



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA DE QUARKS Y GLUONES EN MODELOS  
NO-PERTURBATIVOS A TRAVÉS DE UNA DISTRIBUCIÓN  
DE PARTONES SUBDOMINANTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

SALVADOR CALDERÓN ACOSTA

TUTORA:

DRA. AURORE MARIE PASCALE NICOLE COURTOY

Ciudad de México, 2022





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A mis padres y hermanos, que me enseñaron todo lo que sé de ética, moral y trabajo duro.  
A mis compañeros de la Preparatoria 9 y la Facultad de Ingeniería, quienes allanaron el camino para llegar a esta carrera.*

*A mis alumnos quienes me enseñaron sobre mí más de lo que yo les enseñé a ellos.*

*A mis amigos de la Facultad de Ciencias que llevo en mi corazón, por su aprecio, cariño y experiencias vividas.*

*A la Dra. Courtoy por su guía, su paciencia, por darme la oportunidad de trabajar y aprender de ella y su entrega para tomar mi espíritu no direccionado y convertirlo en este trabajo.*

*A la DGAPA por la beca PAPIIT/DGAPA IA101720 IN111222 y Ciencia de Frontera-2019 y a Fondos FORDECYT-PRONACES, CONACyT 51244 por el invaluable apoyo brindado.*

*A Kelly I. S. V por ser mi más grande diferencia positiva, por devolverme las ganas de ser mejor y por permanecer a mi lado durante tanto tiempo, otorgándome un apoyo invaluable.*



# Resumen

La estructura de los hadrones ha sido objeto de intenso estudio desde hace décadas. Una de las técnicas más importantes para esto es la *dispersión profundamente inelástica* (DIS) que consiste en analizar la dispersión resultante de la colisión inelástica de leptones contra hadrones. Con ella fue posible confirmar que los hadrones están compuestos de quarks. La manera en que el momento transferido durante estas colisiones se distribuye en los constituyentes del hadrón (llamados colectivamente partones) determina la dinámica entre los quarks y gluones y, a su vez, arroja información útil sobre la estructura hadrónica.

Por lo tanto, es de interés entender la dinámica de los quarks y los gluones. Para ello, como piedra angular de este trabajo, se definen a las funciones de distribución de partones (PDF), un grupo de funciones que representan la probabilidad de que un partón dado se lleve cierta fracción  $x$  del momento total del hadrón. Sin embargo, para tener una descripción completa, estas funciones deben ser capaces de funcionar en regímenes físicos donde la teoría de perturbaciones de la cromodinámica cuántica deja de ser válida.

Este trabajo no sólo presenta a las funciones PDF, sino explica su importancia en el contexto del DIS. De entre todas las PDF existentes, se elige una, la PDF subdominante  $e^q(x)$ , por su estrecha relación con la interacción de quarks y gluones y porque su orden de contribución al DIS, como su nombre lo indica, es menos dominante, por lo tanto, involucra efectos que en el orden dominante quedan desapercibidos.

El objetivo de esta tesis es hacer un primer acercamiento a la dinámica de quarks y gluones a través de comparar dos enfoques físicos diferentes. El primero utiliza ecuaciones de movimiento para el caso libre en cromodinámica cuántica que relacionan entre sí a diferentes PDF mientras que el segundo está basado en un modelo no perturbativo conocido como *MIT bag*, el cual visualiza a los quarks libres y sin masa confinados en una cavidad esférica cuyas condiciones de contorno mimetizan el mecanismo de confinamiento.

Esta función  $e^q(x)$  es calculada utilizando los dos enfoques anteriores y la discrepancia entre ellos se muestra explícitamente al comparar los valores numéricos de los momentos de Mellin, transformadas integrales de las PDF, encontrando que, al introducir las condiciones de contorno en el MIT bag, la contribución de la dinámica de quarks y gluones en la distribución de momento transferido cobra importancia. De esta forma, se revela que el papel de dicha dinámica es relevante en la estructura de los hadrones.

Como adición se compara la función  $e^q(x)$  calculada con el MIT bag con una extracción de  $e^q(x)$  a partir de experimentos de una colaboración de CLAS a fin de validar el comportamiento de esta PDF según el modelo no perturbativo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El contexto tras la estructura hadrónica</b>	<b>5</b>
2.1. Ecuación y campo de Dirac . . . . .	5
2.2. Dispersión profundamente inelástica . . . . .	7
2.3. Tensor leptónico y hadrónico . . . . .	9
2.4. Funciones de distribución de partones . . . . .	13
2.5. Coordenadas como de luz . . . . .	16
2.6. Reglas de suma . . . . .	18
<b>3. Modelo MIT bag y PDFs</b>	<b>21</b>
3.1. Modelos de quarks con interacción gluónica . . . . .	21
3.2. Descripción cuantitativa del modelo . . . . .	21
3.3. PDFs en el MIT bag . . . . .	22
3.4. Dimensiones en los campos, PDF's y twist . . . . .	28
<b>4. Dinámica de quarks y gluones</b>	<b>31</b>
4.1. Ecuaciones de movimiento en modelos de quarks libres . . . . .	31
4.2. Ecuaciones de movimiento de quarks con interacción . . . . .	33
4.3. La función escalar y su papel en la dinámica . . . . .	34
4.4. Extracción de la función escalar . . . . .	36
<b>5. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>A. Coeficientes de sabor y spin</b>	<b>43</b>
<b>B. Cálculos útiles para las ecuaciones de movimiento</b>	<b>47</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Los quarks son partículas elementales, fermiones que interactúan fuertemente, es decir, son capaces de sentir la fuerza de interacción nuclear fuerte. También interactúan débilmente y electromagnéticamente. Se combinan para formar partículas compuestas llamadas hadrones, que pueden clasificarse a su vez en bariones, cuando son tres quarks de valencia, y mesones, para una pareja quark-antiquark. Los protones y neutrones son bariones, por lo tanto, los quarks son constituyentes importantes de la materia. Estos poseen masa, carga eléctrica y un número cuántico conocido como sabor para distinguir los diferentes tipos de quarks según su forma de interactuar con la fuerza débil. Son seis, a saber: *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* y *top*.

La interacción nuclear fuerte es la fuerza fundamental responsable de mantener unidos a los nucleones en el núcleo atómico. Esta es explicada por la cromodinámica cuántica (QCD), una teoría cuántica de campos. Los fermiones de la teoría son los quarks y los bosones mediadores son los gluones.

La carga asociada a la interacción fuerte se denomina *carga de color*, un número cuántico que permite distinguir a los quarks y los gluones y les permiten coexistir dentro de los hadrones sin violar el principio de exclusión de Pauli. Los valores posibles del color son *rojo*, *verde* y *azul*, que no tienen nada que ver con los colores visuales, sino que funcionan como analogía a la teoría del color. Un hadrón sólo podrá formarse si sus combinaciones de quarks contienen a todos los colores en igual proporción para compensarse entre sí o si cada quark de cierto color está emparejado con un antiquark del anticolor correspondiente. A la carga de color neta para un hadrón bajo las condiciones anteriores se le dice *neutra* o *blanca*, ya que ningún color predomina y todos se compensan entre sí. Tanto quarks como gluones poseen carga de color, permitiendo a estos últimos interactuar entre sí, a diferencia de los fotones, lo que le confiere a la interacción fuerte características únicas.

Las clasificaciones, condiciones y descripciones anteriores, la asignación de sus números cuánticos, la predicción de qué combinaciones de quarks producen determinados hadrones y la existencia de la carga de color están contenidas en el *modelo de quarks* propuesto por Murray Gell-Mann y George Zweig [1].

En esta teoría se puede utilizar teoría de perturbaciones para realizar ciertos cálculos, igual que en la electrodinámica cuántica (QED), pero este enfoque sólo funciona cuando el acoplamiento asociado a la interacción fuerte es pequeño. En el régimen perturbativo, la interacción fuerte que sienten los quarks dentro de los hadrones es baja, acercándose asintóticamente a cero, a efectos prácticos, tienen plena libertad de movimiento. A esto se le conoce como *libertad asin-*

*tónica*. Cuando los quarks son separados, el acoplamiento fuerte aumenta. Una propiedad muy importante de la interacción fuerte, el confinamiento, entra en un régimen de alto acoplamiento, pues es el mecanismo que impide a los quarks separarse y quedar libres. La QCD perturbativa, en este punto, queda rebasada [2].

Usualmente se dice que los bariones y mesones están *formados* por tres y dos quarks respectivamente. Esto no es estrictamente verdad, ya que dichos quarks no son lo único que se encuentra dentro de los hadrones y se pierde mucha información útil sobre su estructura. Prueba de ello es que la masa combinada de estos quarks no cubren el valor total de la masa de sus respectivos hadrones.

Los dos o tres quarks que determinan los números cuánticos de los hadrones se denominan *quarks de valencia*, estos contribuyen a los números cuánticos generales del hadrón como la carga eléctrica o el spin. El contenido faltante consiste en un “mar”, pares virtuales de quarks-antiquarks que se crean y aniquilan y gluones que interactúan con todos los quarks presentes. Todo esto debe tenerse en cuenta a fin de tener una descripción de la estructura hadrónica completa. En un régimen de baja energía es posible describir a los hadrones como la unión de quarks constituyentes, quarks de valencia “revestidos” por una nube de quarks y gluones virtuales la cual les confiere una masa efectiva.

El punto de partida es el *modelo de partones*, propuesto por Richard Feynman en 1969. En él, todo hadrón puede ser considerado como una composición de partículas puntuales, llamadas partones. Una de las técnicas para estudiar a los partones es la *dispersión profundamente inelástica* (DIS), consistente en hacer colisionar leptones contra hadrones a fin de provocar que los partones cargados provoquen dispersión. El análisis de ésta permite estudiar la subestructura del hadrón. Con esta técnica, a bajas energías se resuelven los quarks de valencia, y a muy altas energías, se observa al mar de quarks. Gracias a estos experimentos de dispersión fue posible validar al modelo de quarks, confirmar la existencia de estas partículas y su papel en la estructura de los hadrones.

Es, por tanto, de interés conocer cómo la cantidad de momento transferido se distribuye en cada partón en los eventos DIS y cómo esto arroja luz sobre la dinámica de los quarks y gluones, que a su vez, determinará la estructura de los hadrones. Como dicho análisis debe ser consistente y funcionar a cualquier escala, no sólo la de la QCD perturbativa, la teoría utilizada y sus herramientas deben ser capaces de ir más allá de la QCD perturbativa y adentrarse región de la QCD no perturbativa.

Entre los componentes del marco teórico que busca describir los fenómenos no perturbativos se encuentran las funciones de distribución de partones (PDF) que codifican la información sobre la estructura interna de los hadrones cuantificando la probabilidad de encontrar un partón con una fracción específica del momento del hadrón. Estas funciones pueden ser calculadas a partir de modelos para el hadrón que amplíen el rango de análisis a donde la QCD perturbativa no llega. El reto radica en que los modelos que sirvan como soporte para estos cálculos sean capaces de describir los fenómenos no perturbativos y, a su vez, ser consistentes con la QCD perturbativa. En virtud de lo anterior, diversos grupos de físicos han propuesto diversos modelos y técnicas para explicar satisfactoriamente al protón, a fin de revelar la naturaleza exacta de su estructura.

En esta tesis el modelo elegido será el del MIT bag [3], donde los quarks libres están contenidos en una cavidad esférica cuyas condiciones de frontera reproducen el confinamiento. La ventaja de este modelo radica en que introduce el mecanismo de confinamiento y provee de

funciones de onda para los quarks dentro del hadrón, con las cuales es posible calcular las PDF.

En el Capítulo 2 se introducirán los conceptos base para la descripción de los quarks y se explicarán los detalles de la dispersión profundamente inelástica. Se definirán las funciones de distribución de partones y se presentarán las coordenadas cono de luz, las cuales permitirán fijar el marco de referencia de los eventos DIS y simplificar el análisis de la cinemática.

En el Capítulo 3 se presentará el modelo del MIT bag y el cálculo de algunas funciones de distribución a partir de las condiciones del modelo y se clasificarán según su dominancia, es decir, su contribución en los procesos inelásticos.

En el capítulo 4 se profundizará la función de distribución de partones subdominante denominada  $e^q(x)$  y, utilizando la ecuación de Dirac sin interacciones, se encontrarán ecuaciones de movimiento para los quarks. Se compararán los resultados de las ecuaciones del movimiento con los del MIT bag para revelar el papel de la función  $e^q(x)$  en la dinámica de quarks y gluones. Por último, se presentará una extracción de  $e^q(x)$  a partir de datos de la colaboración CLAS cuya interpretación esclarecerá aún más la importancia de esta función. Los detalles de determinados cálculos se mostrarán en los apéndices.

Finalmente, en las conclusiones del capítulo 5 se hace una síntesis y una reflexión sobre todo lo realizado de cara a desentrañar los misterios detrás de la interacción fuerte y lo que significa esta tesis como acercamiento.

*Nota: En esta tesis se utilizará la palabra “momento”, resultado de la traducción directa de “momentum”, para referirse al ímpetu o cantidad de movimiento, excepto para el término “momentos de Mellin”; en este caso, “momento” se refiere al momento estadístico. También se ha preferido utilizar la palabra “spin” para el momento angular intrínseco en vez de la castellanización “espín”.*



# Capítulo 2

## El contexto tras la estructura hadrónica

En este capítulo se explica la teoría y los conceptos que forman la base para comprender a detalle la información subyacente involucrada en la estructura de los hadrones.

En la sección 2.1 se muestra la ecuación y el campo de Dirac que rigen el comportamiento de las partículas elementales de spin  $1/2$ , como los quarks.

Las secciones 2.2 y 2.3 introducen la dispersión profundamente inelástica y los operadores necesarios para describirla, a saber, los tensores leptónico y hadrónico.

La sección 2.4 contiene al objeto clave para el trabajo de esta tesis, la función de distribución de partones.

En la sección 2.5 se explica a detalle el marco de referencia de las coordenadas como de luz que simplifica cálculos y permite describir e interpretar con más facilidad la física implicada.

Finalmente, la sección 2.6 fija los números cuánticos del protón a partir de las funciones de distribución y se definen los momentos de Mellin, un conjunto de transformadas que son el núcleo de este primer acercamiento a la dinámica de quarks y gluones.

### 2.1. Ecuación y campo de Dirac

Aunque la ecuación de Schrödinger es muy útil para la mecánica cuántica, no toma en cuenta los efectos de la relatividad especial (utiliza la relación clásica  $E = \frac{p^2}{2m} + V$  entre energía y momento). El primer intento de hacer una extensión al caso relativista fue la ecuación de Klein-Gordon, propuesta por Schrödinger, pero esta presentaba múltiples problemas (como probabilidades y estados de energía negativos).

Dirac observó que la raíz de estas dificultades es que la ecuación de Schrödinger no trata igual al espacio y al tiempo, un requisito relativista. La derivada espacial es de segundo orden, la temporal es de primer orden. La expresión buscada debe ser relativista, con las derivadas al mismo orden y es la conocida Ecuación de Dirac:

$$(i\rlap{-}/\partial - m)\psi = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\rlap{-}/\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$  y  $\gamma^\mu$  son las matrices gamma de Dirac que cumplen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

con  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . La representación de Dirac provee las siguientes formas explícitas de las matrices gamma:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si  $\sigma^k$  (con  $k = 1, 2, 3$ ) es alguna de las matrices de Pauli, entonces

$$\gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Al separar a la función de onda (que ahora es un objeto de 4 componentes llamado biespinor) como  $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ , se obtienen ecuaciones desacopladas para  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , a saber

$$(p_0 - m)\psi_1 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\psi_2 = 0 \quad (2.5)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\psi_1 - (p_0 + m)\psi_2 = 0 \quad (2.6)$$

donde  $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ . Reemplazando  $\psi_1$  en (2.6) a partir de (2.5) y comparando los coeficientes de  $\psi_2$  entre sí, se puede hallar la siguiente relación de invarianza:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 &= p_0^2 - m^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 &= E^2 - m^2 \\ \Leftrightarrow E^2 &= |\vec{p}|^2 + m^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Al analizar la forma de la expresión para la energía, se infiere que se permiten soluciones positivas y negativas, correspondientes a partículas y antipartículas, las cuales tendrán asociadas un tipo diferente de espinor

$$\text{Partículas: } u(p)e^{-ip \cdot x} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi \end{bmatrix} e^{-ip \cdot x} \quad (2.8)$$

$$\text{Antipartículas: } v(p)e^{ip \cdot x} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \eta \\ \eta \end{bmatrix} e^{ip \cdot x} \quad (2.9)$$

con  $\chi$  y  $\eta$  las bases de los espinores de la partícula y la antipartícula [4]

$$|\uparrow\rangle_{\text{partícula}} = \chi_{\uparrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow\rangle_{\text{partícula}} = \chi_{\downarrow} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$|\uparrow\rangle_{\text{antipartícula}} = \eta_{\uparrow} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow\rangle_{\text{antipartícula}} = \eta_{\downarrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Hay que aclarar que el spin físico para las antipartículas está invertido con respecto al dado por los eigenvalores al aplicar el operador  $\hat{S}_z$  a  $\eta$ . Para tener invariantes de Lorentz, se define el *adjunto de un espinor* como

$$\bar{u}(p) \equiv u^\dagger(p)\gamma^0. \quad (2.12)$$

Su normalización es:

$$\bar{u}_s^\dagger(p)u_r(p) = 2m\chi_s^\dagger\chi_r = 2m\delta_{sr}, \quad (2.13)$$

$$\bar{v}_s^\dagger(p)v_r(p) = -2m\eta_s^\dagger\eta_r = -2m\delta_{sr}, \quad (2.14)$$

donde  $s$  y  $r$  son los índices que indican algún estado base de spin en particular [4]. Ahora bien, para el campo cuántico de Dirac su lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi, \quad (2.15)$$

representa el punto de partida vital para la cuantización. Con el proceso de cuantización canónica es posible encontrar los operadores del campo de Dirac, que describirá el comportamiento de fermiones de spin 1/2. Así, la densidad hamiltoniana corresponde a

$$\mathcal{H} = \hat{\psi}^\dagger i\partial_0 \hat{\psi} \quad (2.16)$$

donde los operadores de campo satisfacen

$$\{\hat{\psi}_s(t, \vec{x}), \hat{\psi}_r^\dagger(t, \vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{sr}. \quad (2.17)$$

El operador de campo  $\hat{\psi}$  ha quedado cuantizado. Así que su correspondiente desarrollo explícito de modos es el siguiente

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left[ u^s(p)\hat{a}_{sp}e^{-ip\cdot x} + v^s(p)\hat{b}_{sp}^\dagger e^{ip\cdot x} \right], \quad (2.18)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left[ \bar{u}^s(p)\hat{a}_{sp}^\dagger e^{ip\cdot x} + \bar{v}^s(p)\hat{b}_{sp}e^{-ip\cdot x} \right], \quad (2.19)$$

donde los operadores de creación y aniquilación fermiónicos para partículas y antipartículas  $\hat{a}_p$  y  $\hat{b}_p$  deben respetar a su vez los siguientes anticonmutadores [4]

$$\{\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.20)$$

$$\{\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q^\dagger\} = \{\hat{a}_p, \hat{a}_q\} = 0. \quad (2.21)$$

## 2.2. Dispersión profundamente inelástica

La ecuación de Dirac y su campo cuántico asociado describen a los fermiones de spin 1/2 y esta descripción es adecuada para analizar colisiones entre leptones y hadrones, ya que, tanto los primeros como los quarks responsables de la dispersión subsecuente son precisamente fermiones de spin 1/2. Ahora se presentará el contexto de dichos eventos de colisión y para ello se

utilizarán conceptos presentados en la sección anterior: los espinores (2.8), (2.9) y las matrices gamma (2.3).

