



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN FÍSICA

EL EFECTO ZENÓN CUÁNTICO Y LA
INTERPRETACIÓN ORTODOXA DE LA MECÁNICA
CUÁNTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

RODRIGO FELIPE ELIZARRARAS

TUTOR:

M. EN C. RAÚL WAYNE GÓMEZ GONZÁLEZ



Ciudad Universitaria, CD. MX. 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Felipe
Elizarraras
Rodrigo
55 39 71 44 72
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
410012075

2. Datos del tutor

M. en C.
Raúl Wayne
Gómez
González

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Ana María Beatriz
Cetto
Kramis

4. Datos del sinodal 2

Dr.
José Ignacio
Jiménez
Mier y Terán

5. Datos del sinodal 3

M. en C.
Ignacio
Campos
Flores

6. Datos del sinodal 4

M. en C.
Augusto
Cabrera
Manuel

7. Datos del trabajo escrito

EL efecto Zenón cuántico y la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica.
39 p
2022

AGRADECIMIENTOS

Les agradezco a mis padres por la paciencia que ha tenido para al fin terminar esta etapa, y a mis hermanos por estar siempre ahí en las buenas y en las malas, sin olvidar también a todas las personas que en el camino me han ayudado, puede que yo no haya sido la mejor persona pero las guardo en mi corazón.

RESUMEN

El efecto Zenón cuántico y la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica

Por:
Rodrigo Felipe Elizarraras

Se presentan las bases históricas de las paradoja de Zenón griega clásica, así como la solución a dicho problema. En el contexto de la mecánica cuántica presentamos los postulados matemáticos de esta así como la interpretación ortodoxa de estos principios llevándonos a un efecto Zenón cuántico.

También presentamos una recopilación de los experimentos que según su autores, representan un efecto Zenón cuántico, así como sus argumentos en oposición y como estos han ampliado el catálogo de posibles interpretaciones de este mismo fenómeno mostrando que inclusive en sistemas simples de dos niveles, estos argumentos pueden llevar a efectos Zenón.

ÍNDICE GENERAL

1. Paradojas griegas clásicas	1
1.1. Zenón contra la distancia: Aquiles y la tortuga	1
1.2. Zenón y el tiempo: Paradoja de la flecha	3
1.3. Resultados de las paradojas	3
2. Mecánica Cuántica y el efecto Zenón cuántico	5
2.1. Reglas de la mecánica cuántica	6
2.2. Postulados de la mecánica cuántica	6
2.2.1. Gato de Schrödinger	9
2.3. Efecto Zenón Cuántico	9
2.4. Ejemplos didácticos del efecto Zenón	11
2.4.1. Ejemplo de juguete de dos niveles	11
2.4.2. Decaimientos de sistemas inestables y el efecto Zenón	12
3. Observaciones experimentales del efecto Zenón cuántico	14
3.1. Primer demostración experimental: NIST y su experimento	14
3.1.1. Objeciones contra la interpretación de Itano	18
3.2. Demostrando el efecto de Zenón en una computadora cuántica	20
3.3. Efecto Zenón en metales orgánicos	22
3.4. Estabilización de sistemas mediante la interacción con niveles excitados	26
4. Conclusiones	30
Bibliografía	34

PARADOJAS GRIEGAS CLÁSICAS

Diariamente, vivimos e interpretamos el mundo que nos rodea a través de nuestros sentidos: sentimos el calor de los objetos o de los rayos del sol con la piel, vemos la materia con la luz como mensajera entre dichos objetos y nuestros ojos, o escuchamos las vibraciones en el aire interpretándolas como sonido, pero desde de los griegos y hasta la actualidad nos hemos preguntado si el mundo que percibimos con nuestros sentidos es el mundo real objetivo en el que vivimos. Claro que con un conocimiento científico hemos descubierto que en efecto nuestros sentidos no cuentan la historia completa; por ejemplo, ahora sabemos que al tocar con la piel, un metal a una temperatura menor que la corporal, se siente más frío que un trozo de felpa a la misma temperatura. Otra forma de mostrar que nuestros sentidos no son buenos detectores para el mundo que nos rodea son las ilusiones ópticas donde como en la que se muestra en la figura 1.1, puede parecer que algo se está moviendo cuando en realidad se encuentra completamente estático.

De la misma manera como nos preguntamos si nuestro tacto, vista o cualquier otro sentido nos engañan, mucha gente antes también se lo ha preguntado, uno de estos grandes pensadores fue Zenón (griego nacido en Elea alrededor del año 490 a.C.) quien planteó paradojas para tratar de desenmarañar si nuestros sentidos en efecto solo nos presentan la ilusión de un mundo dinámico y en movimiento o el movimiento existe per se sin importar si estamos para observarlo. A continuación se presentan algunas de estas ingeniosas paradojas:

1.1. Zenón contra la distancia: Aquiles y la tortuga

Imaginemos la carrera más épica de la historia, digna de ser relatada por el mismísimo Homero, en la que los participantes son una tortuga contra el gran y legendario guerrero Aquiles (el de los pies alados), quien, consciente de su superioridad le da una ventaja de 100 metros a nuestro participante reptiliano; así, la carrera comienza, Aquiles 100 metros detrás de nuestro audaz contendiente. Pero el ingenioso Zenón viendo el inicio de la carrera concluye que esta será ganada por la tortuga sin

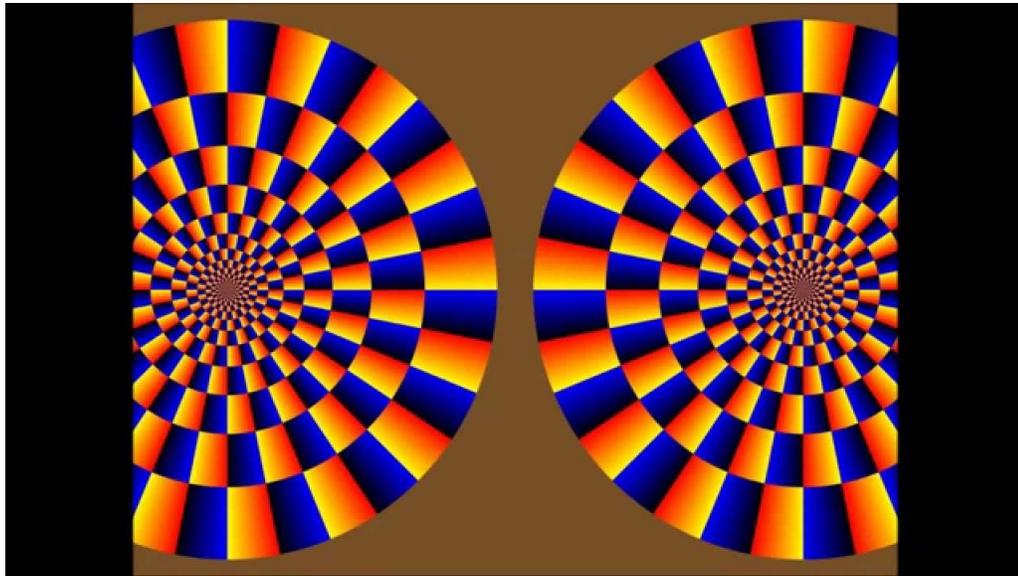


Figura 1.1: Ilusión óptica donde los círculos parecen en movimiento.

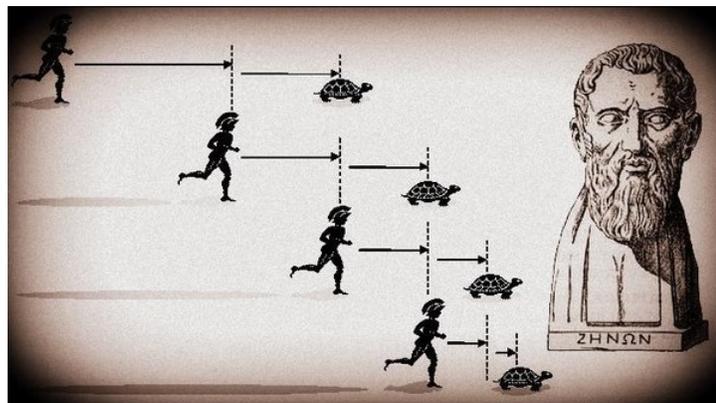


Figura 1.2: Representación de la paradoja de Aquiles y la tortuga con la efige de Zenón a la derecha (imagen tomada de [Paradoja de Zenón](#) [2021])

importar el esfuerzo que pueda hacer el increíble héroe Troyano.

Su amigo atónito lo ve con incredulidad y le pide explicar su punto, y para esto Zenón argumenta: "para que Aquiles alcance a la tortuga, éste debe recorrer los 100 metros que la tortuga le lleva de ventaja, pero para ese entonces la tortuga ya habrá avanzado un metro más, y para que Aquiles alcance ese nuevo metro extra, la tortuga ya habrá avanzado una centésima de metro, pero para que Aquiles alcance esa nueva centésima la tortuga ya habrá avanzado una diezmilésima más y así sucesivamente" de tal manera que Zenón concluye: Aquiles tiene que avanzar una infinidad de pasos para alcanzar a la tortuga, la cual siempre estará por delante y ¿cuándo podría nuestro héroe recorrer un número infinito de pasos para llegar a pasar a ese inocente reptil? (Figura 1.2).

1.2. Zenón y el tiempo: Paradoja de la flecha

Para esta paradoja, Zenón deja el estadio en el que se encuentra antes y se va a la sección de tiro con arco, donde ve a los tiradores lanzando flechas insaciablemente contra objetivos estáticos, tras un momento de lucidez, observa a la flecha atónito concluyendo: la flecha no debería moverse. a lo que nuevamente su amigo incrédulo le pregunta por el argumento que lo lleva a pensar eso, a lo cual responde: imagina que congelamos el tiempo, de tal forma que la flecha se encuentre inmóvil en ese instante, y por ende, no debería moverse, pero si el tiempo total está formado por instantes en los cuales la flecha se encuentra estática, entonces la flecha debería estar inmóvil todo el tiempo.

