



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

La dinámica caótica de la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  en ciertos subconjuntos invariantes del plano complejo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Fernando Santana Plascencia

TUTOR

Dr. Jefferson Edwin King Dávalos

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Hoja de datos del jurado

## 1. Alumno:

Santana  
Plascencia  
Fernando  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
305196282

## 2. Tutor:

Dr.  
Jefferson Edwin  
King  
Dávalos

## 3. Sinodal 1:

Dr.  
Héctor  
Méndez  
Lango

## 4. Sinodal 2:

Dr.  
Carlos Alfonso  
Cabrera  
Ocañas

## 5. Sinodal 3:

Dr.  
Guillermo Javier Francisco  
Sienra  
Loera

## 6. Sinodal 4:

Dra.  
Patricia  
Domínguez  
Soto

## 7. Trabajo escrito:

La dinámica caótica de la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  en ciertos subconjuntos invariantes del plano complejo  
xii, 88 págs.  
2022

# Agradecimientos

Detrás de cada idea matemática que florece hay por lo general una nutrida historia que incluye la participación de una gran diversidad de personas, no siempre identificadas ni reconocidas.

De manera semejante, en el contexto de cada estudiante que termina su carrera universitaria, hay por lo general todo un equipo de personas que han formado el soporte a partir del cual ha podido llegar hasta ahí.

Reconocer esta naturaleza colectiva de logros muchas veces considerados individuales ayuda, por un lado, a poder valorarlos en toda su amplitud y, por otro, a hacerlo con humildad. Todo esto da pie, sin lugar a dudas, al agradecimiento.

En mi caso, deseo expresarlo en estas líneas, de manera extensiva, a mi familia, a mis compañeras y compañeros de estudios, a mis profesores y profesoras, a las y los estudiantes de quienes he sido ayudante y de quienes también he aprendido muchísimo, a quienes nos han brindado algún servicio a lo largo de estos años (autoridades, secretarios y secretarías, personal de biblioteca, de publicaciones, de laboratorios, de intendencia, etc.), a las y los integrantes de grupos colectivos que buscan construir alternativas y, finalmente, a los amigos y amigas que he hecho en el camino. Todas y todos ustedes, aunque me sea imposible mencionar aquí cada uno de sus nombres, han sido fundamentales en este recorrido.

Gracias, papá José Antonio, por tu trabajo, no siempre fácil, a partir del cual hemos podido salir adelante y por ser un fuerte ejemplo de generosidad hacia los demás. Gracias, mamá Guillermina, por tu amor, por tu fe, y por ser ejemplo de tenacidad frente a circunstancias adversas. Gracias, Ana Laura y José Antonio, por ser mis hermanos mayores; no sé cómo podría sobrevivir sin ustedes.

Gracias a mi profesora Conchita de la secundaria, por su comprometido trabajo para estimular el gusto por las matemáticas entre las y los jóvenes adolescentes, uno de ellos yo hace tiempo; gracias también por darnos un punto extra por tan sólo participar en los concursos de matemáticas, sin importar qué tanto confiábamos en nuestras propias capacidades, ni qué resultados obtuviéramos. Gracias también a quienes han organizado, a quienes han promovido y a quienes han hecho crecer las olimpiadas de matemáticas. Éstas (y otras semejantes) han sido una plataforma extraordinaria para canalizar de manera productiva la gran energía de los y las jóvenes. Para muchas y muchos de nosotros, han sido también de inestimable valor para descubrir y comenzar a desarrollar nuestra vocación matemática.

Gracias a mi grupito de compañeros y compañera con quienes llevé todos los cursos en nuestro primer semestre de la carrera. Gerardo, Jesús, Jorge Alberto, Lucero y Rubén, en equipo resistimos la difícil transición a la universidad y, por otro lado, pasamos también muy buenos momentos juntos. Gracias también a quienes conocí después y con quienes en algún momento hice equipo, ya sea para tomar clase, estudiar, hacer tarea, liberar el servicio social, jugar fútbol o basquetbol, viajar: Eréndira, Sergio, Arturo, Ita, Reina, Jacob, Juan Manuel, Fernando, Érick, Daniel, Adriana, Adán, Nayeli, Paco, Adareli, Leonel, Dalid, José, Karina, Érick, Efraín, Ernesto, Iván, Érika Fernanda, Juan Manuel, Mich, Diana, Sofí, Fernando, Mario. . .

Gracias a quienes fueron mis profesoras, profesores y ayudantes en la Facultad de Ciencias, de quienes he seguido el ejemplo y luego me he vuelto colega docente. Recuerdo con especial afecto y admiración a José Antonio Gómez, Leonardo Martínez, Julio César Salazar, Jefferson King, Faustino Sánchez, Laura Pastrana, María del Rocío Sánchez, Héctor Méndez, Juan José Alba, Fernando Campos, Luz Arely Carrillo, Ana Helice Rodrigo, Jorge Marcos Martínez, Carlos Lingan, Alejandro Illanes. . . Gracias también a otros y otras colegas, de quienes he aprendido mucho y he sido apoyado de distintas maneras, como Leticia Contreras, Omar Patricio Juárez, Lucía Armenta, Óscar Palmas, Pilar Valencia, Silvia Torres. . .

Gracias a los colectivos universitarios que han impactado en mi formación humana. Por mencionar algunos: conCiencias Libres, en sus esfuerzos por transformar para bien nuestra facultad y nuestra universidad, y por ser relevantes para la sociedad; el Taller de Física, en su trabajo por cobijar a las y los estudiantes de primer ingreso con el apoyo de estudiantes de semestres más avanzados; el Centro Cultural la Atómica, por organizar el curso de *Educación popular y comunalidad* en el que pude inscribirme y lograr aprendizajes muy valiosos junto a las extraordinarias personas que ahí conocí; las brigadas universitarias que se formaron después de los sismos de 2017, por mostrar la voluntad, no siempre visible, de los y las universitarias para trabajar en favor de la sociedad; el Conversatorio de masculinidades FC, por ser un espacio para reflexionar en nuestra manera de ser hombres y buscar hacer cambios significativos, desde dentro y desde fuera, en un país en el que la violencia contra las mujeres está totalmente desbordada; el Fondo Solidario FC, por buscar atender, en colaboración con la comunidad académica de Ciencias, la difícil situación de docentes de asignatura que en plena pandemia en 2021 llevaban meses sin recibir el pago por su trabajo.

Gracias, consCientes: Silvia, Sergio, Cintli, Rafa, Anahí, Carlitos, Zitlali, Manuel, Iván, Alejandra, Vale, Daniel, Carlos, Eduardo, Diana. Con ustedes aprendí lo que era la praxis antes de saber lo que este término significa. Todos y todas ustedes tienen un lugar muy especial en mi corazón. Gracias también, Moi, Angélica y Nancy, por apoyarnos siempre en nuestros proyectos.

Gracias a mis amigos, amigas, hermanos y hermanas de Compañerismo Estudiantil, con quienes pude ver con gran fuerza la mano de Dios obrando en las vidas de los y las jóvenes universitarias. Gracias a quienes formaban parte de la célula de Ciencias, como Leonel, Víctor, Erick, Daniela, Lidia, Ehécatl, Rafa, Isabel, Yadira, Rolando, Sheila, Adrián, Dayana, Dulce. . . En diálogo y convivencia con ustedes, recibí muchas bendiciones. Gracias también, Andrés, Eugenia, Amparo, Amiel, por el tiempo que pudimos compartir en Con Paz y Justicia reflexionando sobre el papel social de la iglesia. Gracias a Isabel, Jhosselyn y las chicas y chicos de Memoria Ejemplar en Perú, y de AGEUP en general, con quienes pudimos también abordar este tema.