La dispersión profundamente inelástica (por las siglas en inglés para Deep Inelastic Scattering) es uno de los procesos utilizados para analizar las partículas que componen a los hadrones (en particular los bariones, como los protones y los neutrones). Se utilizan como proyectiles partículas cargadas, como electrones y muones, y como blancos dispersores a los hadrones que se pretende analizar. Al torrente de proyectiles disparados se le conoce como *haz*.

El descubrimiento de que el átomo estaba constituido por partículas más pequeñas se dió a través de experimentos de dispersión de Rutherford. Se dispararon partículas alfa a una lámina de oro y se midió el patrón de dispersión. La observación de partículas siendo desviadas en grandes ángulos sugirió que, en el átomo había “centros de carga” que causaban las deflecciones. Esto llevó a la conclusión que el átomo tiene subestructura. Para explorar a los bariones, se hicieron experimentos similares a los de Rutherford, disparando electrones contra hadrones. El análisis del patrón de dispersión era similar al de Rutherford, había partículas deflectadas en ángulos grandes. Por consiguiente, los hadrones debían tener subestructura. Esto proporcionó la primera evidencia convincente de los quarks, que hasta ese momento sólo eran parte del *modelo de quarks* propuesto por Murray Gell-Mann y George Zweig en 1964 para asignar números cuánticos a los hadrones y clasificarlos. El adjetivo “profundo” se utiliza porque a altas energías, la longitud de onda asociada al leptón proyectil es pequeña respecto al tamaño del protón pudiendo resolver detalles más pequeños del protón. La colisión es inelástica porque el choque produce nuevas partículas. En este proceso, cuyo esquema está en la Figura 2.1, un leptón  $L$  de alta energía es dispersado por el hadrón  $H$  de masa  $M$ , transfiriendo grandes cantidades de momento.  $L$  tiene inicialmente momento  $k$  y energía  $E$ .  $H$  tiene un momento inicial  $P$ . La interacción es mediada por el intercambio de un fotón virtual de momento  $q$  emitido por  $L$ , que es absorbido por  $H$ , generando un estado final  $X$ .  $L$  saldrá dispersado con momento  $k'$ , energía  $E'$  y en un ángulo  $\theta$  respecto a su trayectoria original. Se puede interpretar al estado final global como la suma sobre todos los posibles estados finales  $X$  tras la colisión.

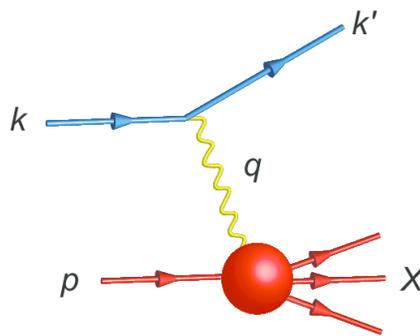


Figura 2.1: Diagrama ilustrativo para la DIS [5].

La dispersión será elástica si  $X = H$  (es decir, si el hadrón queda intacto), de lo contrario, será inelástica. Ahora, se definen los siguientes invariantes en el marco de referencia en reposo

respecto al hadrón objetivo

$$q^2 \equiv (k - k')^2 = -4EE' \text{sen}^2(\theta/2) = -Q^2 < 0 \quad (2.22)$$

$$\nu \equiv \frac{P \cdot q}{M} = E - E'. \quad (2.23)$$

Los experimentos DIS buscan revelar la estructura del hadrón. La interpretación del comportamiento hadrónico a diferentes escalas de resolución indica que a altas energías, la resolución del hadrón incluye gran cantidad de grados de libertad. Para valores moderados de  $Q^2$ , el hadrón tiene a los tres quarks que intervienen en la DIS como *quarks de valencia* y a un mar de pares quark-antiquark y gluones, todos virtuales. Se requiere entonces, para estudiar a detalle la estructura hadrónica, que el momento transferido  $q$ , y por ende, el invariante  $Q^2$ , tengan una magnitud elevada. Es decir, nos interesa el límite cuando  $Q^2 \rightarrow \infty$  y  $\nu \rightarrow \infty$ . Al régimen definido por estas condiciones se le conoce como *régimen de Bjorken* [6].

Además de los invariantes anteriores las magnitudes asociadas a la descripción de la amplitud de dispersión asociada suelen expresarse en términos del *parámetro de Bjorken*,  $x$ , definido como

$$x \equiv \frac{Q^2}{2M\nu}; \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.24)$$

En el régimen de Bjorken, aunque  $Q^2$  y  $\nu$  tienden a  $\infty$ , su cociente debe ser un valor finito para que  $x$  esté bien definido. Es interesante resaltar que en el modelo de partones (en el que los hadrones se modelan en términos de sus constituyentes o quarks pensados como partículas elementales libres) el parámetro de Bjorken está asociado a la probabilidad de encontrar un partón con una fracción  $x$  del momento total del hadrón, cosa que se demostrará más adelante. Por cierto, cuando  $x = 1$ , la dispersión es elástica.

## 2.3. Tensor leptónico y hadrónico

Se necesita una expresión para la sección eficaz de la DIS introducida en la sección anterior. El diagrama de handbag (Figura 2.2) muestra que el proceso está determinado por dos partes. La leptónica ya es conocida, pues sólo requiere de la QED para su descripción adecuada, y la hadrónica, que involucra situaciones desconocidas en la estructura del hadrón.

Necesitamos dos tensores para representar ambos aspectos de la sección eficaz. El primero de ellos, el *tensor leptónico*, denotado por  $L_{\mu\nu}$ , codifica la interacción electromagnética asociada a la emisión del fotón virtual. La corriente leptónica

$$j_\mu(0) = \langle k', r | \hat{j}_\mu(0) | k, s \rangle = -e\bar{u}(k', r)\gamma_\mu u(k, s) \quad (2.25)$$

se calcula mediante QED y es conocida [7]. En ella,  $\hat{j}_\mu$  es el operador de corriente.

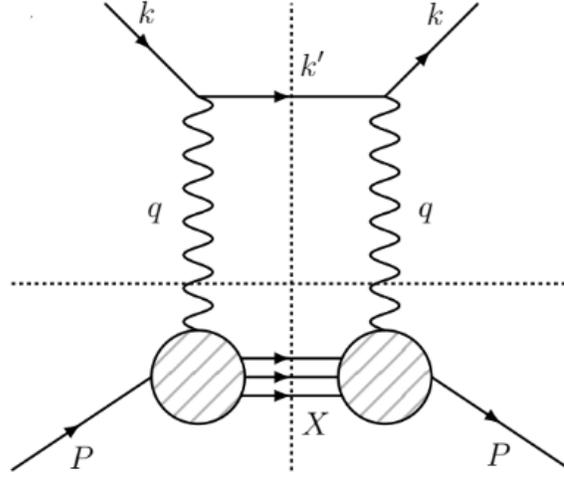


Figura 2.2: Diagrama de handbag. La línea punteada vertical indentifica al lado derecho como el complejo conjugado del izquierdo, por lo que el diagrama representa al cuadrado de la amplitud [8]. La línea horizontal separa la parte leptónica del proceso (superior) de la hadrónica (inferior).

Este tensor leptónico se define como [6]

$$L_{\mu\nu}(k, k') = \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} [\bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s)] [\bar{u}(k, s) \gamma_\nu u(k', s')]. \quad (2.26)$$

El *tensor hadrónico* contiene la información asociada a la interacción entre el fotón virtual y el estado hadrónico inicial [1]. También hay una corriente electromagnética para la parte hadrónica, dada por  $J_\mu(0) = \langle X | \hat{J}_\mu(0) | P, s \rangle$ , pero no puede ser definida porque se desconoce como describir  $|P, s\rangle$ . Entonces, el tensor hadrónico sólo puede dejarse expresado en términos de bras y kets del siguiente modo

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(P + q - p_X) \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle \quad (2.27)$$

donde  $s$  es el spin inicial del hadrón  $H$  y  $p_X$  es el momento de un estado particular  $X$ . Ahora, reescribiendo la delta como una integral exponencial y utilizando la traslación

$$e^{i\xi \cdot (P - p_X)} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(0) | X \rangle = \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) | X \rangle \quad (2.28)$$

el tensor hadrónico se reescribe como

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4\xi e^{i\xi \cdot (P+q-p_X)} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \int \sum_X d^4\xi e^{i\xi \cdot q} e^{i\xi \cdot (P-p_X)} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \int \sum_X d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) | X \rangle \langle X | \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) \sum_X | X \rangle \langle X | \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Entonces

$$4\pi W_{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle. \tag{2.30}$$

Sin embargo existe una forma mejor de escribir al tensor hadrónico que es muy útil para determinar la región física donde la DIS es dominante. Se tomará (2.30) y se invertirá el orden del producto de operadores de corriente. Esto puede hacerse porque los operadores de corriente están bien definidos.

$$\begin{aligned}
&\int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\nu(0) \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) | P, s \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \int \sum_X d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\nu(\xi) | X \rangle \langle X | \hat{J}_\mu^\dagger(0) | P, s \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \int \sum_X d^4\xi e^{i\xi \cdot q} e^{-(i\xi \cdot P - p_X)} \langle P, s | \hat{J}_\nu(0) | X \rangle \langle X | \hat{J}_\mu^\dagger(0) | P, s \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(-P + q + p_X) \langle P, s | \hat{J}_\nu(0) | X \rangle \langle X | \hat{J}_\mu^\dagger(0) | P, s \rangle. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Para que la delta de Dirac no se anule, debería cumplirse que  $-P + q + p_X = 0$ . Se sabe que la colisión es inelástica, es decir  $q^0 = E - E' > 0$ ; también se supone al hadrón  $H$  en reposo antes de la colisión, es decir  $P^0 = M$ . Desarrollando la condición para la delta con las componentes temporales de los vectores  $P$ ,  $q$  y  $p_X$  y definiendo  $E_X$  como la energía del estado  $X$ :

$$\begin{aligned}
0 &= -P^0 + q^0 + p_X^0 \\
&= -M + E - E' + E_X \\
\therefore E - E' &= M - E_X > 0. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para que la delta de Dirac no sea cero,  $E_X < M$ , pero la masa invariante (y por ende la energía) del estado  $X$  es mayor o igual que la del hadrón  $H$ , o sea  $E_X \geq M$  [9]. Esto provoca que jamás se cumpla la condición que impide que la delta se anule, por lo tanto

$$\int d^4\xi e^{i\xi \cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\nu(0) \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) | P, s \rangle = 0. \tag{2.33}$$

Y de esta forma

$$\begin{aligned}
4\pi W_{\mu\nu} &= \int d^4\xi e^{i\xi\cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi\cdot q} \langle P, s | \hat{J}_\mu^\dagger(\xi) \hat{J}_\nu(0) | P, s \rangle - 0 \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi\cdot q} \langle P, s | [\hat{J}_\mu^\dagger(\xi) \hat{J}_\nu(0) - \hat{J}_\nu(0) \hat{J}_\mu^\dagger(\xi)] | P, s \rangle \\
&= \int d^4\xi e^{i\xi\cdot q} \langle P, s | [\hat{J}_\mu^\dagger(\xi), \hat{J}_\nu(0)] | P, s \rangle.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

La sección eficaz depende del módulo cuadrado de la amplitud, la cual está en términos de las corrientes involucradas en el proceso. El módulo cuadrado requiere al complejo conjugado de la amplitud, y por ende, los complejos conjugados de las corrientes. Como cada una es un 4-vector, la sección eficaz dependerá de dos corrientes leptónicas y dos hadrónicas unidas por un producto tensorial, dotando así de los objetos que describen la dinámica leptónica y hadrónica de su naturaleza como tensores de rango 2 y justificando la forma de las definiciones de las ecuaciones (2.26) y (2.27).

Como la sección eficaz es un escalar, ambos tensores deben tener sus índices contraídos. Así, la sección eficaz será proporcional a esta contracción. Si bien, en general, las propiedades de los estados hadrónicos no pueden estudiarse en detalle analíticamente en interacciones fuertes, hay consideraciones basadas principalmente en las simetrías del problema que permiten imponer condiciones sobre el tensor hadrónico [2]

1. Las interacciones fuertes son invariantes ante cambios de paridad.
2. Las interacciones fuertes son invariantes ante inversión de tiempo.
3. Intercambiar sus índices arroja el complejo conjugado del tensor original, porque invierte la dirección de las corrientes hadrónicas, lo que equivale a aplicar el operador daga.
4. Intercambiar los índices del tensor y cambiar de signo el momento  $q$  es equivalente a intercambiar los fotones entrantes por salientes, de nuevo, hay una inversión en las direcciones del proceso.
5. *Identidad de Ward*: Por la conservación de la 4-corriente electromagnética, se debe cumplir que  $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$ .

Aunque no es posible obtener una expresión explícita para  $W_{\mu\nu}$ , como sí se puede hacer para  $L_{\mu\nu}$ , se puede recurrir a la alternativa de reescribir  $W_{\mu\nu}$  como la suma de cuatro tensores acompañados por funciones escalares  $W_1, W_2, G_1$  y  $G_2$ . Para justificar este camino, primero se deben explicar los factores de forma y las funciones de estructura.

Al realizar experimentos de dispersión elástica con objetos que poseen estructura, el patrón resultante de dispersión está compuesto de dos factores: uno es la distribución correspondiente a la dispersión provocada por una partícula puntual y otro, denominado *factor de forma*, característico de la extensión espacial de la densidad de carga del blanco dispersor.

Cuando se busca añadir la invarianza de Lorentz y la conservación de la corriente al factor de forma, es posible mostrar que los operadores de corriente  $\hat{J}_\mu$  pueden descomponerse como

una suma de operadores cuyos coeficientes son estos factores de forma. Entonces, las corrientes hadrónicas también pueden escribirse como una descomposición. Y así, el tensor hadrónico queda en términos de cuatro funciones escalares que tienen una acción similar a los factores de forma del caso elástico. Para el caso inelástico, a estas funciones se les denomina *funciones de estructura* que únicamente pueden depender de  $\nu$  y de  $Q^2$ , dos invariantes. La razón por la que dependen de  $\nu$ , definido en (2.23), es que, en dispersión inelástica, la masa del estado final ya no es la del hadrón, sino la del estado  $X$ . Estas funciones de estructura se pueden agrupar en dos grupos. El de las funciones  $W_1$  y  $W_2$  que contienen las características de sus homólogos leptónicos (simetría e independencia del spin) y el de las funciones antisimétricas  $G_1$  y  $G_2$  que sí involucran al spin.

Sin embargo, cuando es de interés que la sección eficaz no esté polarizada, es decir, que no dependa explícitamente del spin, es suficiente expresar al tensor hadrónico únicamente con el término simétrico. Así que  $W_{\mu\nu}$  puede expresarse en términos de los dos tensores simétricos, por lo que, basta que encontrar  $W_1$  y  $W_2$ .