1.3. Resultados de las paradojas

Tan convincentes como puedan sonar los argumentos de Zenón , la experiencia nos ha hecho comprender que si la carrera entre Aquiles y la tortuga ocurre, por más anti climático que parezca, la carrera empieza y en ella Aquiles alcanza a la tortuga, la pasa y le sobra tiempo para recibir los laureles y festejar antes de que la tortuga llegue a la línea de meta, o que cuando esos habilidosos arqueros a los que Zenón mira tan incrédulo lanzan las flechas, estas salen disparadas por el arco, recorren su trayectoria e impactan contra los objetivos, habiendo realizado un claro desplazamiento, lo cual nos lleva a preguntar: ¿qué está mal con el argumento tan aparentemente convincente de Zenón?. La respuesta era poco clara para los estándares griegos, pero muy sencilla para un pensamiento moderno y es que así como nuestros sentidos nos engañan viendo, escuchando o sintiendo lo que percibimos, nuestros sentidos no distinguen cantidades infinitas o infinitamente pequeñas. En particular, pensar que una infinidad de pasos pequeñísimos pueden sumarse para dar un paso finito o que un intervalo pequeño puede dar un desplazamiento pequeño y que sumados en total den un desplazamiento apreciable a nuestros ojos.

Podemos comprender mejor este argumento a través de las matemáticas modernas, por ejemplo, siguiendo la paradoja de Zenón (o más precisamente, la paradoja de la dicotomía) para recorrer un metro, necesitamos primero recorrer la primera mitad, una vez recorrida esta mitad, ahora podemos avanzar un cuarto de metro más, y al hacer esto, podemos recorrer un octavo de metro y después un dieciseisavo de metro más y así sucesivamente de tal forma que cada vez habremos avanzado la mitad de nuestro paso anterior, claramente, daremos una infinidad de pasos y nunca pasaremos el metro ya que siempre nuestro paso es menor al necesario para recorrer ese metro; para los griegos, avanzar así era imposible porque damos una infinidad de pasos así como Aquiles tendría que avanzar una infinidad de distancias para alcanzar a la tortuga pero nuestra abstracción matemática moderna nos permite escribir expresiones como la siguiente:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

en la que una infinidad de términos sumados dan una cantidad finita, inconcebible para Zenón pero no para el pensamiento moderno.

Así mismo, para el caso de la flecha de los arqueros vista por nuestro filósofo favorito, sabemos que la velocidad de la flecha es un concepto que a pesar de poder ser definida como la división de dos números infinitesimalmente pequeños, cobra un valor finito conforme ambos términos se hacen más y más pequeños, esto enseñado por Sir Isaac Newton [1687] quién en su libro *Principia mathematica* definió toda su mecánica con pilar central en este concepto y así fundando la forma moderna de hacer física.

Revoluciones similares de pensamiento se han dado desde entonces; gracias a Newton considerábamos el tiempo como un parámetro universal para todos, siendo esto cambiado por Einstein al enseñarnos que el tiempo no es más que una coordenada más; o también para Newton las partículas podían pensarse como corpúsculos pequeños con trayectorias definidas, siendo esto cambiado por la mecánica cuántica mostrándonos que este pensamiento de partículas como pequeñas pelotitas sólidas es solo la mitad de la historia, faltando la otra mitad de un comportamiento ondulatorio inherente a su propia existencia y modificando el concepto de trayectorias definidas por simples probabilidades de seguir uno u otro camino.

Con todos estos cambios de paradigmas al pensamiento sobre el movimiento, nos preguntamos si vale la pena retomar esas viejas ideas de Zenón y analizar las consecuencias que puede traer con un pensamiento moderno, porque aunque desde un inicio su pensamiento puede llegar a conclusiones absurdas, el aplicar una idea similar en las teorías modernas, puede dar comportamientos inesperados y aprovechables en la física moderna, como es el tema de esta tesis: *efecto Zenón cuántico*, en el cual las propiedades de un sistema cuántico monitoreado constantemente en intervalos de tiempo muy pequeños pueda “congelarse”; o dicho de otra forma, quedarse en su estado inicial en lugar de evolucionar como dictamina una interpretación de la teoría cuántica.

MECÁNICA CUÁNTICA Y EL EFECTO ZENÓN CUÁNTICO

La mecánica cuántica llegó para ser una de las revoluciones intelectuales y científicas más grandes de inicios del siglo XX, cambiando radicalmente las descripciones clásicas de la mecánica impuestas por Newton, en la cual el tiempo y el espacio son parámetros universales respecto a los cuales se describe la evolución temporal (futura y pasada) precisa del sistema, a partir del conocimiento de las condiciones iniciales de las posiciones e ímpetus (mv) de las partículas.

Fue hasta que Max Planck desarrolló su modelo del cuerpo negro que toda la concepción newtoniana de la mecánica comenzó a temblar desde sus cimientos. En este modelo, imaginar a las ondas de luz no como un espectro continuo si no como paquetes de energía solucionaba correctamente las predicciones que la interpretación de una onda continua no podía explicar. Poco después con el efecto fotoeléctrico de Einstein y el efecto Compton, en los cuales pensar a las ondas de luz como partículas, con un momento y energía definidos, permitía reproducir los resultados experimentales que hasta esa fecha, no tenían una explicación satisfactoria, dejando perpleja a la comunidad científica de esos tiempos preguntándose cómo era posible que la luz en ciertas situaciones se comportaba como una onda y en otras se podía imaginar como una partícula, acuñando así el término onda-partícula como un intento de comprender este comportamiento tan extraño.

Agregando complejidad a esta a extraña situación de la luz en un osado arrebato de lucidez un joven aristócrata francés llamado Louis De Broglie hizo la hipótesis de que así como las ondas de luz tienen un comportamiento corpuscular, también las partículas podrían tener un comportamiento ondulatorio, hipótesis confirmada poco tiempo después en experimentos de difracción con electrones, trayendo consigo la carrera por crear un modelo que encapsulara los dos comportamientos, naciendo así el concepto de dualidad onda-partícula en la mecánica cuántica.

El inicio de la mecánica cuántica trajo muchos debates, ya que el desarrollo de una teoría ondulatoria en partículas conlleva nuevas interpretaciones como el significado de esas ondas intrínsecas a la materia o bajo qué condiciones las ondas son partículas y viceversa, dando lugar al elemento matemático más utilizado para su descripción: la función de onda, la cual describe a las ondas de materia; pero a pesar de ser un elemento matemático bien definido, su creación generó (y sigue generando) controversia sobre su significado, su interpretación o si es un elemento de la realidad. Teniendo muchas interpretaciones, la más común y popular llamada de Copenhague, es un conjunto de reglas e interpretaciones que guían nuestra explicación más popular de estas nuevas herramientas.

2.1. Reglas de la mecánica cuántica

El conjunto de reglas de carácter matemático que hasta ahora prevalecen y han sido las de mayor difusión de los fenómenos cuánticos (debido a factores históricos y que han sido consistentes con todos los resultados experimentales) son reglas que nos han permitido crear las mediciones más precisas en la historia de la humanidad. De manera coloquial, Faye [2019] lo resume en las siguientes reglas básicas:

1. La mecánica cuántica es intrínsecamente indeterminista.
2. El principio de correspondencia: en el límite apropiado de la teoría cuántica se obtienen resultados idénticos a los de la teoría clásica reproduciendo también sus predicciones.
3. la regla de Born: la función de onda de un sistema da probabilidades de los posibles resultados de una medición sobre ese sistema.
4. Complementariedad: un sistema no puede presentar simultáneamente dos propiedades clásicamente excluyentes.
5. Cuando una medición es hecha sobre ese sistema, la función de onda colapsa instantáneamente a un estado del sistema en el cual el valor obtenido es el valor que lo representa.

Estas reglas que a primera vista pueden parecer inocentes, nos plantean preguntas sobre la realidad misma. La forma en que interpretamos estas reglas dan un zoológico entero de discusiones filosóficas, pero la interpretación estándar se le conoce como la interpretación de Copenhague.

2.2. Postulados de la mecánica cuántica

Estas reglas pueden ser más detalladas matemáticamente según Cohen-Tannoudji et al. [1977] en los siguientes postulados:

1. **Postulado 1:** A un tiempo dado t , un estado del sistema físico está definido por un vector normalizado $|\psi\rangle$ perteneciente a un espacio vectorial \mathcal{E} complejo equipado con producto interno.
2. **Postulado 2:** Cada cantidad física medible \mathcal{A} está descrita por un operador A hermítico actuando en el espacio \mathcal{E} cuyo conjunto de eigenvectores forman una base ortonormal de todo el espacio vectorial.
3. **Postulado 3:** Los únicos posibles resultados de medir la cantidad física \mathcal{A} corresponde a uno de los eigenvalores del operador A .
4. **Postulado 4:** –este postulado lo vamos a simplificar y no escribir el caso general con el fin de mantener claridad– Cuando la cantidad física \mathcal{A} va a ser medida en un sistema que tenía un estado $|\psi\rangle$ la probabilidad de obtener el valor en esa cantidad a_n es:

$$P(\mathcal{A} = a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$$

Con u_n el eigenvector normalizado (no degenerado) asociado al eigenvalor a_n .

5. **Postulado 5:** Si la medición de la cantidad física \mathcal{A} en el estado $|\psi\rangle$ da un valor a_n (no degenerado), el estado del sistema inmediatamente después de la medición es:

$$|u_n\rangle \frac{\langle u_n | \psi \rangle}{|\langle u_n | \psi \rangle|^2}$$

6. **Postulado 6:** La evolución temporal del vector $|\psi(t)\rangle$ esta dada por la ecuación:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Con $H(t)$ el operador hamiltoniano del sistema.

7. **Postulado 7:** el operador hamiltoniano $H(t)$ se construye a partir de la función hamiltoniana en mecánica clásica, sustituyendo cualquier cantidad física $\mathcal{A}(r, p)$ simetrizada (con r y p la posición y el momento respectivamente) por el operador con la misma forma $A(r, p)$ siendo r y p sustituidos por sus versiones en operadores.