Gracias a mis amigas y amigos desde tiempos de la secundaria y de la prepa. Ameyaltzin, Nicté, Itzel, Joel, Carlos, Zayani, Laurita, Daniela, Germán, Gaby, Lidia, ustedes son parte imborrable de lo que soy.

Gracias al jurado de mi proyecto de tesis por sus comentarios y sugerencias para mejorar mi trabajo. Gracias en particular, Jeff, por haberme propuesto un tan bonito tema de tesis; Renato, por haberme enseñado a programar en Julia, donde hice algunos programitas relacionados con mi proyecto; Héctor, porque en los hechos has sido un segundo tutor y por todo el apoyo que me has brindado en distintos momentos cruciales de este proceso.

Gracias a la sociedad mexicana en general con cuyos impuestos se ha financiado toda mi educación escolar. Estoy en deuda con mi país y con la educación pública y gratuita, que siempre habrá que seguir apoyando y defendiendo.

Gracias a quienes en mi iglesia me han acompañado en oración en distintos momentos y al pastor Esteban por su apoyo en este proceso en particular.

Gracias a Dios, porque todo lo bueno proviene de Él.

Fernando Santana Plascencia  
marzo de 2022

*A mis abuelitos y abuelitas:*

*José Antonio,  
quien de niños nos enviaba cartas con muñequitos de cabeza gigante;*

*Estela,  
quien siempre nos recibía en vacaciones con mucha gentileza y amor;*

*Carlos,  
quien buscaba compartir en todo tiempo su buen ánimo y sentido del humor;*

*Alicia,  
quien nos cantaba por las noches al dormir y por las mañanas al despertar.*



# Introducción

Dada una función  $f: X \rightarrow X$  de un conjunto  $X$  en sí mismo, es posible pensar que al aplicarla “se mueve” simultáneamente de lugar a cada elemento en dicho conjunto. Así, dado cualquier punto  $x \in X$ , se puede considerar los distintos lugares por los que se va pasando al aplicar  $f$  de manera reiterada (es decir, iterándola) al formar el conjunto

$$\{x, f(x), f(f(x)), \dots\},$$

llamado la órbita de  $x$ . Al respecto uno puede hacerse diversas preguntas, como por ejemplo si dicho conjunto es finito o infinito, si avanzando hacia adelante en dicha órbita en algún momento se regresa a algún punto que ya hubiera aparecido antes o siempre se pasa por puntos distintos.

Por otro lado, si  $X$  es un espacio métrico (en donde siempre se puede hablar de la distancia entre cualesquiera dos de sus puntos) como la recta o el plano, o algún subespacio de ellos, uno puede preguntarse también si tal órbita es acotada o no, si es convergente a algún punto o diverge, si de alguna manera se va acercando cada vez más a algún subconjunto del espacio o quizá incluso llegara a ser densa en  $X$ .

Finalmente, si más aun, la función  $f$  es continua, entonces sucede que “puntos cercanos del dominio van a puntos cercanos del codominio al aplicarles  $f$ ”, no obstante lo cual uno puede preguntarse, entre otras muchas cosas, si las órbitas de puntos cercanos siempre se mantendrán cercanas o, a la larga, se podría ir perdiendo tal cercanía. Dicha característica de “pérdida de control”, con ciertas precisiones, es llamada sensibilidad a las condiciones iniciales y es uno de los elementos que componen la definición de dinámica caótica dada por Robert L. Devaney.

Es así que la iteración de funciones continuas definidas en espacios métricos es la materia prima en el estudio de los sistemas dinámicos discretos. En tal estudio, múltiples disciplinas de las matemáticas tienen un punto de encuentro común. El cálculo, la topología, el análisis y la variable compleja, pero también el álgebra y la teoría de gráficas, algunas de mucha edad como la geometría y la teoría de números, y otras más jóvenes como la moderna experimentación computacional. Es entonces también un punto de encuentro que conecta distintas épocas en la historia de las matemáticas y que, en esta tesis en particular, podría funcionar también como un puente entre los conocimientos matemáticos que uno adquiere durante los primeros semestres de la carrera de matemáticas y la época de los experimentos, los dibujos y los juegos de la infancia, pues por ejemplo hacen aquí su aparición las curvas del espirógrafo, ese juguete con el que dando vueltas y vueltas era posible hacer dibujos tan coloridos y bellos.

Con la experiencia de varios años como ayudante de profesor en la Facultad de Ciencias en materias de matemáticas de la primera mitad de las carreras de Actuaría, Física y Matemáticas, fue muy difícil para mí no escribir esta tesis de otra manera que no fuera como para poder ser leída y entendida, al menos en su mayor parte, por mis alumnos. Fue redactada con la esperanza de que aquellos con una buena formación en las materias de los primeros cuatro semestres estén en posibilidad de seguir el hilo del material que aquí se presenta y quizá pueda servir incluso como una motivación e introducción al estudio más en forma de los sistemas dinámicos discretos.



En específico, el presente trabajo aborda el estudio del sistema dinámico discreto generado por la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  en el plano complejo, el cual presenta un comportamiento caótico (según la definición de Devaney) en distintos subconjuntos invariantes de dicho universo. Se basa en el estudio previo desarrollado por los profesores Guillermo Sienra, Héctor Méndez y Jefferson King en su artículo “Some Dynamical Properties of  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ ”, publicado en 2004. Ya antes, para su tesis de doctorado (publicada dos años más tarde, en 2006), el profesor Jefferson King había estado trabajando en un estudio más amplio de la familia de funciones  $F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}$  con  $a \in \mathbb{C}$ . En el artículo se eligió sólo una de ellas, la del parámetro  $a = -1$ , para exponerla con detenimiento, dado que ésta en particular presenta un comportamiento especialmente interesante e ilustrativo. Además, es posible estudiar su dinámica con ayuda, en primer lugar, de un modelo geométrico intuitivamente fácil de entender y, en segundo lugar, de un modelo simbólico algo más abstracto, pero de manera que cada uno de ambos modelos aporta lo suyo para comprender el comportamiento dinámico de la función original de forma ciertamente más transparente que trabajando directamente con ella.

Así, considerando la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ , teniendo en mente el conjunto

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : \text{la órbita de } z \text{ es acotada}\}$$

y notando que  $F(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$  y  $F(\mathbb{C} \setminus \mathcal{A}) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \mathcal{A})$ , tres preguntas guían el desarrollo del artículo:

1. ¿Quién es exactamente el conjunto  $\mathcal{A}$ ?
2. ¿Cómo es la dinámica de  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ?
3. ¿Cómo es la dinámica de  $F: \mathbb{C} \setminus \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}$ ?

En esta tesis se sigue ese mismo camino, añadiendo una introducción, no tan pequeña, a la geometría en el plano complejo (capítulo 1) y al tema de los sistemas dinámicos discretos en el plano (capítulo 2), detallando algunos puntos que en el artículo se presentan de manera más bien breve, desarrollando de manera más amplia el tema de la conjugación y semiconjugación topológicas que justifica el por qué funcionan ambos modelos geométrico y simbólico y, finalmente, aplicando todo este conocimiento para analizar más a fondo la dinámica de la función en ciertos subconjuntos invariantes del plano que resultan ser bastante interesantes (como por ejemplo uno de ellos que es en esencia un triángulo de Sierpiński y que no se menciona en el artículo original). Este estudio ayuda, por un lado, a comprender mejor la dinámica de la función en todo el plano y, por otro, a contrastar las dinámicas caóticas que se observan en varios de ellos pero que por ejemplo presentan distinta entropía topológica (una cierta medida del grado de caos).

