



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

EXPECTATIVAS RACIONALES Y REALIDAD
ECONÓMICA

TESIS

Que para obtener el título de
LICENCIADO EN ECONOMÍA

PRESENTA

RODRIGO USCANGA RIOJAS

DIRECTOR DE TESIS

DR. HUGO JAVIER CONTRERAS SOSA



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, María Isabel y Jorge.

Índice general

Introducción	1
I. Antecedentes de las expectativas racionales	5
A. El equilibrio como un concepto expectacional	6
B. Los proyectos de investigación de expectativas	11
C. Racionalidad limitada	16
II. La definición de Muth	19
A. Es una hipótesis que se utiliza como un supuesto	20
B. ¿Qué son las expectativas?	20
C. Las empresas son individuos	24
D. Agregación y agente representativo	24
E. Algunos conceptos matemáticos de probabilidad	25
F. Interpretaciones de la probabilidad	33
G. Probabilidad objetiva	35
H. Probabilidad subjetiva	39
III. Racionalidad y Expectativas Racionales	41
A. La racionalidad como consistencia	42
a. Alternativas	44
b. Relación binaria	45
c. Reflexividad	46
d. Completitud	47
e. Transitividad	48

f. Orden completo	49
g. Preferencia estricta	49
h. Indiferencia	49
i. Cuatro formas de representar las preferencias	50
j. Conjunto de elección	51
IV. Hipótesis de expectativas	53
A. Expectativas clásicas	56
B. Expectativas adaptativas	64
C. Expectativas racionales y expectativas implícitas	70
a. Expectativas implícitas	71
b. Expectativas racionales	74
Conclusiones y recomendaciones	79
Bibliografía	87

Introducción

¿Qué son las expectativas racionales? Es difícil encontrar una respuesta satisfactoria a esta pregunta. En primer lugar, John F. Muth (Muth, 1961) define las expectativas racionales con respecto a otros conceptos que muy probablemente no sean comprendidos por un estudiante de licenciatura de economía. Una respuesta satisfactoria conectaría la etiqueta “expectativas racionales” a conceptos que ya comprenda. Muth definió las expectativas racionales en términos de distribuciones de probabilidad subjetiva y objetiva, consecuencias, etc. Esta definición es insatisfactoria para alguien que no comprenda estos conceptos.

En segundo lugar, algunas definiciones de expectativas racionales son muy especializadas. Una definición satisfactoria debería ser general, y no solamente haciendo referencia a un campo específico. Para ilustrar este punto, tómese la definición de expectativas racionales que se encuentra en *The New Palgrave Dictionary of Economics* (Sargent, 2018) en donde se definen las expectativas racionales concentrándose sobre todo en modelos econométricos. A pesar de la importancia de definir las expectativas racionales en términos econométricos, no se trata de una definición general que explique qué son las expectativas racionales dentro y fuera de la econometría.

En tercer lugar, algunas definiciones presentan a las expectativas racionales ligadas a conceptos que no son esenciales. Por ejemplo, en “Expectations and the Neutrality of Money” (Lucas, 1972) el supuesto de expectativas racionales se presenta en un contexto de mercados que se vacían y con agentes que resuelven un problema de optimización dinámica muy complejo. Sin embargo, no es necesario recurrir a mercados que se vacían ni a técnicas de optimización dinámica para explicar el concepto de expectativas racionales. Una definición satisfactoria debería de aislar el concepto de todo aquello que no sea esencial.

Este trabajo tiene por objetivo presentar una definición de expectativas racionales que sea comprensible, general y esencial. Es decir, una definición que un estudiante de economía pueda entender en términos de conceptos que ya comprende, que le permita distinguir a las expectativas racionales en general (tanto y fuera de la econometría, por ejemplo), y que no vaya ligada a otros conceptos más allá de los necesarios (es decir, sin recurrir a técnicas de optimización dinámica ni a situaciones específicas como, por ejemplo, mercados que se vacían). Adelanto que el trabajo no logró este objetivo, sin embargo espero que sea un pequeño paso en esa dirección.

Este trabajo tiene algunos objetivos específicos. En el primer capítulo se busca ubicar a las expectativas racionales en un contexto histórico. En el segundo capítulo se busca definir los conceptos utilizados en la definición de expectativas racionales de John F. Muth. En el tercer capítulo se busca definir a la racionalidad y distinguirla del concepto de expectativas racionales. El objetivo del cuarto capítulo es mostrar el efecto del supuesto de expectativas racionales en un modelo simple y contrastarlo con otras suposiciones de expectativas.

La hipótesis de este trabajo es que el supuesto de expectativas racionales es la versión estocástica del supuesto de previsión perfecta. Robert E. Lucas Jr. señaló refiriéndose al argumento de Muth que “[e]l contexto en el cuál llegué a entender esto fue determinístico, así que el supuesto de expectativas racionales se reduce a la previsión perfecta...” (Breit e Hirsch, 2005, p. 283). Se eligió esta hipótesis porque relacionar al supuesto de expectativas racionales con el supuesto de previsión perfecta puede ser una analogía útil para un estudiante así como lo fue para Robert E. Lucas Jr.

La hipótesis se demuestra mediante una tabla de verdad en donde se muestra que el supuesto de expectativas racionales es conceptualmente semejante al supuesto de previsión perfecta. Es decir, las consecuencias lógicas de asumir expectativas racionales en un modelo probabilístico son las mismas que asumir previsión perfecta en un modelo determinístico.

Esta investigación se justifica de diversas maneras. Con respecto a su conveniencia, la investigación es útil para que un alumno de economía pueda entender los modelos macroeconómicos modernos, en donde el supuesto de expectativas racionales es clave. Con respecto a su relevancia social, la investigación contribuye indirectamente a través de los alumnos y su mejor comprensión de los modelos macroeconómicos. Con respecto a sus implicaciones prácticas, la investiga-

ción ayuda a resolver problemas prácticos de forma indirecta a través de los alumnos que lleguen a trabajar en el futuro en temas de política monetaria (por ejemplo, en el Banco Central) en donde los modelos que utilizan expectativas racionales son relevantes. En cuanto al valor teórico de la investigación, se llena en parte el hueco que hay entre el conocimiento necesario para entender la definición de Muth y el conocimiento que probablemente tiene un alumno de economía a nivel de licenciatura. Por último, la utilidad metodológica de este trabajo es hacer más accesible la definición de expectativas racionales para los alumnos de economía a nivel licenciatura.

Capítulo I

Antecedentes de las expectativas racionales

John F. Muth publicó el artículo “Rational Expectations and Theory of Price Movements” en la revista *Econometrica* en julio de 1961. Sin embargo, la versión original del artículo fue presentada en diciembre de 1959 en la reunión de la *Econometric Society* en Washington, e incluso antes circulaba como un memorándum de investigación en el *Carnegie Institute of Technology* (Darity, Leeson y Young, 2004). En este artículo, John Fraser Muth expone la hipótesis de expectativas racionales, la cual afirma que “las expectativas son esencialmente las mismas que las predicciones de la teoría económica relevante”. Continúa estableciendo que “la economía en general no desperdicia la información, y que las expectativas dependen específicamente de la estructura del sistema completo” (Muth, 1961). Sobre la hipótesis de expectativas racionales Robert Lucas Jr. comentó en una de sus correspondencias: “Debo decir que continuo sorprendido por la originalidad de la formulación de Muth. No conozco a ningún predecesor que estuviera así de cerca. No tengo idea de cómo se le ocurrió esto” (Young y Darity, 2001). Franco Modigliani comentaría refiriéndose a Muth: “De todos nuestros estudiantes él es sin duda el que ha tenido el impacto más profundo sobre la nueva generación, como el padre de las expectativas racionales”. Pero quizás el elogio más significativo es el de Herbert Simon quien diría: “Jack publicó en *Econometrica* en 1961 una novedosa sugerencia para tratar con la incertidumbre en la economía. Él claramente merece un Nobel por esto...” (Simon, 1996). Para entender la importancia de la idea de Muth es importante entender el estado general de la teoría económica neoclásica desde el periodo de entreguerras hasta la década de los cincuentas, en específico la importancia

que las expectativas tomaron para la teoría del equilibrio general. Por otro lado, para entender el surgimiento de la idea de Muth es importante conocer sus antecedentes directos, en particular, el proyecto del estudio de toma de decisiones de las empresas llevado a cabo en el Carnegie Institute of Technology. En este capítulo se abordarán estos dos temas.

A. El equilibrio como un concepto expectacional

Una de las propiedades esenciales del equilibrio es la condición de que las expectativas de los agentes sean correctas, en este sentido, se puede hablar del equilibrio como un concepto expectacional (Phelps, 1991). En un entorno multiperiodo, un agente realiza planes que necesariamente requieren tomar en cuenta los valores futuros de las variables que le son relevantes para la toma de decisiones, esto es, el agente forma “expectativas” sobre los variables en fechas posteriores a la que se encuentra en ese momento. Cuando además el entorno involucra a otros participantes, la expectativa del agente comprende el comportamiento de los otros participantes. Por ejemplo, si el agente espera comprar un bien en un periodo futuro a un determinado precio, esto implica la expectativa de que un vendedor realizará la transacción a este precio esperado. Así, la expectativa del agente involucra el comportamiento futuro del vendedor, y en este sentido involucra también las expectativas y planes de éste. Aunque el concepto de equilibrio se ha transformado desde sus inicios, se puede tomar como ejemplo la noción de equilibrio como un punto de reposo, en otras palabras, como un punto en el que ninguno de los agentes modifica su comportamiento. Este reposo implica que estos planes son de alguna forma “correctos”, de manera que si para uno de los agentes los resultados no concordaran con sus planes, entonces, esto lo obligaría a revisar estos planes y cambiar su comportamiento, y por tanto, ya no se trataría de un equilibrio. Es así como el concepto de equilibrio está ligado a los planes, expectativas y anticipaciones de los agentes, más aún, el concepto de equilibrio está definido en términos de aquellos, así, se puede hablar de un “equilibrio expectacional”.

Las expectativas tomaron un papel central en la teoría neoclásica alrededor de la década de 1930, cuando se dan esfuerzos importantes para hacer dinámico lo que hasta ese momento era un con-

cepto estático de equilibrio. El concepto de equilibrio fue desarrollado por León Walras, quien en su libro *Eléments d'économie politique pure*, publicado en 1900, planteó un programa de investigación que marcaría el desarrollo posterior que tendría lugar en el siglo veinte. Si bien en el modelo de Walras el equilibrio es estático, existe un elemento dinámico relacionado con el proceso de ajuste del sistema hacia el equilibrio. Walras llamó a este proceso *tâtonnement* (Walras, 1954, p. 170), que quiere decir tanteo. Si la demanda de un bien es mayor que la oferta, el precio de ese bien subirá, mientras que si la oferta es mayor que la demanda, el precio bajará. El precio tendrá varios movimientos hacia arriba o hacia abajo hasta que se logre la igualdad entre la oferta y la demanda. Este no es el único aspecto dinámico del modelo de Walras, también consideró un proceso dinámico intertemporal sobre una serie de periodos de tiempo (Van Witteloostuijn y Maks, 1990). Posteriormente, en 1901, Pareto publicó una nota sobre las ecuaciones del equilibrio dinámico. Después, Knut Wicksell señaló que la principal debilidad de la escuela de Lausanne era su enfoque atemporal a la teoría de la producción, así que buscó agregar una dimensión temporal a la teoría del valor, refiriéndose al estado estacionario. Wicksell resaltó el elemento temporal en la teoría walrasiana y motivó el pensamiento de un equilibrio en el tiempo. Estos acontecimientos marcaron los primeros intentos por construir una teoría dinámica del equilibrio general.

Al principio, el equilibrio estuvo relacionado al estado estacionario, cuya principal característica es que el comportamiento de las variables económicas permanece constante. Sin embargo, el estado estacionario no es un estado estático, al contrario, tiene lugar en el tiempo, pero los procesos económicos son recurrentes y constantes, de forma que se eliminan muchas de las complicaciones de un análisis verdaderamente dinámico. La idea de estado estacionario se remonta a los economistas clásicos, desde Adam Smith hasta John Stuart Mill, y fue el punto de partida para la teoría del equilibrio general, por mucho tiempo incluso existió confusión al distinguir entre equilibrio y estado estacionario. Nicholas Kaldor (Kaldor, 1934) enlistó los supuestos de la teoría estática:

1. Una economía cerrada, (ya sea un individuo aislado o una comunidad “autosuficiente” con un volumen dado de recursos naturales y humanos).

2. “Conocimiento perfecto”: todos los precios relevantes cotizados en todos los mercados son conocidos por todos los individuos.
3. “Competencia perfecta”: todos los intercambios son llevados a cabo en mercados tan grandes que ningún individuo puede influir en ninguno de los precios a los cuales se confronta.
4. “Intercambio directo”: todos los bienes, servicios, etc., son intercambiados directamente uno por otro, mientras que todos los precios son expresados en uno de los bienes que sirve como una unidad de cuenta (también llamado numerario).
5. Todas las variables independientes permanecen constantes a través del tiempo.
6. Todos los individuos esperan que los precios actuales permanezcan: no se anticipan cambios de precio.

El análisis toma en cuenta el aspecto temporal, sin embargo, los dos últimos supuestos lo simplifican de forma importante, ya que se asume un sistema en donde las variables independientes no cambian, por lo cual no se requiere especificar cómo estas evolucionan, y junto al supuesto de expectativas estáticas, hace que las expectativas de los agentes coincidan con los valores realizados de las variables. Los primeros esfuerzos hacia una teoría dinámica se dieron en la dirección de abandonar el estado estacionario y considerar un sistema en el que las variables no fueran constantes.

Los economistas suecos, bajo la influencia de Wicksell, fueron los primeros en introducir las expectativas de forma explícita en sus teorías, en lo que se conocería como el análisis *ex ante-ex post*. Los personajes principales fueron Gunnar Myrdal y Erik Lindahl, quienes construyeron una forma de análisis que fue relacionada al nombre de Escuela de Estocolmo. En 1924, Lindahl usa la noción de “cálculos subjetivos del futuro” y se refiere a una inversión negativa reconocida solo “*ex post*”. En 1927, Gunnar Myrdal presenta su tesis doctoral *The Problem of Price Formation and Change*, en donde expone el “método de expectativas” y subraya la idea de Frank Knight sobre la necesidad de distinguir entre cambios previstos y no previstos. Según este método, las anticipaciones son parte de los datos y juegan el mismo papel que otros determinantes del precio. Durante toda la década de 1930, Lindahl y Myrdal refinaron este enfoque en un conjunto de libros en los que destacan *Monetary Equilibrium* y *The Rate of Interest and the Price Level*. Bajo el

enfoque sueco, el análisis económico se puede dividir en un análisis ex ante que explica cómo las expectativas determinan una variable económica y en un análisis ex ante-ex post que explica la divergencia entre el valor esperado y el realizado de la variable. Los valores ex ante y ex post podrían ser diferentes porque las expectativas formuladas al principio de un periodo podrían no realizarse. El análisis ex ante-ex post de la Escuela de Estocolmo jugó un papel importante en la teoría económica neoclásica ya que resaltó la importancia de las expectativas para el análisis económico.

El concepto de equilibrio de Friedrich von Hayek es uno de los planteamientos más influyentes con respecto a la nueva reconceptualización del equilibrio en términos dinámicos. Hayek es el primero en formular la condición de equilibrio general en términos de la compatibilidad mutua de los planes de los agentes en un entorno multiperiodo. Él define al equilibrio como la confirmación de las expectativas de los agentes, de manera que la economía se encuentra en equilibrio si ningún agente tiene ninguna razón para modificar los planes que ideó al principio del periodo. En el análisis de Hayek la consistencia mutua de los planes es asegurada mediante el supuesto de previsión perfecta, de forma que una de las innovaciones de Hayek fue ligar esta suposición a una nueva definición de equilibrio en términos de la confirmación de las expectativas de los agentes. Este concepto logra escapar la formulación anterior del equilibrio como un estado estacionario en donde los datos del sistema no varían, de manera que deja espacio para que ocurran cambios en las variables, sin embargo, ahora, el foco de atención se pone sobre la previsión y los planes de los agentes. Para Hayek, la previsión de los agentes es crucial en el concepto de equilibrio: “Las suposiciones de este tipo que están implícitas en el concepto de equilibrio son esencialmente que todos preveen el futuro correctamente y que esta previsión incluye no solo los cambios en los datos objetivos sino también el comportamiento de todas las demás personas con las cuáles espera realizar transacciones económicas”.

Casi de forma paralela a Hayek, Erik Lindahl comienza a construir una nueva teoría que toma en cuenta el aspecto dinámico. Lindahl parte de un modelo en donde el tiempo no tiene importancia, pero incluso en este modelo, los agentes deben realizar planes, y su comportamiento está basado sobre los precios esperados y no solo sobre los precios presentes. En la terminología sueca, los agentes realizan planes ex ante basados sobre precios esperados. La forma en la que Lindahl

evita este elemento dinámico es mediante un supuesto de “conocimiento perfecto” en donde los precios esperados se vuelven idénticos a los precios realizados. Lindahl reconoce el supuesto clave de la “previsión perfecta” en su modelo: “La suposición de previsión perfecta implica que los individuos tienen conocimiento completo de todos los datos futuros que ellos toman en consideración en su planeación económica... Por tanto, ellos conocen no solo los precios futuros sino también la forma en la cual ellos mismos, como propietarios de factores, como consumidores, o como empresarios, reaccionarán a estos precios en el futuro”. Lindahl interpreta la previsión perfecta como expectativas autocumplidas, o en la terminología sueca, los planes ex ante siempre son confirmados por los resultados ex post. Posteriormente, Lindahl elimina la condición de estacionariedad y desarrolla un conjunto de modelos de equilibrio temporal en donde modifica en cada uno la habilidad de pronóstico de los agentes. Finalmente, Lindahl hace que el supuesto de previsión perfecta se mantenga para un solo periodo, y permite que en los periodos posteriores exista una divergencia entre la anticipación de los agentes y los eventos que en realidad tienen lugar. De esta manera los planes son formulados de nuevo al principio de cada periodo, y abre la posibilidad de investigar cómo las expectativas de los agentes son afectadas por los eventos imprevistos.

John Hicks recoge las ideas de los suecos y de Hayek, entre otros, y su libro *Value and Capital* es el que mayor impacto tiene en los desarrollos posteriores de la teoría del equilibrio general. Para Hicks, el equilibrio también estaba estrechamente ligado a las expectativas: “Podemos tener equilibrio en un mundo cambiante. La condición para el equilibrio es la previsión perfecta; los hombres deben actuar siempre de forma que si los precios (presentes y futuros) sobre los cuales basan sus acciones, debieran realizarse”.

En la construcción de este nuevo concepto de equilibrio dinámico, el supuesto de previsión perfecta toma un lugar central. Los suecos y Hayek lograron mostrar que un requisito para cualquier teoría dinámica requería de un conjunto de suposiciones específicas sobre las expectativas de los agentes. Por otro lado, también llamaron la atención sobre la necesidad de investigar las suposiciones sobre las expectativas, así como del impacto que éstas tienen sobre el comportamiento de los agentes. Hicks resalta la importancia de las expectativas en general, y en específico del supuesto de previsión perfecta. Estos economistas se dieron cuenta del papel central que tenía la

hipótesis de previsión perfecta para una teoría dinámica del equilibrio, y buscaron expandir la teoría mediante la eliminación de este supuesto. Al eliminar el supuesto de previsión perfecta, se abrió la puerta para un análisis más amplio y más “real”, pero también se creó un vacío en la teoría que fue difícil de llenar. Ya no se podía explicar el equilibrio mediante la simple suposición de consistencia de los planes de los agentes, ahora estos planes podían no ser consistentes, y las expectativas estar equivocadas, de manera que se debía explicar cómo se alcanzaba el equilibrio bajo estas condiciones, esto es, cómo los agentes revisaban sus planes y eventualmente estos llegaban a ser correctos y consistentes, lo que se conoció como el “aprendizaje”.

