UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Condiciones suficientes para que la unión de dos digráficas infinitas resulte núcleo perfecta.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Brian Correa Landín

TUTORA

Dra. María del Rocío Sánchez López.

Ciudad de México 2022

Agradecimientos

A mi madre, por todo el amor, paciencia y comprensión. Por todo el esfuerzo realizado durante todo estos años. Por motivarme en los días difíciles y tratar de entenderme en los aun más.

A mi padre, por trabajar cada día y darme el ejemplo de nunca rendirse, por todas las noches que me acompañaba hasta que yo fuera a dormir.

A mi hermana y sobrina por siempre hacerme reír.

A mis amigos, pero en especial a Carlos, por acompañarme en este camino y no dejarme rendir. Por la sana y divertida competencia que nos motivaba y la ayuda que nos brindamos dentro y fuera de las aulas. Por todas las bromas que hacían menos pesados los días de estrés. A Daniel, por ser mi guía por tantos años y porque sin él yo no hubiera formado parte de la Facultad de Ciencias. A Roger, por ayudarme con todas mis consultas con la mejor actitud y siempre tener tiempo para hablar.

A mi asesora, Rocío, por aceptarme como tesista, orientarme, enseñarme, motivarme, pero sobre todo por tenerme tanta paciencia, la paciencia que en ocasiones ni yo me tenía. Se que no fue fácil, gracias.

Índice general

Introducción

Con el fin de introducir el objeto de estudio de esta tesis, presentamos un juego conocido como tipo Nim.

Hay dos jugadores y un montón de 12 palillos sobre la mesa. Cada jugador puede recoger 1 o 2 palillos por turno mientras queden los suficientes para hacerlo. Para ser el ganador debes dejar cero palillos sobre la mesa.

Una pregunta natural en la mayoría de estos juegos es: ¿Hay alguna estrategia para ser el ganador? La respuesta es **sí** y la analizaremos a continuación mediante la Teoría de Digráficas.

Primero presentaremos una digráfica D que asociaremos a nuestro juego.

$V(D) = \{1, 2, \ldots, 11, 12\}$, donde los números representan el número de palillos que se van dejando en la mesa durante el juego.

$A(D) = \{(x, y) : \textit{puedes ir de } x \textit{ a } y \textit{ quitando uno o dos palillos}\}$.

En la siguiente imagen veremos la digráfica asociada al juego.

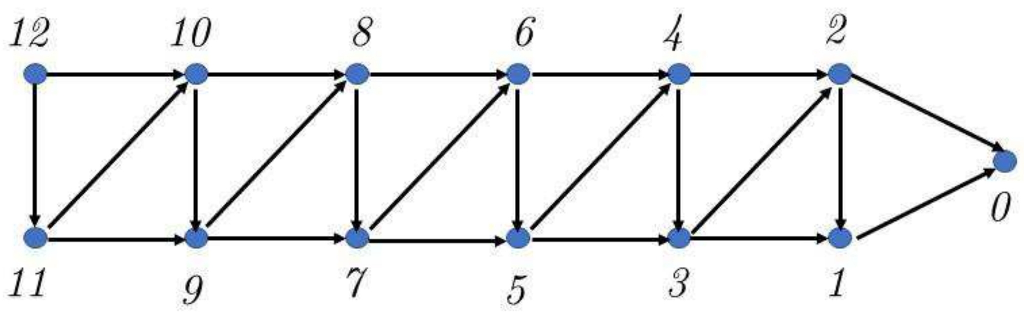


Figura 1: Digráfica asociada a juego tipo Nim con doce palillos.

Notemos que para ganar tenemos que dejarle a nuestro contrincante tres palillos, para que así, si él toma dos, nosotros tomar uno y ganar, y si él toma uno, nosotros tomar dos y ganar. Luego, para asegurarnos de poder dejarle tres palillos, nuestro contrincante tuvo que dejarnos cinco o cuatro, para así nosotros poder quitar dos o un palillo respectivamente. Es decir, si en un turno anterior nos aseguramos de dejarle seis palillos, para que así él termine dejando cinco o cuatro, habremos ganado pues eso nos asegura poder dejarle tres palillos en nuestra siguiente jugada. Siguiendo con esta lógica podemos ver que el dejar nueve palillos nos deja en posibilidad de ganar, y para asegurarnos de poder dejar nueve palillos nuestro contrincante debe dejarnos diez u once, es decir, él debe ser el primero en retirar palillos. Por lo que la estrategia ganadora es convencer al contrincante que inicie el juego y tú como segundo jugador siempre ir dejando una cantidad de palillos múltiplo de tres, en específico, en el caso de los doce palillos, la **solución** es dejar doce (es decir, que el contrincante empiece), nueve, seis y por último tres para poder asegurar agarrar los últimos.

En el año de 1944 el matemático von Neumann y el economista Morgenstern publicaron el libro "Theory of Games and Economic Behavior"[12] donde introducen el concepto de "solución"para juegos cooperativos. Años después el matemático C. Berge redefinió dicho concepto en [3] y así fue como se originó lo que hoy conocemos como "núcleo"que se define a continuación.

Sean D una digráfica y N un subconjunto de $V(D)$. Llamamos a N **independiente** si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de N ocurre que $(x, y) \notin A(D)$ y $(y, x) \notin A(D)$. Llamamos a N **absorbente** si para todo vértice x en $V(D) \setminus N$ existe un vértice y en N tal que $(x, y) \in A(D)$. Diremos que N es **núcleo** de D si N es independiente y absorbente.

A continuación vemos una digráfica que está asociada a nuestro juego introductorio y donde podemos notar que nuestra solución es un núcleo de la digráfica.

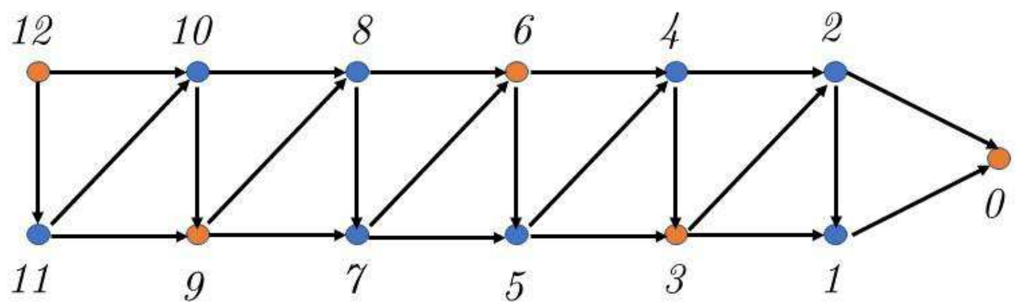


Figura 2: Estrategia ganadora para el juego de doce palillos.

La Teoría de Núcleos es de gran importancia debido a sus múltiples aplicaciones en diversas áreas como lo son; la Teoría de Juegos, Teoría de Decisiones y Lógica, entre otras.

De manera general, determinar si una digráfica tiene o no núcleo es un problema NP-completo, como lo demostró V. Chvátal en [4]. Debido a la importancia de la Teoría de Núcleos, hay algunos trabajos de investigación donde se han estudiado algunas familias de digráficas, las cuales ahora sabemos tienen núcleo. Algunos resultados son: toda digráfica finita simétrica es núcleo perfecta [2]; toda digráfica finita tal que todo ciclo de longitud impar tiene al menos dos flechas simétricas es núcleo perfecta [5]; toda digráfica finita pretransitiva derecha (o izquierda) es núcleo perfecta [5]. También se ha estudiado la existencia de núcleos en digráficas infinitas, las cuales resultan ser la unión de otras dos digráficas con ciertas propiedades. Algunos de estos trabajos son: "Kernels in quasi-transitive digraphs"[8] y "Kernels in pretransitive digraphs"[7] por Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy. Recientemente en "Union of digraphs which become kernel perfect"[6] Hortensia Galeana Sánchez y Mucuy-kak Guevara mostraron nuevas condiciones que garantizan la existencia de núcleos en la unión de dos digráficas finitas. Este último artículo es de gran importancia para nosotros, pues a partir del teorema principal de dicho artículo nosotros obtuvimos un resultado que garantiza la existencia de un núcleo en la unión de dos digráficas, posiblemente infinitas, con ciertas características.

En los preliminares se exhibirán definiciones básicas de la teoría de digráficas así como resultados que nos serán de ayuda para el desarrollo de los demás capítulos.

En el primer capítulo se verán algunos ejemplos y datos interesantes sobre núcleos. También se abordará la definición de lo que es una digráfica núcleo perfecta y una caracterización que nos ayudará en algunos resultados con los que trabajaremos con el fín de determinar si una digráfica es núcleo perfecta. La mayoría de los resultados están enfocados en digráficas finitas, pero al final del capítulo se verán otros que son aplicados en digráficas infinitas y que serán de gran importancia para el desarrollo del resultado principal de esta tesis.

En el segundo capítulo trabajaremos con m-coloraciones, definiremos lo que es una trayectoria infinita exterior monocromática, lo cual es de vital importancia pues la ausencia de estas estructuras es una hipótesis fuerte en muchos de los resultados con los que trabajaremos. También vemos lo qué es un "núcleo por trayectorias monocromáticas", el cual es una generalización del concepto de núcleo para digráficas con una m-coloración. Por último vemos un resultado presentado por Sands, Sauer y Woodrow, el cual da condiciones suficientes para que una digráfica D, 2-coloreada, tenga un núcleo por trayectorias monocromáticas. Este último teorema ha sido inspiración para el desarrollo de los trabajos que muestran la existencia de núcleos en uniones de digráficas finitas o infinitas.

En el tercer capítulo estudiaremos el artículo "Union of digraphs which become kernel perfect"de Hortensia Galeana Sánchez y Mucuy-kak Guevara, donde se presentan condiciones suficientes para que la unión de dos digráficas finitas sea núcleo perfecta.

En el cuarto capítulo estudiaremos y presentaremos un resultado original sobre las condiciones necesarias para que la unión de dos digráficas, posiblemente infinitas, resulte ser núcleo perfecta. Este estudio está motivado por el hallazgo de contraejemplos en donde podemos ver que los resultados obtenidos en el capítulo tres no son necesariamente ciertos para digráficas infinitas.

Preliminares

En este capítulo presentaremos definiciones y resultados básicos de la Teoría de Digráficas, que nos serán de utilidad a lo largo de todo este trabajo, esto con el fin de que el lector tenga todas las herramientas en este texto para su mejor comprensión.

0.0.1. Definiciones básicas.

Una **digráfica** D consiste de un conjunto finito y no vacío de objetos llamados **vértices**, denotado por $V(D)$, y un conjunto de pares ordenados de vértices distintos de D, llamados **flechas**, denotado por $A(D)$.

El **orden** de una digráfica D es la cantidad de elementos del conjunto $V(D)$; es decir, $|V(D)|$. El **tamaño** de D es la cantidad de elementos del conjunto $A(D)$; es decir, $|A(D)|$. Si una digráfica D es tal que $|V(D)| = 1$, entonces llamaremos a D **digráfica trivial**.

Dada una digráfica, digamos D, la podemos representar geométricamente como sigue: dibujamos un punto por cada vértice de $V(D)$ y una flecha que vaya del punto asociado a u hacia el punto asociado a v si y sólo si $(u, v) \in A(D)$.

Veamos un ejemplo de la representación de una digráfica D. Los vértices de D son $\{u, x, y, z\}$ y las flechas de D son $\{(u, x),(y, z),(z, u)\}$. En la figura 3 se exhibe la representación geométrica de la digráfica D.

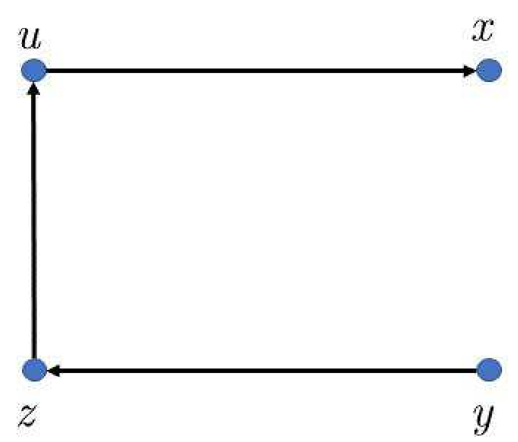


Figura 3: Representación geométrica de una digráfica

Dada una flecha (x, y) de una digráfica D, diremos que x **domina a** y o que y es **dominado por** x. Diremos que la flecha (x, y) es **simétrica** si $(y, x) \in A(D)$. Si ocurre que $(x, y) \in A(D)$ y $(y, x) \notin A(D)$ entonces diremos que la flecha (x, y) es **asimétrica**. Sean D una digráfica y S y K dos subconjuntos de $V(D)$; una $\boldsymbol{SK}$**-flecha** es una flecha (x, y) de D tal que $x \in S$ y $y \in K$. En particular, si $S = \{x\}$ o $K = \{y\}$, entonces solo escribiremos $\boldsymbol{xK}$**-flecha** o $\boldsymbol{Sy}$**-flecha**, respectivamente.

Para v en $V(D)$, definimos la **exvecindad de** v como el conjunto $\{u \in V(D) : (v, u) \in A(D)\}$, denotado por $N_D^+(v)$. A los elementos de este conjunto los conocemos como **exvecinos** de v. De igual forma definimos la **invecindad** de v como el conjunto $\{w \in V(D) : (w, v) \in A(D)\}$, denotado por $N_D^-(v)$. A los elementos de este conjunto los conocemos como **invecinos** de v. La **vecindad** de v, denotada por $N_D(v)$, está definida como $N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$. A los elementos de este conjunto los conocemos como vecinos de v. De manera similar, para un subconjunto K de $V(D)$ podemos definir la exvecindad de este conjunto como el conjunto $\bigcup_{x \in K} N_D^+(x)$, denotado por $N_D^+(K)$. Y la invecindad de K se define como el conjunto $\bigcup_{x \in K} N_D^-(x)$, denotado por $N_D^-(K)$. El **exgrado** de v, denotado por $\delta_D^+(v)$, está definido por $|N_D^+(v)|$. De igual forma definimos el **ingrado** de v, denotado por $\delta_D^-(v)$, como $|N_D^-(v)|$. Un vértice que no domina y no es dominado por nadie, y por lo tanto $\delta_D^-(v) = \delta_D^+(v) = 0$, es llamado **vértice aislado**.

En la figura 4 tenemos un ejemplo de una digráfica D, donde $N_D(x) = N_D^-(x) = N_D^+(x) = \{u\}$ y donde $\delta_D^-(x) = \delta_D^+(x) = 1$. Si $K = \{z, y\}$, entonces $N_D^+(K) = \{u, z\}$ y $N_D^-(K) = \{w, y, u\}$. En esta digráfica, v es un vértice aislado.

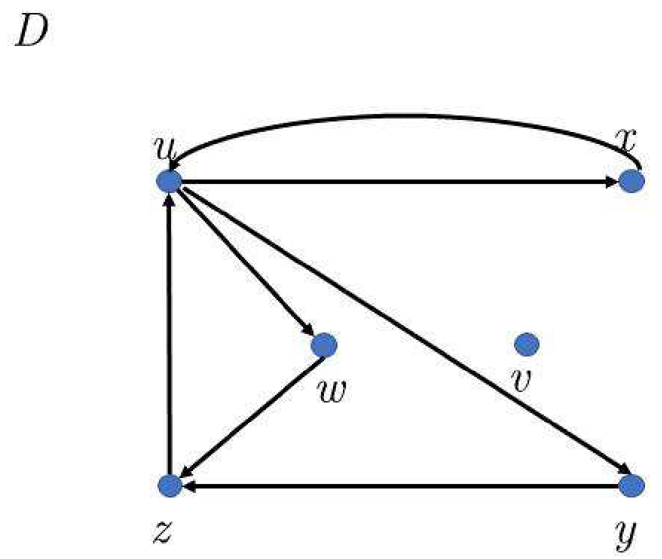


Figura 4: Digráfica D

Una digráfica H es una **subdigráfica** de una digráfica D si $V(H) \subseteq V(D)$ y $A(H) \subseteq A(D)$. Si H es una subdigráfica de D tal que $V(D) = V(H)$, entonces decimos que H es una **subdigráfica generadora de** D.

Sean D y G dos digráficas, la **unión** de las digráficas D y G, denotada por $\boldsymbol{D \cup G}$, es la digráfica tal que $V(D \cup G) = V(D) \cup V(G)$ y $A(D \cup G) = A(D) \cup A(G)$.

Dada una digráfica D definimos su **parte simétrica**, denotada por $Sim(D)$, como la subdigráfica tal que $V(Sim(D)) = V(D)$ y $A(Sim(D)) = \{(x, y) \in A(D) : (x, y)$ es simétrica$\}$. De igual manera definimos la **parte asimétrica**, denotada por $Asim(D)$, como la subdigráfica tal que $V(Asim(D)) = V(D)$ y $A(Asim(D)) = \{(x, y) \in A(D) : (x, y)$ es asimétrica$\}$. Una digráfica D la podemos ver como la unión de las subdigráficas $Sim(D)$ y $Asim(D)$. Sea X un subconjunto de $V(D)$, la **subdigráfica inducida por** X, denotada por $D[X]$, es la digráfica tal que $A(D[X])$ es el subconjunto de todas las flechas de $A(D)$ que cumplen con tener sus dos extremos en X y $V(D[X]) = X$. De forma análoga, para un subconjunto A' de $A(D)$, la **subdigráfica inducida por** A', denotada por $D[A']$, es la subdigráfica de D tal que $V(D[A'])$ es el subconjunto de vértices de $V(D)$ donde incide al menos una flecha de A' y $A(D[A']) = A'$. A un subconjunto N de $V(D)$ lo llamaremos **independiente** si para todo subconjunto $\{x, y\}$ de N ocurre que $(x, y) \notin A(D)$ y $(y, x) \notin A(D)$. Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, la subdigráfica inducida por $V(D) \setminus S$ es denotada por $\boldsymbol{D - S}$.

A continuación veremos algunos ejemplos de las definiciones anteriores.

Las digráficas H_1 y H_2 son una subdigráfica y una subdigráfica generadora, respectivamente, de la digráfica D de la figura 4.

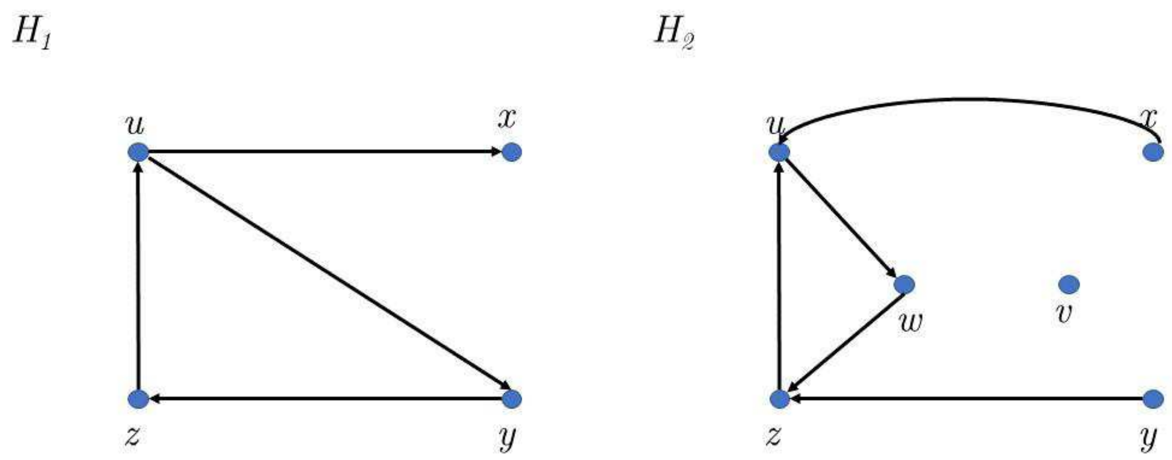


Figura 5: Subdigráficas H_1 y H_2 de D

Las siguientes digráficas son la parte simétrica y asimétrica, respectivamente, de la digráfica D de la figura 4.

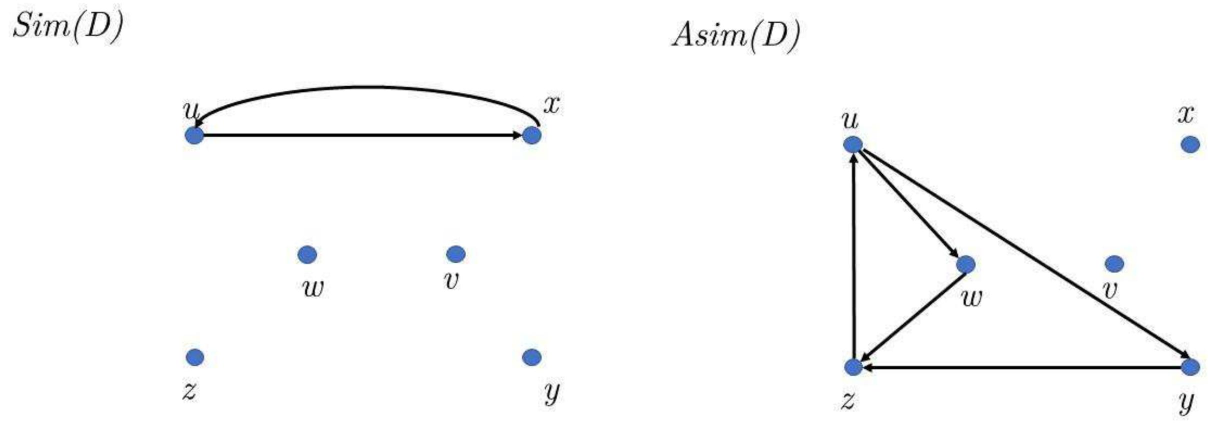


Figura 6: Parte simétrica y asimétrica de D

Considerando $X = \{x, y, u, w\}$ y $A' = \{(u, w), (z, u), (w, z), (y, z)\}$, las subdigráficas inducidas por X y por A', respectivamente, respecto a la digráfica D de la figura 4 son las siguientes.

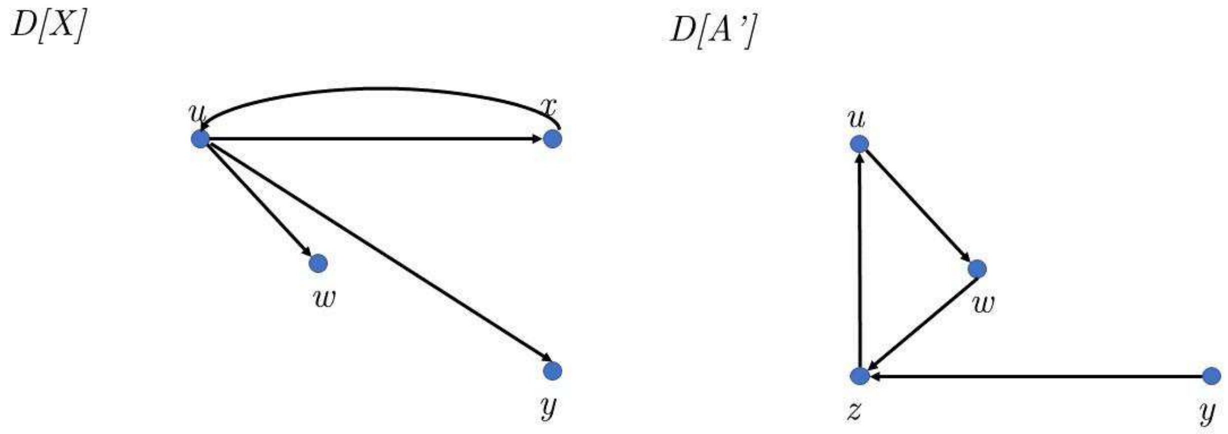


Figura 7: Subdigráficas inducidas por X y por A'

Por último, considerando $X = \{x, y, u, w\}$ y la digráfica D de la figura 4, la subdigráfica inducida por $V(D) \setminus X$ es la siguiente.

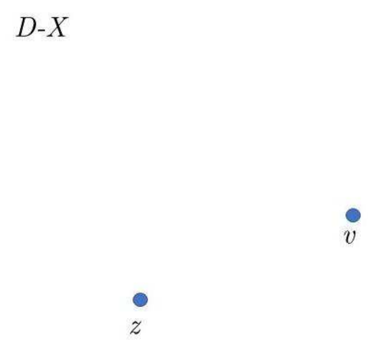
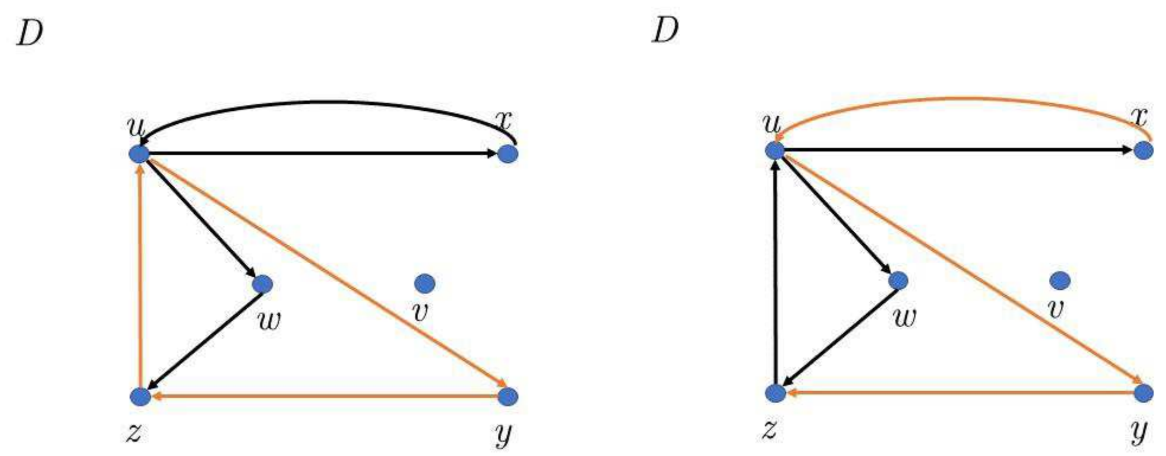


Figura 8: $D \setminus X$

A una sucesión de vértices $W = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ para cada i en $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ le llamamos **camino dirigido**, denotado por x_0x_k**-camino dirigido**. La **longitud** del camino dirigido W se define como el número k, denotado por $l(W)$. Si $x_0 = x_k$, entonces diremos que W es un **camino dirigido cerrado**. A un camino dirigido $W = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ donde todos sus vértices son distintos lo conocemos como **trayectoria dirigida**, denotada por $\boldsymbol{x_0x_k}$**-trayectoria dirigida**. A un camino dirigido cerrado $W = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ donde los vértices son distintos por parejas salvo por $x_0 = x_k$ y $k \geq 2$ lo llamaremos **ciclo dirigido**. A una digráfica que no admite ciclos dirigidos la llamaremos **acíclica**. De aquí en adelante en lugar de escribir camino dirigido, trayectoria dirigida o ciclo dirigido omitiremos la palabra "dirigido" y simplemente escribiremos camino, trayectoria o ciclo, respectivamente.

En la siguiente imagen podemos ver un ejemplo de un ciclo y de una trayectoria, respectivamente, contenidas en la digráfica D de la figura 4.



Dada una trayectoria $T = (x_0, \ldots, x_k)$ y dos vértices x_i y x_j, con $i < j$, en $V(T)$, denotaremos por (x_i, T, x_j) al camino $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j)$.

Dado un par de vértices x y y de D, definimos **la distancia de** x **hacia** y, denotado por $d(x, y)$, como mín $\{l(P) : P\ es\ una\ xy - trayectoria\}$.
Notemos que de la definición de distancia se tiene que $d(x, x) = 0$ para cualquier vértice x, además, la distancia definida no cumple de manera general la propiedad de simetría.

Después de las definiciones anteriores veremos algunos resultados que las involucran y que además nos serán de utilidad más adelante.

Proposición 0.0.1. *Toda digráfica acíclica tiene al menos un vértice de exgrado cero y uno de ingrado cero.*

Demostración. Sea D una digráfica acíclica. Supongamos, para llegar a una contradicción, que no existe ningún vértice de exgrado cero. Ahora, sea x_1 un vértice cualquiera de D. Como $\delta^+_D(x_1) > 0$, entonces existe un vértice x_2 en $V(D)$ tal que $(x_1, x_2) \in A(D)$. Luego, dado que $\delta^+_D(x_2) > 0$, existe un vértice x_3 en $V(D)$ tal que $(x_2, x_3) \in A(D)$. Si seguimos con este procedimiento construiremos un camino $W = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y dado que el conjunto $V(D)$ es finito, existen i y k en $\mathbb{N}$ tales que $x_i = x_k$.

Sea $k_1 = \text{mín}\ \{k : x_i = x_k$ para algún i en $\{1, 2, \ldots, k\}\}$. Luego el camino $W' = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{k_1})$ es un ciclo, lo cual es una contradicción ya que D es una digráfica acíclica. Por lo tanto, si D es una digráfica acíclica, entonces D tiene un vértice de exgrado cero.
De manera análoga, podemos demostrar que si D es una digráfica acíclica, entonces D tiene al menos un vértice de ingrado cero, esto considerando un camino de la forma $W = (..., x_3, x_2, x_1)$ y bajo los mismos argumentos que usamos para demostrar que existe un vértice de exgrado cero.

□

Teorema 0.0.2. *Sean D una digráfica y x y y un par de vértices distintos en D. Si existe un xy-camino, W, en D, entonces W contiene una xy-trayectoria.*

Demostración. Sea P un xy-camino en D tal que $l(P)$ =mín$\{l(C) : C\ es\ un\ xy-camino\ contenido\ en\ W\}$. Es claro que $\{l(C) : C\ es\ un\ xy - camino\ contenido\ en\ W\} \neq \emptyset$ pues $l(W)$ es un elemento de este conjunto. Veamos que P es una xy-trayectoria. Procediendo por contradicción, supongamos que P no es una xy-trayectoria.
Si $P = (x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y)$, entonces existen un x_i y x_j en $V(P)$, con $i < j$, tales que $x_i = x_j$. Luego, $(x, P, x_i) \cup (x_j, P, y)$ es un xy-camino, contenido en W, de menor longitud que P, lo cual contradice la elección de P. Por lo tanto, P es una xy-trayectoria contenida en W.

□

Teorema 0.0.3. *Si D es una digráfica con un camino cerrado de longitud impar, entonces D contiene un ciclo de longitud impar.*

Demostración. Sea $C = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_1)$ un camino cerrado de longitud impar mínima en D. Afirmamos que C es un ciclo. De lo contrario existen un par de vértices x_i y x_k tales que $x_i = x_k$, con $i < k$ y $\{i, k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Podemos ver a C como la unión de dos caminos cerrados: $C_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_i = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_1)$ y $C_2 = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j = x_i)$, donde C_1 y C_2 no pueden tener la misma paridad, ya que de ser así C sería de longitud par. Por otro lado, ninguno de estos dos caminos pueden tener longitud impar, ya que de ser así encontraríamos un camino cerrado de longitud impar menor a la de C, lo cual no puede ser por la elección de C. Es decir, en C no existen vértices repetidos, por lo que C es un ciclo de longitud impar.

□

Dada una digráfica D, decimos que $\{U_1, U_2\}$ es una **bipartición** de $V(D)$ si:
*$U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$.
*$U_1 \cup U_2 = V(D)$.
*$U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
*U_1 y U_2 son conjuntos independientes.
A una digráfica que admite una bipartición la llamaremos digráfica **bipartita**.

Nota: Sea D una digráfica bipartita. Si G es una subdigráfica inducida de D, de orden al menos dos, entonces G también es bipartita. Esto dado que si $\{U_1, U_2\}$ es una bipartición de $V(D)$, entonces $\{V(G) \cap U_1, V(G) \cap U_2\}$ es una bipartición de $V(G)$ siempre y cuando $V(G) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada i en $\{1, 2\}$. Si $V(G) \subseteq U_i$ para algún i en $\{1, 2\}$, entonces como U_i es un conjunto independiente, tenemos que todos lo vértices de $V(G)$ son aislados, por lo cual cualquier partición de $V(G)$ en dos conjuntos es una bipartición.