Las etapas de este recorrido son las siguientes:

**Capítulo 1.** Se da una introducción acerca del espacio en el que estaremos trabajando: el plano euclidiano, también conocido como plano cartesiano o plano complejo, dependiendo de con qué enfoque se esté trabajando. Se presenta en especial la función exponencial compleja, que resulta ser muy útil para describir curvas como las elaboradas con un espirógrafo (formalmente llamadas hipotrocoides y que tienen como caso particular las hipocicloides). Estas curvas tendrán más adelante un papel especialmente relevante, pues una familia de entre ellas ayudará en el capítulo 3 a determinar con precisión el conjunto  $\mathcal{A}$  de puntos de órbita acotada.

**Capítulo 2.** Se presentan, mediante definiciones y ejemplos, algunos conceptos básicos como: sistema dinámico discreto; órbita; punto fijo (atractor y repulsor), prefijo, asintóticamente fijo, periódico, preperiódico, asintóticamente periódico; conjuntos invariantes y fuertemente invariantes; densidad de puntos periódicos, transitividad topológica, sensibilidad a las condiciones iniciales y caos. Se analizan los ejemplos de  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,

y  $\varphi(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , como un primer avance en la comprensión y estudio de nuestra función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Finalmente se demuestra el teorema de la contracción, que será utilizado más adelante para demostrar la densidad de puntos periódicos en el modelo geométrico  $G: \Delta \rightarrow \Delta$  presentado en el capítulo 4.

**Capítulo 3.** Se estudia hasta cierto punto la manera como nuestra función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  transforma al plano complejo en sí mismo y se muestra que el conjunto  $\mathcal{A}$  de puntos de órbita acotada corresponde con el conjunto  $\overline{\mathcal{K}}$  del plano acotado por cierta deltoide  $\Lambda$  (es decir, una cierta hipocicloide de 3 picos).

**Capítulo 4.** Se presenta el modelo geométrico  $G: \Delta \rightarrow \Delta$  (donde  $\Delta$  es un cierto triángulo equilátero en el plano), útil para estudiar la dinámica de la función  $F$  en el conjunto  $\overline{\mathcal{K}}$  de puntos de órbita acotada de manera indirecta, pero geoméricamente más clara. Se demuestra que  $G$  es caótica en  $\Delta$ , así como en ciertos subconjuntos invariantes de  $\Delta$ , de entre los que destaca un triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$ . Además, a lo largo de este proceso,  $\Delta$  es subdividido en triángulos cada vez más pequeños, nombrados cada uno con una cantidad finita de índices tomados del conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ , lo cual servirá de preparación para construir el modelo simbólico del siguiente capítulo en el que a cada punto de  $\Delta$  se le asocia uno o varios códigos infinitos de dígitos tomados también del conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

**Capítulo 5.** Se introduce el modelo simbólico  $\sigma: \Psi \rightarrow \Psi$ , en el que en lugar de trabajar con los puntos de  $\Delta$  se trabaja con códigos asociados a ellos, que conforman el conjunto  $\Psi = \{(w_1, w_2, \dots) : w_n \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ ; y en lugar de trabajar con la función  $G$  se trabaja con la función corrimiento  $\sigma$ , tal que  $\sigma(w_1, w_2, w_3, \dots) = (w_2, w_3, w_4, \dots)$ . Tal modelo simbólico, conceptualmente más abstracto que el modelo geométrico, ayuda por un lado a reafirmar lo que ya se ha descubierto con el modelo geométrico y, por otro, muestra su gran utilidad para responder preguntas que sin él podrían ser muy difíciles de resolver, como por ejemplo sobre la existencia de puntos de órbita densa (que en efecto los hay y que forman además un conjunto denso).

**Capítulo 6.** Se estudian los conceptos de funciones conjugadas y semiconjugadas, esenciales para mostrar que los principales resultados obtenidos mediante los modelos geométrico y simbólico son también válidos para la función  $F$ . Para ello, se demuestra que  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$  es conjugada de  $G$  en  $\Delta$  y semiconjugada de  $\sigma$  en  $\Psi$ . Además se demuestra que  $F$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\overline{\mathcal{K}})$  es conjugada de  $\varphi$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D})$ , donde  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  es el disco unitario.

**Capítulo 7.** Se hace una lista con las conclusiones que se pueden obtener acerca del sistema dinámico generado por nuestra función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  en el plano complejo a partir del trabajo realizado en los capítulos anteriores. En particular se concluye que  $F$  presenta una dinámica caótica en  $\overline{\mathcal{K}}$ , así como en otros subconjuntos invariantes de  $\overline{\mathcal{K}}$ , como por ejemplo uno de ellos homeomorfo al triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$ . Dichas dinámicas caóticas difieren en cada caso por presentar una distinta entropía topológica o, en uno de los casos, por no tener entropía topológica definida.

Y así como los sistemas dinámicos discretos son un interesante lugar de reunión matemática, se espera que este trabajo logre convocar a diversos lectores que, ya sea por simple curiosidad de ver los dibujos, de saber de qué tratan los sistemas dinámicos discretos o por cualquier otro motivo personal, se animen a abrir sus páginas y formar parte también de este encuentro.



# Índice general

Agradecimientos	III
Dedicatoria	V
Introducción	VII
Índice general	XI
<b>1. El escenario de esta historia: el plano euclidiano</b>	<b>1</b>
El mundo en un trozo de mundo	1
Distintas visiones del plano	3
La visión euclidiana	3
La visión cartesiana	5
La visión compleja	6
Los números complejos y el plano	7
La función exponencial compleja y la descripción de bellas curvas	8
Circunferencias y rayos	12
Espirales	13
Hipotrocoides: las curvas del espirógrafo	14
¿Más hipotrocoides?	22
<b>2. Sistemas dinámicos discretos en el plano: un primer vistazo</b>	<b>25</b>
Dinámica de puntos individuales	25
El ejemplo de $f(x) = x^2$ en la recta	27
El análisis gráfico de sistemas dinámicos discretos en la recta	28
Dinámica de conjuntos de puntos	30
El mismo ejemplo de $\varphi(z) = z^2$ , pero ahora en el plano	31
Dinámica caótica según Devaney	31
Un poco de dinámica simbólica	33
En busca de puntos fijos: el teorema de la contracción	34
<b>3. Acción geométrica de <math>F(z) = z^2 - 2\bar{z}</math> en el plano</b>	<b>37</b>
Cuentas que se complican	38
Una familia invariante de curvas	39
El conjunto $\mathcal{K}$ de puntos atrapados por $F$ y la cuenca de atracción de $\infty$	43
Los conjuntos $\bar{\mathcal{L}}$ y $\bar{\mathcal{K}}$ transformados por $F$	44