Otro de los cambios importantes que sufrió la teoría neoclásica fue con respecto al concepto de racionalidad, en específico, la teoría de la utilidad. Dos de los principales avances en esta área son el desarrollo de la teoría de la utilidad esperada por parte de John von Neumann y Oskar Morgenstern, y la teoría de la utilidad esperada subjetiva de Leonard Savage. La primera permitió incorporar la incertidumbre en el análisis de la utilidad, y axiomatizó esta teoría dotando de consistencia las preferencias de los agentes. Por otra parte, la teoría de Savage, expandió esta consistencia a las creencias que tenían los agentes sobre las probabilidades e introdujo al análisis el concepto de probabilidad subjetiva. Al final de estos dos acontecimientos el agente racional quedó definido como un tomador de decisiones bayesiano, que continuamente recibe información y modifica sus creencias subjetivas para que sean consistentes con respecto a un conjunto de axiomas.

B. Los proyectos de investigación de expectativas

Una vez que las expectativas cobraron un papel central para la teoría económica neoclásica, se formaron diversos proyectos de investigación cuyo objetivo era estudiar el papel de las expectativas, muchos de ellos con un enfoque de investigación empírica, pero que contribuyeron de forma importante al aspecto teórico de las expectativas. Dos de los proyectos más importantes fue el llevado a cabo en la Universidad de Illinois, y el que se puede considerar una continuación de este, llevado a cabo en el Carnegie Institute of Technology.

Albert Hart planteó una agenda de investigación sobre las expectativas, en específico con res-

pecto a las expectativas de las empresas. En mayo de 1949, delinió lo que él consideraba eran “las preguntas que la teoría de la inversión debía preguntar” sobre el papel del conocimiento, planes y expectativas. Contrario a la idea de que las expectativas y planes no eran observables, Hart tomó la postura de que los planes y estimados debían ser reconocidos explícitamente, y no solo eso, también debían ser investigados empíricamente. Hart propuso utilizar cuestionarios en donde se les preguntara de manera directa a individuos clave dentro de la empresa una serie de preguntas que permitieran investigar la relación entre las decisiones y las expectativas (Darity, Leeson y Young, 2004).

En 1949 se inició el proyecto llamado “Research Project on Business Expectations and Planning”, que tuvo lugar en el Bureau of Economic Research de la Universidad de Illinois. El proyecto estaba inspirado en la agenda que Hart había planteado y su objetivo era estudiar el papel de las expectativas y planes en la actividad económica. Se trataba de una investigación empírica en donde se recolectó información sobre el rumbo de las expectativas en la economía de los Estados Unidos. Los datos recolectados eran históricos y actuales, algunos de ellos obtenidos a través de entrevistas personales y estudios de caso. En las entrevistas se exploró la naturaleza, propósitos y métodos de la planificación anticipada así como de las relaciones entre anticipaciones, planes y el comportamiento real de diversas empresas en diferentes industrias. El proyecto buscaba explorar los posibles usos de la información estadística sobre anticipaciones y planes de las empresas tanto para el propósito de incrementar el entendimiento del comportamiento económico en general y de la toma de decisiones por parte de las empresas en particular. El proyecto se concentró en el papel que las anticipaciones y los planes tenían en el comportamiento de las empresas, que era parte del problema general de la toma de decisiones en un entorno dinámico. Se querían explicar ciertas regularidades empíricas y desarrollar un marco para formular y probar hipótesis con respecto al uso de la información sobre anticipaciones tanto para el análisis económico como para realizar pronósticos. El proyecto estuvo a cargo de Franco Modigliani, quien fue recomendado por el mismo Albert Hart, este sería uno de los estudios empíricos sobre expectativas más importantes e influyentes.

En 1952 el proyecto de Illinois llegó a su fin debido a problemas internos en la Universidad de Illinois, sin embargo, inició importantes líneas de investigación que serían continuadas poste-

riormente. El investigador principal del proyecto, Franco Modigliani, partió al Carnegie Institute of Technology, donde la investigación sobre expectativas continuaría dentro de otro proyecto, que iría más allá del estudio de las expectativas. Este nuevo proyecto fue iniciado en la Graduate School of Industrial Administration por William W. Cooper y se tituló “Planning and Control of Industrial Operations”. En él participaron Charles C. Holt, Franco Modigliani, Herbert A. Simon y Muth, entre otros destacados investigadores. El núcleo de la investigación era un modelo de programación dinámica lineal cuadrático de la planeación de la producción agregada. Se trataba esencialmente del estudio de la toma de decisiones bajo incertidumbre. Se entrevistó a los administradores de 15 compañías enfocándose finalmente en la aplicación del modelo para programar la producción de pintura en la planta de Springdale de la Pittsburgh Glass Corporation.

El proyecto de Carnegie surgió como un estudio del uso de datos contables por los administradores de fábricas en su toma de decisiones, en donde se analizaba el papel del pronóstico y la retroalimentación a la hora de programar la producción de las fábricas con demandas inciertas para sus productos. Así se planteó un escenario en donde se podían comparar las formas en las que las decisiones se hacían de forma real en las empresas con las que la teoría económica pretendía que se hacían. Fue una forma de estudiar las decisiones de las empresas individuales de primera mano. Los resultados de este proyecto fueron publicados en dos artículos en *Management Science* como “Linear decision rule for production and employment scheduling” en 1955 y “Derivation of a linear decision rule for production and employment” en 1956. Derivado de este proyecto también se publicaron otros artículos, en los que destacan: de Simon, “Some properties of optimal linear filters” y “Dynamic Programming under uncertainty with a quadratic cost function”; de parte de Muth, “Optimal properties of exponentially weighted forecast” y “Rational expectations and the theory of Price movements”; de parte de P. A. Winters, “Forecasting sales by exponentially weighted moving averages”; y por parte de Holt “Linear decision rules for economic stabilization and growth”. Finalmente, los resultados del proyecto fueron publicados en el libro “Planning Production, Inventory and Work Force”.

Muth era un estudiante de posgrado en el Carnegie Institute of Technology, y su papel en el proyecto era investigar técnicas para predecir ventas futuras y, en general, para tratar con la incertidumbre. En el proyecto, Muth trabajó junto a Modigliani, quien era el responsable de la

parte de control de inventarios bajo incertidumbre. Uno de los problemas que abordaron fue el del pronóstico de la demanda, lo que introdujo a Muth a los métodos estadísticos de pronóstico.

Durante la Segunda Guerra Mundial se desarrollaron armas antiaéreas que utilizaban el suavizamiento exponencial, esto es, medias móviles exponencialmente ponderadas, para disminuir las fluctuaciones erráticas en las posiciones predichas de los objetivos. Este procedimiento era conocido por los investigadores de operaciones en GSIA y por Holt al momento de enfrentarse a la tarea de realizar pronósticos en el proyecto HMMS. El equipo HMMS estaba interesado en encontrar componentes recursivos simples como el promedio móvil ponderado exponencialmente para pronosticar ventas futuras. Es así como Winters presenta su artículo sobre pronóstico de ventas mediante medias móviles ponderadas exponencialmente en donde resalta la necesidad de realizar pronósticos de manera rutinaria que sean rápidos y baratos, tanto en términos de computación como de almacenamiento de información. Dado que no se conocían las características de pronóstico de este procedimiento, Muth decidió hacerse la pregunta ¿para qué tipo de información estadística este procedimiento provee soluciones óptimas? Esta pregunta es la que es abordada en su artículo de 1960 “Optimal Properties of Weighted Forecasts”. Muth encontró que el procedimiento de suavizamiento exponencial podría ser óptimo en el caso de que las realizaciones aleatorias tuvieran dos efectos: un impacto temporal que durara solo un periodo, y una fracción de la realización que modificara permanentemente el valor esperado de la distribución.. De esta manera, el trabajo de Muth mostró las suposiciones implícitas que se hacían al utilizar el suavizamiento exponencial.

Uno de los productos del proyecto HMMS fue el principio de equivalencia de certidumbre de Simon, el cual aborda en el artículo de 1956, titulado “Dynammic programming under uncertainty with a quadratic criterion función”. Simon mostraba que los pronósticos de valor esperado conducían a soluciones óptimas siempre que los costos fueran cuadráticos y la varianza residual fuera independiente de las decisiones. Para Muth fue el trabajo más importante de Simon y fue el fundamento de su artículo de expectativas racionales.

En el proyecto HMMS se encontraron dos enfoques que influenciaron a Muth. Por un lado, Simon buscaba aplicar la teoría del servomecanismo para derivar una regla de decisión para la empresa, y por esto se concentró en un enfoque de retroalimentación. Por otro lado, Franco Modigliani

abordó el problema desde el punto de vista de la predicción, analizando la forma en la que las anticipaciones de los tomadores de decisiones eran revisadas.

El proyecto fue una de las primeras aplicaciones económicas de la programación dinámica. Este enfoque había sido desarrollado por Richard Bellman alrededor de 1950 mientras trabajaba en RAND Corporation (Bellman, 1984). Esta técnica permite minimizar o maximizar recursivamente una etapa a la vez con respecto a una función explícitamente establecida para describir el criterio de pérdida o ganancia. La programación dinámica permitió atacar problemas muy complejos de optimización dinámica, y en su esencia ofrecía un enfoque recursivo a sus soluciones. Al momento de la realización del proyecto HMMS, ya se habían analizado las condiciones para encontrar la existencia de soluciones únicas para problemas de programación dinámica. Sin embargo, en la práctica, calcular estas soluciones requería una cantidad considerable de cálculos computacionales, aún para problemas muy simples. El principio de equivalencia de certidumbre de Simon permitía reducir considerablemente el número de cálculos computacionales al explotar la estructura cuadrática de la función de costo. Además, al establecer el problema con las características propuestas por Simon, se obtenían reglas óptimas de decisión que eran lineales y que podían ser expresadas de forma algebraica explícita, lo que no era común en los problemas de programación dinámica.

Al analizar los problemas de decisión bajo incertidumbre, tanto Simon como Modigliani estaban muy conscientes de la carga de computación que debía asumirse por parte de los tomadores de decisiones. Por una parte, Modigliani se enfocó en analizar la relevancia e irrelevancia de los parámetros y criterios que debía estimar el tomador de decisiones, y por otro lado buscó delimitar muy bien el horizonte de decisión que tomaban en cuenta las empresas a la hora de establecer sus planes. Simon por otra parte, incluso comenzó a modelar a los tomadores de decisiones como si poseyeran una racionalidad limitada, tomando en cuenta la capacidad de computación e información limitada. Por esto, no es casualidad que el principio de equivalencia de certidumbre fuera explotado en el proyecto HMMS.

Simon intentó modelar a la empresa como un servomecanismo. La teoría del servomecanismo se utilizó principalmente para el control de sistemas eléctricos y mecánicos. En el sistema hay inputs y outputs, y un error que es su diferencia. El sistema se diseña de forma que el input es

una función del error. Un ejemplo clásico es un termostato en donde el input es la temperatura que se mide, posteriormente se compara con una temperatura objetivo, y la cantidad de gas que entra al sistema es una función de la diferencia entre ambos, lo que produce un output, que vuelve a seguir este proceso de manera recursiva (Simon, 1952). En la empresa, el tomador de decisiones se enfrenta a ciertas variables que son inciertas, como la demanda por sus productos. Hay muchas formas en las que la empresa se puede ajustar a la aleatoriedad de esta demanda. Por un lado podría ajustarse reduciendo o aumentando a la par de la demanda la cantidad de mano de obra que utiliza. Sin embargo, debido a las restricciones que esto representa, el papel del inventario es esencial al estudiar a la empresa como tomadora de decisiones bajo incertidumbre, ya que es el inventario el que actúa como un amortiguador entre la demanda aleatoria y otras variables que son más difíciles de modificar, como el nivel de la mano de obra utilizada (Holt, Franco Modigliani y Simon, 1955). Por esto el estudio del control de inventarios jugó un papel importante en el proyecto HMMS.

Simon quería abordar el problema de la administración del inventario tratándolo como un servomecanismo. Buscaba una regla simple que respondiera al nivel del inventario y que no descansara en la predicción de los valores futuros, en este caso, de las ventas. Por eso se dice que el enfoque de Simon se inclinaba hacia una regla feedback. Finalmente, en el proyecto confluyeron los dos enfoques de Simon y de Modigliani, incorporando tanto el feedback como la importancia de las anticipaciones y planes, y cómo estos eran revisados.

C. Racionalidad limitada

Muth presenta la hipótesis de expectativas racionales como un desafío frontal al concepto de racionalidad limitada de Herbert Simon: “A veces se argumenta que la suposición de racionalidad en la economía lleva a teorías inconsistentes con, o inadecuadas para explicar los fenómenos observados, especialmente los cambios en el tiempo (por ejemplo Simon 1959). Nuestra hipótesis está basada sobre el punto de vista exactamente opuesto: que los modelos económicos dinámicos no asumen suficiente racionalidad”.

La racionalidad limitada se refiere a la elección racional que toma en cuenta las limitaciones

cognitivas del tomador de decisiones. Dentro de estas limitaciones se encuentran tanto las que tienen que ver con el conocimiento como las que tienen que ver con la capacidad computacional. Las teorías de racionalidad limitada son teorías de toma de decisiones y elección que suponen que el tomador de decisiones desea lograr objetivos y usa su mente tanto como es posible, pero al mismo tiempo toman en cuenta las capacidades reales de la mente humana.

Las teorías de racionalidad limitada se contraponen a la teoría de la utilidad esperada subjetiva, desarrollada por Savage. Esta teoría trata sobre la formación de creencias consistentes. La teoría postula que las elecciones se realizan: 1) entre un conjunto de alternativas dado y fijo, 2) con distribuciones de probabilidad subjetivas que son conocidas para cada tomador de decisiones, y 3) maximizando el valor esperado de una función de utilidad dada.

La diferencia fundamental es que la Teoría de la Utilidad Esperada Subjetiva (TUES) asume que la elección es una respuesta objetivamente óptima a la situación a la que se enfrenta el tomador de decisiones, mientras que las teorías de racionalidad limitada buscan capturar el proceso de toma de decisiones que en realidad tiene lugar. Simon estaba interesado en estudiar empíricamente el proceso de toma de decisiones, recurriendo a campos como la psicología y a experimentos de comportamiento que permitieran describir el proceso cognitivo del tomador de decisiones.

Para generar una teoría de racionalidad limitada, Simon proponía relajar algunos de los supuestos de la teoría neoclásica. En lugar de asumir un conjunto fijo de alternativas, se podía suponer un proceso para generar alternativas. En vez de asumir que las distribuciones de probabilidad son conocidas, se podían buscar estrategias para manejar la incertidumbre que no asumieran un conocimiento de las probabilidades. Y el que es quizás el más importante de todos, en lugar de asumir la maximización de una función de utilidad, se puede postular una estrategia satisfactoria.

Dentro de los límites cognitivos que se postulan se encuentra la falta de conocimiento y la capacidad limitada para pronosticar el futuro. Los límites no son solo límites sobre información específica sino también la insuficiencia de las teorías científicas que puedan ser usadas para predecir fenómenos relevantes.

En muchos sentidos, la “racionalidad limitada” propuesta por Simon desafía las nociones más fundamentales de la teoría económica neoclásica, sobre todo al proponer una alternativa a la

maximización de una función de utilidad, y en su lugar utilizar un criterio de satisfacción, esto es, las decisiones que se toman satisfacen un mínimo en lugar de buscar ser óptimas.

Capítulo II

La definición de Muth

John Fraser Muth definió la hipótesis de expectativas racionales de la siguiente manera:

La hipótesis puede expresarse de otro modo un poco más preciso como sigue: que las expectativas de las empresas (o más generalmente, la distribución de probabilidad subjetiva de las consecuencias) tienden a estar distribuidas, para el mismo conjunto de información, alrededor de la predicción de la teoría (o las distribuciones de probabilidad “objetiva” de las consecuencias). [“Rational Expectations and the Theory of Price Movements”, 1961, p. 316.]

Es conveniente hacer algunas aclaraciones respecto a esta definición. En primer lugar, las palabras “expectativas” y “consecuencias” tienen un significado particular muy diferente al que se les da usualmente. En segundo lugar, los términos “probabilidad subjetiva” y “probabilidad objetiva” se refieren a interpretaciones de la probabilidad y por sí mismos merecen una exposición amplia para capturar su significado. Por último, esta definición fue presentada en un artículo que forma parte de un proyecto más amplio en donde las “empresas” son entendidas de una forma específica que debe explicarse. Por estas razones, a continuación se harán algunas precisiones y se reformulará esta definición.

A. Es una hipótesis que se utiliza como un supuesto

En el razonamiento científico, una hipótesis es una suposición que se hace con el propósito de ser probada. La hipótesis es un enunciado que se plantea y que después se contrasta con observaciones para determinar si es cierto o es falso. Edward Prescott ha argumentado que la hipótesis de expectativas racionales no se presta a una prueba empírica directa: “Como la utilidad, las expectativas no son observables, y las encuestas no pueden ser usadas para probar la hipótesis de expectativas racionales. Uno solamente puede probar si alguna teoría, ya sea que incorpore expectativas racionales o, en todo caso, expectativas irracionales, es o no consistente con las observaciones” (Prescott, 1977). Hay quienes tienen una opinión contraria e incluso han puesto a prueba la hipótesis de expectativas racionales como Michael C. Lovell: “En conclusión, me parece que el peso de la evidencia empírica es suficientemente fuerte para obligarnos a interrumpir la creencia en la hipótesis de expectativas racionales hasta la acumulación de evidencia empírica adicional” (Lovell, 1986).

Dejando de lado la discusión de si la hipótesis de expectativas racionales puede ser probada empíricamente, es mejor considerarla como un supuesto. Esto es debido a que la hipótesis se toma como cierta en los modelos macroeconómicos. Es decir, se asume de entrada que las expectativas son racionales y no se pone en duda la validez de la hipótesis. De esta manera es más apropiado referirse al supuesto de expectativas racionales.

B. ¿Qué son las expectativas?

Para John Muth el término *expectativas* tiene un significado específico. La siguiente definición es lo que debe entenderse por la palabra *expectativas*:

Siempre que usamos las palabras “expectativas” o “datos *ex ante*”, pretendemos referirnos tanto a anticipaciones como a decisiones y planes. [...] Las anticipaciones se refieren al curso futuro de variables fuera del control directo del agente; estas incluyen pronósticos de precios, de condiciones de demanda, de disponibilidad de mano de obra, de población, de actividad comercial general, etcétera. Las decisiones

y los planes se refieren a la forma de actuar futura del agente mismo; estas incluyen planes de producción, presupuestos, programas de inversión, etcétera. [...] Los datos *ex ante* son frecuentemente referidos como expectativas; ocasionalmente usamos esta última expresión, aunque generalmente nos abstenemos de hacerlo debido a la confusión que esta terminología puede generar con el concepto de *expectativa matemática* o *valor esperado* como se emplea en estadística. [*The Role of Anticipations and Plans in Economic Behavior and their Use in Economic Analysis and Forecasting*, Franco Modigliani y Kalman J. Cohen, p. 12]

La recolección sistemática de datos sobre expectativas comenzó probablemente con la encuesta sobre planes de desembolso de capital llevada a cabo en Suecia a partir de 1930. Desde entonces, otros países imitaron estas encuestas y en el periodo de la posguerra ya se habían llevado a cabo encuestas sobre las expectativas de otras variables como precios, ganancias, ventas y empleo (F. Modigliani y Weingartner, 1958, p. 23). Por ejemplo, desde la Segunda Guerra Mundial, la *Office of Business Economics* del Departamento de Comercio de los Estados Unidos y la *Securities and Exchange Commission* comenzaron a compilar datos sobre desembolsos de capital. Se enviaba un formulario como el que se muestra en la siguiente página a cerca de 2200 empresas. A continuación se muestra solo una parte de este formulario:

	Realizados	Anticipados
	1952	1953
Gastos de planta	\$	\$
Gastos de maquinaria y equipo	\$	\$
Total	\$	\$

Las expectativas son los gastos que se proporcionan en la columna bajo el encabezado “Anticipados”. Este formulario debía ser llenado al final del año 1952, por lo que los datos proporcionados en la columna con el encabezado “Realizados”, son los gastos en los que ya se incurrió, es decir, están en el pasado. Por otro lado, los datos proporcionados en la columna con el encabezado “Anticipados” son los gastos que la empresa considera que tendrá el siguiente año (1953), es decir, en el futuro.