La razón por la que las funciones de estructura vienen en pares es la siguiente. En la dispersión entre partículas puntuales cargadas de spin 1/2, la carga y el momento magnético son los responsables de dicha dispersión. Los quarks son puntuales, cargados y de spin 1/2, así que en los eventos DIS también se debe tomar en cuenta efectos de carga y momento magnético, pero hay más. Como el protón no es puntual, los efectos de su estructura influirán en la desviación del leptón proyectil y modificarán la carga y el momento magnético. Para tomar en cuenta estos dos factores, el tensor hadrónico no polarizado se descompone en dos términos.

Al contraer estos dos tensores para describir la dispersión de un leptón con un hadrón, la sección eficaz será proporcional a esta contracción, es decir,

$$\frac{d\sigma}{d\nu dQ^2} \propto L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Esto último implica que la sección eficaz, a su vez, depende de las funciones de estructura del tensor hadrónico [10].

## 2.4. Funciones de distribución de partones

Si un protón tiene tres quarks de valencia, se debería poder resolverlos con un fotón virtual de longitud de onda pequeña ( $-q^2$  grande, suficiente para la resolución deseada). Los detalles de este proceso pueden analizarse con las funciones de estructura presentadas en la sección anterior. Y es que, con valores elevados de  $Q^2 = -q^2$ , en vez de analizar la dispersión de  $L$  con  $H$ , se puede optar por analizar una dispersión elástica de  $L$  con algún quark puntual y tomar a la DIS como una suma incoherente de dispersiones elásticas.

¿Qué forma tienen las funciones de estructura? La conservación de la corriente mencionada en los puntos anteriores requiere que  $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$  (Identidad de Ward). Se define a  $p$  como el 4-momento de un partón dado y el siguiente 4-vector [7]

$$r_\mu \equiv p_\mu + \eta q_\mu, \quad (2.36)$$

donde  $\eta$  es algún escalar por determinar. Si se impone que  $q$  y  $r$  sean ortogonales:

$$\begin{aligned} q \cdot r &= q \cdot (p + \eta q) \\ &= p \cdot q - \eta q^2 = 0 \\ \therefore \eta &= -\frac{p \cdot q}{q^2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

El tensor

$$r^\mu r^\nu = \left[ p^\mu - \left( \frac{p \cdot q}{q^2} \right) q^\mu \right] \left[ p^\nu - \left( \frac{p \cdot q}{q^2} \right) q^\nu \right] \quad (2.38)$$

cumplirá la restricción. Otro tensor que satisface la constricción es

$$-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}. \quad (2.39)$$

Usando las propiedades de la métrica de subir y bajar índices

$$\begin{aligned} q_\mu \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) &= -q^\nu + \frac{q_\mu q^\mu q^\nu}{q^2} \\ &= -q^\nu + \frac{q^2 q^\nu}{q^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Entonces, se propone la siguiente versión del tensor hadrónico como suma de los dos tensores de las ecuaciones (2.4) y (2.39), que son simétricos

$$W^{\mu\nu} = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1(Q^2, \nu) + \frac{1}{M^2} \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) W_2(Q^2, \nu) \quad (2.41)$$

recordando que  $W_1$  y  $W_2$  deben ser funciones de  $Q^2$  y  $\nu$ . Como los valores de  $Q^2$  requeridos son elevados, el momento transferido  $q$  también es muy grande por lo que, para efectos prácticos,  $Q^2$  y  $\nu$  tienden a  $\infty$  lo que lleva el análisis al régimen de Bjorken. Ahora, en el contexto del experimento de dispersión electrón-quark se planteará el siguiente escenario: si se supone que los quarks son partículas de spin  $\frac{1}{2}$ , puntuales, cargadas y con la  $Q^2$  adecuada para resolverlos, la dispersión hallada deberá ser análoga a la de un electrón con un muón (por decir un ejemplo). Como esta dispersión se puede analizar con QED, es posible comparar la sección eficaz conocida de la dispersión electrón-muón con la del DIS [2]. Hacer esto sugiere que las funciones de estructura tomarán las siguientes formas

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{Q^2}{4m^2} \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2m} \right) \\ W_2 &= \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2m} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

con  $m$  la masa del quark. Con las propiedades de la delta de Dirac se obtiene que

$$\begin{aligned} 2mW_1 &= \frac{Q^2}{2m\nu} \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2m\nu} \right) \\ \nu W_2 &= \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2m\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nótese que estas funciones dependen de  $\frac{Q^2}{2m\nu}$ , una cantidad adimensional. Ya no hay dependencia de  $Q^2$  ni de  $\nu$  por separado. A esto se le llama *Bjorken Scaling* y corresponde a postular que, a grandes  $Q^2$ , la dispersión inelástica es la suma incoherente de dispersiones elásticas del leptón con los partones. Con lo anterior, se definen las funciones  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$

$$\begin{aligned} MW_1(\nu, Q^2) &\rightarrow F_1(x) \\ \nu W_2(\nu, Q^2) &\rightarrow F_2(x). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Con valores elevados de  $Q^2$ , los fotones virtuales pueden resolver a los constituyentes puntuales del protón [2]. Hay varios tipos de partones que el protón podría albergar, como quarks de sabor  $q$  y carga  $e_q$  o gluones. Y cada uno se lleva una diferente fracción del momento total del protón. Entonces, se define una *función de distribución de partones* (PDF)  $f^i(x)$  como la probabilidad de que el partón de sabor  $i$  tenga una fracción de momento entre  $x$  y  $dx$ .

Ahora, se probará que la variable de Bjorken  $x$  corresponde a la fracción del momento total del hadrón que un partón dado se lleva. Esta fracción inicialmente será denotada como  $y$ . Para un partón de tipo  $i$  se tiene [7]

$$p_i^\mu \approx yP^\mu. \quad (2.45)$$

Se supondrá que los partones tienen masa proporcional a  $y$ , es decir

$$m_i \approx yM. \quad (2.46)$$

Con la conservación de la energía, del momento y la suposición de que el partón golpeado está *on-shell* (ya que se consideró a los partones del hadrón como libres), es decir  $p_i^2 = m_i^2$  se tiene

$$(q + yP)^2 = m_i^2. \quad (2.47)$$

Usando las ecuaciones (2.22), (2.23), (2.24), (2.45), (2.46) y (2.47):

$$\begin{aligned} (q + yP)^2 &= q^2 + 2y(q \cdot P) + y^2P^2 \\ &= -Q^2 + 2yM\nu + p_i^2 \\ &= m_i^2. \end{aligned}$$

Con lo anterior, se deduce que

$$\begin{aligned} -Q^2 + 2yM\nu &= 0 \\ \Leftrightarrow Q^2 &= 2yM\nu \\ \Leftrightarrow y &= \frac{Q^2}{2M\nu} = x. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Debe cumplirse que

$$\sum_i \int x f^i(x) dx = 1, \quad (2.49)$$

sobre todos los partones  $i$ , incluyendo los quarks de sabor  $q$ , porque la suma de todas las fracciones de momento que cada partón se llevó debe dar el total. Así, utilizando (2.43), una de las

funciones de estructura se puede escribir como la integración de todas las influencias de todos los partones del protón, es decir

$$F_2(x) = \sum_i \int_0^1 e_i^2 y f^i(y) \delta(y-x) dy, \quad (2.50)$$

donde la función  $f^i(x)$  tiene como expresión general

$$f^i(x) = \int \frac{dz^-}{2(2\pi)} e^{ip^+ z^-} \langle P | \bar{\psi}^i(0) \gamma^+ \psi^i(z) | P \rangle |_{z_T=z^+=0}, \quad (2.51)$$

con  $\psi^i$  los campos de los quarks  $i$ . En las secciones 2.5 y 3.3 se introducen los conceptos para entender (2.51) en su totalidad. Por último, cabe mencionar que a partir de (2.42), (2.43) y (2.46) se puede mostrar que

$$F_2(x) = 2xF_1(x). \quad (2.52)$$

A este último resultado, que permite obtener la otra función  $F_1(x)$ , se le conoce como la *relación de Callan-Gross* [6].

## 2.5. Coordenadas cono de luz

Se puede probar que la dispersión inelástica profunda es dominante en las inmediaciones del cono de luz, la representación de una región en el espacio-tiempo dentro de la cual se encuentran todos los eventos que pueden estar conectados causalmente [10]. Para ello, es conveniente utilizar un marco de referencia en el cual el cono de luz juegue un papel relevante.

Considérese una colisión inelástica con el hadrón  $H$ . El fotón virtual, a conveniencia, se moverá a lo largo del eje  $z$ , por lo que su coordenada se verá favorecida. Se definen dos vectores nulos

$$\bar{p}^\mu \equiv \frac{p}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \quad (2.53)$$

$$n^\mu \equiv \frac{1}{p\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \quad (2.54)$$

donde  $p$  es un factor de escala que selecciona un marco de referencia con un momento específico. Estos vectores cumplen  $n^2 = \bar{p}^2 = 0$  y  $n \cdot \bar{p} = 1$ . Ahora, cualquier 4-vector puede ser expresado como

$$v^\mu = (v^+, v^-, \vec{v}^\perp) \quad (2.55)$$

con

$$v^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^3) \quad (2.56)$$

$$v^\perp = (v^1, v^2). \quad (2.57)$$

Se termina de definir esta geometría con el producto interno y la norma

$$u \cdot v = u^\mu v_\mu = u^+ v^- + u^- v^+ - \vec{u}^\perp \cdot \vec{v}^\perp \quad (2.58)$$

$$v^2 = 2v^+ v^- - |v^\perp|^2. \quad (2.59)$$

Así, la métrica del cono de luz tiene las componentes no nulas  $g^{+-} = g^{-+} = 1$  y  $g^{ij} = -\delta^{ij}$ . A este nuevo sistema coordenado, métrica y producto interno se les conocen conjuntamente como *coordenadas cono de luz*. Con todo esto, un 4-vector arbitrario se puede escribir en términos de los vectores especiales (2.53) y (2.54) como sigue

$$v^\mu = (v \cdot n)\bar{p}^\mu + v^{\mu\perp} + (v \cdot \bar{p})n^\mu \quad (2.60)$$

$$v^{\mu\perp} = (0, 0, \vec{v}^{\mu\perp}). \quad (2.61)$$

A este desglose se le denomina *descomposición de Sudakov* y justifica el nombre de estas coordenadas, ya que su núcleo son los vectores nulos (2.53) y (2.54), que forman parte del cono de luz del marco de referencia del hadrón  $H$ . Se tomará el límite de Bjorken, fijando  $x$  y  $Q^2$ ,  $\nu \rightarrow \infty$  donde finalmente se define el 4-vector  $\xi$  en base a (2.60) como [12]

$$\xi^\mu \equiv \eta\bar{p}^\mu + \vec{\xi}^\perp + \lambda n^\mu, \quad (2.62)$$

donde  $\eta$  y  $\lambda$  son constantes por ser determinadas. En este límite, el momento transferido  $q$  se escribe como

$$q^\mu = (\nu, 0, 0, -\nu - Mx). \quad (2.63)$$

En este punto, se volverá a la ecuación (2.34) para saber qué tipos de escalas de distancia son importantes en el DIS. El conmutador de la integral del tensor leptónico tiene como 'peso' a la exponencial  $e^{iq \cdot \xi}$ . El producto, en su argumento, se desarrollará de acuerdo al producto interno (2.58):

$$q \cdot \xi = q^+ \xi^- + q^- \xi^+ \approx -\frac{Mx}{\sqrt{2}} \xi^- + \sqrt{2}\nu \xi^+. \quad (2.64)$$

El conmutador de (2.34) será no nulo sólo si  $\xi^2 = 2\xi^+ \xi^- - \vec{\xi}^{\perp 2} \geq 0$ , es decir,  $2\xi^+ \xi^- \geq \vec{\xi}^{\perp 2}$ . Esta restricción se debe a que el 4-vector  $\xi$  debe ser de tipo tiempo para poder establecer la causalidad del evento DIS. Como  $\nu \rightarrow \infty$ , para evitar el peso diverja, se debe hacer  $\xi^+ \rightarrow 0$ . Entonces  $|\xi^-| < \sqrt{2}/Mx$  para que (2.62) no diverja, por lo que  $\vec{\xi}^{\perp 2} \rightarrow \vec{0}$ . Por lo tanto, el DIS es dominante en  $\xi^2 \approx 0$ , es decir, en las inmediaciones del cono de luz, lo que justifica el cambio a las coordenadas cono de luz [10].

El esquema de las coordenadas cono de luz brinda una alternativa para demostrar que la variable de Bjorken  $x$  es la fracción  $f$  del momento total del hadrón que un partón se lleva. El momento del hadrón en términos de los vectores (2.53) y (2.54) se escribirá como

$$P^\mu = \bar{p}^\mu + \frac{1}{2}M^2 n^\mu. \quad (2.65)$$

Ahora, en el límite de Bjorken, el momento del fotón transferido será

$$q^\mu \approx (P \cdot q)n^\mu - x\bar{p}^\mu. \quad (2.66)$$

Aplicando la descomposición de Sudakov al momento  $p$  de un partón,

$$p^\mu = f\bar{p}^\mu + \frac{p^2 + p_T^2}{2f}n^\mu + p_T^\mu, \quad (2.67)$$

donde  $p^2$  es el cuadrado de la norma del momento  $p$ . Pero la contribución al tensor hadrónico es dominado por valores pequeños de  $p$  y  $p_T$ , esto debido a que el partón, en promedio, no se lleva cantidades relevantes del momento total ( $p$  pequeño) y que el proceso se lleva a cabo, mayoritariamente sobre el eje  $z$  ( $p_T$  pequeño). Además, en el límite para los eventos DIS, los momentos involucrados tienden a  $\infty$ , haciendo que el término de masa en (2.65) sea despreciable, por lo tanto

$$p^\mu \approx fP^\mu. \quad (2.68)$$

Como los partones están en la capa de masa (*on-shell*)

$$\begin{aligned} \delta((p+q)^2) &= \delta(-Q^2 + 2fP \cdot q) \\ &= \frac{1}{2P \cdot q} \delta(f-x). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Así, la delta de Dirac no se anulará si  $f=x$ . Ya bien establecida la naturaleza del parámetro de Bjorken, se justifica escribir a los momentos de los partones como fracciones del momento total, es decir,  $p^\mu = xP^\mu$  y por ende, a las componentes también, por ejemplo

$$p^+ = xP^+. \quad (2.70)$$

## 2.6. Reglas de suma

Una vez definidos los elementos más importantes de los eventos de dispersión DIS y el marco de referencia adecuado de las coordenadas como de luz en las secciones anteriores, sólo falta añadir constricciones a las funciones de distribución de cara a lo que representan. Como las PDF son probabilidades, estas deben reflejar globalmente a los números cuánticos de los hadrones.

Se asignará a las funciones de distribución para un quark de sabor up la siguiente forma

$$f^u(x) \equiv u(x) = u_v(x) + u_s(x) \quad (2.71)$$

y además,  $u_s(x) = \bar{u}(x)$ . La asignación es análoga para  $f^d(x) \equiv d(x)$ , la función para un quark down. Los subíndices  $v$  y  $s$  indican que las funciones pertenecen a quarks de valencia y quarks del 'mar de quarks', un conjunto de quarks y antiquarks virtuales que se crean y destruyen desde el vacío cuántico. La barra superior indica que la función de distribución es para un antiquark. Esta descomposición significa que la distribución para un quark up debe tomar en cuenta a los quarks up de valencia del hadrón (término  $u_v(x)$ ) y a los del mar (término  $u_s(x)$ ). En el caso particular del protón, éste tiene dos quarks up y un down de valencia, así que debe cumplirse que [13]

$$\int_0^1 u_v(x) dx = \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad (2.72)$$

$$\int_0^1 d_v(x) dx = \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1. \quad (2.73)$$

A las reglas de suma como (2.72) y (2.73) se les conoce como *reglas de suma de valencia* y sirven para demostrar otras reglas relacionadas a casos particulares de dispersión. En el caso particular del protón, debido a que no tiene entre sus quarks de valencia a los de sabor strange, se tiene [6]

$$\int_0^1 s_v(x) dx = \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0. \quad (2.74)$$

Como primera aproximación suponemos que los tres quarks ligeros  $u, d, s$  y sus antiquarks aparecen en el “mar” con más o menos la misma frecuencia y distribución de momento. Así [6]

$$u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x). \quad (2.75)$$

Cabe destacar que la ecuación (2.49) también es otra regla de suma, la suma de momentos. Estas reglas de suma se deben cumplir sin importar el esquema de análisis utilizado. La presencia del mar de quarks no debe afectar a los números cuánticos del protón. Estos los determinan los quarks de valencia [2]. Las reglas de suma son, en general, de la forma de integrales de  $x^{m-1}$  veces las PDF, es decir

$$M^m(f^q) = \int_0^1 x^{m-1} f^q(x) dx. \quad (2.76)$$

A estas integrales se les llama *momentos de Mellin*. El primer momento de Mellin, con  $m = 1$  y  $f^q$  como la distribución de quarks de valencia, corresponde a las ecuaciones (2.72) y (2.73). El segundo momento de Mellin,  $m = 2$  muestra la fracción del momento que el quark de valencia se ha llevado.



