



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

**DINÁMICA ESTRUCTURAL AVANZADA TEÓRICA
Y APLICADA**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero civil

PRESETA

Emiliano Pérez Herrera

DIRECTOR DE TESIS

Ing. Marcos Molina Elvira



Ciudad Nezahualcoyótl, Estado de México, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A mis padres Elia Elena y Zeferino José:

Por apoyarme de manera incondicional en todas las decisiones que he tomado en el transcurso de mi vida, por sus enseñanzas y sus palabras sabias y cálidas en el momento preciso. En especial, por toda la paciencia, los sacrificios y las oportunidades que me brindaron en innumerables ocasiones, por confiar en la persona que soy, por enseñarme a no rendirme nunca y caminar moralmente recto.

A mi hermana Mariana:

Por amarme de una manera única y ser mi cómplice en muchas aventuras, por ser el pilar más grande de mi vida y ser mi eterna compañera de viaje.

A mi abuelita Elisa:

Por estar conmigo desde siempre, apoyarme en todas mis locuras desde la secundaria, por todos los desayunos, las comidas y los lunches, por estar al pendiente de mí, por su amor desinteresado, tan grande e incondicional.

A mi amigo Ortega:

Por acompañarme en todo el proceso que significó la universidad, ayudarme a enfocar mis metas y objetivos, por sus grandes muestras de solidaridad y fraternal amistad, por estar en los momentos claves y ayudarme con el camino.

Agradecimientos

A la UNAM:

Por permitirme desarrollar dentro de sus recintos, poner a mi disposición mares de conocimientos interminables, por permitirme participar en eventos, seminarios y concursos, por darme la oportunidad de conocer a gente extraordinaria, desde compañeros de clase hasta profesores.

A la FES Aragón:

Por abrirme las puertas de lo que será la base de mi vida profesional, por el amor tan intenso que viví dentro de sus instalaciones, por forjarme como ingeniero civil, por todas las lágrimas derramadas producto de un esfuerzo interminable, por todos los amigos y personas tan increíbles que conocí en el camino, por todos los profesores extraordinarios que me ofrecieron su apoyo en todos los sentidos, por permitirme desarrollar dentro de sus laboratorios.

Al ingeniero Marcos Molina:

Por ser la fuente de inspiración más grande hacia la ingeniería estructural, por toda la pasión que transmite durante sus clases, por confiar en mis capacidades y guiarme en el camino, por ayudar a superarme, por el apoyo en la elaboración de esta tesis, por su sinceridad y sus valores personales, por su tenacidad, sus ganas de desarrollarse y así contagiar a los demás, por su aprendizaje continuo, por compartir el conocimiento, por su actitud desafiante y su inconformismo, por todo lo que significa su ejemplo. Pero, sobre todo, por sus consejos y valiosa amistad.

Al ingeniero Miguel Pedraza:

Por su alta calidad humana, por apoyarme de manera incondicional en el desarrollo de esta tesis, por las madrugadas dedicadas a mi aprendizaje, por la perfección de su cátedra, por ser un soporte a lo largo de cada capítulo, por enseñarme que la mejor filosofía es explicar haciendo que las cosas parezcan fáciles, pero, sobre todo, por su amistad inquebrantable.

Al ingeniero Oniel García:

Por la confianza que me tuvo desde el primer momento y por todo el apoyo que me brindó a lo largo de la carrera.

A mi amiga Estefanía Ramos:

Por ser el impulso que necesitaba para estudiar la carrera de ingeniería civil.

A mi amigo Jesús Yáñez:

Por apoyarme con sus conocimientos e impulsarme a ser mejor estudiante.

A mi amigo Juan Pablo Hernández:

Por su sólida amistad en los momentos más adversos de la carrera y de mi vida personal, por acompañarme en todo el proceso que implicó la licenciatura, por su gran afecto y su calidad como estudiante que sirvió para inspirarme.

A mis amigos de licenciatura y de toda la vida:

Especial agradecimiento a Yasmín y Mary por haberme acompañado durante toda la licenciatura. A Ricardo y Víctor, por estar apoyándome en los momentos más difíciles de la carrera. Al resto de amigos que no mencione, pero saben que los estimo.

Antecedentes

A lo largo de la historia de la ingeniería estructural, se han planteado diferentes formas de estudiar los daños de las estructuras provocados por los sismos o alguna otra excitación dinámica. La evolución de estos estudios ha sido lenta y compleja, debido a que son varios los factores que deben tomarse en cuenta para poder hacer un análisis correcto del problema.

Estos factores comprenden desde el estudio de los sismos y su forma de transmitirse a través de ondas utilizando el suelo como medio de propagación, después vino el problema de medición de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones que provocan estas ondas sísmicas (o de cualquier otra índole de excitación dinámica) en el suelo.

Esta medición fue lograda gracias a los acelerógrafos, ahora el problema radicaba en la forma correcta de emplear esta información para analizar el daño de las estructuras, uno de los primeros métodos en proponerse fue el Análisis Modal, sin embargo, habría que realizar varios cálculos después de aplicar este primer método para poder llegar a una conclusión.

Posteriormente, se propuso el Análisis Dinámico Tiempo – Historia, pero por su gran complejidad numérica y el escaso avance en la tecnología y el poder computacional de ese entonces, este método fue imposible de aplicar de manera estándar. El método que más se ajustaba a las características y posibilidades de la época fue el método estático, sin embargo, su alta falta de precisión, obligó a un mayor desarrollo de los métodos analíticos y numéricos.

El producto de esta evolución fue el Análisis Dinámico Modal Espectral, que cubrió las necesidades de la época durante mucho tiempo, e incluso actualmente es del gusto de muchos ingenieros estructuralistas. Existe una serie de pasos para poder aplicar este método, pero aun usando el factor de corrección “SRSS” y “CQC” los resultados suelen ser muy imprecisos, y esta imprecisión crece cuando se trata de realizar un análisis no lineal.

Con el paso del tiempo, el poder computacional, la evolución de los lenguajes de programación y el avance de las tecnologías permitieron a los ingenieros estructuralistas contar con mayores herramientas para realizar cálculos. Esto permitió repensar la opción de utilizar el método que anteriormente había sido olvidado, el Análisis Dinámico Tiempo – Historia.

Este método ofrece resultados con mayor precisión que el Análisis Dinámico Modal Espectral, e incluso ofrece la posibilidad de realizar análisis no lineal indicando desplazamientos residuales cuando la estructura ha sufrido daño, mientras que los otros métodos indican que la estructura queda en la misma posición inicial después de haber sufrido daños.

Introducción

El contenido de esta tesis será presentado en la página viii, ix y x. En los primeros dos capítulos se presentarán los fundamentos de sistemas de 1 GDL, conocimiento básico para abordar cualquier tema estructural y de esa manera comprender su comportamiento cuando dicho sistema es sometido a diferentes tipos vibraciones.

En el capítulo tres se estudiará a detalle la importancia de la rigidez lateral y la matriz de masa, explicando la deducción de los factores de rigidez tanto angular como lineal y su importancia en el método de rigidez clásico y matricial usando un ejemplo de aplicación para visualizar de mejor manera los temas estudiados.

En el mismo capítulo se abordará la importancia que tiene el entendimiento de un “diafragma rígido” al momento de aplicar una condensación estática, conceptos que permitirán llegar a la definición y al cálculo de la rigidez lateral.

En el cuarto capítulo se explicará en que consiste un análisis modal y el relevante papel que juegan los modos de vibrar de la estructura, así como el factor de participación modal de masas.

En el capítulo cinco se presentará la deducción de los métodos del Análisis Dinámico Tiempo-Historia, explicando de manera exhaustiva el desarrollo matemático del método de las 8 constantes, la β -Newmark en sus dos variantes y el método de la diferencia central, además de explicar la implementación de dichos métodos en Excel. Además, se elaborarán los espectros de respuesta correspondientes al desplazamiento, la velocidad y la aceleración. Todo lo anterior se comprobará en el software ETABS.

En el capítulo seis se aplicarán todos los conocimientos estudiados en los capítulos anteriores para la realización de un Análisis Dinámico Tiempo – Historia una estructura de 2 dimensiones, se incluirán conceptos como lo es el amortiguamiento de Rayleigh, acelerogramas, desplazamientos modales, desplazamientos reales, los dos últimos obtenidos a través de una descomposición modal y finalmente se obtendrán las fuerzas laterales máximas de entrepiso.

Finalmente, en el capítulo siete se realizará paso a paso un ADME y un ADTH en ETABS y dichos resultados se compararán contra lo realizado en el capítulo seis, exponiendo la diferencia entre ambos métodos y por último se darán las conclusiones.

Justificación

Esta tesis aportará en el lector el entendimiento y el proceso de cómo realizar un Análisis Dinámico Tiempo – Historia y su diferencia con un Análisis Dinámico Modal Espectral. Así mismo, ayudará al lector a comprender el uso de los métodos paso a paso.

Objetivo

Estudiar las nociones necesarias del comportamiento de sistemas de 1 GDL ante diferente tipo de vibraciones, la importancia de la rigidez lateral, la realización de un análisis modal y la implementación de los métodos paso a paso para que el lector sea capaz de realizar un Análisis Dinámico Tiempo – Historia y desarrolle el criterio para extrapolar ese conocimiento a programas de ingeniería estructural como ETABS.

Alcances

En esta tesis se limitará a aplicar un Análisis Dinámico Tiempo – Historia a un edificio de concreto en dos dimensiones de geometría regular, dentro del rango elástico lineal.

Contenido

I. Introducción a sistemas de 1 GDL.....	12
1.1 Grados de libertad (gdl)	12
1.2 Módulo elástico de young	13
1.3 Deformación Unitaria	14
1.4 Ley de Hooke	14
II. Vibraciones de sistemas de 1 GDL	15
2.1 Oscilador de un grado de libertad	15
2.1.1. Rigidez en paralelo	17
2.1.2. Rigidez en serie.....	18
2.1.3 Concepto de amortiguamiento.....	18
2.1.4 Concepto de fuerza inercial	18
2.2 Vibraciones mecánicas	19
2.3 Vibración libre sin amortiguamiento	19
2.4 Vibración libre con amortiguamiento	22
2.4.1 Cálculo de la ecuación del amortiguamiento crítico.....	22
2.4.2 Respuesta sobreamortiguada.....	24
2.4.3 Respuesta subamortiguada.....	27
III. Rigidez lateral y matriz de masas.....	29
3.1 Deducción de los factores de rigidez angular	29
3.2 Deducción de los factores de rigidez lineal	31
3.3 Método de la rigidez clásico	33
3.4 Método de la rigidez matricial	38
3.5 Condensación estática.....	46
3.6 Deducción de la matriz de masas	50
3.7 Condiciones de apoyo.....	52
IV. Análisis modal	53
4.1 Eigenvalores o valores característicos.....	53
4.2 Frecuencias y periodos naturales de la estructura.....	55
4.3 Eigenvectores o vectores propios	56
4.4 Modos de vibrar de la estructura.....	57

4.5 Factor de participación modal de masas.....	58
V. Deducción de los métodos ADTH y su uso para determinar espectros de respuesta en sistemas de 1 GDL	60
5.1 Método de la interpolación de la excitación (8 ctes).....	60
5.2 Ejemplo de Excel 1: método de las 8 constantes.....	67
5.3 Método de la β -newmark.....	76
5.4 Ejemplo en excel 2: método de la β -newmark (aceleración promedio)	78
5.5 Ejemplo en excel 3: método de la β -newmark (aceleración lineal)	88
5.6 Método de la diferencia central	90
5.7 Ejemplo en excel 4: método de la diferencia central	91
5.8 Espectro de respuesta (definición y características)	96
Clasificación de los espectros de respuesta.....	96
Construcción de un espectro de respuesta	96
5.9 Cálculo del espectro de respuesta en excel.....	97
5.10 Comparación de resultados contra ETABS.....	102
VI. Implementación del ADTH para sistemas de N GDL usando Excel.....	115
6.1 Definición de la estructura.....	115
6.2 Cálculo de la matriz de rigidez	115
6.3 Cálculo de la matriz de rigidez lateral	122
6.4 Declaración de la matriz de masa	123
6.5 Cálculo de eigenvalores, modos y periodos de vibración	123
6.6 Cálculo de eigenvectores y matriz modal.....	125
6.7 Cálculo de las matrices diagonalizadas $\phi T K L A T \phi$, $\phi T M \phi$	129
6.8 Amortiguamiento de Rayleigh y amortiguamiento constante	133
6.9 Cálculo de la matriz de amortiguamiento diagonalizada $\phi T C \phi$ y del vector de fuerza $\phi T P$	136
6.10 Definición de acelerograma	139
6.11 Obtención de desplazamientos modales (q(t)).....	140
6.12 Obtención de desplazamientos reales (u(t))	144
6.13 Obtención de fuerzas laterales máximas de entrepiso.....	146
VII. ADTH y ADME en ETABS y su comparación en Excel.....	148

7.1 Determinación de las fuerzas laterales del ADTH en ETABS	148
7.2 Generación del ADME en ETABS.....	159
7.3 Obtención de las fuerzas laterales provenientes del ADME en ETABS.....	163
7.4 Comparación de fuerzas entre ADTH (excel), ADTH (ETABS) y ADME (ETABS)	165
Conclusiones	166
Bibliografía.....	167
Apéndices.....	168

I. INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DE 1 GDL

1.1 GRADOS DE LIBERTAD (GDL)

Los grados de libertad son el número de coordenadas generalizadas independientes que permiten conocer la configuración desplazada de un sistema estructural.

Si en un plano tridimensional (xyz) está representado un elemento estructural cualquiera (elemento tipo viga, por ejemplo), éste tendrá tanto desplazamientos (grados de libertad lineales) como rotaciones (grados de libertad angulares), en cada uno de sus nodos (infinitos grados de libertad).

Cada nodo tendrá (véase figura 1.1):

- 3 grados de libertad para desplazamientos (Δx , Δy y Δz)
- 3 grados de libertad para rotaciones (Θx , Θy y Θz)

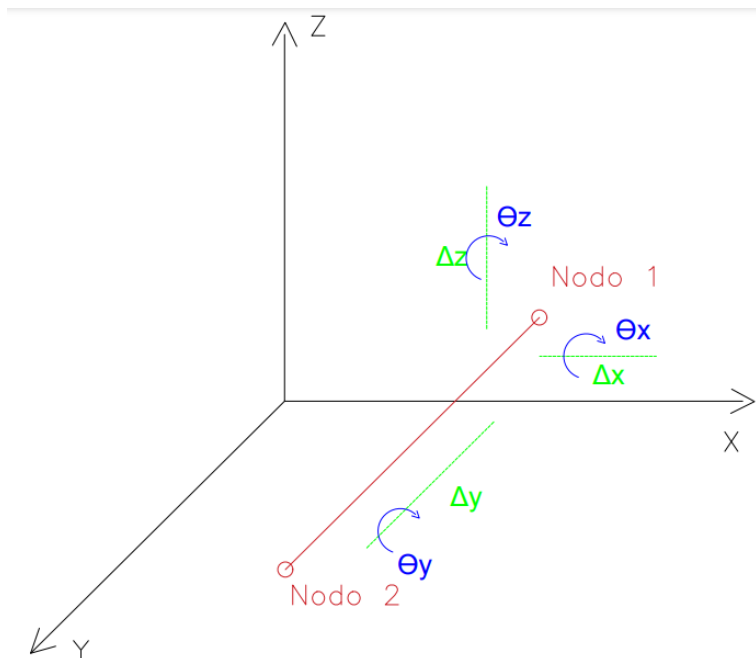


Figura 1.1. Representación gráfica de los grados de libertad en un plano 3D

Mientras que en un plano bidimensional (xz, por ejemplo) tendremos:

- 2 grados de libertad para desplazamientos (Δx y Δz)
- 1 grado de libertad para rotación (Θz)

1.2 MÓDULO ELÁSTICO DE YOUNG

El módulo elástico de Young (o simplemente, módulo de elasticidad E) describe la relación entre los esfuerzos axiales y la deformación unitaria ε . Un ejemplo de como se ve dicha relación puede representarse gráficamente de la siguiente manera:

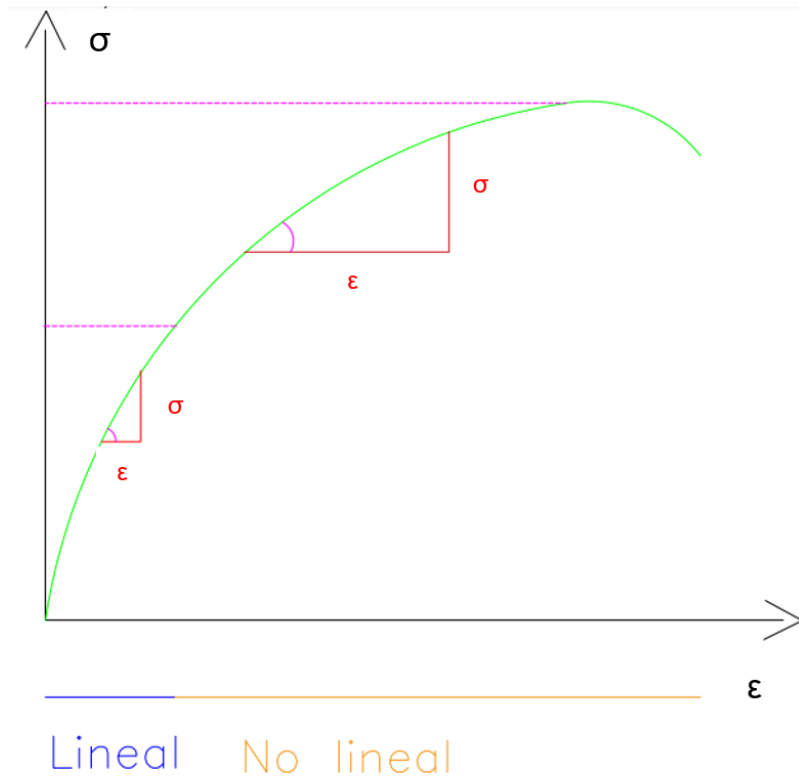


Figura 1.2. Gráfica esfuerzo – Deformación $\sigma - \varepsilon$

De la figura 1.2 observamos que fueron acotados dos módulos elásticos: (1) el módulo elástico tangente el cual es usado en el rango lineal y (2) el módulo elástico secante que es aplicado en el rango no lineal. Las ecuaciones de ambos módulos están dadas por:

$$E_{tan} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1.1)$$

$$E_{sec} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \quad (1.2)$$

1.3 DEFORMACIÓN UNITARIA

Un esfuerzo axial puede representarse a través de la siguiente expresión:

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \quad (1.3)$$

Donde:

- σ = Esfuerzo axial
- P = Carga
- A = Área

Si sometemos una estructura a tensión, ésta se alargará y, por el contrario, si sometemos una estructura a compresión ésta se acortará. El cambio de longitud es representado mediante ΔL .

De tal manera que la deformación unitaria puede definirse como la relación entre el cambio de longitud provocado por una carga axial (tensión o compresión) y la longitud total del elemento, es decir:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.4)$$

1.4 LEY DE HOOKE

La ley de Hooke establece que la fuerza restitutiva (o estática) es igual a una constante "k" por un desplazamiento "x", en otras palabras:

$$F = kx \quad (1.5)$$

Inicialmente la ley de Hooke se planteó para resolver problemas de resorte, en donde se establece que el desplazamiento de éstos es directamente proporcional a la fuerza que se le aplique, este desplazamiento estará multiplicado por una constante de elasticidad "k". Esta constante de elasticidad "k" facilitará o dificultará el desplazamiento "x", dicho en otras palabras: "k" es la constante que se resiste al desplazamiento.

Esta ley se aplica para el módulo de elasticidad de Young, mismo que dice que la deformación unitaria " ε " de un material es directamente proporcional al esfuerzo " σ " aplicado cuando se esté dentro del rango lineal del material de estudio.

II. VIBRACIONES DE SISTEMAS DE 1 GDL

2.1 Oscilador de un Grado de Libertad

Las vibraciones de sistemas de 1 GDL ocurren cuando un sistema cualquiera (discretizado como de 1 GDL), oscila debido a los efectos de una perturbación inicial.

Para entender lo que es un oscilador de 1 GDL, dentro del área de las estructuras en la Ingeniería Civil, debe explicarse lo que es el diafragma rígido, entendiéndolo como un conjunto de 3 hipótesis aplicadas a un marco estructural de un nivel y una crujía:

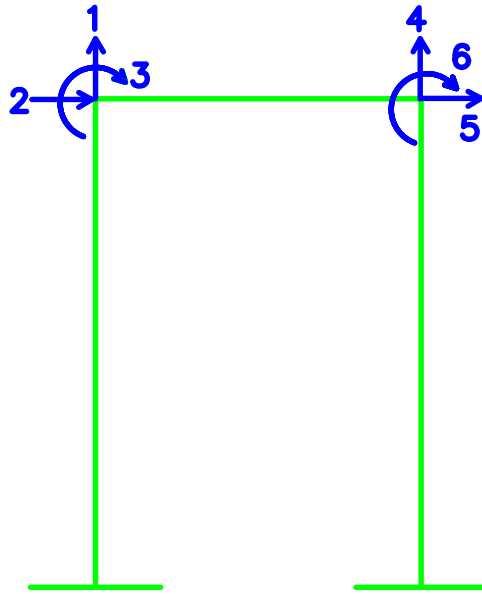


Figura 2.1. Marco estructural de un nivel y una crujía

1. Si se hacen rígidas axialmente las columnas, se omiten los grados de libertad 1 y 4 (su valor es cero – no se acortan ni se alargan -)
2. Si se hace rígida la trabe a flexión, se omiten los grados de libertad 3 y 6 (su valor es cero – no hay flexión -)
3. Si se hace rígida axialmente la trabe, se omite un solo grado de libertad (que por elección será el 5). Al igual que las columnas, la viga no se acortará ni se alargará.

Entonces, puede decirse que el diafragma rígido ocurre cuando el desplazamiento horizontal de un nodo es igual al desplazamiento horizontal de otro nodo al mismo nivel. Así, el diafragma rígido nos ayuda a reducir los grados de libertad.

Lo anterior puede representarse a través de un diagrama de cuerpo libre llamado “Oscilador de un grado de libertad”.

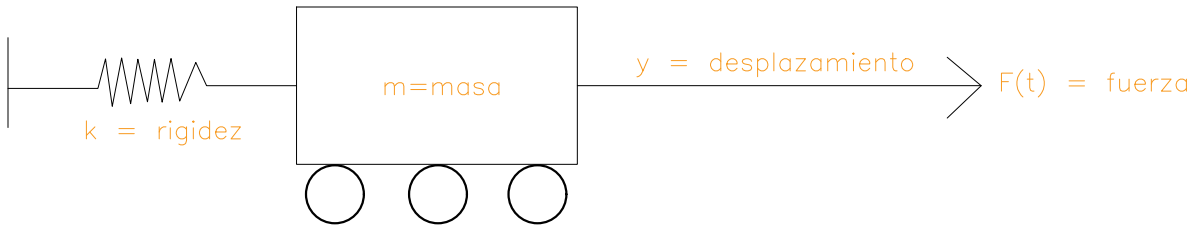


Figura 2.2. Oscilador de un grado de libertad

La figura 2.2, tiene una rigidez, una masa y una fuerza en función del tiempo (producida por el sismo, viento, vibraciones, etc.)

Para poner el sistema anterior en equilibrio, la suma de las fuerzas horizontales debe de ser cero; sin embargo, en las condiciones mostradas no es posible debido a que se involucra el tiempo (t), por lo que el problema es dinámico.

Para poder poner en equilibrio el sistema hay que identificar las fuerzas horizontales actuantes a través de un diagrama de cuerpo libre:



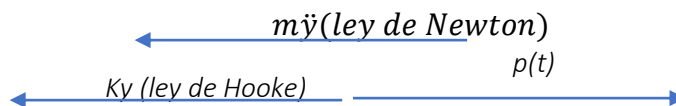
Es importante mencionar que la rigidez se expresa como:

$$k = \frac{F}{a} \quad (2.0)$$

Para poder poner el sistema en equilibrio es necesario aplicar el principio de D´alambert, mismo que dice:

“Todo sistema puede ser llevado al equilibrio dinámico si se aplica una fuerza de inercia (masa por aceleración) contraria al desplazamiento definido por el usuario.”

Se aplica la fuerza inercial (masa por aceleración “ma”) para poner el sistema en equilibrio dinámico y se expresa en un diagrama de cuerpo libre.



Se realiza una sumatoria de fuerzas horizontales $\sum F_x$ y considerando que ya es posible igualar la expresión a 0 una vez que se aplicó el principio de D’Alambert, se tiene la siguiente expresión:

$$-m\ddot{y} - ky + F = 0 \quad (2.1)$$

Multiplicando por -1

$$m\ddot{y} + ky - F = 0 \quad (2.2)$$

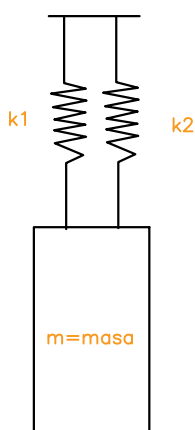
Despejando

$$m\ddot{y} + ky = F \quad (2.3)$$

La expresión anterior es la ecuación del movimiento para un oscilador de un grado de libertad.

2.1.1. Rigidez en paralelo

El sistema de rigideces en paralelo se representa en la figura 2.3



En el diagrama de cuerpo libre se expresa que hay una masa queriendo desplazar el sistema hacia abajo y una rigidez que impide dicho desplazamiento, eventualmente esta rigidez (resortes) sufrirá deformaciones.

Si se hace una sumatoria de fuerzas verticales $\sum F_y$ se tiene que:

$$-mg + k_1\delta + k_2\delta = 0 \quad (2.4)$$

Sacando factor común e igualando a “mg”:

$$mg = \delta(k_1 + k_2) \quad (2.5)$$

Figura 2.3 rigidez en paralelo

Para este caso en particular la rigidez equivalente será igual a la suma de la rigidez 1 más la rigidez 2, pero generalizando esta afirmación se utiliza la siguiente expresión para considerar “n” cantidad de rigideces:

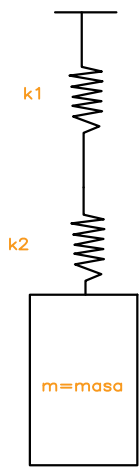
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n \quad (2.6)$$

Se puede simplificar la ecuación 2.5 de la siguiente manera:

$$mg = \delta(k_{eq}) \quad (2.7)$$

2.1.2. Rigidez en serie

Las rigideces en serie presentarán una deformación diferente por cada elemento bajo la acción de una misma fuerza, este sistema se representa en la figura 2.4.



Si se despeja el desplazamiento de la ecuación 2.7 se obtiene la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{mg}{k_{eq}} \quad (2.8)$$

Es importante mencionar que la rigidez equivalente empleada en el tema de “Rigidez en paralelo” expresada en la ecuación 2.6, no es la misma para el tema de “Rigidez en serie”.

Dicho lo anterior, si cada rigidez presentará una deformación “ δ ” diferente, es válido afirmar que la deformación total será:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n \quad (2.9)$$

Aplicando el principio de la ecuación 2.8, la ecuación 2.9 puede expresarse como:

$$\frac{mg}{k_{eq}} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} + \frac{mg}{k_3} + \dots + \frac{mg}{k_n} \quad (2.10)$$

Figura 2.4 rigidez en serie

Dividiendo la ecuación 2.10 entre “mg” se tiene:

$$\left(\frac{mg}{k_{eq}} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} + \frac{mg}{k_3} + \dots + \frac{mg}{k_n} \right) \left(\frac{1}{mg} \right) \quad (2.11)$$

Simplificando:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (2.12)$$

2.1.3 Concepto de amortiguamiento

Se define como una propiedad intrínseca de los materiales que provee la capacidad de disipar energía para alcanzar el reposo. Dentro de la ingeniería estructural, es importante que una masa que oscila libremente, después de haber sido perturbada de alguna forma, alcance dicho reposo; esto se puede optimizar adicionando amortiguamiento extra mediante mecanismos externos, debido a que éstos ayudan a que el sistema estructural se mantenga en el rango elástico lineal.

2.1.4 Concepto de fuerza inercial

Se define como la fuerza actuante en sentido opuesto al de la aceleración. Si un cuerpo experimenta una aceleración, la fuerza inercial tendrá un comportamiento de resistencia a dicha aceleración.

2.2 VIBRACIONES MECÁNICAS

Las propiedades básicas de cualquier sistema de 1 GDL son:

- Masa
- Rigidez
- Amortiguamiento

La vibración mecánica se define como la oscilación de la masa alrededor de su punto de equilibrio. Esta oscilación también depende de la rigidez y el amortiguamiento de la estructura. Estas vibraciones mecánicas se generan cuando la estructura sale de su condición de equilibrio debido a una excitación inicial.

2.3 VIBRACIÓN LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO

Invocando la ecuación 2.3, se asume que “F(t)” es igual a cero y queda una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y de primer grado. Se procede a resolver la siguiente ecuación:

$$m\ddot{y} + ky = F \quad (2.13)$$

Se hace una propuesta solución:

$$y = e^{\lambda t} \quad (2.14)$$

Como la ecuación diferencial es de segundo orden se deriva dos veces la ecuación anterior.

$$\dot{y} = \lambda(e^{\lambda t}) \quad (2.15)$$

$$\ddot{y} = \lambda^2(e^{\lambda t}) \quad (2.16)$$

Se sustituye en la ecuación 2.13

$$m(\lambda^2(e^{\lambda t})) + k((e^{\lambda t})) = 0 \quad (2.17)$$

Factorizando

$$e^{\lambda t}(m(\lambda^2) + k) = 0 \quad (2.18)$$

Despejando $e^{\lambda t}$

$$(m(\lambda^2) + k) = 0 \quad (2.19)$$

Despejando λ

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i \quad (2.20)$$

Es importante mencionar que $\sqrt{\frac{k}{m}}$ es la expresión que representa la frecuencia natural de la estructura “ ω ”, dicho lo anterior es válido afirmar que la ecuación 2.20 es igual a:

$$\lambda = \pm i(\omega) \quad (2.20)$$

Se sustituye λ en la ecuación 2.14

$$y = e^{(\pm i(\omega))t} \quad (2.21)$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y = C_1 e^{(i(\omega))t} + C_2 e^{(-i(\omega))t} \quad (2.22)$$

Se aplica la relación de Euler

$$e^{a \pm i(b)} = e^a (\cos b \pm i \sin b)$$

Se sustituye la relación de Euler en la ecuación 2.22

$$y = C_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + C_2 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \quad (2.23)$$

Se crean las condiciones iniciales para la ecuación 2.22

$$Si \quad y(t = 0) = y_0 \quad (2.24)$$

$$Si \quad \dot{y}(t = 0) = v_0 \quad (2.25)$$

Se deriva la ecuación 2.22 para obtener la ecuación de velocidad

$$\dot{y} = i(\omega)C_1 e^{(i(\omega))t} - i(\omega)C_2 e^{(-i(\omega))t} \quad (2.26)$$

Se aplican las condiciones iniciales para desplazamiento (ecuación (2.24)) en la ecuación 2.22

$$y_0 = C_1 + C_2 \quad (2.27)$$

Se despeja C_1

$$C_1 = y_0 - C_2 \quad (2.28)$$

Se aplican las condiciones iniciales para velocidad (ecuación (2.25)) en la ecuación 2.26

$$v_0 = i(\omega)C_1 - i(\omega)C_2 \quad (2.29)$$

Se sustituye la ecuación 2.28 en la ecuación 2.29 y despejando C_2 tenemos la siguiente expresión:

$$C_2 = \frac{v_0 - i(\omega)y_0}{-2i(\omega)} \quad (2.30)$$

Se multiplica la ecuación 2.30 por $\frac{i}{i}$ quedando la siguiente expresión:

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{v_0 i}{\omega} \right) \quad (2.31)$$

Se sustituye la ecuación 2.31 en la ecuación 2.28

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{v_0 i}{\omega} \right) \quad (2.32)$$

Posteriormente se sustituyen dichas ecuaciones en la ecuación 2.22

$$y = \frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{v_0 i}{\omega} \right) e^{i(\omega)t} + \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{v_0 i}{\omega} \right) e^{-i(\omega)t} \quad (2.33)$$

Se sustituyen las ecuaciones 2.31 y 2.32 en la ecuación 2.23

$$y = \left(\frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{v_0 i}{\omega} \right) \right) (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) + \left(\frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{v_0 i}{\omega} \right) \right) (\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)) \quad (2.34)$$

Se factoriza en términos de “ $\cos(\omega t)$ ” y “ $i \operatorname{sen}(\omega t)$ ”

$$y = \cos(\omega t) \left(\frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{v_0 i}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{v_0 i}{\omega} \right) \right) + i \operatorname{sen}(\omega t) \left(\frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{v_0 i}{\omega} \right) - \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{v_0 i}{\omega} \right) \right) \quad (2.35)$$

Simplificando la ecuación 2.35

$$y = \cos(\omega t) (y_0) - \operatorname{sen}(\omega t) \left(\frac{v_0}{\omega} \right) \quad (2.36)$$

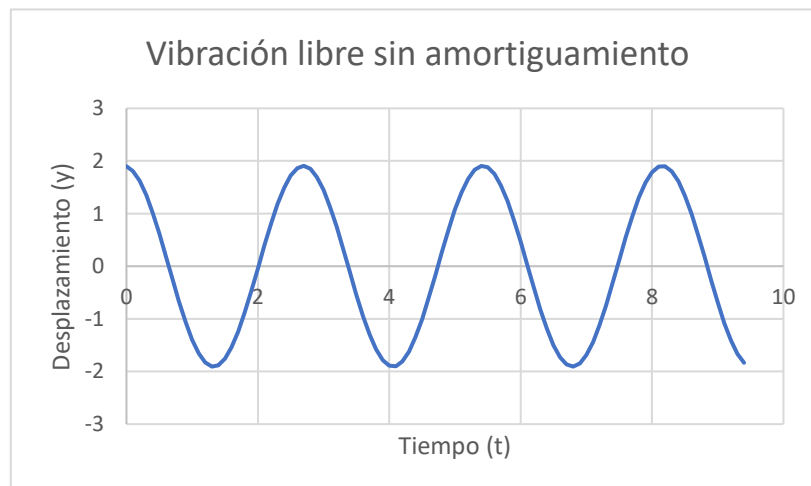
La ecuación 2.36 determina el desplazamiento de una estructura sin amortiguamiento, mismo que se representa gráficamente de la siguiente manera:

Utilizando los siguientes datos:

$$\omega = 2.3$$

$$y_0 = 1.9$$

$$v_0 = 0.4$$



Se puede apreciar que la estructura tiene un desplazamiento continuo y constante, debido a que no existe un amortiguamiento que disminuya el mismo.

2.4 VIBRACIÓN LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO

Se retoma el diagrama que representa el oscilador de un solo grado de libertad, con la diferencia de que ahora se tomará en cuenta el amortiguamiento.

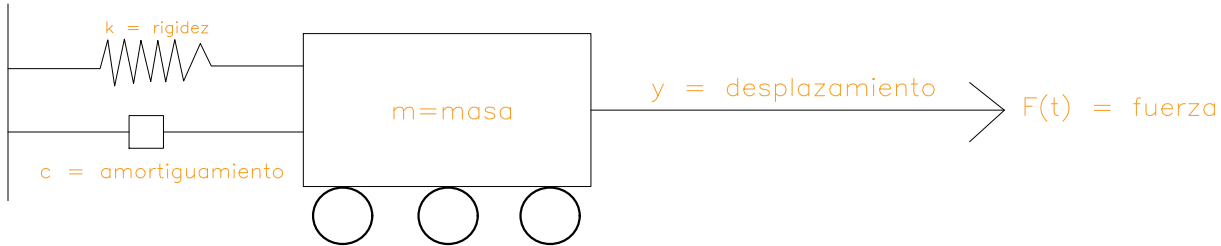
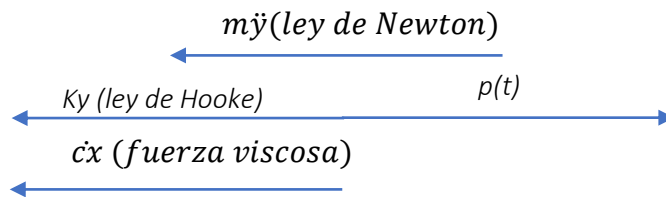


Figura 2.3. Oscilador de un grado de libertad con amortiguamiento

Se aplica el principio de D´Alambert para poner el sistema en equilibrio; se identifican las fuerzas del sistema y se hace un diagrama de cuerpo libre. Es importante mencionar que para representar una fuerza viscosa se emplea la siguiente expresión:

$$F = c\dot{x} \quad (2.36)$$

El diagrama de cuerpo libre de la figura 2.3 es:



Al hacer una sumatoria de fuerzas horizontales.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (2.37)$$

La expresión anterior es la ecuación diferencial del movimiento para un oscilador con un grado de libertad con amortiguamiento.

2.4.1 Cálculo de la ecuación del amortiguamiento crítico

Se hace una propuesta solución:

$$y = e^{\lambda t} \quad (2.38)$$

Como la ecuación diferencial es de segundo orden se deriva dos veces la ecuación anterior.

$$\dot{y} = \lambda(e^{\lambda t}) \quad (2.39)$$

$$\ddot{y} = \lambda^2(e^{\lambda t}) \quad (2.40)$$

Las ecuaciones 2.39 y 2.40 se sustituyen en la ecuación 2.37 Por lo tanto, la ecuación a resolver es:

$$m\lambda^2(e^{\lambda t}) + c\lambda(e^{\lambda t}) + ke^{\lambda t} = 0 \quad (2.41)$$

Se factoriza la expresión anterior

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0 \quad (2.42)$$

Se crea una condición inicial

$$\text{Si } y(t = 0) = y_0 \quad (2.43)$$

Se aplica la condición inicial en la ecuación 2.42 obteniendo la siguiente expresión cuadrática

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (2.44)$$

Se resuelve la ecuación cuadrática obteniendo

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (2.45)$$

Es importante recordar que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ por tanto la ecuación 2.45 queda de la siguiente manera

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \omega^2} \quad (2.46)$$

Se analiza el discriminante para obtener la ecuación de amortiguamiento crítico

$$\frac{c^2}{4m^2} - \omega^2 = 0 \quad (2.48)$$

$$c = \sqrt{4m^2\omega^2} \quad (2.49)$$

$$c = 2m\omega \quad (2.50)$$

Si el amortiguamiento que posea una estructura es mayor al amortiguamiento crítico se presentará un caso sobre amortiguado, si es menor se presentará un caso subamortiguado. El porcentaje de amortiguamiento de una estructura puede expresarse de la siguiente manera

$$\xi = \frac{c}{c_{cri}} \quad (2.51)$$

$\xi = 1$ *amortiguamiento crítico*

$\xi < 1$ *subamortiguamiento*

$\xi > 1$ *sobreamortiguamiento*

2.4.2 Respuesta sobreamortiguada

Al estar en vibración libre se puede afirmar que no hay ninguna carga que provoque la excitación de la estructura y por ende las condiciones iniciales son las que perturban al sistema y lo sacan de su posición de equilibrio.

Se retoman las condiciones iniciales de la ecuación 2.43 y se enumeran por separado

$$\text{Si } y(t = 0) = y_0 \quad (2.52)$$

$$\text{Si } \dot{y}(t = 0) = v_0 \quad (2.53)$$

Se divide la ecuación 2.37 entre la masa, quedando

$$\ddot{y} + \frac{c\dot{y}}{m} + \frac{ky}{m} = 0 \quad (2.54)$$

Se relaciona la ecuación 2.37 con ξ . De la ecuación 2.51 y 2.50 se puede hacer la siguiente afirmación:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.55)$$

Se despeja " $\frac{c}{m}$ " de la ecuación anterior, quedando la expresión 2.55 como:

$$\frac{c}{m} = \xi 2\omega \quad (2.56)$$

Es importante recordar que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.57)$$

Elevando al cuadrado ambos términos se obtiene la siguiente expresión:

$$\omega^2 = \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \right)^2 \quad (2.58)$$

Simplificando la expresión 2.58 se obtiene:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.59)$$

Se sustituyen las ecuaciones 2.56 y 2.59 en la ecuación 2.54 quedando:

$$\ddot{y} + \xi 2\omega \dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (2.60)$$

Se propone una solución para pasar de una ecuación diferencial a un polinomio característico

$$y = e^{\lambda t} \quad (2.61)$$

Como la ecuación diferencial es de segundo orden se deriva dos veces la ecuación anterior.

$$\dot{y} = \lambda(e^{\lambda t}) \quad (2.62)$$

$$\ddot{y} = \lambda^2(e^{\lambda t}) \quad (2.63)$$

Se sustituyen las ecuaciones 2.62, 2.63 y 2.61 en la ecuación 2.60

$$\lambda^2(e^{\lambda t}) + \xi 2\omega\lambda(e^{\lambda t}) + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \quad (2.64)$$

Se factoriza la expresión anterior

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \xi 2\omega\lambda + \omega^2) = 0 \quad (2.65)$$

Es importante mencionar que uno de los productos de la ecuación 2.65 es una expresión cuadrática, que a continuación se indicará para una mayor visualización:

$$\lambda^2 + \xi 2\omega\lambda + \omega^2 = 0 \quad (2.66)$$

Se resuelve la ecuación cuadrática 2.66 y se obtienen las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = -\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.67)$$

$$\lambda_2 = -\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.68)$$

Es importante mencionar que el siguiente término de la ecuación 2.67 corresponde a la frecuencia amortiguada:

$$\omega\sqrt{\xi^2 - 1} = \text{frecuencia amortiguada} = \omega_D \quad (2.69)$$

Por tanto, las ecuaciones 2.67 y 2.68 quedan expresadas como:

$$\lambda_1 = -\xi\omega + \omega_D \quad (2.70)$$

$$\lambda_2 = -\xi\omega - \omega_D \quad (2.71)$$

Se completa la propuesta solución (ecuación 2.61) con las raíces recién obtenidas y se les agrega las constantes de integración correspondientes quedando de la siguiente manera:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.72)$$

Se sustituyen las ecuaciones 2.70 y 2.71 en la ecuación 2.72

$$y = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t} \quad (2.73)$$

Se factoriza la expresión anterior

$$y = e^{-\xi\omega t}(C_1 e^{\omega_D t} + C_2 e^{-\omega_D t}) \quad (2.74)$$

Se aplican las condiciones iniciales para el desplazamiento (ecuación 2.52) en la ecuación 2.74 y queda la siguiente expresión

$$y_0 = C_1 + C_2 \quad (2.75)$$

Se deriva la ecuación 2.74 para obtener la ecuación de velocidad:

$$\dot{y} = -\xi\omega e^{-\xi\omega t}(C_1 e^{\omega_D t} + C_2 e^{-\omega_D t}) + e^{-\xi\omega t}(\omega_D C_1 e^{\omega_D t} - \omega_D C_2 e^{-\omega_D t}) \quad (2.76)$$

Se aplican las condiciones iniciales para la velocidad (ecuación 2.53) en la ecuación 2.76 y queda la siguiente expresión

$$\dot{y}_0 = -\xi\omega(C_1 + C_2) + (\omega_D C_1 - \omega_D C_2) \quad (2.77)$$

Se plantea un sistema de ecuaciones 2x2 con las ecuaciones 2.77 y 2.75 y obtenemos los siguientes valores para C_1 y C_2

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D} \right) \quad (2.78)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D} \right) \quad (2.79)$$

Vale la pena hacer énfasis que las expresiones anteriores son conjugados complejos, dicho lo anterior se procede a sustituir en la ecuación 2.74

$$y = e^{-\xi\omega t} \left(\left(\frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D} \right) \right) e^{\omega_D t} + \left(\frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D} \right) \right) e^{-\omega_D t} \right) \quad (2.80)$$

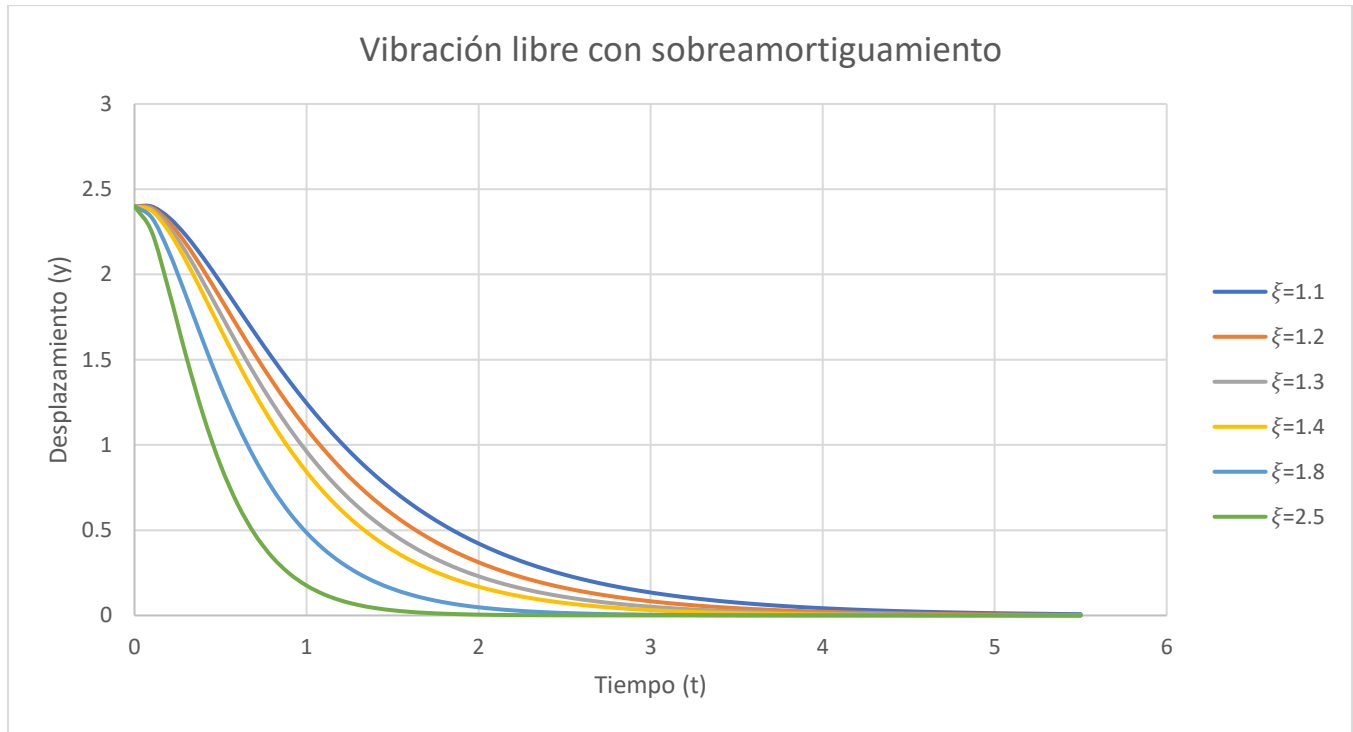
La ecuación anterior se expresa en función de identidades trigonométricas hiperbólicas, quedando como:

$$y = e^{-\xi\omega t} \left(y_0 \cosh(\omega_D t) + \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right) \quad (2.81)$$

La ecuación 2.81 determina el desplazamiento de una estructura sobreamortiguada, mismo que se representa gráficamente de la siguiente manera:

Utilizando los siguientes datos:

$$\omega = 1.8 \quad y_0 = 2.4 \quad \omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad v_0 = 0.4$$



Se utilizaron distintos valores de amortiguamiento para demostrar que un sistema con amortiguamiento mayor que 1 no produce vibraciones y que a mayor amortiguamiento menor será el tiempo para que el desplazamiento sea cero.

2.4.3 Respuesta subamortiguada

Para plantear esta respuesta se considerará la ecuación 2.81 y se debe tener presente que la frecuencia amortiguada se expresa $\omega\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega_D$. Trabajar con respuestas subamortiguadas implica que el valor de ξ es menor a 1, lo que significa que la frecuencia amortiguada tendrá valores imaginarios, expresándose finalmente de la siguiente manera:

$$\omega_D = \omega i\sqrt{1 - \xi^2} \tag{2.82}$$

Se sustituye la ecuación 2.82 en la ecuación 2.81, quedando como:

$$y = e^{-\xi\omega t} \left(y_0 \cosh(\omega i\sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{y_0 + \xi\omega y_0}{\omega i\sqrt{1 - \xi^2}} \sinh(\omega i\sqrt{1 - \xi^2} t) \right) \tag{2.83}$$

Posteriormente se relacionan las funciones hiperbólicas con las trigonométricas para quitar los números imaginarios.

$$\cosh(ix) = \cos x \quad (2.84)$$

$$\sinh(ix) = i \sin x \quad (2.85)$$

Se aplican las funciones trigonométricas hiperbólicas en la ecuación 2.83, quedando:

$$y = e^{-\xi\omega t} \left(y_0 \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\dot{y}_0 + \xi\omega y_0}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2} t) \right) \quad (2.86)$$

La expresión anterior es la ecuación que determina el desplazamiento de una estructura subamortiguada.

La ecuación 2.86 determina el desplazamiento de una estructura subamortiguada, mismo que se representa gráficamente de la siguiente manera:

Utilizando los siguientes datos:

$$\omega = 1.8$$

$$y_0 = 2.4$$

$$v_0 = 0.4$$



Con esta gráfica se demuestra que la estructura subamortiguada reduce su movimiento gradualmente conforme pasa el tiempo.

III. RIGIDEZ LATERAL Y MATRIZ DE MASAS

3.1 DEDUCCIÓN DE LOS FACTORES DE RIGIDEZ ANGULAR

Estos valores pueden extraerse de la mayoría de los libros de análisis estructural, pero para efectos de ejemplificación se deducirá la rigidez angular para una viga biempotrada.



Figura 3.1 Viga biempotrada

Se obtiene la función de momento asumiendo que se conocen los elementos mecánicos de los apoyos.

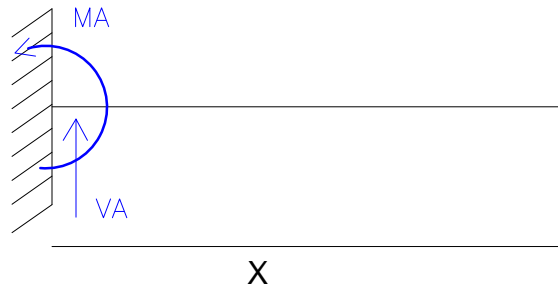


Figura 3.2 Viga en corte

Se calculan los elementos mecánicos

$$-M_A + V_A x = M(x) \quad (3.1)$$

Se aplica la ecuación diferencial de la curva elástica y se integra dos veces

$$EI \iint \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_A + V_A x \quad (3.2)$$

Se integra una primera vez y la expresión que resulta es:

$$EI \int \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_A x + V_A x^2 \quad (3.3)$$

$$EI \theta \int \frac{dy}{dx} = -M_A x + \frac{V_A x^2}{2} + C_1 \quad (3.4)$$

Se integra una segunda vez para obtener la ecuación de $y(x)$

$$EI y = \frac{-M_A x^2}{2} + \frac{V_A x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (3.5)$$

Se plantean las condiciones de frontera.

$$\text{Si } x = 0L; \theta_x = -1; y_x = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{Si } x = L; \theta_x = 0; y_x = 0 \quad (3.7)$$

Haciendo uso de la ecuación 3.6 en las ecuaciones de 3.4 y 3.5 para hallar los valores de C_1 y C_2 quedan las siguientes expresiones

$$C_1 = -EI \quad (3.8)$$

$$C_2 = 0 \quad (3.9)$$

Una vez hallado el valor de las constantes de integración C_1 y C_2 se reescriben las ecuaciones 3.4 y 3.5

$$EI\theta \int \frac{dy}{dx} = -M_A x + \frac{V_A x^2}{2} - EI \quad (3.10)$$

$$EIy = \frac{-M_A x^2}{2} + \frac{V_A x^3}{6} - EIx \quad (3.11)$$

Se aplica la última condición de frontera (ecuación 3.7) en la ecuación 3.10 y 3.11 obteniendo las siguientes expresiones:

$$-M_A L + \frac{V_A L^2}{2} - EI = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{-M_A L^2}{2} + \frac{V_A L^3}{6} - EIL = 0 \quad (3.13)$$

Se plantea un sistema de ecuaciones con las expresiones 3.12 y 3.13, se despeja el cortante de la ecuación 3.12

$$V_A = \frac{2M_A}{L} + \frac{2EI}{L^2} \quad (3.14)$$

Se sustituye la ecuación 3.14 en la ecuación 3.13

$$\frac{-M_A L^2}{2} + \frac{\frac{2M_A}{L} + \frac{2EI}{L^2} L^3}{6} - EIL = 0 \quad (3.15)$$

Se simplifica la expresión anterior, quedando:

$$\frac{-M_A L^2}{6} - \frac{2EI(L)}{3} = 0 \quad (3.16)$$

Se despeja el momento de la ecuación 3.16

$$M_A = \frac{\left(\frac{-2EI(L)6}{3}\right)}{L^2}$$

$$M_A = \frac{(-4EI)}{L} \quad (3.17)$$

Se halla el cortante sustituyendo la ecuación 3.17 en la ecuación 3.14

$$V_A = \frac{2\left(\frac{-4EI}{L}\right)}{L} + \frac{2EI}{L^2} \quad (3.18)$$

$$V_A = -\frac{(8EI)}{L^2} + \frac{2EI}{L^2} \quad (3.19)$$

$$V_A = -\frac{6EI}{L^2} \quad (3.20)$$

Las ecuaciones 3.17 y 3.20 se colocan en un extremo de la viga biempotrada para hallar las reacciones faltantes a través de las ecuaciones de la estática, quedando de la siguiente manera:



Figura 3.3 Viga biempotrada con deducción de los factores de rigidez angular

3.2 DEDUCCIÓN DE LOS FACTORES DE RIGIDEZ LINEAL

Se le permite a la restructura desplazarse verticalmente una unidad en uno de sus apoyos como se muestra en la figura 3.4

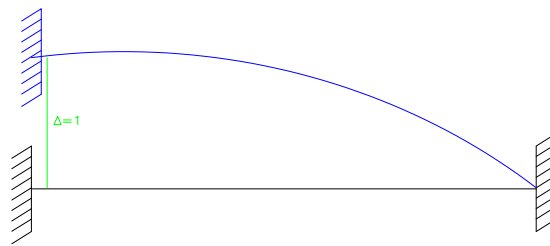


Figura 3.4 Viga biempotrada factores de rigidez lineal

Debido a que el procedimiento es prácticamente el mismo que se usó para deducir los factores de rigidez angular, salvo las operaciones posteriores a las condiciones de frontera se omitirán algunos cálculos empezando por las condiciones antes mencionadas.

$$\text{Si } x = 0L; \theta_x = 0; y_x = 1 \quad (3.21)$$

$$\text{Si } x = L; \theta_x = 0; y_x = 0 \quad (3.22)$$

Se encuentran los valores de C_1 y C_2 aplicando la primera condición de frontera (ecuación 3.21)

$$C_1 = 0 \quad (3.23)$$

$$C_2 = EI \quad (3.24)$$

Los valores anteriores se sustituyen en las ecuaciones 3.4 y 3.5 quedando:

$$-M_A x + \frac{V_A x^2}{2} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{-M_A x^2}{2} + \frac{V_A x^3}{6} + EI = 0 \quad (3.26)$$

Se aplica la segunda condición de frontera (ecuación 3.22) en la ecuación 3.25 y 3.26

$$-M_A L + \frac{V_A L^2}{2} = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{-M_A L^2}{2} + \frac{V_A L^3}{6} + EI = 0 \quad (3.28)$$

Se despeja el cortante de la ecuación 3.27

$$V_A = \frac{2M_A}{L} \quad (3.29)$$

Se sustituye la ecuación 3.29 en la ecuación 3.28

$$-\frac{1}{6} M_A L^2 + EI = 0 \quad (3.30)$$

Se despeja M_A de la expresión anterior.

$$M_A = \frac{6EI}{L^2} \quad (3.31)$$

Se sustituye la ecuación 3.31 en la ecuación 3.29

$$V_A = \frac{12EI}{L^3} \quad (3.32)$$

La ecuación 3.31 y 3.32 son las expresiones que definen el momento y el cortante de la viga, los otros dos factores se calculan a través de las ecuaciones de la estática, quedando de la siguiente manera:

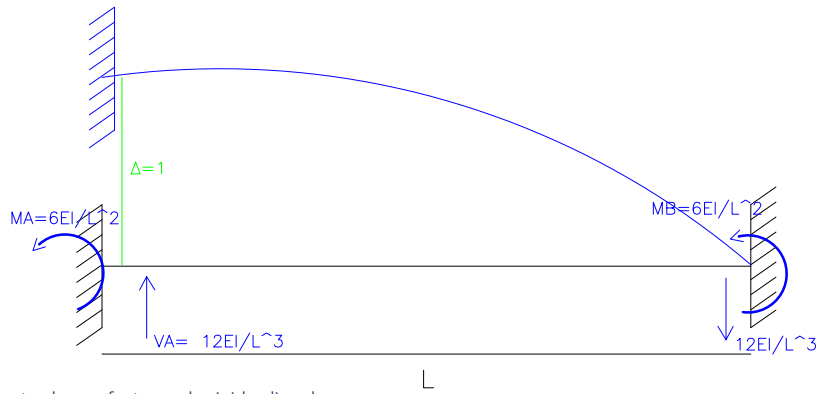


Figura 3.5 Viga biempotrada con factores de rigidez lineal

3.3 MÉTODO DE LA RIGIDEZ CLÁSICO

Para explicar el método de la rigidez clásico se supone la siguiente viga:

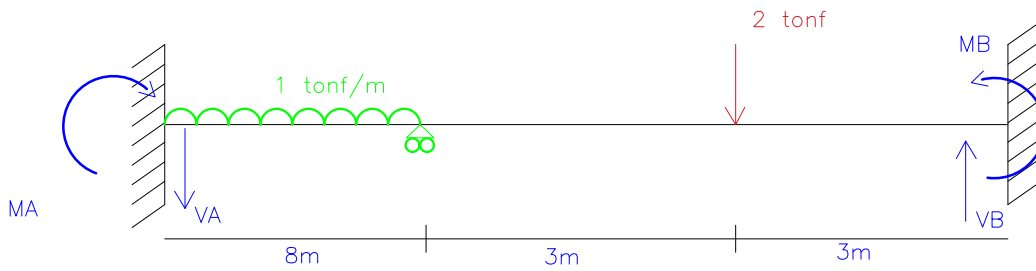


Figura 3.6 Viga para ejemplificar el método de la rigidez clásico

Este método consiste en rigidizar la estructura, es decir: buscar el mínimo número de puntos en donde se pueda producir un giro (comúnmente en los apoyos)

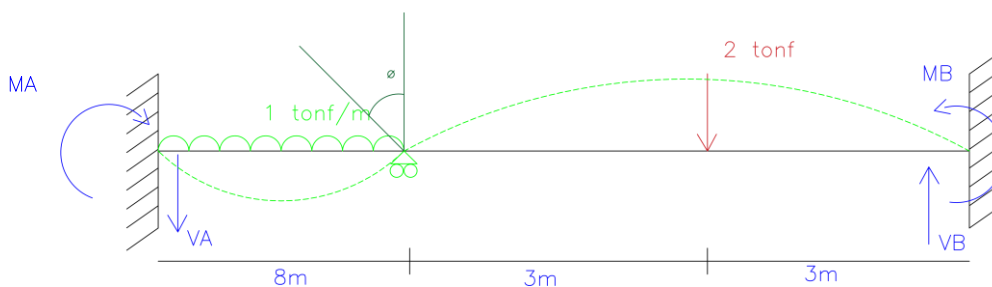


Figura 3.7 Viga para ejemplificar en donde se produce un giro en el método de la rigidez clásico

Posteriormente se coloca dicho empotramiento para impedir dicho giro

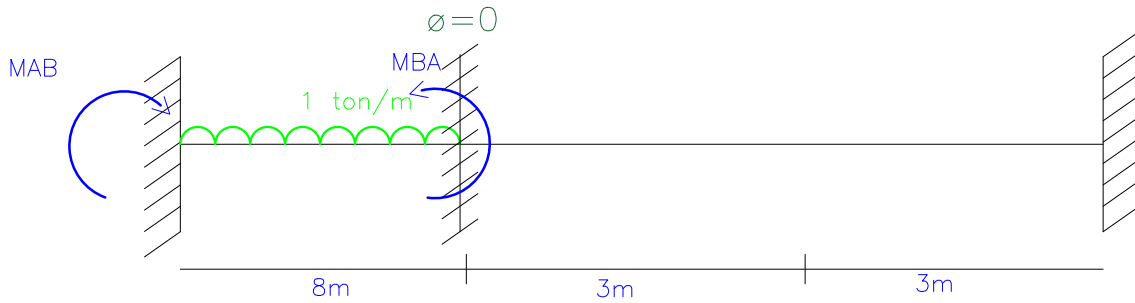


Figura 3.8 Viga para ejemplificar en donde se supone un empotramiento en el método de la rigidez clásico

De esta manera, el giro tiene un valor de cero. Además, se tienen dos claros, y en varios libros de análisis estructural existen tablas, generalmente nombrada “Momentos de empotramiento en vigas prismáticas” donde se pueden extraer elementos mecánicos según el tipo de carga.