REPORT FORM FOR PLANT AND EQUIPMENT EXPENDITURES SURVEY

GENERAL INSTRUCTIONS	SPECIFIC INSTRUCTIONS				
<p>Please mail this schedule as promptly as possible since the timeliness of the summary we will send to you each quarter is dependent upon the date we receive reports from cooperating companies. Your replies to these questions are strictly confidential. They will be seen by no one except the sworn Bureau personnel working on the survey who are prohibited by law from revealing the information which you furnish.</p> <p>Your company name does not appear on this form as the confidential code number is sufficient identification for purpose of classification and tabulation.</p>	<p>Show as much of the indicated breakdown as is practicable. In all cases give total plant and equipment expenditures. Estimated amounts may be used if desired.</p> <p>"Plant and equipment expenditures" for the reporting period consist of additions completed during the period plus construction in progress at the end of the period, minus construction in progress at the beginning of the period.</p> <p>Exclude (1) all expenditures for land, (2) costs incurred for maintenance and repairs, and (3) expenditures on plant and equipment for use outside the continental United States. If it is not feasible to exclude actual expenditures for these items, please estimate, or indicate that they are included.</p> <p>Report data on a consolidated basis for the corporation and its subsidiaries wherever possible.</p>				
<p>Expenditures refer to all costs during the specified periods (whether on contract or by your own forces) chargeable to fixed asset accounts and for which depreciation accounts are ordinarily maintained. For "anticipated expenditures" show estimates of costs which according to present planning will be incurred during the specified period. If expenditures are not given below, indicate whether reply is "None" or whether estimates are "Not available".</p>					
ITEM	QUARTERLY SURVEY			ANNUAL SURVEY ¹	
	Actual	Anticipated		Actual	Anticipated
	Quarter ending Dec. 31, 1952	Quarter ending March 31, 1953	Quarter ending June 30, 1953	1952	1953
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Expenditures for plant	\$	\$	\$	\$	\$
Expenditures for machinery and equipment	\$	\$	\$	\$	\$
TOTAL	\$	\$	\$	\$	\$
SALES - GIVE THE DOLLAR AMOUNTS OF SALES AND RECEIPTS FROM OPERATIONS FOR 1952 (actual) AND 1953 (anticipated)					
ITEM			Actual 1952	Anticipated 1953	
Net sales and receipts from operations			\$	\$	
¹ Wherever feasible, report data on a calendar year basis. Figures for 1952 are requested here in order to insure comparability with your 1953 anticipations.					

Figura II.1 Formulario de informe para la encuesta de gastos de planta y equipo. Obtenido de "Plant and Equipment Programs and their Realization", Irwin Friend y Jean Bronfenbrenne, 1955.

Para cada año se tienen entonces dos valores, el realizado y el anticipado. A continuación se muestran los datos del sector de manufacturas para el periodo 1947-1952:

Las *expectativas* son los pronósticos que hace un individuo sobre el valor futuro de variables fuera de su control. Estas variables pueden ser cualquier cosa: la inflación, el precio del petróleo, el clima, la cantidad de automóviles producidos en una fábrica, la tasa de interés, el valor de una acción, el resultado del lanzamiento de una moneda, etcétera.

Año	Realizados	Anticipados
1947	6.17	7.46
1948	7.76	8.34
1949	7.24	7.25
1950	6.74	8.22
1951	11.12	10.85
1952	11.92	11.99

Cambio porcentual de los gastos realizados con respecto a los anticipados	Número de empresas	Porcentaje
-100 a -80	28	3.0
-79.9 a -60	33	3.5
-59.9 a -40	71	7.5
-39.9 a -20	118	12.5
-19.9 a 0	138	14.7
0 a 19.9	120	12.8
20 a 39.9	109	11.6
40 a 59.9	64	6.8
60 a 79.9	35	3.7
80 a 99.9	27	2.9
100 a 119.9	34	3.6
120 a 139.9	14	1.5
140 a 159.9	15	1.6
160 a 179.9	15	1.6
180 a 199.9	7	0.7
200 y más	113	12.0
Total	941	100.0

C. Las empresas son individuos

Muth se refiere a “las expectativas de las empresas”. Aquí la empresa debe entenderse como un individuo. Esta es una simplificación, ya que en realidad una empresa es un conjunto de personas y el comportamiento de la empresa es el resultado de la interacción entre ellas. Por ejemplo, se puede decir que Walmart construirá una nueva tienda. Para llevar a cabo este proyecto, una de las personas de la empresa decide cuál es la mejor ubicación y debe negociar con otra que autoriza el presupuesto. Una vez que se ha llegado a un acuerdo, una tercera persona lleva a cabo la contratación de la constructora, etcétera. Lo que se considera una acción de la empresa, es en realidad el resultado de numerosas acciones individuales de las personas que la integran. Para evitar toda esta complejidad, se considera al conjunto de personas que forma la empresa como un solo individuo. Es en este sentido como Muth se refiere a las empresas y por lo tanto se puede hablar de forma general de “las expectativas de los individuos”.

Se puede considerar como un individuo a una familia, a una empresa, a un país, al gobierno, o a cualquier ente social. Con el fin de exponer más fácilmente la hipótesis de expectativas racionales, es mejor entender a un individuo simplemente como un ser humano. De esta manera será más claro explicar otros conceptos como preferencia y probabilidad subjetiva, ya que parecen referirse a algo que sucede dentro de la “mente” del individuo y que es difícil de explicar si se habla de una empresa o de un país.

D. Agregación y agente representativo

La agregación es un obstáculo para observar el efecto del supuesto de expectativas racionales. El supuesto se refiere a los pronósticos que hacen los individuos, pero muchas veces se utiliza en modelos en donde no se puede distinguir a un individuo de otro. Un ejemplo clásico es el modelo de mercado en donde una curva de demanda forma una cruz con una curva de oferta ¿En dónde están los individuos en este modelo? En este caso la curva de demanda representa a un grupo de individuos (los consumidores) y la curva de oferta a otro (los productores). Se supone que la curva de demanda es la agregación de las demandas individuales de cada uno de los consumidores. Los individuos quedan desdibujados junto con sus diferencias. De entrada las demandas individuales

no tienen por qué ser iguales, al contrario, por regla general son diferentes. Pero ya no es posible apreciar las diferencias porque están colapsadas en una sola masa de individuos que llamamos “demanda”. De la misma forma, cada individuo tiene sus expectativas y estas expectativas no tienen por que ser iguales entre uno y otro. Pero en este caso el problema es más grave, ya que la hipótesis de expectativas racionales precisamente lo que hace es igualar las expectativas de cada uno de los individuos. Si desde el principio, los individuos están agrupados en una sola masa en donde no se puede distinguir a uno de otro, tampoco se puede distinguir que cada uno tiene expectativas diferentes.

Otro obstáculo es lo que se conoce como “agente representativo”. En este caso, cuando se habla de un grupo de individuos se toma a uno que los representa. Se supone que este individuo es muy semejante a los demás y por lo tanto lo que se diga sobre él se aplica también al resto del grupo. Aquí el problema tiene que ver con el número de individuos, ya que se está hablando literalmente de solo un individuo. La hipótesis de expectativas racionales iguala las expectativas entre múltiples individuos. Entonces si sólo hay un individuo, es difícil ver el efecto que tiene hacer esta suposición.

La agregación y el agente representativo son convenientes para simplificar el análisis. Sin embargo, cuando se trata de explicar la hipótesis de expectativas racionales hay que advertir que se vuelven un obstáculo. John F. Muth utilizó un mercado como del que se habló antes para explicar la hipótesis, mientras que Robert Lucas Jr. y Thomas J. Sargent utilizaron un agente representativo¹. Estas son dos de las principales exposiciones de la hipótesis de expectativas racionales, la primera porque forma parte del artículo en el que se definieron por primera vez y la segunda porque muestra una metodología que es ampliamente utilizada en la macroeconomía moderna.

E. Algunos conceptos matemáticos de probabilidad

Eventos elementales. Primero se define un conjunto finito y no vacío de *eventos elementales* $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ al que se denotará mediante Ω , esto es

¹En la introducción del libro *Rational Expectations and Econometric Practice* (Lucas y Sargent, 1981).

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

En el caso del lanzamiento de un dado,

$$\Omega = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}.$$

Eventos aleatorios. Se denotará mediante \mathfrak{F} al conjunto de todos los subconjuntos de Ω . Los elementos de \mathfrak{F} serán llamados *eventos aleatorios* y para referirse a ellos se utilizarán las letras A, B, C , etcétera. Un *evento aleatorio* A es entonces un subconjunto de Ω y pertenece al conjunto \mathfrak{F} , esto es,

$$A \subset \Omega, \quad A \in \mathfrak{F}.$$

Para el caso del lanzamiento de un dado, se pueden construir 64 subconjuntos a partir de Ω , que se muestran en el cuadro II.1, y una lista parcial a continuación,

$$\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{\square\}, \{\square, \square\}, \dots, \{\square, \square, \square, \square\}, \Omega\}.$$

Se dice que el evento A ocurrió si el resultado ω pertenece a A . Si $A = \{\square, \square, \square\}$ y el dado cae en \square , se dice que ocurrió el evento A .

Función de probabilidad. Se le llamará *función de probabilidad* a una función P que va de \mathfrak{F} a los números reales \mathbb{R} y que obedece los siguientes axiomas para cada A y B en \mathfrak{F} :

$$\text{I. } P(A) \geq 0,$$

$$\text{II. } P(\Omega) = 1,$$

$$\text{III. } P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ si } A \cap B = \emptyset.$$

Para el caso de un dado, la función P asigna a cada uno de los 64 eventos un número real p_i que se muestra en el cuadro II.2.

Espacio de probabilidad. A la tripleta $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ se le llamará *espacio de probabilidad*.

Enunciados atómicos. Los *eventos* también se pueden relacionar a enunciados. El subconjunto que se relaciona a un determinado enunciado es aquel en donde es verdad. En el caso del dado se pueden definir seis enunciados atómicos como se muestra en el cuadro II.3.

\mathfrak{F}			
$\{\square\}$	$\{\square, \blacksquare\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$
$\{\square\}$	$\{\square, \blacklozenge\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$
$\{\blacksquare\}$	$\{\blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$
$\{\blacklozenge\}$	$\{\blacklozenge, \blacktriangleright\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$
$\{\blacktriangleright\}$	$\{\square, \square, \square\}$	$\{\blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$
$\{\square, \square\}$	$\{\square, \square, \blacksquare\}$	$\{\blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$
$\{\square, \blacksquare\}$	$\{\square, \square, \blacklozenge\}$	$\{\blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge, \blacktriangleright\}$
$\{\square, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \blacklozenge\}$	$\{\blacklozenge, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge\}$
$\{\square, \blacktriangleright\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacksquare, \square\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacksquare, \blacksquare\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacksquare, \blacktriangleright\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacklozenge, \square\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacklozenge, \blacksquare\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacksquare, \blacklozenge, \blacklozenge, \blacklozenge\}$
$\{\blacklozenge, \blacktriangleright\}$	$\{\square, \blacksquare, \blacklozenge\}$	$\{\square, \square, \square, \blacklozenge, \blacklozenge\}$	\emptyset

Cuadro II.1 Los eventos para un dado.

Enunciados compuestos. Se pueden formar nuevos enunciados compuestos a partir de los enunciados atómicos utilizando los operadores lógicos \neg , \wedge y \vee . El enunciado \neg (“El dado cayó en uno”) es la negación del enunciado entre parentésis y se lee “El dado no cayó en uno”. El enunciado (“El dado cayó en uno”) \wedge (“El dado cayó en dos”) es la conjunción de los dos enunciados entre paréntesis y se lee “El dado cayó en uno y en dos”. El enunciado (“El dado cayó en uno”) \vee (“El dado cayó en dos”) es la disyunción de los enunciados entre paréntesis y se lee “El dado cayó en uno o en dos”.

A cada enunciado compuesto también le corresponde un evento que se puede obtener aplicando los operadores \sim (complemento), \cap y \cup sobre los subconjuntos relacionados a los enunciados atómicos que lo componen. Al enunciado \neg (“El dado cayó en uno”) le corresponde el sub-

A	$P(A)$	A	$P(A)$	A	$P(A)$	A	$P(A)$
$\{\square\}$	p_1	$\{\square, \square\}$	p_{17}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{33}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{49}
$\{\square\}$	p_2	$\{\square, \square\}$	p_{18}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{34}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{50}
$\{\square\}$	p_3	$\{\square, \square\}$	p_{19}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{35}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{51}
$\{\square\}$	p_4	$\{\square, \square\}$	p_{20}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{36}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{52}
$\{\square\}$	p_5	$\{\square, \square\}$	p_{21}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{37}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{53}
$\{\square\}$	p_6	$\{\square, \square, \square\}$	p_{22}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{38}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{54}
$\{\square, \square\}$	p_7	$\{\square, \square, \square\}$	p_{23}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{39}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{55}
$\{\square, \square\}$	p_8	$\{\square, \square, \square\}$	p_{24}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{40}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{56}
$\{\square, \square\}$	p_9	$\{\square, \square, \square\}$	p_{25}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{41}	$\{\square, \square, \square, \square, \square\}$	p_{57}
$\{\square, \square\}$	p_{10}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{26}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{42}	$\{\square, \square, \square, \square, \square\}$	p_{58}
$\{\square, \square\}$	p_{11}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{27}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{43}	$\{\square, \square, \square, \square, \square\}$	p_{59}
$\{\square, \square\}$	p_{12}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{28}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{44}	$\{\square, \square, \square, \square, \square\}$	p_{60}
$\{\square, \square\}$	p_{13}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{29}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{45}	$\{\square, \square, \square, \square, \square\}$	p_{61}
$\{\square, \square\}$	p_{14}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{30}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{46}	$\{\square, \square, \square, \square, \square\}$	p_{62}
$\{\square, \square\}$	p_{15}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{31}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{47}	$\{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$	1
$\{\square, \square\}$	p_{16}	$\{\square, \square, \square\}$	p_{32}	$\{\square, \square, \square, \square\}$	p_{48}	\emptyset	0

Cuadro II.2 Función de probabilidad para un dado.

conjunto $\sim \{\square\} = \{\square, \square, \square, \square, \square\}$. Al enunciado (“El dado cayó en uno”) \wedge (“El dado cayó en dos”) le corresponde el subconjunto $\{\square\} \cap \{\square\} = \emptyset$. Al enunciado (“El dado cayó en uno”) \vee (“El dado cayó en dos”) le corresponde el subconjunto $\{\square\} \cup \{\square\} = \{\square, \square\}$. Algunos enunciados con su respectivo subconjunto se muestran en el cuadro II.4.

Asignación de probabilidad. Los axiomas no indican qué probabilidad se le asignará específicamente a cada evento, pero sí que cumplan con ciertas condiciones. Por ejemplo, al evento $A = \{\square, \square, \square\}$ se le debe asignar un número mayor o igual que 0 para cumplir con el Axioma I. A partir de los axiomas se puede deducir también que la probabilidad que se le asigne a A debe ser $1 \geq P(H) \geq 0$. Además, la probabilidad de H tiene que “cuadrar” con las de otros eventos: sea cual sea la probabilidad que se le asigne al evento $\{\square\}$ y al evento $\{\square, \square\}$, estos números

Evento	Enunciado atómico
{ 	<i>“El dado cayó en uno”</i>
{ 	<i>“El dado cayó en dos”</i>
{ 	<i>“El dado cayó en tres”</i>
{ 	<i>“El dado cayó en cuatro”</i>
{ 	<i>“El dado cayó en cinco”</i>
{ 	<i>“El dado cayó en seis”</i>

Cuadro II.3 Enunciados atómicos

Enunciado	Evento
<i>“El dado no cayó en uno”</i>	{  ,  ,  ,  , 
<i>“El dado cayó en par”</i>	{  ,  , 
<i>“El dado cayó en non o seis”</i>	{  ,  ,  , 
...	...

Cuadro II.4 Algunos enunciados compuestos

Evento	P_1	P_2	P_3	...
$\{\square\}$	p_1	q_1	r_1	...
$\{\square\}$	p_2	q_2	r_2	...
$\{\square\}$	p_3	q_3	r_3	...
$\{\square\}$	p_4	q_4	r_4	...
$\{\square\}$	p_5	q_5	r_5	...
$\{\square\}$	p_6	q_6	r_6	...
$\{\square, \square\}$	p_7	q_7	r_7	...
$\{\square, \square\}$	p_8	q_8	r_8	...
$\{\square, \square\}$	p_9	q_9	r_9	...
...
$\{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$	1	1	1	...
\emptyset	0	0	0	...

Cuadro II.5 Múltiples funciones de probabilidad

deben sumar la probabilidad que se le asigna a A , ya que $P(\{\square, \square, \square\}) = P(\{\square\}) + P(\{\square, \square\})$ por el Axioma III.

Múltiples funciones de probabilidad. Hay muchas asignaciones de probabilidad sobre el mismo conjunto de eventos. Es conveniente distinguirlas mediante un subíndice: P_1, P_2, P_3 , etcétera. Para el dado se pueden definir múltiples asignaciones de probabilidad sobre los 64 eventos:

Se puede pensar en las asignaciones de probabilidad de tres personas, Pedro, Luis y Ana, como se muestra en el cuadro II.6.

Variables aleatorias. Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \mapsto E$. Por ejemplo, E podría ser el conjunto de cantidades de dinero discretas $E = \mathbb{N}$, y $X : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ podría representar una apuesta que paga el doble de los puntos en los que resulte el dado: si el dado cae en \square entonces $X(\square) = 2$, si cae en \square , entonces $X(\square) = 4$, etcétera.

Evento	\mathbf{P}_{Pedro}	\mathbf{P}_{Luis}	\mathbf{P}_{Ana}
$\{\odot\}$	$\frac{1}{6}$.1	.5
$\{\ominus\}$	$\frac{1}{6}$.2	.5
$\{\odot\ominus\}$	$\frac{1}{6}$.3	0
$\{\ominus\ominus\}$	$\frac{1}{6}$.2	0
$\{\omin�\}$	$\frac{1}{6}$	0	0
$\{\omin�\omin�\}$	$\frac{1}{6}$.2	0
$\{\odot, \ominus\}$	$\frac{1}{3}$.3	1
$\{\odot, \omin�\}$	$\frac{1}{3}$.4	.5
$\{\odot, \omin�\omin�\}$	$\frac{1}{3}$.3	.5
...
$\{\odot, \ominus, \odot\ominus, \omin�, \omin�\omin�, \omin�\omin�\omin�\}$	1	1	1
\emptyset	0	0	0

Cuadro II.6 Funciones de probabilidad de tres personas

Ω	$X(\omega)$
\odot	2
\ominus	4
$\odot\ominus$	6
$\omin�$	8
$\omin�\omin�$	10
$\omin�\omin�\omin�$	12

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Sea E un conjunto finito y \mathcal{E} el conjunto de todos sus subconjuntos. Sea X una variable aleatoria $X : \Omega \mapsto E$. La distribución de X es ²

$$P(X^{-1}A), \quad A \in \mathcal{E},$$

²Dada una función $X : \Omega \mapsto E$ y un subconjunto B de E , la imagen inversa de B bajo X es

$$X^{-1}B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

\mathfrak{F}	\mathcal{E}	\mathbf{P}
$\{\square\}$	$\{1\}$	p_1
$\{\square\}$	$\{4\}$	p_2
$\{\square\}$	$\{6\}$	p_3
$\{\square\}$	$\{8\}$	p_4
$\{\square\}$	$\{10\}$	p_5
$\{\square\}$	$\{12\}$	p_6
$\{\square, \square\}$	$\{2, 4\}$	p_7
$\{\square, \square\}$	$\{2, 6\}$	p_8
$\{\square, \square\}$	$\{2, 8\}$	p_9
...
$\{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$	1
\emptyset	\emptyset	0

Cuadro II.7 Distribución de probabilidad de X .

que se lee como “la probabilidad de que X esté en A ”. En el ejemplo de la apuesta que paga el doble del resultado del dado, la función X permite relacionar un subconjunto de \mathcal{E} con un subconjunto de Ω , y su probabilidad correspondiente. El evento “ganar \$2 o \$4” es el subconjunto $\{2, 4\}$, que es lo que se gana cuando “el dado cae en uno o en dos” que es el subconjunto $\{\square, \square\}$. Entonces la misma probabilidad p que se le asigna al evento $\{\square, \square\}$ será la que se le asigne a $\{2, 4\}$.

