



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

ANÁLISIS DEL FLUJO DE UN LÍQUIDO VISCOELÁSTICO EN
GEOMETRÍAS CILÍNDRICAS: FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA
COMPLEJA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO

P R E S E N T A:

HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ JAZIVE

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

CO-ASESORES:

Dr. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

DOCTORANTE M. en C. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES



CIUDAD DE MÉXICO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**



JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR

P R E S E N T E

Comunico usted que la alumna Jazive Hernández Rodríguez con número de cuenta 315110142 de la licenciatura en Ingeniería Química, se le ha fijado el día 12 de mayo de 2022 a las 12:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales de Campus II de esta Facultad, con el jurado siguiente:

Presidente:	I.Q. Dominga Ortiz Bautista.
Vocal:	Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia.
Secretario:	Dr. Fausto Calderas García.
Suplente:	M.C. Luis Antonio Ramírez Torres.
Suplente:	M.C. Ricardo Mendoza Vizcaya.

El título de la tesis que se presenta es: “Análisis de la sangre como fluido viscoelástico en régimen pulsátil en venas con oclusiones centrales y periféricas.”

Opción de titulación:	Tesis convencional.
-----------------------	---------------------

AGRADECIMIENTOS

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM (IN115919) “Análisis del flujo pulsátil de sangre humana con hipercolesterolemia, mediante una ecuación constitutiva nueva, caracterización reológica y simulación computacional en venas elásticas e inelásticas” por el apoyo recibido.

A ExxonMobil, la UNAM y el Institute of International Education (IIE) por permitirme formar parte del programa de Becas ExxonMobil para la investigación 2021-2022 además de otorgarme una oportunidad de crecimiento académico y profesional.

Al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM (PE116519) “Fenómenos de transporte avanzados: fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales y no lineales” y (PE105919) “Material didáctico, aula virtual y blog para apoyo de las asignaturas de matemáticas I y II de la carrera de Ingeniería Química” por hacer posible este proyecto. Agradezco a la DGAPA-UNAM por la beca recibida.

Al laboratorio de Reología de Fenómenos de Transporte de Fluidos Complejos, por las facilidades otorgadas a este proyecto de Tesis.

Al Seminario de Investigación de Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por los comentarios, observaciones y retroalimentaciones a este proyecto.

A la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza y la Universidad Nacional Autónoma de México, por el conocimiento, las experiencias y la formación integral que me brindaron.

A los profesores que me formaron durante mi estancia en la licenciatura en Ingeniería Química en la facultad.

A mi asesor, el Dr. Edston Emilio, por confiar siempre en mí y por ser además de mi profesor, un amigo.

DEDICATORIAS

A mi madre: te dedico esto porque es el fruto del esfuerzo de toda una vida. Gracias por confiar en mí, por no limitarme y tenderme una mano cuando las cosas van difíciles. Gracias por los consejos, por escucharme y por siempre prestar atención cuando te contaba sobre mi proyecto. Te amo y prometo que esta será la primera de muchas dedicatorias.

A mis hermanos: por siempre creer en mí, por animarme cuando me sentía cabizbaja, por las risas, por entenderme y nunca juzgarme.

A Rocío, Vale y Beatriz, por estar presentes.

A SKZ.

CONTENIDO

ABSTRACT	9
RESUMEN	9
PALABRAS CLAVE:	9
CAPÍTULO 1:	10
1.1. INTRODUCCIÓN	11
1.2. ANTECEDENTES	12
1.3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
1.4. OBJETIVOS	14
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO	15
2.1. REOLOGÍA DE LA SANGRE	16
2.2. FRECUENCIA CARDIACA HUMANA	18
2.3. FLUIDOS NEWTONIANOS Y NO NEWTONIANOS	18
2.4. FLUIDO DE KELVIN-VOIGT	19
2.5. ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y MOVIMIENTO	20
2.6. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE HAGEN-POISEUILLE	20
2.6.1. NAVIER-STOKES	21
2.6.2. BALANCE DE CORAZA (BALANCE DE FUERZAS)	22
2.6.3. ECUACIÓN DE MOMENTO	23
2.7. NÚMEROS ADIMENSIONALES	23
2.8. FUNCIONES DE BESSEL	24
2.9. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	25
CAPÍTULO 3: PROBLEMA FÍSICO	27
3.1. CASO I: GEOMETRÍA CILÍNDRICA, ESTADO ESTACIONARIO	28
3.2. CASO II: GEOMETRÍA DE CORONA CIRCULAR, ESTADO ESTACIONARIO	32
3.3. CASO III: GEOMETRÍA CILÍNDRICA, ESTADO TRANSITORIO	35
3.4. CASO IV: GEOMETRÍA DE CORONA CIRCULAR, ESTADO TRANSITORIO	40
3.5. CASO V: GEOMETRÍA CILÍNDRICA, ESTADO TRANSITORIO.	44
3.6. CASO VI: GEOMETRÍA DE CORONA CIRCULAR, ESTADO TRANSITORIO, FLUIDO VISCOELÁSTICO.	45
3.7. APLICACIÓN DEL MODELO DE KELVIN-VOIGT EN LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA COMPLEJA	47
3.8. APLICACIÓN EN SANGRE HUMANA	48

CAPÍTULO 4: SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	50
4.1. SIMULACIÓN I: Fluido newtoniano en geometría capilar sin componente elástica (G).	52
4.2. SIMULACIÓN II: Fluido newtoniano en geometría capilar con diferentes valores de elasticidad (G).	53
4.3. Simulación III: Fluido newtoniano en geometría capilar sin elasticidad (G=0) y diferentes valores de radio (R)	56
4.4. Simulación IV: Fluido newtoniano en geometría capilar con elasticidad constante (G=0.1) y diferentes valores del radio (R)	58
4.5. Simulación V: Fluido newtoniano en geometría capilar con elasticidad constante (G=0.5) y diferentes valores del radio (R).	60
4.6. Simulación VI: Fluido newtoniano en geometría de corona circular sin elasticidad (G=0) y diferentes valores para la relación de radios (R).	62
4.7. Simulación VII: Fluido newtoniano en geometría de corona circular con diferentes valores de elasticidad del Rouleaux (G) y radio constante (R=0.1)	64
4.8. Simulación VIII: Fluido newtoniano en geometría capilar con diferentes valores de elasticidad (G) y radio constante (R=0.5)	66
4.9. Simulación IX: Sangre humana en geometría cilíndrica sin elasticidad (G)	68
4.10. Simulación X: Sangre humana en geometría cilíndrica y diferentes valores de elasticidad (G)	69
4.11. Simulación XI: Sangre humana en geometría de corona circular sin elasticidad (G)	71
4.12. Simulación XII: Sangre humana en geometría de corona circular y diferentes valores de elasticidad (G)	72
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	74
REFERENCIAS:	76
BIBLIOGRAFÍA:	77
APÉNDICE I. ECUACIONES DE NAVIER STOKES PARA COORDENADAS CILÍNDRICAS:	78
APÉNDICE II. TRANSFORMADA DE FOURIER:	78
APÉNDICE III. FUNCIONES DE BESSEL:	78
APÉNDICE IV: PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL	80
APÉNDICE V. FLUJO PULSÁTIL	82

LISTA DE ILUSTRACIONES

Figura 2.1-1. Estructura de los eritrocitos a baja, mediana y alta velocidad.	17
Figura 2.9-1. Diagrama de bloques de una Función de Transferencia.	25
Figura 3.1-1. Representación de la geometría cilíndrica.	28
Figura 3.2-1. Representación de la geometría de tubos concéntricos o corona circular.	32
Figura 4.1-1. Representación de la parte real e imaginaria de la FTC para un sistema Newtoniano capilar con elasticidad despreciable.	52
Figura 4.2-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano capilar para diferentes valores de la elasticidad del Rouleaux (G).	53
Figura 4.2-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano capilar para diferentes valores de elasticidad (G).	55
Figura 4.3-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de ratio y sin elasticidad.	56
Figura 4.3-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y sin elasticidad.	57
Figura 4.4-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.1.	58
Figura 4.4-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.1.	59
Figura 4.5-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.5.	60
Figura 4.5-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.5.	61
Figura 4.6-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con relación de radios (R) variable y elasticidad del Rouleaux (G) despreciable.	62
Figura 4.6-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con relación de radios (R) variable y elasticidad del Rouleaux (G) despreciable.	63
Figura 4.7-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.1 y diferentes valores de la elasticidad.	64
Figura 4.7-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.1 y diferentes valores de elasticidad.	65
Figura 4.8-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.5 y diferentes valores de la elasticidad.	66
Figura 4.8-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.5 y diferentes valores de elasticidad.	67
Figura 4.9-1. Representación de la parte Real e Imaginaria de la FTC para la muestra L3 de sangre humana.	68
Figura 4.10-1 Representación de la parte Real de la FTC para la muestra L3 de Sangre humana en geometría cilíndrica considerando diferentes valores de elasticidad (G)	69
Figura 4.10-2. Representación de la parte Imaginaria de la FTC para la muestra L3 de Sangre humana en geometría cilíndrica considerando diferentes valores de elasticidad (G)	70

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.2-1. Ecuaciones para geometría cilíndrica y de corona circular en estado estacionario.	35
Tabla 3.4-1. Resumen de ecuaciones para geometría cilíndrica y de corona circular para un fluido newtoniano en estado transitorio.	43
Tabla 3.4-2. Valores de las constantes y variables para las ecuaciones del caso 4	44
Tabla 3.6-1. Resumen de ecuaciones para geometría cilíndrica y de corona circular para un fluido viscoelástico en estado transitorio	46
Tabla 3.6-2. Valores de las constantes y variables de las ecuaciones del caso 6.	47

NOMENCLATURA

D	Diámetro	λ	Tiempo característico de cada material
f	Fuerza de bulto	μ	Viscosidad
G	Elasticidad del Rouleaux	ξ	Constante de proporcionalidad elástica
i	Número i	π	Número Pi
J_0	Función de Bessel de primer orden	ρ	Densidad
L	Longitud en el eje z	Φ	Fluidez
p	Presión	Φ^*	Fluidez adimensional
\mathcal{P}	Presión estática y gravitacional	φ_μ	Fluidez Newtoniana
Q	Flujo volumétrico	ω	Frecuencia
R	Radio		
t	Tiempo		
u	Variable u adimensional		
V	Velocidad		
$\langle v_z \rangle$	Velocidad media		
Y_0	Función de Bessel de segundo orden		
X	Factor de modelo viscoelástico		
z	Coordenada axial		

OPERADORES

O_Φ	Operador viscosidad
O_η	Operador fluidez

TENSORES

$\vec{\tau}$	Tensor de esfuerzos viscosos
σ	Tensor de esfuerzo cortante

LETRAS GRIEGAS

α	Factor de viscoelasticidad
β^2	Variable beta
β^*	Variable beta adimensional
δ	Delta de Dirac
ε	Elongación
η_c	Viscosidad

NÚMEROS ADIMENSIONALES

Re	Número de Reynolds
Wo	Número de Womersley
De	Número de Deborah
r^*	Radio adimensional

FUNCIONES

F_T	Función de Transferencia Compleja
F_T^*	Función de Transferencia Compleja adimensional
\sin	Función seno
\sinh	Función seno hiperbólico
\cos	Función coseno

OTROS SÍMBOLOS

\mathcal{F}	Transformada de Fourier
---------------	-------------------------

ABSTRACT

In this work, the flow of a viscoelastic liquid in capillary and circular crown geometries in a non-stationary state is analyzed. The process is carried out at constant temperature and the liquid is incompressible. To characterize the rheology and flow of our system, a viscoelastic model known as Kelvin-Voigt model is used, which is a variant of the Maxwell model. Assuming that the flow is unidirectional, and that there is cylindrical symmetry in the system, a differential equation is obtained that describes the changes of the axial component of the velocity vector as a function of the pulsatile pressure gradient and the viscoelastic mechanisms of the system. Using the Fourier formalism, analytical expressions are obtained for the velocity and volumetric flow in terms of the modified zero-order Bessel functions of first and second species. From this, the complex transfer function (CTF) is constructed which has a real part and an imaginary part. The FTC depends on the Womersley or Deborah number associated to the viscoelasticity of the material. Finally, the solutions for a complex fluid (human blood) are constructed.

RESUMEN

En este trabajo se analiza el flujo de un líquido viscoelástico en geometrías capilar y corona circular en estado no estacionario. El proceso se lleva a cabo a temperatura constante y el líquido es incompresible. Para caracterizar la reología y el flujo de nuestro sistema se utiliza un modelo viscoelástico conocido como de Kelvin-Voigt el cual, es una variante del modelo de Maxwell. Suponiendo que el flujo es unidireccional, y que existe simetría cilíndrica en el sistema se obtiene una ecuación diferencial que describe los cambios de la componente axial del vector velocidad en función del gradiente de presión pulsátil y de los mecanismos viscoelásticos del sistema. Mediante el formalismo de Fourier, se obtienen expresiones analíticas para la velocidad y el flujo volumétrico en términos de las funciones de Bessel modificadas de orden cero de primera y segunda especie. A partir de esto, se construye la función de transferencia compleja (FTC) la cual tiene una parte real y una parte imaginaria. La FTC depende del número de Womersley o Deborah asociado a la viscoelasticidad del material. Finalmente, se construyen las soluciones para un fluido complejo (sangre humana).

PALABRAS CLAVE:

Reología, reología de la sangre, fluido viscoelástico, fluido de Kelvin-Voigt, modelo de Hagen-Poiseuille, flujo pulsátil, funciones de Bessel, Función de Transferencia Compleja.

CAPÍTULO 1:

1.1. INTRODUCCIÓN

Se denomina *reología* al estudio de la relación entre el esfuerzo y la deformación en los fluidos complejos, es decir, de aquellos fluidos que se caracterizan por tener variaciones en la viscosidad respecto al tiempo, la temperatura y el esfuerzo (Bird et al. 2002). La importancia de la reología radica en la aplicación de modelos físicos y matemáticos en ramas como la petroquímica, los polímeros, la industria alimenticia y la medicina (Bird et al. 2002).

Entre los fluidos complejos se encuentran a los que se les denomina *viscoelásticos*, por presentar como su nombre lo indica, una componente que actúa como un fluido viscoso y otra que lo hace como un sólido elástico. Entre ellos se encuentra la sangre, un fluido biológico que viaja por el cuerpo por causa de las pulsaciones del corazón y cuyos dos componentes principales, el plasma y los eritrocitos le dan características viscosas y elásticas, respectivamente.

Mientras que otros autores han estudiado el comportamiento físico y matemático de fluidos viscoelásticos en régimen pulsátil, así como de la sangre en específico, variando el contenido de colesterol y las características del medio que la contiene, en este trabajo de tesis se ha realizado el análisis del flujo de sangre en régimen pulsátil considerándola como un fluido de Kelvin-Voigt, es decir, un fluido newtoniano modificado con una componente elástica (G). Esta componente es lo que se denomina como *Rouleaux*, y son los agregados de glóbulos rojos que se forman a bajas velocidades.

Lo anterior se incluye en una función de transferencia compleja (FTC) obtenida a través del formalismo de Fourier, que permite analizar las variaciones de la respuesta del flujo volumétrico respecto a la frecuencia de las pulsaciones para diferentes valores de elasticidad (G) para geometría cilíndrica y de corona circular que representan venas con oclusiones periféricas y centrales.

La FTC obtenida es aplicable a cualquier fluido viscoelástico en régimen pulsátil, por lo que conforma la base matemática para un estudio posterior más profundo y aplicable en otras áreas de estudio.

1.2. ANTECEDENTES

El estudio de los fluidos sometidos a un gradiente de presión ha sido de interés para entender el comportamiento de sistemas biológicos que los contienen. Se han realizado estudios en fluidos viscoelásticos en diferentes condiciones de geometría, viscosidad y gradiente de presión dinámico.

Estos análisis se han realizado desde la perspectiva físico-matemática y biológica, a fin de entender las particularidades de cada sistema y su relación con los sistemas sanguíneos en humanos y el resto de mamíferos.

Desde la perspectiva físico matemática, se cuenta con los siguientes antecedentes:

Corvera y del Río (2003) estudiaron el efecto de la frecuencia en una ley generalizada de Darcy aplicada a un dedo de un fluido viscoelástico que fluye en una celda de Hele-Shaw, que está compuesta por dos placas de vidrio paralelas que contienen un fluido viscoso que es empujado por otro fluido de baja viscosidad, y cuya interface es inestable.

Castro, et al. (2007) realizaron el estudio de fluidos viscosos en las proximidades de una pared sólida a escalas micrométricas sometidos a un gradiente de presión dinámico. Utilizando la hipótesis de Navier, los autores nos presentan una forma experimental de determinar si existe o no deslizamiento en el sistema.

Torres et al. (2017) nos muestran el comportamiento dinámico de fluidos newtonianos incompresibles sometidos a diferentes gradientes de presión pulsátiles contenidos en tubos elásticos. Los autores registran por primera vez el comportamiento resonante en la permeabilidad dinámica, mostrando la interacción entre la viscosidad del fluido, la elasticidad de la pared y el área característica del medio de confinamiento.

Y desde la perspectiva físico-matemática y biológica, se tienen los siguientes antecedentes:

Colleparado-Guevara y Corvera (2007) estudiaron el flujo de un fluido viscoelástico sometido a un gradiente de presión dinámico en un tubo ocluido central o periféricamente, comparando el flujo de recuperación para ambos casos.

Flores et al. (2009) realizaron un estudio de la frecuencia óptima de un fluido viscoelástico pulsátil circulando en una red de tubos, explicando el flujo de sangre desde el corazón en mamíferos en reposo.

Moreno y Calderas (2013) presentan un estudio de la respuesta reológica de la sangre con hipercolesterolemia, caracterizando el cambio de viscosidad conforme el aumento de colesterol total.

Ortega et al. (2015) realizaron un estudio experimental con ratas sometidas a dietas con diferentes porcentajes de grasa, con el objetivo de analizar el cambio en el comportamiento reológico de la sangre con el aumento del colesterol total.

Flores et al. (2016) realizaron un estudio del flujo de la sangre en el sistema arterial con modelos computacionales de una sola dimensión (1-D) del un modelo generalizado de Darcy, calculando el flujo y las ondas de presión de la sangre en algunas de las arterias más importantes del cuerpo humano, considerándolas elásticas.

En este trabajo, se realiza el análisis de un fluido biológico viscoelástico (sangre) sometido a un gradiente de presión dinámico en el que, además, se considera la presencia y variación de un valor característico de elasticidad: el Rouleaux (G). El comportamiento de este fluido se estudia en estado estacionario y transitorio en dos geometrías: cilíndrica y de tubos concéntricos o de corona circular.

1.3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta investigación se estudiará el flujo de líquidos newtonianos y no newtonianos en geometrías cilíndricas en estado no estacionario. Es decir, que la velocidad, el gradiente de presión y el esfuerzo serán funciones de la posición y del tiempo. Mediante el formalismo de Fourier se obtendrá una ecuación dinámica en el espacio de las frecuencias la cual, será un caso particular de la familia de las funciones de Bessel. Suponiendo no deslizamiento y simetría en el campo de velocidades se obtendrá una expresión cerrada para la velocidad en el campo de las frecuencias en función de los mecanismos inerciales, viscosos y características geométricas del sistema.

Integrando en una sección de área transversal encontraremos una expresión analítica para el flujo volumétrico y el gradiente de presión del sistema. Esta ecuación será general y podrá ser escalada a cualquier fluido viscoelástico lineal o fraccionado. El mérito de este trabajo radica en un estudio sistemático de la reología lineal de estos sistemas complejos.

1.4. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Obtener la Función de Transferencia Compleja de fluidos newtonianos y no newtonianos deformados continua e irreversiblemente en geometrías cilíndricas: capilar inextensible y corona circular (tubos concéntricos).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aplicar el formalismo de Fourier en la ecuación de movimiento con el fin de obtener la función de transferencia compleja que describa la señal asociada al gradiente de presión transitorio y la respuesta o variable de salida relacionada con el flujo volumétrico.
- Estudiar el efecto de la geometría para dos configuraciones diferentes. La primera de ellas, es un capilar inextensible de radio $r = a$ y longitud $z = L$, y la segunda configuración sería una corona circular de radio R_1 y R_2 y longitud $z = L$ (tubos concéntricos).
- Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones e introducir números adimensionales que describan los mecanismos macroscópicos que dictan la física lineal de estos sistemas.
- Programar un código en el lenguaje de Wolfram Mathematica con el fin de obtener las simulaciones de la parte real, imaginaria y la norma de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia del espacio de Fourier.
- Aplicar los resultados teóricos obtenidos y analizar sangre humana con hipercolesterolemia con el fin de dilucidar información física, biológica e ingenieril de este sistema en particular y contribuir al campo de la hemorreología.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. REOLOGÍA DE LA SANGRE

Se conoce como reología a la rama de la mecánica que estudia la deformación y el flujo de materiales. De ella, deriva la biorreología, que es el estudio de la relación entre las fuerzas y la deformación en el flujo de biomateriales, incluyendo huesos, tejidos blandos, líquido sinovial, moco, sangre, entre otros (Roselli & Diller 2011).

La rama de la biorreología que se especializa en el flujo de sangre se denomina hemorreología. Este campo de estudio incluye la investigación de las propiedades de la sangre a nivel macro y microscópico, así como las interacciones de entre sus componentes y con las venas y las células endoteliales.

El objetivo de la sangre es entregar oxígeno y nutrientes a todos los tejidos del cuerpo al mismo tiempo que remueve productos de desecho y defiende al cuerpo de infecciones o agentes patógenos con ayuda de los anticuerpos. Esto lo logra con ayuda del sistema cardiovascular, que se compone de venas, arterias y el corazón. El flujo de la sangre en este sistema depende, principalmente de tres cosas: la fuerza motriz del corazón, la arquitectura del sistema y las propiedades mecánicas de la sangre misma (Galdi et al 2008).

La sangre es un fluido reológicamente inusual. Esto se debe a la naturaleza de sus componentes y la proporción en la que se encuentra cada uno de ellos. Entre sus componentes principales encontramos:

- Plasma: está constituido mayormente por agua (90-92% en peso) y en él se encuentran en suspensión todas las sustancias orgánicas e inorgánicas que forman la sangre, y su papel fisiológico es transportar estas sustancias por el sistema cardiovascular.
- Leucocitos: o glóbulos blancos son de forma prácticamente esférica, de mayor tamaño y menor cantidad que los eritrocitos. Tienen como función fisiológica la lucha contra virus y bacterias, formando anticuerpos y sensibilizando linfocitos.
- Trombocitos: o mejor conocidos como plaquetas, son células pequeñas en forma de discoide, y tienen como objetivo evitar la pérdida de sangre, cambiando su forma cuando están en contacto con una superficie vascular dañada, además de generar señales químicas que activan a las plaquetas cercanas a fin de adherirse unas a otras.
- Eritrocitos: o glóbulos rojos, son células de alta flexibilidad y de alta concentración de hemoglobina a las que se adhieren el oxígeno y el dióxido de carbono en su viaje entre los pulmones y el resto del cuerpo.

Los eritrocitos tienen forma de disco bicóncavo que pueden cambiar drásticamente de forma por efectos térmicos, químicos o mecánicos y son de alta influencia en la viscosidad de la sangre.

El nivel de concentración de eritrocitos en la sangre se denomina *hematocrito*. Éste varía entre personas según el sexo asignado, el nivel de salud, el nivel de actividad y la altitud en la que viven.

Para describir comportamiento reológico de la sangre es necesario entender tres factores: la velocidad de corte que se ejerce sobre ella, las características del conducto por el que fluye y del nivel del hematocrito. Se ha demostrado experimentalmente que la viscosidad:

- Incrementa con el aumento del valor del hematocrito.
- Disminuye con el aumento de la velocidad de corte.
- Disminuye conforme el radio de conducto a través del que fluye disminuye (Efecto de Fahraeus-Lindqvist).

Los eritrocitos tienen la capacidad de modificar su forma dependiendo de la velocidad de corte. Cuando ésta es baja, se agrupan formando estructuras ramificadas en 3D, también conocidos como *Roleaux*. A velocidades medias, los eritrocitos viajan en su forma normal de discoide, y a velocidades altas, toman forma de *paracaídas* mientras viajan por los capilares (Galdi et al 2008).

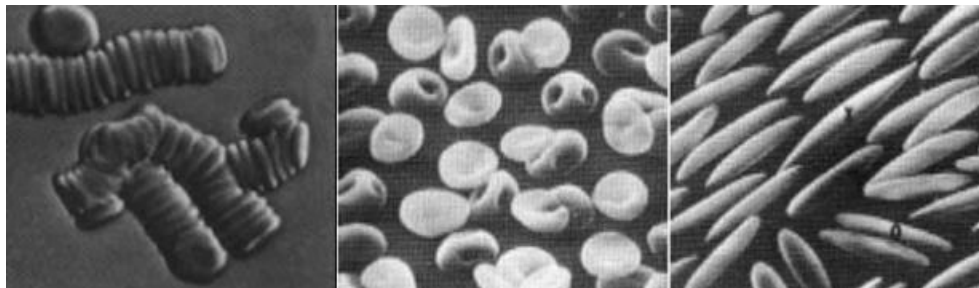


Figura 2.1-1. Estructura de los eritrocitos a baja, mediana y alta velocidad.