Tan abstracto como suena ese vector $|\psi\rangle$ Max Born propuso que se puede asociar una función cuyo módulo al cuadrado $\psi^* \psi(x)$ determina la densidad de probabilidad de que el sistema se encuentre en un volumen infinitesimal dV alrededor de x ; y aunque este concepto no es erróneo, este vector va más allá ya que puede representar estados de polarización de luz, dirección de la luz, brazo de salida de un interferómetro, estado de spín o tantos sistemas cuánticos como se desee, siempre teniendo en cuenta que debajo, hay un vector asociado que lo representa (esta afirmación no es correcta pero para fines de este trabajo lo simplificamos así).

Algunas consecuencias básicas directas de los postulados son:

- **Superposición:** Como los operadores son lineales y el espacio de estados cuánticos es vectorial, la combinación lineal de dos estados o más (debidamente

normalizados) también será un estado posible del sistema cuántico.

Siendo un principio tan aparentemente inocente, la superposición tiene consecuencias sorprendentes desde el punto de vista filosófico. Por ejemplo: supongamos que tenemos un haz de partículas cuánticas que tiene la posibilidad de ir por dos caminos diferentes (izquierda o derecha) para llegar a un mismo lugar. La posibilidad de seguir dos caminos diferentes genera dos estados cuánticos posibles: izquierda $|I\rangle$ o derecha $|D\rangle$ para este ensamble de partículas cuánticas. Además, contamos con detectores D_D y D_I en ambos caminos por los que puede pasar las partículas, cada uno de ellos recibirá una señal pero nunca recibirán ambos una señal al mismo tiempo. Esto, escrito matemáticamente, es $\langle D|I\rangle = 0$, en donde $\langle D|I\rangle$ es el producto interno entre $\langle D|$ y $|I\rangle$. Sin embargo, debido a la superposición de estados:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|I\rangle + |D\rangle]$$

es un estado cuántico posible normalizado según nuestras reglas establecidas.

La existencia de este estado cuántico plantea la pregunta natural de su significado, ya que la mecánica cuántica solo nos proporciona probabilidades de ocurrencia de un evento, por ejemplo, en este ensamble hipotético ambos detectores separadamente, recibirán señal la mitad de ocasiones por la izquierda y la otra mitad por la derecha. Si nos propusiéramos ver su camino de llegada una vez detectado en un lado, no será detectada en el otro.

Por otro lado, si hacemos un experimento de interferencia usando este ejemplo de juguete (similar a lo sería un interferómetro de Mach-Zhender) observaríamos que las reglas matemáticas así como el experimento hecho, nos indicarían que cuando existe la posibilidad de que las partículas tomen los dos caminos, aparecerá interferencia, si se bloquea uno, esta interferencia desaparecerá. El conjunto de partículas es afectado por la existencia de estas dos posibilidades planteándonos preguntas del estilo ¿Cómo es que la partícula conoce la existencia de esos dos caminos?. La respuesta a estas preguntas nos lleva a tomar una opinión en como ocurre este proceso, Este conjunto de opiniones que concuerdan con los postulados y los experimentos se les conocen como interpretaciones y la más difundida por cuestiones históricas es la *interpretación de Copenhagen*.

En esta interpretación de Copenhagen si el sistema está descrito por la función de estado normalizada ψ , mientras no se realice una observación que permita saber cuál de los dos caminos posibles siguieron las partículas se asume que cada partícula sigue simultáneamente ambos caminos, y que una observación (medición) que permita discriminarlos, hace que la función de estado colapse a uno solo de los muchos estados posibles (aunque en esta argumentación solo

se consideraron dos). O dicho de manera muy coloquial: la partícula cuántica tiene un pánico escénico, mientras no sea detectada por algún camino, recorre felizmente ambos caminos, pero cuando es observada en algún camino pierde esa posibilidad (así como la de causar interferencia).

2.2.1. Gato de Schrödinger

El fenómeno de superposición sumado a la interpretación de Copenhagen causó mucho revuelo en los inicios de la mecánica cuántica y numerosos contra ejemplos surgieron para mostrar que algo estaba incorrecto con esta interpretación; el más famoso lo proporcionó Schrödinger a través de su ejemplo con un gato en peligro de muerte similar al siguiente: proponemos un sistema similar al de la sección anterior, solo que ahora tenemos un detector no destructivo de la partícula (de tal manera que no impide su paso por ninguno de los caminos) amarrado a un arma que disparará a un gato si la partícula se va por la izquierda y no disparará si se va por el lado derecho. Dicha arma y el gato son encerrados en una caja de la que no podemos saber nada de su interior. Con este sistema mandamos el estado superpuesto de la sección anterior que ahora lo podemos escribir como:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|I, \text{gato muerto}\rangle + |D, \text{gato vivo}\rangle]$$

Y la pregunta natural al hacer este experimento imaginario es: ¿el gato está vivo o muerto? lo cual bajo la interpretación de Copenhagen de la mecánica cuántica vista hasta aquí la respuesta sería que si no abrimos la caja, y por ende no sabemos qué camino tomó la partícula, el gato estaría muerto y vivo a la vez, y solo hasta que abriéramos la caja, el estado colapsaría a uno de los dos estados posibles definiendo si el gato está vivo o muerto.

Esta interpretación suena completamente antintuitiva a nuestro sentido común en el que el gato debe estar vivo o muerto pero no simultáneamente, y aunque extraño para los comienzos de la mecánica cuántica solo nos muestra la extrañeza que puede generar el uso de sistemas cuánticos e interpretaciones con sistemas macroscópicos.

2.3. Efecto Zenón Cuántico

Otro de los fenómenos sorprendentes que se derivan de la mecánica cuántica es el efecto Zenón cuántico, propuesto originalmente por [Misra and Sudarshan \[1977\]](#), que será claro de donde recibe su nombre más adelante. Para ello procedamos a su derivación.

Del postulado 6 podemos ver que podemos resolver para dado un estado en un tiempo inicial (en el caso del operador H sin dependencia t) como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}H} |\psi(0)\rangle \quad (2.3.1)$$

y si queremos saber la propabilidad de que pasado un tiempo t el sistema se encuentre en el estado en el que inicio, según el postulado 4, es:

$$P [|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle] = |\langle\psi(0)| e^{-\frac{it}{\hbar}H} |\psi(0)\rangle|^2 \quad (2.3.2)$$

si la medición del estado se hace en un tiempo corto después de que comenzó a evolucionar podemos aproximar la exponencial como:

$$e^{-\frac{it}{\hbar}H} \approx I - \frac{it}{\hbar}H - \frac{t^2}{2\hbar^2}H^2 \quad (2.3.3)$$

de donde se obtiene una probabilidad de:

$$P [|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle] \approx 1 - \frac{t^2(\Delta H)^2}{\hbar^2} \quad (2.3.4)$$

siendo:

$$(\Delta H)^2 = \langle\psi(0)| H^2 |\psi(0)\rangle - \langle\psi(0)| H |\psi(0)\rangle^2. \quad (2.3.5)$$

Ahora, si consideramos un intervalo de tiempo T y hacemos n mediciones igualmente espaciadas en este intervalo para ver si el estado se encuentra en el estado inicial, según la interpretación de Copenhagen, como cada vez que hacemos una medición colapsa el estado y se resetea a ese estado inicial o alguna de las otras opciones, la probabilidad de que el estado se mantuviera en el estado inicial después de todas esas n mediciones es:

$$P [\psi(T) = |\psi(0)\rangle | \text{dadas } n \text{ mediciones}] \approx P [|\psi(T/n)\rangle = |\psi(0)\rangle]^n \quad (2.3.6)$$

escribiéndose de manera aproximada como:

$$P [\psi(T) = |\psi(0)\rangle | \text{dadas } n \text{ mediciones}] \approx \left[1 - (\Delta H)^2 \left(\frac{T}{n} \right)^2 \right]^n \quad (2.3.7)$$

y aproximándose a 1 conforme $n \rightarrow \infty$ si $T\Delta H$ es menor a 1, dicho con palabras, si al sistema comienzas a medir de manera muy frecuente para comprobar si el sistema sigue en el mismo estado, las mismas mediciones hacen que el sistema no evolucione y permanezca en ese estado inicial, cosa que no ocurre si lo dejamos evolucionar sin medirlo y solo medimos hasta que transcurre ese tiempo T . De manera resumida, el efecto de medir continuamente al estado es el de congelarlo en ese estado inicial sin evolucionar.

De aquí se puede apreciar porque este efecto recibe el nombre de *efecto Zenón cuántico*, ya que como en la paradoja de Zenón, donde el imagina observar a la flecha en un instante infinitesimalmente pequeño y esto causa que la flecha se congele en su posición y no debería moverse, en mecánica clásica llevando a una aparente paradoja, en el caso cuántico este fenómeno es todo una realidad, donde si la flecha de Zenón fuera una flecha cuántica y sus dos estados posibles fueran salir del arco y llegar al objetivo, si nunca dejaras de observar a la flecha, la flecha nunca saldría del arco y solo hasta que dejaras de observarla (y por ende, evolucionar como la mecánica cuántica dictamina) podría ocurrir que la flecha llegase al objetivo.

2.4. Ejemplos didácticos del efecto Zenón

2.4.1. Ejemplo de juguete de dos niveles

Consideremos un sistema de niveles de energía no degenerados en mecánica cuántica como por ejemplo: la caja unidimensional infinita, el oscilador armónico o cualquier problema de esa índole resuelto en cualquier libro de mecánica cuántica, por ejemplo [Griffiths \[2017\]](#). Para hacer un ejemplo del efecto Zenón primero necesitamos un estado que evolucione con el tiempo, pero solo con dos eigenestados de energía que denotaremos como $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para el estado base y el estado excitado, los cuales, por ser estados estacionarios, siguen permaneciendo intactos (salvo fase) en el tiempo. Por el principio de superposición, el sistema que proponemos tiene como estado inicial:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + |1\rangle] \quad (2.4.1)$$

Notando que este estado es ortogonal al estado:

$$|\psi_{-}\rangle = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} [|0\rangle - |1\rangle] \quad (2.4.2)$$

para todo α real.