También los eventos de \mathcal{E} pueden expresarse mediante enunciados:

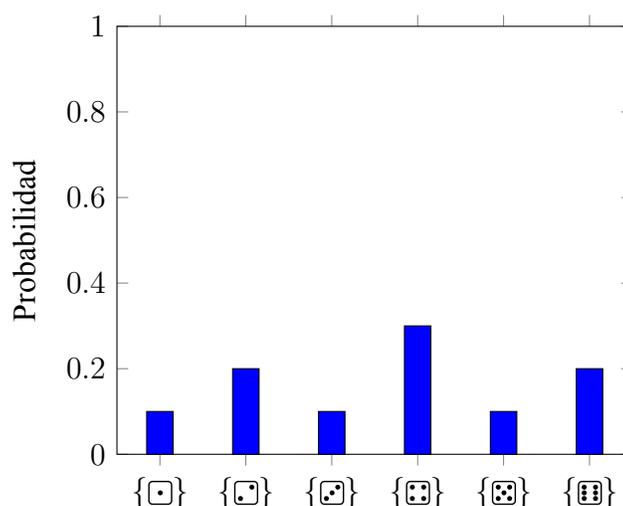
Enunciado	Evento
“Ganar \$2”	$\{2\}$
“Ganar \$6 o menos”	$\{2, 4, 6\}$
“Ganar entre \$2 y \$12”	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

Construcción de la asignación de probabilidad. Cuando el conjunto $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ es finito y \mathcal{H} es el conjunto de todos sus subconjuntos, se pueden asignar las probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n a los eventos unitarios $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$. Estas probabilidades deben ser no negativas

y sumar uno, esto es:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, \quad p_i \geq 0$$

Para el dado, se pueden asignar seis números p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 a los eventos $\{\square\}$, $\{\square\}$, $\{\square\}$, $\{\square\}$, $\{\square\}$ y $\{\square\}$. Cada uno de estos seis p_i deben ser no negativos y sumar uno, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$. A partir de esta asignación se pueden construir las probabilidades de los demás eventos, como la del evento $\{\square, \square\}$ que sería la suma de la probabilidad asignada a los eventos $\{\square\}$ y $\{\square\}$. La asignación de probabilidad a los eventos unitarios se puede visualizar en la siguiente gráfica:



F. Interpretaciones de la probabilidad

La teoría de la probabilidad tiene un aspecto matemático y un aspecto filosófico (Gillies, 2000). Existe un consenso casi completo sobre el aspecto matemático, casi todos aceptan el mismo conjunto de axiomas. La mayoría de los tratamientos avanzados de la teoría matemática de la probabilidad actuales están basados en los axiomas de Andrej Nikolaevich Kolmogorov³. Kolmogorov toma la noción de probabilidad como primitiva y procede a axiomatizarla dentro del

³Kolmogorov presentó su enfoque axiomático de la probabilidad en su monografía *Grudbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* de 1933, publicada en inglés como *Foundations of the Theory of Probability* (Kolmogorov, 1950).

marco matemático de la teoría de la medida (Galavotti, 2005): “La teoría de la probabilidad, como una disciplina matemática, puede y debe ser desarrollada a partir de axiomas exactamente de la misma manera que la Geometría y el Álgebra. Esto significa que después de que hemos definido los elementos a ser estudiados y sus relaciones básicas, y hemos establecido los axiomas por los cuales estas relaciones están gobernadas, toda exposición subsecuente debe estar basada exclusivamente sobre estos axiomas, independientemente del significado concreto usual de estos elementos y sus relaciones” (Kolmogorov, 1950). La teoría matemática de la probabilidad no se ocupa del significado de la probabilidad, lo toma como dado. Sobre este significado se han dado muchas interpretaciones, sobre todo en el siglo XX. Sin embargo, todas las interpretaciones deben satisfacer los axiomas.

Hay cuatro interpretaciones principales de la probabilidad: la teoría lógica, la teoría subjetiva, la teoría frecuentista y la teoría propensiva. Muchos pensadores han ofrecido su interpretación de la probabilidad, cada uno de ellos tenía su interpretación particular, pero más o menos se pueden agrupar en las cuatro categorías anteriores.

Donald Gillies menciona lo siguiente sobre las interpretaciones de la probabilidad:

La mayoría de los filósofos de la probabilidad concuerdan en que las diferentes interpretaciones de la probabilidad pueden ser divididas en dos grupos amplios. [...] Las interpretaciones de la probabilidad serán divididas en (1) *epistemológicas* (o *epistémicas*) y (2) *objetivas*. La diferencia es esta. Las interpretaciones epistemológicas de la probabilidad consideran que la probabilidad se ocupa del conocimiento o creencia de los seres humanos. Bajo este enfoque la probabilidad mide el grado de conocimiento, el grado de creencia racional, el grado de creencia, o alguna cosa de este tipo. Claramente las interpretaciones lógica, subjetiva e intersubjetiva son todas epistemológicas. Las interpretaciones objetivas de la probabilidad, en contraste, toman la probabilidad como una característica del mundo material objetivo, el cual no tiene nada que ver con el conocimiento o la creencia humana. Claramente las interpretaciones frecuentista y propensiva son objetivas. Un ejemplo favorito para ilustrar este enfoque es la probabilidad de un isotopo particular de uranio desintegrándose en un año. Ahora, los seres humanos podrían saber esta probabilidad o no, pero

la probabilidad existe muy independientemente de si es conocida. Existe objetivamente como una característica del mundo físico. De hecho, tales isótopos de uranio tenían esta probabilidad de desintegrarse en el tiempo especificado antes de que hubiera algún ser humano. Para resumir entonces, las interpretaciones epistemológicas toman a las probabilidades como relacionadas a los humanos y como medidas del conocimiento o creencia humana, mientras que las interpretaciones objetivas toman a la probabilidad como características humano-independientes del mundo material objetivo. [*Philosophical Theories of Probability*, 2000, p. 2].

John Muth se refiere a la “probabilidad objetiva” y a la “probabilidad subjetiva”. Estas son interpretaciones de la probabilidad. Como se dijo antes, una expectativa es un pronóstico, y un pronóstico se expresa mediante una distribución de probabilidad. Cuando hablamos de un grupo de individuos, cada individuo tiene su expectativa, es decir, un pronóstico individual que se expresa mediante una distribución de probabilidad. En otras palabras, hay una distribución de probabilidad por cada individuo. Aquí es donde entran las interpretaciones de la probabilidad ¿Qué significado tiene la distribución de probabilidad de cada individuo? Para explicar este punto se expondrá brevemente qué se entiende por las interpretaciones que usa Muth, la objetiva y la subjetiva.

G. Probabilidad objetiva

La probabilidad objetiva es única. Esta es la principal característica que hay que destacar con relación a las expectativas racionales. Por ejemplo, la probabilidad objetiva de una moneda es que al lanzarla caiga en cara con probabilidad $\frac{1}{2}$ y en cruz con probabilidad $\frac{1}{2}$. Para ser más preciso: hay dos eventos, “cara” y “cruz”, la probabilidad objetiva del primero es .5 y la probabilidad objetiva del segundo es .5. Supóngase que hay un grupo de tres individuos y se les pregunta cuál es su pronóstico si se lanza la moneda. El primero de ellos da el siguiente pronóstico: “cara” con probabilidad .5 y “cruz” con probabilidad .5. El segundo da el pronóstico “cara” con probabilidad .3 y “cruz” con probabilidad .7. El tercero da el pronóstico “cara” con probabilidad 1 y “cruz” con probabilidad 0. Aquí hay que distinguir las cuatro distribuciones de probabilidad de las que se está hablando: la de la moneda, la del individuo 1, la del individuo 2 y la del individuo 3. La

distribución de probabilidad objetiva de la moneda es una característica física de la moneda y es única, mientras que las distribuciones de probabilidad de cada uno de los individuos representan sus creencias sobre la moneda y pueden ser diferentes. Alguien les podría señalar a los individuos dos y tres que están equivocados, que la moneda tiene la característica física de caer la mitad de las veces en “cara” y la otra mitad en “cruz”. Para convencerlos se les podría mostrar que al lanzar la moneda en repetidas ocasiones, tiende a caer la mitad de las veces en cara y la otra mitad de las veces en cruz. Este argumento tiene que ver con la interpretación frecuentista de la probabilidad y se explicará a continuación.

Richard von Mises ofreció una formulación rigurosa de la teoría de la frecuencia que se volvió muy influyente entre científicos y probabilistas (Galavotti, 2005). Von Mises escribe:

Nosotros establecemos aquí explícitamente: el concepto racional de probabilidad, el cual es la única base del cálculo de probabilidades, aplica solo a problemas en los cuales el mismo evento se repite una y otra vez, o un gran número de elementos uniformes están involucrados al mismo tiempo. Usando el lenguaje de la física, podríamos decir que para aplicar la teoría de la probabilidad debemos tener una secuencia prácticamente ilimitada de observaciones uniformes. [*Probability, Statistics and Truth*, 1928, p. 11].

Para ejemplificar su enfoque, von Mises se refiere al lanzamiento de una moneda:

Si la frecuencia relativa de caras es calculada de forma precisa al primer lugar decimal, no sería difícil alcanzar constancia en esta primera aproximación. De hecho, quizás después de algunos 500 juegos, esta primera aproximación alcanzaría el valor de 0.5 y no cambiaría después. Nos tomaría mucho más tiempo llegar a un valor constante para la segunda aproximación calculada a dos lugares decimales... Quizás más de 10,000 lanzamientos serían requeridos para mostrar que ahora la segunda cifra también deja de cambiar y permanece igual a 0, de tal manera que la frecuencia relativa permanece constantemente 0.50. [*Probability, Statistics and Truth*, 1928, p. 12].

Von Mises se refirió a esta estabilidad creciente de las frecuencias estadísticas como la *Ley de*

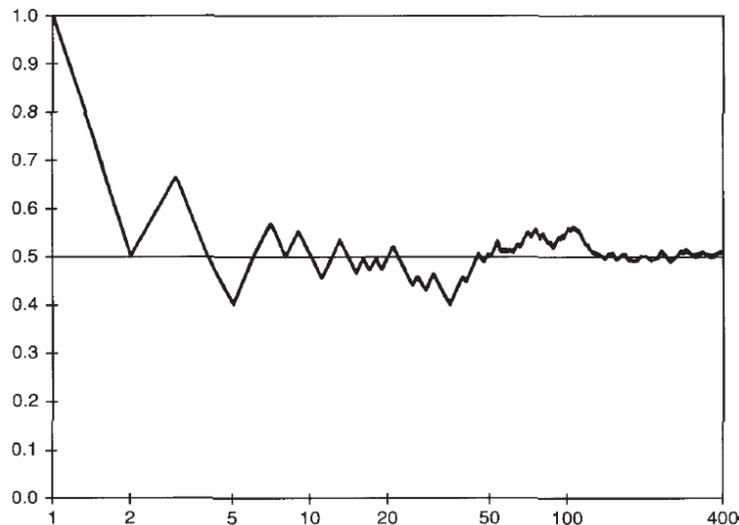


Figura II.2 Lanzamiento de una moneda. La proporción de frecuencia de caras (eje vertical) en una secuencia de lanzamientos de una moneda (eje horizontal) (Gillies, 2000).

Estabilidad de las Frecuencias Estadísticas. Con cada evento repetitivo o fenómeno en masa está asociado un conjunto de *atributos* que son considerados posibles. Este espacio de *atributos* se denota por Ω (también llamado espacio muestral). Por ejemplo, en el caso de un dado, el espacio de *atributos* son las caras del dado 1, 2, 3, 4, 5 y 6, así que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Von Mises introdujo el término *colectivo* para describir eventos repetitivos o fenómenos en masa. En sus propias palabras un *colectivo*: “denota una secuencia de eventos uniformes o procesos que difieren por ciertos atributos observables, por ejemplo colores, números, o cualquier otra cosa” (Mises, 1939). Hay *colectivos empíricos* y *colectivos matemáticos*. Un *colectivo empírico* es algo que existe en el mundo real y puede ser observado, por ejemplo una secuencia de lanzamientos de una moneda. Un *colectivo matemático* consiste de una secuencia infinita $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ en donde para toda n , ω_n es un miembro de Ω . Sea A un atributo arbitrario, que está en el espacio Ω (esto es, $A \subset \Omega$). Supóngase que en los primeros n miembros del colectivo A ocurre $m(A)$ veces, entonces su frecuencia relativa es $m(A)/n$. La *Ley de Estabilidad de las Frecuencias Estadísticas* establece que a medida que n crece, la frecuencia relativa $m(A)/n$ se acerca más y más a un valor fijo.

Se puede analizar la definición de Muth utilizando la interpretación frecuentista que se acaba de exponer. Aunque esta interpretación es solo una de entre muchas que se consideran objetivas,

es suficiente para explicar a lo que se refiere la hipótesis de expectativas racionales. La definición habla de “la predicción de la teoría (o las distribuciones de probabilidad ‘objetiva’ de las consecuencias)”. La palabra *consecuencias* se refiere a las consecuencias para cada uno de los individuos. Por ejemplo, para un consumidor, la consecuencia de participar un mercado donde se está comerciando maíz, es que termina con cierta cantidad de maíz (la que compró) y cierta cantidad de dinero (el dinero que tenía antes de comprar menos lo que le costó el maíz), que se denotará mediante (D, M) . Para este consumidor particular, las consecuencias son inciertas, puede que termine con (D_1, M_1) , o con (D_2, M_2) , o con (D_3, M_3) , etcétera. El consumidor hace un pronóstico sobre los posibles resultados de participar en el mercado. Este pronóstico se expresa mediante una distribución de probabilidad que le asigna a cada combinación de maíz y dinero una determinada probabilidad. La *predicción de la teoría* también es un pronóstico. Y como un pronóstico, se expresa mediante una distribución de probabilidad.⁴ Si interpretamos la distribución que indica *la predicción de la teoría* (a la que se refiere Muth) con el enfoque frecuentista, quiere decir que la situación se ha repetido múltiples veces, y que la probabilidad que se le asignó a cada una de las posibilidades de esta situación es la frecuencia relativa con la que sucedió. En el ejemplo del mercado de maíz, se puede pensar que el mercado se pone todos los días, que es exactamente igual todos los días. Cada uno de los días que se pone el mercado se puede ver como el lanzamiento de una moneda. Y así como se habla de una secuencia de lanzamientos de una moneda, también podemos hablar de una secuencia de mercados iguales. En el caso de la moneda solo hay dos eventos: “cara” y “cruz”. En el caso del mercado de maíz, desde el punto de vista de un consumidor los eventos son las combinaciones de maíz y dinero con las que termina al final del día: (D_1, M_1) , (D_2, M_2) , (D_3, M_3) , etcétera. Si la secuencia de mercados se repite muchas veces, cada resultado tenderá a ocurrir con cierta proporción, y esa proporción es la probabilidad que le asigna “la teoría” a la que se refiere Muth.

⁴Por ejemplo, la teoría puede predecir que el resultado es un equilibrio de Nash. Un equilibrio de Nash puede expresarse mediante una distribución de probabilidad sobre los resultados del juego que se genera cuando los jugadores juegan las estrategias correspondientes a dicho equilibrio.

H. Probabilidad subjetiva

Bruno de Finetti afirmó en *Theory of Probability* (de Finetti, 1970):

Mi tesis, paradójicamente, y un poco provocativamente, pero sin embargo genuina, es simplemente esta: LA PROBABILIDAD NO EXISTE. El abandono de creencias supersticiosas acerca de la existencia del Flogisto, del Éter Cósmico, del Tiempo y Espacio absoluto, ... o Hadas y Brujas fue un paso esencial a lo largo del camino hacia el pensamiento científico. La probabilidad, también, si se considera como algo dotado con algún tipo de existencia objetiva, no es menos que un error engañoso, un intento ilusorio por exteriorizar o materializar nuestras creencias probabilísticas reales. [...] [E]n la concepción que seguimos y sostenemos aquí, solamente las probabilidades *subjetivas* existen, esto es, el *grado de creencia* en la ocurrencia de un evento atribuido por una determinada persona en un instante dado y con un conjunto de información dado.

La probabilidad subjetiva no es única, cada individuo asigna una probabilidad a un determinado evento. La probabilidad que le asigna es el *grado de creencia* de ese individuo. Esto es lo más importante que hay que destacar con respecto a la hipótesis de expectativas racionales. Por ejemplo, si el evento es “*el dado caerá en uno*” no podemos hablar de *la probabilidad (objetiva) del dado*. Tenemos que hablar de *la probabilidad que le asigna el individuo 1 a que el dado caerá en uno, la probabilidad que le asigna el individuo 2 a que el dado caerá en uno, la probabilidad que le asigna el individuo 3 a que el dado caerá en uno*, etcétera. Hay muchas asignaciones de probabilidad, tantas como el número de individuos de los que estemos hablando.

Grados de creencia. De Finetti interpretó los grados de creencia en términos de apuestas (de Finetti, 1970):

Con el propósito de dar un significado efectivo a una noción y no solamente una apariencia de ésta en un sentido metafísico-verbal, una definición operacional es requerida. Por esto queremos decir una definición basada sobre un criterio que nos permita medirla. [...] La probabilidad $P(E)$ que Tú atribuyes a un evento E es por consiguiente la ganancia cierta p que Tú juzgas equivalente a una ganancia unitaria

condicionada a la ocurrencia de E: para expresar esto de una manera dimensionalmente correcta, es preferible tomar pS equivalente a S condicionada sobre E, donde S es cualquier monto, una Lira o un millón, \$20 ó £75.

Para aclarar la definición anterior, considérese el siguiente ejemplo de Richard Jeffrey (Jeffrey, 2004). Supóngase que eres capaz de decir qué probabilidad le asignas a que alguna vez hubo vida en Marte. Digamos que la probabilidad que le asignas a este evento es 1:9, correspondiente a la probabilidad de 1/10.⁵ Esto significa que no ves una ventaja especial para ninguno de dos apostadores en arriesgar un dólar para ganar nueve en caso de que alguna vez hubo vida en Marte; es decir, no vez una ventaja en estar de un lado u otro de la apuesta. Dicho de otra forma: piensas que el precio de un dólar es correcto para un boleto que vale diez dólares si hay vida en Marte y nada si no la hay. Utilizando la notación de de Finetti, el evento E sería “*Hubo vida en Marte*”, el monto S es \$10, y tú estas dispuesto a pagar la cantidad $pS = \$1$ por participar en la apuesta que te da S si E es verdad y 0 si es falso. Se puede decir que la probabilidad p que tú le asignas a este evento es $p = \frac{\$1}{\$10}$.

La asignación de probabilidad que hace un individuo a los eventos debe ser *coherente*. En otras palabras, significa que sigue los axiomas de Kolmogorov. De no seguirlos, el individuo se expone a que se le haga un Libro Holandés⁶. Es decir, se expone a una pérdida segura. Aún con las restricciones que impone la *coherencia*, hay muchas asignaciones de probabilidad posibles. En la probabilidad objetiva, solo hay una probabilidad correcta, que podría ser por ejemplo la que resulte de la frecuencia. En la probabilidad subjetiva, hay muchas probabilidades correctas, todas aquellas que son coherentes.

⁵La probabilidad $m : n$ corresponde a la probabilidad $\frac{m}{m+n}$.

⁶Un libro holandés es un conjunto de apuestas vendidas o compradas a tales precios que garantizan un pérdida neta. En el capítulo 7 de *The Handbook of Rational and Social Choice* (Anand, Pattanaik y Puppe, 2009) se habla del argumento del libro holandés.

