



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

## CONTROL DE ORIENTACIÓN PARA SATÉLITES CON COMPENSACIÓN DE VIBRACIÓN

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO  
DE: MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JAIR SERVÍN AGUILAR

TUTOR  
DR. YU TANG XU  
POSGRADO DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., ABRIL DE 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Secretario: Dr. Marcos Ángel González Olvera

Primer Vocal: Dr. Yu Tang Xu

Segundo vocal: Dr. Marcelo López Parra

Tercer vocal: Dr. Rafael Guadalupe Chávez Moreno

Lugar donde se realizó la tesis:  
Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

TUTOR DE TESIS

---

Dr. Yu Tang Xu



# Agradecimientos

Gracias a mi tutor, el Dr. Tang, quien siempre me apoyo para dar forma a la realización de este proyecto. Muchas gracias por las dudas que me ayudo a despejar y por las asesorías.

Gracias a mis profesoras y profesores, cuyo espíritu llena está presente en mi trabajo, pues las herramientas teóricas y prácticas que me compartieron han sido fundamentales para la construcción de éste y para mi desarrollo personal.

A mis compañeros, con quienes compartí las aulas y salas de conferencia virtuales, que siempre me inspiraron y a quienes admiro, gracias.

También quiero agradecer a Chely, mi madre, y Héctor, mi padre, así como a mis hermanos, Iván y Jonatan, quienes me apoyaron con amor, como en las diferentes etapas de mi vida. Los amo. Gracias por darme tanto sin merecerlo.

Agradezco a mis amigas y amigos que me han acompañado durante los difíciles meses que enfrentamos a causa de la pandemia por COVID-19. A Jaime, por las partidas *fifa*, las pláticas, la música, los libros, las bromas y los tacos. A mis vecinos, Pablo y Magali, por las pláticas, los cafecitos y los cafezotes. Gracias a Alexa, Francisco y Abraham, cuyo acompañamiento me dio mucha motivación y ha sido muy enriquecedor, y con quienes he tenido las mejores video charlas de mi vida. Y en especial, gracias a Daniela, de quien he obtenido apoyo incondicional que roza en el abuso; gracias por tanto, te amo.

Además, la realización de este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo de CONACyT por la beca de maestría, el apoyo del Proyecto SEP-CONACyT 253677, y el apoyo de PAPIIT-UNAM a través del Proyecto IN112421, desarrollado en el Laboratorio Nacional de Ingeniería Automotriz y Aeroespacial (LN-INGEA).



# Resumen

En esta tesis se aborda el problema de seguimiento de orientación de un satélite conducido por un giroscopio de control de movimiento de doble cardán con velocidad variable (DGVSCMG por las siglas double-gimbal variable-speed control moment gyroscope), sometido a perturbaciones de magnitud acotada. El DGVSCMG es dirigido mediante un conjunto de tres motores síncronos de imanes permanentes (PMSM por las siglas permanent magnet synchronous motors). A nivel de control de par, se consigue estabilidad práctica asintótica uniforme del satélite-DGVSCMG. Las velocidades deseadas de los cardanes así como la aceleración de la rueda de reacción, necesarias para que el DGVSCMG genere el par requerido, serán calculadas mediante una ley de dirección, y después serán usadas como trayectorias de referencia para el problema de control a nivel de cada motor, que consiste en el diseño de una ley de control de velocidad con un esquema adaptable capaz de compensar las vibraciones causadas por imperfecciones mecánicas en el DGVSCMG. El seguimiento de velocidad asintótico en cada PMSM es establecido. El sistema satélite-DGVSCMG en cascada con el conjunto de motores que lo dirige es prácticamente asintóticamente estable. Los resultados son validados mediante simulación.

**Palabras clave:** Control de orientación de satélites, control adaptable, compensación de vibraciones.

## Abstract

This thesis considers the attitude tracking of a spacecraft under unknown bounded torque disturbances, which is steered by a double-gimbal variable-speed control moment gyroscope (DGVSCMG) driven by a cluster of three permanent magnet synchronous motors (PMSM). Uniform practical asymptotic stability is achieved at the torque control level. The desired speed of gimbals and the accelera-

tion of the rotation wheel to produce the required torque are then calculated by a steering law, and tracked at the motor control level by designing a speed-tracking controller with an adaptive compensation to the vibration caused by eccentricity due to mechanical imperfection in the DGVSCMG. Asymptotic speed tracking is also ensured, giving a practically asymptotically stable overall system, composed by the satellite-DGVSCM in cascade with the cluster of three PMSMs. The performance of the closed-loop system is shown by numerical simulations.

**Keywords:** Attitude control of spacecrafts, adaptive control, vibration compensation.



# Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación. . . . .	1
1.2. Motivación. . . . .	4
1.3. Objetivos y contribuciones. . . . .	5
1.4. Estructura del trabajo. . . . .	6
<b>2. Antecedentes</b>	<b>9</b>
2.1. Cinemática y dinámica rotacional. . . . .	9
2.2. Giroscopio de control de momento angular. . . . .	17
2.3. Motor síncrono de imanes permanentes. . . . .	32
2.4. Perturbaciones y vibraciones. . . . .	35
<b>3. Control de orientación de un satélite</b>	<b>41</b>
3.1. Control de seguimiento. . . . .	42
3.2. Control de seguimiento robusto. . . . .	45
3.3. Simulaciones. . . . .	47
<b>4. Control de velocidad de un PMSM</b>	<b>51</b>
4.1. Modelo interno. . . . .	52
4.2. Control de velocidad en condiciones ideales. . . . .	53
4.3. Control de seguimiento con rechazo de vibración. . . . .	54
4.4. Control PI de seguimiento de corriente. . . . .	59
4.5. Simulaciones . . . . .	60

<b>5. Control de orientación de un satélite-DGVSCMG</b>	<b>65</b>
5.1. Ley de dirección . . . . .	66
5.2. Control de seguimiento con rechazo de vibración . . . . .	67
5.3. Simulaciones . . . . .	71
<b>6. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>A. Cinemática y dinámica rotacionales.</b>	<b>83</b>
A.1. Teorema de rotación de Euler . . . . .	83
A.2. Operador producto cruz . . . . .	83
A.3. Teorema de transporte . . . . .	85
A.4. Ecuación diferencial cinemática . . . . .	85
A.5. Errores de orientación y velocidad angular . . . . .	87
A.6. Rotaciones sucesivas de vectores de parámetros Rodrigues modificados . . . . .	88
<b>B. Estabilidad de sistemas con perturbaciones.</b>	<b>89</b>
B.1. Funciones de comparación. . . . .	89
B.2. Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanecientes. . . . .	89

# Índice de figuras

2.1. Marcos de referencia $\mathcal{N}$ y $\mathcal{B}$ . . . . .	10
2.2. Ilustración de un DGVSCMG y el sistema coordinado del cardán. . . . .	18
2.3. Simulación del movimiento de un satélite conducido por un DGVSCMG con modelo completo. . . . .	29
2.4. Simulación del movimiento de un satélite conducido por un DGVSCMG con modelo simplificado. . . . .	30
2.5. Simulación del movimiento de un satélite conducido por un DGVSCMG con modelo simplificado: gráficos comparativos del desempeño del modelo completo y del modelo simplificado. . . . .	31
2.6. Diagrama comparativo de los distintos pares que afectan un satélite <i>vs.</i> la altitud, tomado de [9]. . . . .	37
3.1. Control de orientación de un satélite: ley PD+ (rojo) y ley PD+ modificada (negro). . . . .	48
3.2. Control de orientación de un satélite sometido a perturbaciones externas, sin compensación (rojo) y con compensación de éstas (negro). . . . .	49
4.1. Control de velocidad de un PMSM con rechazo de vibraciones: desempeño del subsistema mecánico. . . . .	61
4.2. Control de velocidad de un PMSM con rechazo de vibraciones: desempeño del subsistema eléctrico. . . . .	62
4.3. Control de velocidad de un PMSM con y sin rechazo de perturbaciones endógenas. . . . .	62
5.1. Orientación y velocidad angular de un satélite-DGVSCMG en presencia de perturbaciones externas y vibraciones endógenas, sin compensación de vibraciones (líneas solidas —) y con compensación de éstas (líneas discontinuas ---). . . . .	72

5.2. Errores de seguimiento y par aplicado de un satélite-DGVSCMG en presencia de perturbaciones externas y vibraciones endógenas, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas. . . .	74
5.3. Desempeño del DGVSCMG con vibraciones en la rueda, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas. . . . .	75
5.4. Desempeño de las variables eléctricas del PMSM que dirige la rueda giratoria, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas. . . . .	76
5.5. Valor RMS de velocidad en el DGVSCMG y valor RMS de la entrada de control al PMSM que dirige la rueda, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas. . . . .	76
5.6. Seguimiento de orientación de un satélite-DGVSCMG en presencia de perturbaciones, con rechazo de vibraciones: sin compensación de perturbaciones externas (izquierda) y con compensación de éstas (derecha); variables asociadas a la rueda giratoria. . . . .	77

# Índice de tablas

2.1. Parámetros para simulación de verificación de ecuaciones de movimiento de un satélite-DGVSCMG . . . . .	28
3.1. Parámetros de controlador PD+ modificado y condiciones iniciales.	47
4.1. Condiciones iniciales y parámetros de un PMSM con control de velocidad con rechazo de vibraciones. . . . .	60
5.1. CONDICIONES INICIALES Y PARÁMETROS DE UN SATÉLITE-DGVSCMG CONDUcido POR TRES PMSMs CON CONTROL DE SEGUIMIENTO DE ORIENTACIÓN. . . . .	71



# Siglas y abreviaciones

**AS** Asintóticamente estable (del inglés *asymptotically stable*).

**CMG** Siglas en inglés de giroscopio de control de momento angular: *control moment gyroscope*.

**DGVSCMG** Siglas en inglés de giroscopio de control de momento angular de doble cardán con velocidad variable: *double-gimbal variable-speed control moment gyroscope*.

**EDM** Ecuaciones de movimiento.

**ES** Exponencialmente estable (del inglés *exponentially stable*).

**GAS** Globalmente asintóticamente estable (del inglés *globally asymptotically stable*).

**GES** Globalmente exponencialmente estable (del inglés *globally exponentially stable*).

**MED** Siglas en inglés de *dispositivo de intercambio de momento angular: momentum exchange device*.

**MRP** Siglas en inglés de *parámetros Rodrigues modificados: modified Rodrigues parameters*.

**PD+** Ley de control proporcional derivativo más términos de precompensación.

**PMSM** Motor síncrono de imanes permanentes (del inglés *permanent magnet synchronous motor*).

**UA** Uniformemente atrayente (del inglés *uniformly attractive*).

**UAS** Uniformemente asintóticamente estable (del inglés *uniformly asymptotically stable*).

**UGAS** Uniformemente globalmente asintóticamente estable (del inglés *uniformly globally asymptotically stable*).

**UPAS** Uniformemente prácticamente asintóticamente estable (del inglés *uniformly semiglobally practically asymptotically stable*).

**US** Uniformemente estable (del inglés *uniformemente stable*).

**USPAS** Uniformemente semi-globalmente prácticamente asintóticamente estable (del inglés *uniformly semi-globally practically asymptotically stable*).

**VSCMG** Siglas en inglés de *giroscopio de control de momento angular con velocidad variable: variable-speed control moment gyroscope*.



# Capítulo 1

## Introducción

Considérese un satélite en órbita sometido a perturbaciones externas de magnitud acotada, conducido por un giroscopio de control de movimiento de doble cardán con velocidad variable (DGVSCMG, por las siglas en inglés de *double-gimbal variable-speed control moment gyroscope*) [1, 2], que a su vez es dirigido por un conjunto de tres motores síncronos de imanes permanentes [3, 4]. En el DGVSCMG tienen origen perturbaciones endógenas, producidas por excentricidad a causa de imperfecciones de manufactura en el rotor y/o desbalance en la carga acoplada.

En esta tesis se presenta una estrategia de control para el seguimiento de una orientación deseada en un satélite-DGVSCMG, aún en presencia de perturbaciones exógenas acotadas y vibraciones endógenas.

### 1.1. Justificación.

El problema de control de orientación de cuerpos rígidos, con enfoque aplicado a satélites, ha sido extensamente tratado desde la década de los 90. Una diferencia que guardan algunos de los enfoques con que diferentes autores y grupos de trabajo se han aproximado a la solución del problema está en las variables que configuran la orientación de un satélite. Las matrices de rotación en el grupo especial ortogonal  $\mathcal{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | RR^T = I, \det(R) = 1\}$  son la única representación de la orientación de un cuerpo rígido que no presenta ambigüedad ni singularidad. Sin embargo, por el Teorema de rotación de Euler, se sabe que toda orientación de un cuerpo rígido en el espacio de tres dimensiones se puede representar mediante un eje de rotación principal y el respectivo ángulo de rotación. Esta representación de

la orientación en  $\mathbb{R}^3$  es la más simple. Además, con base en ésta se han construido otras parametrizaciones, como los parámetros de Euler (cuaternión unitario), los parámetros Rodrigues o los parámetros Rodrigues modificados [5]. A diferencia de la matriz de rotación, que cuenta con nueve parámetros y seis restricciones (tres sobre la norma de los vectores columna, y tres sobre su ortogonalidad), los parámetros de Euler son cuatro con una restricción sobre su norma, y cuentan con la ventaja de no presentar configuraciones singulares<sup>1</sup>.

No obstante, es una parametrización con ambigüedades, pues toda rotación tiene dos posibles conjuntos de parámetros de Euler asociados. Por su parte, tanto los parámetros Rodrigues como los parámetros Rodrigues modificados (MRP, por las siglas en inglés de *modified Rodrigues parameters*) son representaciones con tres parámetros, por lo que son más simples que los parámetros de Euler o las matrices de rotación. Sin embargo, ambas conservan dos características importantes: son parametrizaciones con puntos singulares, y únicamente pueden representar rotaciones con un ángulo de rotación máximo de  $2\pi$  rad [6].

Con base en la representación de cuaternión unitario, en [7] se propuso una ley de control de seguimiento de orientación, que consiste en un control PD más términos de precompensación (en ocasiones conocido como PD+). Esta ley de control consigue que las trayectorias del sistema en lazo cerrado sean asintóticamente convergentes con respecto a una trayectoria deseada. Posteriormente, en [8] se ha probado que, de hecho, la convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado con una ley de control PD+ es exponencial.

Los diseños de control mencionados arriba han sido desarrollados bajo condiciones de operación ideales. En la práctica, entre muchos factores que limitan el desempeño del sistema, un satélite está sometido a perturbaciones externas en órbita y vibraciones generadas de forma endógena por estructuras mecánicas, las cuales suelen afectar seriamente la precisión en el seguimiento de alguna trayectoria de referencia.

La perturbaciones externas, como el vector gradiente de gravedad, la radiación solar, el viento y la resistencia aerodinámica, provienen del ambiente. A pesar de que algunos de estos fenómenos ya han sido identificados [9], y de que algunos incluso pueden ser descritos por un modelo físico-matemático concreto (como es el caso del par debido al gradiente de gravedad [10]), su ocurrencia es contingente, lo cual dificulta la obtención de un modelo adecuado para su descripción. Con todo, a partir de los datos obtenidos experimentalmente del *Telescopio Hubble* en [11], se ha mostrado que un modelo interno que caracterice las perturbaciones mediante una combinación de funciones sinusoidales puede ayudar a compensar los efectos adversos [12]. La misma idea se usó en [13], donde un esquema de control robusto, en combinación con la técnica de control adaptable, fueron usados para lograr el

---

<sup>1</sup>Un punto singular es un punto en el espacio de configuraciones donde la matriz jacobiana de la cinemática pierde rango.

rechazo de perturbaciones. No obstante, este enfoque no constituye una solución al problema general de rechazo de perturbaciones, sino solo una solución para un caso particular, porque no es posible asegurar algo acerca de su periodicidad. Otra estrategia, que omite el uso de un modelo interno, es la implementación de un esquema de control inverso óptimo adaptable, que resuelve el problema de atenuación de perturbaciones [14]. Además, este esquema es capaz de resolver el problema de rechazo asintótico exacto de perturbaciones cuando éstas son de energía acotada.

Por su parte, las vibraciones endógenas generadas en estructuras mecánicas a bordo también afectan el comportamiento de los satélites en órbita. Entre las causas principales de estas vibraciones están la excentricidad, el desbalance en la carga y las imperfecciones de manufactura en las estructuras mecánicas rotacionales, particularmente en los dispositivos de intercambio de momento (MEDs, por las siglas en inglés de *momentum exchange devices*) [15]. Este hecho ha sido confirmado mediante experimentación en [12], donde se muestra que las perturbaciones de mayor magnitud en los MEDs provienen del desbalance de la rueda giratoria, por desbalance estático debido a excentricidad y desbalance dinámico debido a que el eje de giro de la rueda pueda estar desalineado. Para lidiar con este tipo de vibraciones existen diferentes técnicas: disipar las vibraciones mediante amortiguadores pasivos, aislar (o desacoplar) las vibraciones mediante el uso de actuadores externos, o mediante el uso de técnicas de aislamiento (o desacoplamiento) híbridas pasivo-activas [15]. Desde la perspectiva de control, la vibración puede ser atenuada, y a veces cancelada, mediante el diseño e implementación de una estrategia de control. Típicamente, un esquema de compensación es diseñado con base en el acotamiento de la perturbación [16], o con base en un modelo interno que la representa [13]. En el enfoque de modelo interno es usual que las vibraciones causantes de perturbación son funciones periódicas dependientes del tiempo. Sin embargo, como ha sido sugerido en [17], tanto la excentricidad como el desbalance en la carga y las imperfecciones de manufactura ocasionan vibraciones que son, con mayor precisión, dependientes de la posición.

Actualmente, los MEDs más comúnmente usados para el control de orientación de vehículos espaciales son los giroscopios de control de momento (CMG, por las siglas en inglés de *control moment gyroscope*) dirigidos por motores síncronos de imanes permanentes (PMSM, por las siglas en inglés de *permanent-magnet synchronous motors*). Los PMSMs tienen gran aceptación gracias a sus características de alto desempeño: alta densidad de potencia, alta eficiencia y una alta relación par-inercia, entre otras [18]. Existen distintas versiones de un CMG: de cardán simple (SGCMG), de doble cardán (DGCMG) y de velocidad variable (VSCMG). Debido a su capacidad de variación de la velocidad de la rueda giratoria, un VSCMG cuenta con un grado de libertad extra en comparación con un CMG, pues combina las características de un CMG con las de una rueda de reacción

(RW por las siglas en inglés de *reaction wheel*). Gracias a ello, los VSCMGs también ofrecen la posibilidad de almacenar energía, como fue mostrado en [19]. Para lograr hacer control de orientación alrededor de tres ejes, en diferentes enfoques se suelen usar conjuntos de tres o más unidades CMGs, o VSCMGs, con diferentes configuraciones geométricas [20-22].

El desarrollo del problema de control de orientación de un satélite en términos de las distintas parametrizaciones de la orientación ha alcanzado cierta madurez [7, 23-26], incluso en lo que se refiere al problema de control en presencia de perturbaciones externas [10, 13, 27]. Sin embargo, atendiendo, por un lado la popularidad que han alcanzado los dispositivos de intercambio de momento (MED) para el control de orientación de satélites, y por otro lado los requerimientos de precisión en las tareas destinadas a los vehículos espaciales (con especial atención en los satélites ágiles), también ha aumentado la atención sobre las vibraciones generadas a bordo por el funcionamiento de los MEDs [12, 15, 17]. La intersección de estas tres situaciones principales forma un contexto en el que esta circunscrito el problema introducido en la sección anterior.

## 1.2. Motivación.

Debido al éxito mostrado por las leyes de control PD+ [7, 8, 26], en esta tesis se usará una ley de control del tipo PD+. No obstante, hay un área de oportunidad de mejora: aún no se cuenta con una prueba de estabilidad sencilla que ofrezca claridad en el proceso de diseño de un controlador. Además, hasta donde el autor tiene conocimiento, en el ámbito de control no existe otro enfoque que trate de forma separada y especializada con las perturbaciones exógenas y endógenas que afectan un satélite en órbita cuya orientación es dirigida por un MED. En este escenario es apropiado suponer que las perturbaciones externas son de magnitud acotada, pues existen registros y estadísticas de las mayoría de las magnitudes físicas que son fuentes de perturbaciones para satélites en órbita, al menos cerca de la Tierra [28].

Entre las diferentes alternativas de actuadores para controlar la orientación de un satélite, un DGVSCMG puede ser una buena elección (especialmente para satélites ágiles) y será considerado como el actuador de control de orientación para el satélite. Las características que así lo sustentan son la capacidad de un DGVSCMG de generar un par mecánico de control con tres grados de libertad, lo cual lo hace capaz de lograr el control de orientación alrededor de tres ejes coordenados [29]. Además, usar un solo dispositivo representa una disminución en el peso, el volumen y el consumo de energía, en contraste con la elección de un arreglo de varios de MEDs [1, 2, 30].

Según el contexto en el que está enmarcado el problema, una solución com-

pleta debe considerar las vibraciones ocasionadas por las partes rotatorias del DGVSCMG. En [17] se ha sugerido que para lidiar con las vibraciones endógenas, generadas en el DGVSCMG, es plausible proponer un modelo interno dependiente de la posición, y no solo dependiente del tiempo. Esta sugerencia cobra más relevancia al consultar [31], donde se resuelve el problema de rechazo de vibraciones en dispositivos mecánicos rotacionales mediante el uso de un modelo interno, donde se representa a esta perturbación como una función periódica dependiente de la posición angular del rotor. Mediante el uso del modelo interno y de un esquema de predicción adaptable se puede alcanzar el rechazo de la vibración. Esta idea puede ser considerada como parte de un esquema de control de velocidad con rechazo de perturbaciones endógenas para los motores que dirigen al DGVSCMG.

### 1.3. Objetivos y contribuciones.

El objetivo principal de esta tesis es la presentación de una estrategia de control de orientación y compensación de vibraciones endógenas de para un satélite ágil conducido por un DGVSCMG. En este novedoso enfoque se incorpora la dinámica del satélite-DGVSCMG con la dinámica de los motores que dirigen al DGVSCMG.

Objetivos parciales emergen. En primer lugar, como en toda propuesta de corte sistémico, es de interés el establecimiento de la diferencia entre el interior y el exterior del sistema. En ese sentido, se vuelve relevante establecer la diferencia entre las perturbaciones provenientes del exterior del sistema, y las generadas de manera interna por estructuras pertenecientes a éste, para ser tratadas por separado. De manera que, un primer objetivo parcial es la compensación de los efectos de las perturbaciones externas sobre el satélite, las cuales siempre están presentes.

Al incorporar la dinámica del DGVSCMG y de los motores que dirigen a éste, emerge otro objetivo parcial: el control de velocidad de los motores de dirección, cuyo funcionamiento suele provocar vibraciones por imperfecciones de fabricación y excentricidad en la distribución de la masa en la carga del motor. La identificación de estas vibraciones endógenas generadas en el DGVSCMG constituye un objetivo parcial más, cuyo cumplimiento permitiría el rechazo de los efectos de aquellas vibraciones sobre el desempeño del sistema.

La distinción entre perturbaciones internas y externas es una innovación contenida en esta propuesta; otra es el tratamiento de las perturbaciones endógenas originadas a nivel mecánico en el DGVSCMG mediante una acción de control a nivel eléctrico (*voltaje*).

Las contribuciones de esta tesis son las siguientes:

- La introducción de una nueva ley de control de orientación para un satélite, robusta ante perturbaciones externas de magnitud acotada, que resuelve el

problema de seguimiento de una trayectoria deseada, basada en la estructura PD+. Se establece una prueba de que las soluciones de las ecuaciones de error son uniformemente asintóticamente prácticamente estables.

- El diseño de un esquema de control de velocidad para los motores que dirigen al DGVSCMG. Con base en las ideas expuestas en [31], dentro de dicho esquema se contempla un observador adaptable para la identificación de los efectos de perturbaciones endógenas. Se establece una prueba de estabilidad de las soluciones del sistema en lazo cerrado, con convergencia uniformemente asintótica hacia cero del error de velocidad y del error de identificación de los efectos de perturbación.
- La propuesta de una prueba de estabilidad práctica uniformemente asintótica del satélite-DGVSCMG, en cascada con el conjunto de PMSM que lo dirigen, en lazo cerrado con el esquema de control.

## 1.4. Estructura del trabajo.

En el Capítulo 2, conformado por cuatro secciones, se presentan los antecedentes necesarios para el planteamiento del problema, pero también de la solución. En la Sección 2.1 son introducidos los sistemas de orientación de un cuerpo rígido en el espacio de tres dimensiones y las ecuaciones cinemáticas y dinámicas. En la Sección 2.2, son introducidas las ecuaciones de movimiento de un DGVSCMG, que después son acopladas a un satélite mediante la ecuación de Euler. Las ecuaciones de movimiento de un satélite-DGVSCMG son validadas mediante simulación numérica. También, es introducida una simplificación del modelo y el análisis de sus condiciones singulares. En la Sección 2.3 es introducido el modelo de un PMSM. La Sección 2.4 trata las perturbaciones y vibraciones a las que suponemos que está sometido un satélite-DGVSCMG en órbita.

El problema de control de orientación de cuerpos rígidos es presentado en el Capítulo 3, donde también es introducida una nueva ley de control que, según el análisis de Lyapunov, asegura la estabilidad asintótica de las trayectorias del sistema en lazo cerrado. El resultado se extiende para el caso de un cuerpo rígido sometido a perturbaciones externas. El Capítulo cierra con la validación de los resultados mediante simulación numérica.

A continuación, en el Capítulo 4 se aborda el problema de control de seguimiento de velocidad de un PMSM. Es introducido un modelo interno de las vibraciones endógenas originadas a nivel mecánico en el sistema. Luego, éste es usado para el planteamiento de un esquema de control-observador adaptable que logra el seguimiento asintótico de velocidad, a la vez que rechaza los efectos de estas

vibraciones, lo cual es mostrado mediante las herramientas de análisis de Lyapunov. Como una consideración práctica, un control PI de tensión eléctrica es usado para el seguimiento de corriente a nivel del sub-sistema eléctrico del PMSM. Las propiedades de estabilidad del sistema general, conformado por la interconexión del sub-sistema mecánico y el sub-sistema eléctrico, son verificadas mediante simulaciones numéricas.

La parte medular de esta tesis se encuentra en el Capítulo 5. En él, es introducida una ley de dirección que, de hecho, es el término de acoplamiento entre el conjunto de PMSMs y el satélite-DGVSCMG. Después, son usados los resultados parciales obtenidos en los dos capítulos antecedentes para establecer un esquema de control de seguimiento de orientación, robusto ante perturbaciones externas, con rechazo de vibraciones endógenas. Se establecen las propiedades de estabilidad del sistema en lazo cerrado, cuyo desempeño es verificado mediante simulaciones numéricas.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones que emergen de la realización de este trabajo.





# Capítulo 2

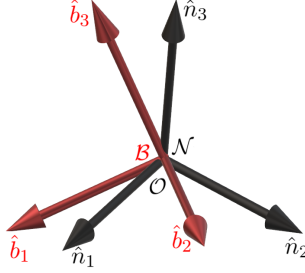
## Antecedentes

En este capítulo se sientan las bases para el desarrollo de la tesis. En primer lugar, son introducidas las herramientas teóricas de la mecánica clásica, necesarias para el desarrollo de las ecuaciones de cinemática y dinámica. Posteriormente, es presentado el desarrollo del modelo de un giroscopio de control de momento angular. Para dirigir al DGVSCMG es considerado un conjunto de tres motores síncronos de imanes permanentes. El modelo de un motor de este tipo es introducido a continuación. Finalmente, son caracterizadas las perturbaciones externas y las vibraciones endógenas afectando al sistema.

### 2.1. Cinemática y dinámica rotacional.

El movimiento de partículas y cuerpos rígidos en el espacio ha sido extensamente estudiado a lo largo de la emergencia y desarrollo de la mecánica clásica como rama de la física. La cinemática es una sub-rama de la mecánica, cuya teoría enmarca los conceptos que nos permiten describir, visto desde diferentes marcos de referencia, las posiciones, velocidades y aceleraciones relativas de objetos en el espacio de tres dimensiones, según lo experimentamos los humanos, sin tomar en cuenta las masas y fuerzas que constituyen las causas de dicho movimiento. Por otro lado, la dinámica es una construcción teórica que nos permite describir la evolución en el tiempo del estado físico de los objetos en relación con sus interacciones con otros objetos y fuerzas.

En la presente sección son presentados los elementos teóricos necesarios para el estudio de la orientación de un cuerpo rígido en el espacio de tres dimensiones; es decir, son introducidas las ecuaciones de cinemática y dinámica que describen el movimiento relativo de rotación de un cuerpo en el espacio de tres dimensiones.

Figura 2.1: Marcos de referencia  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{B}$ .

## Matrices de rotación

La orientación relativa de un cuerpo rígido en el espacio puede ser descrita por dos triadas de vectores ortonormales dextrógiros que compartan el mismo origen, conocidos como marcos de referencia. En la Figura 2.1 se ilustra el marco de referencia inercial  $\mathcal{N} : \{\hat{\mathbf{n}}\} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ , asociado a algún sistema coordenado inercial –que suele estar fijo al centro de la Tierra–, y el marco de referencia de un cuerpo rígido genérico  $\mathcal{B} : \{\hat{\mathbf{b}}\} = \{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3\}$ , fijo a su centro de masa. Note que  $\hat{\mathbf{n}}_i, \hat{\mathbf{b}}_j \in \mathbb{R}^3$ .