Se buscan los momentos de empotramiento en las tablas antes mencionadas, para este caso, al primer claro le corresponde el siguiente momento de empotramiento:

$$M_{AB} = \frac{wl^2}{12} \quad (3.33)$$

$$M_{BA} = -M_{AB} \quad (3.33.1)$$

Sustituyendo los valores del primer claro en la ecuación 3.33

$$M_{AB} = \frac{1(8)^2}{12} \text{ tonf} * m \quad (3.34)$$

$$M_{AB} = -5.3 \text{ tonf} * m \quad (3.35)$$

Por consiguiente:

$$M_{BA} = 5.3 \text{ tonf} * m \quad (3.36)$$

Se procede a trabajar con el segundo claro, mismo que le corresponde el siguiente momento de empotramiento:

$$M_{BC} = \frac{PL}{8} \text{ tonf} * m \quad (3.37)$$

$$M_{CB} = -M_{BC} \quad (3.37.1)$$

Sustituyendo los valores del segundo claro en la ecuación 3.37

$$M_{BC} = \frac{(2)(6)}{8} \text{ tonf} * m \quad (3.38)$$

$$M_{BC} = -1.5 \text{ tonf} * m \quad (3.39)$$

Por consiguiente:

$$M_{CB} = 1.5 \text{ tonf} * m \quad (3.40)$$

A continuación, se asigna en el empotramiento un giro unitario

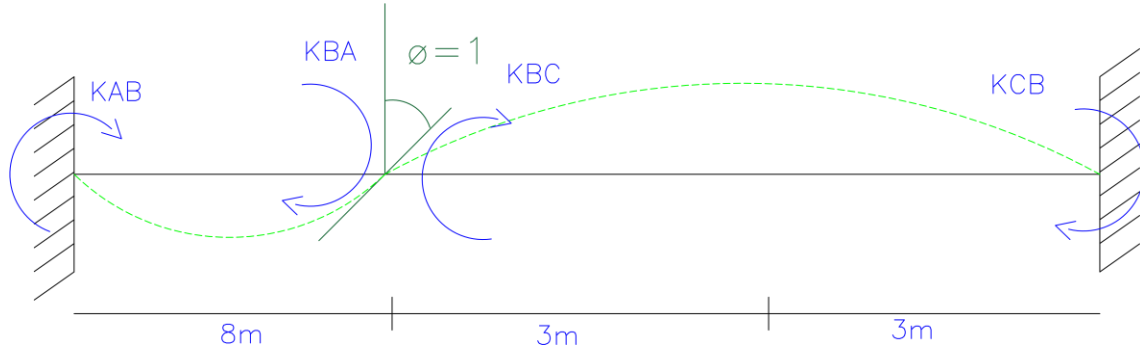


Figura 3.9 Viga para ejemplificar en donde se supone el giro unitario en el método de la rigidez clásico

Al tener una rotación se producirán rigideces (k), expresadas en forma de momento; el valor de estas rigideces se determinará con ayuda de la tabla “Rigideces angulares y lineales para desplazamientos unitarios”

Al momento K_{AB} le corresponde la siguiente expresión:

$$K_{AB} = \frac{2EI}{L} \quad (3.41)$$

Se sustituyen los valores del primero claro

$$K_{AB} = \frac{2EI}{8} \quad (3.42)$$

$$K_{AB} = \frac{EI}{4} \quad (3.43)$$

Al momento K_{BA} le corresponde la siguiente expresión:

$$K_{BA} = \frac{4EI}{L} \quad (3.44)$$

Se sustituyen los valores del primero claro

$$K_{BA} = \frac{4EI}{8} \quad (3.45)$$

$$K_{BA} = \frac{EI}{2} \quad (3.46)$$

Se calculan las rigideces del segundo claro

$$K_{BC} = \frac{2EI}{3} \quad (3.47)$$

$$K_{CB} = \frac{EI}{3} \quad (3.48)$$

Se plantea la ecuación de equilibrio para calcular el giro; es importante mencionar que los momentos, giros, y rigideces están en función de "B" porque fue en ese punto en donde se planteó el empotramiento.

$$M_{BA} + M_{BC} + (K_{BA} + K_{BC})\theta_B = 0 \quad (3.49)$$

Se sustituyen los valores antes obtenidos en la ecuación 3.49

$$\frac{16}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}EI + \frac{2}{3}EI\right)\theta_B = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{23}{6} + \frac{7}{6}EI\theta_B = 0 \quad (3.51)$$

$$\theta_B = -\frac{23}{7} \quad (3.52)$$

Se calcula el momento real AB

$$M_{AB} = M_{ABe} + K_{AB}\theta_B \quad (3.53)$$

Se sustituyen las expresiones 3.52, 3.43 y 3.52 en la ecuación 3.53

$$M_{AB} = -5.3 + \frac{1}{4}\left(-\frac{23}{7}\right) \quad (3.54)$$

$$M_{AB} = -6.1547 \text{ tonf} * m \quad (3.55)$$

Se calcula el momento real BA

$$M_{BA} = M_{BAe} + K_{BA}\theta_B \quad (3.56)$$

Se sustituyen las expresiones 3.36, 3.46 y 3.52 en la ecuación 3.53

$$M_{BA} = \frac{16}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{23}{7}\right) \quad (3.57)$$

$$M_{BA} = 3.69 \text{ tonf} * m \quad (3.58)$$

Se calcula el momento real de BC

$$M_{BC} = M_{BC} + K_{BC}\theta_B \quad (3.59)$$

Se sustituyen las expresiones 3.39, 3.47 y 3.52 en la ecuación 3.53

$$M_{BC} = -1.5 + \frac{2}{3}\left(-\frac{23}{7}\right) \quad (3.60)$$

$$M_{BA} = -3.69 \text{ tonf} * m \quad (3.61)$$

Se calcula el momento real de CB

$$M_{CB} = M_{CB_e} + K_{CB}\theta_B \quad (3.62)$$

Se sustituyen las expresiones 3.40, 3.48 y 3.52 en la ecuación 3.53

$$M_{CB} = 1.5 + \frac{1}{3}\left(-\frac{23}{7}\right) \quad (3.63)$$

$$M_{CB} = 0.404761 \text{ tonf} * m \quad (3.64)$$

Se colocan los resultados obtenidos (ecuaciones 3.64, 3.61, 3.58 y 3.55) en la viga para una mejor visualización, teniendo en cuenta que las unidades mostradas en la figura 3.10 correspondientes a los momentos son “tonf*m” y las unidades correspondientes a los cortantes son “tonf”

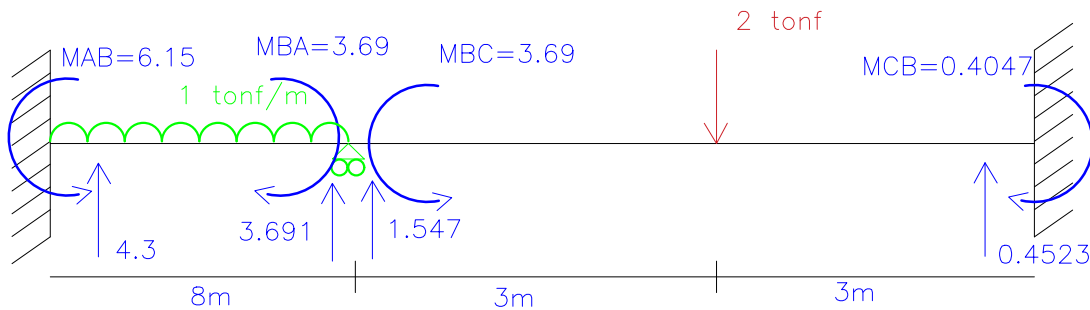


Figura 3.10 Viga resuelta para ejemplificar el método de la rigidez clásico

3.4 MÉTODO DE LA RIGIDEZ MATRICIAL

Para explicar este método se ocupará la viga resuelta en el apartado anterior, con el fin de llegar a los mismos resultados, pero antes de iniciar la explicación de este procedimiento es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones:

Los apoyos presentados en el ejercicio se sustituirán por resortes, omitiendo las reacciones horizontales y valores.

Se sabe que el apoyo empotrado no permite desplazamiento, por lo que es válido, siguiendo la ley de Hooke, afirmar que:

$$M = K_{\theta}\theta \quad (3.65)$$

$$F_y = K_y\Delta_y \quad (3.66)$$

Si se despeja θ y Δ_y de las ecuaciones 3.65 y 3.66 se obtiene:

$$\Delta_y = \frac{F_y}{K_y} \quad (3.67)$$

$$\theta = \frac{M}{K_{\theta}} \quad (3.68)$$

Debido a que la condición de apoyo es un empotramiento, se espera que los desplazamientos sean cero, por lo que se puede afirmar que para que esto suceda las rigideces deben tender a infinito.

Se sabe que el apoyo móvil no permite desplazamiento vertical ni rotación, por lo que es válido, siguiendo la ley de Hooke, afirmar que:

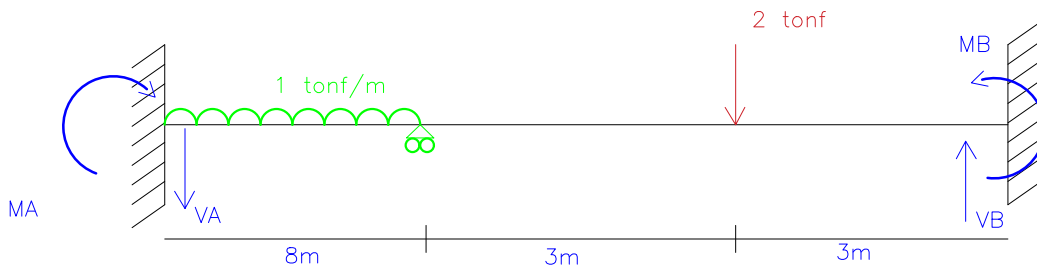
$$F_y = K_y\Delta_y \quad (3.69)$$

Si se despeja Δ_y de la ecuación 3.69 se obtiene:

$$\Delta_y = \frac{F_y}{K_y} \quad (6.70)$$

Debido a que la condición de apoyo es móvil, se espera que el desplazamiento y rotación sea cero, por lo que se puede afirmar que para que esto suceda la rigidez debe tender a infinito.

Para fines ilustrativos se invocará la figura 3.6:



Se discretizará la estructura colocando los grados de libertad (color azul) correspondientes a cada apoyo enumerando primeramente las rotaciones y después los desplazamientos.

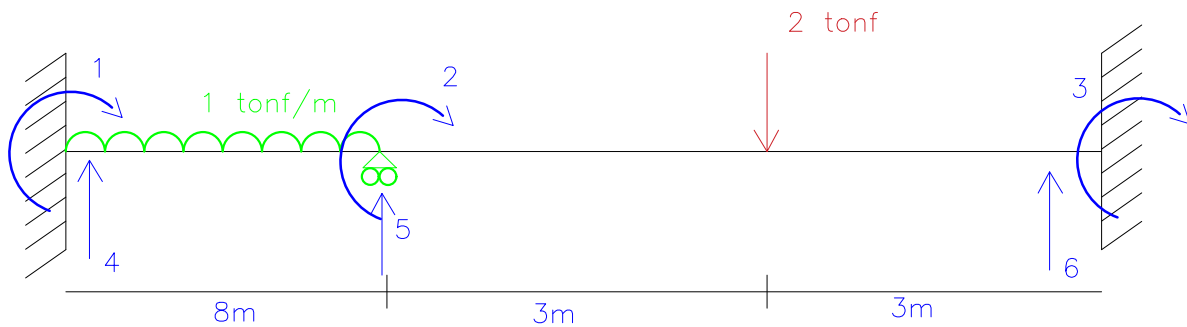


Figura 3.11 Colocación y numeración de grados de libertad. Rigidez matricial

El número de los grados de libertad propuestos indican el tamaño de la matriz de rigidez, en este caso será una matriz de 6x6. A continuación, se calcularán las cargas que determinan el vector de fuerzas. Primeramente, se trabajará con el claro AB, en donde, por los temas previamente vistos, dicho claro se puede expresar de la siguiente manera:

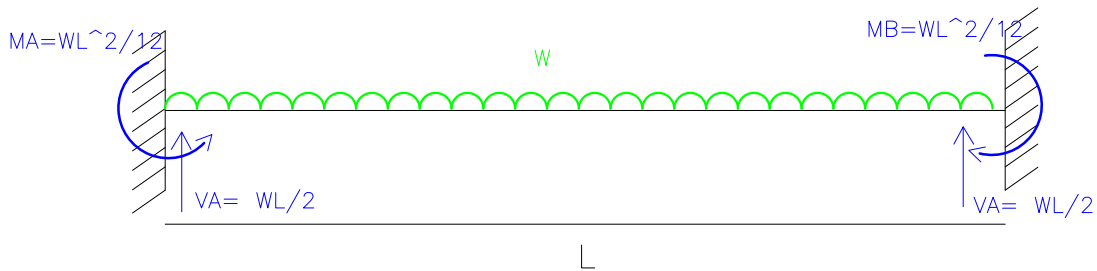


Figura 3.12. Momentos de empotramiento para viga con carga uniformemente repartida

Y para el segundo claro se ocupará:

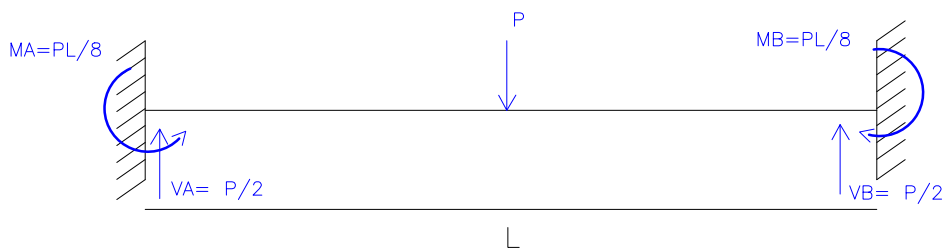


Figura 3.13. Momentos de empotramiento para viga con carga puntual

Los valores del momento y cortante para el primer claro serán, de manera respectiva:

$$M_A = -\frac{16}{3} \text{ tonf} * m \quad (3.71)$$

$$M_B = \frac{16}{3} \text{ tonf} * m \quad (3.72)$$

$$V_A = 4 \text{ tonf} \quad (3.73)$$

$$V_B = 4 \text{ tonf} \quad (3.74)$$

Los valores del momento y cortante para el primer claro serán, de manera respectiva:

$$M_A = -\frac{3}{2} \text{ tonf} * m \quad (3.75)$$

$$M_B = \frac{3}{2} \text{ tonf} * m \quad (3.76)$$

$$V_A = 1 \text{ tonf} \quad (3.77)$$

$$V_B = 1 \text{ tonf} \quad (3.78)$$

Se vacían los valores previamente obtenidos, cortantes y momentos, (de la ecuación 3.71 – 3.78) en la viga, sin tomar en cuenta las cargar originales, tomando en cuenta que los momentos están expresado en “tonf*m” y los cortantes en “tonf”

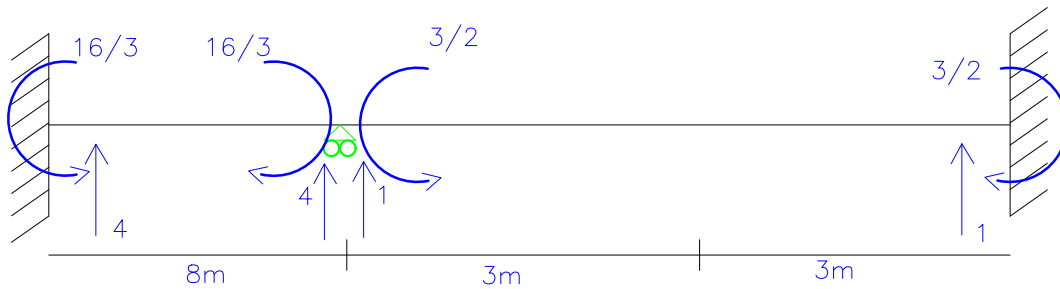


Figura 3.14. Viga con valores de momentos de empotramiento y cortantes

Se determina la matriz de rigidez local, recordando que los coeficientes que a continuación se mostrarán se deducen a través del método de flexibilidades, pero se omitirá ese procedimiento debido a que sale fuera de los alcances de la tesis. Los coeficientes de rigidez están expresados por la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Debido a que la viga en cuestión se dividió en dos tramos, se generarán dos matrices locales, una por cada elemento (cada tramo) que componga la viga.

Es importante mencionar que la primera columna corresponde un desplazamiento lineal en el nodo "A", la segunda columna corresponde a un desplazamiento angular en el nodo "A", la tercera y cuarta columna corresponden a desplazamientos lineales y angulares respectivamente en el nodo "B".

Observando el primer tramo de la viga se puede apreciar que los grados de libertad participantes son 4 (desplazamiento lineal), 1 (desplazamiento angular), 5 (desplazamiento lineal) y 2 (desplazamiento angular), tal como se muestra en la siguiente figura:

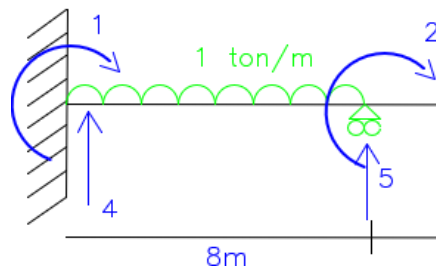


Figura 3.15. Grados de libertad participantes en el primer tramo de la viga

Es conveniente colocar los grados de libertad participantes al principio de cada columna y cada fila dependiendo del tipo de desplazamiento en cuestión.

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \mathbf{1} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \mathbf{5} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \mathbf{2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Se procede a sustituir los valores que corresponden al primer tramo de la viga en la matriz 3.80, quedando

Matriz del elemento 1

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & 0.02343 & 0.0937 & -0.02343 & 0.0937 \\ \mathbf{1} & 0.0937 & 0.5 & -0.0937 & 0.25 \\ \mathbf{5} & -0.02343 & -0.0937 & 0.02343 & -0.0937 \\ \mathbf{2} & 0.0937 & 0.25 & -0.0937 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Se realiza el mismo procedimiento para el elemento 2

Matriz del elemento 2

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & 0.055 & 0.166 & -0.055 & 0.166 \\ \mathbf{2} & 0.166 & 0.667 & -0.166 & 0.333 \\ \mathbf{6} & -0.055 & -0.166 & 0.055 & -0.166 \\ \mathbf{3} & 0.166 & 0.333 & -0.166 & 0.667 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Se procede a calcular la matriz de rigidez global, tomando en cuenta que para vigas la ecuación que representa esta matriz está dada por:

$$[K_G] = \sum_{i=1} [K_i^i] \quad (3.83)$$

Para ensamblar la matriz de rigidez global se procede a numerar dicha matriz utilizando todos los grados de libertad que participan en toda la viga, esto determinará el tamaño de la matriz, que para el ejemplo utilizado será una matriz de 6x6 (debido a que el total de grados de libertad de toda la viga son 6)

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & & & & & & \\ \mathbf{2} & & & & & & \\ \mathbf{3} & & & & & & \\ \mathbf{4} & & & & & & \\ \mathbf{5} & & & & & & \\ \mathbf{6} & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Para llenar la matriz 3.84 se procede a identificar, en todas las matrices de rigidez local, la intersección de columnas con filas correspondientes a los grados de libertad, es decir: para llenar el primer espacio (columna 1, fila 1) se buscará si dicho grado de libertad participa en cualquiera de las dos matrices locales calculadas previamente, en caso de participar en ambas matrices, los valores correspondientes a cada una de ella se sumarán.

Se puede observar que el grado de libertad "1" solo participa en la matriz del elemento 1, cuyo valor es de 0.5; sin embargo, se observa que el grado de libertad "2" participa en ambas matrices siendo un valor de "0.5" para el primer elemento y "0.667" para el segundo elemento, siendo la sumatoria de 1.167. Estos valores se colocarán en la matriz de rigidez 3.84

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & 0.5 & & & & & \\ \mathbf{2} & & 1.167 & & & & \\ \mathbf{3} & & & & & & \\ \mathbf{4} & & & & & & \\ \mathbf{5} & & & & & & \\ \mathbf{6} & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Se realiza el mismo procedimiento para terminar de ensamblar la matriz de rigidez global.

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & 0.5 & 0.25 & 0 & 0.0937 & -0.0937 & 0 \\ \mathbf{2} & 0.25 & 1.16 & 0.333 & 0.0937 & 0.0723 & -0.16 \\ \mathbf{3} & 0 & 0.333 & 0.667 & 0 & 0.16 & -0.16 \\ \mathbf{4} & 0.0937 & 0.0937 & 0 & 0.02343 & -0.02343 & 0 \\ \mathbf{5} & -0.0937 & 0.0723 & 0.16 & -0.02343 & 0.07843 & -0.055 \\ \mathbf{6} & 0 & -0.166 & -0.16 & 0 & -0.055 & 0.055 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Se determina el vector de fuerza relacionando momentos flectores y cortantes. De la figura 11 se sabe que los grados de libertad 1,2 y 3 se relacionan a momentos y los grados de libertad 4,5 y 6 se relacionan a cortantes. Se procede a la asignación de valores, expresados en la figura 14, correspondientes a cada grado de libertad.

Es importante mencionar que los momentos en el apoyo móvil se comparten, por lo que deben sumarse para obtener el momento total en ese punto, lo mismo pasa con los cortantes. Quedando el vector de fuerzas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{16}{3} \\ F_2 = -\frac{23}{6} \\ F_3 = \frac{3}{2} \\ F_4 = 4 \\ F_5 = 5 \\ F_6 = 1 \end{array} \right\} \quad (3.87)$$

Por todos los conceptos vistos anteriormente se asume que la siguiente expresión es verdadera:

$$[K]\{\mu\} + \{F\} = 0 \quad (3.88)$$

Despejando $\{\mu\}$ de la ecuación 3.88 se obtiene:

$$\{\mu\} = [K^{-1}]\{F\} \quad (3.89)$$

Se sustituye la ecuación 3.86 y 3.87 en la ecuación 3.89, quedando:

$$\{\mu\} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & 0.5 + 10^{100} & 0.25 & 0 & 0.0937 & -0.0937 & 0 \\ \mathbf{2} & 0.25 & 1.16 & 0.333 & 0.0937 & 0.0723 & -0.16 \\ \mathbf{3} & 0 & 0.333 & 0.667 + 10^{100} & 0 & 0.16 & -0.16 \\ \mathbf{4} & 0.0937 & 0.0937 & 0 & 0.02343 + 10^{100} & -0.02343 & 0 \\ \mathbf{5} & -0.0937 & 0.0723 & 0.16 & -0.02343 & 0.07843 + 10^{100} & -0.055 \\ \mathbf{6} & 0 & -0.166 & -0.16 & 0 & -0.055 & 0.055 + 10^{100} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{23}{6} \\ \frac{3}{2} \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

El cálculo anterior se resuelve en Excel, pero es importante recordar la explicación que se dio al inicio de este apartado, en donde se explica el porque es necesario hacer que las rigideces tiendan a infinito, únicamente en donde se encuentran los grados de libertad, es decir: en los valores de la diagonal de la matriz.

Dicho de otra manera: la diagonal principal de la matriz tomará valores muy grandes, exceptuando el grado de libertad 2 debido a que en esa posición se encuentra el apoyo móvil, del cual solo se espera cortante y no es necesario hacer que la rigidez tienda a infinito porque no existe momento flector en ese punto.

El resultado de esa operación es:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} -6.1548E - 300 \\ 3.285714286 \\ 4.0476E - 101 \\ 3.692E - 300 \\ 4.7604E - 300 \\ 1.5476E - 300 \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

Los resultados anteriores corresponden a los desplazamientos que habrá en cada grado de libertad, según sea el caso; obedeciendo la ecuación 3.88 se sustituyen los valores correspondientes al elemento 1 y al elemento 2.

Quedando el elemento 1 y 2 de la siguiente manera:

Elemento 1

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 0.02343 & 0.0937 & -0.02343 & 0.0937 \\ 1 & 0.0937 & 0.5 & -0.0937 & 0.25 \\ 5 & -0.02343 & -0.0937 & 0.02343 & -0.0937 \\ 2 & 0.0937 & 0.25 & -0.0937 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.692E - 300 \\ -6.1548E - 300 \\ 4.7604E - 300 \\ 3.285714286 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 5.33 \\ 4 \\ -5.33 \end{Bmatrix} \quad (3.92)$$

Elemento 2

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 0.055 & 0.166 & -0.055 & 0.166 \\ 2 & 0.166 & 0.667 & -0.166 & 0.333 \\ 6 & -0.055 & -0.166 & 0.055 & -0.166 \\ 3 & 0.166 & 0.333 & -0.166 & 0.667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.7604E - 300 \\ 3.285714286 \\ 1.5476E - 300 \\ 4.0476E - 101 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ -1 \\ -1.5 \end{Bmatrix} \quad (3.93)$$

El resultado de la expresión 3.92 (elemento 1) es:

$$\begin{bmatrix} V_A = 4.308035714 \\ M_A = 6.154761905 \\ V_B = 3.691964286 \\ M_B = -3.69047619 \end{bmatrix}$$

(3.94)

El resultado de la expresión 3.93 (elemento 2) es:

$$\begin{bmatrix} V_A = 1.547619048 \\ M_A = 3.69047619 \\ V_B = 0.452380952 \\ M_B = -0.404761905 \end{bmatrix}$$

(3.95)

Se colocan los resultados (expresiones 3.94 y 3.95) en la viga y se puede apreciar que éstos coinciden con los valores de la viga resuelta por el método de rigidez clásico, considerando que los momentos están expresados en “tonf*m” y los cortantes en “tonf”

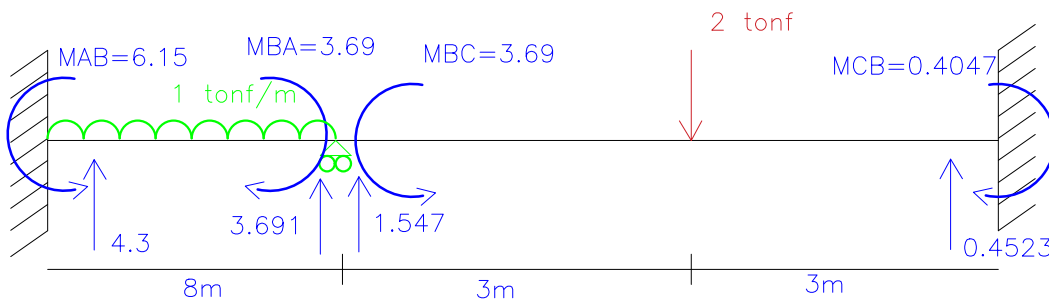


Figura 3.16. Viga resuelta por el método de rigidez matricial.

3.5 CONDENSACIÓN ESTÁTICA

Para los casos anteriores vistos en vigas no fue necesario aplicar ningún desplazamiento traslacional, dado que únicamente nos centramos en determinar la rotación del apoyo móvil, no obstante, los marcos que no están restringidos lateralmente suelen ser afectados o desplazados ante una excitación dinámica, por lo que es necesario calcular un desplazamiento lateral a nivel de losa.

Se puede definir la rigidez lateral como la fuerza necesaria para inducirle un desplazamiento lateral unitario a una estructura.

Para poder explicar la condensación estática se supondrá el siguiente marco:

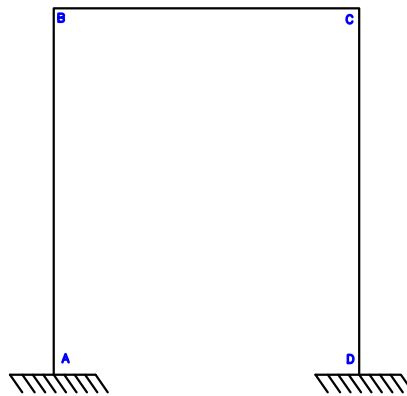


Figura 3.17 Marco de un nivel y una crujía para condensación estática

Se aplica el método de rigideces y se restringen los grados de libertad rotacionales y lineales; estas restricciones se realizan en el nodo "B" y "C" quedando de la siguiente manera:

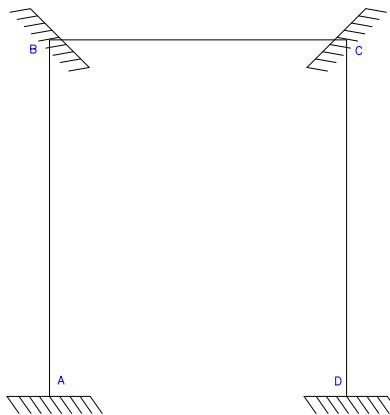


Figura 3.18 Marco rigidizado de un nivel y una crujía para condensación estática

Se libera el nudo "B" para permitir un giro unitario, posteriormente se calculan los factores de rigidez angular tanto en columnas como en vigas. Por los antecedentes vistos previamente se sabe que dichos factores quedan como se muestra en la figura:

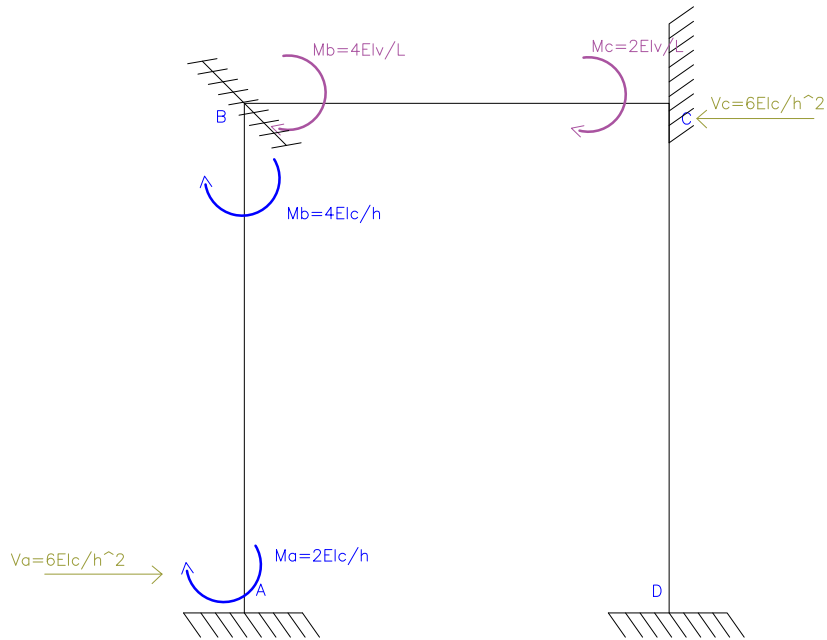


Figura 3.19 Marco liberado en el nudo B de un nivel y una crujía para condensación estática

Se libera el nudo "C" para permitir el giro unitario y se sigue el mismo procedimiento

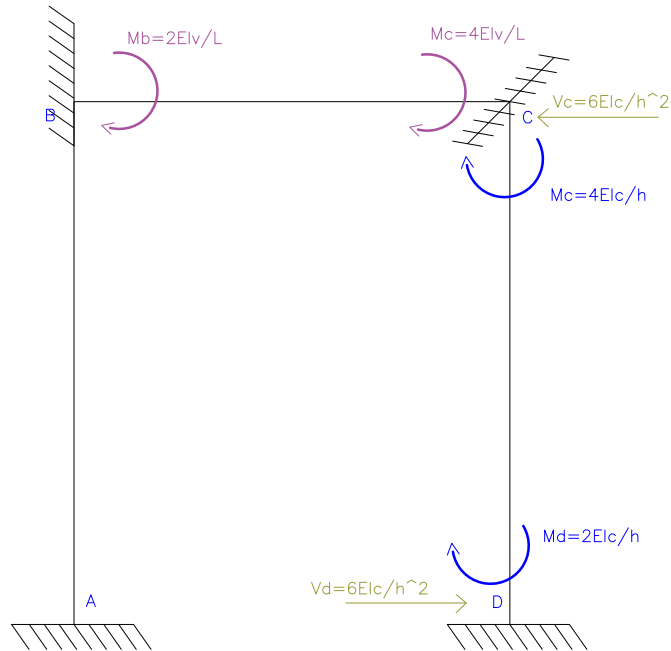


Figura 3.20 Marco liberado en el nudo C de un nivel y una crujía para condensación estática

A continuación, se libera el nudo "B" y "C" para permitir un desplazamiento lineal. Se aconseja que en el método de rigideces se sustituya un giro por cada empotramiento y al final se calcule un desplazamiento delta, procedimiento que se hará a continuación:

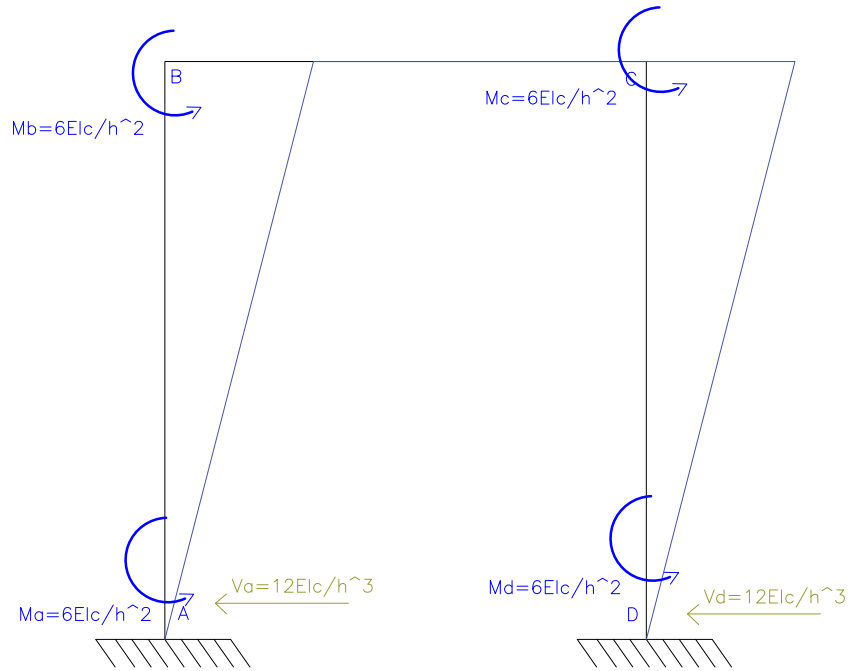


Figura 3.21 Marco desplazado linealmente de un nivel y una cruzija para condensación estática

Se plantea la ecuación de equilibrio en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{4Ehc}{h} + \frac{4Ehv}{L}\right) & \frac{2Ehv}{L} & -\frac{6Ehc}{h^2} \\ \frac{2Ehv}{L} & \left(\frac{4Ehc}{h} + \frac{4Ehv}{L}\right) & -\frac{6Ehc}{h^2} \\ -\frac{6Ehc}{h^2} & -\frac{6Ehc}{h^2} & \frac{24Ehc}{h^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \\ F \end{Bmatrix} \quad (3.96)$$

Se realiza un artificio matemático que consiste en un cambio de variable, representándolo de la siguiente manera:

$$y = \begin{pmatrix} \frac{Ehv}{L} \\ \frac{Ehc}{h} \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Se factoriza $\frac{Ehc}{h}$ y se sustituye en la ecuación 3.96, posteriormente se realiza una condensación estática, misma que consiste en particionar las matrices y vectores con el fin de separar el desplazamiento rotacional del lineal.

$$\begin{bmatrix} \varnothing_B \\ \varnothing_C \\ \Delta_C \end{bmatrix} \left[\frac{EI_C}{h} \right] \begin{bmatrix} 4(1 + \gamma) & 2\gamma & -\frac{6}{h} \\ 2\gamma & 4(1 + \gamma) & -\frac{6}{h} \\ -\frac{6}{h} & -\frac{6}{h} & \frac{24}{h^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_B \\ M_C \\ \Delta_C \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Los valores subrayados con amarillo se pueden definir como K_{11} , los valores que están subrayados en rojo se pueden definir como K_{21} , los valores que están subrayados en azul se pueden definir como K_{12} y valor subrayado en morado se define como K_{22} , quedando la expresión 3.98 expresada como:

$$\begin{bmatrix} \varnothing \\ \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ F \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Se expresa la ecuación 3.99 en forma de sistema de ecuaciones, quedando de la siguiente manera:

$$K_{11}\varnothing + K_{12}\Delta = M \quad (3.100)$$

$$K_{21}\varnothing + K_{22}\Delta = F \quad (3.101)$$

Se despeja el giro de la ecuación 3.100, quedando de la siguiente manera

$$\varnothing = K_{11}^{-1}[M - K_{12}\Delta] \quad (3.102)$$

Se sustituye en la ecuación 3.101, quedando:

$$K_{21}(K_{11}^{-1}[M - K_{12}\Delta]) + K_{22}\Delta = F \quad (3.103)$$

Se coloca la ecuación 3.103 de tal manera que se exprese la ley de Hooke:

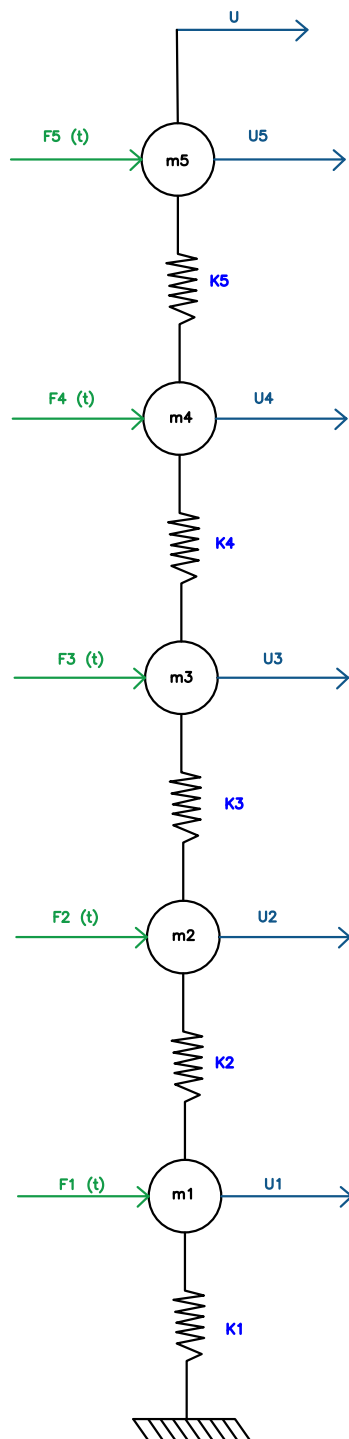
$$F - K_{21}K_{11}^{-1}M = (K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12})\Delta \quad (3.104)$$

Se expresa la ecuación 3.104 en términos de rigidez lateral:

$$K_L = (K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}) \quad (3.105)$$

3.6 DEDUCCIÓN DE LA MATRIZ DE MASAS

Para la deducción se supondrá un oscilador de cinco grados de libertad. Se aplicará el principio de D'Alambert y multiplicando la rigidez por un desplazamiento para obtener para obtener una fuerza se hace una sumatoria de fuerzas en cada entrespiso.



$$F_5 - K_5(U_5 - U_4) - m_5\ddot{U}_5 = 0 \quad (3.106)$$

$$F_4 - K_4(U_4 - U_3) + K_5(U_5 - U_4) - m_4\ddot{U}_4 = 0 \quad (3.107)$$

$$F_3 - K_3(U_3 - U_2) + K_4(U_4 - U_3) - m_3\ddot{U}_3 = 0 \quad (3.108)$$

$$F_2 - K_2(U_2 - U_1) + K_3(U_3 - U_2) - m_2\ddot{U}_2 = 0 \quad (3.109)$$

$$F_1 - K_1(U_1) + K_2(U_2 - U_1) - m_1\ddot{U}_1 = 0 \quad (3.110)$$

Llevando las expresiones anteriores a la forma de la ecuación del movimiento sin amortiguamiento:

$$F_1(t) = m_1\ddot{U}_1 + K_1U_1 - K_2(U_2 - U_1) \quad (3.111)$$

$$F_2(t) = m_2\ddot{U}_2 + K_2(U_2 - U_1) - K_3(U_3 - U_2) \quad (3.112)$$

$$F_3(t) = m_3\ddot{U}_3 + K_3(U_3 - U_2) - K_4(U_4 - U_3) \quad (3.113)$$

$$F_4(t) = m_4\ddot{U}_4 + K_4(U_4 - U_3) - K_5(U_5 - U_4) \quad (3.114)$$

$$F_5(t) = m_5\ddot{U}_5 + K_5(U_5 - U_4) \quad (3.115)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores:

$$F_1(t) = m_1\ddot{U}_1 + (K_1 + K_2)U_1 - K_2U_2 \quad (3.116)$$

$$F_2(t) = m_2\ddot{U}_2 - K_2U_1 + (K_2 + K_3)U_2 - K_3U_3 \quad (3.117)$$

$$F_3(t) = m_3\ddot{U}_3 - K_3U_2 + (K_3 + K_4)U_3 - K_4U_4 \quad (3.118)$$

$$F_4(t) = m_4\ddot{U}_4 - K_4U_3 + (K_4 + K_5)U_4 - K_5U_5 \quad (3.119)$$


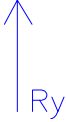

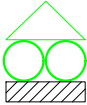
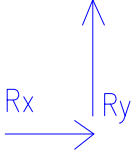

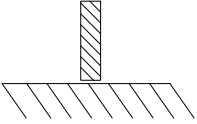
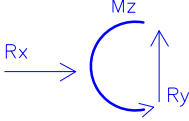

$$F_5(t) = m_5\ddot{U}_5 - K_5U_4 - K_5U_5 \quad (3.120)$$

Se expresan las ecuaciones anteriores en su forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \\ F_5(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \\ \ddot{u}_4(t) \\ \ddot{u}_5(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & K_4 + K_5 & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -K_5 & K_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{Bmatrix} \quad (3.121)$$

3.7 CONDICIONES DE APOYO

Las principales condiciones de apoyo estructural se ilustrarán a continuación

Nombre del apoyo	Esquema	Diagrama	Fotografía	Notas
Móvil				Permite el desplazamiento horizontal y rotación
Fijo/Articulado				Solo permite rotación
Empotrado				No permite ningún tipo de desplazamiento o rotación

IV. ANÁLISIS MODAL

Con el análisis modal se puede llevar a cabo el estudio de las propiedades dinámicas de las estructuras lineales, tales como:

- Frecuencias naturales
- Modos de vibración
- Periodos de vibración
- Etc.

Es importante mencionar que estas propiedades están en función de la rigidez, amortiguamiento y masa de la estructura.

4.1 EIGENVALORES O VALORES CARACTERÍSTICOS

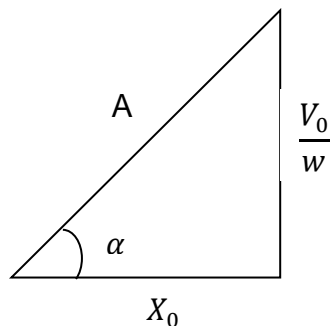
Se parte de la ecuación del movimiento correspondiente a la vibración libre sin amortiguamiento en su forma matricial y vectorial haciendo las siguientes consideraciones: “ $\ddot{u} = \dot{x}$ ” y “ $u = x$ ”

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{P(t)\} \quad (4.1)$$

Se propone una solución que satisfaga la ecuación 4.1, por los temas vistos anteriormente se sabe que dicha solución es:

$$X = x_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4.2)$$

La expresión anterior se pondrá en función de seno o coseno, para dicho fin se propone un triángulo rectángulo de la siguiente manera:



Por teoremas de Pitágoras:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2} \quad (4.3)$$

Determinando cos y sen por funciones trigonométricas

$$\cos \alpha = \frac{ca}{h} \quad (4.4)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{co}{h} \quad (4.5)$$

Quedando las ecuaciones 4.4 y 4.5 de la siguiente manera:

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{A} \quad (4.4.1)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{V_0}{Aw} \quad (4.5.1)$$

Se multiplica la ecuación 4.2 por $\frac{A}{A}$

$$X = A \left(\frac{x_0}{A} \cos(wt) + \frac{V_0}{Aw} \text{sen}(wt) \right) \quad (4.6)$$

Se sustituye la ecuación 4.4.1 y 4.5.1 en la ecuación 4.6

$$X = A(\cos(\alpha) \cos(wt) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(wt)) \quad (4.7)$$

Invocando la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen}A \text{sen}B$$

Aplicando la ecuación anterior a la ecuación 4.7

$$x = A \cos(wt - \alpha) \quad (4.8)$$

Sustituyendo la ecuación 4.3 en la ecuación 4.8

$$x = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} \cos(wt - \alpha) \quad (4.9)$$

Derivando dos veces la ecuación 4.8 para obtener la aceleración:

$$\dot{x} = -wA \text{sen}(wt - \alpha)$$

$$\ddot{x} = -w^2 A \cos(wt - \alpha) \quad (4.10)$$

Sustituyendo la ecuación 4.9 y 4.10 en la ecuación 4.1

$$[m]\{-w^2 A \cos(wt - \alpha)\} + [k]\{A \cos(wt - \alpha)\} = \{P(t)\} \quad (4.11)$$

Ignorando la condición vectorial y matricial de la ecuación 4.11 y haciendo $\{P(t)\} = \{0\}$

$$-w^2 mA \cos(wt - \alpha) + kA \cos(wt - \alpha) = 0$$

Factorizando cosenos

$$[k - w^2 m]A \cos(wt - \alpha) = \{0\}$$

Reconsiderando las notaciones vectoriales y matriciales

$$[k - w^2 m]\{A \cos(wt - \alpha)\} = \{0\}$$

Recordando que $x = A \cos(wt - \alpha)$

$$[k - w^2 m]\{x\} = \{0\} \quad (4.12)$$

A partir de la ecuación 4.12 se pretende conocer el valor del vector “x” sin que este sea cero, para tales fines habrá valores de w^2 que al operarlos en $[k - w^2 m]$ darán un determinante igual a cero, de esta manera la matriz en cuestión no podrá ser invertida y por ende el vector “x” será diferente de cero, por tanto:

$$|k - w^2 m| = 0 \quad (4.13)$$

Los valores que adopte w^2 son conocidos como eigenvalores o valores propios. Es importante mencionar que existirán tantos eigenvalores como GDL tenga la estructura

Para encontrar los valores de w^2

- Se hace el cambio de variable antes mencionado $w^2 = \lambda$
- Se calcula el determinante, siendo el resultado una ecuación polinómica de grado “n”, donde “n” está en función de los GDL de la estructura.
- Se resuelve dicha ecuación cuidando que “ $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ ”
- Se devuelve el cambio de variable, recordando que $w_n = \sqrt{\lambda_n}$ y cuidando que $w_1 < w_2 < \dots < w_n$

4.2 FRECUENCIAS Y PERIODOS NATURALES DE LA ESTRUCTURA

La frecuencia de una estructura se obtiene a partir de los eigenvalores; como se vio en el subcapítulo anterior:

$$w^2 = \lambda \quad (4.14)$$

Por tanto, la frecuencia de la estructura queda representada como:

$$w = \sqrt{\lambda} \quad (4.15)$$

El periodo natural de vibrar de una estructura se define como el tiempo que tarda en completarse un ciclo y puede expresarse como:

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad (4.16)$$

El periodo de una estructura es muy importante en el diseño sísmico, además de que nos ayuda a conocer parámetros importantes como las fuerzas laterales que impactan en la estructura (a través de un ADME o un ADTH), conocer si se está dentro de resonancia, etc.

4.3 EIGENVECTORES O VECTORES PROPIOS

Los eigenvectores o vectores característicos permiten generar la matriz modal que determina los modos de vibrar de la estructura.

Recordando que:

$$\det[k - w^2m] = 0 \quad (4.17)$$

Y pensando en un sistema de múltiples GDL, tendremos dos variables de lambda, en donde

$$\lambda_1 < \lambda_2$$

Recordando que la ecuación de movimiento en vibración libre sin amortiguamiento puede expresarse de la siguiente manera:

$$[k - \lambda m]\{x\} = \{0\} \quad (4.18)$$

Se sustituye λ_1 y λ_2 por separado en la ecuación 4.18

$$[k - \lambda_1 m]\{x_1\} = 0 \quad (4.19)$$

$$[k - \lambda_2 m]\{x_2\} = 0 \quad (4.20)$$

Se desarrollan las ecuaciones 4.19 y 4.20 respectivamente

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \lambda_1 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda_1 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \lambda_2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda_2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

El arreglo anterior nos da la posibilidad de acomodar los vectores de desplazamiento de la ecuación 4.21 y 4.22 de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

Los vectores de desplazamiento de la ecuación 4.21 y 4.22 se conocen como eigenvectores o vectores característicos. Sin embargo, en estos casos es usual usar Φ para denotar los desplazamientos, quedando:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

4.4 MODOS DE VIBRAR DE LA ESTRUCTURA

Dándole continuidad a los subcapítulos previamente vistos:

Se realiza el siguiente cambio de variable para representar la matriz de rigidez de la ecuación 4.21

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

Quedando la ecuación 4.21 de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Es fácil darse cuenta que si Φ_{11} y Φ_{21} son cero, la ecuación 4.23 queda resuelta, sin embargo, como hemos visto en capítulos anteriores, como se quiere evitar que el vector de desplazamiento sea cero, dado que eso conducirá a soluciones triviales.

Dicho lo anterior, los valores que se asignarán a Φ_{11} y Φ_{21} serán:

$$\Phi_{11} = 1 \quad (4.24)$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{21} \quad (4.25)$$

Estos valores pudieron haber sido asignados de manera contraria, según el criterio del lector. Se sustituyen las ecuaciones 4.24 y 4.25 en la ecuación 4.23

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Desarrollando la ecuación 4.26

$$V_{11}(1) + V_{12}(\Phi_{21}) = 0 \quad (4.27)$$

$$V_{21}(1) + V_{22}(\Phi_{21}) = 0 \quad (4.28)$$

Se despeja Φ_{21} de una de las dos ecuaciones 4.27 o 4.28, en este caso se elegirá la ecuación 4.27, quedando:

$$\Phi_{21} = -\frac{V_{11}}{V_{12}} \quad (4.29)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la ecuación 4.22 que contiene lambda 2 λ_2 , asignándole a $\Phi_{12} = 1$

$$\Phi_{12} = 1 \quad (4.30)$$

$$\Phi_{22} = -\frac{V_{11,1}}{V_{12,1}} \quad (4.31)$$

Se procede a obtener la matriz modal, sabiendo que

$$[\Phi] = [\{\Phi_{n1}\}\{\Phi_{n2}\}]$$

Lo que para este ejemplo puede expresarse como:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.24, 4.29, 4.30 y 4.31 en la ecuación 4.33

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{V_{11}}{V_{12}} & -\frac{V_{11,1}}{V_{12,1}} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

La ecuación 4.34 representa la matriz modal y lo contenido dentro de esta matriz serán los modos de vibrar de la estructura. Lo que puede interpretarse de la siguiente manera:

$$[\Phi_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{V_{11}}{V_{12}} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

La expresión 4.35 representa el primer modo de vibrar de la estructura, lo que quiere decir que por cada unidad que se desplace el piso 1, el piso 2 se desplazará $-\frac{V_{11}}{V_{12}}$.