Capítulo III

Racionalidad y Expectativas Racionales

El supuesto de racionalidad no implica el supuesto de expectativas racionales. Dicho de otra forma, que un individuo sea racional no significa que tenga “expectativas racionales”. Henri Poincaré distinguía claramente estos dos supuestos:

Cuando hablé de “límites apropiados”, eso no era todo lo que quería decir. Lo que tenía en mente era que cada especulación matemática comienza con unas hipótesis, y que si tal especulación debe ser fructífera, es necesario (así como en las aplicaciones a la física) que uno esté conciente de esas hipótesis. Si uno olvida esta condición, uno sobrepasa los límites apropiados. Por ejemplo, en mecánica uno a menudo ignora la fricción y asume que los cuerpos son infinitamente suaves. Tú por tu lado, consideras a los hombres como infinitamente egoístas e infinitamente clarividentes. La primera hipótesis puede ser admitida como una primera aproximación, pero la segunda hipótesis llama, quizás, a algunas reservas¹. [Carta de Henri Poincaré a León Walras, 1901.]

Poincaré distingue dos hipótesis: (1) *los hombres son infinitamente egoístas* y (2) *los hombres son infinitamente clarividentes*. La primera de estas hipótesis es lo que hoy en día podríamos llamar el supuesto de racionalidad. En cuanto a la segunda hipótesis, Roguer Guesnerie (Guesnerie, 2002,

¹Tomado de la traducción que hace William Jaffé (Jaffé, 1977) de la carta que Henri Poincaré envió a Léon Walras en 1901.

p. 439) considera que Poincaré se refería a lo que hoy se conoce como la hipótesis de la previsión perfecta, misma que Kenneth Arrow identificó con la hipótesis de expectativas racionales:

La pregunta surge, ¿pueden cumplirse realmente las expectativas que se asume que rigen el comportamiento de la inversión en la sección anterior? [...] Tal situación es frecuentemente referida como “previsión perfecta”, pero un mejor término es “expectativas racionales”, un término introducido por J. Muth (Arrow, 1962, p. 164).

La teoría de expectativas racionales es una forma estocástica de la previsión perfecta (Arrow, 1990, p. 33).

El objetivo de este capítulo es hacer una distinción clara entre el supuesto de racionalidad y el supuesto de expectativas racionales, pero también mostrar la relación que existe entre los dos. El supuesto de racionalidad es el más básico de los dos ya que por sí solo se sostiene. Sin embargo, el supuesto de expectativas racionales requiere del supuesto de racionalidad, ya que no tiene sentido hablar de expectativas racionales sin suponer antes que los individuos son racionales en primer lugar.

A. La racionalidad como consistencia

El supuesto de que *los hombres son infinitamente egoístas* cambió radicalmente durante el siglo veinte. El agente económico fue reducido a una restricción de consistencia (Giocoli, 2005). Esto se puede ver en la definición de Kenneth Arrow:

La racionalidad se trata de elección. Independientemente de otras consideraciones que puedan entrar, el supuesto subyacente es que, en cualquier ocasión dada, hay un *conjunto de oportunidad* de alternativas de entre las cuales se debe elegir. El principal significado de la racionalidad es una condición de consistencia entre la elección hecha a partir de diferentes conjuntos de alternativas. [...] La racionalidad de las acciones significa a grandes rasgos que las elecciones alternativas pueden ser ordenadas de acuerdo a la preferencia, siendo este orden independiente del conjunto particular de oportunidad disponible en cualquier ocasión dada (Arrow y col., 1996, p. xii).

En su sentido más amplio, el comportamiento racional simplemente significa comportamiento de acuerdo con algún orden de alternativas en términos de la deseabilidad relativa [...] (Arrow, 1951, p. 406).

Un orden es usualmente considerado como una característica distintiva de la racionalidad (Arrow, 1966, p. 255).

Cuando se dice que un individuo es *racional* debe entenderse que este individuo *elige racionalmente*. Al individuo se le presenta un conjunto de *alternativas* de entre las cuáles elige una (o varias). Por ejemplo, al individuo se le presenta el conjunto de *alternativas*

{🍏, 🍒, 🍓}

y observamos que el individuo elige

{🍏}.

Después se le presenta un segundo conjunto de *alternativas*

{🍏, 🍒, 🍓, 🍏}

y observamos que elige

{🍏}.

Se le presenta un tercer conjunto de *alternativas*

{🍏, 🍒}

y observamos que elige

{🍏}.

Y así se puede seguir presentando al individuo conjuntos de *alternativas* y observando sus *elecciones*. Decir que este individuo es *racional* quiere decir que existe un patrón en las *elecciones* que hace a partir de los conjuntos de *alternativas* que se le presentan. A este patrón se le denomina *preferencia*.

Las *preferencias* del individuo se pueden expresar mediante un orden. Por ejemplo, si las alternativas son 🍏, 🍒, 🍓, 🍏, entonces la *preferencia* del individuo se puede expresar mediante una lista de la “*mejor*” a la “*peor*” alternativa

 (mejor)



 (peor)

Este orden explica por qué el individuo eligió  de entre las alternativas $\{\text{apple}, \text{cherries}, \text{strawberry}\}$,  de entre $\{\text{apple}, \text{cherries}, \text{strawberry}, \text{pear}\}$ y  de entre $\{\text{apple}, \text{cherries}\}$. A continuación se definirán estos conceptos.

a. Alternativas

Un individuo se enfrenta a un conjunto de *alternativas* de entre las cuales debe elegir una (o varias). Este conjunto se representará mediante

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

En la teoría del consumidor cada *alternativa* puede ser una canasta de bienes; en la teoría de la empresa, cada *alternativa* puede ser una decisión completa sobre los insumos y productos; en la economía del bienestar, cada *alternativa* puede ser una distribución de bienes y mano de obra; y en la teoría de las votaciones, cada *alternativa* es un candidato (Arrow, 2012, p. 25). Aquí se utilizará como ejemplo el conjunto

$$A = \{\text{apple}, \text{orange}, \text{lemon}, \text{pear}\}.$$

El producto cartesiano $A \times A$ se define como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que se pueden formar con los elementos de A , esto es

$$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in A\}.$$

En el ejemplo, esto es

$$A \times A = \left\{ \begin{array}{cccc} (\text{apple}, \text{apple}), & (\text{apple}, \text{orange}), & (\text{apple}, \text{lemon}), & (\text{apple}, \text{pear}), \\ (\text{orange}, \text{apple}), & (\text{orange}, \text{orange}), & (\text{orange}, \text{lemon}), & (\text{orange}, \text{pear}), \\ (\text{lemon}, \text{apple}), & (\text{lemon}, \text{orange}), & (\text{lemon}, \text{lemon}), & (\text{lemon}, \text{pear}), \\ (\text{pear}, \text{apple}), & (\text{pear}, \text{orange}), & (\text{pear}, \text{lemon}), & (\text{pear}, \text{pear}) \end{array} \right\}.$$

b. Relación binaria

La expresión

“*x es al menos tan buena como y*”

se abreviará mediante la expresión

$$x \succsim y.$$

Por ejemplo, para decir

“ es al menos tan bueno como ”

se escribirá

$$\img alt="red apple" data-bbox="472 351 498 371"/> \succsim \img alt="green pear" data-bbox="522 351 548 371"/>.$$

La expresión $x \succsim y$ representa una *relación binaria* entre el objeto x y el objeto y . El orden de los objetos es muy importante, no es lo mismo $x \succsim y$ que $y \succsim x$. Para destacar esto, nos referimos al *par ordenado* (x, y) . Se resalta que $(x, y) \neq (y, x)$.

Puede ser que para muchos *pares ordenados* (x, y) se cumpla $x \succsim y$, entonces podemos definir a la relación binaria “ \succsim ” como un conjunto de pares ordenados. Se definirá la relación binaria “ \succsim ” sobre el conjunto A como un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$, esto es

$$\succsim \subset A \times A.$$

Bajo esta definición podemos decir que

$$(x, y) \in \succsim,$$

lo cuál debe entenderse como

$$x \succsim y,$$

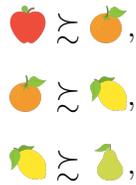
que es una abreviación de

“*x es al menos tan bueno como y*”.

Por ejemplo, una posible relación binaria sobre el conjunto $A = \{\img alt="red apple" data-bbox="652 854 682 874"/> ,  ,  ,  \}$ puede ser

$$\succsim = \{(\img alt="red apple" data-bbox="402 896 432 916"/>, \img alt="orange" data-bbox="448 896 478 916"/>) , (\img alt="orange" data-bbox="484 896 514 916"/>, \img alt="yellow lemon" data-bbox="520 896 550 916"/>) , (\img alt="yellow lemon" data-bbox="566 896 596 916"/>, \img alt="green pear" data-bbox="602 896 632 916"/>)\},$$

Lo cuál significa que



que son abreviaciones de

“🍏 es al menos tan bueno como 🍊”,

“🍊 es al menos tan bueno como 🍋”,

“🍋 es al menos tan bueno como 🍐”.

Esta relación binaria se puede representar mediante una tabla en donde si hay un 1 quiere decir que la *alternativa* correspondiente a la fila de esa entrada tiene la relación “ \succeq ” con la *alternativa* correspondiente a la columna. El ejemplo anterior entonces se puede representar por la siguiente tabla:

	🍏	🍊	🍋	🍐
🍏	0	1	0	0
🍊	0	0	1	0
🍋	0	0	0	1
🍐	0	0	0	0

c. Reflexividad

Se dice que la relación “ \succeq ” sobre el conjunto A es *reflexiva* si

$$\forall x \in A : x \succeq x,$$

esto es, si cada elemento del conjunto A es “al menos tan bueno” como sí mismo. Por ejemplo, si $A = \{\text{🍏}, \text{🍊}, \text{🍋}, \text{🍐}\}$ y se define una relación “ \succeq ” reflexiva sobre este conjunto entonces

$$\text{🍏} \succeq \text{🍏}, \text{🍊} \succeq \text{🍊}, \text{🍋} \succeq \text{🍋} \text{ y } \text{🍐} \succeq \text{🍐},$$

es decir, “🍏 es al menos tan buena como 🍏”, “🍊 es al menos tan buena como 🍊”, etcétera.

Si representamos esta relación en una tabla, debe de haber un 1 al menos en la diagonal principal:

				
	1	0	0	0
	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	1

d. Completitud

La relación “ \succsim ” sobre el conjunto A es *completa* si

$$\forall x, y \in A : (x \neq y) \rightarrow (x \succsim y \vee y \succsim x),$$

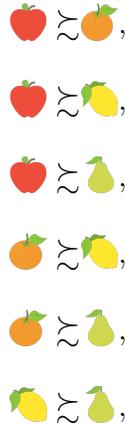
esto es, al tomar dos *alternativas* diferentes, siempre una “*es al menos tan buena*” como la otra. Esto se puede interpretar como que el individuo ya formó su opinión sobre todo el conjunto de *alternativas*. Es decir, se descarta el caso en el que al mostrarle dos *alternativas* diferentes, esté indeciso sobre cuál es “*al menos tan buena como la otra*”. Esto incluye el caso en el que al mostrarle la alternativa x y la alternativa y , considere que tanto “*x es al menos tan buena como y*” como “*y es al menos tan buena como x*”. Pero no puede haber un par de alternativas (diferentes) en las que no se cumpla la relación “ \succsim ” en un sentido o en el otro, o en ambos.

Por ejemplo, se pueden formar 6 parejas (no ordenadas) de *alternativas* distintas con el conjunto $A = \{\text{apple}, \text{orange}, \text{lemon}, \text{pear}\}$, y para cada una de estas parejas el individuo puede comparar una alternativa versus la otra:

-  vs. ,
-  vs. ,
-  vs. ,
-  vs. ,
-  vs. ,
-  vs. .

Que la relación sea *completa* significa que el individuo puede decir si en el caso de la primera pareja  \succsim  ó  \succsim ; en el caso de la segunda pareja  \succsim  ó  \succsim ; etcétera (en

donde el “o” también contempla el caso en el que sean ambas). Una relación completa concreta podría ser la siguiente:



que se puede representar mediante la siguiente tabla:

	0	1	1	1
	0	0	1	1
	0	0	0	1
	0	0	0	0

e. Transitividad

Se dice que la relación “ \succsim ” sobre el conjunto A es transitiva si

$$\forall x, y, z \in A : (x \succsim y \wedge y \succsim z) \rightarrow x \succsim z,$$

esto es, si la alternativa x “es al menos tan buena” como la alternativa y , y la alternativa y “es al menos tan buena” como la alternativa z , entonces la alternativa x debe ser “al menos tan buena” como la alternativa z .

Por ejemplo, si



entonces,



f. Orden completo

Un *orden completo* es una relación binaria reflexiva, completa y transitiva. Este es el orden al que se refiere Arrow cuando dice que “un orden es considerado como una característica distintiva de la racionalidad” (Arrow, 1966, p. 255). Cuando la relación “ \succsim ” (“al menos tan buena como”) es un orden completo también es llamada *preferencia débil*.

g. Preferencia estricta

A partir de la *preferencia débil* “ \succsim ” podemos definir una relación de *preferencia estricta* “ \succ ” de la siguiente manera:

$$x \succ y \leftrightarrow [x \succsim y \wedge \neg(y \succsim x)],$$

esto es, “ x es mejor que y ” si y solo si “ x es al menos tan bueno como y ” pero “ y no es al menos tan bueno como x ”. Por ejemplo, la expresión

$$\text{🍏} \succ \text{🍊},$$

debe entenderse como “🍏 es al menos tan buena como 🍊 pero 🍊 no es al menos tan buena como 🍏”, o simplemente como

$$\text{“🍏 es mejor que 🍊”}.$$

h. Indiferencia

A partir de “ \succsim ” se puede definir una relación de *indiferencia* “ \sim ” de la siguiente manera:

$$x \sim y \leftrightarrow [x \succsim y \wedge y \succsim x],$$

esto es, “ x es tan bueno como y ” si y solo si “ x es al menos tan bueno como y ” pero también “ y es al menos tan bueno como x ”. Por ejemplo, la expresión

$$\text{🍏} \sim \text{🍊},$$

debe entenderse como “🍏 es al menos tan buena como 🍊 y 🍊 es al menos tan buena como 🍏”, o simplemente como

$$\text{“🍏 es tan bueno como 🍊”}.$$

i. Cuatro formas de representar las preferencias

Las preferencias de un individuo sobre un conjunto de *alternativas* A se pueden representar de cuatro formas:

1) Como un subconjunto de $A \times A$. Por ejemplo si $A = \{\text{🍏}, \text{🍊}, \text{🍋}, \text{🍏}\}$, entonces la preferencia de un individuo particular se puede representar por

$$\succsim = \left\{ \begin{array}{cccc} (\text{🍏}, \text{🍏}), & (\text{🍏}, \text{🍊}), & (\text{🍏}, \text{🍋}), & (\text{🍏}, \text{🍏}), \\ & (\text{🍊}, \text{🍊}), & (\text{🍊}, \text{🍋}), & (\text{🍊}, \text{🍏}), \\ & (\text{🍋}, \text{🍊}), & (\text{🍋}, \text{🍋}), & (\text{🍋}, \text{🍏}), \\ & & & (\text{🍏}, \text{🍏}) \end{array} \right\}.$$

2) Una segunda representación se tiene utilizando los símbolos “ \succsim ”, “ \succ ” y “ \sim ” (y abusando un poco de la notación). Siguiendo con el ejemplo anterior, esto es

$$\text{🍏} \succ \text{🍊} \sim \text{🍋} \succ \text{🍏}$$

Esta notación resume toda la información, ya que si “ 🍏 es mejor que 🍊 ” y “ 🍊 es tan bueno como 🍋 ”, entonces por transitividad “ 🍏 es mejor que 🍋 ”. De igual forma, ya que “ 🍋 es mejor que 🍏 ”, por transitividad “ 🍏 es mejor que 🍏 ”, etcétera.

3) Una tercera notación es enlistar las *alternativas* de la “mejor” a la “peor”, en donde si dos alternativas son igual de buenas, se colocan en el mismo nivel. En el ejemplo esto es

- 🍏 (mejor)
- 🍊, 🍋
- 🍏 (peor)

4) Una cuarta representación se obtiene al asignar un número a cada alternativa, con la convención de que si la alternativa x es mejor que la alternativa y entonces se le asigna un número mayor, y si la alternativa x es tan buena como la alternativa y se les asigna el mismo número a las dos.

	3
	2
	2
	1

j. Conjunto de elección

Un elemento x puede ser llamado un *elemento superior* de A si es al menos tan bueno como cada uno de los demás elementos en A con respecto a la relación de preferencia relevante “ \succsim ”. Esto es, un elemento x en A es un *elemento superior* de A con respecto a una relación binaria “ \succsim ” si y solo si

$$\forall y : (y \in A \rightarrow x \succsim y).$$

El conjunto de todos los *elementos superiores* en A es llamado el *conjunto de elección*, y se denota mediante

$$C(A, \succsim).$$

Capítulo IV

Hipótesis de expectativas

En el campo de la economía agrícola, el estudio de las expectativas comenzó a tener un papel destacado. Se explicaron los ciclos de ciertos bienes como consecuencia de las expectativas de los productores. Tres economistas, de manera independiente presentaron lo que se conocería como el teorema de la telaraña. Este teorema establecía que los productores anticipaban que el precio en el siguiente periodo sería el mismo que el actual. Esto generaba una serie de reacciones que tenían la forma de una telaraña al momento de ser graficadas con unas curvas de oferta y demanda usuales. Posteriormente esta formación de expectativas fue generalizada, y surgió lo que se conoce como expectativas extrapolativas.

Otra de las conjeturas más importantes fueron las expectativas adaptativas. Esta hipótesis tiene un papel central en muchas de las controversias de macroeconomía, principalmente de la escuela keynesiana y los monetaristas. Por otro lado, las expectativas adaptativas jugaron un rol central en el proyecto de “Planning and Control of Industrial Operations”, que como se mencionó en el capítulo I, es el antecedente directo del artículo en el que Muth presenta las expectativas racionales. Una de las contribuciones de Muth al proyecto fue investigar precisamente bajo qué condiciones las expectativas adaptativas generan un pronóstico óptimo. Hay muchas conexiones entre la hipótesis de expectativas racionales y la hipótesis de expectativas adaptativas, e incluso se puede hacer una analogía entre la racionalidad limitada de Simon y la racionalidad de Muth, utilizando las hipótesis de expectativas racionales y de expectativas adaptativas.

En este capítulo se mostrarán las hipótesis de expectativas, comenzando con el teorema de la telaraña, continuando con las expectativas adaptativas, después las expectativas implícitas y finalmente, las expectativas racionales. Aquí es conveniente hacer una distinción entre estas hipótesis, ya que las primeras tres ofrecen una regla concreta sobre cómo formar las expectativas, esto es, una función concreta que se aplica a todos los modelos y que es una regla que indica cómo las observaciones pasadas determinan el pronóstico de la variable. La hipótesis de expectativas implícitas y de expectativas racionales en lugar de ofrecer una fórmula concreta, comprenden suposiciones sobre las características estadísticas de los pronósticos de los tomadores de decisiones y dependen del modelo econométrico en el que se aplique la hipótesis.

También es importante hacer una distinción entre expectativas endógenas y exógenas. En *The General Theory of Employment, Interest and Money*, John Maynard Keynes utilizó el recurso de tratar las expectativas como exógenas y, por tanto, como independientes de las variables del periodo presente (Keynes, 1936, capítulo 18). El término “exógenas” puede entenderse de dos maneras: 1) estadísticamente exógenas, o 2) teóricamente exógenas (Davidson, 1991, p. 154). Una variable en una regresión es estadísticamente exógena solo si es independiente (en el sentido probabilístico) de las variables explicativas (Cooley y LeRoy, 1981, p. 838). Por otro lado, en un modelo teórico, una variable exógena es una variable que no está determinada dentro del modelo, es decir, una variable cuyo cambio no se explica dentro de los confines del modelo pero que tiene un impacto importante sobre las variables endógenas (Davidson, 1991, p. 154). Es con respecto a este sentido teórico que se dice que las expectativas en Keynes son exógenas. Al contrario, las hipótesis de expectativas que se describirán en este capítulo pueden clasificarse como expectativas endógenas en el sentido teórico, es decir, son variables que se determinan dentro del modelo.