Todo vector en coordenadas de  $\mathcal{N}$  puede ser proyectado sobre  $\mathcal{B}$  (y viceversa) mediante los cosenos directores. Por ejemplo, se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}_1 &= \cos \alpha_{11} \hat{\mathbf{b}}_1 + \cos \alpha_{12} \hat{\mathbf{b}}_2 + \cos \alpha_{13} \hat{\mathbf{b}}_3, \\ \hat{\mathbf{n}}_2 &= \cos \alpha_{21} \hat{\mathbf{b}}_1 + \cos \alpha_{22} \hat{\mathbf{b}}_2 + \cos \alpha_{23} \hat{\mathbf{b}}_3, \\ \hat{\mathbf{n}}_3 &= \cos \alpha_{31} \hat{\mathbf{b}}_1 + \cos \alpha_{32} \hat{\mathbf{b}}_2 + \cos \alpha_{33} \hat{\mathbf{b}}_3;\end{aligned}$$

donde  $\alpha_{ij}$  es el ángulo de dirección entre el vector  $\hat{\mathbf{n}}_i$  y el vector  $\hat{\mathbf{b}}_j$ . Entonces, se tiene que

$$\hat{\mathbf{n}}_i = R_{nb} \hat{\mathbf{b}}_i, \quad (2.1)$$

donde la transformación lineal de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{N}$  conocida como matriz de rotación es

$$R_{nb} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

y está en el grupo especial ortogonal  $\mathcal{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : RR^T = I, \det(R) = 1\}$ . Cada uno de los 9 parámetros que conforman  $R_{nb}$  puede calcularse mediante  $r_{ij} = \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \hat{\mathbf{b}}_j$  [29].

De manera análoga a la ecuación (2.1), dado que  $R_{bn} = R_{nb}^\top$ , se tiene

$$\hat{\mathbf{b}}_i = R_{bn} \hat{\mathbf{n}}_i . \quad (2.2)$$

Desde este punto en adelante llamaremos simplemente  $R$  a la matriz que representa la transformación lineal que va de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{N}$ . Consecuentemente, la matriz que representa a la transformación que va de  $\mathcal{N}$  a  $\mathcal{B}$  será denotada  $R^\top$ .

A partir de las expresiones (2.1) y (2.2) se usa la notación de matriz de vectores  $\mathbf{B} = [\hat{\mathbf{b}}_1 \ \hat{\mathbf{b}}_2 \ \hat{\mathbf{b}}_3]$  y

$$\mathbf{N}^\top = R \mathbf{B}^\top , \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}^\top = R^\top \mathbf{N}^\top . \quad (2.4)$$

## Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler constituyen una forma de parametrizar la descripción de la orientación de un cuerpo rígido mediante tres coordenadas. Los ángulos  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  pueden describir la orientación de un marco de referencia con respecto a otro. El orden en el que rotan los ejes del marco de referencia es importante, pues realizar una rotación sobre el tercer eje, luego sobre el segundo y finalmente sobre el primero (3-2-1) resulta una orientación distinta de la que se obtiene al realizar la secuencia en el orden contrario (1-2-3) [29]. Otras configuraciones pueden ser usadas, por ejemplo (3-1-3), que es simétrica con dos rotaciones sobre el mismo eje coordenado.

Una matriz de rotación  $R \in \mathcal{SO}(3)$  también puede ser parametrizada mediante los ángulos de Euler, pues cada uno de estos últimos define una rotación alrededor del  $i$ -ésimo eje del marco de referencia del cuerpo en rotación. De esta forma, se definen tres matrices de rotación básicas alrededor de cada eje coordenado:

$$R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} ,$$

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} ,$$

$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Las matrices de rotación se pueden combinar en rotaciones sucesivas [29], entonces es posible representar cualquier orientación de un cuerpo en el espacio mediante la combinación de matrices de rotación básicas. Por ejemplo, se tiene

$$R_{123}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_1(\theta_3)R_2(\theta_2)R_3(\theta_1) ,$$

que corresponde a la secuencia (3-2-1). Análogamente, las secuencias (1-2-3) y (3-1-3) están representadas, respectivamente, por las matrices

$$R_{321}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1) ,$$

$$R_{313}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_3(\theta_3)R_1(\theta_2)R_3(\theta_1) .$$

### Parámetros Rodrigues modificados.

El Teorema de rotación de Euler (véase Apéndice A.1) es una pieza clave en la construcción de los conceptos geométricos que nos permiten describir la rotación de cuerpos rígidos. En éste, Euler estableció que en el espacio de tres dimensiones, para toda rotación de un cuerpo rígido (o sistema coordenado de referencia), existe un punto que se mantiene constante, el cual a su vez mantiene un eje de rotación constante. A dicho eje de rotación se le conoce como eje de rotación principal, y lo denotaremos como  $\hat{\mathbf{e}}$ . Al ángulo de rotación alrededor de éste se le conoce como ángulo principal, y es denotado por  $\phi$ . Con ello, el *vector de rotación principal* se define como

$$\boldsymbol{\phi} = \phi \hat{\mathbf{e}} ,$$

y está relacionado con las matrices de rotación mediante la ecuación

$$R^\top = I_{3 \times 3} \cos \phi - \sin \phi S(\hat{\mathbf{e}}) + (1 - \cos \phi) \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^\top ;$$

donde  $S(\cdot) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el operador producto cruz  $S(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  (revisar Apéndice A.2).

Esta parametrización, además, ha sido la base para el desarrollo de algunas otras parametrizaciones particularmente útiles en diferentes aplicaciones. Entre ellas, se encuentra la parametrización redundante sin singularidades conocida como los parámetros de Euler (o cuaternion unitario), el cual es un vector de cuatro parámetros definido en términos del vector de rotación principal como  $\mathbf{q} = [q_0 \ \mathbf{q}_v^\top]^\top$  [32]; donde  $\mathbf{q}_v = [q_1 \ q_2 \ q_3]^\top$ ,

$$q_0 = \cos \frac{\phi}{2} \quad \text{y} \quad q_i = \hat{\mathbf{e}}_i \sin \frac{\phi}{2}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Note que  $\mathbf{q}$  no es único. Tanto  $\mathbf{q}$  como  $-\mathbf{q}$  describen una misma orientación y  $\mathbf{q}^\top \mathbf{q} = 1$ .

Otras parametrizaciones basadas en el vector de rotación principal de Euler son las parametrizaciones estereográficas, las cuales presentan singularidades. Entre éstas, están los parámetros Rodrigues (o vector de Gibbs), el cual se define en términos del vector de rotación principal como

$$\beta = \frac{1}{q_0} \mathbf{q}_v = \tan \frac{\phi}{2} \hat{\mathbf{e}}. \quad (2.6)$$

Note también que el vector de parámetros Rodrigues es singular cuando  $q_0 = 0$ , es decir, cuando  $\phi = \pm 180^\circ$ .

Sin embargo, en este trabajo los parámetros Rodrigues modificados (MRP, por las siglas en inglés de *modified Rodrigues parameters*) [5] serán usados como la descripción matemática de la orientación de cuerpos rígidos. Éstos se definen en términos de los parámetros de Euler como

$$\sigma = \left( \frac{1}{1 + q_0} \right) \mathbf{q}_v,$$

y en términos del vector de rotación principal como

$$\sigma = \hat{\mathbf{e}} \tan \frac{\phi}{4}.$$

A diferencia de los parámetros Rodrigues clásicos, los modificados no encuentran singularidad sino hasta que una rotación principal con respecto del marco de referencia alcanza una revolución completa, pues presentan singularidad cuando  $q_0 = -1$ , que implica  $\phi = \pm 360^\circ$ .

Como ocurre con los parámetros de Euler, los MRP no son únicos. Tienen asociado un “conjunto sombra” (o *shadow set*) definido como

$$\sigma^s = \left( \frac{-1}{\sigma^\top \sigma} \right) \sigma = \left( \frac{1}{1 - q_0} \right) \mathbf{q}_v = \hat{\mathbf{e}} \tan \left( \frac{\phi - 2\pi}{4} \right),$$

que es singular cuando  $q_0 = 1$  ( $\phi = 0^\circ$ ), aunque siempre representa exactamente la misma orientación que  $\sigma$  [6].

Si bien todas las descripciones de tres parámetros siempre presentan singularidades, el vector de MRP maximiza el rango de rotación no-singular.

El vector de MRP puede ser interpretado como una matriz de rotación mediante las expresiones

$$R(\sigma) = I_{3 \times 3} + \frac{8S^2(\sigma) + 4(1 - \sigma^\top \sigma)S(\sigma)}{(1 + \sigma^\top \sigma)^2}, \quad (2.7)$$

$$R^\top(\sigma) = I_{3 \times 3} + \frac{8S^2(\sigma) - 4(1 - \sigma^\top \sigma)S(\sigma)}{(1 + \sigma^\top \sigma)^2}. \quad (2.8)$$

Al igual que los parámetros Rodrigues clásicos, cumplen con la identidad de rotación relativa [29]

$$R^\top(\sigma) = R(-\sigma) .$$

## Ecuación diferencial cinemática

La ecuación diferencial cinemática describe el cambio de la orientación de un cuerpo rígido en relación con la velocidad de éste. Para su obtención primero se hará una revisión del desarrollo de la ecuación diferencial cinemática en términos de una matriz de rotación, que sentará las bases para el desarrollo de la ecuación en términos de las otras parametrizaciones.

Sea considerado el vector de velocidad angular instantánea del sistema coordinado  $\mathcal{B}$  relativa al marco de referencia  $\mathcal{N}$  escrito en coordenadas de  $\mathcal{B}$  como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{b}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{b}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{b}}_3 .$$

Mediante el teorema de transporte (vea Apéndice A.3), la derivada de los vectores base de  $\mathcal{B}$  en coordenadas de  $\mathcal{N}$  se calcula como

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}d}{dt}(\hat{\mathbf{b}}_i) &= \frac{\mathcal{B}d}{dt}(\hat{\mathbf{b}}_i) + S(\boldsymbol{\omega})\hat{\mathbf{b}}_i \\ &= S(\boldsymbol{\omega})\hat{\mathbf{b}}_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $S(\cdot) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el operador producto cruz (ver Apéndice A.2). El término  $\frac{\mathcal{B}d}{dt}(\hat{\mathbf{b}}_i)$  es cero, pues  $\hat{\mathbf{b}}_i$  es constante con respecto al marco de referencia  $\mathcal{B}$ . Al desarrollar  $S(\boldsymbol{\omega})\hat{\mathbf{b}}_1$ , de (2.9), se tiene que

$$\frac{\mathcal{N}d}{dt}(\hat{\mathbf{b}}_1) = S(\boldsymbol{\omega}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3 \\ -\omega_2 \end{bmatrix} = \omega_3 \hat{\mathbf{b}}_2 - \omega_2 \hat{\mathbf{b}}_3 = [0 \quad \omega_3 \quad -\omega_2] \mathbf{B}^\top .$$

De manera similar, para  $i = 2$  e  $i = 3$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}d}{dt}(\hat{\mathbf{b}}_2) &= [-\omega_3 \quad 0 \quad \omega_1] \mathbf{B}^\top , \\ \frac{\mathcal{N}d}{dt}(\hat{\mathbf{b}}_3) &= [\omega_2 \quad -\omega_1 \quad 0] \mathbf{B}^\top . \end{aligned}$$

En forma compacta, se tiene que

$$\frac{\mathcal{N}d}{dt} \mathbf{B}^\top = -S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{B}^\top . \quad (2.10)$$

Con la finalidad de obtener la ecuación diferencial que describe el cambio de orientación de un cuerpo rígido en términos de la matriz de rotación, se calcula la siguiente derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{N}d}{dt} [R^\top \mathbf{N}^\top] &= \frac{d}{dt}(R^\top) \mathbf{N}^\top + R^\top \frac{\mathcal{N}d}{dt} \mathbf{N}^\top, \\ &= \dot{R}^\top \mathbf{N}^\top. \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde ha sido usada la notación abreviada  $\frac{d}{dt}(R) = \dot{R}$ . Con las ecuaciones (2.4) y (2.10) en (2.11) se tiene que

$$\left[ \dot{R}^\top + S(\omega) R^\top \right] \mathbf{N}^\top = 0. \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) implica que la ecuación diferencial para la matriz de rotación, que describe el cambio a lo largo del tiempo de la orientación, está dada por

$$\dot{R}^\top = -S(\omega) R^\top. \quad (2.13)$$

De manera similar es posible encontrar que [29, 33]

$$\dot{R} = R S(\omega). \quad (2.14)$$

El desarrollo de la ecuación diferencial cinemática en términos de los MRP se puede realizar, de manera similar a como fueron construidas las parametrizaciones aquí presentadas, comenzando por obtener la ecuación diferencial en términos de los parámetros de Euler, y utilizar ésta última como apoyo en la construcción de la que nos interesa, en términos del vector de MRP. Si se desea profundizar en el tema, el desarrollo de la ecuación diferencial cinemática se puede consultar en [29].

La ecuación que describe el cambio en la orientación de un cuerpo rígido en relación con su velocidad se escribe, en términos de MRP, como

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} G(\sigma) \omega, \quad (2.15)$$

donde

$$G(\sigma) = \frac{1}{2} (1 - \sigma^\top \sigma) I_{3 \times 3} + S(\sigma) + \sigma \sigma^\top. \quad (2.16)$$

La matriz  $G(\sigma)$  tiene las propiedades enunciadas en el Apéndice A.4, que serán útiles para la construcción de algunas ecuaciones clave en los siguientes capítulos.

## Ecuación dinámica

Una característica fundamental de los sistemas dinámicos es que no están aislados, sino interconectados con otros y con su entorno en general. Para describir un cuerpo rígido en rotación desde la perspectiva de los sistemas dinámicos, es necesario todavía desarrollar su ecuación dinámica, la cual describe el cambio en la velocidad de rotación del cuerpo y la relación que tiene ésta con las fuerzas en su entorno. Para ello, la ecuación de Euler y la ecuación de movimiento rotacional de Euler son necesarias, así como las interpretaciones matemáticas de las nociones físicas de momento angular y de par torsión, o *torque*<sup>1</sup>.

Sea considerado el momento angular, tomado respecto al origen del sistema coordinado del cuerpo rígido,

$$\mathbf{h}_b = M_b \boldsymbol{\omega} , \quad (2.17)$$

donde  $M_b \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $M_b = M_b^\top > 0$  es la matriz de inercia del satélite en coordenadas de  $\mathcal{B}$ . La ecuación de Euler establece que la derivada del momento angular es igual al *torque* externo aplicado

$$\dot{\mathbf{h}}_b = \boldsymbol{\tau}_e . \quad (2.18)$$

Mediante el teorema de transporte (revisar Apéndice A.3) se realiza el cálculo de la derivada del momento angular

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}}_b &= \frac{\mathcal{B}d}{dt}(\mathbf{h}_b) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_b , \\ &= \frac{\mathcal{B}d}{dt}(M_b) \boldsymbol{\omega} + M_b \frac{\mathcal{B}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) + S(\boldsymbol{\omega})\mathbf{h}_b ; \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde se han usado la ecuación (2.17) y el operador producto cruz. Note que la derivada del vector de velocidad angular del cuerpo  $\boldsymbol{\omega}$  es la misma vista desde  $\mathcal{B}$  y desde  $\mathcal{N}$ , pues

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\mathcal{N}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\mathcal{B}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathcal{B}d}{dt}(\boldsymbol{\omega}) .$$

Tome en cuenta que la matriz  $M_b$  es constante vista desde  $\mathcal{B}$ . Usando la ecuación de Euler (2.18) y la información que ya se tiene, la ecuación (2.19) pasa a ser

$$\dot{\mathbf{h}}_b = M_b \dot{\boldsymbol{\omega}} + S(\boldsymbol{\omega})\mathbf{h}_b = \boldsymbol{\tau}_e .$$

---

<sup>1</sup>La palabra *torque* no existe en el diccionario de la Real Academia Española. Sin embargo, dado el predominio del idioma inglés –en el cual la palabra sí existe– en todo ámbito de la ingeniería, es muy común su uso. Algo muy similar ocurrió con la palabra en inglés *voltage*, cuyo uso frecuente en el ámbito de la ingeniería ocasionó que, a la postre, se incluyera la palabra *voltaje* en el diccionario de la RAE. Ambos anglicismos serán usados a lo largo de este trabajo.



Finalmente, la ecuación dinámica de un cuerpo rígido que rota en el espacio es escrita como

$$M_b \dot{\omega} = -S(\omega)M_b\omega + \tau_e . \quad (2.20)$$

Esta ecuación es también conocida como ecuación de movimiento rotacional de Euler.

## 2.2. Giroscopio de control de momento angular.

Un dispositivo de intercambio de momento angular (MED, por las siglas en inglés de *momentum exchange device*) es un dispositivo usualmente empleado en satélites como actuador de control de orientación para maniobras en órbita. Para ello, el par de torsión necesario es producido mediante el cambio de momento angular en el MED que, como sugiere la ecuación de Euler, produce un par de torsión sobre el satélite.

Entre los distintos MEDs se encuentran las ruedas de reacción (RW, por las siglas en inglés de *reaction wheel*), usadas en diversas misiones espaciales, entre las que encontramos al telescopio espacial Hubble [11, 12]. Otro tipo de MED son los giroscopios de control de momento angular (CMG, por las siglas en inglés de *control moment gyroscope*). Un CMG consta de una rueda giratoria con velocidad constante y un cardán<sup>2</sup> simple que permite el giro de la rueda entorno al eje del cardán y con el ángulo del cardán. La ventaja de usar un CMG es que se requiere un par de torsión de entrada relativamente pequeño para producir un par de torsión efectivo de salida sobre el vehículo espacial [29] (se dice también que los CMG tienen capacidad de amplificar el par de torsión [19, 21]). A ello se debe la popularidad que han alcanzado los CMG, ya sea como actuadores para la reorientación de grandes estructuras en órbita, como la Estación Espacial Internacional<sup>3</sup>[36, 37], o para el control de orientación de satélites ágiles [21].

Además, un CMG puede tener una rueda con velocidad variable (VSCMG, por las siglas en inglés de *variable-speed control moment gyroscope*). Los VSCMG no generan par de torsión únicamente mediante la variación del ángulo del cardán (en modo CMG), sino también por medio de la variación de la velocidad de la rueda

---

<sup>2</sup>Un cardán, según una de las dos acepciones de la Real Academia Española, es un “Mecanismo de suspensión, consistente en dos círculos concéntricos cuyos ejes forman ángulo recto, que permite mantener la orientación de un eje de rotación en el espacio aunque su soporte se mueva” [34]. Su nombre proviene del físico y matemático Gerolamo Cardano, quien en el siglo XVI describió las bondades mecánicas de tal dispositivo. En inglés es llamado *gimbal* (de donde proviene la notación usada en este trabajo, pues al referirnos al cardan exterior usamos  $g_o$ , que viene de *outer gimbal*; y para el cardán interior usamos  $g_i$ , de *inner gimbal*).

<sup>3</sup>En [35] el lector podrá ver un video didáctico acerca del funcionamiento de un giroscopio explicado por un astronauta desde la Estación Espacial Internacional.

(en modo RW), agregando un grado de libertad extra con respecto a un CMG [20, 29]. Además, el uso de un conjunto de VSCMGs tiene la capacidad de almacenar energía y seguir un perfil de potencia deseado [19]. Estas características, además de su capacidad de evasión de singularidades [20], hacen al VSCMG un dispositivo que despierta especial interés desde la perspectiva de control [19, 20, 22, 38-40].

Otra variante son los CMG con estructura de doble cardán (DGCMG, por las siglas en inglés de *double-gimbal control control moment gyroscope*), que añaden un grado de libertad al CMG convencional. Como el lector podrá imaginar, también es posible la combinación DGVSCMG (CMG de doble cardán con velocidad variable), que son capaces de entregar par de torsión de salida con tres grados de libertad. Un DGVSCMG es capaz de entregar par de torsión a lo largo de tres ejes, por lo que su uso puede sustituir a los arreglos de 3 o 4 CMG o VSCMG predominantes en la literatura, pues un solo DGVSCMG tiene menores dimensiones de peso, volumen, consumo de energía y costo [1, 2, 30].

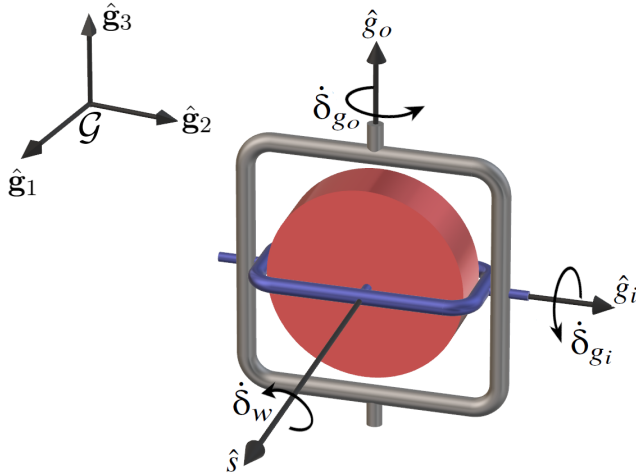


Figura 2.2: Ilustración de un DGVSCMG y el sistema coordenado del cardán.

En el presente capítulo son introducidas las ecuaciones de movimiento de un vehículo espacial en órbita cuya orientación es conducida por un DGVSCMG, como el de la Figura 2.2, montado mediante un acoplamiento rígido sobre el cuerpo del vehículo espacial.

El marco de referencia del cardán  $\mathcal{G}$ , fijo al dispositivo DGVSCMG cuya base es constituida por el conjunto de vectores unitarios  $\{\hat{\mathbf{g}}\} = \{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$ , está alineado con el sistema coordenado del cuerpo del satélite  $\mathcal{B}$ , por lo que la matriz de rotación de  $\mathcal{G}$  a  $\mathcal{B}$  es una matriz identidad. La posición angular de los cardanes exterior e

interior son representados por  $\delta_{g_o} \in [0, 2\pi]$  y  $\delta_{g_i} \in [0, 2\pi]$ , respectivamente, y la posición angular de la rueda está representada por  $\delta_w$ .

Sean definidos, un sistema coordenado fijo a la estructura del cardán exterior (la estructura gris en la Figura 2.2)  $\mathcal{G}_o : \{\hat{\mathbf{g}}_o\} = \{\hat{\mathbf{g}}_{o1}, \hat{\mathbf{g}}_{o2}, \hat{\mathbf{g}}_{o3}\}$ , y un sistema coordenado fijo a la estructura del cardán interior (la estructura azul en la Figura 2.2)  $\mathcal{G}_i : \{\hat{\mathbf{g}}_i\} = \{\hat{\mathbf{g}}_{i1}, \hat{\mathbf{g}}_{i2}, \hat{\mathbf{g}}_{i3}\}$ . A continuación, son definidos los vectores:

$$\mathcal{G}_i \hat{\mathbf{s}} = [1 \ 0 \ 0]^\top, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{G}_i \hat{\mathbf{g}}_i = [0 \ 1 \ 0]^\top, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{G}_o \hat{\mathbf{g}}_o = [0 \ 0 \ 1]^\top; \quad (2.23)$$

cada uno de los cuales está fijo al sistema coordenado de referencia que le corresponde, según la estructura mecánica del DGVSCMG. Es decir, los vectores  $\hat{\mathbf{s}}$ ,  $\hat{\mathbf{g}}_i$  y  $\hat{\mathbf{g}}_o$ , vistos desde  $\mathcal{B}$ , son paralelos a  $\hat{\mathbf{g}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{g}}_2$  y  $\hat{\mathbf{g}}_3$ , correspondientemente, solo cuando  $\delta_{g_o} = 0$  y  $\delta_{g_i} = 0$ . De otra manera, estos vectores vistos desde  $\mathcal{B}$  son expresados mediante las matrices de rotación que se definen a continuación.

Las matrices de rotación de  $\mathcal{G}_o$  a  $\mathcal{G}$  y de  $\mathcal{G}_i$  a  $\mathcal{G}_o$  se construyen con rotaciones básicas, como

$$R_{g g_o} = R_3(\delta_{g_o}) = \begin{bmatrix} \cos \delta_{g_o} & -\sin \delta_{g_o} & 0 \\ \sin \delta_{g_o} & \cos \delta_{g_o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$R_{g_o g_i} = R_2(\delta_{g_i}) = \begin{bmatrix} \cos \delta_{g_i} & 0 & \sin \delta_{g_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta_{g_i} & 0 & \cos \delta_{g_i} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Con las expresiones (2.24) y (2.25) es posible establecer las siguientes matrices de rotación a través de rotaciones compuestas:

$$R_{b g_o} = R_{b g} R_{g g_o} = [I_{3 \times 3}] R_{g g_o} = R_{g g_o},$$

$$R_{b g_i} = R_{b g_o} R_{g_o g_i} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{g_o} \cos \delta_{g_i} & -\sin \delta_{g_o} \cos \delta_{g_i} & \cos \delta_{g_o} \sin \delta_{g_i} \\ \sin \delta_{g_o} \cos \delta_{g_i} & \cos \delta_{g_o} \cos \delta_{g_i} & \sin \delta_{g_o} \sin \delta_{g_i} \\ -\sin \delta_{g_i} & 0 & \cos \delta_{g_i} \end{bmatrix}.$$

Entonces, los vectores  $\hat{g}_o$ ,  $\hat{g}_i$  y  $\hat{s}$  en coordenadas de  $\mathcal{B}$  están dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\hat{s} &= R_{b_{g_i}} \mathcal{G}_i \hat{s} = \begin{bmatrix} \cos(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) \\ \sin(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) \\ -\sin(\delta_{g_i}) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}\hat{g}_i &= R_{b_{g_i}} \mathcal{G}_i \hat{g}_i = \begin{bmatrix} -\sin(\delta_{g_o}) \\ \cos(\delta_{g_o}) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}\hat{g}_o &= R_{b_{g_o}} \mathcal{G}_o \hat{g}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En congruencia con la definición de los ángulos del cardán exterior, del cardán interior y de la rueda giratoria, las velocidades angulares (que teóricamente corresponden a la derivada de las posiciones angulares respectivamente) son representadas por  $\dot{\delta}_{g_o}$ ,  $\dot{\delta}_{g_i}$  y  $\dot{\delta}_w$ .

Como ya se ha mencionado, ahora es evidente que cuando  $\delta_{g_o}$  y  $\delta_{g_i}$  son iguales a cero, entonces los vectores  $\mathcal{B}\hat{s}$ ,  $\mathcal{B}\hat{g}_i$  y  $\mathcal{B}\hat{g}_o$  son paralelos a los vectores  $\hat{\mathbf{g}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{g}}_2$  y  $\hat{\mathbf{g}}_3$ , respectivamente. Resulta también evidente que el eje de giro del cardán exterior  $\hat{g}_o$  siempre es paralelo al vector  $\hat{\mathbf{g}}_3$ , mientras que las partes restantes del DGVSCMG son dependientes de los ángulos de los cardanes exterior e interior.

## Ecuaciones de movimiento de un satélite-DGVSCMG

Las ecuaciones de movimiento de un satélite conducido por un DGVSCMG serán presentadas a continuación.

Las velocidades de rotación de cada uno de los sistemas coordenados con respecto al inmediato exterior correspondiente, están dadas por

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{N}} &= \omega, \\ \omega_{\mathcal{G}_o/\mathcal{B}} &= \dot{\delta}_{g_o} \mathcal{G}_o \hat{g}_o, \\ \omega_{\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_o} &= \dot{\delta}_{g_i} \mathcal{G}_i \hat{g}_i, \\ \omega_{\mathcal{W}/\mathcal{G}_i} &= \dot{\delta}_w \mathcal{G}_i \hat{s}.\end{aligned}$$

A partir de estas definiciones, se pueden establecer las siguientes velocidades an-

gulares compuestas:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}} &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{N}} , \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}} &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_o} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{N}} , \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{N}} &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{G}_i} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_o} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{N}} .\end{aligned}$$

El momento angular combinado del vehículo espacial y el DGVSCMG con respecto al centro de masa del vehículo está dado por

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_b + \mathbf{h}_{g_o} + \mathbf{h}_{g_i} + \mathbf{h}_w . \quad (2.26)$$

Será tratado cada momento angular, y su respectiva derivada, a la vez.

El momento angular del cuerpo principal del satélite  $\mathbf{h}_b$  fue definido en (2.17) como  $\mathbf{h}_b = M\boldsymbol{\omega}$ , y su derivada calculada en (2.19) como  $\dot{\mathbf{h}}_b = M\dot{\boldsymbol{\omega}} + S(\boldsymbol{\omega})M\boldsymbol{\omega}$ .