4.5 FACTOR DE PARTICIPACIÓN MODAL DE MASAS

El análisis sísmico de cualquier estructura se representa por la definición de los diferentes modos de vibración de la estructura en función de su configuración geométrica y la matriz de rigideces de la misma.

Cada modo de vibración se encuentra asociado con el factor de participación modal (T_i) el cual representa el factor de participación de la masa sísmica para dicho modo de vibración, comúnmente, se espera que el factor de participación modal de masas sea mayor al 90%, al menos en la NTC-sismo-2020, no obstante, la normativa de los diferentes países puede solicitar un valor diferente (menor o mayor)

La siguiente expresión es usada para determinar el factor de participación de masa.

$$T_i = \frac{\sum m_i \Phi_i}{\sum m_i \Phi_i^2}$$

En donde:

T_i = *factor de participación de masa*

m_i = *masa*

Φ_i = *modo de vibrar*

V. DEDUCCIÓN DE LOS MÉTODOS ADTH Y SU USO PARA DETERMINAR ESPECTROS DE RESPUESTA EN SISTEMAS DE 1 GDL

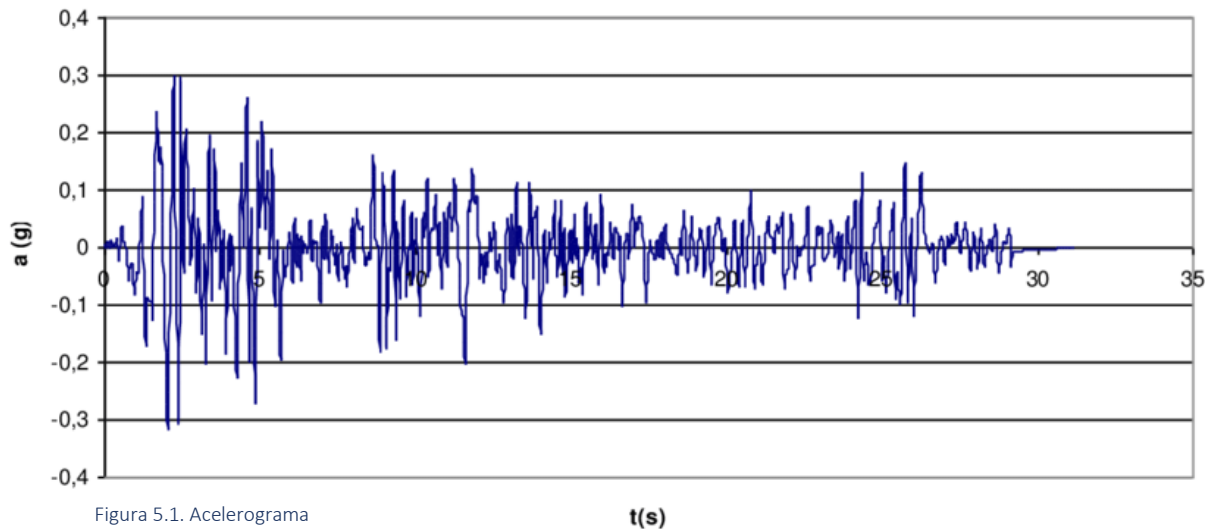
Con la evolución de las computadoras ha sido posible agilizar los cálculos computacionales y con ello, subsidiar las necesidades del ingeniero proyectista. Así ha sido posible cambiar la filosofía de diseño y con ello la evolución de los métodos numéricos, es decir, puede que en algún momento ya no sean permitidos los análisis dinámico modal espectral y se requiera únicamente los análisis tiempo historia.

En la realidad, las estructuras, después de ser excitadas, no regresan al mismo punto desde donde empezó su movimiento, sino que hay un desplazamiento residual. El análisis dinámico modal espectral considera que la estructura llegará al mismo punto de partida de donde comenzó su excitación, caso contrario al análisis dinámico tiempo historia, que si considera ese desplazamiento residual. Además, de que el análisis dinámico tiempo historia se consideran varios casos estáticos poniendo cargas laterales con diferente valor que cambian con el tiempo.

Es importante mencionar que el desplazamiento residual implica daño de la estructura y requiere de un análisis no lineal, temas que salen del alcance de esta tesis.

5.1 MÉTODO DE LA INTERPOLACIÓN DE LA EXCITACIÓN (8 CTES)

Se sabe que gráficamente un sismo se ve de la siguiente manera, por poner un ejemplo:

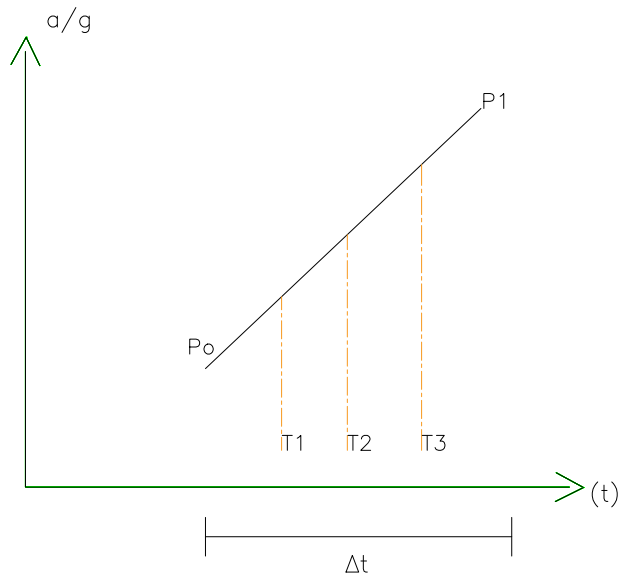


Si se realiza un zoom a determinada región de esa gráfica, se podrá observar lo siguiente:



5.2 Zoom a una región determinada de la figura 5.1

En la figura 5.1 se puede observar que hay regiones muy aproximadas a ser líneas rectas, si se toma un intervalo pequeño de tiempo y se grafica como una línea recta se tendrá lo siguiente:



5.3 gráfica de una línea recta

Donde:

P_0 = punto inicial

P_1 = punto final

λ = distancia del eje a un punto de la recta

Δt = intervalo de tiempo

Se sabe que la ecuación general de la recta es:

$$y = mx + b$$

Y la ecuación de la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por tanto, la ecuación que definirá la línea recta de la figura 5.3 será:

$$P(\lambda) = P_0 + \frac{P_1 - P_0}{\Delta t} \lambda \quad (5.1)$$

Recordando la ecuación del movimiento deducida en capítulos anteriores, pero poniéndola en función de λ :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(\lambda) \quad (5.2)$$

Dividiendo la ecuación 5.2 entre la masa y realizando las asociaciones correspondientes, explicada en capítulos anteriores, a cada término se tiene:

$$\ddot{x} + 2\xi w\dot{x} + w^2x = \frac{w^2}{k} P(\lambda) \quad (5.3)$$

Sustituyendo la ecuación 5.1 en la ecuación 5.3

$$\ddot{x} + 2\xi w\dot{x} + w^2x = \frac{w^2}{k} \left(P_0 + \frac{P_1 - P_0}{\Delta t} \lambda \right) \quad (5.3.1)$$

Por comodidad se hará el siguiente cambio de variable:

$$\left(\frac{P_1 - P_0}{\Delta t} \right) = \alpha$$

Quedando la ec. 5.3.1:

$$\ddot{x} + 2\xi w\dot{x} + w^2x = \frac{w^2}{k} (P_0 + \alpha\lambda) \quad (5.4)$$

Planteando la ecuación complementaria " x_c " cuando $\xi < 1$

$$x_c = e^{-\xi w\lambda} (C_1 \cos(w_D\lambda) + C_2 \text{sen}(w_D\lambda)) \quad (5.4.1)$$

Planteando la solución particular " x_p "

$$x_p = A_1 + A_2\lambda \quad (5.5)$$

Derivando dos veces la ecuación 5.5, dado que es una ecuación de segundo orden.

$$x_p = A_1 + A_2 \lambda$$

$$\dot{x}_p = A_2 \quad (5.6)$$

$$\ddot{x}_p = 0 \quad (5.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.6 y 5.7 en la ecuación 5.4

$$0 + 2\xi w A_2 + w^2(A_1 + A_2 \lambda) = \frac{w^2}{k}(P_0 + \alpha \lambda) \quad (5.7.1)$$

Desarrollando la ecuación 5.7.1

$$0 + 2\xi w A_2 + w^2 A_1 + w^2 A_2 \lambda = \frac{w^2}{k} P_0 + \frac{w^2}{k} (\alpha \lambda) \quad (5.7.2)$$

Asociando los términos constantes y términos que contengan λ

$$2\xi w A_2 + w^2 A_1 = \frac{w^2}{k} P_0 \quad (5.8)$$

$$w^2 A_2 \lambda = \frac{w^2}{k} (\alpha \lambda) \quad (5.9)$$

Despejando A_2 de la ecuación 5.9

$$A_2 = \frac{\frac{w^2 \alpha \lambda}{k}}{w^2 \lambda} \quad (5.9.1)$$

$$A_2 = \frac{\alpha}{k} \quad (5.10)$$

Sustituyendo la ecuación 5.10 en la ecuación 5.8

$$2\xi w \frac{\alpha}{k} + w^2 A_1 = \frac{w^2}{k} P_0 \quad (5.10.1)$$

Despejando A_1 de la ecuación 5.10.1

$$A_1 = \frac{\frac{w^2}{k} P_0 - 2\xi w \frac{\alpha}{k}}{w^2} \quad (5.10.2)$$

Se resuelve la ecuación 5.10.2

$$A_1 = \frac{\frac{(w^2 P_0 - 2\xi w \alpha)}{k}}{w^2}$$

$$A_1 = \frac{w^2 P_0 - 2\xi w \alpha}{k w^2}$$

$$A_1 = \frac{w^2 P_0}{k w^2} - \frac{2\xi w \alpha}{k w^2}$$

$$A_1 = \frac{P_0}{k} - \frac{2\xi\alpha}{kw} \quad (5.11)$$

Se sabe que la solución de la ecuación está compuesta por una ecuación complementaria “ x_c ” y una ecuación particular “ x_p ”, es decir:

$$x = x_p + x_c \quad (5.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.10 y 5.11 en la ecuación 5.5

$$x_p = \left(\frac{P_0}{k} - \frac{2\xi\alpha}{kw}\right) + \left(\frac{\alpha}{k}\right)\lambda \quad (5.12.1)$$

Sustituyendo la ecuación 5.12.1 y la ecuación 5.4.1 en la ecuación 5.12

$$x = \left(e^{-\xi w\lambda}(C_1 \cos(w_D\lambda) + C_2 \sin(w_D\lambda))\right) + \left(\left(\frac{P_0}{k} - \frac{2\xi\alpha}{kw}\right) + \frac{\alpha}{k}\lambda\right) \quad (5.13)$$

Se plantean las condiciones iniciales para hallar el valor de C_1 y C_2

$$x(0) = x_0 \quad (5.14)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (5.15)$$

Se deriva la ecuación 5.13 para poder aplicar las condiciones iniciales

$$\dot{x} = -\xi w e^{-\xi w\lambda}(C_1 \cos(w_D\lambda) + C_2 \sin(w_D\lambda)) + \left(e^{-\xi w\lambda}(-C_1 w_D \sin(w_D\lambda) + C_2 w_D \cos(w_D\lambda)) + \frac{\alpha}{k}\right) \quad (5.16)$$

Aplicando la condición inicial (ec. 5.14) en la ecuación 5.13 para hallar C_1

$$x_0 = C_1 + \frac{p}{k} - \frac{2\xi\alpha}{kw} \quad (5.16.1)$$

Despejando C_1 la ecuación 5.16.1

$$C_1 = x_0 + \frac{2\xi\alpha}{kw} - \frac{P_0}{k} \quad (5.17)$$

Aplicando la condición inicial 2 (ec. 5.15) en la ecuación 5.16 para hallar C_2

$$\dot{x} = -\xi w C_1 + C_2 w_D + \frac{\alpha}{k} \quad (5.17.1)$$

Sustituyendo C_1 en la ecuación 5.17.1

$$\dot{x} = -\xi w \left(x_0 + \frac{2\xi\alpha}{kw} - \frac{P_0}{k}\right) + C_2 w_D + \frac{\alpha}{k} \quad (5.17.2)$$

Despejando C_2 de la ecuación 5.17.2

$$C_2 = \frac{\dot{x} + x_0 \xi w}{w_D} + \frac{1}{kw_D} \left((2\xi\alpha - P_0 w) \xi - \alpha \right) \quad (5.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.17 y 5.18 en la ecuación 5.4.1

$$x_c = e^{-\xi w \lambda} \left(\left(x_0 + \frac{2\xi\alpha}{kw} - \frac{P_0}{k} \right) \cos(w_D \lambda) + \left(\frac{\dot{x} + x_0 \xi w}{w_D} + \frac{1}{kw_D} ((2\xi\alpha - P_0 w)\xi - \alpha) \right) \sin(w_D \lambda) \right) \quad (5.18.1)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.18.1 y 5.12.1 en la ecuación 5.12

$$x = \left(e^{-\xi w \lambda} \left(\left(x_0 + \frac{2\xi\alpha}{kw} - \frac{P_0}{k} \right) \cos(w_D \lambda) + \left(\frac{\dot{x} + x_0 \xi w}{w_D} + \frac{1}{kw_D} ((2\xi\alpha - P_0 w)\xi - \alpha) \right) \sin(w_D \lambda) \right) \right) + \left(\frac{P_0}{k} - \frac{2\xi\alpha}{kw} \right) + \frac{\alpha}{k} \lambda \quad (5.18.2)$$

Se factoriza de la siguiente forma:

$$x = A_1 P_0 + A_2 \alpha + A_3 x_0 + A_4 \dot{x} \quad (5.19)$$

Se identifican en “ C_1 ”, “ C_2 ” y en la ecuación 5.18.2 los términos “ P_0 ”, “ α ”, “ x_0 ” y “ \dot{x} ”; para tal fin se van a desarrollar las ecuaciones antes mencionadas para que sea más fácil identificar dichos términos, quedando:

$$C_1 = x_0 + \frac{2\xi\alpha}{kw} - \frac{P_0}{k} \quad (5.19.1)$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{w_D} + \frac{x_0 \xi w}{w_D} + \frac{2\xi^2 - 1}{kw_D} \alpha - \frac{w\xi}{kw_D} P_0 \quad (5.19.2)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.18.1 y 5.12.1 con la forma expandida de “ C_1 ” y “ C_2 ” en la ecuación 5.12

$$x = \left(e^{-\xi w \lambda} \left(\left(x_0 + \frac{2\xi\alpha}{kw} - \frac{P_0}{k} \right) \cos(w_D \lambda) + \left(\frac{\dot{x}_0}{w_D} + \frac{x_0 \xi w}{w_D} + \frac{2\xi^2 - 1}{kw_D} \alpha - \frac{w\xi}{kw_D} P_0 \right) \sin(w_D \lambda) \right) \right) + x_0 + \frac{2\xi\alpha}{kw} - \frac{P_0}{k} \quad (5.20)$$

De acuerdo con la ecuación 5.19 se determinarán los valores de “ A_1 ”, “ A_2 ”, “ A_3 ” y “ A_4 ” asociándolos con todos los términos que contengan “ P_0 ”, “ α ”, “ x_0 ” y “ \dot{x} ” respectivamente en la ecuación 20.

$$A_1 = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-\xi w \lambda} \left(\cos(w_D \lambda) + \frac{w \xi}{w_D} \text{sen}(w_D \lambda) \right) \right) \quad (5.20.1)$$

$$A_2 = \frac{e^{-\xi w \lambda}}{k} \left(\frac{2\xi}{w} \cos(w_D \lambda) + \frac{2\xi^2 - 1}{w_D} \text{sen}(w_D \lambda) \right) + \frac{1}{k} \left(\lambda - \frac{2\xi}{w} \right) \quad (5.20.2)$$

$$A_3 = \left(\cos(w_D \lambda) + \frac{\xi w}{w_D} \text{sen}(w_D \lambda) \right) e^{-\xi w \lambda} \quad (5.20.3)$$

$$A_4 = \frac{e^{-\xi w \lambda}}{w_D} \text{sen}(w_D \lambda) \quad (5.20.4)$$

Se derivan las ecuaciones anteriores

$$\dot{A}_1 = \frac{e^{-\xi w \lambda}}{k} \left(\frac{w}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(w_D \lambda) \right) \quad (5.20.5)$$

$$\dot{A}_2 = -\frac{e^{-\xi w \lambda}}{k} \left(\cos(w_D \lambda) + \frac{w \xi}{w_D} \text{sen}(w_D \lambda) \right) + \frac{1}{k} \quad (5.20.6)$$

$$\dot{A}_3 = -e^{-\xi w \lambda} \left(\frac{w}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(w_D \lambda) \right) \quad (5.20.7)$$

$$\dot{A}_4 = \frac{e^{-\xi w \lambda}}{w_D} (w_D \cos(w_D \lambda) - \xi w \text{sen}(w_D \lambda)) \quad (5.20.8)$$

Se reescribe la ecuación 5.19 devolviendo el cambio de variable que se hizo en “ α ”

$$x = A_1 P_0 + A_2 \left(\frac{P_1 - P_0}{\Delta t} \right) + A_3 x_0 + A_4 \dot{x}_0 \quad (5.21)$$

Se deriva la ecuación 5.21

$$\dot{x} = A_1' P_0 + A_2' \left(\frac{P_1 - P_0}{\Delta t} \right) + A_3' x_0 + A_4' \dot{x}_0 \quad (5.22)$$

La ecuación 5.21 y la ecuación 5.22 se expresan con forma de subíndices, quedando:

$$x_{i+1} = A_1 P_i + A_2 \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} \right) + A_3 x_i + A_4 \dot{x}_0 \quad (5.23)$$

$$\dot{x}_{i+1} = A_1' P_i + A_2' \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} \right) + A_3' x_i + A_4' \dot{x}_0 \quad (5.24)$$

Para hallar la aceleración, expresamos, en forma de subíndice, la ecuación diferencial del movimiento (ecuación 5.2) y despejamos la aceleración:

$$\ddot{x} = \frac{P_i - c\dot{x}_i - kx_i}{m} \quad (5.25)$$

Lo anterior, (ecuaciones 5.23, 5.24 y 5.25) se puso en esa forma para poder trabajarlo en Excel.

5.2 EJEMPLO DE EXCEL 1: MÉTODO DE LAS 8 CONSTANTES

Para la realización de este ejemplo se supondrá un sistema de 1 GDL, y los valores de las constantes que se muestran en lo sucesivo son previamente calculadas.

Se tiene la hoja de cálculo en blanco, tal como se muestra a continuación:

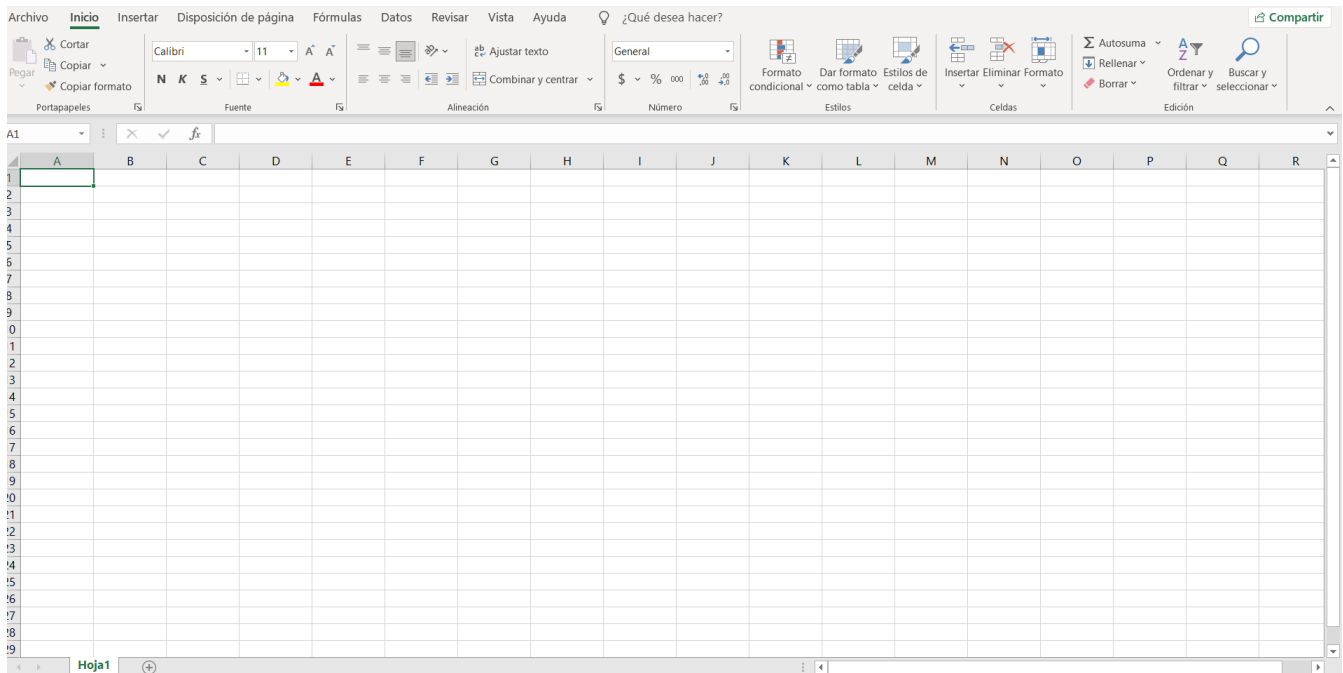


Figura 5.4. Hoja de cálculo en blanco.

Se introducen los datos de entrada, tales como la masa, la rigidez, la frecuencia natural de la estructura, el porcentaje de amortiguamiento, la frecuencia amortiguada, los intervalos de tiempo, la gravedad, el desplazamiento inicial, la velocidad inicial, el amortiguamiento, número de Euler y el periodo. Es importante mencionar que en todos los métodos el valor de la gravedad será igual a 1, debido a que el acelerograma usado ya incluye el valor de la gravedad, sin embargo, esta constante se usará con su valor de 9.81 m/s² o las unidades que más convengan al usuario, en caso de que el acelerograma sea adimensional.

Datos de entrada	
Masa (m) =	0.0008122 Tf-s ² /mm
Rigidez (k) =	1.1819 Tf/mm
Frecuencia natural de la estructura (w) =	38.147116 rad/s
Porcentaje de amortiguamiento (ξ) =	0.05000
Frecuencia amortiguada (w _D) =	38.0994026 rad/s
Intervalos de tiempo (Δt = τ) =	0.010 s
Gravedad (g) =	1.0 mm/s ²
Desplazamiento inicial (X ₀) =	0.00000 mm
Velocidad inicial (V ₀) =	0.0000 mm/s
Amortiguamiento (C) =	0.00309831 Tonf-s/mm)
Número de Euler (e) =	2.71828
Periodo (T) =	0.164709312 s

Figura 5.5 datos de entrada en Excel

Los valores en blanco son datos constantes que fueron previamente calculados e ingresados en Excel, mientras que los valores sombreados son datos que se calculan a partir de las constantes antes mencionadas utilizando las siguientes fórmulas:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$w_D = w\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$c = 2\xi wm$$

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

Se declaran en Excel los valores de “t” en intervalos de 0.02s según lo establece “ Δt ”, empezando en “0s” hasta 300s, cantidad que equivale a 5 minutos, que es el tiempo que se desea estudiar el acelerograma.

	A	
7	amortiguamiento (ξ) =	
8	Frecuencia amortiguada	
9	(WD) =	
10	Intervalos de tiempo (Δt	
11	= τ) =	
12	Gravedad (g)	9.8
13	Desplazamiento inicial	
14	(X0) =	
15	Velocidad inicial (V0) =	
16	Amortiguamiento (C) =	0.0
17	Número de Euler (e) =	
18	Periodo (T) =	
19		
20		
21	Tiempo "t" (s)	
22	0	
23	0.02	
24	0.04	
25	0.06	
26	0.08	
27	0.1	
28	0.12	
29	0.14	
30	0.16	
31	0.18	
32	0.2	
33	0.22	
34	0.24	
35	0.26	
36	0.28	
37	0.3	
38	0.32	
39	0.34	
40	0.36	
41	0.38	
42	0.4	
43	0.42	
44	0.44	
45	0.46	
46	0.48	
47	0.5	
48	0.52	
49	0.54	
50	0.56	
51	0.58	
52	0.6	
53	0.62	
54	0.64	
55	0.66	
56	0.68	
57	0.7	
58	0.72	
59	0.74	
60	0.76	
61	0.78	
62	0.8	
63	0.82	
64	0.84	
65	0.86	
66	0.88	
67	0.9	
68	0.92	
69	0.94	
70	0.96	
71	0.98	
72	1.0	
73	1.02	
74	1.04	
75	1.06	
76	1.08	
77	1.1	
78	1.12	
79	1.14	
80	1.16	
81	1.18	
82	1.2	
83	1.22	
84	1.24	
85	1.26	
86	1.28	
87	1.3	
88	1.32	
89	1.34	
90	1.36	
91	1.38	
92	1.4	
93	1.42	
94	1.44	
95	1.46	
96	1.48	
97	1.5	
98	1.52	
99	1.54	
100	1.56	
101	1.58	
102	1.6	
103	1.62	
104	1.64	
105	1.66	
106	1.68	
107	1.7	
108	1.72	
109	1.74	
110	1.76	
111	1.78	
112	1.8	
113	1.82	
114	1.84	
115	1.86	
116	1.88	
117	1.9	
118	1.92	
119	1.94	
120	1.96	
121	1.98	
122	2.0	
123	2.02	
124	2.04	
125	2.06	
126	2.08	
127	2.1	
128	2.12	
129	2.14	
130	2.16	
131	2.18	
132	2.2	
133	2.22	
134	2.24	
135	2.26	
136	2.28	
137	2.3	
138	2.32	
139	2.34	
140	2.36	
141	2.38	
142	2.4	
143	2.42	
144	2.44	
145	2.46	
146	2.48	
147	2.5	
148	2.52	
149	2.54	
150	2.56	
151	2.58	
152	2.6	
153	2.62	
154	2.64	
155	2.66	
156	2.68	
157	2.7	
158	2.72	
159	2.74	
160	2.76	
161	2.78	
162	2.8	
163	2.82	
164	2.84	
165	2.86	
166	2.88	
167	2.9	
168	2.92	
169	2.94	
170	2.96	
171	2.98	
172	3.0	
173	299.46	
174	299.48	
175	299.5	
176	299.52	
177	299.54	
178	299.56	
179	299.58	
180	299.6	
181	299.62	
182	299.64	
183	299.66	
184	299.68	
185	299.7	
186	299.72	
187	299.74	
188	299.76	
189	299.78	
190	299.8	
191	299.82	
192	299.84	
193	299.86	
194	299.88	
195	299.9	
196	299.92	
197	299.94	
198	299.96	
199	299.98	
200	300	

Figura 5.6. Declaración de los valores del tiempo en Excel

Posteriormente, se cargan los valores de alguno de los dos canales que contienen las componentes horizontales del acelerograma en Excel, en este caso se usarán los datos del canal “N00E” proporcionados por la estación es SCT18509.191 para el sismo del 19 de septiembre de 1985. Estos datos son las aceleraciones del terreno.

	A	B
14	(X0) =	0
15	Velocidad inicial (V0) =	0
16	Amortiguamiento (C) =	0.00309831 Tonf-s/mm)
17	Número de Euler (e) =	2.71828
18	Periodo (T) =	0.164709312 s
19		
20		
21	Tiempo "t" (s)	Aceleración del terreno a/g
22	0	-2.88
23	0.02	-2.88
24	0.04	-2.88
25	0.06	-2.88
26	0.08	-2.88
27	0.1	-1.93
28	0.12	-1.93
29	0.14	-1.93
30	0.16	-0.97
31	0.18	-0.97
32	0.2	-0.01
33	0.22	-0.01
34	0.24	-0.97
35	0.26	-0.01
36	0.28	-0.01
37	0.3	-0.01
38	0.32	-0.01
39	0.34	-0.97
40	0.36	-0.97
41	0.38	-1.93

Figura 5.7 Carga del acelerograma

Se multiplica la aceleración del terreno por la gravedad (en este caso con un valor de 1mm/s², debido a que el acelerograma ya fue afectado por la gravedad desde su descarga), pero debido a que el acelerograma está en cm/s/s se multiplica por 10 para tenerlo en mm/s/s; estos resultados se ponen en una columna aparte.

tiempo (t)	a (dato de acelerograma) cm/s/s	aceleración del terreno multiplicada por la gravedad (a) mm/s/s
0	-2.88	-28.8
0.02	-2.88	-28.8
0.04	-2.88	-28.8
0.06	-2.88	-28.8
0.08	-2.88	-28.8
0.1	-1.93	-19.3
0.12	-1.93	-19.3
0.14	-1.93	-19.3
0.16	-0.97	-9.7
0.18	-0.97	-9.7
0.2	-0.01	-0.1
0.22	-0.01	-0.1
0.24	-0.97	-9.7
0.26	-0.01	-0.1
0.28	-0.01	-0.1
0.3	-0.01	-0.1
0.32	-0.01	-0.1
0.34	-0.97	-9.7
0.36	-0.97	-9.7
0.38	-1.93	-19.3
0.4	-1.93	-19.3
0.42	-2.88	-28.8

Figura 5.8 Aceleración del terreno multiplicada por la gravedad

Se proceden a declarar las expresiones 5.20.1-5.20.8 en Excel, tomando en cuenta los datos de entrada antes mencionados.

Datos de entrada	
Masa (m) =	0.0008122 Tf-s ² /mm
Rigidez (k) =	1.1819 Tf/mm
Frecuencia natural de la estructura (w) =	38.147116 rad/s
Porcentaje de amortiguamiento (ξ) =	0.05000
Frecuencia amortiguada (WD) =	38.0994026 rad/s
Intervalos de tiempo (Δt = τ) =	0.01 s

A1 =	0.06005411	A1' =	11.78950005
A2 =	0.000201793	A2' =	0.06005411
A3 =	0.929021119	A3' =	-13.93419237
A4 =	0.009575432	A4' =	0.892493607

Figura 5.9 Declaración de las expresiones 5.20.1-5.20.8 en Excel

Debido a que las expresiones 5.23 y 5.24 contienen términos de fuerza, se procede a calcular dicho término multiplicando la “aceleración afectada por la gravedad” por la “masa”, poniendo los resultados en una columna aparte., es decir: se hace $P = -ma$

Tiempo (t) "s"	Aceleración del terreno (Datos del acelerograma) "cm/s/s"	Aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) a "mm/s/s"	Fuerza (P) "tonf"
0	-2.88	-28.8	0.02339136
0.01	-2.88	-28.8	0.02339136
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834

Figura 5.10 Cálculo de las fuerzas en Excel

Se declaran las celdas que indiquen el desplazamiento inicial y la velocidad inicial, valores previamente establecidos en los datos de entrada.

Desplazamiento inicial (X0) =	0.00000 mm				
Velocidad inicial (V0) =	0.0000 mm/s				X0 (mm)
Amortiguamiento (C) =	0.00309831 Tonf-s/mm				0.73555
Número de Euler (e) =	2.71828				Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"
Periodo (T) =	0.164709312 s				108.960
Tiempo (t) "s"	Aceleración del terreno (Datos del acelerograma) "cm/s/s"	Aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) a "mm/s/s"	Fuerza (P) "tonf"	X0 (mm)	V0 (mm/s)
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.0000000000	0.0000000000

Figura 5.11 Declaración del desplazamiento y velocidad inicial en Excel

Se procede a calcular los desplazamientos y velocidades sucesivas a las condiciones iniciales, lo anterior se lleva a cabo aplicando en Excel las expresiones 5.23 y 5.24 respectivamente.

Desplazamiento inicial (X0) =	0.00000 mm				
Velocidad inicial (V0) =	0.0000 mm/s				X0 (mm)
Amortiguamiento (C) =	0.00309831 Tonf-s/mm				0.73555
Número de Euler (e) =	2.71828				Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"
Periodo (T) =	0.164709312 s				108.960
Tiempo (t) "s"	Aceleración del terreno (Datos del acelerograma) "cm/s/s"	Aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) a "mm/s/s"	Fuerza (P) "tonf"	X0 (mm)	V0 (mm/s)
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.0000000000	0.0000000000
0.01	-2.88	-28.8	0.02339136	0.001404747	0.27577244
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.005350427	0.50232356
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.011185372	0.649539121
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.018015812	0.699622821
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.024685307	0.602808392
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	0.029646698	0.378838659
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	0.032111328	0.109814127
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	0.031667655	-0.21145609
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.027868264	-0.537104718
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.021062982	-0.821627497
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.011705395	-1.025835395
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.00121396	-1.030874304
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.008427486	-0.890907497
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.016355259	-0.676741494
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.021669595	-0.375132591
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.023718691	-0.031897586
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.02217838	0.349814861
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.016781428	0.714127031
0.38	-1.93	-19.3	0.01567546	-0.00812176	1.01089606
0.4	-1.93	-19.3	0.01567546	0.003075856	1.20019427
0.42	-2.88	-28.8	0.02339136	0.015446991	1.259449132
0.44	-2.88	-28.8	0.02339136	0.027815097	1.184581399

Figura 5.12. Cálculo en Excel de los desplazamiento y velocidades sucesivos a las condiciones iniciales

Con la expresión 5.25 se calcula la aceleración de la estructura correspondiente a cada desplazamiento, dichos cálculos se colocarán en una columna aparte.

Tiempo (t) "s"	Aceleración del terreno (Datos del acelerograma) "cm/s/s"	Aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) a "mm/s/s"	Fuerza (P) "tonf"	X0 (mm)	V0 (mm/s)	Aceleración de la estructura dada por la ecuación del movimiento (a) "mm/s2"
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.000000000	0.000000000	28.80000000
0.01	-2.88	-28.8	0.02339136	0.001404747	0.27577244	25.70381589
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.005350427	0.50232356	19.09782514
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.011185372	0.649539121	10.04521373
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.018015812	0.699622821	-0.08551402
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.024685307	0.602808392	-18.92166003
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	0.029646698	0.378838659	-25.28710872
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	0.032111328	0.109814127	-27.84739363
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	0.031667655	-0.21145609	-35.57620662
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.027868264	-0.537104718	-28.80506715
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.021062982	-0.821627497	-27.41663249
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.011705395	-1.025835395	-13.02045364
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.00121396	-1.030874304	11.86593075
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.008427486	-0.890907497	15.76225354
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.016355259	-0.676741494	26.48178697
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.021669595	-0.375132591	33.06467174
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.023718691	-0.031897586	34.73717785
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.02217838	0.349814861	40.63959093
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.016781428	0.714127031	31.39618754
0.38	-1.93	-19.3	0.01567546	-0.00812176	1.01089606	27.26252791
0.4	-1.93	-19.3	0.01567546	0.003075856	1.20019427	10.24561171
0.42	-2.88	-28.8	0.02339136	0.015446991	1.259449132	1.51706546
0.44	-2.88	-28.8	0.02339136	0.027815097	1.184581399	-16.19543526

Figura 5.13 Declaración de la aceleración a través de la ecuación del movimiento en Excel

Calculamos la aceleración total sumando la aceleración del terreno más la aceleración de la estructura, colocando los resultados en una columna aparte.

Tiempo (t) "s"	Aceleración del terreno (Datos del acelerograma) "cm/s/s"	Aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) a "mm/s/s"	Fuerza (P) "tonf"	X0 (mm)	V0 (mm/s)	Aceleración de la estructura dada por la ecuación del movimiento (a) "mm/s2"	a total (mm/s2)
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.000000000	0.000000000	28.80000000	0.00000000
0.01	-2.88	-28.8	0.02339136	0.001404747	0.27577244	25.70381589	-3.0961841
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.005350427	0.50232356	19.09782514	-9.7021749
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.011185372	0.649539121	10.04521373	-18.7547863
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.018015812	0.699622821	-0.08551402	-28.8855140
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.024685307	0.602808392	-18.92166003	-38.2216600
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	0.029646698	0.378838659	-25.28710872	-44.5871087
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	0.032111328	0.109814127	-27.84739363	-47.1473936
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	0.031667655	-0.21145609	-35.57620662	-45.2762066
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.027868264	-0.537104718	-28.80506715	-38.5050672
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.021062982	-0.821627497	-27.41663249	-27.5166325
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.011705395	-1.025835395	-13.02045364	-13.1204536
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.00121396	-1.030874304	11.86593075	2.1659308
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.008427486	-0.890907497	15.76225354	15.6622535
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.016355259	-0.676741494	26.48178697	26.3817870
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.021669595	-0.375132591	33.06467174	32.9646717
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.023718691	-0.031897586	34.73717785	34.6371778
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.02217838	0.349814861	40.63959093	30.9395909
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.016781428	0.714127031	31.39618754	21.6961875
0.38	-1.93	-19.3	0.01567546	-0.00812176	1.01089606	27.26252791	7.9625279
0.4	-1.93	-19.3	0.01567546	0.003075856	1.20019427	10.24561171	-9.0543883
0.42	-2.88	-28.8	0.02339136	0.015446991	1.259449132	1.51706546	-27.2829345

Figura 5.14. Cálculo de la aceleración total en Excel

Se procede a calcular los valores máximos absolutos del desplazamiento, velocidad y aceleración total, así como los tiempos en que estos valores se presentan. Para tal efecto, se declaran las celdas que tendrán dichos valores e ingresamos la fórmula que brinda Excel para calcular máximos y mínimos de una lista.

	Valores máximos		
	X0 (mm)	V0 (mm/s)	a total (mm/s ²)
	0.73555	6.75029	1071.28303
Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"	108.960	118.54	108.940

Figura 5.15. Cálculo de los valores máximos del desplazamiento, aceleración y velocidad, así como de los tiempos en que estos valores máximos se presentan

Posteriormente se realizan las gráficas “desplazamiento-tiempo”, “velocidad-tiempo” y “aceleración-tiempo”

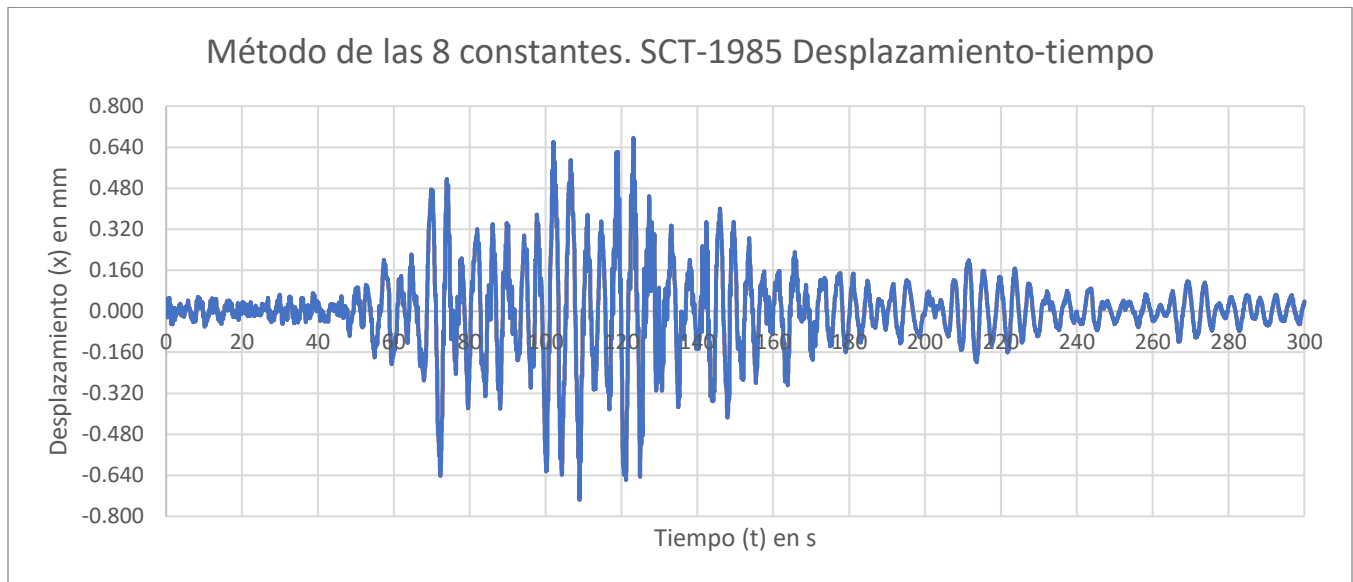


Figura 5.16. Método de las 8 constantes. Gráfica desplazamiento-tiempo

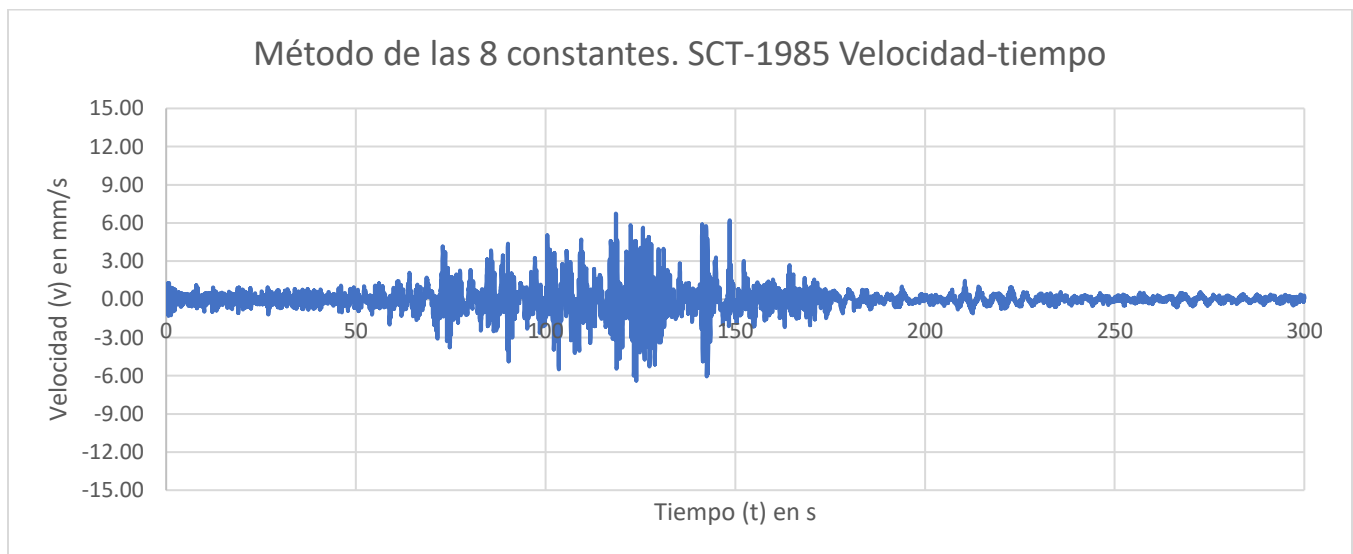


Figura 5.17. Método de las 8 constantes. Gráfica velocidad-tiempo

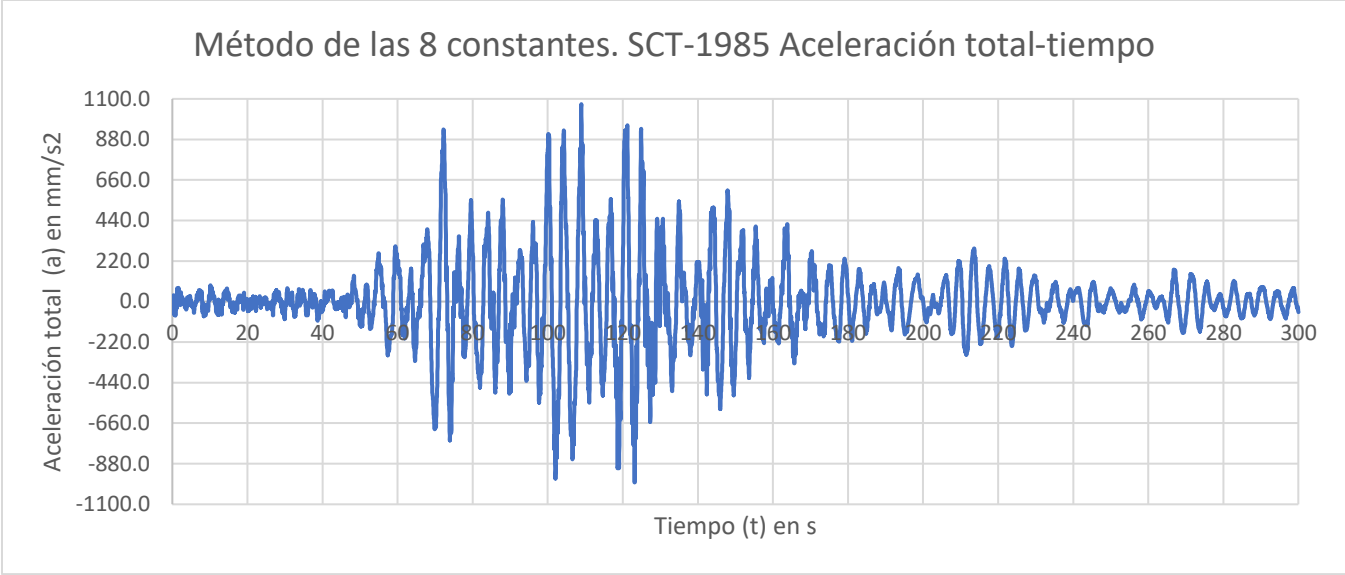


Figura 5.18. Método de las 8 constantes. Gráfica aceleración-tiempo

5.3 MÉTODO DE LA β -NEWMARK

Este método contempla dos tipos de interpolación de la aceleración: aceleración promedio y aceleración lineal, según sea el valor del parámetro β . De la misma manera que el método anterior, este método nos ayuda a resolver la ecuación del movimiento en tiempos discretos, se tiene la ecuación del movimiento expresada de la siguiente manera:

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + kx_{i+1} = -m\ddot{x}_{g(i+1)} \quad (5.26)$$

A continuación, se presentan las dos ecuaciones que propuso Newmark y con las que se van a trabajar:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1 - \gamma)\lambda]\ddot{x}_i + (\gamma\lambda)\ddot{x}_{i+1} \quad (5.27)$$

$$x_{i+1} = x_i + \lambda\dot{x}_i + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\lambda^2\right]\ddot{x}_i + \beta\lambda^2\ddot{x}_{i+1} \quad (5.28)$$

Se despeja \ddot{x}_{i+1} de la ecuación 5.28 quedando:

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{\beta\lambda^2} - \frac{x_i}{\beta\lambda^2} - \frac{\lambda\dot{x}_i}{\beta\lambda^2} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(\frac{\lambda^2}{\beta\lambda^2}\right)\ddot{x}_i$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{i+1} &= \frac{x_{i+1}}{\beta\lambda^2} - \frac{x_i}{\beta\lambda^2} - \frac{\dot{x}_i}{\beta\lambda} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(\frac{\ddot{x}_i}{\beta}\right) \\ \ddot{x}_{i+1} &= \frac{1}{\beta\lambda^2}(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta\lambda}\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(\frac{\ddot{x}_i}{\beta}\right) \\ \ddot{x}_{i+1} &= \frac{1}{\beta\lambda^2}(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta\lambda}\dot{x}_i - \left(\frac{1 - 2\beta}{2}\right)\left(\frac{\ddot{x}_i}{\beta}\right) \\ \ddot{x}_{i+1} &= \frac{1}{\beta\lambda^2}(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta\lambda}\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)(\ddot{x}_i) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Se sustituye la ecuación 5.29 en la ecuación 5.27

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1 - \gamma)\lambda]\ddot{x}_i + (\gamma\lambda)\left(\frac{1}{\beta\lambda^2}(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta\lambda}\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)(\ddot{x}_i)\right) \quad (5.30)$$

Se busca expresar la ecuación 5.30 de una manera similar a la ecuación 5.29, es decir: se identificarán, por separado, todos los términos que contengan desplazamientos, velocidades, y aceleraciones en la ecuación 5.30. En otras palabras: se reescribirá la ecuación 5.30 respetando el siguiente orden: (“desplazamientos”, “velocidades” y “aceleraciones”):

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{\gamma\lambda}{\beta\lambda^2}(x_{i+1} - x_i) + \dot{x}_i\left(1 - \frac{\gamma\lambda}{\beta\lambda}\right) + \ddot{x}_i\left[(1 - \gamma)\lambda - \gamma\lambda\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\right] \quad (5.31)$$

Simplificando:

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\lambda}(x_{i+1} - x_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\lambda\ddot{x}_i \quad (5.32)$$

Se sustituyen las ecuaciones 5.32, 5.29 y 5.28, esta última solo se dejará expresada como “ x_{i+1} ”, en la ecuación 5.26

$$m\left(\frac{1}{\beta\lambda^2}(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta\lambda}\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)(\ddot{x}_i)\right) + c\left(\frac{\gamma}{\beta\lambda}(x_{i+1} - x_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\lambda\ddot{x}_i\right) + kx_{i+1} = P_{(i+1)} \quad (5.33)$$

Se factoriza en términos de “ x_{i+1} ”, “ m ” y “ c ”

$$P_{(i+1)} = x_{i+1}\left(\frac{m}{\beta\lambda^2} + \frac{c\gamma}{\beta\lambda} + k\right) + m\left(\frac{x_i}{\beta\lambda^2} - \frac{\dot{x}_i}{\beta\lambda} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_i\right) + c\left(-\frac{\gamma x_i}{\beta\lambda} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\lambda\ddot{x}_i\right) \quad (5.34)$$

Se expresa la ecuación 5.34 en término de la ley de Hooke “ $F=ku$ ” que en términos de Newmark queda como $\widehat{p}_{i+1} = \widehat{k}u_{i+1}$ teniendo las siguientes equivalencias:

$$x_{i+1} = u_{i+1} \quad (5.35)$$

$$\widehat{k} = \frac{m}{\beta\lambda^2} + \frac{c\gamma}{\beta\lambda} + k \quad (5.36)$$

$$\widehat{p}_{i+1} = P_{(i+1)} - m\left(-\frac{x_i}{\beta\lambda^2} - \frac{\dot{x}_i}{\beta\lambda} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_i\right) - c\left(-\frac{\gamma x_i}{\beta\lambda} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\lambda\ddot{x}_i\right) \quad (5.37)$$

Factorizando \widehat{p}_{i+1} en función de “ x_i ”, “ \dot{x}_i ” y “ \ddot{x}_i ”

$$\widehat{p}_{i+1} = P_{(i+1)} + x_i\left(\frac{m}{\beta\lambda^2} + \frac{c\gamma}{\beta\lambda}\right) + \dot{x}_i\left(\frac{m}{\beta\lambda} - c\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right) + \ddot{x}_i\left(m\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) - c\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\lambda\right)$$

$$\widehat{p}_{i+1} = P_{(i+1)} + \frac{1}{\beta\lambda}\left(\frac{m}{\lambda} + c\gamma\right)x_i + \left(\frac{m}{\beta\lambda} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)c\right)\dot{x}_i + \left(\left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)m + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\lambda\right)\ddot{x}_i \quad (5.38)$$

Es importante mencionar que gama “ γ ” siempre tendrá el mismo valor $\gamma = \frac{1}{2}$, pero beta “ β ” podrá adoptar uno de dos valores posibles, y esto será lo que determine el tipo de interpolación con la que se va a trabajar:

Si $\beta = \frac{1}{4}$ se trata de una aceleración lineal

Si $\beta = \frac{1}{6}$ se trata de una aceleración promedio

5.4 EJEMPLO EN EXCEL 2: MÉTODO DE LA β -NEWMARK (ACELERACIÓN PROMEDIO)

Antes de iniciar el ejemplo en Excel se tienen que hacer las siguientes consideraciones:

Cálculos iniciales:

$$\ddot{u}_0 = \frac{P_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \quad (5.39)$$

$\lambda = \Delta t =$ *Seleccionar el espaciamiento del tiempo, esto estará dado por el acelerograma*

$$a_1 = \frac{m}{\beta\lambda^2} + \frac{\gamma c}{\beta\lambda} \quad (5.40)$$

$$a_2 = \frac{m}{\beta\lambda} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)c \quad (5.41)$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)m + c\lambda\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \quad (5.42)$$

$$\hat{k} = k + a_1 \quad (5.43)$$

Cálculo de los contadores

$$\widehat{p}_{i+1} = P_{i+1} + a_1 x_i + a_2 \dot{x}_i + a_3 \ddot{x}_i \quad (5.44)$$

$$x_{i+1} = \frac{\widehat{p}_{i+1}}{\hat{k}} \quad (5.45)$$

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\lambda}(x_{i+1} - x_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_i + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\lambda\ddot{x}_i \quad (5.46)$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{\beta\lambda^2}(x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{\beta\lambda}\dot{x}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_i \quad (5.47)$$

Para que el método de Newmark sea estable se debe cumplir con la siguiente desigualdad:

$$\frac{\lambda}{T} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2(\gamma-2\beta)}} \quad (5.48)$$

Para la variante “aceleración promedio” esta desigualdad siempre se va a cumplir y aunque la gráfica resultante no se discretice tanto siempre habrá una convergencia. Para la variante “aceleración lineal”, esta desigualdad queda:

$$\lambda \leq 0.5513T \quad (5.49)$$

En donde la mayoría de los casos se cumplirá que “ λ ” comúnmente tendrá valores de “0.01”, “0.02”, “0.03” ... Lo anterior, a menos que la estructura tenga valores de periodo muy cortos.

Se tiene la hoja de cálculo en blanco, tal como se muestra a continuación:

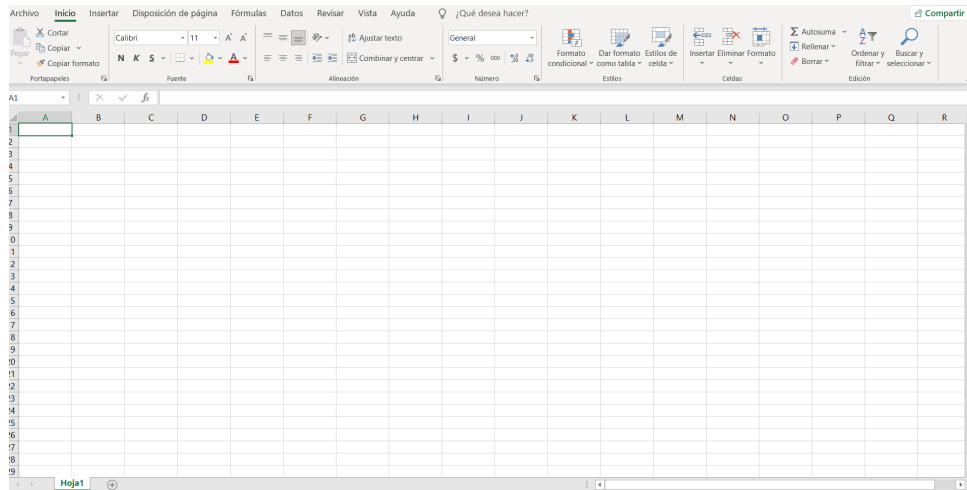


Figura 5.19. Hoja de cálculo en blanco para el método de Newmark

Se introducen los datos de entrada, tales como la masa, la rigidez, la frecuencia natural de la estructura, el porcentaje de amortiguamiento, la frecuencia amortiguada, los intervalos de tiempo, la gravedad, el desplazamiento inicial, la velocidad inicial, el amortiguamiento, número de Euler y el periodo.