Una característica importante de la sangre es su viscoelasticidad. Esta depende del valor del hematocrito y es mayor en magnitud a bajas velocidades, cuando los glóbulos rojos forman estructuras 3D y tienen la capacidad de almacenar y liberar energía. Una vez que estas estructuras se rompen a células individuales o pequeños grupos de ellas, la capacidad de almacenar energía elástica disminuye notablemente.

Para el sistema cardiovascular humano, existen regiones donde la circulación de las estructuras 3D es estable, como en las zonas de estenosis o dentro de algún saco de aneurisma, y son zonas donde la viscoelasticidad de la sangre puede jugar un papel muy importante.

Si bien, la energía elástica también puede almacenarse en la deformación de eritrocitos individuales, Galdi et al. (2008) consideran que *no juega un papel apreciable a menos que el nivel del hematocrito sea significativamente elevado*, (p. 112).

2.2. FRECUENCIA CARDIACA HUMANA

Siguiendo el análisis de Del Río y Castrejón (2003), para la sangre humana de características: viscosidad entre 5 y 20 *cp*, densidad de 1.05 *g/cm³* y tiempo de relajación de 1s que se encuentra fluyendo en arterias de entre 0.02 y 0.35*cm*, se pueden obtener dos valores extremos de frecuencia donde ocurre el máximo de velocidad:

$$v_{max} \in (8.7, 0.25) Hz$$

2.3. FLUIDOS NEWTONIANOS Y NO NEWTONIANOS

Una de las clasificaciones de los fluidos es respecto a su viscosidad. Se dividen en newtonianos y *no newtonianos*. Los newtonianos son los más sencillos y son aquellos que cuando son sometidos a un esfuerzo, el gradiente de velocidad es proporcional al esfuerzo cortante para un punto. Esto se expresa en la ley de viscosidad de newton, que toma la forma:

$$\sigma \propto \frac{dv}{dy}$$
$$\sigma = \mu \frac{dv}{dt}$$

Donde la constante asociada es justamente la viscosidad del fluido. Aquellos fluidos que no cumplen esta ley se les denominan *no newtonianos* y se subdividen, según Levenspiel (1993, p. 90) en:

- Independientes del tiempo: cuya viscosidad no depende del tiempo.
- Dependientes del tiempo, pero no elásticos: cuyo pasado reciente afecta su comportamiento en un momento dado.
- Viscoelásticos: se caracterizan por combinar el comportamiento de los fluidos con las propiedades elásticas de los sólidos.

Estos últimos son de especial interés, pues dentro de ellos se encuentran los fluidos biológicos y soluciones poliméricas, y requieren de experimentos transitorios para caracterizar sus propiedades elásticas.

2.4. FLUIDO DE KELVIN-VOIGT

Los fluidos viscoelásticos, según Fombuena (2017, p. 138), presentan una naturaleza entre fluido viscoso y sólido elástico. Para modelar el comportamiento viscoso se tiene la ley de Newton y se representa tradicionalmente como un émbolo de respuesta dependiente del tiempo.

Esta ley ha sido expresada en términos del gradiente de velocidad, pero puede ser expresado en términos de la elongación respecto al tiempo:

$$\sigma = \mu \frac{dv}{dy}$$

$$\text{Si } v = \frac{dx}{dt}$$

$$\sigma = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right)$$

Donde la elongación se define como:

$$\varepsilon = \frac{dx}{dy}$$

Quedando la ley de Newton como:

$$\sigma = \mu \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Para la parte elástica se tiene la ley de Hooke, que se representa como un resorte de respuesta inmediata y establece que la tensión aplicada (σ) es proporcional a la elongación producida (ε), donde (ξ) es una constante de proporcionalidad elástica:

$$\sigma \propto \varepsilon$$

$$\sigma = \xi \cdot \varepsilon$$

Este tipo de fluidos deben estudiarse desde un punto de vista mecánico y reológico para lo que se han establecido diferentes modelos. El más sencillo de ellos es el modelo de Maxwell, que considera la combinación en serie del elemento elástico y el elemento viscoso. Con este modelo se considera que mientras la respuesta elástica del fluido ocurre de forma instantánea, la respuesta viscosa irá incrementando con el paso del tiempo.

Por otra parte, el modelo de Kelvin-Voigt considera la combinación de ambos elementos en paralelo, por lo que al aplicar tensión al fluido una parte de la energía será almacenada por el elemento elástico y el resto será disipado por el émbolo.

2.5. ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y MOVIMIENTO

Tal como lo indican del Río y Castrejón (2002), para resolver problemas de flujo de fluidos se requiere de dos ecuaciones:

La ecuación de balance de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho V$$

Y la ecuación de balance de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V \cdot \nabla)V = -\nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + f$$

Donde f es la fuerza de bulto y $\vec{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos. Para resolver estas dos ecuaciones, es necesario convertirlas en un problema cerrado, mediante las condiciones iniciales y ecuaciones constitutivas y de estado que especifiquen el tipo de fluido que es objeto de estudio.

Por ejemplo, el tensor de esfuerzos viscosos da la clasificación entre un fluido newtoniano y uno no newtoniano. Para el primer caso se expresa como:

$$\vec{\tau} = -\mu[\nabla V + \nabla V^T]$$

Quedando la ecuación de balance de movimiento como lo que se conoce como la ecuación de *Navier-Stokes*:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V \cdot \nabla)V = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (a)$$

Y si se considera un fluido bajo condiciones de incompresibilidad, la ecuación de balance de masa queda como:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (b)$$

Siendo (a) y (b) las ecuaciones diferenciales que se deben resolver para modelar el flujo de un fluido newtoniano, isotérmico e incompresible, considerando la geometría del sistema donde se encuentre. Para otro tipo de fluidos, puede no haber consideración de incompresibilidad, o bien modificaciones en el tensor de esfuerzos viscosos.

2.6. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE HAGEN-POISEUILLE

El flujo de la sangre en pequeños tubos es difícil de predecir si se sigue estrictamente la aplicación de la teoría. Esto se debe al propio comportamiento reológico de la sangre y a que sólo se puede tratar como un medio continuo cuando el radio de los eritrocitos comparado al del tubo donde fluyen es pequeño.

2.6.1. NAVIER-STOKES

Para flujo estacionario, fluido incompresible

Partiendo de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible en estado estacionario y considerando flujo en una sola dirección:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Y de la ecuación de Navier-Stokes desarrollada únicamente para la componente en Z:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Dadas las condiciones de incompresibilidad, flujo unidireccional y que la velocidad no es una función de Z, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$$

Cuya solución es:

$$V_z = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

Dado que V_z requiere ser finita a $r = 0$, la constante c_1 debe ser igual a cero. Por otra parte, dado la condición de no deslizamiento, donde $V_z = 0$ en $r = R$, se tiene:

$$c_2 = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2$$

Quedando el perfil de velocidades como:

$$V_z = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} R^2$$

Y si se aplica una doble integral, se obtiene el flujo volumétrico, que es justamente la ecuación de Hagen-Poiseuille.

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} V_z(r) r dr d\theta$$
$$Q = \frac{\pi R_1^4}{8} \varphi_\mu(-\nabla z p)$$

2.6.2. BALANCE DE CORAZA (BALANCE DE FUERZAS)

Siguiendo el análisis de Bird (1992, p. 2-12) donde se considera una envolvente cilíndrica de espesor Δr y longitud z , por el balance de fuerzas en dirección z , se tiene:

$$(2\pi r L \tau_{rz})|_r - (2\pi r L \tau_{rz})|_{r+\Delta r} + (2\pi r \Delta r \rho v_z^2)|_{z=0} - (2\pi r \Delta r \rho v_z^2)|_{z=L} + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi \rho \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (p_0 - p_L) = 0$$

Que, dadas las condiciones de incompresibilidad, y dividiendo toda la expresión entre $2\pi L \Delta r$, en el límite donde $\Delta r \rightarrow 0$ queda:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\frac{(r \tau_{rz})|_{r+\Delta r} - (r \tau_{rz})|_r}{\Delta r} \right) = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} + pg \right) r$$

Siendo el primer término de esta ecuación la primera derivada de $r \tau_{rz}$:

$$\frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} \right) r$$

Donde \mathcal{P} incluye los términos de presión estática y gravitacional.

La ecuación integrada queda como:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L} \right) r + \frac{c_1}{r}$$

Donde c_1 es igual a cero por la condición de flujo finito en $r = 0$:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L} \right) r$$

Considerando la ley de newton:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

Y sustituyéndolo en la ecuación anterior:

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L} \right) r$$

Que integrado queda como:

$$v_z = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L} \right) r^2 + c_2$$

Donde c_2 , por la condición de frontera es:

$$c_2 = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} \right) R^2$$

Quedando el perfil de velocidades como:

$$v_z = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} \right) R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Cuya velocidad media es la suma de todas las velocidades en una sección transversal dividida por el área de dicha sección:

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{8\mu L} \right) R^2$$

Y el flujo volumétrico que coincide con la ley de Hagen-Poiseuille es el producto del área por la velocidad media:

$$Q = \pi \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{8\mu L} \right) R^4$$

2.6.3. ECUACIÓN DE MOMENTO

La ecuación de momento es general y se aplica a cualquier fluido newtoniano y no newtoniano. Y a diferencia de la ecuación de *Navier-Stokes* que se obtiene cuando se sustituye el tensor de esfuerzos por el tensor newtoniano y se impone que el fluido sea incompresible y que el sistema sea isotérmico, esta parte de la distribución de esfuerzos.

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$$

Esta ecuación es completamente general y es válida para cualquier fluido, puesto que sólo involucra las fuerzas que deforman continua o irreversiblemente el material.

Nótese que en el caso de un fluido newtoniano incompresible e isotérmico la ecuación de momento se describe en términos de las velocidades y se conoce como la ecuación de Navier-Stokes.

2.7. NÚMEROS ADIMENSIONALES

Existe un número adimensional que puede ayudarnos a caracterizar el flujo de fluidos, y se conoce como *número de Reynolds*, y nos da la medida de la significancia de los efectos inerciales sobre los viscosos tanto en estado estacionario como transitorio (Galdi et al 2008). Se define como:

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\eta_c}$$

Cuando el fluido objeto de estudio se encuentra en flujo pulsátil, se utiliza el *número de Womersley*, que es definido como:

$$Wo^2 = \frac{\rho \omega R^2}{\eta_c}$$

O bien, en su forma no potenciada:

$$Wo = R \sqrt{\frac{\rho\omega}{\eta_c}}$$

Es importante mencionar que la magnitud del número de Womersley nos da la forma del perfil de velocidades del fluido, de la forma:

- Para $Wo < 1$, significa que la frecuencia de las pulsaciones es lo suficientemente baja para mantener un perfil de velocidades parabólico que se mantiene en cada ciclo.
- Para $Wo > 10$, significa que la frecuencia de las pulsaciones es lo suficientemente grande para mantener el perfil de velocidades en forma plana o de tapón.

Para fluidos viscoelásticos, un número adimensional relevante es el de Deborah, definido como:

$$De = \lambda\omega$$

$$De = \lambda\omega$$

Este número contiene información sobre la *memoria* de los materiales, es decir, cómo afectan las tensiones actuales al material respecto a las tensiones pasadas. Esto se indica con el parámetro λ , que es el tiempo característico de cada material en el que tarda en *desvanecerse* la memoria del material.

2.8. FUNCIONES DE BESSEL

Según Periago (p.86, 2003), para la ecuación diferencial de segundo orden, con coeficientes constantes:

$$(x - a)^2 \cdot y'' + (x - a) \cdot \alpha(x) \cdot y' + \beta(x) \cdot y = 0 \quad (c)$$

Se tiene un caso particular que se conoce como Ecuación Diferencial de Bessel, donde n es un número real no negativo:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (d)$$

Cuya solución se propone como:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+b} \quad (e)$$

Para $a_0 \neq 0$, y donde los coeficientes a_k y b deben ser calculados.

Sustituyendo la Ec. (e) en la Ec. (d), se llega a que la Ec. (f), denominada *función de Bessel de primer orden n*, es una solución de la ecuación diferencial (d):

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} \quad (f)$$

De esta forma, según Periago, F. (2003, p. 87), si $n \notin \mathbb{N}$, la solución de la Ecuación Diferencial de Bessel es una combinación lineal de J_n y J_{-n} , puesto que las funciones J_n y J_{-n} son linealmente independientes, y forman una base del espacio de soluciones de la Ec. (d).

Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$, entonces las funciones J_n y J_{-n} son linealmente dependientes, por lo que no forman una base del espacio de soluciones de la Ec. (d). Para resolver este problema, es necesario introducir lo que se conoce como *función de Weber*, o bien, función de Bessel de segunda especie Y_n , definida como:

$$Y_n(x) = \frac{\cos(n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}, \quad (n \notin \mathbb{N}) \quad (g)$$

Y finalmente

$$Y_n(x) = \lim_{n \rightarrow i} Y_n(x), \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (h)$$

Las funciones J_n e Y_n son linealmente independientes, por lo que la combinación de ambas conforma la solución general de la Ec. (d) para el caso $n \in \mathbb{N}$.

2.9. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Crespo y Pendino (2014), explican que la función de transferencia permite representar un sistema dinámico mediante un modelo matemático, reemplazando mediante la transformada de Laplace o Fourier las ecuaciones diferenciales en la variable tiempo por ecuaciones algebraicas con una variable compleja que no depende del tiempo (p. 4).

La Función de Transferencia se puede representar de forma gráfica con un diagrama de bloques que muestra la influencia de una variable de entrada $i(t)$ sobre una de salida $o(t)$, que al transformarse quedan en función de una variable compleja (s), y se relacionan mediante dicha función:

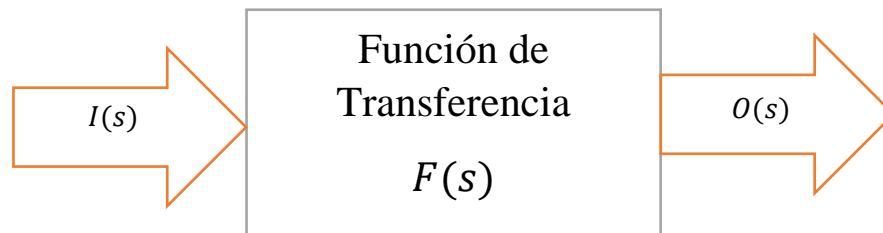


Figura 2.9-1. Diagrama de bloques de una Función de Transferencia.

Otra forma de definir una Función de Transferencia es como el cociente de la transformada de la variable de salida entre la transformada de la variable de entrada:

$$I(s) = O(s) \cdot F(s)$$

$$F(s) = \frac{I(s)}{O(s)}$$

CAPÍTULO 3: PROBLEMA FÍSICO

En este capítulo se realiza el modelado matemático para un fluido newtoniano en estado estacionario en geometría cilíndrica de radio $r = R$ y longitud en z igual a L y en geometría de corona circular (o tubos concéntricos) de radio interno $r = R_1$, radio externo $r = R_2$ y longitud en z igual a L , con consideración de no deslizamiento en las paredes.

Para ambas geometrías se obtienen dos ecuaciones principales: la de velocidad (V_z) y flujo volumétrico (Q) en dirección de z . Para esto se parte de la ecuación de continuidad y de las ecuaciones de Navier Stokes, que derivan de la ecuación de Cauchy para un fluido isotérmico, de densidad constante y newtoniano.

El análisis en estado estacionario tiene como base el modelo de Hagen-Poiseuille, que (...)

Luego, se repite el mismo procedimiento para estado transitorio, obteniendo para cada geometría cuatro ecuaciones principales: la de velocidad (V_z) y flujo volumétrico (Q) en z , la de fluidez (Φ) y fluidez adimensional (Φ^*). Estas dos últimas son las que se identifican como la función de transferencia compleja (FTC) y que se utilizan en el siguiente capítulo para realizar las simulaciones.

3.1. CASO I: GEOMETRÍA CILÍNDRICA, ESTADO ESTACIONARIO

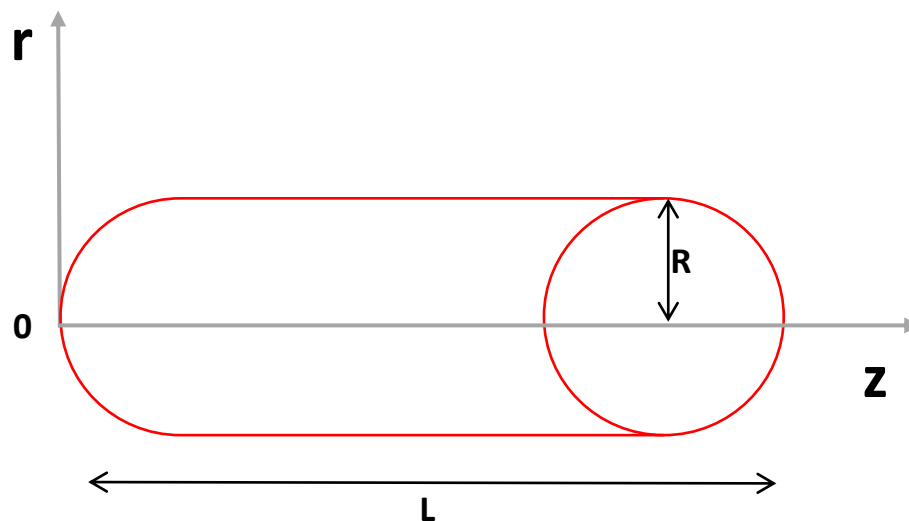


Figura 3.1-1. Representación de la geometría cilíndrica.

Se plantea la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho V) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \rho \cdot V - \rho(\nabla \cdot V) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot V &= -\rho(\nabla \cdot V)\end{aligned}\quad (1.1)$$

Sabiendo que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot V = \frac{D\rho}{Dt}$$

La Ec. (1.1) queda como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot V) = 0 \quad (1.2)$$

Al ser un fluido incompresible la densidad no es una función del radio ni del tiempo:

$$\begin{aligned}\rho(\nabla \cdot V) &= 0 \\ (\nabla \cdot V) &= 0\end{aligned}\quad (1.3)$$

Desarrollando el gradiente para coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

Considerando que no hay movimiento del fluido en dirección de r y θ

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

Siendo entonces V_z una función únicamente dependiente del radio:

$$V_z = V(r) \quad (1.6)$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes se toma únicamente la del componente en z (Ver apéndice I):

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (1.7)$$

Considerando el estado estacionario, que no hay cambio de velocidad en la componente r y θ , que no hay acción de gravedad y que la velocidad en z no es una función de z , se tiene:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (1.8)$$

Para resolver esta ecuación diferencial se toma en cuenta la condición de no deslizamiento en las paredes del cilindro y la velocidad en el centro como finita, a fin de mantener la consistencia física:

$$V_z(R) = 0$$

$$V_z(0) = \text{finita}$$

Se resuelve la ecuación diferencial integrando indefinidamente:

$$\begin{aligned} \partial \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) &= \frac{r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \partial r \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} &= \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{r} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Resolviendo la ecuación diferencial de la Ec. (1.9):

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2 \quad (1.10)$$

Si se aplican las condiciones a la frontera en la Ec. (1.10), se obtienen las constantes:

$$\begin{aligned} \text{finito} &= \frac{0}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln 0 + C_2 \\ C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln R + C_2 \\ C_2 &= -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se sustituyen las constantes obtenidas en las Ec. (1.11), (1.12) en el perfil de velocidad de la Ec. (1.10):

$$\begin{aligned} V_z &= \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \\ V_z &= \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para calcular el flujo volumétrico en geometría cilíndrica, se debe integrar dos veces de la forma:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R V_z(r) r dr d\theta \quad (1.14)$$

Que da como resultado:

$$Q = \pi V_z(R) R^2 - \pi \int_0^R r^2 \frac{\partial V_z}{\partial r} dr \quad (1.15)$$

Para resolver la integral del segundo término de la Ec. (1.15), se debe considerar la Ec. (1.9):

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{r}$$

A partir de la ecuación constitutiva de Newton, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = \varphi_\mu \sigma_{rz} \quad (1.16)$$

En esta ecuación, la rapidez de deformación se expresa como el producto de la fluidez newtoniana (φ_μ) y la componente rz del tensor de esfuerzos (σ_{rz}). Al combinar la Ec. (1.16) con la Ec. (1.9), se obtiene la siguiente expresión para la rapidez de deformación:

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = \varphi_\mu \left(\frac{1}{2} \nabla_z p r^2 + c_1 \right) \frac{1}{r} \quad (1.17)$$

Sustituyendo la Ec. (1.17) en la Ec. (1.15) e integrando, el flujo volumétrico queda como:

$$Q = \pi V_z(R) R^2 - \frac{\pi \varphi_\mu}{2} \left[\frac{1}{4} \nabla_z p R^4 + c_1 R^2 \right] \quad (1.18)$$

Del modelo de Newton se sabe que:

$$\int_0^R \frac{\partial V_z}{\partial r} dr = 0 \quad (1.19)$$

Sustituyendo Ec. (1.17) en la Ec. (1.18), y dividiendo entre r se tiene:

$$0 = \int_0^R \varphi_\mu \left(\frac{1}{2} \nabla_z p r^2 + c_1 \frac{1}{r} \right) dr \quad (1.20)$$

Si se integra la Ec. (1.20) en los límites de 0 a R , queda:

$$0 = \frac{1}{4} \nabla_z p R^2 + c_1 (\ln R - \ln 0) \quad (1.21)$$

Por lo tanto, para dar concordancia física, la constante C_1 debe ser igual a cero:

$$c_1 = 0 \quad (1.22)$$

Sustituyendo la Ec. (1.22) en la Ec. (1.18), se obtiene:

$$Q = \pi V_z(R) R^2 - \frac{\pi \varphi_\mu \nabla_z p R^4}{8} \quad (1.23)$$

En la Ec. (1.21), V_z es una función de R , por lo que se evalúa R en (1.13):

$$V_z = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$$V_z(R) = 0 \quad (1.24)$$

Entonces, si se sustituye la Ec. (1.22) en la Ec. (1.21), finalmente se obtiene el flujo volumétrico Q :

$$Q = -\frac{\pi\varphi_{\mu}\nabla zpR^4}{8}$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8}\varphi_{\mu}(-\nabla zp) \quad (1.25)$$

3.2. CASO II: GEOMETRÍA DE CORONA CIRCULAR, ESTADO ESTACIONARIO

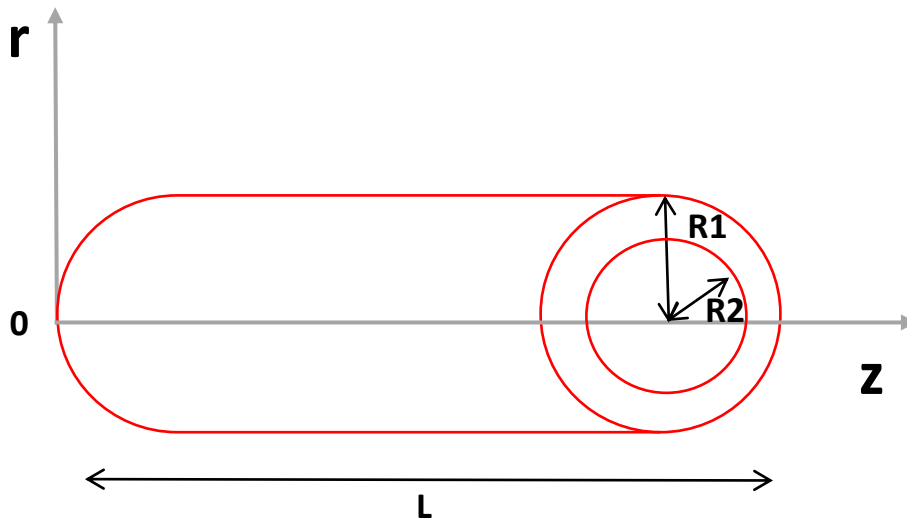


Figura 3.2-1. Representación de la geometría de tubos concéntricos o corona circular.