# Capítulo 3

## Modelo MIT bag y PDFs

### 3.1. Modelos de quarks con interacción gluónica

Como ya se mencionó, la dinámica que rige la estructura hadrónica aún no entendemos cómo estudiarla con QCD perturbativa. Esa limitación es la motivación para utilizar modelos de quarks alternativos, ya sea que introduzcan los mecanismos y fenómenos no perturbativos, proporcionen enfoques diferentes para el estudio de la interacción entre quarks y gluones o propongan distintos grados de libertad para el análisis o cuyo estudio sea factible para escalas donde la QCD perturbativa no es aplicable. Uno de estos modelos se denomina *MIT bag*, desarrollado en 1974 en el Massachusetts Institute of Technology (MIT), de ahí su nombre [1].

Como los quarks se encuentran confinados en el hadrón, el modelo del MIT bag provee una descripción fenomenológica útil de los quarks en hadrones ya que contiene las características esenciales del confinamiento al introducir una ‘presión’  $B$  hacia dentro del hadrón, modelado como una bolsa, de forma que los quarks quedan contenidos. Este modelo también propone que dichos quarks en el interior de la bolsa se comportan como partículas libres. La razón para que en este trabajo se utilice el modelo del MIT bag por encima del resto es su configuración: introduce al confinamiento y restringe a la frontera todas las interacciones, ya que los quarks están libres en el interior. Se mostrará que las interacciones entre quarks y gluones son efectos de frontera y por lo tanto, es en esta región donde se concentran los detalles fundamentales tras la estructura hadrónica. En resumen, la gran ventaja del modelo del MIT bag para este trabajo en particular, es que la información interesante de la estructura hadrónica se encuentra en la frontera de la bolsa. Acceder a la información subyacente de dicha interacción es el objetivo y este modelo plantea las condiciones adecuadas para lograrlo.

### 3.2. Descripción cuantitativa del modelo

Tras la introducción cualitativa del modelo, se procederá a explicar su aspecto cuantitativo. En el modelo del MIT bag se supone a los quarks y gluones confinados en una región esférica del espacio de radio  $r = R_0$  y con un potencial  $V(r) = 0$  en  $r < R_0$ . La premisa del modelo que designa a los quarks en la cavidad como partículas libres permite utilizar la ecuación de Dirac. Esto no logra describir el confinamiento de forma automática, así que se introduce una presión  $B$  que mantiene a los partones en esa esfera y que va hacia el interior contrarrestando

la energía cinética de los quarks. Las soluciones de la ecuación de Dirac en  $r < R_0$  son de la forma (en el espacio de momentos)

$$\phi_\lambda(\hat{p}) = i\sqrt{4\pi}NR_0^3 \begin{bmatrix} t_0(|\hat{p}|)\chi_\lambda \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})t_1(|\hat{p}|)\chi_\lambda \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde  $\hat{p}$  es el vector momento  $\vec{p}$  normalizado para compatibilidad dimensional,  $\omega_0 \approx 2.04$  es la solución de más baja frecuencia para la condición  $\tan \omega_0 = \omega_0/(1 - \omega_0)$ ,  $M = 938$  MeV la masa del protón, que cumple  $R_0M = 4\omega_0$ , las  $\chi_\lambda$  y  $\chi_{\lambda'}$  son los espinores de dos componentes para spin  $\lambda$  y  $\lambda'$  respectivamente,  $N$  una constante de normalización y las funciones  $t_0$  y  $t_1$  son integrales de las  $j_0$  y  $j_1$ , funciones esféricas de Bessel que surgen de las condiciones de frontera de la bolsa, a saber [14]

$$t_l(p) = \int_0^1 z^2 j_l(zpR_0)j_l(z\omega_0)dz \quad l = 0, 1. \quad (3.2)$$

### 3.3. PDFs en el MIT bag

Una vez descrito el modelo, se procederá a calcular las funciones PDF a partir de la función de onda proporcionada por (3.1). Las *funciones de distribución de partones dependientes del momento transverso*, en siglas TMD, son una generalización de las PDF que toman en cuenta al momento transversal a la dirección de propagación que, suponemos, es el eje  $z$ . El marco de referencia estará fijado en torno a las coordenadas cono de luz. Así que estas funciones dependen de la  $x$  de Bjorken, del momento en la dirección de propagación  $p_z$  y del momento transverso  $\vec{p}_T = (p_1, p_2)$  basado en (2.57). El vector momento en este conexto se definirá con la siguiente condición de energía del bag [15]

$$\vec{p}^2 = p_z^2 + p_T^2 \text{ con } p_z = xM - \frac{\omega_0}{R_0}. \quad (3.3)$$

Las TMD de quarks y antiquarks de sabor  $q$  son definidas en términos de un objeto definido como *correlador de quarks* cuya expresión es

$$\Phi^q(P, p, s; \Gamma) = \int \frac{d^4z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}^q(0)\Gamma\psi^q(z) | P, s \rangle \quad (3.4)$$

y varias de las más importantes son resultado de integrar la traza del correlador sobre una de las coordenadas cono de luz, dando las siguientes definiciones:

$$\frac{1}{2} \int dp^- \text{tr}[\Phi^q \gamma^+] = \int \frac{dz^- d^2z_T}{2(2\pi)^3} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}^q(0)\gamma^+\psi^q(z) | P, s \rangle |_{z^+=0} = f_1^q(x, p_T) \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2} \int dp^- \text{tr}[\Phi^q \mathbb{I}] = \int \frac{dz^- d^2z_T}{2(2\pi)^3} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}^q(0)\mathbb{I}\psi^q(z) | P, s \rangle |_{z^+=0} = \frac{M}{P^+} e^q(x, p_T) \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2} \int dp^- \text{tr}[\Phi^q \gamma^-] = \int \frac{dz^- d^2z_T}{2(2\pi)^3} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}^q(0)\gamma^-\psi^q(z) | P, s \rangle |_{z^+=0} = \left(\frac{M}{P^+}\right)^2 f_4^q(x, p_T). \quad (3.7)$$

Integrar sobre  $p_T$  lleva de las TMD a las PDF, haciendo a las primeras una generalización de las segundas. Aquí se puede entender en pleno el significado de la ecuación (2.51). Resulta de fijar el producto interno (2.58), anular  $z^+$ , integrar (3.5) respecto a  $z_T$  y utilizar la relación (2.70). Por lo tanto, para un quark de sabor  $q$

$$\int f^q(x, p_T) d^2 p_T = f^q(x) \quad (3.8)$$

y con  $f$  cualquier PDF con su TMD correspondiente. En esencia, algunas de las TMD no polarizadas, es decir, aquellas donde se promedian todas las polarizaciones de spin posibles y éste no figura explícitamente en sus expresiones, a saber,  $f_1$ ,  $e$  o  $f_4$  se pueden calcular como valores esperados, y una vez calculadas todas las constantes de las funciones de onda del MIT bag se agrupan en  $C_{bag}$ , el *factor de normalización* dado por [16]

$$C_{bag} = \frac{16\omega_0^4}{\pi^2(\omega_0 - 1)j_0^2(\omega_0)M^2}. \quad (3.9)$$

También hay que tomar en cuenta que las funciones también dependen del sabor de los quarks y de los estados de spin que puedan tener. Estos requerimientos están codificados en los *coeficientes de sabor y spin*  $C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'}$ , para el sabor  $q$  en términos de los estados de spin  $\Lambda, \Lambda', \lambda, \lambda'$  basados en el grupo SU(6), porque se toma SU(3)  $\otimes$  SU(2) de los tres sabores ligeros  $u, d$  y  $s$  de los quarks y las dos orientaciones del spin. Estos coeficientes están definidos como [11]

$$C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'} \equiv -\frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \times \\ \langle 0 | [b_{u, \Lambda'}^M b_{u, \Lambda'}^N b_{d, -\Lambda'}^P - b_{u, \Lambda'}^M b_{u, -\Lambda'}^N b_{d, \Lambda'}^P] b_{q, \lambda'}^\dagger b_{q, \lambda} [b_{u, \Lambda}^{\dagger Q} b_{u, \Lambda}^{\dagger R} b_{d, -\Lambda}^{\dagger S} - b_{u, \Lambda}^{\dagger Q} b_{u, -\Lambda}^{\dagger R} b_{d, \Lambda}^{\dagger S}] | 0 \rangle \quad (3.10)$$

donde  $b_{q, \lambda}^\dagger$  y  $b_{q, \lambda}$  son los operadores fermiónicos de creación y destrucción de un quark con sabor  $q$  y polarización de spin  $\lambda$  y  $M, N, P, Q, R, S$  son índices de color. Estos operadores deben cumplir la siguiente relación de anticonmutación, característica heredada de la ecuación (2.17) [4]

$$\{b_{q, \lambda'}, b_{q, \lambda}^\dagger\} = \delta_{\lambda', \lambda}. \quad (3.11)$$

Para el caso particular  $p_T = 0$  se tiene  $p = |xM - \omega_0/R_0|$ . Reordenando los operadores de (3.10) y aplicando continuamente el anticonmutador (3.11) se obtienen los valores de los coeficientes  $C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'}$  mostrados en la Figura 3.1. Los cálculos detallados de  $C_{++}^{u; \uparrow, \uparrow}$  y  $C_{++}^{u; \downarrow, \downarrow}$  se muestran en el Apéndice A.

$C_{++}^{d; \downarrow, \downarrow} = \frac{2}{3}$	$C_{++}^{d; \uparrow, \uparrow} = \frac{1}{3}$
$C_{++}^{u; \downarrow, \downarrow} = \frac{1}{3}$	$C_{++}^{u; \uparrow, \uparrow} = \frac{5}{3}$
$C_{--}^{d; \downarrow, \downarrow} = \frac{1}{3}$	$C_{--}^{d; \uparrow, \uparrow} = \frac{2}{3}$
$C_{--}^{u; \downarrow, \downarrow} = \frac{5}{3}$	$C_{--}^{u; \uparrow, \uparrow} = \frac{1}{3}$

Figura 3.1: Coeficientes de sabor-spin.

El interés de este trabajo se cierne sobre funciones no polarizadas. Esto requiere tomar en cuenta todos los estados de spin posibles, por lo que se debe incluir el promedio (porque se está calculando un valor esperado) sobre los estados de polarización de spin. Por lo tanto, con todo lo anterior dicho, se proporcionan las expresiones explícitas de las PDF principales modeladas mediante el MIT bag

$$f_1^q(x) = \frac{1}{2} \int d^2 p_T \sum_{\lambda, \lambda', \Lambda, \Lambda'} C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'} C_{bag} \phi_{\lambda'}^\dagger(\hat{p}) \gamma^0 \gamma^+ \phi_\lambda(\hat{p}) \quad (3.12)$$

$$e^q(x) = \frac{1}{2} \int d^2 p_T \sum_{\lambda, \lambda', \Lambda, \Lambda'} C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'} C_{bag} \phi_{\lambda'}^\dagger(\hat{p}) \gamma^0 \mathbb{I} \phi_\lambda(\hat{p}) \quad (3.13)$$

$$f_4^q(x) = \frac{1}{2} \int d^2 p_T \sum_{\lambda, \lambda', \Lambda, \Lambda'} C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'} C_{bag} \phi_{\lambda'}^\dagger(\hat{p}) \gamma^0 \gamma^- \phi_\lambda(\hat{p}). \quad (3.14)$$

El factor  $\frac{1}{2}$  se coloca debido a que sólo hay dos posibles polarizaciones de spin. Con la información proporcionada sobre las funciones de onda del MIT bag, es posible calcular la forma explícita del integrando de las ecuaciones (3.12) y (3.13). Se aclara que se denotará al vector unitario del 4-momento como  $\hat{p} = \vec{p}/p$  y a sus componentes como  $\hat{p}_i = p_i/p$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Se calculará la forma de  $f_1$  en el modelo del MIT bag. De la ecuación (3.12)

$$f_1^q(x, \hat{p}_T) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda', \Lambda, \Lambda'} C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'} C_{bag} \phi_{\lambda'}^\dagger(\hat{p}) \gamma^0 \gamma^+ \phi_\lambda(\hat{p}).$$

Temporalmente los cálculos se centrarán en los productos de los últimos cuatro elementos. Las constantes serán agrupadas en  $C_{bag}$  e introducidas en el resultado final por simplicidad. La ausencia explícita de estas constantes será indicada con el símbolo de proporcionalidad  $\propto$ .

$$\phi_{\lambda'}^\dagger(\hat{p}) \gamma^0 \gamma^+ \phi_\lambda(\hat{p}) \propto [t_0(|\hat{p}|) \chi_{\lambda'}^\dagger \quad (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) t_1(|\hat{p}|) \chi_{\lambda'}^\dagger] \gamma^0 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 + \gamma^3) \right] \left[ \begin{array}{c} t_0(|\vec{p}|) \chi_\lambda \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) t_1(|\vec{p}|) \chi_\lambda \end{array} \right].$$

El término de enmedio sale de la ecuación (2.56), dando una forma explícita para

$$\begin{aligned} \gamma^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & -\mathbb{I} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Completando el cálculo

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicando por las funciones de onda

$$\begin{aligned}
\phi_{\lambda'}^{\dagger}(\hat{p})\gamma^0\gamma^{\dagger}\phi_{\lambda}(\hat{p}) &\propto \frac{1}{\sqrt{2}} [t_0(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger} \quad (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})t_1(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}] \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0(|\hat{p}|)\chi_{\lambda} \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})t_1(|\hat{p}|)\chi_{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [t_0(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}\mathbb{I} + t_1(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})\sigma^3 \quad t_0(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}\sigma^3 + t_1(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})\mathbb{I}] \begin{bmatrix} t_0(|\hat{p}|)\chi_{\lambda} \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})t_1(|\hat{p}|)\chi_{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [t_0^2(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}\chi_{\lambda} + t_1(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})\sigma^3 t_0(|\hat{p}|)\chi_{\lambda} \\
&\quad + t_0(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}\sigma^3(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})t_1(|\hat{p}|)\chi_{\lambda} + t_1^2(|\hat{p}|)\chi_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2\chi_{\lambda}].
\end{aligned}$$

Hay 4 términos. En el primero se tiene el producto  $\chi_{\lambda'}^{\dagger}\chi_{\lambda} = \delta_{\lambda'\lambda}$ . Para el segundo y tercero se desarrollará el producto del momento con las matrices  $\sigma$

$$\chi_{\lambda'}^{\dagger}[(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})\sigma^3]\chi_{\lambda} = \chi_{\lambda'}^{\dagger}[\hat{p}^1\sigma^1\sigma^3 + \hat{p}^2\sigma^2\sigma^3 + \hat{p}^3\sigma^3\sigma^3]\chi_{\lambda}.$$

Al combinar las propiedades del conmutador y anticonmutador de las matrices de Pauli, a saber  $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$  y  $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 0$  si  $i \neq j$  se obtiene que  $\sigma^j\sigma^i = -\sigma^i\sigma^j$  y  $[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2\sigma^i\sigma^j = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$ . Por lo tanto  $\sigma^i\sigma^j = i\epsilon^{ijk}\sigma^k$ . Reemplazando en el producto interior:

$$\chi_{\lambda'}^{\dagger}[(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})\sigma^3]\chi_{\lambda} = \chi_{\lambda'}^{\dagger}[-i\hat{p}^1\sigma^2 + i\hat{p}^2\sigma^1 + \hat{p}^3\mathbb{I}]\chi_{\lambda}.$$

Se necesitan hacer los últimos productos de espinores:

$$\chi_{\lambda'}^{\dagger}\sigma^2\chi_{\lambda} \begin{cases} \chi_{\uparrow}^{\dagger}\sigma^2\chi_{\uparrow} = i [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \chi_{\uparrow}^{\dagger}\sigma^2\chi_{\downarrow} = i [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -i \\ \chi_{\downarrow}^{\dagger}\sigma^2\chi_{\uparrow} = i [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = i \\ \chi_{\downarrow}^{\dagger}\sigma^2\chi_{\downarrow} = i [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

Para resumir este comportamiento se escribe  $\chi_{\lambda'}^{\dagger}\sigma^2\chi_{\lambda} = i(\delta_{-\lambda'\lambda=\uparrow} - \delta_{-\lambda'\lambda=\downarrow})$  donde el  $-\lambda'\lambda = \uparrow$  significa que  $\lambda$  debe apuntar forzosamente arriba y  $\lambda'$  debe apuntar al contrario (por eso el menos), o sea, abajo, para que el término no sea nulo. Con el mismo análisis  $\chi_{\lambda'}^{\dagger}\sigma^1\chi_{\lambda} = \delta_{-\lambda'\lambda}$ .