Datos de entrada	
Masa (m) =	0.0008122 Tf-s ² /mm
Rigidez (k) =	1.1819 Tf/mm
Frecuencia natural de la estructura (w) =	38.147116 rad/s
Porcentaje de amortiguamiento (ξ) =	0.05000
Frecuencia amortiguada (WD) =	38.0994026 rad/s
Intervalos de tiempo (Δt = τ) =	0.010 s
Gravedad (g) =	1.0 mm/s ²
Desplazamiento inicial (X0) =	0.00000 mm
Velocidad inicial (V0) =	0.0000 mm/s
Amortiguamiento (C) =	0.00309831 Tonf-s/mm)
Número de Euler (e) =	2.71828
Periodo (T) =	0.164709312 s

Figura 5.20 datos de entrada para el método de Newmark en Excel para el método de Newmark

Los valores en blanco son datos constantes que fueron previamente calculados e ingresados en Excel, mientras que los valores sombreados son datos establecidos o datos que se calculan a partir de las constantes antes mencionadas utilizando las siguientes fórmulas:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$w_D = w\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$c = 2\xi wm$$

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

Se declaran en Excel los valores de “t” en intervalos de 0.02s según lo establece “Δt”, empezando en “0s” hasta 300s, cantidad que equivale a 5 minutos, que es el tiempo que se desea estudiar el acelerograma.

	A	
7	amortiguamiento (ξ) =	
8	Frecuencia amortiguada	
9	(WD) =	
10	Intervalos de tiempo (Δt	
11	= τ) =	
12	Gravedad (g)	9.8
13	Desplazamiento inicial	
14	(X0) =	
15	Velocidad inicial (V0) =	
16	Amortiguamiento (C) =	0.0
17	Número de Euler (e) =	
18	Periodo (T) =	
19		
20		
21	Tiempo "t" (s)	
22	0	
23	0.02	
24	0.04	
25	0.06	
26	0.08	
27	0.1	
28	0.12	
29	0.14	
30	0.16	
31	0.18	
32	0.2	
33	0.22	
34	0.24	

	A
4995	299.46
4996	299.48
4997	299.5
4998	299.52
4999	299.54
5000	299.56
5001	299.58
5002	299.6
5003	299.62
5004	299.64
5005	299.66
5006	299.68
5007	299.7
5008	299.72
5009	299.74
5010	299.76
5011	299.78
5012	299.8
5013	299.82
5014	299.84
5015	299.86
5016	299.88
5017	299.9
5018	299.92
5019	299.94
5020	299.96
5021	299.98
5022	300

Figura 5.21. Declaración de los valores del tiempo en Excel para el método de Newmark

Posteriormente, se cargan los valores de alguno de los dos canales que contienen las componentes horizontales del acelerograma en Excel, en este caso se usarán los datos del canal “N00E” proporcionados por la estación es SCT18509.191 para el sismo del 19 de septiembre de 1985. Estos datos son las aceleraciones del terreno.

	A	B
14	(X0) =	0
15	Velocidad inicial (V0) =	0
16	Amortiguamiento (C) =	0.00309831 Tonf-s/mm)
17	Número de Euler (e) =	2.71828
18	Periodo (T) =	0.164709312 s
19		
20		
21	Tiempo "t" (s)	Aceleración del terreno a/g
22	0	-2.88
23	0.02	-2.88
24	0.04	-2.88
25	0.06	-2.88
26	0.08	-2.88
27	0.1	-1.93
28	0.12	-1.93
29	0.14	-1.93
30	0.16	-0.97
31	0.18	-0.97
32	0.2	-0.01
33	0.22	-0.01
34	0.24	-0.97
35	0.26	-0.01
36	0.28	-0.01
37	0.3	-0.01
38	0.32	-0.01
39	0.34	-0.97
40	0.36	-0.97
41	0.38	-1.93

Figura 5.22 Carga del acelerograma para el método de Newmark

Se multiplica la aceleración del terreno por la gravedad (en este caso con un valor de 1mm/s^2 , debido a que el acelerograma ya fue afectado por la gravedad desde su descarga), pero debido a que el acelerograma está en cm/s/s se multiplica por 10 para tenerlo en mm/s/s ; estos resultados se ponen en una columna aparte.

Tiempo (t) "s"	Aceleración del terreno (Datos de acelerograma) a/g "mm/s ² "	Aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) at "mm/s ² "
0	-2.88	-2.88
0.02	-2.88	-2.88
0.04	-2.88	-2.88
0.06	-2.88	-2.88
0.08	-2.88	-2.88
0.1	-1.93	-1.93
0.12	-1.93	-1.93
0.14	-1.93	-1.93
0.16	-0.97	-0.97
0.18	-0.97	-0.97
0.2	-0.01	-0.01
0.22	-0.01	-0.01
0.24	-0.97	-0.97
0.26	-0.01	-0.01
0.28	-0.01	-0.01
0.3	-0.01	-0.01
0.32	-0.01	-0.01
0.34	-0.97	-0.97
0.36	-0.97	-0.97
0.38	-1.93	-1.93
0.4	-1.93	-1.93
0.42	-2.88	-2.88
0.44	-2.88	-2.88
0.46	-2.88	-2.88
0.48	-2.88	-2.88
0.5	-1.93	-1.93

Figura 5.23 Aceleración del terreno multiplicada por la gravedad para el Método de Newmark

Se declaran los valores de gama “ γ ” y beta “ β ” (recordando que para la aceleración promedio $\beta=1/4$), así como los valores de los cálculos iniciales, estos valores se calcularán con las expresiones 5.40–5.43

Datos de entrada	
Masa (m) =	0.0008122 Tf-s ² /mm
Rigidez (k) =	1.1819 Tf/mm
Frecuencia natural de la estructura (w) =	38.147116 rad/s
Porcentaje de amortiguamiento (ξ) =	0.05000
Frecuencia amortiguada (WD) =	38.0994026 rad/s
Intervalos de tiempo ($\Delta t = \tau$) =	0.010 s
Gravedad (g) =	1.0 mm/s ²
Desplazamiento inicial (X0) =	0.00000 mm
Velocidad inicial (V0) =	0.0000 mm/s
Amortiguamiento (C) =	0.00309831 Tonf-s/mm)
Número de Euler (e) =	2.71828
Periodo (T) =	0.164708312 s

Tipo de interpolación	
Gama (γ) =	0.5
Beta (β) =	0.25

Cálculos iniciales	
a1 =	33.10766176
a2 =	0.327978309
a3 =	0.0008122
k circun =	34.28957722

Figura 5.24 Declaración de gama, beta y condiciones iniciales para el método de Newmark

Debido a que la expresión 5.38 contiene términos de fuerza, se procede a calcular dicho término multiplicando la “aceleración afectada por la gravedad” por la “masa”, poniendo los resultados en una columna aparte, es decir: se hace $P = -ma$

tiempo (t)	a (dato de acelerograma) cm/s/s	aceleración del terreno multiplicada por la gravedad (a) mm/s/s	Carga (P)
0	-2.88	-28.8	0.02339136
0.02	-2.88	-28.8	0.02339136
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122

Figura 5.25 Cálculo de las fuerzas en Excel para el método de Newmark

Se procede a declarar " \widehat{p}_{i+1} ", " x_0 ", " v_0 ", "Aceleración de Newmark" y "aceleración total" así como sus primeros valores, recordando que estos primeros valores son:

- $\widehat{p}_{i+1} = \text{Fuerza (P)}$,
- *Aceleración de Newmark = aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) pero con signo contrario*
- *Aceleración total = Aceleración de Newmark + aceleración del terreno (multiplicada por la gravedad) pero con signo contrario*
- $x_0 = 0$
- $v_0 = 0$

08.14/11b rad/s	Cálculos iniciales				
0.05000	a1 =	8.431830879			
	a2 =	0.165538309			
18.0994026 rad/s	a3 =	0.0008122			
	k circun =	9.613746339			
0.020 s					
1.0 mm/s^2					
0.00000 mm					
0.0000 mm/s					
309831 Tonf-s/mm)					
2.71828					
0.164709312 s					

dato de acelerograma)	aceleración (a)	Carga (P)	P circunfleja	Desplazamiento (X0 (mm))	Velocidad (V0 (mm/s))	Aceleración de Newmark (a (mm/s2))	Aceleración total (at)
-2.88	-2.88	0.002339136	0.002339136	0.0000000000	0.0000000000	2.88000000	0.00000000

Figura 5.26 " \widehat{p}_{i+1} ", " x_0 ", " v_0 ", "Aceleración de Newmark" y "aceleración total" para el método de Newmark

Posteriormente se calculan los valores siguientes de \widehat{p}_{i+1} aplicando en una celda abajo la expresión 5.44, resultando:

tiempo (t)	a (dato de acelerograma) cm/s/s	aceleración del terreno multiplicada por la gravedad (a) mm/s/s	Carga (P)	P circunfleja
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.02339136
0.02	-2.88	-28.8	0.02339136	0.04678272
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.17898987
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.375305957
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.606346899
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.831287062
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	1.00390161
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	1.094566678
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	1.085946624
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.967224145
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.743153231
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.432840925
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.082188424
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.251203068
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.529788313
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.724935457
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.812754356
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.777219044
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.612093073
0.38	-1.93	-19.3	0.01567546	-0.329232659

Figura 5.27 Cálculo de los valores de " \widehat{p}_{i+1} " para el método de Newmark promedio

Se proceden a calcular los desplazamientos “ x_0 ” aplicando en una celda abajo la expresión 5.45, resultando:

tiempo (t)	a (dato de acelerograma) cm/s/s	aceleración del terreno multiplicada por la gravedad (a) mm/s/s	Carga (P)	P circunfleja	Desplazamiento (x_0 (mm))
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.02339136	0.000000000
0.02	-2.88	-28.8	0.02339136	0.04678272	0.001364342
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.17898987	0.00521995
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.375305957	0.010945191
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.606346899	0.017683126
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.831287062	0.024243141
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	1.00390161	0.029277165
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	1.094566678	0.031921265
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	1.085946624	0.031669875
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.967224145	0.028207526
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.743153231	0.021672861
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.432840925	0.012623105
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.082188424	0.002396892
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.251203068	-0.007325931
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.529788313	-0.015450418
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.724935457	-0.021141569
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.812754356	-0.023702665
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.777219044	-0.022666335
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.612093073	-0.017850703
0.38	-1.93	-19.3	0.01567546	-0.329232659	-0.009601537
0.4	-1.93	-19.3	0.01567546	0.043701912	0.001274496
0.42	-2.88	-28.8	0.02339136	0.467549917	0.021363336

Figura 5.28 Cálculo de los valores de “ x_0 ” para el método de Newmark promedio

Se proceden a calcular las velocidades “ V_0 ” aplicando en una celda abajo la expresión 5.46, resultando:

tiempo (t)	a (dato de acelerograma) cm/s/s	aceleración del terreno multiplicada por la gravedad (a) mm/s/s	Carga (P)	P circunfleja	Desplazamiento (x_0 (mm))	Velocidad (V_0 (mm/s))
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.02339136	0.000000000	0.000000000
0.02	-2.88	-28.8	0.02339136	0.04678272	0.001364342	0.272868456
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.17898987	0.00521995	0.498253035
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.375305957	0.010945191	0.64679513
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.606346899	0.017683126	0.700791867
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.831287062	0.024243141	0.611211261
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	1.00390161	0.029277165	0.395593499
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	1.094566678	0.031921265	0.133226483
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	1.085946624	0.031669875	-0.183504462
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.967224145	0.028207526	-0.508965314
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.743153231	0.021672861	-0.797967765
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.432840925	0.012623105	-1.011983427
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.082188424	0.002396892	-1.033259061
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.251203068	-0.007325931	-0.91130555
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.529788313	-0.015450418	-0.713591973
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.724935457	-0.021141569	-0.424638122
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.812754356	-0.023702665	-0.087581077
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.777219044	-0.022666335	0.294847043
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.612093073	-0.017850703	0.668279272
0.38	-1.93	-19.3	0.01567546	-0.329232659	-0.009601537	0.981553928
0.4	-1.93	-19.3	0.01567546	0.043701912	0.001274496	1.193652659
0.42	-2.88	-28.8	0.02339136	0.467549917	0.021363336	1.278515495
0.44	-2.88	-28.8	0.02339136	0.897465121	0.026173117	1.229040674

Figura 5.29 Cálculo de los valores de “ x_0 ” para el método de Newmark promedio

Se proceden a calcular las aceleraciones de Newmark “*an*” aplicando en una celda abajo la expresión 5.47, resultando:

tiempo (t)	a (dato de acelerograma) cm/s/s	aceleración del terreno multiplicada por la gravedad (a) mm/s/s	Carga (P)	P circunfleja	Desplazamiento (X0 (mm))	Velocidad (V0 (mm/s))	Aceleración de Newmark (a (mm/s ²))
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.02339136	0.000000000	0.000000000	28.80000000
0.02	-2.88	-28.8	0.02339136	0.04678272	0.001364342	0.272868456	25.77369124
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.17898987	0.00521995	0.498253035	19.30322451
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.375305957	0.010945191	0.64679513	10.40519456
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.606346899	0.017683126	0.700791867	0.39415283
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.831287062	0.024243141	0.611211261	-18.31027407
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	1.00390161	0.029277165	0.395593499	-24.81327843
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	1.094566678	0.031921265	0.133226483	-27.66012469
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	1.085946624	0.031669875	-0.183504462	-35.68606427
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.967224145	0.028207526	-0.508965314	-29.40610626
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.743153231	0.021672861	-0.797967765	-28.39438391
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.432840925	0.012623105	-1.011983427	-14.40874849
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.082188424	0.002396892	-1.033259061	10.15362170
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.251203068	-0.007325931	-0.91130555	14.23708052
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.529788313	-0.015450418	-0.713591973	25.30563482
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.724935457	-0.021141569	-0.424638122	32.48513553
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.812754356	-0.023702665	-0.087581077	34.92627336
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.777219044	-0.022666335	0.294847043	41.55935062
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.612093073	-0.017850703	0.668279272	33.12709530

Figura 5.30 Cálculo de los valores de las aceleraciones de Newmark “*an*” para el método de Newmark promedio

Se proceden a calcular las aceleraciones totales “*aT*” sumando las aceleraciones de Newmark con las aceleraciones del terreno resultando:

tiempo (t)	a (dato de acelerograma) cm/s/s	aceleración del terreno multiplicada por la gravedad (a) mm/s/s	Carga (P)	P circunfleja	Desplazamiento (X0 (mm))	Velocidad (V0 (mm/s))	Aceleración de Newmark (a (mm/s ²))	Aceleración total (at)
0	-2.88	-28.8	0.02339136	0.02339136	0.000000000	0.000000000	28.80000000	0.00000000
0.02	-2.88	-28.8	0.02339136	0.04678272	0.001364342	0.272868456	25.77369124	-3.0263088
0.04	-2.88	-28.8	0.02339136	0.17898987	0.00521995	0.498253035	19.30322451	-9.4967755
0.06	-2.88	-28.8	0.02339136	0.375305957	0.010945191	0.64679513	10.40519456	-18.3948054
0.08	-2.88	-28.8	0.02339136	0.606346899	0.017683126	0.700791867	0.39415283	-28.4058472
0.1	-1.93	-19.3	0.01567546	0.831287062	0.024243141	0.611211261	-18.31027407	-37.6102741
0.12	-1.93	-19.3	0.01567546	1.00390161	0.029277165	0.395593499	-24.81327843	-44.1132784
0.14	-1.93	-19.3	0.01567546	1.094566678	0.031921265	0.133226483	-27.66012469	-46.9601247
0.16	-0.97	-9.7	0.00787834	1.085946624	0.031669875	-0.183504462	-35.68606427	-45.3860643
0.18	-0.97	-9.7	0.00787834	0.967224145	0.028207526	-0.508965314	-29.40610626	-39.1061063
0.2	-0.01	-0.1	0.00008122	0.743153231	0.021672861	-0.797967765	-28.39438391	-28.4943839
0.22	-0.01	-0.1	0.00008122	0.432840925	0.012623105	-1.011983427	-14.40874849	-14.5087485
0.24	-0.97	-9.7	0.00787834	0.082188424	0.002396892	-1.033259061	10.15362170	0.4536217
0.26	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.251203068	-0.007325931	-0.91130555	14.23708052	14.1370805
0.28	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.529788313	-0.015450418	-0.713591973	25.30563482	25.2056348
0.3	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.724935457	-0.021141569	-0.424638122	32.48513553	32.3851355
0.32	-0.01	-0.1	0.00008122	-0.812754356	-0.023702665	-0.087581077	34.92627336	34.8262734
0.34	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.777219044	-0.022666335	0.294847043	41.55935062	31.8593506
0.36	-0.97	-9.7	0.00787834	-0.612093073	-0.017850703	0.668279272	33.12709530	23.4270953
0.38	-1.93	-19.3	0.01567546	-0.329232659	-0.009601537	0.981553289	29.52783594	10.2278359
0.4	-1.93	-19.3	0.01567546	0.043701912	0.001274496	1.193652659	12.89191026	-6.4080897
0.42	-2.88	-28.8	0.02339136	0.467549917	0.013635336	1.278515495	4.08065678	-24.7193432

Figura 5.31 Cálculo de los valores de las aceleraciones totales “*aT*” para el método de Newmark promedio

Se procede a calcular los valores máximos absolutos del desplazamiento, velocidad y aceleración total, así como los tiempos en que estos valores se presentan. Para tal efecto, se declaran las celdas que tendrán dichos valores e ingresamos la fórmula que brinda Excel para calcular máximos y mínimos de una lista.

	Valores máximos		
	X0 (mm)	V0 (mm/s)	a total (mm/s ²)
	0.73040	6.89673	1063.00762
Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"	108.960	118.56	108.940

Figura 5.32 Cálculo de los valores máximos del desplazamiento, aceleración y velocidad, así como de los tiempos en que estos valores máximos se presentan para el método de Newmark promedio

Posteriormente se realizan las gráficas “desplazamiento-tiempo”, “velocidad-tiempo” y “aceleración-tiempo”

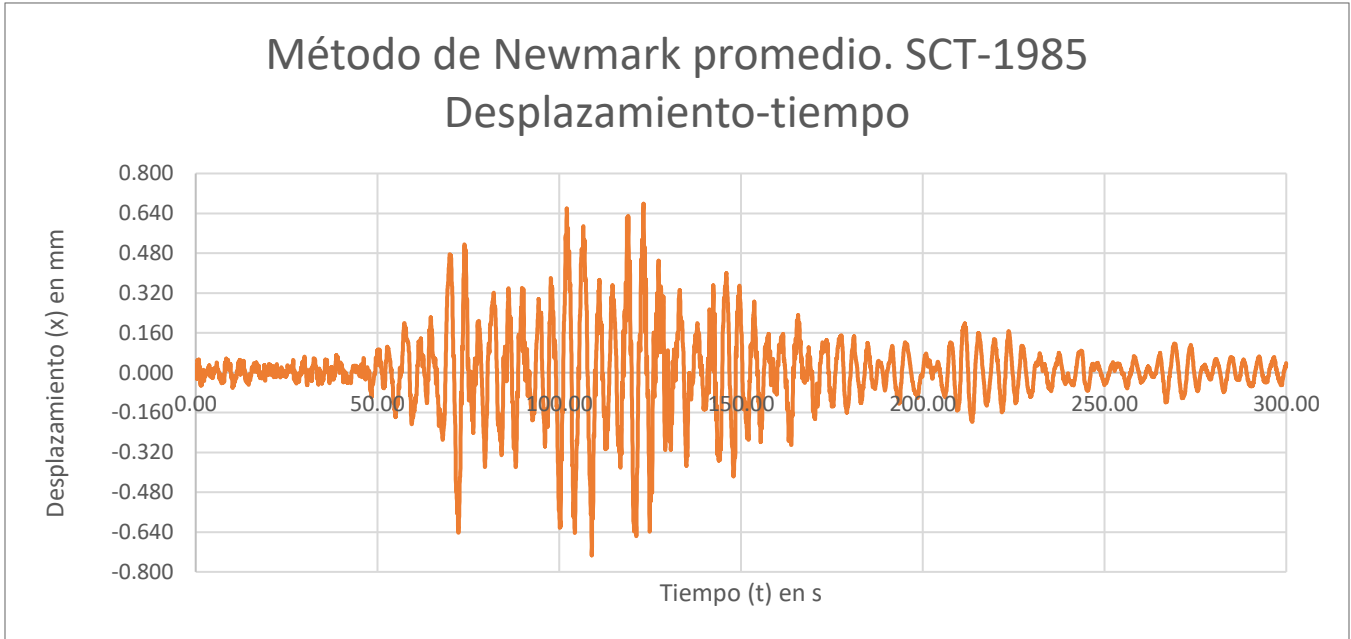


Figura 5.33. β -Newmark aceleración promedio. Gráfica Desplazamiento-tiempo

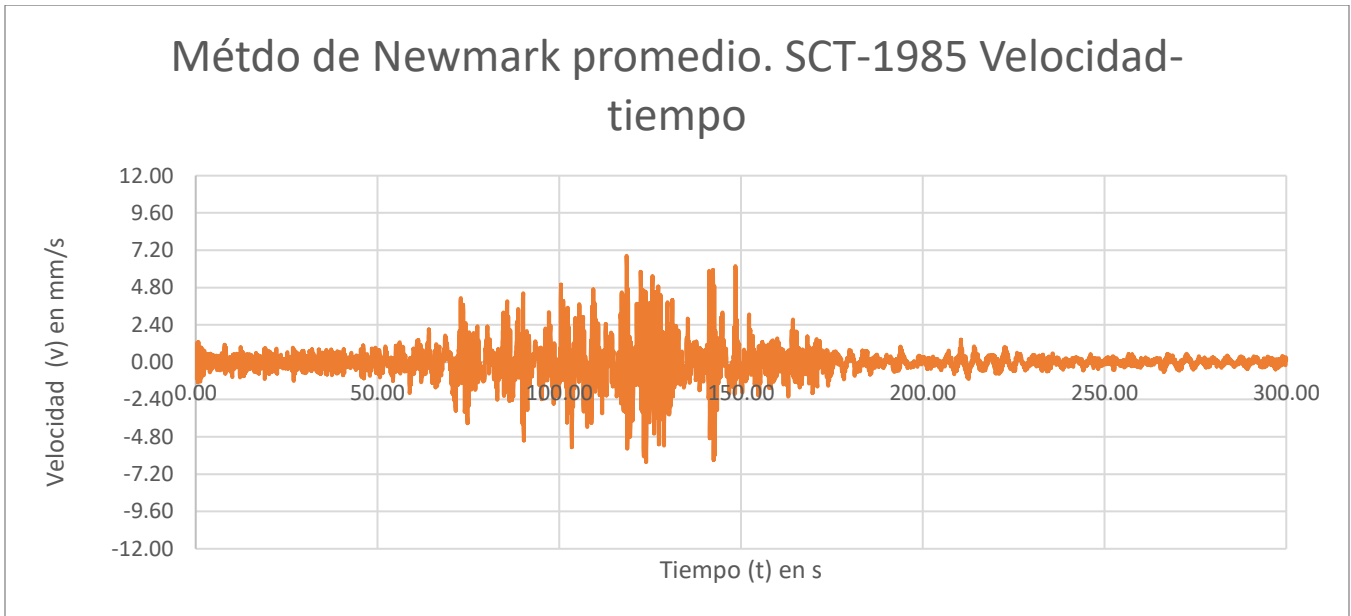


Figura 5.34. β -Newmark aceleración promedio. Gráfica velocidad-tiempo

Método de Newmark promedio. SCT-1985 Aceleración-tiempo

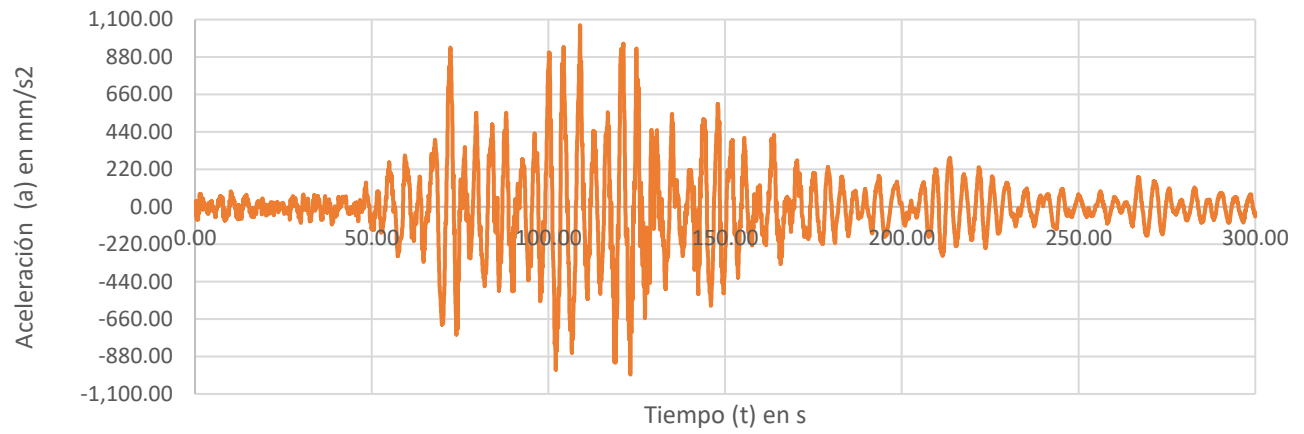


Figura 5.35. β -Newmark aceleración promedio. Gráfica aceleración-tiempo

5.5 EJEMPLO EN EXCEL 3: MÉTODO DE LA β -NEWMARK (ACELERACIÓN LINEAL)

Se realiza el mismo procedimiento que en el subcapítulo anterior, teniendo en cuenta que lo único que cambia es el valor de β , quedando como $\beta = \frac{1}{6}$. A continuación, se presentarán únicamente las gráficas y los resultados de los valores máximos del desplazamiento, velocidad y aceleración total, así como los tiempos en que cada uno de estos valores se presentan.

	Valores máximos		
	X0 (mm)	V0 (mm/s)	a total (mm/s ²)
	0.73330	6.83955	1067.46191
Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"	108.960	118.56	108.940

Figura 5.36 Cálculo de los valores máximos del desplazamiento, aceleración y velocidad, así como de los tiempos en que estos valores máximos se presentan para el método de Newmark lineal

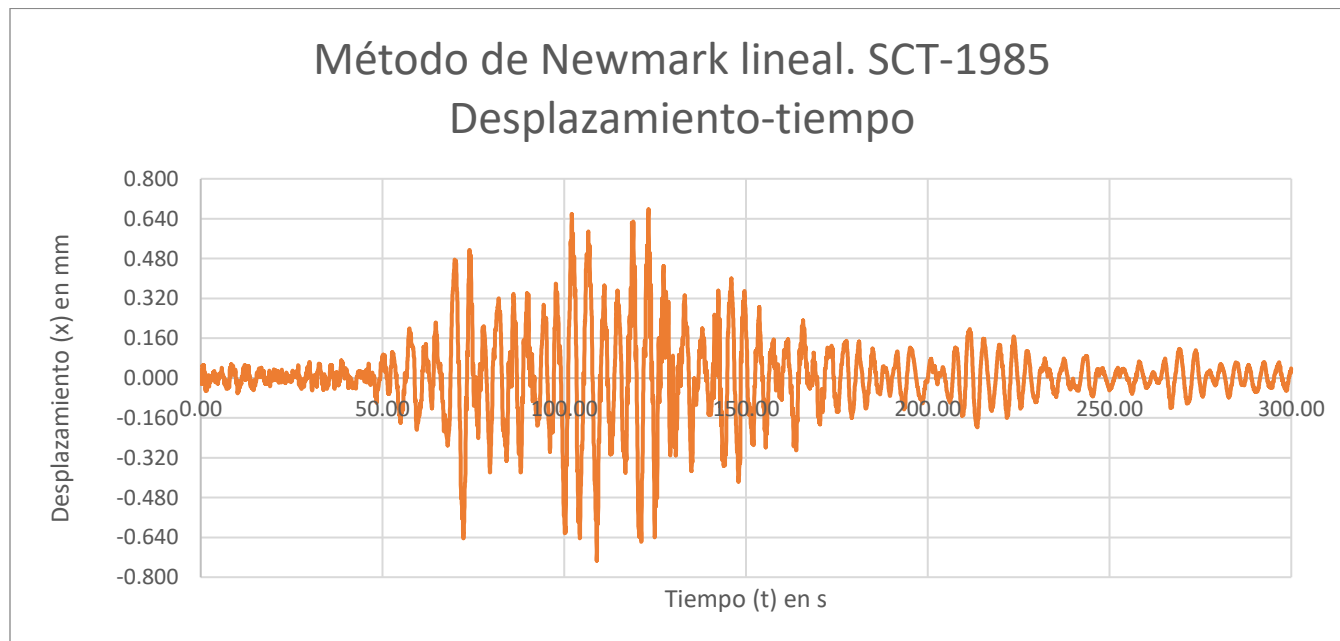


Figura 5.37. β -Newmark aceleración lineal. Gráfica Desplazamiento-tiempo

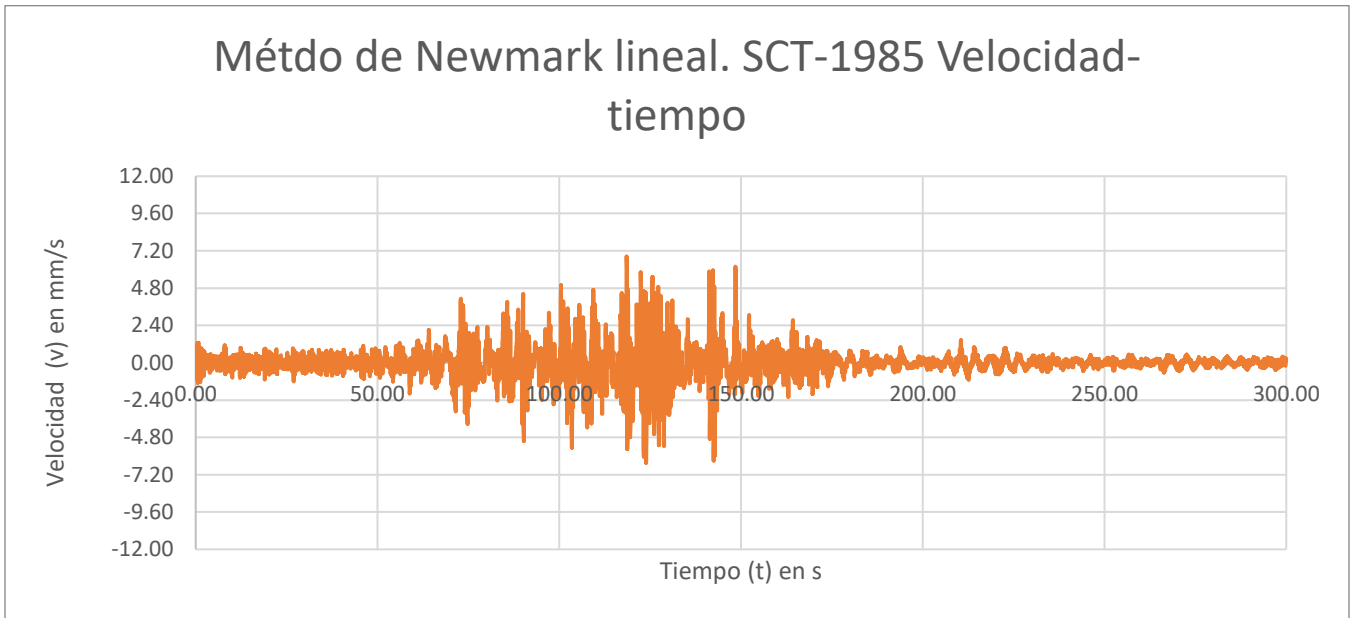


Figura 5.38. β -Newmark aceleración lineal. Gráfica velocidad-tiempo

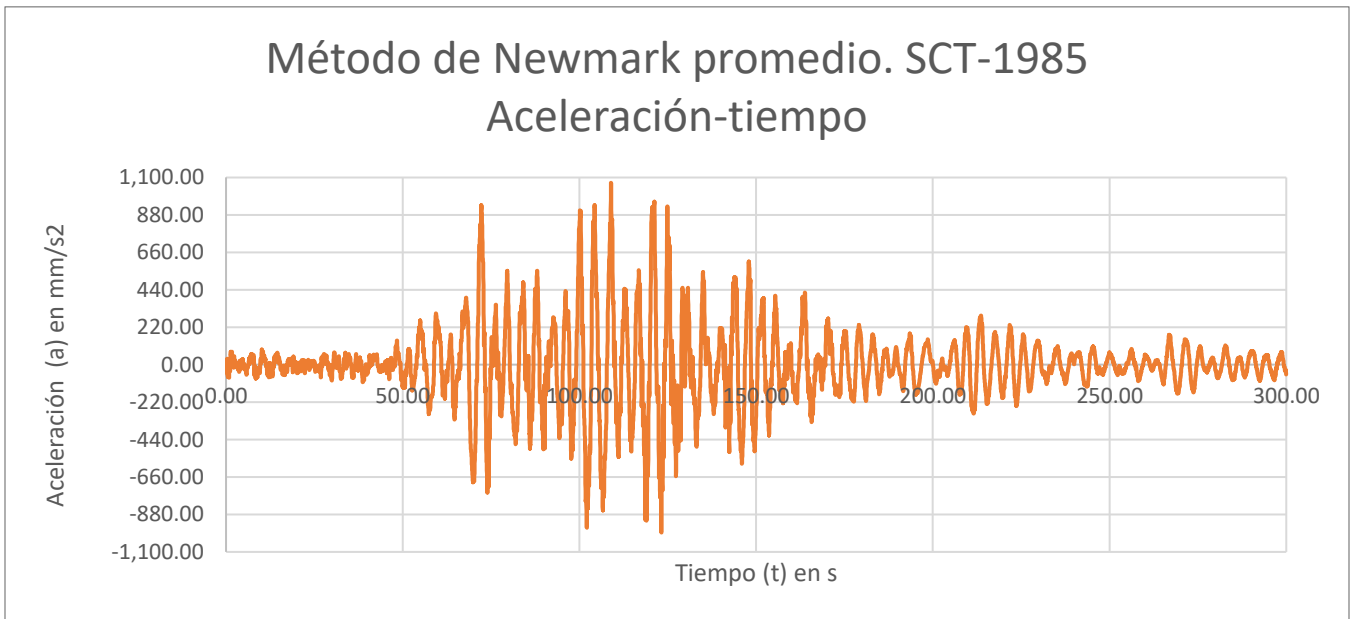


Figura 5.39. β -Newmark aceleración lineal. Gráfica aceleración-tiempo

5.6 METODO DE LA DIFERENCIA CENTRAL

Al igual que los métodos explicados previamente, este método nos ayuda a resolver la ecuación del movimiento; los resultados derivados de estos cálculos pueden ser muy inexactos si el intervalo de tiempo que se considera en el acelerograma es muy largo. Se recomienda que dichos intervalos sean entre 0.01 y 0.02 segundos.

Para explicar el método numérico de la diferencial central se presenta la ecuación del movimiento expresada con contadores "i" como se muestra a continuación:

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = P_i \quad (5.50)$$

Se aproxima la velocidad " \dot{x}_i " y la aceleración " \ddot{x}_i " en función de los desplazamientos en los instantes " t_{i+1} ", " t_i " y " t_{i-1} " y partiendo de las siguientes expresiones se comenzará a explicar el método de la diferencia central.

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad (5.51)$$

$$\ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (5.52)$$

Se sustituyen las ecuaciones 5.21 y 5.52 en la ecuación 5.50

$$m \left(\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \right) + c \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \right) + kx_i = P_i \quad (5.53)$$

Factorizando la ecuación 5.53 en términos de " x_{i+1} ", " x_{i-1} " y " x_i "

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{i+1} = P_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{i-1} - \left(k - \frac{2}{\Delta t^2} m \right) x_i \quad (5.54)$$

De la ecuación 5.54 se determinan " \hat{k} " y " \hat{P}_i " haciendo las siguientes asociaciones:

$$\hat{k} = \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) \quad (5.55)$$

$$\hat{P}_i = P_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{i-1} - \left(k - \frac{2}{\Delta t^2} m \right) x_i \quad (5.56)$$

Se sabe que la ley de Hooke se define como $F=kx$, por lo que es válido afirmar que:

$$\hat{P}_i = \hat{k}x_{i+1} \quad (5.57)$$

Despejando x_{i+1} de la ecuación 5.57 se tiene:

$$x_{i+1} = \frac{\hat{P}_i}{\hat{k}} \quad (5.58)$$

Se requieren conocer los desplazamientos en el instante actual y en el instante anterior, es decir: cuando $i=0$ y cuando $i=-1$ por lo que la ecuación 5.51 puede expresarse cuando $i=0$ como:

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1 - x_{-1}}{2\Delta t} \quad (5.59)$$

Despejando " x_1 " de la ecuación 5.59 se tiene que:

$$x_1 = \dot{x}_0 2\Delta t + x_{-1} \quad (5.60)$$

Se sustituye la ecuación 5.60 en la ecuación 5.52

$$\ddot{x}_0 = \frac{(\dot{x}_0 2\Delta t + x_{-1}) - 2x_0 + x_{-1}}{\Delta t^2} \quad (5.61)$$

Despejando x_{-1} de la ecuación 5.61

$$x_{-1} = x_0 - \Delta t \dot{x}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_0 \quad (5.62)$$

5.7 EJEMPLO EN EXCEL 4: MÉTODO DE LA DIFERENCIA CENTRAL

Para explicar este método en Excel, se plantearán las siguientes condiciones:

De la ecuación 5.56 se realizan los siguientes cambios de variable:

$$a = \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) \quad (5.63)$$

$$b = \left(k - \frac{2}{\Delta t^2} m \right) \quad (5.64)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.63 y 5.64 en la ecuación 5.56

$$\hat{P}_i = P_i - ax_{i-1} - bx_i \quad (5.65)$$

Se siguen los pasos mostrados en las figuras 5.19 – 5.23 y 5.25, posteriormente se declaran en Excel las expresiones 5.63, 5.64 y 5.55

Datos de entrada	
Masa (m) =	0.0008122 Tf-s ² /mm
Rigidez (k) =	1.1819 Tf/mm
Frecuencia natural de la estructura (ω) =	38.147116 rad/s
Porcentaje de amortiguamiento (ξ) =	0.05000
Frecuencia amortiguada (WD) =	38.0994026 rad/s

Cálculos iniciales	
b	-15.06208454
a	7.96708456
k circun =	8.27691544

Figura 5.40 Declaración de las expresiones que definen las condiciones iniciales en Excel para el método de la diferencial central

Se declaran las columnas a utilizar, mismas que corresponden al desplazamiento en un instante anterior, desplazamiento actual, desplazamiento en un instante posterior, velocidad, aceleración inicial y aceleración total; todas las columnas tendrán un valor inicial de 0, exceptuando la aceleración inicial que tendrá un valor igual, pero con signo contrario a la aceleración del terreno.

Desplazamiento en un instante anterior (x-1) "mm"	Desplazamiento (X0) "mm"	Desplazamiento en un instante posterior (x+1) "mm"	Velocidad inicial (V0) "mm/s"	Aceleración inicial (an) "mm/s2"	Aceleración total (aT) "mm/s2"
0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	28252.80000000	0.00000000

Figura 5.41 Declaración de las celdas que definen las condiciones iniciales en Excel para el método de la diferencial central

Se anexará una columna que contenga " \hat{P}_i " y se procederá a calcular sus valores con la expresión 5.65.

P circun	Desplazamiento en un instante anterior (x-1) "mm"	Desplazamiento (X0) "mm"
0.02339136	0	0.0000000000

Figura 5.42 Declaración de la celda que contendrá los valores de \hat{P}_i en Excel para el método de la diferencial central

Se calculan los valores correspondientes a los desplazamientos posteriores utilizando la expresión 5.58.

Desplazamiento en un instante posterior (x+1) "mm"
0.0000000000
0.0028260963

Figura 5.43 Declaración de la celda que contendrá los valores de $x + 1$ en Excel para el método de la diferencial central

Se calculan los valores correspondientes a los desplazamientos posteriores utilizando la expresión 5.59

Velocidad inicial (V0) "mm/s"
0.0000000000
0.0000000000

Figura 5.44 Declaración de la celda que contendrá los valores de V_0 en Excel para el método de la diferencial central

Se calculan los valores correspondientes a la aceleración generada por el método de las 8 constantes utilizando la expresión 5.61

Aceleración inicial (a_n) "mm/s²"
28.80000000
28.26096288

Figura 5.45 Declaración de la celda que contendrá los valores de a_n en Excel para el método de la diferencial central

Se calculan los valores correspondientes al desplazamiento actual y al desplazamiento anterior, esto considerando que se trata de valores escalonados del desplazamiento posterior, quedando:

Desplazamiento en un instante anterior ($x-1$) "mm"	Desplazamiento (x_0) "mm"	Desplazamiento en un instante posterior ($x+1$) "mm"
0	0.0000000000	0.0000000000
0.0000000000	0.0000000000	0.0028260963
0.0000000000	0.0028260963	0.0079689423
0.0028260963	0.0079689423	0.0146074337

Figura 5.46 Declaración de la celda que contendrá los valores de $x - 1$ y x_0 en Excel para el método de la diferencial central

Se calculan los valores correspondientes a la aceleración total sumando la aceleración proporcionada por el método de las 8 constantes más la aceleración del terreno.

Aceleración total (a_T)
"mm/s²"
0.00000000
-0.5390371

Figura 5.47 cálculo de la aceleración total en Excel para el método de la diferencial central

Se arrastran las celdas calculadas anteriormente para obtener los valores subsecuentes

P circun	Desplazamiento en un instante anterior (x-1) "mm"	Desplazamiento (X0) "mm"	Desplazamiento en un instante posterior (x+1) "mm"	Velocidad inicial (V0) "mm/s"	Aceleración inicial (an) "mm/s ² "	Aceleración total (aT) "mm/s ² "
0.02339136	0	0.000000000	0.000000000	0.000000000	28.80000000	0.00000000
0.02339136	0.000000000	0.000000000	0.0028260963	0.000000000	28.26096288	-0.5390371
0.065958261	0.000000000	0.0028260963	0.0079689423	0.3984471129	23.16749681	-5.6325032
0.120904494	0.0028260963	0.0079689423	0.0146074337	0.5890668727	14.95645515	-13.8435448
0.179920525	0.0079689423	0.0146074337	0.0217376300	0.6884343856	4.91704743	-23.8829526
0.22671082	0.0146074337	0.0217376300	0.0273907378	0.6391652021	-14.77088413	-34.0708841
0.255051532	0.0217376300	0.0273907378	0.0308148046	0.4538587318	-22.29040993	-41.5904099
0.261586328	0.0273907378	0.0308148046	0.0316043253	0.2106793753	-26.34546137	-45.6454614
0.238401205	0.0308148046	0.0316043253	0.0288031462	-0.1005829211	-35.90699793	-45.6069979
0.189919431	0.0316043253	0.0288031462	0.0229456773	-0.4329323993	-30.56289770	-40.2628977
0.11621385	0.0288031462	0.0229456773	0.0140407198	-0.7381213212	-30.47488669	-30.5748867
0.028753577	0.0229456773	0.0140407198	0.0034739483	-0.9735864484	-16.61813876	-16.7181388
-0.051660358	0.0140407198	0.0034739483	-0.0062414988	-1.0141109297	8.51324251	-1.1867575
-0.121606003	0.0034739483	-0.0062414988	-0.0146921887	-0.9083068505	12.64757334	12.5475733
-0.171487219	-0.0062414988	-0.0146921887	-0.0207187352	-0.7238618158	24.24143359	24.1414336

Figura 5.48 cálculo de todos los valores correspondientes al método de las 8 constantes en Excel para el método de la diferencial central

Se procede a calcular los valores máximos absolutos del desplazamiento, velocidad y aceleración total, así como los tiempos en que estos valores se presentan. Para tal efecto, se declaran las celdas que tendrán dichos valores e ingresamos la fórmula que brinda Excel para calcular máximos y mínimos de una lista.

Valores máximos			
	X0 (mm)	V0 (mm/s)	a total (mm/s ²)
	0.74099	6.75635	1079.83729
Tiempo en el que se producen	108.960	#N/D	108.94

Figura 5.49 Cálculo de los valores máximos del desplazamiento, aceleración y velocidad, así como de los tiempos en que estos valores máximos se presentan en el método de la diferencia central

Posteriormente se realizan las gráficas “desplazamiento-tiempo”, “velocidad-tiempo” y “aceleración-tiempo”

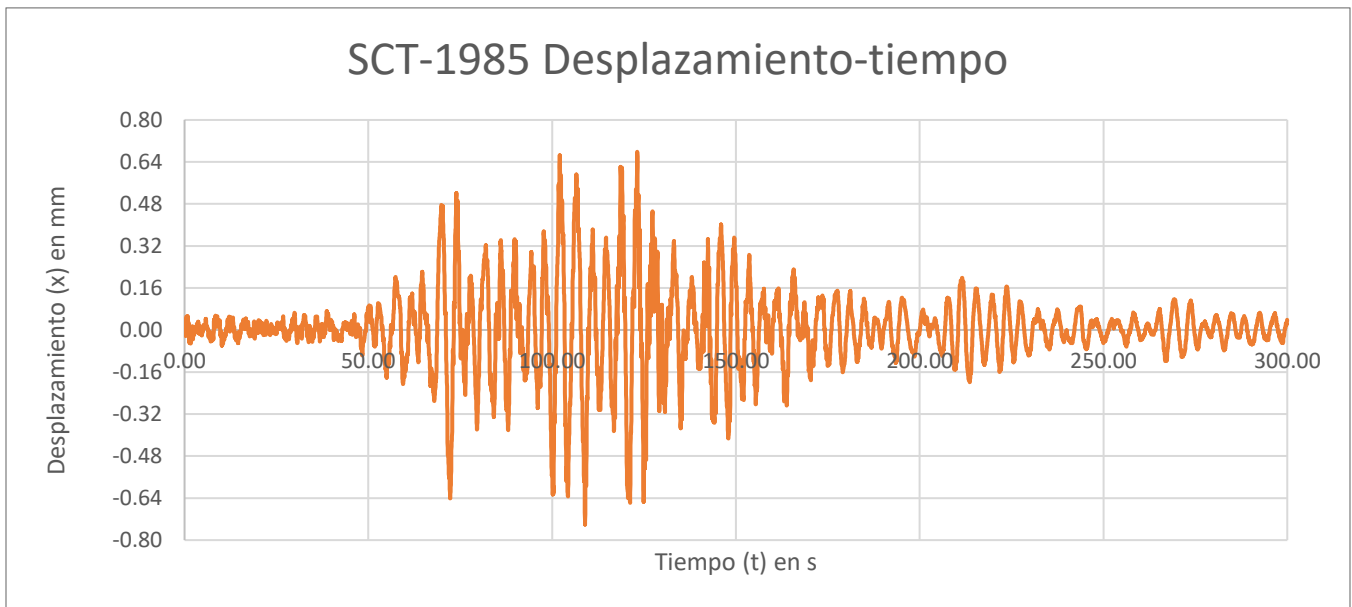


Figura 5.50. Diferencia central. Gráfica Desplazamiento-tiempo

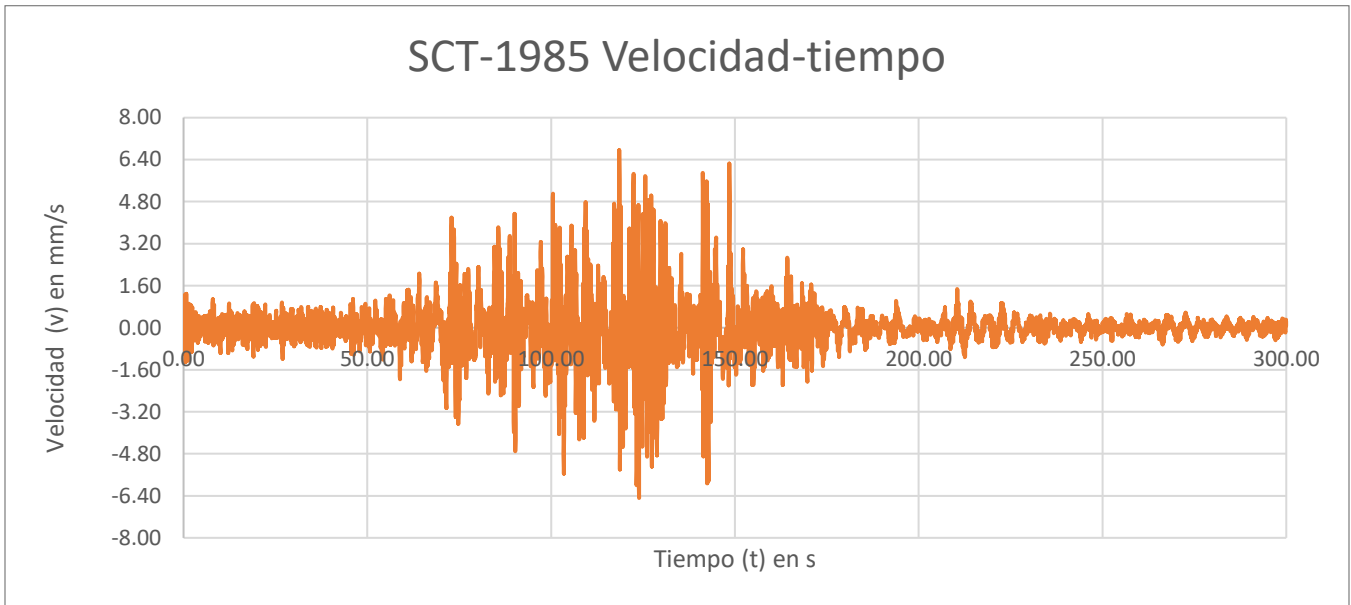


Figura 5.51. Diferencia central. Gráfica Velocidad-tiempo

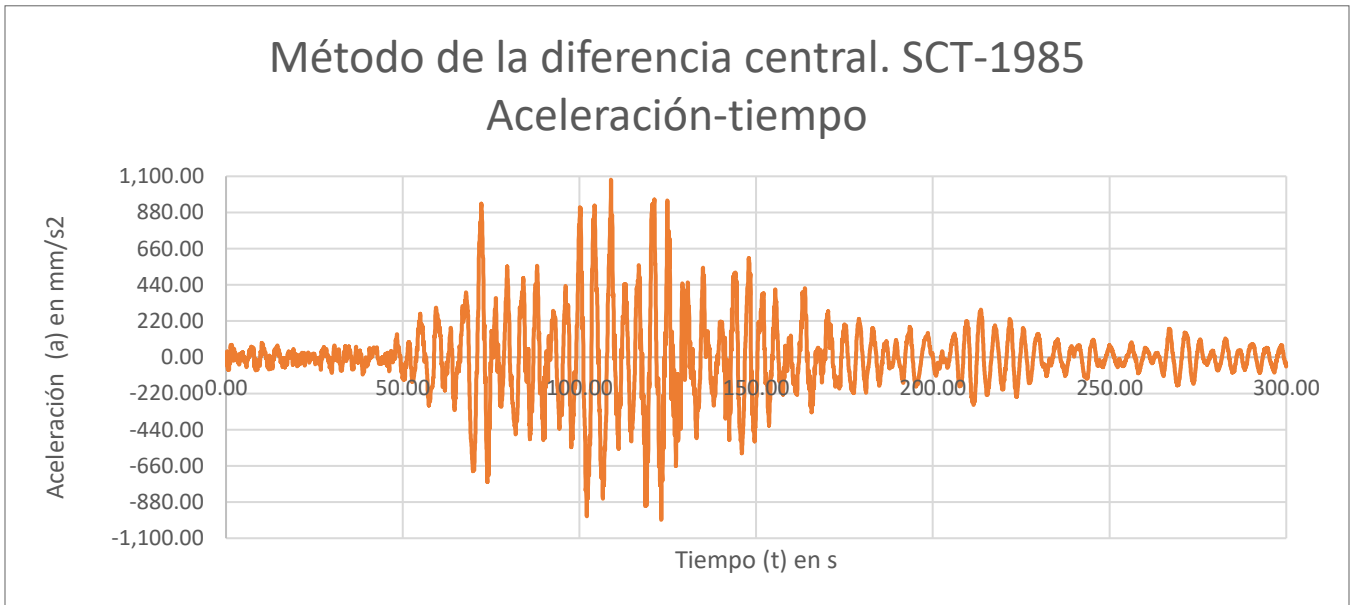


Figura 5.52. Diferencia central. Gráfica -tiempo

5.8 ESPECTRO DE RESPUESTA (DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS)

Se puede definir como un gráfico de la respuesta máxima absoluta (expresada en términos de desplazamiento, velocidad, aceleración, o cualquier otro parámetro de interés) que produce una acción dinámica determinada en una estructura u oscilador de un grado de libertad. Lo anterior permite determinar las fuerzas sísmicas que serán consideradas para el diseño de estructuras sismorresistentes.

En estos gráficos, se representa en abscisas el periodo propio de la estructura (o la frecuencia) y en ordenadas la respuesta máxima calculada para distintos factores de amortiguamiento ξ . Los espectros de respuestas tienen sus orígenes en 1929 cuando el ingeniero K. Suyehiro estableció la importancia de trabajar con registros acelerográficos, fue hasta 1932 cuando Maurice Biot propuso de manera formal trabajar con espectros de respuesta elástica, posteriormente Housner, Newmark y muchos otros investigadores desarrollaron e implementaron este concepto en criterios de aplicación práctica.

Clasificación de los espectros de respuesta

Los espectros de respuesta tienen principalmente la siguiente clasificación:

- Aceleración total
- Aceleración relativa
- Velocidad relativa
- Desplazamiento relativo
- Seudoaceleración
- Seudovelocidad
- Etc.

Construcción de un espectro de respuesta

En un plano cartesiano se graficarán el periodo o la frecuencia en el eje horizontal y la respuesta deseada en el eje vertical. Para la construcción de un espectro de respuesta en un sistema de 1 GDL es necesario conocer y cubrir los siguientes parámetros:

- Periodo
- Frecuencia
- Amortiguamiento
- Método de solución paso a paso (Newmark, 8 constantes, Diferencia central, Etc.)

Sin embargo, para implementar la construcción de un espectro de respuesta en un sistema de múltiples GDL se requiere emplear lo que se conoce como superposición modal, cuyo tema está fuera de los alcances de esta tesis.

Pero es sabido que los espectros de respuesta nos ayudan a determinar las estructuras que presentan respuestas máximas dentro de un rango de periodo, es decir: las respuestas máximas contenidas en un rango de periodo, nos indicarán que todas las estructuras que tengan un periodo dentro de dicho rango serán vulnerables.

5.9 CÁLCULO DEL ESPECTRO DE RESPUESTA EN EXCEL

Para la creación de un espectro de respuesta se implementará algún método de los explicados anteriormente, en este caso será el de la β -Newmark en su variante “aceleración promedio”. Las expresiones 5.40-5.43 dependen de la “masa”, “rigidez” y “amortiguamiento” y se harán depender del “porcentaje de amortiguamiento”, “periodo” y “rigidez fija”.

Lo anterior se hará de la siguiente forma:

Se sabe que:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\pi}{w} \\
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\
 T\sqrt{k} &= 2\pi\sqrt{m} \\
 m &= k \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2
 \end{aligned}
 \tag{5.65}$$

También se sabe que:

$$\begin{aligned}
 c &= 2\xi wm \\
 c &= 2\xi \left(\sqrt{\frac{m}{k}}\right) \left(k \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right) \\
 c &= 2\xi k \frac{T}{2\pi}
 \end{aligned}
 \tag{5.66}$$

Y finalmente se sabe que:

$$w = \frac{2\pi}{T}
 \tag{5.67}$$

El método consiste en ir cambiando los valores del periodo, desde un periodo inicial muy pequeño hasta uno más grande, en este caso será desde 0.1s hasta 15s. Es importante mencionar que a partir de los datos obtenidos por el método de la β -Newmark se extraerán, con ayuda de Excel, los valores máximos absolutos del desplazamiento, velocidad y aceleración total de cada uno de estos periodos. Para ejecutar este método se emplearán dos archivos en Excel, uno que contiene el programa de la β -Newmark “aceleración promedio” y otro archivo en blanco que se irá construyendo.