<b>4. Un modelo geométrico <math>G: \Delta \rightarrow \Delta</math> para <math>F: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}</math></b>	<b>47</b>
La descripción del modelo geométrico . . . . .	47
La dinámica caótica de $G: \Delta \rightarrow \Delta$ . . . . .	51
La dinámica de $G$ en subconjuntos invariantes de $\Delta$ . . . . .	54
<b>5. Un modelo simbólico <math>\sigma: \Psi \rightarrow \Psi</math> para <math>F: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}</math></b>	<b>59</b>
La descripción del modelo simbólico . . . . .	59
Códigos cercanos o lejanos en el espacio $\Psi$ de 4 símbolos . . . . .	62
Subconjuntos invariantes y sus códigos. . . . .	66
Apéndice. Un pequeño toque a la entropía . . . . .	70
<b>6. De viaje entre tres mundos distintos: <math>\overline{\mathcal{K}}</math>, <math>\Delta</math> y <math>\Psi</math></b>	<b>73</b>
Funciones conjugadas y semiconjugadas . . . . .	73
$F$ en $\overline{\mathcal{K}}$ y $G$ en $\Delta$ son funciones conjugadas . . . . .	76
$F$ en $\overline{\mathcal{K}}$ es semiconjugada de $\sigma$ en $\Psi$ . . . . .	80
Apéndice. $\varphi$ en $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D})$ y $F$ en $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\overline{\mathcal{K}})$ son funciones conjugadas . . . . .	81
<b>7. De vuelta al punto de partida <math>F(z) = z^2 - 2\bar{z}</math> en el plano</b>	<b>85</b>
Conclusiones sobre $F$ en $\overline{\mathcal{K}}$ . . . . .	86
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>

# Capítulo 1

## El escenario de esta historia: el plano euclidiano

### El mundo en un trozo de mundo

Una pared adentro de una caverna, el suelo cubierto de arena en una playa a la orilla del mar, una hoja de papel en blanco... son ejemplos de superficies que, con ayuda de instrumentos adecuados (pigmentos naturales, los dedos de una mano, plumas de colores u otros artículos diversos), han permitido al ser humano hacer representaciones del mundo en el que vive (ya sea de manera efímera o perdurable), reflexionar sobre éste, reestructurarlo e imaginar otros mundos posibles.

Para tal quehacer sin embargo, dada la imposibilidad de incrustar de lleno tan vasto mundo en cualquiera de estos limitados soportes, se hace necesario elegir únicamente algunos cuantos rasgos o cualidades por representar y dejar de lado, al menos momentáneamente, al resto (mecanismo de selección conocido como *proceso de abstracción*). Podemos entonces intentar recuperar gráficamente uno o varios de entre una amplia diversidad de aspectos: las siluetas, la luminosidad, los colores, las cantidades, las formas, la estructura, o incluso elementos dinámicos como el movimiento, u otros no visibles, como los sonidos. Todo ello de acuerdo con nuestro interés, nuestra creatividad, nuestros recursos y también nuestras limitaciones prácticas.

Intentar representar, por ejemplo, un gran mamut a tamaño natural en la pared más o menos lisa de una cueva pequeña podría ser una tarea técnicamente imposible. En cambio, sacrificando su *tamaño* real, se lo podría pintar más pequeño, como mirándolo a la distancia, tan lejos como fuera necesario para que cupiera adecuadamente en nuestra pared, concentrándonos básicamente en preservar su *forma*. La experiencia nos indicaría que para lograr esto último de manera efectiva, haría falta reducir de tamaño cada parte del mamut uniformemente (o, dicho en lenguaje matemático preciso, de manera proporcional). Así, por ejemplo, si la trompa del mamut original fuera del triple de largo que la trompa del mamut pintado, algo análogo debería suceder con los cuernos, y con las patas, y con cualquier parte del mamut, observándose en general una razón 3 a 1 entre las medidas del mamut a tamaño real y las de su representación pictórica.

Ahora bien, en un caso más general, supongamos que cualquier medida del mamut pintado cupiera  $c$  veces en la correspondiente medida del mamut a tamaño real. Entonces pasaría que si tomáramos dos medidas cualesquiera  $a$  y  $l$  en la pintura (por ejemplo el alto y el largo del animal) y sus correspondientes medidas  $A$  y  $L$  en el mamut a tamaño real se tendría que:  $A = c \cdot a$

y  $L = c \cdot l$ , y de ahí que

$$\frac{A}{a} = \frac{L}{l}.$$

Esta igualdad equivale claramente a que

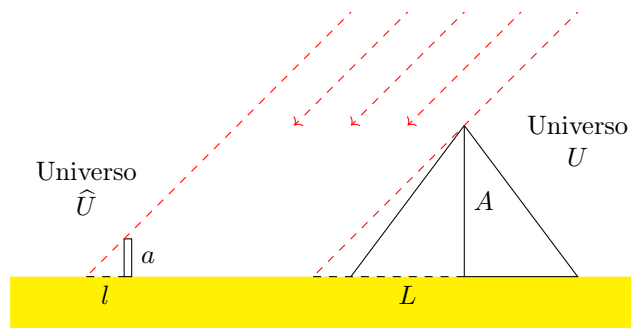
$$\frac{A}{L} = \frac{a}{l},$$

pero esto último significa que las proporciones en el mamut a tamaño real (del lado izquierdo de la igualdad) también se preservan al transportar nuestra atención a nuestra hipotética pintura (del lado derecho), y viceversa.

Esta observación, que pudiera parecer quizá demasiado simple a la luz de la moderna notación de fracciones, en realidad nos sirve para presentar una estrategia básica en el trabajo matemático cotidiano y que también es un elemento fundamental en este proyecto de tesis. Dicha estrategia consiste en que para estudiar cierto fenómeno o resolver cierto problema en un universo dado  $U$ , se hace una representación suya en otro universo  $\hat{U}$  (con cuidado, claro, de que se preserve lo que queramos preservar) donde quizá por alguna razón es más fácil trabajar y, una vez resueltas ahí las cosas, se emprende el viaje de regreso al universo y al problema originales con una nueva comprensión del fenómeno.

En principio, dicho universo  $U$  corresponde mucha veces con el mundo en el que vivimos y el universo  $\hat{U}$  bien puede ser nuestro propio universo mental (ampliamente dotado de imágenes, nombres, conceptos, interacciones, ideas...), alguno de los soportes “planos” de los que hablábamos al inicio de este capítulo, o incluso en ocasiones, el mismo universo  $U$  aunque quizá un poco modificado. Veamos un ejemplo de esto último, reviviendo en seguida lo que relata una antigua leyenda matemática.

Se dice del primer matemático en la historia de la Antigua Grecia del que parece haber registro, ahí por el siglo VI a.C., que ideó un método para determinar la altura de una de las pirámides de Egipto sin necesidad siquiera de tocarla, únicamente con ayuda de su propio cuerpo erguido verticalmente en las cercanías de la pirámide, su sombra así como la proyectada por la pirámide, y algo de paciencia. Simplemente hacía falta esperar el momento del día en que su sombra midiera lo mismo que él, para medir entonces la sombra de la pirámide. Luego, considerando que los rayos del sol que bajaban desde el cielo sobre zonas cercanas entre sí eran prácticamente paralelos, dicho personaje concluía que los dos triángulos mostrados en la figura 1.1, tenían la misma forma (es decir, eran *semejantes*) y sus lados correspondientes eran por lo tanto proporcionales entre sí. Así, las proporciones entre la altura y la base de cada triángulo debían ser iguales entre sí, es decir valer ambas 1, por lo que la altura de la pirámide era igual a la longitud de su sombra en ese momento del día.



**Figura 1.1:**  $\frac{A}{L} = \frac{a}{l} = 1 \quad \therefore \quad A = L$

Podríamos entonces sugerir que nuestro ingenioso personaje utilizó su propio cuerpo y su propia sombra como representaciones de la pirámide y de la sombra de ésta, haciendo coincidir el universo de representación y el del problema original, y dándose cuenta de que al pasar de uno al otro de la manera en la que lo hacía las proporciones se preservaban.

Así también el nombre de este pensador, Tales de Mileto, se ha preservado en la historia hasta nuestros días, íntimamente relacionado con la geometría y las proporciones. También como precursor de una importante escuela de matemáticos griegos que, a lo largo de varios siglos, encontraron en la geometría un campo de estudio de gran interés y fueron brindando cada uno diversas aportaciones para ir construyendo lo que hoy se conoce como *geometría clásica*. En este camino se fue consolidando como principal universo de representación  $\hat{U}$  un espacio de trabajo al que se comenzó a llamar simplemente el *plano*.

