

$$\phi = \begin{pmatrix} G^\pm \\ v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} + G^0 \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

donde  $G^\pm$  y  $G^0$  son conocidos como bosones de Goldstone y  $h$  es el campo de Higgs.

Al sustituir esto en la Ec. (1.13) podemos notar que se modificarán los términos de interacción del campo  $\phi$  con los campos fermiónicos, dotándolos de masa.

De forma similar, y para los objetivos del presente trabajo más relevante, están los cambios

que surgen del término cinético del campo de Higgs [16]

$$\begin{aligned}
D_\mu \phi &= -\frac{i}{2} \left( gv(W_\mu^1 - iW_\mu^2) + \frac{gh(x)}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \right. \\
&\quad \left. + i\sqrt{2}\partial_\mu h(x) + v(-gW_\mu^3 + g'B_\mu) + \frac{h(x)}{\sqrt{2}}(-gW_\mu^3 + g'B_\mu) \right) \\
\implies (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} [\partial_\mu h(x)]^2 + \frac{g^2 v^2}{4} (W_\mu^1)^2 + \frac{g^2 v^2}{4} (W_\mu^2)^2 \\
&\quad + \frac{v^2}{4} [gW_\mu^3 - g'B_\mu]^2 + (\text{términos de orden superior}),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

de donde se identifican a los bosones de norma masivos  $W_\mu^\pm \equiv (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)$ , con masa  $M_W^2 = \frac{g^2 v^2}{2}$ . De forma similar, se hace notar que la combinación lineal de los campos de norma  $Z_\mu \equiv (gW_\mu^3 - g'B_\mu)$  también se ha vuelto masivo.

De la Ec. (1.21) se observa que la combinación  $A_\mu \equiv (gW_\mu^3 + g'B_\mu)$ , que es ortogonal a  $Z_\mu$ , no aparece en la Ec. (1.21). Esto último se interpreta como el bosón  $\gamma_\mu$  no adquiere masa.

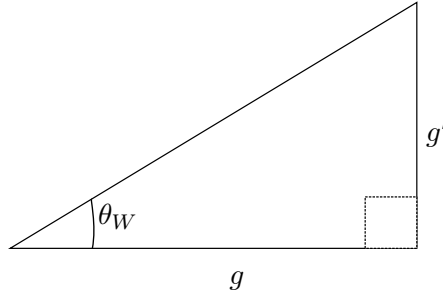


Figura 1.2: Definición del ángulo de Weinberg  $\theta_W$  en términos de  $g'$  y  $g$ .

De lo anterior se obtiene una relación entre  $Z_\mu$  y  $A_\mu$  en términos de  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$  como sigue

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

donde  $\tan \theta_W \equiv \frac{g'}{g}$ , con  $\theta_W$  el ángulo de Weinberg la cual está en función de  $g$  y  $g'$  como se muestra en la fig. (1.2).

El Lagrangiano mostrado en la Ec. (1.13) usa una forma específica del doblete y el singulete de fermiones. En éstos espinores se codifica la información sobre el electrón y su neutrino, pero la teoría GSW puede extenderse, de forma natural, a todos los demás leptones y quarks. El Lagrangiano completo de la teoría electrodébil, *posterior* al rompimiento de la simetría, es sumamente amplio y puede escribirse con todo detalle sustituyendo (1.20) en (1.13), pero para los fines del presente trabajo solo es relevante la interacción del bosón  $Z$  con el sector fermiónico, el cuál está dado por

$$\mathcal{L}_{CN} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_i \bar{q}_i \gamma^\mu (g_V^i - g_A^i \gamma^5) q_i Z_\mu, \tag{1.23}$$

donde la suma sobre el índice  $i$  corre sobre los distintos quarks y leptones (u, d, s, c, etc.)

presentes en el M.E. Los acoplamientos vectorial  $g_V$  y axial  $g_A$  tienen diferentes valores dependiendo del tipo de partícula fermiónica con la que interactúa el bosón  $Z$ . En la tabla (1.1) se muestran sus valores para las distintas partículas del M.E. [4].

Partícula	$g_V$	$g_A$
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$e, \mu, \tau$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$	$\frac{1}{2}$
$q(+\frac{2}{3})$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$\frac{1}{2}$
$q(-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$

Cuadro 1.1: Valores del acoplamiento del bosón  $Z$  con diferentes leptones y quarks.

Es a través del Lagrangiano de interacción de corriente neutra (1.23) que se puede deducir el vértice del diagrama de Feynman de nuestro interés, esto se hace con el objetivo de calcular la probabilidad de transitar de un estado inicial  $Z_\mu$  a un estado final  $\bar{f}f$ .

### 1.2.1. Reglas de Feynman

Los diagramas de Feynman son representaciones pictóricas de la probabilidad de transición dada la perturbación de las funciones de correlación de los campos cuánticos temporalmente ordenados. A estas funciones de correlación se les puede relacionar con la función de Green y los llamados propagadores. El desarrollo de los diagramas de Feynman es un paso fundamental en la construcción de la teoría cuántica de campos [2, 3, 17].

Para el presente trabajo será relevante conocer las reglas de Feynman relacionadas a la teoría electrodébil, listados a continuación

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \vec{k} \\ \longrightarrow \\ \text{wavy line} \\ Z \end{array} \equiv i \frac{-g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu / M^2}{k^2 - M^2} = i G^{\mu\nu}(k^2) \\
 \\
 \begin{array}{c} \vec{k} \\ \longrightarrow \\ \text{straight line} \\ \psi \end{array} \equiv i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} = i S(k) \\
 \\
 \begin{array}{c} \psi \\ \nearrow \\ \text{wavy line } Z \\ \bullet \\ \searrow \\ \bar{\psi} \end{array} \equiv \frac{-ig}{2 \cos \theta_W} \gamma_\mu [g_V - g_A \gamma_5]
 \end{array}$$

donde los primeros dos diagramas corresponden al propagador del bosón vectorial masivo (con la elección de norma de Landau:  $\xi = 0$  [18]) y el propagador fermiónico, respectivamen-

te, mientras que, el último diagrama corresponde al vértice de interacción. Es interesante notar que la forma del vértice de dicha teoría proviene específicamente del Lagrangiano de interacción mostrado en la Ec. (1.23).

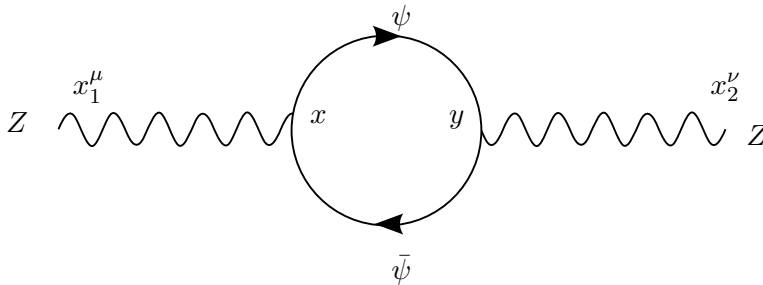


Figura 1.3: Diagrama de Feynman de la función de autoenergía del bosón  $Z$  a un lazo.

La forma de leer estos diagramas está regida por ciertas reglas que pueden aplicarse al diagrama de la figura 1.3 para obtener una forma analítica de la probabilidad de transición de este proceso. Estas reglas, en el espacio de configuraciones, son [19]

- Al tratar con fermiones, de forma espinorial, es importante fijar una dirección en la cual se lee el diagrama con respecto a las flechas del lazo.
- Se escribe el estado inicial de la partícula (entrante).
- Por cada pata externa se escribe la correspondiente onda plana del estado asintótico.
- Se escribe el factor correspondiente al vértice, cuidando el orden con el que se lee el diagrama.
- Por cada línea interna se escribe el propagador correspondiente, en este caso las líneas corresponden al propagador fermiónico por lo que es importante cuidar el sentido.
- Se escribe el estado final de la partícula (saliente).
- Se hace una suma sobre los grados de libertad indeterminados: se integra sobre el cuadrimomento indeterminado, se realiza una traza para sumar el espín (fraccionario) en el lazo y se suma sobre los estados de espín (entero) externo.
- Como se tiene un lazo cerrado se añade un factor de  $(-1)$ , este surge del teorema espín-estadística.

Al aplicar estos pasos al diagrama de la Fig. (1.3) se encuentra su forma analítica. Esta figura describe una fluctuación cuántica del bosón vectorial masivo  $Z$  en un par de fermiones virtuales que instantáneamente se emiten y reabsorben, modificando la propagación de la partícula bosónica vectorial.

En la siguiente sección se hablará de la interpretación física de este lazo de fermiones y las correcciones que se asocian con él. A primera instancia es notorio que la presencia de más lazos implica una mayor cantidad de vértices.

### 1.3. Función de Autoenergía

Dentro del marco de la teoría cuántica de campos es un resultado conocido que, para teorías débilmente acopladas, el realizar perturbaciones pequeñas sobre la función de Green de 2 puntos modela una serie de fluctuaciones cuánticas cuya amplitud de probabilidad



decae conforme mayor sea el exponente de la constante de acoplamiento. Esto se modela a través del propagador libre más los diagramas que contengan lazos cerrados y se representa, pictóricamente, como [2]

$$G_2(x, x') = \text{diagrama libre} + \text{diagrama con 1 lazo} + \text{diagrama con 2 lazos} + \dots$$

Figura 1.4: Diagrama de Feynman de la función de autoenergía del bosón Z a un lazo.

donde el acrónimo “1P” representa a la suma sobre diagramas conexos irreducibles por una partícula, es decir, que no es posible partir en dos a la contribución cortando con una sola línea. A estos diagramas conexos se les denomina función de autoenergía  $\Pi(p)$

$$\text{1P} = -i\Pi(p)$$

y se interpreta como modificaciones a la energía de la partícula debido a la autointeracción por fluctuaciones cuánticas [20].

Resulta importante notar que las patas externas del diagrama fueron *amputadas*, es decir, la función de autoenergía resulta de “quitar” los estados asintóticos, a través de la Fórmula de reducción LSZ.

Matemáticamente la función de autoenergía se puede considerar un escalar de Lorentz complejo, por su relación con la matriz S. En la siguiente sección se analiza cómo esta naturaleza compleja de la función de autoenergía nos indica la probabilidad de decaimiento del estado inicial.

### 1.4. Tasa de Decaimiento y Teorema Óptico

La matriz S, definida por Werner Heisenberg en 1942, puede ser escrita de la forma

$$S = 1 + iT, \tag{1.24}$$

donde  $T$  representa la amplitud de probabilidad de transición del sistema, de un estado a otro. Como la unitariedad (conservación de la probabilidad) de la matriz S, se debe preservar en todos los procesos, se tiene que

$$2\text{Im}T = TT^\dagger. \tag{1.25}$$

Si a esta relación la proyectamos con un estado inicial y final que sean los mismos, se está describiendo una dispersión elástica, esto es

$$2\text{Im} \langle i|T|i \rangle = \sum_f |\langle f|T|i \rangle|^2. \tag{1.26}$$

Ahora, en mecánica cuántica no relativista, la sección eficaz total es

$$\sigma_{tot} = \sum_f |\langle f|T|i\rangle|^2 \quad (1.27)$$

de modo que por (1.26), se tiene

$$\sigma_{tot} = 2\text{Im } T_{\text{elástico}}. \quad (1.28)$$

Este resultado se le conoce como el teorema óptico [21], en el cual se desarrolla una relación entre la parte imaginaria de un estado perturbativo y la sección eficaz total de una colisión.

En el marco de la teoría cuántica de campos es posible desarrollar el teorema óptico, el cual relaciona la parte imaginaria de cierto proceso con su amplitud de probabilidad de ocurrir. En particular, Cutkosky [22] desarrolló ciertas reglas generales para poder “cortar” las funciones de autoenergía y sustituir los propagadores cortados por términos específicos [21]. Por otro lado, es posible tomar la parte imaginaria de la función de autoenergía y relacionarla con la tasa de decaimiento del proceso cortado, en el sentido de Cutkosky, a nivel árbol. Dicha relación es de la forma [2, 3]

$$\Gamma = -\frac{\text{Im}(\Pi(p))}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad (1.29)$$

donde  $\Gamma$  es la tasa de decaimiento diferencial,  $\Pi(p)$  es la función de autoenergía del bosón  $Z$ ,  $\vec{p}$  es el momento de la partícula inicial y  $M$  es la masa de la partícula en reposo. Nótese que el denominador de la Ec. (1.29) toma en cuenta los efectos relativistas como la dilatación del tiempo [22, 23].

De forma similar, es posible encontrar la tasa de decaimiento de procesos a nivel árbol a través de la Regla de Oro de Fermi [24], la cual dependerá especialmente de la amplitud de probabilidad derivada del diagrama de Feynman. Por lo tanto, es posible llegar al mismo resultado de la Ec. (1.29) a través de la regla de oro de Fermi, tal como se muestra en el apéndice D.

En la siguiente sección se muestra de forma general la Ecuación de Dirac y como esta se modifica en la presencia de un campo magnético externo.

## 1.5. Ecuación de Dirac

La energía de una partícula libre no relativista con masa  $m$  y momentum  $\vec{p}$ , está dado por [25]

$$H = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.30)$$

Si ahora se desea describir este sistema a nivel cuántico, esto se logra al promover a operadores las variables<sup>3</sup>

$$\vec{p} \rightarrow \hat{p} = -i\nabla \quad \text{y} \quad H \rightarrow \hat{H} = i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.31)$$

---

<sup>3</sup>Usando unidades naturales, es decir:  $\hbar = c = 1$

Estos operadores actúan sobre la “función de onda” ( $\psi$ ) de la partícula, por lo tanto la versión “cuántica” de la Ec. (1.30), es

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi, \quad (1.32)$$

la cual es conocida como la *Ecuación de Schrödinger*, que describe la dinámica de una partícula cuántica libre de masa  $m$  a velocidades no relativistas.

La descripción anterior cambia a velocidades relativistas pues la relación energía-momentum se modifica como

$$E^2 = m^2 + p^2. \quad (1.33)$$

Sin embargo, al aplicar la Ec. (1.31) a la relación anterior se encuentra que

$$\hat{H}^2\psi = (m^2 + \hat{p}^2)\psi \implies (\hat{H}^2 - \hat{p}^2)\psi = m^2\psi, \quad (1.34)$$

la cual describe a una partícula cuántica relativista. La Ec. (1.34) puede reescribirse de forma compacta al introducir el 4-vector  $\hat{p}_\mu = (\hat{H}, \hat{\mathbf{p}})$  de modo que  $\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv -\partial_\mu\partial^\mu$ , teniendo

$$\partial_\mu\partial^\mu\psi + m^2\psi = 0, \quad (1.35)$$

la *Ecuación de Klein-Gordon*. Esta ecuación describe también partículas con energía negativa lo cual, físicamente no es posible, pues las energías negativas emergen de sistemas ligados. Para resolver esto, Dirac propuso una forma lineal de la Ecuación de Klein-Gordon, esto es

$$\hat{H}^2\psi = (\hat{p}^2 + m^2)\psi \rightarrow \hat{H}\psi = (\alpha_i\hat{p}_i + \beta m)\psi, \quad (1.36)$$

con  $i$  y  $j = 1, 2, 3$ , y donde  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes constantes. Como la relación entre la energía y momento se debe preservar por la relatividad, al elevar la ecuación anterior al cuadrado, se tiene

$$\hat{H}^2\psi = (\alpha_i\alpha_j\hat{p}_i\hat{p}_j + \beta^2m^2 + \alpha_i\hat{p}_i\beta m + \beta m\alpha_j\hat{p}_j)\psi, \quad (1.37)$$

de donde se obtiene que se necesitan cumplir las siguientes condiciones sobre los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$

$$\frac{1}{2}\{\alpha_i, \alpha_j\} = \delta_{ij}, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \quad (1.38)$$

para preservar la relación de energía-momento relativista.

Las relaciones (1.38) no se satisfacen para  $\alpha_i$  y  $\beta$  escalares, por lo que estos deben ser matrices. Al usar la propiedad cíclica de las trazas, así como las relaciones (1.38) se llega a que los coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta$  satisfacen

$$\text{Tr}(\alpha_i) = \text{Tr}(\beta) = 0, \quad \det(\alpha_i) = \det(\beta) = \pm 1, \quad (1.39)$$

reduciendo el conjunto de matrices a matrices cuadradas de  $2N \times 2N$ .

En el caso  $N = 1$ , las matrices de Pauli  $\sigma_i$  [25] satisfacen (1.38), no se puede definir  $\beta$  tal que se cumplan las condiciones de (1.39).

Para  $N = 2$ , se propone

$$\begin{aligned}\alpha_i &\equiv i\sigma_2 \otimes \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &\equiv \sigma_3 \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{1.40}$$

las cuales satisfacen de forma trivial las Ecs. (1.38) y (1.39). A esta definición de  $\beta$  se le llama la prescripción de Dirac-Pauli.

Juntando todo lo anterior, la *Ecuación de Dirac* puede escribirse como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0,\tag{1.41}$$

donde  $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\alpha^i)$ , con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , se les denomina matrices de Dirac y están dadas, en la representación de la energía, por

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.42}$$

Por construcción, las matrices de Dirac cumplen el *álgebra de Dirac ó Clifford*, el cual está dictado por la relación de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4}.\tag{1.43}$$

En la Ec. (1.41),  $\psi(x)$  es un objeto denominado biespinor, el cual tiene cuatro entradas las cuales se relacionan a 4 grados de libertad, 2 estados de energía y 2 estados de espín. Otro aspecto importante de esta ecuación es que es expresamente invariante de Lorentz y resuelve el problema que se tenía con la densidad de probabilidad en la Ecuación de Klein-Gordon (1.35). Sin embargo, la Ecuación de Dirac sigue prediciendo el hecho de que existen partículas libres con energía negativa ¿cómo es esto posible?, si esta es la realidad física, ¿existe algún mecanismo que impida que éstas partículas decaigan insosteniblemente en su energía?

Como solución a estas cuestiones, Dirac propuso: que su teoría es válida para cierto tipo de partículas, llamadas fermiones, las cuales cumplen el principio de exclusión de Pauli; es decir en el vacío existe un *mar de fermiones* que ocupan todos los estados de energía

negativa, previniendo que los fermiones decaigan indefinidamente a los niveles de energía negativa. Con esto en mente, cabe preguntarse lo que sucede si un fermión, con energía negativa, es excitado fuera del mar de partículas; ésta línea de pensamiento es seguida por la llamada *teoría de hoyos* en la cual los “hoyos” son caracterizados como fermiones con las mismas propiedades físicas que las partículas de energía positiva, pero con todos los números cuánticos contrarios. A estos objetos se les llama “antipartículas” y son objetos físicos cuya detección ha sido probada por experimentos en el área de la física de altas energías.

La Ecuación de Dirac, tiene soluciones de ondas planas, para partícula libre, esto es [24]

$$\begin{aligned}\psi_s^{(+)}(\vec{x}, t) &= u_s(E, \vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}, \\ \psi_s^{(-)}(\vec{x}, t) &= v_s(E, \vec{p}) e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)},\end{aligned}\tag{1.44}$$

donde  $E$  es la energía y  $\vec{p}$  el tres momento. Los superíndices  $+$  y  $-$  denotan las soluciones de energía positiva y negativa, respectivamente, es decir, las soluciones para partículas y antipartículas. El índice de los biespinores ( $u$  y  $v$ ) indica las configuraciones de espín para cada solución. La forma explícita para cada biespinor  $u$  y  $v$ , es

$$\begin{aligned}u_1(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, & u_2(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \\ v_1(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_2(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.45}$$

De (1.45) es fácil observar que todas las soluciones son ortogonales, y además satisfacen

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) &= \not{p} + m \\ \sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) &= \not{p} - m,\end{aligned}\tag{1.46}$$

donde  $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3$ .

Con todo lo anterior la forma más general de la función de onda que satisface la Ecuación de Dirac, está dada por [26]

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[ a_p^s u^s(p) e^{-ip\cdot x} + b_p^{*s} v^s(p) e^{ip\cdot x} \right] \Bigg|_{p^0=E_p},\tag{1.47}$$

con  $a_p^s$  y  $b_p^{*s}$  números complejos arbitrarios. Esta función de onda describe a fermiones relativistas de masa  $m$ . Estos fermiones son estables si se piensa en el mar de Dirac, sin

embargo esta idea falla al describir bosones. La solución a este problema emerge de la teoría cuántica de campos en donde la función de onda  $\psi$  se promueve a un operador

$$\psi \rightarrow \hat{\psi}, \quad (1.48)$$

que al actuar sobre el vacío “crea” ó “destruye” partículas.

En este formalismo existe una cantidad muy importante denominada propagador de Feynman, el cual se define como

$$S_F \equiv \langle 0 | T \left( \hat{\psi} \hat{\psi} \right) | 0 \rangle, \quad (1.49)$$

en donde  $T$  indica el ordenamiento temporal de los campos.

El propagador de Feynman en el espacio de configuraciones es [26]

$$S_{xy} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip \cdot (x-y)}, \quad (1.50)$$

y da la información correspondiente a la propagación de un fermión de un punto espacio-tiempo  $x$  a otro  $y$ . El término  $i\varepsilon$  garantiza la causalidad de la propagación.

Como el objetivo principal del presente trabajo consiste en comparar la tasa de decaimiento del proceso  $Z \rightarrow \bar{f}f$  bajo la influencia de un campo magnético externo, en la siguiente sección se estudia la influencia de este agente externo en la dinámica de los fermiones.

Como el campo magnético afecta directamente la dinámica de los fermiones, y por lo tanto su ecuación de movimiento, será necesario replantear su dinámica bajo la influencia de un campo magnético y ver como afecta esto al propagador de la Ec. (1.50) fermiónico.

## 1.6. Ecuación de Dirac con Campo Magnético

Siguiendo la lógica planteada en la sección anterior, el Hamiltoniano de una partícula con masa  $m$ , carga eléctrica  $e$  y momentum  $\vec{p}$ , desplazándose dentro de un campo magnético, está dado por [27]

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2, \quad (1.51)$$

donde  $\vec{A}$  es el potencial vector que se relaciona con el campo magnético a través de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

Si ahora se describe a una partícula cuántica con masa  $m$ , carga  $e$  y momentum  $\vec{p}$  en presencia de campo magnético, se tiene

$$\hat{H}\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m} \left( \hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}} \right)^2 \psi(\vec{x}, t), \quad (1.52)$$

donde  $\psi(\vec{x}, t)$  es la función de onda de la partícula. A diferencia del caso sin campo, en este caso las energías permitidas presentan un espectro discreto, esto es

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{|e\vec{B}|}{m} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.53)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ .

Para partículas cargadas con espín lo anterior se modifica un poco pues hay que añadir un término de interacción entre el espín y el campo magnético de modo que [27]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}} \right)^2 - \hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}, \quad (1.54)$$

donde  $\hat{\vec{\mu}} = g\mu_B\hat{\vec{s}}$  es el momento dipolar magnético intrínseco del electrón, con  $g$  el factor de Landé,  $\mu_B = \frac{e}{2m}$  el magnetón de Bohr y  $\hat{\vec{s}} = \frac{\hat{\vec{\sigma}}}{2}$  el operador de espín con  $\vec{\sigma}$  las matrices de Pauli.

En este caso las energías permitidas están dadas por

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{|e\vec{B}|}{m} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \mu_B \sigma B, \quad (1.55)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\sigma$  representa las diferentes proyecciones que puede tener el espín: (+) orientado en la dirección del campo y (-) en la dirección opuesta.

La relación anterior puede escribirse en forma compacta como

$$E_l = \frac{p_z^2}{2m} + 2lB\mu_B \quad (1.56)$$

donde

$$l = n + \frac{1}{2} - \frac{e\sigma}{|2e|}, \quad (1.57)$$

se le conoce como nivel de Landau.

Este es el resultado de desarrollar la Ecuación de Schrödinger bajo la influencia de un campo magnético en el escenario no relativista. Si ahora nos preguntamos ¿qué pasa en el régimen relativista?, se debe desarrollar la Ecuación de Dirac bajo la influencia de este campo externo. Para ello, guiándose del caso no relativista, se propone el reemplazo

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{\Pi}^\mu = \hat{p}^\mu - qA^\mu \quad (1.58)$$

donde  $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ , es el cuadri-potencial.

Por lo tanto, al tomar la nueva forma del operador de momentum en la Ecuación de Dirac, esta toma la forma

$$\left( \hat{\mathbb{M}} - m \right) \psi = 0, \quad (1.59)$$

la cual describe a una partícula de masa  $m$ , carga  $e$  y espín fraccionario en presencia del agente externo.

Para encontrar las soluciones a esta ecuación se multiplica por la izquierda el término

$(\hat{\mathbb{H}} + m)$ , obteniendo

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu \hat{\Pi}_\mu \hat{\Pi}_\nu - m^2) \psi = 0. \quad (1.60)$$

De esta ecuación, después de desarrollar en sus componentes simétricas y antisimétricas, se llega a

$$\left( \hat{\Pi}^\mu \hat{\Pi}_\mu - \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2 \right) \psi = 0. \quad (1.61)$$

donde  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , es el tensor de Faraday y  $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

Nótese que esta ecuación es válida para cualquier campo electromagnético. No obstante, para el caso de un campo magnético constante y homogéneo en la dirección  $z$ ; el tensor  $F_{\mu\nu}$  sólo tiene dos componentes no nulas, esto es

$$B = F_{21} = -F_{12}$$

Al tomar en cuenta lo anterior en la Ec. (1.61), se llega a

$$(\hat{\Pi}^2 + qB_z \Sigma_3 - m^2) \psi = 0. \quad (1.62)$$

donde  $\Sigma_3 \equiv \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] = i\gamma^1 \gamma^2$ , la matriz de espín a lo largo de la dirección  $z$ .

A ésta ecuación se le conoce como la Ecuación de Pauli y describe la dinámica de fermiones en presencia de un campo magnético. Esta ecuación al ser diagonal, puede ser resuelta componente a componente, obteniendo [20]

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(4\pi)^3} (a \mathbb{E}_p^+ + b^\dagger \mathbb{E}_p^-), \quad (1.63)$$

donde  $\mathbb{E}_p$  son las eigenfunciones de Ritus dada por

$$\mathbb{E}_p^r \equiv \left[ \sum_{\sigma=\pm 1} \chi_{\ell_+ \frac{\sigma-1}{2}}^r \Delta(\sigma) \right] e^{-ir(Et - p_2 x_2 - p_3 x_3)}. \quad (1.64)$$

De esta solución general se observa que la presencia del campo magnético afecta la forma en la que se “mueven” las ondas de estas partículas, lo cual era de esperarse. Con esta solución se debería de llevar a cabo un procedimiento similar a la cuantización del campo de Dirac para poder encontrar el propagador de Feynman de Fermiones cargados en presencia de campo magnético.