El tercer término lleva prácticamente el mismo procedimiento con una pequeña diferencia:

$$\begin{aligned}
\chi_{\lambda'}^{\dagger}[\sigma^3(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})]\chi_{\lambda} &= \chi_{\lambda'}^{\dagger}[\hat{p}^1\sigma^3\sigma^1 + \hat{p}^2\sigma^3\sigma^2 + \hat{p}^3\sigma^3\sigma^3]\chi_{\lambda} \\
&= \chi_{\lambda'}^{\dagger}[i\hat{p}^1\sigma^2 - i\hat{p}^2\sigma^1 + \hat{p}^3\mathbb{I}]\chi_{\lambda}.
\end{aligned}$$

Por último, para el cuarto término será

$$\begin{aligned}
(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2 &= (\hat{p}^1\sigma^1 + \hat{p}^2\sigma^2 + \hat{p}^3\sigma^3)(\hat{p}^1\sigma^1 + \hat{p}^2\sigma^2 + \hat{p}^3\sigma^3) \\
&= (\hat{p}^1)^2\mathbb{I} + \hat{p}^1\hat{p}^2\sigma^1\sigma^2 + \hat{p}^1\hat{p}^3\sigma^1\sigma^3 + \hat{p}^2\hat{p}^1\sigma^2\sigma^1 + (\hat{p}^2)^2\mathbb{I} + \hat{p}^2\hat{p}^3\sigma^2\sigma^3 + \hat{p}^3\hat{p}^1\sigma^3\sigma^1 + \hat{p}^3\hat{p}^2\sigma^3\sigma^2 + (\hat{p}^3)^2\mathbb{I} \\
&= [(\hat{p}^1)^2 + (\hat{p}^2)^2 + (\hat{p}^3)^2]\mathbb{I} + \hat{p}^1\hat{p}^2(i\sigma^3 - i\sigma^3) + \hat{p}^1\hat{p}^3(-i\sigma^2 - i\sigma^2) + \hat{p}^1\hat{p}^3((i\sigma^1 - i\sigma^1)) \\
&= [(\hat{p}^1)^2 + (\hat{p}^2)^2 + (\hat{p}^3)^2]\mathbb{I} = \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

La última igualdad es porque el vector momento está normalizado. Reuniendo los cuatro procedimientos, el producto resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ t_0(|\hat{p}|) \delta_{\lambda'\lambda} + [\hat{p}^1(\delta_{-\lambda'\lambda=\uparrow} - \delta_{-\lambda'\lambda=\downarrow}) + i\hat{p}^2 \delta_{-\lambda'\lambda} + \hat{p}^3 \delta_{\lambda',\lambda}] t_1(|\hat{p}|) t_0(|\hat{p}|) + \right. \\ & \left. [-\hat{p}^1(\delta_{-\lambda'\lambda=\uparrow} - \delta_{-\lambda'\lambda=\downarrow}) - i\hat{p}^2 \delta_{-\lambda'\lambda} + \hat{p}^3 \delta_{\lambda',\lambda}] t_0(|\hat{p}|) t_1(|\hat{p}|) + t_1^2(|\hat{p}|) \delta_{\lambda'\lambda} \right] \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\lambda'\lambda} [t_0^2(|\hat{p}|) + 2\hat{p}^3 t_0(|\hat{p}|) t_1(|\hat{p}|) + t_1^2(|\hat{p}|)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma de  $f_1^q$  en el modelo del MIT bag es

$$\begin{aligned} f_1^q(x, \vec{p}_T) &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda', \Lambda, \Lambda'} C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'} C_{bag} \delta_{\lambda'\lambda} [t_0^2(|\hat{p}|) + 2\hat{p}^3 t_0(|\hat{p}|) t_1(|\hat{p}|) + t_1^2(|\hat{p}|)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \Lambda} C_{\Lambda, \Lambda}^{q; \lambda, \lambda} C_{bag} [t_0^2(|\hat{p}|) + 2\hat{p}^3 t_0(|\hat{p}|) t_1(|\hat{p}|) + t_1^2(|\hat{p}|)] \end{aligned}$$

y efectivamente, representa la distribución no polarizada de quarks en un hadrón no polarizado. Se repetirá el cálculo, esta vez para  $e$ . De la ecuación (3.13)

$$\begin{aligned} e^q(x, \vec{p}_T) &\propto \phi_{\lambda'}^\dagger(\hat{p}) \gamma^0 \mathbb{I} \phi_\lambda(\hat{p}) = \phi_{\lambda'}^\dagger(\hat{p}) \gamma^0 \phi_\lambda(\hat{p}) \\ &= [t_0(|\hat{p}|) \chi_{\lambda'}^\dagger \quad (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) t_1(|\hat{p}|) \chi_{\lambda'}^\dagger] \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0(|\hat{p}|) \chi_\lambda \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) t_1(|\hat{p}|) \chi_\lambda \end{bmatrix} \\ &= [t_0(|\hat{p}|) \chi_{\lambda'}^\dagger \mathbb{I} \quad -(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) t_1(|\hat{p}|) \chi_{\lambda'}^\dagger \mathbb{I}] \begin{bmatrix} t_0(|\hat{p}|) \chi_\lambda \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) t_1(|\hat{p}|) \chi_\lambda \end{bmatrix} \\ &= t_0^2(|\hat{p}|) \chi_{\lambda'}^\dagger \chi_\lambda - t_1^2(|\hat{p}|) (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2 \chi_{\lambda'}^\dagger \chi_\lambda \\ &= \delta_{\lambda', \lambda} [t_0^2(|\hat{p}|) - t_1^2(|\hat{p}|) \mathbb{I}] \\ &= \delta_{\lambda', \lambda} [t_0^2(|\hat{p}|) - t_1^2(|\hat{p}|)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por lo tanto, la forma de  $e^q$  en el modelo del MIT bag es

$$\begin{aligned} e^q(x, \vec{p}_T) &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda', \Lambda, \Lambda'} C_{\Lambda, \Lambda'}^{q; \lambda, \lambda'} C_{bag} \delta_{\lambda'\lambda} [t_0^2(|\hat{p}|) - t_1^2(|\hat{p}|)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \Lambda} C_{\Lambda, \Lambda}^{q; \lambda, \lambda} C_{bag} [t_0^2(|\hat{p}|) - t_1^2(|\hat{p}|)]. \end{aligned}$$

Ahora, se define a  $N_q$  como el número de quarks de valencia de sabor  $q$  en el nucleón, que resulta de promediar sobre los estados  $\lambda$  y  $\Lambda$  de los  $C_{\Lambda, \Lambda}^{q; \lambda, \lambda}$  que quedaron tras los cálculos anteriores. Su expresión corresponde a

$$N_q \equiv \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \Lambda} C_{\Lambda, \Lambda}^{q; \lambda, \lambda}. \tag{3.16}$$

Específicamente, para los sabores up y down  $N_u = 2$  y  $N_d = 1$ . El cálculo detallado se encuentra en el Apéndice A. De esta forma, los integrandos de las ecuaciones (3.12) y (3.13), es decir, las TMD no polarizadas en el modelo del MIT bag se escriben de la siguiente forma compacta

$$f_1^q(x, \vec{p}_T) = N_q C_{bag} [t_0^2(|\hat{p}|) + 2\hat{p}^3 t_0(|\hat{p}|) t_1(|\hat{p}|) + t_1^2(|\hat{p}|)] \quad (3.17)$$

$$e^q(x, \vec{p}_T) = N_q C_{bag} [t_0^2(|\hat{p}|) - t_1^2(|\hat{p}|)]. \quad (3.18)$$

Con lo anterior y la ecuación (3.8), las gráficas de  $f_1^u(x)$  y  $e^u(x)$  para el quark up, obtenidas integrando los resultados previos sobre  $\vec{p}_T$  y con  $N_u = 2$ , se muestran en las figuras 3.1 y 3.2. Calculando los primeros y segundos momentos de Mellin (2.76) para  $f_1^u(x)$  y los primeros, segundos y terceros de  $e^u(x)$  se obtiene

$$M^1(f_1^u) = \int_0^1 f_1^u(x) dx = 1.764 \quad (3.19)$$

$$M^2(f_1^u) = \int_0^1 x f_1^u(x) dx = 0.618 \quad (3.20)$$

$$M^1(e^u) = \int_0^1 e^u(x) dx = 0.918 \quad (3.21)$$

$$M^2(e^u) = \int_0^1 x e^u(x) dx = 0.241 \quad (3.22)$$

$$M^3(e^u) = \int_0^1 x^2 e^u(x) dx = 0.080. \quad (3.23)$$

Debido a que  $f_1^d(x) = \frac{1}{2} f_1^u(x)$  y  $e^d(x) = \frac{1}{2} e^u(x)$ , los momentos de Mellin para el sabor down son la mitad del valor numérico que los del sabor up. Ahora, se tomarán los segundos momentos de Mellin para los sabores  $u$  y  $d$  de la función  $f_1^q(x)$  y se sumarán

$$M^2(f_1^u) + M^2(f_1^d) = \sum_{i=u,d} \int_0^1 x f_1^i(x) dx = 1 \quad (3.24)$$

Nótese que (3.24) es la ecuación (2.49) y según dicha ecuación, (3.24) debe ser igual a 1. Sin embargo, utilizando (3.20)

$$\begin{aligned} \sum_{i=u,d} \int_0^1 x f_1^{i, \text{MIT bag}}(x) dx &= \int_0^1 x f_1^{u, \text{MIT bag}}(x) dx + \int_0^1 x f_1^{d, \text{MIT bag}}(x) dx \\ &= \int_0^1 x f_1^{u, \text{MIT bag}}(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x f_1^{u, \text{MIT bag}}(x) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x f_1^{u, \text{MIT bag}}(x) dx \\ &= (1.5)(0.618) \\ &= 0.927 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esto es esperado por las aproximaciones del modelo [15, 17].

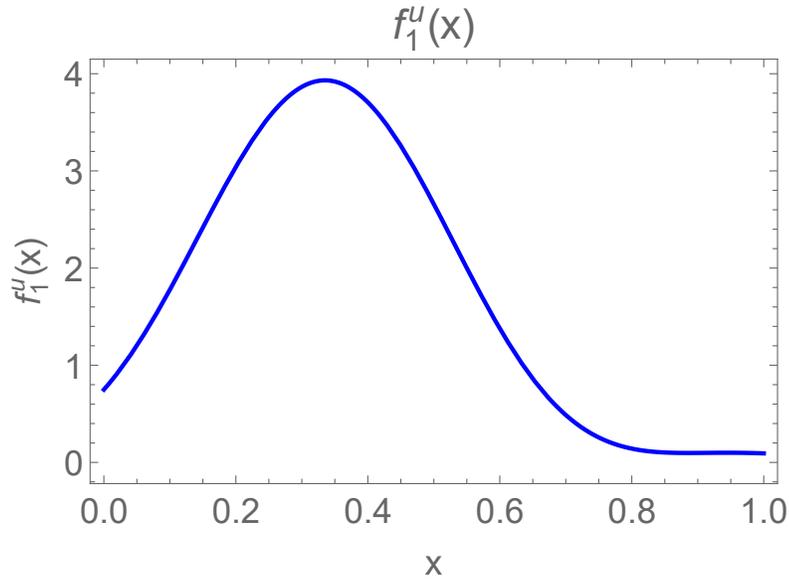


Figura 3.1: Gráfica de la PDF  $f_1^u(x)$  para el quark up. Nótese que su máximo se encuentra alrededor de  $1/3$ .

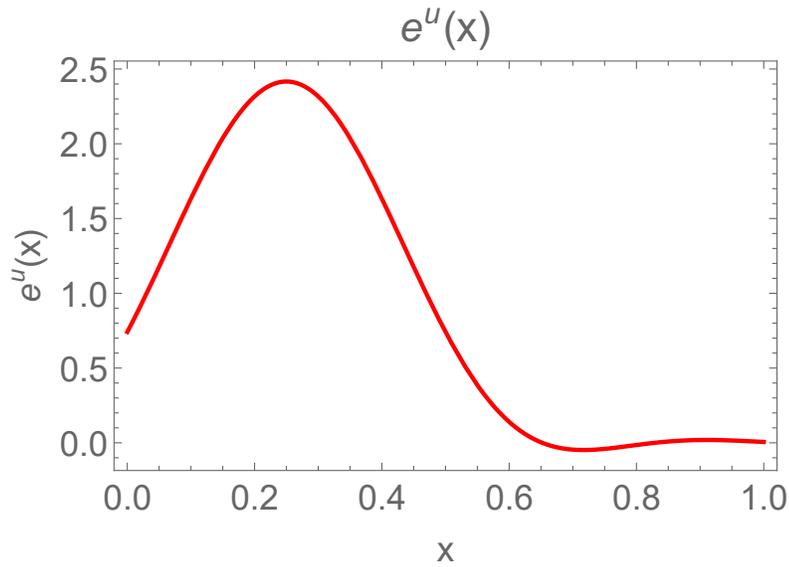


Figura 3.2: Gráfica de la PDF  $e^u(x)$  para el quark up. Así como  $f_1^u(x)$ , su máximo se encuentra cerca de  $1/3$ .

### 3.4. Dimensiones en los campos, PDF's y twist

En unidades naturales, la unidad más utilizada es la de energía y múltiples cantidades físicas la poseen (o poseen alguna potencia de ella). Por ejemplo  $[m] = [p^\mu] = E$  y  $[x^\mu] = E^{-1}$ . La acción  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  es adimensional, lo que implica  $[\mathcal{L}] = E^4$ . ¿Cuál es la dimensión de las

funciones de onda de los campos de Dirac  $\psi$ ? Observando el lagrangiano libre de Dirac (2.15) se tiene

$$[i\cancel{\partial}] = [\cancel{p}] = [m] = E. \quad (3.26)$$

Entonces  $[\bar{\psi}\psi] = E^3$ , ya que  $[\mathcal{L}] = E^4$  y así [18]

$$[\psi] = E^{3/2}. \quad (3.27)$$

¿Cuáles son las dimensiones de los bra-kets de momento? En teoría cuántica de campos o mecánica cuántica relativista, se define un ket de 4-momento normalizado relativista en términos del operador de creación

$$\begin{aligned} |p\rangle &= (2E_p)^{1/2}(2\pi)^{3/2} |\vec{p}\rangle \\ &= (2E_p)^{1/2}(2\pi)^{3/2} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

El producto bra-ket está dado por

$$\langle p|q\rangle = (4E_p E_q)^{1/2}(2\pi)^3 \langle 0| \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger |0\rangle. \quad (3.29)$$

Usando (2.20):

$$\begin{aligned} \langle 0| \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger |0\rangle &= \langle 0| \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_p |0\rangle \\ &= \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) (\langle 0|0\rangle \overset{1}{\leftarrow} - \langle 0| \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_p |0\rangle \overset{0}{\leftarrow}). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle p|q\rangle = (4E_p E_q)^{1/2}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (3.30)$$

Las dimensiones de la delta de Dirac son el recíproco de las de su argumento, esto debido a que

$$\int \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) d^3(\vec{p} - \vec{q}) = 1. \quad (3.31)$$

La ecuación (3.31) es una propiedad de la delta y  $[\vec{p}] = [\vec{q}] = E^3$ , de modo que

$$[\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})] = E^{-3}. \quad (3.32)$$

Lo anterior implica que

$$[\langle p|q\rangle] = E^{-2}, \quad (3.33)$$

$$[|p\rangle] = E^{-1}. \quad (3.34)$$

Ahora que se conoce la dimensión de los objetos cuánticos, todas las relaciones entre las PDF deben guardar coherencia dimensional.

Se define el *twist*  $t$  de un elemento de matriz invariante de operadores en el cono de luz como el orden disminuido en 2 en  $M$  y  $M/Q$  al cual dicho operador contribuye en los procesos profundamente inelásticos. Al tomar un valor esperado de un producto de operadores y descomponerlo en términos de las PDF apropiadas, los diferentes términos obtenidos deben tener algún factor  $M^{t-2}$  para conservar la coherencia de dimensiones.

Twist 2 significa que no hay dimensiones que deban suprimirse, pues el factor es  $M^{2-2} = 1$ . A esto se le conoce también como *twist dominante* por ser la contribución principal [10]. Twist 3 significa agregar un factor  $M^{3-2} = M$  y así sucesivamente. Explícitamente, utilizando la descomposición sugerida por Jaffe basada en la descomposición vectorial de Sudakov [10]:

$$\langle P, s | \bar{\psi}^q(\lambda n) \gamma^\mu \psi^q(0) | P, s \rangle \sim \bar{p}^\mu f_1^q(\lambda) + n^\mu M^2 f_4^q(\lambda) \quad (3.35)$$

con  $\lambda = p^+ z^-$ . El lado izquierdo de (3.35) es de dimensión  $E^{-1+3/2+3/2-1} = E^1 = E$ , por lo tanto, como  $[p^\mu] = E$ , no hay ningún factor  $M$ , no hay supresión y  $t = 2$ , por lo tanto, la PDF  $f_1^q(\lambda)$  tiene twist 2. En el segundo término, como  $[n^\mu] = 1/[p^\mu] = E^{-1}$ , por la definición de  $n^\mu$  en (2.54).

Para guardar la consistencia de dimensiones, a este término se le agrega un  $M^2$  para tener dimensión  $E$ , por lo tanto,  $t = 4$  y la PDF  $f_4^q(\lambda)$  tiene twist 4.

Asimismo,

$$\langle P, s | \bar{\psi}^q(\lambda n) \mathbb{I} \psi^q(0) | P, s \rangle \sim M e^q(\lambda). \quad (3.36)$$

El lado izquierdo de (3.36), de nuevo tiene dimensión  $E$ , el derecho debe tener un factor  $M$  de dimensión  $E$ , así  $t = 3$  y la PDF  $e^q(\lambda)$  tiene twist 3. A esto se le conoce también como *twist subdominante*. La razón del nombre es la siguiente: el análisis está en el régimen de Bjorken, por lo que  $Q^2$  tiende a  $\infty$ . Twist-3 implica la presencia del factor  $M$  y  $M/Q$ , el cual, en el régimen de Bjorken tiende a cero, lo que hace su contribución menos dominante, subdominante, que la del twist-2.