A continuación se expondrán cada una de las hipótesis de manera detallada. Para explicar las diferentes hipótesis de expectativas, se tomará un mercado aislado de un bien que es producido con un rezago de producción de un periodo y que no puede ser almacenado. Las ecuaciones que describen este mercado son:

$$\begin{aligned}
C_t &= -\beta p_t + \alpha \\
P_t &= \gamma p_t^e + u_t + \delta \\
P_t &= C_t.
\end{aligned}
\tag{IV.1}$$

La primera de estas ecuaciones es la ecuación de demanda, expresa la cantidad consumida C_t al final del periodo t como una función lineal del precio p_t . La segunda ecuación expresa la cantidad producida P_t al final del periodo t como una función lineal de la expectativa p_t^e y de un choque aleatorio u_t . La última ecuación es la condición de vaciado de mercado que expresa que la cantidad producida debe igualar a la consumida en cada uno de los periodos. Ya que existe un rezago en la producción, el productor debe decidir al principio de cada periodo t la cantidad que producirá al final de ese periodo. Para un periodo t dado, el mecanismo es el siguiente, al principio del periodo el tomador de decisiones produce la cantidad $\delta + \gamma p_t^e$; posteriormente esta cantidad se ve afectada por el disturbio aleatorio u_t que podría representar por ejemplo pérdidas a causa del clima, accidentes, etc; así, la cantidad generada por el productor una vez que ha tenido lugar el choque es P_t . La cantidad P_t es llevada al mercado, y el precio p_t es aquel precio al cual se consume toda la producción de acuerdo a la ecuación de demanda.

Utilizando la ecuación de vaciado de mercado, podemos igualar las expresiones para la oferta y la demanda,

$$-\beta p_t + \alpha = \gamma p_t^e + u_t + \delta$$

y obtener una expresión para el precio

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^e - \frac{1}{\beta} u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta}. \tag{IV.2}$$

Como muestra la ecuación (IV.2), el precio para un periodo dado t está determinado por la expectativa que forma el productor así como por un choque aleatorio. En las secciones siguientes se expondrá cada una de las hipótesis de expectativas, y como se comporta este modelo bajo cada una de ellas.

A. Expectativas clásicas

La primera de las hipótesis es lo que Muth denominó expectativas clásicas. En su forma más simple, esta hipótesis establece que el tomador de decisiones toma como su expectativa el valor observado inmediato anterior de la variable. Esta hipótesis da lugar a lo que se conocería como el teorema de la telaraña, debido a la forma que describe la trayectoria de la variable cuando es graficada con respecto a las curvas de oferta y de demanda. En 1930, tres economistas desarrollaron de manera independiente este teorema. La idea básica de los tres era relacionar la cantidad y los precios de las curvas de oferta y de demanda de periodos anteriores y posteriores. El primero de ellos Henry Schultz en los Estados Unidos, intentaba mostrar la diferencia entre ajustes simultáneos de la oferta a la demanda así como ajustes rezagados. En Holanda, Jan Tinbergen buscaba mostrar cómo la producción respondía rezagadamente al cambio de precio. Finalmente, Umberto Ricci en Italia intentó mostrar qué tan importantes eran las elasticidades de la oferta y la demanda así como las consecuencias que podrían tener pequeñas diferencias en sus valores. En 1938, Mordecai Ezekiel formaliza el concepto del teorema de la telaraña en su artículo titulado “The Cobweb Theorem”.

El modelo analizado por Ezekiel se refiere a un mercado agrícola, en su exposición se puede observar el impacto que tiene la suposición que se hace respecto a la manera en que los agentes forman sus expectativas. En el modelo se habla de dos equilibrios: uno temporal y otro intertemporal. El equilibrio temporal se refiere a que en cada periodo de tiempo la cantidad llevada al mercado por los productores es consumida en su totalidad, así que se puede entender que la oferta es inelástica en cada periodo. Sin embargo, también hay una curva de oferta que relaciona variables en distintos periodos de tiempo, que es la que incorpora las expectativas del productor. Cuando la curva de oferta intertemporal se relaciona con la curva de demanda, se tiene el equilibrio intertemporal. Este aspecto es importante porque se está hablando de dos equilibrios, así que el mercado está siempre en equilibrio temporal pero puede estar en desequilibrio intertemporalmente. Más aún, una de las implicaciones del teorema de la telaraña es que conservando casi en su totalidad los supuestos estándar de la teoría económica de aquel momento, la trayectoria de precio podía divergir y nunca alcanzar el equilibrio intertemporal, sino al contrario, alejarse de él cada vez más.

Aplicando esta hipótesis al sistema de ecuaciones (IV.1), el productor tomaría el precio realizado en el periodo anterior y lo usaría como su expectativa, esto es, bajo la hipótesis de expectativas clásicas se tiene

$$p_t^e = p_{t-1}. \quad (\text{IV.3})$$

La expresión del precio (IV.2) bajo el supuesto de expectativas clásicas es

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta}p_{t-1} - \frac{1}{\beta}u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta}. \quad (\text{IV.4})$$

Para simplificar las manipulaciones, desplacemos el índice de tiempo un periodo hacia adelante en la ecuación (IV.4) para obtener

$$p_{t+1} = Ap_t + Cu_{t+1} + B \quad (\text{IV.5})$$

donde

$$A = -\frac{\gamma}{\beta} \quad B = \frac{\alpha - \delta}{\beta} \quad C = -\frac{1}{\beta}$$

La ecuación (IV.5) es una ecuación en diferencias que muestra la trayectoria de precio en el tiempo. El precio para dos periodos adelante estará determinado por

$$p_{t+2} = Ap_{t+1} + Cu_{t+2} + B \quad (\text{IV.6})$$

Al sustituir el precio del periodo uno dado por la ecuación (IV.5) en la ecuación para el precio del periodo dos (IV.6) se tiene

$$\begin{aligned} p_{t+2} &= A[Ap_t + Cu_{t+1} + B] + Cu_{t+2} + B \\ &= A^2p_t + ACu_{t+1} + AB + Cu_{t+2} + B \\ &= A^2p_t + Cu_{t+2} + CAu_{t+1} + B(1 + A) \\ &= A^2p_t + C[u_{t+2} + Au_{t+1}] + B(1 + A) \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

El precio para tres periodos adelante está dado por

$$p_{t+3} = Ap_{t+2} + Cu_{t+3} + B \quad (\text{IV.8})$$

Sustituyendo la expresión para el precio del periodo dos (IV.7) en la ecuación para el precio del periodo tres (IV.8) se obtiene

$$\begin{aligned} p_{t+3} &= A \left[A^2 p_t + C[u_{t+2} + Au_{t+1}] + B(1 + A) \right] + Cu_{t+3} + B \\ &= A^3 p_t + AC[u_{t+2} + Au_{t+1}] + AB(1 + A) + Cu_{t+3} + B \\ &= A^3 p_t + ACu_{t+2} + A^2 Cu_{t+1} + AB + A^2 B + Cu_{t+3} + B \\ &= A^3 p_t + Cu_{t+3} + ACu_{t+2} + A^2 Cu_{t+1} + B + AB + A^2 B \\ &= A^3 p_t + C[u_{t+3} + Au_{t+2} + A^2 u_{t+1}] + B[1 + A + A^2] \\ &= A^3 p_t + C \sum_{k=1}^3 A^{3-k} u_{t+k} + B \sum_{k=1}^3 A^{3-k} \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Siguiendo con este proceso podemos llegar a una expresión para el periodo $t + n$

$$\begin{aligned} p_{t+n} &= A^n p_t + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} + B \sum_{k=1}^n A^{n-k} \\ &= A^n p_t + C \sum_{k=1}^n A^n A^{-k} u_{t+k} + B \sum_{k=1}^n A^n A^{-k} \\ &= A^n p_t + A^n C \sum_{k=1}^n A^{-k} u_{t+k} + A^n B \sum_{k=1}^n A^{-k} \\ &= A^n \left(p_t + C \sum_{k=1}^n A^{-k} u_{t+k} + B \sum_{k=1}^n A^{-k} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

El modelador ha observado la historia pasada de precios $p_t, p_{t-1}, p_{t-2}, \dots$ y genera su expectativa utilizando esta información. Supóngase que el modelador genera un pronóstico que minimiza el error cuadrado medio, entonces el mejor pronóstico sería el valor esperado condicionado a la información I_t que tiene hasta ese momento, la cuál comprende los precios pasados observados, esto es $I_t = (p_t, p_{t-1}, \dots)$. Entonces, la predicción del modelador o su expectativa estará dada por

$$\begin{aligned}
E\{p_{t+n}|I_t\} &= E\left\{A^n\left(p_t + C\sum_{k=1}^n A^{-k}u_{t+k} + B\sum_{k=1}^n A^{-k}\right)\middle|I_t\right\} \\
&= A^n\left(E\left\{p_t + C\sum_{k=1}^n A^{-k}u_{t+k} + B\sum_{k=1}^n A^{-k}\middle|I_t\right\}\right) \\
&= A^n\left(p_t + E\left\{C\sum_{k=1}^n A^{-k}u_{t+k}\middle|I_t\right\} + B\sum_{k=1}^n A^{-k}\right) \\
&= A^n\left(p_t + CE\left\{\sum_{k=1}^n A^{-k}u_{t+k}\middle|I_t\right\} + B\sum_{k=1}^n A^{-k}\right) \\
&= A^n\left(p_t + C\sum_{k=1}^n E\left\{A^{-k}u_{t+k}\middle|I_t\right\} + B\sum_{k=1}^n A^{-k}\right) \\
&= A^n\left(p_t + C\sum_{k=1}^n A^{-k}E\left\{u_{t+k}\middle|I_t\right\} + B\sum_{k=1}^n A^{-k}\right)
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Se obtiene la última expresión de (IV.11) porque p_t ha sido observado y es parte del conjunto de información sobre el cual se toma la expectativa, así que se puede sustituir por su valor observado. El último término es una suma de constantes, así que la expectativa condicionada a la información es el mismo término. El término del medio del lado derecho expresa el efecto de los choques aleatorios. La última expresión de (IV.11) muestra que la única información faltante para dar el precio p_{t+n} con certeza son los choques aleatorios u_{t+1}, u_{t+2}, \dots . Supóngase, sin embargo, que el modelador sabe que estos choques son independientes y todos tienen media cero, por lo cuál se tiene

$$E\{u_{t+k}|I_t\} = E\{u_{t+k}\} = 0$$

Con esta información, la expresión (IV.11) es

$$p_{t+n} = A^n\left(p_t + B\sum_{k=1}^n A^{-k}\right) \tag{IV.12}$$

Hay una diferencia entre la expectativa del tomador de decisiones dentro del modelo, representada por p_t^e , y la expectativa del modelador, representada por $E[p_t | p_{t-1}, p_{t-2}, \dots]$. Supóngase

que ambos han observado los precios hasta el periodo t inclusive, y forman su expectativa del precio para el periodo $t + 1$. El pronóstico del agente dentro del modelo es

$$p_{t+1}^e = p_t, \quad (\text{IV.13})$$

mientras que la del modelador es

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= A(p_t + BA^{-1}) \\ &= Ap_t + BA^{-1}A \\ &= Ap_t + B. \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Así, se tiene que la expectativa del modelador y la del agente dentro del modelo es diferente,

$$p_t^e \neq E[p_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots]. \quad (\text{IV.15})$$

Supóngase que el modelo del modelador es correcto, y que por tanto describe correctamente el mercado. Entonces el precio en el periodo $t + 1$ es

$$p_{t+1} = Ap_t + Cu_{t+1} + B \quad (\text{IV.16})$$

El error de predicción del modelador, que se representará mediante ϵ_m estaría dado por

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= p_{t+1} - E\{p_{t+1} \mid I_t\} \\ &= [Ap_t + Cu_{t+1} + B] - [Ap_t + B] \\ &= Cu_{t+1} \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

La esperanza condicional dada la información hasta el periodo t del error de predicción del modelador es entonces

$$\begin{aligned}
E\{\epsilon_m|I_t\} &= E\{Cu_{t+1}|I_t\} \\
&= CE\{u_{t+1}|I_t\} \\
&= CE\{u_t\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{IV.18}$$

El error de predicción del agente dentro del modelo, que se representará mediante ϵ_a , está dado por

$$\begin{aligned}
\epsilon_a &= p_{t+1} - p_{t+1}^e \\
&= \left[Ap_t + Cu_{t+1} + B \right] - p_t \\
&= (A - 1)p_t + Cu_{t+1} + B
\end{aligned} \tag{IV.19}$$

La esperanza condicional dada la información hasta el periodo t del error de predicción del agente dentro del modelo es entonces

$$\begin{aligned}
E\{\epsilon_a|I_t\} &= E\left\{ (A - 1)p_t + Cu_{t+1} + B \middle| I_t \right\} \\
&= (A - 1)p_t + E\{Cu_{t+1}|I_t\} + B \\
&= (A - 1)p_t + CE\{u_{t+1}|I_t\} + B \\
&= (A - 1)p_t + CE\{u_{t+1}\} + B \\
&= (A - 1)p_t + C \cdot 0 + B \\
&= (A - 1)p_t + B
\end{aligned} \tag{IV.20}$$

Al comparar las ecuaciones (IV.18) y (IV.20) se puede ver que el error de predicción del modelador es insesgado, mientras que el del agente dentro del modelo está sesgado. Sin embargo, ambos pueden observar la historia de precios. Ya que los choques aleatorios son independientes y con media cero, ni el modelador ni el agente pueden predecir ninguna parte de ellos, así que la diferencia entre sus errores esperados no se debe a la parte aleatoria del sistema. El error sesgado del agente se podría interpretar como que el agente tiene un modelo incorrecto del sistema. Hay que resaltar que el error del modelador es totalmente aleatorio como muestra (IV.17). El error

del agente tiene una parte aleatoria, pero también una determinística, esto es, se equivoca sistemáticamente, como muestra (IV.19). Así, cuando Muth se refiere a que el economista podría entrar al mercado y generar una ganancia ¹ se refiere a que el modelador podría entrar al mercado y aprovechar su capacidad de hacer mejores pronósticos que los agentes que modela.

Supóngase que el sistema se encuentra en equilibrio, representado por p^* . La única diferencia con el precio del siguiente periodo sería el choque aleatorio Cu . Así, el precio de equilibrio satisface

$$p^* + Cu = Ap^* + Cu + B \quad (\text{IV.21})$$

Restando Cu en los dos lados de la igualdad se obtiene

$$p^* = Ap^* + B$$

Restando Ap^* en los dos lados de la igualdad se obtiene

$$p^* - Ap^* = B$$

Después,

$$(1 - A)p^* = B$$

Dividiendo ambos lados por $1 - A$,

$$p^* = \frac{B}{1 - A} \quad (\text{IV.22})$$

Sustituyendo los valores de A y de B , se puede expresar el precio de equilibrio en términos de las constantes α , β , δ y γ ,

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{\left(\frac{\alpha - \delta}{\beta}\right)}{1 - \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha - \delta}{\beta}\right)}{\left(\frac{\beta + \gamma}{\beta}\right)} \\ &= \frac{\alpha - \delta}{\beta + \gamma} \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

¹"If the prediction of the theory were substantially better than the expectations of the firms, then there would be opportunities for the 'insider' to profit from the knowledge—by inventory speculation if possible, by operating a firm, or by selling a price forecasting service to the firms" (Muth, 1961).

Suponiendo que se observa este sistema desde el inicio, esto es, desde el tiempo $t = 0$, entonces de acuerdo a la ecuación (IV.10), se tiene que dada una condición inicial dada p_0 ,

$$\begin{aligned}
p_{0+n} &= A^n \left(p_0 + C \sum_{k=1}^n A^{-k} u_{t+k} + B \sum_{k=1}^n A^{-k} \right) \\
&= A^n p_0 + A^n C \sum_{k=1}^n A^{-k} u_{t+k} + A^n B \sum_{k=1}^n A^{-k} \\
&= A^n p_0 + C \sum_{k=1}^n A^n A^{-k} u_{t+k} + B \sum_{k=1}^n A^n A^{-k} \\
&= A^n p_0 + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} + B \sum_{k=1}^n A^{n-k} \\
&= A^n p_0 + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} + B \sum_{k=0}^{n-1} A^k \\
&= A^n p_0 + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} + B \left(\frac{A^n - 1}{A - 1} \right) \\
&= A^n p_0 + B \left(\frac{A^n - 1}{A - 1} \right) + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} \tag{IV.24} \\
&= A^n p_0 + \frac{B}{A - 1} (A^n - 1) + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} \\
&= A^n p_0 - \frac{B}{1 - A} (A^n - 1) + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} \\
&= A^n p_0 - \left(\frac{B}{1 - A} \right) A^n + \frac{B}{1 - A} + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} \\
&= A^n (p_0 - p^*) + p^* + C \sum_{k=1}^n A^{n-k} u_{t+k} \\
&= A^n (p_0 - p^*) + p^* + A^n C \sum_{k=1}^n A^{-k} u_{t+k} \\
&= A^n \left[(p_0 - p^*) + C \sum_{k=1}^n A^{-k} u_{t+k} \right] + p^*
\end{aligned}$$

Así, se obtiene una expresión que relaciona el precio de equilibrio con el precio inicial. En esta ecuación se puede ver claramente que la convergencia al precio de equilibrio de esta secuencia depende del valor de A .

B. Expectativas adaptativas

Se han señalado diversos orígenes de la hipótesis de expectativas adaptativas. En su libro *Value and Capital*, John Hicks trata el tema de las expectativas de forma extensa. Las considera una parte fundamental del análisis económico dinámico y considera que son las expectativas pasadas las que principalmente gobiernan a la producción actual. Para Hicks, las expectativas de precio estaban sujetas a distintos tipos de influencias, siendo una de las principales la experiencia que se tiene de los precios, tanto la experiencia en el pasado como en el presente. Los precios pasados y precios presentes tienen una influencia sobre las expectativas de precio. Hicks introduce el término de elasticidad de las expectativas. Así, la elasticidad de las expectativas de una persona particular de un bien en particular es el cociente del incremento proporcional en los precios futuros esperados con respecto al incremento proporcional en su precio actual. Si las expectativas son inelásticas, entonces se espera que el precio actual se mantenga. Si la elasticidad de las expectativas es uno, un cambio en los precios actuales cambiará los precios esperados en la misma dirección y en la misma proporción. También considera todos los casos intermedios entre cero y uno. Para Nerlove, esta definición de la elasticidad de las expectativas es básicamente la definición de las expectativas adaptativas.

Milton Friedman asegura que la fórmula le fue propuesta por A. W. Phillips. Phillips desarrolló una carrera asociada con el intento de explicar las inestabilidades y discontinuidades asociadas al aumento de precios. Desde un principio trató de explicar las expectativas inflacionarias y de ganancias. En 1952 Friedman fue invitado a la London School of Economics, donde tuvo oportunidad de reunirse con Phillips y preguntarle sobre una forma de aproximar las expectativas sobre la inflación futura, a lo que Phillips respondió con la fórmula de expectativas adaptativas. Esta hipótesis de expectativas forma una parte fundamental del trabajo de Friedman sobre el ingreso permanente, así como del trabajo de Phillip Cagan sobre hiperinflaciones, además de ser ampliamente utilizada por Marc Nerlove en sus estudios agrícolas. Phillips influyó el trabajo de Friedman, Cagan y Nerlove con respecto a la fórmula de expectativas adaptativas, aunque él mismo no la utilizó en su trabajo. De hecho, Cagan se refiere a ella como la fórmula de expectativas adaptativas de Phillips.