El momento angular del cardán exterior está dado por

$$\mathbf{h}_{g_o} = M_{g_o}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}} = M_{g_o} \left( \boldsymbol{\omega} + \dot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o \right) , \quad (2.27)$$

donde  $M_{g_o}$  es la matriz de inercia del cardán exterior. El cálculo de la derivada del momento angular se realiza mediante aplicaciones iterativas del teorema de transporte (vea Apéndice A.3), y tiene como resultado

$$\dot{\mathbf{h}}_{g_o} = \frac{\mathcal{G}_o d}{dt} (M_{g_o}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}}) + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}})M_{g_o}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}} .$$

Note que el primer término en la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{\mathcal{G}_o d}{dt} (M_{g_o}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}}) = M_{g_o} \frac{\mathcal{G}_o d}{dt} \left( \boldsymbol{\omega} + \dot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o \right) .$$

Con una segunda aplicación del teorema de transporte, se obtiene

$$\frac{\mathcal{G}_o d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathcal{B} d}{dt} \boldsymbol{\omega} + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}_o})\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} + S(\boldsymbol{\omega})\dot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o , \quad (2.28)$$

$$\frac{\mathcal{G}_o d}{dt} \left( \dot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o \right) = \ddot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o + S(\dot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o)\dot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o = \ddot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o . \quad (2.29)$$

Mediante (2.28) y (2.29) la derivada del momento angular del cardán exterior es

$$\dot{\mathbf{h}}_{g_o} = M_{g_o} \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} + \ddot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o + S(\boldsymbol{\omega})(\dot{\delta}_{g_o}\hat{g}_o) \right] + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}})M_{g_o}\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}} . \quad (2.30)$$

Para el cardán interior el desarrollo es similar. El momento angular del del cardán interior está dado por

$$\mathbf{h}_{g_i} = M_{g_i} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}} = M_{g_i} \left( \boldsymbol{\omega} + \dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i \right) , \quad (2.31)$$

donde  $M_{g_i}$  es la matriz de inercia del cardán interior. En un primer acercamiento, la derivada de éste momento angular se escribe como

$$\dot{\mathbf{h}}_{g_i} = \frac{\mathcal{G}_i d}{dt} (M_{g_i} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}}) + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}}) M_{g_i} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}} .$$

Note que el primer término en la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{\mathcal{G}_i d}{dt} (M_{g_i} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}}) = M_{g_i} \frac{\mathcal{G}_i d}{dt} \left( \boldsymbol{\omega} + \dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i \right) .$$

El teorema de transporte es utilizado para establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}_i d}{dt} \boldsymbol{\omega} &= \frac{\mathcal{B} d}{dt} \boldsymbol{\omega} + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}_i}) \boldsymbol{\omega} , \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}} + S(\boldsymbol{\omega})(\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i) , \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}_i d}{dt} (\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) &= \frac{\mathcal{G}_o d}{dt} (\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{G}_i}) \dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o , \\ &= \ddot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + S(\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i , \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\frac{\mathcal{G}_i d}{dt} (\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i) = \ddot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + S(\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_o) \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i = \ddot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i . \quad (2.34)$$

Con (2.32), (2.33) y (2.34), la derivada del momento angular del cardán interior es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}}_{g_i} &= M_{g_i} \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} + \ddot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \ddot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + S(\boldsymbol{\omega})(\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i) \right. \\ &\quad \left. + S(\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i \right] + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}}) M_{g_i} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}} . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Finalmente, el momento angular de la rueda está dado por

$$\mathbf{h}_w = M_w \boldsymbol{\omega}_{w/\mathcal{N}} = M_w \left( \boldsymbol{\omega} + \dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + \dot{\delta}_w \hat{s} \right) , \quad (2.36)$$

donde  $M_w$  es la matriz de inercia de la rueda giratoria. El cálculo de la derivada del momento angular es similar los desarrollos anteriores. Se tiene que

$$\dot{\mathbf{h}}_w = \frac{\mathcal{W}d}{dt} (M_w \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{N}}) + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{N}}) M_w \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{N}} .$$

Note que, en esta última ecuación, el primer término se puede escribir como

$$\frac{\mathcal{W}d}{dt} (M_w \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{N}}) = M_w \frac{\mathcal{W}d}{dt} \left( \boldsymbol{\omega} + \dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + \dot{\delta}_w \hat{s} \right) .$$

El teorema de transporte es utilizado para establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{W}d}{dt} \boldsymbol{\omega} &= \frac{\mathcal{B}d}{dt} \boldsymbol{\omega} + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{W}}) \boldsymbol{\omega} , \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}} + S(\boldsymbol{\omega}) (\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + \dot{\delta}_w \hat{s}) , \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{W}d}{dt} (\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) &= \frac{\mathcal{G}_o d}{dt} (\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_o/\mathcal{W}}) \dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o , \\ &= \ddot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + S(\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) (\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + \dot{\delta}_w \hat{s}) , \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{W}d}{dt} (\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i) &= \frac{\mathcal{G}_i d}{dt} (\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i) + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}_i/\mathcal{W}}) \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i , \\ &= \ddot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + S(\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i) \dot{\delta}_w \hat{s} , \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\frac{\mathcal{W}d}{dt} (\dot{\delta}_w \hat{s}) = \ddot{\delta}_w \hat{s} + S(\dot{\delta}_w \hat{s}) \dot{\delta}_w \hat{s} = \ddot{\delta}_w \hat{s} . \quad (2.40)$$

Con (2.37), (2.38), (2.39) y (2.40), la derivada del momento angular de la rueda giratoria es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}}_w &= M_w \left[ \dot{\boldsymbol{\omega}} + \ddot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \ddot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + \ddot{\delta}_w \hat{s} + S(\boldsymbol{\omega}) (\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o + \dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + \dot{\delta}_w \hat{s}) \right. \\ &\quad \left. + S(\dot{\delta}_{g_o} \hat{g}_o) (\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i + \dot{\delta}_w \hat{s}) + S(\dot{\delta}_{g_i} \hat{g}_i) \dot{\delta}_w \hat{s} \right] \\ &\quad + S(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{N}}) M_w \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{W}/\mathcal{N}} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

*Observación.* Note que, en las ecuaciones de cada momento angular  $\mathbf{h}_i$ , y sus respectivas derivadas  $\dot{\mathbf{h}}_i$ , todos los vectores aún deberán ser expresados en coordenadas de  $\mathcal{B}$ , con ayuda de las correspondientes matrices de rotación. Lo mismo pasa con las matrices de inercia  $M_i$ , que están expresadas en coordenadas del

marco de referencia del elemento correspondiente. La forma en que estas matrices son expresadas en términos de  $\mathcal{B}$  es [1]

$$\begin{aligned}\mathcal{B}M_{g_o} &= R_{bg_o} \mathcal{G}_o M_{g_o} R_{g_o b} , \\ \mathcal{B}M_{g_i} &= R_{bg_i} \mathcal{G}_i M_{g_i} R_{g_i b} , \\ \mathcal{B}M_w &= R_{bg_i} \mathcal{G}_i M_w R_{g_i b} .\end{aligned}$$

Sean definidas las derivadas modificadas de cada momento angular

$$\dot{\mathbf{h}}'_i \triangleq \mathcal{B}\dot{\mathbf{h}}_i - \mathcal{B}M_i\dot{\boldsymbol{\omega}} , \quad (2.42)$$

y las matrices de inercia combinadas [1]

$$M = M_b + \mathcal{B}M_{g_o} + \mathcal{B}M_{g_i} + \mathcal{B}M_w , \quad (2.43)$$

$$M_{g_o g_i w} = \mathcal{B}M_{g_o} + \mathcal{B}M_{g_i} + \mathcal{B}M_w , \quad (2.44)$$

$$M_{g_i w} = \mathcal{B}M_{g_i} + \mathcal{B}M_w . \quad (2.45)$$

La ecuación de Euler establece que la derivada del momento angular es igual al par aplicado. Es decir,  $\dot{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\tau}_e$ . Con (2.42) y (2.43) se tiene la ecuación de movimiento

$$M\dot{\boldsymbol{\omega}} = -S(\boldsymbol{\omega})M_b\boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{h}}'_{g_o} - \dot{\mathbf{h}}'_{g_i} - \dot{\mathbf{h}}'_w + \boldsymbol{\tau}_e .$$

Finalmente, con el par aplicado

$$\boldsymbol{\tau}_a = -\dot{\mathbf{h}}'_{g_o} - \dot{\mathbf{h}}'_{g_i} - \dot{\mathbf{h}}'_w , \quad (2.46)$$

y  $\boldsymbol{\tau}_e = \boldsymbol{\tau}_d$  (donde  $\boldsymbol{\tau}_d$  es un par de torsión de perturbaciones externas), la ecuación de movimiento de un satélite con un DGVSCMG es

$$M\dot{\boldsymbol{\omega}} = -S(\boldsymbol{\omega})M_b\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_d . \quad (2.47)$$

El par desarrollado por el DGVSCMG y aplicado sobre el satélite, representado en la expresión (2.46), se calcula mediante la expresión (2.42) y las matrices de inercia combinadas (2.43)-(2.45). Agrupando términos, se obtiene la siguiente ecuación, en la cual se supone que todos los vectores están escritos en coordenadas de  $\mathcal{B}$ :



$$\begin{aligned}
\tau_a = & -\ddot{\delta}_{g_o} \{ M_{g_o g_i w} \hat{g}_o \} - \ddot{\delta}_{g_i} \{ M_{g_i w} \hat{g}_i \} - \ddot{\delta}_w \{ M_w \hat{s} \} - \dot{\delta}_{g_o} \{ M_{g_o g_i w} S(\omega) \hat{g}_o \\
& + S(\omega) M_{g_o g_i w} \hat{g}_o + S(\hat{g}_o) M_{g_o g_i w} \omega \} - \dot{\delta}_{g_i} \{ M_{g_i w} S(\omega) \hat{g}_i \\
& + S(\omega) M_{g_i w} \hat{g}_i + S(\hat{g}_i) M_{g_i w} \omega \} - \dot{\delta}_w \{ M_w S(\omega) \hat{s} + S(\omega) M_w \hat{s} \\
& + S(\hat{s}) M_w \omega \} - \dot{\delta}_{g_o} \dot{\delta}_{g_i} \{ M_{g_i w} S(\hat{g}_o) \hat{g}_i + S(\hat{g}_o) M_{g_i w} \hat{g}_i \\
& + S(\hat{g}_i) M_{g_i w} \hat{g}_o \} - \dot{\delta}_{g_o} \dot{\delta}_w \{ M_w S(\hat{g}_o) \hat{s} + S(\hat{g}_o) M_w \hat{s} + S(\hat{s}) M_w \hat{g}_o \} \\
& - \dot{\delta}_{g_i} \dot{\delta}_w \{ M_w S(\hat{g}_i) \hat{s} + S(\hat{g}_i) M_w \hat{s} + S(\hat{s}) M_w \hat{g}_i \} \\
& - \dot{\delta}_{g_o}^2 \{ S(\hat{g}_o) M_{g_o g_i w} \hat{g}_o \} - \dot{\delta}_{g_i}^2 \{ S(\hat{g}_i) M_{g_i w} \hat{g}_i \} - \dot{\delta}_w^2 \{ S(\hat{s}) M_w \hat{s} \} . \quad (2.48)
\end{aligned}$$

## Simplificación del modelo

Típicamente, la magnitud de la velocidad de la rueda giratoria  $\dot{\delta}_w$  de un DGVSCMG en operación es mucho mayor que las velocidades de los cardanes  $\dot{\delta}_{g_o}$  y  $\dot{\delta}_{g_i}$ . Además, la inercia de los cardanes no es suficientemente grande para llegar a dominar la inercia de la rueda. Estas suposiciones son razonables, según el principio de funcionamiento de un DGVSCMG, y comúnmente usadas [2, 30, 40]. Si se toman como ciertas esas suposiciones, entonces, como es muy común en la práctica de la ingeniería, es posible simplificar las ecuaciones de movimiento de un DGVSCMG [2, 30].

Sean considerados los valores de  $\dot{\delta}_{g_o}$  y  $\dot{\delta}_{g_i}$  mucho menores que  $\dot{\delta}_w$ , y las matrices de inercia  $M_{g_o}$  y  $M_{g_i}$  menores que  $M_w$ , tales que el momento angular en cada elemento del DGVSCMG puede escribirse como

$$\mathcal{G}_o \mathbf{h}_{g_o} = \mathcal{G}_o M_{g_o} \omega , \quad (2.49)$$

$$\mathcal{G}_i \mathbf{h}_{g_i} = \mathcal{G}_i M_{g_i} \omega , \quad (2.50)$$

$$\mathcal{G}_i \mathbf{h}_w = \mathcal{G}_i M_w \omega + \dot{\delta}_w \mathcal{G}_i M_w \mathcal{G}_i \hat{s} . \quad (2.51)$$

La matriz  $\mathcal{G}_i M_w = \text{diag} \{ \{ m_{w11} \ m_{w22} \ m_{w33} \} \}$ . De la ecuación (2.21), se tiene que el último término de (2.51) se puede escribir como  $\dot{\delta}_w \mathcal{G}_i M_w \mathcal{G}_i \hat{s} = \dot{\delta}_w m_{w11} \mathcal{G}_i \hat{s}$ . Sea definida la inercia de la rueda giratoria entorno a su eje de giro (que es también la inercia en el eje del motor que dirige al carda exterior)  $J_w = m_{w11}$ . Con ello, el momento angular combinado se puede escribir como

$$\mathbf{h} = (M_b + {}^B M_{g_o} + {}^B M_{g_i} + {}^B M_w) \omega + J_w \dot{\delta}_w {}^B \hat{s} . \quad (2.52)$$

Las matrices de inercia de cada elemento del DGVSCMG ( $M_{g_o}$ ,  $M_{g_i}$  y  $M_w$ ), en comparación con la matriz de inercia del satélite ( $M_b$ ), son menores<sup>4</sup>. Es por

<sup>4</sup>Una forma de comparar el tamaño de dos matrices es comparar sus normas. La norma  $p$  de una matriz  $A$  (o norma inducida de una matriz) se calcula como  $\|A\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} (\|A\mathbf{x}\|_p / \|\mathbf{x}\|_p)$ .

ello que también resulta razonable considerar

$$M = (M_b + {}^{\mathcal{B}}M_{g_o} + {}^{\mathcal{B}}M_{g_i} + {}^{\mathcal{B}}M_w) \approx M_b . \quad (2.53)$$

Finalmente, con (2.53) el momento angular total (2.52) resulta

$$\mathbf{h} \approx M_b \boldsymbol{\omega} + J_w \dot{\delta}_w {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{s}} . \quad (2.54)$$

La ecuación de Euler nos dice que la derivada del momento angular es igual al par externo aplicado  $\dot{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\tau}_e$ . Mediante el teorema de transporte (ver Apéndice A.3), y usando  $\boldsymbol{\tau}_e = \boldsymbol{\tau}_d$ , donde  $\boldsymbol{\tau}_d$  es un término que concentra los pares de torsión de perturbaciones externas, la ecuación de movimiento de un satélite dirigido por un DGVSCMG se calcula como

$$M_b \dot{\boldsymbol{\omega}} + S(\boldsymbol{\omega}) \left( M_b \boldsymbol{\omega} + J_w \dot{\delta}_w {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{s}} \right) + \left( J_w \ddot{\delta}_w {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{s}} + J_w \dot{\delta}_w \dot{{}^{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{s}}} \right) = \boldsymbol{\tau}_d .$$

Sea definido el par de torsión aplicado que entrega el DGVSCMG al satélite

$$\boldsymbol{\tau}_a = -\chi \boldsymbol{\eta} , \quad (2.55)$$

donde

$$\boldsymbol{\eta} = \left[ \dot{\delta}_{g_o} \quad \dot{\delta}_{g_i} \quad \dot{\delta}_w \right]^{\top} , \quad (2.56)$$

$$\chi = \left[ C(\delta_{g_o}, \delta_{g_i}, \dot{\delta}_w) \quad D(\delta_{g_o}, \delta_{g_i}) \right] ; \quad (2.57)$$

y las matrices  $C(\delta_{g_o}, \delta_{g_i}, \dot{\delta}_w)$  y  $D(\delta_{g_o}, \delta_{g_i})$  son definidas como

$$C = J_w \dot{\delta}_w \begin{bmatrix} -\sin(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) & -\cos(\delta_{g_o}) \sin(\delta_{g_i}) \\ \cos(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) & -\sin(\delta_{g_o}) \sin(\delta_{g_i}) \\ 0 & -\cos(\delta_{g_i}) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$D = J_w \begin{bmatrix} \cos(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) \\ \sin(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) \\ -\sin(\delta_{g_i}) \end{bmatrix} . \quad (2.59)$$

Finalmente, la ecuación de movimiento de un satélite dirigido por un DGVSCMG está dada por

$$M_b \dot{\boldsymbol{\omega}} = S(h) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_d . \quad (2.60)$$

El vector de entrada de control al sistema satélite-DGVSCMG es atribuido a  $\boldsymbol{\eta}$ . Además, de la definición de  $C$  y  $D$  se puede ver que, debido al término  $\dot{\delta}_w$  la norma de cada vector columna de la matriz  $C$  es mucho más grande que la norma de  $D$ . Es por ello que es preferible generar el par de torsión requerido para una

maniobra mediante cambios en el ángulo de los cardanes, en lugar de generarlo mediante cambios en la velocidad de giro de la rueda [2].

## Verificación de la ecuación de movimiento

A continuación, se presenta un método para verificar que la simulación de las ecuaciones de movimiento funciona correctamente, que fue introducido en [1, 29] y está basado en el principio de trabajo y energía, el cual establece que el trabajo resultante debido a la acción de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al cambio en la energía cinética que experimenta éste. Dicho método será aplicado, primero al modelo completo, cuya dinámica es descrita por las expresiones (2.47) y (2.48); después éste será aplicado sobre el modelo simplificado, cuya dinámica es descrita por las expresiones (2.55)-(2.60).

Con base en el principio de trabajo, la energía cinética de satélite rígido dirigido por un DGVSCMG, tomando en consideración el modelo completo (ecs. (2.47) y (2.48)), está dada por la expresión

$$T_c = \frac{1}{2} \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{N}}^\top M_b \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \omega_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}}^\top M_{g_o} \omega_{\mathcal{G}_o/\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \omega_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}}^\top M_{g_i} \omega_{\mathcal{G}_i/\mathcal{N}} + \frac{1}{2} \omega_{\mathcal{W}/\mathcal{N}}^\top M_w \omega_{\mathcal{W}/\mathcal{N}} . \quad (2.61)$$

El cambio en la energía cinética, dado por la derivada de ésta y también llamado trabajo, se escribe como

$$\dot{T}_c = \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{N}}^\top \tau_d + \dot{\delta}_{g_o} u_{g_o} + \dot{\delta}_{g_i} u_{g_i} + \dot{\delta}_w u_w , \quad (2.62)$$

donde  $u_i$  representan al par de torsión resultante en la rueda  $w$ , el cardán interior  $g_i$  y el cardán exterior  $g_o$ , calculados como

$$\begin{aligned} R_{g_i b} \left( {}^{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{h}}_w \right) &= \mathcal{G}_i \begin{bmatrix} u_w \\ \sim \\ \sim \end{bmatrix} , \\ R_{g_o b} \left( {}^{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{h}}_{g_i} + {}^{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{h}}_w \right) &= \mathcal{G}_o \begin{bmatrix} \sim \\ u_{g_i} \\ \sim \end{bmatrix} , \\ R_{g b} \left( {}^{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{h}}_{g_o} + {}^{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{h}}_{g_i} + {}^{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{h}}_w \right) &= \mathcal{G} \begin{bmatrix} \sim \\ \sim \\ u_{g_o} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Se puede revisar si una simulación del movimiento del satélite-DGVSCMG funciona correctamente al comparar la derivada numérica de la expresión analítica de la energía cinética (2.61) con la expresión analítica de esta misma derivada, escrita en (2.62). Para llevar a cabo esta prueba de verificación, sea considerado un satélite ágil cuya matriz de inercia es

$$M_b = \begin{bmatrix} 10.5 & 0.22 & 0.47 \\ 0.22 & 12.5 & 0.36 \\ 0.47 & 0.36 & 13.6 \end{bmatrix},$$

Otros parámetros y condiciones iniciales necesarios para la configuración de la simulación se concentran en la Tabla 2.1. La inercia del satélite y la inercia de la rueda giratoria, así como la velocidad inicial de ésta última, fueron tomadas de la simulación numérica del movimiento de un satélite ágil reportada en [2]. Los parámetros de inercia de la estructura de doble cardán fueron elegidos, en congruencia con la literatura, con magnitudes alrededor de diez veces menores que las asociadas a la inercia de la rueda giratoria.

Parámetro / Condición inicial	Valor	Unidades
${}^{g_o}M_{g_o}, {}^{g_i}M_{g_i}$	$\text{diag} \{[0.001 \ 0.001 \ 0.001]\}$	$kg \cdot m^2$
${}^{g_i}M_w$	$\text{diag} \{[0.016 \ 0.016 \ 0.016]\}$	$kg \cdot m^2$
$\sigma(t_0)$	$[0.4 \ -0.3 \ 0.2]^T$	
$\omega(t_0)$	$[-0.1 \ -0.05 \ 0.2]^T$	$rad/s$
$\delta_{g_o}(t_0), \delta_{g_i}(t_0)$	0	$rad$
$\dot{\delta}_{g_o}(t_0)$	0.01	$rad/s$
$\dot{\delta}_{g_i}(t_0)$	-0.05	$rad/s$
$\dot{\delta}_w(t_0)$	73	$rad/s$

Tabla 2.1: Parámetros para simulación de verificación de ecuaciones de movimiento de un satélite-DGVSCMG

La simulación numérica fue implementada en el entorno MATLAB<sup>®</sup> con el método de paso variable ode45 (Dormand-Prince) y tolerancia relativa de 1e-5. Las condiciones iniciales de orientación y velocidad angular reportadas fueron tomadas de [1], donde se llevó a cabo una prueba de verificación de las ecuaciones de movimiento de un satélite-DGVSCMG. Los pares de torsión externos y de perturbación, representados por  $\tau_d$ , fueron considerados cero durante la simulación. Además, fueron incluidos en la simulación tres servomotores que conducen al DGVSCMG, para los cuales se usó una ley de control especificando aceleración cero para la estructura de cardán y la rueda.

El movimiento del satélite ágil, el par de torsión de cada motor y el cambio en la energía son presentados en la Figura 2.3. En ella, el gráfico de la derivada de la

energía cinética muestra la comparación entre la derivada numérica de la ecuación (2.61) y la expresión analítica (2.62). Aunque se espera una ligera discrepancia entre ambas gráficas debidas al error numérico, se concluye que ambos gráficos mayormente coinciden, lo que implica que se puede confiar en que esta simulación funciona en congruencia con el principio de trabajo y energía.

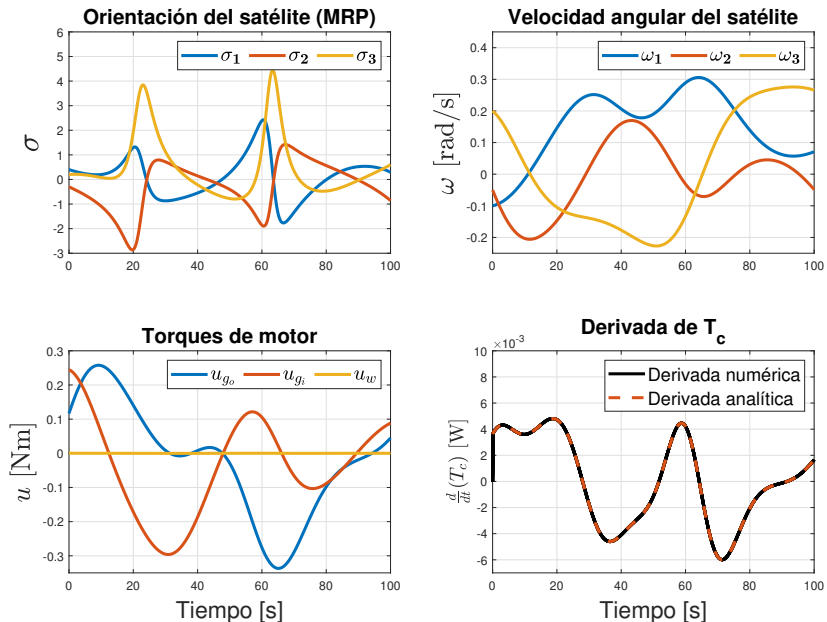


Figura 2.3: Simulación del movimiento de un satélite conducido por un DGVSCMG con modelo completo.

Por su parte, el modelo simplificado de un satélite-DGVSCMG (ecs. (2.55)-(2.60)) fue examinado bajo la misma lupa que el modelo completo, en cuyo caso el principio de trabajo dicta que la energía cinética está dada por la expresión

$$T_c = \frac{1}{2} \omega^\top M_b \omega + \frac{1}{2} J_w \dot{\delta}_w^\top \dot{\delta}_w . \quad (2.63)$$

Con ello, la expresión analítica del cambio en la energía cinética es

$$\dot{T}_c = \omega_{B/N}^\top \tau_d + \dot{\delta}_{g_o} u_{g_o} + \dot{\delta}_{g_i} u_{g_i} + \dot{\delta}_w u_w , \quad (2.64)$$

donde  $u_i$  representa al par de torsión resultante en la rueda  $w$ , el cardán interior  $g_i$  y el cardán exterior  $g_o$  respectivamente, lo cuales son calculados como

$$R_{g_i b} \left( {}^B \dot{\mathbf{h}}_w \right) = \mathcal{G}_i \begin{bmatrix} u_w \\ \sim \\ \sim \end{bmatrix}, \quad R_{g_o b} \left( {}^B \dot{\mathbf{h}}_w \right) = \mathcal{G}_o \begin{bmatrix} \sim \\ u_{g_i} \\ \sim \end{bmatrix}, \quad R_{g_b} \left( {}^B \dot{\mathbf{h}}_w \right) = \mathcal{G} \begin{bmatrix} \sim \\ \sim \\ u_{g_o} \end{bmatrix};$$

con  ${}^B \dot{\mathbf{h}}_w = J_w \ddot{\delta}_w {}^B \hat{\mathbf{s}} + J_w \dot{\delta}_w {}^B \dot{\hat{\mathbf{s}}} + J_w \dot{\delta}_w S(\omega) {}^B \hat{\mathbf{s}}$  y  ${}^B \dot{\hat{\mathbf{s}}} = \frac{\partial}{\partial \delta_{g_o}} \dot{\delta}_{g_o} + \frac{\partial}{\partial \delta_{g_i}} \dot{\delta}_{g_i}$ .

La simulación numérica de esta prueba también fue configurada con el método numérico, los parámetros y las condiciones iniciales que fueron enunciadas arriba, y los resultados son reportados en la Figura 2.4. Del gráfico de comparación entre la derivada numérica y la derivada analítica, se confirma que la simulación es congruente con el principio de trabajo.

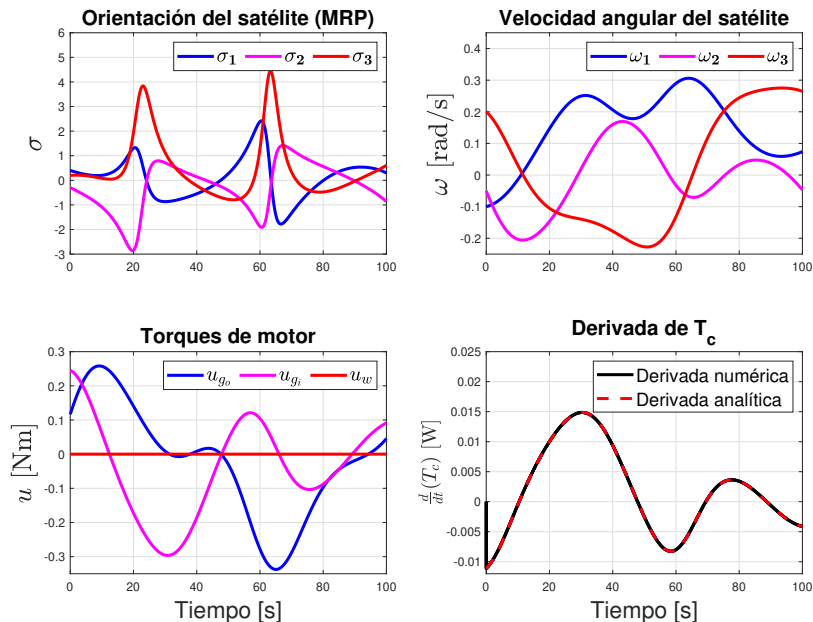


Figura 2.4: Simulación del movimiento de un satélite conducido por un DGVSCMG con modelo simplificado.

Ambos modelos, el completo y el simplificado, tienen un desempeño similar.

Esto es ilustrado en la Figura 2.5, donde es evidente la similitud entre el desempeño de ambos modelos en términos de la orientación, la velocidad angular y el par en los motores. No obstante, era de esperar que gracias a la simplificación que se consideró, existan diferencias en el desempeño del sistema. Una de ellas es evidente en el gráfico que muestra la evolución de la derivada numérica de la energía en el sistema en la Figura 2.5, el cual muestra la diferencia entre la evolución del trabajo en el modelo completo y en el modelo simplificado.

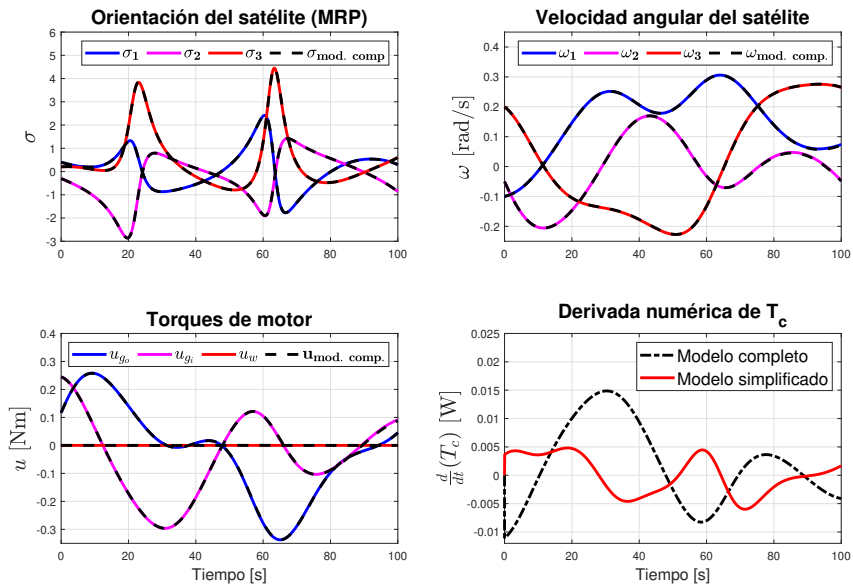


Figura 2.5: Simulación del movimiento de un satélite conducido por un DGVSCMG con modelo simplificado: gráficos comparativos del desempeño del modelo completo y del modelo simplificado.

## Singularidades de un DGVSCMG

Un tema recurrente cuando se usan MEDs para el control de orientación de un satélite son las singularidades que presentan estos en su espacio de trabajo. Hasta ahora, no existe un arreglo o configuración de MEDs sin singularidad, aún cuando existe redundancia en los arreglos. Sin embargo, sí que existen configuraciones que favorecen la evasión de las condiciones singulares, así como técnicas

que permiten evitarlas [20, 21, 36, 38]. En este sentido, el uso de un DGVSCMG puede resultar ventajoso, pues es un dispositivo que, dados sus grados de libertad, permite la evasión de condiciones singulares. En [2] se ha introducido el análisis de las singularidades presentes en un DGVSCMG, según la simplificación de las ecuaciones de movimiento que se ha considerado.

Un DGVSCMG, según la simplificación considerada arriba, opera bajo condiciones regulares siempre que  $\text{rank}(C) = 2$ , y presenta condiciones singulares cuando  $C$  pierde rango, lo que ocurre cuando el ángulo del cardán interior  $\delta_{g_i}$  es igual a  $\pi/2$  o  $3\pi/2$ . Es decir, si  $\delta_{g_i} = \pi/2$  o  $\delta_{g_i} = 3\pi/2$ , entonces las matrices  $C$  y  $D$  son escritas como

$$C = J_w \dot{\delta}_w \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\delta_{g_o}) \\ 0 & -\sin(\delta_{g_o}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = J_w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

y ocurre que  $\text{rank}(C) < 2$ . Sean denotados los vectores columna de la matriz  $C$  como  $C_i$ , para  $i = 1, 2$ . Entonces  $C_i^\top D = 0$ , para  $i = 1, 2$ . Note que, cuando un DGVSCMG se encuentra en una condición singular, éste pierde un grado de libertad, pues  $\hat{s}$  es paralelo a  $\hat{g}_o$ , y los cambios en el ángulo de del cardán exterior  $\delta_{g_o}$  no producen par de torsión de control en absoluto.