Al recurrir al formalismo de la cuantización canónica, el campo fermiónico influenciado por un campo magnético puede ser calculado a partir del producto temporalmente ordenado de sus campos cuánticos correspondientes, análogamente a lo hecho en la Ec. (1.49), éstos se obtienen de promover las soluciones a operadores cuánticos y escribiendo los mismos en términos de operadores de creación y aniquilación. Dicho proceso es estándar en la formulación



de teorías cuánticas de campo [17]. De esto, se obtiene

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A(p) \sum_{\sigma=\pm 1} \left( \hat{a}_p^\sigma \mathbb{E}_p^+ u_p^\sigma + \hat{b}_p^{\sigma\dagger} \mathbb{E}_p^- v_p^\sigma \right), \quad (1.65)$$

con

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \sum \int \frac{dp_2 dp_3}{(2\pi)^2}, \quad (1.66)$$

donde  $A(p)$  es una constante de normalización. Dada esta cuantización, se cumplen las relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{a}_p^\sigma, \hat{a}_{p'}^{\sigma'\dagger}\} = \{\hat{b}_p^\sigma, \hat{b}_{p'}^{\sigma'\dagger}\} = (2\pi)^2 \delta^{\ell\ell'} \delta^{\sigma\sigma'} \delta(p_2 - p_2') \delta(p_3 - p_3'). \quad (1.67)$$

Al utilizar las relaciones de conmutación anteriores, junto con las propiedades de las eigenfunciones de Ritus, se llega a [20, 28]

$$\begin{aligned} S_F^B(x, y) &\equiv \langle 0 | T \left( \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) \right) | 0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{E}_p(x) (\not{p} + m) \bar{\mathbb{E}}_p(y)}{\bar{p}^2 - m^2 i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Es importante notar que la propagación de la información depende de la dirección del momentum sobre la que se mida, esto proviene de las funciones de Ritus.

Por otro lado, en 1951, Schwinger [29] realizó un análisis que consistió en diagonalizar la función de Green y calcular la acción sobre diferentes estados en la métrica Euclideana. En la métrica de Minkowski, la forma del propagador obtenida por Schwinger está dado por [30]

$$S_f^B(x, y) = \Omega(x, y) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_f^B(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (1.69)$$

donde

$$\Omega(x, y) = \exp \left( -i \frac{e}{2} x_\mu F^{\mu\nu} y_\nu \right), \quad (1.70)$$

es conocida como la fase de Schwinger.

Si se considera que el campo magnético está definido sobre la dirección  $z$ , se tiene que [30]

$$S_F^B(q) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp \left[ -is \left( m^2 - q_\parallel^2 - q_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} \right) \right] \left[ \left( m + \not{q}_\parallel \right) e^{-ieBs\Sigma_3} + \frac{\not{q}_\perp}{\cos(eBs)} \right], \quad (1.71)$$

en donde  $q_\parallel$  y  $q_\perp$  son las componentes del cuadrimento paralelas y perpendiculares al campo magnético respectivamente

$$q_{\parallel}^{\mu} = (q^0, 0, 0, q^3) \quad y \quad q_{\perp}^{\mu} = (0, q^1, q^2, 0).$$

También valdrá la pena separar las matrices de Dirac en perpendiculares y paralelas al campo magnético de la siguiente forma

$$\gamma_{\parallel} = \gamma_0, \gamma_3,$$

$$\gamma_{\perp} = \gamma_1, \gamma_2,$$

ya que en las secciones donde el campo magnético sea relevante, éstas separaciones serán de gran utilidad.

Con esto se termina la recapitulación de la física necesaria para desarrollar los cálculos que al presente trabajo de tesis le son relevantes.

## Capítulo 2

# Tasa de Decaimiento en el Vacío

En el presente capítulo, partiendo de las reglas de Feynman que provienen del Lagrangiano de la teoría electrodébil para el bosón  $Z$ . Se calcula la función de autoenergía. Posteriormente, se utiliza la fórmula de reducción LSZ para bosones masivos sobre la forma analítica del diagrama, con el objetivo de comparar el resultado que proviene del teorema óptico con aquel que se obtiene de la regla de oro de Fermi para el proceso  $Z \rightarrow \psi\bar{\psi}$ .

El objetivo de esta sección es mostrar las herramientas y técnicas usadas para obtener una forma sencilla de la tasa de decaimiento a través de la función de autoenergía. Éstos mismos desarrollos serán utilizados en el capítulo 3 para calcular la tasa de decaimiento bajo la influencia de un campo magnético homogéneo. Además, en esta sección se llegará a un resultado asequible por distintos métodos y será equiparable con el resultado del capítulo 3, el cuál es el principal objetivo del presente trabajo.

### 2.1. Modelo de Interacción y Diagrama de Feynman

El modelo que se sigue es el desarrollado en la teoría electrodébil posterior al rompimiento de simetría, mostrado en la sección 1.1. Esta teoría, parte del M.E., y es la responsable de los decaimientos que se observan en diferentes experimentos llevados a cabo en los aceleradores de partículas. El decaimiento  $Z \rightarrow f\bar{f}$  es uno de los principales canales de decaimiento observados experimentalmente. Esta interacción proviene del término del Lagrangiano del M.E.

$$\mathcal{L}_{Z\psi\bar{\psi}} = \frac{g}{2\cos\theta_W} \psi\gamma_\mu [g_V - g_A\gamma_5] Z^\mu \bar{\psi}, \quad (2.1)$$

donde  $Z^\mu$ , representa al campo del bosón vectorial masivo,  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  representan al campo fermiónico cargado y a su conjugado correspondiente.

De la teoría cuántica de campos, se sabe que la propagación del bosón masivo recibe correcciones cuánticas de la interacción con los campos fermiónicos. Una de estas correcciones cuánticas se ilustra en la figura 2.1.

Este diagrama de autoenergía es importante de analizar, ya que contiene información sobre modificaciones a la masa, en la parte real, e información sobre la probabilidad de que el bosón decaiga, en la parte imaginaria [2].

El teorema óptico permite, el cálculo de la parte imaginaria de las funciones de autoenergía

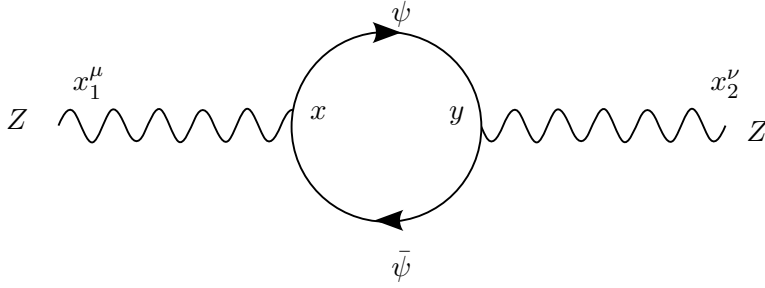


Figura 2.1: Diagrama de Feynman de la función de autoenergía a un lazo.

mediante “el corte” del diagrama. Este corte sobre el diagrama representa el hecho de que las partículas dentro del lazo pasan de ser partículas virtuales a partículas reales. Este proceso se representa de forma gráfica, en la figura 2.2, como una línea punteada que “corta” el lazo en el diagrama de autoenergía.

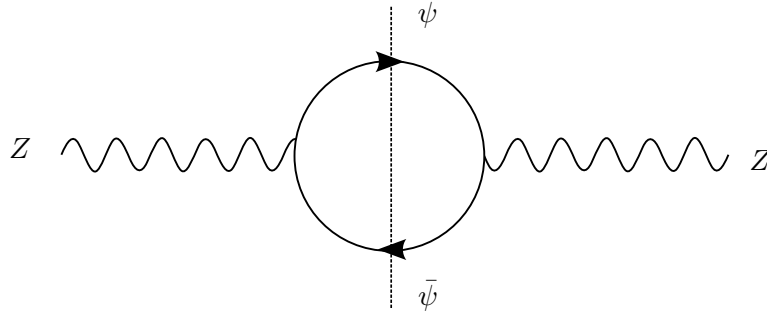


Figura 2.2: Diagrama de Feynman de la función de autoenergía cortado.

Con esta idea en mente, se procede al cálculo de la función de autoenergía del bosón  $Z$ . Usando las reglas de Feynman en el espacio de configuraciones, el diagrama mostrado en la figura 2.1 tiene la siguiente forma analítica

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = (-1) \int d^4x \int d^4y G_{1x}^{\mu\alpha} \text{Tr} \left[ S_{xy} \frac{-ig}{2 \cos \theta_W} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) S_{yx} \right. \\ \left. \times \frac{-ig}{2 \cos \theta_W} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] G_{y2}^{\beta\nu} \quad (2.2)$$

donde  $S_{xy}$  es el propagador de un fermión,  $S_{yx}$  es el propagador del antifermión;  $G_{1x}^{\mu\alpha}$  y  $G_{y2}^{\beta\nu}$  representa a los propagadores de los bosones masivos; el término  $(-1)$  se debe al teorema spin-estadística y la forma en la que podemos anticonmutar a los fermiones; la traza se debe a la suma sobre los índices espinoriales en los propagadores fermiónicos y los vértices de la teoría.

El propagador de los bosones de norma se puede escribir como [18]

$$G_{1x}^{\mu\nu} \equiv G^{\mu\nu}(x_1, x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}^{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot (x_1 - x)} \quad (2.3)$$

donde

$$\tilde{G}_Z^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - m_Z^2} \left( g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_Z^2} \right), \quad (2.4)$$

con  $k^\mu$  es el cuadrimomentum,  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico de Minkowski,  $m_Z$  es la masa del bosón  $Z$  y  $\xi$  es el parámetro que fija la norma. Esta última ecuación puede descomponerse en

$$\tilde{G}_Z^{\mu\nu}(k) = \underbrace{\frac{-i}{k^2 - m_Z^2} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2} \right)}_A - \underbrace{\frac{k^\mu k^\nu}{m_Z^2} \frac{i}{k^2 - \xi m_Z^2}}_B, \quad (2.5)$$

de donde es claro observar que “A” es independiente de la elección de  $\xi$ , mientras que “B” contiene toda la dependencia del parámetro que fija la norma. Como el parámetro  $\xi$  se introduce en la teoría como un término que fija la norma, se espera que, en todos los cálculos de valores de expectación de operadores invariantes de norma y elementos de la matriz  $S$ , no aparezcan términos con este parámetro. Esto se encuentra ligado a la invariancia de norma que se manifiesta como la conservación de corriente [2, 3]. Obsérvese que al tomar el límite  $\xi \rightarrow \infty$  en la Ec. (2.5) solo el término “A” es el que sobrevive, a esta elección del parámetro  $\xi$  se le conoce como norma unitaria y es con la que se trabajará de aquí en adelante.

### 2.1.1. Forma Analítica del Diagrama de Feynman

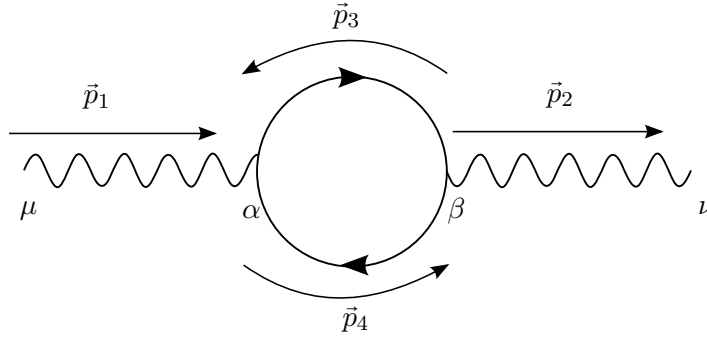


Figura 2.3: Diagrama de autoenergía con los momentos especificados.

Al sustituir la forma explícita de los propagadores de las Ecs. (1.50) y (2.4) en la Ec. (2.2), con los momentos mostrados en el diagrama de la figura 2.3, se obtiene la siguiente

expresión

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\mu\nu} = & \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \\
& \times e^{ip_1(x_1-x)} e^{ip_2(y-x_2)} e^{ip_3(y-x)} e^{ip_4(x-y)} \frac{-i \left( g^{\mu\alpha} - \frac{p_1^\mu p_1^\alpha}{M^2} \right)}{p_1^2 - M^2 + i\varepsilon} \\
& \times \text{Tr} \left[ \frac{i(\not{p}_3 + m)}{p_3^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \frac{i(\not{p}_4 + m)}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] \frac{-i \left( g^{\beta\nu} - \frac{p_2^\beta p_2^\nu}{M^2} \right)}{p_2^2 - M^2 + i\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Las integrales sobre  $x$  y  $y$ , son inmediatas y dan origen a las deltas de Dirac  $\delta^{(4)}(-p_1 - p_3 + p_4)$  y  $\delta^{(4)}(p_2 + p_3 - p_4)$ , las cuales corresponden a la conservación del momento en los vértices. Integrando sobre  $p_3$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\mu\nu} = & \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_1x_1} e^{-ip_2x_2} \frac{-i \left( g^{\mu\alpha} - \frac{p_1^\mu p_1^\alpha}{M^2} \right)}{p_1^2 - M^2 + i\varepsilon} \\
& \times \text{Tr} \left[ \frac{i(\not{p}_4 - \not{p}_1 + m)}{(p_4 - p_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \frac{i(\not{p}_4 + m)}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] \\
& \times \frac{-i \left( g^{\beta\nu} - \frac{p_2^\beta p_2^\nu}{M^2} \right)}{p_2^2 - M^2 + i\varepsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Esta forma de la matriz  $\mathcal{M}^{\mu\nu}$  tiene que analizarse con mayor detalle ya que se busca trabajar con la función de autoenergía, cantidad que se relaciona con el resultado obtenido en esta sección. A continuación se hará uso de la fórmula de reducción LSZ con el fin de “amputar” los estados asintóticos y obtener como resultado la función de autoenergía.

## 2.2. Cálculo de la Función de Autoenergía

### 2.2.1. Fórmula de Reducción LSZ en Bosones Masivos

Dentro del formalismo de la teoría cuántica de campos la fórmula de reducción LSZ es una herramienta sumamente importante, cuyo procedimiento (pictográficamente) se centra en “amputar” los estados asintóticos del diagrama de Feynman. En el caso particular de la Ec. (2.7), se tiene la siguiente relación

$$|\bar{\mathcal{M}}^{\mu\nu}| \xrightarrow{\text{Reducción LSZ}} \Pi(p),$$

donde  $\bar{\mathcal{M}}^{\mu\nu}$  representa el promedio de la suma sobre las probabilidades de configuración de polarización.

Para tener una idea general de este proceso de amputación, es conveniente recordar que [2]

$$S = 1 + iT, \tag{2.8}$$

donde la matriz  $T$ , conocida como la matriz de transición, codifica la información sobre los

elementos de matriz invariantes  $\mathcal{M}$

$$\langle p_1 p_2 \dots | iT | k_A k_B \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum p_f) \cdot i\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_f). \quad (2.9)$$

El elemento de matriz  $\mathcal{M}$  es análogo a la amplitud de dispersión en mecánica cuántica y es calculado de forma explícita usando las reglas de Feynman. En el caso particular de la Ec. (2.9), el elemento de matriz  $\mathcal{M}$  describe un proceso de 2 a  $n$  cuerpos.

En particular, para el proceso  $Z \rightarrow Z$ , la probabilidad de transitar del estado inicial al estado final es

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= 2\sqrt{E_{p_1} E_{p_2}} \langle \Omega | a_{p_2}(\infty) a_{p_1}^\dagger(-\infty) | \Omega \rangle, \\ &= 2\sqrt{E_{p_i} E_{p_f}} \langle \Omega | T \left\{ [a_{p_f}(\infty) - a_{p_f}(-\infty)] [a_{p_i}^\dagger(-\infty) - a_{p_i}^\dagger(\infty)] \right\} | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde

$$|p, \lambda\rangle = \sqrt{2E_p} a_\lambda^\dagger(p) |0\rangle. \quad (2.11)$$

En la segunda igualdad se ha usado el hecho que

$$\langle \Omega | a_p^\dagger(\infty) = 0 \quad \text{y} \quad a_p(-\infty) | \Omega \rangle = 0 \quad (2.12)$$

con  $a_p^\dagger$  y  $a_p$  operadores de creación y aniquilación de bosones masivos con momentum  $p$  y estado de polarización  $\lambda$ ,  $|0\rangle$  denota el estado del vacío.

Al igual que el caso fermiónico, discutido en el capítulo 1, la forma general del campo vectorial masivo puede ser escrita en términos de sus operadores de creación y aniquilación, esto es [17]:

$$Z^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[ \varepsilon^\mu(p, \lambda) a_\lambda(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(p, \lambda) a_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right]. \quad (2.13)$$

Es importante notar que la elección de norma y la condición de Lorentz, eliminan los estados de polarización no físicos de la teoría [18].

Para la definición del propagador de nuestro bosón masivo, de la Ec. (2.5), se eligió la norma unitaria,  $\xi \rightarrow \infty$ . En esta norma, la suma sobre polarizaciones es [2]

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(k, \lambda) \varepsilon^{\nu*}(k, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2}. \quad (2.14)$$

Para obtener la fórmula de reducción LSZ para los bosones  $Z$ , se necesita reescribir a los operadores de creación y aniquilación, de esa ecuación, en términos del operador de campo  $Z$  de la Ec. (2.13). Lo anterior se logra usando las siguientes igualdades

$$i \int d^4x \varepsilon_\mu(p, \lambda') e^{ip \cdot x} (\partial^2 + M^2) Z^\mu(x) = \sqrt{2E_p} [a_p^{\lambda'}(\infty) - a_p^{\lambda'}(-\infty)], \quad (2.15)$$

y

$$-i \int d^4x \varepsilon_\mu^*(p, \lambda') e^{-ip \cdot x} (\partial^2 + M^2) Z^{\mu\dagger}(x) = \sqrt{2E_p} \left[ a_p^{\dagger\lambda'}(\infty) - a_p^{\dagger\lambda'}(-\infty) \right], \quad (2.16)$$

las cuales se obtienen haciendo el siguiente análisis.

Considérese el siguiente término

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} (i\partial_t + E_p) Z^\mu(x) &= \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} (i\partial_t + E_p) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \\ &\times \sum_{\lambda=1}^3 \left[ \varepsilon^\mu(k, \lambda) a_\lambda(k) e^{-ik \cdot x} + \varepsilon^{\mu*}(k, \lambda) a_\lambda^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

en donde, en el lado derecho se ha usado la Ec. (2.13). Distribuyendo el operador diferencial en el lado derecho de la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} (i\partial_t + E_p) Z^\mu(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x \sum_{\lambda=1}^3 \left[ \varepsilon^\mu(k, \lambda) a_\lambda(k) \frac{E_p + E_k}{\sqrt{2E_k}} e^{-iE_k t + i(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{\mu*}(k, \lambda) a_\lambda^\dagger(k) \frac{E_p - E_k}{\sqrt{2E_k}} e^{iE_k t + i(-\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

y usando la definición de la delta de Dirac, la ecuación anterior se reduce a

$$\int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} (i\partial_t + E_p) Z^\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \left[ \varepsilon^\mu(p, \lambda) a_\lambda(p) \sqrt{2E_p} e^{-iE_p t} \right]. \quad (2.19)$$

Las ideas anteriores también pueden ser aplicadas al siguiente término

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ip \cdot x} (\square + M^2) Z^\mu(x) &= \int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 - \nabla^2 + M^2) Z^\mu(x) \\ &= \int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 + p^2 + M^2) Z^\mu(x) \\ &= \int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 + E_p^2) Z^\mu(x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

en donde, en la segunda igualdad se ha integrado (dos veces) por partes la parte espacial y se ha usado la condición de frontera de que en infinito los campos se anulan.

En la última igualdad, se identificó la relación de dispersión  $E^2 = M^2 + \vec{p}^2$ .

Ahora, reescribiendo el integrando de la Ec. (2.20), como [31]

$$e^{ip \cdot x} (\partial_t^2 + E_p^2) Z^\mu(x) = -i\partial_t \left[ e^{ip \cdot x} (i\partial_t + E_p) Z^\mu(x) \right], \quad (2.21)$$



la Ec. (2.20), adquiere la siguiente forma

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial^2 + M^2) Z^\mu(x) = -i \int dt \partial_t \left[ e^{iE_p t} \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} (i\partial_t + E_p) Z^\mu(x) \right], \quad (2.22)$$

donde se ha separado la parte espacial de la parte temporal.

Usando la Ec. (2.19) en el lado derecho de la Ec. (2.22), se obtiene

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} (\partial^2 + M^2) Z^\mu(x) = -i\sqrt{2E_p} \left[ a_p^\lambda(\infty) - a_p^\lambda(-\infty) \right] \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(p, \lambda); \quad (2.23)$$

de donde al tomar en cuenta el sistema ortonormal 4 dimensional que tienen los vectores de polarización [17] se verifica la igualdad de las Ecs. (2.15) y (2.16).

Una vez que se han comprobado las Ecs. (2.15) y (2.16), es fácil verificar la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= 2\sqrt{E_{p_i} E_{p_f}} \langle \Omega | T \left\{ [a_{p_f}(\infty) - a_{p_f}(-\infty)] [a_{p_i}^\dagger(-\infty) - a_{p_i}^\dagger(\infty)] \right\} | \Omega \rangle \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_f \cdot x_2} \varepsilon_\nu(p_f, \lambda_2) (\partial_{x_2}^2 + M^2) \varepsilon_\mu^*(p_i, \lambda_1) e^{ip_i \cdot x_1} \\ &\quad \times (\partial_{x_1}^2 + M^2) \langle \Omega | Z^\nu(x_2) Z^{\mu\dagger}(x_1) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

la cual se obtiene de aplicar las Ecs. (2.15) y (2.16) en la Ec. (2.10).

Finalmente, integrando por partes y utilizando condiciones de frontera, la Ec. (2.24) toma la forma

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_f \cdot x_2} \varepsilon_\nu(p_f, \lambda) (-p_f^2 + M^2) \varepsilon_\mu^*(p_i, \lambda) e^{-ip_i \cdot x_1} \\ &\quad \times (-p_i^2 + M^2) \langle \Omega | Z^\nu(x_2) Z^{\mu\dagger}(x_1) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dentro del término  $\langle \Omega | Z^\nu(x_2) Z^{\mu\dagger}(x_1) | \Omega \rangle$  está codificada la información sobre la probabilidad de transitar de un estado inicial a un estado final, por lo tanto, la forma analítica de los diagramas de Feynman se encuentran en este término.

El procedimiento mostrado, para obtener la Ec. (2.25), representa la amputación de los estados asintóticos del diagrama de la figura 2.3, por lo que la Ec. (2.25) representa a la

función de autoenergía  $\Pi(p)$ , la cual está dada por

$$\begin{aligned}
-i\Pi(p) &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_f \cdot x_2} \varepsilon_\mu(p_f, \lambda) (p_f^2 - M^2) \varepsilon_\nu^*(p_i, \lambda) e^{-ip_i \cdot x_1} (p_i^2 - M^2) \\
&\times \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_1 x_1} e^{-ip_2 x_2} \\
&\times \frac{-i \left( g^{\mu\alpha} - \frac{p_1^\mu p_1^\alpha}{M^2} \right)}{p_1^2 - M^2 + i\varepsilon} \text{Tr} \left[ \frac{i(\not{p}_4 - \not{p}_1 + m)}{(p_4 - p_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\
&\times \left. \frac{i(\not{p}_4 + m)}{p_4^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] \frac{-i \left( g^{\beta\nu} - \frac{p_2^\beta p_2^\nu}{M^2} \right)}{p_2^2 - M^2 + i\varepsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Una vez que se identifica la representación integral de la delta de Dirac y se usa la Ec. (2.14), la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
-i\Pi(p) &= \frac{-g^2}{12 \cos^2 \theta_W} \left( g^{\beta\alpha} - \frac{p^\beta p^\alpha}{M^2} \right) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\
&\times \text{Tr} \left[ \frac{-\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right]
\end{aligned} \tag{2.27}$$

donde  $q \equiv p_4$  y  $k \equiv p - q$ .

En las siguientes dos subsecciones se lleva a cabo la suma sobre los grados de libertad, indeterminados, de los fermiones del lazo.

### 2.2.2. Cálculo de la Traza

El cálculo de la traza indicada en la expresión anterior se realiza fácilmente utilizando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0, & \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] &= 0 \\
\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] &= 0, & \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta] &= 4g_{\alpha\beta} \\
\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] &= 4(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) \\
\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] &= -4i\epsilon_{\mu\alpha\nu\beta},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

de modo que al utilizarlas en la Ec. (2.27), se obtiene

$$\begin{aligned}
 -i\Pi(p) &= \frac{-g^2}{12 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 &\times \left[ -4(g_V^2 + g_A^2)(k \cdot q - 4k \cdot q + k \cdot q) - 8g_V g_A (ik^\mu q^\nu \epsilon_{\mu\nu\beta}) \right. \\
 &+ 16(g_V^2 - g_A^2)m^2 + 4\frac{g_V^2 + g_A^2}{M^2} \left[ (p \cdot k)(p \cdot q) - (k \cdot q)p^2 \right. \\
 &\left. \left. + (p \cdot k)(p \cdot q) \right] + 8\frac{g_V g_A}{M^2} \left[ ip^\beta p^\alpha k^\mu q^\nu \epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} \right] - 4(g_V^2 - g_A^2)m^2 \frac{p^2}{M^2} \right], \tag{2.29}
 \end{aligned}$$

la cual se simplifica en

$$\begin{aligned}
 i\Pi(p) &= \frac{g^2}{3 \cos^2 \theta_W} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 &\times \left[ 3m^2(g_V^2 - g_A^2) + (g_V^2 + g_A^2) \left( 3p \cdot q - q^2 - \frac{2(p \cdot q)^2}{M^2} \right) \right], \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

para un bosón  $Z$  en capa de masa, i.e,  $p^2 = M^2$ . Para mayores detalles de este cálculo véase el apéndice A.