Dado que el fluido está en contacto con dos superficies, la que delimita el radio externo y la que delimita el radio interno, la condición de no deslizamiento se expresa en ambos casos como:

$$V_z(R_1) = 0$$

$$V_z(R_2) = 0$$

Como la corona circular está en coordenadas cilíndricas, el análisis que se realiza con la ecuación de continuidad es igual hasta la Ec. (1.10), que por comodidad en este análisis se renombrará como Ec. (2.1):

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2 \quad (2.1)$$

Considerando las condiciones a la frontera en la Ec. (2.1), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = \frac{R_1^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln R_1 + C_2 \quad (2.2)$$

$$0 = \frac{R_2^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln R_2 + C_2 \quad (2.3)$$

Que si se resuelve se obtiene el valor de las constantes:

$$C_1 = \frac{(R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \quad (2.4)$$

$$C_2 = -\frac{R_1^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{(R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \ln R_1 \quad (2.5)$$

Que se sustituyen en la Ec. (2.1):

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{(R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \ln r - \frac{R_1^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{(R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \ln R_1$$

Y que, tras reordenar términos semejantes, la velocidad queda como:

$$V_z = \left(\frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[(r^2 - R_1^2) + \ln \left(\frac{r}{R_1} \right) \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \right] \quad (2.6)$$

Considerando que el flujo volumétrico se calcula integrando dos veces el producto de la velocidad por el radio de la forma:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr d\theta \quad (2.7)$$

Se sustituye la Ec. (2.6) en la Ec. (2.7) y se resuelve la integral por partes respecto a r :

$$Q = \int_0^{2\pi} \left[V_z(R_2) \frac{R_2^2}{2} - V_z(R_1) \frac{R_1^2}{2} - \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{2} \frac{\partial V_z}{\partial r} dr \right] d\theta$$

Y luego la integral respecto a θ :

$$Q = \left[V_z(R_2) \frac{R_2^2}{2} - V_z(R_1) \frac{R_1^2}{2} - \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{2} \frac{\partial V_z}{\partial r} dr \right] \theta \Big|_0^{2\pi}$$

Obteniendo finalmente:

$$Q = \pi V_z(R_2) R_2^2 - \pi V_z(R_1) R_1^2 - \pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 \frac{\partial V_z}{\partial r} dr \quad (2.8)$$

Para resolver esta ecuación es necesario retomar la consideración planteada en la ecuación (1.16), donde se expresa la variación de la velocidad respecto a la componente en r como el producto de la fluidez newtoniana (φ_μ) y la componente rz del tensor de esfuerzos (σ_{rz}).

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = \left(\frac{1}{2} \nabla z p r^2 + c_1 \right) \frac{1}{r} \quad (1.16)$$

Sustituyendo la Ec. (1.16) en la Ec.(2.8) y reordenando:

$$Q = \pi V_z(R_2) R_2^2 - \pi V_z(R_1) R_1^2 - \pi \varphi_\mu \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \nabla z p r^3 + c_1 r \, dr \quad (2.9)$$

Integrando el segundo término:

$$Q = \pi V_z(R_2) R_2^2 - \pi V_z(R_1) R_1^2 - \pi \varphi_\mu \left[\frac{1}{2} \nabla z p \frac{r^4}{4} + c_1 \frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$Q = \pi V_z(R_2) R_2^2 - \pi V_z(R_1) R_1^2 - \frac{\pi \varphi_\mu}{2} \left[\frac{1}{4} \nabla z p (R_2^4 - R_1^4) + c_1 (R_2^2 - R_1^2) \right] \quad (2.10)$$

Para obtener el valor de la constante c_1 se toma la siguiente consideración de modelo de Newton:

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial V_z}{\partial r} \, dr = 0 \quad (2.11)$$

Sustituyendo la Ec. (1.16) en la Ec. (2.11):

$$0 = \int_{R_1}^{R_2} \varphi_\mu \left(\frac{1}{2} \nabla z p r^2 + c_1 \right) \frac{1}{r} \, dr$$

De la que se obtiene al integrar:

$$0 = \frac{1}{4} \nabla z p (R_2^2 - R_1^2) + c_1 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Y despejando la constante c_1 :

$$c_1 = -\frac{1}{4} \nabla z p \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \quad (2.12)$$

Sustituyendo la Ec. (2.12) en la Ec. (2.10) y reordenando los términos semejantes se obtiene:

$$Q = \pi V_z(R_2) R_2^2 - \pi V_z(R_1) R_1^2 - \frac{\pi \varphi_\mu}{8} \left[\nabla z p (R_2^4 - R_1^4) + \left(-\nabla z p \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \right) (R_2^2 - R_1^2) \right] \quad (2.13)$$

Factorizando $\nabla z p$ y posteriormente R_2^4 para obtener:

$$Q = \pi V_z(R_2)R_2^2 - \pi V_z(R_1)R_1^2 + \frac{\pi\varphi\mu}{8}(-\nabla zp)R_2^4 \left[\left(1 - \frac{R_1^4}{R_2^4}\right) - \left(\frac{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right)^2 \right] \quad (2.14)$$

A continuación, se muestra una tabla resumen de las ecuaciones más importantes para ambos sistemas, cilíndrico y de corona circular en estado estacionario:

Tabla 3.2-1. Ecuaciones para geometría cilíndrica y de corona circular en estado estacionario.

	Cilindro	Corona circular
Velocidad (V_z)	$\frac{R_1^2}{4\mu}V_z = \frac{R_1^2}{4\mu}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right)$	$\left(\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[(r^2 - R_1^2) + \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right]$
Flujo volumétrico (Q)	$\frac{\pi R_1^4}{8}Q = \frac{\pi R_1^4}{8}\varphi\mu(-\nabla zp)$	$\pi V_z(R_2)R_2^2 - \pi V_z(R_1)R_1^2 + \frac{\pi\varphi\mu}{8}(-\nabla zp)R_2^4 \left[\left(1 - \frac{R_1^4}{R_2^4}\right) - \left(\frac{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right)^2 \right]$

3.3. CASO III: GEOMETRÍA CILÍNDRICA, ESTADO TRANSITORIO

Para un fluido newtoniano en estado transitorio, incompresible e isotérmico que fluye en una geometría cilíndrica de radio $r = R_1$, y longitud en z igual a L y con consideración de no deslizamiento en las paredes, se parte de la ecuación de Navier Stokes para geometría cilíndrica en la componente z (Ver Apéndice I):

$$\rho \frac{\partial V_z(t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(t)}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (3.1)$$

Considerando la solución a la transformada de Fourier descrita en el Apéndice II, para el término de la izquierda, se transforma el tiempo de la forma: ($t \rightarrow \omega$), donde ω es la frecuencia.

Para el primer término se tiene, recordando que $\rho = cte$:

$$\mathcal{F} \left\{ \rho \frac{\partial V_z(t)}{\partial t} \right\} \rightarrow \rho(i\omega)V_z(r, \omega) \quad (3.2)$$

Considerando el análisis de las Ec. (1.6) y (1.7), se sabe que z no es función del tiempo y, por lo tanto, el segundo término de la Ec. (3.1) se transforma como:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial P(t)}{\partial z} \right\} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} P(\omega) \quad (3.3)$$

Finalmente, para el tercer término se tiene:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right\} \rightarrow \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right) \quad (3.4)$$

Con las Ecs. (3.2), (3.3) y (3.4) se replantea la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho(i\omega)V_z(r, \omega) = -\frac{\partial}{\partial z}P(\omega) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right) \quad (3.5)$$

Considerando que $i^2 = -1$, y reordenando:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right) + i^3 \frac{\rho(\omega)}{\mu} V_z(r, \omega) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} P(\omega) \quad (3.6)$$

La ecuación diferencial obtenida en (3.6) es de segundo orden y se desarrolla en coordenadas cilíndricas, por lo que para obtener la solución homogénea se propone el uso de la familia de las funciones de Bessel.

Para obtener la solución homogénea de Bessel, se iguala la Ec. (3.6) a cero:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right) + i^3 \frac{\rho(\omega)}{\mu} V_z(r, \omega) = 0 \quad (3.7)$$

Desarrollando la derivada del primer término y multiplicando por r^2 , queda:

$$r \frac{\partial V_z}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + i^3 r^2 \frac{\rho(\omega)}{\mu} V_z = 0 \quad (3.8)$$

Para facilitar la solución de esta ecuación diferencial, se define una nueva constante:

$$\beta^2 = \frac{i^3 \rho(\omega)}{\mu} \quad (3.9)$$

Que se sustituye en la Ec. (3.8):

$$r^2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \beta^2 r^2 V_z = 0 \quad (3.10)$$

La Ec. (3.10) tiene la forma de una ecuación diferencial de Bessel, (ver Apéndice III), por lo que por analogía se puede reescribir como:

$$r^2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_z}{\partial r} + (\beta^2 r^2 - 0)V_z = 0 \quad (3.11)$$

Donde:

$$y = V_z$$

$$x = \beta r$$

Quedando la solución general, es decir, la suma de la solución homogénea y la particular:

$$V_z = c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (3.12)$$

Para resolver esta ecuación diferencial se toma en cuenta la condición de no deslizamiento en las paredes del cilindro y la velocidad en el centro como finita, a fin de mantener la consistencia física:

$$V_z(0) = \text{finita}$$

$$V_z(R) = 0$$

Estas condiciones se sustituyen en la Ec. (3.11) para obtener las constantes:

$$\text{Finita} = c_1 J_0(\beta(0)) + c_2 Y_0(\beta(0)) + \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (3.13)$$

$$0 = c_1 J_0(\beta R) + c_2 Y_0(\beta R) + \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (3.14)$$

Por las tablas y gráficas de Bessel (Ver apéndice IV), se sabe que:

$$J_0(0) = 1$$

$$Y_0(0) = -\infty$$

Por lo tanto, para mantener la consistencia física en la Ec. (3.13), el valor de la constante c_2 debe ser igual a cero:

$$c_2 = 0 \quad (3.15)$$

Y por lo tanto el valor de la constante c_1 es:

$$c_1 = -\frac{\frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz}}{J_0(\beta R)} \quad (3.16)$$

Sustituyendo el valor de las constantes en la solución general contenida en la Ec. (3.14) y reordenando los términos semejantes se tiene:

$$V_z = \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \left[1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right] \quad (3.17)$$

Sabiendo que, para una geometría cilíndrica, el flujo volumétrico se obtiene con la ecuación (1.14), se desarrolla la doble integral para la velocidad en z de la Ec. (3.17):

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \left[1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right] r dr d\theta \quad (3.18)$$

Resolviendo primero la integral de θ y reordenando:

$$Q = \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \int_0^R \left[1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right] r dr \quad (3.19)$$

Esta ecuación será resuelta en términos de las siguientes variables adimensionales:

$$\beta^* = \beta R \quad (3.20)$$

$$r^* = \frac{r}{R} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, para integrarlas en la ecuación (3.19), se debe arreglar algebraicamente multiplicando por $\frac{R^2}{R^2}$ toda la expresión, acotando los límites en $\frac{1}{R}$ y modificando los términos de las funciones de Bessel multiplicando por $\frac{R}{R}$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \int_0^R \left[1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right] \frac{r}{R} d\frac{r}{R} \\
 Q &= \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \int_{0/R}^{R/R} \left[1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right] \frac{r}{R} d\frac{r}{R} \\
 Q &= \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \int_0^1 \left[1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \right] \frac{r}{R} d\frac{r}{R} \\
 Q &= \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \int_0^1 \left[1 - \frac{J_0\left(\beta \frac{r}{R}\right)}{J_0(\beta R)} \right] \frac{r}{R} d\frac{r}{R} \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Para finalmente sustituir las variables adimensionales de las Ec. (3.20) y (3.21) en la Ec. (3.22):

$$Q = \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \int_0^1 \left[1 - \frac{J_0(\beta^* r^*)}{J_0(\beta^*)} \right] r^* dr^* \tag{3.23}$$

Desarrollando la integral queda:

$$Q = \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{J_0(\beta^* r^*)}{J_0(\beta^*)} r^* dr^* \right] \tag{3.24}$$

Para resolver la integral de las funciones de primera especie contenida en la Ec. (3.24), se define una nueva variable adimensional:

$$u = \beta^* r^* \tag{3.25}$$

Para introducir esta variable adimensional es necesario reordenar la Ec. (3.24), multiplicando por $\frac{\beta^{*2}}{\beta^{*2}}$ y acotando los límites en β^*

$$Q = \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^* J_0(\beta^*)} \int_{0*\beta^*}^{1*\beta^*} J_0(\beta^* r^*) r^* \beta^* d\beta^* r^* \right] \tag{3.26}$$

Para finalmente sustituir la Ec.(3.24):

$$Q = \frac{2\pi}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} R^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^{*2} J_0(\beta^*)} \int_0^{\beta^*} J_0(u) u du \right] \tag{3.27}$$

Por propiedades de las funciones de Bessel (ver Apéndice IV), se sabe que:

$$\frac{d}{du} [J_1(u)u] = J_0(u) \cdot u \tag{3.28}$$

Sustituyendo la Ec. (3.28) en (3.27) y resolviendo la integral se tiene:

$$Q = \frac{2\pi}{\mu(\beta R)^2} R^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(u) \right] \frac{dP}{dz} \tag{3.29}$$

Sustituyendo la ecuación (3.20) en (3.29), tenemos:

$$Q = \frac{2\pi}{\mu\beta^{*2}} R^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(u) \right] \frac{dP}{dz}$$

Esta ecuación se arregla para separar la componente geométrica y de presión

$$Q = \frac{\pi}{8} R^4 \left(\frac{8i^2}{\mu\beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(u) \right] \right) \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (3.30)$$

Para entonces definir la fluidez (Φ) como:

$$\Phi = \frac{8i^2}{\mu\beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right] \quad (3.31)$$

Quedando el flujo volumétrico definido de la siguiente manera:

$$Q = \frac{\pi}{8} R^4 \Phi \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (3.32)$$

A fin de tener un mejor análisis del comportamiento de la Ec. (3.32), se analiza la variable β dada por la Ec. (3.9):

$$\beta^2 = \frac{i^3 \rho(\omega)}{\mu} \quad (3.9)$$

Que en su forma no potenciada y agregando una longitud característica (R) queda como:

$$\beta R = i^{3/2} \sqrt{\frac{\rho(R\omega)R}{\mu}} \quad (3.33)$$

Sustituyendo la variable adimensional de la Ec. (3.20):

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{\frac{\rho(R\omega)R}{\mu}} \quad (3.34)$$

Es importante notar que lo que se encuentra dentro la raíz cuadrada es el número adimensional de Reynolds, donde la velocidad está escrita como el producto de la frecuencia (ω) por la longitud característica (R):

$$Re = \frac{\rho(R\omega)R}{\mu}$$

Por lo que la Ec. (3.33) se puede escribir como:

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{Re} \quad (3.35)$$

Esta dependencia de la velocidad respecto a la frecuencia, da la posibilidad de utilizar otro número adimensional: el número de Womersley o también conocido como el *Reynolds vibrátil*:

$$\beta^* = i^{3/2} Wo \quad (3.36)$$

La fluidez puede ser expresada en términos del número de Womersley, sustituyendo la Ec. (3.36) en la Ec. (3.31), de la forma:

$$\Phi = \frac{8}{\mu i W o} \left[1 - \frac{2}{i^{3/2} \sqrt{W o} J_0(i^{3/2} \sqrt{W o})} J_1(i^{3/2} \sqrt{W o}) \right] \quad (3.37)$$

Y quedando entonces la fluidez adimensional como:

$$\Phi^* = \frac{8}{i W o} \left[1 - \frac{2}{i^{3/2} \sqrt{W o} J_0(i^{3/2} \sqrt{W o})} J_1(i^{3/2} \sqrt{W o}) \right] \quad (3.38)$$

3.4. CASO IV: GEOMETRÍA DE CORONA CIRCULAR, ESTADO TRANSITORIO

Geometría de cilindros concéntricos o corona circular. Fluido newtoniano, estado transitorio.

Dado que esta geometría se desarrolla también en coordenadas cilíndricas, el desarrollo es el mismo que el de la sección anterior desde el planteamiento de la ecuación de Navier Stokes en la Ec. (3.1):

$$\rho \frac{\partial V_z(t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(t)}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)$$

Hasta su forma transformada en la Ec. (3.6):

$$\rho(i\omega)V_z(r, \omega) = -\frac{\partial}{\partial z} P(\omega) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} V_z(r, \omega) \right)$$

Y la solución general planteada en Ec. (3.12), que para fines de este análisis se renombrará como Ec. (4.1)

$$V_z = c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (4.1)$$

Dado que el fluido está en contacto con dos superficies, la que delimita el radio externo y la que delimita el radio interno, la condición de no deslizamiento se expresa en ambos casos como:

$$V_z(R_1) = 0$$

$$V_z(R_2) = 0$$

Para obtener las constantes de la solución general se sustituyen estas condiciones a la frontera, formando un sistema de ecuaciones:

$$0 = c_1 J_0(\beta R_1) + c_2 Y_0(\beta R_1) + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (4.2)$$

$$0 = c_1 J_0(\beta R_2) + c_2 Y_0(\beta R_2) + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (4.3)$$

Cuya solución es:

$$c_2 = \frac{\frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz}}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \quad (4.4)$$

$$c_1 = - \left[\frac{\frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz}}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \right] [Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)] \quad (4.5)$$

Es importante mencionar que las constantes c_1 y c_2 obtenidas en las Ec. (4.4) y (4.5) son funciones independientes de r .

Ahora, se obtiene el flujo volumétrico, recordando que para geometría de corona circular está dado por la ecuación (2.7):

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr d\theta$$

Que después de integrarla respecto a θ queda como:

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr \quad (4.6)$$

En la Ec. (4.6) se sustituye el perfil de velocidades dado por la Ec. (4.1), que se integra respecto a r en los límites establecidos para obtener:

$$Q = 2\pi \left[c_1 \int_{R_1}^{R_2} J_0(\beta r) r dr + c_2 \int_{R_1}^{R_2} Y_0(\beta r) r dr + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz} \int_{R_1}^{R_2} r dr \right] \quad (4.7)$$

Por ... esta ecuación será resuelta en términos de las siguientes variables adimensionales:

$$\beta^* = \beta R_2 \quad (4.8)$$

$$r^* = \frac{r}{R_2} \quad (4.9)$$

Y para poder introducir las en la Ec. (4.7), se multiplican todos los términos por $\frac{R^2}{R^2}$, se acotan los límites en R_2^{-1} , y se multiplican los términos de J_0 y Y_0 por $\frac{R}{R}$, para finalmente obtener:

$$Q = R^2 2\pi \left[c_1 \int_{R_1/R_2}^1 J_0\left(\beta R_2 \frac{r}{R_2}\right) \frac{r}{R_2} d\frac{r}{R_2} + c_2 \int_{R_1/R_2}^1 Y_0\left(\beta R_2 \frac{r}{R_2}\right) \frac{r}{R_2} d\frac{r}{R_2} + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz} \int_{R_1/R_2}^1 \frac{r}{R_2} d\frac{r}{R_2} \right] \quad (4.10)$$

Y sustituir las variables adimensionales de la forma:

$$Q = R^2 2\pi \left[c_1 \int_{R_1/R_2}^1 J_0(\beta^* r^*) r^* dr^* + c_2 \int_{R_1/R_2}^1 Y_0(\beta^* r^*) r^* dr^* + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz} \int_{R_1/R_2}^1 r^* dr^* \right] \quad (4.11)$$

Integrando el tercer término de la Ec. (4.11):

$$Q = 2\pi \left[c_1 \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 J_0(\beta^* r^*) r^* dr^* + c_2 \int_{\frac{R_1}{R_2}}^1 Y_0(\beta^* r^*) r^* dr^* + \frac{1}{2\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right) \right] \quad (4.12)$$

Para resolver las integrales de la Ec. (4.12) se retoma la variable adimensional definida por la Ec. (3.25):

$$u = \beta^* r^*$$

Para introducir esta variable, es necesario reordenar la Ec. (4.12), multiplicando cada término por $\frac{\beta^{*2}}{\beta^{*2}}$ y acotando los límites en β^* :

$$Q = 2\pi \frac{1}{\beta^{*2}} \left[c_1 \int_{\frac{\beta^* R_1}{R_2}}^{\beta^*} J_0(\beta^* r^*) \beta^* r^* d\beta^* r^* + c_2 \int_{\frac{\beta^* R_1}{R_2}}^{\beta^*} Y_0(\beta^* r^*) \beta^* r^* d\beta^* r^* + \frac{\beta^{*2}}{2\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right) \right] \quad (4.13)$$

Para finalmente sustituir la variable adimensional u :

$$Q = 2\pi \frac{1}{\beta^{*2}} \left[c_1 \int_{\frac{\beta^* R_1}{R_2}}^{\beta^*} J_0(u) u du + c_2 \int_{\frac{\beta^* R_1}{R_2}}^{\beta^*} Y_0(u) u du + \frac{\beta^{*2}}{2\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right) \right] \quad (4.14)$$

La Ec. (4.14) puede ser resuelta considerando las propiedades de las funciones de Bessel, de las que se sabe que:

$$\frac{d}{du} [J_1(u)u] = J_0(u) \cdot u \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{du} [Y_1(u)u] = Y_0(u) \cdot u \quad (4.16)$$

Entonces, sustituyendo las Ec. (4.15) y (4.16) en la Ec. (4.14), se tiene:

$$Q = 2\pi \frac{1}{\beta^{*2}} \left[c_1 \beta^* J_1(u) \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) + c_2 \beta^* Y_1(u) \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{\beta^{*2}}{2\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right) \right] \quad (4.17)$$

Esta ecuación debe ser resuelta considerando las constantes previamente establecidas. Comenzando con c_1 dada por la ecuación (4.5), se tiene:

$$c_1 = c_3 \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (4.18)$$

Donde:

$$c_3 = \frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{J_0(\beta R_1)Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \quad (4.19)$$

Y para c_2 , dada por la ecuación (4.4):

$$c_2 = c_4 \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz} \quad (4.20)$$

Donde:

$$c_4 = \frac{J_0(\beta R_2) - J_0(\beta R_1)}{J_0(\beta R_1)Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1)J_0(\beta R_2)} \quad (4.21)$$

Entonces, sustituyendo las Ec. (4.19) y (4.21) en (4.17) se obtiene:

$$Q = 2\pi \frac{1}{\beta^{*2}} \left[c_3 \frac{1}{\mu\beta^{*2}} \frac{dP}{dz} \beta^* J_1(u) \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + c_4 \frac{1}{\mu\beta^{*2}} \frac{dP}{dz} \beta^* Y_1(u) \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{\beta^{*2}}{2\mu\beta^{*2}} \frac{dP}{dz} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right) \right] \quad (4.22)$$

Reordenando esta ecuación:

$$Q = 2\pi \frac{R_2^3}{\mu\beta^{*3}} \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \left[c_3 J_1(u) + c_4 Y_1(u) + \frac{\beta^*}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right] \frac{dP}{dz} \quad (4.23)$$

Donde se define la función fluidez como:

$$\Phi = \frac{1}{\mu\beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right] \quad (4.24)$$

De la que se obtiene la fluidez adimensional como producto de la fluidez y la viscosidad:

$$\mu\Phi = \frac{1}{i^3 W_0} \left[\frac{c_3}{i^{3/2} \sqrt{W_0}} J_1(u) + \frac{c_4}{i^{3/2} \sqrt{W_0}} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right] \quad (4.25)$$

$$\Phi^* = \frac{1}{i^3 W_0} \left[\frac{c_3}{i^{3/2} \sqrt{W_0}} J_1(u) + \frac{c_4}{i^{3/2} \sqrt{W_0}} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \right] \quad (4.26)$$

Finalmente, se puede sustituir la Ec. (4.24) en (4.23):

$$Q = 2\pi R_2^3 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \Phi \frac{dP}{dz} \quad (4.27)$$

A continuación, se muestra una tabla con el resumen de las ecuaciones más importantes para la geometría cilíndrica y de corona circular en estado transitorio, así como una tabla con los valores de las variables adimensionales contenidas en estas ecuaciones.

Tabla 3.4-1. Resumen de ecuaciones para geometría cilíndrica y de corona circular para un fluido newtoniano en estado transitorio.