### 2.3. Motor síncrono de imanes permanentes.

La entrada de control del satélite-DGVSCMG ha sido asignada al vector  $\eta$ , definido en (2.56). Considere que la dirección del DGVSCMG está a cargo de un conjunto de tres motores síncronos de imanes permanentes (PMSM, por las siglas en inglés de *permanent magnet synchronous motor*), los cuales se encargan de generar las velocidades  $\dot{\delta}_{g_o}$  y  $\dot{\delta}_{g_i}$ , y la aceleración  $\ddot{\delta}_w$ , necesarias para dirigir al DGVSCMG al desempeño requerido para la conducción del satélite. En esta sección serán brevemente revisadas las características de un PMSM y las ventajas que su uso representa. También será presentado de manera resumida el modelo matemático que describe los estados del sistema electromecánico que constituye al PMSM.

El desarrollo de nuevos materiales que se magnetizan permanentemente ha traído consigo el surgimiento de máquinas eléctricas que aprovechan sus características electromagnéticas. En un motor de corriente directa bobinado convencional es posible controlar el flujo magnético por polo, pues este depende de la corriente que pasa por el devanado de campo. Por el contrario, el flujo magnético en un motor con imanes permanentes es prácticamente constante, debido a la alta



densidad de flujo residual (retentividad) y la alta coercitividad magnética<sup>5</sup> de materiales como el *samario-cobalto* y el *neodimio-hierro-boro*<sup>6</sup> [42]. Además, para una misma potencia de salida en el motor, uno con imanes permanentes tiene mayor eficiencia y requiere menos material que un motor de corriente directa bobinado de los mismos valores nominales [43].

Además de las mencionadas arriba, otras características de los motores con imanes permanentes son su alta densidad de potencia y su alta relación par-inercia [18]. Son todas estas características, con especial mención de la alta eficiencia, la alta densidad de potencia, y consecuentemente su tamaño pequeño (en comparación con el motor DC devanado), los PMSMs han ganado popularidad en aplicaciones de robots rígidos [42] y vehículos no tripulados, como drones o aeronaves; todas ellas, aplicaciones donde los motores están integrados en la carga mecánica, por los que sus dimensiones de masa y volumen cobran mayor relevancia.

## Modelo matemático de un PMSM

El modelo de un PMSM es introducido en [44], aunque su obtención y las suposiciones que se hacen sobre el sistema se pueden revisar más a detalle en [3] y las referencias que ahí aparecen.

La dinámica de un PMSM puede ser descrita en un marco de referencia  $(a, b)$  fijo al estator por el modelo de cuarto orden

$$\dot{\theta} = \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.66)$$

$$J\dot{\Omega} = k_m [-I_a \sin(p\theta) + I_b \cos(p\theta)] + z_1, \quad (2.67)$$

$$L\dot{I}_a = -RI_a + k_m\Omega \sin(p\theta) + u_a, \quad (2.68)$$

$$L\dot{I}_b = -RI_b - k_m\Omega \cos(p\theta) + u_b; \quad (2.69)$$

donde  $\theta$  y  $\Omega$  denotan la posición y la velocidad del rotor del PMSM;  $\mathbf{i}_{ab} = [I_{ia}, I_{ib}]^\top$  y  $\mathbf{u}_{ab} = [u_{ia}, u_{ib}]^\top$  denotan a la corriente y la tensión en el estator, correspondientemente. La tensión en el estator es la entrada de control del PMSM. Los parámetros del modelo son: el número de pares de polos  $p$ , la inercia en el rotor  $J$ , la resistencia y la inductancia en los devanados del estator,  $R$  y  $L$ , y la constante de *torque* del motor  $k_m$ . El término  $z_1$  representa una vibración dependiente de la posición, ocasionada por excentricidad debida a imperfecciones en la fabricación y desequilibrio en la carga del rotor.

<sup>5</sup>De *magnetic coercivity*, que se refiere a una medida de la capacidad de un material ferromagnético para soportar un campo magnético externo sin desmagnetizarse [41].

<sup>6</sup>El neodimio y el samario son dos de los 17 elementos químicos que se conocen como "tierras raras". Así, a los imanes con aleaciones compuestas por estos elementos se les conoce como imanes de tierras raras.

La transformación de Park, introducida en [45], y muy usada [3, 46, 47], es una transformación de vectores expresados en el marco de referencia fijo al estator  $(a, b)$ , a vectores expresados en un marco de referencia  $(d, q)$  sincronizado con el estator, que se escribe como

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(p\theta) & \sin(p\theta) \\ -\sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{dq} &= \mathcal{P}(\theta)\mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{i}_{dq} &= \mathcal{P}(\theta)\mathbf{i}_{ab}. \end{aligned}$$

Mediante la transformación de Park es posible expresar las ecuaciones dinámicas de un PMSM en el marco  $(d, q)$ , con lo que las ecuaciones (2.66)-(2.69) se convierten en

$$\dot{\theta} = \Omega \quad (2.71)$$

$$J\dot{\Omega} = k_m I_q + z_1 \quad (2.72)$$

$$L\dot{I}_d = -RI_d + Lp\Omega I_q + u_d \quad (2.73)$$

$$L\dot{I}_q = -RI_q - Lp\Omega I_d - k_m\Omega + u_q. \quad (2.74)$$

*Observación.* El modelo en coordenadas  $(d, q)$  (2.71)-(2.74) resulta más apropiado para el diseño de una ley de control basada en modelo. Aunque, una vez diseñada, la ley de control resultante está en coordenadas  $(d, q)$ , por lo que ésta deberá ser transformada a coordenadas  $(a, b)$  para su implementación sobre el PMSM; es decir, dado que  $\mathcal{P}^{-1}(\theta_i) = \mathcal{P}^\top(\theta_i)$ , se debe hacer la transformación

$$\mathbf{u}_{ab} = \mathcal{P}(\theta)^\top \mathbf{u}_{dq}.$$

El modelo aquí presentado ha sido validado, y controladores han sido propuestos. Por un lado, se sabe que un control PI es suficiente para resolver el problema de seguimiento asintótico de velocidad de un PMSM [4, 44], con resultados de estabilidad global para el sistema en lazo cerrado [47, 48]. Aunque, también se han desarrollado controladores no lineales basados en modelo, como en [3], donde se presenta el desarrollo de un control adaptable basado en linealización por realimentación. Otro ejemplo más reciente es el diseño de control no lineal basado en observador desarrollado para este modelo en [46], y su correspondiente experimento en [49]. La principal contribución de estos últimos trabajos se encuentra

en el diseño del esquema de control, en el cual se asumió que solo las corrientes y las tensiones en el estator están disponibles para ser medidas y realimentadas. Con base en ello y usando la técnica de control adaptable para lidiar con la incertidumbre en la carga del motor, se propuso un observador de la velocidad del motor. Se presenta la prueba que garantiza el seguimiento asintótico de velocidad.

## 2.4. Perturbaciones y vibraciones.

En su mayoría, los resultados de control de orientación de vehículos espaciales han sido desarrollados bajo condiciones ideales de operación. Sin embargo, en la práctica hay diversos factores que pueden mermar el desempeño del sistema. En particular, entre estos factores existen dos principales, que son el tema de este capítulo: *torques* externos que afectan a los satélites en órbita, y vibraciones generadas por estructuras mecánicas abordo. A los primeros los llamaremos perturbaciones externas, o exógenas. Mientras que, las vibraciones mecánicas abordo también son conocidas como perturbaciones endógenas.

### Perturbaciones externas

La frontera que separa la atmósfera terrestre del espacio exterior no está claramente definida, pues la densidad de la atmósfera se desvanece suavemente en el espacio. Los estudios del funcionamiento de aeronaves dieron lugar a la construcción de una definición utilitaria de la demarcación entre la atmósfera de la Tierra y el espacio exterior conocida como *línea de Kármán*<sup>7</sup>, cuya altitud fue establecida a partir de los cálculos de Theodore von Kármán a 100 kilómetros sobre el nivel del mar. La Federación Aeronáutica Internacional (en francés, *Fédération Aéronautique Internationale*, FAI) acepta esta definición como un estándar [50].

Los satélites cuya órbita tiene una altitud de 150-2,000 kilómetros sobre la superficie de la tierra y ángulo de inclinación pequeño con respecto al plano ecuatorial son considerados satélites de órbita baja, lo cual guarda congruencia con la definición de la *línea de Kármán* ya que las órbitas más bajas que ésta no son estables debido al rozamiento atmosférico. Otro tipo de órbitas terrestres son las llamadas *órbitas polares*, con ángulos de inclinación cercanos a los 90 grados que pasan por los polos de la Tierra; una más es la *órbita geoestacionaria*, una órbita circular a 35,786 kilómetros de distancia de la superficie terrestre, alineada con el

---

<sup>7</sup>*Línea de Kármán* es como se denota al límite entre la atmósfera y el espacio exterior. Esta definición ha sido fundamental para la construcción de una demarcación entre la aeronáutica y la astronáutica, así como para establecer las diferencias entre una aeronave y un vehículo espacial.

plano ecuatorial y orbitando en el sentido de rotación de la Tierra<sup>8</sup>.

Los satélites en órbita están sometidos a perturbaciones en todo momento. El gradiente de gravedad, la radiación ambiental, la resistencia aerodinámica y la influencia del campo magnético, son algunas de las fuentes identificadas de estas perturbaciones dominantes. El gráfico de la Figura 2.6 muestra un diagrama comparativo de las magnitudes de los diferentes pares que típicamente afectan a los satélites en distintas altitudes. El análisis que dio origen a dicho gráfico fue reportado en [28], y debe ser tratado como un ejemplo, pues las magnitudes de estos pares suelen depender fuertemente de la órbita designada y del diseño de cada satélite. Este fue un estudio realizado para un satélite en forma de cilindro con 5 ft de diámetro y 30 ft de altura, cuya órbita es circular y toma valores en altitudes dentro del rango de 100 a 100,000 kilómetros.

Para las perturbaciones consideradas en este trabajo se supuso que se cuenta con un satélite ágil en órbita con altitud de 1000 kilómetros. A dicha altitud las perturbaciones debidas al gradiente de gravedad, la radiación ambiental, la resistencia aerodinámica y la influencia del campo magnético tienen influencia significativa; sin embargo, las perturbaciones dominantes provienen del par de gradiente de gravedad, con magnitudes alrededor de  $10^{-3}$  [N·m]. Aunque se puede establecer una cota superior para la magnitud de las perturbaciones ambientales, estas no deben ser ignoradas desde el enfoque de control, pues la precisión en la orientación requerida en los instrumentos espaciales así lo exige.

Las perturbaciones ambientales suelen ser acotadas y de magnitudes relativamente pequeñas [28]. Aunque, tampoco pueden ser ignoradas desde el punto de vista de control, pues la precisión en la orientación requerida en los instrumentos espaciales así lo exigen.

## Vibraciones

Las perturbaciones endógenas, por el contrario de las anteriores, están estrechamente relacionadas con la estructura del vehículo, en particular con partes internas con movimientos no uniformes, radiación emitida abordo y masa expulsada.

Por su estructura y principio de funcionamiento, y en congruencia con el principio de conservación del momento angular, las perturbaciones endógenas en un satélite cuya orientación es conducida por un MED se deben al movimiento no

---

<sup>8</sup>La *órbita geostacionaria* está definida de tal manera que un objeto en dicha órbita visto desde la superficie de la Tierra, parece inmóvil en la bóveda celeste. A dicho objeto se le denomina satélite geosíncrono.

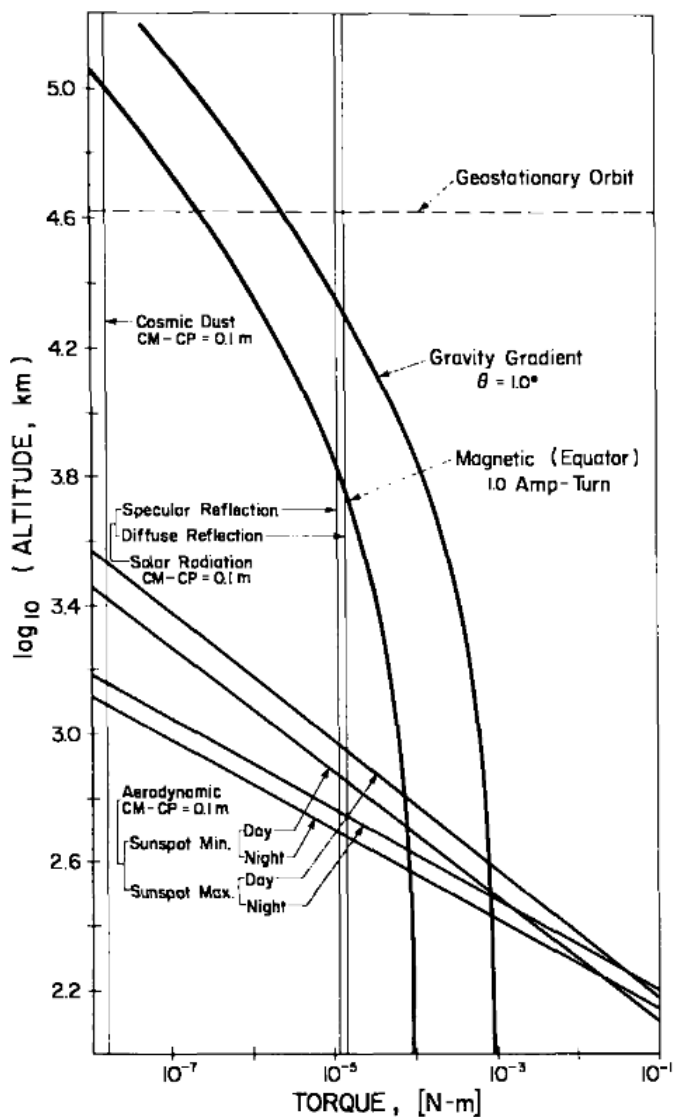


Figura 2.6: Diagrama comparativo de los distintos pares que afectan un satélite vs. la altitud, tomado de [9].

uniforme de la partes rotatorias del MED, comúnmente ocasionado por excentricidad debida a imperfecciones en la fabricación y desequilibrio en la carga del rotor de cada parte rotatoria [12, 15, 31].

## Compensación de perturbaciones

Algunas de las soluciones al problema de rechazo de perturbaciones externas usan un modelo interno, el cual caracteriza las perturbaciones mediante una combinación de funciones sinusoides [13, 27]. Por otro lado, en [14] no se usa un modelo interno, en su lugar es propuesto un esquema de control inverso óptimo adaptable, el cual resuelve el problema de seguimiento asintótico de orientación con rechazo de perturbaciones de energía acotada; aunque, cuando las perturbaciones son de energía no acotada, con este esquema se logra el seguimiento asintótico de orientación con atenuación de las perturbaciones.

En este trabajo las perturbaciones externas son consideradas desconocidas de magnitud acotada (con cota conocida), y serán tomadas en cuenta durante el diseño de un esquema de control que, en lazo cerrado con el sistema, logra la estabilidad práctica de las soluciones. Para ello, será usado el concepto de acotamiento final y la teoría de sistemas no-autónomos con perturbaciones no desvanecientes, reportados en los capítulos 4 y 9 de [51], respectivamente.

Por su parte, para tratar las perturbaciones endógenas que ocasionan vibraciones existen diferentes técnicas. Una forma de lidiar con ellas es disipar las vibraciones mediante elementos pasivos amortiguadores; otra es mediante el uso de elementos activos (actuadores externos) para aislar la vibración; una tercera forma, que combina lo mejor de las dos anteriores, es el uso de técnicas de aislamiento híbrido pasivo-activo [15]. Desde la perspectiva de control, una alternativa más es atenuar, o cancelar, las vibraciones mediante un diseño de control. En este sentido, se han desarrollado esquemas de control con compensación de vibración que, de manera similar a las perturbaciones externas, están basados en un modelo interno que representa a la vibración [13]. En el enfoque basado en modelo interno es común considerar la vibración como una función (o una combinación de funciones) periódicas dependiente del tiempo [12, 13, 27], de la forma

$$z(t) = \Lambda \cos(\psi t + \Phi) , \quad (2.75)$$

donde  $\Lambda$  es la amplitud,  $\psi$  es la frecuencia angular y  $\Phi$  es el ángulo de fase. Sin embargo, como ha sido sugerido en [17], las vibraciones producidas por excentricidad o desequilibrios debidos a imperfecciones mecánicas pueden ser mejor descritas por una función periódica que depende de la posición del rotor, en lugar de depender

del tiempo. La vibración, esta vez en función de la posición del rotor es

$$z(t) = \Lambda \cos(\psi\theta + \Phi) , \quad (2.76)$$

donde  $\theta$  es la posición angular del rotor. La prueba de estabilidad y los resultados experimentales reportados en [31] soportan la hipótesis de que es posible construir un modelo interno que se ajusta bien a la forma de las vibraciones, logrando el rechazo de los efectos causados por la excentricidad y el seguimiento asintótico de la velocidad deseada en el motor.

En comparación con el enfoque que hace uso de funciones periódicas dependientes del tiempo, el rechazo de vibración mediante el modelo interno dependiente de la posición se ajusta mejor a los datos experimentales del fenómeno. Más aún, las vibraciones internas son la principal causa de perturbaciones de satélites en órbita [12, 15], por lo que reducir las vibraciones mediante el diseño de una esquema de control es una forma plausible de mejorar el desempeño del sistema. Es por ello que, la adopción de este enfoque dentro de una propuesta de control de velocidad con compensación de vibraciones para los motores que dirigen al DGVSCMG, presumiblemente, permite controlar la velocidad de cada motor y atender el problema de las vibraciones originadas a nivel mecánico, por excentricidad e imperfecciones, con una acción de control eléctrico.





## Capítulo 3

# Control de orientación de un satélite

El control de orientación para un vehículo espacial es un problema parcial enmarcado dentro del problema general que trata esta tesis. El presente capítulo da cuenta de una nueva propuesta de diseño de control que resuelve el problema de seguimiento de orientación de un satélite sometido a perturbaciones externas.

Entre los problemas que han emergido dentro del paradigma cibernético, el del control de orientación de un cuerpo rígido es uno de los principales, pues su dominio de aplicación es amplio, dentro del cual podemos agrupar el control de maniobras de aeronaves, vehículo espaciales, submarinos, drones, robots manipuladores, entre otros.

Las leyes de control PD (proporcional - derivativa) y PD+ (proporcional-derivativa más términos de precompensación), populares en el control de robots manipuladores por la simpleza en su estructura, han sido extensamente estudiadas a lo largo de las décadas pasadas, mostrando proveer estabilidad uniforme asintótica del origen del sistema en lazo cerrado [7, 25, 26]. Más aún, en [8] ha sido probado que el control PD+, de hecho, provee estabilidad uniforme exponencial al origen del sistema en lazo cerrado.

En este trabajo se conserva parcialmente la estructura PD+, salvo una modificación, con la cual se busca aclarar el diseño del controlador y simplificar la prueba de estabilidad uniforme exponencial para el origen del sistema en lazo cerrado. Cuando son consideradas perturbaciones acotadas, con cota conocida, se puede probar que el sistema en lazo cerrado es uniformemente prácticamente asintóticamente estable.

### 3.1. Control de seguimiento.

Sean considerados: un satélite, con ecuación cinemática en términos de MRP (2.15) y ecuación dinámica (2.20) con  $\tau_e = \tau_a$ , donde  $\tau_a$  es un par de control aplicado sobre el satélite, es decir,

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}G(\sigma)\omega, \quad (3.1)$$

$$M_b\dot{\omega} = S(M_b\omega)\omega + \tau_a; \quad (3.2)$$

la matriz de rotación  $R_d = R(\sigma_d)$ , que describe la orientación de un sistema coordenado  $\mathcal{D}$  con respecto al marco de referencia inercial  $\mathcal{N}$ , con un vector de MRP deseado  $\sigma_d$  continuamente diferenciable; y la velocidad angular  $\omega_d(t) \in \mathbb{R}^3$  continuamente diferenciable, que representa la velocidad de  $\mathcal{D}$  relativa a  $\mathcal{N}$  en coordenadas de  $\mathcal{D}$ .

La cinemática de un hipotético satélite cuya orientación y velocidad son las deseadas está dada por la ecuación  $\dot{R}_d = R_d S(\omega_d)$ ,  $R_d(t_0) \in \mathcal{SO}(3)$ , que en términos de MRP se escribe como

$$\dot{\sigma}_d = \frac{1}{2}G(\sigma_d)\omega_d. \quad (3.3)$$

Sean definidos el error de orientación y el error de velocidad angular (ver Apéndice A.5)

$$\begin{aligned} R_e &= R_e(\sigma_e) = R(\sigma_d)^\top R(\sigma), \\ \omega_e &= \omega - \bar{\omega}_d, \quad \text{donde } \bar{\omega}_d = R_e^\top \omega_d. \end{aligned}$$

Como se establece en el Apéndice A.5, la dinámica del error de orientación está dada por

$$\dot{R}_e = R_e S(\omega_e) \Leftrightarrow \dot{R}_e^\top = -S(\omega_e)R_e^\top,$$

que, en correspondencia con la teoría, se puede reescribir en términos de MRP como

$$\dot{\sigma}_e = \frac{1}{2}G(\sigma_e)\omega_e. \quad (3.4)$$

*Observación.* El error de orientación se puede reescribir en términos de MRP usando las expresiones de rotaciones sucesivas del Apéndice A.6 como

$$\sigma_e = \frac{(1 - \|\sigma\|^2)\sigma_d + (1 - \|\sigma_d\|^2)\sigma - 2S(\sigma_d)\sigma}{1 + \|\sigma\|^2\|\sigma_d\|^2 - 2\sigma^\top\sigma_d}. \quad (3.5)$$

*Observación.* La matriz  $R_e(\sigma_e) \in \mathcal{SO}(3)$  es una transformación del marco de referencia del cuerpo del satélite  $\mathcal{B}$  al sistema coordenado deseado  $\mathcal{D}$ . Note que, según las ecuaciones (2.7) y (3.5), si  $\sigma = \sigma_d$  implica  $\sigma_e = \mathbf{0}$ , que a su vez implica  $R_e(\mathbf{0}) = I_{3 \times 3}$ .

*Observación.* Con  $\bar{\omega}_d$  es denotada la velocidad angular del sistema coordenado  $\mathcal{D}$  relativa a  $\mathcal{N}$ , pero en coordenadas de  $\mathcal{B}$ . La derivada temporal de  $\bar{\omega}_d$  es calculada como

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}}_d &= \dot{R}_e^\top \omega_d + R_e^\top \dot{\omega}_d, \\ &= -S(\omega_e) \bar{\omega}_d + R_e^\top \dot{\omega}_d, \\ &= -S(\omega) \bar{\omega}_d + R_e^\top \dot{\omega}_d. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considere el problema de hallar una ley de control  $\tau_a$  que, en lazo cerrado con el sistema (3.1)-(3.2), logre  $\sigma_e \rightarrow \mathbf{0}$  y  $\omega_e \rightarrow \mathbf{0}$  uniformemente asintóticamente. Para cumplir con tal propósito, considere la ley de control PD+ modificada

$$\tau_a = M_b \dot{\omega}_r - S(M_b \omega) \omega_r - \frac{1}{2} (1 + \sigma_e^\top \sigma_e) \sigma_e - K_c \mathbf{s}, \quad (3.7)$$

donde  $K_c$  es una matriz simétrica positiva definida,  $\omega_r$  es la variable compuesta definida como

$$\omega_r = \bar{\omega}_d - 2\lambda_c \sigma_e, \quad \lambda_c > 0, \quad (3.8)$$

cuya derivada temporal está dada por

$$\dot{\omega}_r = R_e^\top \dot{\omega}_d + [S(\bar{\omega}_d) - \lambda_c G(\sigma_e)] \omega_e; \quad (3.9)$$

y  $\mathbf{s} = \omega - \omega_r$  es el error compuesto.

**Lema 3.1.1.** *Considere el sistema (3.1)-(3.2). La ley de control (3.7) en lazo cerrado con el sistema hace que  $\sigma_e \rightarrow \mathbf{0}$  y  $\omega_e \rightarrow \mathbf{0}$  uniformemente exponencialmente.*

**Prueba:** Con (3.8), la dinámica del error de orientación (3.4) se puede reescribir como

$$\dot{\sigma}_e = \frac{1}{2} G(\sigma_e) \mathbf{s} - \lambda_c \frac{1 + \sigma_e^\top \sigma_e}{2} \sigma_e. \quad (3.10)$$

Por otro lado, la dinámica del error compuesto  $\mathbf{s}$  se calcula como  $\dot{\mathbf{s}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_r$ , que en conjunto con las expresiones (3.2) y (3.9), dan lugar a la ecuación dinámica

$$\begin{aligned} M_b \dot{\mathbf{s}} &= M_b \dot{\boldsymbol{\omega}} - M_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_r, \\ &= S(M_b \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_a - M_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_r \\ &= S(M_b \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s} + S(M_b \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\tau}_a - M_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_r; \end{aligned}$$

el cual, en lazo cerrado con la ley de control (3.7), resulta

$$M_b \dot{\mathbf{s}} = S(M_b \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s} - \frac{1}{2} (1 + \boldsymbol{\sigma}_e^\top \boldsymbol{\sigma}_e) \boldsymbol{\sigma}_e - K_c \mathbf{s}. \quad (3.11)$$

Sea la función candidata de Lyapunov

$$V_s(\mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}_e) = \boldsymbol{\sigma}_e^\top \boldsymbol{\sigma}_e + \frac{1}{2} \mathbf{s}^\top M_b \mathbf{s} > 0. \quad (3.12)$$

Dado que la matriz de inercia es simétrica positiva definida, por el Lema 4.3 en [51], se sabe que

$$\underline{\alpha}_s(\|\mathbf{x}\|) \leq V_s(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha}_s(\|\mathbf{x}\|), \quad (3.13)$$

con  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\sigma}_e^\top, \mathbf{s}^\top]^\top$  y las funciones clase  $\mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_s(\|\mathbf{x}\|) &= \|\boldsymbol{\sigma}_e\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\min}(M_b) \|\mathbf{s}\|^2, \\ \bar{\alpha}_s(\|\mathbf{x}\|) &= \|\boldsymbol{\sigma}_e\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(M_b) \|\mathbf{s}\|^2; \end{aligned}$$

donde  $\lambda_{\min}(M_b)$  y  $\lambda_{\max}(M_b)$ , denotan los valores propios mínimo y máximo, respectivamente, de la matriz  $M_b$ . La derivada de  $V_s(\mathbf{x})$  a lo largo  $\mathbf{x}$  se calcula como  $\dot{V}_s = 2\boldsymbol{\sigma}_e^\top \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e + \mathbf{s}^\top M_b \dot{\mathbf{s}}$ . Con (3.10) y (3.11), y haciendo uso de las propiedades de la matriz  $G(\cdot)$  alistadas en el Apéndice A.4, esta derivada se puede reescribir como

$$\dot{V}_s = \boldsymbol{\sigma}_e^\top [G(\boldsymbol{\sigma}_e) \mathbf{s} - \lambda_c (1 + \boldsymbol{\sigma}_e^\top \boldsymbol{\sigma}_e) \boldsymbol{\sigma}_e] + \mathbf{s}^\top [S(M_b \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s} - G(\boldsymbol{\sigma}_e) \boldsymbol{\sigma}_e - K_c \mathbf{s}]. \quad (3.14)$$

La matriz  $S(\cdot)$  es anti-simétrica de acuerdo con sus propiedades, alistadas en el Apéndice A.2, pues satisface  $S^\top(\cdot) = -S(\cdot)$ ; esto implica  $\mathbf{s}^\top S(M_b \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s} = 0$ . Además, note que  $\boldsymbol{\sigma}_e^\top G(\boldsymbol{\sigma}_e) \mathbf{s} = \mathbf{s}^\top G(\boldsymbol{\sigma}_e) \boldsymbol{\sigma}_e$ . Entonces, la ecuación (3.14) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -\lambda_c (1 + \|\boldsymbol{\sigma}_e\|^2) \|\boldsymbol{\sigma}_e\|^2 - \mathbf{s}^\top K_c \mathbf{s} \\ &\leq -\alpha_s(\|\mathbf{x}\|), \end{aligned} \quad (3.15)$$

con

$$\alpha_s(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_c \|\sigma_e\|^2 + \lambda_{\min}(K_c) \|\mathbf{s}\|^2 ,$$

donde  $\lambda_{\min}(K_c)$  denota al menor entre los valores propios de la matriz  $K_c$ .

Como consecuencia del Teorema 4.10 en [51], la existencia de las funciones de acotamiento de clase  $\mathcal{K}$   $\underline{\alpha}_s$ ,  $\bar{\alpha}_s$  y  $\alpha_s$  implican estabilidad uniforme exponencial del origen del sistema que describe la dinámica del error, compuesto por las ecuaciones (3.10) y (3.11); es decir,  $\sigma_e \rightarrow \mathbf{0}$   $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$  uniformemente exponencialmente.

Además,  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$  exponencialmente implica  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow (\bar{\omega}_d - 2\lambda_c \sigma_e)$  exponencialmente. Dado que  $\sigma_e \rightarrow \mathbf{0}$ , entonces  $w \rightarrow \bar{\omega}_d$  exponencialmente; es decir,  $\boldsymbol{\omega}_e \rightarrow \mathbf{0}$  uniformemente exponencialmente. Más aún, como  $R_e^\top \rightarrow I_{3 \times 3}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_d$  asintóticamente exponencialmente.  $\square$

## 3.2. Control de seguimiento robusto.

En la sección anterior se establece una ley de control de par que resuelve el problema de seguimiento de orientación para un vehículo espacial en condiciones ideales. Sin embargo, los satélites en órbita suelen estar sometidos a perturbaciones, de las cuales se conocen magnitudes promedio [28]. Por eso resulta práctico considerar estas perturbaciones de magnitud acotada para su tratamiento. En la presente sección se extiende el resultado del Lema 3.1.1 para sistemas con perturbaciones externas de magnitud acotada con cota conocida.