Diremos que una digráfica es **transitiva** siempre que $\{(x,y),(y,z)\} \subseteq A(D)$ implica que $(x,z) \in A(D)$. Una digráfica es **cuasitransitiva** siempre que $\{(x,y),(y,z)\} \subseteq A(D)$ implica que $(x,z) \in A(D)$ o $(z,x) \in A(D)$. Una digráfica es **pretransitiva derecha** siempre que $\{(x,y),(y,z)\} \subseteq A(D)$ implica que $(x,z) \in A(D)$ o $(z,y) \in A(D)$. Una digráfica es **pretransitiva izquierda** siempre que $\{(x,y),(y,z)\} \subseteq A(D)$ implica que $(x,z) \in A(D)$ o $(y,x) \in A(D)$.

Lema 0.0.4. *([7]) Sea D una digráfica pretransitiva derecha o pretransitiva izquierda. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una sucesión de vértices tal que $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ y $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, entonces la sucesión es una trayectoria y para cada i en $\{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que $(x_i, x_j) \in A(D)$ y $(x_j, x_i) \notin A(D)$, para cada j en $\{i+1, \ldots, n\}$.*

Demostración. La prueba procederá por inducción sobre n.

Base de inducción. Para $n \leq 2$ el resultado es obvio.

Hipótesis de inducción. Suponemos que el resultado es verdadero para una sucesión $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la cual satisface las condiciones de la hipótesis del lema.

Paso inductivo. Consideremos una sucesión $T = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ tal que para cada i en $\{1, \ldots, n\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ y $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$. Como las subsucesiones $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(x_2, \ldots, x_{n+1})$ satisfacen la hipótesis de inducción, tenemos que ambas son trayectorias y que para cada i en $\{1, \ldots, n\}$ se tiene que $(x_i, x_j) \in A(D)$ y $(x_j, x_i) \notin A(D)$, para cada j en $\{i+1, \ldots, n\}$. Por lo que solo basta probar que $x_1 \neq x_{n+1}$ para asegurar que T es una trayectoria y ver que $(x_1, x_{n+1}) \in A(D)$ y $(x_{n+1}, x_1) \notin A(D)$.

Asumamos, para llegar a una contradicción, que $x_1 = x_{n+1}$. Luego de la hipótesis de inducción sobre la sucesión $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se tiene que $(x_1, x_n) \in A(D)$ y entonces $(x_{n+1}, x_n) \in A(D)$, contradiciendo la elección de T, por lo tanto T es una trayectoria. Ahora consideremos las flechas (x_1, x_n) y (x_n, x_{n+1}); como D es una digráfica pretransitiva derecha o pretransitiva izquierda, $(x_n, x_1) \notin A(D)$ y $(x_{n+1}, x_n) \notin A(D)$, concluimos que $(x_1, x_{n+1}) \in A(D)$. Finalmente, suponemos que $(x_{n+1}, x_1) \in A(D)$; cuando D es una digráfica pretransitiva derecha consideramos las flechas (x_{n+1}, x_1) y (x_1, x_n), y cuando D es una digráfica pretransitiva izquierda consideramos las flechas (x_n, x_{n+1}) y (x_{n+1}, x_1), podemos concluir que $(x_{n+1}, x_n) \in A(D)$ o $(x_n, x_1) \in A(D)$, lo cual es imposible.

□

Lema 0.0.5. *Si D es una digráfica pretransitiva derecha o pretransitiva izquierda, entonces todo ciclo contenido en D tiene al menos una flecha simétrica.*

Demostración. Sea $C = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_1)$ un ciclo en D. Procediendo por contradicción, supongamos que C no tiene flechas simétricas, es decir, $(x_{i+1}, x_i) \notin A(D)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, entonces tenemos que C cumple las hipótesis del lema 0.0.4 por lo que tendríamos que C es una trayectoria, lo cual no puede ser. Por lo tanto, C tiene al menos una flecha simétrica.

□

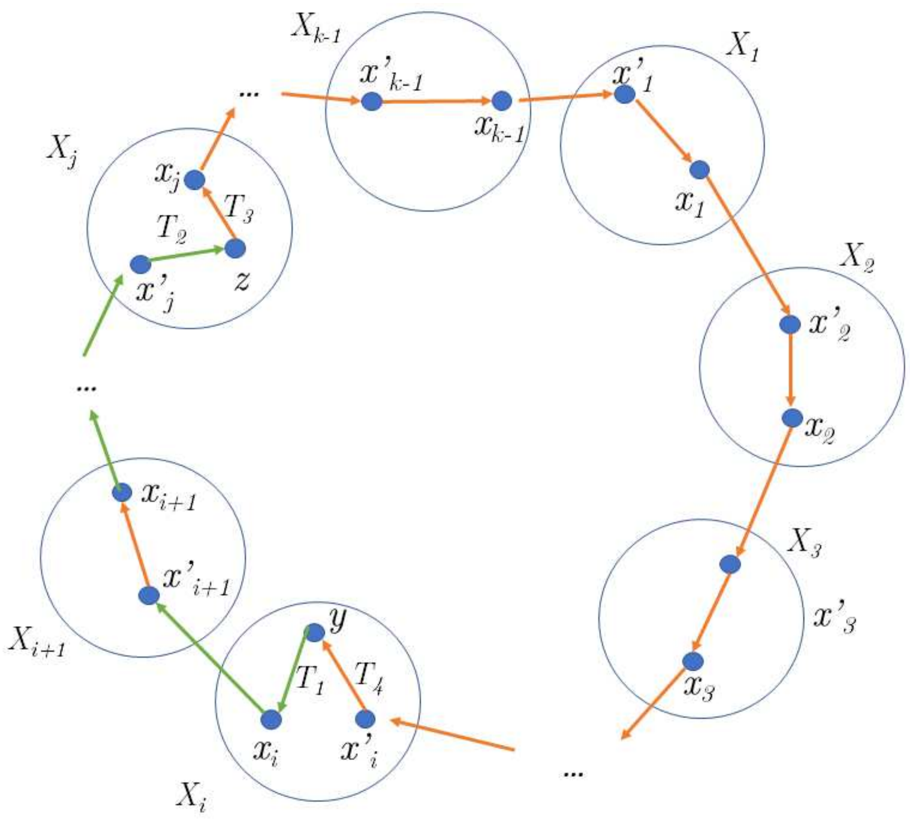
0.0.2. Conexidad.

En una digráfica D, un vértice y es alcanzable desde un vértice x si existe una xy-trayectoria en D. En particular, un vértice es alcanzable desde sí mismo. Una digráfica D es **fuertemente conexa**, o usualmente llamada **fuerte**, si para cada par de vértices x y y de D existe una xy-trayectoria y una yx-trayectoria. En otras palabras, D es fuerte si se puede alcanzar a cada vértice de D desde cualquier otro vértice de D. Una **componente fuertemente conexa**, o **componente fuerte**, de una digráfica D es una subdigráfica inducida de D con la propiedad de ser fuerte y máxima por contención con dicha propiedad. Diremos que una componente fuerte H de D es **terminal** si $N_D^+(H) \subseteq V(H)$. Note que de la definición de componente fuerte se tiene que si $D_1, \ldots, D_t$ son las componentes fuertes de D, entonces $V(D_1) \cup V(D_2) \ldots \cup V(D_t) = V(D)$. Además, $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$ para cada $i \neq j$; de otro modo, todos los vértices de $V(D_i) \cup V(D_j)$ son alcanzables entre sí, lo que implica que los vértices de $V(D_i) \cup V(D_j)$ pertenecen a la misma componente fuerte de D, lo cual no es posible. Llamamos a $\{V(D_1), V(D_2), \ldots, V(D_t)\}$ la descomposición fuerte de D. La digráfica de **condensación** de D, denotada por $SC(D)$, se obtiene al contraer cada una de las componentes fuertes D_i, con $i \in \{1, \ldots, t\}$, en un vértice v_i y (v_i, v_j) está en $A(SC(D))$ si existe al menos una $V(D_i)V(D_j) - flecha$ en D. Observe que la subdigráfica inducida por los vértices de un ciclo en D es fuerte; es decir, los vértices del ciclo están contenidos en una misma componente fuerte de D.

Teorema 0.0.6. *([6]) Dada cualquier digráfica D, se tiene que $SC(D)$ es acíclica.*

Demostración. Sea D una digráfica. Si D es fuerte, entonces $SC(D)$ es un vértice. En otro caso, supongamos, para llegar a una contradicción, que $SC(D)$ contiene un ciclo $C = (X_1, X_2, \ldots, X_k = X_1)$. Por definición de $SC(D)$ sabemos que existe un vértice x_i en la componente fuerte X_i y un vértice x'_{i+1} en la componente fuerte X_{i+1} tales que $(x_i, x'_{i+1}) \in A(D)$ para toda i en $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Además, por ser X_i una componente fuerte, sabemos que existe una $x'_i x_i$-trayectoria contenida en X_i, digamos P_i, para toda i en $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Sean y en $V(X_i)$ y z en $V(X_j)$, para algún i y j con $i < j$. Dado que X_i y X_j son componentes fuertes, también existen las siguientes trayectorias: yx_i-trayectoria, digamos T_1, $x'_j z$-trayectoria, digamos T_2, zx_j-trayectoria, digamos T_3 y $x'_i y$-trayectoria, digamos T_4. Por lo tanto, $T_1 \cup (x_i, x'_{i+1}) \cup P_{i+1} \cup (x_{i+1}, x'_{i+2}) \cup P_{i+2} \cup \ldots \cup (x_{j-1}, x'_j) \cup T_2$ es una $yz - trayectoria$ en D y $T_3 \cup (x_j, x'_{j+1}) \cup P_{j+1} \cup (x_{j+1}, x'_{j+2}) \cup P_{j+2} \cup \ldots \cup (x_{k-1}, x'_1) \cup P_1 \cup (x_1, x'_2) \cup \ldots \cup (x_{i-1}, x'_i) \cup T_4$ es una $zy - trayectoria$ en D. Esto implicaría que y y z están en la misma componente fuerte de D, lo cual no puede ser porque las componentes X_i y X_j son distintas. Por lo tanto, $SC(D)$ es acíclica. □

Corolario 0.0.7. *Toda digráfica finita D tiene al menos una componente fuerte terminal.*



Demostración. Sean D una digráfica y $SC(D)$ su digráfica de condensación. Por el teorema 0.0.6 sabemos que $SC(D)$ es acíclica y por el teorema 0.0.1 concluimos que $SC(D)$ tiene al menos un vértice v_i de exgrado cero. Sea D_i la componente fuerte en D asociada a v_i. De la definición de $SC(D)$ deducimos que $N_D^+(D_i) \subseteq V(D_i)$, lo que implica que D_i es una componente fuerte terminal de D.

□

Teorema 0.0.8. *Toda digráfica fuerte, de orden al menos dos, sin ciclos de longitud impar es bipartita.*

Demostración. Sean D una digráfica fuerte y x_0 un vértice de D. Consideremos los conjuntos $S_1 = \{y \in V(D) : d(x_0, y)\ es\ par\}$ y $S_2 = \{y \in V(D) : d(x_0, y)\ es\ impar\}$.
Por demostrar: $\{S_1, S_2\}$ es una bipartición de $V(D)$.
Notemos que $S_1 \neq \emptyset$ ya que $d(x_0, x_0) = 0$, por lo que $x_0 \in S_1$. Además, dado que D es fuerte y tiene orden al menos dos, tenemos que el exgrado de x_0 es distinto de cero por lo que existe un y en $V(D)$ tal que $(x_0, y) \in A(D)$. Puesto que (x_0, y) es una trayectoria de longitud impar, tenemos que $y \in S_2$, demostrando que $S_2 \neq \emptyset$.
Como D es fuerte, es claro que x_0 debe estar a distancia par o impar de cualquier otro vértice de D, por lo que $S_1 \cup S_2 = V(D)$. Además, por la definición de S_1 y S_2 se sigue que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, ya que la distancia de x_0 hacia cualquier otro vértice no puede ser par e impar a la vez.

Ahora veamos que S_1 y S_2 son conjuntos independientes en D. Demostraremos que S_1 es un conjunto independiente. Procediendo por contradicción, supongamos que S_1 no es un conjunto independiente. Entonces existen u y v en S_1 tales que $(u, v) \in A(D)$. Pero como $\{u, v\} \subseteq S_1$, entonces existe una x_0v-trayectoria, digamos P_1, y una x_0u-trayectoria, digamos P_2, ambas de longitud par. Como D es fuerte, existe una vx_0-trayectoria, P_3. Si P_3 es par, entonces $P_2 \cup (u, v) \cup P_3$ es un camino cerrado de longitud impar. Si P_3 es impar, entonces $P_1 \cup P_3$ es un camino cerrado de longitud impar. En cualquiera de los casos podemos encontrar un camino cerrado de longitud impar, que por el teorema

0.0.3 sabemos contiene un ciclo de longitud impar, lo cual no puede ser, pues D no contiene ningún ciclo de longitud impar, luego S_1 tiene que ser independiente. De manera análoga podemos demostrar que S_2 es independiente, demostrando así que $\{S_1, S_2\}$ es una bipartición de $V(D)$. $\square$

Capítulo 1

Núcleos.

En este capítulo trabajaremos en torno a los núcleos, que es un tema muy estudiado en la teoría de digráficas y que además es de especial importancia para nosotros, pues el resto de este trabajo estará enfocado al estudio de dicho concepto.

Sean D una digráfica y N un subconjunto de $V(D)$. Llamaremos a N **absorbente** si para todo vértice x en $V(D) \setminus N$ existe un vértice y en N tal que $(x, y) \in A(D)$. Diremos que N es **núcleo** de D si N es independiente y absorbente. Una digráfica D es llamada **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

En la figura 1.1 tenemos un ejemplo de una digráfica D, donde $N = \{v_1, v_3\}$ es un núcleo de D. Además, podemos observar en el ejemplo que el núcleo no es único pues $N' = \{v_2, v_4\}$ también es núcleo de D.

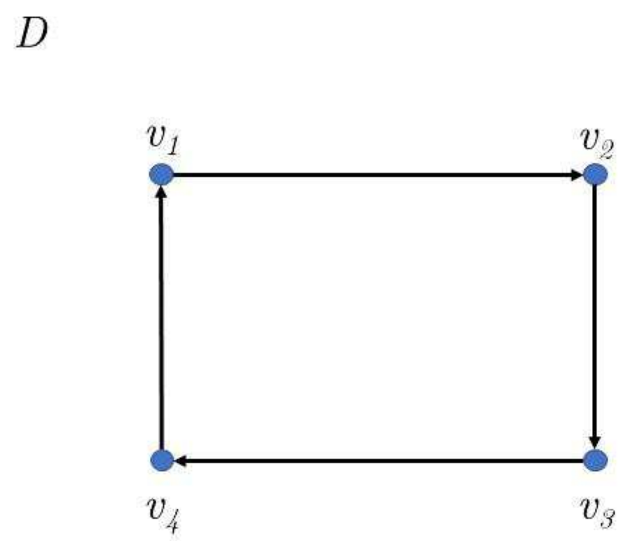


Figura 1.1: Ejemplo de una digráfica con núcleo

Es importante dejar en claro que no todas las digráficas tienen un núcleo. En la figura 1.2 tenemos un ejemplo de una digráfica que no tiene núcleo ya que todo subconjunto de dos o más vértices no es independiente y todo subconjunto de un vértice no es absorbente.

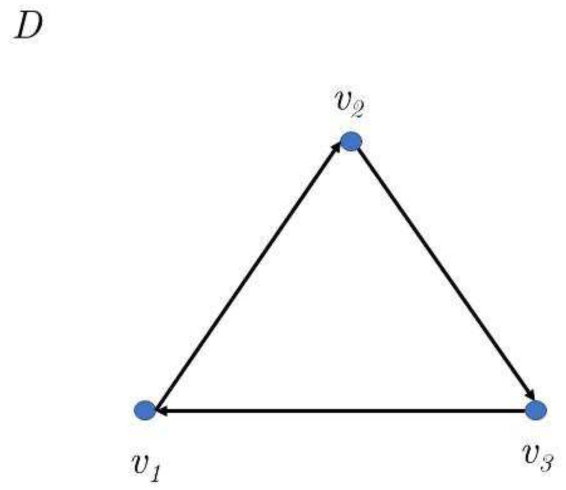


Figura 1.2: Ejemplo de una digráfica sin núcleo.

A continuación presentaremos algunos resultados que hablan sobre digráficas con ciertas estructuras y subestructuras, las cuales garantizan la existencia de núcleos.

Proposición 1.0.1. *([12]) Toda digráfica acíclica es núcleo perfecta.*

Demostración. Dado que ser acíclica es una propiedad que se hereda a las subdigráficas inducidas, basta con probar que toda digráfica acíclica tiene núcleo. Sea D una digráfica acíclica. Se procederá a demostrar por inducción sobre la cantidad de vértices de D.

Base de inducción. Si $|V(D)| = 1$, entonces $V(D)$ es un núcleo de D.

Hipótesis de inducción. Supongamos que toda digráfica acíclica D, con $|V(D)| < n$, tiene un núcleo.

Paso inductivo. Sean D una digráfica acíclica, con $|V(D)| = n$, y $S = \{v \in V(D) : \delta_D^+(x) = 0\}$. Por la proposición 0.0.1 sabemos que S es distinto del vacío. Si $V(D) = S \cup N_D^-(S)$, entonces para todo vértice y de $V(D) \setminus S$ existe un vértice x en S tal que $(y, x) \in A(D)$, por lo que S sería un conjunto absorbente y además, por como se definió S, éste es un conjunto independiente; siendo así S un núcleo de D. En caso contrario, consideremos a $D' = D - (S \cup N_D^-(S))$. Es claro que D' es una subdigráfica inducida de D, por lo que D' es una digráfica acíclica. Puesto que $|V(D')| < |V(D)| = n$, se sigue de la hipótesis de inducción que D' tiene un núcleo K'.
Ahora veremos que $K = K' \cup S$ es un núcleo de D.

Para probar que K es independiente, dado que tanto S como K' son conjuntos independientes en D y para todo x en S se tiene que $\delta_D^+(x) = 0$, basta ver que en D no hay flechas (y, x) con y en K' y x en S; de otra manera, como $x \in S$, entonces $y \in N_D^-(S)$, lo cual no puede ser porque $y \in K'$ y $K' \subseteq V(D) \setminus (S \cup N_D^-(S))$. Por lo tanto, K es un conjunto independiente en D.

Ahora veamos que K es absorbente en D. Sea x en $V(D) \setminus K$. Si $x \in N_D^-(S)$, entonces x es absorbido por algún elemento de S. Si $x \in V(D') \setminus K'$, al ser K' núcleo de D' existe un y en K' tal que $(x, y) \in A(D')$. Por lo tanto, K es absorbente.

Así, K es un núcleo de D, concluyendo que D es núcleo perfecta.

$\square$

Un subconjunto S de $V(D)$ es **seminúcleo** de D si es independiente y si para cada z en $V(D) \setminus S$ para el cual exista una $Sz - flecha$, entonces también existe una $zS - flecha$. Notemos que el conjunto vacío cumple con ser seminúcleo de cualquier digráfica.

Nota 1.0.2. Note que todo núcleo S de una digráfica D es seminúcleo no vacío de D; ya que para cualquier vértice z en $V(D) \setminus S$, exista o no una $Sz - flecha$, siempre existe una $zS - flecha$, por ser S absorbente. Así, S es un seminúcleo no vacío de D.

El siguiente resultado muestra una caracterización de las digráficas, posiblemente infinitas, núcleo perfectas a partir de seminúcleos no vacíos.

Teorema 1.0.3. *Una digráfica D es núcleo perfecta si y solo si toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo no vacío.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sean D una digráfica tal que todas sus subdigráficas inducidas tienen un seminúcleo no vacío y D' una subdigráfica inducida de D. Demostraremos que D' tiene núcleo. Consideremos a N un seminúcleo maximal de D' (el cual existe por hipótesis). Verifiquemos que N es un núcleo de D'; como N es un conjunto independiente en D', entonces solo basta probar que N es absorbente en D'. Procediendo por contradicción, supongamos que N no es absorbente en D', entonces sea K el subconjunto de vértices de D' tales que no son absorbidos por N en D'. Consideremos $D[K]$ que, por ser una subdigráfica inducida de D, tiene un seminúcleo no vacío N'. Afirmamos que $S = N \cup N'$ es un seminúcleo no vacío de D'. Dado que N y N' son conjuntos independientes en D' y no existe $N'N$-flecha en D' (por definición de K y porque $N' \subseteq K$), basta ver que no existen $NN' - flechas$ en D'. Ya que en $D[K]$ no hay invecinos de N (por definición de K), es claro que no existen $NN' - flechas$ en D', ya que de existir también existen $N'N - flechas$ (porque N es seminúcleo de D'), lo cual no es posible pues ya vimos que no existen $N'N - flechas$ en D'. Por lo tanto, S es un conjunto independiente en D'. Por otro lado, supongamos que existe una $Sx - flecha$ para algún x en $V(D') \setminus S$; esto significa que existe una $Nx - flecha$ o una $N'x - flecha$ en D'. Si existe una $Nx - flecha$ en D', entonces también existe una $xN - flecha$ en D', pues N es seminúcleo de D', y dado que $N \subseteq S$, entonces existe una $xS - flecha$ en D'. Si existe una $N'x - flecha$ en D', entonces hay dos casos: si $x \in K$, entonces en este caso existe la $xN' - flecha$ en D' pues N' es seminúcleo de $D[K]$, y dado que $N' \subseteq S$, existe una $xS - flecha$ en D'. Si $x \in V(D') - (N \cup K)$, entonces existe una $xN - flecha$ en D', pues todos los elementos de $V(D') - (N \cup K)$ son absorbidos por N, y dado que $N \subseteq S$ entonces existe una xS-flecha en D'. En cualquiera de los dos casos existe una xS-flecha en D' probando así que S es un seminúcleo no vacío de D'. Puesto que $N \subset S$, obtenemos una contradicción con el hecho que N es un seminúcleo maximal de D'. Por lo tanto, N es un conjunto absorbente en D', demostrando así que N es núcleo de D'.

($\Rightarrow$) Sean D una digráfica núcleo perfecta y D' una subdigráfica inducida de D. Demostraremos que D' tiene un seminúcleo no vacío. Dado que D es núcleo perfecta, D' tiene un núcleo S, el cual sabemos por la nota 1.0.2 que es un seminúcleo no vacío de D'. $\square$

Proposición 1.0.4. *([2]) Toda digráfica simétrica es núcleo perfecta.*

Demostración. Dado que ser simétrica es una propiedad que se hereda a las subdigráficas inducidas, basta con probar que toda digráfica simétrica tiene núcleo. Sean D una digráfica simétrica y S un subconjunto independiente maximal de $V(D)$. Veamos que S es un núcleo de D. Dado que S es independiente solo tenemos que verificar que S es absorbente. Sea x en $V(D) \setminus S$, como S es independiente maximal debe existir algún y en S tal que (x, y) o (y, x) está en $A(D)$, de lo contrario $S \cup \{x\}$ sería un conjunto independiente que contiene propiamente a S, contradiciendo la maximalidad de S. Luego, puesto que D es simétrica, podemos afirmar que en realidad ambas flechas están en $A(D)$, siendo así S un conjunto absorbente. Por lo tanto, S es núcleo de D, demostrando que toda digráfica simétrica es núcleo perfecta. $\square$

Proposición 1.0.5. *([5]) Si D es una digráfica tal que todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D una digráfica tal que todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica. Luego, cualquier subdigráfica inducida de D tendrá dicha propiedad, por lo que basta probar que D tiene núcleo. Para esto, procederemos por inducción sobre $|V(D)|$.

Base de inducción. Si $|V(D)| = 1$, entonces es claro que $V(D)$ es núcleo.

Hipótesis de inducción. Supongamos que toda digráfica D, con $|V(D)| < n$, que cumple con que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, tiene núcleo.

Paso inductivo. Sea D una digráfica con $|V(D)| = n$ tal que todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica. Podemos suponer que D tiene al menos un ciclo, ya que de ser acíclica, por la proposición 1.0.1, D tendría núcleo.
Sea $S = \{x \in V(D) : \delta^+_{Asim(D)}(x) = 0\}$. Si suponemos que $S = \emptyset$ tendríamos que para todo x en $V(Asim(D))$ se cumple que $\delta^+_{Asim(D)}(x) > 0$ y por la contrapositiva de nuestra proposición 0.0.1, se tendría que $Asim(D)$ tiene un ciclo dirigido, lo cual no puede ser puesto que todo ciclo dirigido en D tiene al menos una flecha simétrica. Por lo tanto, $S \neq \emptyset$.
Ahora consideremos $D[S]$, que resulta ser una subdigráfica de $Sim(D)$, pues $V(D[S]) = S \subseteq V(D) = V(Sim(D))$ y si $(x, y) \in A(D[S])$ entonces $\delta^+_D(x) > 0$ lo que implica que $(y, x) \in A(D[S])$ (ya que $\delta^+_{Asim(D)}(x) = 0$). Dado que $Sim(D)$ es una digráfica simétrica, por la proposición 1.0.4 sabemos que es núcleo perfecta, por lo que $D[S]$ tiene un núcleo N_0.

Si $V(D) = N_0 \cup N^-_D(N_0)$, claramente N_0 es núcleo de D; de no ser así, consideremos $D' = D - (N_0 \cup N^-_D(N_0))$. Al ser D' subdigráfica inducida de D cumple con que todo ciclo contiene al menos una flecha simétrica; además $|V(D')| < |V(D)| = n$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción D' tiene un núcleo N_1.

Afirmamos que $N = N_0 \cup N_1$ es núcleo de D.
Verifiquemos que N es absorbente en D. Sea x en $V(D) \setminus N$; dado que $\{N_0, N^-_D(N_0), N_1, N^-_{D'}(N_1)\}$ es una partición de $V(D)$ porque N_0 es núcleo de $D[S]$ y N_1 es núcleo de $D' = D - (N_0 \cup N^-_D(N_0))$ basta con ver los siguientes 2 casos:
* Si x está en $N^-_D(N_0)$, entonces existe un elemento u en N_0 tal que $(x,u) \in A(D)$;
* Si $x \in N^-_{D'}(N_1)$, entonces existe un elemento u en N_1 tal que $(x,u) \in A(D')$.
Por lo tanto, N es un conjunto absorbente en D.

Verifiquemos que N es un conjunto independiente en D. Para esto, dado que N_0 y N_1 son independientes en D, basta con verificar que no existen N_0N_1-flechas ni N_1N_0-flechas en D. Como $N_1 \subseteq V(D') = V(D) \setminus (N_0 \cup N^-_D(N_0))$, entonces no existen N_1N_0-flechas.
Si existiera una N_0N_1- flecha en D, entonces existe un x en N_0 y z en N_1 tal que $(x,z) \in A(D)$. Dado que x está en $V(D[S])$, entonces $\delta^+_{Asim(D)}(x) = 0$, por lo que $(z,x) \in A(D)$ (porque (x,z) es simétrica), lo cual no es posible porque no existen N_1N_0-flechas en D. Por lo tanto, no existen N_0N_1- flechas en D. Así, N es un conjunto independiente en D.

De esta manera hemos demostrado que N es núcleo de D, lo que finaliza la prueba.

□

Proposición 1.0.6. *Toda digráfica transitiva es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva. Veamos que todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica. Sea C=(x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, $x_k = x_0$) un ciclo en D, luego como D es transitiva y $\{(x_0,x_1),(x_1,x_2)\} \subseteq A(D)$, entonces $(x_0,x_2) \in A(D)$. Puesto que $\{(x_0,x_2),(x_2,x_3)\} \subseteq A(D)$, entonces $(x_0,x_3) \in A(D)$. Siguiendo con este procedimiento podemos asegurar que $(x_0,x_{k-1}) \in A(D)$, por lo que (x_0,x_{k-1}) es una flecha simétrica en nuestro ciclo C. Por lo tanto, como D cumple la hipótesis del teorema 1.0.5, entonces D es núcleo perfecta.

□

Proposición 1.0.7. *([9]) Sean D una digráfica y $\{U_1,U_2\}$ una partición de $V(D)$. Si toda $U_1U_2 - flecha$ es simétrica y $D[U_i]$ es núcleo perfecta para cada i en $\{1,2\}$, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D' una subdigráfica inducida de D. Demostraremos que D' tiene un seminúcleo no vacío. Si D' está contenida en $D[U_1]$ o $D[U_2]$, entonces D' tiene núcleo, el cual sabemos que es un seminúcleo no vacío (porque $D[U_1]$ y $D[U_2]$ son núcleo perfectas). En caso contrario, tenemos que en particular $V_1 = (V(D') \cap U_1) \neq \emptyset$. Como $D'[V_1]$ es una subdigráfica inducida de $D[U_1]$, entonces $D'[V_1]$ tiene un núcleo S que sabemos es un seminúcleo no vacío de $D'[V_1]$. Veamos que S es un seminúcleo no vacío de D'. Dado que S es un seminúcleo no vacío de $D'[V_1]$, entonces ya tenemos la independencia, por lo que solo basta ver que para todo x en $V(D') \setminus S$ si existe una $Sx - flecha$ en D', entonces también existe una $xS - flecha$ en D'. Sea x en $V(D') \setminus S$ tal que existe una $Sx - flecha$ en D'. Si $x \in V_1 \setminus S$, entonces es inmediato que la $xS - flecha$ está en D', ya que S es seminúcleo de $D'[V_1]$. Si $x \in V(D') \cap U_2$, entonces una $Sx - flecha$ es una $U_1U_2 - flecha$, la cual por hipótesis es simétrica, por lo que existe la $xS - flecha$ en D'. Por lo tanto, S es un seminúcleo no vacío de D'. Como D cumple las hipótesis del teorema 1.0.3, se concluye que D es núcleo perfecta. □

Teorema 1.0.8. *Si D es una digráfica bipartita, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Demostraremos que toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo no vacío. Sea G una subdigráfica inducida de D. Si existe x en $V(G)$ tal que $\delta^+(x) = 0$, entonces $\{x\}$ es un seminúcleo de G. En otro caso, dado que ser bipartita es una propiedad que se hereda a las subdigráficas inducidas, de orden al menos dos, entonces G es bipartita; es decir, existe una bipartición $\{U_1, U_2\}$ de G. Afirmamos que U_1 es un núcleo de G. Sea y en U_2, dado que el exgrado de y es distinto de cero, existe (y, x) en $A(G)$ para algún x en los vértices de G. Como $\{U_1, U_2\}$ es una bipartición de G, entonces $x \in U_1$. Por lo tanto, U_1 es un conjunto absorbente en G. Puesto que U_1 es un conjunto independiente, se concluye que U_1 es núcleo de G, lo que implica que U_1 es seminúcleo de G. Por lo tanto, se sigue del teorema 1.0.3 que D es núcleo perfecta. □

Proposición 1.0.9. *([10]) Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Dado que no tener ciclos de longitud impar es una propiedad que se hereda a las subdigráficas inducidas, basta probar que toda digráfica sin ciclos de longitud impar tiene núcleo. La prueba se hará por inducción sobre la cardinalidad de $V(D)$.

Base de inducción. Si $|V(D)| = 1$, entonces D consiste de un solo vértice, digamos x. Luego, $\{x\}$ es núcleo de D.

Hipótesis de inducción. Supongamos que toda digráfica sin ciclos de longitud impar, con $|V(D)| < n$, tiene núcleo.

Paso inductivo. Sea D una digráfica sin ciclos de longitud impar, con $|V(D)| = n$. Si D es fuertemente conexa, entonces D es bipartita (por el teorema 0.0.8). Luego, por el teorema 1.0.8 sabemos que D es núcleo perfecta.