Se tiene una hoja de cálculo en blanco, como se muestra a continuación:

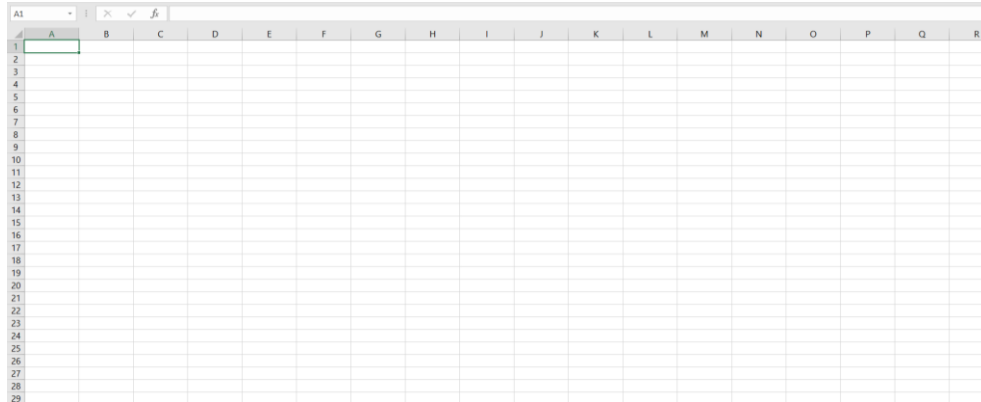


Figura 5.53 Hoja de Excel en blanco para los espectros de respuesta

Se colocan 4 columnas en la hoja de Excel para denotar el periodo, el desplazamiento máximo, la velocidad máxima y la aceleración total.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

β-Newmark aceleración promedio

T (s)	Xmáx (mm)	Vmáx (mm/s)	A total máx (mm/s ²)
-------	-----------	-------------	----------------------------------

Figura 5.54 declaración de celdas para valores máximos para los espectros de respuesta

A continuación, se llena la columna del periodo con valores de 0.1s en 0.1s hasta 15s

β-Newmark aceleración promedio			
T (s)	Xmáx (mm)	Vmáx (mm/s)	A total máx (mm/s ²)
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			
0.6			
0.7			
0.8			
0.9			
1			
1.1			
1.2			
1.3			
1.4			
1.5			
1.6			
1.7			
1.8			
1.9			

Figura 5.55 Llenado de la columna del periodo para los espectros de respuesta

Se abre el archivo que contiene el programa de la β -Newmark y se procede a modificar las expresiones de los datos de entrada que correspondan a las ecuaciones 5.65, 5.66 y 5.67, estas expresiones están pintadas de color verde, las expresiones en color azul son las que se hicieron independientes mientras que las que están en gris son valores que se calculan de manera automática, como se vio en subcapítulos previos, o bien ya están predefinidas. También es importante mencionar, que, para obtener resultados más precisos, se usará un $\Delta t = \tau = 0.01s$ y el valor de la gravedad será $g = \frac{1mm}{s^2}$ debido a que el acelerograma ya está en cm/s/s y no es necesarios multiplicar la aceleración por la gravedad.

Datos de entrada	
Masa (m) =	0.0002994 Tf-s ² /mm
Rigidez (k) =	1.1819 Tf/mm
Frecuencia natural de la estructura (w) =	62.831853 rad/s
Porcentaje de amortiguamiento (ξ) =	0.05000
Frecuencia amortiguada (WD) =	62.7532641 rad/s
Intervalos de tiempo ($\Delta t = \tau$) =	0.010 s
Gravedad (g) =	1.0 mm/s ²
Desplazamiento inicial (X0) =	0.00000 mm
Velocidad inicial (V0) =	0.0000 mm/s
Amortiguamiento (C) =	0.00188108 Tonf-s/mm
Número de Euler (e) =	2.71828
Periodo (T) =	0.100000000 s

Figura 5.56 Datos de entrada en Excel cambiando variables dependientes a independientes para los espectros de respuesta

Del archivo que contiene el programa de la β -Newmark se introduce el primer valor del periodo "T" que corresponderá a 0.01s, dicha acción modificará los valores máximos absolutos, como se muestra a continuación:

Gravedad (g) =	1.0 mm/s ²			
Desplazamiento inicial (X0) =	0.00000 mm			
Velocidad inicial (V0) =	0.0000 mm/s			
Amortiguamiento (C) =	0.00188108 Tonf-s/mm			
Número de Euler (e) =	2.71828			
Periodo (T) =	0.100000000 s			
		Valores máximos		
		X0 (mm)	V0 (mm/s)	a total (mm/s²)
		0.28010	4.25149	1104.46716
	Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"	108.880	85.28	108.860

Figura 5.57. Alteración del periodo y valores máximos para los espectros de respuesta

Los valores absolutos obtenidos con un periodo T=0.1s se copiarán en el otro archivo de Excel, representado por la figura 5.55. Se hará el mismo procedimiento hasta completar todos los datos.

T (s)	Xmáx (mm)	Vmáx (mm/s)	A total máx (mm/s ²)
0.1	0.280100829	4.251488093	1104.467159
0.2	1.121132388	12.26976702	1109.222464
0.3	2.712370135	26.58665143	1191.412998
0.4	4.844563822	41.68868816	1196.335189
0.5	8.000611098	53.32828985	1265.85901
0.6	12.7307697	79.4529284	1399.085454
0.7	18.96087326	152.5705183	1533.957444
0.8	23.22271079	128.5018823	1435.882002
0.9	36.08703885	163.0202287	1762.994186
1	43.68071346	168.8136335	1729.102723
1.1	52.62348754	225.617493	1721.358136
1.2	66.16649802	285.0523333	1818.56838
1.3	70.96053422	267.5765959	1661.75191
1.4	90.87153416	343.2920643	1835.092224
1.5	126.8737989	432.0295356	2233.356469
1.6	167.7299871	552.1558075	2596.167359
1.7	226.8817265	729.8759315	3111.602303
1.8	286.6893232	886.855302	3506.965075
1.9	367.4611432	1096.104928	4035.077087

Figura 5.58 valores de las respuestas máximas de cada periodo para los espectros de respuesta

Se realizan las gráficas correspondientes al “desplazamiento”, “velocidad” y “aceleración” contra el periodo, quedando:

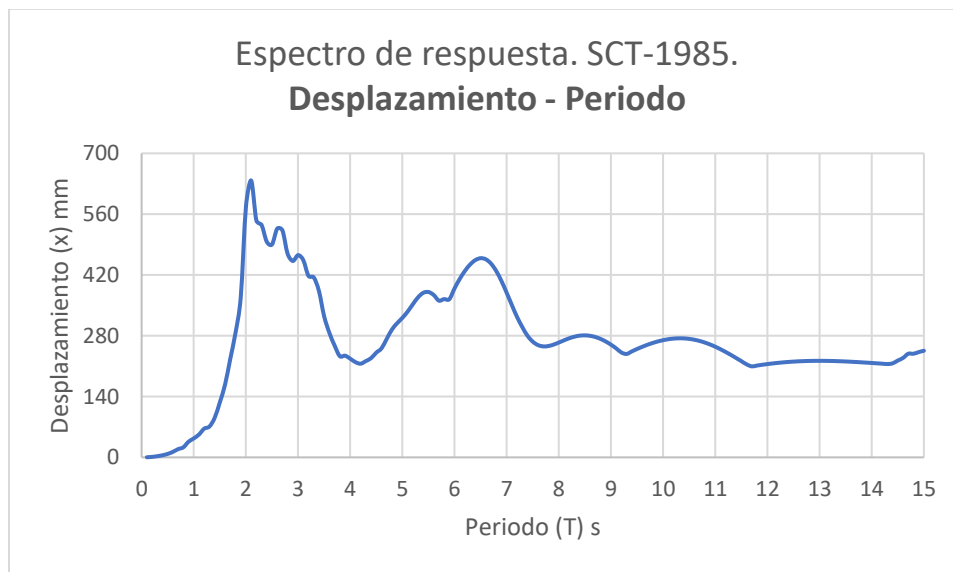


Figura 5.59. Espectro de respuesta. Gráfica desplazamiento - periodo

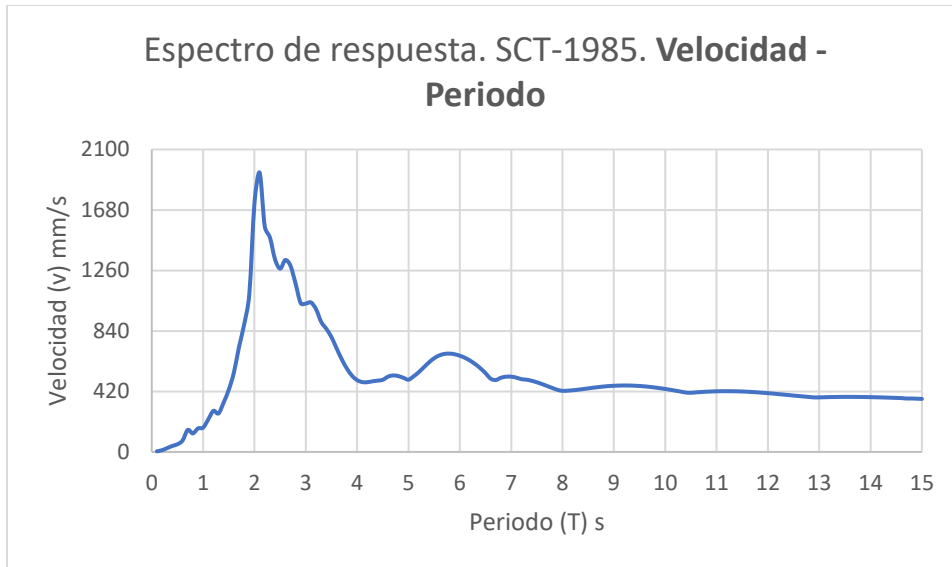


Figura 5.60. Espectro de respuesta. Gráfica velocidad – periodo

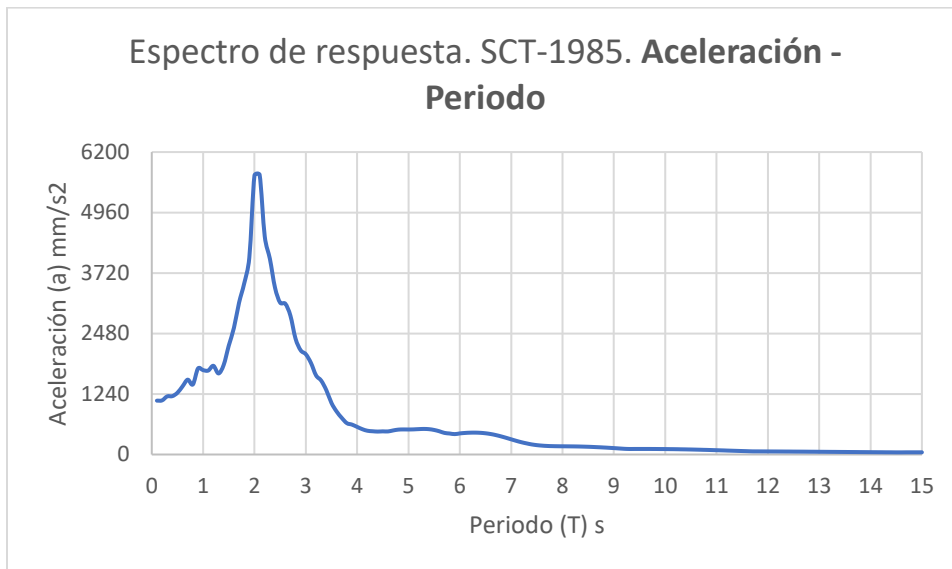


Figura 5.61. Espectro de respuesta. Gráfica aceleración - periodo

De las gráficas anteriores podemos concluir que las respuestas máximas coincidirán con un periodo $T=2s$

5.10 COMPARACIÓN DE RESULTADOS CONTRA ETABS

Para comprobar que los espectros de respuestas elaborados previamente son correctos se procederá a calcular las cargas laterales producidas por el sismo (empleando parte de la información de los espectros) utilizando la siguiente expresión basada en la ley de Hooke: $F = kx$. Se calculará un espectro de respuesta adicional asociado al coeficiente sísmico, definida como:

$$c = \frac{S_a}{g} \quad (5.68)$$

Para tal efecto se pondrá una columna adicional que contenga la frecuencia natural de la estructura y a través de la expresión $w = \frac{2\pi}{T}$ se calcularán dichos valores correspondientes a cada periodo

T (s)	Frecuencia de la estructura W (rad/s)
0.1	62.83185307
0.2	31.41592654
0.3	20.94395102
0.4	15.70796327
0.5	12.56637061
0.6	10.47197551
0.7	8.97597901
0.8	7.853981634
0.9	6.981317008
1	6.283185307
1.1	5.711986643
1.2	5.235987756
1.3	4.833219467
1.4	4.487989505
1.5	4.188790205
1.6	3.926990817
1.7	3.695991357
1.8	3.490658504
1.9	3.306939635
2	3.141592654

Figura 5.62. Tabulación de la frecuencia natural de la estructura y el periodo para los espectros de respuesta

Posteriormente, se empleará la expresión que define la pseudoaceleración $S_a = w^2 X_{m\acute{a}x}$ para calcular el valor asociado a cada periodo.

T (s)	Frecuencia de la estructura W (rad/s)	Sa (mm/s ²)
0.1	62.83185307	110.579375
0.2	31.41592654	110.651331
0.3	20.94395102	118.977868
0.4	15.70796327	119.534821
0.5	12.56637061	126.340586
0.6	10.47197551	139.608512
0.7	8.97597901	152.764341
0.8	7.853981634	143.249355
0.9	6.981317008	175.883851
1	6.283185307	172.444545
1.1	5.711986643	171.693555
1.2	5.235987756	181.399211
1.3	4.833219467	165.763882
1.4	4.487989505	183.033897
1.5	4.188790205	222.612303
1.6	3.926990817	258.660722
1.7	3.695991357	309.928427
1.8	3.490658504	349.322248
1.9	3.306939635	401.849985
2	3.141592654	569.05403

Figura 5.63. Tabulación de la pseudoaceleración para los espectros de respuesta

Con los valores de la pseudoaceleración obtenidos previamente, se procederá a calcular el coeficiente sísmico para los datos asociados a cada periodo, utilizando la expresión 5.68

Sa (mm/s ²)	c (coeficiente sísmico)
1105.79375	0.112721075
1106.51331	0.112794426
1189.77868	0.12128223
1195.34821	0.12184997
1263.40586	0.12878755
1396.08512	0.142312448
1527.64341	0.15572308
1432.49355	0.146023808
1758.83851	0.179290368
1724.44545	0.175784449
1716.93555	0.175018914
1813.99211	0.18491255
1657.63882	0.168974395
1830.33897	0.186578896
2226.12303	0.226923856
2586.60722	0.26367046
3099.28427	0.315931118
3493.22248	0.356087918
4018.49985	0.409633012
5690.5403	0.580075464
5706.80292	0.581733223
4450.40809	0.453660356

Figura 5.64. Tabulación del coeficiente sísmico para los espectros de respuesta

Cuya gráfica se muestra a continuación:

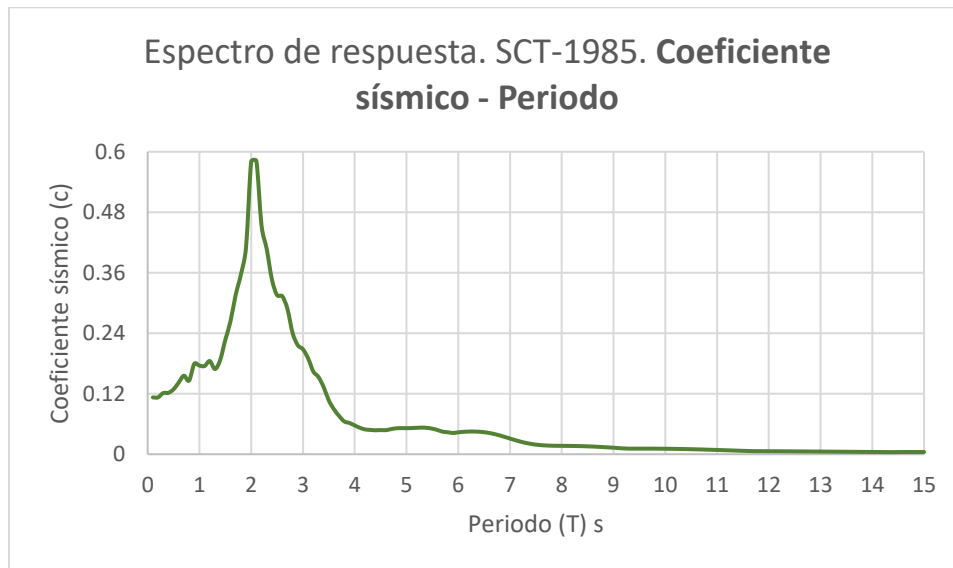


Figura 5.65. Espectro de respuesta. Gráfica Coeficiente sísmico - periodo

Debido a que el procedimiento sobre como ingresar los datos en ETABS salen fuera del alcance de esta tesis, solo se indicarán los datos de entrada que se tomaron en cuenta:

$$F'c = 280 \frac{kg}{cm^2}$$

$$Longitud\ de\ columna = 5m$$

$$Longitud\ de\ viga = 3m$$

$$Dimensión\ de\ columnas\ y\ vigas = 0.5m\ X\ 0.5m$$

$$m = 6 \frac{tons^2}{m}$$

Se define un marco bidimensional de un nivel y una crujía con apoyos empotrados en su base y las características antes mencionadas. Es importante mencionar que el análisis se debe hacer en un plano bidimensional.

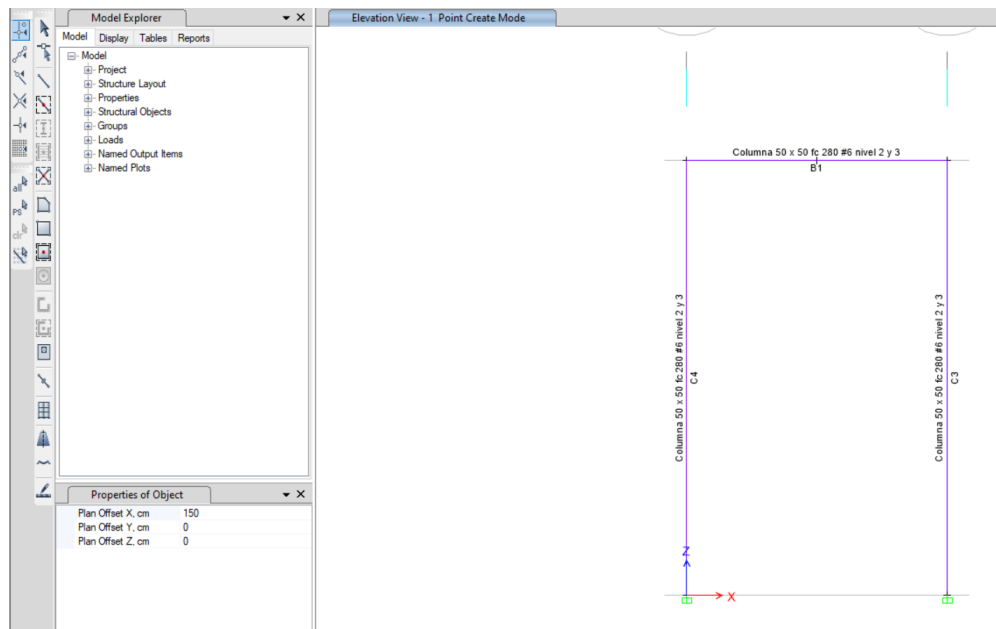


Figura 5.66. Declaración de un marco bidimensional de un nivel y una crujía en ETABS

A continuación, se declara el espectro de respuesta del coeficiente sísmico en ETABS como se muestra en las siguientes figuras:

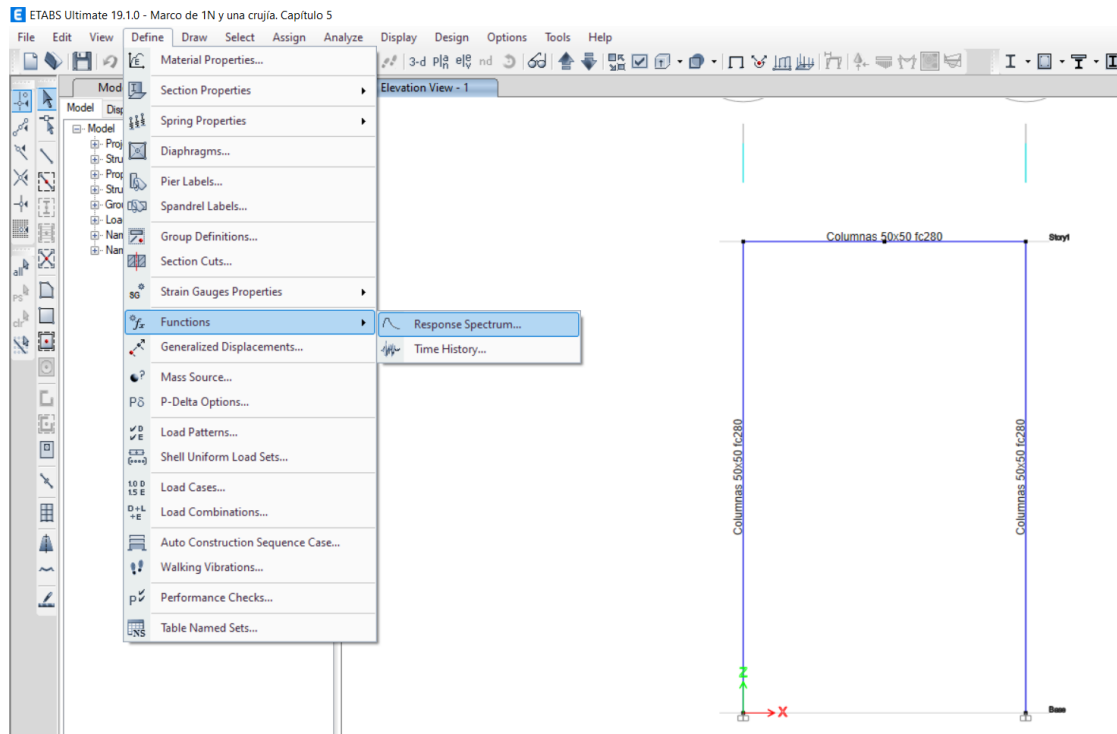


Figura 5.67. Paso 1. Declaración del espectro de respuesta en ETABS

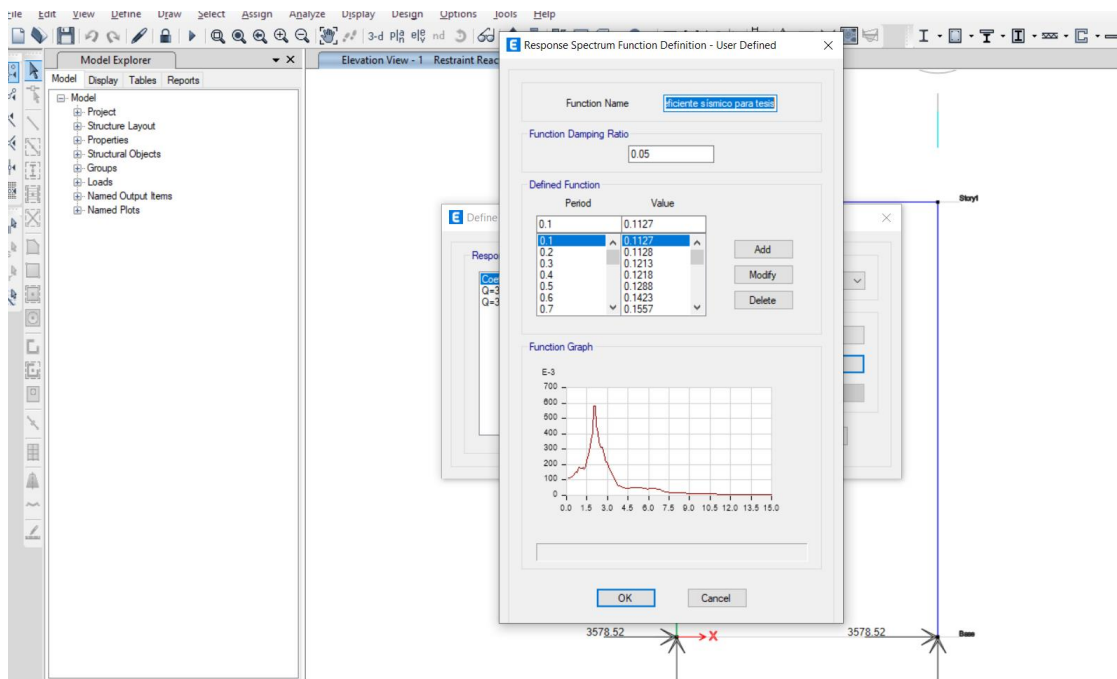


Figura 5.68. Paso 2. Declaración del espectro de respuesta en ETABS

Se definen los casos de carga

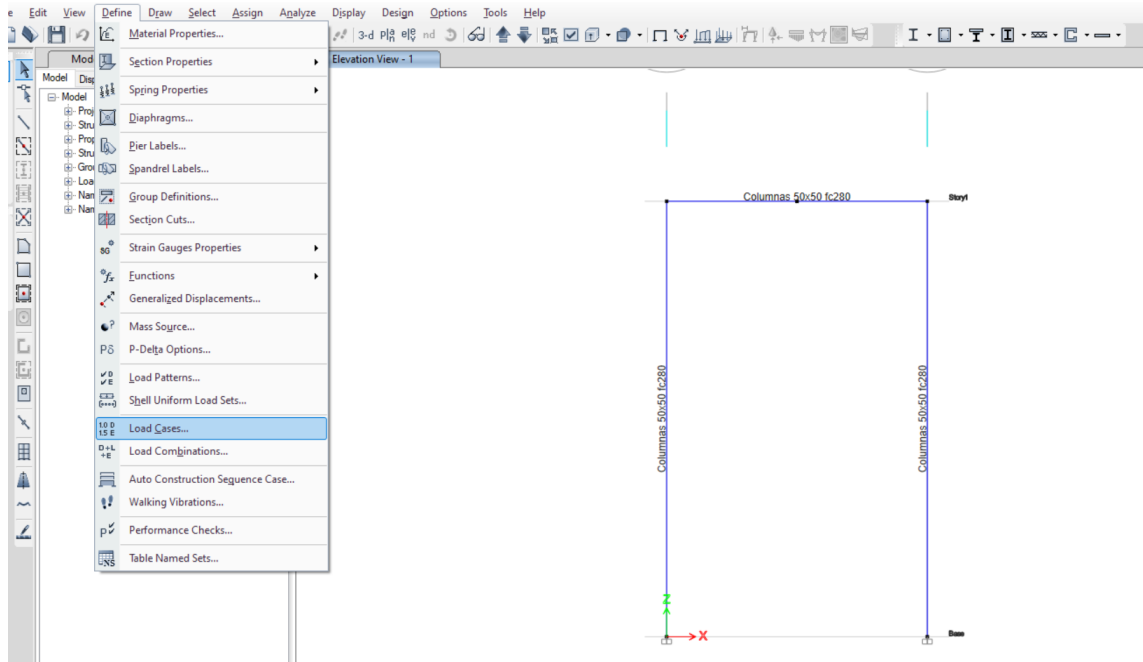


Figura 5.69. Definición de los casos de carga en ETABS

Se añade un nuevo caso

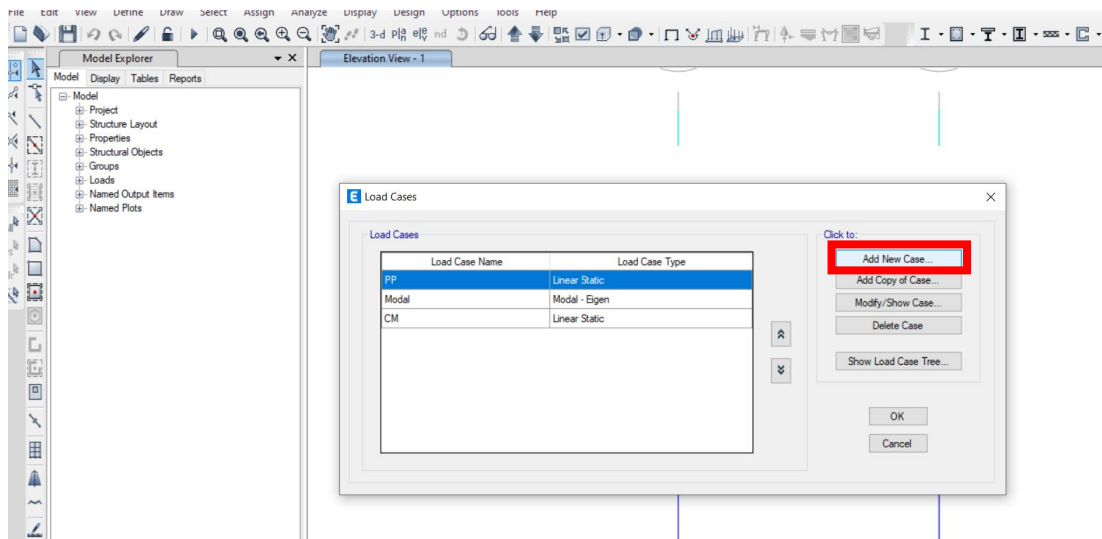


Figura 5.70. Se añade un nuevo caso de carga en ETABS

Se selecciona el tipo de caso como “Espectro de respuesta”

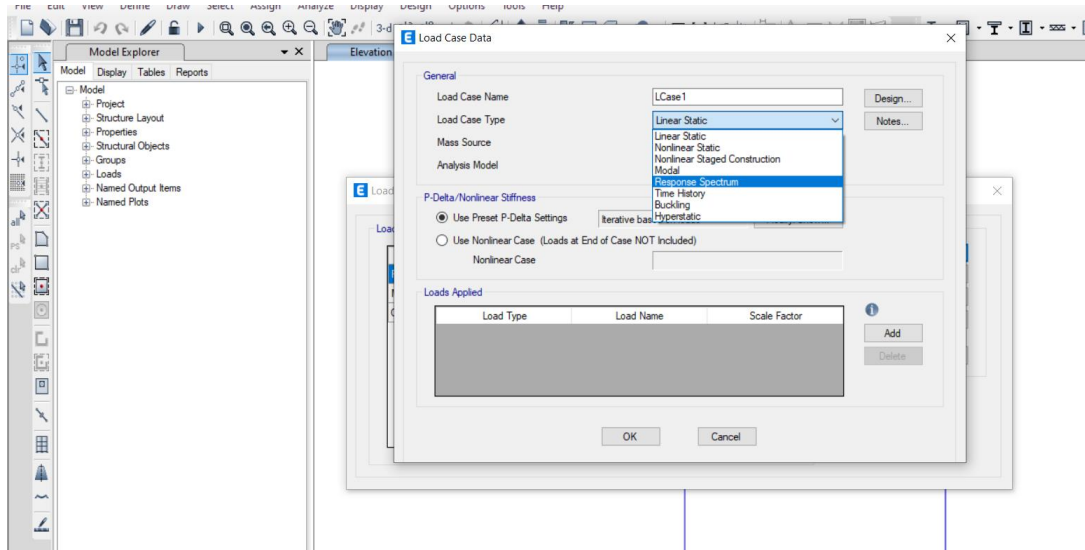


Figura 5.71. Definición del tipo de caso en ETABS

Se nombra como “SXD”

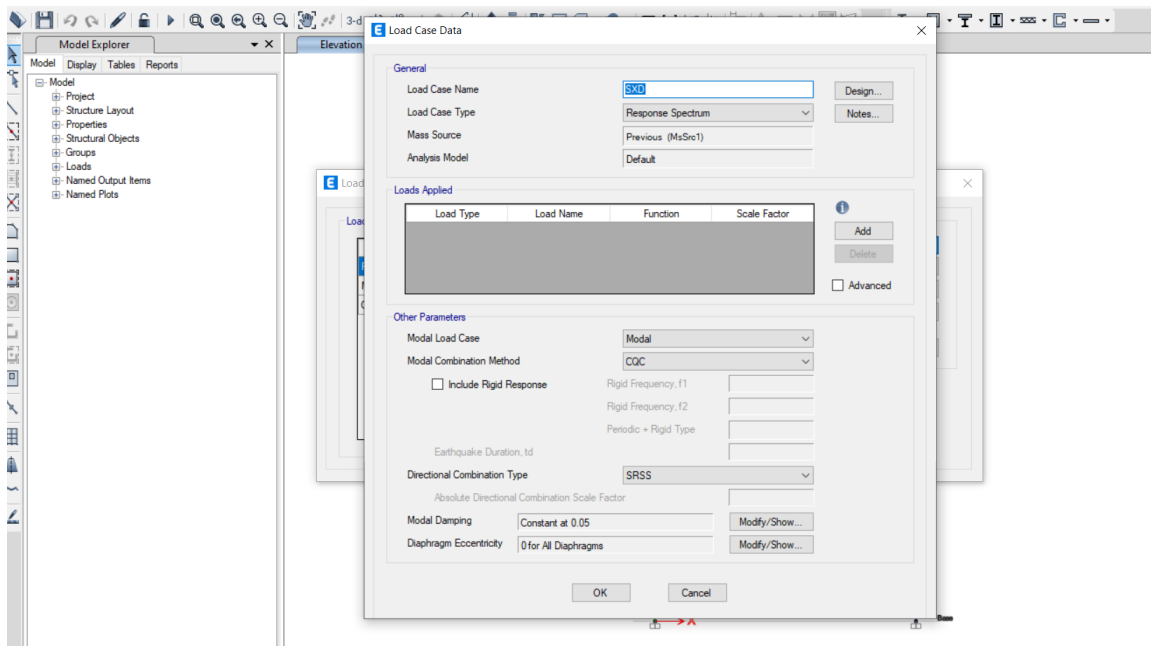


Figura 5.72. Etiquetado del caso de carga en ETABS

Se añaden las cargas

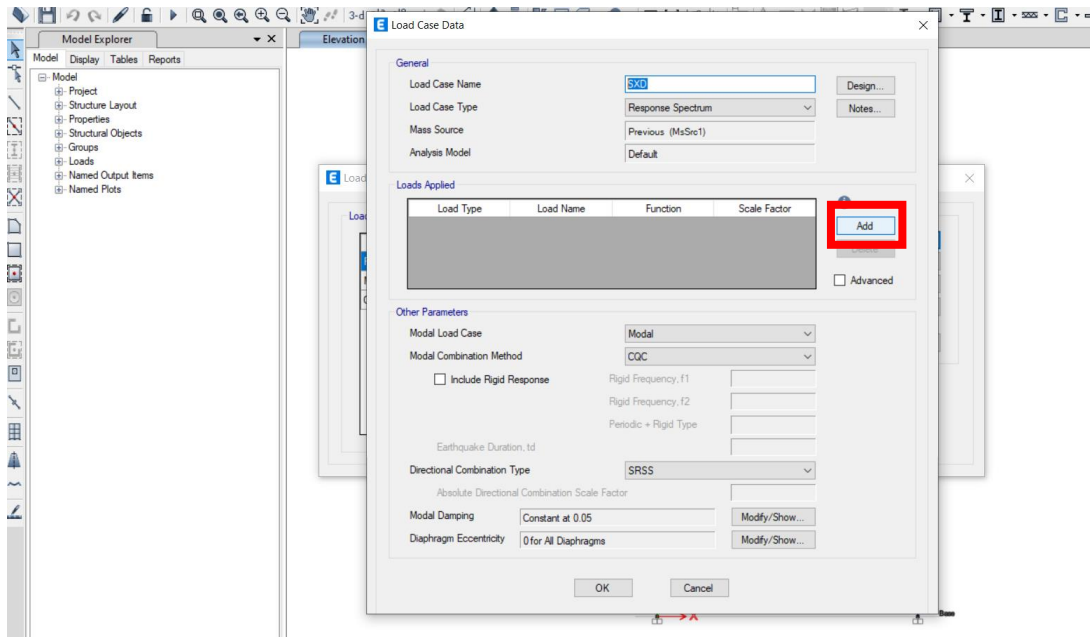


Figura 5.73. Inserción de la carga en ETABS

Se selecciona el espectro que se introdujo a ETABS de manera previa

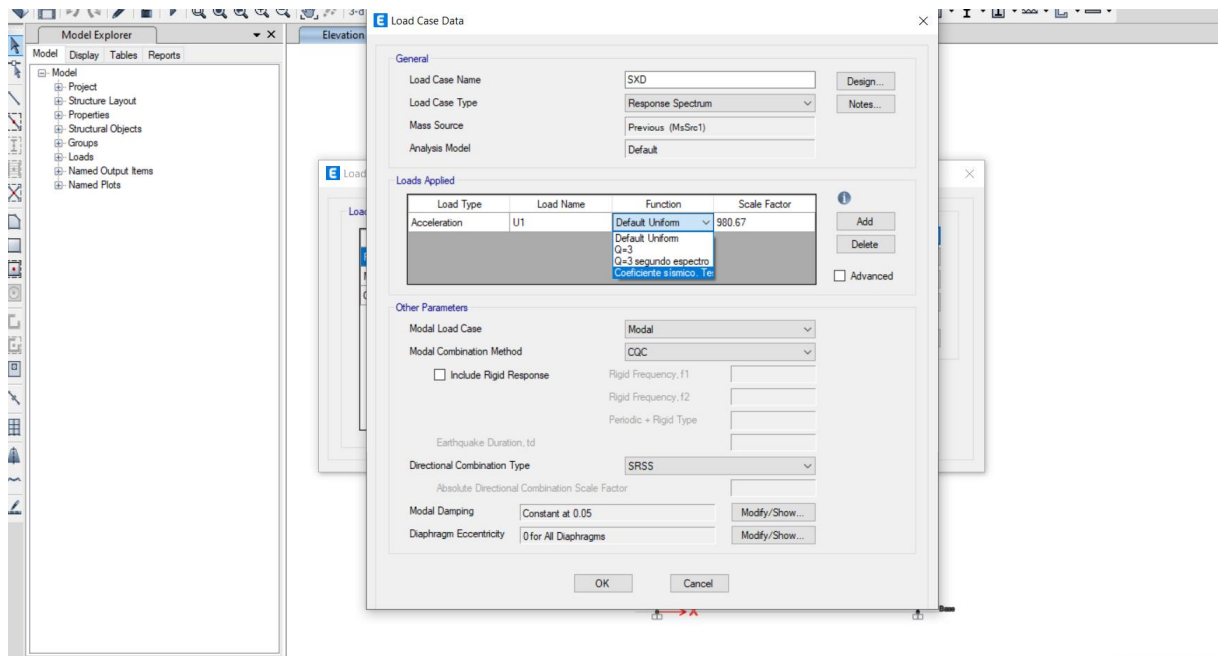


Figura 5.74. Selección de espectro en ETABS

Se define la gravedad como 981 cm/s²

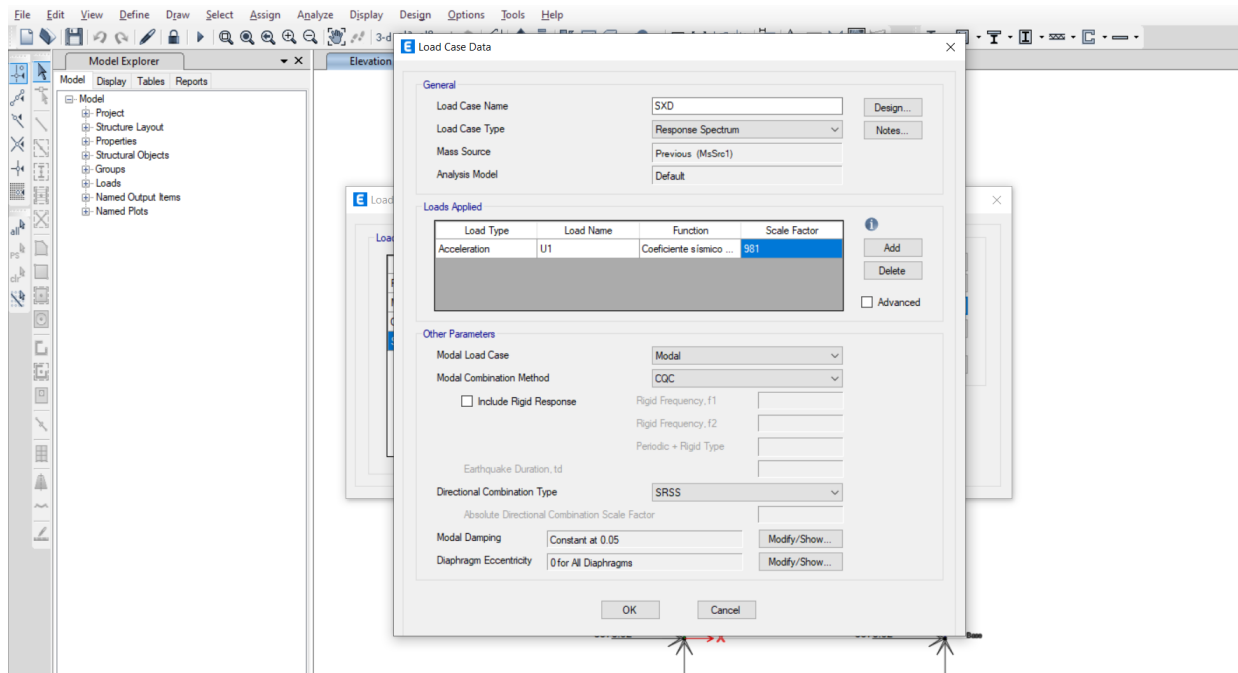


Figura 5.75. Definición de la gravedad en ETABS

Debido a que el espectro utilizado tiene valores muy pequeños se cambiarán las unidades de trabajo por kgf y cm

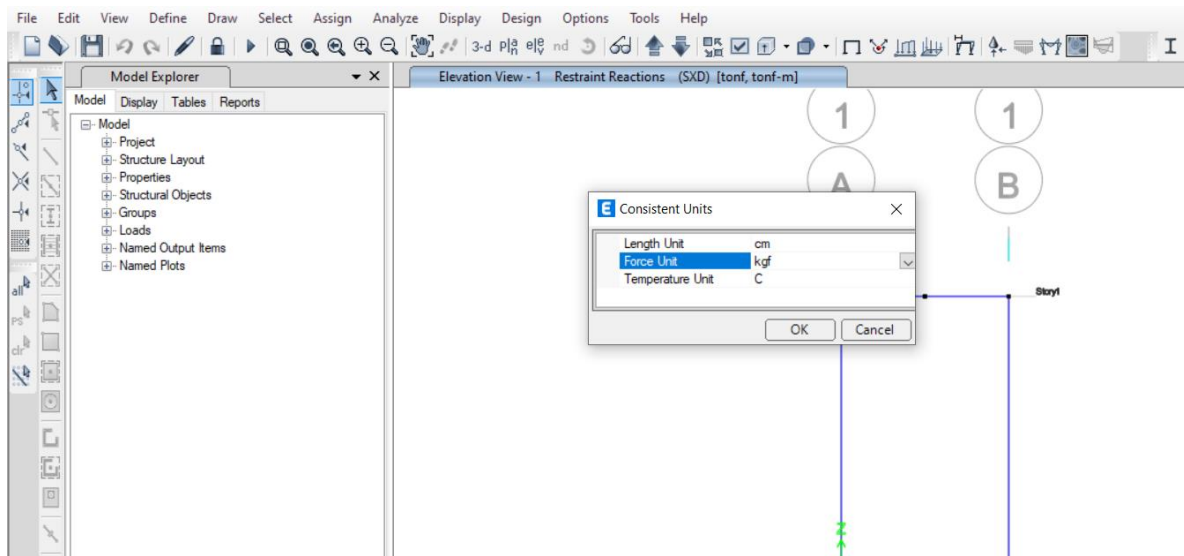


Figura 5.76 Cambio de unidades en ETABS

Se pide a ETABS las reacciones provocadas por el espectro de respuesta en el caso SXD

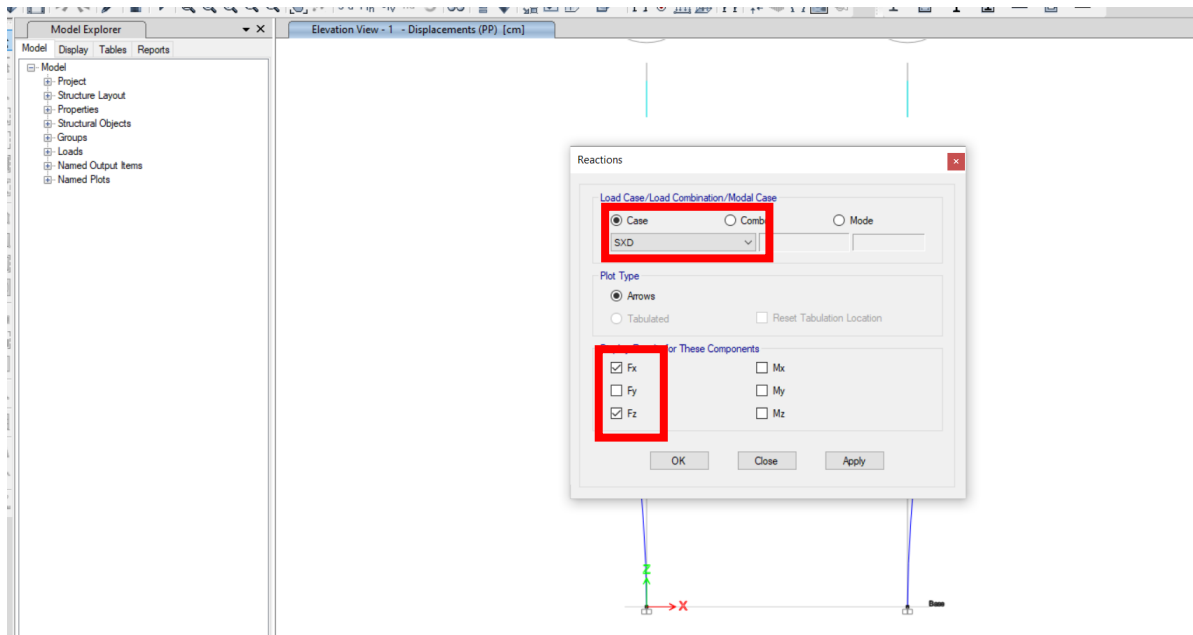


Figura 5.77. Obtención de reacciones en ETABS

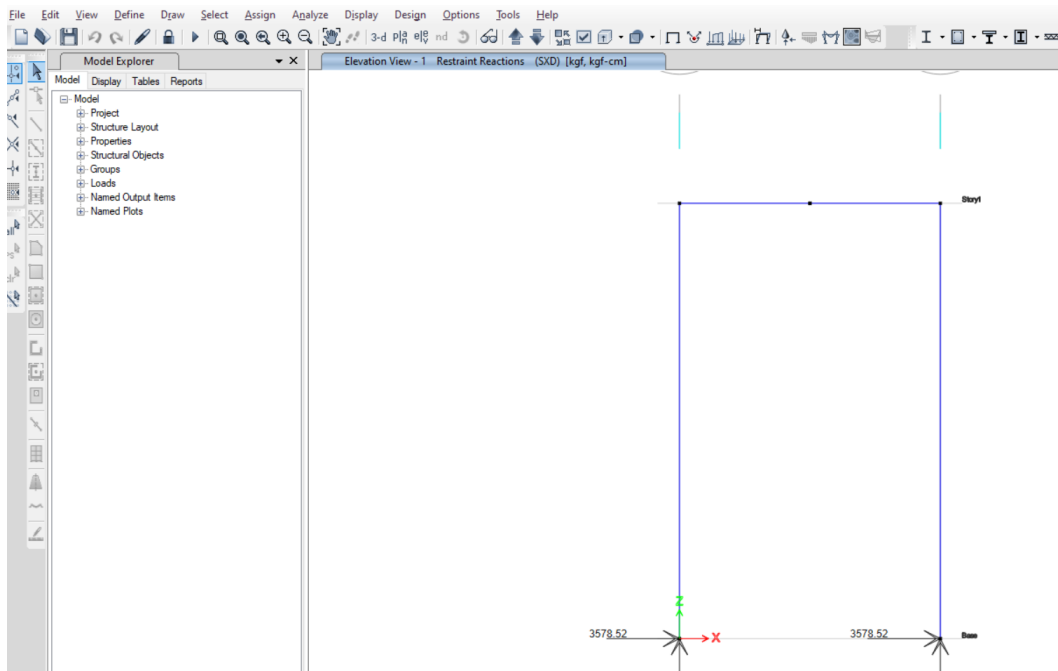


Figura 5.78 Reacciones en ETABS

Quedando de la siguiente manera

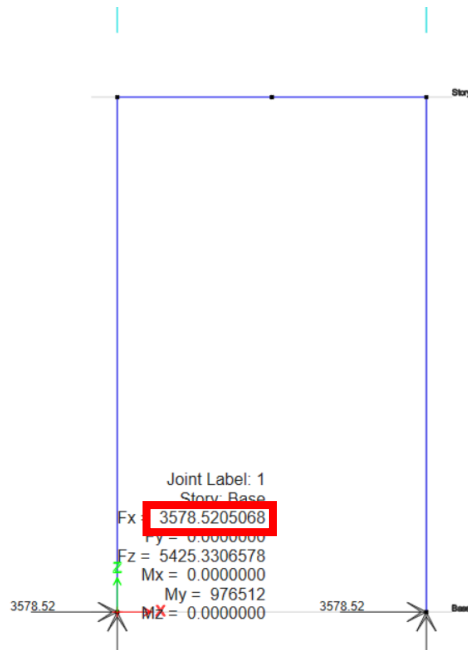


Figura 5.79. Obtención de reacciones habiéndose realizado el cambio de unidades en ETABS

Por equilibrio de fuerzas, se afirma que el marco recibirá una fuerza de 7157.041014 kgf en la parte superior, pero en sentido contrario.

$$F = 7157.041014 \text{ kgf} \quad (5.68.1)$$

Habiendo hecho la aclaración anterior, se le pide a ETABS los desplazamientos que tuvo la estructura en el caso "SDX"

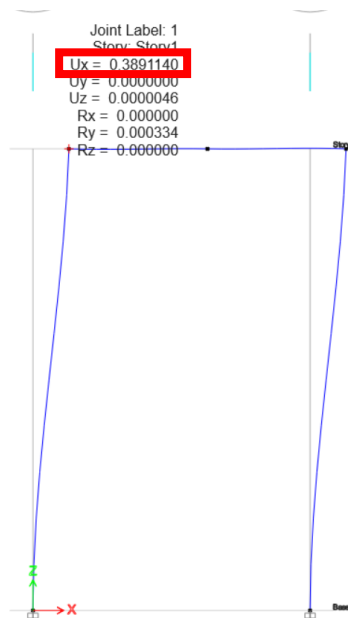


Figura 5.80. Obtención de desplazamientos en ETABS

Se observa que en el sentido “x” se tiene un desplazamiento de 0.3891140 cm. Se aplica la ley de Hooke “ $F = kx$ ” cuyos valores “F” y “x” acabamos de conocer, se despeja “k” quedando:

$$k = \frac{F}{x} \quad (5.69)$$

Sustituyendo los valores previamente obtenidos en la ecuación 5.69 para hallar la rigidez lateral

$$k_{lat} = \frac{7157.041014}{0.3891140}$$

$$k_{lat} = 18393.17273 \frac{kgf}{cm} \quad (5.70)$$

Se sabe que el periodo puede calcularse como:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{lat}}} \quad (5.71)$$

Al principio del subcapítulo se mencionó que el valor de la masa sería de $6 \frac{tons^2}{m}$ sin embargo, como se mencionó líneas arriba, fue necesario cambiar unidades para tener una mejor visión de los cálculos, por ende, se usarán unidades de kg y cm, quedando la masa expresada de la siguiente manera:

$$m = 60 \frac{kg s^2}{cm} \quad (5.72)$$

Sustituyendo la ecuación 5.72 en la ecuación 5.71, quedando:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{60}{18393.17273}} \quad (5.73)$$

Por tanto, el periodo tendrá un valor de:

$$T = 0.35886 \text{ s} \quad (5.74)$$

Lo anterior se compara contra los resultados obtenidos en ETABS

View - 1 Mode Shape (Modal) - Mode 1 - Period 0.358861751613188

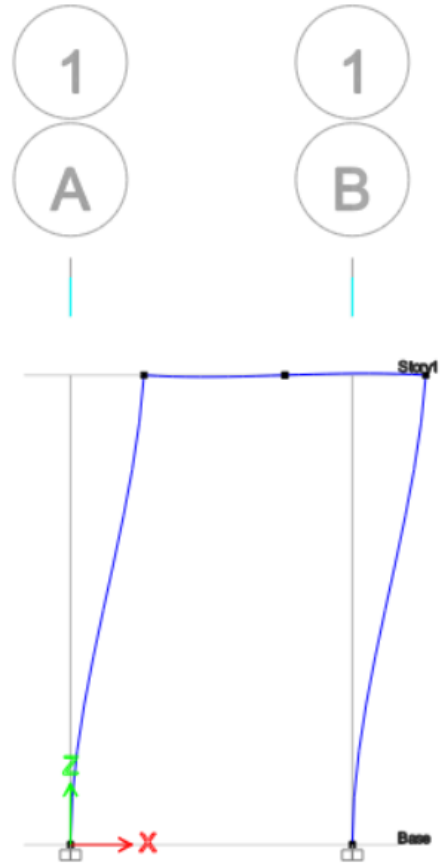


Figura 5.81. Periodo obtenido en ETAB

Se puede observar que se obtuvieron los mismos resultados.

Apelando nuevamente a la ley de Hooke " $F = kx$ ", y considerando que las fuerzas se obtuvieron de un espectro de respuesta, los desplazamientos en cuestión serán las respuestas máximas, quedando de la siguiente manera:

$$F = (k_{lat})(x_{m\acute{a}x}) \tag{5.75}$$

Sustituyendo el valor del periodo obtenido en las hojas de cálculo representada por la figura 5.57 se tiene:

Gravedad (g) =	1.0 mm/s ²		
Desplazamiento inicial (X0) =	0.00000 mm		X0 (mm)
Velocidad inicial (V0) =	0.0000 mm/s		3.88719
Amortiguamiento (C) =	0.00675043 Tonf-s/mm		
Número de Euler (e) =	2.71828		
Periodo (T) =	0.358860000 s	Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"	129.260

Figura 5.82. Sustitución del periodo en la hoja de cálculo (Excel) para los espectros de respuesta

Haciendo las respectivas conversiones obtenemos un desplazamiento máximo de 0.388719 cm, sustituyendo dicho valor junto con la ecuación 5.70 en la expresión 5.75:

$$F = (18393.17273)(0.388719) \tag{5.76}$$

Quedando una fuerza de:

$$F = 7149.77570 \text{ kgf} \tag{5.77}$$

Se puede observar que el valor obtenido es bastante aproximado al resultado de la expresión 5.68.1 que nos indica las fuerzas calculadas por ETABS. De esta manera comprobamos que los espectros de los subcapítulos previos fueron bien elaborados.