	Cilindro	Corona circular
Velocidad (V_z)	$c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) + \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz}$	$c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) + \frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz}$
c_1	$-\frac{\frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz}}{J_0(\beta R)}$	$-\left[\frac{-\frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz}}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \right] [Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)]$
c_2	0	$\frac{-\frac{1}{\mu\beta^2} \frac{dP}{dz}}{\frac{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)}{[J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)]}}$
c_3	-	$\frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)}$
c_4	-	$\frac{J_0(\beta R_2) - J_0(\beta R_1)}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)}$

Flujo volumétrico (Q)	$\frac{\pi}{8} R^4 \Phi \left(-\frac{dP}{dz} \right)$	$2\pi R_2^3 \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \Phi \frac{dP}{dz}$
Fluidez adimensional (Φ^*)	$\frac{8}{iWo} \left[1 - \frac{2}{i^{3/2} \sqrt{Wo} J_0(i^{3/2} \sqrt{Wo})} J_1(i^{3/2} \sqrt{Wo}) \right]$	$\frac{1}{i^3 Wo} \left[\frac{c_3}{i^{3/2} \sqrt{Wo}} J_1(u) + \frac{c_4}{i^{3/2} \sqrt{Wo}} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right]$
Fluidez (Φ)	$\frac{8}{\mu i Wo} \left[1 - \frac{2}{i^{3/2} \sqrt{Wo} J_0(i^{3/2} \sqrt{Wo})} J_1(i^{3/2} \sqrt{Wo}) \right]$	$\frac{1}{\mu i^3 Wo} \left[\frac{c_3}{i^{3/2} \sqrt{Wo}} J_1(u) + \frac{c_4}{i^{3/2} \sqrt{Wo}} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right]$

Tabla 3.4-2. Valores de las constantes y variables para las ecuaciones del caso 4

β^2	$\frac{i^3 \rho(\omega)}{\mu}$
β	$\sqrt{\frac{i^3 \rho(\omega)}{\mu}}$
β^*	$\frac{\beta R_2}{i^{3/2} \sqrt{Wo}}$
r^*	$\frac{r}{R_2}$
u	$\beta^* r^*$
Wo	$\frac{\rho(R\omega)R}{\mu}$

3.5. CASO V: GEOMETRÍA CILÍNDRICA, ESTADO TRANSITORIO.

Las ecuaciones obtenidas para la geometría cilíndrica para la fluidez y la fluidez adimensional, pueden utilizarse para fluidos viscoelásticos mediante la introducción del número de Deborah en el número adimensional Beta (β^*), quedando en términos de la viscoelasticidad lineal:

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{\frac{\omega^* O_{\Phi}(\omega^*)}{De^2}} \quad (5.1)$$

La Ec. (5.1) es general y puede emplearse para cualquier fluido viscoelástico lineal o fraccionado, dependiendo de la ecuación constitutiva con la cual se caracterice la reología lineal o la transferencia de momento del sistema.

En particular y para simplificar los cálculos matemáticos y análisis computacional se utilizará la frecuencia adimensional y se harán los análisis en términos de los números adimensionales correspondientes a las propiedades materiales reológicas del fluido.

De forma general, la Ec. (5.1) puede ser expresada como:

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{\frac{\omega^* O_{\Phi}^X(\omega^*)^\alpha}{De^{2\alpha}}} \quad (5.2)$$

Donde:

$$\alpha = 0,1$$

$$X = \{M, J, B, M_f, J_f, B_f, etc.\}$$

La Ec. (5.2) representa una de las aportaciones de este trabajo debido a que se generaliza el parámetro beta para cualquier fluido viscoelástico lineal o fraccionado. Nótese, que si alfa es igual a cero, se reduce al fluido newtoniano y para alfa igual a 1, se tiene el caso de fluidos viscoelásticos.

Utilizando como base la Ec. (5.2), la fluidez definida en la Ec. (3.31) puede escribirse como:

$$\Phi = \frac{8i^2}{o_\eta \beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right] \quad (5.3)$$

O bien, en su forma adimensional:

$$\Phi^* = \frac{8i^2}{\beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right] \quad (5.4)$$

Este par de ecuaciones, (5.3) y (5.4) son justamente lo que se define como Función de Transferencia Compleja (FTC) y Función de Transferencia Compleja adimensional, respectivamente, por lo que se renombran como:

$$F_T = \frac{8i^2}{o_\eta \beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right] \quad (5.5)$$

Y

$$F_T^* = \frac{8i^2}{\beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right] \quad (5.6)$$

3.6. CASO VI: GEOMETRÍA DE CORONA CIRCULAR, ESTADO TRANSITORIO, FLUIDO VISCOELÁSTICO.

De la misma forma que para geometría cilíndrica, las ecuaciones obtenidas para la fluidez y la fluidez adimensional, pueden utilizarse para modelar el flujo de fluidos viscoelásticos en geometría de corona circular o tubos concéntricos, utilizando la variable adimensional Beta (β^*), expresado en la Ec. (5.2), y que contiene información sobre las propiedades reológicas del fluido, de la forma:

$$\Phi = \frac{1}{o_\eta \beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \quad (6.1)$$

O bien, en su forma adimensional:

$$\Phi^* = \frac{1}{\beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \quad (6.2)$$

Las Ec. (6.1) y (6.2) son la Función de Transferencia Compleja (FTC) y Función de Transferencia Compleja adimensional, respectivamente, para una geometría de corona circular, por lo que se renombran como:

$$\mathbf{F}_T = \frac{1}{O_\eta \beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \quad (6.3)$$

Y

$$\mathbf{F}_T^* = \frac{1}{\beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \quad (6.4)$$

Finalmente, se puede sustituir la Ec. (6.1) en el flujo volumétrico de la Ec. (4.23) para obtener:

$$Q = 2\pi R_2^3 \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \Phi \frac{dP}{dz} \quad (6.5)$$

A continuación, se muestra una tabla con el resumen de las ecuaciones más importantes para la geometría cilíndrica y de corona circular, así como una tabla con los valores de las variables adimensionales contenidas en estas ecuaciones.

Tabla 3.6-1. Resumen de ecuaciones para geometría cilíndrica y de corona circular para un fluido viscoelástico en estado transitorio

	Cilindro	Corona circular
Velocidad (V_z)	$c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz}$	$c_1 J_0(\beta r) + c_2 Y_0(\beta r) + \frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz}$
c_1	$-\frac{\frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz}}{J_0(\beta R)}$	$-\left[\frac{-\frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz}}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)} \right] [Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)]$
c_2	0	$\frac{-\frac{1}{\mu \beta^2} \frac{dP}{dz}}{\frac{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)}{[J_0(\beta R_1) - J_0(\beta R_2)]}}$
c_3	-	$\frac{Y_0(\beta R_1) - Y_0(\beta R_2)}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)}$
c_4	-	$\frac{J_0(\beta R_2) - J_0(\beta R_1)}{J_0(\beta R_1) Y_0(\beta R_2) - Y_0(\beta R_1) J_0(\beta R_2)}$
Flujo volumétrico (Q)	$\frac{\pi}{8} R^4 \Phi \left(-\frac{dP}{dz} \right)$	$2\pi R_2^3 \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \Phi \frac{dP}{dz}$

Fluidez adimensional (Φ^*)	$\frac{8i^2}{\beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right]$	$\frac{1}{\beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right]$
Fluidez (Φ)	$\frac{8i^2}{O_\eta \beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right]$	$\frac{1}{O_\eta \beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right]$

Tabla 3.6-2. Valores de las constantes y variables de las ecuaciones del caso 6.

β^2	$\frac{i^3 \rho(\omega)}{\mu}$
β	$\sqrt{\frac{i^3 \rho(\omega)}{\mu}}$
β^*	$i^{3/2} \sqrt{\frac{\omega^* O_\Phi^X(\omega^*)^\alpha}{De^{2\alpha}}}$
r^*	$\frac{r}{R_2}$
u	$\beta^* r^*$
Wo	$\sqrt{\frac{\rho(R\omega)R}{\mu}}$

3.7. APLICACIÓN DEL MODELO DE KELVIN-VOIGT EN LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA COMPLEJA

Las ecuaciones obtenidas en el capítulo 3.5 y 3.6 son generales y aplicables a cualquier modelo viscoelástico, por lo que en esta sección se aplicará el modelo de Kelvin-Voigt al parámetro β^* ,

Para realizar las simulaciones se utilizaron las ecuaciones que definen la Función de Transferencia Compleja adimensional de las Ec. (5.6) y (6.5), que corresponden a geometría cilíndrica y de corona circular, respectivamente:

$$F_T^* = \frac{8i^2}{\beta^{*2}} \left[1 - \frac{2}{\beta^* J_0(\beta^*)} J_1(\beta^*) \right] \quad (5.6)$$

$$F_T^* = \frac{1}{\beta^{*2}} \left[\frac{c_3}{\beta^*} J_1(u) + \frac{c_4}{\beta^*} Y_1(u) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \quad (6.4)$$

En donde el parámetro adimensional Beta, definido en la Ec. (5.2) toma la forma:

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{\frac{\omega^* O_\Phi^X(\omega^*)^\alpha}{De^{2\alpha}}} \quad (5.2)$$

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{\frac{\omega^* O_{\Phi}^{KV}(\omega^*)^1}{De^{2\alpha}}}$$

$$\beta^* = i^{3/2} \sqrt{\frac{O_{\Phi}^{KV}}{De^{2\alpha}}} \omega^* \quad (7.1)$$

Considerando que el modelo de Kelvin-Voigt está definido como:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \eta_0 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} + G_0 \dot{\gamma} \quad (7.2)$$

De la que se puede obtener el operador viscosidad:

$$O_{\eta} = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = \frac{G_0 + \eta_0(i\omega)}{i\omega} \quad (7.3)$$

Y cuya inversa es el operador fluidez:

$$\frac{1}{O_{\eta}} = O_{\phi} = \frac{i\omega}{G_0 + \eta_0(i\omega)} \quad (7.4)$$

Que tras incluir un tiempo característico e introducirlo en la Ec. (7.1), queda:

$$\beta^* = i^{3/2} \frac{i^* \omega}{(i^* \omega) + G} \omega^* \quad (7.5)$$

3.8. APLICACIÓN EN SANGRE HUMANA

Para realizar la aplicación de la función de transferencia obtenida en datos reales de sangre humana se tomaron en cuenta los datos de una muestra de sangre, así como los parámetros obtenidos para esta misma muestra para el modelo multimodal de Maxwell.

Para esto, se han extraído los datos obtenidos por Moreno et al (2015) para una muestra, nombrada como *L3* con los siguientes datos clínicos:

Tabla 3.8-1. Datos clínicos para la muestra de sangre *L3*.

Muestra	TC (mg/dL)	TG (mg/dL)	HDL (mg/dL)	LDL (mg/dL)	Fibrinógeno (mg/dL)	Hct (%)
L3	109 ± 2.1	130 ± 2.3	47.6 ± 0.9	146.8 ± 3.5	270 ± 6.5	49.0 ± 1.2

(TC: Colesterol Total, TG: triglicéridos totales, HDL: Colesterol de lipoproteínas de alta densidad, LDL: Colesterol de lipoproteínas de baja densidad, Hct: Hematocrito).

Y cuyos parámetros son:

Tabla 3.8-2. Parámetros obtenidos para el Modelo Multimodal de Maxwell para la muestra L3

Modelo Multimodal de Maxwell			
G_i	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
	28.5	0.37	0.1
λ_i	0.0052	0.03	0.79

(G_i [Pa]: módulo viscoso, λ_i [s]: tiempo de relajación)

Para realizar las simulaciones se utilizan las Ec. (6.3) y (6.4) donde se introduce el operador fluidez dentro del número adimensional β^* correspondiente al modelo de Maxwell.

Considerando las ecuaciones siguientes para la fluidez y la viscosidad:

$$\eta = \lambda_i G_i \quad (8.1)$$

$$\phi = \frac{1}{\eta} \quad (8.2)$$

Y el modelo de Maxwell:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu \dot{\gamma} \quad (8.3)$$

El operador fluidez queda como el inverso de la suma de la viscosidad adimensional, dada por:

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_{01}} \quad (8.4)$$

Donde η es la suma de las viscosidades para cada valor de i , quedando la Ec. (8.4) como:

$$\eta^* = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{\frac{\eta_{02}}{\eta_{01}}}{1+\frac{\lambda_{02}}{\lambda_{01}}i\omega} + \frac{\frac{\eta_{03}}{\eta_{01}}}{1+\frac{\lambda_{03}}{\lambda_{01}}i\omega} \quad (8.5)$$

CAPÍTULO 4: SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el siguiente capítulo se realizarán las simulaciones para el modelado matemático establecido en el capítulo anterior, con ayuda del programa Mathematica (12.2) y se exportaron a una hoja de cálculo (Excel).

Se simularon los casos siguientes:

- Geometría cilíndrica o capilar:
 - Fluido newtoniano sin elasticidad ($G=0$).
 - Fluido newtoniano modificado con la componente elástica (G).
 - Fluido newtoniano sin elasticidad ($G=0$) y diferentes valores de radio (oclusiones periféricas)
 - Fluido newtoniano con elasticidad constante ($G=0.1$) y diferentes valores de radio.
 - Fluido newtoniano con elasticidad constante ($G=0.5$) y diferentes valores de radio.
- Geometría de corona circular o tubos concéntricos:
 - Fluido newtoniano sin elasticidad ($G=0$).
 - Fluido newtoniano modificado con la componente elástica (G).
 - Fluido newtoniano modificado con la componente elástica (G) y relación de radios constante ($R=0.1$)
 - Fluido newtoniano modificado con la componente elástica (G) y relación de radios constante ($R=0.5$)

Es importante mencionar que este trabajo se considera un fluido viscoelástico de Kelvin-Voigt y para obtener las ecuaciones que lo caracterizan, se han modificado las ecuaciones características de un fluido newtoniano mediante la introducción de un operador viscosidad, y es por esto que se hace énfasis en este último término.

En este trabajo se ha aplicado la Función de Transferencia obtenida en el estudio reológico de la sangre humana, por lo que la componente elástica G es la elasticidad del Rouleaux.

Las ecuaciones utilizadas para las simulaciones de este capítulo son (5.6) y (6.4), que representan la Función de Transferencia Compleja en geometría cilíndrica y de corona circular, y en donde el parámetro adimensional β^* está dado por la ecuación (7.5) para las simulaciones I a VIII. Las simulaciones IX a XI están basadas en el análisis del apartado 3.8, y para realizarlas se modifica con la Ec. (8.5) el operador viscosidad de la Ec. (5.2).

La FTC está contenida en las ecuaciones para el flujo volumétrico correspondientes a cada geometría (Ec. (3.32) y (4.27)), por lo que las gráficas obtenidas en este capítulo nos permiten observar la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión.

4.1. SIMULACIÓN I: Fluido newtoniano en geometría capilar sin componente elástica (G).

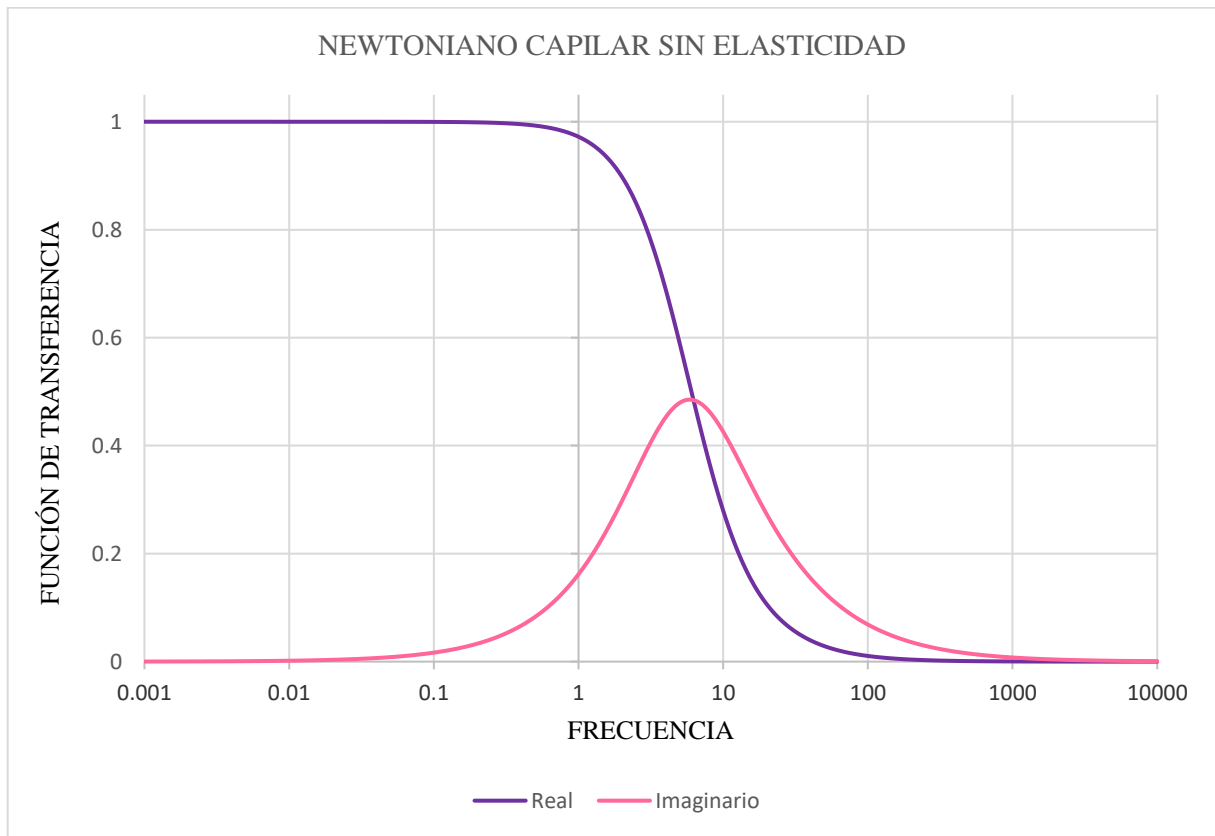


Figura 4.1-1. Representación de la parte real e imaginaria de la FTC para un sistema Newtoniano capilar con elasticidad despreciable.

La Fig. 4.1 muestra la parte real de la FTC (Función de Transferencia Compleja) contra la frecuencia adimensional. En esta función la elasticidad es despreciable ($G=0$).

A bajas frecuencias, la parte real de la FTC muestra un comportamiento constante e independiente de la frecuencia. En esta zona, al ser la $FTC=1$, el flujo volumétrico es igual al producto de la componente geométrica por el gradiente de presión, es decir, se reduce a la ecuación para un fluido newtoniano:

$$Q = \frac{\pi}{8} R^4 \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (I)$$

A una frecuencia crítica, la curva de la parte real experimenta un comportamiento monótono decreciente, hasta un segundo valor crítico. A una frecuencia superior a la crítica, el comportamiento de nueva cuenta es constante, tiende a cero y, es independiente de la frecuencia. Cuando la FTC es igual a cero, no hay flujo.

De la misma forma, la parte imaginaria a bajas frecuencias muestra un comportamiento constante e independiente de la frecuencia igual a cero y, para un valor

crítico, experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo. A una frecuencia superior a la crítica, se muestra un comportamiento monótono decreciente hasta un valor constante.

Físicamente, el sistema muestra una mayor respuesta a la frecuencia en el intervalo de frecuencias moderadas (de 1 a 100) y, es aquí donde representa la máxima respuesta del sistema del gradiente de presión pulsátil (variable de entrada) y el flujo volumétrico (variable de salida). La parte imaginaria está asociada a la disipación de la energía y muestra las clásicas curvas resonantes descritas en la literatura (Corvera et al, 2019)

Biológicamente, esta simulación demuestra que existen frecuencias críticas en las cuales se obtiene la máxima respuesta del gradiente de presión y el flujo volumétrico sanguíneo, desde la cual un punto de vista biológico puede ser importante. Nótese, que en las simulaciones no se está considerando la parte viscoelástica de los fluidos y de la elasticidad del Rouleaux.

4.2. SIMULACIÓN II: Fluido newtoniano en geometría capilar con diferentes valores de elasticidad (G).

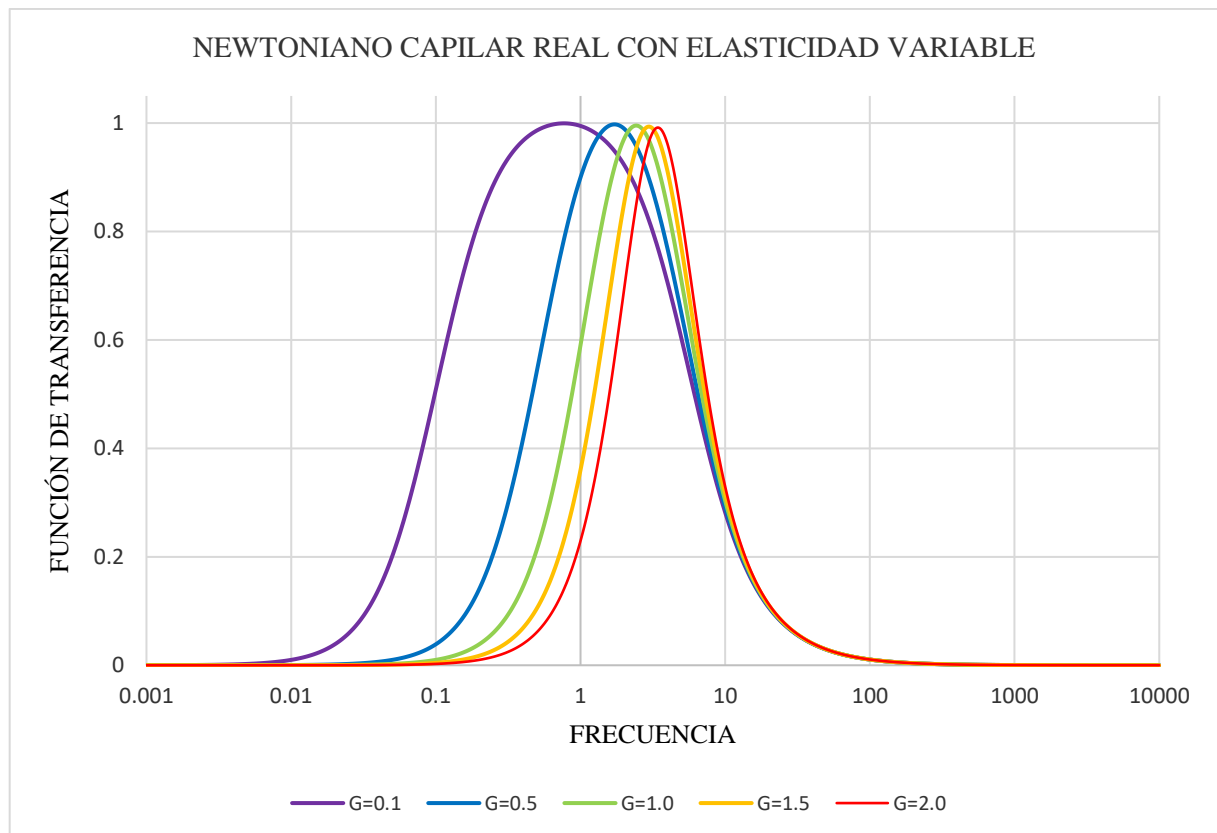


Figura 4.2-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano capilar para diferentes valores de la elasticidad del Rouleaux (G).

La Fig. 4.2 muestra la parte real de la FTC con diferentes valores de elasticidad (G). Para todos los casos, podemos observar una zona constante igual a cero antes de llegar a un valor de frecuencia crítica, donde el comportamiento cambia a monótono creciente hasta un valor máximo donde $FTC=1$, para cambiar a monótono decreciente y finalmente a un comportamiento constante de nuevo.

De igual forma, en el punto máximo, donde la FTC es igual a uno, el flujo volumétrico está representado por la Ec. (I), y en las zonas inicial y final, donde es igual a cero, no existe flujo volumétrico.

Es importante observar que mientras en la Fig.1, donde no se considera la elasticidad, la curva comienza desde un valor máximo, y en este caso, donde sí existe consideración de elasticidad, la curva comienza desde un valor mínimo.

Se puede observar que el máximo para todas las curvas no cambia. La elasticidad (G) está asociada a la energía que la componente elástica puede almacenar, y conforme esta aumenta, se necesita mayor frecuencia para alcanzar el máximo y la curva se desplaza a la derecha.

De igual forma, con el aumento de la elasticidad, el ancho que controla la amplitud o la energía asociada al sistema disminuye, para un fluido newtoniano, recordando que un fluido newtoniano es aquel en el cual no importa la rapidez con la que sea deformado su viscosidad permanece constante. Conforme el valor de G aumenta, el intervalo donde existen cambios en la FTC es más pequeño.

Físicamente, como puede observarse en la simulación, la FTC muestra mayor reacción ante frecuencias bajas cuando G también es bajo. Por ejemplo, para $G=0.1$, la FTC muestra cambios a partir de un valor de frecuencia aproximado a 0.010, mientras que para $G=2.0$, los cambios comienzan en un valor de frecuencia aproximado a 0.5.

Biológicamente, cuando se consideran los cambios en la elasticidad, se puede observar que existen frecuencias críticas donde se encuentra la mayor respuesta ante los cambios de presión y flujo.