Supongamos que D no es fuertemente conexa y sea D' una componente fuertemente conexa terminal de D, es decir, no existen flechas de D' hacia vértices que estén fuera de D'. Como D' no tiene ciclos de longitud impar y $|V(D')| < n$, entonces D' tiene un núcleo S'. Si $V(D) = S' \cup N_D^-(S')$, entonces S' es núcleo de D. En otro caso, sea D'' la subdigráfica inducida por $V(D) \setminus (S' \cup N_D^-(S'))$ que, por hipótesis de inducción, tiene un núcleo S''. Sea $S = S' \cup S''$. Veamos que S es un núcleo de D:
* Para ver que S es un conjunto independiente en D, dado que S' y S'' son independientes en D, basta con ver que no existen $S'S'' - flechas$ ni $S''S' - flechas$ en D. Como $S' \subseteq V(D')$ y D' es terminal, entonces no pueden existir $S'S'' - flechas$ en D. Por otro lado, puesto que D'' no tiene invecinos de S', entonces no hay $S''S' - flechas$ en D. Por lo tanto, S es independiente en D.

* Veamos que S es un conjunto absorbente en D. Para cada vértice en $V(D'') \setminus S''$ existe un vértice en S'' que lo absorbe; luego para cualquier otro vértice en $N_D^-(S')$ existe un vértice en S' que lo absorbe. Por lo tanto, S es un conjunto absorbente en D.

Así, S es núcleo de D, demostrando que D es núcleo perfecta.

$\square$

Teorema 1.0.10. *Sea D una digráfica, posiblemente infinita. Si todo ciclo y toda trayectoria infinita exterior tiene una flecha simétrica, entonces existe un vértice u en $V(D)$ tal que $\{u\}$ es un seminúcleo de D.*

Demostración. Como $\{u\}$ es un conjunto independiente para todo vértice u de D, basta probar que para todo vértice z en $V(D) \setminus \{u\}$, (u, z) en $A(D)$ implica $(z, u) \in A(D)$.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que para todo vértice u existe un vértice v tal que $(u, v) \in A(D)$ y $(v, u) \notin A(D)$. Ahora consideremos algún vértice x_1 en $V(D)$. Para x_1 existe un vértice x_2 tal que $(x_1, x_2) \in A(D)$ y $(x_2, x_1) \notin A(D)$. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$, dado un x_n en $V(D)$ existe un x_{n+1} en $V(D)$ tal que $(x_n, x_{n+1}) \in A(D)$ y $(x_{n+1}, x_n) \notin A(D)$. Si $x_i \neq x_j$ para toda $i \neq j$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una trayectoria infinita exterior asimétrica en D, lo cual es una contradicción. Entonces, existe i y j tal que $i \neq j$ y $x_i = x_j$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $i < j$, entonces $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j = x_i)$ es un camino cerrado asimétrico en D que contiene un ciclo asimétrico C, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 1.0.11. *Sea D una digráfica, posiblemente infinita. Si todo ciclo y toda trayectoria infinita exterior tiene una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Se sigue del teorema 1.0.10 que toda subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo no vacío. Luego, el teorema 1.0.3 implica que D es una digráfica núcleo perfecta. $\square$

Corolario 1.0.12. *Sea D una digráfica pretransitiva izquierda o pretransitiva derecha, posiblemente infinita, sin trayectorias infinitas exteriores, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Se sigue de los lemas 1.0.10, 0.0.5 y del corolario 1.0.11 que D es núcleo perfecta.

$\square$

Capítulo 2

Núcleos por trayectorias monocromáticas.

En este capítulo trabajaremos con un teorema obtenido por Sands, Sauer y Woodrow en [11], el cual da condiciones suficientes para que una digráfica D, 2-coloreada, tenga un núcleo por trayectorias monocromáticas.

El motivo de exhibir dicho resultado se debe a que la prueba de éste ha sido inspiración para la realización de diversos trabajos que muestran condiciones suficientes para que la unión de dos digráficas resulte ser núcleo perfecta. Uno de los trabajos más recientes se encuentra en el artículo “Union of digraphs which become kernel perfect”, escrito por Hortensia Galeana Sánchez y Mucuy-kak Guevara, el cual es el objeto de estudio del siguiente capítulo.

Decimos que D es una digráfica **m-coloreada** si existe una función $c : A(D) \to \{1, 2, \ldots, m\}$.
A una coloración donde cada arista de $A(D)$ tenga un color diferente la llamaremos **coloración trivial**. Dada una digráfica D, m-coloreada, decimos que una trayectoria, ciclo o camino es **monocromático** si todas las flechas en cada uno de estos caminos son de un mismo color.

Una **trayectoria infinita exterior monocromática** es una sucesión de vértices $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ para toda i en $\mathbb{N}$ y además todas estas flechas son del mismo color.
Para dos vértices distintos x, y de D, escribiremos: $x \to^i y$ si existe una trayectoria monocromática de color i de x hacia y. Si S es un conjunto de vértices de D y x es un vértice de D, $x \to^i S$ ($S \to^i x$) significa que $x \to^i s$ ($s \to^i x$) para algún vértice s en S. La negación de $x \to^i s$ la denotaremos por $x \nrightarrow^i s$. De igual forma $x \to^{mono} s$ quiere decir que existe una trayectoria moncromática de x hacia s. Si S es un conjunto de vértices de D y x es un vértice de D, $x \to^{mono} S$ ($S \to^{mono} x$) significa que $x \to^{mono} s$ ($s \to^{mono} x$) para algún vértice s en S. La negación de $x \to^{mono} S$ ($S \to^{mono} x$) la denotaremos por $x \nrightarrow^{mono} S$ ($S \nrightarrow^{mono} x$).
Dada una digráfica D, m-coloreada, y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto **independiente por trayectorias monocromáticas** si para cualesquiera

dos vértices x y y en S se tiene que $x \nrightarrow^{mono} y$ y $y \nrightarrow^{mono} x$. Decimos que S es **absorbente por trayectorias monocromáticas** si para todo vértice z en $V(D) \setminus S$ se tiene que $z \rightarrow^{mono} S$. A un conjunto S que cumple con ser independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas se le llama **núcleo por trayectorias monocromáticas**.

Notemos que la definición de núcleo que utilizamos, antes de introducir el concepto de m-coloracion, es solo un caso particular del concepeto de núcleo por trayectorias monocromáticas cuando tenemos una coloración trivial. Esto debido a que las trayectorias monocromáticas, en una digráfica con una coloración trivial, son necesariamente de longitud uno, lo que hace que las definiciones de conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas y conjunto independiente por trayectorias monocromáticas coincidan con las definiciones de conjunto absorbente y conjunto independiente, respectivamente.

Corolario 2.0.1. *Sean D una digráfica m-coloreada y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(D)$. Todo uv-camino monocromático en D contiene una uv-trayectoria monocromática.*

Demostración. Sea W un uv-camino en D. Por el teorema 0.0.2 sabemos que W contiene una uv-trayectoria P. Como $A(P) \subseteq A(W)$ y todas las aristas de W son de un mismo color, entonces P es una uv-trayectoria monocromática. □

Lema 2.0.2. *Sean D una digráfica m-coloreada y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vértices de D tal que $x_n \rightarrow^a x_{n+1}$ y $x_{n+1} \nrightarrow^a x_n$ para cada n en $\mathbb{N}$, entonces D contiene una trayectoria infinita exterior monocromática.*

Demostración. Sea P_i una $x_{i-1}x_i$-trayectoria de color a para cada i en $\mathbb{N}$.

Afirmación 1. Sea i en $\mathbb{N}$. $V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$ para todo $j \geq i + 2$.
Supongamos, para llegar a una contradicción, que $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$ para algún j con $j \geq i + 2$. Sean x_{ij} un vértice en $V(P_i) \cap V(P_j)$, (x_{ij}, P_i, x_i) y (x_{j-1}, P_j, x_{ij}). Luego $(x_{j-1}, P_j, x_{ij}) \cup (x_{ij}, P_i, x_i) \cup P_{i+1} \cup P_{i+2} \cup \ldots \cup P_{j-2}$ es un $x_{j-1}x_{j-2}$-camino monocromático de color a que, por nuestro corolario 2.0.1, sabemos contiene una $x_{j-1}x_{j-2}$-trayectoria monocromática de color a, lo cual no puede ser pues por hipótesis $x_{j-1} \nrightarrow^a x_{j-2}$. Así $V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$ para todo $j \geq i + 2$. En la figura 2.1 vemos la forma de las trayectorias P_i.

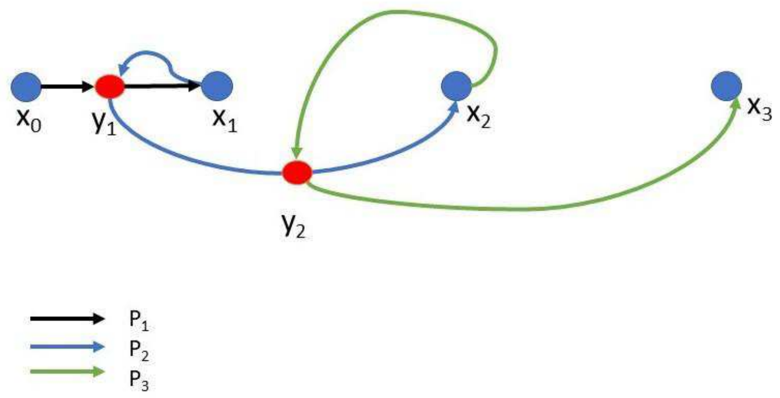


Figura 2.1: Trayectorias P_i

Como $V(P_1) \cap V(P_2) \neq \emptyset$, entonces sea y_1 el primer vértice en P_1 donde hace intersección con P_2. Llamemos W_1 a la trayectoria (x_0, P_1, y_1) y W_2 a la trayectoria (y_1, P_2, x_2), donde por la elección de y_1 tenemos que W_1 y W_2 no se intersectan. Ahora tenemos la sucesión $(y_1, x_2, x_3, \ldots)$. Como $x_2 \in V(W_2) \cap V(P_3)$, entonces sea y_2 el primer vértice en W_2 donde hace intersección con P_3. En la figura 2.2 vemos la forma de las trayectorias W_1 y W_2.

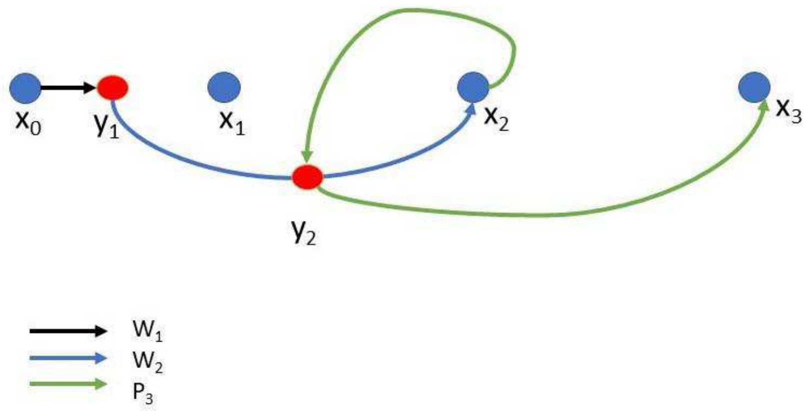


Figura 2.2: Trayectorias W_i

Llamemos W_2' a la trayectoria (y_1, W_2, y_2) y W_3 a la trayectoria (y_2, P_3, x_3), donde por la elección de y_2 tenemos que W_2' y W_3 no se intersectan salvo en y_2. En la figura 2.3 vemos la forma de la trayectoria W_2' y W_3.

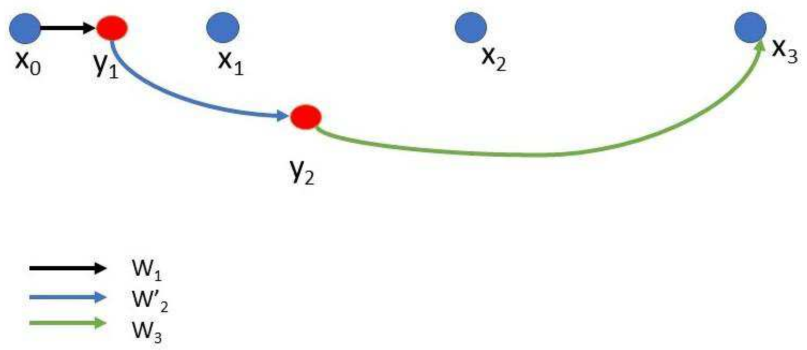


Figura 2.3: Trayectorias W_i'

Ahora tenemos la sucesión $(y_2, x_3, x_4, \ldots)$ y procediendo de la misma manera encontra-

mos un vértice y_3 y la trayectoria W'_3 (y_2, W_3, y_3) y W_4 la trayectoria (y_3, P_4, x_4). Siguiendo este procedimiento, para cada n en $\mathbb{N}$ encontramos un vértice y_n y una trayectoria W'_n definida por (y_{n-1}, W_n, y_n) tal que $V(W'_n) \cap V(W'_{n-1}) = \{y_{n-1}\}$ y $V(W'_n) \cap V(W'_i) = \emptyset$ para $i < n-1$.
Afirmamos que $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} W'_n$ es una trayectoria infinita exterior monocromática, donde $W'_1 = W_1$. Por la construcción de los W'_i tenemos que T es un camino, y dado que para todo n en $\mathbb{N}$ existe un W'_n tenemos que es un camino infinito exterior monocromático. Para verificar que T sea una trayectoria es necesario ver que en T no hay vértices repetidos. Sea x y y dos vértices en $V(T)$, veamos que $x \neq y$. Si x y y están contenidos ambos en $V(W'_i)$ para algún $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces, por ser $W'(i)$ una trayectoria, $x \neq y$. Si $x \in V(W'_i)$ y $y \in V(W'_j)$ con $j \geq i+2$, entonces, dado que W'_l es una sub trayectoria de P_l para todo l en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ y que $V(P_w) \cap V(P_z) = \emptyset$ para todo $z \geq w+2$, tenemos que $V(W'_i) \cap V(W'_j) = \emptyset$, por lo que $x \neq y$. Si $x \in V(W'_i)$ y $y \in V(W'_{i+1})$, con $x \neq y_i$ y $y \neq y_i$ dado que de no ser así regresaríamos al caso en donde ambos vértices están en un mismo W'_i, para algún i en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces, dado que $V(W'_i) \cap V(W'_{i+1}) = \{y_i\}$ y $x \neq y_i$, $y \neq y_i$ tenemos que $x \neq y$. Demostrando que T es una trayectoria infinita exterior monocromática.

□

Teorema 2.0.3. *([11]) Sea D una digráfica 2-coloreada. Si D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Supongamos que la 2-coloración de la digráfica D utiliza los colores *rojo* y *azul*.

Para dos conjuntos S, T de vértices de D escribimos $S \leq T$ si para todo s en S existe un t en T tal que $s = t$ o $s \to^{azul} t$ y $t \not\to^{azul} s$. En particular, $S \subseteq T$ implica $S \leq T$.

Afirmación 1. $\leq$ es un orden en la colección de todos los conjuntos independientes por trayectorias monocromáticas de vértices de D.

Reflexividad: Es claro que $S \leq S$, pues $S \subseteq S$.

Antisimetría: Supongamos que $S \leq T$ y $T \leq S$. Veamos que $T = S$.

Primero veremos que $T \subseteq S$. Sea t en T, demostraremos que $t \in S$. Supongamos, para llegar a una contradicción que $t \notin S$. Como $T \leq S$ y $t \notin S$, entonces para t existe un s en S tal que $t \to^{azul} s$ y $s \not\to^{azul} t$.
Dado que $S \leq T$, existe un t' en T tal que $s = t'$ o $s \to^{azul} t'$ y $t' \not\to^{azul} s$.
Si $t' = s$, entonces estaríamos asegurando que $t \to^{azul} s = t'$, lo cual no puede ser dado que T es independiente por trayectorias monocromáticas. Si $s \to^{azul} t'$ y $t' \not\to^{azul} s$, entonces, dado que $t \to^{azul} s$ y $s \to^{azul} t'$, podemos encontrar una ts-trayectoria monocromática, digamos P, y una st'-trayectoria monocromática, digamos P'. Como $P \cup P'$ es un tt'-camino monocromático, entonces por el teorema 0.0.2, $P \cup P'$ contiene una tt'-trayectoria monocromática, lo cual contradice que T es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas. Por lo tanto, concluimos que $t \in S$, demostrando que $T \subseteq S$. La prueba

para ver que $S \subseteq T$ es análoga. Luego $T = S$ verificando la antisimetría.

Transitividad: Supongamos que $S \leq T$ y $T \leq Q$. Veamos que $S \leq Q$.

Sea s en S. Demostraremos que existe q en Q tal que $s = q$ o ($s \rightarrow^{azul} q$ y $q \nrightarrow^{azul} s$). Como $S \leq T$, entonces para s existe t en T tal que $s = t$ o ($s \rightarrow^{azul} t$ y $t \nrightarrow^{azul} s$).

Si $s = t$, entonces como $T \leq Q$ existe q en Q tal que $q = s$ o ($s \rightarrow^{azul} q$ y $q \nrightarrow^{azul} s$). Si $s \rightarrow^{azul} t$ y $t \nrightarrow^{azul} s$, entonces, como $T \leq Q$, para t existe q en Q tal que $t = q$ o ($t \rightarrow^{azul} q$ y $q \nrightarrow^{azul} t$). Si $t = q$, entonces $s \rightarrow^{azul} t$ y $t \nrightarrow^{azul} s$ implica que $s \rightarrow^{azul} q$ y $q \nrightarrow^{azul} s$. Si $t \rightarrow^{azul} q$ y $q \nrightarrow^{azul} t$, entonces $s \rightarrow^{azul} t$ y $t \nrightarrow^{azul} s$ implica que existe una st-trayectoria monocromática de color azul, digamos P, y una tq-trayectoria monocromática de color azul, digamos P'. Entonces $P \cup P'$ resulta ser un sq-camino monocromático de color azul y por el teorema 2.0.1 sabemos que $P \cup P'$ contiene una sq-trayectoria monocromática de color azul, por lo que $s \rightarrow^{azul} q$. Por otro lado, no existe una qs-trayectoria monocromática de color azul, ya que de ser así, la unión de esta con P es un qt-camino monocromático de color azul que, el cual por el teorema 2.0.1 sabemos contiene una qt-trayectoria monocromática de color azul, lo cual no puede ser pues sabemos que $q \nrightarrow^{azul} t$. Luego $q \nrightarrow^{azul} s$.

Por lo tanto $S \leq Q$, verificando la transitividad.

Por lo que $\leq$, efectivamente, es un orden parcial para la colección de todos los conjuntos independientes por trayectoria monocromáticas de vértices de D.

Sea φ la familia de todos los conjuntos S no vacíos e independientes por trayectorias monocromáticas de vértices de D tal que $S \rightarrow^{rojo} y$ implica que $y \rightarrow^{mono} S$ para todo vértice y en $V(D) \setminus S$. Note que φ es no vacío, ya que existe un vértice v en D tal que $v \rightarrow^{rojo} x$ implica $x \rightarrow^{rojo} v$ para todo x en $V(D)$; de lo contrario, por el lema 2.0.2, podemos encontrar una trayectoria infinita exterior monocromática. Por lo tanto, $\{v\}$ está en φ.

Afirmación 2. φ tiene un elemento maximal.

Para esto veamos que toda cadena en $(\varphi, \leq)$ (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior. Sea ζ una cadena en $(\varphi, \leq)$, y definimos: $N_{\leq}(S) = \{T \in \zeta : S \leq T\}$ y $S^{\infty} = \{s \in \bigcup \zeta : s \in T \textit{ para toda } T \textit{ en } N_{\leq}(S) \textit{ y para algun } S \textit{ en } \zeta\}$. Es decir, S^{∞} consiste de todos los vértices de D que pertenecen a todos los miembros de ζ desde algún punto en adelante.

Afirmación 2.1 S^{∞} es no vacío.

Sean S en ζ y s en S. Si $s \notin S^{\infty}$, existe un S_1 en ζ tal que $S_1 \geq S$ y $s \notin S_1$. Por lo tanto, de la definición de $\leq$, debe de haber un s_1 en S_1 tal que $s \rightarrow^{azul} s_1$ y $s_1 \nrightarrow^{azul} s$. Si $s_1 \notin S^{\infty}$, existe un S_2 en ζ tal que $S_2 \geq S_1$ y $s_1 \notin S_2$. Por lo tanto, existe un s_2 en S_2 tal que $s_1 \rightarrow^{azul} s_2$ y $s_2 \nrightarrow^{azul} s_1$. Se sigue del corolario 2.0.1 que $s \rightarrow^{azul} s_2$ y $s_2 \nrightarrow^{azul} s$. Si $s_2 \notin S^{\infty}$ podemos continuar, pero como D no tiene trayectorias infinitas exteriores azules, el procedimiento es finito. Es decir, llegamos a un S_n en ζ y un s_n en S_n tal que

$s \to^{azul} s_n$, $s_n \nrightarrow^{azul} s$ y $s_n \in S^{\infty}$. Por lo que S^{∞} es no vacío.

Afirmación 2.2 S^{∞} es cota superior de φ.

Demostraremos que $S^{\infty} \geq S$ para todo S en ζ. Sean S en ζ y s en S. Si $s \in S^{\infty}$, entonces encontramos un vértice en S^{∞}, el mismo s, tal que es igual a s. Si $s \notin S^{\infty}$, existe un S_1 en ζ tal que $S_1 \geq S$ y $s \notin S_1$. Por lo tanto, debe de haber un s_1 en S_1 tal que $s \to^{azul} s_1$ y $s_1 \nrightarrow^{azul} s$. Si $s_1 \in S^{\infty}$, entonces ya encontramos un vértice en S^{∞} tal que $s \to^{azul} s_1$ y $s_1 \nrightarrow^{azul} s$. Si $s_1 \notin S^{\infty}$, existe un S_2 en ζ tal que $S_2 \geq S_1$ y $s_1 \notin S_2$. Por lo tanto, existe un s_2 en S_2 tal que $s_1 \to^{azul} s_2$ y $s_2 \nrightarrow^{azul} s_1$. Se sigue, dado que $s \to^{azul} s_1$ y $s_1 \nrightarrow^{azul} s$, por el corolario 2.0.1 que $s \to^{azul} s_2$ y $s_2 \nrightarrow^{azul} s$. Si $s_2 \notin S^{\infty}$ podemos continuar, pero como D no tiene trayectorias infinitas exteriores azules, el procedimiento es finito. Es decir, llegamos a un S_n en ζ y un s_n en S_n tal que $s \to^{azul} s_n$, $s_n \nrightarrow^{azul} s$ y $s_n \in S^{\infty}$. Por lo que $S^{\infty} \geq S$ para todo S en ζ, demostrando así que S^{∞} es cota superior de ζ.

Afirmación 3. S^{∞} es independiente por trayectorias monocromáticas.

Sean s y t en S^{∞}. Supongamos que S y T son elementos de ζ tales que $s \in S$, $t \in T$, $s \in U$ para toda U en $N_{\leq}(S)$ y $t \in W$ para toda W en $N_{\leq}(T)$. Por otro lado, dado que ζ es una cadena, supongamos sin pérdida de generalidad que $S \leq T$, lo que implica que $T \in N_{\leq}(S)$. Entonces $s \in T$, y como T es independiente por trayectorias monocromáticas no existen trayectorias monocromáticas entre s y t. Así, S^{∞} es independiente por trayectorias monocromáticas.

Afirmación 4. $S^{\infty} \in \varphi$.

Supongamos que existen s en S^{∞} y y en $V(D) \setminus S^{\infty}$ tales que $s \to^{rojo} y$. Sea S en ζ tal que $s \in S$. Luego, por la definición de φ hay un t en S tal que $y \to^{mono} t$. Si $t \in S^{\infty}$, entonces acabamos. Si $t \notin S^{\infty}$, entonces en particular $t \neq s$. Luego $y \nrightarrow^{rojo} t$ (pues S es independiente por trayectorias monocromáticas y $s \to^{rojo} y$), por lo que si $y \to^{rojo} t$, podríamos encontrar un st-camino rojo que contendría una st-trayectoria roja entre dos elementos de S, lo cual no es posible pues S es independiente por trayectorias monocromáticas. Así, $y \to^{azul} t$, y como $S^{\infty} \geq S$ existe un t^{∞} en S^{∞} tal que $t \to^{azul} t^{\infty}$. Por lo tanto, la unión de una yt-trayectoria azul y una tt^{∞}-trayectoria azul contiene una yt^{∞}- trayectoria azul, por lo que $y \to^{azul} S^{\infty}$, mostrando que $S^{\infty} \in \varphi$.

Por lo tanto, probamos que toda cadena en $(\varphi, \leq)$ tiene una cota superior en φ y por el lema de Zorn, $(\varphi, \leq)$ contiene un elemento maximal.

Sea S un elemento maximal de $(\varphi, \leq)$.

Afirmación 5. S es un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Dado que S es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas, por estar en φ, basta probar que S es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas.

Supongamos, por el contrario, que $B = \{x \in V(D) \setminus S : x \nrightarrow^{mono} S\} \neq \emptyset$.
Afirmación 5.1 Existe un vértice x en B tal que para todo y en B, si $x \rightarrow^{rojo} y$, entonces $y \rightarrow^{rojo} x$.

De lo contrario, para todo x en B existe un vértice y en B tal que $x \rightarrow^{rojo} y$ y $y \nrightarrow^{rojo} x$. Por lo tanto, para un x_1 en B existe un vértice x_2 en B tal que $x_1 \rightarrow^{rojo} x_2$ y $x_2 \nrightarrow^{rojo} x_1$. Luego, para un x_2 en B existe un vértice x_3 en B tal que $x_2 \rightarrow^{rojo} x_3$ y $x_3 \nrightarrow^{rojo} x_2$. De esta forma, dado x_n en B existe un vértice x_{n+1} en B tal que $x_n \rightarrow^{rojo} x_{n+1}$ y $x_{n+1} \nrightarrow^{rojo} x_n$. Por lo tanto, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple las condiciones del lema 2.0.2 y se sigue de esto que D contendría una trayectoria infinita exterior monocromática de color rojo, lo cual no puede ser pues D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas.
Por lo tanto, existe un vértice x en B tal que para todo y en B, si $x \rightarrow^{rojo} y$, entonces $y \rightarrow^{rojo} x$.

Notemos que $S \nrightarrow^{rojo} x$, ya que si $S \rightarrow^{rojo} x$, entonces $x \rightarrow^{mono} S$, por el hecho de que $S \in \varphi$, lo cual no puede ser pues por hipótesis $x \nrightarrow^{mono} S$.

Sea $T = \{t \in S : t \nrightarrow^{azul} x\}$, así (si $T \neq S$) $S - T \rightarrow^{azul} x$. Entonces $T \cup \{x\}$ es independiente por trayectorias monocromáticas pues $T \subseteq S$, $x \nrightarrow^{mono} S$, $T \nrightarrow^{azul} x$ y $S \nrightarrow^{rojo} x$. Además, $T \cup \{x\} > S$ pues para todo s en S se tiene que $s \in T$ o si $s \notin T$, entonces existe t en T tal que $t \rightarrow^{azul} x$ y, dado que $x \nrightarrow^{mono} S$, $x \nrightarrow^{azul} t$. Por la maximalidad de S se tiene que $T \cup \{x\}$ no está en φ; es decir, hay un vértice y en $V(D) \setminus (T \cup \{x\})$ tal que $T \cup \{x\} \rightarrow^{rojo} y$ y $y \nrightarrow^{mono} T \cup \{x\}$. Notemos que $T \cup \{x\} \rightarrow^{rojo} y$ implica que $y \notin S$ pues $T \subseteq S$, S es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas y $x \nrightarrow^{mono} S$. Si $T \rightarrow^{rojo} y$, entonces $S \rightarrow^{rojo} y$ (dado que $T \subseteq S$), y se sigue de la definición de φ y de $y \nrightarrow^{mono} T \cup \{x\}$ que $y \rightarrow^{mono} S - T$. Luego $y \nrightarrow^{rojo} S - T$, porque $T \rightarrow^{rojo} y$ y S es independiente por trayectorias monocromáticas. Por otro lado, $y \nrightarrow^{azul} S - T$ porque $S - T \rightarrow^{azul} x$ y $y \nrightarrow^{azul} x$. Por lo tanto, $y \nrightarrow^{mono} S - T$, lo cual contradice que $y \rightarrow^{mono} S - T$. Así, debe ocurrir que $x \rightarrow^{rojo} y$. Ahora, de $x \rightarrow^{rojo} y$ y $x \nrightarrow^{rojo} S$ se deduce que $y \nrightarrow^{rojo} S$. Luego, $y \nrightarrow^{azul} S$ porque $S - T \rightarrow^{azul} x$ y $y \nrightarrow^{azul} x$. Por lo tanto, $y \nrightarrow^{mono} S$. Dado que $y \nrightarrow^{mono} x$ y $y \nrightarrow^{rojo} x$, esto contradice la elección de x. Así, S es núcleo por trayectorias monocromáticas. □

Corolario 2.0.4. *Si D_1 y D_2 son dos digráficas finitas y transitivas, entonces $D_1 \cup D_2$ es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea H una subdigráfica inducida de $D_1 \cup D_2$. Veamos que H tiene núcleo. Para (x, y) en $A(H)$ damos la siguiente coloración: (x, y) es de color azul si $(x, y) \in A(D_1)$ o (x, y) es de color rojo si $(x, y) \in A(D_2) \setminus A(D_1)$.
Luego, por el teorema 2.0.3, sabemos que H tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, digamos N.

Veamos que N es núcleo de H.
N es un conjunto independiente pues de existir una flecha entre dos vértices de N, esto sería una trayectoria monocromática, de longitud uno, lo cual no puede ser pues N es independiente por trayectorias monocromáticas en H.

N es absorbente ya que para todo x en $V(H) \setminus S$, al ser N núcleo por trayectorias monocromáticas de H, existe un vértice y en N tal que existe una trayectoria monocromática de x hacia y en H, digamos $(x, x_1, \ldots, y)$, que sin pérdida de generalidad supondremos es de color azul. De esto se sigue que todas las flechas de la trayectoria están contenidas en D_1. Dado que D_1 es transitiva y $\{(x, x_1), (x_1, x_2)\} \subseteq A(D_1)$, se tiene que $(x, x_2) \in A(D_1)$. De la misma manera, $\{(x, x_2), (x_2, x_3)\} \subseteq A(D_1)$ implica que $(x, x_3) \in A(D_1)$. Siguiendo con este precedimiento podemos afirmar que $(x, y) \in A(D_1)$ y a su vez en H, pues H es una subdigráfica inducida de $D_1 \cup D_2$. Por lo tanto, N es un conjunto absorbente en H. Ası, dado que H tiene núcleo, podemos concluir que $D_1 \cup D_2$ es núcleo perfecta.

$\square$

Capítulo 3

Condiciones suficientes para asegurar que la unión de dos digráficas núcleo perfectas finitas sea núcleo perfecta.

Como mencionamos en el capítulo anterior, el trabajo realizado por Sands, Sauer y Woodrow inspiro al estudio de condiciones suficientes para garantizar que la unión de dos digráficas sea núcleo perfecta. Algunos de estos trabajos son "Kernels in quasi-transitive digraphs"[8] y "Kernels in pretransitive digraphs"[7] por Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy, donde presentan los dos siguientes resultados:

Teorema 3.0.1. *([8]) Sea D una digráfica tal que $D = D_1 \cup D_2$ (posiblemente $A(D_1) \cap A(D_2) \neq \emptyset$), donde D_1 es una subdigráfica quasitransitiva de D que no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas. Si todo ciclo de longitud tres contenido en D tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D es una digráfica núcleo perfecta.*

Teorema 3.0.2. *([7]) Sea D una digráfica tal que $D = D_1 \cup D_2$ (posiblemente $A(D_1) \cap A(D_2) \neq \emptyset$), donde D_1 es una subdigráfica pretransitiva derecha de D y D_2 es una subdigráfica pretransitiva izquierda de D y D_i no contiene trayectorias infinitas exteriores para $i \in \{1, 2\}$. Entonces D es una digráfica núcleo perfecta.*

En el corolario 2.0.4 vimos que la unión de dos digráficas finitas transitivas es núcleo perfecta y en la proposición 1.0.6 vimos que toda digráfica transitiva es núcleo perfecta, por lo que es natural preguntarnos si la unión de dos digráficas finitas núcleo perfectas siempre resulta ser una digráfica núcleo perfecta y la respuesta es no necesariamente.