Para el proyecto de “Planning and Control of Industrial Operations” este tipo pronóstico fue muy importante. Durante la Segunda Guerra Mundial, algunos directores de armas anti aéreas utilizaron el suavizamiento exponencial para disminuir las fluctuaciones erráticas en las predicciones de las posiciones de los objetivos. Esta forma de pronóstico se diseminó a la ingeniería de control, de donde Charles Holt la retomó y la llevó al proyecto de Carnegie. John Muth analizó las propiedades estadísticas de este pronóstico que para ese momento era utilizado sin ser entendido del todo. Muth se hace la pregunta de bajo qué circunstancias este pronóstico sería óptimo, o dicho de otra manera, qué características debe tener la serie de tiempo para que este pronóstico sea óptimo. En 1960, Muth publica estas investigaciones en su artículo sobre promedios ponderados exponencialmente.

La hipótesis de expectativas adaptativas no depende del modelo, de manera que para diversos casos se aplica la misma fórmula. Otro punto importante a destacar es que los pesos utilizados en el promedio son elegidos por el econometrista, que los elige de acuerdo a su criterio. Para formar la media móvil ponderada exponencialmente solo es necesario tener la serie de observaciones pasadas de la variable, elegir los pesos y calcular el pronóstico. Es por esta conveniencia que este pronóstico fue ampliamente utilizado y estudiado.

Aplicar esta hipótesis en el modelo tratado al principio de este capítulo equivale a establecer que

$$p_t^e = p_{t-1}^e + \eta(p_{t-1} - p_{t-1}^e), \quad 0 < \eta \leq 1. \quad (\text{IV.25})$$

Esta ecuación expresa que el productor forma su expectativa en función de la revisión de la expectativa anterior con respecto al precio realizado. Su nueva predicción esta formada por la anterior más una proporción η de su error de predicción anterior. Esta es una ecuación en diferencias para p_t^e cuya solución es el promedio ponderado exponencialmente de la historia de precios pasados,

$$p_t^e = \eta \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \eta)^j p_{t-j}.$$

Sustituyendo la variable que representa la expectativa en la expresión del precio que se obtuvo anteriormente se tiene que

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} \left[p_{t-1}^e + \eta(p_{t-1} - p_{t-1}^e) \right] - \frac{1}{\beta} u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta}.$$

Las variables de expectativas se pueden expresar en términos de los precios observados para obtener

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} \eta \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \eta)^j p_{t-j} - \frac{1}{\beta} u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta}.$$

Supóngase que el sistema (IV.1) no está sujeto a choques aleatorios, por lo tanto se tiene

$$C_t = \alpha - \beta p_t \quad (\text{IV.26})$$

$$P_t = \delta + \gamma p_t^e \quad (\text{IV.27})$$

$$P_t = C_t \quad (\text{IV.28})$$

Rezagando la ecuación (IV.25) un periodo se obtiene

$$P_{t-1} = \delta + \gamma p_{t-1}^e. \quad (\text{IV.29})$$

Expresando la ecuación (IV.29) en término de p_{t-1}^e , se obtiene

$$p_{t-1}^e = -\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} P_{t-1} \quad (\text{IV.30})$$

Sustituyendo (IV.30) en (IV.25), se obtiene

$$p_t^e - \left[-\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} P_{t-1} \right] = \eta \left[p_{t-1} - \left(-\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} P_{t-1} \right) \right]$$

Resolviendo esta expresión para p_t^e ,

$$\begin{aligned}
p_t^e + \frac{\delta}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}P_{t-1} &= \eta p_{t-1} + \eta \frac{\delta}{\gamma} - \eta \frac{1}{\gamma}P_{t-1} \\
p_t^e &= \eta p_{t-1} + \frac{1}{\gamma}P_{t-1} - \eta \frac{1}{\gamma}P_{t-1} + \eta \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} \\
p_t^e &= \eta p_{t-1} + \frac{1}{\gamma}(1 - \eta)P_{t-1} + \frac{1}{\gamma}\delta(\eta - 1)
\end{aligned} \tag{IV.31}$$

Sustituyendo (IV.31) en (IV.27), se obtiene

$$\begin{aligned}
P_t &= \delta + \gamma \eta p_{t-1} + (1 - \eta)P_{t-1} + \delta(\eta - 1) \\
P_t &= \delta \eta + \gamma \eta p_{t-1} + (1 - \eta)P_{t-1}
\end{aligned} \tag{IV.32}$$

Rezagando la ecuación (IV.26) un periodo se obtiene

$$C_{t-1} = \alpha - \beta p_{t-1} \tag{IV.33}$$

Utilizando (IV.33) y la condición de vaciado de mercado para cada periodo (IV.28) se obtiene

$$\begin{aligned}
P_t &= \delta \eta + \gamma \eta p_{t-1} + (1 - \eta)(\alpha - \beta p_{t-1}) \\
&= (\delta - \alpha)\eta + \alpha + [(\gamma + \beta)\eta - \beta]p_{t-1}
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

Utilizando las ecuaciones (IV.26), (IV.34) junto con la condición de vaciado de mercado en cada periodo (IV.28) se obtiene

$$\begin{aligned}
\alpha - \beta p_t &= (\delta - \alpha)\eta + \alpha + \left[(\gamma + \beta)\eta - \beta \right] p_{t-1} \\
-\beta p_t - \left[(\gamma + \beta)\eta - \beta \right] p_{t-1} &= (\delta - \alpha)\eta \\
p_t - \frac{1}{-\beta} \left[(\gamma + \beta)\eta - \beta \right] p_{t-1} &= \frac{(\alpha - \delta)\eta}{\beta} \\
p_t - \left[\frac{(\gamma + \beta)\eta}{-\beta} + 1 \right] p_{t-1} &= \frac{(\alpha - \delta)\eta}{\beta} \\
p_t - \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\beta} + 1 \right) \eta \right] p_{t-1} &= \frac{(\alpha - \delta)\eta}{\beta}
\end{aligned} \tag{IV.35}$$

Cuando $\eta = 1$, esta expresión es idéntica al caso de expectativas clásicas. La ecuación (IV.35) es una ecuación en diferencias de primer grado. Sean

$$A = \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\beta} + 1 \right) \eta \right], \quad B = \frac{(\alpha - \delta)\eta}{\beta} \tag{IV.36}$$

Entonces la ecuación (IV.35) se puede desplazar un periodo hacia adelante para obtener

$$p_{t+1} = Ap_t + B. \tag{IV.37}$$

Partiendo del tiempo t , el precio en el periodo $t + n$ estará dado por

$$\begin{aligned}
p_{t+n} &= A^n p_t + B \sum_{k=1}^n A^{n-k} \\
&= A^n p_t + B \sum_{k=1}^n A^n A^{-k} \\
&= A^n p_t + A^n B \sum_{k=1}^n A^{-k} \\
&= A^n \left(p_t + B \sum_{k=1}^n A^{-k} \right)
\end{aligned} \tag{IV.38}$$

Para una condición dada p_0 y comenzando en el periodo 0, se tiene

$$p_{0+n} = A^n \left(p_0 + B \sum_{k=1}^n A^{-k} \right) \quad (\text{IV.39})$$

El precio de equilibrio debe satisfacer

$$p^* = Ap^* + B \quad (\text{IV.40})$$

Resolviendo (IV.40) para p^* se obtiene

$$\begin{aligned} p^* - Ap^* &= B \\ (1 - A)p^* &= B \\ p^* &= \frac{B}{1 - A} \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

Se puede expresar (IV.41) en términos de las constantes $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ y η sustituyendo por los valores de A y B dados por (IV.36), y obtener

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{\frac{(\alpha - \delta)\eta}{\beta}}{1 - \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\beta} + 1 \right) \eta \right]} \\ &= \frac{\frac{(\alpha - \delta)\eta}{\beta}}{\left(\frac{\gamma}{\beta} + 1 \right) \eta} \\ &= \frac{\frac{(\alpha - \delta)\eta}{\beta}}{\frac{(\gamma + \beta)\eta}{\beta}} \\ &= \frac{(\alpha - \delta)\eta}{(\gamma + \beta)\eta} \\ &= \frac{\alpha - \delta}{\gamma + \beta} \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

C. Expectativas racionales y expectativas implícitas

Las hipótesis analizadas anteriormente representan una estructura concreta sobre cómo los pronósticos de los agentes son formados. En el caso de la hipótesis de expectativas clásicas, el pronóstico es exactamente el valor anterior observado; en la hipótesis de expectativas adaptativas, los valores observados pasados se combinan de una forma específica en lo que se denomina un promedio exponencialmente ponderado. Un enfoque alternativo a estas construcciones, es evitar explícitamente modelar el proceso mediante el cuál las expectativas son generadas y en su lugar asumir ciertas propiedades estocásticas que deben poseer los pronósticos realizados por los agentes. Es en esta categoría en la que entran dos hipótesis, denominadas la “hipótesis de expectativas implícitas” y la “hipótesis de expectativas racionales”.

Ambas hipótesis fueron desarrolladas a lo largo de la década de 1950, e incluso fueron presentadas en la misma conferencia. Edwin Mills presentó su hipótesis de expectativas implícitas en tres artículos, que trataban sobre la determinación del inventario óptimo. Por su parte, John F. Muth trató el tema de las expectativas en el marco del proyecto “Planning and Control of Industrial Operations”, en donde un trabajo fundamental fue su análisis sobre la optimalidad de los pronósticos basados en medias móviles ponderadas exponencialmente. Ambos conceptos presentan muchas similitudes, y los caminos de Muth y Mills se interceptaron en más de un punto.

Las dos hipótesis descansan sobre la suposición de que las expectativas son insesgadas. Si P representa el valor a ser pronosticado, y A el valor realizado de la variable, entonces el error predicción ϵ ,

$$\epsilon = P - A$$

es una variable aleatoria que tiene media cero, $E(\epsilon) = 0$. A grandes rasgos, la diferencia entre estas dos hipótesis se puede expresar mediante una regresión lineal simple, en donde intervienen P y A . En el caso de la hipótesis de expectativas implícitas, el error estará correlacionado con la predicción, mientras que no estará correlacionado con el valor realizado, esto es,

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 A + \epsilon$$

en donde los coeficientes de la regresión son

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1$$

En el caso de la hipótesis de expectativas racionales, el error estará correlacionado con el valor realizado, mientras que no estará correlacionado con la predicción, esto es,

$$A = \beta_0 + \beta_1 P + \epsilon$$

donde los coeficientes de la regresión son

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1,$$

En estos términos, una hipótesis es totalmente opuesta a la otra. Sin embargo, las diferencias entre ambas son más sutiles, por lo que a continuación se expondrán cada una de las hipótesis por separado.

a. Expectativas implícitas

A partir de 1954 Edwin Mills desarrolla su enfoque de expectativas implícitas. Supongamos que se está observando a un tomador de decisiones que se comporta de la siguiente forma, decide el valor de la variable y como una función lineal de su expectativa x^e , esto es

$$y = \alpha + \gamma x^e \tag{IV.43}$$

El tomador de decisiones se puede equivocar en su pronóstico, de manera que el valor realizado de x está determinado por la expectativa x^e y el error de predicción del tomador de decisiones ϵ , esto es

$$x = x^e + \epsilon$$

Así que podemos expresar la expectativa del tomador de decisiones como

$$x^e = x - \epsilon$$

Sustituyendo esto en (1), obtenemos una expresión en términos de la realización x y del error de predicción del tomador de decisiones ϵ ,

$$y = \alpha + \gamma x - \gamma \epsilon.$$

Supongamos que tenemos una muestra que comprende un determinado número de pares de observaciones (y_i, x_i) . Entonces queremos elegir dos parámetros $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ que se ajusten lo mejor posible a la muestra de observaciones, esto es queremos ajustar la ecuación

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}x \tag{IV.44}$$

El criterio para elegir estos parámetros será el de mínimos cuadrados ordinarios. Si el tomador de decisiones no se equivocara en sus expectativas, esto es, si su expectativa fuera correcta, de manera que $x^e = x$, entonces el error de predicción sería cero, $\epsilon = 0$. Entonces se puede interpretar a (2) como la ecuación de comportamiento del tomador de decisiones cuando no se enfrenta a errores de predicción. Entonces para esta muestra, la diferencia entre la y observada y la estimada estaría dada por

$$y - \hat{y} = \hat{u}$$

Se puede interpretar a \hat{u} como un estimado de $(-\gamma\epsilon)$, que para esta muestra podemos denotar por $(-\hat{\gamma}\hat{\epsilon})$, donde $\hat{\epsilon}$ es el estimado de ϵ . Entonces podemos formar un estimado de la expectativa,

$$\hat{x}^e = x - \hat{\epsilon}$$

Ya que $\hat{u} = -\hat{\gamma}\hat{\epsilon}$, entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} y - \hat{y} &= \hat{u} \\ y - \hat{y} &= -\hat{\gamma}\hat{\epsilon} \\ \hat{\epsilon} &= \frac{y - \hat{y}}{-\hat{\gamma}} \\ \hat{\epsilon} &= \frac{\hat{y} - y}{\hat{\gamma}} \end{aligned}$$

Ahora podemos expresar el estimado de la expectativa en función de las observaciones y los parámetros

$$\begin{aligned} \hat{x}^e &= x - \hat{\epsilon} \\ &= x - \frac{\hat{y} - y}{\hat{\gamma}} \\ &= \frac{\hat{y} - \hat{\alpha}}{\hat{\gamma}} - \frac{\hat{y} - y}{\hat{\gamma}} \\ &= \frac{(\hat{y} - \hat{\alpha}) - (\hat{y} - y)}{\hat{\gamma}} \\ &= \frac{y - \hat{\alpha}}{\hat{\gamma}} \end{aligned}$$

En el modelo ejemplo se tendría que la variable de expectativa es

$$p_t^e = p_t - \epsilon$$

Entonces el precio estará determinado por

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{\gamma}{\beta}(p_t - \epsilon_t) - \frac{1}{\beta}u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta} \\ &= \frac{\gamma}{\beta + \gamma}\epsilon_t - \frac{1}{\beta + \gamma}u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta + \gamma} \end{aligned}$$

Al analizar esta última expresión lo que tenemos es que el precio está formado por el error de predicción del tomador de decisiones, ϵ_t , el choque aleatorio u_t y una constante. Supongamos que se quieren estimar los valores de α , β , δ y γ . Sin embargo solo tenemos observaciones del precio. Entonces se estimarían los parámetros para obtener la ecuación ajustada

$$\hat{p}_t = \frac{1}{\hat{\beta} + \hat{\gamma}} u_t - \frac{\hat{\delta} - \hat{\alpha}}{\hat{\beta} + \hat{\gamma}}$$

A partir de esta estimación y las observaciones del precio podemos obtener un estimado del error de pronóstico del agente, $\hat{\epsilon}$

$$p_t - \hat{p}_t = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta} + \hat{\gamma}} \hat{\epsilon}_t.$$

y expresar el error de pronóstico del agente en términos de los observables y los estimadores,

$$\hat{\epsilon}_t = \frac{(p_t - \hat{p}_t)(\hat{\beta} + \hat{\gamma})}{\hat{\gamma}}$$

Utilizando esto, podemos definir un estimado de la expectativa como

$$\begin{aligned} \hat{p}_t^e &= p_t - \hat{\epsilon}_t \\ &= p_t - \frac{\hat{\beta} + \hat{\gamma}}{\hat{\gamma}} p_t + \frac{\hat{\beta} + \hat{\gamma}}{\hat{\gamma}} \hat{p}_t \\ &= \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}} (\hat{p}_t - p_t) + \hat{p}_t \end{aligned}$$

b. Expectativas racionales

El papel de Muth en el proyecto de Planning and Control of Industrial tenía que ver con el problema de planeación agregada y los modelos de inventarios. La planeación agregada incluía la formulación de las condiciones de primer orden para la minimización de la producción cuadrática, almacenamiento de inventarios y costos de empleo. Sin embargo aún quedaba mostrar lo

apropiado de esta planeación bajo incertidumbre. Muth y Modigliani trabajaron sobre el control de inventarios bajo incertidumbre, en donde uno de los problemas que atacaron fueron los aspectos de pronosticar la demanda. De esta manera Muth tuvo contacto con los métodos estadísticos de pronóstico, que fueron fundamentales para su modelo de expectativas racionales.

Una forma simple de explicar las expectativas racionales en un modelo es que todas las expectativas que tiene el agente económico son idénticas a las expectativas condicionales de las variables endógenas correspondientes generadas por el modelo econométrico mismo. De esta manera, la hipótesis de expectativas racionales no es en sí una fórmula como en el caso de las expectativas adaptativas, en donde la función tiene la forma específica de ser un promedio ponderado exponencialmente. En el caso de una expectativa “racional”, la hipótesis establece que su formación depende del modelo, esto es, a cada modelo le corresponde una manera de formar la expectativa, que se construye suponiendo que el error de pronóstico del agente tiene ciertas características.

La hipótesis de expectativas requiere que el econometrista y los agentes usen el mismo modelo para formar sus expectativas. Muth hace la suposición de que la probabilidad subjetiva del agente es igual a la probabilidad objetiva, lo que se puede interpretar como que el agente conoce las distribuciones de probabilidad reales, y ya que su expectativa es igual a la del econometrista, esto implica que el econometrista también conoce las distribuciones de probabilidad. Como Thomas Sargent diría, el agente, el econometrista y la naturaleza comparten el mismo modelo.

En el caso del modelo que se ha tomado como ejemplo, la hipótesis de expectativas se puede explicar al entender primero cuál es el pronóstico del econometrista. El econometrista tiene un modelo que está formado por las tres ecuaciones que describen la demanda, la oferta y la condición de vaciado de mercado. Así el econometrista tiene una ecuación que describe el comportamiento del precio en función del choque aleatorio y de la expectativa del agente. Al mismo tiempo, el econometrista conoce la distribución de probabilidad del choque aleatorio. Además, el econometrista también ha observado la serie de precios pasado. Con el modelo y esta información, realiza un pronóstico que busca ser óptimo bajo algún criterio, por ejemplo, que sea el que minimice el error cuadrado medio entre el pronóstico y la observación. Matemáticamente este pronóstico sería la expectativa condicionada a la información pasada con respecto a la distribución de la variable aleatoria. Esto es, si el modelo implica que el precio se determina por la

siguiente ecuación,

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta}p_t^e - \frac{1}{\beta}u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta}. \quad (\text{IV.45})$$

entonces el pronóstico óptimo del tomador de decisiones sería la expectativa condicionada a la información, que está formada por las observaciones pasadas del precio y la distribución de probabilidad,

$$E\{p_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} = -\frac{\gamma}{\beta}E\{p_t^e \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} - \frac{1}{\beta}E\{u_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} - \frac{\delta - \alpha}{\beta}. \quad (\text{IV.46})$$

Al asumir que el agente dentro del modelo forma la expectativa usando el mismo modelo y la misma información que el econometrista, se está suponiendo que

$$p_t^e = E\{p_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\}.$$

Entonces, sustituyendo esta expresión en la expresión del precio del econometrista, se tiene

$$E\{p_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} = -\frac{\gamma}{\beta}E\left\{E\{p_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\right\} - \frac{1}{\beta}E\{u_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} - \frac{\delta - \alpha}{\beta}.$$

El primer término del lado derecho es una expectativa condicional con respecto al mismo condicionada sobre el mismo conjunto de información así que

$$E\{p_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} = -\frac{\gamma}{\beta}E\{p_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} - \frac{1}{\beta}E\{u_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots\} - \frac{\delta - \alpha}{\beta}.$$

Para simplificar la notación, se escribirá el operador de expectativas, E , entendiendo que es la expectativa condicionada sobre la historia de precios pasados observados, por lo que se tiene

$$Ep_t = -\frac{\gamma}{\beta}Ep_t - \frac{1}{\beta}Eu_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta}.$$

Al igualar la expectativa del modelador con la del agente dentro del modelo, se ha obtenido una expresión que no incluye ninguna variable de expectativas, sino que está determinada solo por las variables observables y por u_t , que aunque no es observable, es exógena. Esta ecuación se puede manipular para obtener una expresión del pronóstico en términos del choque aleatorio

$$Ep_t = -\frac{1}{\beta + \gamma}Eu_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta + \gamma}.$$

Ya que por hipótesis el pronóstico del modelador y del agente es el mismo, entonces la expresión para el precio es