### 2.2.3. Integrales Gaussianas d-dimensionales

Para realizar las integrales sobre el momento indeterminado del lazo  $q$ , es útil utilizar la identidad

$$\frac{1}{x} = -i \int_0^\infty ds e^{ixs}, \quad \text{si } \text{Im}(x) > 0, \tag{2.31}$$

donde  $s$  se denomina el tiempo propio de Schwinger [29].

Al aplicar la Ec. (2.31) en la relación (2.30), ésta se reescribe como

$$\begin{aligned}
 i\Pi(p) &= \frac{-g^2}{3 \cos^2 \theta_W (2\pi)^4} \int d^4 q \left[ 3m^2(g_V^2 - g_A^2) + (g_V^2 + g_A^2) \left( 3p \cdot q - q^2 - \frac{2(p \cdot q)^2}{M^2} \right) \right] \\
 &\times \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{is_1[q^2 - m^2 + i\varepsilon]} e^{is_2[(p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

en donde es fácil observar que las integrales sobre  $q$  son del tipo Gaussiano.

Para esto se aíslan los términos exponenciales y se organizan en orden de potencias sobre el momento indeterminado, obteniendo el siguiente arreglo de exponenciales

$$e^{-\varepsilon(s_1+s_2)} e^{-im^2(s_1+s_2)} \underbrace{e^{is_1 q^2} e^{is_2 q^2} e^{is_2 p^2} e^{is_2 2pq}}_{\text{Se revisan los exponentes de aquí}}, \tag{2.33}$$

Se revisan los exponentes de aquí

de donde al completar el cuadrado en los argumentos de las exponenciales, se obtiene

$$i\Pi(p) = \frac{-g^2 \mu^{4-d}}{3 \cos^2 \theta_W (2\pi)^d} \int d^d q \left[ 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) + (g_V^2 + g_A^2) \left( 3p \cdot q - q^2 - \frac{2(p \cdot q)^2}{M^2} \right) \right] \times \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{-\varepsilon(s_1+s_2)} e^{-im^2(s_1+s_2)} e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2} e^{ip^2 \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2}}, \quad (2.34)$$

donde adicionalmente se ha extendido a  $d$ -dimensiones con el fin de regular las integrales.

El parámetro  $\mu^{4-d}$  se introduce con el objetivo de no alterar las dimensiones de  $\Pi$ , por lo que  $\mu$  tiene dimensiones de energía. La integral sobre cada  $q$ , en la Ec. (2.34), se puede realizar con ayuda de los resultados

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a(x+b)^2} dx &= \mp b \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a(x+b)^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + b^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \end{aligned} \quad (2.35)$$

teniendo el cuidado que estos resultados son válidos para  $\text{Re}(a) > 0$  y  $\text{Re}(b) > 0$ .

Haciendo las identificaciones de  $e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2}$  con  $e^{-a(x+b)^2}$ , se tiene que  $a = i(s_1+s_2)$  y  $b = \frac{s_2 p}{s_1+s_2}$  con  $s_1, s_2, p \in \mathbb{R}$ .

Identificando las diferentes integrales sobre el momento indeterminado en la Ec. (2.34) se encuentran las siguientes estructuras

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2} &= \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1+s_2)^{\frac{d}{2}}} \\ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (p \cdot q) e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2} &= \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1+s_2)^{\frac{d}{2}}} \frac{s_2}{s_1+s_2} p^2 \\ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} q^2 e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2} &= \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1+s_2)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{d}{2} \frac{i}{s_1+s_2} + \frac{s_2^2}{(s_1+s_2)^2} p^2 \right) \\ \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (p \cdot q)^2 e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2} &= \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1+s_2)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{i}{2(s_1+s_2)} p^2 + \frac{s_2^2}{(s_1+s_2)^2} p^4 \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Estas integrales se resuelven a detalle en el apéndice B. Al sustituir los resultados de la

Ec. (2.36) en la Ec. (2.34), se llega a

$$\begin{aligned}
 i\Pi(p) &= \frac{-g^2\mu^{4-d}}{3\cos^2\theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{-im^2(s_1+s_2)} e^{ip^2 \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2}} \frac{1}{(s_1+s_2)^{\frac{d}{2}}} \\
 &\quad \times \left\{ 3im^2(g_V^2 - g_A^2) + 3i(g_V^2 + g_A^2) \frac{s_2}{s_1+s_2} p^2 \right. \\
 &\quad \left. - (g_V^2 + g_A^2) \left( -\frac{d+2}{2(s_1+s_2)} + i \frac{3s_2^2}{(s_1+s_2)^2} p^2 \right) \right\}. \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

Como la combinación  $s_1+s_2$  aparece repetidamente en la expresión anterior es conveniente hacer los cambios de variable

$$s_1 = s \frac{1+v}{2} \quad \text{y} \quad s_2 = s \frac{1-v}{2}, \tag{2.38}$$

con  $s \in [0, \infty)$  y  $v \in [-1, 1]$  cuyo Jacobiano, es

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial(s_1, s_2)}{\partial(s, v)} \right| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial s_1}{\partial s} & \frac{\partial s_1}{\partial v} \\ \frac{\partial s_2}{\partial s} & \frac{\partial s_2}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2}(1+v) & \frac{s}{2} \\ \frac{1}{2}(1-v) & -\frac{s}{2} \end{array} \right| = -\frac{s}{4}(1+v) - \frac{s}{4}(1-v) \\
 &= -\frac{s}{4}(1+v+1-v) = -\frac{s}{2}. \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

Finalmente, con estos cambios de variable la función de autoenergía es

$$\begin{aligned}
 \Pi(p) &= \frac{g^2\mu^{4-d}}{2\cos^2\theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2s} \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} \\
 &\quad \times \left\{ m^2(g_V^2 - g_A^2) + (g_V^2 + g_A^2) \left( \frac{1-v^2}{4} p^2 - i \frac{d+2}{6s} \right) \right\}. \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

Es en esta ecuación en donde se observa de forma clara que la función de autoenergía presenta un comportamiento divergente alrededor del punto  $s = 0$ . Tomando en cuenta que  $[s] = E^{-2}$ , este comportamiento está asociado a una escala de energía alta. Con ayuda de la dimensión  $d$  podemos regular este comportamiento, tal como los discutimos en la siguiente sección.

### 2.2.4. Regularización Dimensional

Siguiendo de cerca el trabajo desarrollado por Julian Schwinger [29], primero se reorganizan las integrales de acuerdo a los grados sobre el parámetro  $s$

$$\begin{aligned} \Pi(p) = \kappa_d \left\{ (g_V^2 - g_A^2)m^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2s} \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} \right. \\ \left. + \frac{g_V^2 + g_A^2}{4} p^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2s} \left( \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} - \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} v^2 \right) \right. \\ \left. - i(g_V^2 + g_A^2) \frac{d+2}{6} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}}} e^{-im^2s} \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde se ha definido  $\kappa_d \equiv \frac{g^2 \mu^{4-d} e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{2 \cos^2 \theta_W (4\pi)^{\frac{d}{2}}}$ ; por simplicidad en la notación.

De la Ec. (2.41), se identifican un par de integrales clave a resolver

$$\xi_1 \equiv \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}} \quad \text{y} \quad \xi_2 \equiv \int_{-1}^1 dv v^2 e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}}, \quad (2.42)$$

las cuales se tratan integrando por partes, dando

$$\xi_1 = 2 + \frac{1}{2} ip^2 s \int_{-1}^1 dv v^2 e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}} \quad \text{y} \quad \xi_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} ip^2 s \int_{-1}^1 dv v^4 e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}}. \quad (2.43)$$

Al aplicar estos resultados a la relación (2.41)

$$\begin{aligned} \Pi(p) = \kappa_d \left\{ \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-2}} e^{-im^2s} \left[ i(g_V^2 - g_A^2)m^2 \frac{p^2}{2} \int_{-1}^1 dv v^2 e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}} \right. \right. \\ \left. \left. + i(g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{8} \int_{-1}^1 dv v^2 e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}} - i(g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{24} \int_{-1}^1 dv v^4 e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}} \right] \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2s} \left[ 2(g_V^2 - g_A^2)m^2 + (g_V^2 + g_A^2) \frac{p^2}{3} \right. \right. \\ \left. \left. + (g_V^2 + g_A^2) \frac{d+2}{12} p^2 \underbrace{\int_{-1}^1 dv v^2 e^{ip^2 s \frac{1-v^2}{4}}}_{\xi_2} \right] - \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}}} e^{-im^2s} \left[ 2i(g_V^2 + g_A^2) \frac{d+2}{6} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ahora, intercambiando el orden sobre las integrales entre  $v$  y el parámetro de Schwinger,

se tiene

$$\begin{aligned}
\Pi(p) = \kappa_d & \left\{ \int_{-1}^1 dv \left[ i(g_V^2 - g_A^2) m^2 \frac{p^2}{2} v^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-2}} e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \right. \right. \\
& + i(g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{8} v^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-2}} e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \\
& \left. \left. + i(g_V^2 + g_A^2) \frac{d-1}{72} p^4 v^4 \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-2}} e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \right] \right. \\
& + \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2 s} \left[ 2(g_V^2 - g_A^2) m^2 + (g_V^2 + g_A^2) \frac{d+8}{18} p^2 \right] \\
& \left. - \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}}} e^{-im^2 s} \left[ i(g_V^2 + g_A^2) \frac{d+2}{3} \right] \right\}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Es importante notar que para  $s = 0$ , las integrales sobre dicho parámetro tienen indeterminaciones. Aquí es donde se utiliza el proceso de regularización dimensional, tomando a la dimensión como  $d = 4 - 2\delta$ , con el límite  $\delta \rightarrow 0$ . En el caso del coeficiente  $\kappa_d$ , se tiene

$$\kappa_d = \frac{g^2 \mu^{4-d} e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{2 \cos^2 \theta_W (4\pi)^{\frac{d}{2}}} \xrightarrow{d=4-2\delta} \kappa_d = \frac{g^2 \mu^{2\delta} e^{-i(1-\frac{\delta}{2})\pi}}{2 \cos^2 \theta_W (4\pi)^{2-\delta}} = \frac{g^2 \mu^{2\delta} e^{-i\pi + i\pi\frac{\delta}{2}}}{2 \cos^2 \theta_W (4\pi)^{2-\delta}}. \tag{2.46}$$

Por lo que la función de autoenergía ahora se ve como

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \Pi(p) = \kappa_d & \left\{ \int_{-1}^1 dv \left[ i(g_V^2 - g_A^2) m^2 \frac{p^2}{2} v^2 \int_0^\infty ds s^\delta e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \right. \right. \\
& + i(g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{8} v^2 \int_0^\infty ds s^\delta e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \\
& \left. \left. + i(g_V^2 + g_A^2) \frac{3-2\delta}{72} p^4 v^4 \int_0^\infty ds s^\delta e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \right] \right. \\
& + \int_0^\infty ds s^{\delta-1} e^{-im^2 s} \left[ 2(g_V^2 - g_A^2) m^2 + (g_V^2 + g_A^2) \frac{12-2\delta}{18} p^2 \right] \\
& \left. - \int_0^\infty ds s^{\delta-2} e^{-im^2 s} \left[ i(g_V^2 + g_A^2) \frac{6-2\delta}{3} \right] \right\}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Como  $\delta$  es una cantidad “pequeña” por definición, se puede tomar una aproximación de Taylor en los términos que incluyan a la cantidad  $\delta$ . Las aproximaciones hechas sobre los términos involucrados se realizan detalladamente en el apéndice C.

Por otro lado, al definir

$$\Delta^2 \equiv m^2 - \frac{1-v^2}{4}p^2 \implies e^{-im^2s} e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} \longrightarrow e^{-is\Delta^2}, \quad (2.48)$$

se puede usar la representación integral de la función Gamma

$$\int_0^\infty s^{n-\frac{d}{2}} e^{-is\Delta^2} ds = \frac{(i\Delta^2)^{\frac{d}{2}-(n+1)}}{n+1-\frac{d}{2}} \Gamma\left(n+2-\frac{d}{2}\right), \quad (2.49)$$

para resolver las integrales sobre el parámetro de Schwinger  $s$ .

El resultado de este análisis es

$$\begin{aligned} \Pi(p) = & \frac{g^2 e^{-i\pi}}{2 \cos^2 \theta_W (4\pi)^2} \left\{ - (g_V^2 - g_A^2) m^2 2p^2 \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{p^2(1-v^2) - 4m^2} \right. \\ & - (g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{2} \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{p^2(1-v^2) - 4m^2} - (g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{6} \int_{-1}^1 dv \frac{v^4}{p^2(1-v^2) - 4m^2} \\ & + \frac{m^2}{9} \left[ \frac{6p^2(g_V^2 + g_A^2) - 36g_A^2 m^2}{\delta} + \left( (g_V^2 + g_A^2)(30m^2 + 7p^2 + 6p^2\gamma_E) \right. \right. \\ & \left. \left. + 18m^2(g_V^2 - g_A^2) - 36m^2\gamma_E g_A^2 \right) \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Aquí es importante notar que las cantidades divergentes están asociadas a la masa y, por lo tanto, a cantidades físicas observables. Al revisar la teoría sobre la renormalización, se puede identificar a la parte divergente con cambios asociados a la masa de las dos partículas masivas en el lazo.

Como se mencionó al principio de este capítulo, el objetivo de desarrollar la función de autoenergía es tomar la parte imaginaria de ésta para después asociarla a la tasa de decaimiento. La siguiente sección se enfoca en tomar la parte imaginaria de la Ec. (2.50).

### 2.3. Parte Imaginaria de la Función de Autoenergía

A primera vista, la Ec. (2.50) no parece tener componentes imaginarias hasta que se recuerda que hay un término  $i\varepsilon$  dentro del término de masa  $m$  de los denominadores. Como estos denominadores serán parte del enfoque principal de esta sección será favorable identificarlos como

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{p^2(1-v^2) - 4m^2 + i\varepsilon} \\ I_2 &= \int_{-1}^1 dv \frac{v^4}{p^2(1-v^2) - 4m^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.51)$$



El cálculo de la parte imaginaria de estas integrales es

$$\begin{aligned} \text{Im}(I_1) &= - \int_{-1}^1 dv \frac{\varepsilon v^2}{[p^2(1-v^2) - 4m^2]^2 + \varepsilon^2} \\ \text{Im}(I_2) &= - \int_{-1}^1 dv \frac{\varepsilon v^4}{[p^2(1-v^2) - 4m^2]^2 + \varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde se ha dado la igualdad

$$\text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \text{Im}\left(\frac{1}{a+ib}\right) = -\frac{b}{a^2+b^2}, \quad (2.53)$$

con  $z \in \mathbb{C}$ .

Luego, al hacer uso de la representación de la delta de Dirac [32]

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad (2.54)$$

junto con la propiedad

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad (2.55)$$

las integrales en la Ec. (2.52) tienen una forma más sencilla

$$\begin{aligned} \text{Im}(I_1) &= -\frac{\pi}{p^2} \int_{-1}^1 dv v^2 \delta\left[1 - v^2 - \frac{4m^2}{p^2}\right], \\ \text{Im}(I_2) &= -\frac{\pi}{p^2} \int_{-1}^1 dv v^4 \delta\left[1 - v^2 - \frac{4m^2}{p^2}\right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ahora, usando propiedad general de la delta de Dirac

$$\int_{-1}^1 f(v) \delta(g(v)) dv = \int_{-1}^1 f(v) \sum_r \frac{\delta(v - v_r)}{\left|\frac{dg}{dv}\right|_{v=v_r}} dv, \quad (2.57)$$

donde  $r$  indica las raíces de  $g(v)$ , esto es  $g(v_r) = 0$ , se obtienen los resultados

$$\begin{aligned} \text{Im}(I_1) &= -\frac{\pi}{p^3} \sqrt{p^2 - 4m^2}, \\ \text{Im}(I_2) &= -\frac{\pi}{p^5} (p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde se debe cumplir que

$$p^2 - 4m^2 \geq 0. \quad (2.59)$$

Tomando en cuenta esto en (2.58), la parte imaginaria de la función de autoenergía es

$$\begin{aligned} \text{Im}(\Pi(p)) = \frac{-g^2}{32\pi \cos^2 \theta_W} \left\{ (g_V^2 - g_A^2) 2m^2 \frac{\sqrt{p^2 - 4m^2}}{p} \right. \\ \left. + (g_V^2 + g_A^2) \frac{p\sqrt{p^2 - 4m^2}}{2} + (g_V^2 + g_A^2) \frac{(p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{6p} \right\} \Theta(p^2 - 4m^2), \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde la función  $\Theta(p^2 - 4m^2)$  indica el valor del momento para el cual la función de autoenergía desarrolla parte imaginaria.

Al analizar la Ec. (2.60), es inmediato notar que  $\text{Im}(\Pi(p)) < 0$ , lo cual es consecuente con la forma matemática del teorema óptico mostrado en el presente trabajo, ya que la tasa de decaimiento debe ser positiva por su significado físico. Por lo tanto será interesante ver la dependencia del valor absoluto de la Ec. (2.60) de forma gráfica; dicha gráfica será útil para entender la forma de la tasa de decaimiento más adelante.

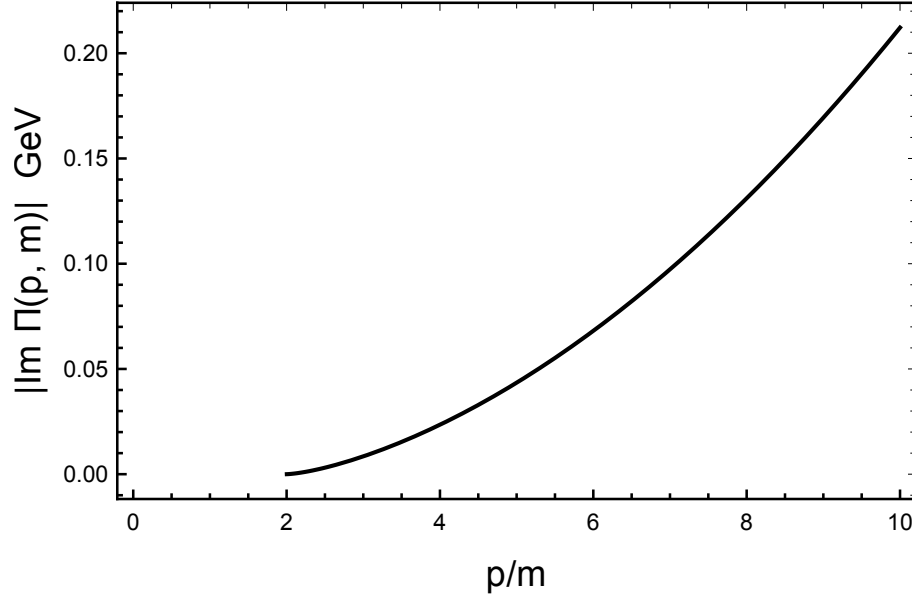


Figura 2.4: Valor absoluto de la parte imaginaria de la función de autoenergía dependiente del momento.

En la figura 2.4 se muestra el comportamiento del valor absoluto de la parte imaginaria de la autoenergía en función del momento del bosón vectorial masivo  $Z$ . En dicha gráfica es importante hacer notar que la condición dada por la función de Heaviside fuerza a la función de autoenergía a tomar valores tales que  $p > 2m$ .

Este resultado es la parte imaginaria de la función de autoenergía, la cual se relaciona con la tasa de decaimiento a través del teorema óptico como se mencionó en la sección 1.4, por lo tanto dicho procedimiento se llevará a cabo en la siguiente sección.

## 2.4. Tasa de Decaimiento en el Vacío

En esta sección el objetivo principal es obtener una relación para la tasa de decaimiento a través del teorema óptico y analizar como afectan diferentes condiciones cinemáticas de la partícula incidente su tasa de decaimiento.

Comenzando con el teorema óptico [2] analizado en el capítulo 1, se tiene que

$$\Gamma = -\frac{\text{Im}(\Pi(p))}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} = -\frac{\text{Im}(\Pi(p))}{p_0}, \quad (2.61)$$

donde  $\Gamma$  es la tasa de decaimiento total,  $\vec{p}$  es el momentum y  $M$  es la masa asociada a la partícula. Sustituyendo la Ec. 2.60 en la Ec. (2.61), se tiene

$$\Gamma = \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W p_0 p} \left\{ g_V^2 (p^2 + 2m^2) + g_A^2 (p^2 - 4m^2) \right\} \sqrt{p^2 - 4m^2} \Theta(p^2 - 4m^2). \quad (2.62)$$

En el caso particular del marco de referencia de la partícula incidente, la relación anterior se reduce a

$$\Gamma_0 = \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W M^2} \left\{ g_V^2 (M^2 + 2m^2) + g_A^2 (M^2 - 4m^2) \right\} \sqrt{M^2 - 4m^2} \Theta(M^2 - 4m^2). \quad (2.63)$$

donde adicionalmente se ha tomado en cuenta la suposición hecha en la Ec. (2.30) y que  $p^2 = M^2$ , que permitió la simplificación de dicha ecuación. Este resultado corresponde a la tasa de decaimiento del proceso estudiado sobre un marco de referencia particular, aquel en el cual la partícula incidente se encuentra en reposo.

El resultado de la Ec. (2.62), representa la tasa de decaimiento de un bosón Z a un par de fermiones cargados para un marco de referencia general.

## Capítulo 3

# Tasa de Decaimiento con Campo Magnético

En el presente capítulo se hace un análisis del mismo diagrama mostrado en la figura 2.3 con la diferencia que los propagadores fermiónicos serán afectados por la presencia de un campo magnético homogéneo en la dirección  $\hat{z}$ . Los cambios en el propagador se hacen siguiendo los desarrollos mostrados en la sección 1.5. Luego, se sigue la misma metodología principal que se usó en el capítulo 2 hasta el punto en el cual se toma una aproximación de campo débil con el propósito de seguir analíticamente el cálculo. Finalmente, se llega a la tasa de decaimiento con campo magnético con esta aproximación en cuenta.

### 3.1. Modelo de Interacción y Diagrama de Feynman con Campo Magnético

El modelo de interacción a seguir es el mismo al usado en el caso del vacío con la única diferencia de que el campo magnético interactuará con los fermiones dentro del lazo. Por lo tanto, la forma analítica del elemento invariante de matriz  $\mathcal{M}_B^{\mu\nu}$  en el espacio de configuración está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_B^{\mu\nu} = & (-1) \int d^4x \int d^4y G^{\mu\alpha}(x_1, x) \text{Tr} \left[ S_F^B(x, y) \frac{-ig}{2 \cos \theta_W} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\ & \left. \times S_F^B(y, x) \frac{-ig}{2 \cos \theta_W} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] G^{\beta\nu}(y, x_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde el mayor cambio se encuentra en los propagadores fermiónicos [29, 30], los cuales están dados por

$$\begin{aligned} S_F^B(q) = & \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp \left[ -is \left( m^2 - q_\parallel^2 - q_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} \right) \right] \\ & \times \left[ \left( m + \not{q}_\parallel \right) e^{-ieBs\Sigma_3} + \frac{\not{q}_\perp}{\cos(eBs)} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

para un campo magnético definido sobre la dirección  $\hat{z}$ , con

$$q_{\parallel}^{\mu} \equiv (q^0, 0, 0, q^3) \quad \text{y} \quad q_{\perp}^{\mu} \equiv (0, q^1, q^2, 0). \quad (3.3)$$

Es importante notar que las fases de Schwinger de cada propagador en la Ec. (3.1) se cancelan al desarrollarlas, esto es:

$$\Omega(x, y)\Omega(y, x) = \exp\left(-i\frac{e}{2}y_{\rho}F^{\rho\sigma}x_{\sigma} + i\frac{e}{2}x_{\rho}F^{\sigma\rho}y_{\sigma}\right). \quad (3.4)$$

Una vez que los propagadores de Ec. (3.2) se reemplazan en Ec. (3.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_B^{\mu\nu} &= \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_4}{(2\pi)^4} e^{ip_1 \cdot x_1} e^{-ip_2 \cdot x_2} \frac{-i\left(g^{\mu\alpha} - \frac{p_1^{\mu}p_1^{\alpha}}{M^2}\right)}{p_1^2 - M^2 + i\varepsilon} \\ &\times \text{Tr}\left[\left\{\int_0^{\infty} \frac{ds_2}{\cos(eBs_2)} \exp\left[-is_2\left(m^2 - (p_{4\parallel} - p_{1\parallel})^2 - (p_{4\perp} - p_{1\perp})^2 \frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2}\right)\right]\right\}\right] \\ &\times \left[\left(m + \not{p}_{4\parallel} - \not{p}_{1\parallel}\right) e^{-ieBs_2\Sigma_3} + \frac{\not{p}_{4\perp} - \not{p}_{1\perp}}{\cos(eBs_2)}\right] \gamma_{\alpha} (g_V - g_A\gamma_5) \left\{\int_0^{\infty} \frac{ds_1}{\cos(eBs_1)}\right. \\ &\times \exp\left[-is_1\left(m^2 - p_{4\parallel}^2 - p_{4\perp}^2 \frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1}\right)\right] \left[\left(m + \not{p}_{4\parallel}\right) e^{-ieBs_1\Sigma_3} + \frac{\not{p}_{4\perp}}{\cos(eBs_1)}\right] \left. \right\} \\ &\times \gamma_{\beta} (g_V - g_A\gamma_5) \left[\frac{-i\left(g^{\beta\nu} - \frac{p_2^{\beta}p_2^{\nu}}{M^2}\right)}{p_2^2 - M^2 + i\varepsilon} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2)\right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde las integrales sobre  $x_1$ ,  $x_2$  y  $p_3$  se realizaron de forma inmediata con ayuda de las deltas de Dirac.