En el siguiente ejemplo vemos dos digráficas, D_1 y D_2, sin ciclos de longitud impar. De la proposición 1.0.9 sabemos que ambas son núcleo perfectas.

Figura 3.1: Digráficas D_1 y D_2

Ahora, si consideramos $D_1 \cup D_2$ obtenemos la siguiente digráfica.

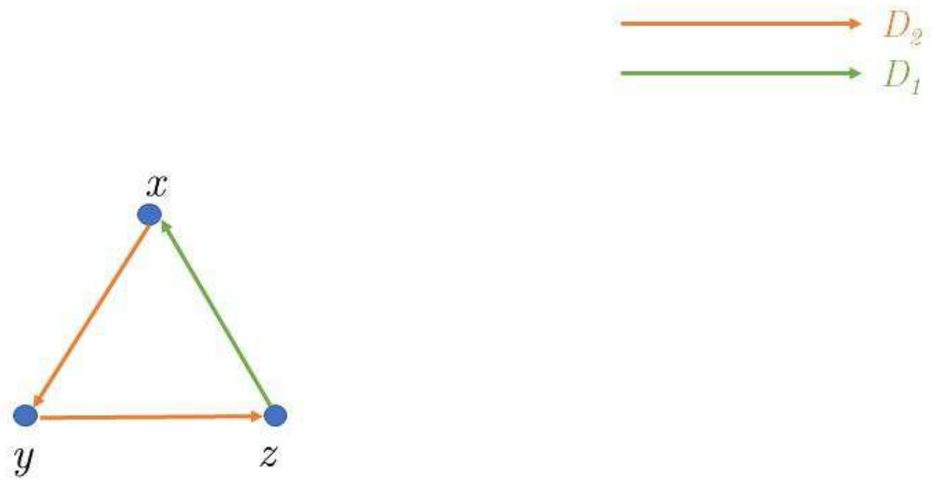


Figura 3.2: $D_1 \cup D_2$

Donde $D_1 \cup D_2$ no es núcleo perfecta, más aún, D no tiene núcleo.

Esto motivo a Hortensia Galeana Sánchez y a Mucuy-Kak Guevara a estudiar y encontrar condiciones suficientes para asegurar que la unión de dos digráficas núcleo perfectas finitas sea núcleo perfecta. En este capítulo presentaremos el trabajo que desarrollaron en el artículo "Union of digraphs which become kernel perfect"[6].

Solo en este capítulo, de ahora en adelante consideraremos que D es una digráfica finita.

Sean D una digráfica y F un subconjunto de $A(D)$. Un subconjunto S de $V(D)$ es un **seminúcleo de D módulo F** si cumple lo siguiente:
* S es un conjunto independiente en D.
** Para cada x en $V(D) \setminus S$, si existe una Sx-flecha en $A(D) \setminus F$, entonces existe una xS-flecha en $A(D)$.
Notemos que cuando $F = \emptyset$, un seminúcleo de D módulo F es un seminúcleo de D.

Note que todo núcleo S de una digráfica D es seminúcleo no vacío módulo F de D para cualquier F subconjunto de $A(D)$; ya que para cualquier vértice z en $V(D) \setminus S$, exista o no una $Sz-flecha$ en $A(D) \setminus F$, siempre existe una $zS-flecha$ en $A(D)$ por ser S absorbente. Así, S es un seminúcleo no vacío módulo F de D.

Teorema 3.0.3. *([6]) Sean D una digráfica y D_1 una subdigráfica de D tal que cada ciclo contenido en D_1 tiene al menos una flecha simétrica en D.*

Supongamos que $\varsigma = \{S \subseteq V(D) : S$ *es un seminúcleo no vacío módulo* $A(D_1)$ *de* $D\}$ *es un conjunto no vacío, y definamos la digráfica* D_ς *como sigue:*
$V(D_\varsigma) = \varsigma$ *y* $(S_1, S_2) \in A(D_\varsigma)$ *si y solo si para cada vértice* x *en* S_1 *existe un vértice* y *en* S_2 *tal que* $x = y$ *o* $(x, y) \in A(D_1)$ *y no hay* yS_1*-flecha en* D*. Entonces la digráfica* D_ς *es acíclica.*

Demostración. Procedemos a probar por contradicción. Supongamos que D_ς tiene un ciclo de longitud al menos dos, digamos $\gamma = (S_0, S_1, \ldots, S_m, S_0)$ (índices tomados módulo $m+1$).

Afirmación 1. Existe i en $\{0, 1, \ldots, m\}$ tal que S_i no es subconjunto de S_{i+1}. Procediendo por contradicción, supongamos que para todo i en $\{0, 1, \ldots, m\}$ se tiene que $S_i \subseteq S_{i+1}$. Entonces, $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_m \subseteq S_0$ y por lo tanto, $S_i = S_j$ para todo $i \neq j$, lo cual contradice que γ es un ciclo de longitud al menos dos.

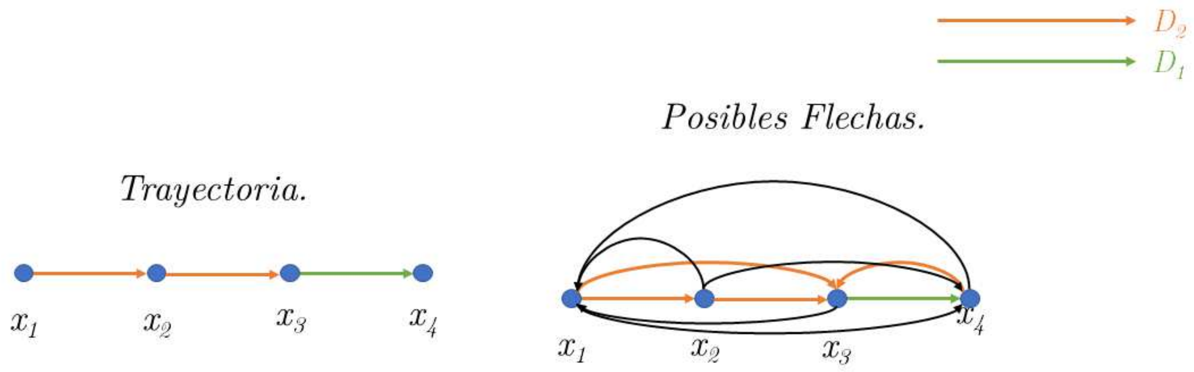
Considere $i_0 = \text{mín}\{i : S_i \nsubseteq S_{i+1}\}$. Dado que $S_{i_0} \nsubseteq S_{i_0+1}$, se tiene que existe x_{i_0} en S_{i_0} tal que $x_{i_0} \notin S_{i_0+1}$. Como $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in A(D_\varsigma)$, entonces se sigue de la definición de D_ς que para x_{i_0} existe x_{i_0+1} en S_{i_0+1} tal que $(x_{i_0}, x_{i_0+1}) \in A(D_1)$ y no existe una $x_{i_0+1}S_{i_0}$-flecha en D (en particular $(x_{i_0+1}, x_{i_0}) \notin A(D)$). Observemos que x_{i_0+1} no pertenece a S_{i_0} ya que $x_{i_0} \in S_{i_0}$, $(x_{i_0}, x_{i_0+1}) \in A(D)$ y S_{i_0} es un conjunto independiente en D.

Por otro lado sea $i_1 = \text{mín}\{i : i > i_0 + 1 \ y \ x_{i_0+1} \notin S_i\}$ (donde i es tomado módulo $m+1$); es decir, i_1 es el primer índice después de $i_0 + 1$ tal que x_{i_0+1} no pertenece a S_{i_1}. Tal índice existe por que $x_{i_0+1} \notin S_{i_0}$. Como $x_{i_0+1} \in S_{i_1-1}$ (por elección de i_1), $x_{i_0+1} \notin S_{i_1}$ y $(S_{i_1-1}, S_{i_1}) \in A(D_\varsigma)$, entonces se sigue de la definición de D_ς que para x_{i_0+1} existe $x_{i_1} \in S_{i_1}$ tal que $(x_{i_0+1}, x_{i_1}) \in A(D_1)$ y no existe una $x_{i_1}S_{i_1-1} - flecha$ en D (en particular $(x_{i_1}, x_{i_0+1}) \notin A(D)$). Observemos que $S_{i_1} \neq S_{i_0}$ ya que si $S_{i_1} = S_{i_0}$, entonces (x_{i_0+1}, x_{i_1}) es una $x_{i_0+1}S_{i_0}$-flecha en D (recordemos que x_{i_1} es un elemento de S_{i_1} que estamos suponiendo es igual a S_{i_0}) lo cual sabemos no puede existir. Además $x_{i_1} \notin S_{i_1-1}$ porque $x_{i_0+1} \in S_{i_1-1}$, $(x_{i_0+1}, x_{i_1}) \in A(D_1)$ y S_{i_1-1} es un conjunto independiente en D. Sea $i_2 = \text{mín}\{i : i > i_1 \ y \ x_{i_1} \notin S_i\}$ (donde i es tomado módulo $m+1$); es decir, i_2 es el primer índice después de i_1 tal que x_{i_1} no pertenece a S_{i_2}. Tal índice existe porque $x_{i_1} \notin S_{i_1-1}$. Como $x_{i_1} \in S_{i_2-1}$ (por elección de i_2), $x_{i_1} \notin S_{i_2}$ y $(S_{i_2-1}, S_{i_2}) \in A(D_\varsigma)$, entonces se sigue de la definición de D_ς que para x_{i_1} existe $x_{i_2} \in S_{i_2}$ tal que $(x_{i_1}, x_{i_2}) \in A(D_1)$ y no existe una $x_{i_2}S_{i_2-1} - flecha$ en D (en particular $(x_{i_2}, x_{i_1}) \notin A(D)$). Observemos que $S_{i_2} \neq S_{i_1-1}$ ya que si $S_{i_2} = S_{i_1-1}$, entonces (x_{i_1}, x_{i_2}) es una $x_{i_1}S_{i_1-1}$-flecha en D (recuerde que x_{i_2} es un elemento de S_{i_2} que estamos suponiendo es igual a S_{i_0-1}) lo cual sabemos no puede existir. Además $x_{i_2} \notin S_{i_2-1}$ porque $x_{i_1} \in S_{i_2-1}$, $(x_{i_1}, x_{i_2}) \in A(D_1)$ y S_{i_2-1} es un conjunto independiente en D. Continuando de esta manera obtenemos una sucesión de vértices $(x_{i_0}, x_{i_0+1}, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots)$ de D tal que $\{(x_{i_0}, x_{i_0+1}), (x_{i_0+1}, x_{i_1}), (x_{i_1}, x_{i_2}), \ldots, (x_{i_l}, x_{i_{l+1}})\} \subseteq A(D_1)$, con $l \geq 1$. Dado que D es finito, existe algún i_k tal que $x_{i_k} = x_{i_{k+j}}$ para algún $j > 0$. Por lo tanto, $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_{k+j}} = x_{i_k})$ es un ciclo asimétrico contenido en D_1, contradiciendo la hipótesis. Consecuentemente, la digráfica D_ς es acíclica. $\square$

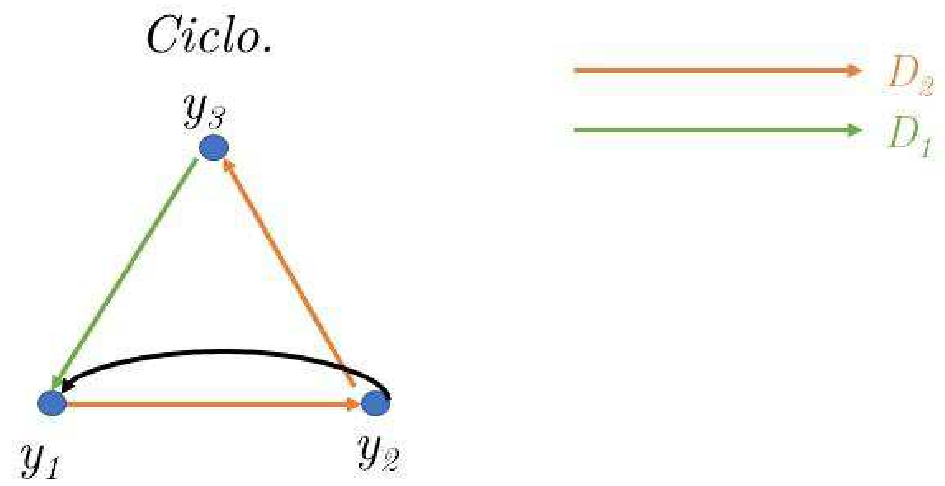
De aquí en adelante consideraremos D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D, tales que $\{A(D_1), A(D_2)\}$ es una partición de $A(D)$.

Diremos que una digráfica D tiene la **propiedad P_1** si siempre que:

1. Exista una trayectoria de longitud tres, (x_1, x_2, x_3, x_4), tal que $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\} \subseteq A(D_2)$ y $(x_3, x_4) \in A(D_1)$ implica que al menos una de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x_1, x_3), (x_4, x_3)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_4, x_1)\} \cap A(D) \neq \emptyset$ (ver figura 1).



2. Si siempre que exista un ciclo de longitud tres, (y_1, y_2, y_3, y_1), con $\{(y_1, y_2), (y_2, y_3)\} \subseteq A(D_2)$ y $(y_3, y_1) \in A(D_1)$, implica que $(y_2, y_1) \in A(D)$ (ver figura 2).



Teorema 3.0.4. *([6]) Sean D una digráfica, D_1 una subdigráfica generadora de D tal que todo ciclo en D_1 tiene al menos una flecha simétrica en D_1 y D_2 una subdigráfica núcleo perfecta de D. Si D tiene la propiedad P_1, entonces toda subdigráfica inducida H de D tiene un seminúcleo no vacío módulo $A(D_1) \cap A(H)$.*

Demostración. Sea H una subdigráfica inducida de D. Como $D_2[V(H)]$ es una subdigráfica inducida de D_2 y D_2 es núcleo perfecta, entonces $D_2[V(H)]$ tiene un núcleo K. Si

$A(D_1) \cap A(D[K]) = \emptyset$, entonces K es un conjunto independiente en D, pues resulta que en K no hay flechas de D_1 ni de D_2 (porque K es un conjunto independiente en D_2). Por otro lado, K es absorbente ya que D_2 es una subdigráfica generadora de D. Por lo tanto, K es un núcleo de H, lo que implica que en particular, K es un seminúcleo no vacío módulo $A(D_1) \cap A(H)$.

Supongamos que $A(D_1) \cap A(D[K]) \neq \emptyset$, entonces $T = \{u \in K : \ existe\ uK - flecha\}$ es un conjunto no vacío y $K \setminus T$ es un conjunto independiente en H por definición de T. Sea $\tau = \{v \in T : para\ toda\ u\ en\ K \setminus T, (v, u) \notin A(D)\}$. Consideremos dos casos sobre τ.

Caso 1. $\tau = \emptyset$.

En este caso afirmamos que $K \setminus T$ es un seminúcleo módulo $A(H) \cap A(D_1)$ de H.

Por la definición de T, se tiene que $K \setminus T$ es independiente en D, en paticular en H. Por lo tanto, solo resta demostrar que si existe una $(K \setminus T)y$-flecha en $A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))$, para algún y en $V(H) \setminus (K \setminus T)$, entonces existe una $y(K \setminus T)$-flecha en $A(H)$.

Sea y en $V(H) \setminus (K \setminus T)$ tal que existe una $(K \setminus T)y$-flecha en $A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))$. Sea x en $K \setminus T$ tal que $(x, y) \in A(D_2)$ (porque $(A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))) \subseteq A(D_2)$). Notemos que las flechas entre los vértices de K están contenidas en D_1, pues K es independiente en $D_2[V(H)]$.

Por otro lado, y no puede estar en T; ya que de ser así, la existencia de (x, y) en $A(D_2)$ implicaría que x está en T, contradiciendo la elección de x. Por lo tanto, $y \in V(H) \setminus K$.

Como K es núcleo de $D_2[V(H)]$, existe una yK-flecha en $D_2[V(H)]$, digamos (y, z).

Si $z \in (K \setminus T)$, entonces acabamos.

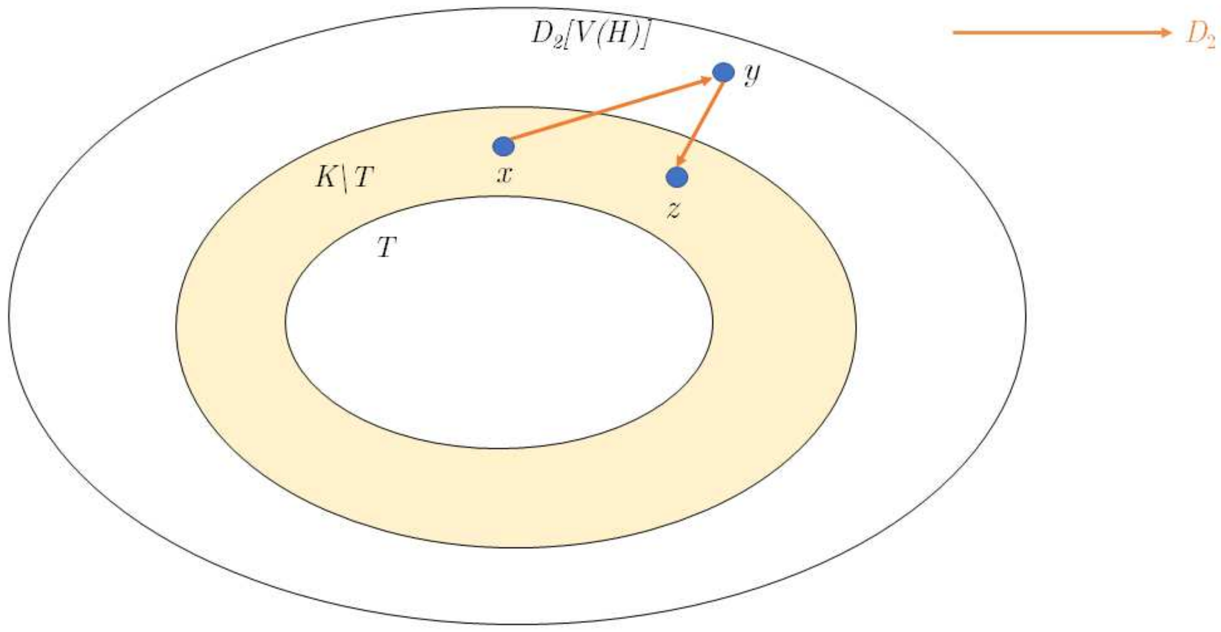


Figura 3.3: $z \in (K \setminus T)$

De otra manera, $z \in T$ implica que existe una zw-flecha, con $w \in K \setminus T$ (porque $\tau = \emptyset$ y por definición de T). Dado que $\{z, w\} \subseteq K$ tenemos que $(z, w) \in A(D_1)$. Si $w \neq x$, entonces la trayectoria (x, y, z, w), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$, por la propiedad P_1, satisface una de las siguientes condiciones: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Como las flechas entre los vértices de K están en D_1 y $\{x, z, w\} \subseteq K$, entonces (x, z) y (w, z) no están en $A(D_2)$. Luego, por la definición de T, y dado que $\{x, w\} \subseteq K \setminus T$, tenemos que (x, w) y (w, x) no están en $A(D)$. Si (y, x) o (y, w) están en $A(D)$, entonces existe una $y(K \setminus T)$-flecha y habremos acabado.

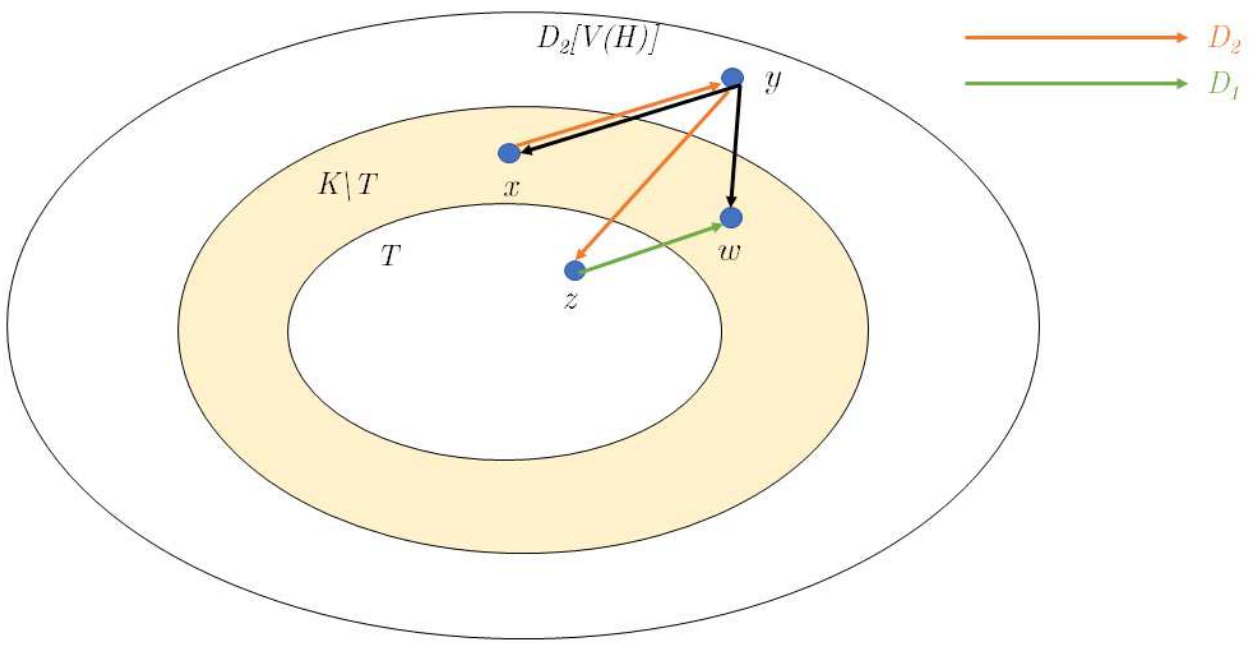


Figura 3.4: $z \in T$, $w \neq x$ y (y, x) o (y, w) en $A(D)$

Si (z, x) está en $A(D)$, entonces encontramos un ciclo de longitud tres, a saber (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, por lo que la propiedad P_1 implica que

$(y, x) \in A(D)$ y habremos concluido.

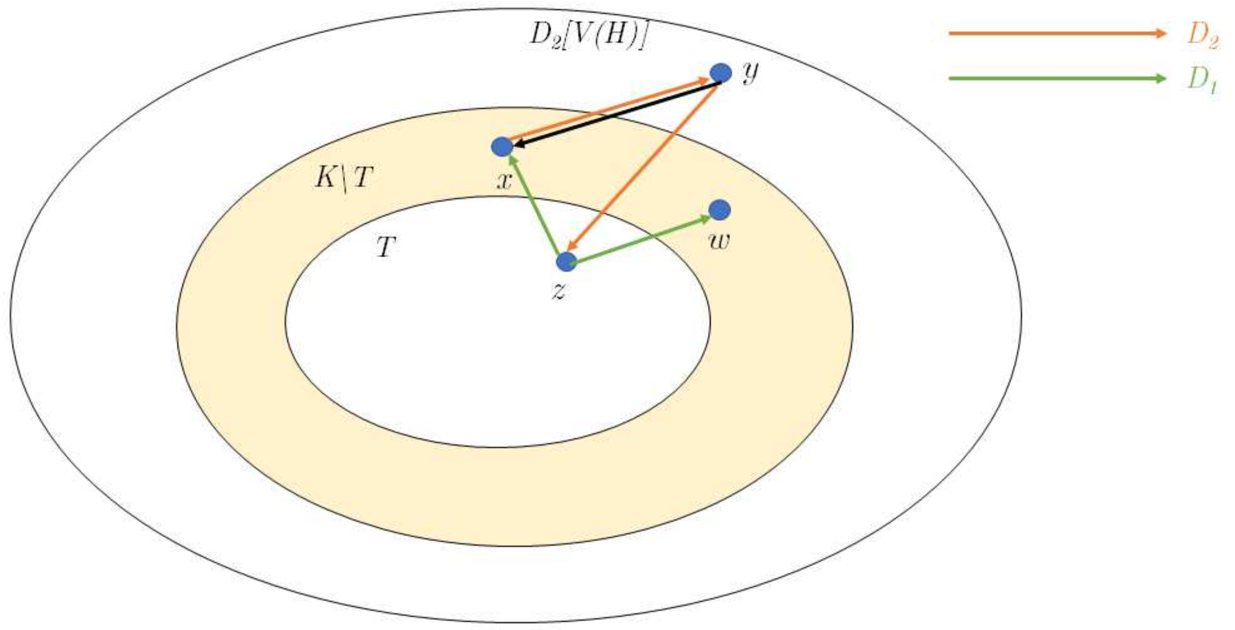


Figura 3.5: $z \in T$, $w \neq x$ y (z, x) en $A(D)$

Si $w = x$, entonces ya demostramos que la existencia del ciclo de longitud tres (x, y, z, x) implica que $(y, x) \in A(D)$.

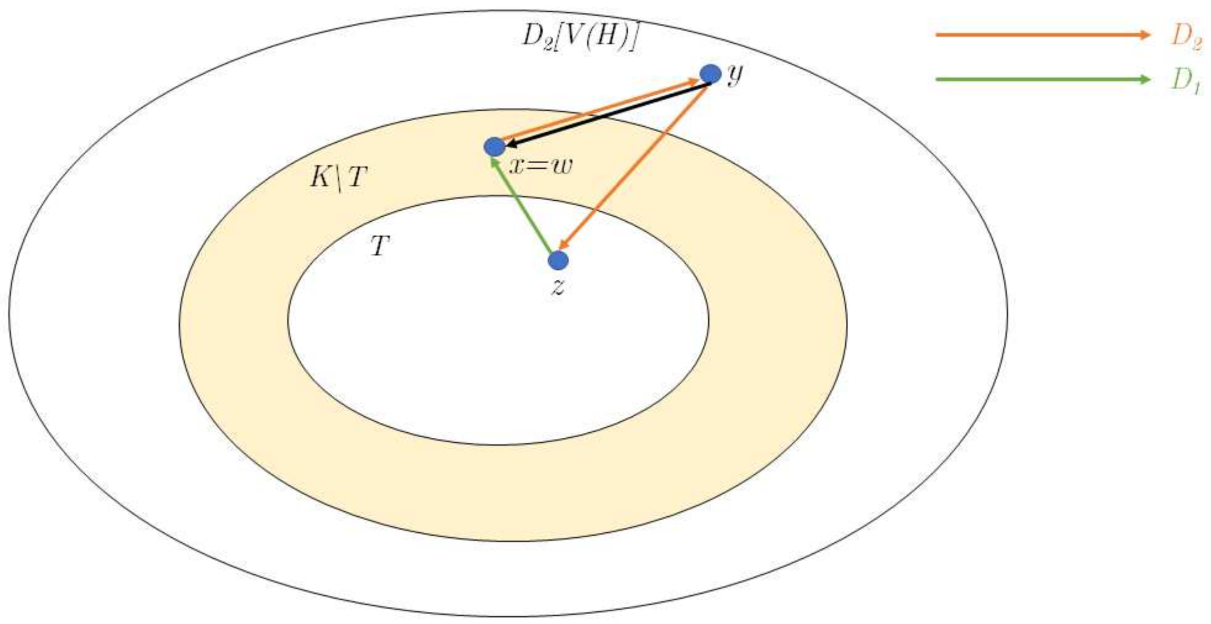


Figura 3.6: $z \in T$ y $w = x$

Caso 2.$\tau \neq \emptyset$.

Observemos que como D_1 cumple las condiciones del teorema 1.0.5 y $D[\tau]$ es una subdigráfica inducida en D_1 (dado que $\tau \subseteq K$ y K es independiente en $D_2[V(H)]$), se tiene que $D[\tau]$ tiene un núcleo N_0. Afirmamos que $N_0 \cup (K \setminus T)$ es un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(H)$ de H.

Veamos que $N_0 \cup (K \setminus T)$ es independiente en H. N_0 es independiente en H pues N_0 es núcleo de $D[\tau]$. Por otro lado, recordemos que $(K \setminus T)$ es independiente en H. Por lo tanto, solo resta demostrar que no existen $N_0(K \setminus T)$-flechas ni $(K \setminus T)N_0$-flechas en H. Por la definición de τ, no existen $N_0(K \setminus T)$-flechas en H. Por la definición de T, no existen $(K \setminus T)N_0$-flechas en H. Por lo tanto, $N_0 \cup (K \setminus T)$ es independiente en H.

Ahora veamos que si existe una $(N_0 \cup (K \setminus T))y$-flecha en $A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))$, para algún y en $V(H) \setminus (N_0 \cup (K \setminus T))$, entonces existe una $y(N_0 \cup (K \setminus T))$-flecha en $A(H)$. Sea (x, y) en $A(D_2)$ con $x \in N_0 \cup (K \setminus T)$ y $y \in V(H) \setminus (N_0 \cup (K \setminus T))$. Observemos que como N_0 y $K \setminus T$ son subconjuntos de K, entonces $x \in K$, lo que implica que y está en $V(H) \setminus K$ ya que todas las flechas entre los vértices de K están en D_1. Luego, como K es núcleo de $D_2[V(H)]$, existe una yK-flecha, digamos (y, z), en D_2.
Si z está en $N_0 \cup (K \setminus T)$, entonces terminamos. Si z está en $K \setminus (N_0 \cup (K \setminus T))$, entonces consideremos dos casos sobre x.

Caso 2.1 x está en $K \setminus T$.

Si $z \in \tau \setminus N_0$, entonces dado que N_0 es núcleo de $D[\tau]$, existe un vértice w en N_0 tal que $(z, w) \in A(D_1)$. Como (x, y, z, w) es una trayectoria con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$, dado que D cumple la propiedad P_1, una de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Como K es independiente en D_2 y $\{x, z, w\} \subseteq K$, entonces $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Como x está en $K \setminus T$, entonces por la definición de T, $(x, w) \notin A(D)$. Por otro lado, dado que $\{w, z\} \subseteq \tau$, se sigue de la definición de τ que $(w, x) \notin A(D)$ y $(z, x) \notin A(D)$. Por lo tanto, (y, x) o (y, w) están en $A(D)$ y en ambos casos acabamos.

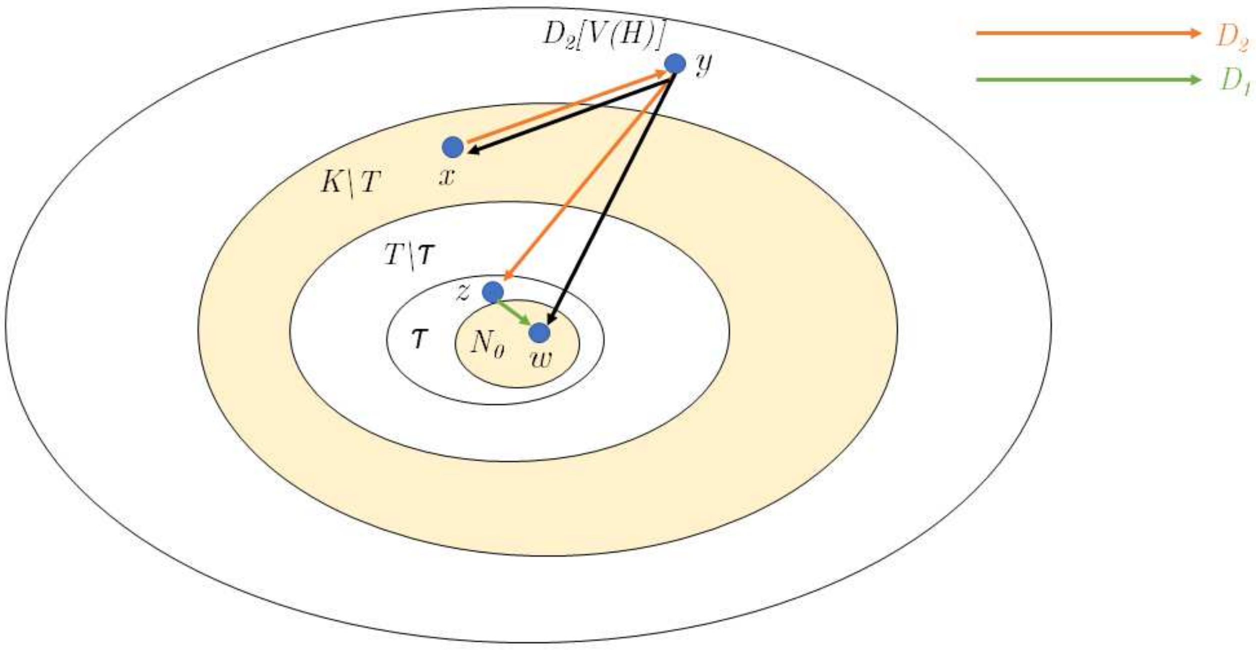


Figura 3.7: x en $K \setminus T$, $z \in \tau \setminus N_0$ y (y, x) o (y, w) en $A(D)$

Si $z \in T \setminus \tau$, entonces existe un vértice w en $K \setminus T$ tal que $(z, w) \in A(D_1)$. Si $w \neq x$, entonces (x, y, z, w) es una trayectoria con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$. Se sigue de la propiedad P_1 que dicha trayectoria cumple una de las siguientes condiciones: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Dado que $\{x, z, w\} \subseteq K$ y K es independiente en $D_2[V(H)]$ se tiene que $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Dado que $\{x, w\} \subseteq K \setminus T$, por definición de T, tenemos que $(x, w) \notin A(D)$ y $(w, x) \notin A(D)$. Como $\{x, w\} \subseteq K \setminus T$, entonces si $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$, terminamos.