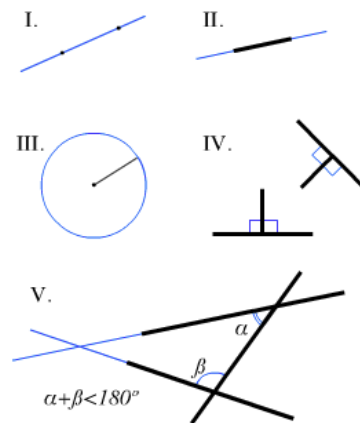
## Distintas visiones del plano

### La visión euclidiana

Fue Euclides, uno de los integrantes de esta importante escuela de matemáticos griegos, el encargado de ordenar y poner por escrito buena parte de los conocimientos geométricos y matemáticos logrados hasta sus días. En el siglo III a.C., en la ciudad de Alejandría y en los tiempos de la célebre biblioteca que ahí existía, escribió los “Elementos”, su magna obra formada por 13 libros principalmente enfocados en la geometría, pero que también trataban por ejemplo acerca de teoría de números. En dicha obra se procuraba organizar de manera lógica todos estos saberes, tomando como punto de partida un conjunto de postulados junto con algunas nociones comunes acerca de la igualdad (presentados todos en el libro I), así como una nutrida lista de definiciones (distribuidas a lo largo de todos los libros, incluyéndose por ejemplo en el primero las de punto, línea, superficie, ángulo, ángulo recto, etc.). Y a partir de ahí, y mediante el método deductivo, se iban justificando toda una diversidad de proposiciones.

Pues bien, los enunciados de los cinco postulados de Euclides, base de la teoría desarrollada por él en esta obra, eran los siguientes:

1. Por dos puntos siempre se puede trazar una recta.
2. Toda recta es prolongable tanto como se quiera en cualquiera de sus dos direcciones.
3. Cualquier punto del plano se puede usar como centro de un círculo (o de un arco de círculo) de radio arbitrario.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si dos rectas son cortadas por una transversal y de alguno de los lados de ésta la suma de los ángulos interiores con las rectas es menor a dos ángulos rectos, entonces, si las rectas se prolongan suficientemente de ese mismo lado, se habrán de intersectar.



**Figura 1.2:** Ilustración de los cinco postulados de Euclides (fuente: Wikipedia en español).



Como el lector podrá notar, el último postulado se destaca por tener una formulación algo más complicada que el resto. Al respecto también cabe mencionar que las primeras 26 proposiciones del libro I de los Elementos se demuestran ahí utilizando únicamente los primeros cuatro postulados (como la proposición I.15, que dice que ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí). Sin embargo, a partir de la proposición I.27, en la que empiezan a abordarse asuntos que involucran el paralelismo entre rectas, el uso del 5to postulado se vuelve crucial, como por ejemplo para llegar a las demostraciones de resultados fundamentales como que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos (proposición I.32), del teorema de Pitágoras (proposición I.47) o del teorema de Tales (proposición VI.2).

Ahora bien, dada por un lado la relevancia del 5to postulado, pero por otro la especial complejidad de su formulación en comparación con la de los otros cuatro, una pregunta que durante mucho tiempo se abordó era si tomando como ciertos sólo los primeros cuatro postulados, lo que aseguraba el 5to debía cumplirse necesariamente, es decir, si podía demostrarse a partir de los anteriores. En realidad llevó muchos siglos terminar de responder satisfactoriamente, pero algunos avances se fueron dando poco a poco en el sentido de descubrir que si bien al *omitirlo* y dejar sólo los otros cuatro parecían perderse buena parte de los resultados dados por Euclides, no así al *agregar en su lugar* por ejemplo alguno de los siguientes postulados alternativos:

- 5<sub>1</sub>. Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una y sólo una paralela a la recta dada que contiene al punto dado.  
(Postulado de las paralelas)
- 5<sub>2</sub>. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos.  
(Postulado del triángulo)
- 5<sub>3</sub>. Las rectas paralelas son siempre equidistantes.  
(Postulado de equidistancia)
- 5<sub>4</sub>. Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.  
(Postulado de los ángulos correspondientes)

Cualquiera de ellos (o bien el 5to postulado original) implica a los demás, es decir que son equivalentes al tomar inicialmente como ciertos los postulados del 1 al 4. Y más recientemente en el siglo XX se demostró que también el 5to postulado es equivalente al teorema de Pitágoras (ver [17]). Es así que cualquiera de estas versiones alternativas del 5to postulado que se utilice junto con los cuatro primeros genera los mismos resultados, es decir toda la teoría desarrollada por Euclides.

Ahora bien, durante los siglos XVII y XVIII se comenzó a entender que existían otras geometrías que no necesariamente cumplían el 5to postulado ni ninguno de sus equivalentes. Si pensamos en particular en el postulado 5<sub>1</sub>, podía en realidad cumplirse que:

- E. Dada una recta y un punto fuera de ella, no existe ninguna paralela a la recta dada que contiene al punto dado.
- H. Dada una recta y un punto fuera de ella, existe más de una paralela a la recta dada que contiene al punto dado.

Y así fueron inauguradas las geometrías no euclidianas. Actualmente se llama...

... *geometría absoluta*, a la que parte únicamente de los postulados 1-4.

... *geometría hiperbólica*, a la que utiliza los postulados 1-4 y en la que se cumple *H*.

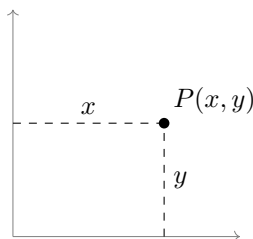
- ... *geometría elíptica*, a la que utiliza los postulados 1-4 y en la que se cumple  $E$ .
- ... *geometría euclidiana*, a la que utiliza los postulados 1-4, así como el 5to postulado (o cualquier otro equivalente).

Lo que se hace en este trabajo corresponde al ámbito de la geometría euclidiana, sin embargo a aquellos que deseen conocer más acerca de las geometrías no euclidianas, se les refiere al libro *Invitación a las geometrías no euclidianas* de Ana Irene Ramírez Galarza y Guillermo Sienna Loera (ver [12]).

Y bien, después de todo este recorrido sobre la estructura teórica de la geometría, basta mencionar que estos cimientos de la geometría euclidiana abren un mundo de posibilidades para estudiar una inmensa variedad de objetos: figuras geométricas, longitudes, áreas, medidas de ángulos, proporciones, curvas como las cónicas, transformaciones rígidas (reflexiones, traslaciones, rotaciones), homotecias... Algo que podría parecer tan completo y bello que no faltara nada más.

## La visión cartesiana

No obstante, muchos siglos más tarde comenzó a abordarse la geometría en el plano también desde una perspectiva distinta. En su libro *La Géométrie*, publicado en 1637, René Descartes introdujo la visión de la geometría analítica. Esta nueva manera de trabajar en el plano consistía en describir cada punto mediante una pareja de números, sus *coordenadas*, que representaban la distancia de dicho punto a dos líneas fijas de referencia (ver figura 1.3).



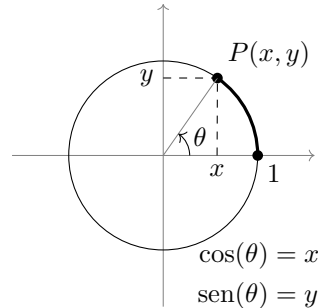
**Figura 1.3:** Coordenadas  $x$  y  $y$  de un punto  $P$  en el plano cartesiano.