En general, las distribuciones de partones más sencillas están relacionadas con la denominada *matriz de densidad quark-quark* definida por

$$\Gamma^q(x, \Gamma) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P, s | \bar{\psi}^q(0) \Gamma \psi^q(\lambda n) | P, s \rangle \quad (3.37)$$

donde  $n$  es un vector nulo tal que  $n^2 = 0, n^+ = 0$ ,  $\psi^q$  es la función de onda de los quarks de sabor  $q$  y  $\Gamma$  es una matriz gamma (o una combinación de ellas).

# Capítulo 4

## Dinámica de quarks y gluones

Hablando en una forma muy general, los elementos de matriz de operadores con twist elevados pueden ser descompuestos en tres contribuciones: una de twist determinado que establece relaciones entre las distintas PDF, una llamada *término de masa* que involucra a la masa de los quarks y una que incluye a las interacciones denominada *término tilde* [16]. El análisis global de lo anterior está codificado en las *ecuaciones de movimiento* del modelo. Al principio del capítulo, se encontrará un enfoque general para derivar algunas de tales relaciones para el modelo de partones con los quarks en estado libre. Las interacciones serán agregadas en lo subsecuente.

### 4.1. Ecuaciones de movimiento en modelos de quarks libres

La primera aproximación a la dinámica de quarks es el análisis cuando estos se encuentran libres de interacción, es decir, libres. Para derivar una formulación inicial de las relaciones de ecuaciones de movimiento se tomará una matriz (o combinación de matrices) de Dirac arbitraria  $\Gamma$ , ya sean las de (2.3) o  $\gamma^\pm$  de (2.56). Aplicando la ecuación de movimiento libre (2.1) dentro del correlador de quarks (3.4):

$$0 = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma (i \not{\partial} - m_q) \psi(z) | P, s \rangle \quad (4.1)$$

Después de integrar (4.1) por partes, procedimiento mostrado en (B.2) se llega a la identidad

$$0 = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma (\not{p} - m_q) \psi(z) | P, s \rangle \quad (4.2)$$

Obteniendo el hermitiano conjugado de (4.2):

$$\bar{0} = 0 = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(z) (-\not{p} - m_q) \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle \quad (4.3)$$

con  $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ . Tras integrar (4.3) por partes, como se muestra en (B.5), se llega a la identidad

$$0 = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) (\not{p} - m_q) \bar{\Gamma} \psi(z) | P, s \rangle. \quad (4.4)$$

Sumar (4.2) con (4.4) sigue siendo un cero. Por lo tanto, multiplicar esa suma por un factor 1/2 e integrar sobre  $p^-$  sigue siendo un cero. Con ello, se obtiene la siguiente identidad general para las ecuaciones de movimiento

$$0 = \int dp^- \int \frac{d^4 z}{2(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) [(\not{p} - m_q) \bar{\Gamma} + \Gamma(\not{p} - m_q)] \psi(z) | P, s \rangle. \quad (4.5)$$

Si, en particular  $\Gamma = \gamma^+$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int dp^- \int \frac{d^4 z}{2(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) (\not{p} - m_q) \bar{\gamma}^+ \psi(z) | P, s \rangle \\ &+ \int dp^- \int \frac{d^4 z}{2(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \gamma^+ (\not{p} - m_q) \psi(z) | P, s \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizando (B.6), (B.8) y (B.7) del Apéndice B en (4.6), y sabiendo que  $i\not{\not{p}} = \not{p} = \gamma^+ p^- + \gamma^- p^+ - \gamma_T \cdot p_T$ , por la métrica de (2.58), el integrando del primer término de (4.6) será

$$\begin{aligned} &\langle P, s | \bar{\psi}(0) [(\gamma^+)^2 p^- + \gamma^- \gamma^+ p^+ - \gamma_T \cdot p_T \gamma^+ - m_q \gamma^+] \psi(z) | P, s \rangle \\ &= \langle P, s | \bar{\psi}(0) \left[ 0 \cdot p^- + \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix} p^+ - \gamma_T \cdot p_T \gamma^+ - m_q \gamma^+ \right] \psi(z) | P, s \rangle. \end{aligned}$$

El integrando del segundo término de (4.6) será

$$\begin{aligned} &\langle P, s | \bar{\psi}(0) [(\gamma^+)^2 p^- + \gamma^+ \gamma^- p^+ - \gamma^+ \gamma_T \cdot p_T - m_q \gamma^+] \psi(z) | P, s \rangle \\ &= \langle P, s | \bar{\psi}(0) \left[ 0 \cdot p^- + \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix} p^+ - \gamma^+ \gamma_T \cdot p_T - m_q \gamma^+ \right] \psi(z) | P, s \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

En el apéndice B, la ecuación (B.9) se muestra que  $\gamma^+ \gamma_T \cdot p_T = -\gamma_T \cdot p_T \gamma^+$  por lo que, al sumar lo obtenido en (4.7), la parte transversa se cancela. Por lo tanto, (4.6) queda reescrito como

$$\int dp^- \int \frac{d^4 z}{2(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) [2\mathbb{I} p^+ - 2m_q \gamma^+] \psi(z) | P, s \rangle = 0. \quad (4.8)$$

Entonces, reordenando (4.8),

$$\int dp^- \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \mathbb{I} p^+ \psi(z) | P, s \rangle = \int dp^- \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) m_q \gamma^+ \psi(z) | P, s \rangle. \quad (4.9)$$

Multiplicando ambos términos de (4.9) por 1/2 notamos que estos son las definiciones de las PDF  $f_1^q(x, p_T)$  y  $e^q(x, p_T)$ , las ecuaciones (3.5) y (3.6). Utilizando este hecho y la ecuación (2.70)

$$\frac{xP^+}{2} \int dp^- \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \mathbb{I} \psi(z) | P, s \rangle = \frac{m_q}{2} \int dp^- \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \psi(z) | P, s \rangle. \quad (4.10)$$

Es decir

$$xP^+ \frac{M}{P^+} e^q(x, p_T) = m_q f_1^q(x, p_T). \quad (4.11)$$

Finalmente, una de las ecuaciones de movimiento para el caso de quarks libres relaciona la PDF  $f_1^q(x, p_T)$  con  $e^q(x, p_T)$  de la siguiente manera

$$x e^q(x, p_T) = \frac{m_q}{M} f_1^q(x, p_T). \quad (4.12)$$

Si se toman  $\Gamma$  distintas y se repite el procedimiento de las ecuaciones (4.6) a (4.12) se obtienen otras ecuaciones de movimiento. Se ha omitido el índice  $q$  en las funciones de onda  $\psi$  por simplicidad.

## 4.2. Ecuaciones de movimiento de quarks con interacción

El modelo del MIT bag toma a los quarks y gluones sin masa y confinados en su cavidad esférica. Por lo tanto, estos quarks deben obedecer (2.1) libre dentro de la cavidad. Entonces, ¿dónde entran las interacciones entre quarks y gluones? La respuesta es que dichas interacciones, al no poder darse en el interior de la bolsa (por tener a los quarks libres), deben estar presentes como un *efecto de frontera*, la frontera de la bolsa. Y ahí, (2.1) libre ya no se sigue.

En (2.1) la derivada utilizada es la parcial estándar  $\not{p} = i\not{D} = i\gamma^\mu \partial_\mu$ . Sin embargo, para tomar en cuenta a la interacción fuerte, se debe usar la derivada covariante  $D_\mu$  planteada por la QCD, ya que esta teoría cuántica de campos es la que incluye los efectos de los gluones [19]

Dicha derivada es

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s A_\mu^a \lambda_a \quad (4.13)$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento fuerte,  $A_\mu^a$  es el campo gluónico y  $\lambda^a$  es la base de vectores normalizados de las matrices de Gell-Mann, generadores del grupo SU(3), el cual es el grupo de simetría de color.

Reemplazando  $\partial_\mu$  por  $D_\mu$ , la ecuación de Dirac con interacción estará dada por

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_s A_\mu^a \lambda_a) - m]\psi = 0 \quad (4.14)$$

o en su forma compacta

$$(i\not{D} - m)\psi = 0. \quad (4.15)$$

Ahora, utilizando (4.15) en (4.1) se procederá al análisis incluyendo la interacción de los quarks con los gluones. El correlador tendrá la forma siguiente

$$0 = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma (i\not{D} - m_q) \psi(z) | P, s \rangle. \quad (4.16)$$

Repitiendo el procedimiento de la sección anterior, se tiene una expresión similar a (4.4), salvo por un término extra relacionado con el segundo término de (4.13) al que se le conoce como *correlador de quarks-gluones* y se denota  $\tilde{e}(x, p_T)$ . Esta última parte no se repitió en la tesis, pero los resultados pueden consultarse en [17] y [21].

Por lo tanto, la ecuación de movimiento con interacción está dada por

$$xe^q(x, p_T) = \frac{m_q}{M} f_1^q(x, p_T) + x\tilde{e}(x, p_T) \quad (4.17)$$

Si se toman  $\Gamma$  distintas se obtienen otras ecuaciones de movimiento, todas con un término gluónico extra, a los que se les llama en general *términos tilde*, los términos que codifican la interacción de los quarks con los gluones. Cuando los términos tilde son suprimidos como aproximación hacia quarks libres, el esquema resultante es conocido como *aproximación de Wandzura-Wilczek*. Sin embargo, en el modelo del MIT bag no hay explícitamente campos gluónicos (los quarks están libres y sin masa en la bolsa), por lo que la constricción de la frontera de la bolsa debe representar la interacción y manifestarse en una ecuación de movimiento, a saber [15]

$$i\rlap{/}\partial\psi(\xi) = \delta(\xi - R_0)\psi(\xi). \quad (4.18)$$

Así, todo el análisis queda contenido en la superficie de la bolsa y la delta anulará toda la ecuación en cualquier otro lugar.

### 4.3. La función escalar y su papel en la dinámica

La función de distribución de partones escalar  $e^q(x)$  ha aparecido en los cálculos del capítulo 3 y en las ecuaciones de movimiento calculadas en las secciones anteriores. Esta función en particular vale la pena ser analizada. Es posible obtener una definición de ella proveniente de la ecuación (3.37), la matriz de densidad quark-quark. Al hacer  $\Gamma = \mathbb{I}$ , como se hizo en el cálculo del bag (3.13), se obtiene la ecuación (3.36), a partir de la cual se puede definir  $e^q(x)$

$$e^q(x) \equiv \frac{1}{2M} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P, s | \bar{\psi}_q(0) \mathbb{I} \psi_q(\lambda n) | P, s \rangle \quad (4.19)$$

con  $\lambda = p^+ z^-$ . Para entender mejor esta estructura, la relación con el twist y con las interacciones de quarks y gluones, se propone descomponer a las funciones de onda  $\psi$  en componentes *buenas*  $\psi_+$  y *malas*  $\psi_-$  de modo que

$$\psi = \psi_+ + \psi_- \quad (4.20)$$

donde  $\psi_{\pm} = \mathcal{P}_{\pm}\psi$  con  $\mathcal{P}_{\pm}$  *operadores de proyección*, cuya relación con las matrices gamma dependerá de su representación. Al utilizar estas proyecciones sobre la ecuación de Dirac con interacción (4.15), es posible obtener relaciones entre las componentes buenas y malas y se puede mostrar que la componente mala no es un campo dinámico independiente sino una constricción en términos de la buena y la componente transversa de la derivada covariante. Descomponiendo al elemento de matriz en términos de  $\psi_+$  y  $\psi_-$  y utilizando la constricción es posible reescribir a la PDF  $e^q(x)$  de la siguiente forma, omitiendo el término de masa  $m_q$  anteriormente descrito [10]

$$xe^q(x) = -\frac{1}{4M} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P, s | \bar{\psi}_+(0) \not{n} \not{D}_{\perp}(\lambda n) \psi_+(\lambda n) | P, s \rangle \quad (4.21)$$

Este resultado implica lo siguiente: la función de distribución subdominante  $e^q(x)$  puede ser escrita en términos de la derivada covariante, la cual tiene al campo gluónico en su interior. Esto quiere decir que la naturaleza de la PDF  $e^q(x)$  es ser una función de correlación de quarks-gluones en el cono de luz.

Ahora, se discutirán sus reglas de suma. Se tomará la ecuación (3.6), se integrará sobre  $p_T$  y el resultado sobre la variable de Bjorken  $x$ . Con ello, se obtendrá el primer momento de Mellin para la función  $e^q(x)$ :

$$\begin{aligned}
\int e^q(x)dx &= \frac{P^+}{M} \int \frac{dz^- dx}{4\pi} e^{ip^+z^-} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \mathbb{I}\psi(z) | P, s \rangle |_{\vec{z}_T=z^+=0} \\
&= \frac{P^+}{M} \int \frac{dz^- dx}{4\pi} e^{ixP^+z^-} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \mathbb{I}\psi(z^-) | P, s \rangle \\
&= \frac{P^+}{M} \int \frac{dz^-}{2} \delta(P^+z^-) \langle P, s | \bar{\psi}(0) \mathbb{I}\psi(z^-) | P, s \rangle \\
&= \frac{P^+}{2P^+M} \int dz^- \delta(z^-) \langle P, s | \bar{\psi}(0) \mathbb{I}\psi(z^-) | P, s \rangle \\
&= \frac{1}{2M} \langle P, s | \bar{\psi}(0)\psi(0) | P, s \rangle
\end{aligned}$$

El anterior es el mismo resultado que evaluar el elemento de matriz de (4.19) en  $\lambda n = 0$  [17]. Ahora, se calculará el segundo momento de Mellin integrando la ecuación de movimiento libre (4.12) y aprovechando la regla de suma para  $f_1^q(x)$

$$\int f_1^q(x)dx = N_q \quad (4.22)$$

con  $N_q$  definido en (3.16) y así:

$$\int x e^q(x)dx = \frac{m_q}{M} \int f_1^q(x)dx = \frac{m_q N_q}{M}$$

Por lo tanto, la PDF subdominante cumple

$$\int e^q(x)dx = \frac{1}{2M} \langle P, s | \bar{\psi}(0)\psi(0) | P, s \rangle \quad (4.23)$$

$$\int x e^q(x)dx = \frac{m_q}{M} N_q \quad (4.24)$$

La segunda, (4.24) tiene una interpretación sencilla en términos de la ecuación de movimiento, pero (4.23) no es tan trivial. Y es que, como se mencionó al principio del capítulo, en realidad la PDF  $e^q(x)$  puede ser descompuesta de la siguiente forma:

$$e^q(x) = \frac{\delta(x)}{2M} \langle P, s | \bar{\psi}(0)\psi(0) | P, s \rangle + \tilde{e}^q(x) + e_{\text{masa}}^q(x) \quad (4.25)$$

donde el primer término es el elemento de matriz local y los últimos dos términos son:  $\tilde{e}^q(x)$  el término tilde, de la contribución puramente subdominante twist 3 y un término de masa  $e_{\text{masa}}^q(x)$ , los cuales, en QCD, cumplen las propiedades

$$\int \tilde{e}^q(x)dx = \int x \tilde{e}^q(x)dx = \int e_{\text{masa}}^q(x)dx = 0. \quad (4.26)$$

Para más detalles ver, por ejemplo, [20]. El segundo término es una interacción dependiente y contiene explícitamente a los campos gluónicos. ¿Qué relación tienen los anteriores resultados con lo calculado con el modelo del MIT bag? Para responder esto, se procederá a comparar los momentos de Mellin obtenidos a partir de la ecuación de Dirac libre con los calculados con el MIT bag (3.18).

La primera diferencia que salta a la vista es la ecuación (4.24), la cual depende de la masa del quark. Si se quisiera calcular dicha regla de suma para un quark up utilizando los datos  $m_u = 2.2 \text{ MeV}/c^2$ ,  $M = 938 \text{ MeV}$  y  $N_u = 2$ , el segundo momento de Mellin corresponde a  $M^2(e^u) = 0.005$ . Sin embargo, en (3.22) el MIT bag da un valor del segundo momento de  $M^2(e^u) = 0.241$  que es dramáticamente mayor. C. Lorcé, B. Pasquini y P. Schweitzer [16] indican que la suma del primer momento de Mellin de  $e^u$  con el de  $e^d$  debe tener un valor numérico entre 6 y 10. Sin embargo, (3.22) indica que el primer momento en el MIT bag para  $e^u$  es  $M^1(e^u) = 0.918$  y  $M^1(e^d) = 0.459$ . La suma, 1.377, se encuentra considerablemente lejos de lo indicado por Lorcé, Pasquini y Schweitzer. De este resultado se puede inferir que la regla (4.23) tampoco se sigue al tratar de calcularla con el MIT bag. Hay más. Como consecuencia de la discrepancia entre los primeros momentos de Mellin de las ecuaciones de movimiento libres y del MIT bag, las condiciones dadas en (4.26) tampoco se seguirán para el MIT bag, en particular, el primer momento de Mellin para el término tilde ya no es nulo, indicando que existe una contribución de la interacción de los quarks y los gluones.