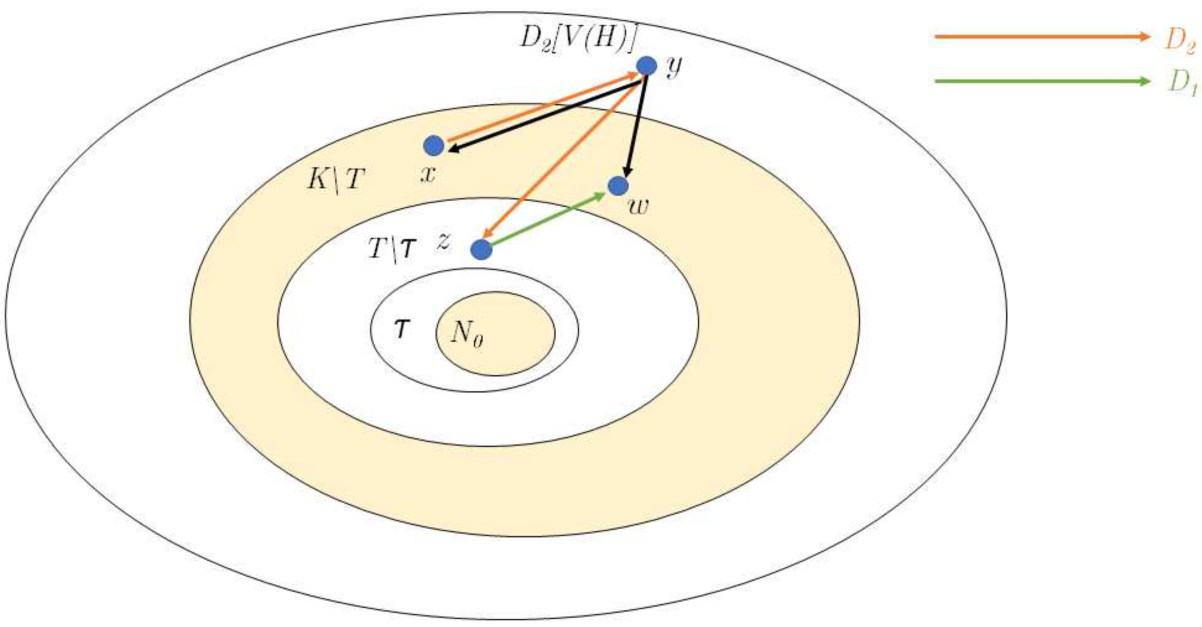


Figura 3.8: $z \in T \setminus \tau$, $w \neq x$ y $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$

Si (z, x) está en $A(D)$, entonces encontramos un ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, lo que implica que $(y, x) \in A(D)$ y acabamos.

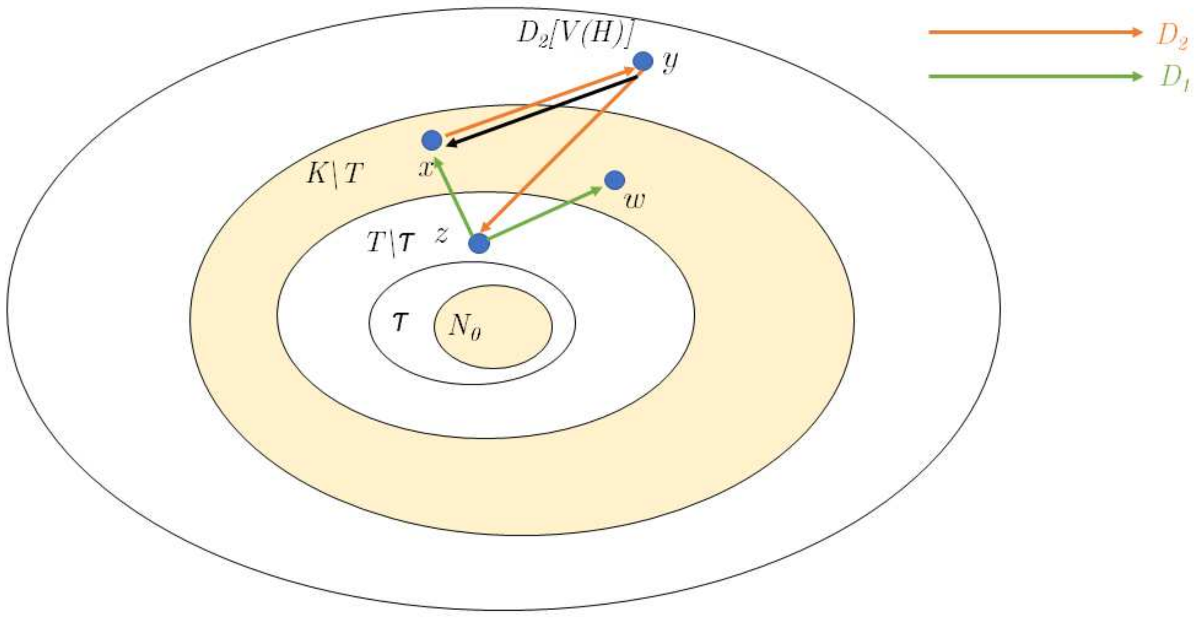


Figura 3.9: $z \in T \setminus \tau$, $w \neq x$ y $(z, x) \in A(D)$

Si $w = x$, entonces ya demostramos que para el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, se cumple que $(y, x) \in A(D)$ y habremos finalizado.

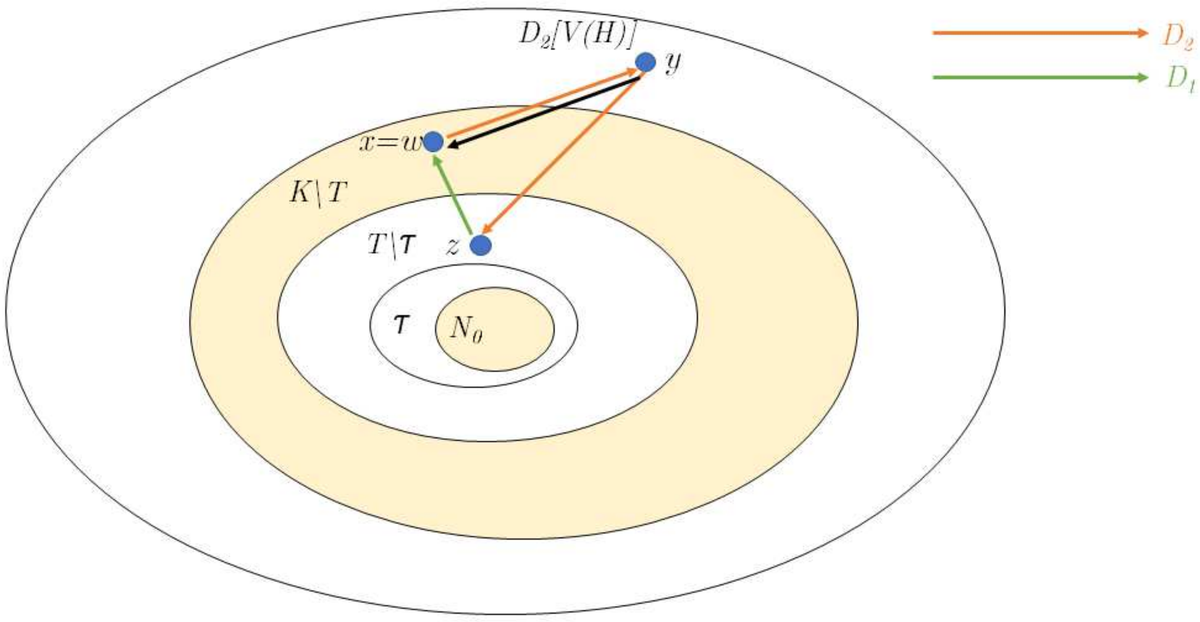


Figura 3.10: $z \in T \setminus \tau$, $w = x$ y $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$

Caso 2.2 $x \in N_0$.

Si $z \in T \setminus \tau$, entonces por definición de τ, existe w en $K \setminus T$ tal que $(z, w) \in A(D_1)$. Luego (x, y, z, w) es una trayectoria de longitud tres con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$. Dado que D cumple la propiedad P_1, una de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Como K es independiente en D_2 y $\{x, z, w\} \subseteq K$, entonces $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Puesto que $x \in \tau$ y $w \notin \tau$, entonces se sigue de la definición de τ que $(x, w) \notin A(D)$. Por otro lado, dado que w está en $K \setminus T$, se sigue de la definición de T que $(w, x) \notin A(D)$. Si (y, x) o (y, w) están en $A(D)$, entonces terminamos en ambos casos ya que $x \in N_0$ y $w \in K \setminus T$.

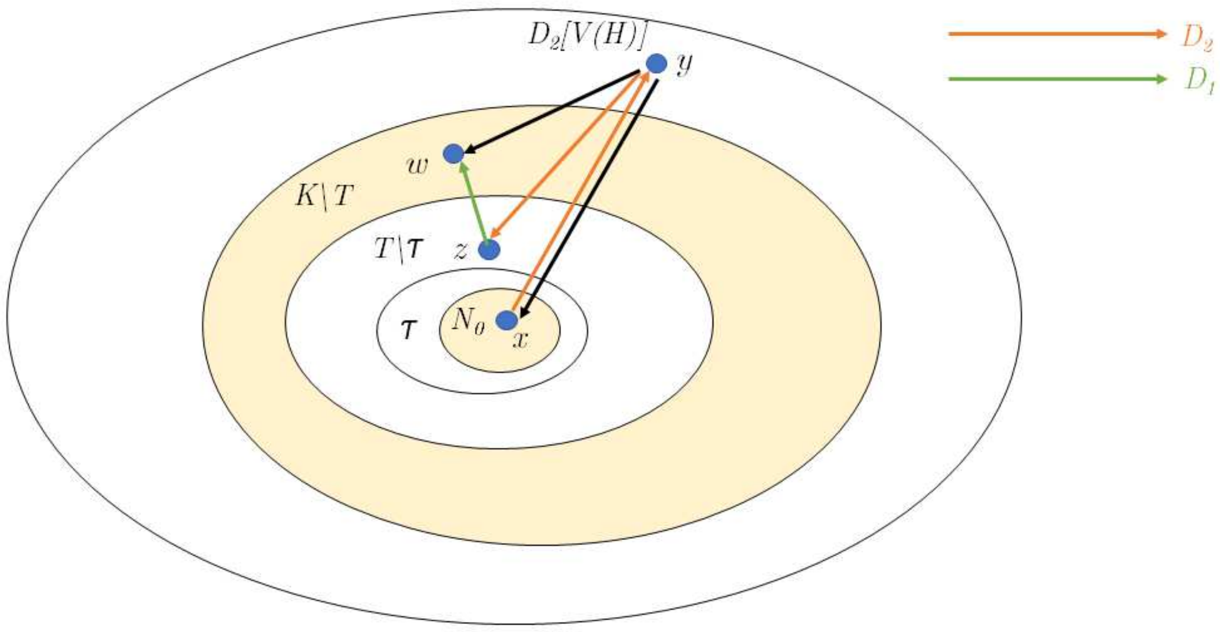


Figura 3.11: $z \in T \setminus \tau$ y $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$

Si (z, x) está en $A(D)$, entonces encontramos el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, lo que implica que $(y, x) \in A(D)$ y habremos terminado.

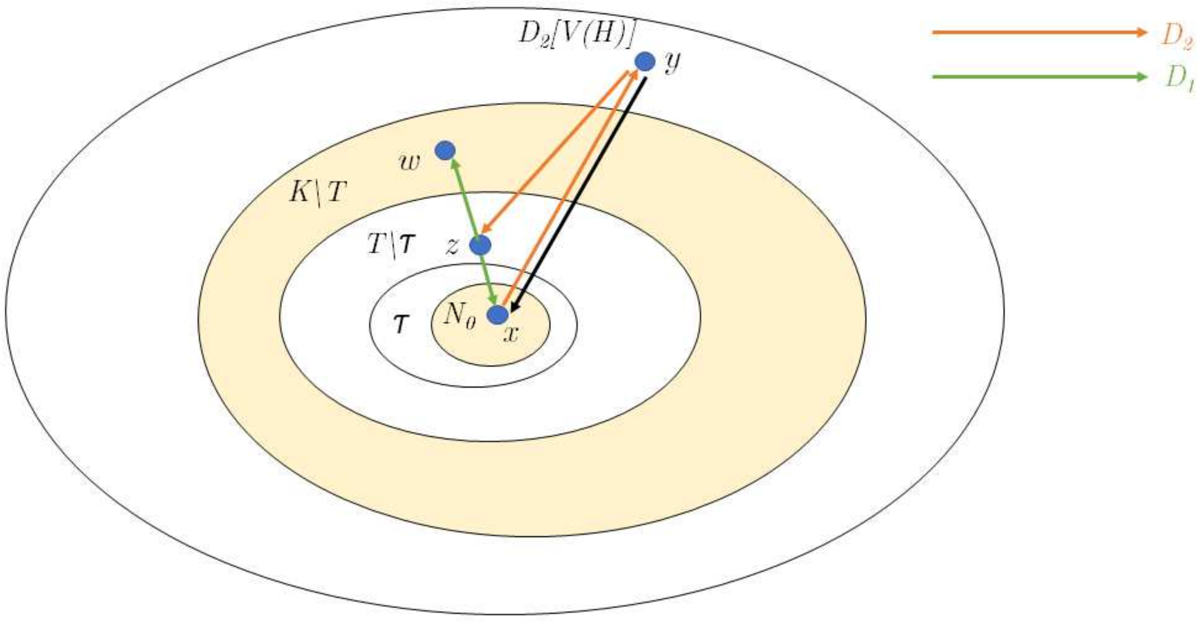


Figura 3.12: $z \in T \setminus \tau$ y (z, x) en $A(D)$

Si z está en $\tau \setminus N_0$, entonces dado que N_0 es núcleo de $D[\tau]$, existe w en N_0, tal que (z, w) está en $A(D_1)$. Si $w \neq x$, entonces encontramos la trayectoria (x, y, z, w), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$. Dado que D cumple la propiedad P_1 tenemos que alguna de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Puesto que $\{x, z, w\} \subseteq K$, se tiene que $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Dado que N_0 es independiente en H y $\{x, w\} \subseteq N_0$, se tiene que $(x, w) \notin A(D)$ y $(w, x) \notin A(D)$. Por otro lado, si (y, x) o (y, w) están en $A(D)$, entonces habremos acabado.

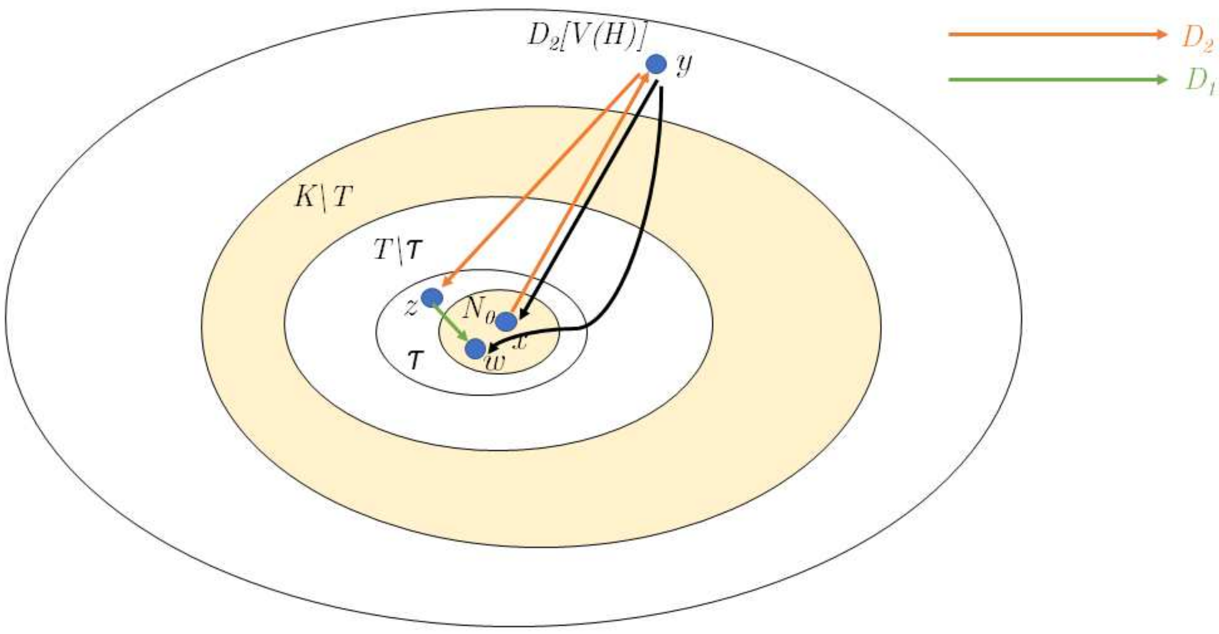


Figura 3.13: $z \in \tau \setminus N_0$, $w \neq x$ y (y, x) o (y, w) en $A(D)$

Si $(z, x) \in A(D)$, entonces encontramos el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$. Por lo tanto, se sigue de la propiedad P_1 que $(y, x) \in A(D)$ y habremos acabado.

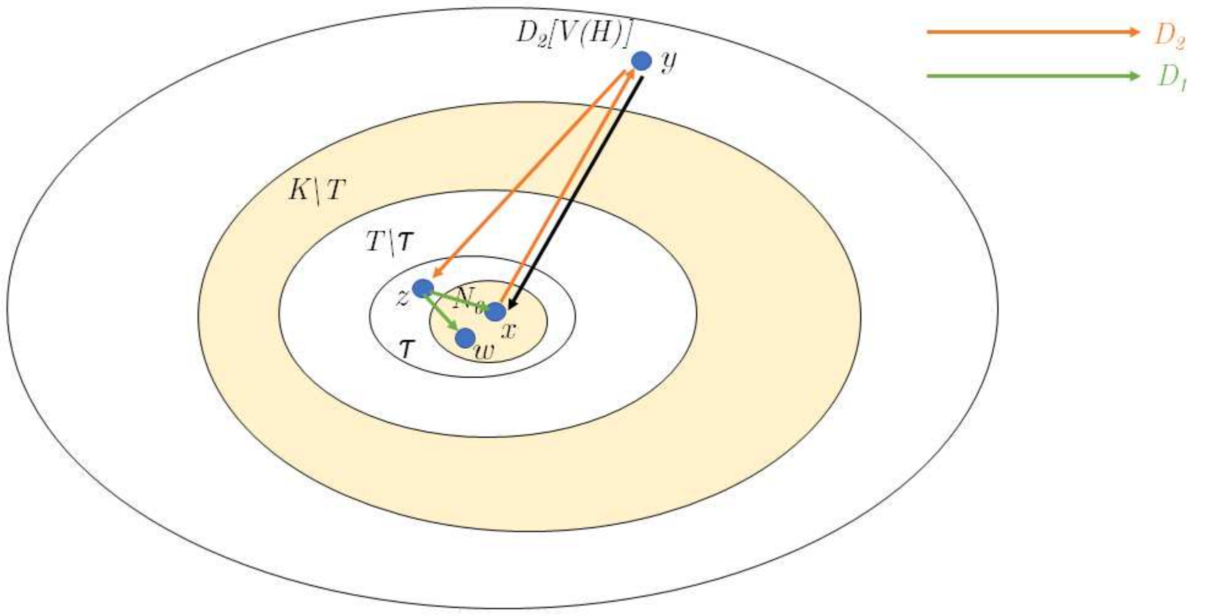


Figura 3.14: $z \in \tau \setminus N_0$, $w \neq x$ y (z, x) en $A(D)$

Si $w = x$, entonces ya demostramos que para el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, se cumple que $(y, x) \in A(D)$ y habremos acabado.

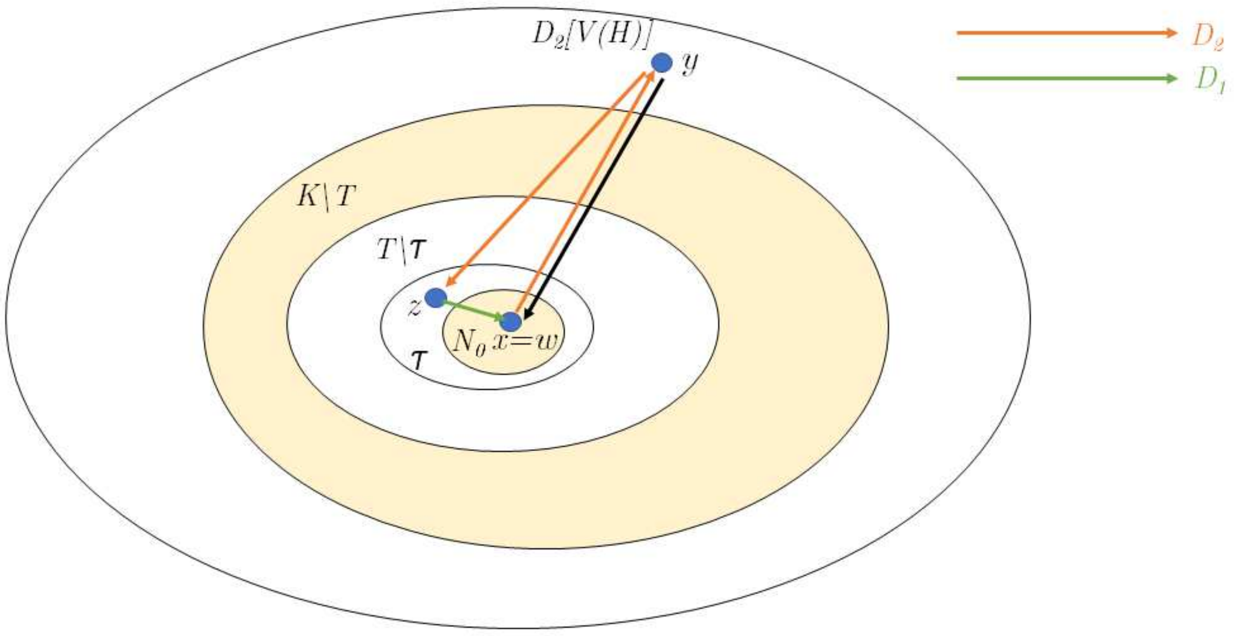


Figura 3.15: $z \in \tau \setminus N_0$ y $w = x$

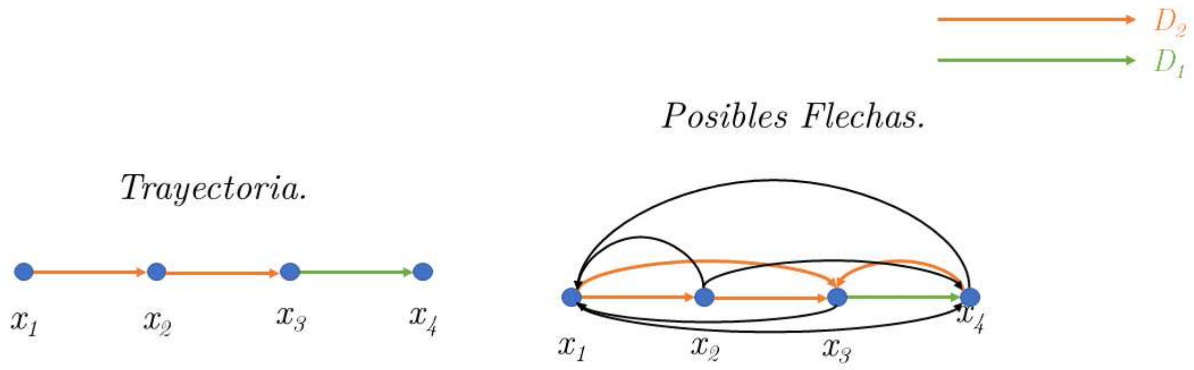
De esta manera hemos probado que $N_0 \cup (K \setminus T)$ es un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(H)$ de H.

□

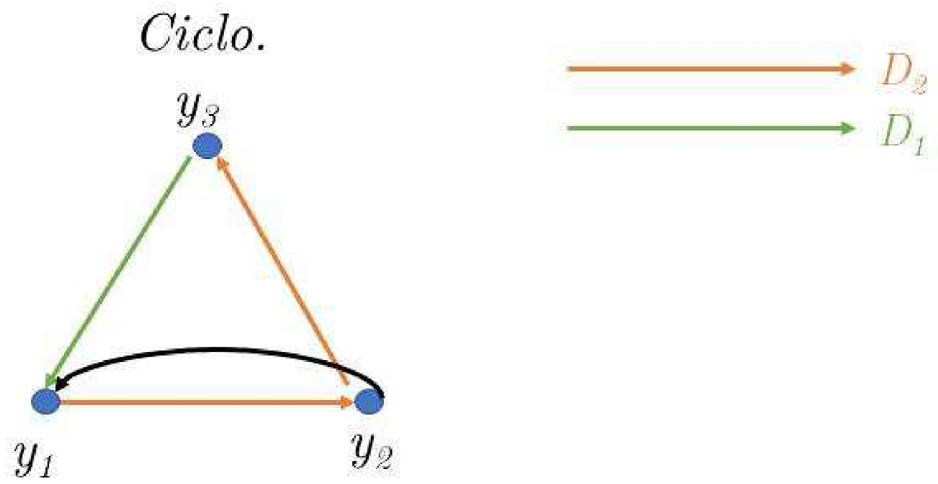
Diremos que una digráfica D tiene la **propiedad $\boldsymbol{P_2}$** si siempre que:

1. Exista una trayectoria de longitud tres, (x_1, x_2, x_3, x_4), tal que $(x_1, x_2) \in A(D_2)$ y $(x_3, x_4) \in A(D_1)$ implica que al menos una de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x_1, x_3), (x_4, x_3)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o

$\{(x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_4, x_1)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.



2. Si siempre que exista un ciclo de longitud tres, (y_1, y_2, y_3, y_1), con $(y_1, y_2) \in A(D_2)$ y $(y_3, y_1) \in A(D_1)$, implica que $(y_2, y_1) \in A(D)$.



A continuación se presentará el teorema principal del artículo "Union of digraphs which become kernel perfect" de Hortensia Galeana Sánchez y Mucuy-kak Guevara.

Teorema 3.0.5. *([6]) Sean D una digráfica, D_1 una subdigráfica generadora de D tal que todo ciclo en D_1 tiene al menos una flecha simétrica en D_1 y D_2 una subdigráfica núcleo perfecta de D. Si D tiene la propiedad P_2, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Notemos primero que toda subdigráfica inducida H de D, tal que $A(H) \cap A(D_1) \neq \emptyset$ y $A(H) \cap A(D_2) \neq \emptyset$, hereda la propiedad P_2 utilizando la partición $\{A(H) \cap A(D_1), A(H) \cap A(D_2)\}$, donde claramente $A(H) \cap A(D_1) \subseteq A(D_1)$ y $A(H) \cap A(D_2) \subseteq A(D_2)$. Por lo tanto, basta probar que D tiene núcleo para poder afirmar que D es núcleo perfecta.

Dado el teorema 3.0.4, sabemos que D tiene un seminúcleo módulo $A(D_1)$ (dado que D es una subdigráfica inducida de D misma), por consiguiente

$\varsigma = \{S \subseteq V(D) : S \text{ es un seminúcleo no vacío módulo } A(D_1) \text{ de } D\} \neq \emptyset$ lo que implica, por el lema 3.0.3, que la digráfica D_ς es acíclica.

Sea S_0 en $V(D_\varsigma)$ tal que $d^+_{D_\varsigma}(S_0) = 0$ (S_0 existe por el teorema 0.0.1).

Afirmación 1. S_0 es núcleo de D.

Como S_0 es un conjunto independiente en D, basta probar que S_0 es absorbente en D. Supongamos, para llegar a una contradicción, que S_0 no es absorbente en D. Sean $X = \{x \in V(D) \setminus S_0 : \textit{no existe una } xS_0 - \textit{flecha en } D\}$ y N_0 un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(D[X])$ de $D[X]$ (N_0 existe por el teorema 3.0.4).

Sea $T = \{x \in S_0 : \textit{existe } (x, y) \textit{ en } A(D_1) \textit{ para algún } y \textit{ en } N_0\}$. Veamos que $(S_0 \setminus T) \cup N_0$ pertenece a D_ς.

Afirmación 1.1. $(S_0 \setminus T) \cup N_0$ es independiente en D.

Puesto que N_0 y $S_0 \setminus T$ son conjuntos independientes en D, basta probar que no existen $(S_0 \setminus T)N_0$-flechas en D ni $N_0(S_0 \setminus T)$-flechas en D. Por la definición de T no existen $(S_0 \setminus T)N_0$-flechas en $A(D_1)$, por otro lado, por la definición de X y por el hecho de que S_0 es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ de D se tiene que no existen $(S_0 \setminus T)N_0$-flechas en $A(D_2)$. Luego, por la definición de X no existen $N_0(S_0 \setminus T)$-flechas en D.

Afirmación 1.2 Si existe (x, y) en $A(D_2)$ con $x \in (S_0 \setminus T) \cup N_0$ y $y \in V(D) \setminus ((S_0 \setminus T) \cup N_0)$, entonces existe una $y((S_0 \setminus T) \cup N_0)$-flecha en D.

Sea (x, y) en $A(D_2)$ con $x \in (S_0 \setminus T) \cup N_0$ y $y \in V(D) \setminus ((S_0 \setminus T) \cup N_0)$. Consideremos dos casos sobre x.

Caso 1. x está en $S_0 \setminus T$.

En este caso $y \in V(D) \setminus (S_0 \cup X)$; ya que y no puede estar en T, pues S_0 es independiente en D, y y no puede estar en $X \setminus N_0$ por la definición de X y por el hecho de que S_0 es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ de D. Como S_0 es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ en D, existe una yS_0-flecha, digamos (y, z), en $A(D)$. Si z está en $S_0 \setminus T$, habremos acabado. En otro caso, $z \in T$ implica, por la definición de T, que existe (z, w) en $A(D_1)$, con $w \in N_0$. Luego la trayectoria (x, y, z, w), con $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$ implica, dado que D tiene la propiedad P_2, que se cumple alguna de las siguientes condiciones: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Dado que S_0 es un conjunto independiente en D y $\{x, z\} \subseteq S_0$, se tiene que $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(z, x) \notin A(D)$. Por la definición de X y dado que $\{x, z\} \subseteq S_0$, se tiene que $(w, z) \notin A(D_2)$ y $(w, x) \notin A(D)$. Como $(S_0 \setminus T) \cup N_0$ es independiente en D, se tiene que $(x, w) \notin A(D)$. Por lo tanto, $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$, en ambos casos existe una $y((S_0 \setminus T) \cup N_0)$-flecha.