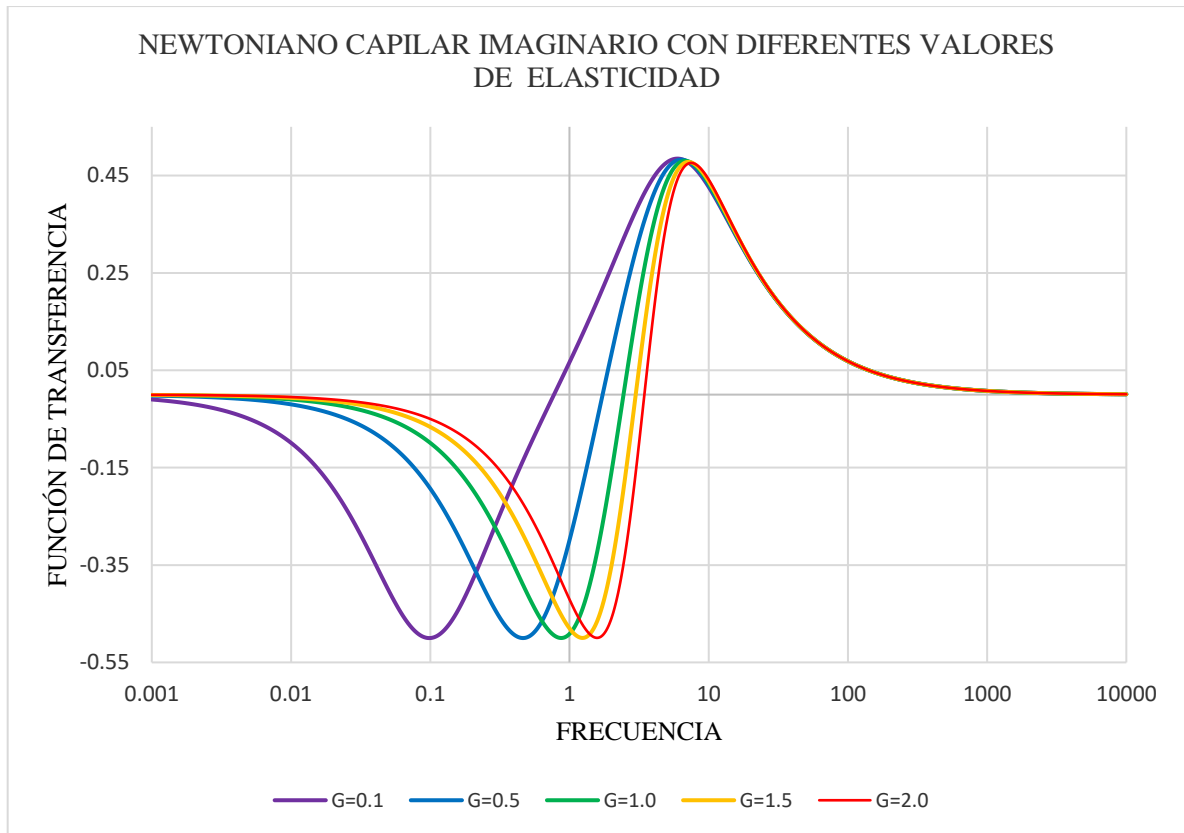


Figura 4.2-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano capilar para diferentes valores de elasticidad (G).

En la fig. 4.2-2 podemos observar una curva no monotónica. En el gráfico se observan dos curvas: una resonante (positiva) y una anti resonante (negativa). Existe una frecuencia crítica donde la parte imaginaria de la FTC pasa de cóncava hacia arriba a hacia abajo, respectivamente. Es importante notar que los valores máximos y mínimos son iguales para todos los valores de G.

De igual forma que para la parte real de la FTC, la diferencia en las curvas para los distintos valores para G reside en los intervalos en los que ocurren los cambios. Para valores menores de G, el intervalo de frecuencias en el que ocurren los cambios es mayor, y conforme G aumenta, el intervalo disminuye.

Existen dos efectos; el aumento de la elasticidad induce a que la curva se desfase a valores mayores de frecuencia y la anchura de las curvas resonante y anti resonante decrecen por efecto de la elasticidad.

Biológicamente, las curvas resonantes y anti resonantes quizá tengan un efecto de balancear la relación entre la variable de entrada (gradiente de presión pulsátil) y la variable de salida (flujo volumétrico).

4.3. Simulación III: Fluido newtoniano en geometría capilar sin elasticidad ($G=0$) y diferentes valores de radio (R)

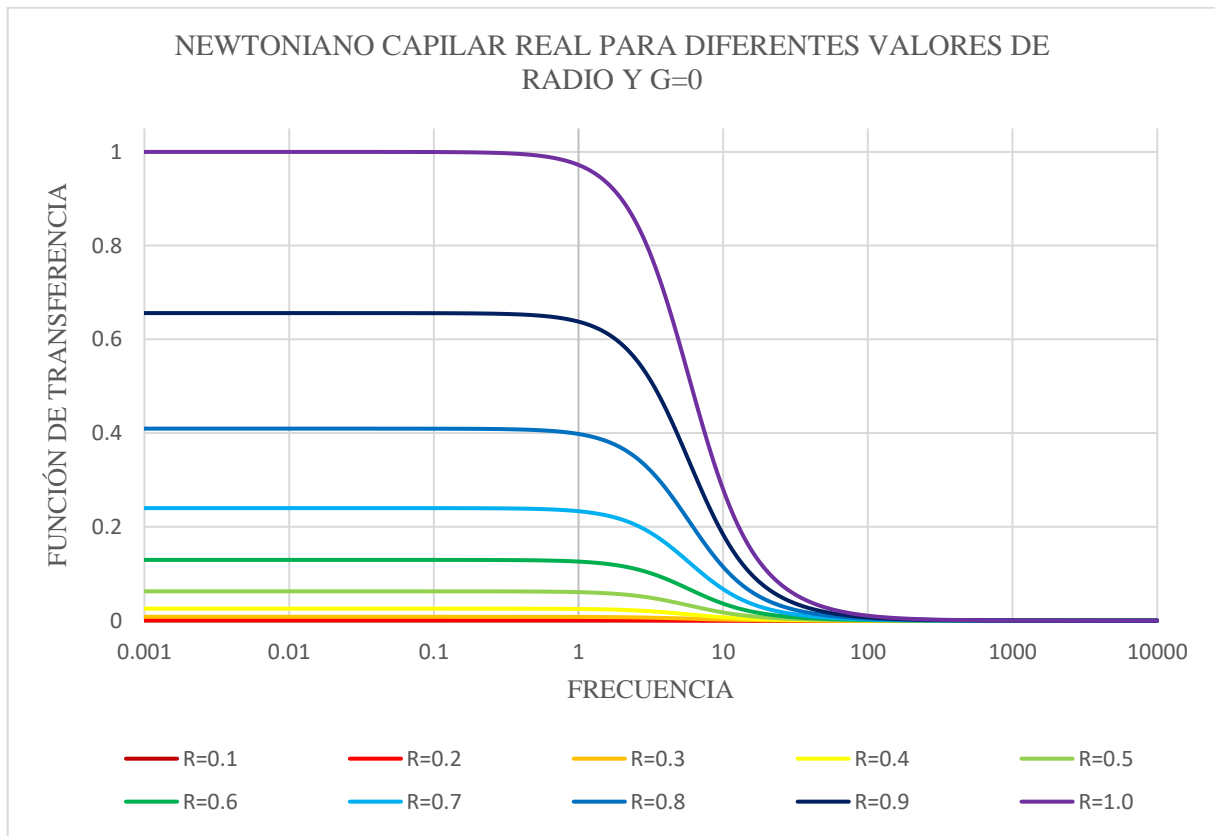


Figura 4.3-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y sin elasticidad.

En el presente estudio se consideran geometrías capilares con obstrucciones periféricas y centrales. Las últimas son lo que conocemos como corona circular o tubos concéntricos, pero para analizar las obstrucciones periféricas es necesario hacer comparaciones en el comportamiento de la FTC respecto a diferentes radios.

En la fig.4.3-1 podemos observar la parte real de la función de transferencia respecto a diferentes valores de frecuencia para radios de 0.1 a 1.0 unidades. Todas las curvas presentan una zona constante donde la FTC tiene una respuesta máxima y es independiente de la frecuencia, luego, en un valor de frecuencia crítica se convierte en monótona decreciente para finalmente volver a ser constante.

Se parte de $R=1.0$, o bien, de un capilar de radio unitario sin obstrucciones que se representa con la curva de color morado y que coincide con la curva de la Fig. 4.1 y a partir de ahí aumenta el tamaño de las obstrucciones, o bien, disminuye el radio del capilar en el

orden de 0.1 unidades, y conforme esto sucede, el valor máximo para cada curva disminuye también.

Cada curva disminuye la respuesta en razón de R^4 , como la Ec.(1.28) lo indica, y conforme el radio disminuye las curvas se van tornando prácticamente constantes y muy cercanas a cero, lo que nos indica que conforme las obstrucciones aumentan, el flujo volumétrico también lo hace, hasta volverse prácticamente nulo.

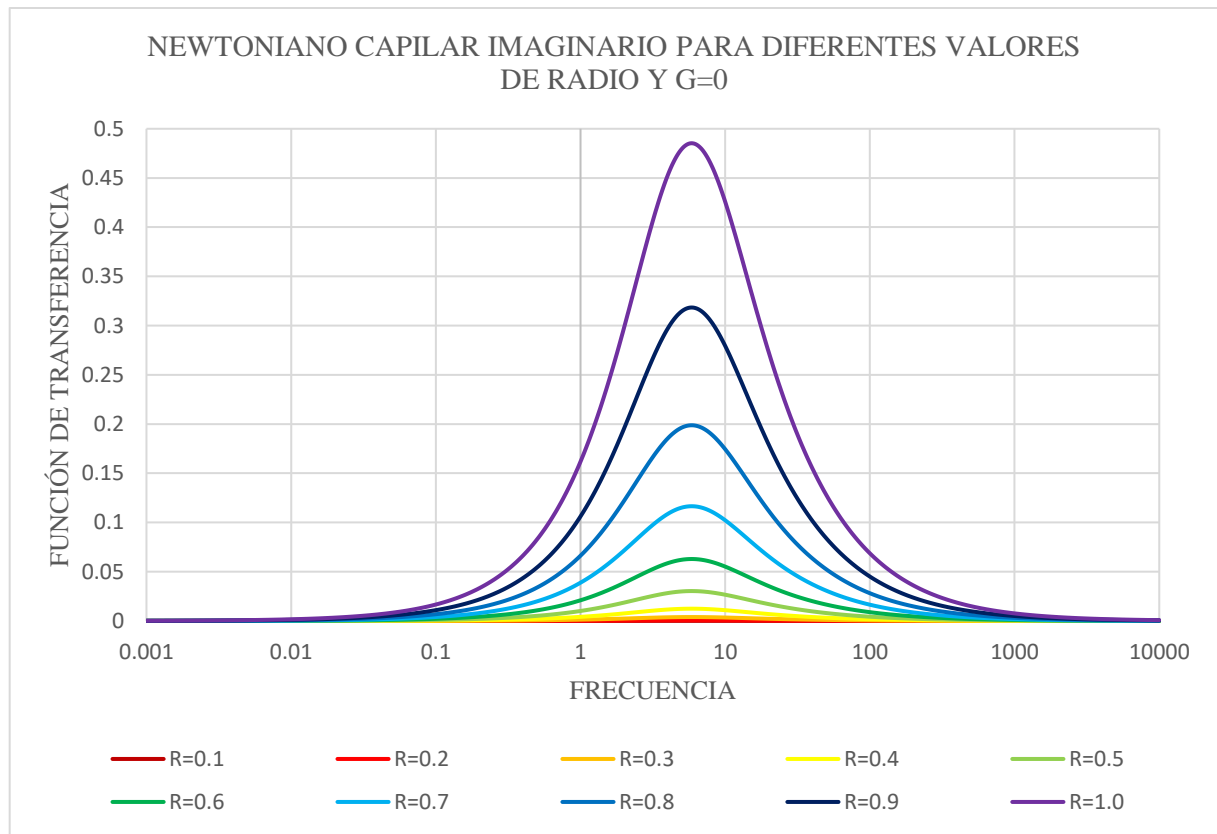


Figura 4.3-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y sin elasticidad.

La Fig. 4.5 ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja respecto a la frecuencia en geometría capilar para diferentes valores de radio y despreciando la elasticidad ($G=0$). Todas las curvas comienzan con una zona constante a bajas frecuencias que en un valor crítico cambia a monótonico ascendente hasta un valor máximo, donde cambia a monótonico decreciente para finalmente de nuevo volverse constante.

El valor máximo de las curvas coincide en un mismo valor de frecuencia, pero el valor de la FTC disminuye respecto al radio. La curva más alta corresponde a un radio de 1.0 unidades y coincide con la curva para la parte imaginaria de la Fig.1, y el resto disminuyen a razón de R^4 , según la ecuación (1.28).

De igual forma que con la Fig. 4.3-1, es posible observar el decremento de la respuesta de la FTC conforme las obstrucciones aumentan.

4.4.Simulación IV: Fluido newtoniano en geometría capilar con elasticidad constante ($G=0.1$) y diferentes valores del radio (R)

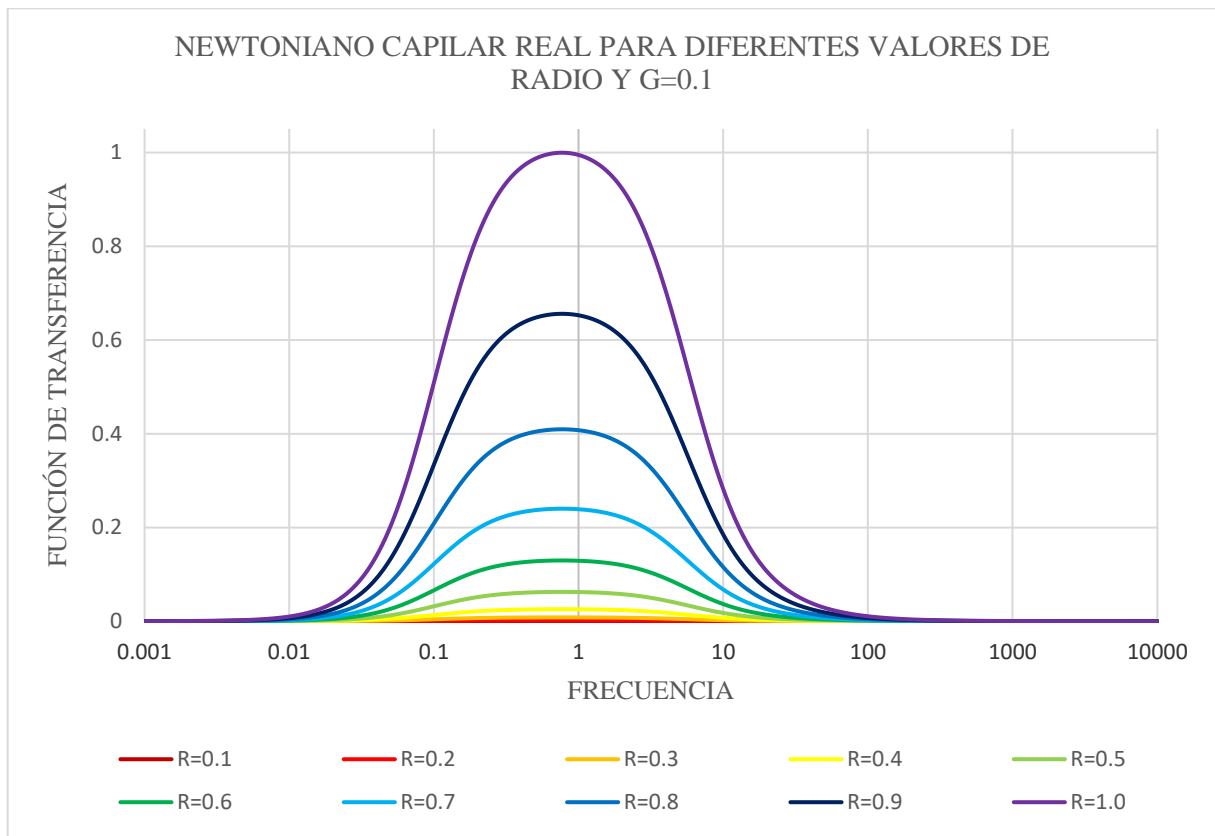


Figura 4.4-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.1.

Para continuar con el análisis en geometría capilar con obstrucciones periféricas, se simularon las curvas para diferentes radios considerando la elasticidad (G).

El primer caso se muestra en la Fig. 4.4-1, donde se muestra la parte real de la función de transferencia compleja para un sistema newtoniano con elasticidad G igual a 0.1 para diferentes valores de radio.

Estas curvas presentan el mismo comportamiento que las de la Fig. 4.2-1. El ancho de la zona de reacción de la FTC, es igual para todos los valores de radio, y lo que las diferencia es que si bien, cada punto máximo coincide en el mismo valor de frecuencia, el valor de la función de transferencia no es igual para cada curva.

El punto máximo va disminuyendo conforme el radio del capilar disminuye a razón de R^4 partiendo desde la curva para $R=1.0$ que coincide con la curva para $G=0.1$ de la Fig. 4.2-1, como ocurrió en el caso III, con base en la Ec. (1.28).

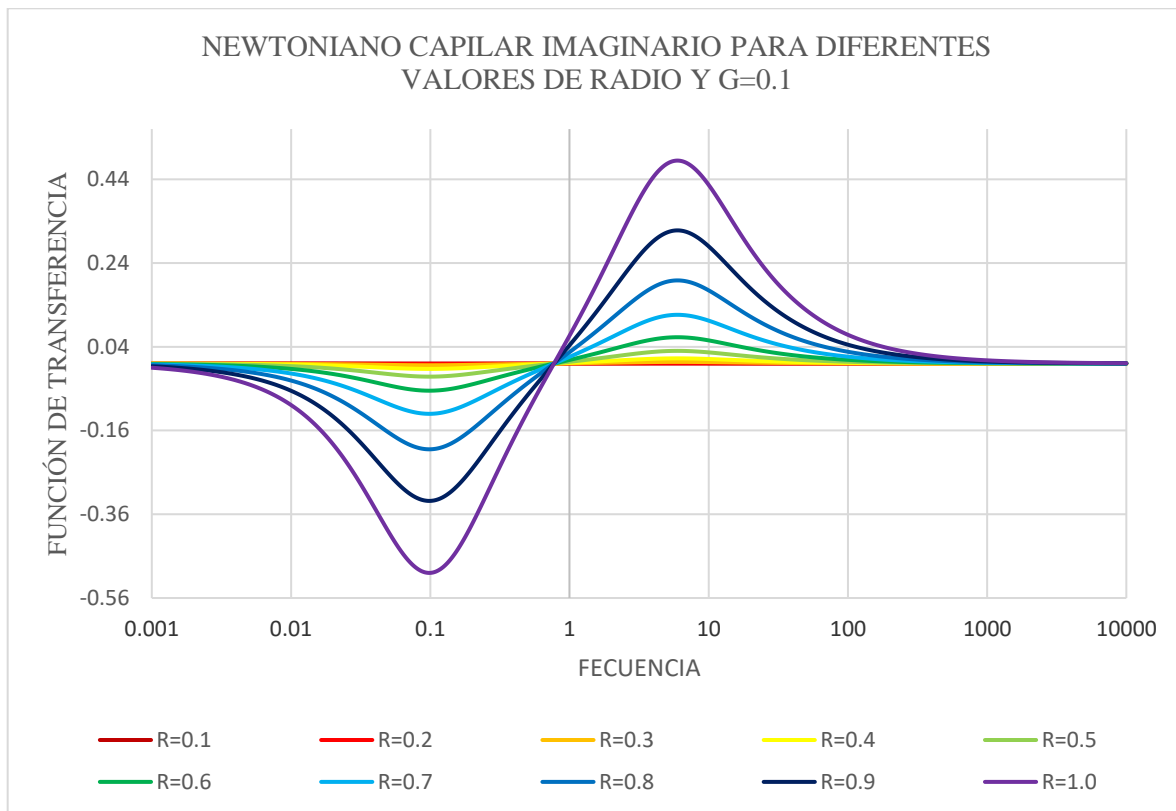


Figura 4.4-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.1.

La Fig. 4.4-2 ilustra la parte imaginaria para el mismo sistema que la Fig. 4.4-1, y presentan el mismo comportamiento que las curvas de la Fig. 4.2-2 con la diferencia de que los valores máximos y mínimos para la FTC de cada una son diferentes.

Tomando como base la curva para $R=1.0$, que es igual a la curva para $G=0.1$ de la Fig. 4.2-2, conforme disminuye el radio tanto el valor máximo como el valor mínimo de cada curva subsecuente disminuye. Esto es que, a menor radio, la curva de la FTC se acerca más a una línea constante cercana a cero. Esto quiere decir que a mayor obstrucción periférica, existe menor flujo volumétrico.

4.5. Simulación V: Fluido newtoniano en geometría capilar con elasticidad constante ($G=0.5$) y diferentes valores del radio (R).

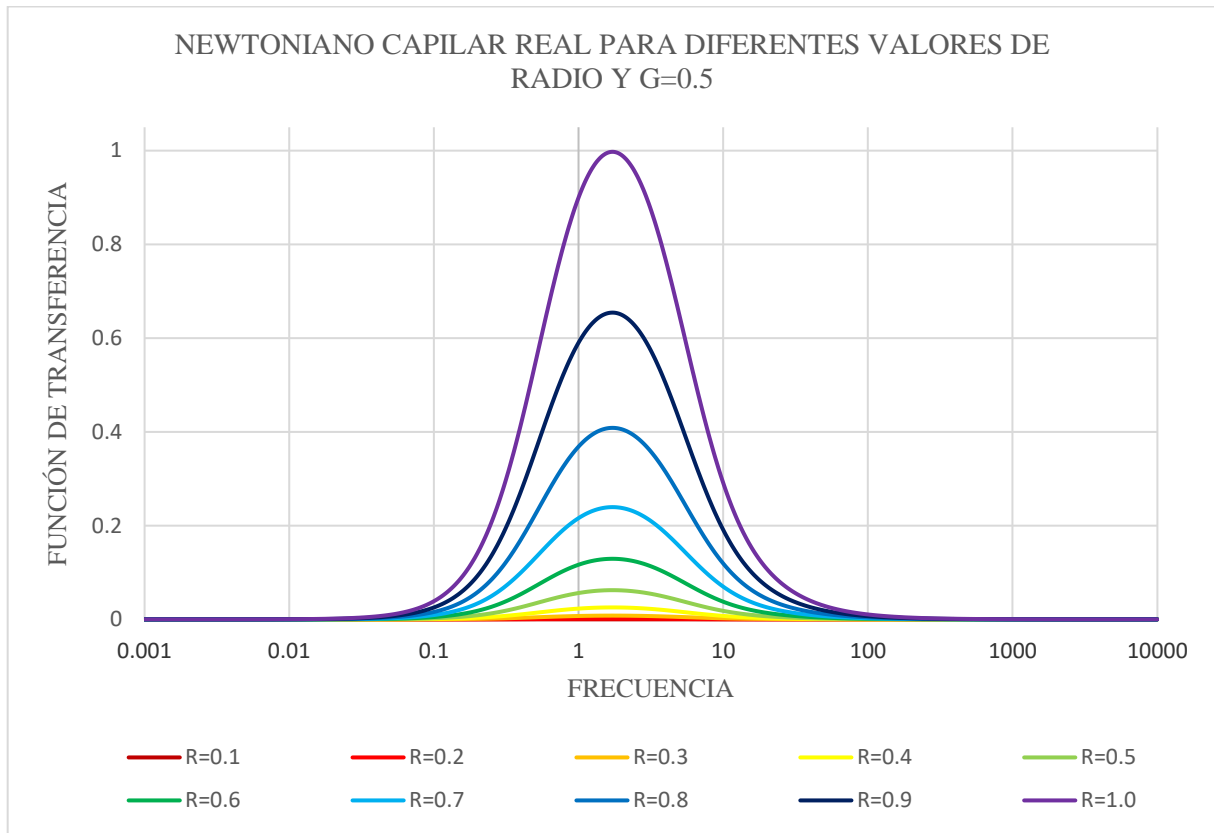


Figura 4.5-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.5.

En la Fig. 4.5-1 se ilustra la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar con oclusiones periféricas para diferentes valores de radio considerando un valor de elasticidad igual a 0.5.

El comportamiento de estas curvas es muy similar al descrito en la Fig. 4.4-1 para G igual a 0.1, sin embargo, el ancho de la zona de reacción de la FTC ante la frecuencia es más pequeño. Otra diferencia es el desplazamiento de la frecuencia donde se encuentran los valores máximos, pues conforme aumenta la elasticidad se requiere de una mayor frecuencia para alcanzar este máximo.

Esto es fácilmente observable en la Fig. 4.2-1, donde para un mismo radio, conforme aumenta el valor de la elasticidad, la curva se desplaza a la derecha y disminuye el ancho de la zona de reacción.

Como en las curvas de las Fig. 4.3 y 4.4, es posible observar el decremento del valor de la función de transferencia conforme las obstrucciones aumentan, lo que indica que el flujo volumétrico disminuye. Para el radio más pequeño, o bien, el capilar con mayor nivel

de obstrucción, el flujo volumétrico es prácticamente nulo, pues la curva de la FTC es muy cercana a cero.