VI. IMPLEMENTACIÓN DEL ADTH PARA SISTEMAS DE N GDL USANDO EXCEL.

6.1 DEFINICIÓN DE LA ESTRUCTURA

Para realizar el análisis dinámico tiempo historia se planteará la siguiente estructura de 3 niveles y dos crujiás, con apoyos empotrados en la base y con las siguientes características:

$$F'c = 350 \frac{kgf}{cm^2}$$

$$E = 140,000\sqrt{350} \frac{tonf}{m^2}$$

Dimensiones de columnas y vigas = 0.5m x 0.5m

Longitud de vigas = 5m

Longitud de columnas = 3m

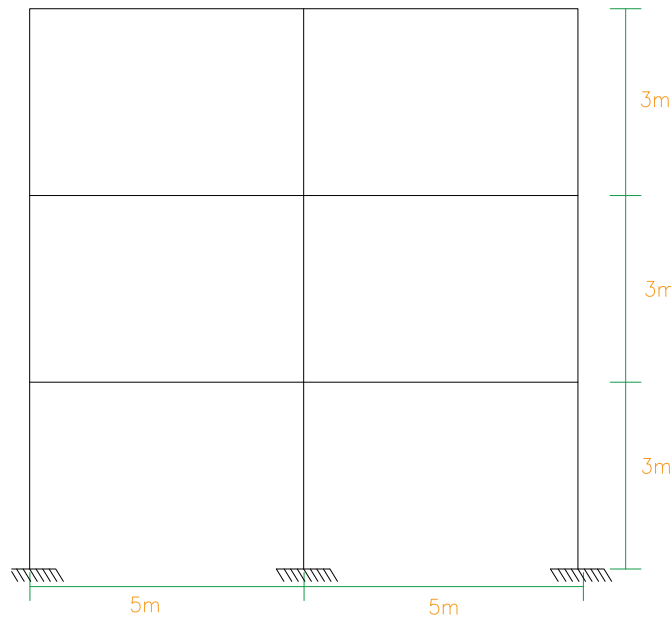


Figura 6.1 Presentación de la estructura para el ADTH

6.2 CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Se procederá a calcular la matriz de rigidez empleando el método de la rigidez matricial en Excel, para dichos fines se empezará por enumerar los grados de libertad de la estructura obedeciendo el siguiente orden: GDL horizontales, rotacionales, verticales, horizontales en apoyo y rotacionales en apoyo. El orden descrito anteriormente puede abreviarse de la siguiente manera: "H-R-V-HA-RA". También se enumerarán los elementos de la estructura, quedando de la siguiente manera:

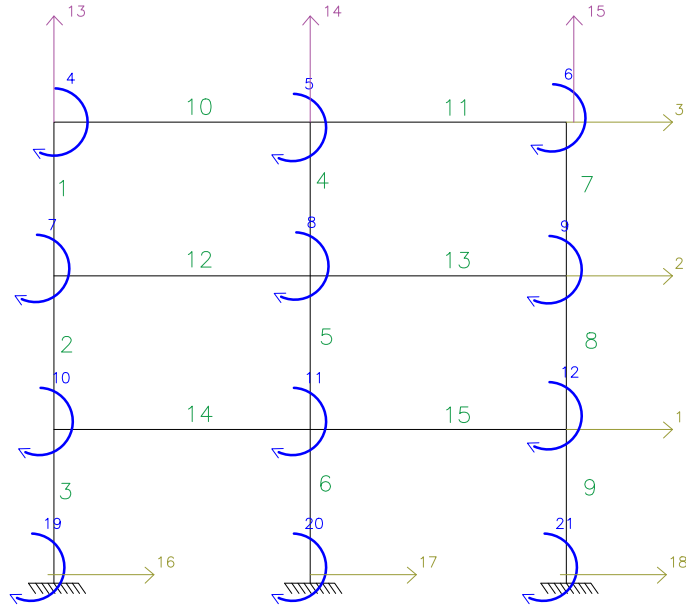


Figura 6.2 Enumeración de GDL y de los elementos de la estructura para el ADTH

Antes de abordar el cálculo en Excel es importante mencionar que, aunque no se hará la deducción de las matrices porque sale del alcance de esta tesis, las matrices locales de rigidez de columnas y vigas son las siguientes:

Matriz de rigidez de vigas:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{12EIv}{L^3} & -\frac{6EIv}{L^2} & -\frac{12EIv}{L^3} & -\frac{6EIv}{L^2} \\
 -\frac{6EIv}{L^2} & \frac{4EIv}{L} & \frac{6EIv}{L^2} & \frac{2EIv}{L} \\
 -\frac{12EIv}{L^3} & \frac{6EIv}{L^2} & \frac{12EIv}{L^3} & \frac{6EIv}{L^2} \\
 -\frac{6EIv}{L^2} & \frac{2EIv}{L} & \frac{6EIv}{L^2} & \frac{4EIv}{L}
 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Matriz de rigidez de columnas:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EIv}{L^3} & \frac{6EIv}{L^2} & -\frac{12EIv}{L^3} & \frac{6EIv}{L^2} \\ \frac{6EIv}{L^2} & \frac{4EIv}{L} & -\frac{6EIv}{L^2} & \frac{2EIv}{L} \\ -\frac{12EIv}{L^3} & -\frac{6EIv}{L^2} & \frac{12EIv}{L^3} & -\frac{6EIv}{L^2} \\ \frac{6EIv}{L^2} & \frac{2EIv}{L} & -\frac{6EIv}{L^2} & \frac{4EIv}{L} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Posteriormente, se abre una hoja de cálculo en Excel.

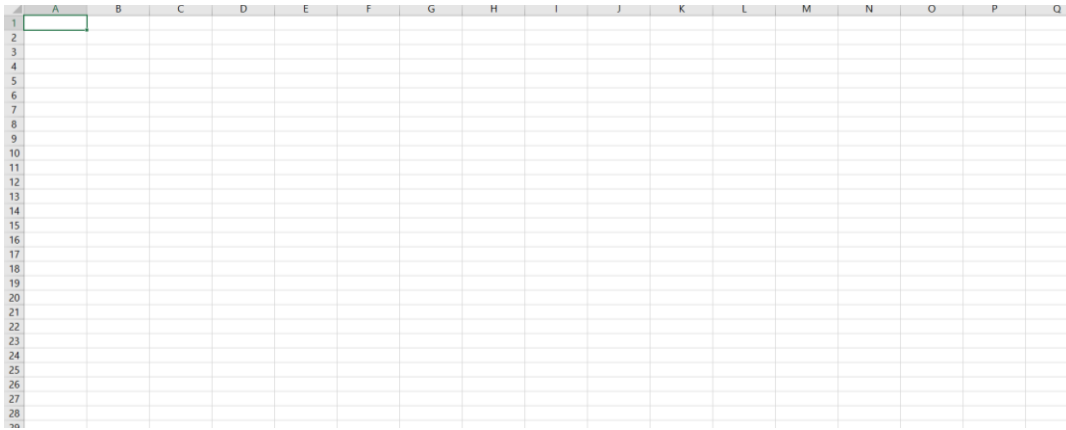


Figura 6.3 Hoja de Excel en blanco para el cálculo de la matriz de rigidez

Posteriormente se ingresan los datos de entrada en Excel

Datos de entrada	
f'c =	350.00 kgf/cm ²
E =	2619160.17 tonf/m ²
Longitud de la viga (L) =	5.00 m
Longitud de la columna (h) =	3.00 m
Datos de columnas	
Ancho (a) =	0.50 m
Largo (b) =	0.50 m
Ic =	0.0052 m ⁴
EIc =	13641.46 tonfm ²
Datos de vigas	
Ancho (a) =	0.50 m
Largo (b) =	0.50 m
Iv =	0.0052 m ⁴
EIv =	13641.46 tonfm ²

Figura 6.4 Datos de entrada en Excel para el cálculo de la matriz de rigidez

Es importante mencionar que las celdas en blanco son las que podrán ser editadas por el usuario mientras que las celdas en gris serán calculadas de manera automática.

Evocando la figura 6.2 y centrado la atención en el elemento 7 (columna), se tendrá la siguiente configuración:

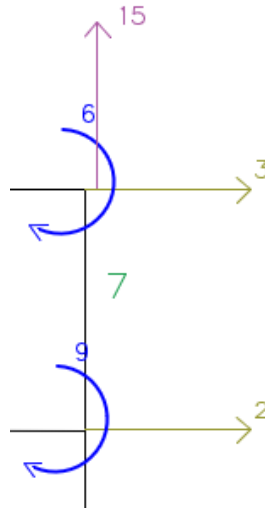


Figura 6.5 análisis de un elemento para el cálculo de la matriz de rigidez

De donde se puede observar que el elemento 7 recibe el cortante 2, el momento 9, el cortante 3 y el momento 6; es importante mantener el orden recién mencionado, es decir: considerar un desplazamiento lineal debido al cortante A, un desplazamiento angular debido al momento A, desplazamiento lineal debido al cortante B y un desplazamiento angular debido al momento B. Cabe mencionar, que la fuerza axial 15 no se toma en cuenta debido a las hipótesis de diafragma rígido que se han venido manejando desde los primeros capítulos.

Lo anteriormente mencionado se aplica en cada uno de los elementos de la estructura en cuestión, dicho procedimiento se coloca en Excel declarando primeramente los elementos columna y posteriormente los elementos viga de la siguiente manera:

ELEMENTO 1. COLUMNA					
		ΔX_A	ΘA	ΔX_B	ΘB
		2	7	3	4
ΔX_A	2				
ΘA	7				
ΔX_B	3				
ΘB	4				

Figura 6.6 Declaración de los elementos columna de la estructura en Excel para el cálculo de la matriz de rigidez

ELEMENTO 15. VIGA					
		ΔX_A	Θ_A	ΔX_B	Θ_B
		14	11	15	12
ΔX_A	14				
Θ_A	11				
ΔX_B	15				
Θ_B	12				

Figura 6.7 Declaración de los elementos viga de la estructura en Excel para el cálculo de la matriz de rigidez

Los números en color rojo de las dos figuras previas corresponden a los GDL en cuestión, nótese que se respeta el orden antes mencionado (desplazamiento lineal, rotacional, lineal y rotacional), el espacio en blanco contendrá la matriz de rigidez local de cada elemento.

Habiendo declarado todos los elementos de la estructura (9 columnas y 6 vigas, 15 elementos en total) se procederá a emplear la expresión 6.1 para calcular la matriz de rigidez de las columnas y la expresión 6.2 para calcular la matriz de rigidez de las vigas, quedando de la siguiente manera:

ELEMENTO 1. COLUMNA					
		ΔX_A	Θ_A	ΔX_B	Θ_B
		2	7	3	4
ΔX_A	2	6062.870766	9094.306148	-6062.87077	9094.306148
Θ_A	7	9094.306148	18188.6123	-9094.30615	9094.306148
ΔX_B	3	-6062.87077	-9094.30615	6062.870766	-9094.30615
Θ_B	4	9094.306148	9094.306148	-9094.30615	18188.6123

Figura 6.8 cálculo de la matriz de rigidez de la columna en Excel para el cálculo de la matriz de rigidez global

ELEMENTO 15. VIGA					
		ΔX_A	Θ_A	ΔX_B	Θ_B
		14	11	15	12
ΔX_A	14	1309.580085	-3273.95021	-1309.58009	-3273.95021
Θ_A	11	-3273.95021	10913.16738	3273.950213	5456.583689
ΔX_B	15	-1309.58009	3273.950213	1309.580085	3273.950213
Θ_B	12	-3273.95021	5456.583689	3273.950213	10913.16738

Figura 6.9 cálculo de la matriz de rigidez de la viga en Excel para el cálculo de la matriz de rigidez global

Posteriormente, se dimensiona el espacio que ocupara la matriz de rigidez global, esto estará en función de los grados de libertad que tenga la estructura, en este caso será una matriz de 21x21 como se muestra a continuación:

MATRIZ GLOBAL DE RIGIDEZ (CONSIDERANDO LAS RIGIDECES QUE APORTAN LOS APOYOS)																					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1																					
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					
11																					
12																					
13																					
14																					
15																					
16																					
17																					
18																					
19																					
20																					
21																					

Figura 6.10 Dimensionamiento en Excel de la matriz de rigidez global

Se llena la matriz de rigidez global, esto se realiza ubicando todos los GDL de las matrices locales de rigidez que se involucran en cada columna de la matriz de rigidez global, es decir: prestando atención a la columna 21 de la matriz de rigidez global (figura 6.10), se identificarán todos los elementos de la estructura que involucran los GDL que participan en esa columna, en este caso será únicamente el elemento 9 (columna) como se muestra a continuación:

ELEMENTO 9. COLUMNA					
		ΔX_A	ΘA	ΔX_B	ΘB
		18	21	1	12
ΔX_A	18	6062.870766	9094.306148	-6062.87077	9094.306148
ΘA	21	9094.306148	18188.6123	-9094.30615	9094.306148
ΔX_B	1	-6062.87077	-9094.30615	6062.870766	-9094.30615
ΘB	12	9094.306148	9094.306148	-9094.30615	18188.6123

Figura 6.11 Identificación de los GDL en las matrices de rigidez local para llenar la matriz de rigidez global

Es fácil observar que los GDL que se involucran con el GDL 21 son el GDL 18, 21, 1 y 12, así que se proceden a vaciar esos elementos en la matriz de rigidez global, todos los GDL que no se involucren serán cero, como se muestra a continuación:

1																					-9094.30615
2																					0
3																					0
4																					0
5																					0
6																					0
7																					0
8																					0
9																					0
10																					0
11																					0
12																					9094.30615
13																					0
14																					0
15																					0
16																					0
17																					9094.30615
18																					0
19																					0
20																					0
21																					18188.6123

Figura 6.12 Ejemplificación del llenado de la matriz de rigidez global

De esa forma se irán llenando todos los valores faltantes quedando de la siguiente manera:

1	36377.22459	-18188.6123	0	0	0	0	9094.30615	9094.30615	9094.30615	0	0	0	0	0	0	-6062.87077	-6062.87077	-6062.87077	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615
2	-18188.6123	36377.2246	-18188.6123	9094.30615	9094.30615	9094.30615	0	0	0	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	-18188.6123	18188.6123	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	9094.30615	-9094.30615	29101.7797	5456.58369	0	9094.30615	0	0	0	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
5	0	9094.30615	-9094.30615	5456.58369	40014.9471	5456.58369	0	9094.30615	0	0	0	0	-3273.95021	0	3273.95021	0	0	0	0	0	0
6	0	9094.30615	-9094.30615	0	5456.58369	29101.7797	0	9094.30615	0	0	0	0	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0
7	9094.306148	0	-9094.30615	9094.30615	0	47290.392	5456.58369	0	9094.30615	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0	0
8	9094.306148	0	-9094.30615	0	9094.30615	0	5456.58369	58203.5593	5456.58369	0	9094.30615	0	-3273.95021	0	3273.95021	0	0	0	0	0	0
9	9094.306148	0	-9094.30615	0	0	9094.30615	0	5456.58369	47290.392	0	9094.30615	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
10	0	9094.30615	0	0	0	0	9094.30615	0	47290.392	5456.58369	0	-3273.95021	3273.95021	0	9094.30615	0	0	0	9094.30615	0	0
11	0	-9094.30615	0	0	0	0	0	9094.30615	0	5456.58369	58203.5593	5456.58369	-3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	0	9094.30615	0	9094.30615	0
12	0	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	5456.58369	58203.5593	5456.58369	47290.392	0	-3273.95021	3273.95021	0	9094.30615	0	9094.30615
13	0	0	0	-3273.95021	-3273.95021	0	-3273.95021	-3273.95021	0	-3273.95021	-3273.95021	-3273.95021	0	3928.74026	-3928.74026	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	3273.95021	3273.95021	0	-3273.95021	3273.95021	0	-3273.95021	3273.95021	3273.95021	0	-3928.74026	3928.74026	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	3273.95021	0	-3928.74026	3928.74026	0	0	0	0	0	0
16	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	6062.87077	0	0	9094.30615	0	0
17	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	6062.87077	0	0	9094.30615	0
18	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	6062.87077	0	0	9094.30615
19	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	9094.30615	0	0	18188.6123	0	0
20	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	9094.30615	0	0	18188.6123	0
21	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	9094.30615	0	0	18188.6123

Figura 6.12 Matriz de rigidez global

Es importante mencionar que todos los GDL que se le asignaron a los apoyos se harán infinitamente rígidos; debido a estamos trabajando con apoyos empotrados no se permiten movimientos rotacionales ni lineales, para tal efecto y siguiendo la ley de Hooke, la rigidez se supone infinitamente rígida dado que:

$$\theta = \frac{M}{k}$$

Si la rigidez se supone infinitamente rígida el desplazamiento será cero, y de esa manera se cumplirá que no habrá desplazamientos en los apoyos. Habiendo dicho lo anterior, se procede a identificar los GDL correspondientes a los apoyos empotrados, dichos GDL son 13-21, a estos GDL se les sumará una cantidad muy grande quedando de la siguiente manera:

1	36377.22459	-18188.6123	0	0	0	0	9094.30615	9094.30615	9094.30615	0	0	0	0	0	0	-6062.87077	-6062.87077	-6062.87077	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615
2	-18188.6123	36377.2246	-18188.6123	9094.30615	9094.30615	9094.30615	0	0	0	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	-18188.6123	18188.6123	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	9094.30615	-9094.30615	29101.7797	5456.58369	0	9094.30615	0	0	0	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
5	0	9094.30615	-9094.30615	5456.58369	40014.9471	5456.58369	0	9094.30615	0	0	0	0	-3273.95021	0	3273.95021	0	0	0	0	0	0
6	0	9094.30615	-9094.30615	0	5456.58369	29101.7797	0	9094.30615	0	0	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
7	9094.306148	0	-9094.30615	9094.30615	0	47290.392	5456.58369	0	9094.30615	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0	0
8	9094.306148	0	-9094.30615	0	9094.30615	0	5456.58369	58203.5593	5456.58369	0	9094.30615	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
9	9094.306148	0	-9094.30615	0	0	9094.30615	0	5456.58369	47290.392	0	9094.30615	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
10	0	-9094.30615	0	0	0	0	9094.30615	0	47290.392	5456.58369	0	-3273.95021	3273.95021	0	9094.30615	0	0	0	9094.30615	0	0
11	0	-9094.30615	0	0	0	0	0	9094.30615	0	5456.58369	58203.5593	5456.58369	-3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	0	9094.30615	0	9094.30615	0
12	0	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	5456.58369	58203.5593	5456.58369	47290.392	0	-3273.95021	3273.95021	0	9094.30615	0	9094.30615
13	0	0	0	-3273.95021	-3273.95021	0	-3273.95021	-3273.95021	0	-3273.95021	-3273.95021	-3273.95021	0	3928.74026	-3928.74026	1E+11	-3928.74026	0	0	0	0
14	0	0	0	3273.95021	3273.95021	0	-3273.95021	3273.95021	0	-3273.95021	3273.95021	3273.95021	0	-3928.74026	3928.74026	1E+11	-3928.74026	0	0	0	0
15	0	0	0	0	3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	3273.95021	0	-3928.74026	3928.74026	1E+11	-3928.74026	0	0	0	0
16	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	1E+11	0	0	0	0	0
17	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	1E+11	0	0	9094.30615	0
18	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	1E+11	0	0	9094.30615
19	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	0	1E+11	0	0
20	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	0	1E+11	0
21	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	0	1E+11

Figura 6.13 Matriz de rigidez global con GDL infinitamente rígidos en los apoyos

La figura 6.13 representa la matriz de rigidez global de la estructura, por último, se procede a comprobar que los datos fueron bien introducidos, esto se logra demostrando que la matriz en cuestión es simétrica, es decir:

$$[k] - [k]^T = [0] \quad (6.3)$$

Aplicando la expresión 6.3 en Excel se tiene que:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 6.14 Comprobación de que la matriz de rigidez global es simétrica.

6.3 CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL

Con la matriz de rigidez global previamente calculada, se procederá a realizar la condensación estática para la obtención de la matriz de rigidez lateral, para tales efectos se particionará la matriz ubicando los GDL horizontales y realizando una división en el último de estos, quedando de la siguiente manera:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	36377.22459	-18188.6123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6062.87077	-6062.87077	-6062.87077	-9094.30615	-9094.30615	-9094.30615
3	-18188.6123	36377.2245	-18188.6123	9094.30615	9094.30615	0	0	0	0	9094.30615	9094.30615	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	9094.30615	-9094.30615	9094.30615	-9094.30615	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	9094.30615	-9094.30615	5456.58369	42014.9471	5456.58369	0	0	0	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	9094.30615	-9094.30615	0	5456.58369	29101.7797	0	0	0	0	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
7	9094.306148	0	-9094.30615	9094.30615	0	0	47290.392	5456.58369	0	9094.30615	0	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
8	9094.306148	0	-9094.30615	0	9094.30615	0	5456.58369	58203.5593	5456.58369	0	9094.30615	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
9	9094.306148	0	-9094.30615	0	0	9094.30615	5456.58369	47290.392	0	0	9094.30615	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	0	0	0	0	0
10	0	-9094.30615	0	0	0	0	9094.30615	0	47290.392	5456.58369	0	-3273.95021	3273.95021	0	9094.30615	0	0	9094.30615	0	0	0
11	0	-9094.30615	0	0	0	0	0	9094.30615	5456.58369	58203.5593	5456.58369	0	-3273.95021	3273.95021	0	9094.30615	0	0	9094.30615	0	0
12	0	-9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	5456.58369	47290.392	0	-3273.95021	3273.95021	0	0	9094.30615	0	0	9094.30615	0
13	0	0	0	-3273.95021	-3273.95021	0	-3273.95021	-3273.95021	0	-3273.95021	0	1E+11	-3928.74026	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	3273.95021	0	-3273.95021	3273.95021	0	-3273.95021	3273.95021	0	-3273.95021	-3928.74026	1E+11	-3928.74026	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	3273.95021	0	3273.95021	3273.95021	0	-3928.74026	1E+11	0	0	0	0	0	0
16	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	1E+11	0	0	9094.30615	0	0
17	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	1E+11	0	0	9094.30615	0
18	-6062.870766	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	1E+11	0	0	9094.30615
19	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	1E+11	0	0
20	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	1E+11	0
21	-9094.306148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9094.30615	0	0	0	0	0	0	0	0	1E+11

Figura 6.15 Matriz de rigidez global particionada.

La matriz en color azul oscuro es denominada como $[k_{11}]$, la que está en color salmón es denominada como $[k_{12}]$, la que está en color verde se denomina como $[k_{21}]$ y la que está en color azul claro se denomina como $[k_{22}]$.

Debido al acomodo de los GDL que se realizó, la rigidez lateral se expresa como:

$$[k_{11}] - [k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{21}] = [0] \quad (6.4)$$

Aplicando la expresión 6.4 en Excel se tiene que:

K lateral =	31683.3818	-17778.68685	3509.733584
	-17778.68685	25441.18368	-11946.4109
	3509.733584	-11946.41091	9005.895774

Figura 6.16 Matriz de rigidez lateral obtenida a través de la condensación estática

6.4 DECLARACIÓN DE LA MATRIZ DE MASA

Debido a que la deducción de la matriz de masa se realizó en el capítulo 3 en este apartado sólo se declarará dicha matriz suponiendo un análisis de cargas previo para la obtención de masas de entrepiso, quedando de la siguiente manera:

$$\text{Nivel 1} = 3.30 \frac{\text{tonfs}^2}{\text{m}} \quad (6.5)$$

$$\text{Nivel 2} = 2.49 \frac{\text{tonfs}^2}{\text{m}} \quad (6.6)$$

$$\text{Azotea} = 1.48 \frac{\text{tonfs}^2}{\text{m}} \quad (6.7)$$

Con los datos recién declarados de manera arbitraria, la matriz de masa queda de la siguiente manera:

$$[m] = \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

6.5 CÁLCULO DE EIGENVALORES, MODOS Y PERIODOS DE VIBRACIÓN

Se sabe, por lo explicado en el capítulo 4, que la expresión para realizar el cálculo de los eigenvalores o valores propios está definida como:

$$[k - w^2 m] = 0 \quad (6.9)$$

Y también se sabe que:

$$w^2 = \lambda \quad (6.10)$$

Por lo que la expresión 6.9 puede escribirse como:

$$[k - m\lambda] = 0 \quad (6.11)$$

Sustituyendo los valores de la rigidez lateral (figura 6.16) y la matriz de masa (expresión 6.8) en la expresión 6.11 se tiene:

MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL			-	MATRIZ DE MASA			*	CAMBIO DE VARIABLE DE LA FRECUENCIA CUADRADA		=	0
31683.3818	-17778.68685	3509.733584		3.3	0	0		T			
-17778.68685	25441.18368	-11946.41091		0	2.49	0					
3509.733584	-11946.41091	9005.895774		0	0	1.48					

Figura 6.17 aplicación de la expresión $[k - m\lambda] = 0$ para el cálculo de los eigenvalores en Excel

De la figura 6.17 se obtiene la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 31683.3818 - 3.3\lambda & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & 25441.18368 - 2.49\lambda & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & 9005.895774 - 1.48\lambda \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Se obtiene el determinante de la expresión 6.12:

$$-12.16116\lambda^3 + 315015.78527743\lambda^2 - 1690122164.59258573\lambda + 1068454128455.31580178 = 0 \quad (6.13)$$

Resolviendo la expresión 6.13 queda:

$$\lambda_1 = 728.2449767 \quad (6.14)$$

$$\lambda_2 = 6439.084387 \quad (6.15)$$

$$\lambda_3 = 18736.10298 \quad (6.16)$$

Devolviendo el cambio de variable indicado en la expresión 6.10 se tiene:

$$w = \sqrt{\lambda} \quad (6.17)$$

Por tanto:

$$w_1 = 26.98601446 \frac{rad}{s} \quad (6.17.1)$$

$$w_2 = 80.24390561 \frac{rad}{s} \quad (6.17.2)$$

$$w_3 = 136.8798852 \frac{rad}{s} \quad (6.17.3)$$

Las expresiones 6.14, 6.15 y 6.16 representan los eigenvalores; a continuación, se procederá a calcular los periodos respectivos, sabiendo que este se representa como:

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

Por tanto:

$$T_1 = 0.232831169 \text{ s} \quad (6.18)$$

$$T_2 = 0.07830109 \text{ s} \quad (6.19)$$

$$T_3 = 0.045902912 \text{ s} \quad (6.20)$$

6.6 CÁLCULO DE EIGENVECTORES Y MATRIZ MODAL

Con lo visto en el capítulo 4 se procederá a calcular los eigenvectores de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \lambda_1 m_1 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda_1 m_2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \lambda_1 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \lambda_2 m_1 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda_2 m_2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \lambda_2 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \lambda_3 m_1 & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda_3 m_2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} - \lambda_3 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Sustituyendo los valores de la figura 6.16 (figura que representa la rigidez lateral), la expresión 6.8 (expresión que representa la matriz de masa) y las expresiones 6.14-6.16 se obtendrá lo siguiente para λ_1 :

$$\begin{bmatrix} 31683.381 - (728.24497)(3.3) & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & 25441.183 - (728.24497)(2.49) & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & 9005.8957 - (728.24497)(1.48) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 29280.17338 & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & 23627.85369 & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & 7928.093209 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

Para λ_2 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 31683.381 - (6439.0843)(3.3) & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & 25441.183 - (6439.0843)(2.49) & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & 9005.8957 - (6439.0843)(1.48) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10434.40333 & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & 9407.863558 & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & -523.9491183 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Para λ_3 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 31683.381 - (18736.102)(3.3) & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & 25441.183 - (18736.102)(2.49) & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & 9005.8957 - (18736.102)(1.48) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -30145.75803 & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & -21211.71274 & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & -18723.53664 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

A continuación, se realizarán los cálculos correspondientes al modo 1:

La expresión 6.24 puede expresarse de la siguiente manera:

$$29280.17338\Phi_{11} - 17778.68685\Phi_{21} + 3509.733584\Phi_{31} = 0 \quad (6.27)$$

$$-17778.68685\Phi_{11} + 23627.85369\Phi_{21} - 11946.41091\Phi_{31} = 0 \quad (6.28)$$

$$3509.733584\Phi_{11} - 11946.41091\Phi_{21} + 7928.093209\Phi_{31} = 0 \quad (6.29)$$

Asignándole un valor unitario a Φ_{11} a las expresiones 6.27, 6.28 y 6.29 se tiene:

$$-17778.68685\Phi_{21} + 3509.733584\Phi_{31} = 29280.17338 \quad (6.30)$$

$$23627.85369\Phi_{21} - 11946.41091\Phi_{31} = -17778.68685 \quad (6.31)$$

$$-11946.41091\Phi_{21} + 7928.093209\Phi_{31} = 3509.733584 \quad (6.32)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones que involucra a las expresiones 6.30-6.32 obteniendo los siguientes resultados:

$$\Phi_{11} = 1 \quad (6.33)$$

$$\Phi_{21} = 2.21987 \quad (6.34)$$

$$\Phi_{31} = 2.9023 \quad (6.35)$$

Se realiza el mismo procedimiento para el modo 2:

La expresión 6.25 puede expresarse de la siguiente manera:

$$10434.40333\Phi_{12} - 17778.68685\Phi_{22} + 3509.733584\Phi_{32} = 0 \quad (6.36)$$

$$-17778.68685\Phi_{12} + 9407.863558\Phi_{22} - 11946.41091\Phi_{32} = 0 \quad (6.37)$$

$$3509.733584\Phi_{12} - 11946.41091\Phi_{22} - 523.9491183\Phi_{32} = 0 \quad (6.38)$$

Asignándole un valor unitario a Φ_{12} a las expresiones 6.36, 6.37 y 6.38 y resolviendo el sistema de ecuaciones generado por dichas expresiones, se tiene:

$$\Phi_{12} = 1 \quad (6.39)$$

$$\Phi_{22} = 0.3470 \quad (6.40)$$

$$\Phi_{32} = -1.2148 \quad (6.41)$$

Se realiza el mismo procedimiento para el modo 3:

La expresión 6.26 puede expresarse de la siguiente manera:

$$-30145.75803\Phi_{13} - 17778.68685\Phi_{23} + 3509.733584\Phi_{33} = 0 \quad (6.42)$$

$$-17778.68685\Phi_{13} - 21211.71274\Phi_{23} - 11946.41091\Phi_{33} = 0 \quad (6.43)$$

$$3509.733584\Phi_{13} - 11946.41091\Phi_{23} - 18723.53664\Phi_{33} = 0 \quad (6.44)$$

Asignándole un valor unitario a Φ_{13} a las expresiones 6.42, 6.43 y 6.44 y resolviendo el sistema de ecuaciones generado por dichas expresiones, se tiene:

$$\Phi_{13} = 1 \quad (6.45)$$

$$\Phi_{23} = -1.4730 \quad (6.46)$$

$$\Phi_{33} = 1.1273 \quad (6.47)$$

Las expresiones (6.33, 6.34 y 6.35 = modo 1), (6.39, 6.40, 6.41 = modo 2), (6.45, 6.46 y 6.47 = modo 3) son los eigenvectores, mismos que se graficarán junto con su nivel correspondiente, quedando de la siguiente manera:

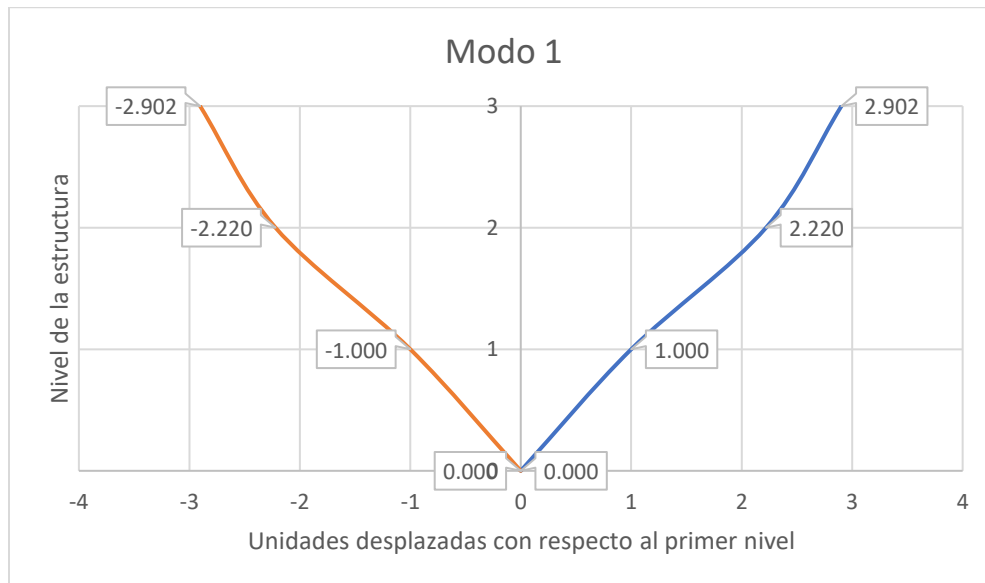


Figura 6.18. Gráfica del modo 1 en Excel

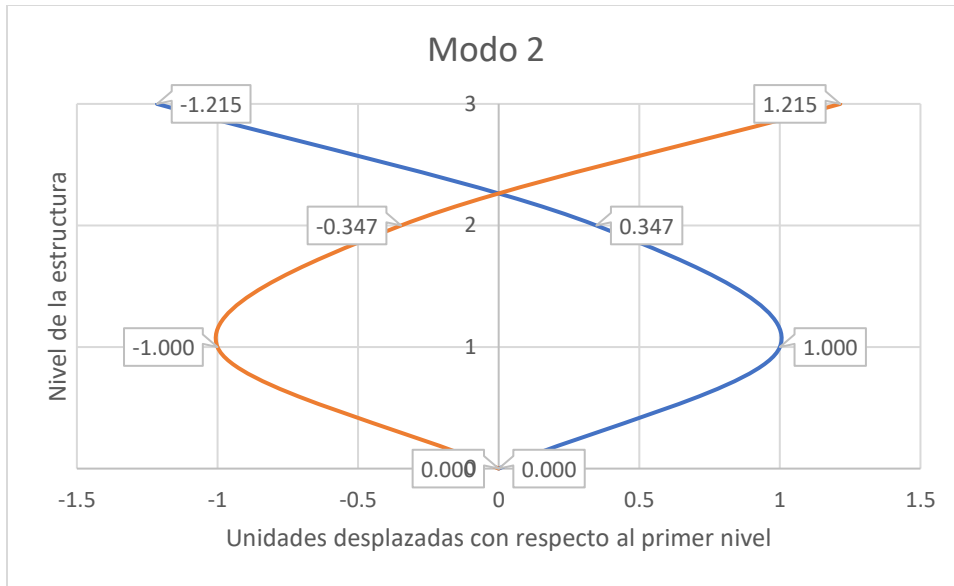


Figura 6.18. Gráfica del modo 2 en Excel

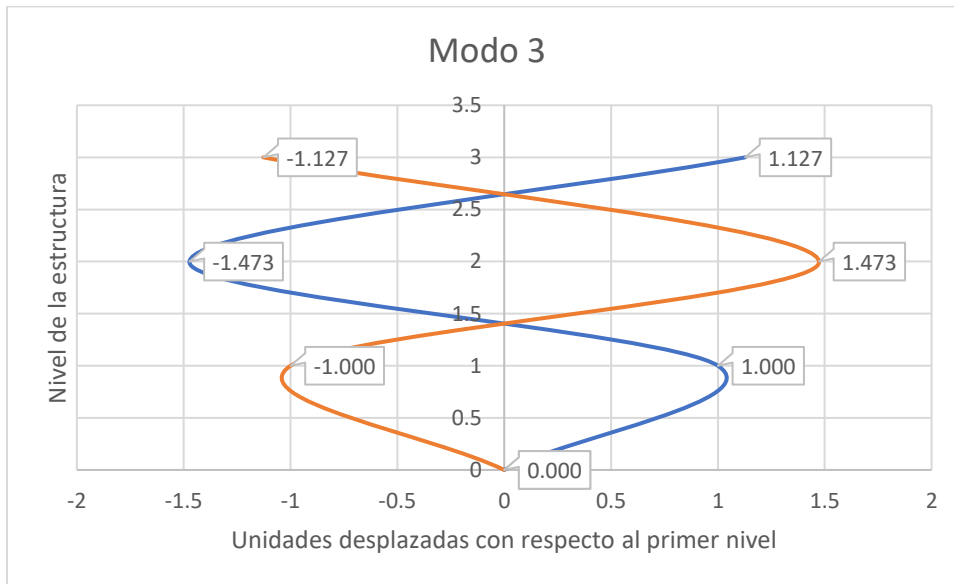


Figura 6.18. Gráfica del modo 3 en Excel

Por lo visto en capítulos anteriores, se sabe que la matriz modal, para este caso, se expresa como:

$$[\Phi] = [\{\Phi_1\} + \{\Phi_2\} + \{\Phi_3\}] \quad (6.48)$$

Expresando la ecuación 6.48 en su forma expandida:

$$[\Phi] = \left[\begin{matrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{matrix} \right] \quad (6.49)$$

Sustituyendo los valores 6.33-3.36, 6.39-6.41 y 6.45-6.47 en la expresión 6.49 se tiene:

$$[\Phi] = \left[\begin{matrix} 1 \\ 2.21987 \\ 2.9023 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 1 \\ 0.34 \\ -1.2148 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 1 \\ -1.4730 \\ 1.1273 \end{matrix} \right] \quad (6.50)$$

6.7 CÁLCULO DE LAS MATRICES DIAGONALIZADAS $[\phi]^T [KLAT] [\phi]$, $[\phi]^T [M] [\phi]$

Para empezar a explicar este tema será necesario acudir a la superposición modal, que consiste en desacoplar un sistema masa resorte de MGDL para facilitar la ecuación diferencial matricial-vectorial del movimiento:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\} \quad (6.51)$$

A continuación, se mostrará de manera esquemática la diferencia entre un sistema acoplado y uno desacoplado:

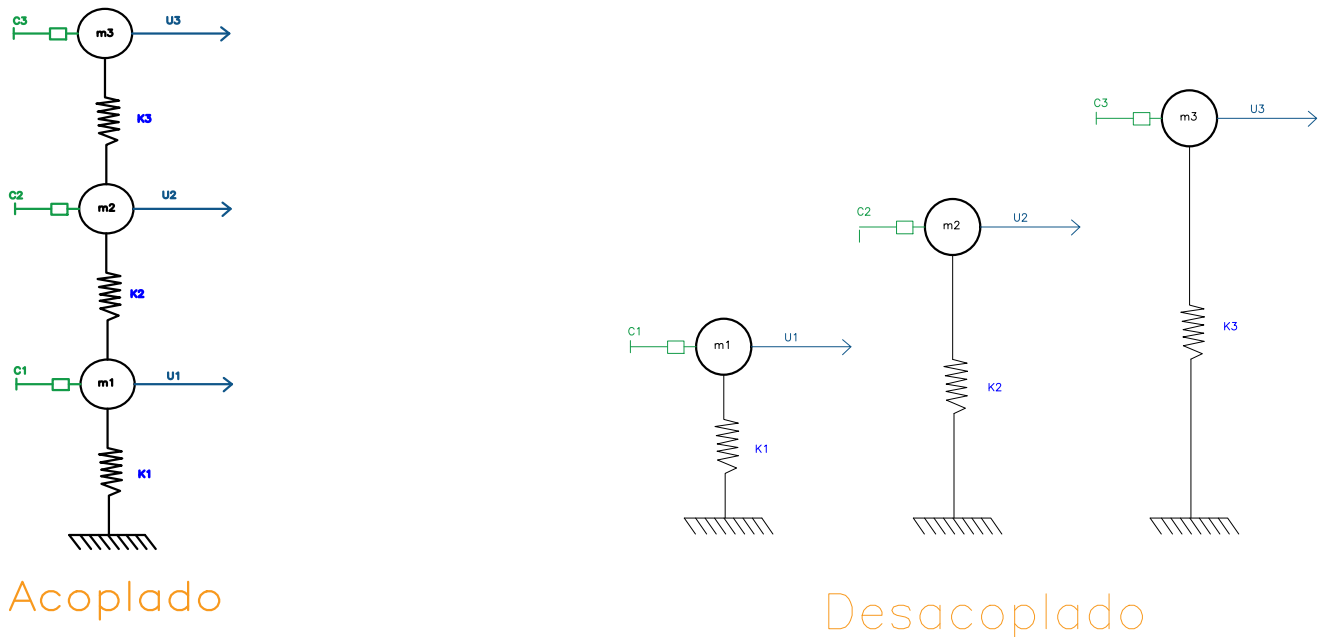


Figura 6.19. Sistema acoplado y desacoplado

La ecuación 6.51, que se ha estudiado en repetidas ocasiones a lo largo de esta tesis, representa la ecuación diferencial matricial-vectorial del movimiento de un sistema acoplado (EDMVMSA), pero si se pretende resolver dicha ecuación en un sistema de MGDL será necesario descomponer el sistema en subsistemas aparentemente individuales, esto se logra a través de una diagonalización de matrices que estará sujeta a cantidades modales, cuyos parámetros son:

$$q_1 = \text{desplazamiento modal}$$

$$\dot{q}_1 = \text{velocidad modal}$$

$$\ddot{q}_1 = \text{aceleración modal}$$

Teniendo una reescritura de la ecuación 6.51 como:

$$[M]_D\{\ddot{q}\} + [C]_D\{\dot{q}\} + [K]_D\{q\} = \{P\}_D \quad (6.52)$$

Para pasar de un sistema acoplado a uno desacoplado se usará la matriz modal “[Φ]” teniendo en cuenta la siguiente equivalencia:

$$\{\text{cantidad relativa}\} = [\Phi]\{\text{cantidad modal}\} \quad (6.53)$$

Donde:

$$\{\text{cantidad relativa}\} =$$

$$\{x\}$$

$$\{\dot{x}\}$$

$$\{\ddot{x}\}$$

$$[\Phi] = \text{matriz modal}$$

$$\{\text{cantidad modal}\} =$$

$$\{q\}$$

$$\{\dot{q}\}$$

$$\{\ddot{q}\}$$

Quedando la ecuación 6.51 de la siguiente manera:

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [C][\Phi]\{\dot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{P\} \quad (6.54)$$

Se debe tener en cuenta que hasta el momento solo se han hecho algunas equivalencias y sustituciones, pero no se ha diagonalizado la ecuación; para tales fines se deberá premultiplicar la matriz no diagonalizada por la matriz modal transpuesta y multiplicarla por la matriz modal, es decir:

$$[Matriz\ diagonal] = [\Phi]^T [Matriz\ no\ diagonal] [\Phi] \quad (6.55)$$

Aplicando la ecuación 6.55 en la ecuación 6.51 se tendrán las siguientes equivalencias:

$$[M]_D = [\Phi]^T [M] [\Phi] \quad (6.56)$$

$$[C]_D = [\Phi]^T [C] [\Phi] \quad (6.57)$$

$$[K]_D = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (6.58)$$

Quedando la ecuación 6.54 como:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = \{P\} \quad (6.59)$$

Reescribiendo la ecuación 6.59 y recordando que el vector de fuerzas también debe multiplicarse por la matriz modal transpuesta:

$$[M]_D \{\ddot{q}\} + [C]_D \{\dot{q}\} + [K]_D \{q\} = [\Phi]^T \{P\} \quad (6.60)$$

A continuación, se expresará la ecuación 6.60 en su forma expandida, que para este caso será un sistema de 3GDL

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}_D \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}_D \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}_D \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}_D \quad (6.61)$$

Nótese que a todas las matrices se les pone el subíndice "D" para indicar que los miembros de esas matrices son diferentes a las matrices del sistema acoplado. Para notar dicha diferencia se expresará la ecuación 6.51 en su forma expandida:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (6.62)$$

Habiendo mostrado la diferencia entre ambos sistemas, se procederá a escribir la ecuación 6.61 en su forma algebraica:

$$m_{D1}(\ddot{q}_1) + C_{D1}(\dot{q}_1) + k_{D1}(q_1) = P_{D1} \quad (6.63)$$

$$m_{D2}(\ddot{q}_2) + C_{D2}(\dot{q}_2) + k_{D1}(q_2) = P_{D2} \quad (6.64)$$

$$m_{D3}(\ddot{q}_3) + C_{D3}(\dot{q}_3) + k_{D3}(q_3) = P_{D3} \quad (6.65)$$

Dividiendo las ecuaciones 6.63, 6.64 y 6.65 entre la masa y haciendo las respectivas asociaciones que se han explicado en otros capítulos, se tiene:

$$(\ddot{q}_1) + 2\xi w_1(\dot{q}_1) + w_1^2(q_1) = \frac{P_{D1}}{m_{D1}} \quad (6.66)$$

$$(\ddot{q}_2) + 2\xi w_2(\dot{q}_2) + w_2^2(q_2) = \frac{P_{D2}}{m_{D2}} \quad (6.67)$$

$$(\ddot{q}_3) + 2\xi w_3(\dot{q}_3) + w_3^2(q_3) = \frac{P_{D3}}{m_{D3}} \quad (6.68)$$

Se procede a obtener la matriz de masa diagonalizada sustituyendo las expresiones 6.8 (que representa la matriz de masa) y 6.50 (que representa la matriz modal) así como la transpuesta de la misma, en la ecuación 6.56

$$[M]_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.21987 & 0.34 & -1.4730 \\ 2.9023 & -1.2148 & 1.1273 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.21987 & 0.34 & -1.4730 \\ 2.9023 & -1.2148 & 1.1273 \end{bmatrix} \quad (6.68.1)$$

Resolviendo la expresión 6.68.1 se tiene:

$$[M]_D = \begin{bmatrix} 28.04 & 0 & 0 \\ 0 & 5.78 & 0 \\ 0 & 0 & 10.58 \end{bmatrix} \quad (6.68.2)$$

Posteriormente se obtiene la matriz de rigidez diagonalizada sustituyendo los valores de la figura 6.16 (que representa la matriz de rigidez lateral) y 6.50 (que representa la matriz modal) así como la transpuesta de la misma, en la ecuación 6.58

$$[K]_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.21987 & 0.34 & -1.4730 \\ 2.9023 & -1.2148 & 1.1273 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 31683.3818 & -17778.68685 & 3509.733584 \\ -17778.68685 & 25441.18368 & -11946.41091 \\ 3509.733584 & -11946.41091 & 198302.47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.21987 & 0.34 & -1.4730 \\ 2.9023 & -1.2148 & 1.1273 \end{bmatrix} \quad (6.68.3)$$

Resolviendo la expresión 6.88.3 se tiene

$$[K]_D = \begin{bmatrix} 20417.88 & 0 & 0 \\ 0 & 37245.80 & 0 \\ 0 & 0 & 198302.47 \end{bmatrix} \quad (6.68.4)$$

6.8 AMORTIGUAMIENTO DE RAYLEIGH Y AMORTIGUAMIENTO CONSTANTE

Previamente, se estudió la importancia de la superposición modal para desacoplar sistemas a través de la diagonalización de las matrices “[M]” y “[K]” sin embargo, para llevar a cabo este proceso en la matriz de amortiguamiento “[C]” se necesita tener en cuenta otras consideraciones.

Estas consideraciones recaen en dos métodos diferentes, el primero es el amortiguamiento de Rayleigh comúnmente usado cuando el análisis no es lineal o cuando la estructura tiene amortiguamiento no clásico, es decir: cuando el sistema estructural presenta diferentes materiales y por ende diferentes amortiguamientos.

Rayleigh considera que el amortiguamiento es proporcional a la masa y a la rigidez, por tanto, se harán las siguientes hipótesis:

$$c = a_0(m) \quad (6.69)$$

$$c = a_1(k) \quad (6.70)$$

Escribiendo la ecuación 6.69 en términos modales

$$[C]_D = a_0[\Phi]^T[M][\Phi] \quad (6.71)$$

Pudiendo escribir la ecuación 6.71 como:

$$[C]_D = a_0[M]_D \quad (6.72)$$

Se sabe que la razón de amortiguamiento puede expresarse como:

$$\xi = \frac{c}{2mw} \quad (6.73)$$

Expresando la ecuación 6.73 en términos modales:

$$\xi_i = \frac{[C]_D}{2[M]_D w_i} \quad (6.74)$$

Sustituyendo la ecuación 6.72 en la ecuación 6.74

$$\xi_i = \frac{a_0[M]_D}{2[M]_D w_i} \quad (6.75)$$

Simplificando:

$$\xi_i = \frac{a_0}{2w_i} \quad (6.76)$$

Despejando “ a_0 ” de la ecuación 6.76

$$a_0 = 2w_i \xi_i \quad (6.77)$$

Ahora se analizará el amortiguamiento proporcional a la rigidez correspondiente al segundo término de la ecuación 6.70, reescribiéndola en términos modales:

$$[C]_D = a_1 [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (6.78)$$

Pudiendo escribir la ecuación 6.78 como:

$$[C]_D = a_0 [K]_D \quad (6.79)$$

Se sabe que:

$$w^2 = \frac{k}{m}$$

Por tanto:

$$k = w^2 m \quad (6.80)$$

Sustituyendo la ecuación 6.80 en términos modales en la ecuación 6.79

$$[C]_D = a_1 w_i^2 [M]_D \quad (6.81)$$

Sustituyendo la ecuación 6.81 en la ecuación 6.74

$$\xi_i = \frac{a_1 w_i^2 [M]_D}{2[M]_D w_i} \quad (6.82)$$

Simplificando la ecuación 6.81

$$\xi_i = \frac{a_1 w_i}{2} \quad (6.83)$$

Despejando “ a_1 ” de la ecuación 6.83

$$a_1 = \frac{2\xi_i}{w_i} \quad (6.84)$$

Considerando las hipótesis iniciales (ecuación 6.69 y 6.70) desarrolladas en las ecuaciones 6.76 y 6.83, la razón de amortiguamiento modal se puede escribir como

$$\xi_i = \frac{a_0}{2w_i} + \frac{a_1 w_i}{2} \quad (6.85)$$

La expresión 6.85 representa el amortiguamiento del modo “i”, pero para calcular la matriz de amortiguamiento de Rayleigh es necesario considerar dos modos de vibrar conocidos, si suponemos la misma razón de amortiguamiento para ambos modos los coeficientes “ a_0 ” y “ a_1 ” se calcularán a través de las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{\xi(2w_i w_j)}{w_i + w_j} \quad (6.86)$$

$$a_1 = \frac{\xi(2)}{w_i + w_j} \quad (6.87)$$

Habiendo resuelto las hipótesis expresadas en las ecuaciones 6.69 y 6.70, la matriz de amortiguamiento de Rayleigh queda de la siguiente manera:

$$[C]_D = a_0[M]_D + a_1[K]_D \quad (6.88)$$

Se recomienda que los valores de las frecuencias sean del primer y del último modo de vibrar de la estructura en cuestión.

El amortiguamiento constante supone que toda la estructura tiene las mismas condiciones constructivas, es decir: toda la estructura está construida con los mismos materiales, se contemplan las pérdidas por fricción entre conexiones, se van a presentar los mismos esfuerzos en los elementos no estructurales, etc., sin embargo, esas condiciones difícilmente se podrán cumplir en forma física, por tanto, se dice que la matriz clásica de amortiguamiento se usa para sistemas idealizados.

Este amortiguamiento constante se deduce de la siguiente manera; se sabe que el amortiguamiento “c” esta expresado como:

$$c = 2\xi w m \quad (6.89)$$

Considerando que $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y haciendo operaciones algebraicas en la ecuación 6.90, se tiene que:

$$c = 2\xi \sqrt{\frac{k}{m}} m \quad (6.90)$$

$$c = 2\xi \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} \right) m$$

$$c = 2\xi (\sqrt{k}) (m^{\frac{1}{2}}) m$$

$$c = 2\xi (\sqrt{k}) (\sqrt{m})$$

$$c = 2\xi (\sqrt{km}) \quad (6.91)$$

La expresión 6.91 pone el amortiguamiento en función de la rigidez y la masa, sin embargo, es necesario poner esta expresión en términos modales, es decir: se considera una rigidez modal y una masa modal, quedando de la siguiente manera:

$$c = 2\xi (\sqrt{k_{iD} m_{iD}}) \quad (6.92)$$

Se sabe que una característica de cualquier matriz diagonalizada es que todos sus valores son cero, exceptuando su diagonal principal; y el tamaño de dicha matriz dependerá del número de GDL en cuestión, que para el sistema con el que se está trabajando desde inicios de este capítulo son 3GDL; considerando lo anterior, se afirma que la matriz de amortiguamiento diagonalizada puede expresarse genéricamente de la siguiente manera:

$$[C]_D = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

Sustituyendo la expresión 6.92 en la ecuación 6.93

$$[C]_D = \begin{bmatrix} 2\xi(\sqrt{k_{1D}m_{1D}}) & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi(\sqrt{k_{2D}m_{2D}}) & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi(\sqrt{k_{3D}m_{3D}}) \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

La expresión 6.94 representa la matriz de amortiguamiento constante diagonalizada

6.9 CÁLCULO DE LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO DIAGONALIZADA $[\phi]^T[C][\phi]$ Y DEL VECTOR DE FUERZA $[\phi]^T\{P\}$

A continuación, se procederá a calcular la matriz de amortiguamiento de Rayleigh para la estructura que se está trabajando, para tales fines se extraerán los valores de las frecuencias naturales de la estructura previamente calculadas y representadas por las expresiones 6.17.1 y 6.17.3, se considerará un amortiguamiento clásico tomando un valor de $\xi = 0.05$ para ambos modos y se procederá a calcular los valores de “ a_0 ” y “ a_1 ”, sustituyendo las expresiones antes mencionadas en las ecuaciones 6.86 y 6.87, quedando de la siguiente manera:

$$w_1 = 26.98601446$$

$$w_3 = 136.8798852$$

$$a_0 = \frac{(0.05)((2)(26.98601446)(136.8798852))}{26.98601446+136.8798852} \quad (6.95)$$

$$a_0 = 2.254186 \quad (6.96)$$

$$a_1 = \frac{(0.05)(2)}{26.98601446+136.8798852} \quad (6.97)$$

$$a_1 = 0.00061026 \quad (6.98)$$

Se procede a sustituir las expresiones 6.68.2 (que representa la matriz de masa diagonalizada), y 6.68.4 (que representa la matriz de rigidez diagonalizada), así como los valores de las ecuaciones 6.96 y 6.98 (que representan el valor de “ a_0 ” y “ a_1 ”) en la ecuación 6.88 para hallar la matriz de amortiguamiento diagonalizada de Rayleigh.

$$[C]_D = (2.254186) \begin{bmatrix} 28.04 & 0 & 0 \\ 0 & 5.78 & 0 \\ 0 & 0 & 10.58 \end{bmatrix} + (0.00061026) \begin{bmatrix} 20417.88 & 0 & 0 \\ 0 & 37245.80 & 0 \\ 0 & 0 & 198302.47 \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

Resolviendo la expresión 6.99 se tiene que la matriz de amortiguamiento diagonalizada es:

$$[C]_D = \begin{bmatrix} 75.66 & 0 & 0 \\ 0 & 35.77 & 0 \\ 0 & 0 & 144.87 \end{bmatrix} \quad (6.100)$$

Para calcular el vector de fuerza es necesario evocar alguna de las ecuaciones 6.66, 6.67 o 6.68, en este caso será la ecuación 6.66

$$(\ddot{q}_1) + 2\xi w_1(\dot{q}_1) + w_1^2(q_1) = \frac{P_{D1}}{m_{D1}}$$

Y se hará la siguiente equivalencia:

$$\Gamma = \frac{P_{D1}}{m_{D1}} \quad (6.101)$$

En donde “ Γ ” se define como:

$$\Gamma_i = \frac{[\Phi_i]^T [M] \{1\}}{[\Phi_i]^T [M] [\Phi_i]} \quad (6.102)$$

Cabe aclarar que la matriz de masa expresada en la ecuación 6.102 no es la diagonalizada, sino la que se obtiene directamente de la estructura, la expresión 6.102 será tan grande como GDL se estén trabajando, en este caso la estructura que se está trabajando contiene 3GDL, teniendo 3 valores diferentes de “ Γ ”.