Caso 2. $x \in N_0$.

En este caso consideraremos dos casos sobre y.

Caso 2.1 $y \in X \setminus N_0$.

En este caso, por ser N_0 un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(D[X])$ en $D[X]$, existe una yN_0-flecha en $D[X]$, lo que implica que existe una $y((S_0 \setminus T) \cup N_0)$-flecha en D.

Caso 2.2 $y \in V(D) \setminus (X \cup S_0)$.

Por la definición de X, y es absorbido por S_0. Si hay una $y(S_0 \setminus T)$-flecha en D habremos acabado. En otro caso, sea z en T tal que $(y, z) \in A(D)$; luego, por la definición de T, para z existe un w en N_0 tal que (z, w) está en $A(D_1)$. Si $w \neq x$, la trayectoria (x, y, z, w), con $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$, implica que se cumple alguna de las siguientes condiciones: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Por la definición de X y dado que $\{x, w\} \subseteq X$, se tiene que $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Dado que N_0 es independiente en D y $\{x, w\} \subseteq N_0$, se tiene que $(w, x) \notin A(D)$ y $(x, w) \notin A(D)$. Si $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$, entonces existe una $y((S_0 \setminus T) \cup N_0)$-flecha y habremos acabado. Si (z, x) está en $A(D)$, necesariamente $(z, x) \in A(D_1)$, puesto que S_0 es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ de D, $z \in S_0$ y $x \in X$. Luego, el ciclo de longitud tres (x, y, z, x) es tal que $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$; por lo tanto, dado que D tiene la propiedad P_2, $(y, x) \in A(D)$, lo que implica que tenemos una $y((S_0 \setminus T) \cup N_0)$-flecha en D. Si $w = x$, entonces obtenemos el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, por lo probado anteriormente se concluye que existe una $y((S_0 \setminus T) \cup N_0)$-flecha.

Por lo tanto, $(S_0 \setminus T) \cup N_0$ está en D_ς.

Por otro lado, por la definición de X y T, se tiene que $(S_0, ((S_0 \setminus T) \cup N_0)) \in A(D_\varsigma)$, lo cual es una contradicción, ya que por elección de S_0, $d^+_{D_\varsigma}(S_0) = 0$. Por lo tanto, S_0 es un núcleo de D.

□

En el artículo "Union of digraphs which become kernel perfect" de Hortensia Galeana Sánchez y Mucuy-kak Guevara, se asegura que si D_1 es una digráfica transitiva o pretransitiva derecha y D_2 es una digráfica transitiva o pretransitiva izquierda, entonces D satisface la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres. Como resultado de esta afirmación, ellas deducen del teorema 3.0.5 lo siguiente:

Corolario 3.0.6. *Sean D una digráfica, D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D tal que $\{A(D_1), A(D_2)\}$ es una partición de $A(D)$, donde D_1 es transitiva o pretransitiva derecha y D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda. Si D cumple la propiedad P_2, respecto a los ciclos de longitud tres, entonces D es núcleo perfecta.*

Lo que encontramos es que si D_1 es pretransitiva derecha y D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda, la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres, no se cumple. En la figura 3 observamos a una digráfica $D = D_1 \cup D_2$, con $V(D_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A(D_1) = \{(x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_3)\}$, $V(D_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $A(D_2) = \{(x_1, x_2)\}$. Notemos que $\{A(D_1), A(D_2)\}$ es una partición de $A(D)$, donde D_2 es pretransitiva izquierda (en particular D_2 es transitiva) y D_1 es pretransitiva derecha. Luego, se tiene la trayectoria (x_1, x_2, x_3, x_4), con $(x_1, x_2) \in A(D_2)$ y $(x_3, x_4) \in A(D_1)$; pero $\{(x_1, x_3), (x_4, x_3)\} \cap A(D_2) = \emptyset$ y $\{(x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_4, x_1)\} \cap A(D) = \emptyset$. Por lo tanto, D no cumple la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres.

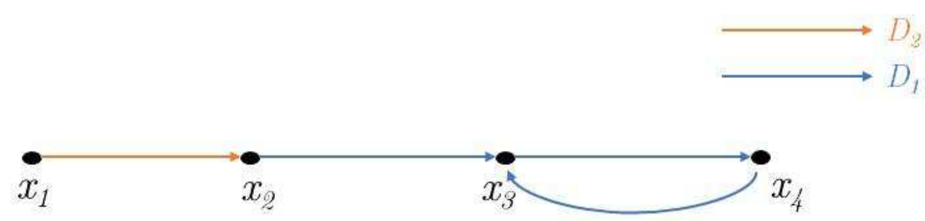


Figura 3.16: $D = D_1 \cup D_2$

Por otro lado, si D_1 es transitiva y D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda, entonces D si satisface la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres. Para probar esto tomamos una trayectoria (x_1, x_2, x_3, x_4) en D, con $(x_1, x_2) \in A(D_2)$ y $(x_3, x_4) \in A(D_1)$ y consideremos dos casos sobre (x_2, x_3):

Caso 1. (x_2, x_3) está en $A(D_2)$.

En este caso, dado que D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda, tenemos que $(x_1, x_3) \in A(D_2)$ o $(x_2, x_1) \in A(D_2)$, lo que implica que $\{(x_1, x_3), (x_4, x_3)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o bien $\{(x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_4, x_1)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Caso 2. (x_2, x_3) está en $A(D_1)$.

En este caso, dado que D_1 es transitiva, tenemos que $(x_2, x_4) \in A(D_1)$, lo que implica que $\{(x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_4, x_1)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, si D_1 es transitiva y D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda, entonces D satisface la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres. Por lo que el corolario 3.0.6 se puede reformular de la siguiente manera:

Sean D una digráfica, D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D tal que $\{A(D_1), A(D_2)\}$ es una partición de $A(D)$, donde D_1 es transitiva y D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda. Si D cumple la propiedad P_2, respecto a los ciclos de longitud tres, entonces D es núcleo perfecta.

Capítulo 4

Digráficas infinitas: ¿Cuándo la unión de una digráfica núcleo perfecta y otra digráfica resulta ser núcleo perfecta?

En el capítulo anterior estudiamos el teorema 3.0.5 del artículo "Union of digraphs which become kernel perfect", de Hortensia Galeana Sánchez y Mucuy-kak Guevara que nos dice lo siguiente:

Sean D una digráfica, D_1 una subdigráfica generadora de D tal que todo ciclo en D_1 tiene al menos una flecha simétrica en D_1 y D_2 una subdigráfica núcleo perfecta de D. Si D tiene la propiedad P_2, entonces D es núcleo perfecta.

Es importante notar que este resultado es para digráficas finitas. A continuación veremos un ejemplo de una digráfica infinita D que cumple con todas las hipótesis del teorema 3.0.5 y sin embargo D no es núcleo perfecta, más aún, D no tiene núcleo.

Sean $D^{\#}$, D_1 y D_2 digráficas tales que $V(D^{\#}) = \mathbb{N}$, $A(D^{\#}) = \{(x, y) : x < y\}$, $V(D_1) = V(D^{\#})$, $A(D_1) = A(D^{\#})$, $V(D_2) = V(D^{\#})$ y $A(D_2) = \emptyset$.

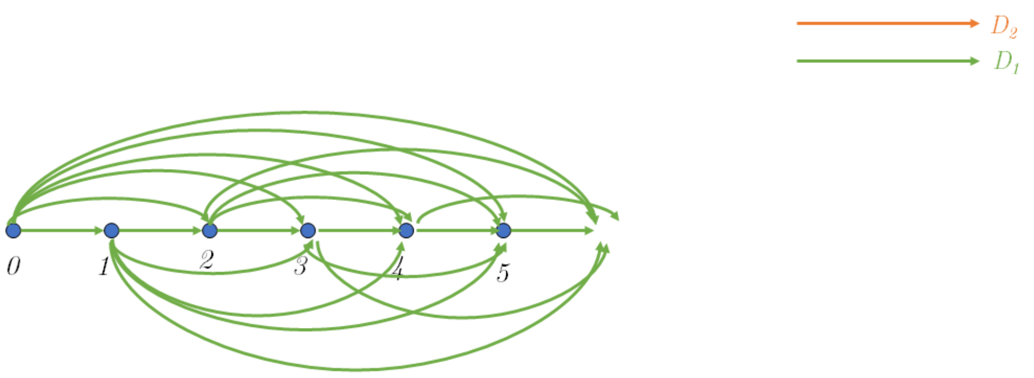


Figura 4.1: Digráfica $D^{\#}$

Notemos que D no tiene ciclos, por lo cual D_1 cumple por vacuidad la propiedad requerida en el teorema 3.0.5. Por otro lado, D_2 es núcleo perfecta pues dada cualquier subdigráfica inducida B de D_2, $V(B)$ es un núcleo de B.

De igual forma podemos ver que D cumple con la propiedad P_2 pues, por la definición de D, no contiene ciclos ni trayectorias del estilo (x_1, x_2, x_3, x_4) con $(x_1, x_2) \in A(D_2)$ y $(x_3, x_4) \in A(D_1)$ (recuerde que en este caso todas las flechas están contenidas en $A(D_1)$).

Luego, D no tiene núcleo ya que cualquier subconjunto de $V(D)$ con más de un vértice no es independiente. Y cualquier subconjunto de $V(D)$ con un vértice n no es absorbente, pues no absorbe al vértice $n+1$. Por lo tanto, D no tiene núcleo.

El hecho anterior motiva este capítulo, donde veremos bajo qué condiciones se cumple que la unión de una digráfica núcleo perfecta con otra digráfica resulta ser núcleo perfecta en términos de digráficas infinitas.

El siguiente teorema es una generalización del teorema 3.0.4 que nos ayudará con el teorema principal de este capítulo, donde afirmamos que si D es una digráfica, posiblemente infinita, que es resultado de la unión de D_1 y D_2, donde $V(D_1) = V(D_2)$, D_1 es una digráfica pretransitiva derecha sin trayectorias infinitas exteriores y D_2 es una digráfica núcleo perfecta de D y además D tiene la propiedad P_2 con la característica extra que siempre que tengamos un ciclo $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$, con $(x_1, x_2) \in A(D_2)$ y $\{(x_2, x_3), (x_3, x_1)\} \subseteq A(D_1)$, tenemos que al menos (x_2, x_3) es simétrica en D o (x_3, x_1) es simétrica en D. Entonces D es núcleo perfecta.

Teorema 4.0.1. *Sean D una digráfica, posiblemente infinita, D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D núcleo perfectas. Si D tiene la propiedad P_1, entonces toda subdigráfica inducida H de D tiene un seminúcleo no vacío módulo $A(D_1) \cap A(H)$.*

Demostración. Sea H una subdigráfica inducida de D. Como $D_2[V(H)]$ es una subdigráfica inducida de D_2 y D_2 es núcleo perfecta, entonces $D_2[V(H)]$ tiene un núcleo K. Si $A(D_1) \cap A(D[K]) = \emptyset$, entonces K es un conjunto independiente en D pues resulta que en K no hay flechas de D_1 ni de D_2 (porque K es un conjunto independiente en D_2). Por otro lado, K es un conjunto absorbente ya que D_2 es una subdigráfica generadora de D. Por lo tanto, K es un núcleo de H, lo que implica que en particular, K es un seminúcleo no vacío módulo $A(D_1) \cap A(H)$.

Supongamos que $A(D_1) \cap A(D[K]) \neq \emptyset$. Entonces $T = \{u \in K : \textit{ existe } uK-flecha\}$ es un conjunto no vacío y $K \setminus T$ es un conjunto independiente en H por definición de T. Sea $\tau = \{v \in T : \textit{para toda } u \textit{ en } K \setminus T, (v, u) \notin A(D)\}$. Consideremos dos casos sobre τ.

Caso 1. $\tau = \emptyset$.

En este caso afirmamos que $K \setminus T$ es un seminúcleo módulo $A(H) \cap A(D_1)$ de H.

Por la definición de T, se tiene que $K \setminus T$ es un conjunto independiente en D, en particular en H. Por lo tanto, solo resta demostrar que si existe una $(K \setminus T)y$-flecha en

$A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))$, para algún y en $V(H) \setminus (K \setminus T)$, entonces existe una $y(K \setminus T)$-flecha en $A(H)$.

Sea y en $V(H) \setminus (K \setminus T)$ tal que existe una $(K \setminus T)y$-flecha en $A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))$. Sea x en $K \setminus T$ tal que $(x, y) \in A(D_2)$ (porque $(A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))) \subseteq A(D_2)$). Note que las flechas entre los vértices de K están contenidas en D_1, pues K es un conjunto independiente en $D_2[V(H)]$.

Notemos que y no puede estar en T; ya que de ser así, la existencia de (x, y) en $A(D_2)$ implica que x está en T, contradiciendo la elección de x. Por lo tanto, $y \in V(H) \setminus K$.

Como K es núcleo de $D_2[V(H)]$, existe una yK-flecha en $D_2[V(H)]$, digamos (y, z).

Si $z \in (K \setminus T)$, entonces acabamos, ver figura 4.2.

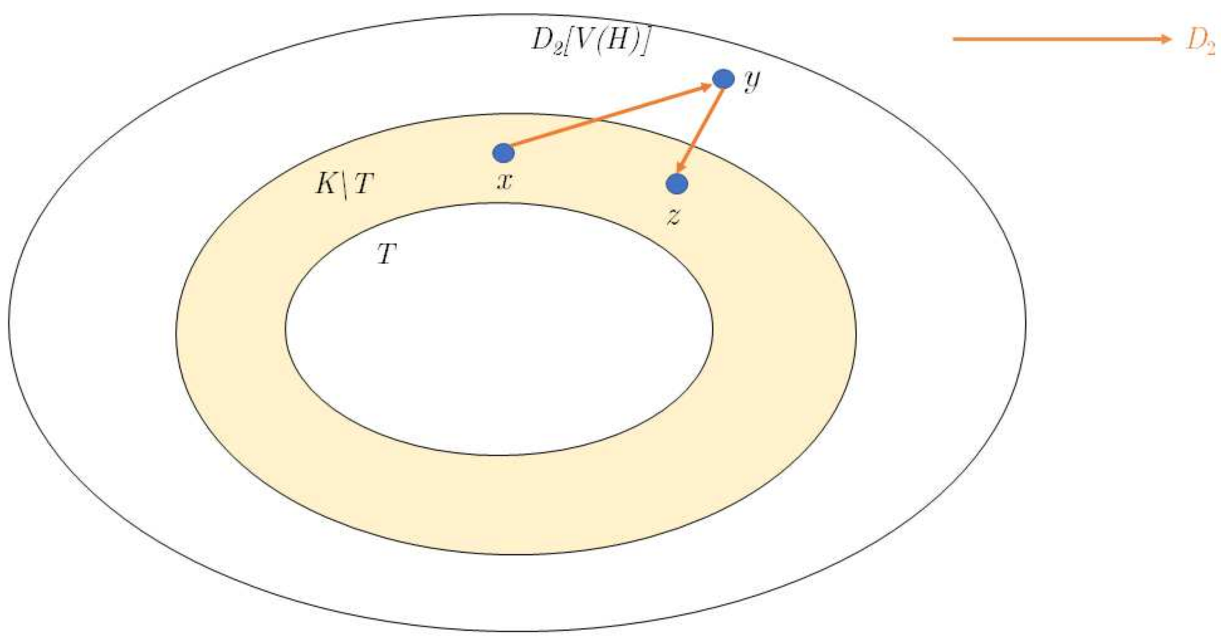


Figura 4.2: $z \in (K \setminus T)$

De otra manera, $z \in T$ implica que existe una zw-flecha, con $w \in K \setminus T$ (porque $\tau = \emptyset$ y por definición de T). Dado que $\{z, w\} \subseteq K$ tenemos que $(z, w) \in A(D_1)$. Si $w \neq x$, entonces la trayectoria (x, y, z, w), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$, por la propiedad P_1, satisface una de las siguientes condiciones: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Como las flechas entre los vértices de K están en D_1 y $\{x, z, w\} \subseteq K$, entonces (x, z) y (w, z) no están en $A(D_2)$. Luego, por la definición de T, y dado que $\{x, w\} \subseteq K \setminus T$, tenemos que (x, w) y (w, x) no están en $A(D)$. Si (y, x) o (y, w) están en $A(D)$, entonces existe una $y(K \setminus T)$-flecha y habremos acabado.

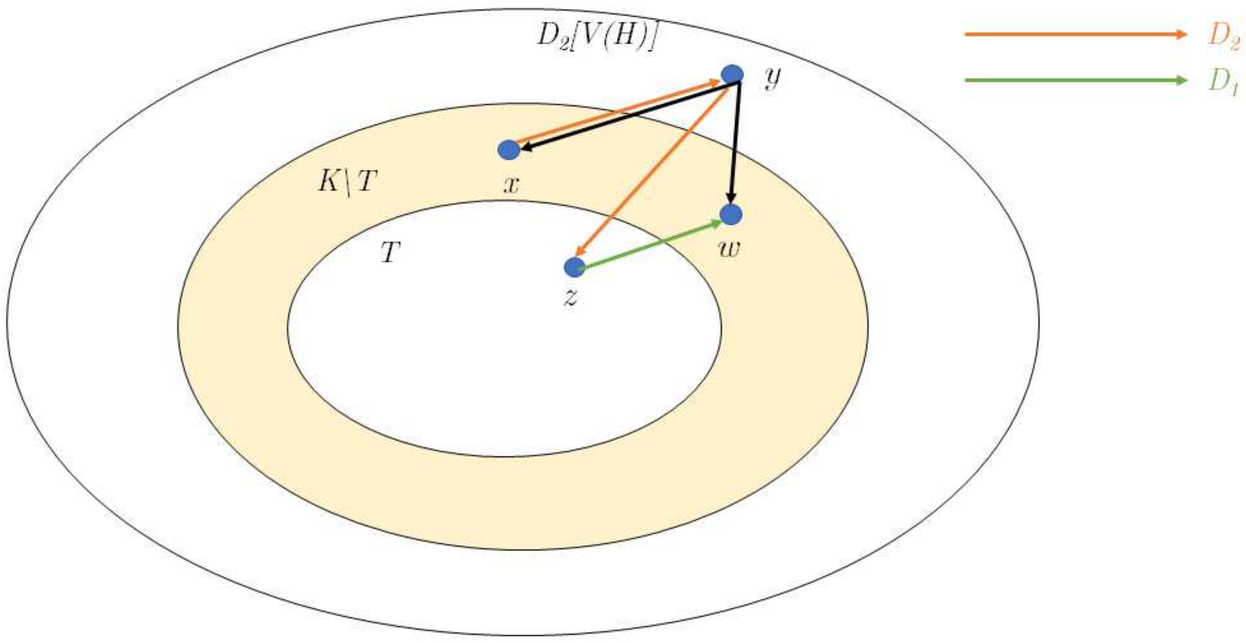


Figura 4.3: $z \in T$, $w \neq x$ y (y, x) o (y, w) en $A(D)$

Si (z, x) está en $A(D)$, entonces encontramos un ciclo de longitud tres, a saber (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, por lo que la propiedad P_1 implica que $(y, x) \in A(D)$ y habremos concluido.

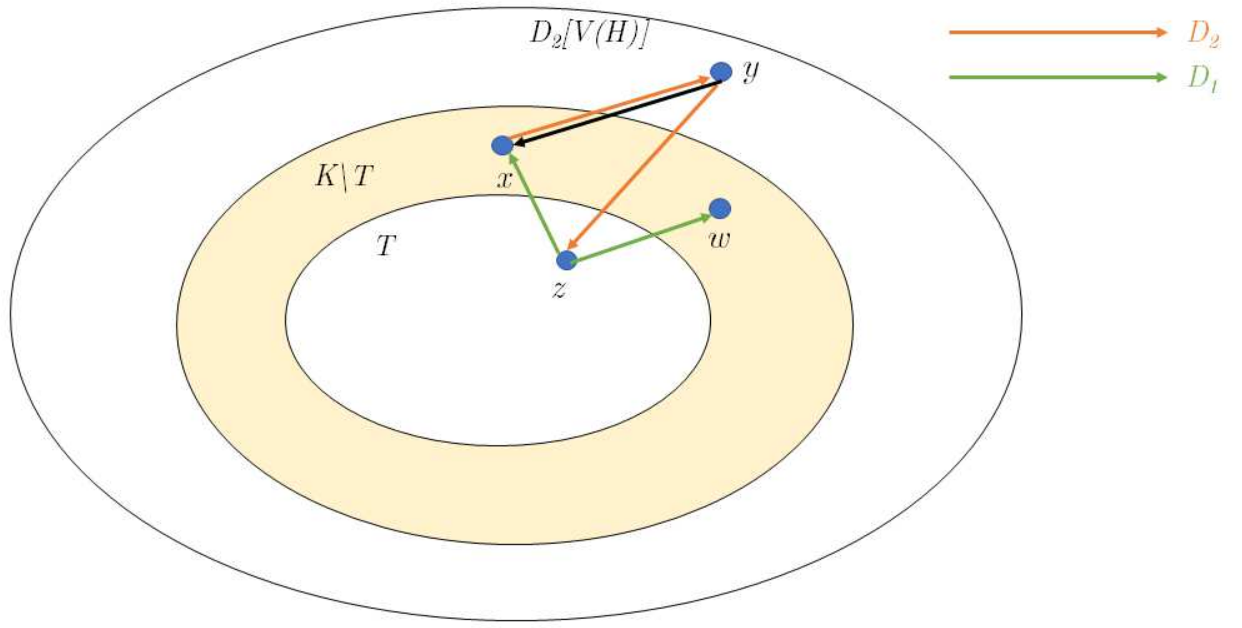


Figura 4.4: $z \in T$, $w \neq x$ y (z, x) en $A(D)$

Si $w = x$, entonces ya demostramos que la existencia del ciclo de longitud tres (x, y, z, x) implica que $(y, x) \in A(D)$.

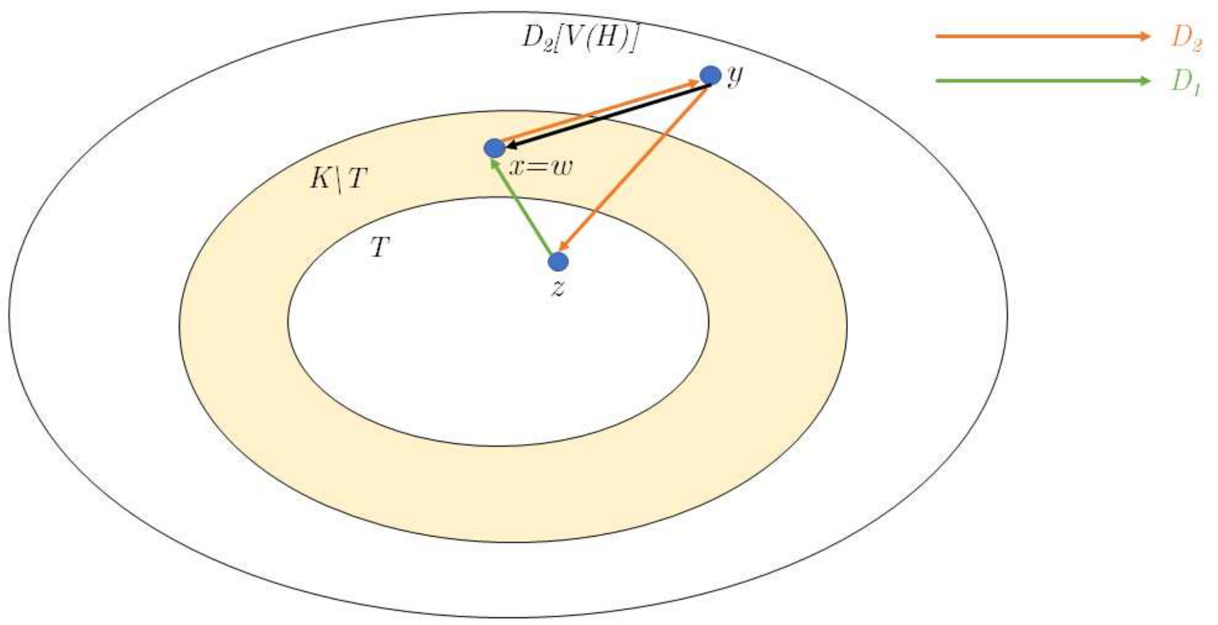


Figura 4.5: $z \in T$ y $w = x$

Caso 2.$\tau \neq \emptyset$.

Observemos que como D_1 es núcleo perfecta y $D[\tau]$ es una subdigráfica inducida en D_1 (dado que $\tau \subseteq K$ y K es un conjunto independiente en $D_2[V(H)]$), se tiene que $D[\tau]$ tiene un núcleo N_0. Afirmamos que $N_0 \cup (K \setminus T)$ es un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(H)$ de H.

Veamos que $N_0 \cup (K \setminus T)$ es un conjunto independiente en H. N_0 es independiente en H pues N_0 es núcleo de $D[\tau]$. Por otro lado, recordemos que $(K \setminus T)$ es independiente en H. Por lo tanto, solo resta demostrar que no existen $N_0(K \setminus T)$-flechas ni $(K \setminus T)N_0$-flechas en H. Por la definición de τ, no existen $N_0(K \setminus T)$-flechas en H. Por la definición de T, no existen $(K \setminus T)N_0$-flechas en H. Por lo tanto, $N_0 \cup (K \setminus T)$ es un conjunto independiente en H.

Ahora veamos que si existe una $(N_0 \cup (K \setminus T))y$-flecha en $A(H) \setminus (A(H) \cap A(D_1))$, para algún y en $V(H) \setminus (N_0 \cup (K \setminus T))$, entonces existe una $y(N_0 \cup (K \setminus T))$-flecha en $A(H)$. Sea (x, y) en $A(D_2)$ con $x \in N_0 \cup (K \setminus T)$ y $y \in V(H) \setminus (N_0 \cup (K \setminus T))$. Observemos que como N_0 y $K \setminus T$ son subconjuntos de K, entonces $x \in K$, lo que implica que y está en $V(H) \setminus K$ ya que todas las flechas entre los vértices de K están en D_1. Luego, como K es núcleo de $D_2[V(H)]$, existe una yK-flecha, digamos (y, z), en D_2.
Si z está en $N_0 \cup (K \setminus T)$, entonces acabamos. Si z está en $K \setminus (N_0 \cup (K \setminus T))$, entonces consideremos dos casos sobre x.

Caso 2.1 x está en $K \setminus T$.

Si $z \in \tau \setminus N_0$, entonces, dado que N_0 es núcleo de $D[\tau]$, existe un vértice w en N_0 tal que $(z, w) \in A(D_1)$. Como (x, y, z, w) es una trayectoria con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$, dado que D cumple la propiedad P_1, una de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.
Como K es un conjunto independiente en D_2 y $\{x, z, w\} \subseteq K$, entonces $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Como x está en $K \setminus T$, entonces por la definición de T, $(x, w) \notin A(D)$. Por otro lado, dado que $\{w, z\} \subseteq \tau$, se sigue de la definición de τ que $(w, x) \notin A(D)$ y $(z, x) \notin A(D)$. Por lo tanto, (y, x) o (y, w) están en $A(D)$ y en ambos casos habremos acabado.

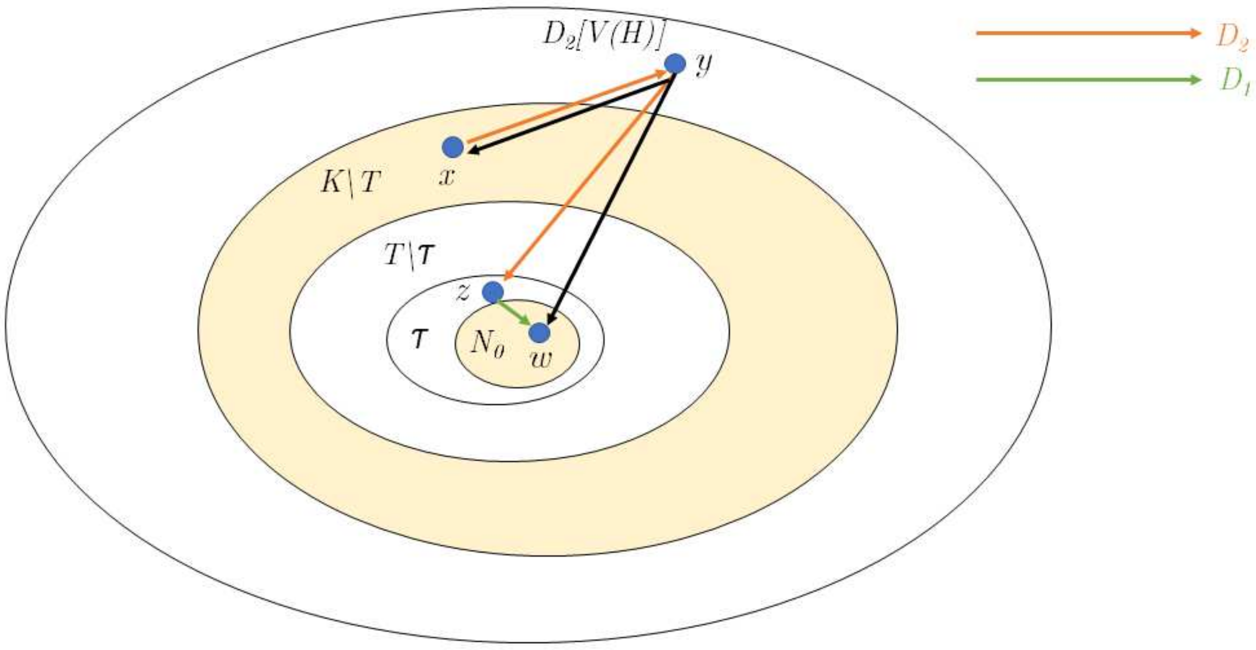


Figura 4.6: x en $K \setminus T$, $z \in \tau \setminus N_0$ y (y, x) o (y, w) en $A(D)$

Si $z \in T \setminus \tau$, entonces existe un vértice w en $K \setminus T$ tal que $(z, w) \in A(D_1)$. Si $w \neq x$, entonces (x, y, z, w) es una trayectoria con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$. Se sigue de la propiedad P_1 que dicha trayectoria cumple una de las siguientes condiciones: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Dado que $\{x, z, w\} \subseteq K$ y K es un conjunto independiente en $D_2[V(H)]$ se tiene que $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Dado que $\{x, w\} \subseteq K \setminus T$, por definición de T, tenemos que $(x, w) \notin A(D)$ y $(w, x) \notin A(D)$. Como $\{x, w\} \subseteq K \setminus T$, entonces si $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$, finalizamos.

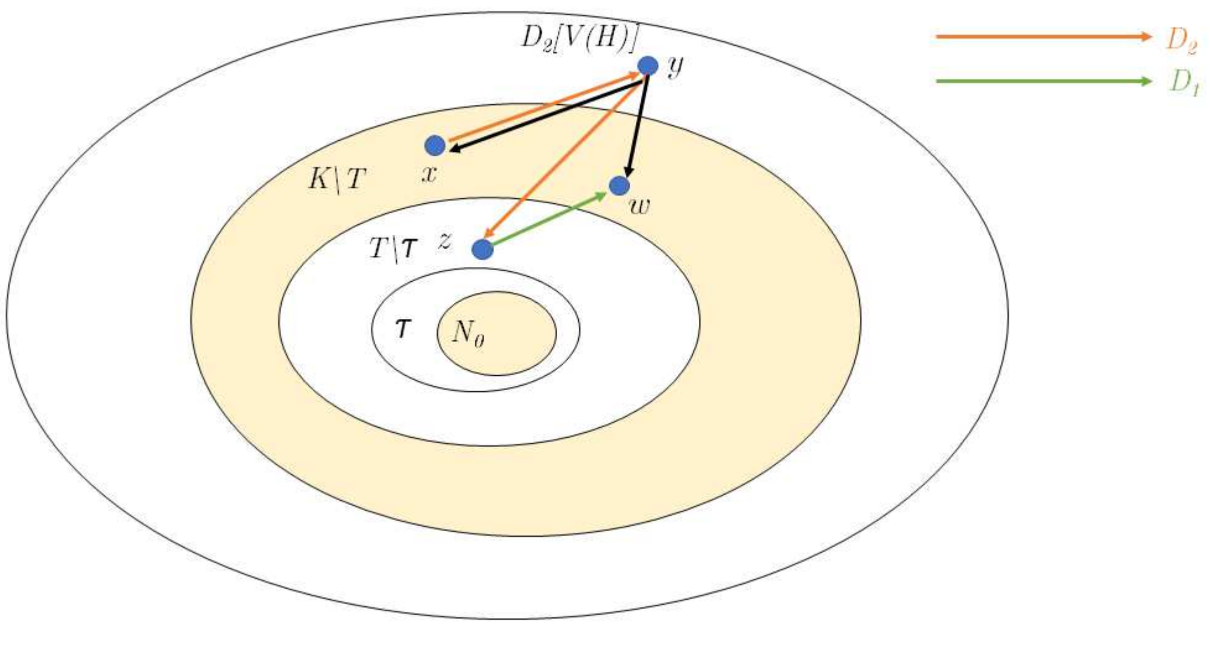


Figura 4.7: $z \in T \setminus \tau$, $w \neq x$ y $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$

Si (z, x) está en $A(D)$, entonces encontramos un ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, lo que implica que $(y, x) \in A(D)$ y habremos acabado.