Con este par de números era posible traducir relaciones geométricas a relaciones algebraicas y viceversa. Las curvas, por ejemplo, que en la geometría euclidiana eran descritas como el lugar geométrico de los puntos que cumplían cierta característica, en la geometría analítica se describían como el conjunto de puntos cuyas coordenadas cumplían determinada ecuación.

En la actualidad, esta visión cartesiana ha sobrevivido esencialmente sin modificaciones, salvo que por ejemplo en el modelo de Descartes sólo había coordenadas positivas, pues los números negativos eran vistos con desconfianza en su tiempo; ahora en cambio son mucho más comprendidos y aceptados. Además, las dos rectas de referencia se suelen dibujar ahora perpendiculares, mientras que Descartes las dibujaba oblicuas (Maor 2006, pág. 72).

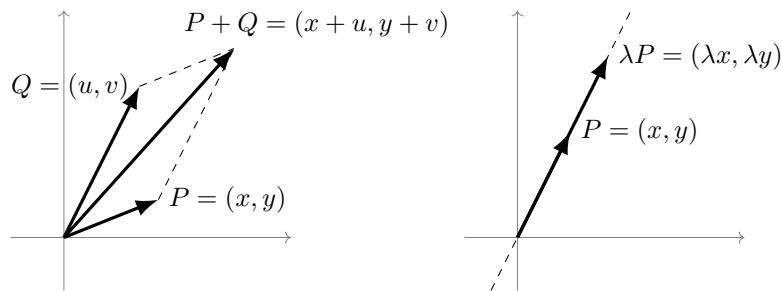
Esta forma de estudiar el plano utilizando como universo de representación al conjunto de parejas de números, al que se le comenzó a llamar justamente plano cartesiano, establecía un camino de ida y vuelta entre la geometría y el álgebra de manera que dos preguntas resultaban naturales: ¿dados ciertos objetos geométricos, cómo describirlos mediante ecuaciones algebraicas? y ¿dadas ciertas ecuaciones algebraicas qué objetos geométricos representan? Justamente, en la materia de Geometría Analítica de bachillerato se suele ver que, si no tienen solución vacía, las ecuaciones de primer grado  $Ax + By + C = 0$  se corresponden con rectas y las de segundo grado  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ , con cónicas.

Por ejemplo, de acuerdo con el teorema de Pitágoras la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  describe la circunferencia unitaria, es decir una circunferencia de radio 1 con centro en el punto  $(0,0)$ , comúnmente llamado *origen*. Además, dado un punto  $P$  con coordenadas  $(x, y)$  sobre la circunferencia unitaria, considerando el ángulo que forma con la parte positiva del eje horizontal y tomando como medida  $\theta$  de dicho ángulo la longitud de la parte de arco que va del punto  $(1,0)$  al punto  $(x, y)$ , se le llama  $\cos(\theta)$  a la coordenada  $x$  del punto  $P$  y  $\text{sen}(\theta)$  a su coordenada  $y$ , de modo que es claro que  $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$ , extendiendo las razones trigonométricas que sólo estaban antes definidas para  $\theta \in (0, \pi/2)$  ahora a cualquier  $\theta \in \mathbb{R}$  (ver figura 1.4).



**Figura 1.4:** La circunferencia unitaria y las funciones seno y coseno.

Algo más que es importante mencionar es que más tarde, indudablemente inspirado por la física, se llegó a considerar a las parejas  $(x, y)$  no sólo como las coordenadas de un punto, sino como objetos en sí mismos, susceptibles de hacer operaciones con ellos. Se les comenzó a llamar vectores y al plano, un espacio vectorial. Formalmente eso significa que se puede hacer las conocidas operaciones de suma y multiplicación por escalar (ver figura 1.5).



**Figura 1.5:** Operaciones de espacio vectorial: suma y producto por escalar.

Finalmente, es importante decir que tan sólo para obtener la distancia entre dos puntos se utiliza el teorema de Pitágoras que, como hemos visto, es equivalente al 5to postulado de Euclides, por lo que no hemos dejado de movernos en el mundo de la geometría euclidiana.

## La visión compleja

Le llamamos así a la manera de entender el plano asociando a cada punto en él un número complejo, es decir, un integrante del conjunto

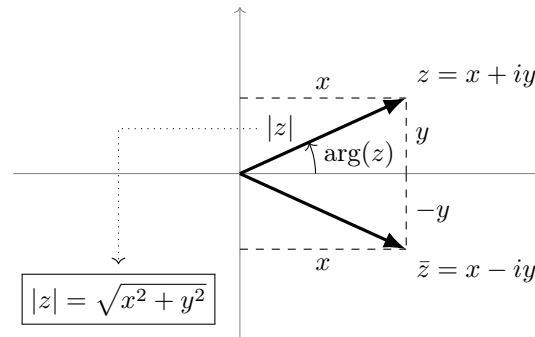
$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

donde dichos números se pueden sumar o multiplicar de manera que si  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ , se tiene que:

$$z + w = (x + u) + i(y + v) \quad y \quad zw = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Tal operación producto contiene implícitamente la propiedad  $i^2 = -1$ .

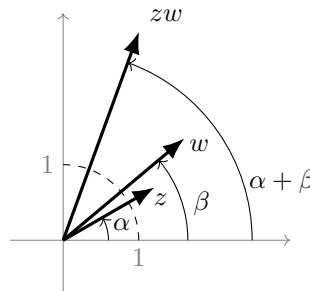
A diferencia del caso anterior en el que la introducción de las coordenadas  $(x, y)$  se hizo para comprender mejor lo que ocurría en el plano euclidiano, en el caso de los números complejos en principio fue al revés. Más bien fue el plano el que ayudó a comprender mejor a los números complejos (si bien luego, felizmente, también se dio el proceso contrario). En realidad los números complejos aparecieron en otro contexto y tuvieron una historia bastante tortuosa (ver el capítulo 5 de [16]) en la que eran descubiertos, pero como no se les veía sentido se les desechaba, pero volvían a salir y parecían ser muy útiles, por lo que se les usaba aunque con desconfianza. Hasta que en medio de todos estos estira y afloja se llegó a la conclusión de que el número complejo  $z = x + iy$  se podía identificar con el punto del plano con coordenadas  $(x, y)$ . Esto es gráficamente un procedimiento extremadamente simple: renombrar una cosa por otra (ver figura 1.6). No obstante, lo aparentemente inocente de esta acción, en la siguiente sección se busca mostrar su gran potencia.



**Figura 1.6:** Un número complejo  $z$ , su módulo  $|z|$ , su argumento  $\arg(z)$  y su conjugado  $\bar{z}$ .

## Los números complejos y el plano

Es posible demostrar que si  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ , entonces hacer el producto  $zw$  se interpreta geoméricamente como sumar los ángulos de  $z$  y  $w$  y multiplicar sus módulos (ver figura 1.7).



**Figura 1.7:** Multiplicar números complejos es sumar argumentos y multiplicar módulos.

Esto es en esencia lo que dice el siguiente teorema.

**Proposición 1.** Para cualesquiera  $x, w \in \mathbb{C}$  se tiene que:

1.  $|zw| = |z||w|$ .
2.  $\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$ .

Expresando un número complejo en su forma polar y aplicando el resultado anterior, resulta claro lo siguiente.