Particularizando un poco más la ecuación 6.102 para el primer valor de “ Γ ” se tiene:

$$\Gamma_1 = \frac{[\Phi_1]^T [M] \{1\}}{[\Phi_1]^T [M] [\Phi_1]} \quad (6.103)$$

Se evocará la ecuación 6.50 perteneciente a la matriz modal, recordando que la primera columna corresponde al vector modal 1 “ Φ_1 ”, la segunda columna corresponde al vector modal 2 “ Φ_2 ” y la tercera columna corresponde al vector modal 3 “ Φ_3 ”

$$[\Phi] = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2.21987 \\ 2.9023 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0.34 \\ -1.2148 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1.4730 \\ 1.1273 \end{array} \right\} \end{array} \right]$$

Dicho lo anterior, se sustituirán la expresión 6.8 (que representa a la matriz de masa) y los vectores modales correspondientes para cada valor de gama quedando de la siguiente manera:

$$\Gamma_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2.21987 \\ 2.9023 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2.21987 \\ 2.9023 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2.21987 \\ 2.9023 \end{pmatrix}} \quad (6.104)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0.34 \\ -1.2148 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0.34 \\ -1.2148 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.34 \\ -1.2148 \end{pmatrix}} \quad (6.105)$$

$$\Gamma_3 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1.4730 \\ 1.1273 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1.4730 \\ 1.1273 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 3.3 & 0 & 0 \\ 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 1.48 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1.4730 \\ 1.1273 \end{pmatrix}} \quad (6.106)$$

Resolviendo las expresiones 6.104, 6.105 y 6.106 se tendrán los siguientes valores de gama

$$\Gamma_1 = 0.468055983 \quad (6.107)$$

$$\Gamma_2 = 0.409068077 \quad (6.108)$$

$$\Gamma_3 = 0.12287594 \quad (6.109)$$

Las ecuaciones 6.107, 6.108 y 6.109 representan las expresiones asociadas al vector de fuerza, mismas que deben cumplir la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i \geq 0.9 \quad (6.110)$$

En donde n=número de GDL. Aplicando la ecuación 6.110 a las ecuaciones 6.107, 6.108 y 6.109 se tiene:

$$0.468055983 + 0.409068077 + 0.12287594 = 1 \quad (6.111)$$

Lo que indica que la igualdad se cumple y se tiene una adecuada participación modal de masas.

6.10 DEFINICIÓN DE ACELEROGRAMA

Al ocurrir un sismo se libera una cantidad muy grande de energía, misma que es transmitida mediante ondas sísmicas que recorren determinada zona de la corteza terrestre dependiendo del epicentro del sismo. Las rocas, y demás material que compone la corteza terrestre, son el medio por el que viajan las ondas sísmicas, pero éstas se disipan a medida que se alejan del punto de liberación de energía.

Las ondas sísmicas se clasifican de la siguiente manera:

- Primarias: Es considerada una onda interna y se desplaza de manera longitudinal, lo que provoca dilatación y compresión en el sentido en el que viaja. Su comportamiento es similar a las ondas sonoras, lo que provoca que al llegar a la superficie una parte de estas ondas sean disipadas en la atmósfera y puedan ser audible. La velocidad de propagación de este tipo de onda es de 5km/s
- Secundaria: Es considerada una onda interna y se caracterizan principalmente por su efecto cortante y viaje de manera transversal sobre las rocas, lo que hace que no pueda desplazarse sobre fluidos. Generalmente, la amplitud de este tipo de ondas es mucho mayor que las ondas primarias y esto provoca que sus efectos se sientan de manera más fuerte. Su velocidad de propagación es de 3km/s
- Superficiales: este tipo de onda viaja sobre la superficie de la corteza terrestre y se divide en dos:
 - Love: Son muy parecidas a las ondas secundarias, su única diferencia es que no tienen un desplazamiento vertical, lo que provoca que el suelo se mueva de manera lateral, afectando principalmente los cimientos de la estructura. Se propagan a una velocidad de 1 a 4.5 km/s
 - Rayleigh: Este tipo de ondas se asemejan mucho a las olas marítimas, tienen un desplazamiento vertical y horizontal formando movimientos elípticos y tiene una velocidad de 1 a 4 km/s

Todo lo descrito anteriormente provoca que el terreno se desplace con cierta aceleración, para medir dicha aceleración en necesario instrumentar el suelo que se desea estudiar mediante acelerógrafos, estos equipos tomarán los registros de la aceleración durante el tiempo que dure la misma.

Dichos registros suelen hacerse en un intervalo de 0.01-0.02s y se dividen en tres canales, según el sentido en el que se desplacen:

- Canal 1: V
- Canal 2: N90E
- Canal 3: N00E

Al graficar estos valores se obtiene un acelerograma. A continuación, se mostrará el acelerograma con el que se ha estado trabajando esta tesis, correspondiente a los registros del sismo del 19 de septiembre de 1985 en México, medido por la estación SCT tomando el canal 3 N00E

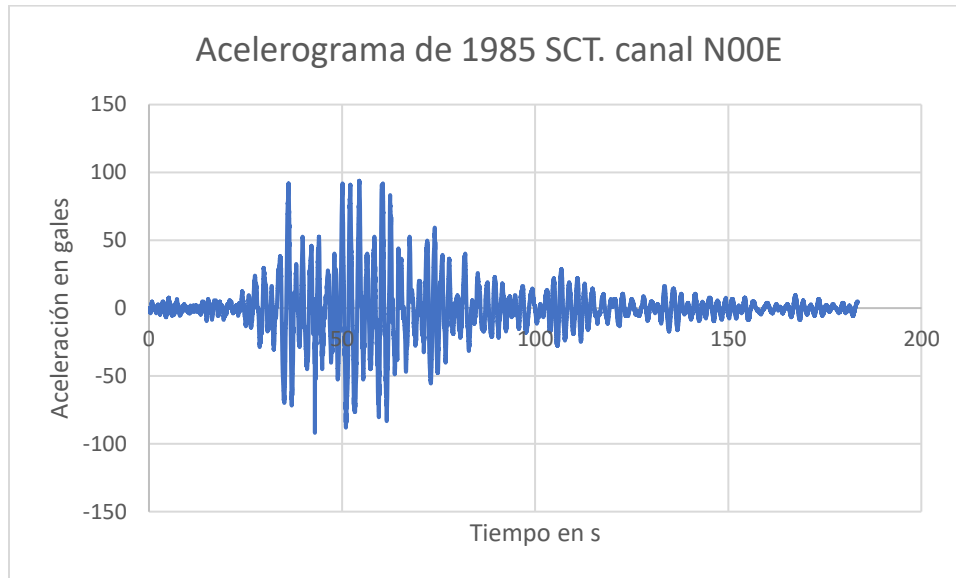


Figura 6.20. Acelerograma del sismo del 19 de septiembre de 1985 en México, medido por la estación SCT tomando el canal 3 N00E

6.11 OBTENCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS MODALES ($Q(T)$)

Para calcular los desplazamientos modales, primero hay que obtener las frecuencias modales y los periodos modales, representadas respectivamente por las siguientes expresiones:

$$w_{iD} = \sqrt{\frac{k_{iD}}{m_{iD}}} \quad (6.112)$$

$$T_{iD} = \frac{2\pi}{w_{iD}\sqrt{1-\xi}} \quad (6.113)$$

Debido a que la estructura que se está analizando es de 3GDL, como ya se ha mencionado en repetidas ocasiones, se obtendrán 3 frecuencias modales y 3 periodos modales. A continuación, se expresará la ecuación 6.112 de manera más particular

$$w_{1D} = \sqrt{\frac{k_{1D}}{m_{1D}}} \quad (6.114)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones 6.68.2 (correspondiente a la matriz de masa diagonalizada) y 6.68.4 (correspondiente a la matriz de rigidez diagonalizada) en la ecuación 6.114

$$w_{1D} = \sqrt{\frac{20417.88}{28.04}} \quad (6.115)$$

Resolviendo la ecuación 6.115

$$w_{1D} = 26.984 \frac{rad}{s} \quad (6.116)$$

Se realiza el mismo procedimiento para calcular la frecuencia modal 2 y la frecuencia modal 3, obteniendo los siguientes resultados

$$w_{2D} = 80.24390561 \frac{rad}{s} \quad (6.117)$$

$$w_{3D} = 136.8798852 \frac{rad}{s} \quad (6.118)$$

Se proceden a calcular los periodos modales 1,2 y 3 sustituyendo las expresiones 6.116, 6.117 y 6.118 (correspondientes a las frecuencias modales) en la ecuación 6.113 de manera respectiva, obteniendo los siguientes valores:

$$T_{1D} = 0.233122755 \text{ s} \quad (6.119)$$

$$T_{2D} = 0.078399151 \text{ s} \quad (6.120)$$

$$T_{3D} = 0.045960398 \text{ s} \quad (6.121)$$

Para la realización del análisis dinámico tiempo historia (ADTH) se plantea la ecuación que representa la ley de Hooke:

$$F = K\Delta$$

En donde se desconocen los desplazamientos y la fuerza, ambas en función del tiempo. Habiendo calculado las frecuencias modales y los periodos modales se proceden a calcular los desplazamientos modales, sin embargo, hay que recordar que estos desplazamientos modales están en función del tiempo, lo que quiere decir que mientras el tiempo avanza habrá un desplazamiento modal diferente, lo que indica que es necesario usar un método paso a paso que en este caso será la β -Newmark en su variante aceleración promedio.

Para hacer uso de la β -Newmark se usará el acelerograma que se ha venido trabajando a lo largo de esta tesis, se ingresarán los periodos modales obtenidos y los desplazamientos resultantes serán los desplazamientos modales.

Para llevar cabo lo anterior, se abrirá un archivo de Excel en blanco y se ingresarán los intervalos de tiempo de 0.01s en 0.01s hasta 150s, en la siguiente columna se ingresarán las aceleraciones dadas por el registro del acelerograma con el que se va a trabajar, que en este caso será el proporcionado por la estación SCT referente al sismo del 19 de septiembre de 1985 en el canal 3 N00E; sin embargo, la información se trabajará en “m” y los datos proporcionados están dados en cm/s/s, motivo por el cual las aceleraciones se dividirán entre 100. Quedando:

tiempo (t)	(dato de acelerograma) "m/s/s"
0	-0.0288
0.01	-0.0288
0.02	-0.0288
0.03	-0.0288
0.04	-0.0288
0.05	-0.0193
0.06	-0.0193
0.07	-0.0193
0.08	-0.0097
0.09	-0.0097
0.1	-0.0001
0.11	-0.0001
0.12	-0.0097
0.13	-0.0001
0.14	-0.0001
0.15	-0.0001
0.16	-0.0001
0.17	-0.0097
0.18	-0.0097
0.19	-0.0193
0.2	-0.0193
0.21	-0.0288
0.22	-0.0288

Figura 6.21. Valores del tiempo y los registros del acelerograma en m/s/s en Excel para el ADTH

Posteriormente, se ingresan los periodos modales en la hoja de la β -Newmark en su variante aceleración promedio (considerando los valores del acelerograma en m/s/s), quedando

Amortiguamiento (C) =	0.00449351 Tonf-s/mm	Tiempo en el que se producen los valores máximos "s"	121.260	120.18	121.260
Número de Euler (e) =	7.71878				
Periodo (T) =	0.238879739 s				
tiempo (t)	(dato de acelerograma)	aceleración (a) m/s/s	Carga (P)	P circunfleja	Desplazamiento (X0) (mm)
0	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	4.92014E-05	0.000000000
0.01	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	9.84029E-05	1.39745E-06
0.02	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	0.000384493	5.46031E-06
0.03	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	0.000834272	1.18478E-05
0.04	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	0.001413363	2.00716E-05
0.05	-1.93	-0.0193	3.29718E-05	0.002063357	2.93024E-05
0.06	-1.93	-0.0193	3.29718E-05	0.002706345	3.84337E-05
0.07	-1.93	-0.0193	3.29718E-05	0.003283106	4.66245E-05
0.08	-0.97	-0.0097	1.65713E-05	0.003740206	5.31159E-05
0.09	-0.97	-0.0097	1.65713E-05	0.004017211	5.70497E-05
0.1	-0.01	-0.0001	1.70838E-07	0.004067317	5.77613E-05
0.11	-0.01	-0.0001	1.70838E-07	0.003860153	5.48193E-05
0.12	-0.97	-0.0097	1.65713E-05	0.003416194	4.85145E-05
0.13	-0.01	-0.0001	1.70838E-07	0.002787691	3.95889E-05
0.14	-0.01	-0.0001	1.70838E-07	0.002005151	2.84758E-05
0.15	-0.01	-0.0001	1.70838E-07	0.001108646	1.57442E-05
0.16	-0.01	-0.0001	1.70838E-07	0.000161274	2.29031E-06
0.17	-0.97	-0.0097	1.65713E-05	-0.000755659	-1.07314E-05
0.18	-0.97	-0.0097	1.65713E-05	-0.001548568	-2.19917E-05
0.19	-1.93	-0.0193	3.29718E-05	-0.002134583	-3.03139E-05
0.2	-1.93	-0.0193	3.29718E-05	-0.002446838	-3.47484E-05
0.21	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	-0.002438728	-3.46332E-05
0.22	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	-0.002086515	-2.96313E-05
0.23	-2.88	-0.0288	4.92014E-05	-0.0014064	-1.99277E-05

Figura 6.22. Ingreso del periodo modal 1 y obtención del desplazamiento modal 1 en Excel para el ADTH

Los desplazamientos obtenidos de ingresar el periodo modal 1 en la hoja de cálculo correspondiente a la β -Newmark serán los desplazamientos modales 1. Estos resultados se copiarán en la en una columna aparte en la hoja de cálculo correspondiente a de la figura 6.21

tiempo (t)	(dato de acelerograma) "m/s/s"	Desplazamiento modal (q1) en "m"
0	-0.0288	0.0000000000
0.01	-0.0288	1.39584E-06
0.02	-0.0288	5.44861E-06
0.03	-0.0288	1.18035E-05
0.04	-0.0288	1.99529E-05
0.05	-0.0193	2.90459E-05
0.06	-0.0193	3.79571E-05
0.07	-0.0193	4.58336E-05
0.08	-0.0097	5.19151E-05
0.09	-0.0097	5.5355E-05
0.1	-0.0001	5.55148E-05
0.11	-0.0001	5.20038E-05
0.12	-0.0097	4.5165E-05

Figura 6.23. Valores correspondientes al desplazamiento modal 1 en Excel para el ADTH

Se seguirá el mismo procedimiento para la obtención de los desplazamientos modales 2 y 3 quedando de la siguiente manera:

tiempo (t)	(dato de acelerograma) "m/s/s"	Desplazamiento modal (q1) en "m"	Desplazamiento modal (q2) en "m"	Desplazamiento modal (q3) en "m"
0	-0.0288	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.01	-0.0288	1.39584E-06	1.19935E-06	9.37753E-07
0.02	-0.0288	5.44861E-06	4.07575E-06	2.52621E-06
0.03	-0.0288	1.18035E-05	6.97849E-06	2.77416E-06
0.04	-0.0288	1.99529E-05	8.35296E-06	1.49918E-06
0.05	-0.0193	2.90459E-05	7.36807E-06	2.33928E-07
0.06	-0.0193	3.79571E-05	4.31258E-06	2.08123E-07
0.07	-0.0193	4.58336E-05	7.61446E-07	1.18816E-06
0.08	-0.0097	5.19151E-05	-1.55242E-06	1.73542E-06
0.09	-0.0097	5.5355E-05	-1.87356E-06	9.09792E-07
0.1	-0.0001	5.55148E-05	-5.62975E-07	-4.74235E-07
0.11	-0.0001	5.20038E-05	1.16952E-06	-9.95062E-07
0.12	-0.0097	4.5165E-05	2.36894E-06	-9.56496E-08
0.13	-0.0001	3.57995E-05	2.62912E-06	1.1592E-06
0.14	-0.0001	2.44003E-05	1.67368E-06	1.0543E-06
0.15	-0.0001	1.15904E-05	-1.05005E-07	-3.17911E-07
0.16	-0.0001	-1.6913E-06	-1.70046E-06	-1.17453E-06
0.17	-0.0097	-1.42645E-05	-2.07152E-06	-3.62586E-07
0.18	-0.0097	2.47023E-05	7.01624E-07	1.20275E-06

Figura 6.24. Valores correspondientes a los desplazamientos modales 2 y 3 en Excel para el ADTH

6.12 OBTENCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS REALES (U(T))

Para calcular los desplazamientos reales, se debe regresar al sistema acoplado, para tales fines se calcularán las pseudoaceleraciones correspondientes a los modos de vibrar, utilizando la siguiente ecuación:

$$Sa_{iD} = q_i w_{iD}^2 \quad (6.122)$$

Dado que se tienen 3 desplazamientos modales se tendrán 3 pseudoaceleraciones modales, se aplica la expresión 6.122 para cada desplazamiento modal y los resultados se colocan en columnas apartes, quedando:

tiempo (t)	(dato de acelerograma) "m/s/s"	Desplazamiento modal (q1) en "m"	Desplazamiento modal (q2) en "m"	Desplazamiento modal (q3) en "m"	Seudoaceleración modal 1 (Sam1) en "m/s ² "	Seudoaceleración modal 2 (Sam2) en "m/s ² "	Seudoaceleración modal 3 (Sam3) en "m/s ² "
0	-0.0288	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.01	-0.0288	1.39584E-06	1.19935E-06	9.37753E-07	0.001016514	0.007722741	0.017569833
0.02	-0.0288	5.44861E-06	4.07575E-06	2.52621E-06	0.00396792	0.026244106	0.047331303
0.03	-0.0288	1.18035E-05	6.97849E-06	2.77416E-06	0.008595845	0.04493508	0.051977024
0.04	-0.0288	1.99529E-05	8.35296E-06	1.49918E-06	0.014530616	0.053785406	0.028088777
0.05	-0.0193	2.90459E-05	7.36807E-06	2.33928E-07	0.02115254	0.047443657	0.00438289
0.06	-0.0193	3.79571E-05	4.31258E-06	2.08123E-07	0.027642075	0.027769063	0.003899413
0.07	-0.0193	4.58336E-05	7.61446E-07	1.18816E-06	0.033378067	0.004903016	0.02226155
0.08	-0.0097	5.19151E-05	-1.55242E-06	1.73542E-06	0.037806887	-0.009996141	0.032515091
0.09	-0.0097	5.5355E-05	-1.87356E-06	9.09792E-07	0.040311991	-0.012063985	0.017045961
0.1	-0.0001	5.55148E-05	-5.62975E-07	-4.74235E-07	0.040428405	-0.00362504	-0.008885316
0.11	-0.0001	5.20038E-05	1.16952E-06	-9.95062E-07	0.0378715	0.00753061	-0.018643576
0.12	-0.0097	4.5165E-05	2.36894E-06	-9.56496E-08	0.032891162	0.01525379	-0.001792102
0.13	-0.0001	3.57995E-05	2.62912E-06	1.1592E-06	0.026070814	0.016929144	0.021718885
0.14	-0.0001	2.44003E-05	1.67368E-06	1.0543E-06	0.01776936	0.010776995	0.019753521
0.15	-0.0001	1.15904E-05	-1.05005E-07	-3.17911E-07	0.008440622	-0.000676135	-0.005956416
0.16	-0.0001	-1.6913E-06	-1.70046E-06	-1.17453E-06	-0.001231681	-0.010949429	-0.022006043
0.17	-0.0097	-1.42645E-05	-2.07152E-06	-3.62586E-07	-0.010388082	-0.013338709	-0.006793453

Figura 6.25. Valores correspondientes a las pseudoaceleraciones modales en Excel para el ADTH

A continuación, se calculan los desplazamientos modales parciales utilizando la siguiente expresión

$$q_{iP} = \Gamma_i q_i \quad (6.123)$$

Se aplica la expresión 6.123 utilizando los resultados de las expresiones 6.107, 6.108 y 6.109 así como los desplazamientos modales correspondientes, y los resultados se colocan en columnas apartes:

Seudoaceleración modal 1 (Sam1) en "m/s ² "	Seudoaceleración modal 2 (Sam2) en "m/s ² "	Seudoaceleración modal 3 (Sam3) en "m/s ² "	Desplazamiento modal parcial 1 (q1p) en "m"	Desplazamiento modal parcial 2 (q2p) en "m"	Desplazamiento modal parcial 3 (q3p) en "m"
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0	0	0
0.001016514	0.007722741	0.017569833	6.53331E-07	4.90617E-07	1.15227E-07
0.00396792	0.026244106	0.047331303	2.55025E-06	1.66726E-06	3.1041E-07
0.008595845	0.04493508	0.051977024	5.5247E-06	2.85468E-06	3.40878E-07
0.014530616	0.053785406	0.028088777	9.33908E-06	3.41693E-06	1.84213E-07
0.02115254	0.047443657	0.00438289	1.35951E-05	3.01404E-06	2.87441E-08
0.027642075	0.027769063	0.003899413	1.77661E-05	1.76414E-06	2.55733E-08
0.033378067	0.004903016	0.02226155	2.14527E-05	3.11483E-07	1.45997E-07
0.037806887	-0.009996141	0.032515091	2.42992E-05	-6.35044E-07	2.13242E-07
0.040311991	-0.012063985	0.017045961	2.59092E-05	-7.66412E-07	1.11792E-07
0.040428405	-0.00362504	-0.008885316	2.59841E-05	-2.30295E-07	-5.82721E-08
0.0378715	0.00753061	-0.018643576	2.43407E-05	4.78411E-07	-1.22269E-07
0.032891162	0.01525379	-0.001792102	2.11397E-05	9.69057E-07	-1.1753E-08
0.026070814	0.016929144	0.021718885	1.67562E-05	1.07549E-06	1.42438E-07
0.01776936	0.010776995	0.019753521	1.14207E-05	6.84651E-07	1.29548E-07
0.008440622	-0.000676135	-0.005956416	5.42494E-06	-4.29541E-08	-3.90636E-08
-0.001231681	-0.010949429	-0.022006043	-7.91623E-07	-6.95605E-07	-1.44321E-07
-0.010388082	-0.013338709	-0.006793453	-6.6766E-06	-8.47394E-07	-4.45531E-08
-0.018058474	-0.004517818	0.02423989	-1.16065E-05	-2.87012E-07	1.58971E-07

Figura 6.26. Valores correspondientes a los desplazamientos modales parciales en Excel para el ADTH

Evocando la ecuación 6.53 se tiene

$$\{cantidad\ relativa\} = [\Phi]\{cantidad\ modal\}$$

De la expresión anterior, es posible calcular los desplazamientos de un sistema acoplado a partir de uno desacoplado, resultando la siguiente expresión:

$$\Delta x_i = [\Phi]\{q_{iP}\} \quad (6.124)$$

Se aplica la expresión 6.124 utilizando los valores de la figura 6.26 y la matriz modal previamente calculada, colocando los resultados en columnas apartes; sin embargo, hay que considerar que una parte de la expresión 6.124 es un vector, por lo que para su ejecución se deberán tomar en cuenta todos los desplazamientos modales parciales en ese instante, es decir: en esa fila como se muestra a continuación:

Desplazamiento modal parcial 1 (q1p) en "m"	Desplazamiento modal parcial 2 (q2p) en "m"	Desplazamiento modal parcial 3 (q3p) en "m"
0	0	0

Figura 6.27. Valores correspondientes a los desplazamientos modales parciales que deberán ser tomados en cuenta para el cálculo de los desplazamientos reales en Excel para el ADTH

Como puede observarse, el vector de la figura 6.27 es un vector de 1x3 y dado que para poder operarlo con la matriz modal (matriz de 3x3) es necesario transponer dicho vector, sin embargo, para no afectar el resto de la ecuación todos los términos deberán de ser transpuestos, obteniendo de esa manera el valor de todos desplazamientos reales en un instante.

Quedando la ecuación 6.124 de la siguiente manera:

$$[\Delta x_i = [\Phi]\{q_{iP}\}]^T \quad (6.125)$$

Aplicando la ecuación 6.125 en Excel, se tiene:

desplazamiento modal parcial 2 (q2p) en "m"	Desplazamiento modal parcial 3 (q3p) en "m"	Desplazamiento real 1 (Δx_1) en "m"	Desplazamiento real 2 (Δx_2) en "m"	Desplazamiento real 3 (Δx_3) en "m"
0	0	0	0	0
4.90617E-07	1.15227E-07	1.25918E-06	1.45086E-06	1.43003E-06
1.66726E-06	3.1041E-07	4.52792E-06	5.78266E-06	5.72606E-06
2.85468E-06	3.40878E-07	8.72026E-06	1.27528E-05	1.29506E-05
3.41693E-06	1.84213E-07	1.29402E-05	2.16462E-05	2.31615E-05
3.01404E-06	2.87441E-08	1.66379E-05	3.11833E-05	3.58281E-05
1.76414E-06	2.55733E-08	1.95558E-05	4.00131E-05	4.94484E-05
3.11483E-07	1.45997E-07	2.19102E-05	4.75154E-05	6.20487E-05
-6.35044E-07	2.13242E-07	2.38774E-05	5.34067E-05	7.15358E-05
-7.66412E-07	1.11792E-07	2.52546E-05	5.70847E-05	7.6254E-05
-2.30295E-07	-5.82721E-08	2.56955E-05	5.76874E-05	7.56281E-05
4.78411E-07	-1.22269E-07	2.46968E-05	5.43795E-05	6.99254E-05
9.69057E-07	-1.1753E-08	2.2097E-05	4.72813E-05	6.01637E-05
1.07549E-06	1.42438E-07	1.79741E-05	3.73601E-05	4.74858E-05
6.84651E-07	1.29548E-07	1.22349E-05	2.53993E-05	3.24607E-05
-4.29541E-08	-3.90636E-08	5.34292E-06	1.20853E-05	1.5753E-05
-6.95605E-07	-1.44321E-07	-1.63155E-06	-1.78614E-06	-1.61516E-06
-8.47394E-07	-4.45531E-08	-7.56855E-06	-1.50497E-05	-1.83984E-05
-2.87012E-07	1.58971E-07	-1.17345E-05	-2.60988E-05	-3.31579E-05

Figura 6.28. Valores correspondientes a los de los desplazamientos reales en Excel para el ADTH

6.13 OBTENCIÓN DE FUERZAS LATERALES MÁXIMAS DE ENTREPISO

Para calcular las fuerzas laterales máximas de entrepiso se considerará la expresión que define a la rigidez lateral, vista en capítulos anteriores, de donde se tiene que:

$$\Phi = [-K_{11}]^{-1}K_{12}\Delta \quad (6.126)$$

$$\Delta = [K_{lateral}]^{-1}\{F\} \quad (6.127)$$

Se despeja la fuerza de la ecuación 6.127, quedando:

$$\{F\} = [K_{lateral}]\{\Delta x_i\} \quad (6.128)$$

Para calcular dichas fuerzas se aplica el mismo principio que el que se aplicó para el cálculo de los desplazamientos reales, quedando la ecuación 6.128 de la siguiente manera:

$$[\{F\} = [K_{lateral}]\{\Delta x_i\}]^T \quad (6.129)$$

Sustituyendo los valores de la rigidez lateral (previamente calculados) y los valores correspondientes a los desplazamientos reales mostrados en la figura 6.28, en la ecuación 6.129 y colocando los valores en columnas aparte en Excel, se tiene:

Desplazamiento real 1 (Δx_1) en "m"	Desplazamiento real 2 (Δx_2) en "m"	Desplazamiento real 3 (Δx_3) en "m"	Fuerza del entrepiso 1 (F1) en "tonf"	Fuerza del entrepiso 2 (F2) en "tonf"	Fuerza del entrepiso 3 (F3) en "tonf"
0	0	0	0	0	0
1.25918E-06	1.45086E-06	1.43003E-06	0.019119612	-0.002558674	-3.44639E-05
4.52792E-06	5.78266E-06	5.72606E-06	0.060748752	-0.001788668	-0.001621938
8.72026E-06	1.27528E-05	1.29506E-05	0.095012178	0.014698427	-0.005112538
1.29402E-05	2.16462E-05	2.31615E-05	0.106439748	0.043947955	-0.004587579
1.66379E-05	3.11833E-05	3.58281E-05	0.098494473	0.069522366	0.008530283
1.95558E-05	4.00131E-05	4.94484E-05	0.081762846	0.079574482	0.035949345
2.19102E-05	4.75154E-05	6.20487E-05	0.067200805	0.07805508	0.068064341
2.38774E-05	5.34067E-05	7.15358E-05	0.058086466	0.079624793	0.090029139
2.52546E-05	5.70847E-05	7.6254E-05	0.052891793	0.092346861	0.093415235
2.56955E-05	5.76874E-05	7.56281E-05	0.053948655	0.10731862	0.082126103
2.46968E-05	5.43795E-05	6.99254E-05	0.061101702	0.109045253	0.066779737
2.2097E-05	4.72813E-05	6.01637E-05	0.070667974	0.091295569	0.054540991
1.79741E-05	3.73601E-05	4.74858E-05	0.071928454	0.06364597	0.04441644
1.22349E-05	2.53993E-05	3.24607E-05	0.050004281	0.040879498	0.031848416
5.34292E-06	1.20853E-05	1.5753E-05	0.009709254	0.024282933	0.016246068
-1.63155E-06	-1.78614E-06	-1.61516E-06	-0.025606584	0.002860697	0.001065671
-7.56855E-06	-1.50497E-05	-1.83984E-05	-0.036806206	-0.028529531	-0.01246719
-1.17345E-05	-2.60988E-05	-3.31579E-05	-0.024162511	-0.059242578	-0.028014233

Figura 6.29. Obtención de los fuerzas de entrepiso en Excel para el ADTH

A continuación, se proceden a obtener las fuerzas laterales máximas de entrepiso ingresando la función de Excel que permite obtener valores máximos de una columna, quedando:

VALORES MÁXIMOS DE LAS FUERZAS DE ENTREPISO EN "TONF"		
3.253913729	2.71122071	1.687413586
Fuerza del entrepiso 1 (F1) en "tonf"	Fuerza del entrepiso 2 (F2) en "tonf"	Fuerza del entrepiso 3 (F3) en "tonf"
0	0	0
0.019119612	-0.002558674	-3.44639E-05
0.060748752	-0.001788668	-0.001621938
0.095012178	0.014698427	-0.005112538
0.106439748	0.043947955	-0.004587579
0.098494473	0.069522366	0.008530283
0.081762846	0.079574482	0.035949345
0.067200805	0.07805508	0.068064341
0.058086466	0.079624793	0.090029139
0.052891793	0.092346861	0.093415235
0.053948655	0.10731862	0.082126103
0.061101702	0.109045253	0.066779737
0.070667974	0.091295569	0.054540991
0.071928454	0.06364597	0.04441644
0.050004281	0.040879498	0.031848416
0.009709254	0.024282933	0.016246068
-0.025606584	0.002860697	0.001065671
-0.036806206	-0.028529531	-0.01246719

Figura 6.30. Obtención de Las fuerzas laterales máximas de entrepiso en Excel para el ADTH

Observando la figura 6.30, es evidente que se tienen los siguientes valores para las fuerzas laterales máximas de entrepiso:

$$F_1 = 3.253913729 \text{ tonf} \quad (6.130)$$

$$F_2 = 2.7112071 \text{ tonf} \quad (6.131)$$

$$F_3 = 1.687413586 \text{ tonf} \quad (6.132)$$

VII. ADTH Y ADME EN ETABS Y SU COMPARACIÓN EN EXCEL

Teniendo como base el estudio teórico – matemático de todos los capítulos anteriores, este apartado se dedicará únicamente a la comprobación de los resultados anteriores con ayuda de un software estructural llamado ETABS en su versión 19.1.0; lo anterior, teniendo en cuenta que el lector conoce los fundamentos para el uso del software en cuestión.

Dicho lo anterior, no se pretende generar un manual sobre el uso de ETABS ni ahondar en explicaciones normativas, teóricas ni matemáticas. Únicamente, se explicará, a través de capturas de pantalla, la forma de introducir el ADTH y el ADME.

7.1 DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS LATERALES DEL ADTH EN ETABS

Se plantea la configuración de la estructura con la que se está trabajando

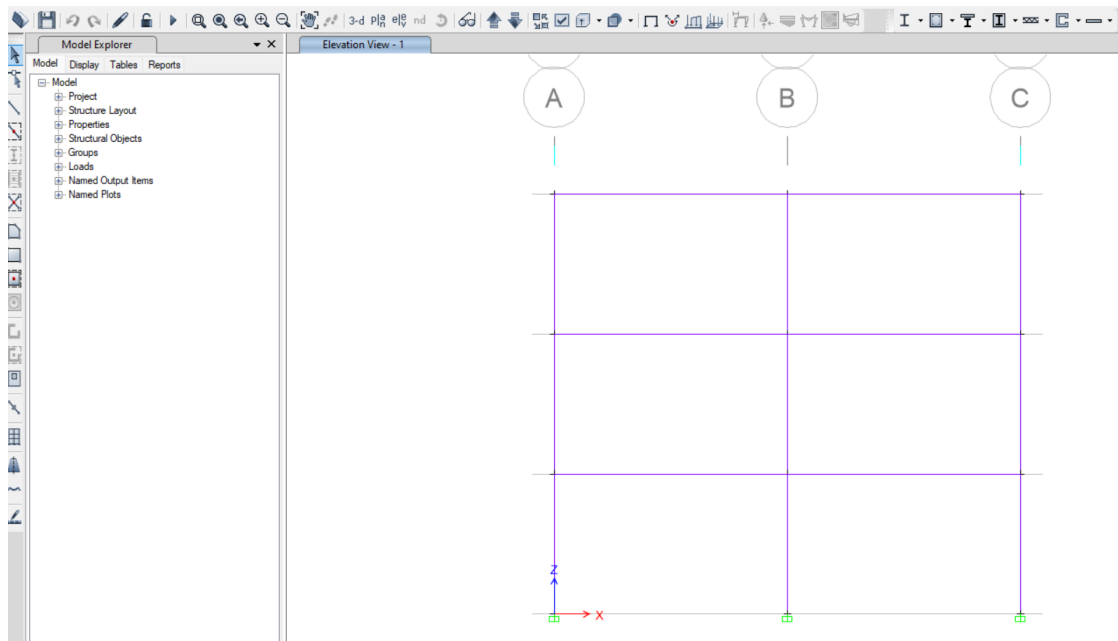


Figura 7.1. Planteamiento de la estructura en ETABS

Se introducen los datos correspondientes al acelerograma con el que se está trabajando, en este caso serán los registros tomados de la estación SCT-1985 canal 3 N00E

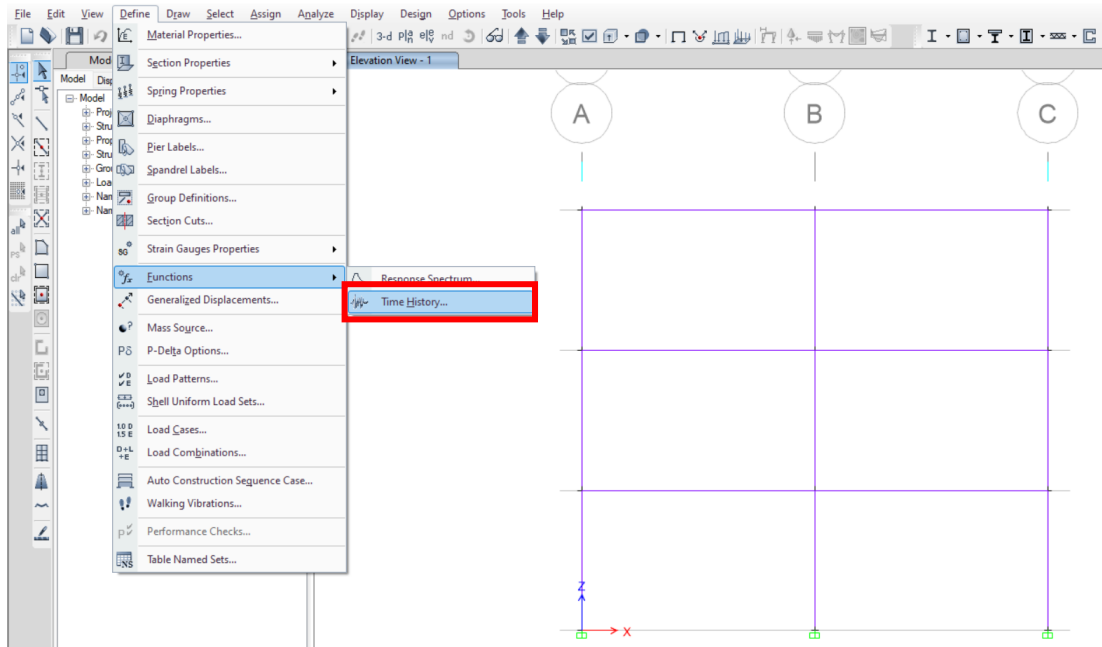


Figura 7.2. Introducción de una función ADTH en ETABS

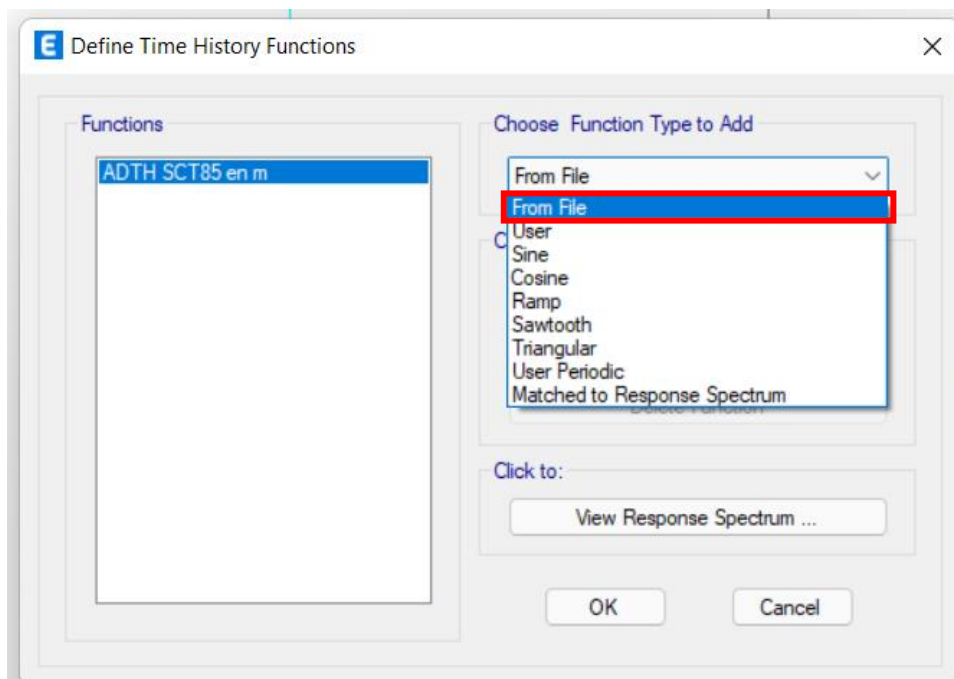


Figura 7.3. Introducción del archivo para generar una función ADTH en ETABS

Se añade una nueva función:

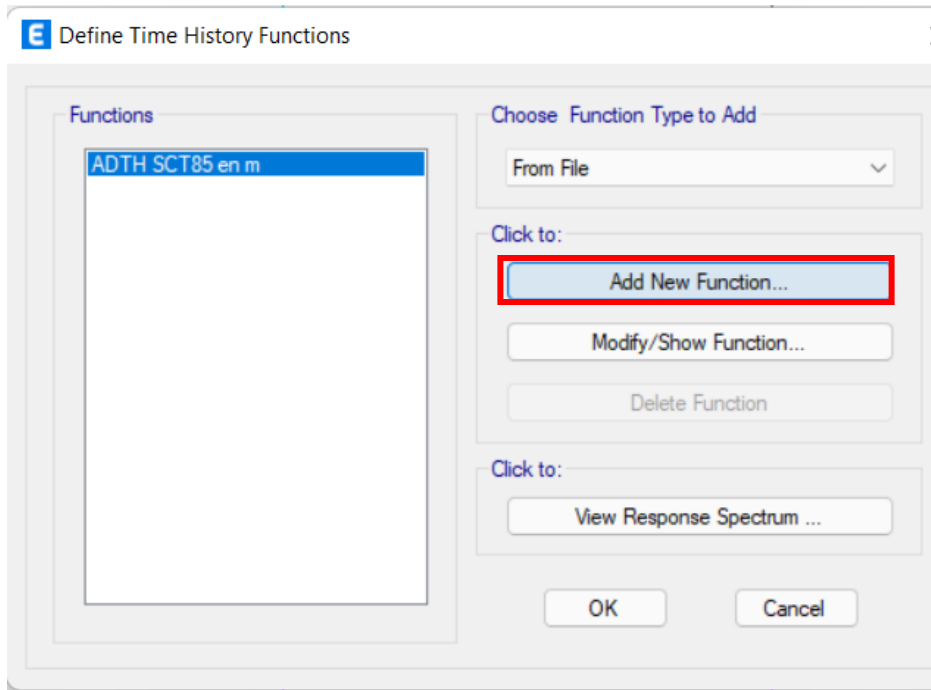


Figura 7.4. Introducción del archivo para generar una función ADTH en ETABS

Se nombra el archivo (en este caso será “ADTH SCT85 en m”, se indican los saltos por línea (en este caso será cero), el número de puntos por línea a considerar (en este caso será 8), el intervalo de tiempo en el que será evaluada la función (en este caso será de 0.01):

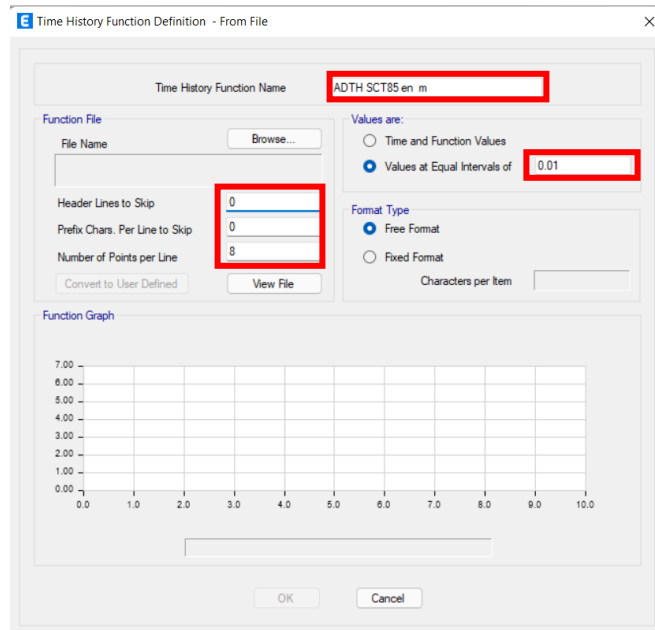


Figura 7.5 Definición de una función ADTH en ETABS

Se busca el acelerograma de interés:

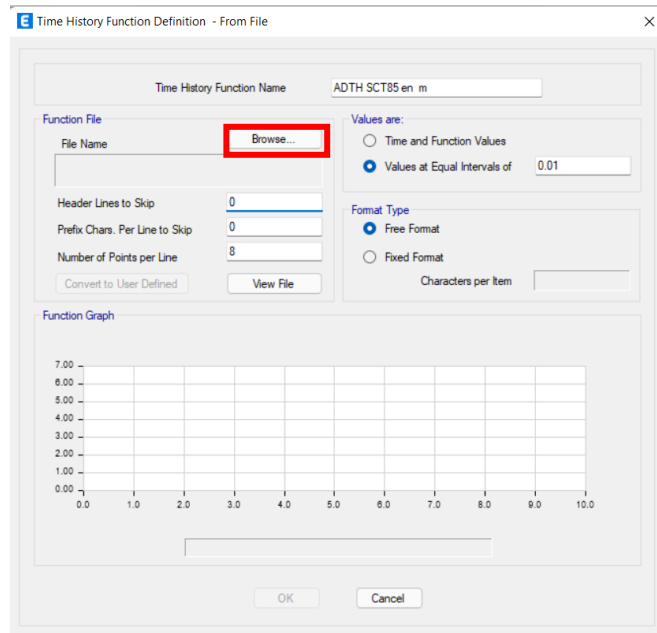


Figura 7.6 Búsqueda del acelerograma de interés para generar una función ADTH en ETABS

Se convierte la función a “una función definida por el usuario”

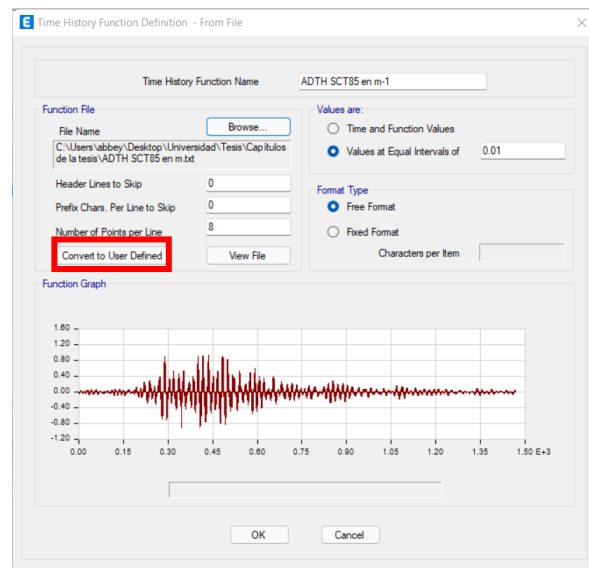


Figura 7.7 Convertir a “Función definida por el usuario” para generar una función ADTH en ETABS

Se confirma que así se quiere la función

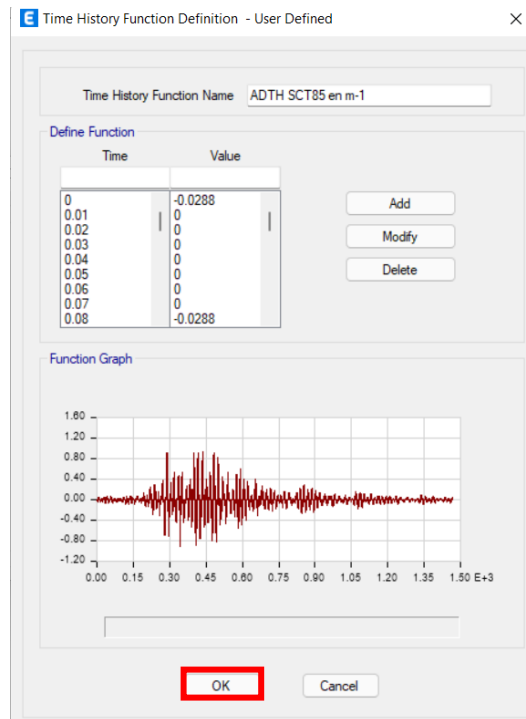


Figura 7.8 Confirmación de los datos para generar una función ADTH en ETABS

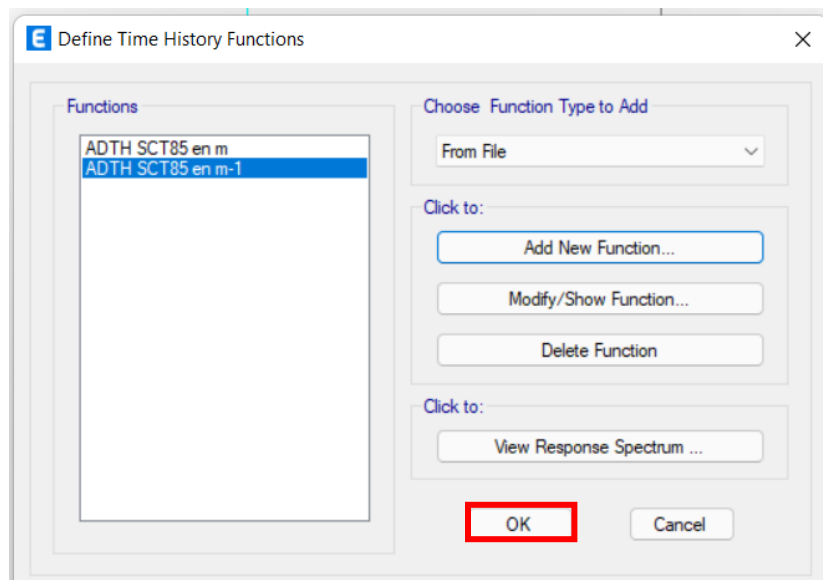


Figura 7.9 segunda confirmación de los datos para generar una función ADTH en ETABS

Se procede a cargar la función introducida

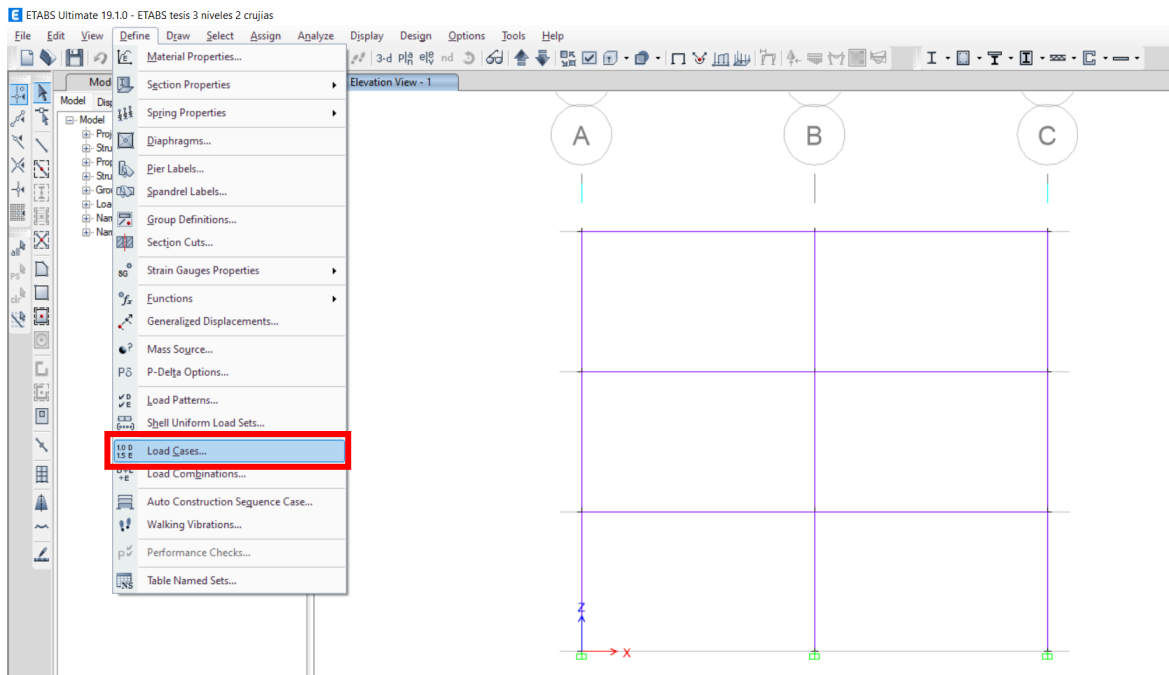


Figura 7.10 Selección de pestaña "Load cases" para generar el ADTH en ETABS

Se selecciona la pestaña "añadir nuevo caso"

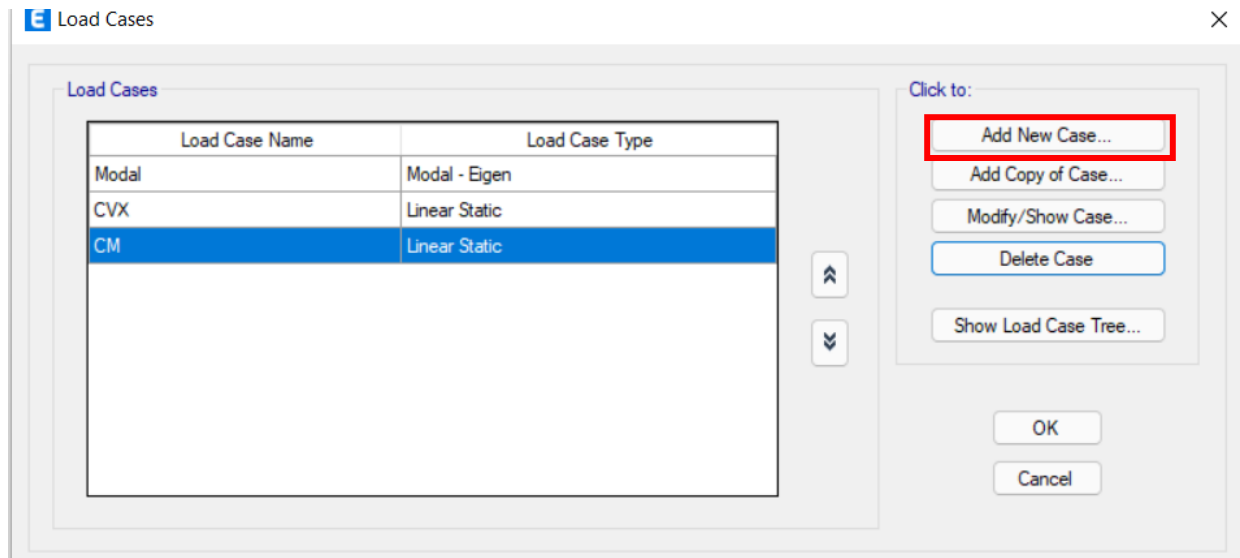


Figura 7.11 Selección de pestaña "añadir nuevo caso" para generar el ADTH en ETABS

Se procede a nombrar el caso de carga (ADTH Newmark – promedio), seleccionar el tipo de caso (“Time History” en su variante “Linear Direct Integration”), se añade la función previamente definida (Siendo el tipo de carga “Aceleración” perteneciente a la función nombrada “ADTH SCT en m” con un factor de escala igual a 1 dado que ya está afectado por la gravedad), se selecciona el número de pasos (18368), se selecciona el intervalo (0.01 s)

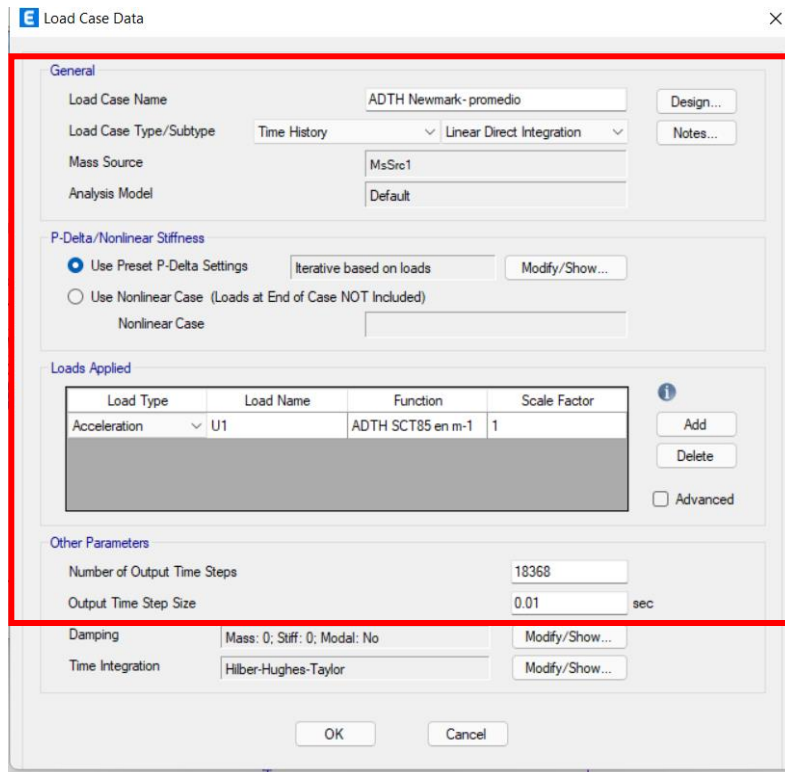


Figura 7.12 Definición de los parámetros del “load cases” para generar el ADTH en ETABS

Se modifica el apartado “Damping”

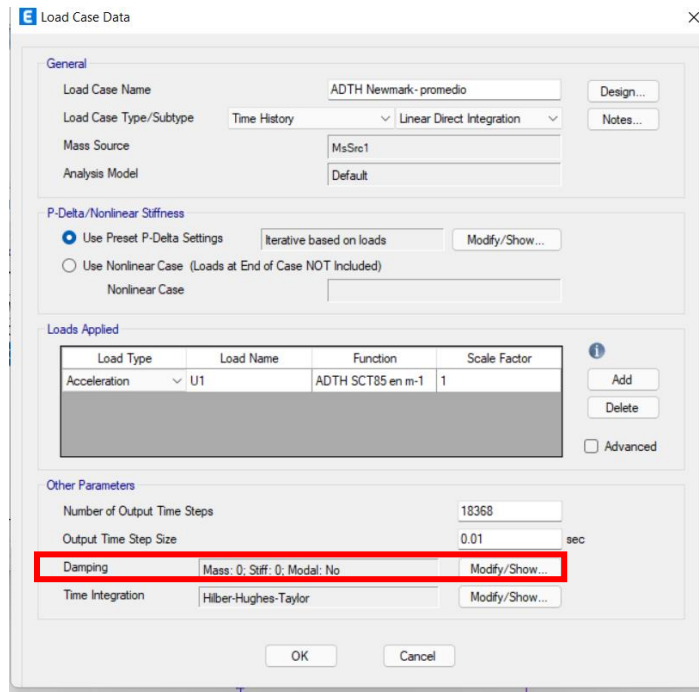


Figura 7.13 Modificación del parámetro “Damping” del “load cases” para generar el ADTH en ETABS

Se coloca el amortiguamiento empleado (0.05) y los dos primeros periodos modales calculados previamente (“0.233122755” y “0.078399151”)

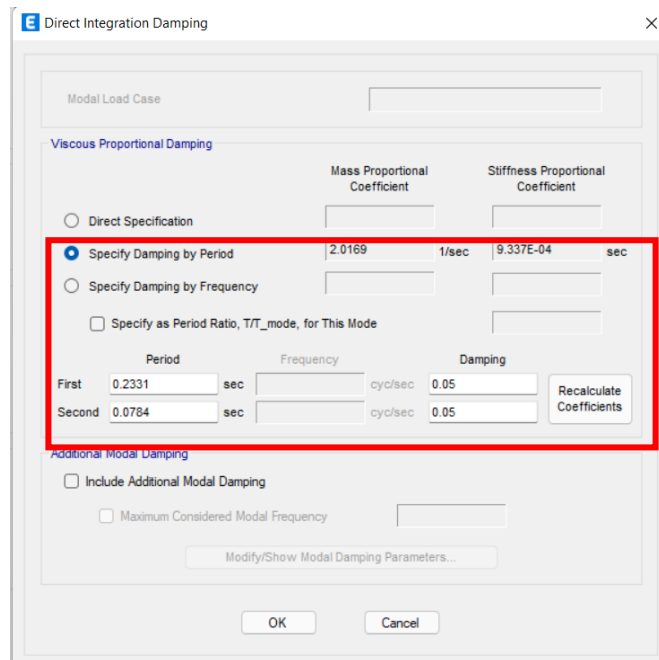


Figura 7.14 Modificación del parámetro “Damping” para generar el ADTH en ETABS

Se modifica el apartado “Time integration”

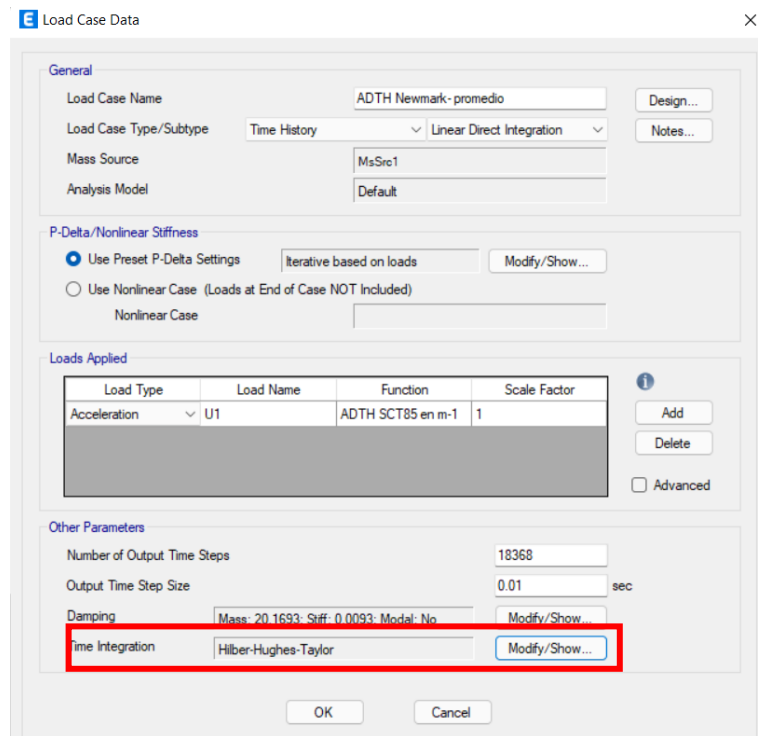


Figura 7.15 Modificación del parámetro “Time integration” para generar el ADTH en ETABS

Se selecciona “Newmark” en su variante aceleración promedio

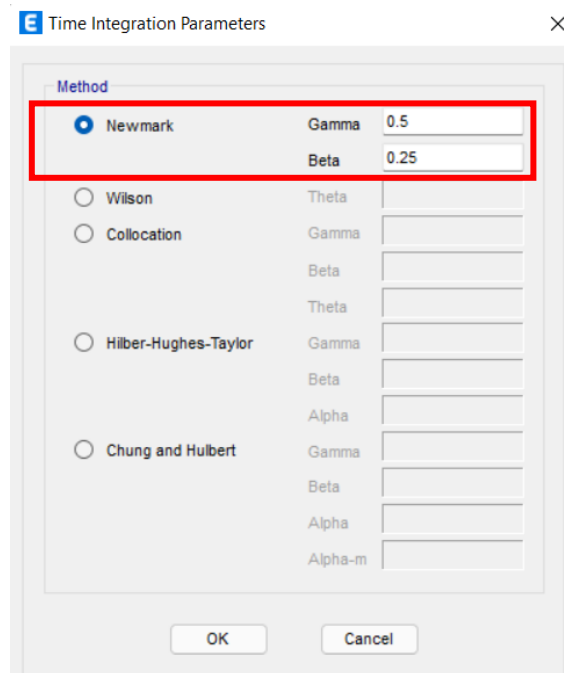


Figura 7.16 Modificación del parámetro “Time integration” seleccionando “Newmark” en su aceleración promedio para generar el ADTH en ETABS

Se confirma que todos los datos son correctos presionando el botón de “ok” a todas las ventanas abiertas y se procede a correr el programa.