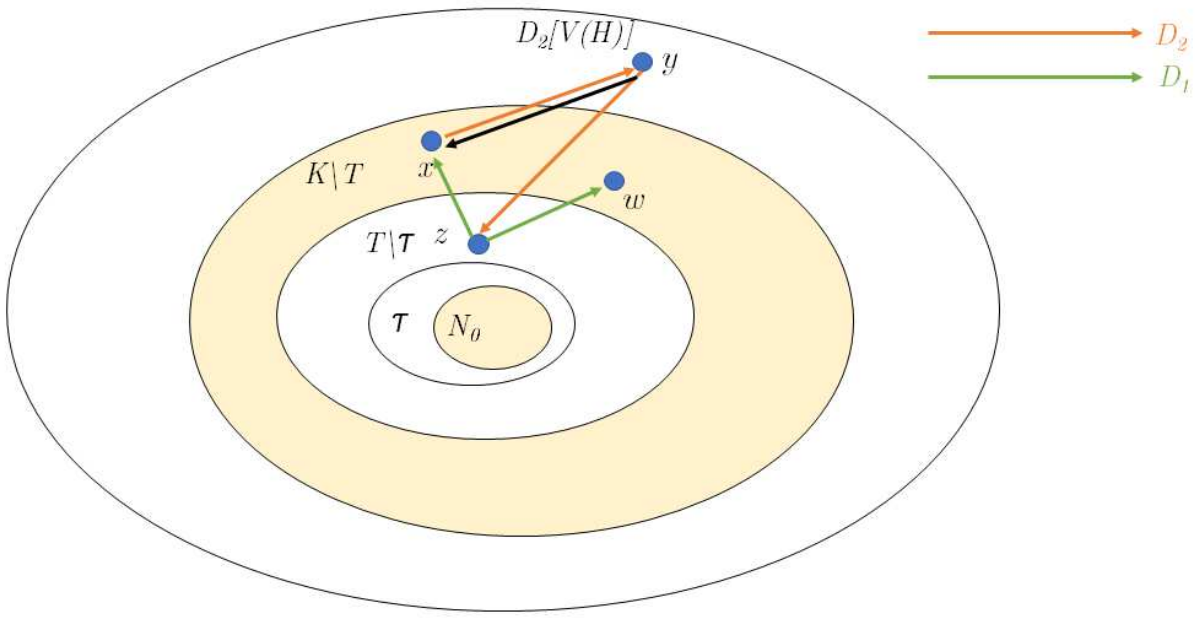


Figura 4.8: $z \in T \setminus \tau$, $w \neq x$ y $(z, x) \in A(D)$

Si $w = x$, entonces ya demostramos que para el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, se cumple que $(y, x) \in A(D)$, concluyendo el caso.

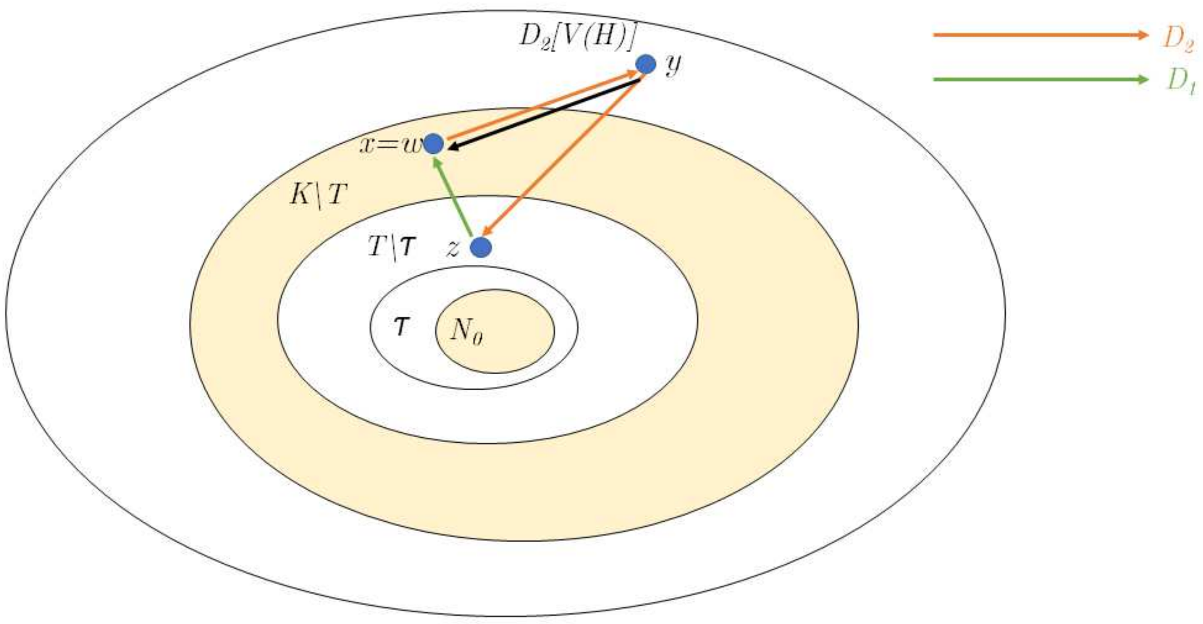


Figura 4.9: $z \in T \setminus \tau$, $w = x$ y $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$

Caso 2.2 $x \in N_0$.

Si $z \in T \setminus \tau$, entonces por definición de τ, existe w en $K \setminus T$ tal que $(z, w) \in A(D_1)$. Luego (x, y, z, w) es una trayectoria de longitud tres con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$. Dado que D cumple la propiedad P_1, una de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Como K es un conjunto independiente en D_2 y $\{x, z, w\} \subseteq K$, entonces $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Puesto que $x \in \tau$ y $w \notin \tau$, entonces se sigue de la definición de τ que $(x, w) \notin A(D)$. Por otro lado, dado que w está en $K \setminus T$, se sigue de la definición de T que $(w, x) \notin A(D)$. Si (y, x) o (y, w) están en $A(D)$, habremos acabado en ambos casos ya que $x \in N_0$ y $w \in K \setminus T$.

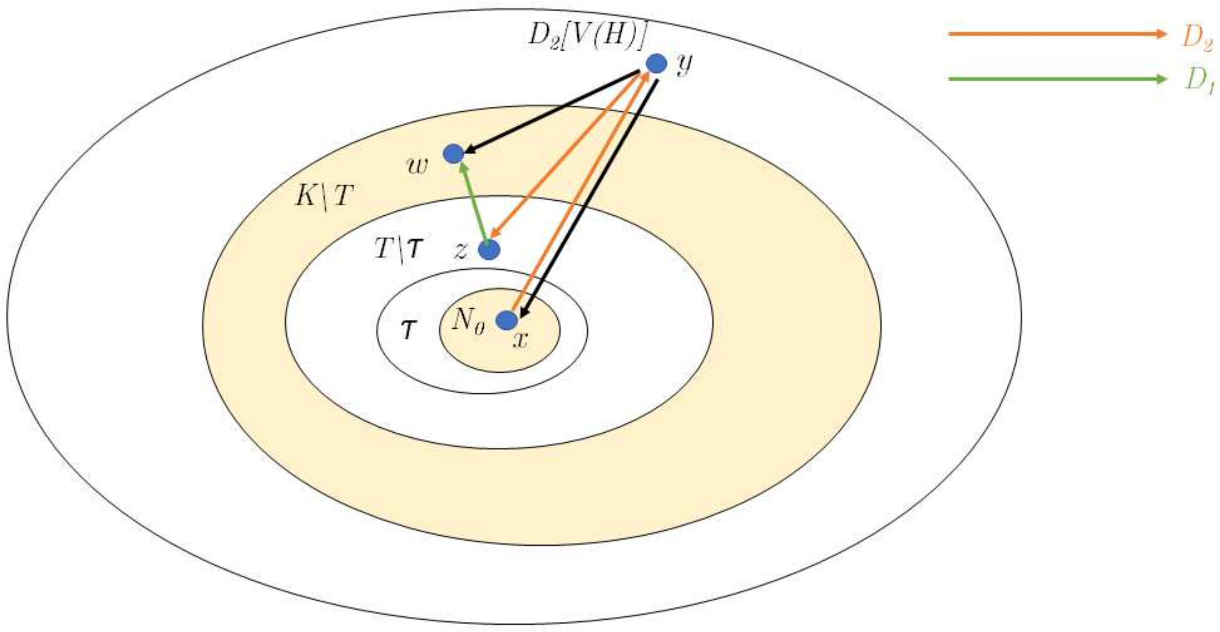


Figura 4.10: $z \in T \setminus \tau$ y $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$

Si (z, x) está en $A(D)$, entonces encontramos el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, lo que implica que $(y, x) \in A(D)$, concluyendo.

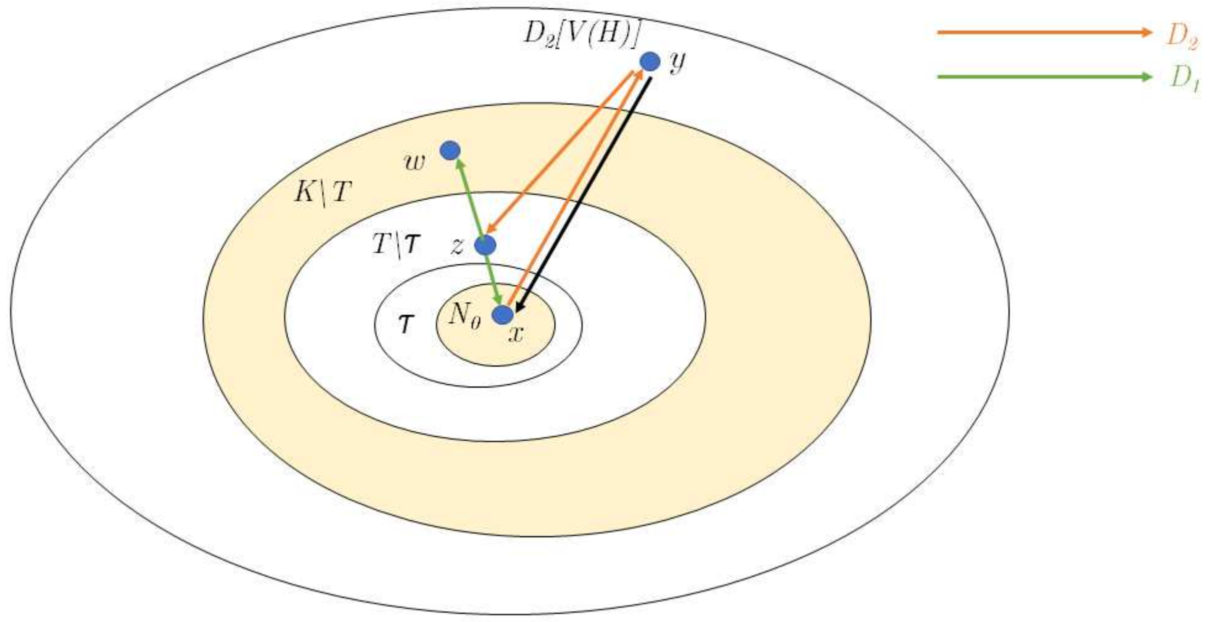


Figura 4.11: $z \in T \setminus \tau$ y (z, x) en $A(D)$

Si z está en $\tau \setminus N_0$, entonces, dado que N_0 es núcleo de $D[\tau]$, existe w en N_0, tal que (z, w) está en $A(D_1)$. Si $w \neq x$, entonces encontramos la trayectoria (x, y, z, w), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$. Dado que D cumple la propiedad P_1 tenemos que alguna de las siguientes condiciones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Puesto que $\{x, z, w\} \subseteq K$, se tiene que $(x, z) \notin A(D_2)$ y $(w, z) \notin A(D_2)$. Dado que N_0 es independiente en H y $\{x, w\} \subseteq N_0$, se tiene que $(x, w) \notin A(D)$ y $(w, x) \notin A(D)$. Por otro lado, si (y, x) o (y, w) están en $A(D)$, entonces habremos acabado.

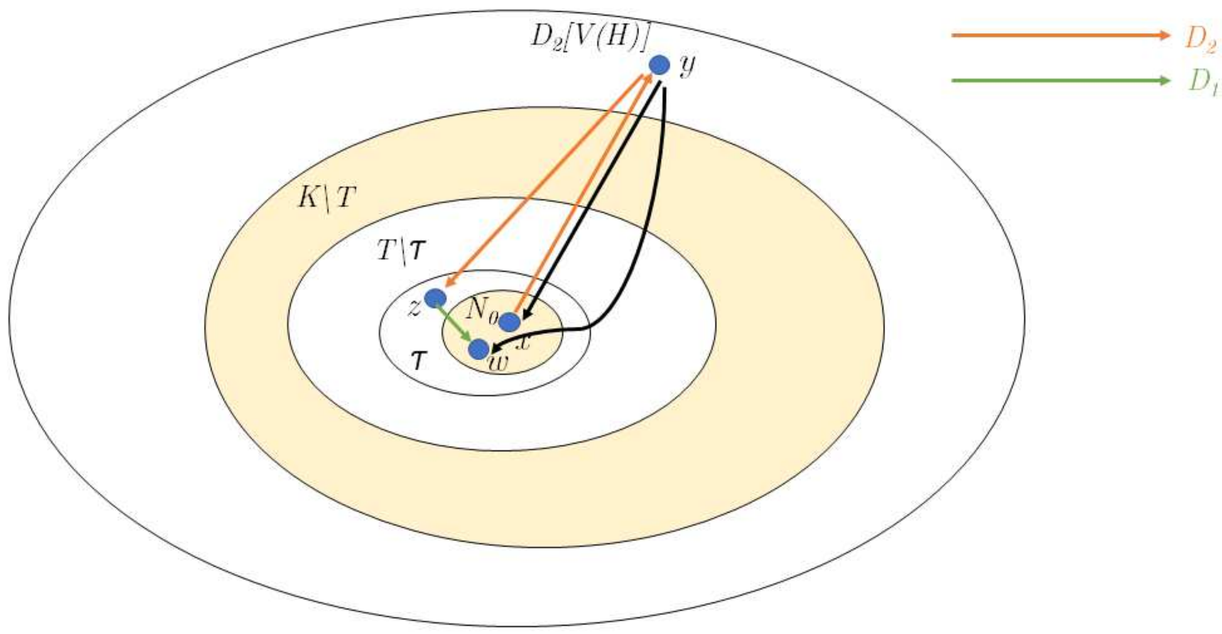


Figura 4.12: $z \in \tau \setminus N_0$, $w \neq x$ y (y, x) o (y, w) en $A(D)$

Si $(z, x) \in A(D)$, entonces encontramos el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$. Por lo tanto, se sigue de la propiedad P_1 que $(y, x) \in A(D)$ y habremos acabado.

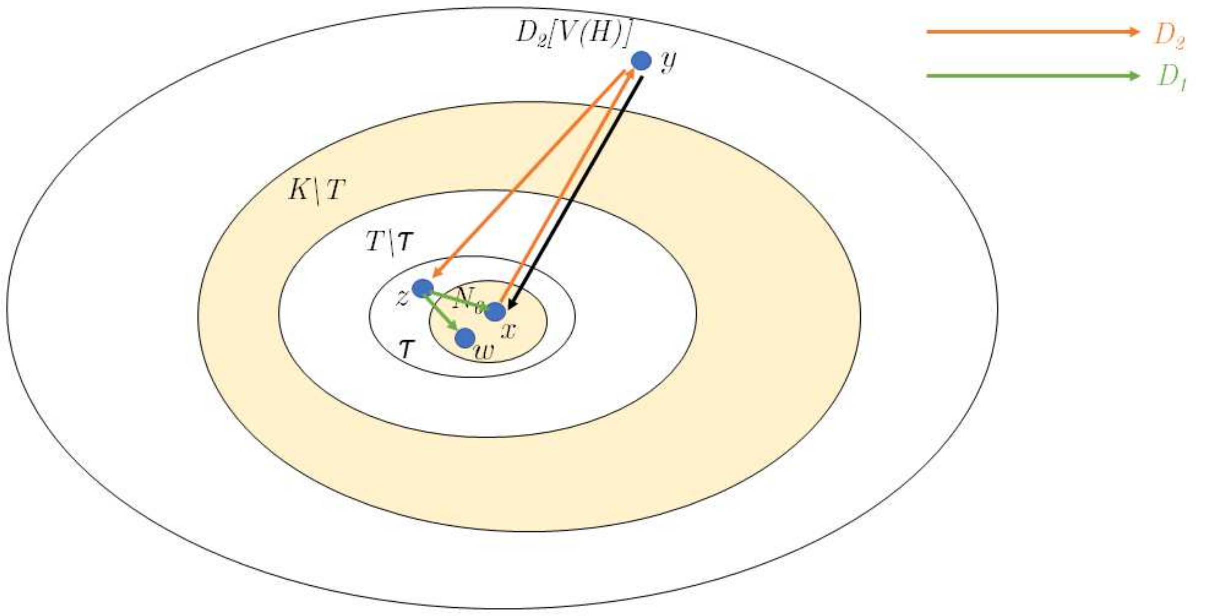


Figura 4.13: $z \in \tau \setminus N_0$, $w \neq x$ y (z, x) en $A(D)$

Si $w = x$, entonces ya demostramos que para el ciclo de longitud tres (x, y, z, x), con $\{(x, y), (y, z)\} \subseteq A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, se cumple que $(y, x) \in A(D)$ y habremos acabado.

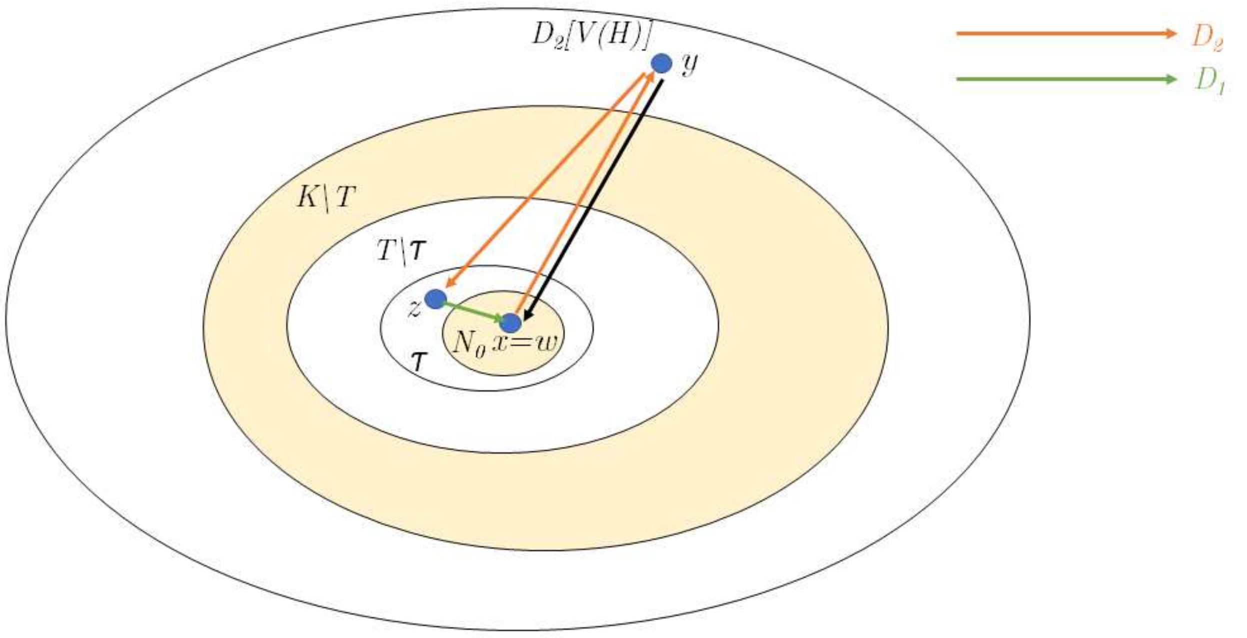


Figura 4.14: $z \in \tau \setminus N_0$ y $w = x$

De esta manera hemos probado que $N_0 \cup (K \setminus T)$ es un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(H)$ de H.

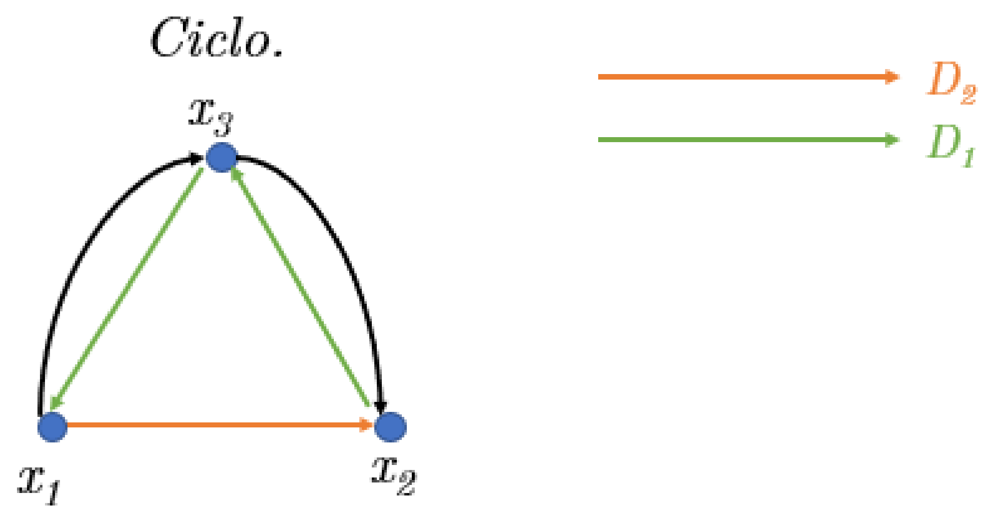
□

Ya demostrado este teorema podemos avanzar con nuestro teorema principal, para el cual definiremos la siguiente propiedad que es una extensión de la propiedad P_2 utilizada en el capítulo anterior.

Diremos que una digráfica D tiene la **propiedad $\boldsymbol{P_3}$** siempre que:

1. D cumple con la propiedad P_2.

2. Si siempre que exista un ciclo $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$, con $(x_1, x_2) \in A(D_2)$ y $\{(x_2, x_3), (x_3, x_1)\} \subseteq A(D_1)$, tenemos que al menos (x_2, x_3) es simétrica en D o (x_3, x_1) es simétrica en D.



Luego, el teorema principal de esta tesis nos dice lo siguiente:

Teorema 4.0.2. *Sean D una digráfica, posiblemente infinita, D_1 una subdigráfica generadora pretransitiva derecha de D sin trayectorias infinitas exteriores y D_2 una subdigráfica generadora núcleo perfecta de D tal que $D = D_1 \cup D_2$. Si D tiene la propiedad P_3, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Para demostrar que D es núcleo perfecta procederemos a definir un orden parcial sobre la familia de todos los subconjuntos independientes de $V(D)$ para luego concluir, gracias al lema de Zorn, que el conjunto de todos los seminúcleos no vacíos módulo $A(D_1)$ tiene un elemento maximal, el cual es nuestro candidato a núcleo de D.

Para dos subconjuntos independientes S_1, S_2 de $V(D)$ escribimos $S_1 \leq S_2$ si para todo s_1 en S_1 existe un s_2 en S_2 tal que $s_1 = s_2$ o (s_1, s_2) está en $A(D_1)$ y (s_2, s_1) no está en $A(D)$. En particular, $S \subseteq T$ implica $S \leq T$.

Afirmación 1. $\leq$ es un orden parcial sobre la familia de todos los subconjuntos independientes de $V(D)$.

Reflexividad: Es claro que $S_1 \leq S_1$, pues $S_1 \subseteq S_1$.

Antisimetría: Supongamos que $S_1 \leq S_2$ y $S_2 \leq S_1$. Veamos que $S_1 = S_2$.

Primero veremos que $S_1 \subseteq S_2$. Sea s_1 en S_1, demostraremos que $s_1 \in S_2$. Supongamos, para llegar a una contradicción que $s_1 \notin S_2$. Como $S_1 \leq S_2$ y $s_1 \notin S_2$, entonces para s_1 existe un s_2 en S_2 tal que (s_1, s_2) está en $A(D_1)$ y (s_2, s_1) no está en $A(D)$. Dado que $S_2 \leq S_1$, existe un s_1' en S_1 tal que $s_2 = s_1'$ o (s_2, s_1') está en $A(D_1)$ y (s_1', s_2) no está en

$A(D)$. Notemos que $s_1' \neq s_1$ pues $(s_2, s_1') \in A(D_1)$ y $(s_2, s_1) \notin A(D)$. Como (s_1, s_2, s_1') es una sucesión de vértices que cumple las hipótesis del lema 0.0.4, en particular tenemos que $(s_1, s_1') \in A(D_1)$, lo cual no puede ser pues S_1 es independiente en D. Por lo tanto, concluimos que $s_1 \in S_2$, demostrando que $S_1 \subseteq S_2$. La prueba para ver que $S_2 \subseteq S_1$ es análoga. Luego $S_1 = S_2$ verificando la antisimetría.

A continuación se presenta una afirmación que nos sera de utilidad para demostrar la transitividad del orden propuesto.

Afirmación 0. Si (x_1, x_2, x_3) es una trayectoria tal que $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\} \subseteq A(D_1)$ y $\{(x_2, x_1), (x_3, x_2)\} \cap A(D) = \emptyset$, entonces $(x_1, x_3) \in A(D_1)$ y $(x_3, x_1) \notin A(D)$.

Dado que la sucesión (x_1, x_2, x_3) de vértices cumple las hipótesis del lema 0.0.4, tenemos que (x_1, x_3) está en $A(D_1)$ y (x_3, x_1) no está en $A(D_1)$. También notemos que (x_3, x_1) no está en $A(D_2)$, pues de ser así, el ciclo $C = (x_3, x_1, x_2, x_3)$, con $(x_3, x_1) \in A(D_2)$ y $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\} \subseteq A(D_1)$ implica, por la propiedad P_3, la existencia de al menos dos flechas simétricas en C, pero sabemos que ni (x_2, x_1) ni (x_3, x_2) están en $A(D)$. Por lo tanto, $(x_3, x_1) \notin A(D)$.

Transitividad: Supongamos que $S_1 \leq S_2$ y $S_2 \leq S_3$. Veamos que $S_1 \leq S_3$.

Sea s_1 en S_1. Demostraremos que existe s_3 en S_3 tal que $s_1 = s_3$ o (s_1, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_1) no está en $A(D)$. Como $S_1 \leq S_2$, entonces para s_1 existe s_2 en S_2 tal que $s_1 = s_2$ o (s_1, s_2) está en $A(D_1)$ y (s_2, s_1) no está en $A(D)$. Por otro lado, dado que $S_2 \leq S_3$ para s_2 existe s_3 en S_3 tal que $s_2 = s_3$ o (s_2, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_2) no está en $A(D)$. Si $s_1 = s_2$, entonces habremos acabado ya que $s_1 = s_3$ o (s_1, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_1) no está en $A(D)$. Si (s_1, s_2) está en $A(D_1)$ y (s_2, s_1) no está en $A(D)$, consideremos dos casos: si $s_2 = s_3$, entonces habremos acabado, ya que (s_1, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_1) no está en $A(D)$. Si (s_2, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_2) no está en $A(D)$, entonces se sigue de la afirmación 0, para la trayectoria (s_1, s_2, s_3), que (s_1, s_3) está en $A(D_1$ y (s_3, s_1) no está en $A(D)$.

Por lo tanto, ya encontramos un elemento s_3 de S_3 tal que $s_1 = s_3$ o (s_1, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_1) no está en $A(D)$.

Por lo tanto, $S_1 \leq S_3$, verificando la transitividad.

Por lo que $\leq$, efectivamente, es un orden parcial sobre la familia de todos los subconjuntos independientes de $V(D)$.

Ahora sea $\varsigma = \{S : S \textit{ es un } \text{seminúcleo } \textit{no} \text{ vacío módulo } A(D_1)\}$ que sabemos que es diferente del vacío, por el teorema 4.0.1 (tomando $H = D$). Además, por la definición de $\leq$, $(\varsigma, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Afirmación 2. ς tiene un elemento maximal.

Para esto veamos que toda cadena en $(\varsigma, \leq)$ (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior en $(\varsigma, \leq)$. Sea ζ una cadena en $(\varsigma, \leq)$, definimos:

$$N_{\leq}(S) = \{T \in \zeta : S \leq T\} \text{ y}$$
$$S^{\infty} = \{s \in \bigcup \zeta : s \in T \textit{ para toda } T \textit{ en } N_{\leq}(S) \textit{ y para } \text{algún } S \textit{ en } \zeta\},$$

donde S^{∞} es nuestro candidato a cota superior perteneciente a ς.
Afirmación 2.1 S^{∞} es no vacío.

Supongamos, para llegar a una contradicción que $S^{\infty} = \emptyset$.

Sean S_0 en ζ y s_0 en S_0. Como $s_0 \notin S^{\infty}$, existe un S_1 en ζ tal que $S_1 \in N_{\leq}(S)$ y $s_0 \notin S_1$. Por lo tanto, de la definición de $\leq$, debe de haber un s_1 en S_1 tal que (s_0, s_1) está en $A(D_1)$ y (s_1, s_0) no está en $A(D)$. Dado que $s_1 \notin S^{\infty}$, existe un S_2 en ζ tal que $S_2 \in N_{\leq}(S_1)$ y $s_1 \notin S_2$. Por lo tanto, debe de haber un s_2 en S_2 tal que (s_1, s_2) está en $A(D_1)$ y (s_2, s_1) no está en $A(D)$. Como $s_2 \notin S^{\infty}$, existe un S_3 en ζ tal que $S_3 \in N_{\leq}(S_2)$ y $s_2 \notin S_3$. Por lo tanto, debe de haber un s_3 en S_3 tal que (s_2, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_2) no está en $A(D)$. De esta forma, para cada n en $\mathbb{N}$, dado un S_n en ζ y s_n tal que $s_n \in S_n$ existe un S_{n+1} en $N_{\leq}(S_n)$ tal que $s_n \notin S_{n+1}$, por lo que existe un s_{n+1} en S_{n+1} tal que $(s_n, s_{n+1}) \in A(D_1)$ y $(s_{n+1}, s_n) \notin A(D)$. Luego, la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no puede ser una trayectoria infinita exterior en D_1 por hipótesis. Es decir, existen un s_i y s_j, con $i < j$, tales que $s_i = s_j$. Por lo tanto, como la sucesión $(s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s_j)$ cumple las hipótesis del lema 0.0.4, ésta debería ser una trayectoria, lo cual no puede ser pues $s_i = s_j$. Por lo tanto, $S^{\infty} \neq \emptyset$.

Afirmación 2.2. S^{∞} es un conjunto independiente.