Ahora, como la fórmula de reducción LSZ solo afecta a los estados asintóticos y estos son eléctricamente neutros, la Ec. (2.25) se mantiene de tal forma que la probabilidad de un

estado inicial a un estado final es

$$\begin{aligned}
 \langle f|S|i\rangle &= \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}\varepsilon_\mu(p_f,\lambda)(p_f^2-M^2)\varepsilon_\nu^*(p_i,\lambda)(p_i^2-M^2)\int\frac{d^4p_4}{(2\pi)^4}\frac{-i\left(g^{\mu\alpha}-\frac{p_i^\mu p_i^\alpha}{M^2}\right)}{p_i^2-M^2} \\
 &\times\text{Tr}\left[\left\{\int_0^\infty\frac{ds_2}{\cos(eBs_2)}\exp\left[-is_2\left(m^2-(p_{4\parallel}-p_{i\parallel})^2-(p_{4\perp}-p_{i\perp})^2\frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2}\right)\right]\right.\right. \\
 &\times\left.\left[\left(m+\not{p}_{4\parallel}-\not{p}_{i\parallel}\right)e^{-ieBs_2\Sigma_3}+\frac{\not{p}_{4\perp}-\not{p}_{i\perp}}{\cos(eBs_2)}\right]\right\}\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma_5)\left\{\int_0^\infty\frac{ds_1}{\cos(eBs_1)}\right. \\
 &\times\exp\left[-is_1\left(m^2-p_{4\parallel}^2-p_{4\perp}^2\frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1}\right)\right]\left[\left(m+\not{p}_{4\parallel}\right)e^{-ieBs_1\Sigma_3}+\frac{\not{p}_{4\perp}}{\cos(eBs_1)}\right]\right\} \\
 &\times\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma_5)\left.\right]\frac{-i\left(g^{\beta\nu}-\frac{p_f^\beta p_f^\nu}{M^2}\right)}{p_f^2-M^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_i-p_f). \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Utilizando la misma acepción de la función de autoenergía que en el caso en el vacío y considerando la suma sobre estados de polarización de los estados asintóticos, se tiene

$$\begin{aligned}
 -i\Pi^B(p) &= \frac{g^2}{12\cos^2\theta_W}\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left(g^{\mu\alpha}-\frac{p^\mu p^\alpha}{M^2}\right) \\
 &\text{Tr}\left[\left\{\int_0^\infty\frac{ds_2}{\cos(eBs_2)}\exp\left[-is_2\left(m^2-(k_\parallel)^2-(k_\perp)^2\frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2}\right)\right]\right.\right. \\
 &\times\left.\left[\left(m-\not{k}_\parallel\right)e^{-ieBs_2\Sigma_3}-\frac{\not{k}_\perp}{\cos(eBs_2)}\right]\right\}\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma_5) \\
 &\times\left\{\int_0^\infty\frac{ds_1}{\cos(eBs_1)}\exp\left[-is_1\left(m^2-q_\parallel^2-q_\perp^2\frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1}\right)\right]\right. \\
 &\times\left.\left[\left(m+\not{q}_\parallel\right)e^{-ieBs_1\Sigma_3}+\frac{\not{q}_\perp}{\cos(eBs_1)}\right]\right\}\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma_5)\left.\right]\left(g^{\beta\nu}-\frac{p^\beta p^\nu}{M^2}\right). \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Al desarrollar los productos de las métricas y momentos fuera de la traza, y sacar de la traza aquellos elementos que son escalares, se obtiene una nueva expresión para la autoenergía,

dada por

$$\begin{aligned}
-i\Pi^B(p) &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_W} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \frac{e^{-im^2(s_1+s_2)}}{\cos(eBs_1) \cos(eBs_2)} \\
&\times \exp \left[ is_2 \left( (k_\parallel)^2 + (k_\perp)^2 \frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2} \right) \right] \exp \left[ is_1 \left( q_\parallel^2 + q_\perp^2 \frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1} \right) \right] \\
&\times \text{Tr} \left[ \left\{ (m - \not{k}_\parallel) e^{-ieBs_2 \Sigma_3} - \frac{\not{k}_\perp}{\cos(eBs_2)} \right\} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\
&\times \left. \left\{ (m + \not{q}_\parallel) e^{-ieBs_1 \Sigma_3} + \frac{\not{q}_\perp}{\cos(eBs_1)} \right\} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

En la siguiente sección, siguiendo las ideas del caso sin campo se llevan a cabo las sumas sobre los grados de libertad indeterminados del lazo.

## 3.2. Cálculo de la Función de Autoenergía con Campo Magnético

### 3.2.1. Integrales Gaussianas d-dimensionales

De la Ec. (3.8) se observa que, debido al campo magnético, el cuadrimento del fermión se desdobra en una componente paralela y una ortogonal del campo. Esto sugiere que la integral sobre el momento del lazo sea separada de la misma forma, esto es

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} = \mu^{4-d} \int \frac{d^{d_\parallel} q_\parallel}{(2\pi)^{d_\parallel}} \int \frac{d^{d_\perp} q_\perp}{(2\pi)^{d_\perp}}, \tag{3.9}$$

con  $d = d_\parallel + d_\perp$ . Con lo anterior, la función de autoenergía de la Ec. (3.8) se reescribe como

$$\begin{aligned}
-i\Pi^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{12 \cos^2 \theta_W} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \frac{e^{-i(s_1+s_2)m^2}}{\cos(eBs_1) \cos(eBs_2)} \\
&\times \int \frac{d^{d_\parallel} q_\parallel}{(2\pi)^{d_\parallel}} \exp \left[ is_2 \left( (p - q)_\parallel^2 \right) + is_1 \left( q_\parallel^2 \right) \right] \\
&\times \int \frac{d^{d_\perp} q_\perp}{(2\pi)^{d_\perp}} \exp \left[ is_2 (p - q)_\perp^2 \frac{\tan(eBs_2)}{eB} + is_1 q_\perp^2 \frac{\tan(eBs_1)}{eB} \right] \\
&\times \text{Tr} \left[ \left\{ (m - (\not{p} - \not{q})_\parallel) e^{-ieBs_2 \Sigma_3} - \frac{(\not{p} - \not{q})_\perp}{\cos(eBs_2)} \right\} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\
&\times \left. \left\{ (m + \not{q}_\parallel) e^{-ieBs_1 \Sigma_3} + \frac{\not{q}_\perp}{\cos(eBs_1)} \right\} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right],
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde se ha usado que

$$k_{\parallel}^2 = (p - q)_{\parallel}^2 \quad \text{y} \quad k_{\perp}^2 = (p - q)_{\perp}^2. \quad (3.11)$$

Para identificar las integrales Gaussianas se hace un tratamiento a los argumentos de las exponenciales. En el caso de las componentes paralelas, se tiene

$$is_2 \left( (p - q)_{\parallel}^2 \right) + is_1 \left( q_{\parallel}^2 \right) = i(s_1 + s_2) \left( q_{\parallel} - \frac{s_2 p_{\parallel}}{s_1 + s_2} \right)^2 + ip_{\parallel}^2 \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2} \quad (3.12)$$

y para el caso de las componentes transversas, se tiene

$$\begin{aligned} is_2(p_{\perp}^2 + q_{\perp}^2 - 2p_{\perp}q_{\perp}) \frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2} + is_1q_{\perp}^2 \frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1} = \\ i(s_1\xi_1 + s_2\xi_2) \left( q_{\perp} - \frac{s_2\xi_2}{s_1\xi_1 + s_2\xi_2} p_{\perp} \right)^2 + i \frac{s_1\xi_1 s_2\xi_2}{s_1\xi_1 + s_2\xi_2} p_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

en donde se ha introducido la notación

$$\xi_1 \equiv \frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1} \quad \text{y} \quad \xi_2 \equiv \frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2}. \quad (3.14)$$

Usando esto en la función de autoenergía de la Ec. (3.10), esta se reescribe como

$$\begin{aligned} -i\Pi^B(p) = & \frac{g^2 \mu^{4-d}}{12 \cos^2 \theta_W} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^{\alpha} p^{\beta}}{M^2} \right) \int_0^{\infty} ds_1 \int_0^{\infty} ds_2 \frac{e^{-im^2(s_1+s_2)} e^{ip_{\parallel}^2 \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2}} e^{ip_{\perp}^2 \frac{s_1 \xi_1 s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2}}}{\cos(eBs_1) \cos(eBs_2)} \\ & \times \int \frac{d^{d_{\parallel}} q_{\parallel}}{(2\pi)^{d_{\parallel}}} \exp \left[ i(s_1 + s_2) \left( q_{\parallel} - \frac{s_2}{s_1 + s_2} p_{\parallel} \right)^2 \right] \\ & \times \int \frac{d^{d_{\perp}} q_{\perp}}{(2\pi)^{d_{\perp}}} \exp \left[ i(s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2) \left( q_{\perp} - \frac{s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2} p_{\perp} \right)^2 \right] \\ & \times \text{Tr} \left[ \left\{ \left( m - \gamma_{\mu} \left( p_{\parallel}^{\mu} - q_{\parallel}^{\mu} \right) \right) e^{-ieBs_2 \Sigma_3} - \gamma_{\mu} \frac{p_{\perp}^{\mu} - q_{\perp}^{\mu}}{\cos(eBs_2)} \right\} \gamma_{\alpha} (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\ & \left. \times \left\{ \left( m + \gamma_{\nu} q_{\parallel}^{\nu} \right) e^{-ieBs_1 \Sigma_3} + \gamma_{\nu} \frac{q_{\perp}^{\nu}}{\cos(eBs_1)} \right\} \gamma_{\beta} (g_V - g_A \gamma_5) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora, con la idea de sintetizar e identificar los diferentes tipos de integrales gaussianas presentes en la ecuación anterior. Los diferentes tipos de integrales dependen en gran medida de las potencias de los momentos indeterminados dentro de los elementos de la traza, por lo



cual se hace un análisis de estos elementos.

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[ \left\{ \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu + \gamma_\mu \ell_\parallel^\mu + \sigma_\parallel \gamma_\mu p_\parallel^\mu \right) e^{-ieBs_2\Sigma_3} - \frac{1}{c_2} \left( \gamma_\mu p_\perp^\mu - \gamma_\mu (\ell_\perp^\mu + \sigma_\perp p_\perp^\mu) \right) \right\} \right. \\ & \left. \times V_\alpha \left\{ \left( m + \gamma_\nu \ell_\parallel^\nu + \sigma_\parallel \gamma_\nu p_\parallel^\nu \right) e^{-ieBs_1\Sigma_3} + \frac{1}{c_1} \gamma_\nu (\ell_\perp^\nu + \sigma_\perp p_\perp^\nu) \right\} V_\beta \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_\parallel &\equiv \frac{s_2}{s_1 + s_2} & \text{y} & \quad \sigma_\perp \equiv \frac{s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2}, \\ \ell_\parallel^\mu &\equiv q_\parallel^\mu - \sigma_\parallel p_\parallel^\mu \implies d^d \ell_\parallel = d^d q_\parallel & \text{y} & \quad \ell_\perp^\mu \equiv q_\perp^\mu - \sigma_\perp p_\perp^\mu \implies d^d \ell_\perp = d^d q_\perp, \\ c_1 &\equiv \cos(eBs_1) & \text{y} & \quad c_2 \equiv \cos(eBs_2), \\ V_\alpha &\equiv \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) & \text{y} & \quad V_\beta \equiv \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5). \end{aligned} \quad (3.17)$$

La forma de la traza, mostrada en la Ec. (3.16), puede desarrollarse tal que la expresión esté separada por sus contribuciones de diferentes potencias sobre  $\ell_\parallel$  y  $\ell_\perp$ . En el apéndice B se llevan a cabo los cálculos explícitos de las integrales sobre  $\ell_\parallel$  y  $\ell_\perp$ , tomando en cuenta las diferentes potencias con las que estos momentos aparecen, que junto con los distintos resultados sobre integrales Gaussianas en  $d$  dimensiones se llega a

$$\begin{aligned} -i\Pi^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{12 \cos^2 \theta_W} \frac{ie^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{-im^2(s_1+s_2)} \\ &\times \frac{e^{ip_\parallel^2 \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2}} e^{ip_\perp^2 \frac{s_1 \xi_1 s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2}}}{c_1 c_2} \frac{1}{(s_1 + s_2)^{\frac{d_\parallel}{2}}} \frac{1}{(s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2)^{\frac{d_\perp}{2}}} \\ &\times \text{Tr} \left[ \left( \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu + \sigma_\parallel \gamma_\mu p_\parallel^\mu \right) e^{-ieBs_2\Sigma_3} - \frac{1}{c_2} \gamma_\mu (p_\perp^\mu - \sigma_\perp p_\perp^\mu) \right) \right. \\ &\times \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( \left( m + \sigma_\parallel \gamma_\nu p_\parallel^\nu \right) e^{-ieBs_1\Sigma_3} + \frac{1}{c_1} \sigma_\perp \gamma_\nu p_\perp^\nu \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \\ &+ \gamma_\mu e^{-ieBs_2\Sigma_3} \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \gamma_\nu e^{-ieBs_1\Sigma_3} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \left( \frac{i}{2(s_1 + s_2)} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \\ &\left. + \frac{1}{c_2} \gamma_\mu \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \frac{1}{c_1} \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \left( \frac{i}{2(s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2)} g_\perp^{\mu\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Al poner de forma explícita la definición de  $\sigma_{\parallel}$  y  $\sigma_{\perp}$ , se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
\Pi^B(p) &= \frac{-g^2 \mu^{4-d}}{12 \cos^2 \theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{-im^2(s_1+s_2)} \\
&\times \frac{e^{ip_{\parallel}^2 \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2}} e^{ip_1^2 \frac{s_1 \xi_1 s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2}}}{c_1 c_2} \frac{1}{(s_1 + s_2)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{(s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2)^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \\
&\times \text{Tr} \left[ \left( \left( m - \gamma_{\mu} p_{\parallel}^{\mu} + \frac{s_2}{s_1 + s_2} \gamma_{\mu} p_{\parallel}^{\mu} \right) e^{-ieBs_2 \Sigma_3} - \frac{1}{c_2} \gamma_{\mu} \left( p_1^{\mu} - \frac{s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2} p_{\perp}^{\mu} \right) \right) \right. \\
&\times \gamma_{\alpha} (g_V - g_A \gamma_5) \left( \left( m + \frac{s_2}{s_1 + s_2} \gamma_{\nu} p_{\parallel}^{\nu} \right) e^{-ieBs_1 \Sigma_3} + \frac{1}{c_1} \frac{s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2} \gamma_{\nu} p_{\perp}^{\nu} \right) \gamma_{\beta} (g_V - g_A \gamma_5) \\
&+ \gamma_{\mu} e^{-ieBs_2 \Sigma_3} \gamma_{\alpha} \gamma_{\nu} e^{-ieBs_1 \Sigma_3} \gamma_{\beta} (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2(s_1 + s_2)} g_{\parallel}^{\mu\nu} \right) \\
&\left. + \frac{1}{c_2} \gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} \frac{1}{c_1} \gamma_{\nu} \gamma_{\beta} (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i g_{\perp}^{\mu\nu}}{2(s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2)} \right) \right]. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Si ahora sobre la cual se hacen los cambios de variable del caso sin campo

$$s_1 = \frac{s}{2}(1+v) \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{s}{2}(1-v), \tag{3.20}$$

estos permiten reexpresar a los siguientes términos, como

$$\begin{aligned}
\frac{s_1 \xi_1 s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2} &= \frac{1}{2eB} \frac{\cos(eBsv) - \cos(eBs)}{\sin(eBs)}, \\
\frac{1}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2} &= eB \frac{\cos(eBsv) + \cos(eBs)}{2 \sin(eBs)}, \\
\frac{s_2 \xi_2}{s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin(eBsv)(1 + \cos(eBs))}{\sin(eBs)(1 + \cos(eBsv))} \right), \\
c_1 &= \cos\left(\frac{eBs}{2} + \frac{eBsv}{2}\right) \quad \text{y} \quad c_2 = \cos\left(\frac{eBs}{2} - \frac{eBsv}{2}\right), \\
&\implies c_1 c_2 = \frac{1}{2} \left( \cos(eBsv) + \cos(eBs) \right). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función de autoenergía en términos de los parámetros de Schwinger  $v$  y  $s$ ,

es

$$\begin{aligned}
\Pi^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{12 \cos^2 \theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2 s} \left( \frac{eB}{2 \sin(eBs)} \right)^{\frac{d_+}{2}} \\
&\times \int_{-1}^1 dv \left( \cos(eBsv) + \cos(eBs) \right)^{\frac{d_+}{2}-1} e^{ip_\parallel^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} e^{ip_\perp^2 \frac{1}{2eB} \frac{\cos(eBsv) - \cos(eBs)}{\sin(eBs)}} \\
&\times \text{Tr} \left[ \left( \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \right) e^{-i\frac{eBs}{2} \Sigma_3 + i\frac{eBsv}{2} \Sigma_3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma_\mu p_\perp^\mu \frac{\sin(eBs) + \sin(eBsv) + \sin(eBs + eBsv)}{2 \cos\left(\frac{eBs}{2} - \frac{eBsv}{2}\right) (\sin(eBs) + \sin(eBs) \cos(eBsv))} \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\
&\quad \left. \times \left( \left( m + \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \right) e^{-i\frac{eBs}{2} \Sigma_3 - i\frac{eBsv}{2} \Sigma_3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma_\nu p_\perp^\nu \frac{\sin(eBs) - \sin(eBsv) + \sin(eBs - eBsv)}{2 \cos\left(\frac{eBs}{2} + \frac{eBsv}{2}\right) (\sin(eBs) + \sin(eBs) \cos(eBsv))} \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_\mu e^{-i\frac{eBs}{2} \Sigma_3 + i\frac{eBsv}{2} \Sigma_3} \gamma_\alpha \gamma_\nu e^{-i\frac{eBs}{2} \Sigma_3 - i\frac{eBsv}{2} \Sigma_3} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{ieB}{2 \sin(eBs)} g_\perp^{\mu\nu} \right) \right]. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Esta última expresión de la autoenergía describe el proceso asociado al diagrama bajo estudio, considerando un campo magnético uniforme en la dirección  $\hat{z}$ . Esta relación no tiene ningún tipo de aproximación, por lo que los cálculos hechos hasta este momento son generales para cualquier par fermión-antifermión cargado. La Ec. (3.22) es uno de los principales resultados de esta tesis y hasta donde se ha investigado este resultado es original.

Por otro lado, las integrales que quedan por resolver no pueden ser calculadas de forma analítica o numérica, por lo que si se desea continuar un estudio analítico es indispensable usar algún tipo de aproximación tal que las integrales sean resolubles de forma analítica.

Es importante recalcar que los parámetros energéticos de los que depende la función de autoenergía son el momentum ( $p$ ) del bosón  $Z$ , la masa ( $m$ ) de los fermiones cargados dentro del lazo y el producto de la carga de los fermiones con el campo magnético ( $eB$ ), de modo que una jerarquía entre estos parámetros determinará el tipo de aproximación.

Una de las comparaciones naturales que se hacen son entre el campo magnético con la masa de los fermiones cargados. Por lo tanto podemos calificar al campo magnético como “débil” ( $eB \ll m^2$ ) o “fuerte” ( $eB \gg m^2$ ), las cuales son aproximaciones que dependen del escenario físico que se estudie.

### 3.2.2. Aproximación de Campo Débil para bajas velocidades

Como se mencionó anteriormente, al tomar la *aproximación de campo débil* se considera que el campo magnético es mucho más pequeño que la masa de los fermiones dentro del lazo, es decir,  $eB \ll m^2$ . Para esta región energética es posible realizar un desarrollo de Taylor a orden cuadrático sobre  $eB$  en los términos de la expresión (3.22), con el propósito de separar

las contribuciones independientes de  $eB$ , así como su aportación lineal y cuadrática en  $eB$ .

Se recalca que esta aproximación solamente toma en cuenta la relación entre la masa de los fermiones con la intensidad del campo magnético, y en la mayoría de los términos de la relación (3.22) esta consideración es suficiente para realizar una expansión de Taylor, pero para el término

$$e^{ip_1^2 \frac{1}{2eB} \frac{\cos(eBsv) - \cos(eBs)}{\sin(eBs)}}, \quad (3.23)$$

dicha aproximación no es suficiente ya que para la región energética en la que  $p_1^2 \gg m^2$ , el desarrollo no es válido para la exponencial completa; por lo tanto se debe de tomar la restricción cinemática  $p_1^2 \ll m^2$ , al cual se le llamará “caso de bajas velocidades” [20, 33].

Bajo estas consideraciones, el desarrollo en Taylor de cada factor de la Ec. (3.22), a orden cuadrático en  $eB$ , es

$$\begin{aligned} \Pi^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{24 \cos^2 \theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2 s} \left( 1 + \frac{s^2}{6} (eB)^2 \right)^{\frac{d_1}{2}} \\ &\times \int_{-1}^1 dv \left( 1 - \frac{s^2}{4} (1+v^2) (eB)^2 \right)^{\frac{d_1}{2}-1} e^{ip_1^2 \frac{s}{4} (1-v^2)} \left( 1 + \frac{1}{48} ip_1^2 s^3 (v^2-1)^2 (eB)^2 \right) \\ &\times \text{Tr} \left[ \left( \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} is \Sigma_3 (1-v) eB - \frac{s^2}{8} (-1+v)^2 (eB)^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_\mu p_\perp^\mu \left( \frac{1+v}{2} + \frac{s^2}{48} (3-5v-3v^2+5v^3) (eB)^2 \right) \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\ &\times \left( \left( m + \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} is \Sigma_3 (1+v) eB - \frac{s^2}{8} (1+v)^2 (eB)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_\nu p_\perp^\nu \left( \frac{1-v}{2} + \frac{s^2}{48} (3+5v-3v^2-5v^3) (eB)^2 \right) \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \\ &\quad + \gamma_\mu \left( 1 - \frac{1}{2} is \Sigma_3 (1-v) eB - \frac{s^2}{8} (-1+v)^2 (eB)^2 \right) \gamma_\alpha \gamma_\nu \\ &\times \left( 1 - \frac{1}{2} is \Sigma_3 (1+v) eB - \frac{s^2}{8} (1+v)^2 (eB)^2 \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \\ &\quad \left. + \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \frac{i}{2s} \left( 1 + \frac{s^2}{6} (eB)^2 \right) g_\perp^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Esta forma de proceder se debe a que la traza debe calcularse en  $d$  dimensiones para regular de forma consistente los infinitos propios de la teoría.

Nótese que la ecuación anterior puede reorganizarse como sigue

$$\begin{aligned} \Pi^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{24 \cos^2 \theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2 s} \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} \\ &\times \left( 1 + (eB)^2 \left( \frac{1}{48} ip_\perp^2 s^3 (v^2 - 1)^2 + \left( 1 - \frac{d_\perp}{2} \right) \frac{s^2}{4} (1 + v^2) + \frac{d_\perp}{2} \frac{s^2}{6} \right) \right) \\ &\times \left[ \tau_0 + (eB)\tau_1 + (eB)^2\tau_2 \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $\tau_a$ , con  $a = 0, 1, 2$ , representa a los diferentes términos originados de la traza de la Ec. (3.24). La forma exacta de los términos  $\tau_a$  se muestra a detalle en el Apéndice A. Se hace notar que  $\tau_0$  corresponde a la traza del caso sin campo,  $\tau_1 = 0$  y  $\tau_2$  corresponde a las contribuciones producidas por el campo magnético. Al desarrollar el producto con los términos de traza, con las consideraciones de la aproximación, se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{24 \cos^2 \theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2 s} \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} \\ &\times \left[ \tau_0 + (eB)^2 \left( \tau_2 + \frac{\tau_0}{4} \left( \frac{1}{12} ip_\perp^2 s^3 (v^2 - 1)^2 + \left( 1 - \frac{d_\perp}{2} \right) s^2 (1 + v^2) + d_\perp \frac{s^2}{3} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

De lo anterior, se identifican las contribuciones

$$\Pi^B(p) = \Pi(p) + \tilde{\Pi}^B(p), \quad (3.27)$$

donde  $\Pi(p)$  representa la función de autoenergía en el vacío, y el término correspondiente al campo magnético está representado por  $\tilde{\Pi}^B(p)$ . En la Ec. (2.50) se muestra la forma explícita de la contribución del vacío a la función de autoenergía, por lo que sólo resta calcular la contribución con campo  $\tilde{\Pi}^B(p)$ , la cual está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{24 \cos^2 \theta_W} \frac{e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (eB)^2 \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-im^2 s} \int_{-1}^1 dv e^{ip^2 \frac{s}{4}(1-v^2)} \\ &\times \left[ \frac{\tau_0}{4} \left( \frac{1}{12} ip_\perp^2 s^3 (v^2 - 1)^2 + \left( 1 - \frac{d_\perp}{2} \right) s^2 (1 + v^2) + d_\perp \frac{s^2}{3} \right) + \tau_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Siguiendo el procedimiento para el caso del vacío, se organizan los distintos términos, en la ecuación anterior, de acuerdo a su grado en el parámetro de Schwinger  $s$ , tomando en cuenta que  $\tau_0(s)$  y  $\tau_2(s)$  contribuyen con potencias de  $s$ .