Considere el sistema (2.15), (2.20) con  $\tau_e = \tau_a + \tau_d$ , donde  $\tau_a$  es el par de control aplicado sobre el satélite, y  $\tau_d$  es un par de perturbación externa cuya norma satisface la cota superior  $\|\tau_d\| \leq \bar{\tau}_d$ , escrito como

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} G(\sigma) \boldsymbol{\omega} \tag{3.16}$$

$$M_b \dot{\boldsymbol{\omega}} = S(M_b \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + \tau_a + \tau_d . \tag{3.17}$$

Para cumplir con el propósito actual, se mantiene la estructura de tipo PD+ de la ley de control (3.7) en la sección anterior, donde se usan la variable combinada  $\boldsymbol{\omega}_r$  y su derivada, y el error combinado  $\mathbf{s}$ . Aunque, a diferencia del caso ideal, se agrega un término para compensar las perturbaciones  $\tau_d$ . La ley de control que se usa es

$$\tau_a = M_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_r - S(M_b \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}_r - \frac{1}{2} (1 + \sigma_e^\top \sigma_e) \sigma_e - K_c \mathbf{s} + \tau_c , \tag{3.18}$$

donde  $\tau_c$ , está dada por

$$\tau_c = -\frac{\bar{\tau}_d^2 \mathbf{s}}{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\| + \varepsilon} , \quad \text{para algún } 0 < \varepsilon \ll 1 . \tag{3.19}$$

**Corolario 3.2.1.** *Considere el sistema (3.16)-(3.17). La ley de control (3.18)-(3.19) hace que las trayectorias del sistema en lazo cerrado sean uniformemente prácticamente asintóticamente estables. Específicamente, para cualquier condición inicial  $(\sigma_e(t_0), \mathbf{s}(t_0)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , se satisface que todas las variables son acotadas, y  $(\sigma_e(t), \mathbf{s}(t)) \rightarrow \mathbf{B}_{\delta_s}$  uniformemente asintóticamente; donde  $\mathbf{B}_{\delta_s} = \{\mathbf{x} = [\sigma_e^\top, \mathbf{s}^\top]^\top : \|\mathbf{x}\| \leq \delta_s\}$ , donde  $\delta_s^2 = \frac{\varepsilon}{\min\{\lambda_{\min}(K_c), \lambda_c\}}$  y  $\lambda_{\min}(K_c)$  denota al menor entre los valores propios de  $K_c$ .*

**Prueba:** La dinámica del error de orientación está dada por la ecuación (3.10). Mientras que, la dinámica del error compuesto es

$$M_b \dot{\mathbf{s}} = S(M_b \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s} + S(M_b \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_d - M_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_r ,$$

que con la ley (3.18), se escribe como

$$M_b \dot{\mathbf{s}} = S(M_b \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s} - \frac{1}{2} (1 + \sigma_e^\top \sigma_e) \sigma_e - K_c \mathbf{s} + \boldsymbol{\tau}_d + \boldsymbol{\tau}_c . \quad (3.20)$$

Tome a función de Lyapunov para el sistema sin perturbaciones (3.12), a saber,  $V_s = \sigma_e^\top \sigma_e + \frac{1}{2} \mathbf{s}^\top M_b \mathbf{s} > 0$ . Con las ecuaciones (3.10) y (3.20) la derivada de  $V_s$  a lo largo de  $(\sigma_e, \mathbf{s})$  se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -\lambda_c (1 + \|\sigma_e\|^2) \|\sigma_e\|^2 - \mathbf{s}^\top K_c \mathbf{s} + \mathbf{s}^\top \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{s}^\top \boldsymbol{\tau}_c \quad (3.21) \\ &\leq -\lambda_c \|\sigma_e\|^2 - \lambda_{\min}(K_c) \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{\bar{\tau}_d^2 \|\mathbf{s}\|^2}{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\| + \varepsilon} + |\mathbf{s}^\top \boldsymbol{\tau}_d| . \end{aligned}$$

La desigualdad de Hölder establece que, para cualesquiera dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  se satisface  $|\mathbf{x}^\top \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$ , con  $p, q \in (1, \infty)$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces, con  $p = q = 2$  la desigualdad de Hölder implica

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &\leq -\lambda_c \|\sigma_e\|^2 - \lambda_{\min}(K_c) \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{\bar{\tau}_d^2 \|\mathbf{s}\|^2}{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\| + \varepsilon} + \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\tau}_d\| \\ &\leq -\lambda_c \|\sigma_e\|^2 - \lambda_{\min}(K_c) \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{\bar{\tau}_d^2 \|\mathbf{s}\|^2}{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\| + \varepsilon} + \|\mathbf{s}\| \bar{\tau}_d \\ &\leq -\lambda_c \|\sigma_e\|^2 - \lambda_{\min}(K_c) \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{\varepsilon \bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\|}{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\| + \varepsilon} . \end{aligned}$$

Note que  $\frac{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\|}{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\| + \varepsilon} < 1$ . Entonces, se tiene que

$$\dot{V}_s \leq -\lambda_c \|\sigma_e\|^2 - \lambda_{\min}(K_c) \|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon .$$

Que se puede reescribir como

$$\dot{V}_s \leq -\lambda_c \|\sigma_e\|^2 - \lambda_{\min}(K_c) \|\mathbf{s}\|^2 , \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \delta_s ,$$

con  $\mathbf{x} = [\sigma_e^\top, \mathbf{s}^\top]^\top$  y  $\delta_s = \left( \frac{\varepsilon}{\min\{\lambda_c, \lambda_{\min}(K_c)\}} \right)^{1/2}$ . De acuerdo con el Lema 9.2 en [51] (ver Apéndice B.2), el cual constituye una herramienta de análisis de la estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanecientes, las trayectorias del sistema conformado por la dinámica del error de orientación (3.10) y la dinámica del error compuesto (3.20) son uniformemente finalmente acotadas, con convergencia exponencial a la bola de acotamiento final  $\mathbf{B}_{\delta_s} = \left\{ \mathbf{x} = [\sigma_e^\top, \mathbf{s}^\top]^\top : \|\mathbf{x}\| \leq \delta_s \right\}$ , pues siempre el sistema sin perturbaciones es uniformemente exponencialmente estable.  $\square$

### 3.3. Simulaciones.

Se llevaron a cabo simulaciones numéricas de la orientación de un satélite ágil en lazo cerrado con la ley de control PD+ modificada recién presentada líneas arriba, esto con la intención de verificar que la ley de control resuelve el problema de seguimiento de orientación. Las simulaciones se realizaron con la herramienta de software MATLAB<sup>®</sup>, con el método numérico ode4 (Runge-Kutta) con paso fijo de  $10^{-3}$ . Los resultados son comparados con el control PD+ clásico. Además, con la finalidad de ilustrar el caso de un satélite sometido a perturbaciones, se realizó la simulación con la ley de control robusta correspondiente. A continuación se presentan los resultados de dichas simulaciones.

Parámetro/ Condición inicial	Valor	Unidades
$\lambda_c$	1	
$K_c$	$10 I_{3 \times 3}$	
$\omega(t_0)$	$[0 \ 0 \ 0]^\top$	<i>rad/s</i>
$\sigma(t_0)$	$[0.1 \ 0.057 \ 0.003]^\top$	
$\sigma_d(t_0)$	$[0.1707 \ 0.1205 \ 0.0621]^\top$	

Tabla 3.1: Parámetros de controlador PD+ modificado y condiciones iniciales.

Considere un satélite ágil como el reportado en las simulaciones en [2], cuya matriz de inercia es

$$M_b = \begin{bmatrix} 10.5 & 0.22 & 0.47 \\ 0.22 & 12.5 & 0.36 \\ 0.47 & 0.36 & 13.6 \end{bmatrix}.$$

Las condiciones iniciales y los parámetros del controlador necesarios para configurar la simulación son desplegados en la Tabla 3.1. En congruencia con la teoría,

la orientación deseada es generada mediante la ecuación (3.3) con

$$\omega_d = \left[ 0.125 \sin\left(\frac{2\pi}{30}t\right) \quad 0.075 \sin\left(\frac{5\pi}{27}t\right) \quad 0.035 \sin\left(\frac{6\pi}{28}t\right) \right]^T .$$

La simulación del control de seguimiento de un satélite, en lazo cerrado con la ley de control PD+ modificada, es ilustrada en la Figura 3.1. En ésta se presenta

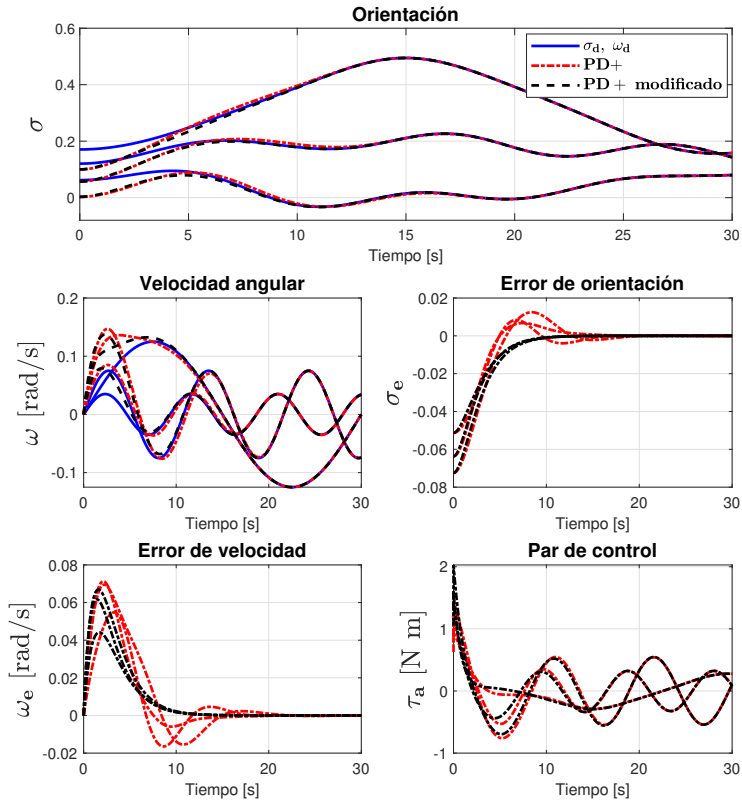


Figura 3.1: Control de orientación de un satélite: ley PD+ (rojo) y ley PD+ modificada (negro).

la evolución de la orientación, la velocidad angular y el par aplicado del sistema en lazo cerrado. Adicionalmente, en la misma figura es mostrado el desempeño del



sistema en lazo cerrado con una ley de control PD+ clásica<sup>1</sup>. El sobrepaso y las oscilaciones presentes cuando se usa la ley de control PD+ pueden deberse a una selección de ganancias de control inadecuadas. Al margen de ello, el desempeño del sistema no es muy distinto con ambos controladores, dada la similitud en su estructura.

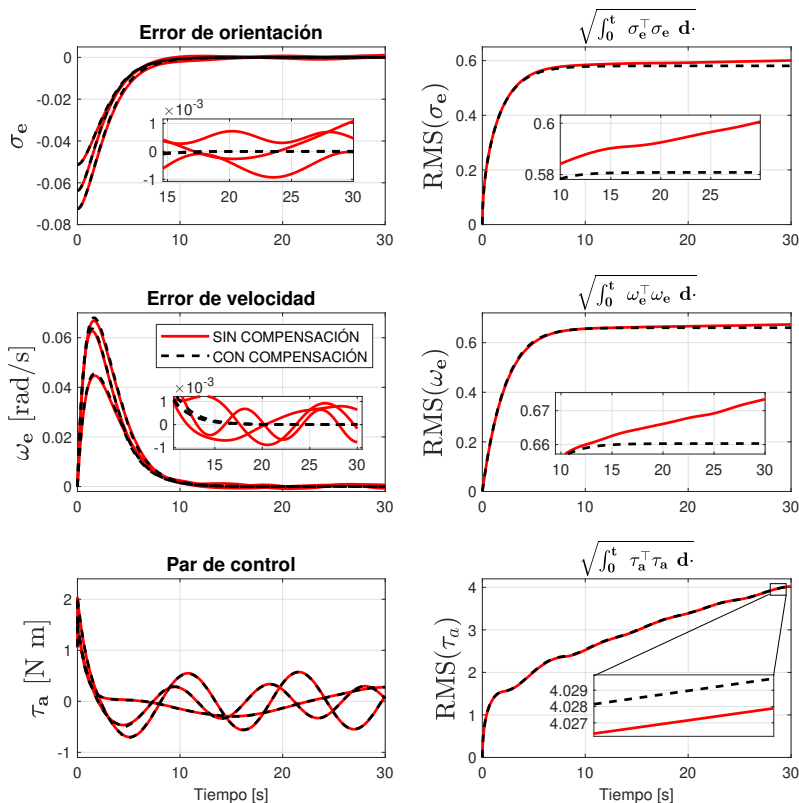


Figura 3.2: Control de orientación de un satélite sometido a perturbaciones externas, sin compensación (rojo) y con compensación de éstas (negro).

<sup>1</sup>La ley de control PD+ está dada por  $\tau_a = -k_p \sigma_e - k_v \omega_e + M_b R_e^T \dot{\omega}_d + S(\bar{\omega}_d) M_b \bar{\omega}_d$ , para cualesquiera  $k_p, k_v > 0$  [7, 8, 26]. Siguiendo las recomendaciones en [8], para la simulación se utilizaron los parámetros de controlador  $k_p = \omega_n^2$ ,  $k_v = 2\omega_n$  y  $\omega_n = 3.5$

Por otra parte, se realizó una simulación del desempeño de un satélite en lazo cerrado con la ley de control PD+ modificada, sometido a pares externos de perturbaciones ambientales<sup>2</sup>. Estos pares de perturbaciones ambientales en el espacio pueden ser modelados mediante funciones periódicas más una ligera desviación [52]. Perturbaciones de este tipo son usualmente consideradas en la literatura, como en [2, 13]. Siguiendo estos ejemplos, el término de perturbación fue considerado como

$$T_d = \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}t) + 1 \\ 1.5 \sin(\frac{\pi}{6}t) - 1 \\ 2 \sin(\frac{\pi}{12}t) + 1 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \quad [\text{N m}] ,$$

cuya norma satisface la cota superior  $\|\tau_d\| \leq \bar{\tau}_d$ , con  $\bar{\tau}_d = 4 \times 10^{-2}$  [N m]. Para la ley de control, se ha seleccionado el parámetro  $\varepsilon = 0.1 \times 10^{-6}$ .

En la Figura 3.2 se ilustra el resultado de la simulación del sistema sometido a perturbaciones, haciendo una comparación entre el desempeño del sistema con compensación de las perturbaciones y el desempeño del sistema sin la compensación de éstas. En dicha figura se muestra el error de orientación, el error de velocidad y el par de control, así como el valor RMS de todos éstos. Los gráficos comparativos permiten apreciar la mejoría del desempeño del sistema cuando se contempla la compensación de las perturbaciones; en ellos se aprecia la convergencia del error de orientación y del error de velocidad a cero cuando se contempla la compensación de las perturbaciones. El valor RMS del par aplicado  $\tau_a$  está asociado al gasto energético de la señal de control. Como es de esperar, el valor RMS de aquel es mayor cuando se le exige al controlador compensar los efectos de las perturbaciones externas.

---

<sup>2</sup>Se consideraron perturbaciones ambientales en satélites de órbita baja, con altitudes de entre 150 y 2,000 kilómetros sobre la superficie de la Tierra, las cuales suelen tener magnitudes de entre  $10^{-3}$  y  $10^{-1}$  [N m]

## Capítulo 4

# Control de velocidad de un PMSM

En el capítulo de antecedentes, en la sección 2.3, fueron introducidas las características de los motores síncronos de imanes permanentes (PMSM), así como el modelo del sistema dinámico que describe el cambio en sus variables de estado, el cual se compone de dos subsistemas interconectados, uno mecánico y otro eléctrico (ver Sección 2.3). En el presente capítulo es presentado un esquema de control de velocidad para un PMSM que presenta vibraciones endógenas. Se tratará, cada uno por su parte, el control de seguimiento de velocidad del subsistema mecánico, y el control de seguimiento de corriente a nivel eléctrico. Para el sistema resultante, con el subsistema eléctrico conectado en cascada con el subsistema mecánico, se asegura el seguimiento asintótico de velocidad, así como la identificación asintótica de la vibración.

Dado el interés que los PMSMs han despertado por las bondades que ofrece su alto desempeño, el control de un PMSM es un tema ampliamente discutido desde la década de los 90. Explotando las ventajas de la estructura del modelo de un PMSM en coordenadas  $(d, q)$  (ecuaciones (2.71)-(2.74)) han surgido controladores para la posición y la velocidad de un PMSM sin sensores, cuya acción de realimentación únicamente requiere de las variables eléctricas del motor, omitiendo así la necesidad de sensores para medir las variables mecánicas [4, 46, 49, 53]. Específicamente, en [46] ha sido introducido un esquema de control basado en observador para un PMSM sin sensores, el cual fue validado experimentalmente en [49]. Una versión simplificada de este controlador es usado en [4], donde, para resolver el problema de control de seguimiento de corriente, es implementada una ley de control PI. Esta idea será tomada y utilizada en la presente sección para

resolver el problema de control del subsistema eléctrico.

Por otro lado, para el control de velocidad del subsistema mecánico en condiciones ideales será considerado un control PD. Sin embargo, a consecuencia de excentricidad y distribución no uniforme de masa en la carga, e imperfecciones de fabricación, es muy común que aparezcan vibraciones en muchos sistemas mecánicos. Como se ha discutido en 2.4, estas vibraciones, por su origen endógeno, pueden ser modeladas como funciones periódicas que dependen de la posición angular del rotor [17]. Esta idea ha sido explotada en [31], donde fue introducido un modelo interno de la perturbación, cuya representación en el espacio de estados es dependiente de la velocidad del rotor, a partir de la cual fue diseñado un predictor adaptable que permite el rechazo las perturbaciones endógenas que aquí se están estudiando. Estas ideas son tomadas prestadas en este trabajo para implementar un control de seguimiento de velocidad con rechazo de vibraciones para un PMSM.

Sea el subsistema mecánico de un PMSM cuya dinámica es descrita por las ecuaciones (2.71)-(2.72), las cuales son reescritas aquí:

$$\dot{\theta} = \Omega , \quad (4.1)$$

$$J\dot{\Omega} = k_m I_q + z_1 ; \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{x} = [\theta \ \Omega]^\top$  es el estado, compuesto por las variables mecánicas habituales de posición y velocidad angulares, respectivamente,  $I_q$  es la entrada de control de corriente en el estator y  $z_1$  representa un par de entrada que corresponde a una perturbación. Los parámetros del modelo son la inercia en el rotor  $J$  y la constante de torque  $k_m$ , ambas constantes positivas.

## 4.1. Modelo interno.

Asuma que el término de perturbación  $z_1$  corresponde a vibraciones endógenas ocasionadas por excentricidad y distribución no uniforme de la masa acoplada al rotor, así como por imperfecciones de fabricación. Como ha sido discutido en la Sección 2.4, esta clase de vibraciones pueden ser modeladas mediante una función sinusoidal que depende de la posición angular del rotor, de la forma

$$z_1(\theta) = \Lambda \cos(\psi\theta + \Phi) , \quad (4.3)$$

donde  $\Lambda$  es la amplitud,  $\psi$  es la frecuencia de posición angular y  $\Phi$  es el ángulo de fase.

Para rechazar esta clase de perturbaciones, tomemos prestada la idea, original en [31], de representar estos efectos mediante un modelo interno en el espacio de estados. Este es un

compensarlas mediante un esquema de identificación adaptable de los parámetros de un modelo interno, el cual representa a estas perturbaciones endógenas en el espacio de estados.

Considere el modelo interno cuyas variables de estado son  $z_1$ , definida como en (4.3), y  $z_2 = -\frac{\Lambda}{\Psi} \sin(\psi\theta + \Phi)$ . Entonces, la dinámica del modelo interno es

$$\dot{z}_1 = \varphi\Omega z_2, \quad (4.4)$$

$$\dot{z}_2 = -\Omega z_1; \quad (4.5)$$

donde  $\varphi = \psi^2$  es el cuadrado de la frecuencia de posición.

## 4.2. Control de velocidad en condiciones ideales.

Considere condiciones ideales hipotéticas, bajo las cuales el término de perturbación  $z_1$  es conocido. Considere, además, una trayectoria de velocidad deseada continuamente diferenciable  $\Omega^*$ . Sea definido el error de velocidad  $\Omega_e = \Omega^* - \Omega \rightarrow 0$ . El objetivo es encontrar una ley de control  $I_q(t)$  tal que  $\Omega_e \rightarrow 0$  asintóticamente. Para ello, considere la ley de control PD

$$I_q = \frac{1}{k_m} \left[ -k_p(\Omega - \Omega^*) - z_1 + J\dot{\Omega}^* \right], \quad (4.6)$$

con alguna constante positiva  $k_p$ .

**Lema 4.2.1.** *Considere el sistema (4.1)-(4.2). El sistema en lazo cerrado con la ley de control (4.6) es tal que sus variables de estado son acotadas y  $\Omega_e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Prueba:** La dinámica del error de velocidad se calcula como  $J\dot{\Omega}_e = \dot{\Omega}^* - \dot{\Omega}$ . Con (4.2), ésta dinámica puede ser reescrita como

$$J\dot{\Omega}_e = -k_m I_q - z_1 + J\dot{\Omega}^*. \quad (4.7)$$

Con (4.6) en (4.7) se tiene la ecuación diferencial  $J\dot{\Omega}_e = -k_p\Omega_e$ , cuyas soluciones son de la forma  $\Omega_e(t) = \Omega_e(t_0)e^{-(k_p t)}$ ; lo cual prueba que  $\Omega_e \rightarrow 0$  exponencialmente. Además,  $\Omega_e \rightarrow 0$  implica  $\Omega \rightarrow \Omega^*$ . Si se supone que  $\Omega^*$  es acotada para todo  $t \geq 0$ , entonces  $\Omega$  es acotada para todo  $t \geq 0$ . Finalmente,  $\Omega$  acotada implica que  $\theta$  es acotada también.

□

### 4.3. Control de seguimiento con rechazo de vibración.

Considere el sistema aumentado, compuesto por el sistema mecánico (4.1)-(4.2) y el modelo interno (4.4)-(4.5), cuyos parámetros  $J$ ,  $k_m$ ,  $\varphi$  son conocidos. Suponga que la velocidad angular  $\Omega$  es una variable de estado medible, mientras que no se tiene acceso a la medición de  $z_1$  y  $z_2$ , y no pueden ser realimentadas. Además, sea la trayectoria de velocidad angular deseada para el rotor  $\Omega^*(t)$  continuamente diferenciable. El objetivo es diseñar una ley de control  $I_q(t)$  tal que para el sistema aumentado, con las suposiciones mencionadas,  $\Omega_e = \Omega^* - \Omega \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow 0$ .

#### Diseño de observador.

Por el momento, los parámetros de la perturbación (4.3) se consideran conocidos. Para cumplir con el propósito descrito, la ley de control (4.6) es insuficiente, pues no se tiene disponible la medición de  $z_1$  para ser realimentada. Esta dificultad es superada mediante el diseño de un esquema de observación para estimar las variables necesarias en la ley de control.

Con un observador de orden reducido se pueden estimar las variables de estado  $z_1$  y  $z_2$ . Sin embargo, un observador de orden completo es menos sensible al ruido, por lo que puede resultar una mejor opción. Considere la estructura de observador

$$J\dot{\hat{\Omega}} = k_m I_q + \hat{z}_1 - k_o (\hat{\Omega} - \Omega) , \quad (4.8)$$

$$\dot{\hat{z}}_1 = \Omega \varphi \hat{z}_2 - k_e (\hat{\Omega} - \Omega) - k_e (\Omega^* - \Omega) , \quad (4.9)$$

$$\dot{\hat{z}}_2 = -\Omega \hat{z}_1 ; \quad (4.10)$$

donde  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{z}_1$  y  $\hat{z}_2$  son estimaciones de  $\Omega$ ,  $z_1$ , y  $z_2$ , respectivamente; y,  $k_o$  y  $k_e$  son constantes positivas. La ley de control

$$I_q = \frac{1}{k_m} \left[ -k_p (\Omega - \Omega^*) - \hat{z}_1 + J\dot{\Omega}^* \right] , \quad (4.11)$$

con alguna constante positiva  $k_p$ , satisface el objetivo definido arriba, como lo establece el siguiente Lema.

**Lema 4.3.1.** *Considere el sistema (4.1)-(4.2) aumentado con el modelo interno (4.4)-(4.5). El sistema en lazo cerrado con el esquema de observador (4.8)-(4.10) y la ley de control con rechazo de perturbaciones (4.11) es tal que  $\hat{z}_1 \rightarrow z_1$  y  $\Omega_e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Prueba:** Considere el error de seguimiento de velocidad  $\Omega_e = \Omega^* - \Omega$  y los errores de estimación  $\tilde{\Omega} = \hat{\Omega} - \Omega$ ,  $\tilde{z}_1 = \hat{z}_1 - z_1$  y  $\tilde{z}_2 = \hat{z}_2 - z_2$ . Las ecuaciones que describen la dinámica de estas variables de error en lazo cerrado son

$$J\dot{\Omega}_e = -k_p\Omega_e + \tilde{z}_1, \quad (4.12)$$

$$J\dot{\tilde{\Omega}} = -k_o\tilde{\Omega} + \tilde{z}_1, \quad (4.13)$$

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \Omega\varphi\tilde{z}_2 - k_e\tilde{\Omega} - k_e\Omega_e, \quad (4.14)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = -\Omega\tilde{z}_1. \quad (4.15)$$

Considere la función candidata de Lyapunov

$$V_m = \frac{1}{2} \left[ k_e J (\Omega_e^2 + \tilde{\Omega}^2) + \tilde{z}_1^2 + \varphi \tilde{z}_2^2 \right] > 0, \quad (4.16)$$

cuya diferencial total está dada por

$$\dot{V}_m = k_e\Omega_e J\dot{\Omega}_e + k_e\tilde{\Omega} J\dot{\tilde{\Omega}} + \tilde{z}_1\dot{\tilde{z}}_1 + \varphi\tilde{z}_2\dot{\tilde{z}}_2. \quad (4.17)$$

Con las ecuaciones (4.12)-(4.15) en (4.17), se tiene que

$$\dot{V}_m = -k_p k_e \Omega_e^2 - k_o k_e \tilde{\Omega}^2 \leq 0. \quad (4.18)$$

Dado que todas las variables son continuas, y aplicando los argumentos estándar del Lema de Barbalat [54], se sabe que  $\Omega_e \rightarrow 0$  y  $\tilde{\Omega} \rightarrow 0$  uniformemente globalmente asintóticamente. Además, de la ecuación (4.12), o bien de la ecuación (4.13), se sigue que  $\tilde{z}_1 \rightarrow 0$  uniformemente globalmente asintóticamente.  $\square$

### Ley de adaptación.

Para dar un paso más hacia la meta establecida en el inicio de este capítulo, considere que los parámetros de la perturbación (4.3) son desconocidos, lo que implica que  $\varphi$  es desconocida. Para este caso, la estructura de control-observador (4.8)-(4.11) resulta útil pero insuficiente. Según el nuevo requerimiento, un esquema completo con rechazo de perturbaciones puede ser completado mediante el diseño de una ley de adaptación para  $\hat{\varphi}$ , que es la variable de estimación del parámetro  $\varphi = \psi^2$ .

Considere el esquema de control-observador

$$I_q = \frac{1}{k_m} \left[ -k_p (\Omega - \Omega^*) - \hat{z}_1 + J\dot{\Omega}^* \right] , \quad (4.19)$$

$$J\dot{\tilde{\Omega}} = k_m I_q + \hat{z}_1 - k_o (\hat{\Omega} - \Omega) , \quad (4.20)$$

$$\dot{\hat{z}}_1 = \Omega \hat{\varphi} \hat{z}_2 - k_e (\hat{\Omega} - \Omega) - k_e (\Omega^* - \Omega) , \quad (4.21)$$

$$\dot{\hat{z}}_2 = -\Omega \hat{z}_1 . \quad (4.22)$$

La ley de adaptación será diseñada mediante el análisis presentado a continuación.

Considere el error de seguimiento de velocidad  $\Omega_e = \Omega^* - \Omega$ , los errores de estimación  $\tilde{\Omega} = \hat{\Omega} - \Omega$ ,  $\tilde{z}_1 = \hat{z}_1 - z_1$  y  $\tilde{z}_2 = \hat{z}_2 - z_2$ , y el error de adaptación  $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi} - \varphi$ . La dinámica de las variables de error son dadas por las ecuaciones

$$J\dot{\Omega}_e = -k_p \Omega_e + \tilde{z}_1 , \quad (4.23)$$

$$J\dot{\tilde{\Omega}} = -k_o \tilde{\Omega} + \tilde{z}_1 , \quad (4.24)$$

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \Omega \varphi \tilde{z}_2 + \Omega \tilde{\varphi} \tilde{z}_2 - k_e \tilde{\Omega} - k_e \Omega_e , \quad (4.25)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = -\Omega \tilde{z}_1 , \quad (4.26)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \dot{\hat{\varphi}} . \quad (4.27)$$

Además, considere la función  $V_{ma} = V_m + \frac{1}{2} k_a^{-1} \tilde{\varphi}^2$ , reescrita como

$$V_{ma} = \frac{1}{2} \left[ k_e J \left( \Omega_e^2 + \tilde{\Omega}^2 \right) + \tilde{z}_1^2 + \varphi \tilde{z}_2^2 + k_a^{-1} \tilde{\varphi}^2 \right] > 0 , \quad (4.28)$$

con alguna constante  $k_a$  positiva; cuya diferencial total está dada por

$$\dot{V}_{ma} = k_e \Omega_e J \dot{\Omega}_e + k_e \tilde{\Omega} J \dot{\tilde{\Omega}} + \tilde{z}_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \varphi \tilde{z}_2 \dot{\tilde{z}}_2 + k_a^{-1} \dot{\tilde{\varphi}}^2 . \quad (4.29)$$

Con las ecuaciones de error (4.23)-(4.27) en (4.29) y tratamiento algebraico resulta la ecuación

$$\dot{V}_{ma} = -k_p k_e \Omega_e^2 - k_o k_e \tilde{\Omega}^2 + \tilde{\varphi} \left[ \Omega \tilde{z}_1 \tilde{z}_2 + k_a^{-1} \dot{\tilde{\varphi}} \right] .$$

Esto sugiere la definición de la ley de adaptación

$$\dot{\hat{\varphi}} = -k_a \Omega \tilde{z}_1 \tilde{z}_2 ; \quad (4.30)$$

la cual conduce a la función semi-negativa definida

$$\dot{V}_{ma} = -k_p k_e \Omega_e^2 - k_o k_e \tilde{\Omega}^2 \leq 0 , \quad (4.31)$$



cuya existencia implica que  $\Omega_e$  y  $\tilde{\Omega}$  son acotadas. Como en la prueba del Lema 4.3.1, los argumentos estándar del Lema de Barbalat pueden ser usados para concluir que, de hecho,  $\Omega_e$ ,  $\tilde{\Omega}$  y  $\tilde{z}_1$  tienden a cero uniformemente asintóticamente.