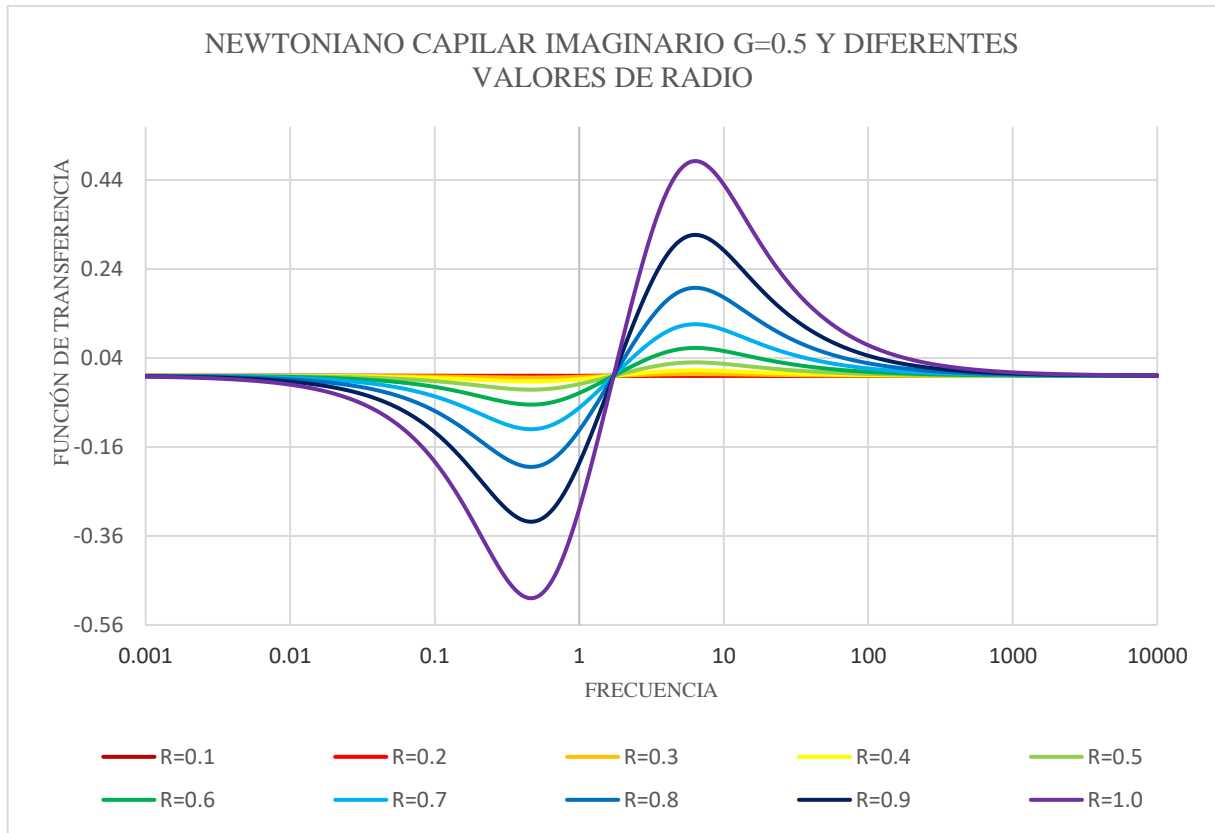


Figura 4.5-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría capilar para diferentes valores de radio y elasticidad igual a 0.5.

En la Fig. 4.5-2, se muestra la parte imaginaria del sistema ilustrado en la Fig. 4.5-1.

El comportamiento es muy similar a su homónimo para $G=0.1$ ilustrado en la Fig. 4.4-2, con la diferencia del ancho de la zona de reacción de la FTC respecto a los diferentes valores de frecuencia, así como el desplazamiento de las curvas hacia la derecha.

Mientras que los valores mínimos y máximos son iguales que para un valor de elasticidad igual a 0.1, el desplazamiento indica que a mayor elasticidad es necesaria una frecuencia mayor para alcanzar los puntos críticos, además de que la zona de reacción para la FTC es más pequeña.

4.6.Simulación VI: Fluido newtoniano en geometría de corona circular sin elasticidad (G=0) y diferentes valores para la relación de radios (R).

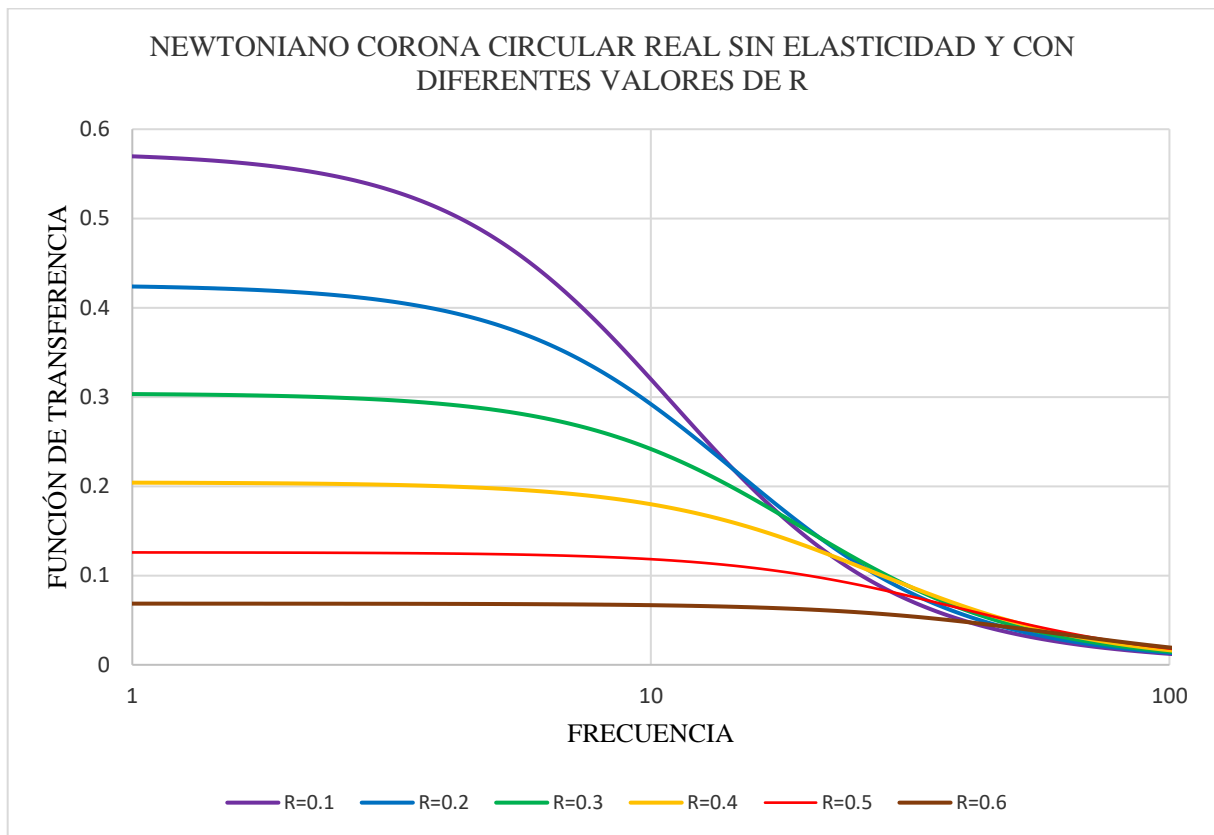


Figura 4.6-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con relación de radios (R) variable y elasticidad del Rouleaux (G) despreciable.

La fig. 4.6-1 ilustra la parte real de la FTC para un sistema newtoniano de geometría de corona circular, o bien capilar con obstrucción central, donde la elasticidad es despreciable ($G=0$), y los valores para la relación de radios ($R = \frac{R_1}{R_2}$) varían desde 0.1 hasta 0.6. Se puede observar que todas las curvas comienzan con un comportamiento constante, hasta un valor crítico de frecuencia, donde cambia a monótono decreciente, para finalmente volver a comportarse de forma constante.

La diferencia entre cada una de las curvas reside en el valor máximo que alcanza para la FTC. Conforme R aumenta, el valor de la FTC en el comportamiento constante inicial disminuye, además de que la curva toma una forma más lineal.

Es importante resaltar que todas las curvas se unen en un valor mínimo igual, y que, de igual forma, el comportamiento constante después de este valor mínimo es igual para todos los casos.

Físicamente, la FTC es más sensible a variaciones en una corona circular con relación de radio menor, esto es, que reacciona más a las variaciones de frecuencia conforme el radio de la obstrucción (R_2) disminuye.

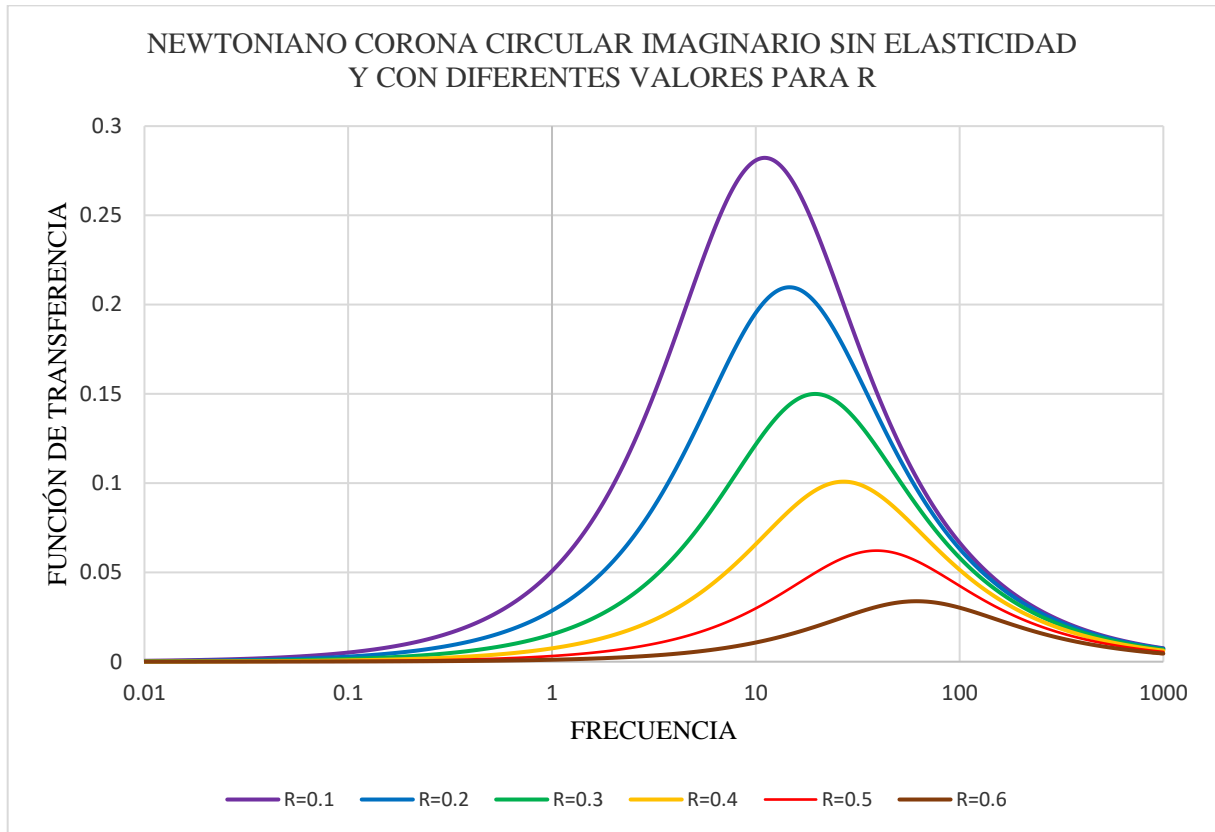


Figura 4.6-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con relación de radios (R) variable y elasticidad del Rouleaux (G) despreciable.

La fig. 4.6-2 ilustra, para un sistema newtoniano la parte imaginaria de la FTC en un sistema de corona circular para distintos valores de R , mientras que la elasticidad del Rouleaux se considera despreciable. En todos los casos, el comportamiento comienza como constante, para llegar a un valor crítico de frecuencia donde se convierte en monótono ascendente hasta un valor máximo, luego cambia a monótono descendente para finalmente ser constante de nuevo.

La diferencia entre cada una de las curvas está en el valor máximo que alcanza. Es posible observar que conforme el valor de R aumenta, el valor máximo para la FTC que se alcanza es menor.

Físicamente, podemos observar que hay menor reacción en la FTC respecto a la frecuencia cuando el valor de R aumenta, esto es, que la función es más sensible a los cambios conforme la corona circular se acerca más a una geometría capilar.

4.7.Simulación VII: Fluido newtoniano en geometría de corona circular con diferentes valores de elasticidad del Rouleaux (G) y radio constante (R=0.1)

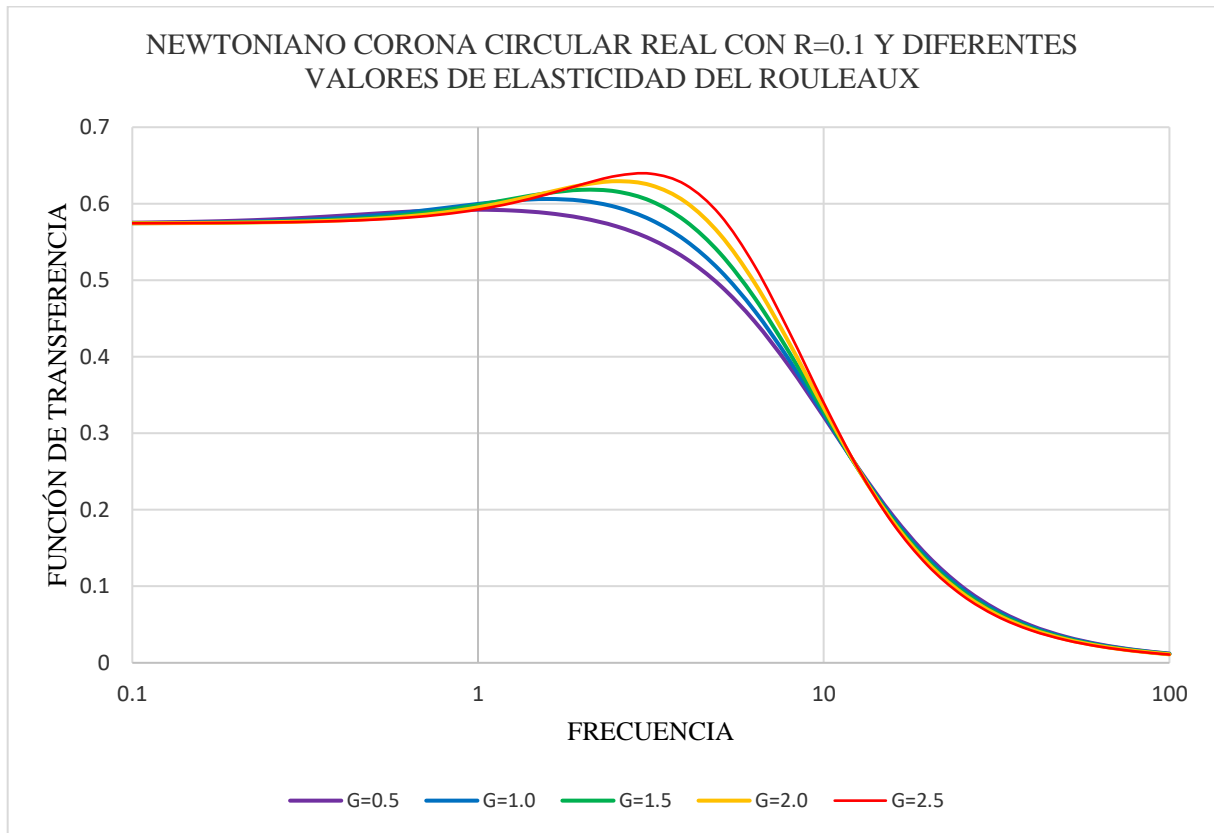


Figura 4.7-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.1 y diferentes valores de la elasticidad.

Es importante estudiar también la influencia de la elasticidad en un sistema capilar con obstrucciones centrales (corona circular), por lo que en la Fig. 4.7-1 se ilustra para una misma relación de radios ($R=0.1$) la FTC con diferentes valores de elasticidad G .

Todas las curvas inician en un mismo valor para la FTC, aumentado ligeramente hasta un punto máximo, donde se convierten en monótonicas decrecientes para converger en un mismo valor mínimo. La zona donde se observan diferencias notables entre las curvas es en el rango de frecuencia de 1 a 10.

El valor máximo de la curva aumenta con el aumento de la elasticidad, sin embargo, es importante resaltar que las diferencias entre los valores máximos de cada curva son muy pequeñas, del orden de 0.1 unidades.

Es posible observar entonces, que, para obstrucciones centrales grandes, no existen diferencias notables entre los flujos volumétricos para fluidos con diferentes valores de elasticidad, sin embargo, son las de mayor elasticidad las que presentan mayor reacción.

A diferencia del sistema capilar, cuando se introduce el factor de viscosidad, en este sistema las curvas no comienzan de cero. Este efecto puede ser asociado directamente como un efecto de la geometría.

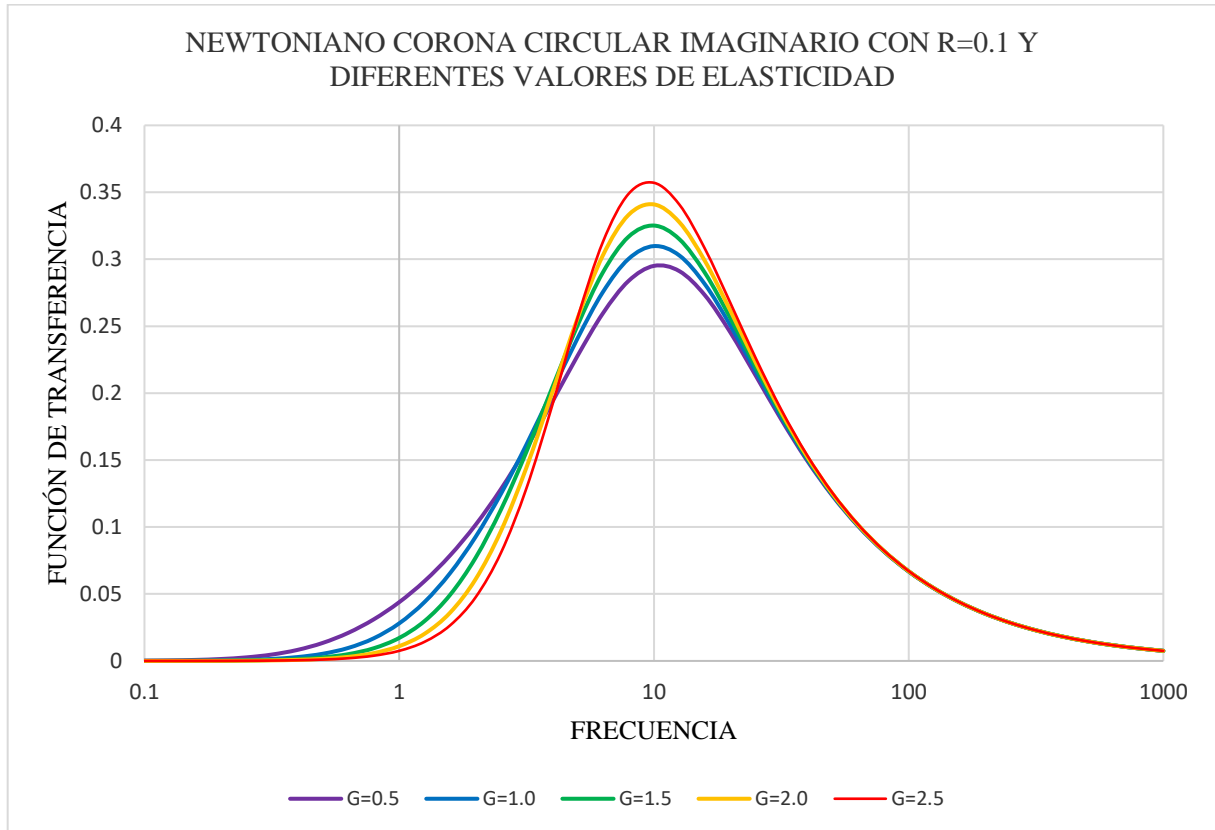


Figura 4.7-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.1 y diferentes valores de elasticidad.

La Fig. 4.13 muestra la parte imaginaria de la función de transferencia para un sistema newtoniano en geometría capilar con obstrucciones centrales, o bien, de corona circular.

Todas las curvas comienzan desde un punto mínimo igual a cero y aumentan en un comportamiento anti resonante hasta un punto crítico en la frecuencia donde cambia a resonante para llegar a un punto máximo para finalmente decrecer hasta un valor constante.

Al igual que con la parte real de este mismo caso, es posible observar que aunque las diferencias entre cada curva son pequeñas, es a mayores elasticidades donde se obtiene mayor respuesta de la FTC respecto a la frecuencia.

Estas curvas resultan interesantes al observar que a bajas frecuencias son los valores más grandes de G los que muestran menor reacción ante los cambios de frecuencia, pero después del punto crítico donde el comportamiento anti resonante cambia a resonante son los valores que presentan mayor reacción. La diferencia entre los valores de cada curva es pequeña, menor a 0.1 unidades

4.8.Simulación VIII: Fluido newtoniano en geometría capilar con diferentes valores de elasticidad (G) y radio constante (R=0.5)

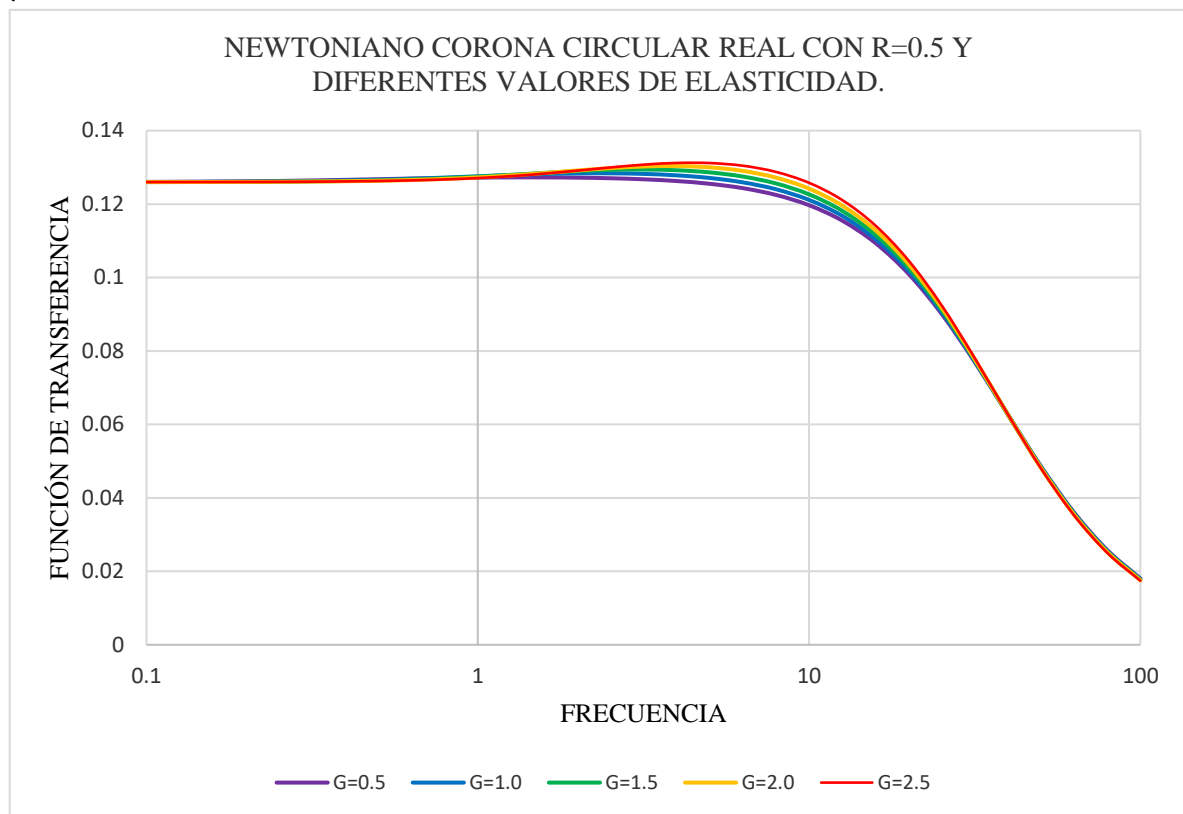


Figura 4.8-1. Representación de la parte real de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.5 y diferentes valores de la elasticidad.

Para continuar con el análisis de los efectos de la elasticidad del Rouleaux en geometría de corona circular para una misma relación de radios, se repitió la simulación de las Fig. 4.7-1 y 4.7-2, pero con un valor de R igual a 0.5.