¿Por qué ocurre esto? La razón es que (4.23) y (4.24) utilizan la ecuación de Dirac sin la derivada covariante, es decir, sin los campos gluónicos y son derivadas de ecuaciones de movimiento libres, mientras que, el modelo del MIT bag sí toma en cuenta las interacciones desde el planteamiento de sus funciones de onda, ya que necesitan de las condiciones de frontera de la bolsa. Y son estas condiciones las que modifican la acción de la ecuación de Dirac. ¿Y qué implicaciones tiene esto sobre la dinámica de quarks y gluones? Ya se indicó que (4.24) depende de la masa del quark  $m_q$ . Un análisis ingenuo concluiría que el segundo momento de Mellin para el MIT bag debería ser cero, ya que en este modelo, a los quarks confinados en la bolsa se les supone sin masa. El valor de 0.241 de (3.22) muestra que no sólo que esta regla de suma no se sigue sino que toda la contribución que tendrá la PDF se encuentra en la frontera de la bolsa. Esta es una razón para identificar a la función de distribución subdominante  $e^q(x)$  como un efecto de frontera. Y debido a que es posible identificarla como un correlador de quarks y gluones, se concluye que la interacción entre estas partículas y su dinámica, para el MIT bag, se encuentra en la frontera de la bolsa. Como se mencionó previamente, la presión  $B$  se introduce en el modelo para contener a los quarks dentro de la bolsa. Asimismo, la tensión hacia el exterior, provocada por la energía cinética de los quarks y su interacción con los gluones contrarresta la presión  $B$ , creando un balance. El confinamiento de color en este modelo es el resultado de dicho balance. Al ser esta frontera el lugar en común de la dinámica de quarks y gluones y el confinamiento, para este modelo, los detalles fundamentales de la estructura hadrónica se encuentran ahí.

## 4.4. Extracción de la función escalar

De entre las PDF, la función subdominante  $e^q(x)$  es de las menos estudiadas experimentalmente. Sin embargo, recientemente la colaboración CLAS [22, 23, 24] ha arrojado nuevos datos

experimentales sobre  $e^q(x)$ . La forma de llegar a esta función es con la producción de pares de piones semi-inclusiva en el régimen de dispersión profundamente inelástica (SIDIS). La diferencia entre este proceso y la DIS, es que además del leptón dispersado, se detecta al menos uno de los hadrones salientes, producto de la fragmentación del quark que interactúa con el fotón. Para el estudio de este experimento se requiere agregar, además de las PDF, un tipo nuevo de funciones que describen la dinámica no perturbativa de la hadronización, que es el proceso de formar hadrones a partir de quarks y gluones. Se les conoce como funciones de fragmentación (FF), las cuales, para un twist dominante, se pueden interpretar como la probabilidad de que un quark forme cierto hadrón [24].

En esta sección se presenta la medición de la *asimetría del spin del haz* (BSA por sus siglas en inglés) en la electroproducción con SIDIS de dos piones cargados. Un BSA se define como la razón de la diferencia de las secciones eficaces del haz con polarización up y down. [23]. Esta razón está escrita en función de las PDF y las FF de forma que se tome en cuenta tanto la dispersión provocada por los partones del hadrón como las partículas producto de dicha dispersión. Con todo lo anterior, lo relevante para la extracción de la PDF  $e^q(x)$  es la BSA para un haz polarizado y un blanco no polarizado. Si bien su expresión completa involucra tópicos que van más allá de los objetivos de este trabajo, es posible describir a la BSA como sigue [22]:

$$A_{LU}(x, z, m_{\pi\pi}, Q, y) = \frac{W(y) M |\vec{R}| \sum_q e_q^2 \left[ x e^q(x) H_1^{\triangleleft q}(z, m_{\pi\pi}, Q^2) + \frac{m_{\pi\pi}}{zM} f_1^q(x) \tilde{G}^{\triangleleft q}(z, m_{\pi\pi}, Q^2) \right]}{A(y) Q m_{\pi\pi} \sum_q e_q^2 f_1^q(x) D_1^q(z, m_{\pi\pi}, Q^2)} \quad (4.27)$$

donde  $e_q$  son las cargas de los quarks de sabor  $q$ , no confundir con la PDF  $e^q(x)$ ,  $W(y)$  y  $A(y)$  son factores de corrección,  $\vec{R}$  es la mitad de la diferencia de los momentos de los piones,  $m_{\pi\pi}$  es la masa invariante,  $y$  y  $z$  son invariantes para los eventos SIDIS,  $H_1^{\triangleleft q}$  y  $D_1^q$  son las FF de twist 2 y  $\tilde{G}^{\triangleleft q}$  la FF de twist 3 [25]. El primer subíndice  $L$  corresponde a la polarización del haz, que es *longitudinal*. El segundo  $U$  al del blanco, que es *no polarizado* (*unpolarized*) [24].

La BSA (4.27) fue recientemente extraída por la colaboración CLAS (CEBAF Large Acceptance Spectrometer) de datos recolectados en la instalación del Continuous Electron Beam Accelerator Facility (CEBAF) en las instalaciones del Thomas Jefferson National Accelerator con haces polarizados de electrones longitudinalmente polarizados de 5.5 GeV [23] y 10.6 GeV [24] sobre un blanco de hidrógeno no polarizado. Debido a que el blanco es un protón, se extraen las siguientes combinaciones de sabores que se hallan en el numerador y denominador de (4.27):

$$e^V(x) = \sum_q e_q^2 e^q(x) = \frac{4}{9} e^u(x) - \frac{1}{9} e^d(x) \quad (4.28)$$

y

$$f_1^V(x) = \sum_q e_q^2 f_1^q(x) = \frac{4}{9} f_1^u(x) - \frac{1}{9} f_1^d(x). \quad (4.29)$$

La explicación de los signos, aunque va más allá de los propósitos de este trabajo, puede consultarse en [15]. Se puede notar que la BSA está en términos de funciones con twist 2 y funciones con twist 3. A grandes rasgos, la asimetría consiste en dos términos. El primero involucra la PDF deseada de twist 3  $e^q(x)$  multiplicada por la FF de twist 2  $H_1^{\triangleleft q}$  y el segundo involucra la PDF conocida de twist 2  $f_1^q(x)$  con la desconocida FF de twist 3  $\tilde{G}^{\triangleleft q}$ .

Para extraer la función (4.28), se usaron dos escenarios (vease [22]), los cuales permiten definir valores máximos y mínimos de la combinación de sabor para cada  $x$  utilizada, dando una región que contiene a  $e^V$ : uno donde se desprecian los términos de masa y tilde y otro donde sí se toman en cuenta. Con lo desarrollado en el capítulo 3, es posible encontrar la expresión para la combinación de sabor  $e^V$  en el modelo del MIT bag. Simplemente se retoma el hecho de que  $2e^d(x) = e^u(x)$  para el cálculo de (4.28)

$$e^V(x) = \frac{4}{9}e^u(x) - \frac{1}{9}e^d(x) = \frac{8}{9}e^d(x) - \frac{1}{9}e^d(x) = \frac{7}{9}e^d(x) \quad (4.30)$$

Los resultados experimentales de las colaboraciones CLAS, brindados por [23] y [24] y analizados en una versión actualizada de [22] son presentados en la Figura 4.1, en donde se ha graficado también la curva correspondiente a (4.30).

La comparación con el resultado obtenido en el MIT bag muestra que la curva predicha por este modelo se encuentra dentro de la región acotada por los datos experimentales, lo que indica un buen manejo de las interacciones quark-gluón y el mecanismo de confinamiento para este modelo, validándolo al menos en esta prueba. Algo que llama la atención es que, aún con el escenario de Wandzura-Wilczek, que provee de los valores mínimos de  $e^V$ , los datos muestran que la PDF  $e^q(x)$  no se fue a cero, es decir, no es descartable. Esto proporciona una evidencia experimental de que la estructura hadrónica depende de la dinámica de los quarks y gluones. Una gran parte de la región experimental para  $e^V$  no está aglutinada cerca de cero, así que, en general,  $e^q(x)$  no se anula, y dado que en secciones anteriores se explicó que esta PDF es un correlador entre quarks y gluones, se puede ver que la contribución de la interacción de estas partículas es considerable en los procesos de dispersión y hadronización, y por ende, en la estructura de los hadrones. Si bien puede haber puntos experimentales compatibles con cero que indican que puede no haber contribución de la función  $e^q(x)$ , el hecho de que la región para  $e^V(x)$  cubra en su enorme mayoría valores no nulos indica que la contribución, en general, no se anula. Sin embargo, hay que destacar que la región acotada es muy grande, teniendo datos muy por encima de la curva del MIT bag. Esto implica que aún hay detalles de las PDF y de las FF que siguen sin ser explorados y estudios posteriores pueden decir mucho más sobre el comportamiento de estas funciones.

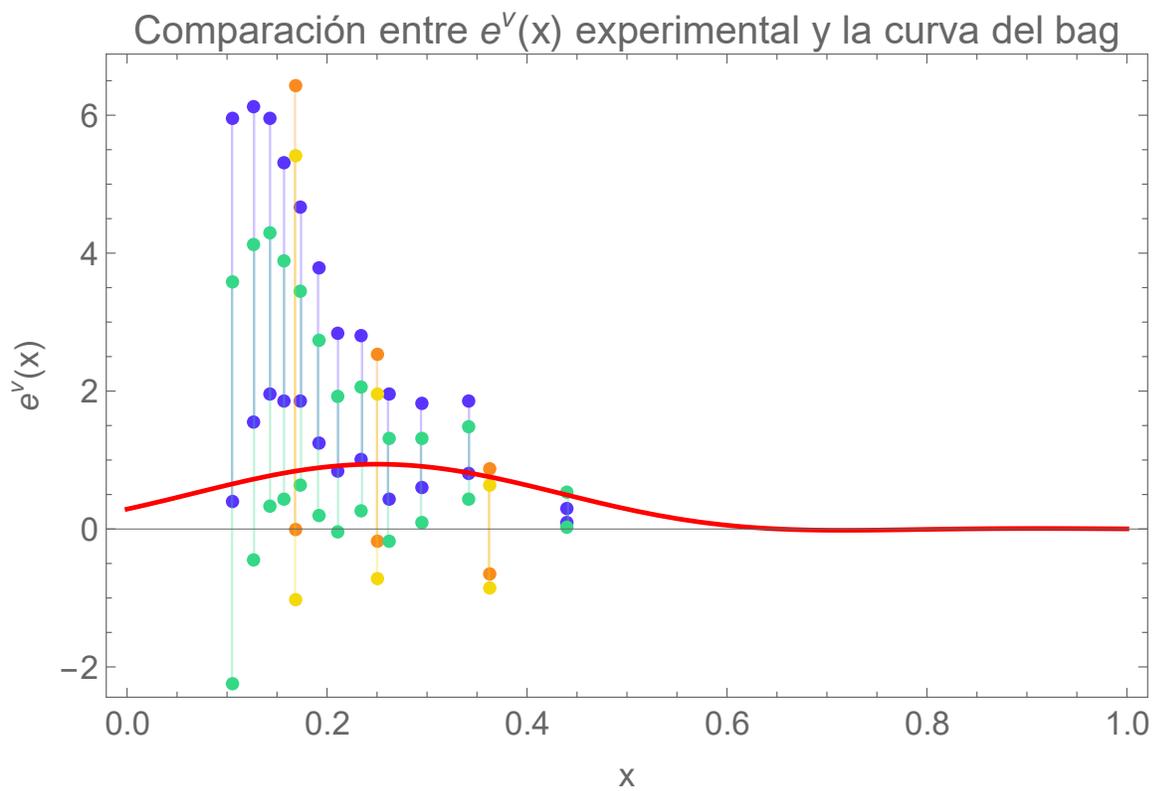


Figura 4.1: Extracción de la combinación  $e^V(x)$  experimental comparada con la predicha por el MIT bag a partir de los datos de [23] en amarillo/naranja y [24] en azul/turquesa. Los puntos indican los valores máximos y mínimos de la extracción. Las barras de colores representan a las barras de error.



# Capítulo 5

## Conclusiones

La motivación principal para el enfoque de esta tesis es ahondar en la dinámica de quarks y gluones, importante en la estructura de los hadrones. Ampliar el conocimiento en esta área lleva a una mejor comprensión de la QCD no perturbativa, que a su vez, arrojará más entendimiento sobre la fuerza de interacción nuclear fuerte.

En el presente trabajo se mostró primero el formalismo físico y matemático detrás de la dispersión profundamente inelástica en general, se estableció el contexto para comprender a la estructura de los hadrones en términos de quarks y se fijó el marco de referencia del cono de luz para describir adecuadamente la cinemática involucrada. Después, se presentó el modelo del MIT bag como el elegido para el análisis quark en esta tesis debido a que introduce el mecanismo de confinamiento, toma en cuenta las interacciones gluónicas y las promueve como efectos de frontera. Se procedió a calcular con dicho modelo y con la ayuda de la dinámica del cono de luz a las funciones de distribución de partones  $f_1^q$  y  $e^q$ . Por último, se estudiaron las ecuaciones de movimiento libres para twist 3 con las cuales se pudo obtener una relación entre las PDF  $f_1^q$  y  $e^q$  y encontrar los momentos de Mellin para QCD en el caso libre.

Se logró calcular numéricamente los momentos de Mellin de las PDF encontradas con el MIT bag y su comparación con lo calculado con ecuaciones de movimiento permitió una comprensión de los quarks a nivel no perturbativo. También se compararon los resultados anteriores con las reglas de suma de las ecuaciones de movimiento de modo que se encontraron discrepancias. La diferencia entre ambos enfoques es producida por el modelo. Mientras que las ecuaciones de movimiento utilizan la ecuación de Dirac libre y la QCD conocida, el MIT bag altera los resultados al involucrar a los efectos de frontera en las funciones de onda de los quarks que luego se utilizan para calcular las PDF.

Asimismo se reveló la naturaleza de la función subdominante  $e^q$ , la cual es un correlador entre quarks y gluones y en su interior está el corazón de la dinámica entre estas partículas elementales, además del término de masa y de la contribución del elemento de matriz local. Aunado con lo ya discutido, se puede concluir que las diferencias entre los valores de los momentos de Mellin es debido al hecho que la interacción de quarks y gluones se manifiesta diferente en el MIT bag que en QCD.

Enlistando los logros con este trabajo académico se puede destacar la comprensión de la dinámica del cono de luz y su razón de ser, comprender a profundidad el funcionamiento de la DIS, la interpretación de las PDF y sus reglas de suma, se conoció un nuevo modelo para los quarks con enfoque no perturbativo y a través de sus diferencias con los resultados de QCD

interpretar el efecto que la dinámica de los quarks y gluones tiene en las PDF.

El MIT bag es muy interesante a nivel científico por introducir desde el principio al mecanismo de confinamiento, provocando que los resultados calculados con él ya consideran los efectos de la interacción de quarks y gluones. La comparación entre momentos de Mellin de QCD y del bag es un excelente acercamiento al emocionante mundo fenomenológico de la interacción fuerte y a los misterios de los gluones. Su análisis en esta tesis ha sido el primer gran paso académico para adentrarse en todas las cosas que aguardan ser descubiertas.

Por último, con los datos experimentales de la colaboración CLAS fue posible validar la predicción del MIT bag ya que la curva para la combinación de sabor  $e^V(x)$  estuvo dentro de la región acotada por los datos. También se pudo comprobar cómo la contribución de la PDF  $e^q(x)$  no es despreciable para los procesos de dispersión y hadronización. Dado que  $e^q(x)$  es un correlador de quarks y gluones, se puede concluir que, efectivamente, la dinámica de estas partículas impacta en la estructura hadrónica. Sin embargo, las funciones de twist 3 siguen siendo ampliamente desconocidas, por lo que, no se puede aún dar una última palabra al respecto.