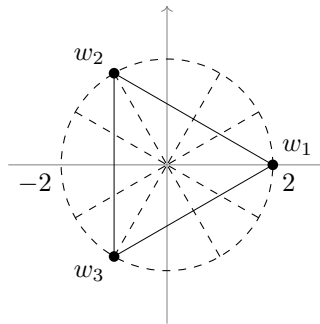
**Proposición 2.** Si  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \in \mathbb{C}$ , entonces  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ .

Y haciendo el camino a la inversa se puede probar este otro resultado.

**Proposición 3.** Si  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ , entonces  $z$  tiene exactamente  $n$  raíces  $n$ -ésimas dadas de la siguiente manera:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Esto es, podemos obtener una raíz  $n$ -ésima de  $z$  sacando la raíz  $n$ -ésima de su módulo y dividiendo su ángulo entre  $n$  y luego las demás sumando repetidas veces la  $n$ -ésima parte de la vuelta completa hasta llegar de nuevo al punto de partida. Como ejemplo, las tres raíces cúbicas de 8 son las mostradas en la figura 1.8.



**Figura 1.8:** Raíces cúbicas de 8.

## La función exponencial compleja y la descripción de bellas curvas

Un resultado conocido de los cursos de cálculo en la Facultad de Ciencias es que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

y también que:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Pues bien, si a semejanza del gran matemático Leonhard Euler, uno hiciera el experimento de sustituir en la primera de ellas el número real  $x$  por el número imaginario puro  $iy$  para ver qué sucede, entonces obtendría que:

$$e^{iy} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots$$

Luego, recordando que las potencias del número  $i$  son cíclicas de manera que

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

$i^5 = i$  de nuevo, y así sucesivamente... y si además uno fuera lo suficientemente osado como para tratar esta serie infinita de la misma manera que lo haría con una suma finita, entonces podría llegar a que:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right),$$

es decir:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Esta identidad, que más adelante se justifica adecuadamente, es conocida justamente como la *fórmula de Euler*, en honor de su curioso descubridor.

Por otro lado, recordando que para  $a, b \in \mathbb{R}$  se cumple que  $e^{a+b} = e^a e^b$ , se podría pensar entonces que para un número complejo  $z = x + iy$  debería suceder que:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

No obstante, el camino seguido hasta aquí para llegar a tal conclusión atraviesa por diversas dificultades nada despreciables. Por ejemplo, el hecho conocido del cálculo real de que reordenar los términos de una serie podría cambiar el resultado final o incluso hacer que no converja (y si así sucede con los números reales, que son una parte de los complejos, entonces también con estos últimos).

Sin embargo, como es común en el universo matemático, uno puede hacer las cosas al revés si eso conviene; esto es, en este caso por ejemplo, tomar dicha expresión final como la definición misma de la función exponencial compleja y averiguar si todo sigue funcionando como se espera. Esto se hace a continuación.

**Definición 1.** Para cualquier número complejo  $x + iy$  se define la función exponencial compleja como:

$$e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

**Observación 1.** A partir de esta definición puede notarse lo siguiente:

1. La exponencial compleja es en efecto una extensión de la función exponencial real, puesto que si  $x \in \mathbb{R}$ :

$$e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x (1 + i0) = e^x.$$

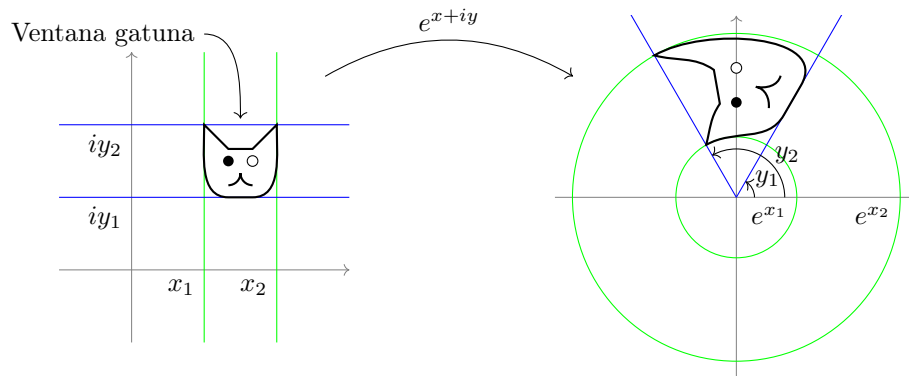
2. Geométricamente, la expresión  $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$  corresponde en coordenadas polares con el vector de módulo  $e^x \in (0, \infty)$  y argumento  $y \in (-\infty, \infty)$ .

3. De ahí que la función exponencial compleja manda...

- ... rectas horizontales (con  $y$  constante) en semirrectas que parten del origen pero no lo incluyen.
- ... rectas verticales (con  $x$  constante) en circunferencias con centro en el origen (recorridas una infinidad de veces).

(Ver figura 1.9.)

4. Para toda  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ :  $e^z \neq 0$ , pues  $|e^z| = e^x > 0$  siempre.
5. La función exponencial transforma todo el plano complejo en el plano complejo sin el origen.



**Figura 1.9:** La función exponencial transformando el plano  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Es un ejercicio interesante imaginar dinámicamente lo que sucede con el gato imagen si en la figura anterior se mueve una o varias de las cuatro líneas que forman la ventana gatuna del dominio.

**Ejemplo 1.** ¿Qué números complejos son los siguientes y dónde se ubican en el plano complejo?

1.  $e^{iy}$  con  $y \in \mathbb{R}$ .
2.  $e^{i(n\frac{\pi}{2})}$  con  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solución:**

1.  $e^{iy} = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \operatorname{sen} y) = (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ , que es el vector de argumento  $y$  sobre la circunferencia unitaria.
2. Del inciso anterior, tenemos por ejemplo que

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{2\pi} = 1,$$

y en general

$$e^{i(n\frac{\pi}{2})} = \begin{cases} i & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \\ 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

¿Reconoce, lector, esta secuencia de números? Si es así, podrá notar que de hecho la igualdad anterior se puede escribir de manera sintética como:

$$e^{i(n\frac{\pi}{2})} = i^n,$$

lo cual aritméticamente puede ser algo obscuro, pero geoméricamente es bastante claro, ¿no es cierto?

□

Dicho sea de paso, para  $n = 2$  se tiene que  $e^{i\pi} = i^2 = -1$ , igualdad que puede reescribirse como:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,}$$

una fórmula realmente interesante, ¿no le parece?... Pues bien, esta igualdad, conocida como la *identidad de Euler* es una de las ecuaciones más apreciadas por su belleza matemática, pues por ejemplo, en palabras de Eli Maor (2006, pág. 160):

“... conecta las cinco constantes más importantes de las matemáticas (y también las tres operaciones más importantes: suma, producto y exponenciación). Estas cinco constantes simbolizan las cuatro ramas principales de la matemática clásica: aritmética, representada por 0 y 1; álgebra, por  $i$ ; geometría, por  $\pi$ ; y análisis, por  $e$ .”

Terminado este breviarío cultural pasamos a probar que, en efecto, la propiedad de la exponencial real de convertir las sumas del exponente en productos sigue siendo válida con la exponencial compleja.

**Proposición 4** (Propiedad fundamental de la exponencial). Para cualesquiera  $z, w \in \mathbb{C}$  se tiene que:

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

**Demostración:** Si  $z = a + ib$  y  $w = c + id$ , entonces:

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{a+c}[\cos(b+d) + i \operatorname{sen}(b+d)] \\ &= e^{a+c}[(\cos b \cos d - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} d) + i(\operatorname{sen} b \cos d + \cos b \operatorname{sen} d)] \\ &= e^a e^c (\cos b + i \operatorname{sen} b)(\cos d + i \operatorname{sen} d) = e^z e^w. \end{aligned}$$

□

Finalmente abordaremos otro aspecto muy importante de la función exponencial compleja. Si llamamos

$$\underbrace{e^{x+iy}}_{f(x,y)} = \underbrace{(e^x \cos y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{(e^x \operatorname{sen} y)}_{v(x,y)},$$

tendremos que las funciones  $u$  y  $v$  son diferenciables en el sentido real para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y además:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x \cos y \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y & \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

(de ahí que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann).