Esto se muestra en la Fig. 4.8-1, que se diferencia de su homóloga por presentar una zona de reacción de la FTC ante la frecuencia con menores diferencias entre cada curva. Si bien para $R=0.1$ cada curva presenta una variación menor a 0.1 unidades, en este caso las diferencias son del orden de 0.02 unidades.

Esto indica que conforme aumenta la relación de radios $R = \frac{R_1}{R_2}$, o bien, conforme el radio de la obstrucción central R_2 es mayor respecto al del capilar R_1 , la diferencia en el valor de la elasticidad juega un papel menor en la función de transferencia.

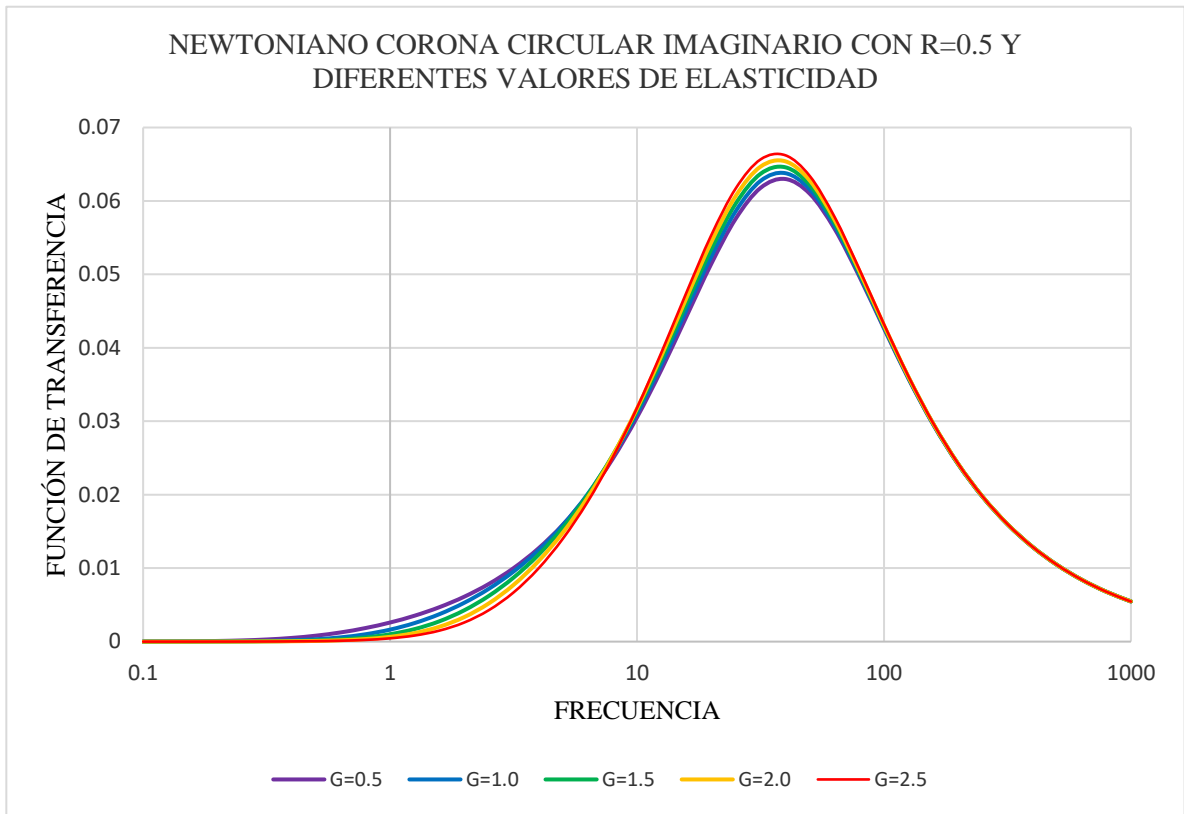


Figura 4.8-2. Representación de la parte imaginaria de la FTC para un sistema newtoniano en geometría de corona circular con Radio igual a 0.5 y diferentes valores de elasticidad.

La Fig. 4.8-2 muestra la parte imaginaria para un sistema newtoniano en geometría capilar con obstrucción central y una relación de radios $R=0.5$. Como con la figura anterior, esta simulación presenta un comportamiento muy similar al de su homólogo para $R=0.1$, con la diferencia de que las variaciones entre cada curva son más pequeñas, del orden de menos de 0.01 unidades, para un mismo valor de frecuencia.

4.9.Simulación IX: Sangre humana en geometría cilíndrica sin elasticidad (G)

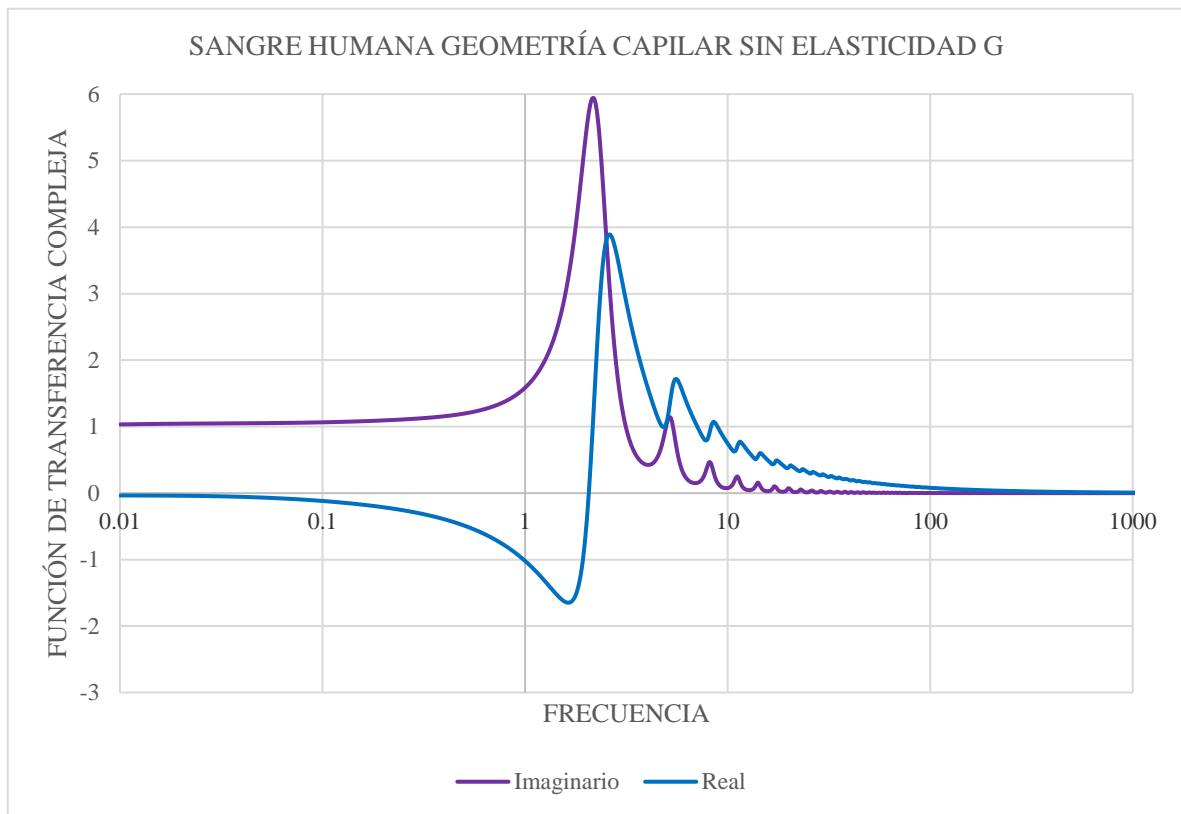


Figura 4.9-1. Representación de la parte Real e Imaginaria de la FTC para la muestra L3 de sangre humana

En la Fig. 4.9-1 se ilustra el comportamiento de la respuesta real e imaginaria de la función de transferencia en función de la frecuencia. Los datos reométricos obtenidos fueron modelados con un modelo de Maxwell Multimodal de tres modos. Este ajuste corresponde a datos de sangre con colesterol medio y pueden servir como punto de partida para comparaciones con hipercolesterolemia.

Nótese que la parte real muestra un comportamiento resonante a una frecuencia crítica en específico y que para valores de frecuencia mayores a la crítica, se observa una cascada de curvas resonantes asociadas a los efectos transitorios. En el caso de la curva imaginaria, el sistema es constante en una ventana de observación de frecuencias bajas y para una frecuencia crítica el sistema alcanza una función de transferencia mínima, mientras que para frecuencias mayores, el sistema pasa de una curva antiresonante a una resonante.

Es importante resaltar que el sistema presenta un comportamiento resonante y que la parte imaginaria las resonancias son tipo *diente de sierra*.

4.10. Simulación X: Sangre humana en geometría cilíndrica y diferentes valores de elasticidad (G)

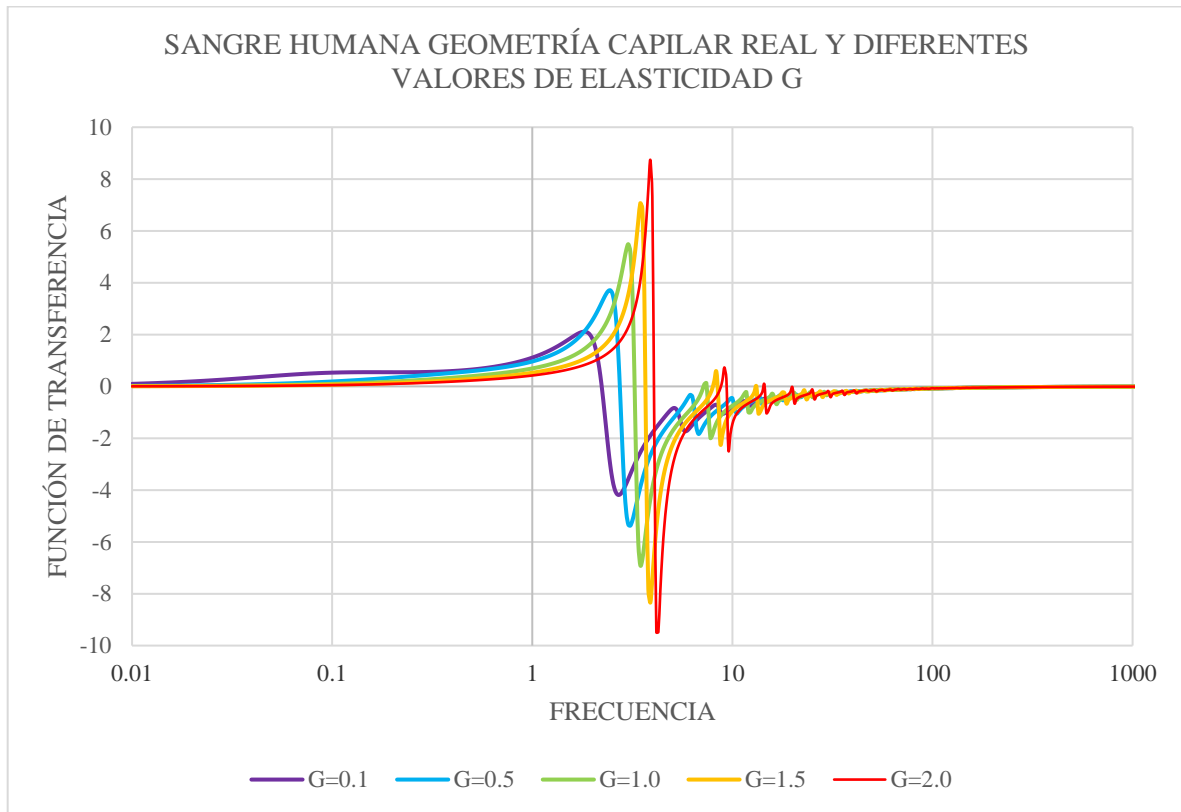


Figura 4.10-1 Representación de la parte Real de la FTC para la muestra L3 de Sangre humana en geometría cilíndrica considerando diferentes valores de elasticidad (G)

En la Fig. 4.10-1 se ilustra la parte real de la Función de Transferencia Compleja en función de la frecuencia para el Modelo Multimodal de Maxwell. Es claro que en este caso se presentan los siguientes puntos importantes:

- Todas las curvas muestran un comportamiento resonante y antiresonante.
- En todos los casos, las curvas comienzan desde un punto mínimo en cero que aumenta hasta un valor máximo para luego disminuir hasta un valor mínimo.
- Luego de este valor mínimo, existe una cascada de resonancias y antiresonancias.
- Desde un punto de vista biológico, los modos secundarios están asociados a picos específicos de nuestro espectro resonante.

Es importante notar que conforme aumenta el valor del factor de elasticidad G los puntos mínimos y máximos son más pronunciados y se desplazan a la derecha. Esto significa que conforme aumenta la elasticidad se requiere de mayor frecuencia para alcanzar los puntos críticos, pero éstos son también de mayor valor.

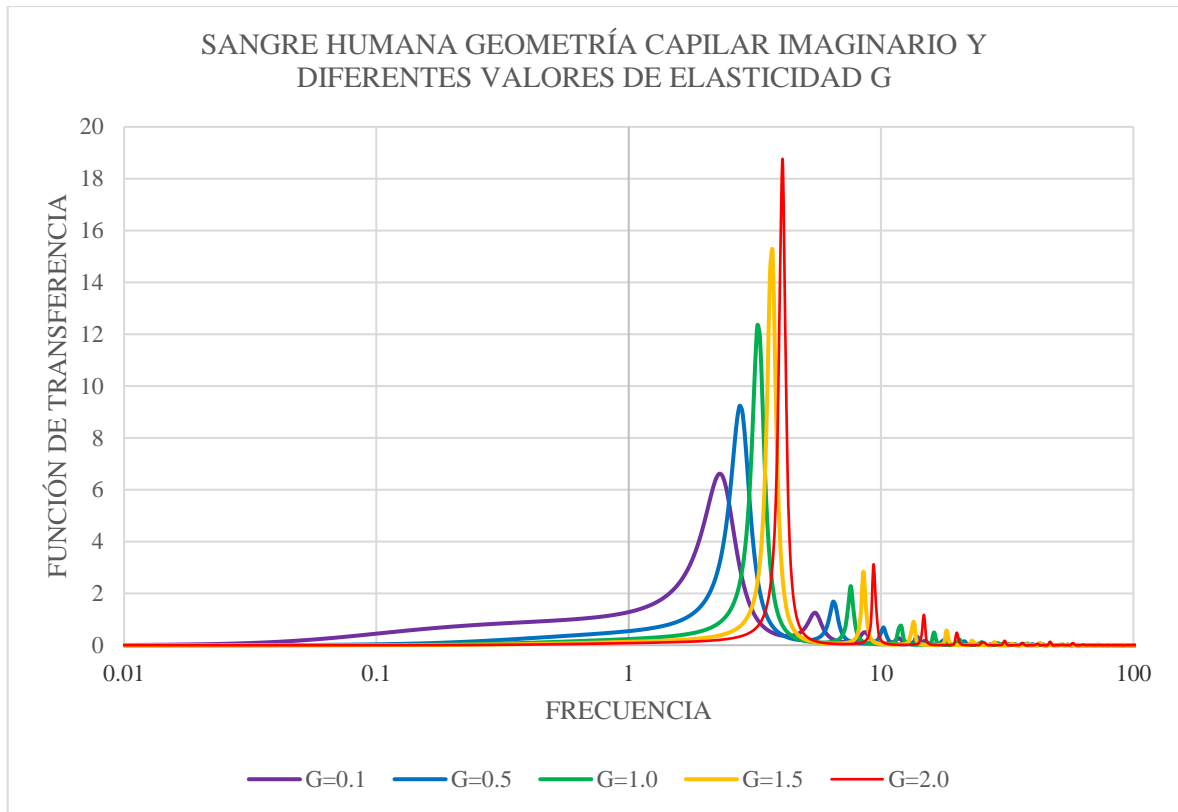


Figura 4.10-2. Representación de la parte Imaginaria de la FTC para la muestra L3 de Sangre humana en geometría cilíndrica considerando diferentes valores de elasticidad (G)

En la Fig. 4.10-2 se ilustra la parte imaginaria de la Función de Transferencia Compleja para el modelo Multimodal de Maxwell ya ilustrado en la Fig. 4-10.1. Como en la parte real hay una serie de características comunes:

- a. En todos los casos la parte real de la FTC muestra comportamientos resonantes.
- b. En todos los casos existe una frecuencia crítica con un pico dominante.
- c. Para un valor de frecuencia mayor a la crítica, el sistema presenta una cascada de resonancias.
- d. El efecto de la elasticidad G es el de desfazar las curvas resonantes a estado de mayor frecuencia y aumentar el máximo resonante.

Conforme aumenta el valor de la elasticidad G , el punto máximo de las curvas es mayor y se desplaza a la derecha, por lo que se requiere de mayor frecuencia para alcanzarlo.

4.11. Simulación XI: Sangre humana en geometría de corona circular sin elasticidad (G)

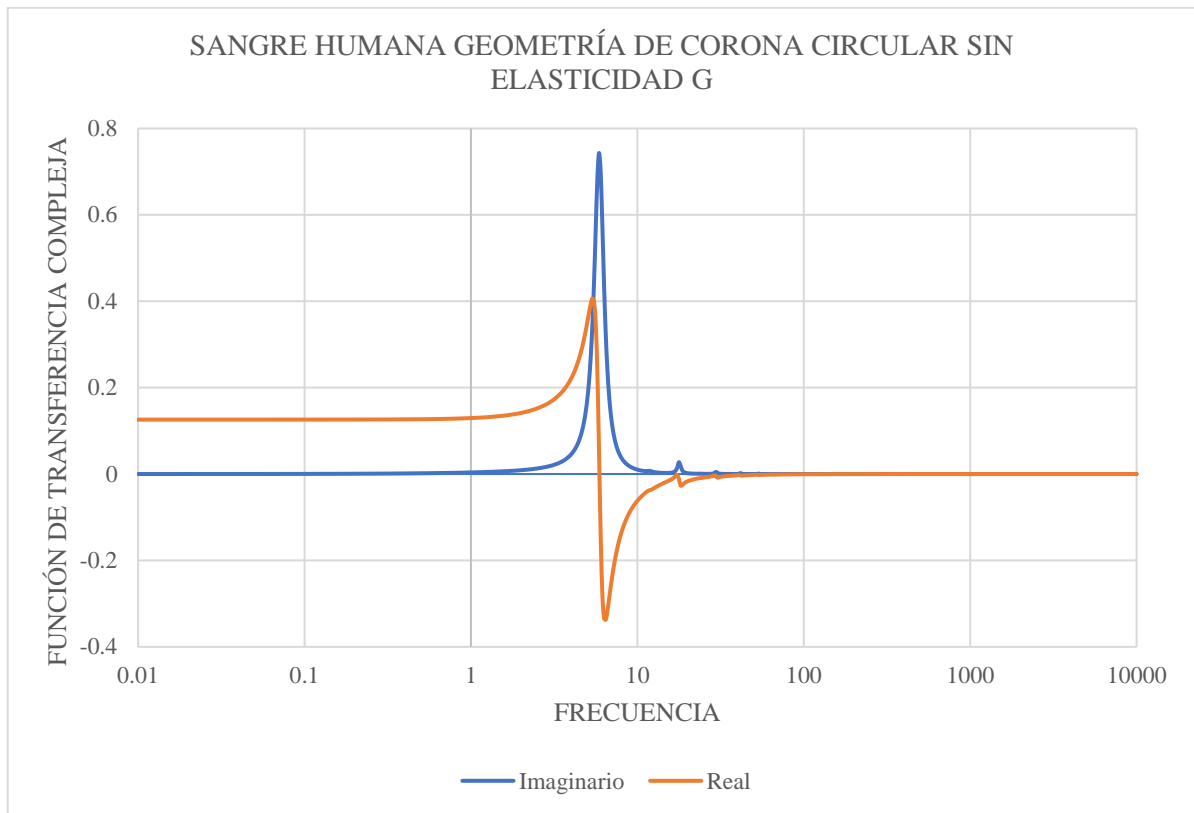


Figura 4.11-1. Representación de la parte Real e Imaginaria de la FTC para la muestra L3 de Sangre humana en geometría de corona circular.

En la Fig. 4.11-1 se ilustra la parte real e imaginaria de la Función de Transferencia Compleja para el Modelo Multimodal de Maxwell para geometría de corona circular con relación de radios R igual a 0.5 y sin consideración de elasticidad.

Respecto al comportamiento de la parte real, se comienza de un valor superior a cero y constante que aumenta hasta un valor máximo para luego disminuir drásticamente hasta un valor mínimo. Luego de esto es posible observar pequeños aumentos y disminuciones en la curva, hasta alcanzar un valor constante en cero para frecuencias altas.

Es posible observar el papel de la geometría pues el primer punto crítico que se obtiene es el máximo y no el mínimo como ocurrió en el caso IX para geometría capilar sin consideración de elasticidad.

En la parte imaginaria, se comienza con un valor en cero constante que en un punto crítico se convierte en monótono creciente hasta un punto máximo, para luego de forma monótona decreciente disminuye drásticamente hasta un valor constante en cero. Es importante resaltar que ambas curvas demuestran reacción de la función de transferencia (y por tanto, del flujo volumétrico) en un rango pequeño de frecuencias, que van de 1 a 10.

4.12. Simulación XII: Sangre humana en geometría de corona circular y diferentes valores de elasticidad (G)

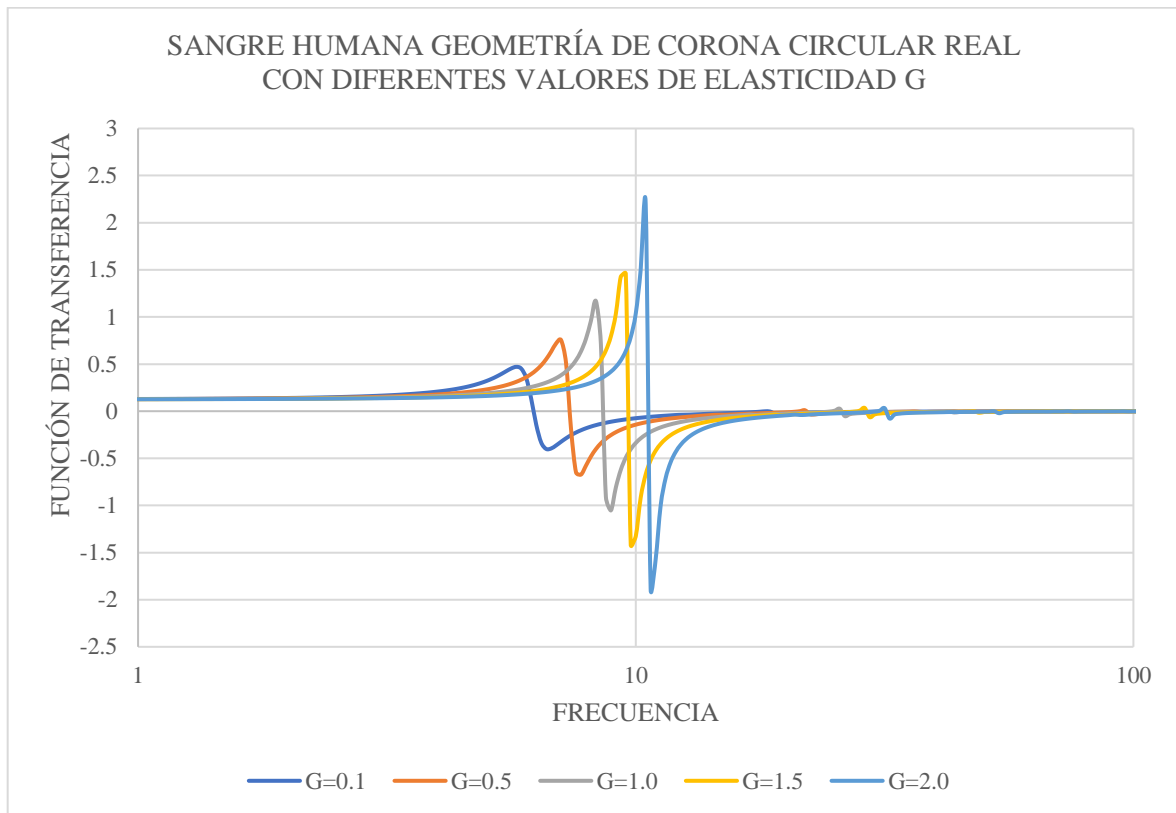


Figura 4.12-1. Representación de la parte Real de la FTC para la muestra L3 de Sangre humana en geometría de corona circular considerando diferentes valores de elasticidad (G)

La Fig. 4.12-1 ilustra la parte real de la Función de Transferencia Compleja para el Modelo Multimodal de Maxwell para geometría de corona circular con relación de radios R igual a 0.5 y con diferentes valores para la componente elástica G.