# Apéndice A

## Coeficientes de sabor y spin

Se calculará explícitamente el coeficiente  $C_{++}^{u;\uparrow,\uparrow}$  mostrado en la Figura 3.1

$$\begin{aligned}
 C_{++}^{u;\uparrow,\uparrow} &= -\frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \times \\
 &\langle 0 | [b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P - b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{d,\uparrow}^P] b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger a} [b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} - b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^{\dagger S}] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Tendremos 4 términos, desarrollemos cada uno de ellos por separado, utilizando el anticonmutador de la ecuación (3.10) para reordenar los operadores:

$$\begin{aligned}
 &\langle 0 | [b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger a} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger a} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} | 0 \rangle - \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger a} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow} \delta_{Qa} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} | 0 \rangle - \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger a} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^2 \delta_{Qa} \delta_{Nb} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger R} | 0 \rangle - \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow} \delta_{Qa} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^N b_{u,\uparrow}^{\dagger R} | 0 \rangle \\
 &- \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow} \delta_{Ra} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} | 0 \rangle \\
 &= \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Qa} \delta_{Nb} \delta_{MR} - \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^2 \delta_{Qa} \delta_{NR} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger b} | 0 \rangle \\
 &- \langle 0 | \delta_{dd\uparrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^2 \delta_{Ra} \delta_{Nb} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} | 0 \rangle + \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^2 \delta_{Ra} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^N b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} | 0 \rangle \\
 &= \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Qa} \delta_{Nb} \delta_{MR} - \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Qa} \delta_{NR} \delta_{Mb} \\
 &- \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Ra} \delta_{Nb} \delta_{MQ} + \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^2 \delta_{Ra} \delta_{NQ} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger b} | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el primer término de (A.1) es un conjunto de deltas de Dirac

$$\begin{aligned}
 &\langle 0 | [b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger a} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} | 0 \rangle \\
 &= \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Qa} \delta_{Nb} \delta_{MR} - \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Qa} \delta_{NR} \delta_{Mb} \\
 &- \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Ra} \delta_{Nb} \delta_{MQ} + \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow}^3 \delta_{Ra} \delta_{NQ} \delta_{Mb}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Los demás términos se calculan con el mismo procedimiento de los anticonmutadores

$$\langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^{\dagger S} | 0 \rangle = \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\uparrow}^{\dagger S} b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^P | 0 \rangle \xrightarrow{0} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{d,\uparrow}^P b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} | 0 \rangle = \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{d,\downarrow}^{\dagger S} b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^P b_{u,\downarrow}^N | 0 \rangle \xrightarrow{0} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{d,\uparrow}^P b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^{\dagger S} | 0 \rangle &= \langle 0 | \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{uu\downarrow\downarrow} \delta_{PS} \delta_{NR} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{uu\downarrow\downarrow} \delta_{PS} \delta_{NR} \delta_{uu\uparrow\uparrow} \delta_{Qa} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^{\dagger b} | 0 \rangle \\ &= \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{uu\downarrow\downarrow} \delta_{uu\uparrow\uparrow}^2 \delta_{PS} \delta_{NR} \delta_{Qa} \delta_{Mb} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De esta forma

$$\begin{aligned} C_{++}^{u;\uparrow,\uparrow} &= -\frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \times \\ &\quad [\delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow\uparrow}^3 \delta_{Qa} \delta_{Nb} \delta_{MR} - \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow\uparrow}^3 \delta_{Qa} \delta_{NR} \delta_{Mb} - \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow\uparrow}^3 \delta_{Ra} \delta_{Nb} \delta_{MQ} \\ &\quad + \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{uu\uparrow\uparrow}^3 \delta_{Ra} \delta_{NQ} \delta_{Mb} + \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{uu\downarrow\downarrow} \delta_{uu\uparrow\uparrow}^2 \delta_{PS} \delta_{NR} \delta_{Qa} \delta_{Mb}] \\ &= -\frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} [\epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \delta_{PS} \delta_{QN} \delta_{MR} - \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \delta_{PS} \delta_{QM} \delta_{NR} \\ &\quad - \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \delta_{PS} \delta_{RN} \delta_{MQ} + \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \delta_{PS} \delta_{RM} \delta_{NQ} - \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \delta_{PS} \delta_{NR} \delta_{QM}] \\ &= \frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} [-\epsilon_{RQS} \epsilon_{QRS} + \epsilon_{QRS} \epsilon_{QRS} + \epsilon_{QRS} \epsilon_{QRS} - \epsilon_{RQS} \epsilon_{QRS} + \epsilon_{QRS} \epsilon_{QRS}] = \\ &= \frac{1}{18} (6 + 6 + 6 + 6 + 6) \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ahora se calculará  $C_{++}^{u;\downarrow,\downarrow}$

$$\begin{aligned} C_{++}^{u;\downarrow,\downarrow} &= -\frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \times \\ &\quad \langle 0 | [b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P - b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{d,\uparrow}^P] b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a [b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} - b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^{\dagger S}] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Primer término:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | [b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} | 0 \rangle - \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^{\dagger S} b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^P | 0 \rangle \xrightarrow{0} \\
&= \langle 0 | \delta_{dd\downarrow} \delta_{PS} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{u,\downarrow}^a | 0 \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Segundo término

$$\langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{d,\downarrow}^P b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^{\dagger S} | 0 \rangle = \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\uparrow}^N b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^{\dagger S} b_{d,\downarrow}^P | 0 \rangle \xrightarrow{0} = 0 \tag{A.9}$$

Tercer término

$$\langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{d,\uparrow}^P b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} | 0 \rangle = \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\uparrow}^{\dagger R} b_{d,\downarrow}^{\dagger S} b_{d,\uparrow}^P | 0 \rangle \xrightarrow{0} = 0 \tag{A.10}$$

Cuarto término

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{d,\uparrow}^P b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} b_{d,\uparrow}^{\dagger S} | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\downarrow}^a b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} b_{u,\downarrow}^{\dagger R} | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{uu\downarrow\downarrow} \delta_{Ra} b_{u,\uparrow}^M b_{u,\downarrow}^N b_{u,\downarrow}^{\dagger b} b_{u,\uparrow}^{\dagger Q} | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{uu\downarrow\downarrow} \delta_{Ra} \delta_{uu\uparrow\uparrow} \delta_{MQ} b_{u,\downarrow}^N b_{u,\downarrow}^{\dagger b} | 0 \rangle \\
&= \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{uu\downarrow\downarrow}^2 \delta_{uu\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{Ra} \delta_{MQ} \delta_{Nb}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
C_{++}^{u;\downarrow\downarrow} &= -\frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \delta_{dd\uparrow\uparrow} \delta_{uu\downarrow\downarrow}^2 \delta_{uu\uparrow\uparrow} \delta_{PS} \delta_{Ra} \delta_{MQ} \delta_{Nb} \\
&= \frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} \epsilon_{MNP} \epsilon_{QRS} \delta_{PS} \delta_{RN} \delta_{MQ} \\
&= \frac{1}{18} \sum_{\substack{M \neq N \neq P \\ Q \neq R \neq S}} \epsilon_{QRS} \epsilon_{QRS} \\
&= \frac{6}{18} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Por último, con los valores de la Figura 3.1 y la ecuación (3.16) se hallarán los coeficientes  $N_u$  y  $N_d$ . Se destacarán las siguientes relaciones entre coeficientes:

$$\begin{aligned}
C_{++}^{u;\uparrow\uparrow} &= C_{--}^{u;\downarrow\downarrow} = \frac{5}{3} & C_{--}^{u;\uparrow\uparrow} &= C_{++}^{u;\downarrow\downarrow} = \frac{1}{3} \\
C_{--}^{d;\downarrow\downarrow} &= C_{++}^{d;\uparrow\uparrow} = \frac{1}{3} & C_{++}^{d;\downarrow\downarrow} &= C_{--}^{d;\uparrow\uparrow} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Entonces, promediando sobre los estados  $\Lambda$  y  $\Lambda'$ :

$$N_u = \frac{(C_{++}^{u;\uparrow,\uparrow} + C_{++}^{u;\downarrow,\downarrow}) + (C_{--}^{u;\uparrow,\uparrow} + C_{--}^{u;\downarrow,\downarrow})}{2} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}}{2} = 2 \quad (\text{A.13})$$

$$N_d = \frac{(C_{++}^{d;\uparrow,\uparrow} + C_{++}^{d;\downarrow,\downarrow}) + (C_{--}^{d;\uparrow,\uparrow} + C_{--}^{d;\downarrow,\downarrow})}{2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = 1 \quad (\text{A.14})$$

## Apéndice B

# Cálculos útiles para las ecuaciones de movimiento

La integración por partes del primer término de (4.1) utiliza la siguiente descomposición:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \quad du = \frac{1}{(2\pi)^4} \partial_\mu e^{ip \cdot z} d^4 z$$

$$dv = \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma i \partial_\mu \gamma^\mu \psi(z) | P, s \rangle \quad v = i \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma \gamma^\mu \psi(z) | P, s \rangle$$

Entonces, con la forma usual de integración por partes  $0 = \int u dv = uv - \int v du$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{i}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma \gamma^\mu \psi(z) | P, s \rangle \right]_\infty^\infty + \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} (-i \partial_\mu e^{ip_\mu z^\mu}) \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma \gamma^\mu \psi(z) | P, s \rangle \\ &= 0 + \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} (-i^2 p_\mu e^{ip_\mu z^\mu}) \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma \gamma^\mu \psi(z) | P, s \rangle \\ &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma p_\mu \gamma^\mu \psi(z) | P, s \rangle \\ &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma \gamma^\mu p_\mu \psi(z) | P, s \rangle \\ &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \not{p} \psi(z) | P, s \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Uniendo (B.1) con el segundo término de (4.1), el de la masa del quark, se obtiene

$$0 = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \Gamma (\not{p} - m_q) \psi(z) | P, s \rangle \quad (\text{B.2})$$

La integración por partes del primer término de (4.3) utiliza la siguiente descomposición:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z} \quad du = \frac{1}{(2\pi)^4} \partial_\mu e^{-ip \cdot z} d^4 z$$

$$dv = \langle P, s | \bar{\psi}(z) (-i \partial_\mu \gamma^\mu) \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle \quad v = -i \langle P, s | \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle$$

La cual, aunque es similar a la anterior, el procedimiento subsecuente no es análogo. Entonces, con la forma usual de integración por partes  $0 = \int u dv = uv - \int v du$  :

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[ \frac{-i}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle \right]_{-\infty}^{\infty} + \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} i \partial_\mu e^{-ip_\mu z^\mu} \langle P, s | \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle \\
 &= 0 + \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} (-i^2 p_\mu e^{-ip_\mu z^\mu}) \langle P, s | \bar{\psi}(z) \gamma^\mu \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle \\
 &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(z) p_\mu \gamma^\mu \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle
 \end{aligned}$$

Para modificar las funciones de onda y la exponencial, de modo que queden iguales que en la integración por partes anterior, se aprovecharán las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 \psi(z) &= \psi(0) e^{-ip \cdot z} \\
 \bar{\psi}(z) &= \bar{\psi}(0) e^{ip \cdot z}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
 0 &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(z) p_\mu \gamma^\mu \bar{\Gamma} \psi(0) | P, s \rangle \\
 &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) e^{ip \cdot z} \gamma^\mu p_\mu \bar{\Gamma} \psi(z) e^{ip \cdot z} | P, s \rangle \\
 &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot z + ip \cdot z + ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) e^{ip \cdot z} \not{p} \bar{\Gamma} \psi(z) e^{ip \cdot z} | P, s \rangle \\
 &= \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \langle P, s | \bar{\psi}(0) \not{p} \bar{\Gamma} \psi(z) e^{ip \cdot z} | P, s \rangle
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Uniendo (B.4) con el segundo término de (4.3), el de la masa del quark, se obtiene

$$0 = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot z} \langle P, s | \bar{\psi}(0) (\not{p} - m_q) \bar{\Gamma} \psi(z) | P, s \rangle \tag{B.5}$$

Para continuar, se necesita saber que

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}^+ &= \gamma^0 (\gamma^+)^\dagger \gamma^0 \\
 &= \gamma^0 \left( \frac{\gamma^{0\dagger} + \gamma^{3\dagger}}{\sqrt{2}} \right) \gamma^0 \\
 &= \gamma^0 \left( \frac{\gamma^0 - \gamma^3}{\sqrt{2}} \right) \gamma^0 \\
 &= \frac{\gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^3 \gamma^0}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{(\gamma^0)^\dagger - (\gamma^3)^\dagger}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\gamma^0 + \gamma^3}{\sqrt{2}} \\
 &= \gamma^+
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

También se requiere conocer los productos  $\gamma^+\gamma^-$  y  $\gamma^-\gamma^+$  utilizando  $\gamma^0$  dada por (2.3) y la representación de (2.4) para simplificar.

$$\begin{aligned}
\gamma^+\gamma^- &= \frac{1}{2}(\gamma^0 + \gamma^3)(\gamma^0 - \gamma^3) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{I}^2 + (\sigma^3)^2 & -2\mathbb{I}\sigma^3 \\ -2\mathbb{I}\sigma^3 & (\sigma^3)^2 + \mathbb{I}^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbb{I} & -2\sigma^3 \\ -2\sigma^3 & 2\mathbb{I} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -\sigma^3 \\ -\sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^-\gamma^+ &= \frac{1}{2}(\gamma^0 - \gamma^3)(\gamma^0 + \gamma^3) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{I}^2 + (\sigma^3)^2 & 2\mathbb{I}\sigma^3 \\ 2\mathbb{I}\sigma^3 & (\sigma^3)^2 + \mathbb{I}^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbb{I} & 2\sigma^3 \\ 2\sigma^3 & 2\mathbb{I} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Por último, se necesita probar que  $\gamma^+\gamma_T \cdot p_T = -\gamma_T \cdot p_T \gamma^+$ . Para ello se aprovechará el hecho de que las matrices de Pauli anticonmutan cuando son diferentes, es decir,  $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 0$  si  $i \neq j$ , por lo tanto  $\sigma^i \sigma^j = -\sigma^j \sigma^i$ .

$$\begin{aligned}
\gamma^+\gamma_T \cdot p_T &= \gamma^+\gamma^1 p^1 + \gamma^+\gamma^2 p^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix} p^1 + \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix} p^2 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sigma^3 \sigma^1 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & -\sigma^3 \sigma^1 \end{bmatrix} p^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sigma^3 \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -\sigma^3 \sigma^2 \end{bmatrix} p^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sigma^1 \sigma^3 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & \sigma^1 \sigma^3 \end{bmatrix} p^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sigma^2 \sigma^3 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \sigma^3 \end{bmatrix} p^2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix} p^1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix} p^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\mathbb{I} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \right) \\
&= -\gamma^1 p^1 \gamma^+ - \gamma^2 p^2 \gamma^+ \\
&= -\gamma_T \cdot p_T \gamma^+ \tag{B.9}
\end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] F. Close, *An Introduction to Quarks and Partons*, Academic Press Inc, 1979.
- [2] F. Halzen, A. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, 1994.
- [3] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weisskopf, *A New Extended Model of Hadrons*, Phys. Rev. D **9** (1974), 3471-3495 doi:10.1103/PhysRevD.9.3471
- [4] T. Lancaster, S. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Oxford University Press, 2014.
- [5] M. Hentschinski, *Proton structure functions at small  $x$* , J. Phys. Conf. Ser. **651** (2015) no.1, 012011 doi:10.1088/1742-6596/651/1/012011.
- [6] R. G. Roberts, *The structure of the proton*, Cambridge University Press, 1990.
- [7] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey, *Gauge theory in particle physics*, IoP Publishing Ltd, 2003.
- [8] J. G. Benel, *Ajuste restringido de la función de distribución de partones de la transversidad*, UNI, Lima, Tesis de Licenciatura, 2001.
- [9] A. V. Manohar, *An Introduction to spin dependent deep inelastic scattering*, [arXiv:hep-ph/9204208 [hep-ph]].
- [10] R. L. Jaffe, *Spin, twist and hadron structure in deep inelastic processes*, [arXiv:hep-ph/9602236 [hep-ph]].
- [11] A.S. Miramontes, *Generalized Transverse Momentum Distribution in a Quark Model*, CINVESTAV-Zacatenco, Tesis de maestría, 2016.
- [12] V. Barone, A. Drago, P. G. Ratcliffe, *Transverse polarisation of quarks in hadrons*, Phys. Rept. **359** (2002), 1-168 doi:10.1016/S0370-1573(01)00051-5 [arXiv:hep-ph/0104283 [hep-ph]].
- [13] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1996.

- [14] H. Avakian, A. V. Efremov, P. Schweitzer, F. Yuan, *The transverse momentum dependent distribution functions in the bag model* Phys. Rev. D **81** (2010), 074035 doi:10.1103/PhysRevD.81.074035 [arXiv:1001.5467 [hep-ph]].
- [15] A. Courtoy and A. S. Miramontes, *Quark Orbital Angular Momentum in the MIT Bag Model*, Phys. Rev. D **95** (2017) no.1, 014027 doi:10.1103/PhysRevD.95.014027 [arXiv:1611.03375 [hep-ph]].
- [16] C. Lorcé, B. Pasquini and P. Schweitzer, *Unpolarized transverse momentum dependent parton distribution functions beyond leading twist in quark models*, JHEP **01** (2015), 103 doi:10.1007/JHEP01(2015)103 [arXiv:1411.2550 [hep-ph]].
- [17] R. L. Jaffe and X. D. Ji, *Chiral odd parton distributions and Drell-Yan processes*, Nucl. Phys. B **375** (1992), 527-560 doi:10.1016/0550-3213(92)90110-W.
- [18] D. Tong, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2006.
- [19] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, 2008.
- [20] A. V. Efremov and P. Schweitzer, *The Chirally odd twist 3 distribution  $e(a)(x)$* , JHEP **08** (2003), 006 doi:10.1088/1126-6708/2003/08/006 [arXiv:hep-ph/0212044 [hep-ph]].
- [21] B. Pasquini and S. Rodini, Phys. Lett. B **788** (2019), 414-424 doi:10.1016/j.physletb.2018.11.033 [arXiv:1806.10932 [hep-ph]].
- [22] A. Courtoy, *Insights into the higher-twist distribution  $e(x)$  at CLAS*, [arXiv:1405.7659 [hep-ph]].
- [23] CLAS Collaboration: M. Mirazita H. Avakian, A. Courtoy, S. Pisano, *et al*, *Beam Spin Asymmetry in Semi-Inclusive Electroproduction of Hadron Pairs*, Phys. Rev. Lett. **126** (2021) no.6, 062002 doi:10.1103/PhysRevLett.126.062002 [arXiv:2010.09544 [hep-ex]].
- [24] T. B. Hayward, C. Dilks, A. Vossen, H. Avakian, S. Adhikari, G. Angelini, M. Arratia, H. Atac, C. A. Gayoso and N. A. Baltzell, *et al.*, *Observation of Beam Spin Asymmetries in the Process  $ep \rightarrow e' \pi^+ \pi^- X$  with CLAS12*, Phys. Rev. Lett. **126** (2021), 152501 doi:10.1103/PhysRevLett.126.152501 [arXiv:2101.04842 [hep-ex]].
- [25] A. Bacchetta and M. Radici, *Two hadron semiinclusive production including subleading twist*, Phys. Rev. D **69** (2004), 074026 doi:10.1103/PhysRevD.69.074026 [arXiv:hep-ph/0311173 [hep-ph]].