Note que  $z_1$  es desconocida. Entonces, aunque la ley de adaptación (4.30) es apropiada para el análisis, no es posible su implementación directa, pues requiere del conocimiento de  $z_1$ , dado que  $\dot{\hat{\varphi}} = -k_a \Omega \hat{z}_2 (\hat{z}_1 - z_1)$ , o del conocimiento de la aceleración  $\dot{\Omega}$ , dado que  $\dot{\hat{\varphi}} = -k_a \Omega \hat{z}_2 (\hat{z}_1 - J\dot{\Omega} + k_m I_q)$ . Aunque, un cambio de coordenadas en  $\hat{\varphi}$ , introducido en [31], muestra que la medición de la aceleración, de hecho, no es necesaria.

Para este propósito, sea reescrita la ley de adaptación como

$$\dot{\hat{\varphi}} = -k_a \Omega \hat{z}_2 (\hat{z}_1 + k_m I_q) + k_a J \hat{z}_2 \Omega \dot{\Omega} .$$

Sin embargo, note que  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Omega^2 = \Omega \dot{\Omega}$ . Entonces, se puede escribir

$$\dot{\hat{\varphi}} = -k_a \Omega \hat{z}_2 (\hat{z}_1 + k_m I_q) + \frac{1}{2} k_a J \hat{z}_2 \frac{d}{dt} (\Omega^2) .$$

Más aún, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{z}_2 \Omega^2) &= \dot{\hat{z}}_2 \Omega^2 + \hat{z}_2 \frac{d}{dt} \Omega^2 , \\ &= -\Omega^3 \hat{z}_1 + \hat{z}_2 \frac{d}{dt} \Omega^2 ; \end{aligned} \quad (4.32)$$

es decir,

$$\hat{z}_2 \frac{d}{dt} \Omega^2 = \frac{d}{dt} (\hat{z}_2 \Omega^2) + \Omega^3 \hat{z}_1 . \quad (4.33)$$

Entonces, con la ecuación (4.33) la ley de adaptación se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varphi}} &= -k_a \Omega \hat{z}_2 (\hat{z}_1 + k_m I_q) + \frac{1}{2} k_a J \left[ \frac{d}{dt} (\hat{z}_2 \Omega^2) + \Omega^3 \hat{z}_1 \right] , \\ &= -k_a \Omega \left[ \hat{z}_2 (\hat{z}_1 + k_m I_q) - \frac{1}{2} J \Omega^2 \hat{z}_1 \right] + \frac{1}{2} k_a J \frac{d}{dt} (\hat{z}_2 \Omega^2) . \end{aligned}$$

Recordando que  $\dot{\hat{\varphi}} = \frac{d}{dt} \hat{\varphi}$ , la última ecuación da origen a

$$\frac{d}{dt} \left[ \hat{\varphi} - \frac{1}{2} k_a J \hat{z}_2 \Omega^2 \right] = -k_a \Omega \left[ \hat{z}_2 (\hat{z}_1 + k_m I_q) - \frac{1}{2} J \Omega^2 \hat{z}_1 \right] .$$

Entonces, mediante el cambio de coordenadas

$$\hat{\varrho} = \hat{\varphi} - \frac{1}{2} k_a J (\hat{z}_2 \Omega^2) , \quad (4.34)$$

la ley de adaptación se escribe como

$$\dot{\hat{\rho}} = -k_a \Omega \left[ \hat{z}_2 (\hat{z}_1 + k_m I_q) - \frac{1}{2} J \Omega^2 \hat{z}_1 \right]. \quad (4.35)$$

La ley de adaptación (4.35) sí se puede implementar directamente, ya que no requiere de  $z_1$ , y por supuesto tampoco de la aceleración del rotor.

**Lema 4.3.2.** *La ley de control (4.19) con el observador de orden completo (4.20)-(4.22) y el estimador de frecuencia de posición (4.34)-(4.35) en lazo cerrado con el PMSM controlado por corriente (4.1)-(4.2) mantiene acotadas a todas las variables de estado, hace que el error de seguimiento de velocidad  $\Omega_e \rightarrow 0$  y el error de estimación  $\tilde{z}_1 \rightarrow 0$  uniformemente globalmente asintóticamente.*

**Prueba:** Las ecuaciones del sistema (4.1)-(4.2) en lazo cerrado con el esquema de control-observador (4.19)-(4.22), dan origen a las ecuaciones que describen el cambio de las variables de error, desplegadas en 4.23-(4.27). En términos de las variables de error y sus derivadas, fue planteada la función candidata de Lyapunov positiva definida (4.28). Mediante la ley de adaptación (4.30), la derivada de la función candidata de Lyapunov resulta ser la función negativa semidefinida escrita en (4.31). Mediante el Lema de Barbalat se puede concluir que  $\Omega_e$  y  $\tilde{\Omega}$  tienden a cero uniformemente asintóticamente.

De las expresiones (4.23) y (4.24), se deduce que también  $\tilde{z}_1$  tiende a cero asintóticamente. Esto implica que el resto de las variables de error son acotadas, lo cual a su vez implica que todas las variables de estado del sistema en lazo cerrado son acotadas.

Por otra parte, la ley de adaptación (4.30) no se puede implementar directamente, pues se desconoce el valor de  $\tilde{z}_1 = \hat{z}_1 - z_1$ . No obstante, de acuerdo con el desarrollo mostrado arriba, la ley de adaptación (4.35) sí se puede implementar directamente, y el resultado de estabilidad se mantiene con validez.  $\square$

El Lema anterior no contiene implicaciones acerca de la convergencia paramétrica. En el contexto de sistemas adaptables, las dificultades teóricas asociadas con la determinación de la convergencia paramétrica están relacionadas con el problema de establecer condiciones para la señal de entrada, bajo las cuales las variables de estado del sistema en lazo cerrado satisfacen la condición de excitación persistente [55]. Sin embargo, en este caso es el análisis de Lyapunov el que impone las dificultades teóricas para el estudio de la convergencia paramétrica, pues la selección de la función  $V_{ma}$ , en conjunto con el diseño del esquema controlador-observador y de la ley de adaptación, caen en un caso particular de la teoría de estabilidad de Lyapunov, en el cual ésta última no es concluyente.

## 4.4. Control PI de seguimiento de corriente.

Un motor síncrono de imanes permanentes, sin embargo, es controlado mediante una entrada de tensión eléctrica  $\mathbf{u}_{dq}$ , según el modelo presentado en la Sección 2.3. En [46] fue introducido un control de seguimiento de velocidad basado en observador para un PMSM sin sensores de posición y velocidad angulares, que fue posteriormente validado mediante experimentación en [49]. Con fines prácticos, en [4] es reportado el uso de una ley de control PI para el seguimiento de corriente complementado con un observador de velocidad, que constituye una simplificación de la ley introducida en [46]. Usar algoritmos de control para PMSMs sin sensores puede evitar los problemas ocasionados por los sensores mecánicos a la vez que ahorra espacio y reduce el peso [46, 47].

Como consideración práctica para la implementación del control de velocidad con rechazo de vibraciones, presentado arriba en el presente capítulo, será considerada una ley de control PI de *voltaje* para el seguimiento de corriente en el estator, que a su vez controla la velocidad en el rotor. El uso del modelo  $(d, q)$  es compatible con este enfoque, pues permite ver al PMSM como un sistema en cascada, con el subsistema eléctrico como maestro y el subsistema mecánico como esclavo, cada uno con su lazo de control.

Considere el modelo de un PMSM en coordenadas  $(d, q)$  introducido en la Sección 2.3, cuyas ecuaciones son (2.71)-(2.74). Un control PI de tensión [4]

$$u_d = L \left[ -p\Omega I_q - k_{ep}(I_d - I_d^*) - k_{ei} \int_0^t (I_d(r) - I_d^*(r)) dr \right] \quad (4.36)$$

$$u_q = L \left[ p\Omega I_d + \frac{k_m}{L}\Omega - k_{ep}(I_q - I_q^*) - k_{ei} \int_0^t (I_q(r) - I_q^*(r)) dr \right], \quad (4.37)$$

en lazo cerrado con el subsistema eléctrico (2.73)-(2.74), sigue globalmente asintóticamente la trayectoria deseada de corriente en el estator [48]. Dada una trayectoria deseada de velocidad angular suave, continuamente diferenciable y acotada  $\Omega^*$ , y en congruencia con la ley de control (4.19), se establece la trayectoria deseada

$$\left\{ (\Omega^*, I_d^*, I_q^*) : I_d^* = 0, \quad I_q^* = \frac{1}{k_m} \left[ -k_p(\Omega - \Omega^*) - \hat{z}_1 + J\dot{\Omega}^* \right] \right\}.$$

Por su parte, como muestra el Lema 4.3.2, existe un esquema de control que en lazo cerrado con el subsistema mecánico (2.66)-(2.67) sigue uniformemente globalmente asintóticamente la velocidad deseada, a la vez que rechaza las vibraciones endógenas en el rotor.

El sistema resultante es un sistema en cascada, conformado por un sistema maestro (eléctrico) que sigue con control de seguimiento uniforme global asintótico de corriente eléctrica de referencia, y un sistema esclavo (mecánico) que sigue

uniformemente globalmente asintóticamente la velocidad angular de referencia. Además, la dinámica del error asociada al sistema esclavo es entrada-estados estable, según lo prueban las funciones de acotamiento de  $V_{ma}$  y el Teorema 4.19 en [51]. Entonces, debido a la estructura en cascada del sistema completo, y haciendo uso de los resultados de estabilidad de sistemas en cascada, por ejemplo el Teorema 1 en [56], el sistema completo tiene propiedades de estabilidad uniforme global asintótica.

*Observación.* Note que, como fue explicado en la Sección 2.3, el modelo  $(d, q)$  es apropiado para el diseño de control, aunque no es adecuado para ser directamente implementado. Para ello, deberá ser transformada la señal de control como  $\mathbf{u}_{ab} = \mathcal{P}^\top(\theta)\mathbf{u}_{dq}$ . De la misma manera que, para ser realimentadas, el vector de corriente en el estator debe ser transformado como  $\mathbf{i}_{dq} = \mathcal{P}(\theta)\mathbf{i}_{ab}$ .

## 4.5. Simulaciones

Mediante la herramienta de software MATLAB<sup>®</sup>, se realizaron simulaciones numéricas para verificar el desempeño de un PMSM en lazo cerrado con el esquema de control presentado arriba en éste capítulo. La simulaciones se realizaron con el método numérico ode4 (Runge-Kutta), con paso fijo de  $10^{-3}$ .

Parámetro / c.i.	Valor	Unidades	Parámetro	Valor
$J$	0.016	$kg \cdot m^2$	$k_p$	8
$p$	6		$k_o$	1
$R$	3	Ohm	$k_e$	5
$L$	6	mH	$k_a$	0.26
$k_m$	2	$N \cdot m \cdot A^{-1}$	$k_{ep}$	$9 \cdot 10^6$
$\theta(0), \Omega(0)$	0	$rad, rad/s$	$k_{ei}$	10
$I_d(0), I_q(0)$	0	A		

Tabla 4.1: Condiciones iniciales y parámetros de un PMSM con control de velocidad con rechazo de vibraciones.

Se consideró un PMSM, cuyas ecuaciones dinámicas son (2.71)-(2.74), en lazo cerrado con el esquema de control-observador con rechazo de vibraciones (4.19)-(4.22) a nivel mecánico, y con un control PI (4.36)-(4.37) a nivel eléctrico, como fue descrito en la sección anterior. Los parámetros del modelo, los parámetros de control y las condiciones iniciales, son especificados en la Tabla 4.1; éstas fueron tomadas de las simulaciones reportadas en [31] y [46], las cuales guardan congruencia en las dimensiones de los parámetros mecánicos y eléctricos. La velocidad de referencia es generada mediante  $\Omega^* = 20 \sin(\pi/2 t)$ ; mientras que, la perturbación

$z_1(\theta)$  se genera según la ecuación (4.3), con  $\Lambda = 0.1$  [N · m],  $\psi = 0.2$  [rad/s] y  $\Phi = 3$  [rad].

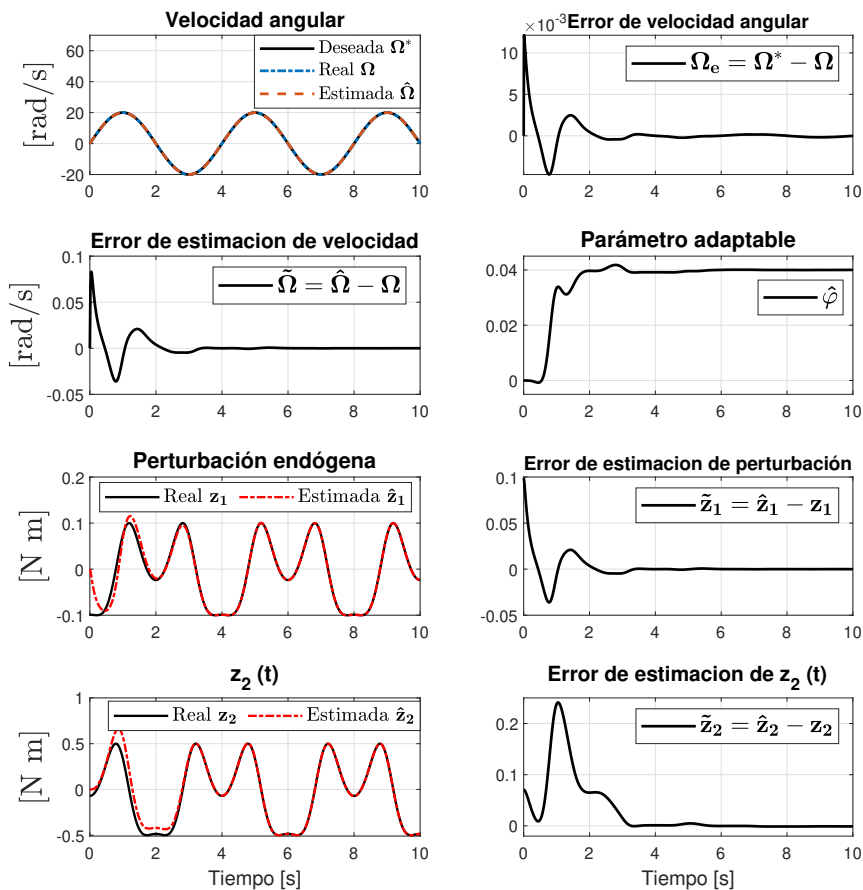


Figura 4.1: Control de velocidad de un PMSM con rechazo de vibraciones: desempeño del subsistema mecánico.

Los resultados de simulación son ilustrados en los gráficos de las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 .

El comportamiento de las variables asociadas al subsistema mecánico en la-

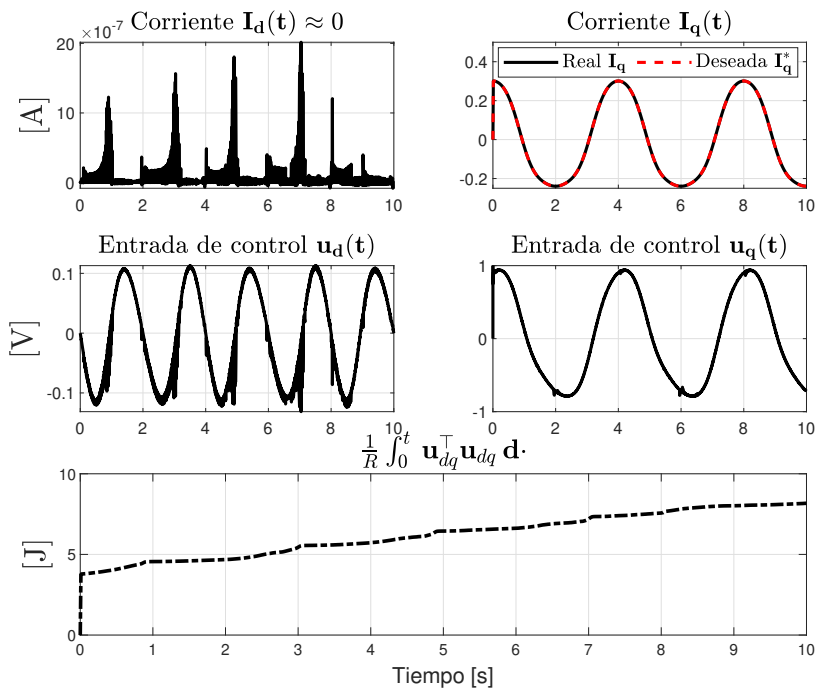


Figura 4.2: Control de velocidad de un PMSM con rechazo de vibraciones: desempeño del subsistema eléctrico.

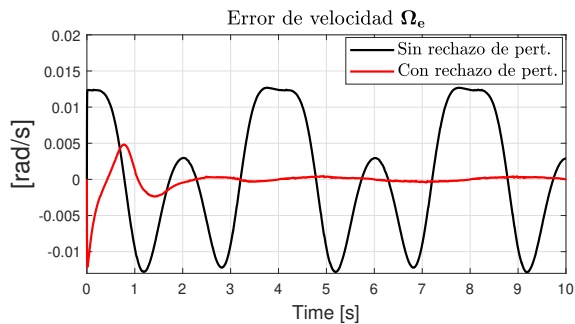


Figura 4.3: Control de velocidad de un PMSM con y sin rechazo de perturbaciones endógenas.

zo cerrado son ilustradas 4.1. En ella, se verifican el seguimiento asintótico de velocidad deseada  $\Omega^*(t)$  y la estimación asintótica de la perturbación  $z_1(\theta)$ , como asegura el Lema 4.3.2. Aunque no es posible establecer conclusiones generales sobre las demás variables, más allá de que son acotadas, los gráficos también muestran que, para este caso particular, el parámetro adaptable  $\hat{\varphi}$  converge a su valor real, es decir  $\hat{\varphi} \rightarrow 0.04$  asintóticamente. Por su lado, las variables asociadas al subsistema mecánico son ilustradas en la Figura 4.2, donde se verifica la estabilidad asintótica del punto de operación  $(I_d^*, I_q^*)$ . También se ilustran las señales de control de tensión eléctrica,  $u_d(t)$  y  $u_q(t)$ , así como la energía asociada al vector de tensión  $\mathbf{u}_{dq}$ .

Finalmente, en la Figura 4.3 se presenta el gráfico de la evolución del error de seguimiento de velocidad de un PMSM con perturbaciones endógenas. El gráfico en color negro muestra el error de velocidad cuando se usa un esquema de control sin rechazo de perturbación, mientras que en rojo se dibuja la trayectoria del error cuando se usa un control con rechazo de vibraciones. La comparación entre ambos casos de estudio muestra la mejora que el esquema de estimación y rechazo de perturbaciones endógenas representa para el desempeño del sistema en lazo cerrado.





## Capítulo 5

# Control de orientación de un satélite-DGVSCMG

A continuación se establece formalmente el problema de control de seguimiento de orientación de un satélite sometido a perturbaciones ambientales, el cual es conducido por un giroscopio de control de momento de doble cardán con velocidad variable (DGVSCMG), dirigido a su vez por un conjunto de tres motores síncronos de imanes permanentes (PMSM), con perturbaciones endógenas generadas a nivel mecánico en el DGVSCMG. Se estudian las propiedades de estabilidad del sistema completo, y los resultados son validados mediante simulaciones.

Las ecuaciones de movimiento de un satélite-DGVSCMG han sido estudiadas en las secciones 2.1 y 2.2, donde se pueden aclarar su orígenes, la notación que se usa y su sentido físico. Por su importancia, reescribimos la cinemática y la dinámica de un satélite-DGVSCMG como

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}G(\sigma)\omega, \quad (5.1)$$

$$M_b \dot{\omega} = S(h)\omega + \tau_a + \tau_d, \quad \|\tau_d\| \leq \bar{\tau}_d; \quad (5.2)$$

donde  $\sigma$  es el vector de MRP que describe la orientación del satélite y  $G(\sigma)$  es una matriz definida en la ecuación (2.16); y, donde  $M_b = M_b^T$  es una matriz positiva definida que representa la inercia del satélite,  $\omega$  representa su velocidad angular,  $h$  es el momento angular del satélite-DGVSCMG definido en (2.54),  $\tau_a = -\chi\eta$ , definido en (2.55), es el par desarrollado por el DGVSCMG y aplicado sobre el satélite, y  $\tau_d$  es un término que corresponde a perturbaciones externas de magnitud acotada por la constante conocida  $\bar{\tau}_d$ .

El satélite-DGVSCMG está conectado en cascada, acoplado mediante  $\tau_a$ , con un conjunto de PMSMs, cuyas ecuaciones se presentaron en la Sección 2.3. El

modelo  $dq$  del conjunto de PMSMs está dado por las ecuaciones

$$\dot{\theta}_i = \Omega_i, \quad (5.3)$$

$$J_i \dot{\Omega}_i = k_{im} I_{iq} + z_{i1}, \quad (5.4)$$

$$L_i \dot{I}_{id} = -R_i I_{id} + L_i p_i, \Omega_i I_{iq} + u_{id} \quad (5.5)$$

$$L_i \dot{I}_{iq} = -R_i I_{iq} - L_i p_i \Omega_i I_{id} - k_{im} \Omega_i + u_{iq}; \quad (5.6)$$

donde  $\theta_i$  y  $\Omega_i$  denotan la posición y velocidad del rotor del  $i$ -ésimo PMSM, respectivamente,  $\mathbf{i}_{i,dq} = [I_{id}, I_{iq}]^\top$  es la corriente en el estator, y  $\mathbf{u}_{i,dq}$  es la entrada de control de tensión en el estator. Los parámetros del modelo son: el número de pares de polos  $p_i$ , la inercia en el rotor  $J_i$ , la corriente  $R_i$  y la inductancia  $L_i$  en los devanados, y la constante de *torque* del motor. Como ha sido explicado en el capítulo anterior, el término  $z_{i1}$  es un término de perturbaciones endógenas, generadas a nivel mecánico por excentricidad en la carga de rotor. Este término es modelado como en (4.3), que en el espacio de estados es descrito por el modelo interno (4.4)-(4.5).

El subíndice  $i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , es usado para denotar a cada uno de los motores del conjunto de PMSMs que dirigen al DGVSCMG:  $i = 1$  corresponde al PMSM que dirige al cardán exterior ( $g_o$ ),  $i = 2$  al PMSM que dirige al cardán interior ( $g_i$ ), e  $i_3$  corresponde al PMSM que se encarga del giro de la rueda ( $w$ ).

Sean: el error de orientación  $\sigma_e$ , definido a través de la fórmula Rodrigues (2.7) y rotaciones sucesivas como  $R(\sigma_e) = R^\top(\sigma_d)R(\sigma)$  (ver Apéndice A.5); y el error de velocidad  $\omega_e = \omega - \bar{\omega}_d$ , donde  $\bar{\omega}_d = R^\top(\sigma_e)\omega_d$  es la velocidad expresada en el marco de referencia del cuerpo del satélite. El objetivo es diseñar una ley de control de tensión  $\mathbf{u}_{i,dq}$  para cada PMSM tal que las trayectorias del sistema completo sean uniformemente prácticamente asintóticamente estables, aún en presencia de perturbaciones  $\tau_d$  sobre el satélite en (5.2) y de vibraciones  $z_{i1}(\theta_i)$  en (5.4), generadas en la estructura mecánica del DGVSCMG. Específicamente, se busca que, para cualquier condición inicial del satélite-DGVSCMG, el error de orientación  $\sigma_e$  y el error de velocidad  $\omega_e$  converjan uniformemente asintóticamente a una bola con centro en el origen cuyo tamaño puede hacerse arbitrariamente pequeño mediante la adecuada selección de algunos parámetros de diseño. Todo esto a la vez que las variables restantes del sistema completo se mantienen acotadas.

## 5.1. Ley de dirección

Recordemos que el par de control producido por el DGVSCMG es  $\tau_a = -\chi\eta$  (cf. eq. (2.55)), que es el término de acoplamiento entre el conjunto de PMSMs y

el satélite-DGVSCMG. Específicamente, el vector  $\eta = [\dot{\delta}_{g_o} \ \dot{\delta}_{g_i} \ \ddot{\delta}_w]^\top$  provee la señal comandada de velocidad para los cardanes exterior e interior y la aceleración para la rueda giratoria. Entonces, las señal de velocidad comandada para los PMSMs que dirigen al DGVSCMG se puede obtener a partir de (2.55), mediante la matriz inversa de  $\chi$ .

Sin embargo, como fue revisado en la Sección 2.2, un DGVSCMG presenta condiciones singulares cuando el ángulo del cardán interior  $\delta_{g_i}$  es igual a  $\frac{\pi}{2}$  o  $\frac{3\pi}{2}$ . En tal situación, un DGVSCMG pierde un grado de libertad, lo que limita sus capacidades de control. En [2] ha sido propuesta una ley de dirección simple para obtener las señales comandadas de velocidad para los PMSMs, que está basada en el cálculo de la matriz inversa modificada de  $\chi$ , como se detallará en seguida.

Asuma que la velocidad de la rueda giratoria está acotada por debajo, es decir,  $\dot{\delta}_w \geq \underline{\dot{\delta}}_w$  para algún  $\underline{\dot{\delta}}_w > 0$ ; lo cual siempre se satisface en un DGVSCMG. La señal comandada de velocidad para el conjunto de PMSM se calcula como

$$\eta(\delta_{g_o}, \delta_{g_i}, \dot{\delta}_w) = [\dot{\delta}_{g_o} \ \dot{\delta}_{g_i} \ \ddot{\delta}_w]^\top = -\chi_m \tau_a, \quad (5.7)$$

donde la matriz inversa modificada de  $\chi$  se define como

$$\chi_m = \frac{1}{J_w \dot{\delta}_w} \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\delta_{g_o})}{\cos(\delta_{g_i}) + \gamma} & \frac{\cos(\delta_{g_o})}{\cos(\delta_{g_i}) + \gamma} & 0 \\ -\cos(\delta_{g_o}) \sin(\delta_{g_i}) & -\sin(\delta_{g_o}) \sin(\delta_{g_i}) & -\cos(\delta_{g_i}) \\ \dot{\delta}_w \cos(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) & \dot{\delta}_w \sin(\delta_{g_o}) \cos(\delta_{g_i}) & -\dot{\delta}_w \sin(\delta_{g_i}) \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

con el escalar  $\gamma = \gamma_0 \exp[\zeta \det(\mathbf{G}\mathbf{G}^\top)] \sin(\delta_{g_i})$  donde  $\gamma_0, \zeta$  son escalares positivos por ser adecuadamente seleccionados, y la matriz  $\mathbf{G} = (1/J_w \dot{\delta}_w) [-C \ , \ -\dot{\delta}_w D]$ . La cantidad escalar  $\det(\mathbf{G}\mathbf{G}^\top)$  es una medida de la cercanía de la matriz  $\chi$  a su condición singular [2].

## 5.2. Control de seguimiento con rechazo de vibración

La solución al problema descrito arriba es construida a través de dos sub-problemas, que describimos a continuación.

- 1) A nivel de par angular en el satélite, diseñar una ley de control  $\tau_a$  para hacer que el error de orientación  $\sigma_e$  y el error de velocidad angular  $\omega_e$  sean uniformemente prácticamente asintóticamente convergentes a una bola centrada en el origen, cuyo radio depende de parámetros de diseño y, por lo tanto, puede hacerse arbitrariamente pequeño mediante el ajuste de éstos.

- 2) A nivel de corriente en el estator de los PMSMs, diseñar una ley de control  $\mathbf{i}_{i,dq}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , que logre el seguimiento de velocidad en los cardanes exterior e interior y en la rueda giratoria, para proveer el par requerido  $\tau_a$ , a la vez que rechaza el efecto de las perturbaciones endógenas  $z_{i1}$  en (5.4). Las velocidades comandadas sobre el PMSM se calculan mediante la ecuación (5.7), e integrando la aceleración de giro de la rueda  $\ddot{\delta}_w$ .

Luego, la estabilidad práctica uniforme asintótica del sistema completo debe ser establecida con base en el análisis de estabilidad de sistemas en cascada [57].

Finalmente, la entrada de tensión requerida  $\mathbf{u}_{i,dq}$  se implementa mediante un control PI.

Considere la ley de control de *torque* para el satélite-DGVSCMG

$$\tau_a = M_b \dot{\omega}_r - S(h)\omega_r - \frac{1}{2} (1 + \sigma_e^\top \sigma_e) \sigma_e - K_c \mathbf{s} + \tau_c, \quad (5.9)$$

$$\tau_c = - \frac{\bar{\tau}_d^2 \mathbf{s}}{\bar{\tau}_d \|\mathbf{s}\| + \varepsilon}; \quad (5.10)$$

donde  $\omega_r = \bar{\omega}_d - 2\lambda_c \sigma_e$ , con el parámetro de diseño  $\lambda_c > 0$ , es una variable compuesta cuya derivada está dada por  $\dot{\omega}_r = R_e^\top \dot{\omega}_d + [S(\bar{\omega}_d) - \lambda_c G(\sigma_e)] \omega_e$ , la variable  $\mathbf{s} = \omega - \omega_r$  es un error combinado,  $K_c$  es una matriz simétrica positiva definida por ser diseñada, y  $\tau_c$  es usado para compensar el par de perturbación  $\tau_d$ .

Sea  $\tau_a^* = \chi_m^* \eta^*$  el par requerido para el satélite, calculado mediante la ley de control (5.9). Entonces, mediante la ley de dirección (5.7) son calculadas las señales comandadas para las velocidades angulares de los cardanes exterior e interior, así como de aceleración para la rueda giratoria, todas agrupadas en el vector  $\eta^* = [\dot{\delta}_{g_o}^* \ \dot{\delta}_{g_i}^* \ \ddot{\delta}_w^*]^\top$ .