Para todos los casos es posible observar que:

- Se comienza desde un valor mínimo en cero.
- Conforme aumenta la frecuencia, aumenta el valor para la FTC hasta llegar a un valor máximo que disminuye drásticamente hasta un valor mínimo.
- Luego de este mínimo, la curva aumenta hasta un valor constante de cero.
- A frecuencias medias y altas es posible observar ligeros cambios en la curva tanto positivos como negativos.
- Conforme aumenta el factor de elasticidad, las curvas se desplazan a la derecha y tanto los puntos máximos como mínimos aumentan.

En general, es posible observar que a mayor factor de elasticidad es necesaria una frecuencia más alta para alcanzar el punto máximo de la FTC y del flujo volumétrico, pero también los valores para estos dos son más grandes.

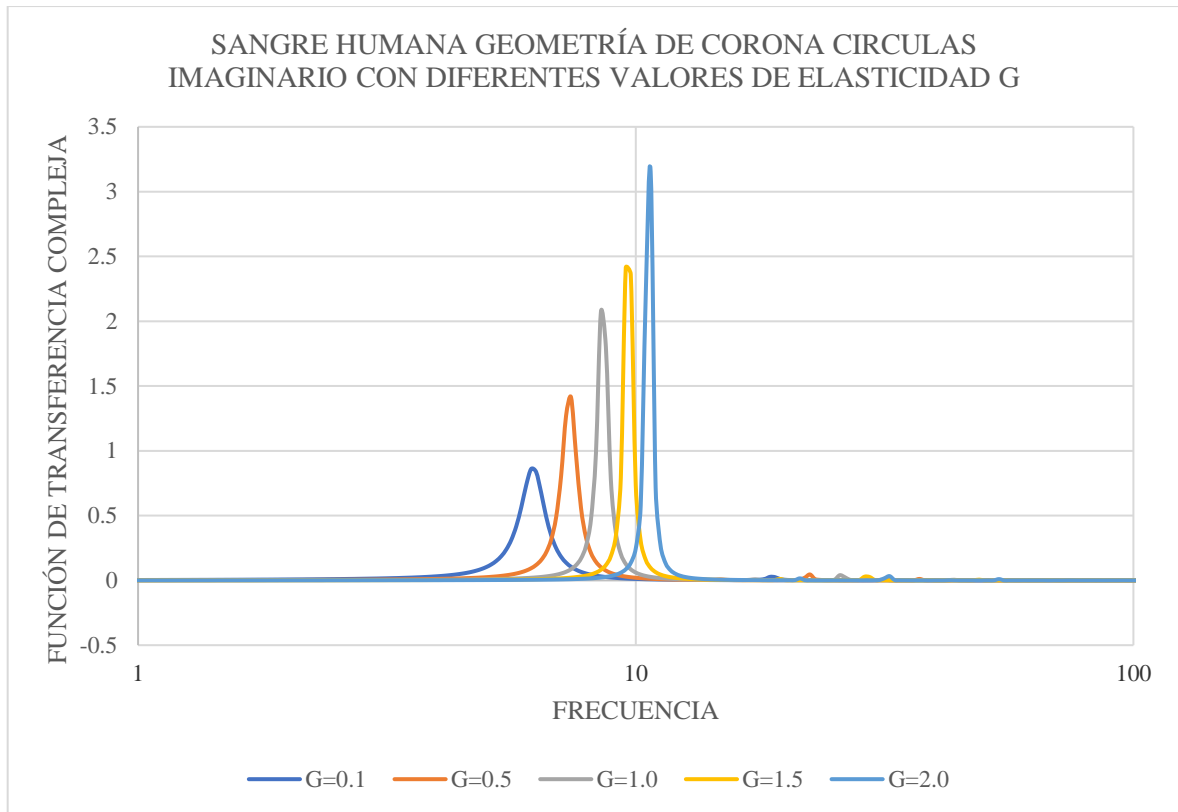


Figura 4.12-2 Representación de la parte Imaginaria de la FTC para la muestra L3 de Sangre humana en geometría de corona circular considerando diferentes valores de elasticidad (G)

La Fig. 4.12-1 ilustra la parte imaginaria de la Función de Transferencia Compleja para el Modelo Multimodal de Maxwell para geometría de corona circular con relación de radios R igual a 0.5 y con diferentes valores para la componente elástica G.

Es posible observar que para todos los valores de elasticidad se tiene el mismo comportamiento resonante, que comienza en cero y aumenta de forma monótona creciente hasta un valor máximo para disminuir hasta un valor constante de cero. Para frecuencias superiores a 10 es posible observar pequeños *picos* donde la FTC alcanza valores del orden de 0.05 unidades.

Conforme aumenta el valor de la elasticidad, es necesario un valor mayor de frecuencia para alcanzar el punto máximo para la FTC, pero este punto máximo también aumenta. También, es importante mencionar que conforme aumenta G, la zona de respuesta de la función respecto a la frecuencia es menor.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se obtuvo una función de transferencia compleja que permite observar el comportamiento dinámico de un fluido viscoelástico en régimen pulsátil respecto a la variación de la frecuencia en dos diferentes geometrías: cilíndrica y de corona circular.

Si bien el fluido objeto de estudio es la sangre, el modelo obtenido puede aplicarse para cualquier fluido viscoelástico, pues se utilizó la ecuación constitutiva de un fluido newtoniano modificado con un factor de elasticidad.

Este factor de elasticidad, en la sangre fue el valor G o elasticidad del Rouleaux, que son los agregados de glóbulos rojos que se forman a bajas velocidades y bajo ciertos padecimientos de salud, por lo que los resultados obtenidos pueden tener una aplicación médica directa en el tratamiento de los mismos.

Las curvas obtenidas mediante la simulación de la función de transferencia compleja muestran un comportamiento resonante, tal como lo han registrado otros autores respecto al comportamiento de fluidos viscoelásticos.

Para geometría cilíndrica, fue posible observar que para un mismo valor de la componente elástica G , conforme aumentan las obstrucciones periféricas hay menor respuesta de la función de transferencia compleja. Conforme G aumenta, las curvas se ensanchan y se desplazan a la derecha de la gráfica, lo que indica que el rango de frecuencias para las que existe reacción de la FTC disminuye y que es necesario un mayor rango de frecuencias para alcanzar el punto máximo de reacción.

Para geometría de corona circular para un mismo valor de G , conforme aumenta la relación de radios $r = \frac{r_1}{r_2}$ el punto máximo de reacción de la FTC disminuye, lo que se puede interpretar que conforme disminuyen las obstrucciones centrales, la respuesta de la FTC también lo hace. Por otra parte, para un mismo valor de radio, el punto máximo de la FTC aumenta conforme G aumenta, al mismo tiempo que el mínimo disminuye y las variaciones entre curvas para diferentes valores de r disminuyen.

Con los datos de sangre y su simulación en la FTC para un modelo Multimodal de Maxwell fue posible hacer una aplicación de las ecuaciones obtenidas en un modelo diferente de viscoelasticidad y observar el comportamiento de las curvas en diferentes rangos de frecuencias, así como el papel de la geometría en el flujo volumétrico.

En general, para todos los casos fue posible observar el comportamiento de las curvas respecto a diferentes valores de la componente elástica, así como la influencia de la geometría y diferentes rangos de frecuencia.

Todo lo anterior es una primera aproximación que conforma la base teórica y matemática de posibles trabajos futuros con diferentes modelos viscoelásticos y que pueden ser llevados de forma experimental con diferentes fluidos.

REFERENCIAS:

1. Byron Bird, R. & Stewart, W. & Lightfoot, E. (1992). *Fenómenos de transporte*. España, ediciones REPLA.
2. Collepardo, R., Corvera, E. *Controlling viscoelastic Flow by tuning frequency during occlusions*. Physical Review E 76, 026301 (2007).
3. Corvera, E., del Río, J.A. *Viscoelastic fingering with a pulsed pressure signal* Phys.: Condens. Matter 16 S2055 (2003).
4. Crespo, M. & Pendino, C. (2014). *Función Transferencia*. Instituto Politécnico, Universidad Nacional de Rosario. PDF recuperado de <https://bit.ly/3H1zIqt>.
5. Flores, J., Corvera, E., del Río, J.A., López, M. *A plausible explanation for heart rates in mammals*. Journal of Theoretical Biology 265 (2010) 599-603.
6. Flores, J., Alastruey, J., Corvera, E. *A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network*. Biomedical Engineering Society, 0090-6964/16/1000-3047/0. (2016).
7. Fombuena, V. & Boronat, T. & Sánchez-Nácher, L. & García-Sanoguera, D. & Balart, R. (2017). *Utilidad de los modelos de viscoelasticidad en el aprendizaje de la ingeniería de materiales poliméricos*. España, Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia.
8. Galdi, P. & Rannacher, R. & Robertson, A. & Turek, S. (2008). *Hemodynamical Flows: Modeling, Analysis and Simulation*. Alemania, editorial Birkhäuser.
9. Levenspiel (1993). *Flujo de fluidos e intercambio de calor*. España, editorial Reverté.
10. Moreno, L., Calderas, F., Sánchez, G., Medina, L., Sánchez, A., Manero, O. *La sangre humana desde el punto de vista de la reología*. Revista Materiales avanzados, Instituto de Investigaciones en Materiales UNAM. ASSN 1665-7071. (2013)
11. Ortega, M., Medina, L., Calderas, F., Moreno, L., Bernard, M. J., Sánchez, G., Sánchez, A., Manero, O., *La reología aplicada en sistemas biológicos con diferentes niveles de colesterol*. Revista Materiales Avanzados, Instituri de Investigaciones en Materiales UNAM (2015)
12. Periago (2003). *Capítulo 7: Funciones de Bessel y su aplicación a la resolución de EDPs*. PDF recuperado de <https://bit.ly/3KKDBCv>.
13. Roselli, R. & Diller, K. (2011). *Biotransport: Principles and applications*. Londres, Editorial Springer.
14. Torres, A., Pagonabarraga, I., Corvera, E. *Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes*. Phys. Fluids 29, 122003 (2017).

BIBLIOGRAFÍA:

1. Abascal, R. (2006). *Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior*. UTN, Facultad Regional Avellaneda. PDF recuperado de <https://bit.ly/3G9b1qO>.
2. Andreotti, J. (2015). Función de Bessel de primera especie [Tabla]. <https://bit.ly/3Hd5GQQ>.
3. Ávila, S. Trigueros, O. & Chinchinilla, R. (2014). *Funciones de Bessel y Neumann*. Revista de la Escuela de Física, UNAH, volumen II, No. 1. Recuperado de <https://bit.ly/32zFr7S>.
4. Chemeurope. *Womersley number*. Blog recuperado de <https://bit.ly/3ovj4HR>. Última vista: 15/11/2021.
5. De Vicente, F. & Sánchez, E. (2014). *Análisis de circuitos lineales*. Universidad de Vigo. PDF recuperado de <https://bit.ly/3IMuAHj>.
6. Shames, I. (1995). *Mecánica de Fluidos*. Colombia. Editorial Mc-Graw Hill Interamericana.
7. MathWorks. Funciones de Bessel de primera especie (0,4) [Gráfica]. <https://bit.ly/3FYmOIw>.
8. MathWorks. Funciones de Bessel de Segunda especie (0,4). <https://bit.ly/33SBD28>.
9. Mott, R. (2006, 6^o edición). *Mecánica de fluidos*. México. Editorial Pearson Educación.
10. Toral, R. (2011). *Capítulo 9: Ecuaciones de Bessel*. PDF recuperado de <https://bit.ly/3o2bLI8>.
11. Toral, R. (2011). *Capítulo 11: Propiedades de las funciones de Bessel*. PDF recuperado de <https://bit.ly/3AEq3Uj>.

APÉNDICES

APÉNDICE I. ECUACIONES DE NAVIER STOKES PARA COORDENADAS CILÍNDRICAS:

Componente en r :

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) + \rho g_r$$

Componente en θ :

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) + \rho g_\theta$$

Componente en z :

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

APÉNDICE II. TRANSFORMADA DE FOURIER:

Cuando tenemos una función f , que depende de t , de la forma:

$$f \rightarrow t$$

Podemos transformarla en Fourier de la forma:

$$\mathcal{F}\{t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot f(t) dt$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\right\} = i\omega$$

Cuando tenemos una derivada de orden superior a uno, la transformada queda como:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n}\right\} = (i\omega)^n$$

APÉNDICE III. FUNCIONES DE BESSEL:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

Tenemos que $n = 0$ y las soluciones están dadas por

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

Y donde $y = V_z$ y $x = r$

$$V_z = c_1 J_n(r) + c_2 Y_n(r)$$

Donde

$$J_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$J_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+0+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+0}$$

$$J_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Y

$$Y_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-x \sinh(t)} dt$$

$$Y_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta - (0)\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{(0)t} + (-1)^0 e^{-0t}] e^{-x \sinh(t)} dt$$

$$Y_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh(t)} dt$$

Y la solución queda como

$$V_z = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + c_2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh(t)} dt$$

Partiendo de la ecuación

$$r^2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \beta^2 r^2 V_z = 0$$

Y de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

Cuya solución homogénea está dada por:

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

APÉNDICE IV: PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

Relaciones de recurrencia

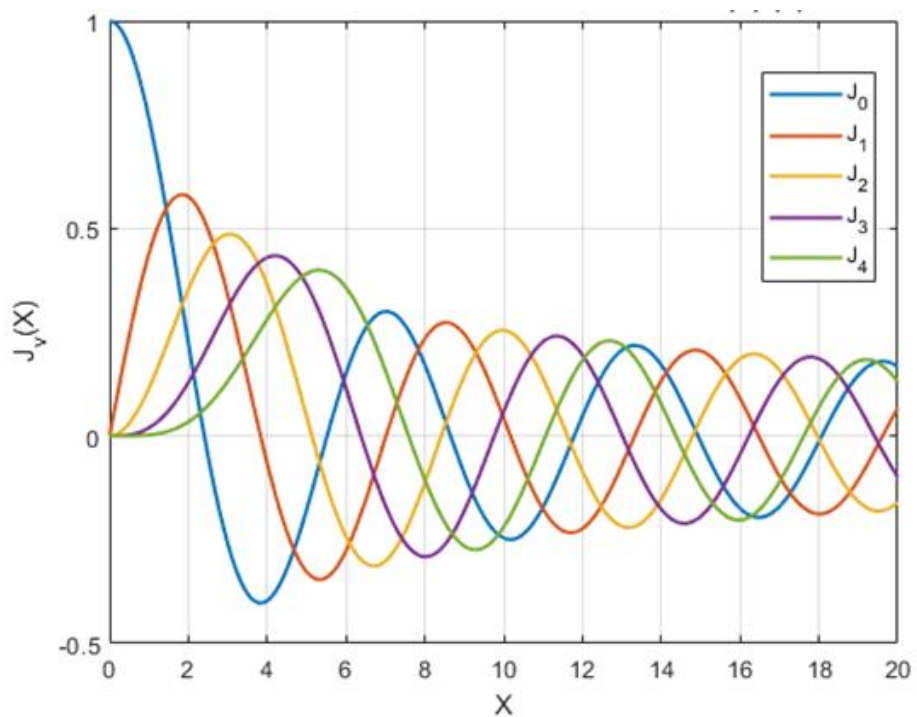
$$\frac{d}{dx}[x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-v} J_v(x)] = -x^{-v} J_{v+1}(x)$$

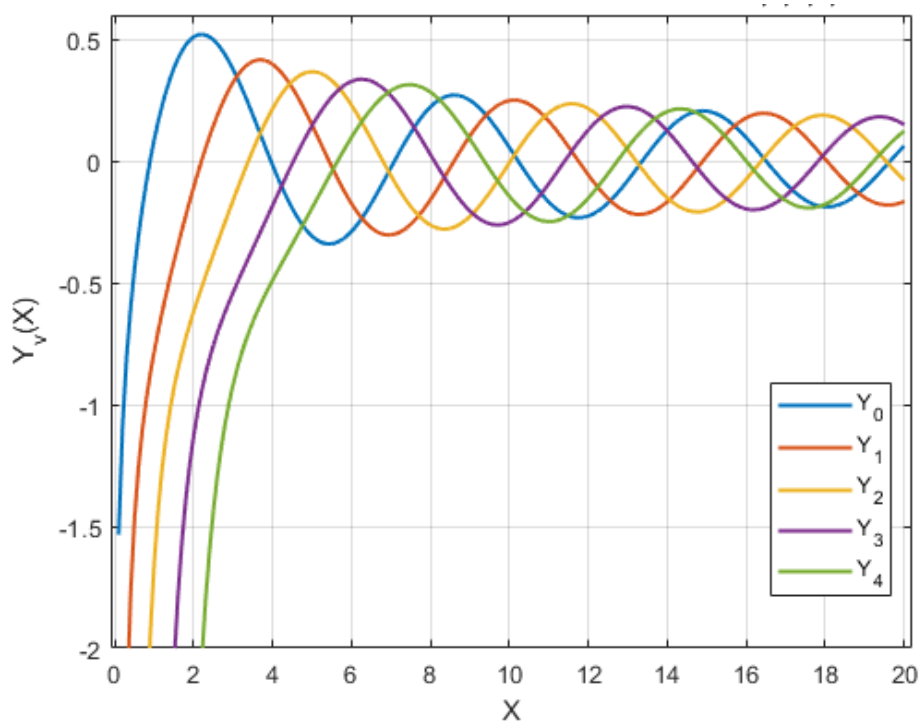
Tabla A: Valores para la Función de Bessel de Primera especie, orden (0,16).

mf ↓	Orden																
	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}	J_{15}	J_{16}
0.00	1.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.25	0.98	0.12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.5	0.94	0.24	0.03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.5	0.51	0.56	0.23	0.06	0.01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2.5	0.05	0.50	0.45	0.22	0.07	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3.0	0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.0	0.40	0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5.0	0.18	0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02	-	-	-	-	-	-	-	-
6.0	0.15	0.28	0.24	0.11	0.36	0.36	0.25	0.13	0.06	0.02	-	-	-	-	-	-	-
7.0	0.30	0.00	0.30	0.17	0.16	0.35	0.34	0.23	0.13	0.06	0.02	-	-	-	-	-	-
8.0	0.17	0.23	0.11	0.29	0.10	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.03	-	-	-	-	-

Gráfica A: Representación de las Funciones de Bessel de Primera Especie, orden (0,4)



Gráfica B: Representación de las Funciones de Bessel de Segunda Especie, orden (0,4)



APÉNDICE V. FLUJO PULSÁTIL

Considerando la presión como función del tiempo:

$$\nabla_z p(t) = \nabla_z p \cos(\omega_0 t) \quad (\text{A4-1})$$

Se utiliza la función coseno debido a que por su periodicidad funciona como una primera aproximación a los cambios de presión.

Aplicamos la transformada de Fourier:

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

$$\mathfrak{F}\{\nabla_z p(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \nabla_z p \cos(\omega_0 t) dt$$

$$\mathfrak{F}\{\nabla_z p(t)\} = \nabla_z p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \cos(\omega_0 t) dt$$

Si sabemos que:

$$e^{i(\omega_0 t)} = \cos(\omega_0 t) + i \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$e^{-i(\omega_0 t)} = \cos(\omega_0 t) - i \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Y sumamos ambas ecuaciones:

$$e^{i(\omega_0 t)} + e^{-i(\omega_0 t)} = 2\cos(\omega_0 t)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i(\omega_0 t)} + e^{-i(\omega_0 t)})$$

Podemos expresar la transformada como:

$$\mathfrak{F}\{\nabla_z p(t)\} = \nabla_z p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{1}{2} (e^{i(\omega_0 t)} + e^{-i(\omega_0 t)}) dt$$

$$\mathfrak{F}\{\nabla_z p(t)\} = \nabla_z p \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(\omega_0 t) - i\omega t} + e^{-i(\omega_0 t) - i\omega t}) dt$$

$$\mathfrak{F}\{\nabla_z p(t)\} = \nabla_z p \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i(\omega + \omega_0)t} + e^{-i(\omega - \omega_0)t}) dt$$

Considerando la función delta de Dirac:

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt$$

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt$$

$$\delta(\omega - \omega_0)\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt$$

$$\delta(\omega + \omega_0)\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt$$

Reorganizamos:

$$\mathfrak{S}\{\nabla_z p(t)\} = \nabla_z p \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \right\}$$

Y:

$$\nabla_z p(\omega) = \nabla_z p \frac{1}{2} \{ \delta(\omega + \omega_0)\sqrt{2\pi} + \delta(\omega - \omega_0)\sqrt{2\pi} \}$$

$$\nabla_z p(\omega) = \nabla_z p \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \}$$

$$\nabla_z p(\omega) = \nabla_z p \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \}$$

$$\nabla_z p(\omega) = \nabla_z p \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \}$$

Dado que el flujo es aproximadamente el producto del gradiente de presión por la función de transferencia K , tenemos:

Es una aproximación porque faltan los elementos geométricos

$$Q(\omega) \approx K(\omega)(-\nabla_z p(\omega))$$

$$Q(\omega) \approx -\nabla_z p K(\omega) \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \}$$

$$Q(\omega) \approx -\frac{\nabla_z p}{2} K(\omega) \sqrt{2\pi} \{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \}$$

$$Q(\omega) \approx -\frac{\nabla_z p}{2} \{ K(\omega) \sqrt{2\pi} \delta(\omega + \omega_0) + K(\omega) \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) \}$$

Y aplicamos la transformada inversa de Fourier:

$$\mathfrak{S}^{-1}\{Q(\omega)\} \approx -\frac{\nabla_z p}{2} \mathfrak{S}^{-1}\{ \{ K(\omega) \sqrt{2\pi} \delta(\omega + \omega_0) + K(\omega) \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) \} \}$$

$$Q(t) = -\frac{\nabla_z p}{2} \{ K(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} + K(-\omega_0) e^{-i\omega_0 t} \}$$

$$Q(t) = -\frac{\nabla_z p}{2} \{ K(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} + K(-\omega_0) e^{-i\omega_0 t} \}$$

Si sabemos que:

$$K(-\omega_0) = \bar{K}(\omega_0)$$

Y que para esta función de transferencia tenemos una parte real y una imaginaria:

$$K(\omega_0) = \text{Re}[K(\omega_0)] + i\text{Im}[K(\omega_0)]$$

$$K(\omega_0)e^{i\omega_0 t} = (\text{Re}[K(\omega_0)] + i\text{Im}[K(\omega_0)])(\cos(\omega_0 t) + i\text{sen}(\omega_0 t))$$

$$K(\omega_0)e^{i\omega_0 t} = \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) + i\{\text{Re}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) + \text{Im}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t)\}$$

$$\bar{K}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} = (\text{Re}[K(\omega_0)] - i\text{Im}[K(\omega_0)])(\cos(\omega_0 t) - i\text{sen}(\omega_0 t))$$

$$\bar{K}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} = \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) + i\{-\text{Re}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t)\}$$

$$\bar{K}(\omega_0)e^{i\omega_0 t} = \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) - i\{\text{Re}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) + \text{Im}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t)\}$$

Donde \bar{K} es

Sumando tenemos:

$$\begin{aligned} K(\omega_0)e^{i\omega_0 t} + \bar{K}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} &= \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) \\ &+ i\{\text{Re}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) + \text{Im}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t)\} + \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) \\ &- \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) - i\{\text{Re}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) + \text{Im}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(\omega_0)e^{i\omega_0 t} + \bar{K}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} &= \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) + \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) \\ &- \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$K(\omega_0)e^{i\omega_0 t} + \bar{K}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} = 2\text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - 2\text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t)$$

$$K(\omega_0)e^{i\omega_0 t} + \bar{K}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} = 2(\text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t))$$

$$\frac{K(\omega_0)e^{i\omega_0 t} + \bar{K}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t}}{2} = \text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t)$$

Sustituyendo en el flujo volumétrico:

$$Q(t) \approx -\frac{\nabla_z p}{2} \{K(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} + K(-\omega_0)e^{-i\omega_0 t}\}$$

$$Q(t) \approx -\nabla_z p \{\text{Re}[K(\omega_0)]\cos(\omega_0 t) - \text{Im}[K(\omega_0)]\text{sen}(\omega_0 t)\}$$

Considerando que:

$$\omega_0 t = 2\pi n; n \in Z$$

El flujo volumétrico queda como:

$$Q(t) \approx -\nabla_z p \operatorname{Re}[K(\omega_0)] \cos(\omega_0 t)$$

Y para quitar la aproximación, introducimos el área:

$$Q(t) = -A \nabla_z p \operatorname{Re}[K(\omega_0)] \cos(\omega_0 t)$$

$$|Q(t)| = -A \nabla_z p \operatorname{Re}[K(\omega_0)] |\cos(\omega_0 t)|$$

Considerando la presión como función del tiempo:

$$\nabla_z p(t) = \nabla_z p \operatorname{Sin}(\omega_0 t)$$