Estos dos estados serán los que utilizaremos en este ejemplo de juguete para mostrar explícitamente el efecto Zenón, siendo nuestro estado 0 el estado inicial que congelaremos y el otro estado el estado al que con el tiempo evolucionaría en un va y ven oscilatorio. Para mostrar esto veamos que la función de onda para todo tiempo está dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i\omega_0 t} |0\rangle + e^{-i\omega_1 t} |1\rangle] \quad (2.4.3)$$

con $\omega = E/\hbar$.

reescribiendo este estado en la forma:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle + e^{-i\Delta\omega t} |1\rangle \right] \quad (2.4.4)$$

con $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1$.

Notemos que conforme el tiempo avanza, la fase que acompaña al estado 1 va cambiando y para ciertos valores de t puede valer $1, i, -1, -i$. Es decir, el estado empieza en el estado inicial deseado $|\psi(0)\rangle$, pero cuando avanza la fase π el estado está en $|\psi_-\rangle$. Con esto en mente, podemos calcular la probabilidad de que el estado $|\psi(T)\rangle$ se encuentre en $|\psi(0)\rangle$ dada por:

$$P[\psi(0)] = |\langle\psi(T)|\psi(0)\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\Delta\omega T}{2}\right). \quad (2.4.5)$$

Pero si en lugar de dejarlo evolucionar y hacemos n mediciones en ese intervalo de la ecuación 2.3.6 tenemos que la probabilidad es:

$$P[\psi(0)|n \text{ mediciones}] = \cos^{2n}\left(\frac{\Delta\omega T}{2n}\right) \quad (2.4.6)$$

y usando la expresión aproximada para un coseno obtenemos que:

$$P[\psi(0)|n \text{ mediciones}] \approx \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega T}{2n}\right)^2\right)^{2n} \quad (2.4.7)$$

aproximándose a 1 conforme n tiende a infinito si $\Delta\omega T < 2$, comprobando que hasta en ese sistema tan sencillo y tan poco específico también ocurre el efecto Zenón cuántico.

2.4.2. Decaimientos de sistemas inestables y el efecto Zenón

Por un instante, consideremos un sistema hipotético en el que la probabilidad de decaer de un nivel a otro es:

$$P(\text{decaer en el tiempo } T) = e^{-\frac{T}{\tau}} \quad (2.4.8)$$

con τ una constante.

Para avanzar, hacemos el mismo procedimiento que nos llevó al fenómeno de Zenón, es decir, un intervalo T lo dividimos en n subintervalos y vemos la probabilidad de que este sistema hipotético permanezca en ese subintervalo es:

$$P(\text{decaer en el tiempo } T/n) = e^{-\frac{T}{n\tau}} \quad (2.4.9)$$

viéndose de la ecuación 2.3.6 que:

$$P[\text{decaer al tiempo } T | \text{dadas } n \text{ mediciones}] \approx [P(\text{decaer en el tiempo } T/n)]^n \quad (2.4.10)$$

pero el lado derecho es la probabilidad original de decaer sin haber hecho las mediciones ya que elevar una exponencial a una potencia solo multiplica el exponente por la potencia y este cancela ese n , obteniendo que:

$$P[\text{decaer al tiempo } T | \text{dadas } n \text{ mediciones}] = P[\text{decaer en el tiempo } T \text{ sin hacer mediciones}] \quad (2.4.11)$$

gritándonos que los sistemas hipotéticos que tienen este tipo de probabilidades no les ocurre un fenómeno de Zenón, es decir, probabilidad de decaer no cambia si se hacen mediciones sobre el sistema.

Este sistema caricaturesco nos ejemplifica que no todos los sistemas son congelables a través de repetidas mediciones, la pregunta obvia a responder es ¿cuales sistemas reales cumplen con esta clase de probabilidades? Y la respuesta se encuentra adelantada en el título de esta sección: los sistemas inestables de partículas que decaen siendo la constante τ la vida media de la partícula. Aunque estos estados no son eigenvectores de un hamiltoniano hermitiano puramente de interacción, si lo son de uno que incluye decaimientos a través de términos no hermitianos .

OBSERVACIONES EXPERIMENTALES DEL EFECTO ZENÓN CUÁNTICO

3.1. Primer demostración experimental: NIST y su experimento

1990 fue un gran año para el efecto Zenón cuántico, que hasta ese momento permanecía elusivo y siendo una simple curiosidad teórica dentro de los mismos fundamentos de la mecánica cuántica. Ese año [Itano et al. \[1990\]](#) mostraron al mundo un experimento basado en una propuesta de [Cook \[1988\]](#) en el cual, según sus autores, se comprobaba experimentalmente el efecto Zenón cuántico. Dicho experimento causó controversia ya que puso en duda los mismos elementos básicos necesarios para la aparición del efecto Zenón en el contexto de la mecánica cuántica y más impactante aún, pone en el reflector de nuestras miradas la duda adicional sobre el significado de una medición en mecánica cuántica.

Para entender mejor cual fue el resultado de Itano, primero tenemos que entender cual fue su experimento así como el concepto básico que lo sustenta; para ello el experimento se puede imaginar esquemáticamente de la siguiente manera: recordemos que para que ocurra el efecto Zenón cuántico necesitamos tres ingredientes esenciales: un sistema cuántico, una evolución unitaria descrita por su hamiltoniano y un conjunto de mediciones cuya función es la de colapsar o detener la evolución unitaria.

El primer ingrediente de esta caricatura del experimento de Itano es un sistema cuántico de tres niveles, etiquetando con 1 al estado base del sistema y con 2 a un estado excitado; el tercer nivel (etiquetado con 3) esta asociado con un estado inestable que solo se puede llegar desde el estado 1, pero no desde 2, es decir, no hay transiciones entre el estado 2 y 3 de ninguna manera si no es primero pasando al

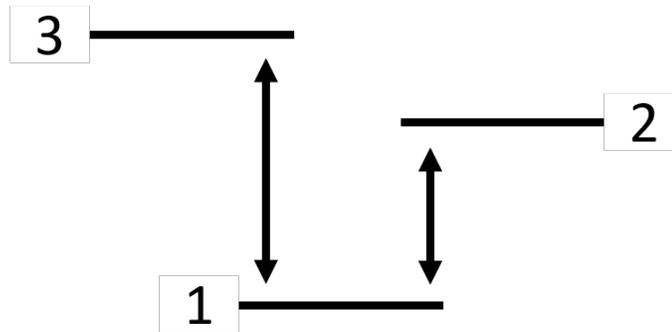


Figura 3.1: Diagrama de niveles de energía propuesto por Cook [1988] para demostrar el efecto Zenón cuántico.

estado 1.

Con este primer ingrediente en nuestro plato cuántico, necesario para el efecto Zenón, ahora necesitamos una evolución unitaria. Esta se hace mediante un láser que crea oscilaciones periódicas (conocidas en la literatura, por ejemplo en Beck [2012] o Foot et al. [2005], como oscilaciones de Rabi) entre el estado 1 y 2, similares a la de nuestro ejemplo de caricatura del capítulo anterior, en la que se comienza en el estado base (nivel 1) y un periodo conocido después, el sistema se encuentra en el estado excitado (nivel 2).

El último ingrediente faltante es una medición sobre el sistema evolucionando que congele ese estado inicial, y como medición en el experimento de Itano se usa un pulso que transiciona al sistema del estado 1 al 3 y estimula la emisión de un fotón ya que este nivel 3 es excitado e inestable y decae rápidamente regresando al nivel 1 y este decaimiento causa un fotón emitido. Notemos que esto es una medición ya que como la transición 2-3 está prohibida, si al usar ese pulso el sistema estaba en el estado 1, el sistema emitirá un fotón debido al brinco del nivel 1 a 3 y de regreso, pero si el sistema se encontraba en el nivel 2 no habrá emisión de ningún fotón ya que la transición 2-3 está prohibida comprobando así si el sistema se encontraba en el nivel 1 o 2.

Con esta caricatura en mente, podemos explicar el experimento real en palabras similares a las de su primer autor Itano [2009]: Los niveles 1 y 2 son dos subniveles hiperfinos del estado base $S_{1/2}^2$ del ion Be^+ y el nivel 3 es un subnivel del estado excitado $P_{3/2}^2$ que solo decae al nivel 1. Se usaron 5000 iones confinados con campos eléctricos y magnéticos en una trampa de Penning y el experimento consistió en los siguientes pasos:

- los iones fueron preparados en el nivel 1 con un láser (estado inicial).
- un campo magnético de radiofrecuencia resonante (RF) fue aplicado en un in-

tervalo T para llevar los iones al nivel 2 (evolución unitaria).

- durante la duración que la RF fue aplicada, un número variable de n pulsos cortos temporalmente igualmente espaciados en tiempo fueron aplicados a los iones (mediciones).
- el láser pulsado (resonante con la transición 1-3) fue encendido y la fluorescencia inducida fue registrada.

Notemos que escrito de esta manera queda más claro cual es la función de cada uno de los elementos del experimento, los 5000 iones funcionan como ensamble estadístico de un sistema cuántico de 3 niveles dado por los iones individuales, el campo magnético RF cumple la función de hamiltoniano del sistema haciendo evolucionar del nivel 1 al nivel 2 en un tiempo fijo, y los pulsos cumplen la función de mediciones al excitar a los iones si están en el nivel 1 y dejarlos idénticos si están en el nivel 2 y conforme los pulsos se hacen más y más juntos temporalmente equivale a medir sobre el sistema en intervalos cada vez mas pequeños, solo falta la recolección de dicha información.

Este sistema se modela como un sistema de dos niveles interactuando con un campo electromagnético clásico y este, se puede describir siguiendo un desarrollo similar al de **Orlando** por tres variables acomodadas en un vector $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$ cuyas componentes son definidas en términos de la matriz de densidad del sistema como:

$$\begin{aligned} R_1 &= \rho_{12} + \rho_{21} \\ R_2 &= i(\rho_{12} - \rho_{21}) \\ R_3 &= \rho_{22} - \rho_{11} = P_2 - P_1 \end{aligned}$$

en donde P_1 y P_2 son las probabilidades de encontrar al sistema en el nivel 1 o en el nivel 2 respectivamente.