*Observación.* Note que, en términos de las variables de estado del conjunto de PMSMs, la señal de entrada de control del DGVSCMG está dada por

$$\eta = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \dot{\Omega}_3]^\top.$$

Por simplicidad, de este punto en adelante,  $\eta^* = [\dot{\delta}_{g_o}^* \ \dot{\delta}_{g_i}^* \ \ddot{\delta}_w^*]^\top$  será denotada por  $\eta^* = [\Omega_1^* \ \Omega_2^* \ \dot{\Omega}_3^*]^\top$ .

*Observación.* Note que la velocidad comandada para la rueda de reacción se puede obtener como  $\Omega_3^* = \int_0^t \dot{\Omega}_3^*(r) dr$  con una condición inicial  $\Omega_3^*(0) \geq \bar{\delta}_w$ .

Para el control de velocidad del PMSM considere la ley de control de corriente

$$I_{iq} = \frac{1}{k_{im}} \left[ J_i \dot{\Omega}_i^* + k_{ip}(\Omega_i^* - \Omega_i) - \hat{z}_{i1} \right], \quad I_{id} = 0; \quad (5.11)$$

donde  $k_{ip} > 0$  es una ganancia de control,  $\hat{z}_{i1}(t)$  es la estimación de la vibración  $z_{i1}(t)$ , dada por el observador adaptable escrito a continuación.

Sea considerado el observador para la vibración desconocida

$$J_i \dot{\hat{\Omega}}_i = k_{im} I_{iq} + \hat{z}_{i1} - k_{io} (\hat{\Omega}_i - \Omega_i), \quad (5.12)$$

$$\dot{\hat{z}}_{i1} = \Omega_i \hat{\varphi}_i \hat{z}_{i2} - k_{ie} (\hat{\Omega}_i - \Omega_i) - k_{ie} (\Omega_i^* - \Omega_i), \quad (5.13)$$

$$\dot{\hat{z}}_{i2} = -\Omega_i \hat{z}_{i1}; \quad (5.14)$$

donde  $k_{io} > 0$  y  $k_{ie} > 0$  son parámetros de diseño, y el estimador de frecuencia de posición

$$\dot{\hat{\varrho}}_i = -k_{ia} \Omega_i \left[ \hat{z}_{i2} (\hat{z}_{i1} + k_{im} I_{iq}) - \frac{1}{2} J_i \Omega_i^2 \hat{z}_{i1} \right], \quad (5.15)$$

$$\hat{\varphi}_i = \hat{\varrho}_i + \frac{1}{2} k_{ia} J_i \Omega_i^2 \hat{z}_{i2}; \quad (5.16)$$

donde  $k_{ia} > 0$  es un parámetro de diseño.

**Teorema 5.2.1.** *Considere la cinemática y la dinámica de satélite (5.1) y (5.2), equipado con un DGVSCMG dirigido por un conjunto de tres PMSMs (5.3)-(5.4) con el modelo interno de la vibración en la rueda giratoria (4.4)-(4.5). El esquema de control que consiste de la ley de control robusto de torque (5.9), el controlador de velocidad con compensación adaptativa de vibraciones (5.11)-(5.16) hace que las trayectorias del sistema en lazo cerrado sean uniformemente prácticamente asintóticamente estables. En particular, para cualquier condición inicial  $(\sigma_e(0), \mathbf{s}(0)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $(\Omega_{ie}(0), \tilde{\Omega}_i(0), \tilde{z}_{i1}(0), \tilde{z}_{i2}(0), \tilde{\varphi}_i(0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  se tiene que todas las variables de estado del sistema en lazo cerrado son acotadas, y  $(\sigma_e(t), \mathbf{s}(t)) \rightarrow \mathbf{B}_{\delta_s}$  uniformemente asintóticamente, donde  $\mathbf{B}_s$  es definida en el Corolario 3.2.1.*

**Prueba:** Sea  $\mathbf{x}_1 := [\sigma_e^\top, \mathbf{s}^\top]^\top$ . Del Corolario 3.2.1 se sigue que la ley de control (5.9)-(5.10) en lazo cerrado con el satélite-DGVSCMG (5.1)-(5.2) hace que, para cualquier condición inicial  $\mathbf{x}_1(0) = (\sigma_e(t_0), \mathbf{s}(t_0)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , las variables sean acotadas y  $(\sigma_e(t), \mathbf{s}(t)) \rightarrow \mathbf{B}_{\delta_s}$  uniformemente asintóticamente, donde

$$\mathbf{B}_{\delta_s} = \left\{ \mathbf{x}_1 = [\sigma_e^\top, \mathbf{s}^\top]^\top : \|\mathbf{x}_1\| \leq \delta_s \right\}, \quad \text{donde } \delta^2 = \frac{\varepsilon}{\min\{\lambda_{\min}(K_c), \lambda_c\}}$$

y  $\lambda_{\min}(K_c)$  denota al menor entre los valores propios de  $K_c$ .

Sea  $\mathbf{x}_{i2} := [\Omega_{ie} \ \tilde{\Omega}_i \ \tilde{z}_{i1} \ \tilde{z}_{i2} \ \tilde{\varphi}_i]^\top$ . El controlador de velocidad con compensación adaptable de vibración (5.11)-(5.16) asegura que la velocidad del  $i$ -ésimo PMSM  $\Omega_i$  sigue uniformemente asintóticamente la velocidad deseada, calculada mediante la ley de dirección (5.7), con la compensación adaptable de vibraciones, como se establece en Lema 4.3.2.

Considere el sistema en cascada conformado por el sistema esclavo

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_e &= \frac{1}{2}G(\sigma_e)\mathbf{s} - \lambda_c \frac{1 + \sigma_e^\top \sigma_e}{2} \sigma_e, \\ M\dot{\mathbf{s}} &= S(h)\mathbf{s} - K_c\mathbf{s} - \frac{1}{2}(1 + \sigma_e^\top \sigma_e)\sigma_e + \boldsymbol{\tau}_c + \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{g}(\sigma_e, \mathbf{s}, \Omega_i), \end{aligned}$$

y el sistema maestro compuesto por las ecuaciones de error

$$\begin{aligned} J_i \dot{\Omega}_{ie} &= -k_{ip}\Omega_{ie} + \tilde{z}_{i1}, \\ J_i \dot{\tilde{\Omega}}_i &= -k_{io}\tilde{\Omega}_i + \tilde{z}_{i1}, \\ \dot{\tilde{z}}_{i1} &= \Omega_i(\varphi_i\tilde{z}_{i2} + \tilde{\varphi}_i\hat{z}_{i2}) - k_{ie}(\Omega_{ie} + \tilde{\Omega}_i), \\ \dot{\tilde{z}}_{i2} &= -\Omega_i\tilde{z}_{i1}, \\ \dot{\tilde{\varphi}}_i &= -k_{ia}\Omega_i\tilde{z}_{i1}\hat{z}_{i2}; \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{g}(\sigma_e, s, \Omega_i) = \boldsymbol{\tau}_a - \boldsymbol{\tau}_a^*$  es el término de acoplamiento. De la ecuación (5.7), este término está acotado como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(\sigma_e, s, \Omega)\| &= \|(\chi_m^*)^{-1}\boldsymbol{\eta}^* - \chi_m^{-1}\boldsymbol{\eta}\|, \\ &= \|\chi_m^{-1}[(\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\eta}) + (\chi_m(\chi_m^*)^{-1} - I_3)\boldsymbol{\eta}^*]\|, \\ &\leq \|\chi_m^{-1}\|(\|\boldsymbol{\eta}^* - \boldsymbol{\eta}\| + \|\chi_m(\chi_m^*)^{-1} - I_3\|\|\boldsymbol{\eta}^*\|). \end{aligned}$$

con  $\|\chi_m^{-1}\|$ ,  $\|\chi_m(\chi_m^*)^{-1} - I_3\|$ , y  $\|\boldsymbol{\eta}^*\|$  acotadas. Esto implica que el sistema  $(\sigma_e, \mathbf{s})$  también tiene la propiedad de ser entrada-estados estable [51].

Más aún, de (3.12) y (4.28), la función de Lyapunov para el sistema en cascada es

$$V(\mathbf{x}) = V_s(\mathbf{x}_1) + \sum_{i=1}^3 V_{ma}(\mathbf{x}_{i2}),$$

con  $\mathbf{x}^\top = [\mathbf{x}_1^\top \ \mathbf{x}_2^\top]$ . La función  $V(\mathbf{x})$  satisface

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(\|\mathbf{x}\|) &\leq V(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha}(\|\mathbf{x}\|), \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq 0, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}(\|x\|) &= \frac{1}{2}\lambda_{\min}(M)\|s\|^2 + \|\sigma_e\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \left( k_{ie}J_i\|\Omega_{ie}\|^2 + \|\tilde{\Omega}_i\|^2 + \|\tilde{z}_{i1}\|^2 + \varphi_i\|\tilde{z}_{i2}\|^2 + k_{ia}^{-1}\|\tilde{\varphi}_i\|^2 \right), \\ \bar{\alpha}(\|x\|) &= \frac{1}{2}\lambda_{\max}(M)\|s\|^2 + \|\sigma_e\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \left( k_{ie}J_i\|\Omega_{ie}\|^2 + \|\tilde{\Omega}_i\|^2 + \|\tilde{z}_{i1}\|^2 + \varphi_i\|\tilde{z}_{i2}\|^2 + k_{ia}^{-1}\|\tilde{\varphi}_i\|^2 \right).\end{aligned}$$

Entonces, todas las suposiciones del Teorema 13 en [57] son satisfechas, y se sigue la estabilidad uniforme práctica asintótica de la bola  $\mathbf{B}_{\delta_s}$ .  $\square$

### 5.3. Simulaciones

Se realizaron simulaciones numéricas de un satélite ágil con un DGVSCMG dirigidado por un conjunto de tres PMSMs en presencia de perturbaciones ambientales externas y vibraciones en el DGVSCMG. Los resultados son reportados en esta sección. Para ello fue utilizada la herramienta de computacional MATLAB<sup>®</sup>, con el método numérico de paso variable ode45(Dormand-Prince).

Parameter	Value	Units	Parameter	Value
$\delta_{gi}(0), \delta_{go}(0)$	0	rad	$\lambda_c$	1
$\Omega_3(0)$	5	rad/s	$K_c$	$10 \cdot I_{3 \times 3}$
$J_1, J_2$	0.001	kg · m <sup>2</sup>	$\gamma_0$	0.01
$J_3$	0.016	kg · m <sup>2</sup>	$\zeta$	10
$p_1, p_2$	4		$k_{1p}, k_{2p}$	$1.5J_1, 1.5J_2$
$p_3$	6		$k_{3p}$	$20J_3$
$R_1, R_2$	2.5	Ohm	$k_{1ep}, k_{2ep}$	$5 \times 10^6$
$R_3$	3	Ohm	$k_{3ep}$	$1 \times 10^4$
$L_1, L_2$	4.5	mH	$k_{1ei}, k_{2ei}, k_{3ei}$	$1 \times 10^{1e6}$
$L_3$	6	mH	$k_{3o}$	1
$k_{1m}, k_{2m}$	1.5	$\frac{N \cdot m}{A}$	$k_{3e}$	5
$k_{3m}$	2	$\frac{N \cdot m}{A}$	$k_{3a}$	1

Tabla 5.1: CONDICIONES INICIALES Y PARÁMETROS DE UN SATÉLITE-DGVSCMG CONDUcido POR TRES PMSMs CON CONTROL DE SEGUIMIENTO DE ORIENTACIÓN.

En la Tabla 4.1 se concentran los parámetros que configuran la simulación numérica. En ella se encuentran las condiciones iniciales, los parámetros de diseño

para el esquema de control y los parámetros del sistema, como los parámetros de los PMSMs, el DGVSCMG y el satélite. Además, la inercia del satélite ágil es representada por la matriz simétrica

$$M_b = \begin{bmatrix} 10.5 & 0.22 & 0.47 \\ 0.22 & 12.5 & 0.36 \\ 0.47 & 0.36 & 13.6 \end{bmatrix}.$$

Los parámetros de satélite fueron tomados de las simulaciones reportadas en [2], mientras que los parámetros de los PMSMs fueron tomados de la simulación reportada en [3, 46]; ambos conjuntos de parámetros son congruentes en las dimensiones.

Las condiciones iniciales de orientación y velocidad angular para el satélite fueron asignadas como  $\omega(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\sigma(0) = [0, 0, 0]^T$  y  $\sigma_d(0) = [0.1707, 0.1502, 0.0621]^T$ . Por su parte, la velocidad angular de referencia fue seleccionada como

$$\omega_d = \left[ 0.05 \cos\left(\frac{2\pi}{60}t\right), 0.065 \sin\left(\frac{5\pi}{54}t\right), 0.035 \sin\left(\frac{6\pi}{40}t\right) \right]^T. \quad (5.17)$$

Consecuentemente, la señal de orientación de referencia es generada mediante la ecuación (3.3).

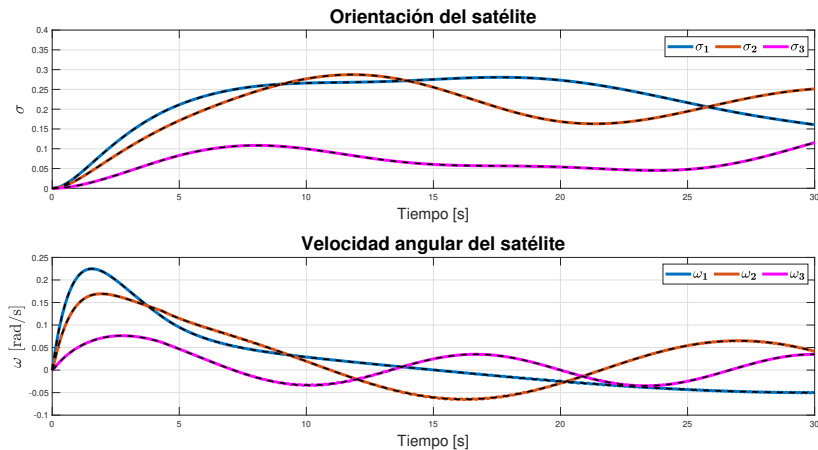


Figura 5.1: Orientación y velocidad angular de un satélite-DGVSCMG en presencia de perturbaciones externas y vibraciones endógenas, sin compensación de vibraciones (líneas solidas —) y con compensación de éstas (líneas discontinuas ---).



El término de perturbaciones externas para un satélite de órbita terrestre baja puede ser considerado como [2, 13]

$$\tau_d = \left[ \sin \frac{\pi}{4} t + 1, 1.5 \sin \frac{\pi}{6} t - 1, 2 \sin \frac{\pi}{12} t + 1 \right]^\top \times 10^{-2}.$$

Note que la norma de éste término satisface la cota superior  $\|\tau_d\| \leq \bar{\tau}_d$ , con  $\bar{\tau}_d = 5 \cdot 10^{-2} [N \cdot m]$ . Además, para la ley de control de par se usó el parámetro  $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$ .

El DGVSCMG presenta vibraciones, debidas al desbalance e imperfecciones de fabricación. Para efectos de simulación, fue asumido que dichas perturbaciones se presentan en el DGVSCMG exclusivamente a nivel de la rueda giratoria, pues la magnitud de la inercia y la velocidad de giro del cardán interior y el cardán exterior son despreciables en comparación con la inercia y la velocidad de giro de la rueda. Los parámetros seleccionados para el término de vibración  $z_{31}$  en (5.4) fueron  $\Lambda_3 = 0.35 [N \cdot m]$ ,  $\psi_3 = 0.5 [rad/s]$  y  $\Phi_3 = 3 [rad]$ .

Con la intención de resaltar el efecto que la compensación de vibración a nivel del motor en la rueda de reacción tiene sobre el desempeño del sistema, éste último se muestra en las Figuras 5.1-5.6. La evolución de la orientación y la velocidad angular a lo largo del tiempo en la Figura 5.1 muestra que, en general, el esquema de control de seguimiento hace su trabajo a nivel del satélite, aún cuando no son compensados los efectos de vibración. No obstante, una mejor perspectiva del desempeño del control de par a nivel del satélite (5.9)-(5.10) es posible a partir de la Figura 5.2, donde también se observa la compensación de vibraciones generadas en la rueda, la cual es notoria en el error de seguimiento de velocidad y el par aplicado sobre el satélite. El desempeño del DGVSCMG se observa en la Figura 5.3, la cual contiene gráficos de la posición y la velocidad de los cardanes interior y exterior, así como de la velocidad y aceleración de la rueda; también hay un gráfico de la evolución en el tiempo del término  $\det(\mathbf{G}\mathbf{G}^\top)$ , que muestra que el DGVSCMG no cae en condiciones singulares. El desempeño de las variables eléctricas del PMSM que dirige la rueda es comparado en los gráficos de la Figura 5.4, donde la diferencia entre el caso sin compensación y el caso con compensación de las vibraciones son casi imperceptibles. No obstante, la exigencia para la señal de control en la rueda es mayor cuando se compensan las vibraciones. Esto último se comprueba en la Figura 5.5, la cual contiene gráficos del valor RMS del vector de velocidad en el DGVSCMG y del valor RMS de la entrada de control en la rueda; en ambos casos el valor RMS es mayor cuando las vibraciones son compensadas. Note que el término

$$\sqrt{\int_0^t \|\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\|^\top \|^2 d.}$$

está estrechamente relacionado con la energía en el DGVSCMG, mientras que el término

$$\sqrt{\int_0^t \mathbf{u}_{dq3}^\top \mathbf{u}_{dq3} d.}$$

está estrechamente relacionado con la energía de la señal de control en la rueda.

Por otra parte, el desempeño del esquema de control con compensación de vibraciones en la rueda se ilustra en la figura 5.6, en la cual se muestra la velocidad de la rueda, el error de seguimiento de velocidad, el error de estimación de velocidad, y los errores de estimación de la vibración  $z_{31}$  y de  $z_{32}$ . Aunque los resultados de simulación sugieren que se alcanza convergencia del error de estimación paramétrica  $\hat{\varphi}$ , sería aventurado especular acerca de eso, pues el análisis presentado en este trabajo no lo permite y, según los conocimientos del autor de éste, tampoco existe otro análisis en ese sentido.

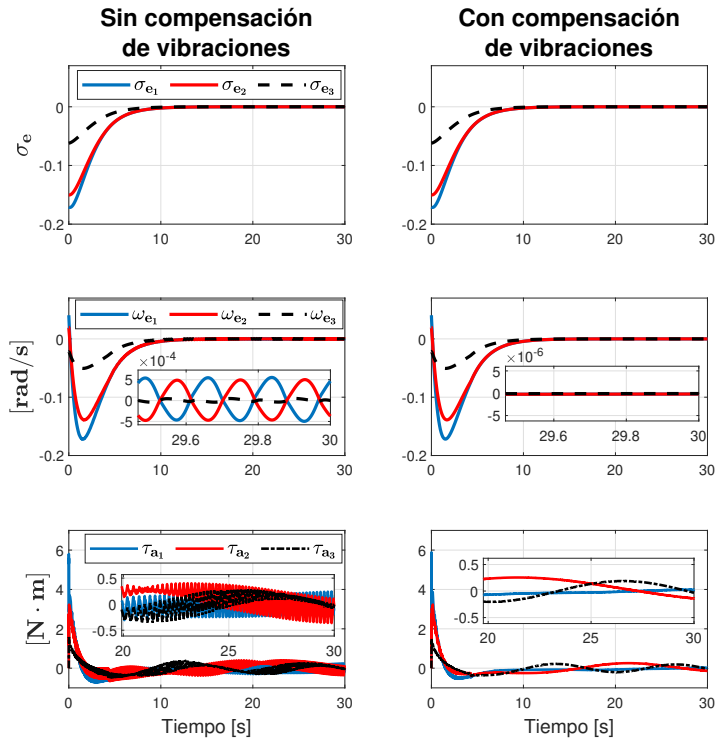


Figura 5.2: Errores de seguimiento y par aplicado de un satélite-DGVSCMG en presencia de perturbaciones externas y vibraciones endógenas, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas.

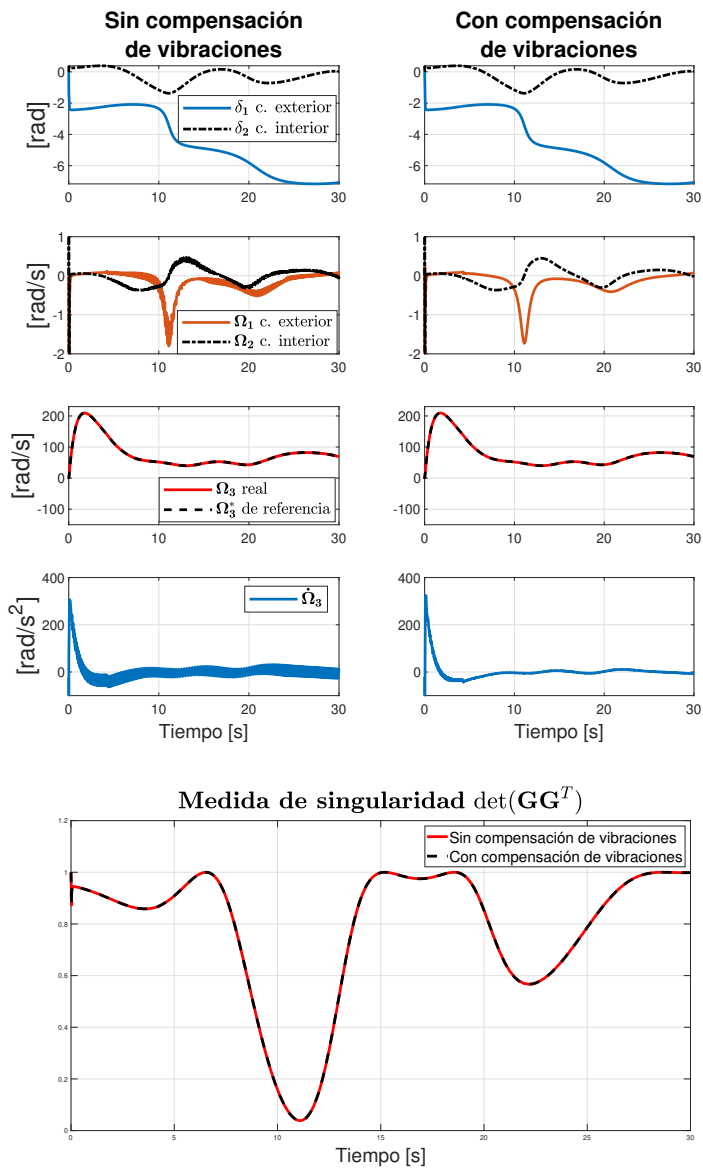


Figura 5.3: Desempeño del DGVSCMG con vibraciones en la rueda, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas.

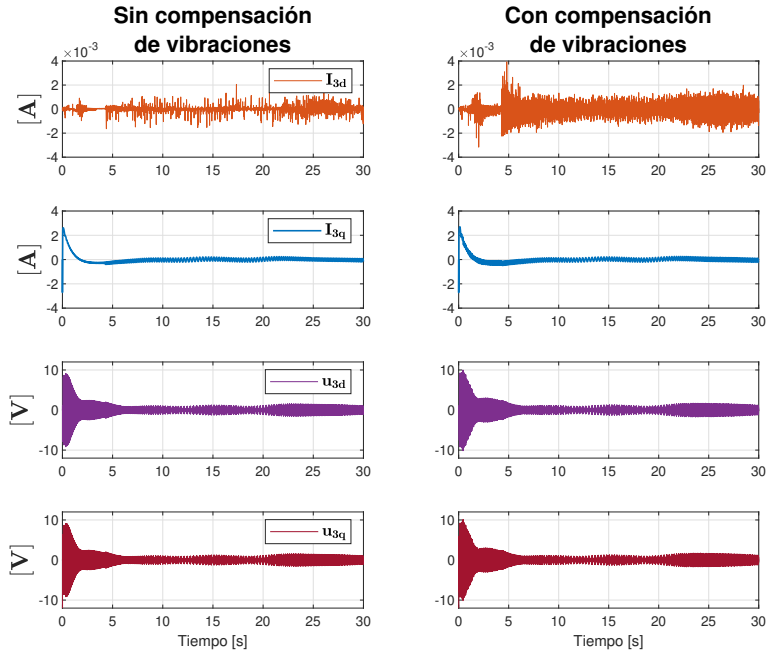


Figura 5.4: Desempeño de las variables eléctricas del PMSM que dirige la rueda giratoria, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas.

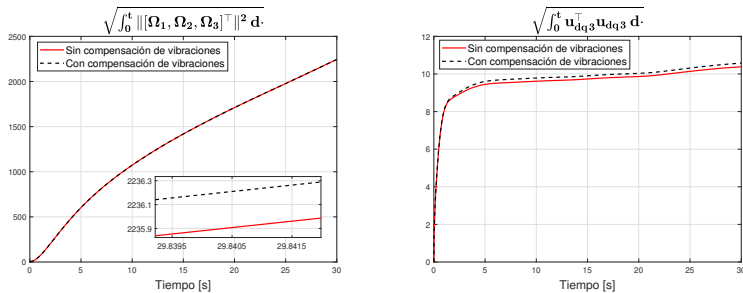


Figura 5.5: Valor RMS de velocidad en el DGVSCMG y valor RMS de la entrada de control al PMSM que dirige la rueda, sin compensación de vibraciones y con compensación de éstas.

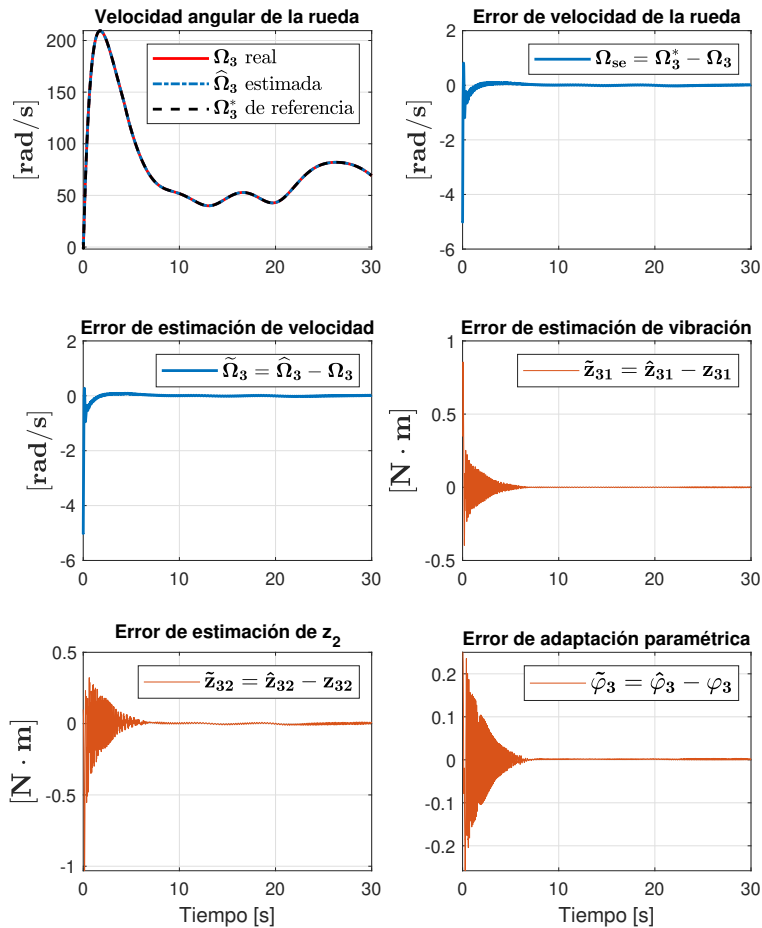


Figura 5.6: Seguimiento de orientación de un satélite-DGVSCMG en presencia de perturbaciones, con rechazo de vibraciones: sin compensación de perturbaciones externas (izquierda) y con compensación de éstas (derecha); variables asociadas a la rueda giratoria.



# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta tesis se ha abordado el problema de seguimiento de orientación de un satélite sometido a perturbaciones externas, provenientes del ambiente. Como actuador de orientación del satélite se consideró un giroscopio de control de momento de doble cardán con velocidad variable (DGVSCMG) que, a su vez, es dirigido por un conjunto de tres motores síncronos de imanes permanentes (PMSM), cuyo movimiento rotacional puede ocasionar vibraciones que se propagan a través del resto del sistema. El conjunto de PMSMs son acoplados en cascada con el satélite-DGVSCMG mediante una ley de dirección. La solución a este problema constituye la principal contribución de este trabajo.

La estructura en cascada del sistema completo permite abordar la solución al problema mediante la solución de dos sub-problemas, por separado: a saber: el control de orientación de un satélite-DGVSCMG sometido a perturbaciones externas, mediante una ley de control de par; y el control de velocidad con rechazo de vibraciones de un PMSM.

Así una contribución secundaria, pero no menos importante, se encuentra en la propuesta de una nueva ley de control de par para el satélite-DGVSCMG, que resuelve el problema de seguimiento de orientación de cuerpos rígidos en general. La prueba de estabilidad de esta ley de control se establece en términos del análisis de Lyapunov; usando una función de Lyapunov, se garantiza el seguimiento uniforme exponencial de orientación y velocidad, así como la estabilidad uniforme práctica asintótica de las trayectorias del sistema sometido a perturbaciones externas.

Por otro lado, las vibraciones generadas por el movimiento rotacional de un PMSM con excentricidad en la carga han sido modeladas como funciones periódicas que dependen de la posición del rotor. Hacer esto permite, en primer lugar,

representar las vibraciones mediante un modelo interno en el espacio de estados. Lo cual genera las condiciones adecuadas para el planteamiento de un esquema de observador con identificación adaptable de los parámetros del modelo interno que, en conjunto con una ley de control de corriente, aseguran el seguimiento asintótico de velocidad del PMSM, rechazando los efectos de las vibraciones. La estructura en cascada de un PMSM permite el uso de una ley de control PI de tensión que logra el seguimiento de corriente en el subsistema eléctrico del motor.

La aplicación de esta solución al control de orientación de un satélite-DGVSCMG no ha sido reportada en trabajos anteriores, hasta donde el autor tiene conocimiento. Por ello, el uso de ésta para la solución del problema general constituye una contribución original de esta tesis.