Sean s y t en S^{∞}. Supongamos que S y T son elementos de ζ tales que $s \in S$, $t \in T$, $s \in U$ para toda U en $N_{\leq}(S)$ y $t \in W$ para toda W en $N_{\leq}(T)$. Por otro lado, dado que ζ es una cadena, supongamos sin pérdida de generalidad que $S \leq T$, lo que implica que $T \in N_{\leq}(S)$. Entonces $s \in T$, y como T es independiente no existen flechas entre s y t. Así S^{∞} es independiente.

Afirmación 2.3 S^{∞} es cota superior de ς.

Demostraremos que $S^{\infty} \geq S$ para todo S en ζ. Sean S en ζ y s en S, veamos que para s existe un vértice s^{∞} en S^{∞} tal que $s = s^{\infty}$ o $(s, s^{\infty}) \in A(D_1)$ y $(s^{\infty}, s) \notin A(D)$. Si $s \in S^{\infty}$, entonces terminamos. Si $s \notin S^{\infty}$, existe un S_1 en ζ tal que $S_1 \geq S$ y $s \notin S_1$. Por lo tanto, de la definición de $\leq$, debe de haber un s_1 en S_1 tal que (s, s_1) está en $A(D_1)$ y (s_1, s) no está en $A(D)$. Si $s_1 \in S^{\infty}$, entonces finalizamos. Si $s_1 \notin S^{\infty}$, existe un S_2 en ζ tal que $S_2 \geq S_1$ y $s_1 \notin S_2$. Por lo tanto, debe de haber un s_2 en S_2 tal que (s_1, s_2) está en $A(D_1)$ y (s_2, s_1) no está en $A(D)$. Notemos que $(s, s_2) \in A(D_1)$ y $(s_2, s) \notin A(D)$, esto por la afirmación 0 aplicada a la trayectoria (s, s_1, s_2). Si $s_2 \in S^{\infty}$, terminamos. Si $s_2 \notin S^{\infty}$,entonces existe un S_3 en ζ tal que $S_3 \geq S_2$ y $s_2 \notin S_3$. Por lo tanto, existe un s_3 en S_3 tal que (s_2, s_3) está en $A(D_1)$ y (s_3, s_2) no está en $A(D)$. Además, $(s, s_3) \in A(D_1)$ y $(s_3, s) \notin A(D)$, aplicando la afirmación 0 en la trayectoria (s, s_2, s_3). Siguiendo con este procedimiento, dado un S_n en ζ y s_n en S_n tal que $s_n \notin S^\infty$, tenemos que debe existir un S_{n+1} en $N_{\leq}(S_n)$ tal que $s_n \notin S_{n+1}$ por lo que, por la defínción de $\leq$, existe un s_{n+1} en S_{n+1} tal que $(s_n, s_{n+1}) \in A(D_1)$ y $(s_{n+1}, s_n) \notin A(D)$ y además $(s, s_{n+1}) \in A(D_1)$ y $(s_{n+1}, s) \notin A(D)$, aplicando la afirmación 0 a la sucesión (s, s_n, s_{n+1}). Luego, debe existir un S_m en ζ y un s_m en S_m tal que $(s, s_m) \in A(D_1)$ y $(s_m, s) \notin A(D)$, con $s_m \in S^\infty$. De otra forma podríamos encontrar una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(s_n, s_{n+1}) \in A(D_1)$ y $(s_{n+1}, s_n) \notin A(D)$, la cual no puede ser una trayectoria infinita exterior en D_1 por hipótesis. Es decir, existen un s_i y s_j, con $i < j$, tales que $s_i = s_j$. Por lo tanto, como la sucesión $(s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s_j)$ cumple las hipótesis del lema 0.0.4, ésta debería ser una trayectoria, lo cual es una contradicción pues $s_i = s_j$. Por lo tanto, llegamos a un S_m en ζ y un s_m en S_m tal que (s, s_m) está en $A(D_1)$, (s_m, s) no está en $A(D)$ y $s_m \in S^\infty$. Por lo que $S^\infty \geq S$ para todo S en ζ.

Afirmación 2.4. $S^\infty \in \varsigma$.

Veamos que S^∞ es un seminúcleo módulo $A(D_1)$. Supongamos que existen s en S^∞ y y en $V(D) \setminus S^\infty$ tales que (s, y) está en $A(D_2)$, demostraremos que existe una yS^∞-flecha en $A(D)$. Sea S en ζ tal que $s \in S$. Luego, por ser S un seminúcleo módulo $A(D_1)$, hay un t en S tal que (y, t) está en $A(D)$. Si $t \in S^\infty$, entonces finalizamos. Si $t \notin S^\infty$, entonces en particular $t \neq s$. Además, dado que $S^\infty \geq S$ existe un $s_1 \in S^\infty$ tal que (t, s_1) está en $A(D_1)$ y (s_1, t) no está en $A(D)$.

Luego, dado que (s, y, t, s_1) es una trayectoria tal que $(s, y) \in A(D_2)$ y $(t, s_1) \in A(D_1)$ y D tiene la propiedad P_3, entonces $\{(s, t), (s_1, t)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(s, s_1), (y, s), (y, s_1)\ , (t, s), (s_1, s)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Notemos que $\{(s, t), (t, s)\} \cap A(D) = \emptyset$ pues $\{s, t\} \subseteq S$ y S es independiente, $(s_1, t) \notin A(D_2)$ pues $(s_1, t) \notin A(D)$. Por otro lado, por la independencia de S^∞ y dado que $\{s, s_1\} \subseteq S^\infty$, tenemos que $(s, s_1) \notin A(D)$ y $(s_1, s) \notin A(D)$. Por lo tanto, se cumple que $(y, s) \in A(D)$ o $(y, s_1) \in A(D)$ y en ambos casos concluimos.

De esta forma demostramos que S^∞ es un seminúcleo modulo $A(D_1)$, es decir, $S^\infty \in \varsigma$.

Por lo tanto, probamos que toda cadena en $(\varsigma, \leq)$ tiene una cota superior en ς y por el lema de Zorn, $(\varsigma, \leq)$ contiene un elemento maximal.

Sea S un elemento maximal de $(\varsigma, \leq)$.

Afirmación 3. S es núcleo de D.

Dado que S es un conjunto independiente en D, basta probar que S es absorbente en D. Supongamos, por el contrario, que $B = \{x \in V(D) \setminus S : \textit{no existe una } xS-\textit{flecha}\} \neq \emptyset$.

Consideremos la digráfica $D[B]$, que por el teorema 4.0.1 sabemos tiene un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(D[B])$ no vacío, sea N dicho seminúcleo.

Ahora notemos que no existen SB-flechas en $A(D_2)$, esto por ser S un seminúcleo módulo $A(D_1)$ y por la definición de B, en particular no existen SN-flechas en $A(D_2)$. Note que si pueden existir SN-flechas en $A(D_1)$.

Sea $T = \{x \in S : existe\ una\ xN - flecha\ en\ A(D_1)\}$.

Veamos que el conjunto $(S \setminus T) \cup N$ es un seminúcleo módulo $A(D_1)$.

Afirmación 3.1 $(S \setminus T) \cup N$ es un conjunto independiente.

Dado que $S \setminus T$ y N son conjuntos independientes en D, solo basta probar que no existen $(S \setminus T)N$-flechas ni $N(S \setminus T)$-flechas en $A(D)$.

No existen $N(S \setminus T)$-flechas en $A(D)$ pues $N \subseteq B$, $(S \setminus T) \subseteq S$ y, por definición, B son los vértices no absorbidos por S.

Sabemos que no existen SN-flechas en $A(D_2)$ lo que implica que en particular no existen $(S \setminus T)N$-flechas en $A(D_2)$. También notemos que no existen $(S \setminus T)N$-flechas en $A(D_1)$ por definición de T.

Por lo tanto, $(S \setminus T) \cup N$ es un conjunto independiente en D.

Afirmación 3.2 Veamos que si existe una $((S \setminus T) \cup N)y$-flecha en $A(D_2)$ con $y \in V(D) \setminus ((S \setminus T) \cup N)$, entonces existe una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha en $A(D)$.

Sea x en $(S \setminus T) \cup N$ tal que $(x, y) \in A(D_2)$.

Caso 1. $x \in S \setminus T$.

Si $x \in S \setminus T$, entonces $y \notin T$ pues $T \subseteq S$ y S es independiente en D. También tenemos que $y \notin B \setminus N$ pues S es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ y por definición los vértices de B no son absorbidos por N. Por lo tanto, $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$ que, por la definición de B, sabemos es absorbido por algún vértice en S.

Sea $z \in S$ tal que (y, z) está en $A(D)$.

Caso 1.1 $z \in (S \setminus T)$.

En este caso acabamos, pues ya encontramos una $y(S \setminus T)$-flecha en D, que es a su vez una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha en D.

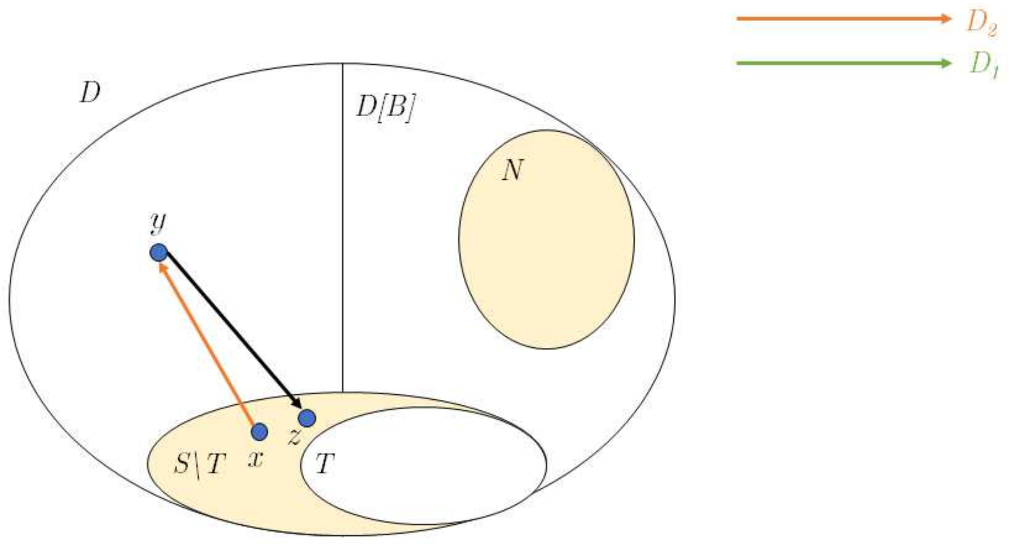


Figura 4.15: $x \in S \setminus T$, $y \in V(D) \setminus (B \cup S$ y $z \in (S \setminus T)$

Caso 1.2 $z \in T$.

Entonces, por la definición de T, existe un w en N tal que $(z, w) \in A(D_1)$. Por lo que la existencia de la trayectoria (x, y, z, w), con $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$, implica, por la propiedad P_3, que al menos una de las siguientes conclusiones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Primero, recuerde que $(x, w) \notin A(D_2)$, ya que no existen SB-flechas en $A(D_2)$. Por otro lado, $(x, w) \notin A(D_1)$ pues $x \in S \setminus T$. Por lo tanto, $(x, w) \notin A(D)$.

Dado que $\{x, z\} \subseteq S$ y S es un conjunto independiente en D, tenemos que $\{(x, z), (z, x)\} \cap A(D) = \emptyset$. Como $w \in B$ y $\{x, z\} \subseteq S$, por definición de B, tenemos que $\{(w, z), (w, x)\} \cap A(D) = \emptyset$. Por lo que debe ocurrir que $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$, y en ambos casos finalizamos, pues ambas son una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha en $A(D)$.

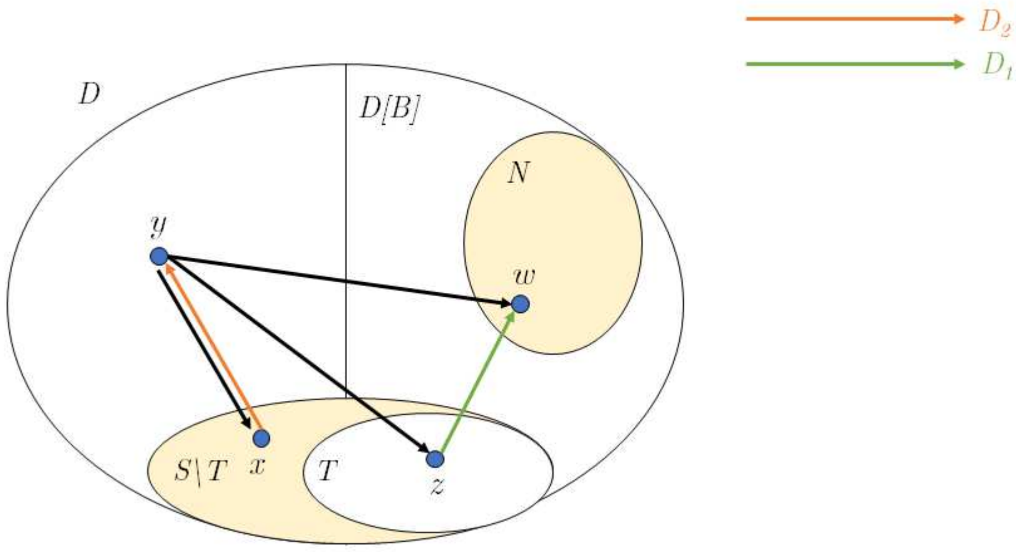


Figura 4.16: $x \in S \setminus T$, $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$ y $z \in T$

Caso 2 $x \in N$.

En este caso $y \notin T$, pues $N \subseteq B$ y por definición de B no existen BT-flechas.

Caso 2.1 $y \in B \setminus N$.

En este caso acabamos, pues al ser N un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(D[B])$ de $D[B]$, la existencia de (x, y) en $A(D_2)$ implica que existe una yN-flecha en $A(D)$ que a su vez es una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha en D.

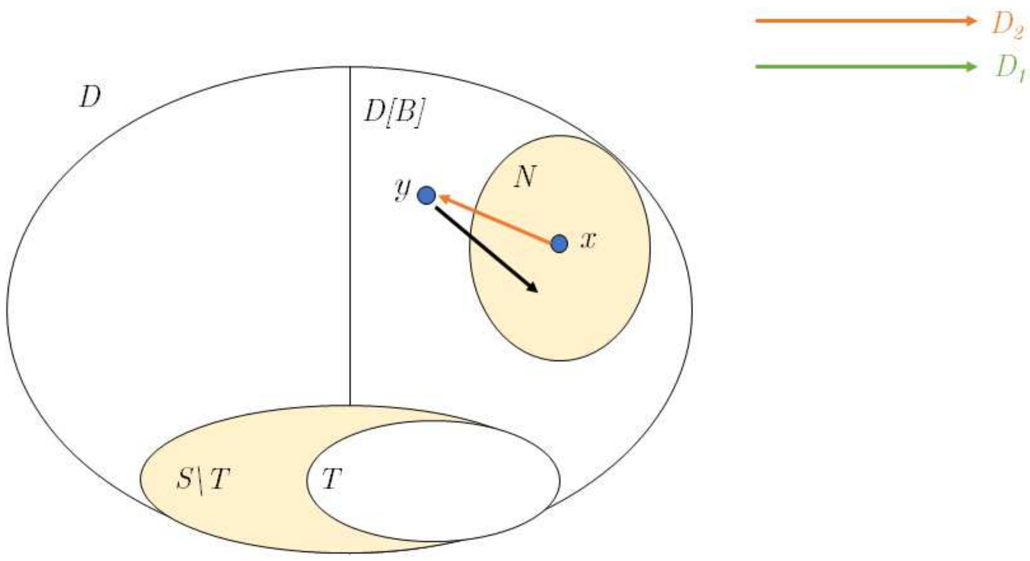


Figura 4.17: $x \in N$, $y \in B \setminus N$

Caso 2.2 $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$.

Si $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$, entonces, por la definición de B, y es absorbido por un vértice z en S.

Caso 2.2.1 $z \in (S \setminus T)$.

En este caso ya acabamos pues (y, z) es una $y(S \setminus T)$-flecha en $A(D)$ que a su vez es una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha en $A(D)$.

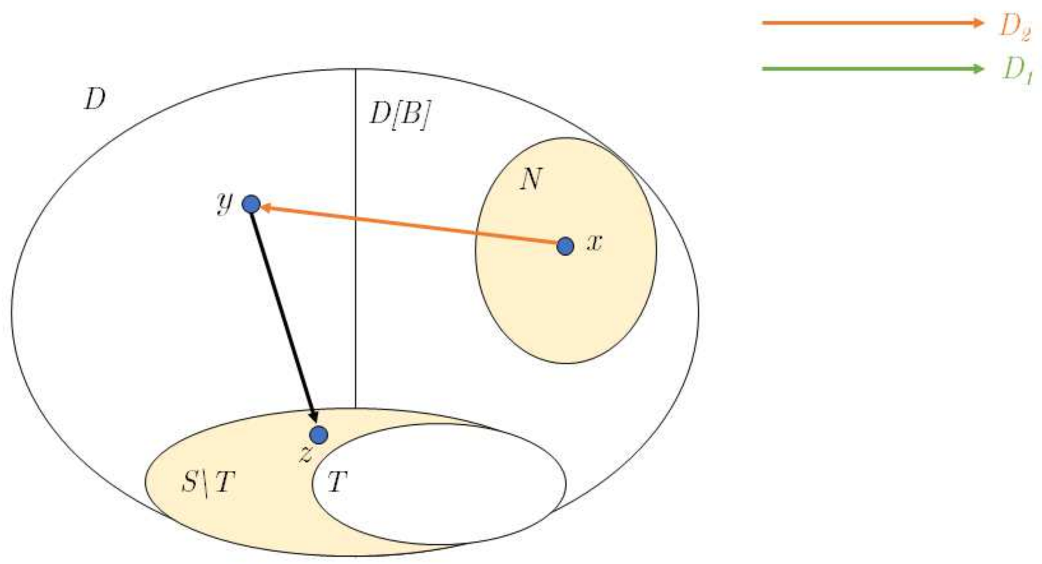


Figura 4.18: $x \in N$, $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$ y $z \in (S \setminus T)$

Caso 2.2.2 $z \in T$.

Si $z \in T$, entonces, por la definición de T, existe un vértice w en N tal que (z, w) está en $A(D_1)$.

Si $w = x$, entonces el ciclo (x, y, z, x) con $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$ implica, por la propiedad P_3, que (y, x) está en $A(D)$ lo que es una yN-flecha que a su vez es una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha.

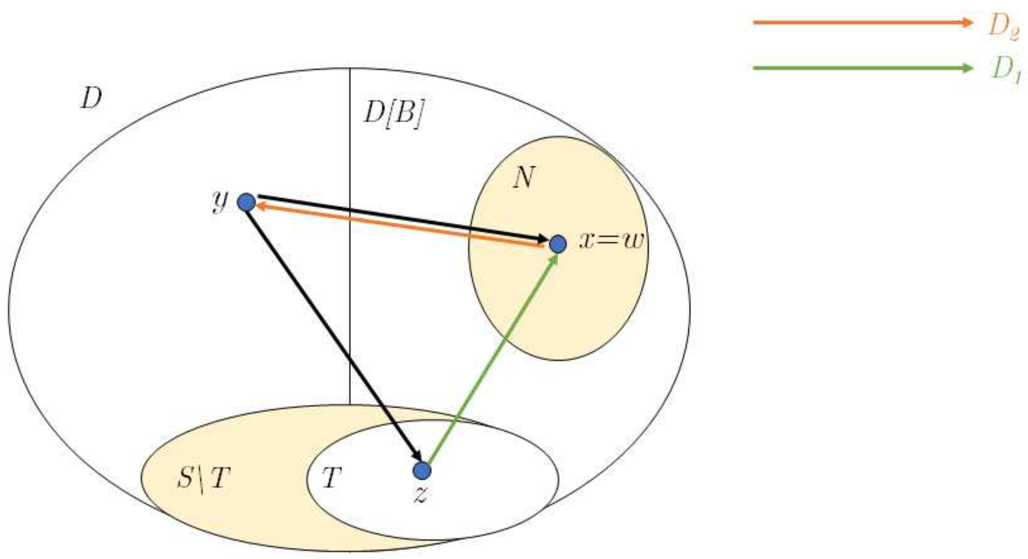


Figura 4.19: $x \in N$, $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$, $z \in T$ y $w = x$

Si $w \neq x$, entonces la trayectoria (x, y, z, w) con $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, w) \in A(D_1)$, implica, por la propiedad P_3, que al menos una de las siguientes conclusiones se cumple: $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D_2) \neq \emptyset$ o $\{(x, w), (y, x), (y, w), (z, x), (w, x)\} \cap A(D) \neq \emptyset$.

Dado que $\{x, w\} \subseteq N$ y que N es un conjunto independiente, tenemos que $\{(x, w), (w, x)\} \cap A(D) = \emptyset$. Por otro lado, como $\{x, w\} \subseteq B$ y $z \in T$ tenemos, por la definición de B, que $\{(x, z), (w, z)\} \cap A(D) = \emptyset$. Notemos que $(z, x) \notin A(D_2)$ pues $z \in S$, S es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ y $x \in B$. Si $(z, x) \in A(D_1)$, entonces ya vimos que la existencia del ciclo (x, y, z, x), con $(x, y) \in A(D_2)$ y $(z, x) \in A(D_1)$, implica la existencia de una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha en $A(D)$. Si $(y, x) \in A(D)$ o $(y, w) \in A(D)$, entonces en cualquiera de ambos casos encontramos una yN-flecha que a su vez es una $y((S \setminus T) \cup N)$-flecha en $A(D)$.

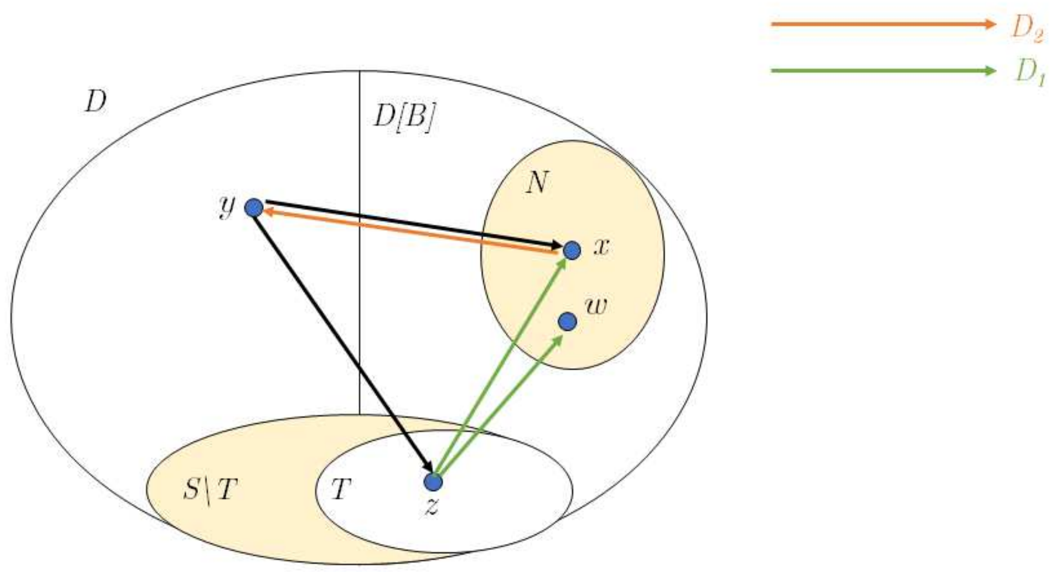


Figura 4.20: $x \in N$, $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$, $z \in T$, $w \neq x$ y $(z, x) \in A(D_1)$

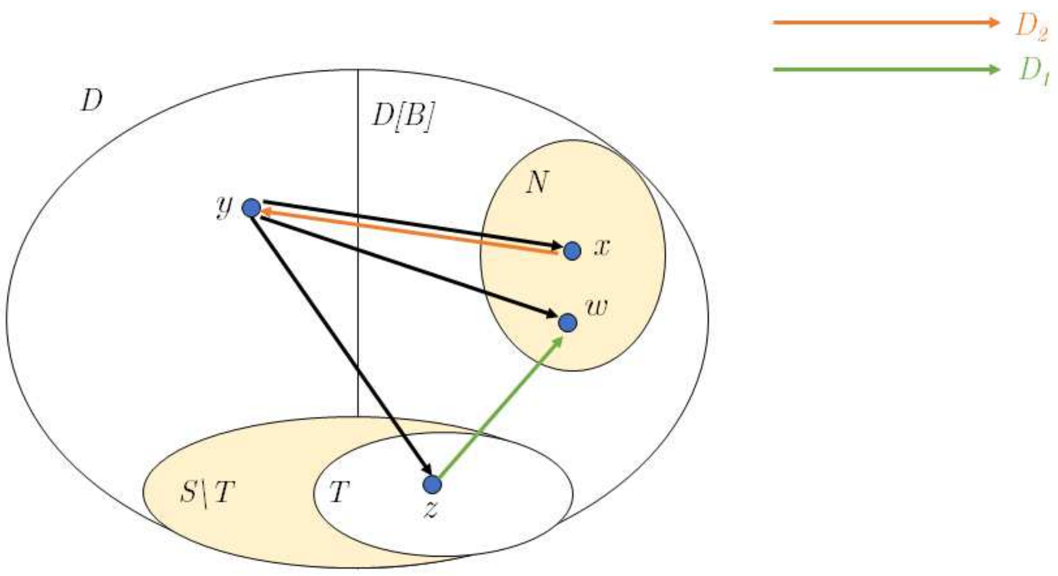


Figura 4.21: $x \in N$, $y \in V(D) \setminus (B \cup S)$, $z \in T$, $w \neq x$ y $(y, x) \in A(D_1)$ o $(y, w) \in A(D_1)$

Por lo tanto, $(S \setminus T) \cup N$ es un seminúcleo módulo $A(D_1)$.

Ahora veamos que $(S \setminus T) \cup N \geq S$, lo cual nos llevaria a una contradicción por la elección de S.

Afirmación 3.3 $(S \setminus T) \cup N \geq S$.

Para esto veamos que para todo x en S existe un y en $(S \setminus T) \cup N$ tal que $x = y$ o (x, y) está en $A(D_1)$ y (y, x) no está en $A(D)$.

Sea x en S, si $x \in S \setminus T$, entonces ya acabamos, pues así x está en $(S \setminus T) \cup N$. Si $x \in T$, entonces, por definición de T, existe un y en N tal que (x, y) está en $A(D_1)$ y, al ser N un subconjunto de B, (y, x) no está en $A(D)$, por definición de B.

Por lo tanto, $(S \setminus T) \cup N \geq S$.

Como $(S \setminus T) \cup N$ es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ tal que $(S \setminus T) \cup N \geq S$ y $(S \setminus T) \cup N \neq S$, obtenemos una contradicción, pues por hipótesis S es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ maximal.

Por lo tanto, $B = \emptyset$, es decir, S es absorbente. Por lo que S es un núcleo de D.

$\square$

Recordemos que en el capítulo 4 mencionamos que en el artículo "Union of digraphs which become kernel perfect"[6] de Hortensia Galeana Sánchez y Mucuy-kak Guevara, ellas deducen del teorema 3.0.5 el corolario 3.0.6, esto al afirmar que si D_1 es una digráfica transitiva o pretransitiva derecha y D_2 es una digráfica transitiva o pretransitiva izquierda, entonces D satisface la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres. Pero nosotros encontramos el ejemplo de una digráfica D tal que D_1 es pretransitiva derecha y D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda y la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres, no se cumple. Por lo que el corolario 3.0.6 no se deduce directamente del teorema 3.0.5.

Luego, del teorema 4.0.2 podemos deducir el siguiente corolario:

Corolario 4.0.3. *Sean D una digráfica, D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D tal que $\{A(D_1), A(D_2)\}$ es una partición de $A(D)$, donde D_1 es pretransitiva derecha y D_2 es pretransitiva izquierda. Si D tiene la propiedad P_3, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Se deduce directamente del teorema 4.0.2, dado que todas las digráficas pretransitivas son núcleo perfectas y al ser D_1 finita no admite trayectorias infinitas exteriores.

□

Conclusión

Esta tesis fue motivada por el artículo "Union of digraphs which become kernel perfect", el cual a su vez está inspirado en un teorema publicado en [11], el cual nos da condiciones suficientes para asegurar que la unión de dos digráficas es núcleo perfecta.

Luego, dado que existen ejemplos de digráficas infinitas que cumplen las condiciones del teorema principal de [6], las cuales no tienen núcleo, surge la pregunta ¿Qué condiciones garantizan que la unión de dos digráficas infinitas resulte ser núcleo perfecta? En este trabajo, contribuimos con una respuesta a la pregunta anterior dando como resultado original lo siguiente:

Sean D una digráfica, posiblemente infinita, D_1 una subdigráfica generadora de D pretransitiva derecha sin trayectorias infinitas exteriores y D_2 una subdigráfica generadora núcleo perfecta de D tal que $D = D_1 \cup D_2$. Si D tiene la propiedad P_3, entonces D es núcleo perfecta.

Además, al estudiar el artículo "Union of digraphs which become kernel perfect", notamos que el corolario 3.0.6 no se deducía inmediatamente del teorema 3.0.5, ya que en el artículo afirman que si D_1 es una digráfica transitiva o pretransitiva derecha y D_2 es una digráfica transitiva o pretransitiva izquierda, entonces D satisface la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres. Pero nosotros encontramos un ejemplo de una digráfica D tal que D_1 es pretransitiva derecha, D_2 es transitiva o pretransitiva izquierda, $D = D_1 \cup D_2$ y la propiedad P_2, respecto a las trayectorias de longitud tres, no se cumple. Por lo que nos dimos a la tarea de agregar condiciones a la propiedad P_2 y así definir la propiedad P_3. Lo cual nos permitió llegar al siguiente resultado:

Sean D una digráfica, D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D tal que $\{A(D_1), A(D_2)\}$ es una partición de $A(D)$, donde D_1 es pretransitiva derecha y D_2 es pretransitiva izquierda. Si D tiene la propiedad P_3, entonces D es núcleo perfecta.

Es importante aclarar que la característica extra que le pedimos a la propiedad P_2 es para poder demostrar la transitividad del orden planteado en la demostración del teorema, ya que para nuestra demostración es parte fundamental tener un orden. Sin embargo, nos queda la pregunta de si se pueden debilitar las hipótesis o si existe alguna otra familia de digráficas, posiblemente infinitas, cuya unión resulte en una digráfica núcleo perfecta.

Bibliografía

[1] J. Bang-Jensen, G. Gutin, Digraphs theory: algorithms and applications, Springer, London, 2001.

[2] C. Berge, Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en théorie des jeux, Publ. Econométriques 6 (1997.

[3] C. Berge, Vers une theorie generale des jeux positionnels, R. Henn, O. Moeschlin (Eds.), Mathematical Economics and Game Theory, Essays in honor of Oskar Mongerstern, Lecture Notes in Economics, vol. 141, Springer, Berlin (1977), pp. 13-24.

[4] V. Chvátal, On the computational complexity of finding a kernel, Report CRM300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973. 15.

[5] P. Duchet, Graphes Novau-Parfaits, Ann. Discrete Math. 9 (1980) 93-101.

[6] H.Galeana-Sánchez, Mucuy-Kak Guevara, Union of digraphs which become kernel perfect, Discrete Math. 263(2019) 160-165.

[7] H.Galeana-Sánchez, R.Rojas-Monroy, Kernels in pretransitive digraphs, Discrete Math. 275(2004) 129–136.

[8] H.Galeana-Sánchez, R.Rojas-Monroy, Kernels in quasi-transitive digraphs, Discrete Math. 306(2006) 1969–1974.

[9] H.Galeana-Sánchez, V.Neumann-Lara, On Kernel-perfect critical digraphs, Discrete Math. 59(1986) 257–265.

[10] M.Richardson, Solutions of irreflexive relations, Ann. of Math. 58(1953) 573–590.

[11] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, On monochromatic paths in edge-colored digraphs, J. Combin. Theory B 33 (1982) 271–275.

[12] J. von Neumann and O.Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944. 13, 15.