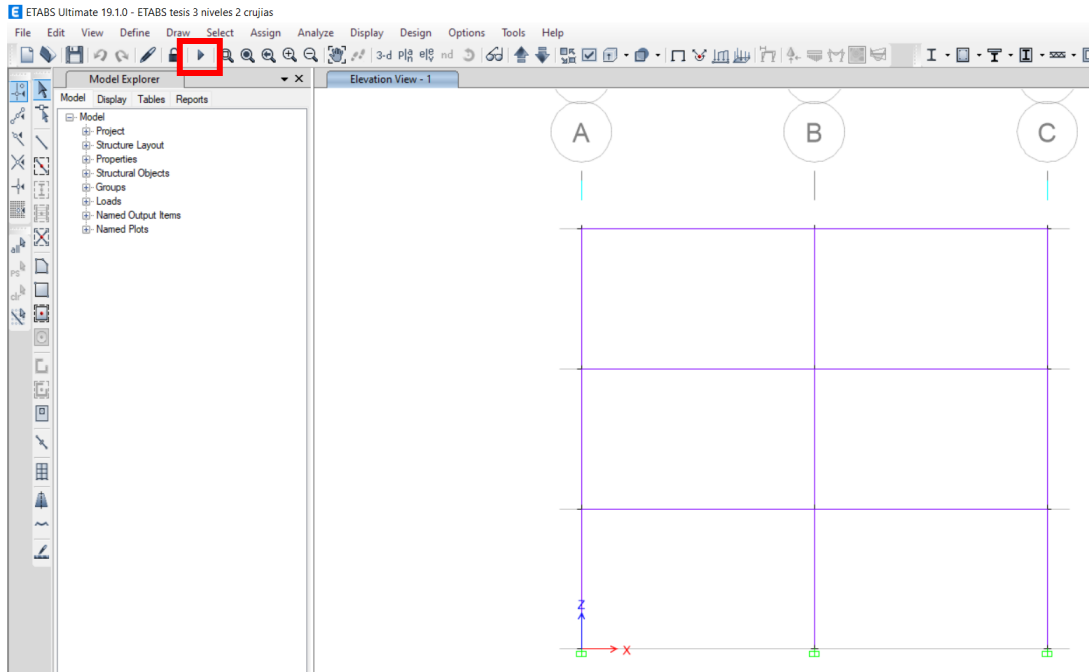


Figura 7.17 Ejecución del programa para generar el ADTH en ETABS

Posteriormente, le pedimos a ETABS que nos muestra los cortantes máximos obtenidos por el ADTH:

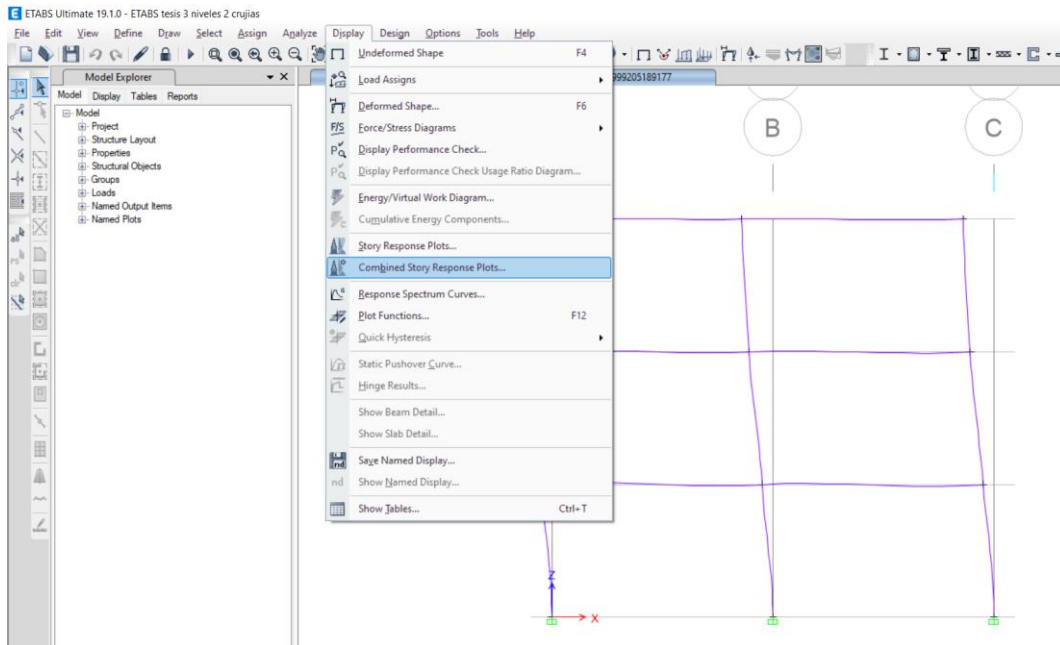


Figura 7.18 Muestra de los cortantes máximos generados por el ADTH en ETABS

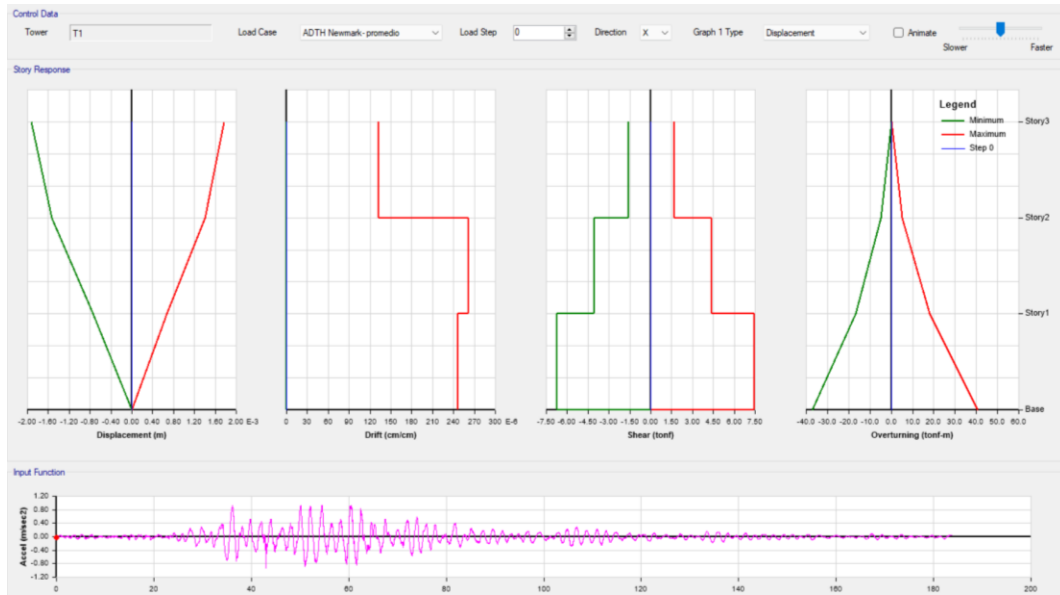


Figura 7.19 Muestra de las respuestas máximas generadas por el ADTH en ETABS

Se centra la atención en la tercera respuesta correspondiente a los cortantes y se procede a calcular las fuerzas laterales máximas de la siguiente manera:

$$F1 = \text{Cortante 3} - \text{Cortante 2} \quad (7.1)$$

$$F2 = \text{Cortante 2} - \text{Cortante 1} \quad (7.2)$$

$$F3 = \text{Cortante 3} \quad (7.3)$$

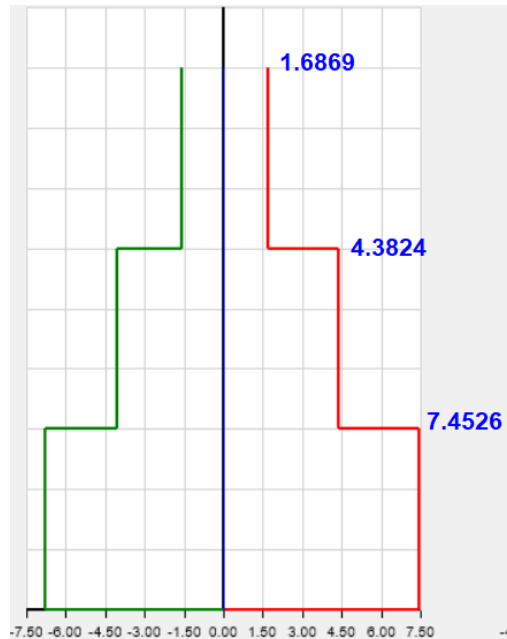


Figura 7.20 Cortantes máximos generados por el ADTH en ETABS

Aplicando las ecuaciones 7.1 - 7.3 las fuerzas laterales máximas quedan de la siguiente manera:

$$F1 = 3.0702 \text{ tonf} \quad (7.4)$$

$$F2 = 2.6955 \text{ tonf} \quad (7.5)$$

$$F3 = 1.6889 \text{ tonf} \quad (7.6)$$

7.2 GENERACIÓN DEL ADME EN ETABS

Para generar el ADME en ETABS se trabajará sobre el mismo modelo utilizado en el ADTH, se introducirá una función correspondiente a un espectro de respuesta, lo anterior se hará de la siguiente manera:

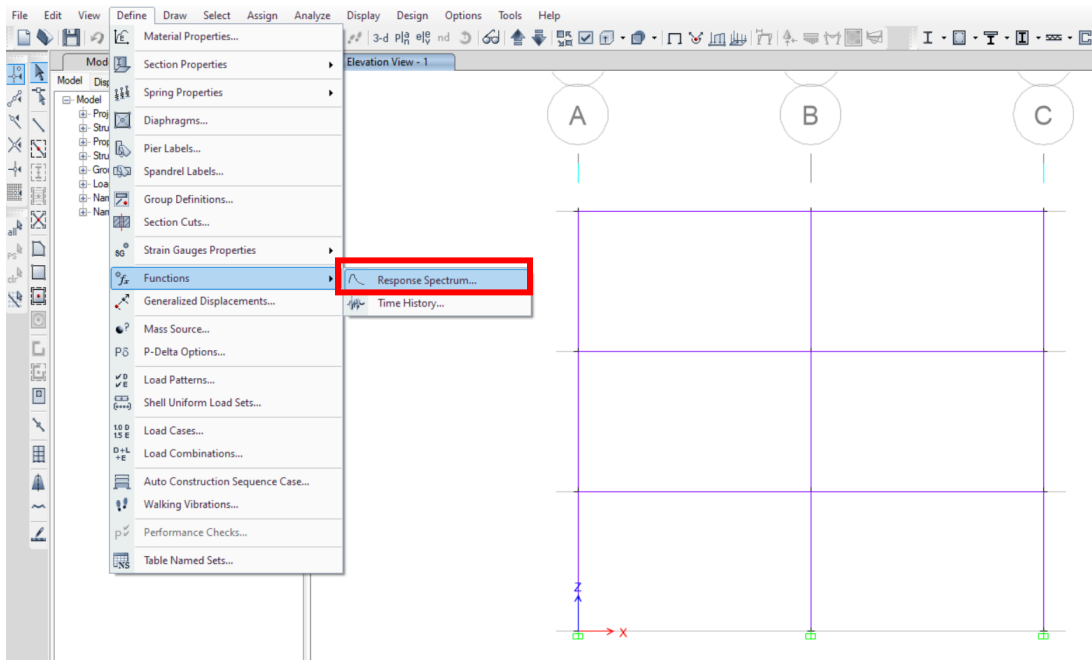


Figura 7.21 Introducción de una función correspondiente a un espectro de respuesta para la generación del ADME en ETABS

Se introduce el espectro de respuesta del coeficiente sísmico elaborado con las hojas de cálculo correspondientes a Newmark en su variante aceleración promedio desde un archivo

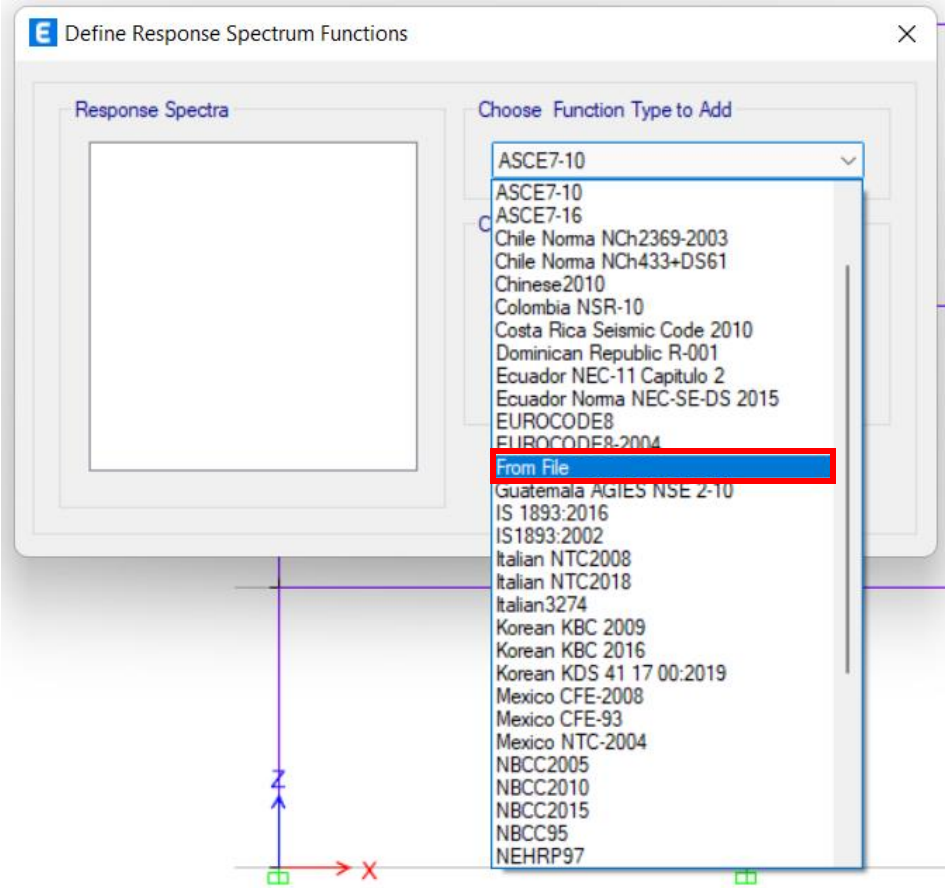


Figura 7.22 Introducción del espectro de respuesta desde un archivo para la generación del ADME en ETABS

Una vez cargado el archivo se convierte a “definido por el usuario”

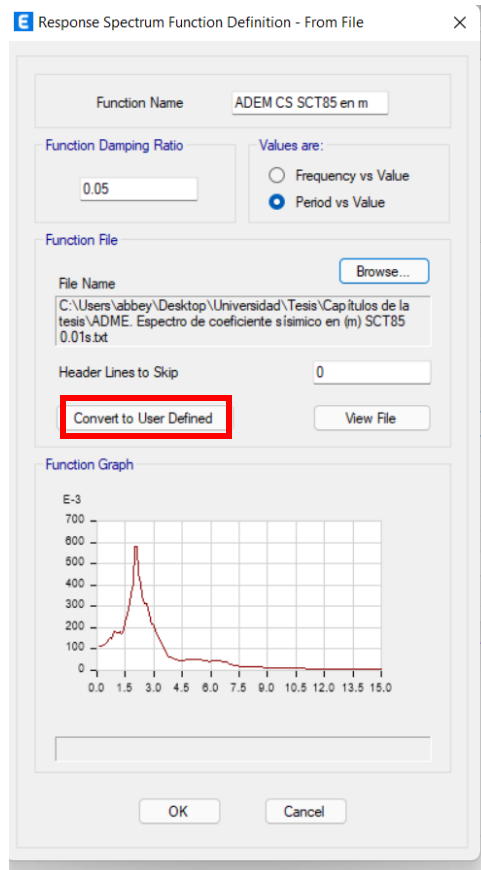


Figura 7.23 Conversión a “definido por el usuario!” para la generación del ADME en ETABS

Se repite el paso dado por la figura 7.11

Se procede a nombrar el caso de carga (ADME CS SCT85 en m), seleccionar el tipo de caso (“Response spectrum”) se añade la función previamente definida (Siendo el tipo de carga “Aceleración” perteneciente a la función nombrada “ADME CS SCT85 en m” con un factor de escala igual a 9.81 dado que no ha sido afectado por la gravedad), se selecciona el método de combinación modal (SRSS)

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Acceleration	U1	ADEM CS SCT85 en...	9.81

Figura 7.24 Definición de parámetros para la generación del ADME en ETABS

Se confirma la correcta introducción de datos presionado el botón “ok” y se procede a correr el programa como se muestra en la figura 7.17

7.3 OBTENCIÓN DE LAS FUERZAS LATERALES PROVENIENTES DEL ADME EN ETABS

Para calcular las fuerzas laterales máximas generadas por el ADME en ETABS se procede a pedirle al software las tablas de información correspondientes a los cortantes, lo anterior de la siguiente manera:

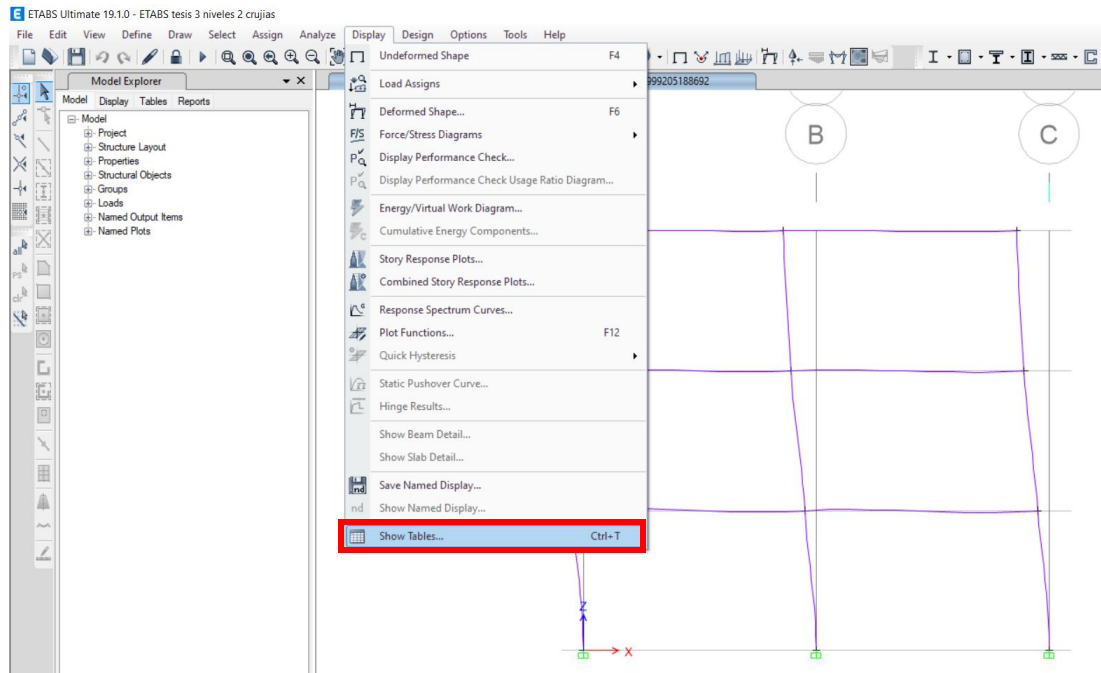


Figura 7.25 Solicitud de las tablas de información generadas por el ADME en ETABS

Se sigue la siguiente secuencia para la solicitud de la información deseada

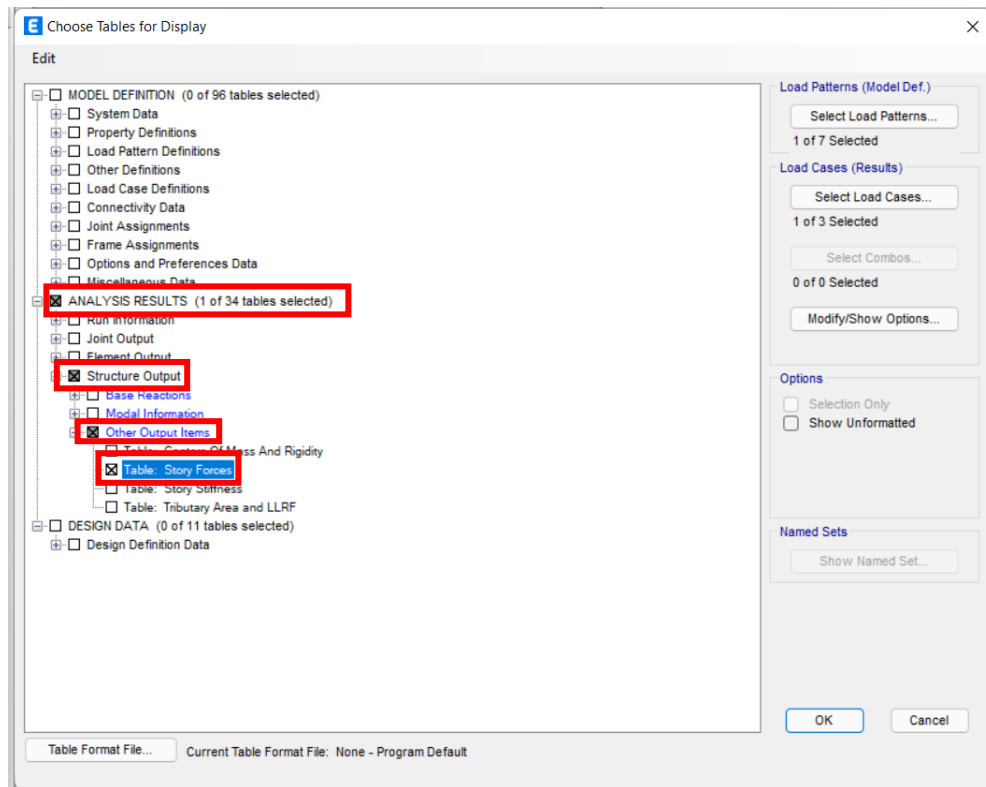


Figura 7.26 Secuencia para la solicitud de las tablas de información generadas por el ADME en ETABS

En la siguiente figura se pueden apreciar los cortantes generados por el ADME en ETABS

Story	Output Case	Case Type	Step Type	Location	P tonf	VX tonf	VY tonf	T tonf-m	MX tonf-m
Story3	ADME CS SC...	LinRespSpec	Max	Top	0	2.4312	0	0	0
Story3	ADME CS SC...	LinRespSpec	Max	Bottom	0	2.4312	0	0	0
Story2	ADME CS SC...	LinRespSpec	Max	Top	0	5.2384	0	0	0
Story2	ADME CS SC...	LinRespSpec	Max	Bottom	0	5.2384	0	0	0
Story1	ADME CS SC...	LinRespSpec	Max	Top	0	7.05	0	0	0
Story1	ADME CS SC...	LinRespSpec	Max	Bottom	0	7.05	0	0	0

Figura 7.27 Cortantes generadas por el ADME en ETABS

Se aplican las ecuaciones 7.1–7.3 para la obtención de las fuerzas laterales máximas quedando de la siguiente manera:

$$F1 = 2.4312 \text{ tonf} \quad (7.7)$$

$$F2 = 2.8072 \text{ tonf} \quad (7.8)$$

$$F3 = 1.8116 \text{ tonf} \quad (7.9)$$

7.4 COMPARACIÓN DE FUERZAS ENTRE ADTH (EXCEL), ADTH (ETABS) Y ADME (ETABS)

A continuación, se mostrarán los resultados obtenidos, correspondientes a las fuerzas laterales máximas del ADTH en Excel, el ADTH en ETABS y el ADME en ETABS, lo anterior se mostrará en una tabla para una mejor visualización de los resultados:

Fuerza generada por nivel (tonf)	Método empleado		
	EXCEL ADTH	ETABS ADTH	ETABS ADME
F1	3.253913729	3.0702	2.4311
F2	2.71122071	2.6955	2.8068
F3	1.687413586	1.6869	1.8116

Tabla 7.1 comparación de fuerzas ADTH (Excel), ADTH (ETABS) y ADME (ETABS)

CONCLUSIONES

Como se puede observar a lo largo del desarrollo de 7 capítulos, el uso de fundamentos teóricos-matemáticos de las diversas materias referentes a la ingeniería civil son de gran importancia para la comprensión de los temas aquí expuestos.

También se puede observar, por los resultados obtenidos, que el Análisis Dinámico Modal Espectral se puede considerar como un pseudoanálisis dinámico debido a que se aplican fuerzas equivalentes que vienen de un espectro, mientras que el Análisis Dinámico Tiempo – Historia arroja resultados más fidedignos y que se asemejan más a los datos arrojados por un programa computacional como lo es ETABS en su versión 19.0.1

Es importante mencionar que el profesional en ingeniería civil debe saber manipular los programas de cómputo, pero más importante aún es el entendimiento de lo que se introduce a dichos softwares, para que el proceso de cálculo sea más eficiente y la salida de datos se asemeje a la realidad.

El entendimiento antes mencionado y el conocimiento del uso de los diferentes programas de cómputo de ingeniería civil, le otorgarán al profesional la oportunidad de ir forjando un criterio cada vez más agudo para una mejor toma de decisiones.

Con el avance de las computadoras, la tecnología y la informática, es indispensable que el ingeniero civil sepa aprovechar todas las herramientas que hoy en día se tiene para la elaboración de modelos matemáticos que se traducen en edificios, tanques de almacenamiento, torres de comunicación, puentes, etc., esto nos ayudará a que los modelos sean más precisos y de esta manera poder ofrecer una mayor seguridad en todos los aspectos.

Habrá que pensar profundamente en la introducción de la enseñanza temprana del Análisis Dinámico Tiempo Historia en las aulas a nivel Licenciatura, así como en el desuso paulatino del Análisis Dinámico Modal Espectral. Esto ofrecerá un mayor nivel de competencia ante otras universidades a nivel nacional e internacional y ofrecerá un perfil de egresados más completo.

BIBLIOGRAFÍA

- Bazán, E., & Meli, R. (1990). Diseño Sísmico de Edificios. México: Limusa.
- Chapra, S. C. (2015). Métodos Numérico para Ingenieros (Séptima ed.). México D.F.: Mc Graw Hill Education.
- Chopra , A. K. (2014). Dinámica de Estructuras (Cuarta ed.). México: Pearson.
- De la Colina Martínez, J., Valdés González, J., & González Pérez , C. A. (2016). Dinámica de Estructuras. México: Limusa.
- Molina Elvira, M. (2019). Apuntes de Mecánica de Materiales I. Estado de México, México: Apuntes Tomados en Clase.
- Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural. (2018). Ponencia: Espectros Para Diseño Sísmico. México: Curso: "Taller de las NTC Diseño por Sismo (2017)" (4-5 de septiembre 2018).
- Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, A. C. (2019). Edificaciones de Mampostería. (B. Gómez González, R. Jean Perrilliat, J. Á. Pérez Gómez , & E. L. Treviño Treviño, Edits.) México: Limusa.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Liu, J. (2010). Fórmulas y Tablas de Matemática aplicada (Tercera ed.). México: Mc Graw Hill.
- Pedraza Álvarez M. A. (2021) Apuntes de dinámica estructural. Estado de México, México: Apuntes tomados en clase.
- González Cuevas, Ó. M. (2017). Análisis Estructural. México: Limusa.
- González Villanueva , N. (2007). Análisis Estructural. Apuntes y Problemas. CIV 204. Potosí, Bolivia : Universidad Autónoma Tomás Frías.
- Grossman , S. I. (1996). Álgebra Lineal . México : Mc Graw Hill.
- Hibbeler, R. C. (2012). Análisis Estructural. Ciudad de México: Pearson.
- Huang, T. C. (1976). Mecánica para Ingenieros Tomo II: Dinámica. México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.

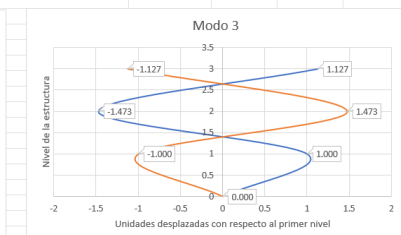
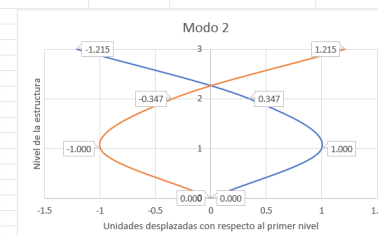
Análisis modal

k-mw ²									
MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL			MATRIZ DE MASA			CAMBIO DE VARIABLE DE LA FRECUENCIA CUADRADA			= 0
31683.3818	-17778.68685	3509.733584	3.3	0	0	T			
-17778.68685	25441.18368	-11946.41091	0	2.49	0				
3509.733584	-11946.41091	9005.895774	0	0	1.48				
31683.3818	-	3.3	T	-17778.68685			3509.733584		
	-17778.68685			25441.18368	-	2.49		-11946.41091	
		3509.733584			-11946.41091			9005.895774	1.48
									T
-12.161160 T ³ + 143038.3288840 T ² - 424087856.882810 T + 211235258106.463000 T = 0									
EIGENVALORES									
T1 =	728.2449767								
T2 =	6439.0843870								
T3 =	18736.10298000								

FRECUENCIA DE LA ESTRUCTURA (DEVOLVIENDO EL CAMBIO DE VARIABLE)	
W1 =	26.98601446 rad/s
W2 =	80.24390561 rad/s
W3 =	136.87988523 rad/s
PERIODOS DE LA ESTRUCTURA	
Periodo 1 =	0.232831169 s
Periodo 2 =	0.078301090 s
Periodo 3 =	0.045902912 s

EIGENVECTORES Y MATRIZ MODAL					
Matriz del modo 1			Eigenvectores		
29280.17338	-17778.68685	3509.733584	Φ_{11} =	1	-1
-17778.68685	23627.85369	-11946.41091	Φ_{21} =	2.219879414	-2.219879414
3509.733584	-11946.41091	7928.093209	Φ_{31} =	2.902319318	-2.902319318
Matriz del modo 2			Eigenvectores		
10434.40333	-17778.68685	3509.733584	Φ_{12} =	1	-1
-17778.68685	9407.863558	-11946.41091	Φ_{22} =	0.347072426	-0.347072426
3509.733584	-11946.41091	-523.9491183	Φ_{32} =	-1.214881769	1.214881769
Matriz del modo 3			Eigenvectores		
-30145.75803	-17778.68685	3509.733584	Φ_{13} =	1	-1
-17778.68685	-21211.71274	-11946.41091	Φ_{23} =	-1.47306373	1.47306373
3509.733584	-11946.41091	-18723.53664	Φ_{33} =	1.127327524	-1.127327524

MATRIZ MODAL				
Φ	=	1	1	1
		2.2198794	0.3470724	-1.4730637
		2.9023193	-1.2148818	1.1273275



Matrices diagonalizadas

Matriz de masa diagonalizada																																	
M	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>1</td><td>2.219879414</td><td>2.902319318</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.347072426</td><td>-1.214881769</td></tr> <tr><td>1</td><td>-1.47306373</td><td>1.127327524</td></tr> </table>	1	2.219879414	2.902319318	1	0.347072426	-1.214881769	1	-1.47306373	1.127327524	*	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>3.3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>2.49</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1.48</td></tr> </table>	3.3	0	0	0	2.49	0	0	0	1.48	*	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2.219879414</td><td>0.347072426</td><td>-1.47306373</td></tr> <tr><td>2.902319318</td><td>-1.214881769</td><td>1.127327524</td></tr> </table>	1	1	1	2.219879414	0.347072426	-1.47306373	2.902319318	-1.214881769	1.127327524
1	2.219879414	2.902319318																															
1	0.347072426	-1.214881769																															
1	-1.47306373	1.127327524																															
3.3	0	0																															
0	2.49	0																															
0	0	1.48																															
1	1	1																															
2.219879414	0.347072426	-1.47306373																															
2.902319318	-1.214881769	1.127327524																															
M	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>28.04</td><td>0.00</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>0.00</td><td>5.78</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>0.00</td><td>0.00</td><td>10.58</td></tr> </table>	28.04	0.00	0.00	0.00	5.78	0.00	0.00	0.00	10.58																						
28.04	0.00	0.00																															
0.00	5.78	0.00																															
0.00	0.00	10.58																															

Matriz de rigidez diagonalizada																																	
K	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>1</td><td>2.219879414</td><td>2.902319318</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.347072426</td><td>-1.214881769</td></tr> <tr><td>1</td><td>-1.47306373</td><td>1.127327524</td></tr> </table>	1	2.219879414	2.902319318	1	0.347072426	-1.214881769	1	-1.47306373	1.127327524	*	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>31683.3818</td><td>-17778.68685</td><td>3509.733584</td></tr> <tr><td>-17778.68685</td><td>25441.18368</td><td>-11946.41091</td></tr> <tr><td>3509.733584</td><td>-11946.41091</td><td>9005.895774</td></tr> </table>	31683.3818	-17778.68685	3509.733584	-17778.68685	25441.18368	-11946.41091	3509.733584	-11946.41091	9005.895774	*	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2.219879414</td><td>0.347072426</td><td>-1.47306373</td></tr> <tr><td>2.902319318</td><td>-1.214881769</td><td>1.127327524</td></tr> </table>	1	1	1	2.219879414	0.347072426	-1.47306373	2.902319318	-1.214881769	1.127327524
1	2.219879414	2.902319318																															
1	0.347072426	-1.214881769																															
1	-1.47306373	1.127327524																															
31683.3818	-17778.68685	3509.733584																															
-17778.68685	25441.18368	-11946.41091																															
3509.733584	-11946.41091	9005.895774																															
1	1	1																															
2.219879414	0.347072426	-1.47306373																															
2.902319318	-1.214881769	1.127327524																															
K	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>20417.88</td><td>0.00</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>0.00</td><td>37245.80</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>0.00</td><td>0.00</td><td>198302.47</td></tr> </table>	20417.88	0.00	0.00	0.00	37245.80	0.00	0.00	0.00	198302.47																						
20417.88	0.00	0.00																															
0.00	37245.80	0.00																															
0.00	0.00	198302.47																															

Matriz de amortiguamiento diagonalizada de Rayleigh																																
		W1 = 26.98601446 W2 = 80.24390561 W3 = 136.8798852 ζ = 0.05																														
		0.037056 a0 + 26.9860 a1 = 0.1 0.007306 a0 + 136.8799 a1 = 0.1 a0 = 2.25418624 a1 = 0.000610255																														
C	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>2.25418624</td><td></td><td></td></tr> </table>	2.25418624			*	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>28.03709988</td><td>3.5591E-10</td><td>-2.59604E-10</td></tr> <tr><td>3.55914E-10</td><td>5.7843314</td><td>9.4933E-11</td></tr> <tr><td>-2.59604E-10</td><td>9.4933E-11</td><td>10.58397638</td></tr> </table>	28.03709988	3.5591E-10	-2.59604E-10	3.55914E-10	5.7843314	9.4933E-11	-2.59604E-10	9.4933E-11	10.58397638	+	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>0.00061026</td><td></td><td></td></tr> </table>	0.00061026			*	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>20417.87716</td><td>-4.71887E-06</td><td>4.43026E-06</td></tr> <tr><td>-4.71889E-06</td><td>37245.79798</td><td>-2.11181E-06</td></tr> <tr><td>4.43024E-06</td><td>-2.11181E-06</td><td>198302.4714</td></tr> </table>	20417.87716	-4.71887E-06	4.43026E-06	-4.71889E-06	37245.79798	-2.11181E-06	4.43024E-06	-2.11181E-06	198302.4714
2.25418624																																
28.03709988	3.5591E-10	-2.59604E-10																														
3.55914E-10	5.7843314	9.4933E-11																														
-2.59604E-10	9.4933E-11	10.58397638																														
0.00061026																																
20417.87716	-4.71887E-06	4.43026E-06																														
-4.71889E-06	37245.79798	-2.11181E-06																														
4.43024E-06	-2.11181E-06	198302.4714																														
C	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>63.20084475</td><td>8.02295E-10</td><td>-5.85196E-10</td></tr> <tr><td>8.02295E-10</td><td>13.03896024</td><td>2.13997E-10</td></tr> <tr><td>-5.85196E-10</td><td>2.13997E-10</td><td>23.85825392</td></tr> </table>	63.20084475	8.02295E-10	-5.85196E-10	8.02295E-10	13.03896024	2.13997E-10	-5.85196E-10	2.13997E-10	23.85825392	+	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>12.46011354</td><td>-2.87972E-09</td><td>2.70359E-09</td></tr> <tr><td>-2.87973E-09</td><td>22.72943794</td><td>-1.28874E-09</td></tr> <tr><td>2.70358E-09</td><td>-1.28874E-09</td><td>121.0150933</td></tr> </table>	12.46011354	-2.87972E-09	2.70359E-09	-2.87973E-09	22.72943794	-1.28874E-09	2.70358E-09	-1.28874E-09	121.0150933										
63.20084475	8.02295E-10	-5.85196E-10																														
8.02295E-10	13.03896024	2.13997E-10																														
-5.85196E-10	2.13997E-10	23.85825392																														
12.46011354	-2.87972E-09	2.70359E-09																														
-2.87973E-09	22.72943794	-1.28874E-09																														
2.70358E-09	-1.28874E-09	121.0150933																														
C	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>75.66</td><td>0.00</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>0.00</td><td>35.77</td><td>0.00</td></tr> <tr><td>0.00</td><td>0.00</td><td>144.87</td></tr> </table>	75.66	0.00	0.00	0.00	35.77	0.00	0.00	0.00	144.87																					
75.66	0.00	0.00																														
0.00	35.77	0.00																														
0.00	0.00	144.87																														

Valores de gama de factor de participación de masas

MATRIZ DE MASA											
m	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>3.3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>2.49</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1.48</td></tr> </table>	3.3	0	0	0	2.49	0	0	0	1.48
3.3	0	0									
0	2.49	0									
0	0	1.48									

VALORES DE GAMA	
VALORES DE GAMA	
r1 =	0.46805598
r2 =	0.40906808
r3 =	0.12287594

FACTOR DE PARTICIPACIÓN DE MASAS			
VALORES DE BETA		APORTACIÓN DE MASA POR NIVEL	
β1	6.142266988	Nivel 1	0.8449
β2	0.96793088	Nivel 2	0.1331
β3	0.159802132	Nivel 3	0.0220

MATRIZ MODAL											
Φ	=	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2.21987941</td><td>0.34707243</td><td>-1.47306373</td></tr> <tr><td>2.90231932</td><td>-1.21488177</td><td>1.12732752</td></tr> </table>	1	1	1	2.21987941	0.34707243	-1.47306373	2.90231932	-1.21488177	1.12732752
1	1	1									
2.21987941	0.34707243	-1.47306373									
2.90231932	-1.21488177	1.12732752									

Factor de participación modal de masas=	1
---	---

VECTOR DE UNOS	
1	=
1	1
1	1

Frecuencias y periodos modales

MATRIZ DE MASA DIAGONALIZADA

M =

28.04	0.00	0.00
0.00	5.78	0.00
0.00	0.00	10.58

FRECUENCIAS MODALES

w1D = 26.986014 rad/s
w2D = 80.243906 rad/s
w3D = 136.879885 rad/s

MATRIZ DE RIGIDEZ DIAGONALIZADA

K =

20417.88	0.00	0.00
0.00	37245.80	0.00
0.00	0.00	198302.47

PERIODOS MODALES

T1D = 0.233122755 s
T2D = 0.078399151 s
T3D = 0.045960398 s

PORCENTAJE DE AMORTIGUAMIENTO

ξ = 0.05

ADTH

FRECUENCIAS MODALES		VECTORES DE FIENZAS			MATRIZ MODAL			MATRIZ DE RIGIDEZ LATERAL			VALORES MÁXIMOS DE LOS COEFICIENTES DE ENTREGA EN "TOM"				
w1D	w2D	w3D	ξ1	ξ2	ξ3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
26.986014 rad/s	80.243906 rad/s	136.879885 rad/s	0.05	0.05	0.05	2.0007944	1.0470240	1.1722725	3861.9880	-1778.6885	3569.7358	0.0071881	-0.0021674	-0.0012538	
136.879885 rad/s						2.8203038	-1.2468763	1.0220254	-1778.6885	2441.8268	-1046.4391	0.0076272	0.0045078	0.0065078	
									3569.7358	-1046.4391	3026.9527	-0.0021674	0.0045078	0.0065078	
0	-0.2288	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.01	-0.2288	1.595E-06	1.892E-06	5.777E-07	0.00000000	0.00772741	0.01705020	4.632E-07	4.880E-07	1.802E-07	1.4098E-06	1.4300E-06	0.0071881	-0.0021674	-0.0012538
0.02	-0.2288	5.448E-06	4.077E-06	2.252E-06	0.00000000	0.00324546	0.00739292	1.550E-06	1.667E-06	1.308E-07	4.527E-06	5.720E-06	0.0074752	-0.0017068	-0.0012538
0.03	-0.2288	1.800E-05	8.578E-06	2.778E-06	0.00059546	0.04425508	0.03977024	5.524E-06	2.854E-06	3.4092E-07	8.220E-06	1.295E-05	0.0092078	0.0485447	0.0092078
0.04	-0.2288	3.995E-05	1.825E-05	1.459E-06	0.00196306	0.03735496	0.03088777	5.209E-06	1.480E-06	1.842E-07	1.284E-05	2.946E-05	0.0043248	0.0484795	0.0043248
0.05	-0.1983	2.304E-05	7.980E-07	2.332E-07	0.0212054	0.04144367	0.04332828	1.959E-05	2.034E-06	2.874E-08	1.637E-05	3.103E-05	0.0044473	0.0082236	0.0044473
0.06	-0.1983	3.795E-05	4.329E-06	2.018E-07	0.02744375	0.02778063	0.03003943	1.778E-05	1.784E-06	2.557E-08	1.999E-05	4.003E-05	0.0076246	0.0076246	0.0076246
0.07	-0.1983	4.503E-05	7.844E-07	1.898E-06	0.03378067	0.00482036	0.0222855	1.452E-05	1.945E-07	1.459E-07	2.983E-05	4.705E-05	0.0022005	0.0076246	0.0022005
0.08	-0.097	5.98E-05	1.554E-06	1.724E-06	0.03786807	-0.0098944	0.02235959	4.420E-05	-3.355E-07	2.124E-07	2.387E-05	5.348E-05	0.0058646	0.0076246	0.0058646
0.09	-0.097	5.525E-05	-1.873E-06	5.052E-07	0.04031991	-0.02063885	0.00749561	2.550E-05	-7.864E-07	1.075E-07	2.024E-05	5.704E-05	0.0028913	0.0043248	0.0028913
0.1	-0.001	5.958E-05	1.622E-07	-1.742E-07	0.04041405	-0.0020204	-0.00889576	2.584E-05	-2.302E-07	-5.827E-08	2.699E-05	5.787E-05	0.024862	0.0072862	0.024862
0.11	-0.001	5.200E-05	1.892E-06	3.950E-07	0.037179	0.0075701	-0.00643576	4.344E-05	4.784E-07	-1.222E-07	2.468E-05	5.427E-05	0.0067052	0.0043248	0.0067052
0.12	-0.007	4.596E-05	2.263E-06	3.564E-06	0.0289782	0.0025739	-0.0078302	2.107E-05	6.690E-07	-1.975E-08	2.209E-05	4.729E-05	0.0076274	0.0043248	0.0076274
0.13	-0.001	3.579E-05	2.623E-06	1.953E-06	0.0202708	0.0029394	0.0071695	1.676E-05	1.078E-06	1.424E-07	1.787E-05	3.729E-05	0.0075044	0.0024057	0.0044484
0.14	-0.001	2.440E-05	1.873E-06	1.054E-06	0.0077836	0.0077836	0.00793521	1.042E-05	6.446E-07	1.254E-07	1.224E-05	2.539E-05	0.0050421	0.0049748	0.0048446
0.15	-0.001	1.854E-05	1.059E-07	-3.179E-07	0.00404622	-0.00095648	-0.00095648	6.424E-06	-4.295E-08	-2.365E-08	5.242E-06	1.209E-05	0.0070354	0.0024057	0.0044484
0.16	-0.001	-1.819E-05	-1.704E-06	-1.074E-06	-0.0021981	-0.00349423	-0.00206643	-7.992E-07	-8.959E-07	-1.442E-07	-1.639E-06	-1.878E-06	-0.0026684	0.0026684	0.0009571
0.17	-0.007	-1.424E-05	-2.072E-06	-3.629E-07	-0.0013709	-0.0013709	-0.0013709	-4.678E-06	-4.473E-07	-4.495E-08	-7.369E-06	-1.978E-06	-0.0026684	-0.0026684	-0.001478
0.18	-0.007	-2.478E-05	-7.082E-07	1.523E-06	-0.0008474	-0.0045738	0.0042389	1.806E-05	-2.970E-07	4.477E-07	-1.174E-05	-2.809E-06	-0.004201	-0.004201	-0.0024273
0.19	-0.1983	-3.219E-05	1.959E-06	2.096E-06	-0.02340276	0.02772754	-0.0042708	-1.004E-05	0.00709E-07	0.00709E-07	-1.199E-05	-3.147E-05	-0.0073945	-0.0073945	-0.0049008
0.2	-0.1983	3.820E-05	4.802E-06	1.320E-06	0.00206883	0.02478121	1.656E-05	1.864E-06	1.620E-07	-1.442E-06	-1.387E-05	-3.026E-05	0.0016619	-0.0048748	-0.0048748
0.21	-0.2288	-3.390E-05	6.650E-06	4.983E-07	-0.02474075	0.0430981	0.00203953	-1.589E-05	2.737E-06	6.039E-08	-1.392E-05	-2.448E-05	-0.0027226	-0.0028295	-0.0028295
0.22	-0.2288	-2.780E-05	7.079E-06	5.906E-07	-0.0010206	0.00495283	0.0010206	-1.202E-05	3.846E-06	1.699E-07	-9.502E-06	-1.098E-05	0.0047948	-0.0047948	-0.0076309
0.23	-0.2288	-1.888E-05	6.047E-06	2.025E-06	-0.00121262	0.00384833	0.00121262	-7.818E-06	2.478E-06	2.484E-07	-5.088E-06	-2.539E-05	0.0483933	-0.047387	-0.040332
0.24	-0.2288	-2.095E-05	4.25E-06	2.441E-06	-0.0005226	0.00237478	0.0047308	-3.703E-07	1.739E-06	3.007E-07	1.037E-06	-1.212E-06	0.0057844	-0.0057844	-0.0035051
0.25	-0.1983	1.483E-05	2.505E-06	1.834E-06	0.0008241	0.0010799	0.0037059	6.942E-06	1.023E-06	1.878E-07	8.84E-06	1.647E-05	0.0056401	0.0024125	0.0068503
0.26	-0.1983	3.227E-05	1.336E-06	2.539E-07	0.0020798	0.0040581	0.0040581	1.952E-05	6.467E-07	3.188E-08	1.972E-05	3.177E-05	0.0489249	0.0489249	0.0424725
0.27	-0.1983	4.804E-05	1.864E-06	-3.403E-06	0.0071848	0.0071848	-0.0066735	2.295E-05	6.857E-07	4.808E-08	2.348E-05	5.103E-05	0.0482202	0.0028986	0.0028986
0.28	-0.1983	6.369E-05	1.997E-06	1.009E-06	0.0463888	0.00292839	0.0077286	2.896E-05	8.000E-07	1.238E-07	3.077E-05	6.629E-05	0.0062622	0.0060077	0.0078473
0.29	-0.1983	7.920E-05	4.920E-06	1.803E-06	0.0487828	0.0029595	0.0075646	3.027E-05	1.040E-06	2.828E-07	2.685E-05	7.884E-05	0.0000002	0.0024057	0.0024057
0.3	-0.1983	8.327E-05	4.985E-06	1.720E-06	0.04804226	0.00281023	0.0022398	3.897E-05	1.799E-06	2.108E-07	4.097E-05	8.882E-05	0.0001093	0.0024048	0.0024048
0.31	-0.1983	5.680E-05	4.850E-06	4.320E-07	0.04019225	0.0020449	0.0020449	4.070E-05	1.902E-06	1.902E-06	4.268E-05	0.0009947	0.0024048	0.0024048	0.0024048
0.32	-0.2288	8.858E-05	4.237E-06	2.570E-07	0.04309487	0.00273043	0.0045774	4.052E-05	1.723E-06	3.973E-08	4.229E-05	9.052E-05	0.0009555	0.0024048	0.0024048
0.33	-0.2288	3.309E-05	3.712E-06	1.243E-06	0.00191221	0.00431081	0.0020544	3.868E-05	1.947E-06	1.842E-07	4.039E-05	8.607E-05	0.0009558	0.0024125	0.0024125
0.34	-0.2288	1.850E-05	2.746E-06	2.521E-06	0.00240783	0.00474996	0.00474996	5.947E-05	1.572E-06	1.572E-06	5.900E-05	0.0009447	0.0024048	0.0024048	0.0024048
0.35	-0.2288	6.857E-05	4.090E-06	2.491E-06	0.04488884	0.00263042	0.0450328	3.182E-05	1.673E-06	2.372E-07	3.332E-05	6.932E-05	0.0024048	0.0024048	0.0024048
0.36	-0.2288	5.570E-05	4.823E-06	1.243E-06	0.04698444	0.00263295	0.0022771	4.070E-05	1.808E-06	1.520E-07	2.898E-05	5.700E-05	0.0024048	0.0024048	0.0024048
0.37	-0.2288	4.391E-05	5.059E-06	1.540E-07	0.00202703	0.00096881	0.00096881	2.268E-05	6.542E-07	2.279E-05	4.678E-05	5.730E-05	0.0024048	0.0024048	0.0024048
0.38	-0.2288	3.226E-05	5.948E-06	1.186E-06	0.00244024	0.00339084	0.00339084	1.909E-05	2.866E-07	1.962E-07	1.962E-07	2.484E-05	0.0024048	0.0024048	0.0024048
0.39	-0.2288	2.136E-05	4.877E-06	2.822E-06	0.00595405	0.0046981	0.0405148	3.997E-06	1.995E-06	2.586E-07	1.229E-05	2.495E-05	0.0028948	0.0028948	0.0047841