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{\gamma}{\beta} \left[-\frac{1}{\beta + \gamma}Eu_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta + \gamma} \right] - \frac{1}{\beta}u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta} \\ &= \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{1}{\beta + \gamma} \right) Eu_t - \frac{1}{\beta}u_t + \frac{\gamma(\delta - \alpha)}{\beta(\beta + \gamma)} - \frac{\delta - \alpha}{\beta} \\ &= -\frac{1}{\beta} \left(u_t - \frac{\gamma}{\beta + \gamma}Eu_t \right) - \frac{\delta - \alpha}{\beta + \gamma} \end{aligned}$$

Esta última expresión indica como el precio depende del error al predecir el choque aleatorio. Supongamos que el agente puede predecir con exactitud el choque aleatorio, esto es, que tiene previsión perfecta, entonces $Eu_t = u_t$, por lo cual tenemos,

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{1}{\beta} \left(u_t - \frac{\gamma}{\beta + \gamma}u_t \right) - \frac{\delta - \alpha}{\beta + \gamma} \\ &= \left(\frac{\gamma}{\beta(\beta + \gamma)} - \frac{1}{\beta} \right) u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta + \gamma} \\ &= -\frac{1}{\beta + \gamma}u_t - \frac{\delta - \alpha}{\beta + \gamma} \\ &= \frac{\alpha - \delta}{\beta + \gamma} - \frac{1}{\beta + \gamma}u_t \end{aligned}$$

Supongamos que el sistema está en equilibrio, p^* , y no está sujeto a choques, esto es $u_t = 0$, entonces,

$$p^* = \frac{\alpha - \delta}{\beta + \gamma}.$$

Ahora podemos expresar el precio en el periodo t como

$$p_t = p^* - \frac{1}{\beta} \left(u_t - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} E u_t \right).$$

Restando el precio de equilibrio en ambos lados de la ecuación y tomando la expectativa, se tiene

$$\begin{aligned} E(p_t - p^*) &= -\frac{1}{\beta} E \left(u_t - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} E u_t \right) \\ &= -\frac{1}{\beta} \left(E u_t - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} E u_t \right) \\ &= -\frac{1}{\beta + \gamma} E u_t \end{aligned}$$

Entonces el pronóstico de qué tanto el precio se alejará del equilibrio depende del valor esperado del disturbio aleatorio u_t . Si los disturbios aleatorios son independientes y tienen media 0, entonces no estarán correlacionados y se tiene que

$$E[u_t \mid p_{t-1}, p_{t-2}, \dots] = E u_t = 0$$

Entonces,

$$E(p_t - p^*) = 0.$$

De esta manera,

$$E p_t = p^*.$$

Conclusiones y recomendaciones

La hipótesis de este trabajo es que el supuesto de expectativas racionales es la versión estocástica del supuesto de previsión perfecta. Para demostrarlo, primero hay que señalar que la previsión perfecta y las expectativas racionales se refieren a las creencias del individuo. Formalmente estas creencias se expresan definiendo primero un conjunto de estados de la naturaleza S . Un estado de la naturaleza es una descripción del mundo tan completa que si fuera verdadera y conocida, las consecuencias de cada acción serían conocidas (Arrow, 1966, p. 254). Los estados tienen tres propiedades fundamentales: son mutuamente excluyentes, son exhaustivos, y describen toda la incertidumbre relevante (Gilboa y col., 2020, p. 369). Solamente un estado de la naturaleza $s \in S$ tiene lugar. Un evento A es un subconjunto de S . La creencia del individuo se expresará mediante una probabilidad, por ejemplo, asignarle probabilidad 1 al evento A significa que cree totalmente en la ocurrencia de ese evento, asignarle 0 significa que cree que no ocurrirá. Denotemos mediante s^* al estado del mundo que tiene lugar. Un individuo con previsión perfecta le asigna una probabilidad de 1 al evento $A = \{s^*\}$. Es decir, cree total y correctamente en el estado del mundo que tendrá lugar. Por otro lado, un individuo con expectativas racionales asigna una probabilidad correcta al evento A , en el sentido de que esta probabilidad muestra en el largo plazo la frecuencia con la que este evento contendrá al estado del mundo s^* .

El objetivo de este trabajo es arrojar luz sobre el significado de la hipótesis de expectativas racionales. Para ello, en cada capítulo se ha expuesto la hipótesis desde un punto de vista particular. Aunque la definición original de Muth es suficiente, se espera que al analizarla desde los diversos aquí expuestos, pueda ser entendida de mejor manera. A continuación se presentan las conclusiones específicas que aportó cada uno de los capítulos.

En el capítulo I se mostró que las expectativas racionales son la conclusión de una larga investigación de al menos tres décadas que comienza con la eliminación del supuesto de previsión perfecta. Desde el ángulo histórico, las expectativas racionales son un relajamiento de la capacidad predictiva de los agentes. En un principio, los agentes eran modelados como si pudieran ver el futuro con precisión. Esto es prácticamente equivalente a que no enfrentan incertidumbre. La previsión perfecta tuvo que ser dejada de lado para poder modelar la incertidumbre dentro de los modelos. Sin embargo, solo se disminuyó la precisión de los agentes, modelándolos con una previsión “un poco menos perfecta”. De esta manera, un agente con previsión perfecta sabe en qué cara caerá un dado al ser lanzado, mientras que uno con expectativas racionales, si bien no puede predecir con precisión el resultado, al menos sabe la distribución de probabilidad correcta con la que cae el dado.

Otra de las ideas principales del primer capítulo es la importante relación que guardan las expectativas con el equilibrio. El equilibrio requiere que las predicciones de los agentes sean correctas en cierto grado. Desde sus inicios, el equilibrio requirió de una predicción correcta del grado más alto, que es la previsión perfecta. Cuando se eliminó este supuesto el equilibrio se desplomó, ya que depende esencialmente de esta capacidad predictiva de los agentes. Otra forma de ver a las expectativas racionales desde el punto de vista histórico, es como la sustitución del supuesto de previsión perfecta como cimiento para el equilibrio. Esto es, las expectativas racionales ocupan el mismo lugar que la previsión perfecta con relación al equilibrio, son esa pieza fundamental sobre la que descansa el equilibrio.

En el capítulo II se mostró que las expectativas racionales equivalen a asumir que el agente está utilizando la distribución de probabilidad correcta. Desde el punto de vista de un individuo, su comportamiento se explica al modelar su toma de decisiones. Se pueden ver las acciones del individuo en el mundo físico, por ejemplo, al realizar una compra, o consumir algún alimento. Se dice que el individuo es racional porque estas acciones son realizadas bajo un criterio. El criterio es que maximizan su utilidad esperada. En el cálculo de esta utilidad esperada necesariamente interviene una distribución de probabilidad, que es precisamente sobre la cuál se calcula la utilidad esperada. La hipótesis de expectativas racionales se refiere a esta distribución. Se dice que el agente tiene una distribución subjetiva, ya que se encuentra “en su cabeza” y es perso-

nal. Son infinitas las posibles distribuciones de probabilidad que puede utilizar el individuo. La hipótesis de expectativas racionales es una restricción sobre estas posibles distribuciones. Asumir expectativas racionales significa que el agente está utilizando una de estas distribuciones, la objetiva.

En el segundo capítulo también se mostró que la racionalidad y las expectativas racionales no son lo mismo. A pesar del parecido en el nombre, los dos conceptos son muy diferentes. Un agente puede ser racional sin tener expectativas racionales. Un individuo es racional con respecto a ciertas creencias. Así, alguien puede creer que es nula la probabilidad de ser atropellado al cruzar una calle, mientras que otra persona puede creer que es casi seguro sufrir un accidente. La primera persona decidirá cruzar mientras que la segunda no. Ambas son racionales con respecto a sus creencias. Podemos realizar una investigación extensa sobre el tráfico que existe en esa calle y llegar a una probabilidad “correcta” de ser atropellado, esta probabilidad es la “objetiva”. Si se asumen expectativas racionales, entonces se asume que los dos individuos saben esta probabilidad “objetiva”.

Finalmente, en el cuarto capítulo, se mostraron las principales alternativas de formación de expectativas. Dentro de todas estas opciones, las expectativas racionales son las únicas que aseguran el equilibrio. Si se entiende a las expectativas racionales como expectativas que son “correctas”, también se puede entender a las otras hipótesis como expectativas que son “incorrectas”. Bajo cualquiera de estas hipótesis, incluyendo la de expectativas racionales, los agentes pueden equivocarse. Sin embargo la naturaleza de este error es muy distinta. En las expectativas clásicas y adaptativas, además del error propio de la incertidumbre, existe un error sistemático, producto de un uso ineficiente de la información. Bajo expectativas racionales, el error sistemático ha sido eliminado por completo, reflejando el uso eficiente de la información. El agente lo está haciendo lo mejor que puede, el error que queda es aquel que ya no puede ser minimizado y que corresponde a no tener certidumbre total.

En este último capítulo, también se muestra la relación entre el modelador y los agentes dentro del modelo. La hipótesis de expectativas racionales pone al modelador y a los agentes dentro del modelo al mismo nivel. Esto es, el modelador asume que el modelo de los agentes es tan bueno como el suyo propio, al grado de que utilizan el mismo modelo y el mejor, aquel que dicta la

teoría económica. Utilizar las otras hipótesis de expectativas equivale a asumir que los agentes dentro del modelo están utilizando un modelo inferior, y que el del modelador es mejor. Esto se muestra en el ejemplo proporcionado por Muth. Si en este ejemplo se contrastan las predicciones de los agentes dentro del modelo con la del modelo mismo, la única hipótesis en la que ambos son iguales es la de expectativas racionales. En el resto la predicción de los agentes y la del modelo difiere.

En su conjunto, este trabajo concluye que la hipótesis de expectativas racionales es la versión estocástica del supuesto de previsión perfecta. Esta es una caracterización alternativa que arroja luz sobre el significado de las expectativas racionales. Desde el punto de vista histórico ambos supuestos ocupan el mismo lugar con respecto al equilibrio. Desde el punto de vista de la teoría de la decisión ambos se refieren a qué tan correctas son las creencias del agente bajo las cuales decide. Desde el punto de vista de la macroeconomía moderna, se trata de la misma toma de decisiones bajo creencias correctas, solamente que se agregan técnicas de optimización dinámica avanzadas, pero que en esencia tratan de lo mismo, un agente racional que utiliza distribuciones de probabilidad correctas.

Bibliografía

- Anand, Paul, Prasanta Pattanaik y Clemens Puppe (2009). *The handbook of rational and social choice*. Oxford University Press.
- Arrow, Kenneth J. (1951). «Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations». *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, págs. 404-437.
- (1962). «The Economic Implications of Learning by Doing». *The Review of Economic Studies* 29 (3), págs. 155-173.
- (1966). «Exposition of the theory of choice under uncertainty». *Synthese*, págs. 253-269.
- (1990). «Economic theory and the hypothesis of rationality». *Utility and Probability*. Springer, págs. 25-37.
- (2012). *Social choice and individual values*. Vol. 12. Yale university press.
- Arrow, Kenneth J., Theodore Harris y Jacob Marschak (1951). «Optimal Inventory Policy». *Econometrica* 19 (3), págs. 250-272.
- Arrow, Kenneth J. y col. (1996). *The rational foundations of economic behaviour: proceedings of the IEA Conference held in Turin, Italy*. Palgrave Macmillan.
- Augier, Mie y James G. March, eds. (2004). *Models of a Man: Essays in Memory of Herbert A. Simon*. The MIT Press.
- Bellman, Richard (1984). *Eye Of The Hurricane: An Autobiography*. World Scientific Publishing.
- Bénassy, Jean-Pascal (2005). *The macroeconomics of imperfect competition and nonclearing markets: a dynamic general equilibrium approach*. MIT press.
- Bertsekas, Dimitri P. (2007). *Dynamic Programming and Optimal Control, Vol. I y II*. Athena Scientific.

- Blume, Lawrence E. y David Easley (2008). «Rationality». *The New Palgrave Dictionary of Economics: Volume 1 – 8*. Ed. por Steven N. Durlauf y Lawrence E. Blume. London: Palgrave Macmillan UK, págs. 5396-5405.
- Breit, William y Barry Hirsch (2005). *Lives of the laureates: Eighteen Nobel economists*. Vol. 1. The MIT Press.
- Chow, Gregory C. (1981). *Econometric Analysis by Control Methods*. Wiley.
- (1997). *Dynamic Economics: Optimization by the Lagrange Method*. Oxford University Press.
- Contreras Sosa, Hugo y Georgina López Mazón (2006). «Sobre las expectativas endógenas: el antiguo teorema de la telaraña y los nuevos libros de texto». *Economía Informa*, págs. 8-28.
- Cooley, Thomas y Stephen LeRoy (1981). «Identification and Estimation of Money Demand». *American Economic Review* 71 (5), págs. 825-44.
- Darity, William, Robert Leeson y Warren Young (2004). *Economics, Economists and Expectations: From Microfoundations to Macroapplications*. Routledge.
- Davidson, Paul (1991). «Shackle and Keynes vs Rational Expectations Theory on the Role of Time, Liquidity and Financial Markets». Palgrave Macmillan. Cap. 14, págs. 144-158.
- de Finetti, Bruno (1970). *Theory of Probability*. New York: John Wiley.
- Debreu, Gerard (1959). *Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*. 17. Yale University Press.
- Eriksson, Lina y Alan Hájek (2007). «What are degrees of belief?» *Studia Logica* 86 (2), págs. 183-213.
- Ezekiel, Mordecai (1938). «The Cobweb Theorem». *The Quarterly Journal of Economics* 52 (2), págs. 255-280.
- Galavotti, Maria Carla (2005). *Philosophical introduction to probability*. CSLI publications Stanford.
- Gilboa, Itzhak y col. (2020). «States and Contingencies: How to Understand Savage without Anyone Being Hanged». *Revue économique* 71 (2), págs. 365-385.
- Gillies, Donald (2000). *Philosophical Theories of Probability*. Routledge.
- Giocoli, Nicola (2003). *Modeling Rational Agents: From Interwar Economics to Early Modern Game Theory*. Edward Elgar Publishing.
- (2005). «Modeling rational agents the consistency view of rationality and the changing image of neoclassical economics». *Cahiers d'économie politique* (2), págs. 177-208.

- Guesnerie, Roger (2002). «Anchoring economic predictions in common knowledge». *Econometrica* 70 (2), págs. 439-480.
- Hansson, Björn A. (1981). *The Stockholm school and the development of dynamic method*.
– (2017). *The Stockholm School and the Development of Dynamic Method*. Routledge.
- Hayek, Friedrich von (1937). «Economics and Knowledge». *Economica* 4 (13), págs. 33-54.
- Hicks, John R. (1939). *Value And Capital*. Oxford University Press.
- Hirsch, Albert A. y Michael C. Lovell (1969). *Sales Anticipations And Inventory Behavior*. Wiley.
- Holt, Charles C., Franco Modigliani y John F. Muth (1956). «Derivation of a Linear Decision Rule for Production and Employment». *Management Science* 2 (2), págs. 159-177.
- Holt, Charles C., Franco Modigliani y Herbert A. Simon (1955). «A Linear Decision Rule for Production and Employment Scheduling». *Management Science* 2 (1), págs. 1-30.
- Jaffé, William (1977). «The Walras-Poincaré correspondence on the cardinal measurability of utility». *Canadian Journal of Economics*, págs. 300-307.
- Jeffrey, Richard (2004). *Subjective probability: The real thing*. Cambridge University Press.
- Kaldor, Nicholas (1934). «A Classificatory Note on the Determinateness of Equilibrium». *The Review of Economic Studies* 1 (2), págs. 122-136.
- Keynes, John Maynard (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*.
- Kolmogorov Andrei, N. (1950). *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, New York.
- Lovell, Michael C. (1986). «Tests of the Rational Expectations Hypothesis». *The American Economic Review* 76 (1), págs. 110-124.
- Lucas, Robert E (1972). «Expectations and the neutrality of money». *Journal of Economic Theory* 4 (2), págs. 103-124.
- Lucas, Robert E y Thomas J Sargent (1981). *Rational expectations and econometric practice*. Vol. 2. U of Minnesota Press.
- Mills, Edwin S. (1957). «Expectations and Undesired Inventory». *Management Science* 4 (1), págs. 105-109.
- Mises, R von (1939). «Probability, statistics and truth.»

- Modigliani, F. y H. M. Weingartner (1958). «Forecasting Uses of Anticipatory Data on Investment and Sales». *Quarterly Journal of Economics* 72 (1), págs. 23-54.
- Modigliani, Franco. y Kalman J. Cohen (1961). *The role of anticipations and plans in economic behavior and their use in economic analysis and forecasting*. University of Illinois.
- Muth, John F. (1960). «Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts». *Journal of the American Statistical Association* 55 (3), págs. 299-306.
- (1961). «Rational Expectations and the Theory of Price Movements». *Econometrica* 29 (3), págs. 315-335.
- Nau, Robert F (2001). «De Finetti was right: probability does not exist». *Theory and Decision* 51 (2), págs. 89-124.
- Nerlove, Marc (1958). «Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena». *The Quarterly Journal of Economics* 72 (2), págs. 227-240.
- Nerlove, Marc y David A. Bessler (2001). «Expectations, information and dynamics». *Handbook of Agricultural Economics*. Vol. 1. Elsevier, págs. 155-206.
- Ohlin, Bertil (1937). «Some Notes on the Stockholm Theory of Savings and Investments II». *The Economic Journal* 47 (185), pág. 221.
- Phelps, Edmund S. (1991). «Equilibrium: an Expectational Concept». *The World of Economics*. Ed. por John Eatwell, Murray Milgate y Peter Newman. Palgrave Macmillan UK, págs. 224-227.
- Prescott, Edward C. (1977). «Should control theory be used for economic stabilization?» *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*. Vol. 7. Elsevier, págs. 13-38.
- Rancan, Antonella (2013). «Modigliani's and Simon's Early Contributions to Uncertainty (1952–61)». *History of Political Economy* 45 (1), págs. 1-38.
- Sargent, Thomas J (2018). «Rational Expectations». *The New Palgrave Dictionary of Economics*. London: Palgrave Macmillan UK, págs. 11252-11258.
- Sen, Amartya (2017). *Collective choice and social welfare*. Harvard University Press.
- Sent, Esther-Mirjam (1997). «Engineering Dynamic Economics». *History of Political Economy* 29 (suplemento), págs. 41-62.
- Simon, Herbert A. (1952). «On the Application of Servomechanism Theory in the Study of Production Control». *Econometrica* 20 (2), págs. 247-268.

- (1955). «Some Properties of Optimal Linear Filters». *Quarterly of Applied Mathematics* 12 (4), págs. 438-440.
 - (1956). «Dynamic Programming Under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function». *Econometrica* 24 (1), págs. 74-81.
 - (1990). «Bounded Rationality». *Utility and Probability*. Ed. por John Eatwell, Murray Milgate y Peter Newman. Palgrave Macmillan UK, págs. 15-18.
 - (1996). *Models of My Life*. MIT Press.
- Singhal, Jaya y Kalyan Singhal (2007). «Holt, Modigliani, Muth, and Simon's work and its role in the renaissance and evolution of operations management». *Journal of Operations Management* 25 (2), págs. 300-309.
- Tarski, Alfred y Jan Tarski (1994). *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*. 24. Oxford University Press on Demand.
- Van Witteloostuijn, A y J. A. H. Maks (1990). «Walras on temporary equilibrium and dynamics». *History of Political Economy* 22 (2), págs. 223-237.
- Walras, Leon (1954). «Elements of Pure Economics, trans». *W. Jaffe. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin*.
- Winters, Peter R. (1960). «Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages». *Management Science* 6 (3), págs. 324-342.
- Wood, John H. (1965). «Linear Decision Rules for Economic Stabilization and Growth: Comment». *The Quarterly Journal of Economics* 79 (2), págs. 310-316.
- Young, Warren y William Darity (2001). «The Early History of Rational and Implicit Expectations». *History of Political Economy* 33 (4), págs. 773-813.
- Zappia, Carlo (2001). «Equilibrium and Disequilibrium Dynamics in the 1930s». *Journal of the History of Economic Thought* 23 (1), págs. 55-75.