Los resultados de sistemas en cascada reportados en la literatura han sido usados para establecer la estabilidad práctica uniforme asintótica de las trayectorias del sistema general, lo cual es validado mediante simulaciones numéricas.

### **Trabajo futuro**

Los resultados presentados en este trabajo de tesis sugieren la proyección a futuro de investigaciones alrededor de los principales problemas abordados aquí. Entre ellos, se puede mencionar el diseño de una ley de control más sofisticada y adecuada para el control de seguimiento de corriente del sub-sistema eléctrico de un PMSM. Los resultados reportados en la literatura de control de PMSM sin sensores muestran que es posible prescindir de la medición de las variables mecánicas del rotor (posición y velocidad), y aún asegurar el seguimiento asintótico de velocidad. Estas soluciones no son incompatibles con los resultados establecidos en este trabajo.







# Apéndice A

## Cinemática y dinámica rotacionales.

### A.1. Teorema de rotación de Euler

El siguiente Teorema es fundamental para el desarrollo de algunas de las coordenadas con las que representamos la orientación de un cuerpo o marco de referencia.

**Teorema A.1.1** (Teorema de rotación de Euler [29]). *Un cuerpo rígido o un sistema coordinado de referencia puede ser llevado de una orientación inicial arbitraria a una orientación final arbitraria mediante una única rotación principal de ángulo  $\Phi$  alrededor de un eje principal de rotación  $\hat{e}$ .*

De forma implícita, el Teorema anterior dice que el vector principal  $\hat{e}$  tiene las mismas componentes cuando es escrito en términos de  $\mathcal{B}$  que cuando es escrito en términos de  $\mathcal{N}$ . Esto implica  $\hat{e} = {}^n R_b \hat{e}$ . El eje principal  $\hat{e}$  es el vector propio unitario de  ${}^n R_b$  que corresponde al valor propio  $+1$ . La prueba del teorema consiste, pues, en mostrar que  ${}^n R_b$  tiene un valor propio  $+1$ .

Estas y otras implicaciones del teorema anterior pueden ser revisadas con algo más de detalle en [29].

### A.2. Operador producto cruz

Cuando se trabaja con sistemas multivariable, en ocasiones resulta más sencillo representar el producto cruz entre dos vectores como una operación matricial. Esto

se puede hacer mediante el uso del operador producto cruz, también conocido como operador antisimétrico, definido a continuación.

**Definición A.2.1.** Para todo  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , es decir  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$ , sea definido el operador

$$S(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

**Teorema A.2.1.** Para cualesquiera  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , el operador  $S(\cdot)$  verifica las siguientes propiedades:

$$S(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (\text{A.2})$$

$$S(\mathbf{u})\mathbf{v} = -S(\mathbf{v})\mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

$$S(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha S(\mathbf{u}) + \beta S(\mathbf{v}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

$$S(\mathbf{u})S(\mathbf{v})\mathbf{w} = -S(\mathbf{v})S(\mathbf{w})\mathbf{u} - S(\mathbf{w})S(\mathbf{u})\mathbf{v} \quad (\text{A.5})$$

$$S(\mathbf{u}) = R^\top S(R\mathbf{u})R, \quad R \in \mathcal{SO}(3) \quad (\text{A.6})$$

$$S^\top(\mathbf{u}) = -S(\mathbf{u}) \quad (\text{A.7})$$

**Prueba:** Por construcción del operador  $S(\cdot)$  la propiedad (A.2) se puede verificar desarrollando ambos lados de la ecuación. Las propiedades (A.3) y (A.4) son heredadas, respectivamente, de las propiedades de anticonmutatividad y linealidad del producto cruz entre vectores.

Se conoce como *identidad de Grassmann* (aplicada al producto cruz) [6] a la ecuación  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u}^\top \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}^\top \mathbf{v})$ . La propiedad (A.5), también conocida como *identidad de Jacobi*, es consecuencia de la *propiedad del doble producto*:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \left[ \mathbf{v}(\mathbf{u}^\top \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}^\top \mathbf{v}) \right] \\ &+ \left[ \mathbf{w}(\mathbf{v}^\top \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{v}^\top \mathbf{w}) \right] \\ &+ \left[ \mathbf{u}(\mathbf{w}^\top \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{w}^\top \mathbf{u}) \right] \\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Para demostrar la veracidad de la propiedad (A.6) considere dos vectores arbitrarios  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , y dos bases ortonormales  $N$  y  $B$ . Considere, además, la matriz  $R \in \mathcal{SO}(3)$ , que transforma vectores en la base  $B$  a vectores en la base  $N$ . Entonces, es cierto que  $S({}^N \mathbf{u}) {}^N \mathbf{v} = R S({}^B \mathbf{u}) {}^B \mathbf{v}$ . Recuerde que  $R$  es tal que  $RR^\top = I$ , lo que implica

$$\begin{aligned} R^\top S({}^N \mathbf{u}) {}^N \mathbf{v} &= S({}^B \mathbf{u}) {}^B \mathbf{v}, \\ R^\top S(R {}^B \mathbf{u}) R {}^B \mathbf{v} &= S({}^B \mathbf{u}) {}^B \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Esto es cierto para cualquier  ${}^B\mathbf{v}$ . Por lo tanto,  $R^\top S(R^B\mathbf{u})R = S({}^B\mathbf{u})$  es cierto para cualquier  ${}^B\mathbf{u}$ . Con ello queda demostrada la propiedad (A.6).

La veracidad de la propiedad (A.7) se puede verificar de manera simple al desarrollar la matriz transpuesta de  $S(\mathbf{u})$  en (A.1).  $\square$

### A.3. Teorema de transporte

El siguiente teorema establece una relación entre la derivada de un vector tomada en términos de un marco de referencia y su correspondiente derivada tomada en términos de otro marco. Es conocido como el teorema de transporte y constituye una herramienta que facilita el cálculo de la derivada de un vector con respecto a un sistema de coordenadas, aun cuando las componentes del mismo vector estén dadas en términos de otro sistema de coordenadas, posiblemente en rotación.

**Teorema A.3.1.** *Sea  $\mathcal{N}$  un marco de referencia, cuya base esta formada por los vectores ortogonales  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  fijos a  $\mathcal{N}$ , y sea  $\mathcal{B}$  otro marco de referencia con base formada por los vectores ortogonales  $\{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3\}$  fijos al marco  $\mathcal{B}$ . Además, sea*

$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{N}} = \omega_1\hat{\mathbf{b}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{b}}_2 + \omega_3\hat{\mathbf{b}}_3$$

*el vector de velocidad angular del marco  $\mathcal{B}$  con respecto al marco  $\mathcal{N}$ . Considere un vector genérico  $\mathbf{r}$ . Entonces, la derivada temporal de  $\mathbf{r}$  en términos del marco  $\mathcal{N}$  y la derivada de  $\mathbf{r}$  en términos de  $\mathcal{B}$  guardan la relación dada por*

$${}_{\mathcal{N}}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}) = {}_{\mathcal{B}}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}) + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{N}} \times \mathbf{r} .$$

Los argumentos que dan origen a la generalización formulada en el teorema de transporte y algunas de las implicaciones que de éste se derivan pueden ser consultadas en [29, 33].

### A.4. Ecuación diferencial cinemática

En el segundo capítulo de esta tesis se ha presentado la ecuación diferencial que describe el cambio en la orientación de un cuerpo rígido en términos de la matriz de rotación y los parámetros Rodrigues modificados. De forma breve, en este apéndice es presentada la ecuación diferencial cinemática en términos de algunas otras parametrizaciones de la orientación, presentadas también en este trabajo.

El desarrollo de las ecuaciones que están por ser presentadas puede ser consultado con mayor detalle en [29].

En términos de los parámetros de Euler (cuaternión unitario) la ecuación diferencial cinemática está dada por la expresión

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_v^\top \\ q_0 I_{3 \times 3} + S(\mathbf{q}_v) \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} . \quad (\text{A.8})$$

La ecuación diferencial cinemática en términos de los parámetros Rodrigues esta dada por la expresión

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{2} [I_{3 \times 3} + S(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^\top] \boldsymbol{\omega} . \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, es presentada la ecuación diferencial en términos de los MRP. Para ello, considere la matriz  $G(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , definida como

$$G(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (1 - \boldsymbol{\sigma}^\top \boldsymbol{\sigma}) I_{3 \times 3} + S(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top . \quad (\text{A.10})$$

Entonces, el cambio en la orientación está descrito por

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} G(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\omega} . \quad (\text{A.11})$$

La matriz  $G(\boldsymbol{\sigma})$ , definida en (A.10), transforma  $\boldsymbol{\omega}$  en  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  y, satisface las siguientes relaciones [29]:

1.

$$G(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\sigma} = G^T(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\sigma} = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}}{2} \boldsymbol{\sigma} . \quad (\text{A.12})$$

2.

$$G^T(\boldsymbol{\sigma}) G(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \frac{1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}}{2} \right)^2 I_3 . \quad (\text{A.13})$$

3.

$$G^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \frac{2}{1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}} \right)^2 G^T(\boldsymbol{\sigma}) . \quad (\text{A.14})$$

4.

$$G^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\sigma} = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}}{2} \boldsymbol{\sigma} . \quad (\text{A.15})$$

5.

$$\dot{G}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\sigma} I_3 + G(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\sigma}^T + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega}^T G^T(\boldsymbol{\sigma}) + S(G(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\omega}) \right) . \quad (\text{A.16})$$

No es muy difícil la verificación de estas relaciones mediante la construcción de cada parte izquierda en las ecuaciones de lista anterior.

## A.5. Errores de orientación y velocidad angular

Considere un marco de referencia  $\mathcal{D} : \{\hat{\mathbf{d}}\} = \{\hat{\mathbf{d}}_1, \hat{\mathbf{d}}_2, \hat{\mathbf{d}}_3\}$ , correspondiente a una orientación deseada para que el cuerpo rígido siga. La matriz  $R_d$  es la matriz que transforma vectores del marco de referencia deseado  $\mathcal{D}$  al inercial  $\mathcal{N}$ . Explícitamente  $R_d = R_{nd}$ .

Evidentemente, cuando  $R = R_d$  la orientación deseada ha sido alcanzada. De tal forma que el error puede ser definido como  $R_e = R - R_d$ ; aunque, así definido, el error de orientación  $R_e \notin \mathcal{SO}(3)$ .

Otra alternativa para la definición del error de orientación es obtenida al utilizar la particular característica de las matrices en  $\mathcal{SO}(3)$ ; a saber, que  $RR^\top = I_{3 \times 3}$ . Con ello, si  $R = R_d$ , entonces es cierto que  $R_d^\top R = R_d^\top R_d \Rightarrow R_d^\top R = I_{3 \times 3}$ .

Al definir al error de orientación como dos rotaciones sucesivas

$$R_e = R_d^\top R \in \mathcal{SO}(3) \quad (\text{A.17})$$

la orientación deseada es alcanzada cuando  $R_e = I_{3 \times 3}$ .

La matriz de rotación  $R_e$  representa la rotación compuesta que va de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{D}$ ; explícitamente  $R_e = R_{db}$ . Entonces, la matriz matriz  $R_e^\top = R_{bd}$  va de  $\mathcal{D}$  a  $\mathcal{B}$ .

Ahora, sea considerado un vector  $\omega_d$ , que representa la velocidad del marco de referencia  $\mathcal{D}$  relativa al marco inercial  $\mathcal{N}$  en coordenadas de  $\mathcal{D}$

$$\omega = \omega_1 \hat{\mathbf{d}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{d}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{d}}_3 . \quad (\text{A.18})$$

Al definir el vector de error de velocidad angular podemos caer en la obriedad de usar  $\omega_e = \omega - \omega_d$ . Sin embargo, los vectores  $\omega$  y  $\omega_d$  están en coordenadas distintas, por lo que compararlos es poco útil. Puede usarse (A.17) para expresar el vector de velocidad angular deseada en términos de  $\mathcal{B}$  como

$$\bar{\omega}_d = R_e^\top \omega_d . \quad (\text{A.19})$$

Con ello, una definición más adecuada del vector de error de velocidad angular está dada por

$$\omega_e = \omega - \bar{\omega}_d . \quad (\text{A.20})$$

La ecuación cinemática deseada esta dada por

$$\dot{R}_d = R_d S(\omega_d) . \quad (\text{A.21})$$

La cinemática del error se calcula como sigue.

$$\begin{aligned} \dot{R}_e &= \dot{R}_d^\top R + R_d^\top \dot{R} \\ &= -S(\omega_d) R_d^\top R + R_d^\top R S(\omega) \\ &= -S(\omega_d) R_e + R_e S(\omega) \\ &= -R_e R_e^\top S(\omega_d) R_e + R_e S(\omega) \end{aligned}$$

La propiedad (A.6) en el Apéndice A.2 permite reescribir

$$\dot{R}_e = -R_e S(R_e^\top \omega_d) + R_e S(\omega) = R_e S(\omega - R_e^\top \omega_d) .$$

Finalmente, con (A.19) y (A.20), se tiene que

$$\dot{R}_e = R_e S(\omega_e) . \quad (\text{A.22})$$

## A.6. Rotaciones sucesivas de vectores de parámetros Rodrigues modificados

Dados dos vectores  $\sigma'$  y  $\sigma''$ , sea definido un tercer vector de parámetros Rodrigues modificados mediante rotaciones sucesivas de la siguiente manera

$$R_{db}(\sigma) = R_{dn}(\sigma'') R_{nb}(\sigma') . \quad (\text{A.23})$$

Estas rotaciones sucesivas, en términos de parámetros Rodrigues modificados, está dada por la expresión [29]

$$\sigma = \frac{(1 - \|\sigma'\|^2)\sigma'' + (1 - \|\sigma''\|^2)\sigma' - 2S(\sigma'')\sigma'}{1 + \|\sigma'\|^2\|\sigma''\|^2 - 2\sigma'^\top\sigma''} . \quad (\text{A.24})$$



# Apéndice B

## Estabilidad de sistemas con perturbaciones.

### B.1. Funciones de comparación.

Sean definidas las siguientes funciones, conocidas como funciones de comparación [51].

**Definición B.1.1.** Se dice que una función continua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ ; se dice que pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$  si  $a = \infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$

**Definición B.1.2.** Se dice que una función continua  $\xi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\mathcal{L}$  si es estrictamente decreciente y  $\xi(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$

**Definición B.1.3.** Se dice que una función continua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\mathcal{KL}$  si el mapeo  $\beta(r, s)$ , para cada  $s$  fijo, pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  con respecto a  $r$  y, para cada  $r$  fijo, es decreciente con respecto a  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

### B.2. Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanecientes.

Considere el sistema nominal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) , \tag{B.1}$$

donde  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times D$ , y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene al origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Considere el término de perturbación  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{g} : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times D$ ; el cual es considerado como un término aditivo en el lado derecho de la ecuación de estado. Las incertidumbres que ocasionan cambios en el orden del sistema siempre pueden ser representadas de esta manera. Así, el sistema con perturbaciones se escribe como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) . \quad (\text{B.2})$$

El tipo de perturbaciones que se estudia no se desvanecen cerca del origen del sistema, lo cual implica  $\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ . Por lo tanto, el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  no es un punto de equilibrio del sistema (B.2). En este contexto, el estudio del equilibrio del origen pierde sentido. Sin embargo, las herramientas del análisis de Lyapunov se mantienen útiles en el estudio las soluciones del sistema, esperando que estas sean acotadas por arriba con una cota pequeña.

**Lema B.2.1** (Lema 9.2 en [51]). *Sea  $\mathbf{x}$  un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (B.1). Sea  $V(t, \mathbf{x})$  una función de Lyapunov del sistema nominal, la cual satisface las desigualdades*

$$\begin{aligned} c_1 \|\mathbf{x}\|^2 &\leq V(t, \mathbf{x}) \leq c_2 \|\mathbf{x}\|^2 , \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) &\leq -c_3 \|\mathbf{x}\|^2 , \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right\| &\leq c_4 \|\mathbf{x}\| , \end{aligned}$$

en  $[0, \infty) \times D$ ; donde  $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\}$ . Asuma que el término de perturbación satisface

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r ,$$

para todo  $t \geq 0$ , todo  $\mathbf{x} \in D$ , y alguna constante positiva  $\theta < 1$ . Entonces, para todo  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} r$ , la solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema perturbado (B.2) satisface

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k \exp[-\gamma(t - t_0)] \|\mathbf{x}(t_0)\| , \quad \forall t_0 \leq t < (t_0 + T)$$

y  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq b$ ,  $\forall t \geq (t_0 + T)$  para algún  $T$  finito, donde

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} , \quad \gamma = \frac{(1 - \theta)c_3}{2c_2} , \quad b = \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\delta}{\theta} .$$

El Lema B.2.1 provee condiciones para determinar el acotamiento final y uniforme de la solución del sistema (B.2), cuando el origen del sistema nominal asociado es exponencialmente estable. Mientras que, el siguiente, Lema B.2.2 es una herramienta para lidiar con el caso más general, cuando el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema nominal (B.1).

**Lema B.2.2** (Lema 9.3 en [51]). *Sea  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema nominal (B.1). Sea  $V(t, \mathbf{x})$  una función de Lyapunov del sistema nominal, la cual satisface las desigualdades*

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) , \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{B.4})$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq \alpha_4(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{B.5})$$

en  $[0, \infty) \times D$ , donde  $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\}$  y  $\alpha_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , son funciones clase  $\mathcal{K}$ . Suponga que el término de perturbación  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$  satisface la cota uniforme

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| \leq \delta < \frac{\theta \alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{\alpha_4(r)}$$

para toda  $t \geq 0$ , toda  $\mathbf{x} \in D$ , y alguna constante positiva  $\theta < 1$ . Entonces, para toda  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , la solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema perturbado (B.2) satisface

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) , \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \\ \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \rho(\delta) , \quad \forall t \geq t_0 + T \end{aligned}$$

para alguna función clase  $\mathcal{KL}$   $\beta$  y algún  $T$  finito, donde  $\rho$  es una función clase  $\mathcal{K}$  de  $\delta$  definida como

$$\rho(\delta) = \alpha_1^{-1} \left( \alpha_2 \left( \alpha_3^{-1} \left( \frac{\delta \alpha_4(r)}{\theta} \right) \right) \right) .$$



# Referencias

- [1] D. Stevenson y H. Schaub, «Nonlinear control analysis of a double-gimbal variable-speed control moment gyroscope,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 35, n.º 3, págs. 787-793, 2012. DOI: 10.2514/1.56104.
- [2] H. Zhang y J. Fang, «Robust backstepping control for agile satellite using double-gimbal variable-speed control moment gyroscope,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 36, n.º 5, págs. 1356-1363, 2013. DOI: 10.2514/1.59327.
- [3] R. Marino, S. Peresada y P. Tomei, «Nonlinear adaptive control of permanent magnet step motors,» *Automatica*, vol. 31, n.º 11, págs. 1595-1604, 1995. DOI: 10.1016/0005-1098(95)00087-D.
- [4] C. M. Verrelli y col., «Speed sensor fault tolerant PMSM machines: from position-sensorless to sensorless control,» *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 55, n.º 4, págs. 3946-3954, 2019. DOI: 10.1109/TIA.2019.2908337.
- [5] H. Schaub, P. Tsiotras y J. L. Junkins, «Principal rotation representations of proper  $N \times N$  orthogonal matrices,» *International Journal of Engineering Science*, vol. 33, n.º 15, págs. 2277-2295, 1995, The Edelen Symposium. DOI: 10.1016/0020-7225(95)00070-E.
- [6] M. D. Shuster, «A survey of attitude representations,» *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 41, n.º 4, págs. 439-517, 1993.
- [7] F. Caccavale y L. Villani, «Output feedback control for attitude tracking,» *Systems & Control Letters*, vol. 38, n.º 2, págs. 91-98, 1999. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00050-X.
- [8] S. P. Arjun Ram y M. R. Akella, «Uniform exponential stability result for the rigid-body attitude tracking control problem,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 43, n.º 1, págs. 39-45, 2020. DOI: 10.2514/1.G004481.
- [9] P. C. Hughes, «Spacecraft attitude dynamics,» en Mineola, New York: Dover Publications, 2004, cap. 8,9.

- [10] R. Kristiansen, P. J. Nicklasson y J. T. Gravdahl, «Satellite attitude control by quaternion-based backstepping,» *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, n.º 1, págs. 227-232, 2009. DOI: 10.1109/TCST.2008.924576.
- [11] L. Davis, J. Wilson y R. Jewell, «Hubble space telescope reaction wheel assembly vibration isolation system,» *NASA Report*, vol. N87-22702, págs. 669-690, 1986.
- [12] R. A. Masterson, D. W. Miller y R. L. Grogan, «Development and validation of reaction wheel disturbance models: empirical model,» *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, n.º 3, págs. 575-598, 2002. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3868.
- [13] Z. Chen y J. Huang, «Attitude tracking and disturbance rejection of rigid spacecraft by adaptive control,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, n.º 3, págs. 600-605, 2009. DOI: 10.1109/TAC.2008.2008350.
- [14] W. Luo, Y.-C. Chu y K.-V. Ling, «Inverse Optimal Adaptive Control for Attitude Tracking of Spacecraft,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, n.º 11, págs. 1639-1654, 2005. DOI: 10.1109/TAC.2005.858694.
- [15] C. Liu, X. Jing, S. Daley y F. Li, «Recent advances in micro-vibration isolation,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 56-57, págs. 55-80, 2015. DOI: 10.1016/j.ymssp.2014.10.007.
- [16] Y. Xia, Z. Zhu, M. Fu y S. Wang, «Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances,» *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, n.º 2, págs. 647-659, 2011. DOI: 10.1109/TIE.2010.2046611.
- [17] C. J. Heiberg, D. Bailey y B. Wie, «Precision spacecraft pointing using single-gimbal control moment gyroscopes with disturbance,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, n.º 1, págs. 77-85, 2000. DOI: 10.2514/2.4489.
- [18] R. Krishnan, «Electric Motor Drives: Modeling, Analysis, and Control,» en 1.ª ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2001, cap. 9, págs. 513-620.
- [19] H. Yoon y P. Tsotras, «Spacecraft adaptive attitude and power tracking with variable speed control moment gyroscopes,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 25, n.º 6, págs. 1081-1090, 2002. DOI: 10.2514/2.4987.
- [20] H. Schaub y J. L. Junkins, «Singularity avoidance using null motion and variable-speed control moment gyros,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, n.º 1, págs. 11-16, 2000. DOI: 10.2514/2.4514.

- [21] H. Kurokawa, «Survey of theory and steering laws of single-gimbal control moment gyros,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 30, n.º 5, págs. 1331-1340, 2007. DOI: 10.2514/1.27316.
- [22] S.-J. Chung, U. Ahsun y J.-J. E. Slotine, «Application of synchronization to formation flying spacecraft: lagrangian approach,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 32, n.º 2, págs. 512-526, 2009. DOI: 10.2514/1.37261.
- [23] J.-Y. Wen y K. Kreutz-Delgado, «The attitude control problem,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, n.º 10, págs. 1148-1162, 1991. DOI: 10.1109/9.90228.
- [24] C. G. Mayhew, R. G. Sanfelice y A. R. Teel, «Quaternion-Based Hybrid Control for Robust Global Attitude Tracking,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, n.º 11, págs. 2555-2566, 2011. DOI: 10.1109/TAC.2011.2108490.
- [25] P. Tsiotras, «Further passivity results for the attitude control problem,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, n.º 11, págs. 1597-1600, 1998. DOI: 10.1109/9.728877.
- [26] M. R. Akella, «Rigid body attitude tracking without angular velocity feedback,» *Systems & Control Letters*, vol. 42, n.º 4, págs. 321-326, 2001. DOI: 10.1016/S0167-6911(00)00102-X.
- [27] M. Lu, L. Liu y G. Feng, «Adaptive tracking control of uncertain Euler-Lagrange systems subject to external disturbances,» *Automatica*, vol. 104, págs. 207-219, 2019. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.02.048.
- [28] L. E. Wiggins, «Relative magnitudes of the space-environment torques on a satellite,» *AIAA Journal*, vol. 2, n.º 4, págs. 770-771, 1964. DOI: 10.2514/3.2426.
- [29] H. Schaub y J. L. Junkins, «Analytical mechanics of space systems,» en 2.ª ed., ép. AIAA Education Series. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics y Astronautics, 2009, cap. 3, 4, págs. 79-136, 143-199.
- [30] I. Jikuya, K. Fujii y K. Yamada, «Attitude maneuver of spacecraft with a variable-speed double-gimbal control moment gyro,» *Advances in Space Research*, vol. 58, n.º 7, págs. 1303-1317, 2016. DOI: 10.1016/j.asr.2016.06.010.
- [31] C. Canudas De Wit y L. Praly, «Adaptive eccentricity compensation,» *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, n.º 5, págs. 757-766, 2000. DOI: 10.1109/87.865849.

- [32] P. Tsiotras y J. M. Longuski, «A new parameterization of the attitude kinematics,» *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 43, n.º 3, págs. 243-262, 1995.
- [33] A. H. De Ruiter, C. Damaren y J. R. Forbes, «Spacecraft dynamics and control: an introduction,» en 1.ª ed. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, Reino Unido: John Wiley & Sons, 2013, cap. 1, 2, págs. 1-46, 47-63.
- [34] «Diccionario de la lengua española.» Versión en línea 23.5. Consultado: 2021-12-26, REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. (), dirección: <https://dle.rae.es>.
- [35] M. Fossum. «Gyroscopes.» consultado: 2021-12-26, Youtube, NASA Video. (2013), dirección: <https://youtu.be/FGc5xb23XFQ>.
- [36] B. Wie, «Singularity escape/avoidance steering logic for control moment gyro Systems,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 28, n.º 5, págs. 948-956, 2005. DOI: 10.2514/1.10136.
- [37] C. Gurrisi, R. Seidel, S. Dickerson, S. Didziulis, P. Frantz y K. Ferguson, «Space station control moment gyroscope lessons learned,» *40th Aerospace Mechanisms Symposium*, págs. 161-176, 2010. dirección: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20100021932.pdf>.
- [38] H. Yoon y P. Tsiotras, «Singularity Analysis of Variable Speed Control Moment Gyros,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 27, n.º 3, págs. 374-386, 2004. DOI: 10.2514/1.2946.
- [39] —, «Adaptive spacecraft attitude tracking control with actuator uncertainties,» *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 56, n.º 2, págs. 251-268, 2008. DOI: 10.1007/BF03256551.
- [40] H. Schaub, S. R. Vadali y J. L. Junkins, «Feedback control law for variable speed control moment gyros,» *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 46, n.º 3, págs. 307-328, 1998. DOI: 10.1007/BF03546239.
- [41] «Coercitivity.» Consultado: 2022-01-10, Wikipedia. (2021), dirección: <https://en.wikipedia.org/wiki/Coercitivity>.
- [42] W. Leonhard, «Control of electrical drives,» en 3.ª ed. Berlin: Springer-Verlag, 2001, cap. 14, págs. 329-342.
- [43] B. S. Guru y H. R. Hiziroglu, «Electric machinery and transformers,» en 198 Madison Avenue, New York: Oxford university press, 2001, cap. 2,12, págs. 115-122, 659-666.
- [44] J. Chiasson, «Modeling and high performance control of electric machines,» en 1.ª ed., ép. IEEE Press Series on Power Engineerin. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005, cap. 6,9, págs. 390-391, 591-645.



- [45] R. H. Park, «Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part I,» *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 48, n.º 3, págs. 716-727, 1929. DOI: 10.1109/T-AIEE.1929.5055275.
- [46] P. Tomei y C. M. Verrelli, «Observer-based speed tracking control for sensorless permanent magnet synchronous motors with unknown load torque,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, n.º 6, págs. 1484-1488, 2011. DOI: 10.1109/TAC.2011.2121330.
- [47] R. Ortega, N. Monshizadeh, P. Monshizadeh, D. Bazylev y A. Pyrkin, «Permanent magnet synchronous motors are globally asymptotically stabilizable with PI current control,» *Automatica*, vol. 98, págs. 296-301, 2018. DOI: 10.1016/j.automatica.2018.09.031.
- [48] C. M. Verrelli y P. Tomei, «Global stability for the inner and outer PI control actions in non-salient-pole PMSMs,» *Automatica*, vol. 117, pág. 108 988, 2020. DOI: 10.1016/j.automatica.2020.108988.
- [49] S. Bifaretti, V. Iacovone, A. Rocchi, P. Tomei y C. Verrelli, «Nonlinear speed tracking control for sensorless PMSMs with unknown load torque: from theory to practice,» *Control Engineering Practice*, vol. 20, n.º 7, págs. 714-724, 2012. DOI: 10.1016/j.conengprac.2012.03.010.
- [50] «Línea de Kármán.» Consultado: 2022-01-10, Wikipedia. (2021), dirección: [https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADnea\\_de\\_K%C3%A1rm%C3%A1n](https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADnea_de_K%C3%A1rm%C3%A1n).
- [51] H. K. Khalil, «Nonlinear systems,» en 3.ª ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2002, cap. 4,9, págs. 111-194.
- [52] B. Wie, «Space vehicle dynamics and control,» en 1.ª ed. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics y Astronautics, 1998, cap. 7.
- [53] D. Shah, G. Espinosa-Pérez, R. Ortega y M. Hilaret, «An asymptotically stable sensorless speed controller for non-salient permanent magnet synchronous motors,» *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, n.º 4, págs. 644-668, 2014. DOI: 10.1002/rnc.2910.
- [54] J.-J. E. Slotine, W. Li y col., «Applied nonlinear control,» en Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991, vol. 199.
- [55] K. S. Narendra y A. M. Annaswamy, «Persistent excitation in adaptive systems,» *International Journal of Control*, vol. 45, n.º 1, págs. 127-160, 1987. DOI: 10.1080/00207178708933715.
- [56] V. Sundarapandian, «Global asymptotic stability of nonlinear cascade systems,» *Applied Mathematics Letters*, vol. 15, n.º 3, págs. 275-277, 2002. DOI: 10.1016/S0893-9659(01)00130-6.

- [57] A. Chaillet y A. Loría, «Uniform semiglobal practical asymptotic stability for non-autonomous cascaded systems and applications,» *Automatica*, vol. 44, n.º 2, págs. 337-347, 2008. DOI: 10.1016/j.automatica.2007.05.019.