Es importante hacer notar que para la Ec. (3.28), al hacer la expansión a orden cuadrático en  $(eB)^2$  éste siempre viene acompañado de un factor  $s^2$ , lo cual mejora el comportamiento de la integral alrededor de  $s = 0$ . Por lo anterior, no es necesario aplicar ningún proceso de regularización dimensional a  $\tilde{\Pi}^B$ , y por lo tanto, se puede tomar si ningún problema  $d = 4$ ,

en la Ec. (3.28), obteniendo

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^B(p) = & -\frac{g^2}{24 \cos^2 \theta_W (4\pi)^2} \frac{(eB)^2}{8} \int_{-1}^1 dv \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \\
& \times \left\{ \frac{-8}{i(-4m^2 + p^2(1-v^2))} \left( \frac{2}{3} i \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 g^{\mu\nu} \right] \right. \right. \\
& + i \text{Tr} \left[ -\frac{1}{2} \gamma_\mu (v-1)^2 \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 g_{\parallel}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu (v+1)^2 \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 g_{\parallel}^{\mu\nu} \right. \\
& \left. \left. - \gamma_\mu \Sigma_3 (1-v) \gamma_\alpha \gamma_\nu \Sigma_3 (1+v) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 g_{\parallel}^{\mu\nu} + \frac{2}{3} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 g_{\perp}^{\mu\nu} \right] \right) \\
& + 3 \left( \frac{-4}{i(-4m^2 + p^2(1-v^2))} \right)^2 \left( \left[ -\frac{1}{12} p_{\perp}^2 (v^2 - 1)^2 \right] \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 g^{\mu\nu} \right] \right. \\
& + \frac{4}{3} \text{Tr} \left[ \left( m - \gamma_\mu p_{\parallel}^{\mu} \frac{1+v}{2} \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p_{\parallel}^{\nu} \frac{1-v}{2} \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] \\
& - \text{Tr} \left[ \left( \left( m - \gamma_\mu p_{\parallel}^{\mu} \frac{1+v}{2} \right) (v-1)^2 + \frac{\gamma_\mu p_{\perp}^{\mu}}{6} (3-5v-3v^2+5v^3) \right) \right. \\
& \times \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p_{\parallel}^{\nu} \frac{1-v}{2} \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \\
& + \left( \left( m + \gamma_\nu p_{\parallel}^{\nu} \frac{1-v}{2} \right) (1+v)^2 - \frac{\gamma_\nu p_{\perp}^{\nu}}{6} (3+5v-3v^2-5v^3) \right) \\
& \times \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \left( m - \gamma_\mu p_{\parallel}^{\mu} \frac{1+v}{2} \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \\
& + 2 \left( m - \gamma_\mu p_{\parallel}^{\mu} \frac{1+v}{2} \right) \Sigma_3 (1-v) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p_{\parallel}^{\nu} \frac{1-v}{2} \right) \Sigma_3 (1+v) \\
& \left. \left. \times \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] \right) \\
& + \frac{4}{3} \left( \frac{-4}{i(-4m^2 + p^2(1-v^2))} \right)^3 \left[ p_{\perp}^2 (v^2 - 1)^2 \right] i \text{Tr} \left[ \left( m - \gamma_\mu p_{\parallel}^{\mu} \frac{1+v}{2} \right) \right. \\
& \left. \times \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p_{\parallel}^{\nu} \frac{1-v}{2} \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right] \left. \right\}, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

donde se han escrito de forma explícita las trazas  $\tau_0$  y  $\tau_2$ . Así mismo, con ayuda de la Ec. (2.49), la integración sobre  $s$  ya ha sido realizada.

Como se observa, el procedimiento es muy parecido al caso sin campo, por lo que, al tomar en cuenta que la masa en los denominadores tiene una pequeña parte compleja, el cálculo de la parte imaginaria se volverá simple, como se muestra a continuación.

### 3.2.3. Parte Imaginaria de la Función de Autoenergía

La parte imaginaria de  $\tilde{\Pi}^B(p)$  se obtiene de forma inmediata usando la siguiente identidad [32]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left( \frac{1}{(x + i\varepsilon)^{n+1}} \right) = \pi \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \delta(x), \quad (3.30)$$

junto con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m \delta(x-a)}{dx^m} f(x) dx = (-1)^m \frac{d^m f(x)}{dx^m} \Big|_{x=a}, \quad (3.31)$$

en cada uno de los términos de (3.29), obteniendo

Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Im}(\tilde{\Pi}^B(p)) = & -\frac{g^2(eB)^2}{(2^7)3\pi \cos^2 \theta_W} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \left\{ \frac{1}{v_r p^2} \left( \frac{2}{3} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) g^{\mu\nu} \right] \right. \right. \\ & + \text{Tr} \left[ -\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) g_{\parallel}^{\mu\nu} (1 + v_r^2) + \frac{1}{4} \hat{F}^{\rho\sigma} \hat{F}^{\xi\chi} \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\xi \gamma_\chi \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) g_{\parallel}^{\mu\nu} (1 - v_r^2) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) g_{\perp}^{\mu\nu} \right] \right) \\ & - \frac{3}{p^4} \left( -\frac{1}{12} p_{\perp}^2 \left( \frac{(v_r^2 - 1)(1 + 3v_r^2)}{v_r^3} \right) \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) g^{\mu\nu} \right] - \frac{4m^2}{3} \frac{1}{v_r^3} \text{Tr} \left[ \gamma_\alpha \gamma_\beta (g_V^2 - g_A^2) \right] \right) \\ & + \frac{p^\mu p^\nu}{3} \text{Tr} \left[ -\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) \right] \left( -\frac{1 + v_r^2}{v_r^3} \right) - \text{Tr} \left[ m^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta (g_V^2 - g_A^2) \right] \left( \frac{2(v_r^2 - 1)}{v_r^3} \right) \\ & + \frac{p_{\parallel}^\mu p_{\parallel}^\nu}{2} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) \right] \left( -3v_r - \frac{1}{v_r^3} \right) - \frac{p_{\perp}^\mu p_{\perp}^\nu}{6} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) \right] \left( -\frac{3}{v_r^3} + \frac{2}{v_r} - 15v_r \right) \\ & - 2(g_{\alpha\lambda\parallel} - g_{\alpha\lambda\perp}) \text{Tr} \left[ m^2 \gamma^\lambda \gamma_\beta (g_V^2 - g_A^2) \right] \left( -\frac{1 + v_r^2}{v_r^3} \right) \\ & + \frac{p_{\parallel}^\mu p_{\parallel}^\nu}{2} (g_{\alpha\lambda\parallel} - g_{\alpha\lambda\perp}) \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) \right] \left( \frac{(v_r^2 - 1)(1 + 3v_r^2)}{v_r^3} \right) \\ & - \frac{4}{p^6} \frac{p_{\perp}^2}{3} \left( \text{Tr} \left[ m^2 \gamma_\alpha \gamma_\beta (g_V^2 - g_A^2) \right] \left( \frac{3 + 2v_r^2 + 3v_r^4}{v_r^5} \right) \right. \\ & \left. - \frac{p_{\parallel}^\mu p_{\parallel}^\nu}{4} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) \right] \left( \frac{3(1 + v_r^2 + 3v_r^4 - 5v_r^6)}{v_r^5} \right) \right) \left. \right\} \Theta(p^2 - 4m^2), \end{aligned} \quad (3.32)$$

y se han usado las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= -\frac{i}{2}\hat{F}^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu, \\ \Sigma_3\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5)\left(m + \gamma_\nu p_\parallel^{\nu}\frac{1-v}{2}\right)\Sigma_3 &= (\gamma_{\alpha\parallel} - \gamma_{\alpha\perp})(g_V - g_A\gamma_5)\left(m + \gamma_\nu p_\parallel^{\nu}\frac{1-v}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde

$$v_r \equiv \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}, \quad (3.34)$$

con el fin de preservar escalares de Lorentz. Es importante notar que la Ec. (3.33) es válida únicamente para el caso de un campo magnético homogéneo a lo largo de  $z$ .

Es importante notar que la Ec. (3.32) ya considera simplificaciones de términos de la forma  $\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5$ , cuya traza es un tensor de Levi-Civita, el cual se encuentra completamente contraído con tensores simétricos, de forma que no aportan a  $\text{Im}(\tilde{\Pi}^B)$ .

Una vez obtenida la Ec. (3.32), lo que sigue es realizar las trazas sobre las matrices de Dirac, pero como la única traza nueva que aparece en la Ec. (3.32), respecto de las calculadas en el vacío, es<sup>1</sup>

$$\frac{1}{4}\text{Tr}\left[\hat{F}^{\rho\sigma}\hat{F}^{\xi\chi}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\xi\gamma_\chi\gamma_\beta(g_V^2 + g_A^2)g_\parallel^{\mu\nu}(1 - v_r^2)\right] = -8g_{\alpha\beta\perp}(g_V^2 + g_A^2)(1 - v_r^2), \quad (3.35)$$

entonces el resultado de la traza es inmediato de forma que, una vez hechas todas las simplificaciones, la forma final de  $\text{Im}(\tilde{\Pi}^B)$  es

$$\begin{aligned} \text{Im}(\tilde{\Pi}^B) &= -\frac{g^2(eB)^2}{2^4 3\pi \cos^2 \theta_W} \left\{ \frac{(g_V^2 + g_A^2)}{v_r p^2} \left( -\frac{8}{3} + 4v_r^2 - \frac{2p_\perp^2(1 + 3v_r^2)}{3M^2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{3}{8v_r^3 p^4} \left( (g_V^2 + g_A^2) \left( -\frac{2p_\perp^2}{3} [19 - 4v_r^2 + 69v_r^4] + 8p^2 [-1 + 3v_r^2] \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + 8m^2(g_V^2 - g_A^2) \left[ \frac{1}{3} - 5v_r^2 + \frac{2p_\perp^2}{M^2}(1 + v_r^2) \right] \right) \right. \\ &\quad - \frac{p_\perp^2}{6v_r^5 p^6} \left( 16m^2(3 + 2v_r^2 + 3v_r^4)(g_V^2 - g_A^2) \right. \\ &\quad \left. \left. + (9p^2(1 + v_r^2 + 3v_r^4 - 5v_r^6))(g_V^2 + g_A^2) \right) \right\} \Theta(p^2 - 4m^2) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Finalmente, combinando las Ecs (2.60) y (3.36) en (3.27), se obtiene la función de auto-

<sup>1</sup>Los detalles del cálculo de esta traza se muestran con detalle en el Apéndice A.



energía  $\Pi^B(p)$

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\Pi^B(p)) = & \frac{-g^2}{32\pi \cos^2 \theta_W} \left\{ (g_V^2 - g_A^2) 2m^2 \frac{\sqrt{p^2 - 4m^2}}{p} \right. \\
& + (g_V^2 + g_A^2) \frac{p\sqrt{p^2 - 4m^2}}{2} + (g_V^2 + g_A^2) \frac{(p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{6p} \left. \right\} \Theta(p^2 - 4m^2) \\
& - \frac{g^2 (eB)^2}{32\pi \cos^2 \theta_W} \frac{1}{3} \left\{ \frac{(g_V^2 + g_A^2)}{v_r p^2} \left( -\frac{8}{3} + 4v_r^2 - \frac{2p_\perp^2(1 + 3v_r^2)}{3M^2} \right) \right. \\
& - \frac{3}{8v_r^3 p^4} \left( (g_V^2 + g_A^2) \left( -\frac{2p_\perp^2}{3} [19 - 4v_r^2 + 69v_r^4] + 8p^2 [-1 + 3v_r^2] \right) \right. \\
& + 8m^2 (g_V^2 - g_A^2) \left[ \frac{1}{3} - 5v_r^2 + \frac{2p_\perp^2}{M^2} (1 + v_r^2) \right] \left. \right) \\
& - \frac{p_\perp^2}{6v_r^5 p^6} \left( 16m^2 (3 + 2v_r^2 + 3v_r^4) (g_V^2 - g_A^2) \right. \\
& \left. \left. + (9p^2 (1 + v_r^2 + 3v_r^4 - 5v_r^6)) (g_V^2 + g_A^2) \right) \right\} \Theta(p^2 - 4m^2). \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Éste es el resultado del análisis hecho sobre la parte imaginaria de la función de autoenergía en presencia de un campo magnético. En la siguiente sección el objetivo será relacionar el resultado de la Ec. (3.37) con la tasa de decaimiento del bosón masivo a través del teorema óptico tal como se mostró en el capítulo 2.

### 3.3. Tasa de Decaimiento con Campo Magnético

Al aplicar la teoría de la sección 1.4 para el caso magnético, en particular la Ec. (2.61), se obtiene una ecuación para la tasa de decaimiento en presencia de un campo magnético de la forma

$$\Gamma^B = \Gamma + \tilde{\Gamma}^B \tag{3.38}$$

donde  $\Gamma^B$  es la tasa de decaimiento de la partícula bosónica bajo la influencia de un campo magnético,  $\Gamma$  es la tasa de decaimiento en el vacío y  $\tilde{\Gamma}^B$  representa a las modificaciones, por la presencia del campo magnético, a la tasa de decaimiento.

Al tomar en cuenta que la partícula incidente es un bosón masivo real,  $p^2 = M^2$ , la tasa

de decaimiento que se obtiene es

$$\begin{aligned}
\Gamma^B(p) = & \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W M} \left\{ \left[ g_V^2 (M^2 + 2m^2) + g_A^2 (M^2 - 4m^2) \right] \sqrt{M^2 - 4m^2} \right. \\
& - \frac{(eB)^2}{3M^5 (M^2 - 4m^2)^{\frac{5}{2}}} \left[ g_V^2 \left[ 14M^8 - 55M^6 p_\perp^2 + 48m^6 (M^2 + 105p_\perp^2) \right. \right. \\
& + 4m^4 (83M^4 - 863M^2 p_\perp^2) + m^2 (-142M^6 + 810M^4 p_\perp^2) \left. \left. \right] \right. \\
& + g_A^2 \left[ 14M^8 - 55M^6 p_\perp^2 + 48m^6 (31M^2 + 77p_\perp^2) - 4m^4 (91M^4 + 627M^2 p_\perp^2) \right. \\
& \left. \left. + m^2 (-58M^6 + 610p_\perp^2) \right] \right\} \frac{\Theta(M^2 - 4m^2)}{\sqrt{p^2 + M^2}}. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Esta tasa de decaimiento es claramente dependiente de la dinámica de la partícula entrante, especialmente de su componente perpendicular al campo magnético  $p_\perp$ . En el caso particular del marco de referencia de reposo de la partícula incidente  $p_\perp = 0$ , la tasa de decaimiento es

$$\begin{aligned}
\Gamma^B = \Gamma - \frac{g^2 (eB)^2}{72\pi \cos^2 \theta_W} \frac{\Theta(M^2 - 4m^2)}{M^4 (M^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}} \left( g_V^2 (-6m^4 - 43m^2 M^2 + 7M^4) \right. \\
\left. + g_A^2 (-186m^4 - m^2 M^2 + 7M^4) \right) \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Con este resultado se puede proceder a comparar la tasa de decaimiento del proceso estudiado en dos escenarios físicos: el decaimiento en el vacío y el decaimiento en presencia de un campo magnético, lo cual es el objetivo principal del presente trabajo.

Al tomar en cuenta que  $M$  es la masa del bosón  $Z$  y  $m$  las masas de los fermiones en el lazo, es fácil observar que las modificaciones hechas por el campo a las partes vectoriales y axiales de la tasa de decaimiento, son idénticas a orden dominante en  $M$ . También se observa que la diferencia entre la parte axial y vectorial es proporcional a  $\frac{m^2}{M^2}$ , tal como sucede en el caso del vacío, siendo más grande el efecto del campo en la parte vectorial que en la parte axial.

Es relevante notar que, para los acoplamientos posibles de la corriente neutra con fermiones que cumplen la relación de Heaviside de la anterior ecuación, siempre se cumple que  $M \gg m$  tal que  $\tilde{\Gamma}^B < 0$  al considerar cualquier fermión de masa  $m$ . Por lo tanto, la tasa de decaimiento en el caso de campo débil disminuye con la intensidad del campo magnético.

## Capítulo 4

# Cambios en la Tasa de Decaimiento Producto del Campo Magnético

En el presente capítulo se muestran explícitamente los cambios sobre la tasa de decaimiento producto de la presencia de un campo magnético. Estos cambios, efecto de la comparación de los resultados obtenidos en los capítulos 2 y 3, se grafican en función de los diferentes parámetros de las que depende y se hace una breve discusión física.

Como parte final, se comparan los resultados encontrados en el presente trabajo para el proceso

$$Z \longrightarrow \bar{\psi}\psi, \quad (4.1)$$

con los resultados para el caso escalar analizados en [20,33], donde un campo escalar neutro decae a un par de fermiones cargados

$$\varphi \longrightarrow \bar{\psi}\psi. \quad (4.2)$$

Dicho análisis comparativo se lleva a cabo con la finalidad de tratar de cuantificar el rol que juega el espín de la partícula bosónica vectorial en el estado inicial, en el proceso de decaimiento a fermiones cargados.

Por otro lado, también se incorporan los resultados encontrados en el artículo [34] con el mismo objetivo de comparar la tasa de decaimiento del proceso donde el campo escalar bosónico neutro decae a un par de bosones escalares cargados

$$\varphi \rightarrow \varphi^* \varphi. \quad (4.3)$$

Este último análisis se hace con la finalidad de conocer la respuesta neta de la presencia de espín en tanto el estado inicial como en el estado final.

### 4.1. Aproximación de bajas velocidades

En la figura 4.1 se grafica la Ec. (3.37) como función de la intensidad de campo magnético, contrastándolo con el caso del vacío de la Ec. (2.60), tomando los valores  $\frac{p_{\pm}}{m} = 0$ ,  $M = 91.1876$  GeV,  $m = 1.77686$  GeV (que corresponden a la masa del bosón  $Z$  y el leptón  $\tau$  respectivamente) [35],  $g = 0.65$ ,  $\theta_W = 28.18$ ,  $g_V = -0.03783$  y  $g_A = -0.50123$ . Éstos valores

son los mismos para todas las figuras de aquí en adelante, a menos de que se especifique algo distinto.

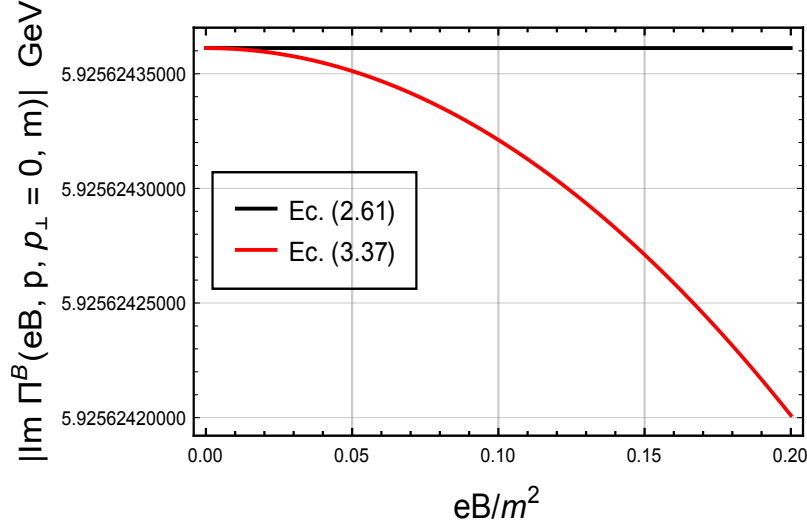


Figura 4.1: Gráfica de la función de autoenergía de Ec. (3.37) (línea roja) y (2.60) (línea negra), como función del campo magnético, para el caso  $\frac{p_\perp}{m} = 0$ ,  $\frac{M}{m} = 51.32$ ,  $g = 0.65$ ,  $g_V = -0.03783$ ,  $g_A = -0.50123$  y  $\theta_W = 28.18$ .

Al ver la figura 4.1, es importante notar que en el caso del vacío hay un comportamiento constante dado que no existe dependencia alguna al campo magnético. En contraste, se observa que el efecto del campo magnético sobre  $|\text{Im}(\Pi^B(p))|$  es disminuir esta cantidad, es decir a medida que el campo magnético aumenta, la parte imaginaria de la autoenergía disminuye.

Un análisis interesante de hacer es ver el comportamiento de la autoenergía de la Ec. (3.37) para distintas condiciones cinemáticas. Para ello, se define la siguiente cantidad

$$\Delta\Pi(eB, p, p_\perp, m) \equiv \left| \frac{\text{Im}(\Pi^B(eB, p, p_\perp, m)) - \text{Im}(\Pi^B(eB, p, 0, m))}{\text{Im}(\Pi^B(eB, p, 0, m))} \right|, \quad (4.4)$$

la cual se muestra en la figura 4.2, para distintos valores del momento transversal.

En la figura 4.2, se muestra que la intensidad del campo magnético juega un mayor rol ante las funciones de autoenergía cuyo momentum es mayor. Conforme el momento transversal  $p_\perp$  crece, el campo magnético tiene un mayor efecto sobre la parte imaginaria de la función de autoenergía. Este efecto cinemático, como se observa en la figura, es muy pequeño. Esto se debe en gran parte a que la masa del bosón  $Z$  es muy grande en comparación con las otras escalas energéticas. Para corroborar esta afirmación, en la figura 4.3, se grafica de nuevo la Ec. (4.4) en función del momento transversal, para distintos valores del campo magnético, considerando una masa del bosón  $Z$ ,  $\frac{M}{m} = 5.63$ .

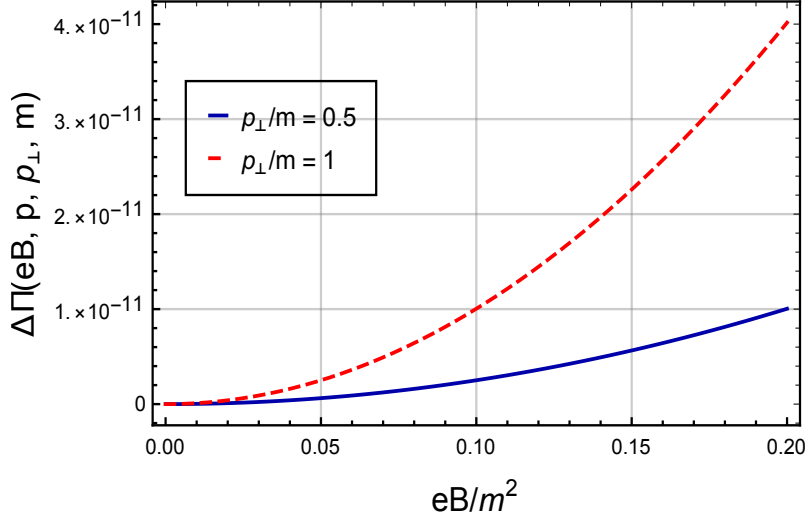


Figura 4.2: Gráfica de la Ec. (4.4) como función del campo magnético, para  $\frac{p_{\perp}}{m} = 0.5$  y 1.

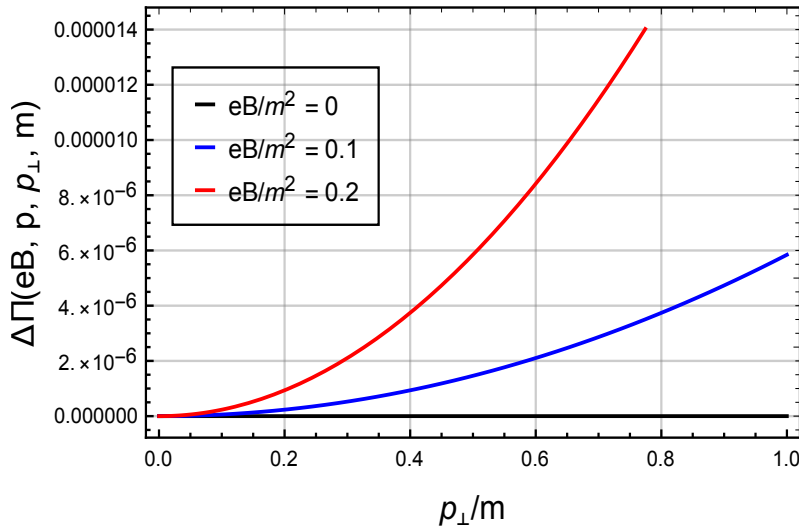


Figura 4.3: Gráfica de la Ec. (4.4) como función del momento transverso para distintas intensidades de campo:  $\frac{eB}{m^2} = 0, 0.1$  y  $0.2$ , tomando  $\frac{M}{m} = 5.63$ .

Una vez realizados estos análisis sobre la parte imaginaria de la función de autoenergía, se tiene una idea del comportamiento que la tasa de decaimiento presentará por efecto de la intensidad de campo magnético y del momento transverso.

En la figura 4.4 se grafica la Ec. (3.39), contrastándolo con el caso del vacío de la Ec. (2.62) tomando los valores  $\frac{p_{\perp}}{m} = 0$ ,  $M = 91.1876$  GeV,  $m = 1.77686$  GeV [35],  $g = 0.65$ ,  $\theta_W = 28.18$ ,  $g_V = -0.03783$  y  $g_A = -0.50123$ .

Como se muestra en la figura 4.1, la tasa de decaimiento disminuye a medida que el campo magnético aumenta mientras que para el caso del vacío el comportamiento es constante. También se observa en esta gráfica que conforme  $eB \rightarrow 0$ , ambas curvas convergen.

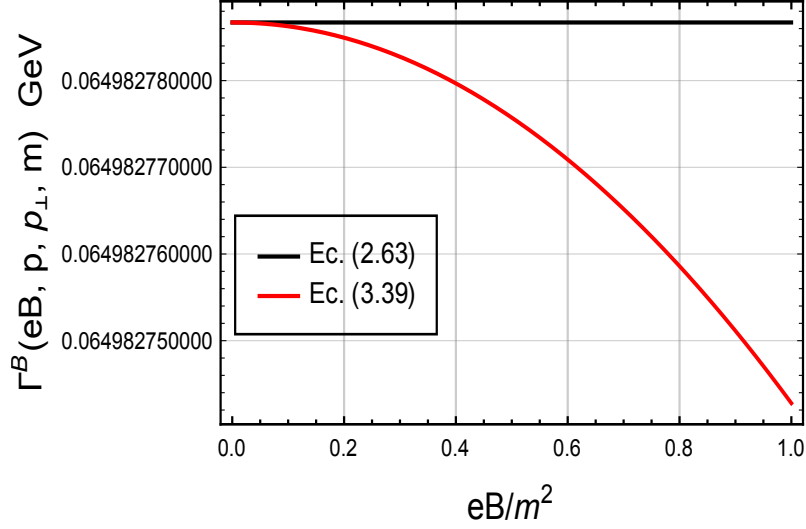


Figura 4.4: Gráfica de la tasa de decaimiento, Ec. (3.39), como función de la intensidad de campo magnético para los valores  $\frac{p_{\perp}}{m} = 0$ ,  $\frac{M}{m} = 51.32$ ,  $g = 0.0674941$ ,  $\theta_W = 39$ ,  $g_V = 0.466877$  y  $g_A = 0.5$ .

De forma análoga al estudio realizado en la parte imaginaria, se define la cantidad

$$\Delta\Gamma_{\%}(eB, p, p_{\perp}, m) \equiv \frac{\Gamma^B(eB, p, p_{\perp}, m) - \Gamma^B(eB, p, 0, m)}{\Gamma^B(eB, p, 0, m)}, \quad (4.5)$$

para estudiar el comportamiento de la tasa de decaimiento en presencia del campo para distintas condiciones cinemáticas. En la figura 4.5, para el valor de la intensidad de campo magnético  $\frac{eB}{m^2} = 0.2$  se grafica la Ec. (4.5) como una función del momentum transverso.