Esta representación da una matriz de densidad en la forma:

$$2\rho = \begin{pmatrix} 1 - R_3 & R_1 - iR_2 \\ R_1 + iR_2 & 1 + R_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

Y para calcular la evolución temporal de un sistema con hamiltoniano escrito como:

$$2H = EI + \begin{pmatrix} H_3 & H_1 - iH_2 \\ H_1 + iH_2 & -H_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

siendo I la matriz identidad y los demás parámetros reales, usamos la evolución de la matriz de densidad dada por:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} [\rho, H] \quad (3.1.3)$$

Y desarrollando esta ecuación y reescribiendo en términos de estas nuevas variables obtenemos:

$$\hbar \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{H} \times \mathbf{R} \quad (3.1.4)$$

que, para el caso del experimento de NIST $\mathbf{H} = (\hbar\Omega, 0, 0)$ con Ω es la frecuencia de Rabi, la cual describe la frecuencia de oscilación entre los niveles de energía y es proporcional a la amplitud del campo magnético aplicado, de tal suerte que esta puede ser controlada a gusto.

Como nuestro sistema fue preparado en el nivel 1, $P_1 = 1$ y $P_2 = 0$ y $\mathbf{R} = (0, 0, -1)$ y aquí se ve la utilidad de este vector auxiliar ya que la evolución temporal es sencilla dada por:

$$\mathbf{R}(t) = (0, \sin(\Omega t), \cos(\Omega t)) \quad (3.1.5)$$

en particular, después de un tiempo $t = \pi/n\Omega$ con n un entero que denota el número de pulsos que hacen la medición obtenemos:

$$\mathbf{R}(t) = (0, \sin(\pi/n), -\cos(\pi/n)). \quad (3.1.6)$$

Si en ese momento se hace una medición, el estado se proyecta al nivel 1 o 2, lo que hace que las componentes diagonales de la matriz de densidad sea zero dejando las otras dos componenetes iguales, significando que justo después de la medición tenemos:

$$\mathbf{R}(t) = (0, 0, -\cos(\pi/n)), \quad (3.1.7)$$

notando que este vector es igual al vector inicial salvo una multiplicación por ese coseno, de tal forma que como la evolución es multiplicativa, cada medición solo agrega otro coseno teniendo que al tiempo $T = \pi/\Omega$ se tiene:

$$\mathbf{R}(t) = (0, 0, -\cos^n(\pi/n)) \quad (3.1.8)$$

y, despejando P_2 de la ecuación que define R_3 , recordando que $P_1 + P_2 = 1$ se obtiene:

$$P_2(t) = \frac{1}{2} [1 - \cos^n(\pi/n)] \quad (3.1.9)$$

la cual tiende a cero conforme el número n crece. Esto es una comprobación del efecto Zenón cuántico ya que cada vez que uno de los n pulsos llega a los iones, este cumple la función de medición para comprobar si el ion está en el estado 1, y cuando se hacen muchas mediciones cada vez más juntas temporalmente, es decir, cuando n crece, se congelan los iones en el estado 1 en lugar de permitir la evolución normal debida a la RF.

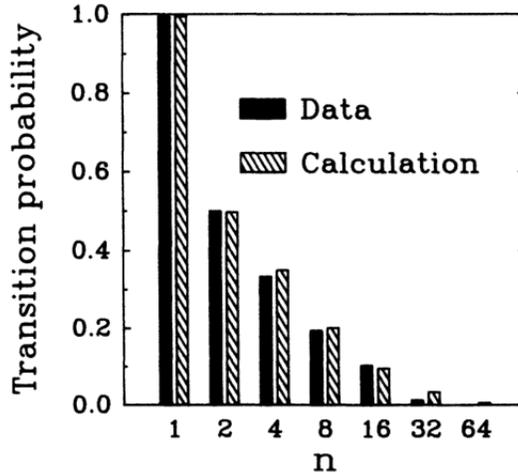


Figura 3.2: Probabilidad de ocurrencia de la transición 1-2 como función del número de pulsos n que cumplen la labor de medición. Las gráficas de barras rayadas representan la obtenida de 3.1.9, las barras sólidas los datos obtenidos del experimento (gráfica tomada de Itano et al. [1990])

3.1.1. Objeciones contra la interpretación de Itano

Algunos autores, como Ballentine [1991] y Petrosky et al. [1990], argumentan que el experimento de Itano no representa una comprobación del efecto Zenón cuántico y a continuación bosquejaremos su oposición.

Argumento de Ballentine contra el experimento de Itano

El argumento de Ballentine [1991] contra la interpretación de Itano tiene su núcleo en la crítica del colapso de la función de estado y que el pulso que considerado al hacer una medición, en realidad se debe considerar como una perturbación fuerte que mantiene al sistema en su estado base. Para justificar esto, siguiendo el argumento y la notación de Ballentine llamamos a $|\phi_1\rangle$ al estado base de los iones, $|\phi_2\rangle$ al estado excitado y $|\phi_3\rangle$ al estado inestable solo accesible desde el nivel 1, $|0\rangle$ al estado de 0 fotones del campo de los pulsos, $|1\rangle$ al de un fotón y así sucesivamente. El sistema al inicio de su evolución se encuentra en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.1.10)$$

y si dejamos la evolución debida al campo RF, el estado para cualquier tiempo sería:

$$|\psi(t)\rangle = [\cos(\Omega t/2) |\phi_1\rangle + \text{sen}(\Omega t/2) |\phi_2\rangle] \otimes |0\rangle \quad (3.1.11)$$

lo cual es simplemente la evolución normal dada por Itano. La cosa cambia cuando el sistema interactúa con el primer pulso al tiempo τ , donde, si la duración del pulso es suficientemente pequeña comparada con el tiempo Ω^{-1} , el pulso estimula la

transición del nivel 1 al 3 quedando el estado:

$$|\psi(\tau)\rangle = [\cos(\Omega\tau/2)|\phi_3\rangle + \text{sen}(\Omega\tau/2)|\phi_2\rangle] \otimes |0\rangle \quad (3.1.12)$$

pero como el estado 3 es inestable y se supone que el tiempo de decaimiento es menor que Ω^{-1} entonces el estado 3 se convierte a 1 con el pago de la creación de un fotón, es decir, el estado después de la emisión del fotón es:

$$|\psi(\tau^+)\rangle = \cos(\Omega\tau/2)|\phi_1\rangle \otimes |1\rangle + \text{sen}(\Omega\tau/2)|\phi_2\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.1.13)$$

y durante otro intervalo τ la RF hace evolucionar a este estado, notando que solo evoluciona del estado 1 al 2 dejando a los fotones iguales, es decir:

$$\begin{aligned} |\psi(2\tau)\rangle = & [\cos(\Omega\tau/2)[\cos(\Omega\tau/2)|\phi_1\rangle + \text{sen}(\Omega\tau/2)|\phi_2\rangle] \otimes |1\rangle + \\ & [\text{sen}(\Omega\tau/2)[- \text{sen}(\Omega\tau/2)|\phi_1\rangle + \cos(\Omega\tau/2)|\phi_2\rangle] \otimes |0\rangle \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

de la misma manera, cuando el pulso excita las componentes del estado base al estado excitado, emite un fotón un instante después decayendo al estado:

$$\begin{aligned} |\psi(2\tau^+)\rangle = & \cos^2(\Omega\tau/2)|\phi_1\rangle \otimes |2\rangle + \cos(\Omega\tau/2)\text{sen}(\Omega\tau/2)|\phi_2\rangle \otimes |1\rangle - \\ & \text{sen}^2(\Omega\tau/2)|\phi_1\rangle \otimes |1\rangle + \text{sen}(\Omega\tau/2)\cos(\Omega\tau/2)|\phi_2\rangle \otimes |0\rangle \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

pudiendo extender este análisis para n pulsos en tiempos separados por $\tau = \pi/\Omega N$ dando la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado base $(\cos \pi/2N)^{2n}$ la cual tiende a 1 conforme n tiende a infinito.

Esto muestra que bajo este proceso, el pulso no define una medición directa, si no el pulso crea una perturbación fuerte dando lugar una correlación entre el estado y el número de fotones, y no debido al colapso supuesto en trabajo original de Itano.

Argumento de Petrosky contra el experimento de Itano

Petrosky et al. [1990] muestra que el resultado de Itano puede ser reproducido por la ecuación de Schrödinger y un Hamiltoniano de un sistema de 3 niveles con un campo electromagnético que evoluciona unitariamente en un intervalo de 0 a T y que calculando $|\langle\phi_2|\psi(T)\rangle|^2$ dá la probabilidad obtenida por Itano.

Para ello el modelo que propone es aquel que al tiempo 0 se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |0\rangle$ en un campo RF de frecuencia ω_2 que es aplicado por un tiempo T_p , pasado este tiempo, un pulso de frecuencia ω_3 es aplicado durante un tiempo $t_\pi = \pi/\Delta_0$ donde Δ_0 es la frecuencia de Rabi de la transición del nivel 1 a 3, y al ser apagado este pulso, el nivel 3 decae al nivel 1 espontáneamente emitiendo un fotón, y todo este proceso es repetido n veces.

Con esto, al final en el tiempo $T_n = (n + 1)T_p + nt_\pi$ la función de onda está dada por:

$$|\psi(T_n)\rangle = [\exp(-iHT_p) \exp(-iH't_\pi)]^n \exp(-iHT_p) |\phi_1\rangle \otimes |0\rangle \quad (3.1.16)$$

los hamiltonianos dados por:

$$H = \sum_k (\omega_k - \omega_3) a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2} \Omega (|\phi_1\rangle \langle \phi_2| + |\phi_2\rangle \langle \phi_1|) + \sum_k V_k (|\phi_1\rangle \langle \phi_3| a_k^\dagger + |\phi_3\rangle \langle \phi_1| a_k) \quad (3.1.17)$$

y

$$H' = \sum_k (\omega_k - \omega_3) a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2} \Omega (|\phi_1\rangle \langle \phi_2| + |\phi_2\rangle \langle \phi_1|) - \frac{1}{2} \Delta_0 (|\phi_1\rangle \langle \phi_3| + |\phi_3\rangle \langle \phi_1|) \quad (3.1.18)$$

donde Ω es la frecuencia de Rabi de la transición entre los niveles 1 y 2, la k representa la suma sobre los modos de fotones posibles y V_k la amplitud de transición de un fotón entre los niveles 1 y 3. Además de esto supone que T_p es mucho mayor que el tiempo de vida del estado 3 ($T_p \gg t_\pi$), y que ω_3 es mucho mayor que el inverso del tiempo de vida del estado 3.