En la figura 4.5 se muestra el cambio porcentual de la tasa de decaimiento, Ec. (4.5), como función del momento transverso para diferentes condiciones sobre la intensidad del campo magnético  $\frac{eB}{m^2} = 0.2$  con  $\frac{M}{m} = 51.32$ . Desafortunadamente, el efecto que se aprecia es muy pequeño en la tasa de decaimiento, esto se debe a que, en este régimen energético, el valor de la masa del bosón Z domina sobre el resto de las escalas. A fin de corroborar esta afirmación, y de forma exploratoria en la figura 4.6, se grafica nuevamente la Ec. (4.5) para el valor  $\frac{M}{m} = 5.63$ .

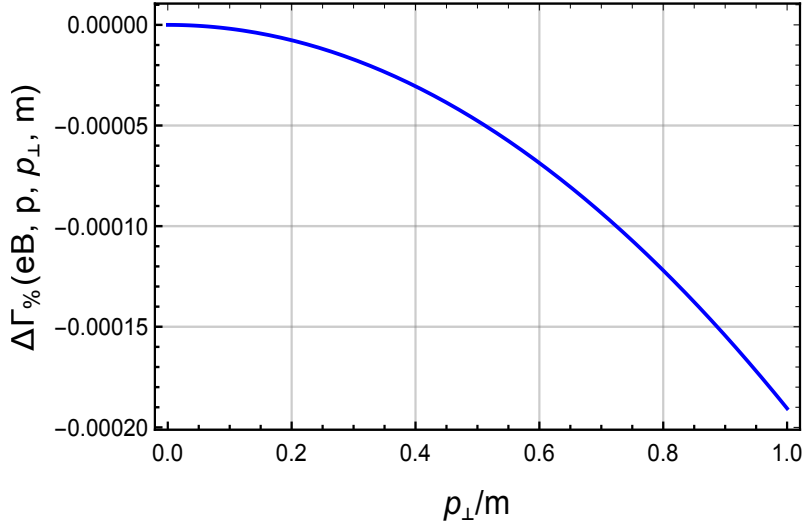


Figura 4.5: Gráfica del cambio porcentual de la tasa de decaimiento, Ec. (4.5), como función del momentum transverso, para una intensidad de campo magnético:  $\frac{eB}{m^2} = 0.2$ , con  $\frac{M}{m} = 51.32$ .

Al hacer la exploración con  $\frac{M}{m} = 5.63$  en la figura 4.6, es más sencillo notar que la tasa de decaimiento es más sensible a los cambios sobre el momentum transverso, ya que los valores en el eje vertical son más grandes comparados con los de la figura 4.3. Por lo tanto, a mayor momentum transverso el efecto del campo en la tasa de decaimiento es mayor.

## 4.2. El rol del espín en el decaimiento

En esta sección se tiene el objetivo de encontrar el rol que juega el del espín en el proceso de decaimiento. Para ello, se aprovechan los resultados de los trabajos [20, 33], para el proceso del decaimiento escalar a un par de fermiones cargados, y [34], para el decaimiento de un escalar a un par cargado de escalares; bajo las mismas condiciones cinemáticas y de intensidad magnética.

### 4.2.1. Comparación con el caso escalar

Para realizar la comparación de la tasa de decaimiento, producto de este trabajo, con el decaimiento de una partícula escalar neutra a un par de fermiones cargados se toman los resultados de [20, 33] que estén sujetas a las mismas suposiciones: baja intensidad de campo magnético y bajas velocidades.

Las tasas de decaimiento calculadas para el proceso  $\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ , son [20, 33]

$$\Gamma_{\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi} = \frac{g^2}{8\pi\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} \frac{(M^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{M} \Theta(M^2 - 4m^2), \quad (4.6)$$

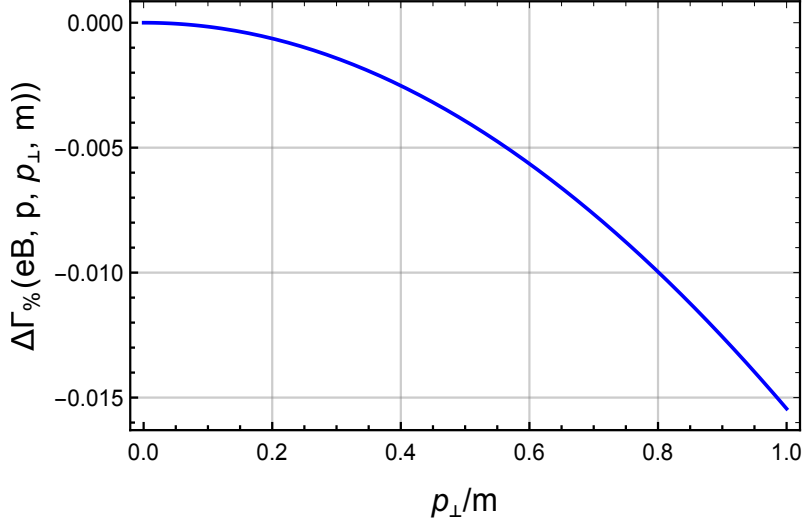


Figura 4.6: Gráfica del cambio porcentual de la tasa de decaimiento, Ec. (4.5), como función del momentum transverso, para una intensidad de campo magnético:  $\frac{eB}{m^2} = 0.2$ , con  $\frac{M}{m} = 5.63$ .

para el caso del vacío y, para el caso de bajas velocidades y campo magnético débil [20, 33]

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\varphi \rightarrow \bar{\psi}\psi}^B = & \frac{g^2}{8\pi} \left[ \frac{(p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{p} - \frac{24(eB)^2 m^4 p_{\perp}^2}{p^5 (p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
 & - \frac{16(eB)^2 m^2 p_{\perp}^2}{3p^5} \frac{12m^4 - 7m^2 p^2 + p^4}{(p^2 - 4m^2)^{\frac{5}{2}}} \\
 & \left. + \frac{4(eB)^2}{3p^3} \frac{4m^2 p^2 + 2m^2 p_{\perp}^2 + 2p^2 p_{\perp}^2 - p^4}{(p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{\Theta(p^2 - 4m^2)}{\sqrt{p^2 + M^2}}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Una definición que es de gran importancia para vislumbrar el efecto del espín sobre la tasa de decaimiento del proceso es:

$$\Delta\Gamma \equiv \frac{\Gamma^B}{\Gamma_{\text{Vacío}}}, \tag{4.8}$$

la cual permite cuantificar la respuesta del sistema ante el estímulo externo.

Al hacer uso de la Ec. (4.8) para las relaciones (4.6) y (4.7), se obtiene una medición del efecto que tiene el campo magnético sobre el proceso con respecto al sistema en el vacío. Esta comparación esencialmente es el efecto que tiene el campo magnético sobre la tasa de decaimiento del proceso escalar a un par de fermiones cargados. Por otro lado, la Ec. (4.8) sintetiza información sobre el efecto que tiene el campo magnético sobre la tasa de decaimiento del proceso bosónico vectorial a un par de fermiones cargados. Por lo tanto, se puede tomar el coeficiente de estos análisis para vislumbrar de manera gráfica el rol que juega el espín de la partícula bosónica vectorial en el decaimiento.



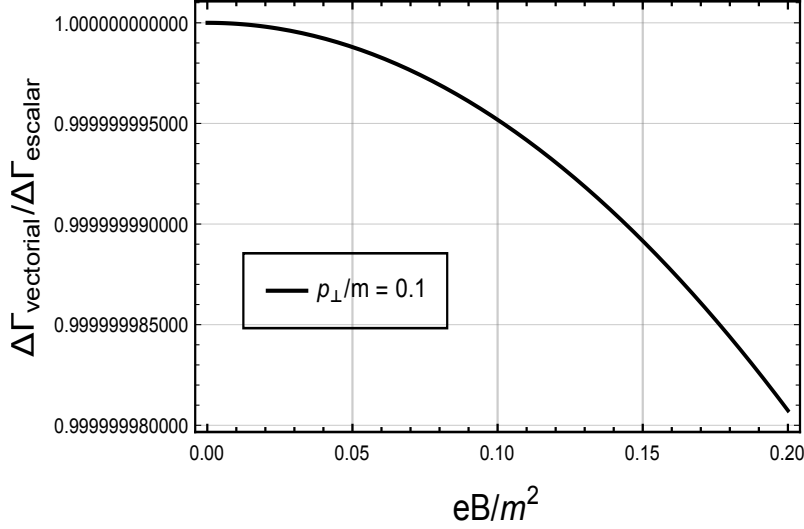


Figura 4.7: Cociente de las razones de cambio entre el caso vectorial y escalar como función de la intensidad de campo magnético con condiciones cinemáticas idénticas en el régimen de bajas velocidades y campo débil, para  $\frac{p_{\perp}}{m} = 0.1$  y  $\frac{M}{m} = 51.32$ .

En la figura 4.7 se muestra el comportamiento del cociente entre las razones de cambio de las tasas de decaimiento, como función del campo magnético, para procesos que solo se diferencian por el espín de la partícula bosónica entrante dado un valor fijo de momento transversal. Se observa, en dicha figura, que conforme el campo magnético aumenta el cociente disminuye, por lo tanto la tasa de decaimiento del caso escalar es mayor a la del caso vectorial. Esta diferencia se debe solamente a la presencia de espín en el caso vectorial ya que, esencialmente, es la única propiedad adicional al proceso de decaimiento de una partícula bosónica escalar a un par de fermiones cargados.

#### 4.2.2. Comparación con el caso sin espín

De forma análoga a lo mostrado en la sección anterior, se toman los resultados sobre las tasas de decaimiento de la Ref [34], donde

$$\Gamma_{\varphi \rightarrow \varphi^* \varphi} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + M^2}} \frac{\tilde{g}^2}{16\pi} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \Theta(p^2 - 4m^2), \quad (4.9)$$

es la tasa de decaimiento del proceso en el vacío, con  $\tilde{g}$  la constante de acoplamiento de la teoría de interacción de un campo escalar con dos escalares cargados. En el caso de bajas velocidades

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi \rightarrow \varphi^* \varphi}^B &= \frac{1}{\sqrt{p^2 + M^2}} \frac{\tilde{g}^2 p^2}{16\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{eB}{p^2} \right)^2 \frac{1}{\left( 1 - \frac{4m^2}{p^2} \right)^2} \left[ 1 - \frac{2p_{\perp}^2}{p^2} \frac{3 + 8\frac{m^2}{p^2} - 14\frac{m^4}{p^4}}{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \right] \right\} \Theta(p^2 - 4m^2), \end{aligned} \quad (4.10)$$

Al usar la definición de la Ec. (4.8) para las relaciones (4.9) y (4.10), de forma similar a

la sección anterior, se obtiene un cociente que codifica el cambio del campo magnético sobre la tasa de decaimiento.

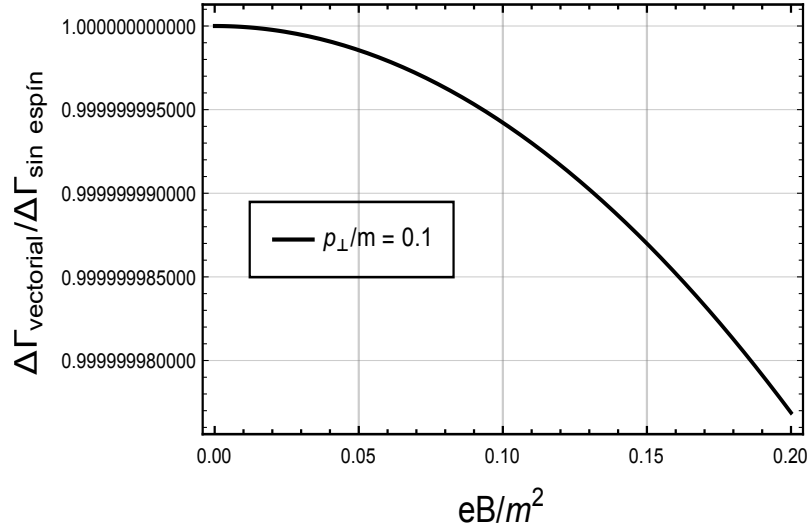


Figura 4.8: Cociente de las razones de cambio entre el caso vectorial y el caso sin espín como función de la intensidad de campo magnético con condiciones cinemáticas idénticas en el régimen de bajas velocidades y campo débil, para  $\frac{p_{\perp}}{m} = 0.1$  y  $\frac{M}{m} = 51.32$ .

De forma análoga a lo encontrado, en la figura 4.8, es notorio que, bajo las mismas condiciones cinemáticas (de bajas velocidades y campo débil), el proceso de decaimiento de un escalar neutro a un par de partículas escalares cargadas es mayor al decaimiento de la partícula bosónica vectorial a un par de fermiones cargados. Como la única diferencia en estos procesos es la presencia o ausencia del espín, podemos atribuir directamente la diferencia de las tasas de decaimiento a ésta propiedad de las partículas.

Con el propósito de conocer el efecto del espín de forma parcial y total, en la figura 4.9, se superponen las figuras 4.7 y 4.8.

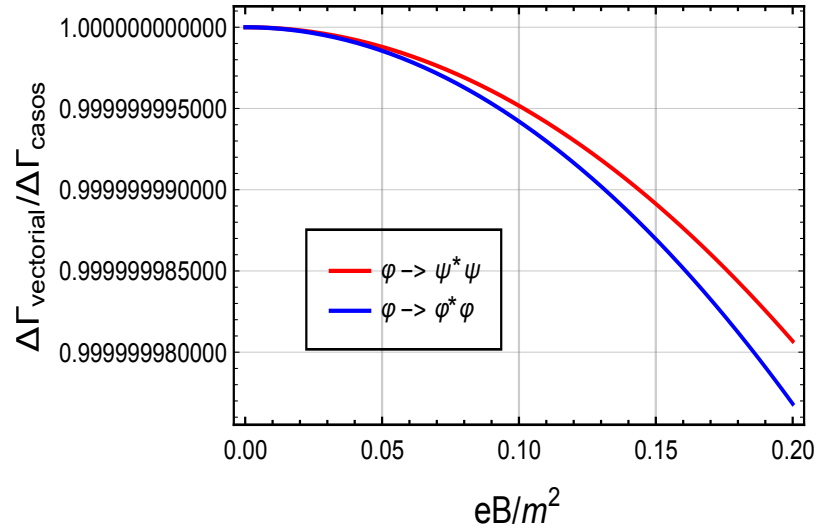


Figura 4.9: Gráfico conjunto de las razones de cambio entre el caso vectorial y los distintos casos de presencia de espín en función de la intensidad de campo magnético bajo condiciones cinemáticas idénticas en el régimen de bajas velocidades y campo débil.

Es notable que para el caso en el que el espín está ausente en el proceso, la respuesta del sistema al campo magnético  $\Delta\Gamma_{\varphi \rightarrow \varphi^* \varphi}$  es mayor en comparación con los casos en donde hay presencia de espín. Este resultado muestra, a primera instancia, que la existencia de espín en los procesos presentados disminuye la respuesta del sistema al estímulo externo.

# Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se calculó la función de autoenergía del bosón  $Z$ , con un lazo fermiónico a orden dominante en presencia de un campo magnético. Usando la aproximación de campo débil y en la región energética de bajas velocidades, se encontró que la tasa de decaimiento del proceso depende de la cinemática de la partícula y de la intensidad del campo magnético, parámetros que dependen directamente del escenario físico que se estudie.

Se encontró que, dado un momento transverso fijo, la tasa de decaimiento  $\Gamma^B$  y el cambio porcentual de la tasa de decaimiento  $\Delta\Gamma\%$  disminuyen conforme la intensidad de campo magnético aumenta. Se interpreta a este resultado como la reducción del espacio fase producto de un aumento en la separación de los niveles de Landau al incrementar la intensidad del campo magnético, promoviendo así que existan menos estados accesibles para las partículas producto del decaimiento. Por otro lado, se encontró que al mantener fijo el campo magnético, el cambio porcentual de la tasa de decaimiento  $\Delta\Gamma\%$  disminuye conforme el momentum transverso aumenta. Esto último resultó ser más notorio cuando se tomó  $\frac{M}{m} = 5.63$ ; rescatando el rol supresor de la masa del bosón  $Z$ .

Se estudió el rol del espín del bosón  $Z$ , en el proceso de decaimiento, tomando el cociente entre el resultado presentado en la Ec. (3.39) con el resultado análogo de las referencias [20, 33] donde el proceso de decaimiento es de una partícula escalar neutra a un par fermión-antifermión cargado. Como resultado se obtuvo la figura 4.7 en la cual se observa que, bajo las mismas condiciones cinemáticas, la razón de cambio de la tasa de decaimiento escalar es mayor a la del caso vectorial a medida que el campo magnético aumenta. De forma similar, al tomar el cociente entre la Ec. (3.39) con el resultado de la referencia [34], donde el proceso de decaimiento es de un escalar neutro a un par de escalares cargados, se obtuvo que este último proceso también es mayor al del caso vectorial. La información relevante entre estos casos se presenta en la figura 4.9, donde se logra apreciar que conforme aumentan las partículas con espín, éste juega un rol mayor en la respuesta del proceso de decaimiento de la partícula inicial, de modo que entre mayor sea el número de partículas con espín menor el efecto del campo en la respuesta del proceso de decaimiento, al menos en este régimen cinemático consistente con la aproximación de campo débil.

Finalmente, cabe mencionar que el presente trabajo se restringe a una región cinemática específica que podría ser expandida haciendo otro tipo de aproximaciones o utilizando métodos numéricos para la resolución de la integral mostrada en la Ec. (3.22). Así mismo, se puede considerar a este trabajo como una primera aproximación a cómo, factores externos, modifican la tasa de decaimiento del proceso estudiado, ya que existen otros factores como la densidad de partículas y la temperatura que podrían introducir modificaciones importantes a la masa de las partículas que podrían provocar alteraciones relevantes.

Para trabajo a futuro, además de tomar en cuenta los factores anteriormente mencionados,

se puede investigar el rol de la polarización del bosón  $Z$  a la tasa de decaimiento bajo la influencia del campo magnético.

# Apéndice A

## Trazas

En el presente apéndice se llevan a cabo, con mayor detalle, los cálculos hechos sobre la suma de espín fraccionario dentro del lazo de fermiones en los casos en el cual el proceso se da en ausencia 2 y presencia del campo magnético 3. Este cómputo se realiza como parte de las reglas de Feynman expresadas en la introducción 1.2.1 con el objetivo de obtener una amplitud de probabilidad de los procesos.

### A.1. Cálculo de la traza sin campo

En esta sección se desarrolla de forma más detallada los resultados, relacionados al cálculo de la traza, que se muestran dentro de la sección 2.2.2.

Al notar la Ec. (2.27) surge la necesidad explícita de calcular la traza de los términos ahí indicados. Por lo que basta con probar las relaciones (2.28) considerando las definiciones de las matrices de Dirac, así como su relación de anticonmutación, dadas en la sección 1

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] &= \mathrm{Tr}\left[\gamma^5\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] = \mathrm{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma^5\right] = -\mathrm{Tr}\left[\gamma^5\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] \\ &\implies \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] = 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] &= \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma^5\right] = -\mathrm{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] \\ &\implies \mathrm{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] = 0,\end{aligned}\tag{A.2}$$

este par de resultado son extensible para la traza de un número impar de matrices de Dirac. Por otro lado también se puede calcular

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\right] &= \mathrm{Tr}\left[\{\gamma_\alpha,\gamma_\beta\} - \gamma^\beta\gamma^\alpha\right] = \mathrm{Tr}\left[2g_{\alpha\beta}\mathbb{1}_{4\times 4} - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right] \\ &= 2g_{\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[\mathbb{1}_{4\times 4}\right] - \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\right] \\ &\implies \mathrm{Tr}\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta\right] = 4g_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{A.3}$$

También se usa la forma explícita de la traza

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] &= \text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\left(2g_{\nu\beta} - \gamma_\beta\gamma_\nu\right)\right] = 2g_{\nu\beta}\text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\right] - \text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\nu\right] \\
 &= 8g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} - \text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\nu\right] = 8g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} - \text{Tr}\left[\gamma_\mu\left(2g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right)\gamma_\nu\right] \\
 &= 8g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} - 8g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + \text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha\gamma_\nu\right] \\
 &= 8g_{\nu\beta}g_{\mu\alpha} - 8g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + 8g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu} - \text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] \\
 \implies \text{Tr}\left[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] &= 4\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}\right).
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Finalmente, para poder demostrar la identidad de  $\text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right]$ , es necesario notar que la traza es completamente antisimétrica

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right] &= \text{Tr}\left[\gamma^5\left(2g_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha\gamma_\mu\right)\gamma_\nu\gamma_\beta\right] = 2g_{\mu\alpha}\text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\nu\gamma_\beta\right] - \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\right] \\
 &= -\text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\right],
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

se nota que el resultado es completamente antisimétrico ante el intercambio de índices, por lo que el resultado más simple es la implicación del tensor Levi-Civita

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\right] &= \varepsilon_{\alpha\mu\nu\beta}A \implies \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\right] = \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\beta}A = -4!A \\
 \implies A &= -\frac{1}{4!}\varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\right] = -i\text{Tr}\left[\gamma^5\gamma^5\right] = -4i \\
 \implies \text{Tr}\left[\gamma^5\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\right] &= -4i\varepsilon_{\alpha\mu\nu\beta}.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Una vez aclarados estos resultados, el camino de la Ec. (2.27) a la Ec. (2.29) se vuelve más claro.

## A.2. Análisis de las trazas con campo

En la sección relacionada a la tasa de decaimiento en el campo magnético 3 la función de autoenergía de la Ec. (3.24) contiene contribuciones sobre la interacción del campo magnético de la forma  $(eB)^n$ . Dadas las aproximaciones a segundo orden hechas en el caso magnético, solamente se puede tomar  $n = 0, 1, 2$ . Se consideran entonces las contribuciones de traza relacionadas a cada grado de la contribución magnética donde la contribución para  $(eB)^0$

es

$$\begin{aligned} \tau_0 \equiv & \text{Tr} \left[ \left( m - \gamma_\mu p^\mu \frac{1+v}{2} \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p^\nu \frac{1-v}{2} \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\ & \left. + \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g^{\mu\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para el término lineal  $(eB)^1$ , la contribución correspondiente es

$$\begin{aligned} \tau_1 \equiv & \text{Tr} \left[ \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (1-v) \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\ & + \left( m + \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (1+v) \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \\ & + \gamma_\mu (-i s \Sigma_3 (1-v)) \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \\ & \left. + \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu (-i s \Sigma_3 (1+v)) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Es de importancia hacer notar que  $\tau_1$  no contribuye a la función de autoenergía al multiplicarse por el factor externo  $\left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right)$  por lo que se hace el desarrollo del argumento de forma explícita. Uno de los argumentos de la traza es

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[ m \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (-v+1) \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) m \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\ & \quad \left. + m \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (v+1) \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) m \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right] \\ & = \text{Tr} \left[ m^2 \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 \right) (g_V^2 - g_A^2) (\gamma_\alpha \gamma_\beta (-v+1) + \gamma_\beta \gamma_\alpha (v+1)) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Será útil darse cuenta que el tensor electromagnético normalizado para nuestro caso en particular (únicamente campo magnético en la dirección  $z$ ):

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

También se reescribe a la matriz de interacción de campo magnético con spin ( $\Sigma_3$ ) en términos de matrices de Dirac, como se hizo en la introducción 1



$$\Sigma_3 \equiv -\frac{\hat{F}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}{2} = -\frac{i}{2}\hat{F}_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu.$$

Por lo tanto la expresión (A.9) ahora tiene la forma

$$\begin{aligned} &= -\frac{m^2 s}{4}\hat{F}^{\rho\sigma}\text{Tr}\left[\left(\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\beta(-v+1) + \gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\beta\gamma_\alpha(v+1)\right)(g_V^2 - g_A^2)\right] \\ &= 4m^2 s\hat{F}_{\alpha\beta}(g_V^2 - g_A^2) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Usando el término externo:  $\left(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2}\right)$  esta expresión se reduce a 0 ya que  $\hat{F}_{\alpha\beta}$  es un tensor puramente antisimétrico.

Otra contribución que existe dentro de  $\tau_1$  es

$$\begin{aligned} &\text{Tr}\left[-\gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \left(-\frac{1}{2}is\Sigma_3(1-v)\right) \gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5)m\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma_5) \right. \\ &+ \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \left(-\frac{1}{2}is\Sigma_3(1+v)\right) \gamma_\beta(g_V - g_A\gamma_5)m\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5) \\ &+ m \left(-\frac{1}{2}is\Sigma_3(1-v)\right) \gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5) \left(\gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2}\right) \gamma_\beta(g_V - g_A\gamma_5) \\ &\left. + m \left(-\frac{1}{2}is\Sigma_3(1+v)\right) \gamma_\beta(g_V - g_A\gamma_5) \left(-\gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2}\right) \gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5)\right] = 0 \end{aligned}$$

esta última igualdad se da ya que se consideran

$$\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\beta] = \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_5] = 0,$$

propiedades demostradas en los desarrollos (A.1) y (A.2).