Con estos elementos [Petrosky et al. \[1990\]](#) demuestran que en efecto una evolución unitaria puede explicar el resultado de Itano sin necesidad de recurrir al concepto de medición, Petrosky argumenta también que la medición es parte esencial del efecto Zenón y que para mostrarlo se necesita un resultado experimental que no pueda ser explicado enteramente por la modificación del hamiltoniano lo cual el experimento de Itano no cumple.

3.2. Demostrando el efecto de Zenón en una computadora cuántica

Tan prometedoras como parecen las computadoras cuánticas para simular sistemas cuánticos, también pueden ser utilizadas para comprobar los mismos fundamentos de la mecánica cuántica, como plantea [Barik et al. \[2020\]](#) donde usando un circuito cuántico se puede replicar el comportamiento que da origen al efecto Zenón. Para ello utilizamos un compuerta cuántica que simule una evolución temporal con un hamiltoniano para dos niveles de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

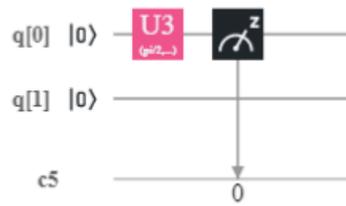


Figura 3.3: Circuito cuántico para simular la evolución temporal de un sistema de dos niveles (imagen tomada de Barik et al. [2020])

con Ω como parámetro. Con este hamiltoniano es fácil comprobar que la evolución temporal de un estado inicial esta dada por el operador:

$$e^{-iHt} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -i \operatorname{sen}(\omega t) \\ -i \operatorname{sen}(\omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

y aplicándolo sobre un estado inicial $|0\rangle$, da el estado para todo tiempo:

$$e^{-iHt} |0\rangle = \cos(\Omega t) |0\rangle - i \operatorname{sen}(\omega t) |1\rangle \quad (3.2.3)$$

notándose así que este ejemplo es idéntico matemáticamente a nuestro ejemplo de juguete desarrollado en el capítulo anterior.

Este comportamiento es fácilmente reproducible en una computadora cuántica utilizando una compuerta U3 actuando sobre un qubit (Nielsen and Chuang [2010]) cuya matriz de aplicación es:

$$U3(\theta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{i\lambda} \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) & e^{i(\phi+\lambda)} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

y usando los parámetros $\phi = -\pi/2$, $\lambda = \pi/2$ y $\theta = 2\Omega t$ obtenemos el caso de nuestro sistema hipotético de dos niveles. A la salida de esta compuerta se hace la medición y este sistema representa la evolución normal sin medición del sistema.

Para reproducir el efecto Zenón necesitamos agregar mediciones intermedias en esa evolución del sistema, para ello se usan compuertas CNOT.

La compuerta CNOT compara dos qubits: si el primero (o de control) es 0, el segundo (llamado objetivo) es inalterado pero si el primer qubit es 1, entonces el segundo es invertido, es decir, si era 0 cambia a 1 y viceversa.

Para hacer la medición tomamos como qubit de control en la compuerta CNOT el qubit que ha evolucionado según nuestro hamiltoniano, y como qubit objetivo otro qubit externo que sepamos su estado inicial, de forma tal que si el qubit de control permaneció en 0 (es decir, permaneció en su estado inicial) elqubit objetivo permanece igual, y si el qubit de control evolucionó a 1 entonces el qubit de prueba cambió,

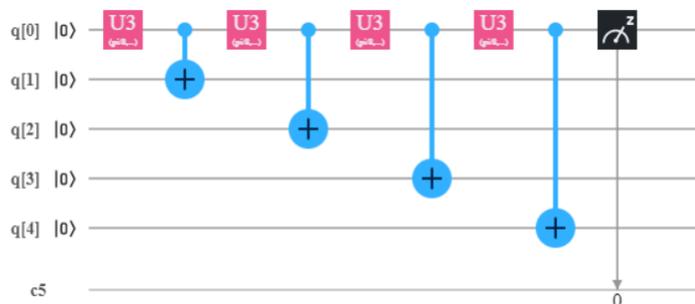


Figura 3.4: Circuito cuántico para simular el efecto Zenón: las compuertas U3 cumplen la función de evolución temporal en intervalos pequeños, mientras que las compuertas CNOT representan las mediciones sobre el sistema (imagen tomada de Barik et al. [2020])

de tal manera que la medición se realiza comprobando el qubit externo.

Usando esta idea podemos imaginar como construir un circuito que reproduzca el efecto Zenón; haciendo una evolución con compuertas U3 cambiando θ para que sean cada vez mas pequeñas con CNOTs intermedias después de cada evolución como compuertas de medición (figura 3.4)

Con esta idea Barik et al. [2020] obtienen la gráfica 3.5 en la que se muestra la probabilidad de supervivencia (es decir, la probabilidad de estar en el estado inicial) como función del numero de mediciones intermedias para distintos valores de θ mostrando que en efecto, conforme aumenta el número de mediciones intermedias (en nuestro caso CNOTs) la probabilidad de supervivencia tiende a 1, y conforme el tiempo de evolución representado por θ se hace más pequeño, se acerca más rápidamente a la probabilidad 1 comprobando el efecto Zenón.

3.3. Efecto Zenón en metales orgánicos

Aunque el efecto Zenón puede ser buscado de manera directa como lo planteado por Itano, también puede interpretarse un fenómeno ya conocido y ser justificado por un efecto Zenón. Este es el caso que proponen Kozlova and Pishchur [2021] donde datos experimentales pueden ser atribuidos a este fenómeno.

Para el caso propuesto por Kozlova, como en todo efecto Zenón se requieren tres ingredientes básicos: un sistema cuántico, una evolución unitaria y una medición.

El sistema de estudio para el efecto Zenón en metales orgánicos es un compuesto $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$, el cual contiene ligandos orgánicos BDC^{2-} (aniones de ácido tereftálico $(C_8H_4O_4)^{2-}$) y $DABCO$ (1,4-moléculas de diazabiciclooctano $C_6H_{12}N_2$) (Figura 3.6). La estructura cristalina del $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ arriba de los 223 K es tetragonal, con un volumen accesible para huéspedes de aproximadamente 62 por

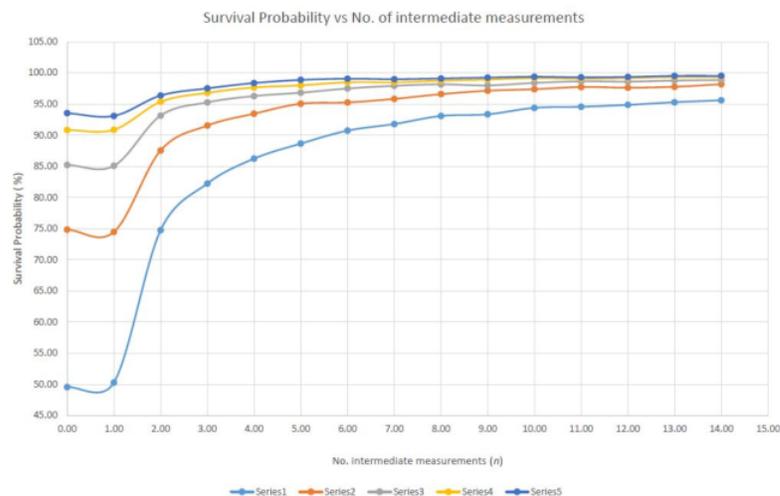


Figura 3.5: Probabilidad de supervivencia del estado inicial contra el número de compuertas CNOT intermedias para valores de θ de $\pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/5, \pi/6$ para la serie 1,2,3,4,5,6 respectivamente (imagen tomada de Barik et al. [2020])

ciento.

La característica central para usar este sistema es que el la capacidad calorífica molar (C_P) del $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ muestra tres transiciones de fase (PTs, Figura 3.7). Estas transiciones de fase (PTs) son identificadas como transiciones de fase de segundo orden. la PT1 proviene con el ordenamiento de los aniones BDC^{2-} a la temperatura de aproximadamente 130 K.

Una característica importante del $DABCO$ es que puede adoptar dos configuraciones cuánticas: una torcida-derecha R y otra a la izquierda R y estos estados son estados degenerados pero no son eigenestados de la molécula. Los eigenestados de la molécula son los estados simetrizados y antizimetrizados usando este par. Esto causa que la molécula oscile entre el estado S y R . La segunda transición PT2 que ocurre a aproximadamente 60 K es asociada con la terminación de las oscilaciones entre los estado S y R del $DABCO$. La PT3 a aproximadamente 14 K está relacionada con el decaimiento de de las moléculas de $DABCO$ en sobre tres diferentes estados de energía con diferentes ocupaciones.

El conjunto de $DABCO$ en $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ es visto como un subsistema inestable con huella digital de la evolución del $DABCO$ las PT2 y PT3 y consecuentemente, con la posible ocurrencia del efecto Zenón cuántico.