La variable  $\tau_1$  también está compuesta por

$$\begin{aligned} &\text{Tr}\left[-\gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \left(-\frac{1}{2}is\Sigma_3(1-v)\right) \gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5)\gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \gamma_\beta(g_V - g_A\gamma_5) \right. \\ &\left. + \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1-v}{2} \left(-\frac{1}{2}is\Sigma_3(1+v)\right) \gamma_\beta(g_V - g_A\gamma_5) \left(-\gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1+v}{2}\right) \gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma_5)\right] \\ &= \text{Tr}\left[\frac{1-v^2}{8}p_\parallel^\mu p_\parallel^\nu \left\{(1-v)[\gamma_\mu is\Sigma_3\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta] + (1+v)[\gamma_\mu is\Sigma_3\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\alpha]\right\}(g_V - g_A\gamma_5)^2\right] \\ &= \frac{1-v^2}{16}sp_\parallel^\mu p_\parallel^\nu \hat{F}^{\rho\sigma}\text{Tr}\left[\left\{(1-v)[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta] + (1+v)[\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\alpha]\right\}(g_V - g_A\gamma_5)^2\right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - v^2) s \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ g_{\alpha\beta} \hat{F}_{\nu\mu} p^\nu p^\mu - p_\alpha \hat{F}_{\beta\mu} p^\mu - p_\beta \hat{F}_{\alpha\mu} p^\mu - v p_{\parallel\alpha} F_{\beta\mu} p^\mu + v p_{\parallel\beta} \hat{F}_{\alpha\nu} p^\nu - v p \cdot p_{\parallel} \hat{F}_{\alpha\beta} \right] \right. \\
 &- i \frac{1}{2} g_A g_V \left[ -g_{\alpha\beta} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu + v g_{\alpha\beta} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu + p_\alpha \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\mu} p^\mu + p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p^\nu + 2 p_\beta \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\mu} p^\mu \right. \\
 &- \hat{F}_\beta^\rho \varepsilon_{\alpha\rho\nu\mu} p^\nu p^\mu + \hat{F}_\nu^\rho \varepsilon_{\alpha\beta\rho\mu} p^\nu p^\mu - \hat{F}_\mu^\rho \varepsilon_{\alpha\beta\rho\nu} p^\nu p^\mu - \hat{F}_\alpha^\sigma \varepsilon_{\beta\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu - v p_\alpha \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\mu} p^\mu + v p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p^\nu \\
 &\left. \left. - v \hat{F}_\beta^\rho \varepsilon_{\alpha\rho\nu\mu} p^\nu p^\mu + v \hat{F}_\nu^\rho \varepsilon_{\alpha\beta\rho\mu} p^\nu p^\mu + v \hat{F}_\mu^\rho \varepsilon_{\alpha\beta\rho\nu} p^\nu p^\mu - v \hat{F}_\alpha^\sigma \varepsilon_{\beta\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu + 2 v \hat{F}_\mu^\sigma \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\nu} p^\nu p^\mu \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Se prueba fácilmente que:  $\hat{F}_{\mu\nu} p^\mu = 0$  ya que  $p_{\parallel}$  solo tiene entradas 0 y 3,

mientras que  $\hat{F}_{\mu\nu}$  tiene entradas 1 y 2.

$$\begin{aligned}
 &= (1 - v^2) s \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ -v (p_{\parallel\alpha} \hat{F}_{\beta\mu} p^\mu - p_{\parallel\beta} \hat{F}_{\alpha\nu} p^\nu + p \cdot p_{\parallel} \hat{F}_{\alpha\beta}) \right] - \frac{i}{2} g_A g_V \left[ -g_{\alpha\beta} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu \right. \right. \\
 &+ v g_{\alpha\beta} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu + p_\alpha \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\mu} p^\mu + p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p^\nu + 2 p_\beta \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\mu} p^\mu - \hat{F}_\beta^\rho \varepsilon_{\alpha\rho\nu\mu} p^\nu p^\mu \\
 &+ \hat{F}_\nu^\rho \varepsilon_{\alpha\beta\rho\mu} p^\nu p^\mu - \hat{F}_\alpha^\sigma \varepsilon_{\beta\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu - v p_\alpha \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\mu} p^\mu + v p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p^\nu - v \hat{F}_\beta^\rho \varepsilon_{\alpha\rho\nu\mu} p^\nu p^\mu \\
 &\left. \left. + v \hat{F}_\nu^\rho \varepsilon_{\alpha\beta\rho\mu} p^\nu p^\mu - v \hat{F}_\alpha^\sigma \varepsilon_{\beta\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Es notorio que las únicas entradas no nulas de  $\hat{F}^{\rho\sigma}$  son:  $\hat{F}^{\hat{1}2}$  y  $\hat{F}^{\hat{2}1}$ . Entonces, al desarrollar en entradas el momentum:  $p^\nu = p_\perp^\nu + p_\parallel^\mu$ .

$$\hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu = \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} (p_\parallel^\nu + p_\perp^\nu) p_\parallel^\mu = \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p_\parallel^\nu p_\parallel^\mu + \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p_\perp^\nu p_\parallel^\mu$$

Es claro ver que las entradas no nulas de  $p_\parallel^\nu$  son 0 y 3, mientras que las entradas no nulas de  $p_\perp^\nu$  son 1 y 2. Entonces, para la anterior relación, el segundo factor siempre será 0 ya que el tensor Levi-Civita necesariamente repetirá la entrada 1 o 2 en las posiciones correspondientes a  $\rho, \sigma, \nu$ . El primer factor será 0 ya que podemos intercambiar  $\mu \rightarrow \nu$ , lo cual hará que el tensor Levi-Civita saque un signo  $(-1)$  pero los momentum paralelos no se verán afectados, por lo tanto tendremos que  $\hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_\parallel^\mu p_\parallel^\nu = -\hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} p_\parallel^\mu p_\parallel^\nu$ . Entonces:  $\hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\mu} p^\nu p^\mu = 0$  Otro término que vale la pena analizar es:

$$p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p^\nu = p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} (p_\parallel^\nu + p_\perp^\nu) = p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p_\parallel^\nu + p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p_\perp^\nu = p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p_\parallel^\nu$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 &= (1 - v^2) s \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ -v (p_{\parallel\alpha} \hat{F}_{\beta\mu} p^\mu - p_{\parallel\beta} \hat{F}_{\alpha\nu} p^\nu + p \cdot p_{\parallel} \hat{F}_{\alpha\beta}) \right] \right. \\
 &- \frac{i}{2} g_A g_V \left[ p_\alpha \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\mu} p_\parallel^\mu + p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p_\parallel^\nu + 2p_\beta \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\mu} p_\parallel^\mu - \hat{F}_{\beta}{}^\rho \varepsilon_{\alpha\rho\nu\mu} p_\perp^\nu p_\parallel^\mu + \hat{F}^\rho{}_\nu \varepsilon_{\alpha\beta\rho\mu} p_\perp^\nu p_\parallel^\mu \right. \\
 &- \hat{F}_\alpha{}^\sigma \varepsilon_{\beta\sigma\nu\mu} p_\perp^\nu p_\parallel^\mu - v p_\alpha \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\mu} p_\parallel^\mu + v p_{\parallel\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\beta\rho\sigma\nu} p_\parallel^\nu - v \hat{F}_{\beta}{}^\rho \varepsilon_{\alpha\rho\nu\mu} p_\perp^\nu p_\parallel^\mu \\
 &\left. \left. + v \hat{F}^\rho{}_\nu \varepsilon_{\alpha\beta\rho\mu} p_\perp^\nu p_\parallel^\mu - v \hat{F}_\alpha{}^\sigma \varepsilon_{\beta\sigma\nu\mu} p_\perp^\nu p_\parallel^\mu \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Al multiplicar este resultado por el factor de polarización  $(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2})$  la aportación se anula, ya que todos los términos son antisimétricos.

Finalmente, se calcula la contribución

$$\begin{aligned}
 &\text{Tr} \left[ \gamma_\mu (\Sigma_3 (1 - v)) \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{1}{2} g_{\parallel}^{\mu\nu} \right) + \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu (\Sigma_3 (1 + v)) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{1}{2} g_{\parallel}^{\mu\nu} \right) \right] \\
 &= -\frac{i}{4} g_{\parallel}^{\mu\nu} \hat{F}^{\rho\sigma} \text{Tr} \left[ \left\{ (1 - v) [\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] + (1 + v) [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\beta] \right\} (g_V - g_A \gamma_5)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Nuevamente, al multiplicar por el factor de polarización  $(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2})$  éste término se vuelve nulo, ya que

$$\begin{aligned}
 &g^{\alpha\beta} g_{\parallel}^\mu{}_\beta \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} = g_{\parallel}^{\mu\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} = -g_{\parallel}^{\mu\alpha} \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} \\
 &- \frac{1}{M^2} (p^\alpha p^\beta g_{\parallel}^\mu{}_\beta \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma}) = -\frac{1}{M^2} (p^\alpha p_\parallel^\mu \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma}) = -\frac{1}{M^2} ((p_\parallel^\alpha + p_\perp^\alpha) p_\parallel^\mu \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma}) \\
 &= -\frac{1}{M^2} (p_\parallel^\alpha p_\parallel^\mu \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} + p_\perp^\alpha p_\parallel^\mu \hat{F}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma}) = 0
 \end{aligned}$$

Por lo que, al calcular estas contribuciones lineales, se comprueba que efectivamente el resultado es 0. Entonces las aportaciones lineales del campo ( $eB$ ) no aportarán a la autoenergía con campo magnético. Algo importante por notar es que la traza espinorial (suma sobre los índices espinoriales) no vuelve nula la contribución lineal; es solo hasta que se multiplica por el factor de polarización  $(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2})$  que las contribuciones se vuelven 0.

Para el término cuadrático  $(eB)^2$ , la contribución correspondiente es

$$\begin{aligned}
 \tau_2 = & \text{Tr} \left[ \left( \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \right) \left( -\frac{s^2}{8} (-1+v)^2 \right) - \gamma_\mu p_\perp^\mu \left( \frac{s^2}{48} (3-5v-3v^2+5v^3) \right) \right) \right. \\
 & \times \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) + \left( \left( m + \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \right) \left( -\frac{s^2}{8} (1+v)^2 \right) \right. \\
 & + \left. \left. \gamma_\nu p_\perp^\nu \left( \frac{s^2}{48} (3+5v-3v^2-5v^3) \right) \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \right. \\
 & + \gamma_\mu \left( -\frac{s^2}{8} (v-1)^2 \right) \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \\
 & + \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \left( -\frac{s^2}{8} (v+1)^2 \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \\
 & + \left( m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu \frac{1+v}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (1-v) \right) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma_5) \left( m + \gamma_\nu p_\parallel^\nu \frac{1-v}{2} \right) \\
 & \times \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (1+v) \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5) \\
 & + \gamma_\mu \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (1-v) \right) \gamma_\alpha \gamma_\nu \left( -\frac{1}{2} i s \Sigma_3 (1+v) \right) \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \left( \frac{i}{2s} g_\parallel^{\mu\nu} \right) \\
 & \left. \left. + i \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma_5)^2 \frac{s}{12} g_\perp^{\mu\nu} \right) \right] \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

### A.3. Cálculo de la traza con campo

En la Ec. (3.32) se muestra la parte imaginaria de la función de autoenergía del proceso en presencia de un campo magnético. Al hacer una inspección rápida de dicha ecuación, es claro que la única cantidad que no fue calculada anteriormente es

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[ \hat{F}^{\rho\sigma} \hat{F}^{\xi\chi} \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\xi \gamma_\chi \gamma_\beta (g_V^2 + g_A^2) g_\parallel^{\mu\nu} (1 - v_r^2) \right] \\
 & = \frac{1}{4} \left( -4 \hat{F}^{\rho\chi} \hat{F}_{\rho\chi} g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - 4 \hat{F}^{\sigma\chi} \hat{F}_{\sigma\chi} g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - 4 \hat{F}^{\rho\chi} \hat{F}_{\rho\chi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - 4 \hat{F}^{\sigma\chi} \hat{F}_{\sigma\chi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \right. \\
 & \quad \left. - 16 \hat{F}_\alpha^\rho \hat{F}_{\beta\rho} g_{\mu\nu} - 16 \hat{F}_\alpha^\sigma \hat{F}_{\beta\sigma} g_{\mu\nu} + 4 \hat{F}^{\rho\chi} \hat{F}_{\rho\chi} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + 4 \hat{F}^{\sigma\chi} \hat{F}_{\sigma\chi} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) g_\parallel^{\mu\nu} (g_V^2 + g_A^2) (1 - v_r^2) \\
 & = \frac{1}{4} \left( -16 g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - 16 g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - 32 \hat{F}_\alpha^\rho \hat{F}_{\beta\rho} g_{\mu\nu} + 16 g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) g_\parallel^{\mu\nu} (g_V^2 + g_A^2) (1 - v_r^2) \\
 & = \frac{1}{4} \left( -16 g_{\alpha\nu} g_{\beta\parallel}^\nu - 16 g_{\alpha\mu} g_{\beta\parallel}^\mu - 64 \hat{F}_\alpha^\rho \hat{F}_{\beta\rho} + 32 g_{\alpha\beta} \right) (g_V^2 + g_A^2) (1 - v_r^2) \\
 & = \frac{1}{4} \left( 32 g_{\alpha\beta\perp} - 64 g_{\alpha\beta\perp} \right) (g_V^2 + g_A^2) (1 - v_r^2) = -8 g_{\alpha\beta\perp} (g_V^2 + g_A^2) (1 - v_r^2). \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Aunado a este resultado, se usan las identidades mostradas en en la sección A.1, con los cuales se puede desarrollar la Ec. (3.32).

## Apéndice B

# Integrales Gaussianas

Un paso importante para el cómputo de los diagramas de Feynman es realizar las integrales gaussianas de la sección 2 y 3. Éstas integrales tienen un resultado estándar sobre  $d$  dimensiones que se detallan en la presente sección y surgen del resultado general para las integrales gaussianas.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{B.1})$$

con  $\text{Re}(a) > 0$ . De este resultado se derivan diferentes identidades que surgen de distintos cambios de variable e integraciones por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x\pm b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a(x\pm b)^2} dx = \mp b \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a(x\pm b)^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + b^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (\text{B.4})$$

Es importante notar que estos resultados ayudan a operar las distintas integrales  $d$  dimensionales sobre el momento indeterminado dentro del lazo de fermiones, tanto en el caso sin campo como en el caso con campo.

## B.1. Integrales en el caso sin campo

En el caso sin campo, se identifican las diferentes integrales sobre el momento indeterminado de acuerdo a sus potencias sobre este parámetro

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2}}_{\alpha_d} + \underbrace{3(g_V^2 + g_A^2) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (p \cdot q) e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2}}_{\beta_d} \\
 & - \underbrace{(g_V^2 + g_A^2) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (q \cdot q) e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2}}_{\gamma_d} - \underbrace{\frac{2(g_V^2 + g_A^2)}{M^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (p \cdot q)^2 e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2}}_{\delta_d},
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

que se resuelven a continuación

$$\begin{aligned}
 \alpha_d &= \frac{1}{(2\pi)^d} 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \int dq^0 e^{-[-i(s_1+s_2)]\left(q^0 - \frac{s_2 p^0}{s_1+s_2}\right)^2} \int dq^i e^{-i(s_1+s_2)\left(q^i - \frac{s_2 p^i}{s_1+s_2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^d} 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1+s_2)}} \sqrt{\frac{\pi}{i(s_1+s_2)}}^{d-1} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^d} 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \sqrt{\frac{1}{-i}} \sqrt{\frac{1}{i}}^{d-1} \sqrt{\frac{\pi}{s_1+s_2}}^d \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \sqrt{-1} \sqrt{\frac{1}{i}} \sqrt{\frac{1}{s_1+s_2}}^d = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} i \sqrt{i}^{-d} 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \sqrt{\frac{1}{s_1+s_2}}^d \\
 &= \frac{i \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \sqrt{\frac{1}{s_1+s_2}}^d = 3m^2 (g_V^2 - g_A^2) \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1+s_2)^{\frac{d}{2}}},
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{3(g_V^2 + g_A^2)}{(2\pi)^d} \left[ \underbrace{\int dq^0 p_0 q^0 e^{-[-i(s_1+s_2)]\left(q^0 - \frac{s_2 p^0}{s_1+s_2}\right)^2} \int dq^i e^{-i(s_1+s_2)\left(q^i - \frac{s_2 p^i}{s_1+s_2}\right)^2}}_{\beta_1} \right. \\
 & \quad \left. + \underbrace{\int dq^0 e^{-[-i(s_1+s_2)]\left(q^0 - \frac{s_2 p^0}{s_1+s_2}\right)^2} \int dq^i p_i q^i e^{-i(s_1+s_2)\left(q^i - \frac{s_2 p^i}{s_1+s_2}\right)^2}}_{\beta_2} \right]
 \end{aligned}$$

Al desarrollar  $\beta_1$  y  $\beta_2$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \left( \frac{s_2 p_0 p^0}{s_1 + s_2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1 + s_2)}} \sqrt{\frac{\pi}{i(s_1 + s_2)}}^{d-1} = i e^{-i\frac{d}{4}\pi} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(s_1 + s_2)^{\frac{d}{2}}} \frac{s_2}{s_1 + s_2} p_0 p^0 \\
 \beta_2 &= \left( \frac{s_2 p_i p^i}{s_1 + s_2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1 + s_2)}} \sqrt{\frac{\pi}{i(s_1 + s_2)}}^{d-1} = i e^{-i\frac{d}{4}\pi} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(s_1 + s_2)^{\frac{d}{2}}} \frac{s_2}{s_1 + s_2} p_i p^i \\
 \implies \beta &= \frac{3(g_V^2 + g_A^2)}{(2\pi)^d} [\beta_1 + \beta_2] = 3(g_V^2 + g_A^2) \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1 + s_2)^{\frac{d}{2}}} \frac{s_2}{s_1 + s_2} p^\mu p_\mu.
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_d &= \frac{(g_V^2 + g_A^2)}{(2\pi)^d} \left[ \underbrace{\int dq^0 q_0 q^0 e^{-[-i(s_1 + s_2)]} \left( q^0 - \frac{s_2 p^0}{s_1 + s_2} \right)^2}_{\gamma_1} \int dq^i e^{-i(s_1 + s_2)} \left( q^i - \frac{s_2 p^i}{s_1 + s_2} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\int dq^0 e^{-[-i(s_1 + s_2)]} \left( q^0 - \frac{s_2 p^0}{s_1 + s_2} \right)^2}_{\gamma_2} \int dq^i q_i q^i e^{-i(s_1 + s_2)} \left( q^i - \frac{s_2 p^i}{s_1 + s_2} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Al desarrollar  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \left[ \frac{1}{-2i(s_1 + s_2)} \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1 + s_2)}} + \left( \frac{s_2}{s_1 + s_2} \right)^2 p_0 p^0 \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1 + s_2)}} \right] \left[ \sqrt{\frac{\pi}{i(s_1 + s_2)}}^{d-1} \right] \\
 \gamma_2 &= \left[ \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1 + s_2)}} \right] \left[ \frac{d-1}{2i(s_1 + s_2)} \sqrt{\frac{\pi}{i(s_1 + s_2)}}^{d-1} + \left( \frac{s_2}{s_1 + s_2} \right)^2 p_i p^i \sqrt{\frac{\pi}{i(s_1 + s_2)}}^{d-1} \right] \\
 \gamma_d &= (g_V^2 + g_A^2) \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1 + s_2)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{d}{2} \frac{i}{s_1 + s_2} + \frac{s_2^2}{(s_1 + s_2)^2} p^2 \right)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Para calcular en  $d$  dimensiones a  $\delta_d$  es bueno calcular antes el caso cuatro-dimensional para una integral parecida

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{is(k-q)^2} k^\mu k^\nu &= \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} e^{is\ell^2} (\ell + q)^\mu (\ell + q)^\nu \\
 &= \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} e^{is\ell^2} (\ell^\mu \ell^\nu + \ell^\mu q^\nu + \ell^\nu q^\mu + q^\mu q^\nu) \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{-i}{s^2} \left( \frac{i}{2s} g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu \right)
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

entonces en  $d$  dimensiones

$$\begin{aligned}\delta_d &= \frac{2(g_V^2 + g_A^2)}{(2\pi)^d M^2} p_\mu p_\nu \int d^d q \, q^\mu q^\nu e^{i(s_1+s_2)\left(q - \frac{s_2 p}{s_1+s_2}\right)^2} \\ \delta_d &= \frac{2(g_V^2 + g_A^2)}{M^2} \frac{i e^{-i\frac{d}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(s_1 + s_2)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{i}{2(s_1 + s_2)} p^2 + \frac{s_2^2}{(s_1 + s_2)^2} p^4 \right)\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

## B.2. Integrales en el caso con campo

En la sección 3 se tienen también integrales gaussianas que deben de resolverse para poder computar la función de autoenergía. Por lo tanto, se parte de la Ec. (3.15) y se realizan los cambios de variable señalados en (3.17).

Se organiza la ecuación resultante según sus grados en  $\ell_\parallel$  y  $\ell_\perp$ , estos serán diferentes solamente por sus contribuciones dentro de la traza de la Ec. (3.16).

$$\begin{aligned}\text{Tr} & \left[ \underbrace{\left( (m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu + \sigma_\parallel \gamma_\mu p_\parallel^\mu) e^{-ieBs_2\Sigma_3} - \frac{1}{c_2} \gamma_\mu (p_\perp^\mu - \sigma_\perp p_\perp^\mu) \right) V_\alpha \left( (m + \sigma_\parallel \gamma_\nu p_\parallel^\nu) e^{-ieBs_1\Sigma_3} + \frac{1}{c_1} \sigma_\perp \gamma_\nu p_\perp^\nu \right) V_\beta}_{\ell_\parallel^0, \ell_\perp^0} \right. \\ & + \underbrace{\gamma_\mu \ell_\parallel^\mu e^{-ieBs_2\Sigma_3} V_\alpha \left( (m + \sigma_\parallel \gamma_\nu p_\parallel^\nu) e^{-ieBs_1\Sigma_3} + \frac{1}{c_1} \sigma_\perp \gamma_\nu p_\perp^\nu \right) V_\beta}_{\ell_\parallel^1, \ell_\perp^0} \\ & + \underbrace{\left( (m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu + \sigma_\parallel \gamma_\mu p_\parallel^\mu) e^{-ieBs_2\Sigma_3} - \frac{1}{c_2} \gamma_\mu (p_\perp^\mu - \sigma_\perp p_\perp^\mu) \right) V_\alpha \gamma_\nu \ell_\parallel^\nu e^{-ieBs_1\Sigma_3} V_\beta}_{\ell_\parallel^1, \ell_\perp^0} \\ & + \underbrace{\gamma_\mu \ell_\parallel^\mu e^{-ieBs_2\Sigma_3} V_\alpha \gamma_\nu \ell_\parallel^\nu e^{-ieBs_1\Sigma_3} V_\beta}_{\ell_\parallel^2, \ell_\perp^0} + \underbrace{\left( (m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu + \sigma_\parallel \gamma_\mu p_\parallel^\mu) e^{-ieBs_2\Sigma_3} - \frac{1}{c_2} \gamma_\mu (p_\perp^\mu - \sigma_\perp p_\perp^\mu) \right) V_\alpha \frac{1}{c_1} \gamma_\nu \ell_\perp^\nu V_\beta}_{\ell_\parallel^0, \ell_\perp^1} \\ & + \underbrace{\frac{1}{c_2} \gamma_\mu \ell_\perp^\mu V_\alpha \left( (m + \sigma_\parallel \gamma_\nu p_\parallel^\nu) e^{-ieBs_1\Sigma_3} + \frac{1}{c_1} \sigma_\perp \gamma_\nu p_\perp^\nu \right) V_\beta}_{\ell_\parallel^0, \ell_\perp^1} + \underbrace{\frac{1}{c_2} \gamma_\mu \ell_\perp^\mu V_\alpha \frac{1}{c_1} \gamma_\nu \ell_\perp^\nu V_\beta}_{\ell_\parallel^0, \ell_\perp^2} \\ & \left. + \underbrace{\gamma_\mu \ell_\parallel^\mu e^{-ieBs_2\Sigma_3} V_\alpha \frac{1}{c_1} \gamma_\nu \ell_\perp^\nu V_\beta + \frac{1}{c_2} \gamma_\mu \ell_\perp^\mu V_\alpha \gamma_\nu \ell_\parallel^\nu e^{-ieBs_1\Sigma_3} V_\beta}_{\ell_\parallel^1, \ell_\perp^1} \right].\end{aligned}$$

Será favorable realizar las integrales gaussianas sobre las componentes de momentum, además es importante notar que  $\ell_\parallel$  contiene a la componente temporal y  $\ell_\perp$  solamente contiene componentes espaciales



$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^{d_{\parallel}} \ell_{\parallel}}{(2\pi)^{d_{\parallel}}} e^{is\ell_{\parallel}^2} &= \int \frac{d\ell_0}{2\pi} \dots \int \frac{d\ell_{d_{\parallel}-1}}{2\pi} e^{is\ell_0^2} \dots e^{-is\ell_{d_{\parallel}-1}^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \sqrt{\frac{\pi}{is}}^{d_{\parallel}-1} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \sqrt{\frac{1}{-i}} \sqrt{\frac{1}{i}}^{d_{\parallel}-1} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} i \sqrt{\frac{1}{i}} \sqrt{\frac{1}{i}}^{d_{\parallel}-1} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} i \sqrt{\frac{1}{i}}^{d_{\parallel}} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} i \cdot i^{-\frac{d_{\parallel}}{2}} = \frac{i (e^{i\frac{\pi}{2}})^{-\frac{d_{\parallel}}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} = \frac{ie^{-i\frac{d_{\parallel}}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\parallel}}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Para las integrales de las componentes perpendiculares

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^{d_{\perp}} \ell_{\perp}}{(2\pi)^{d_{\perp}}} e^{is\ell_{\perp}^2} &= \int \frac{d\ell_1}{2\pi} \dots \int \frac{d\ell_{d_{\perp}-1}}{2\pi} e^{-is\ell_1^2} \dots e^{-is\ell_{d_{\perp}-1}^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{is}} \sqrt{\frac{\pi}{is}}^{d_{\perp}-1} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \sqrt{\frac{1}{i}}^{d_{\perp}} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\perp}}{2}}} i^{-\frac{d_{\perp}}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-\frac{d_{\perp}}{2}} \\
 &= \frac{e^{-i\frac{d_{\perp}}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\perp}}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Al tomar la integral sobre de funciones impares sobre una región par

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^{d_{\parallel}} \ell_{\parallel}}{(2\pi)^{d_{\parallel}}} e^{is\ell_{\parallel}^2} \ell_{\parallel}^{\mu} &= 0 \\
 \int \frac{d^{d_{\perp}} \ell_{\perp}}{(2\pi)^{d_{\perp}}} e^{is\ell_{\perp}^2} \ell_{\perp}^{\mu} &= 0.
 \end{aligned}$$

De forma similar se prueban, como una extensión del resultado 4-dimensional (B.9), los resultados

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^{d_{\parallel}} \ell_{\parallel}}{(2\pi)^{d_{\parallel}}} e^{is\ell_{\parallel}^2} \ell_{\parallel}^{\mu} \ell_{\parallel}^{\nu} &= \frac{ie^{-i\frac{d_{\parallel}}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\parallel}}{2}}} \left(\frac{i}{2s} g^{\mu\nu}\right) \\
 \int \frac{d^{d_{\perp}} \ell_{\perp}}{(2\pi)^{d_{\perp}}} e^{is\ell_{\perp}^2} \ell_{\perp}^{\mu} \ell_{\perp}^{\nu} &= \frac{e^{-i\frac{d_{\perp}}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{d_{\perp}}{2}}} \left(\frac{i}{2s} g_{\perp}^{\mu\nu}\right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los factores que contengan los términos  $\ell_{\parallel}$  o  $\ell_{\perp}$  lineales se volverán 0 y el hacer las integrales para las otras contribuciones nos da una nueva forma de la función de autoenergía. Al sustituir estos resultados sobre la Ec. (3.16) se obtiene una nueva forma de

la función de autoenergía

$$\begin{aligned}
 -i\Pi^B(p) &= \frac{g^2 \mu^{4-d}}{12 \cos^2 \theta_W} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right) \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \frac{e^{-im^2(s_1+s_2)} e^{ip_\parallel^2 \frac{s_1 s_2}{\eta_\parallel}} e^{ip_\perp^2 \frac{s_1 \xi_1 s_2 \xi_2}{\eta_\perp}}}{c_1 c_2} \\
 &\times \text{Tr} \left[ \left( (m - \gamma_\mu p_\parallel^\mu + \sigma_\parallel \gamma_\mu p_\parallel^\mu) e^{-ieBs_2 \Sigma_3} - \frac{1}{c_2} \gamma_\mu (p_\perp^\mu - \sigma_\perp p_\perp^\mu) \right) V_\alpha \right. \\
 &\times \left( (m + \sigma_\parallel \gamma_\nu p_\parallel^\nu) e^{-ieBs_1 \Sigma_3} + \frac{1}{c_1} \sigma_\perp \gamma_\nu p_\perp^\nu \right) V_\beta \frac{ie^{-i\frac{d_\parallel}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_\parallel}{2}}} \frac{1}{\eta_\parallel^{\frac{d_\parallel}{2}}} \frac{e^{-i\frac{d_\perp}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_\perp}{2}}} \frac{1}{\eta_\perp^{\frac{d_\perp}{2}}} \\
 &+ \gamma_\mu e^{-ieBs_2 \Sigma_3} V_\alpha \gamma_\nu e^{-ieBs_1 \Sigma_3} V_\beta \frac{ie^{-i\frac{d_\parallel}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_\parallel}{2}}} \frac{1}{\eta_\parallel^{\frac{d_\parallel}{2}}} \left( \frac{i}{2\eta_\parallel} g^{\mu\nu} \right) \frac{e^{-i\frac{d_\perp}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_\perp}{2}}} \frac{1}{\eta_\perp^{\frac{d_\perp}{2}}} \\
 &\left. + \frac{1}{c_2} \gamma_\mu V_\alpha \frac{1}{c_1} \gamma_\nu V_\beta \frac{e^{-i\frac{d_\perp}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_\perp}{2}}} \frac{1}{\eta_\perp^{\frac{d_\perp}{2}}} \left( \frac{i}{2\eta_\perp} g^{\mu\nu} \right) \frac{ie^{-i\frac{d_\parallel}{4}\pi}}{(4\pi)^{\frac{d_\parallel}{2}}} \frac{1}{\eta_\parallel^{\frac{d_\parallel}{2}}} \right],
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

donde

$$\eta_\parallel \equiv s_1 + s_2 \quad \text{y} \quad \eta_\perp \equiv s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2. \tag{B.12}$$

## Apéndice C

# Regularización Dimensional

En la presente sección se muestran las aproximaciones hechas sobre la Ec. (2.47) con el objetivo de aislar los comportamientos divergentes de las integrales sobre el parámetro de Schwinger  $s$ .