La estructura $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ puede absorber varias moléculas, incluyendo gases inertes, en particular, átomos de helio-4, los cuales pueden ser considerados como el aparato de medición ocurriendo en posiciones junto al $DABCO$ (Figura 3.6). Es sabido que los átomos de helio-4 en líquidos o fases sólidas interactúan los

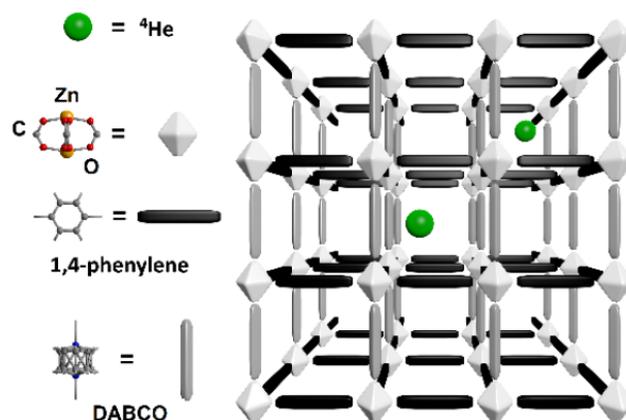


Figura 3.6: Estructura del $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ (imagen tomada de Kozlova and Pishchur [2021])

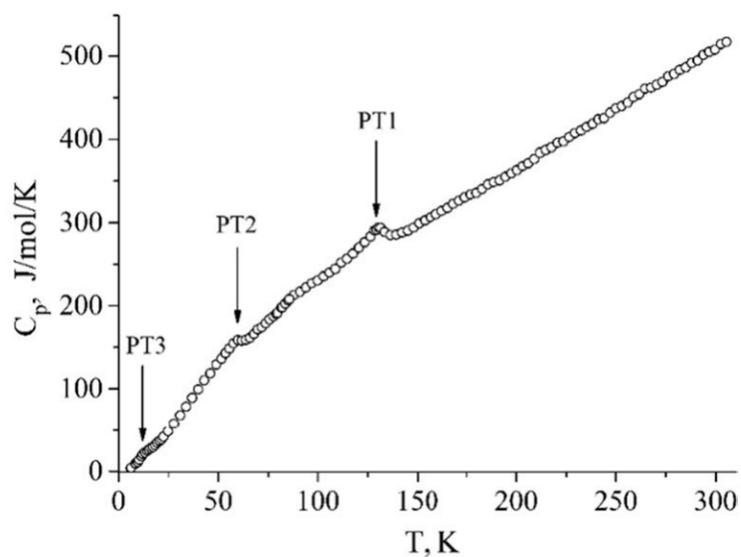


Figura 3.7: Dependencia de la capacidad calorífica C_p respecto a la temperatura del $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ (imagen tomada de Kozlova and Pishchur [2021])

unos con los otros gracias a las fuerzas de van der Waals las cuales están caracterizadas con una frecuencia de vibración de aproximadamente 10^{13} Hz y exhiben una amplitud grande de aproximadamente 1 Armstrong. Por eso se puede pensar que las interacciones del helio-4 con el $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ tendrán una frecuencia de 10^{13} Hz. por ello, si los poros del $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ son llenados con helio-4, las moléculas de *DABCO* serán afectas por los vecinos helios-4, lo cual podría causar un efecto Zenón. Este efecto solo solo podría ser revelado solo cuando los estados de energía del *DABCO* son cambiados, es decir, mientras ocurre la transición de fase. La condición requerida para un efecto Zenón es que la frecuencia de oscilación del helio $\nu > \nu_\alpha$ donde esta segunda es la barrera energética entre niveles de energía dle *DABCO* en unidades de frecuencia. Esta condición es cumplida ya que ν_α es del orden de 10^{13} Hz para PT2 y 10^{12} Hz para PT3.

Por otro lado, también tiene que ser menor al inverso del tiempo que le toma a las moléculas de *DABCO* y todo el compuesto $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$ llegar al equilibrio termodinámico, lo cual se cumple ya que el inverso del tiempo para llevar a equilibrio es del orden de 10^{14} Hz.

El efecto Zenón puede ser visto por los cambios en la entropía y la temperatura de la transiciones de fase cuando se cambia las concentraciones de helio-4 en los poros. Como el número de moléculas de *DABCO* puestas a prueba por los átomos de helio-4 cambia la entropía de las transiciones e fase decrecerá ya que algunas moléculas de *DABCO* serán excluidas de la transición de fase gracias a la influencia del aparato de medición. En el caso en el cual todas las moléculas de *DABCO* sean medidas, la transición de fase será inhibida completamente o ocurrirá a temperaturas más altas.

Con esto completamos los ingredientes que se requieren para el efecto Zenón: un sistema cuántico dado por la matriz de $Zn_2(BDC)_2(DABCO)$, pero en particular la molécula de *DABCO*, que tiene dos niveles de energía que cambian entre ellos evolucionando de manera unitaria al bajar la temperatura viéndose reflejado en transiciones de fase a temperaturas dadas en condiciones normales y un sistema de medición que consiste en insertar en la matriz átomos de helio-4 en posiciones cercanas a las moléculas de *DABCO*, los cuales vibran suficientes veces y con tal amplitud que logran restablecer a las moléculas de *DABCO* causando un cambio en las variables a las cuales ocurren las transiciones de fase.

Esto se ve reflejado en el trabajo de [Pishchur et al. \[2019\]](#) donde se observa el cambio de las temperaturas críticas (o más correctamente, la entropía molar del cambio de fase) como función de la presión, que de manera directa regula la concentración de átomos (variando desde 0.5 a 1.5 por cada 10 celdas de la matriz) mostrando que la transición P1 no depende del número de átomos de helio mientras que en el caso de P2 aumenta la entropía de transición y para P3 disminuye, siendo la primera la que es debida al ordenamiento del BDC y las otras correspondientes al cambio de

estado del DABCO, lo cual Kozlova interpreta como que en P3 ocurre el efecto Zenón cuántico ya que la redistribución de los diferentes estados del DABCO debido a la interacción con los átomos de helio, retrasan las transiciones entre niveles. Por el contrario, en la transición P2 es un anti-Zenón cuántico el que acelera las transiciones entre los niveles.

3.4. Estabilización de sistemas mediante la interacción con niveles excitados

Como hemos mostrado en secciones anteriores, es posible congelar un sistema cuántico detectándolo continuamente, pero esta no resulta ser la única manera. Por ejemplo, también se puede congelar un sistema enredándolo con otro sistema externo (como las respuestas de la comunidad al experimento de Itano al agregar el campo de fotones) de tal forma que ese sistema auxiliar cumple la función de una aparente medición.

En esta sección presentamos otra forma más de congelar un estado, motivada por la mecánica clásica, en particular del ejemplo de estabilización de un péndulo macroscópico, conocido como el péndulo de Kapitza [1965], en el que una oscilación rápida del punto de giro de un péndulo puede hacer que este encuentre más puntos de equilibrio estable a parte del natural que se encuentra en vertical con la gravedad en la parte más baja de su giro. La solución del problema macroscópico puede replantearse para sistemas cuánticos submicroscópicos, reforzando la idea de que en el efecto Zenón no hay colapso alguno de la función de estado del sistema.

La idea para congelar un estado cuántico es escoger un hamiltoniano adecuado que cumpla la función de congelador de este estado en ciertas condiciones, por ejemplo, como en el péndulo de Kapitza, esto ocurre cuando la fuerza y la frecuencia de las oscilaciones son adecuadas. El sistema cuántico de estudio para este ejemplo de juguete es un sistema de tres niveles y el hamiltoniano lo escogemos motivado por el trabajo de Buts [2017] y tiene la forma:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

siendo μ una constante que explicaremos más su significado en un momento. La primera componente de un vector de estado corresponde al peso que acompañaría al estado base del sistema y la segunda y tercera al segundo y tercer estado excitado respectivamente.

Para escribir la solución para todo tiempo, simplemente evaluando el operador

de evolución unitario calculando la exponencial de este hamiltoniano y lo aplicamos al estado inicial en la forma usual de:

$$|\psi(t)\rangle = \exp[-iHt] |\psi(0)\rangle \quad (3.4.2)$$

Por ejemplo, un sistema que se encuentra en el estado base al tiempo cero tendría un vector:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2 + \cos[t\sqrt{1+\mu^2}]}{1+\mu^2} \\ \frac{-i \operatorname{sen}[t\sqrt{1+\mu^2}]}{\sqrt{1+\mu^2}} \\ \frac{-\mu + \mu \cos[t\sqrt{1+\mu^2}]}{1+\mu^2} \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

donde notemos que:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

diciéndonos que este hamiltoniano para valores de μ grandes logra congelar al sistema si empieza en su estado base. Más aún si el estado inicial es de la forma:

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \operatorname{sen}(a) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.5)$$

y se deja evolucionar con este hamiltoniano tomando μ grande se obtiene:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \operatorname{sen}(a) \cos(t\sqrt{1+\mu^2}) \\ -i \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(t\sqrt{1+\mu^2}) \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

mostrando que lo que hace este hamiltoniano es congelar la primera entrada a costa de básicamente dejar la segunda entrada aleatoria (esto porque si μ es grande las segunda y tercera componente oscilan tan rápidamente que para fines prácticos son aleatorias).

Notemos que este método puede ser extendido para congelar cualquier estado, ya que podemos escribir en una base adecuada al hamiltoniano para que el estado inicial corresponda al vector canónico $(1,0,0)$ y así aplicar este nuevo hamiltoniano diciéndonos que, en principio, para esta clase de sistemas en cualquier estado existe un hamiltoniano que congela ese estado.

Más aun, si tenemos un sistema de dos niveles que queremos congelar, lo que se puede hacer es no necesariamente causar mediciones constantes o amarrarlo a otro

sistema externo, si no simplemente crearle otro nivel (o aprovechar uno ya existente) y usar este nivel como un nivel pivote auxiliar el cual puede ser utilizado para congelarlo.

Para agregar un punto de vista diferente de la física de este hamiltoniano, lo podemos escribir en su forma de bras y kets siendo:

$$H = |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| + \mu (|1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1|) \quad (3.4.7)$$

el cual contiene término cruzado similar al del hamiltoniano 3.1.17 en una forma simplificada, dando la idea de que el sistema que representa es un hamiltoniano dividido en dos partes, el de la izquierda asociado con las oscilaciones entre los dos primeros niveles mientras que la segunda parte es el equivalente a la interacción de fotones con el nivel excitado, solo que esta interacción, en este caso, es la interacción de ese primer nivel excitado con un segundo nivel que en el sistema original no tiene papel alguno, pero mediante esta interacción μ se vuelve relevante .