Existen relaciones ya estudiadas sobre la función Gamma [2, 36] que son

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds s^{\delta-1} e^{-is} &= \Gamma(\delta) \\ \int_0^\infty ds s^{\delta-2} e^{-is} &= i\Gamma(\delta-1) \\ \Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma_E z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \quad (\text{Producto infinito de Euler}), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

y la expansión de Taylor

$$a^{\pm\delta} = 1 \pm \delta \ln(a) \implies e^{\pm\delta} = 1 \pm \delta. \quad (\text{C.2})$$

También, se redefine  $s \rightarrow sm^2$ , para lograr identificar a las integrales como funciones Gamma y para trabajar con variables adimensionales.

Luego, como se toma el límite cuando  $\delta$  tiende a 0, se pueden realizar expansiones de Taylor sobre la definición de la función  $\Gamma$  según el producto infinito de Euler y, al dejar la aproximación a primer orden

$$\implies \Gamma(\delta) \simeq \frac{1}{\delta} - \gamma_E \quad (\text{C.3})$$

donde  $\gamma_E$  es conocida como la constante de Euler-Mascheroni. Al usar estos resultados sobre la Ec. (2.47), se obtienen los siguientes resultados sobre las integrales

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds s^{\delta-1} e^{-is} &= m^{2-2\delta} \left(\frac{1}{\delta} - \gamma_E\right) = m^2 (1 - \delta \ln(m^2)) \left(\frac{1}{\delta} - \gamma_E\right) \\ \int_0^\infty ds s^{\delta-2} e^{-is} &= m^{4-2\delta} i\Gamma(\delta-1) = im^4 (1 - \delta \ln(m^2)) \left(-\frac{1}{\delta} + (\gamma_E - 1)\right), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

y las aproximaciones sobre  $\kappa_d$  y  $s^\delta$  son

$$\begin{aligned}\kappa_d &= \frac{g^2 e^{-i\pi(1-\frac{\delta}{2})}}{2 \cos^2 \theta_W (4\pi)^2} (1 + \delta \ln(\mu^2)) (1 + \delta \ln(4)) (1 + \delta \ln(\pi)) \\ s^\delta &= 1 + \delta \ln(s).\end{aligned}\tag{C.5}$$

Por lo tanto se obtiene una nueva forma de la función de autoenergía

$$\begin{aligned}\Pi(p) &= \kappa_d \left\{ \int_{-1}^1 dv \left[ i(g_V^2 - g_A^2) m^2 \frac{p^2}{2} v^2 \int_0^\infty ds (1 + \delta \ln(s)) e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \right. \right. \\ &\quad + i(g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{8} v^2 \int_0^\infty ds (1 + \delta \ln(s)) e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \\ &\quad \left. \left. + i(g_V^2 + g_A^2) \frac{3-2\delta}{72} p^4 v^4 \int_0^\infty ds (1 + \delta \ln(s)) e^{-s(-ip^2 \frac{1-v^2}{4} + im^2)} \right] \right. \\ &\quad + m^2 (1 - \delta \ln(m^2)) \left( \frac{1}{\delta} - \gamma_E \right) \left[ 2(g_V^2 - g_A^2) m^2 + (g_V^2 + g_A^2) \frac{12-2\delta}{18} p^2 \right] \\ &\quad \left. + m^4 (1 - \delta \ln(m^2)) \left( -\frac{1}{\delta} + \gamma_E - 1 \right) \left[ (g_V^2 + g_A^2) \frac{6-2\delta}{3} \right] \right\},\end{aligned}\tag{C.6}$$

donde se ha omitido de forma explícita que se toma el límite de  $\delta \rightarrow 0$ . Al desarrollar esta relación sobre el parámetro  $\delta$ , se mantienen los términos con órdenes  $\delta^{-1}$  y  $\delta^0$  y, al usar el resultado de la integral

$$\int_0^\infty dx e^{-ax} = \frac{1}{-a} e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a}\tag{C.7}$$

se llega al resultado

$$\begin{aligned}\Pi(p) &= \frac{g^2 e^{-i\pi}}{2 \cos^2 \theta_W (4\pi)^2} \left\{ - (g_V^2 - g_A^2) m^2 2p^2 \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{p^2 (1-v^2) - 4m^2} \right. \\ &\quad - (g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{2} \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{p^2 (1-v^2) - 4m^2} - (g_V^2 + g_A^2) \frac{p^4}{6} \int_{-1}^1 dv \frac{v^4}{p^2 (1-v^2) - 4m^2} \\ &\quad + \frac{m^2}{9} \left[ \frac{6p^2 (g_V^2 + g_A^2) - 36g_A^2 m^2}{\delta} \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( (g_V^2 + g_A^2) (30m^2 + 7p^2 + 6p^2 \gamma_E) + 18m^2 (g_V^2 - g_A^2) - 36m^2 \gamma_E g_A^2 \right) \ln \left( \frac{4\pi \mu^2}{m^2} \right) \right] \right\}.\end{aligned}\tag{C.8}$$

Sobre este resultado se trabaja en la sección 2.3 y es importante recalcar que el siguiente

paso consiste en trabajar con la parte imaginaria de la función de autoenergía, mientras que la parte real está asociada a correcciones cuánticas sobre la masa del bosón  $Z$ .

## Apéndice D

# Equivalencia con la Regla de Oro de Fermi

En la presente sección se lleva a cabo el cálculo de la tasa de decaimiento por un método análogo conocido como la Regla de Oro de Fermi. El objetivo de realizar este cálculo análogo es corroborar el resultado principal de la sección 2, es decir, la Ec. (2.62). Como subproducto, se comprueba la relación desarrollada por Cutkosky a través de sus reglas de corte [2]. La Regla de Oro de Fermi está dada por [24]

$$d\Gamma = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{2E_0} d\Pi = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{2E_0} \prod_{i=1}^n \left( \frac{d^3 p_i}{2E_i (2\pi)^3} \right) \delta^{(4)}(p_{inicial} - \sum p_{final}) (2\pi)^4, \quad (\text{D.1})$$

donde el  $d\Pi$  representa al espacio fase diferencial invariante de Lorentz, y es sobre esta diferencial donde se efectuarán las integrales para encontrar a la tasa de decaimiento total. Por otro lado,  $|\mathcal{M}|^2$  representa a la amplitud de probabilidad de transición del diagrama bajo estudio; para esto será favorable utilizar las reglas de Feynman vistas en la sección 1.2.1 sobre el diagrama de la figura D.1

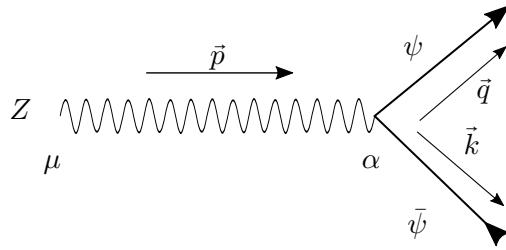


Figura D.1: Diagrama de Feynman del proceso a nivel árbol.

Se calcula el elemento invariante de matriz al cuadrado

$$|\mathcal{M}|^2 = \bar{u}_\psi(q) \left( \frac{-ig}{2 \cos \theta_W} [g_V + g_A \gamma_5] \gamma_\mu \right) v_{\bar{\psi}}(k) \varepsilon_\lambda^\mu(p) \varepsilon_\lambda^\nu(p) \bar{v}_{\bar{\psi}}(k) \left( \gamma_\nu [g_V - g_A \gamma_5] \frac{ig}{2 \cos \theta_W} \right) u_\psi(q) \quad (\text{D.2})$$

donde, al revisar la sección 1.5, es fácil ver que los biespinores  $u$  y  $v$  representan a las

soluciones de la Ecuación de Dirac;  $\varepsilon_\lambda^\mu$  representa al vector de polarización en 4-dimensiones; finalmente, los parámetros  $g_V, g_A, g, \theta_W$  son los mismos que fueron explicados con anterioridad en la teoría electrodébil.

De forma similar al cálculo de la función de autoenergía, es necesario realizar la suma sobre espín fraccionario y la suma sobre polarizaciones. Detrás de esta última se encuentra una conversación importante sobre los grados de libertad que la teoría permite, ya que de estos dependerá sobre cuales entradas del vector de polarización se suma. Al elegir la norma unitaria, la suma sobre los estados de polarización es [37–39]

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(k, \lambda) \varepsilon^{\nu*}(k, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2}, \quad (\text{D.3})$$

por lo que, el elemento invariante de la matriz de transición pasa a ser

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} \bar{u}_u(q) ([g_V + g_A \gamma_5] \gamma_\mu) v_{\bar{u}}(k) \left( -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} \right) \bar{v}_{\bar{u}}(k) (\gamma_\nu [g_V - g_A \gamma_5]) u_u(q). \quad (\text{D.4})$$

Al operar la traza, que se expresa a través de los elementos espinoriales de la ecuación anterior, y tomar el promedio de la suma sobre las probabilidades de configuración de espín y polarización

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{3} \sum_\lambda \sum_{s'=1}^2 \sum_{s=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{3 \cos^2 \theta_W} \left[ (g_V^2 + g_A^2) \left( k \cdot q + \frac{2(p \cdot q)(p \cdot k)}{M^2} \right) + 3m^2(g_V^2 - g_A^2) \right]. \quad (\text{D.5})$$

Al sustituir la Ec. (D.5) sobre la definición de la Regla de Oro de Fermi de la relación (D.1) e integrando sobre el espacio fase invariante de Lorentz

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{g^2}{3 \cos^2 \theta_W} \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ \int \frac{k \cdot q}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}} \frac{d^3 k}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}(2\pi)^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \int \frac{2(p \cdot q)(p \cdot k)}{2M^2 \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}} \frac{d^3 k}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}(2\pi)^3} \right] \right. \\ & \left. + (g_V^2 - g_A^2) \int \frac{3m^2}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}} \frac{d^3 k}{2\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}(2\pi)^3} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k). \quad (\text{D.6}) \end{aligned}$$

Se usa la parte vectorial de las deltas de Dirac para realizar las integrales sobre el mo-

mento, por lo que la tasa de decaimiento está dada por

$$\begin{aligned}
 \Gamma = & \frac{g^2}{96\pi^2 \cos^2 \theta_W} \left\{ \frac{g_V^2 + g_A^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}} \left[ \int \frac{p_0 q_0 - q_0^2 - |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta + |\vec{q}|^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta + m^2} \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} d^3 q \right. \right. \\
 & + \left. \int \frac{2(p_0 q_0 - |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta) (p_0^2 - |\vec{p}|^2 - p_0 q_0 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta)}{M^2 \sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta + m^2} \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} d^3 q \right] \\
 & + \left. \frac{3m^2(g_V^2 - g_A^2)}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}} \int \frac{d^3 q}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta + m^2} \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \right\} \\
 & \times \delta\left(\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta + m^2}\right).
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Luego, al hacer el cambio de coordenadas esféricas para el diferencial de volumen

$$d^3 q = |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| \sin \theta d\theta d\phi$$

se facilita la integración de la parte angular  $d\phi$ . Luego, al hacer el cambio de variable

$$\sin \theta d\theta \rightarrow -d(\cos \theta) \rightarrow -dx$$

se llega a

$$\begin{aligned}
 \Gamma = & \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}} \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|^2}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} d|\vec{q}| \int_{-1}^1 \frac{(p_0 q_0 - q_0^2 - |\vec{p}||\vec{q}|x + |\vec{q}|^2)}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|x + m^2}} dx \right. \right. \\
 & + \left. \frac{2}{M^2} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|^2}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} d|\vec{q}| \int_{-1}^1 \frac{(p_0 q_0 - |\vec{p}||\vec{q}|x) (p_0^2 - |\vec{p}|^2 - p_0 q_0 + |\vec{p}||\vec{q}|x)}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|x + m^2}} dx \right] \\
 & + \left. 3m^2(g_V^2 - g_A^2) \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|^2}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} d|\vec{q}| \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|x + m^2}} dx \right\} \\
 & \times \delta\left(\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|x + m^2}\right).
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Para resolver las integrales sobre el parámetro  $x$ , se hace uso de una propiedad de la delta de Dirac

$$\int_{-1}^1 f(x) \delta(g(x)) dx = f(x_r) \frac{1}{\left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_r}} \Theta(1 - x_r^2), \tag{D.9}$$

donde  $g(x_r) = 0$ . Por lo que es posible obtener una forma explícita de  $x_r$



$$\begin{aligned}
 g(x_r) &= \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} - \sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|x_r + m^2} = 0 \\
 \implies |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|x_r + m^2 &= \left( \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} \right)^2 \\
 \implies x_r &= \frac{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + m^2 - \left( \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} - \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2} \right)^2}{2|\vec{p}||\vec{q}|}
 \end{aligned}$$

Al integrar la Ec. (D.8) con la relación (D.9) el resultado es

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}} \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ \frac{1}{2|\vec{p}|} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}| (p^\mu p_\mu - q_0^2 + |\vec{q}|^2 - m^2)}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \Theta(1 - x_r^2) d|\vec{q}| \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{2M^2|\vec{p}|} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} (p^\mu p_\mu + q_0^2 - |\vec{q}|^2 - m^2) (p^\mu p_\mu - q_0^2 + |\vec{q}|^2 + m^2) \Theta(1 - x_r^2) d|\vec{q}| \right] \right. \\
 &+ \left. (g_V^2 - g_A^2) \frac{3m^2}{|\vec{p}|} \int_0^\infty \frac{|\vec{q}|}{\sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}} \Theta(1 - x_r^2) d|\vec{q}| \right\}.
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Luego, es necesario ver la condición que es representada por la función de Heaviside sobre el momentum  $|\vec{q}|$  para integrar sobre los límites apropiados. Además, se hace el cambio de variable

$$\omega^2 = |\vec{q}|^2 + m^2 = q_0^2 \implies \omega d\omega = |\vec{q}| d|\vec{q}|$$

tal que la tasa de decaimiento se vuelve

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} |\vec{p}|} \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ p^\mu p_\mu \int_m^\infty \Theta(1 - x_r^2) d\omega - m^2 \int_m^\infty \Theta(1 - x_r^2) d\omega \right] \right. \\
 &+ \left. (g_V^2 - g_A^2) 3m^2 \int_m^\infty \Theta(1 - x_r^2) d\omega \right\}
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

Se ha reducido la integral lo más posible salvo una condición sobre los límites de integración en la forma de la función de Heaviside dentro de las integrales. Por lo tanto, se debe de expresar al parámetro  $x_r$  en términos de la variable  $\omega$ , con esto la condición dada por el argumento de la función de Heaviside se reduce a

$$\left( \frac{2\omega p_0 - p^\mu p_\mu}{2|\vec{p}|\sqrt{\omega^2 - m^2}} \right)^2 \leq 1$$

que se reduce a la condición sobre  $\omega$

$$\left| \omega - \frac{p_0}{2} \right| \leq \frac{|\vec{p}|}{2\sqrt{p^\mu p_\mu}} \sqrt{p^\mu p_\mu - 4m^2}$$

Dado que la tasa de decaimiento es un parámetro real, es necesario que se cumpla

$$\sqrt{p^\mu p_\mu - 4m^2} \in \mathbb{R} \implies p^\mu p_\mu - 4m^2 \geq 0 \implies \Theta(p^\mu p_\mu - 4m^2).$$

Con esta condición, solo falta cubrir los casos que surgen de  $|\omega - \frac{p_0}{2}|$ .

Si  $\omega - \frac{p_0}{2} > 0$ :

$$\begin{aligned} \omega - \frac{p_0}{2} &\leq \frac{|\vec{p}|}{2\sqrt{p^\mu p_\mu}} \sqrt{p^\mu p_\mu - 4m^2} \Theta(p^\mu p_\mu - 4m^2) \\ \implies \omega_+ &\equiv \frac{p_0}{2} + \frac{|\vec{p}|}{2\sqrt{p^\mu p_\mu}} \sqrt{p^\mu p_\mu - 4m^2} \Theta(p^\mu p_\mu - 4m^2). \end{aligned}$$

Si  $\omega - \frac{p_0}{2} < 0$ :

$$\begin{aligned} -\omega + \frac{p_0}{2} &\leq \frac{|\vec{p}|}{2\sqrt{p^\mu p_\mu}} \sqrt{p^\mu p_\mu - 4m^2} \Theta(p^\mu p_\mu - 4m^2) \\ \implies \omega_- &\equiv \frac{p_0}{2} - \frac{|\vec{p}|}{2\sqrt{p^\mu p_\mu}} \sqrt{p^\mu p_\mu - 4m^2} \Theta(p^\mu p_\mu - 4m^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de Heaviside acota los límites de integración al rango  $[\omega_-, \omega_+]$  resultando en

$$\Gamma = \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} |\vec{p}|} \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ p^\mu p_\mu - m^2 \right] + (g_V^2 - g_A^2) 3m^2 \right\} \int_{\omega_-}^{\omega_+} d\omega,$$

y al realizar esta integral, se obtiene la tasa de decaimiento

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2} \sqrt{p^\mu p_\mu}} \left\{ (g_V^2 + g_A^2) \left[ p^\mu p_\mu - m^2 \right] + (g_V^2 - g_A^2) 3m^2 \right\} \\ &\quad \times \sqrt{p^\mu p_\mu - 4m^2} \Theta(p^\mu p_\mu - 4m^2). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Este resultado es el mismo que se encuentra en la Ec. (2.62), mostrando así la equivalencia de los métodos usados en el presente trabajo.

# Bibliografía

- [1] D. MOGENS. arXiv:2107.12832v1 [hep-ex].
- [2] M. PESKIN, *An Introduction to Quantum Field Theory*, 1995, Ed. Westview Press.
- [3] SCHWARTZ, M., *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Reino Unido, 2014, Ed. Cambridge University Press, Primera Edición.
- [4] RENTON, P., *Electroweak interactions: an introduction to the physics of quarks and leptons*, Estados Unidos, 1990, Ed. Cambridge University Press, Primera Edición.
- [5] AITCHISON, I.; HEY, A., *Gauge Theories in Particle Physics. A Practical Introduction. Volume 2 Non-Abelian Gauge Theories: QCD and Electroweak Theory*. 2004, Institute of Physics Publishing.
- [6] C. S. WU, ET. AL, *Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*. Phys. Rev. **105**, 1413.
- [7] FEYNMAN R. P., GELL-MANN M., *Theory of the Fermi Interaction*. Phys. Rev. **109**, 193.
- [8] S. L. GLASHOW, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961).
- [9] A. SALAM, en *Elementary Particle Theory*, N. Svartholm, ed. (Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1968).
- [10] S. WEINBERG, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [11] P. W. HIGGS, *Phys. Lett.* **12**, 132 (1964).
- [12] P. W. HIGGS, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964).
- [13] A. L. ZÚÑIGA, *Decaimiento de un bosón escalar a dos bosones vectoriales neutros en un campo magnético*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2020.
- [14] F. HALZEN, D. MARTIN, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. Canada, 1984, Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- [15] L. B. OKUN, *Leptons and Quarks*, 1985, Ed. North-Holland.
- [16] T. LANCASTER, S. K. BLUNDELL, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Oxford University Press, 2014.
- [17] W. GREINER, *Field Quantization*, 1996, Ed. Springer-Verlag.
- [18] P. GALLAGHER; S. GROOTE; M. NAEEM, *Gauge Dependence of the Gauge Boson Projector*. Particles 2020, 3, 543-561. <https://doi.org/10.3390/particles3030037>.
- [19] C. ITZYKSON, J. ZUBER, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill International Book Company, 1980.
- [20] J. JABER-URQUIZA. *Efectos de un campo magnético en la tasa de decaimiento de una*

- partícula escalar neutra a fermiones cargados*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2018.
- [21] J. CRISPIM, *Advanced Quantum Field Theory (Version of Sunday 20th September, 2020)*. <https://porthos.tecnico.ulisboa.pt/Public/textos/tca.pdf>.
- [22] R. E. CUTKOSKY, *Singularities and Discontinuities of Feynman Amplitudes*. *J. Math. Phys.* **1**, 429 (1960).
- [23] WELDON, H. , *Simple rules for discontinuities in finite-temperature field theory*. *Phys. Rev D* **28**, 2007.
- [24] M. THOMSON, *Modern Particle Physics*. 2013, Cambridge University Press.
- [25] D. GRIFFITHS, *Introduction to Elementary Particles*. 1987, John Wiley & Sons, Inc.
- [26] A. GÜIJOSA, *Notas del curso: Teoría Cuántica de Campos*. Posgrado en Ciencias Físicas. <http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice.html> (2007).
- [27] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E., *Quantum Mechanics Non-relativistic Theory*. Inglaterra, 1991, Ed. Pergamon Press.
- [28] R. ZAVALETA, *Cálculo del Propagador Fermiónico para el Estudio de Propiedades Electromagnéticas de Multicapas de Grafeno*. Tesis de Maestría, Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM, 2016.
- [29] J. SCHWINGER *Phys. Rev.* **82**, 664, (1951).
- [30] A. ERDAS., *Phys. Rev. D* **82**, 113004, (2009).
- [31] G. BURDMAN, 'Lecture 12 From Correlation Functions to Amplitudes'. *Quantum Field Theory I - 1st Semester 2021* Marzo, 2021. [http://fma.if.usp.br/~burdman/QFT1/lecture\\_12.pdf](http://fma.if.usp.br/~burdman/QFT1/lecture_12.pdf).
- [32] M. LE BELLAC, *Thermal Field Theory*. Reino Unido, 1996, Ed. Cambridge University Press.
- [33] J. JABER-URQUIZA, G. PICCINELLI, A. SÁNCHEZ. *Phys. Rev. D* **99**, 056011, (2019).
- [34] G. PICCINELLI, A. SÁNCHEZ. *Phys. Rev. D* **96**, 076014, (2017).
- [35] P.A. ZYLA ET AL. (*Particle Data Group*), *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020**, 083C01 (2020).
- [36] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 1972, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards.
- [37] J. G. KÖRNER, *Helicity Amplitudes and Angular Decay Distributions*. In Proceedings of the Helmholtz International Summer School of Physics of Heavy Quarks and Hadrons (HQ 2013): JINR, Dubna, Russia, 15-28 July 2013; pp. 166-184.
- [38] S. BERGE; S. GROOTE; J. G., KÖRNER; L. KALDAMÄE, *Lepton-mass effects in the decays  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow \ell^+ \ell^- \tau^+ \tau^-$  and  $H \rightarrow WW^* \rightarrow \ell \nu \tau \nu_\tau$* . *Phys. Rev. D* **2015**, 92, 033001.
- [39] A. CZARNECKI; S. GROOTE; J. G. KÖRNER; J. H. PICLUM, *NNLO QCD corrections to the polarized top quark decay  $t(\uparrow) \rightarrow X_b + W^+$*  *Phys. Rev. D* **2018**, 97, 094008.