Esto nos lleva a la pregunta: ¿Es posible hacer un hamiltoniano solo de dos niveles que no requiera de un tercero y logre congelar al estado base?.

La respuesta encontramos utilizando un hamiltoniano genérico de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & a \end{pmatrix} \quad (3.4.8)$$

y aplicado sobre un estado inicial base:

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

obteniendo como amplitud para todo tiempo:

$$|\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|^2 = \cos^2(t\sqrt{b^2 + c^2}) \quad (3.4.10)$$

Viendo que no hay forma en que su cuadrado sea 1 para todo tiempo, a menos que b y c sean cero.

Es decir, este resultado muestra que no hay forma de que un hamiltoniano de dos niveles por si solo sea capaz de mantener un estado base congelado para todo tiempo, o dicho de otra manera, para poder congelar un estado, necesariamente se requiere un nivel externo que lo permita. en el caso del experimento de Itano este nivel es ese estado excitado, en nuestro ejemplo de juguete es el segundo nivel excitado con interacción μ y en el caso de 3.1.17 este viene de la interacción de los fotones con el tercer nivel.

Con esto vemos que, en efecto, una medición continua sería la única forma de mantener un sistema de dos niveles congelado sin la ayuda de un nivel externo; pero esto es un poco erróneo en el sentido estricto ya que la medición como la plantea la

interpretación de Copenhagen no hace alusión a un sistema externo y supone que dichas mediciones se pueden hacer. Pero en la realidad, la medición es hecha por un sistema externo, regresando al caso de agregar un nivel para poder congelar.

CONCLUSIONES

El efecto Zenón permaneció siendo una curiosidad teórica de la mecánica cuántica hasta la comprobación experimental de [Itano \[2009\]](#), pero trayendo bajo el brazo discusiones sobre si su experimento en realidad representaba una medición y un colapso de la función de onda ya que explicaciones como la de [Ballentine \[1991\]](#) o [Petrosky et al. \[1990\]](#) eran capaces de reproducir los datos sin la necesidad de recurrir al postulado de medición y solo usando la evolución unitaria.

Estas críticas representan, más que un contra argumento para el experimento de Itano y la interpretación como un efecto Zenón, la posibilidad de congelar estados no solo a través de mediciones repetidas, sino también a través de interacciones repetidas y rápidas con el sistema en estudio, o con el uso de subsistemas auxiliares que interactúan para congelarlo.

Con esto ampliamos la definición del efecto Zenón no solo al que ocurre de mediciones repetidas continuas, sino también a los sistemas con interacciones rápidas para el congelamiento del estado, como pueden ser los trabajos de [Barik et al. \[2020\]](#), [Kozlova and Pishchur \[2021\]](#) o también a los sistemas que tienen interacciones fuertes para el congelamiento del estado como nuestro ejemplo de la sección 3.4.

Aun cuando la misma esencia de congelamiento debido a una observación continua de la interpretación de Copenhagen es ampliada ya que no son mediciones si no interacciones con sistemas externos, la misma medición en esta interpretación causa problemas por si solo como los problemas de realidad propuestos por [Frauchiger and Renner \[2018\]](#).

Esto nos esclarece que el efecto Zenón cuántico es un fenómeno independiente de la interpretación de Copenhagen, ya que, aun cuando esa fue su motivación, la aparición del efecto ocurre aun cuando se utilizan perturbaciones o interacciones fuertes con el sistema. Esto también abre la oportunidad del estudio de congelación de esta-

dos por diversos métodos, como mediciones, interacciones externas e interacciones fuertes.

Mi opinión es que la interpretación de Copenhagen, considerada la estandar para enseñar en las aulas de estudiantes a lo largo de todo el mundo, presenta serios problemas desde sus cimientos. Porque aun cuando la existencia de una función de onda de una partícula es una idea natural que proviene de la electrodinámica con las correspondientes modificaciones para una partícula, trayendo consigo el principio de superposición causando este efectos tan sorprendentes como mediciones sin interacción de [Elitzur and Vaidman \[1993\]](#) (dándole un atractivo casi místico a esta interpretación de la superposición con la cual concuerdo).

La interpretación de Copenhagen también requiere de principios como el de medición el cual contradice inclusive el principio de evolución unitaria. El efecto Zenón solo ayuda a poner otra piedra a la iglesia de la oposición de esta interpretación ya que el concepto de colapso, aun cuando está en la raíz de este efecto, no lo requiere ya que evoluciones unitarias son capaces de explicarlo correctamente. Esto visto como un defecto pero a mi visión, siendo uno de sus puntos fuertes dándole versatilidad y porque como en nuestro ejemplo de congelamiento de un sistema de juguete, se muestra que no hay forma de congelar un sistema de dos niveles únicamente con ese sistema aislado, excepto con el colapso, que casualmente de manera práctica, siempre requiere un sistema externo, es decir, el efecto Zenón no está amarrado a la interpretación de Copenhagen.

Con esto, creo que en un futuro cuando la mecánica cuántica evolucione, la interpretación de la superposición como la partícula estando en todos sus estados seguirá siendo el caballo de batalla (ya sea por utilidad, por atractivo esotérico o por razones históricas) pero veremos que el principio de colapso será sustituido por otro cuando algún experimento lo contradiga o se encuentre una interpretación congruente unitaria que la sustituya.

BIBLIOGRAFÍA

- L. E. Ballentine. Comment on “quantum zeno effect”. *Phys. Rev. A*, 43:5165–5167, May 1991. doi: 10.1103/PhysRevA.43.5165. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.43.5165>.
- Subhashish Barik, Dhiman Kumar Kalita, Bikash K. Behera, and Prasanta K. Panigrahi. Demonstrating quantum zeno effect on ibm quantum experience, 2020.
- M. Beck. *Quantum Mechanics: Theory and Experiment*. Oxford University Press, 2012. ISBN 9780199798230. URL <https://books.google.com.mx/books?id=tyVpAgAAQBAJ>.
- Vyacheslav A. Buts. Quantum zeno effect, kapitsa pendulum and spinning top principle. comparative analysis, 2017.
- C. Cohen-Tannoudji, B.D.F.L. Claude Cohen-Tannoudji, P.C.W. Davies, B. Dui, D.S. Betts, B. Diu, F. Laloe, S.R. Hemley, N. Ostrowsky, D. Ostrowsky, et al. *Quantum Mechanics, Volume 1*. A Wiley-interscience publication. Wiley, 1977. ISBN 9782705658335. URL <https://books.google.com.mx/books?id=iHcpAQAAMAAJ>.
- Richard J. Cook. What are quantum jumps? *Physica Scripta*, T21:49–51, 1988. ISSN 1402-4896. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/1988/T21/009>.
- Avshalom C. Elitzur and Lev Vaidman. Quantum mechanical interaction-free measurements. *Foundations of Physics*, 23(7):987–997, 1993. ISSN 1572-9516. doi: 10.1007/BF00736012. URL <https://doi.org/10.1007/BF00736012>.
- Jan Faye. Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2019 edition, 2019.
- C.J. Foot, C.J.F. Foot, and D.P.C.J. Foot. *Atomic Physics*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2005. ISBN 9780198506959. URL https://books.google.com.mx/books?id=_CoSDAAAQBAJ.

- Daniela Frauchiger and Renato Renner. Quantum theory cannot consistently describe the use of itself. *Nature Communications*, 9(1):3711, 2018. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/s41467-018-05739-8. URL <https://doi.org/10.1038/s41467-018-05739-8>.
- D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107179868. URL <https://books.google.com.mx/books?id=0h-nDAAAQBAJ>.
- Wayne M Itano. Perspectives on the quantum zeno paradox. *Journal of Physics: Conference Series*, 196:012018, nov 2009. doi: 10.1088/1742-6596/196/1/012018. URL <https://doi.org/10.1088/1742-6596/196/1/012018>.
- Wayne M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland. Quantum zeno effect. *Phys. Rev. A*, 41:2295–2300, Mar 1990. doi: 10.1103/PhysRevA.41.2295. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.41.2295>.
- Pyotr Leonidovich Kapitza. Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, and pendulum with a vibrating suspension. *Collected papers of PL Kapitza*, 2:714–737, 1965.
- Svetlana G. Kozlova and Denis P. Pishchur. On the possibility to observe relations between quantum measurements and the entropy of phase transitions in $zn_2(bdc)_2(dabco)$. *Foundations of Physics*, 51(1):8, 2021. ISSN 1572-9516. URL <https://doi.org/10.1007/s10701-021-00416-1>.
- B. Misra and E. C. G. Sudarshan. The zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, 18(4):756–763, 1977. doi: 10.1063/1.523304. URL <https://doi.org/10.1063/1.523304>.
- I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687. URL <https://books.google.com.mx/books?id=-dVKAQAAIAAJ>.
- M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139495486. URL <https://books.google.com.mx/books?id=-s4DEy7o-a0C>.
- T.P. Orlando. Two-level system with static and dynamic coupling. <https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-728-applied-quantum-and-statistical-physics-fall-2006/study-materials/twolevel04.pdf>.
- Paradoja de Zenón. Paradoja de zenón — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. URL https://es.wikipedia.org/wiki/Paradojas_de_Zen%C3%B3n. [Online; accessed 20-July-2021].

- T. Petrosky, S. Tasaki, and I. Prigogine. Quantum zeno effect. *Physics Letters A*, 151(3):109–113, 1990. ISSN 0375-9601. doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90173-L](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90173-L). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019090173L>.
- D.P. Pishchur, N.B. Kompankov, A.A. Lysova, and S.G. Kozlova. Order-disorder phase transitions in $\text{zn}_2(\text{c}_8\text{h}_4\text{o}_4)_2 \cdot \text{c}_6\text{h}_{12}\text{n}_2$ in atmospheres of noble gases. *The Journal of Chemical Thermodynamics*, 130:147–153, 2019. ISSN 0021-9614. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jct.2018.10.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021961418305469>.