Esto implica que la función exponencial compleja es holomorfa en todo  $\mathbb{C}$ , y además

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^{(x+iy)},$$

es decir que la función exponencial compleja es derivable en todo el plano complejo y, como en el caso real, su derivada coincide con ella misma.

Que esta función sea holomorfa en todo el plano implica que por lo tanto es conforme en todo el plano (lo cual en términos simples significa que preserva ángulos). Esta notable característica y la inicialmente inesperada relación entre las funciones circulares y la exponencial compleja le dan a esta función un gran poder para describir y estudiar curvas que giran, como veremos a continuación.

### Circunferencias y rayos

Como ya se mencionó, la función exponencial compleja transforma el plano como sigue:

rectas horizontales  $\mapsto$  rayos que parten del origen, sin incluirlo.

rectas verticales  $\mapsto$  circunferencias con centro en el origen.

Esto ilustra la conformalidad de dicha función, puesto que en el dominio las rectas horizontales y las rectas verticales son perpendiculares entre sí, y en el contradominio, los rayos y las circunferencias, en efecto preservan dicha relación angular.

Por otro lado, queda claro que para la descripción de circunferencias es muy útil la función exponencial. Por ejemplo, una forma de parametrizar una circunferencia de radio  $r$  con centro en el origen es aplicando la función exponencial al segmento de recta tal que  $x = \log r$  y  $y \in (y_0, y_0 + 2\pi]$ , obteniéndose la expresión:

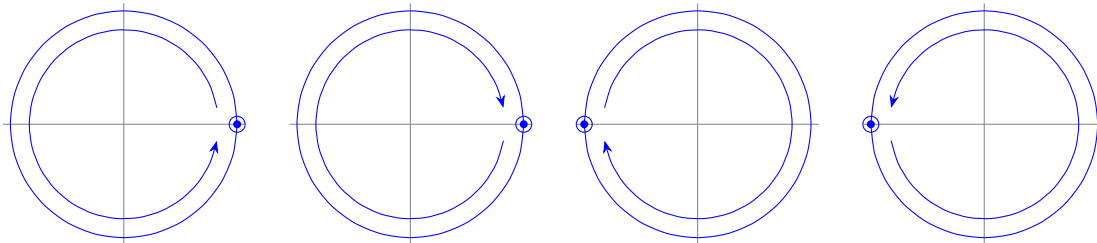
$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = r e^{iy}.$$

O, utilizando otra variable más común para denotar ángulos y poniendo esta expresión como función de una variable (dado que la otra está fija), esto es:

$$\gamma(\theta) = r e^{i\theta},$$

con  $\theta$  en un intervalo cualquiera de longitud  $2\pi$  abierto por un extremo y cerrado por el otro (para lograr que, además de todo, dicha función del intervalo en la circunferencia sea biyectiva).

Fijando  $r = 1$ , la anterior parametrización no es la única que describe a la circunferencia unitaria. Es un ejercicio ilustrativo identificar a qué forma de recorrerla corresponde cada una de las siguientes parametrizaciones, y si dos hacen lo mismo, demostrar que en efecto es así usando la definición 1 y la proposición 4:  $e^{i\theta}$ ,  $-e^{-i\theta}$ ,  $e^{-i\theta}$ ,  $\overline{e^{i\theta}}$ ,  $e^{i(\theta+\pi)}$ ,  $-\left(\overline{e^{i\theta}}\right)$ ,  $e^{i(\pi-\theta)}$ ,  $e^{i(\theta+2\pi)}$ .



**Figura 1.10:** Distintas formas de recorrer la circunferencia unitaria.

Por ejemplo,  $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) = \cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta) = \overline{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} = \overline{e^{i\theta}}$ .

## Espirales

Desde tiempos antiguos las espirales han sido motivo de especial atención para la humanidad, tal vez básicamente por su singular belleza o quizá también por su sugerente forma de evocar al infinito. Su estructura se puede reconocer en el mundo biológico, en el mundo físico y también en el mundo humano.

En las matemáticas, las espirales también han tenido un lugar especial. Es opinión del autor de esta tesis que de dicho objeto en el pensamiento pudieron haberse nutrido fuertemente ciertos conceptos fundamentales de las matemáticas como el del infinito, la convergencia y la divergencia. Lo cierto es que matemáticos de gran talla dedicaron una parte importante de su quehacer a estudiarlas. Arquímedes, por ejemplo, escribió un tratado, *Sobre las espirales*, en el que se estudia la que tomaría el nombre de *espiral de Arquímedes*. Jakob Bernoulli por su parte dedicó parte importante de su trabajo a estudiar otra espiral distinta, la ya nombrada en ese entonces como *espiral logarítmica*, que se convirtió en su curva favorita y a la que él rebautizó como *spira mirabilis* (espiral maravillosa).

En ambos casos, la manera más natural de describirlas es en términos de coordenadas polares. La espiral de Arquímedes mediante la ecuación:  $r = a + b\theta$  y la *spira mirabilis*, mediante la ecuación  $\ln r = a\theta$  con  $a$  y  $\theta$  números reales o, equivalentemente,  $r = e^{a\theta}$ .

Otras formas espirales también aparecen en las matemáticas, como en la *espiral de Teodoro*, que organiza de manera bastante bonita las raíces cuadradas de todos los números naturales; la *espiral áurea*, formada a partir de un rectángulo áureo que contiene una infinidad de rectángulos semejantes de menor tamaño; el conjunto de Mandelbrot, en algunas de sus zonas fronterizas; e incluso también en la demostración clásica de Cálculo 1 de que algunos conjuntos como  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tienen tantos elementos como los números naturales.

Pues bien, así como con ayuda de la función exponencial compleja es posible parametrizar de manera increíblemente sintética a las circunferencias con centro en el origen (simplemente como  $re^{i\theta}$ ), uno podría intentar ahora parametrizar alguna espiral, en la que la distancia al origen no se mantenga fija como en una circunferencia, sino que vaya aumentando o disminuyendo conforme se gira. Una manera de buscar el camino es recordando que la función exponencial compleja envía líneas horizontales a circunferencias de distintos radios, por lo que una línea que en el dominio vaya atravesando las distintas líneas horizontales, se convertirá en el contradominio en una línea que de alguna manera irá atravesando las distintas circunferencias.

La manera más sencilla de comenzar a explorar este comportamiento es analizando lo que sucede con las líneas rectas no horizontales que pasan por el origen, las de la forma  $y = mx$  con  $m \neq 0$  (a las que más adelante sólo habrá que incorporar el eje  $Y$ ). Veamos qué sucede con ellas al aplicarles la función exponencial.

Tomemos los puntos de una recta con ecuación  $y = mx$  para  $m \neq 0$ . Aplicando la función exponencial a estos puntos obtenemos que:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x(\cos mx + i \operatorname{sen} mx),$$

que en coordenadas polares corresponde con el vector  $(r, \theta)$  tal que

$$r = e^x \quad \text{y} \quad \theta = mx.$$

De ahí vemos que si tomamos  $a = 1/m$  se cumple que  $r = e^x = e^{a\theta}$ , es decir, es en realidad una *spira mirabilis* (pues cumple con su ecuación).

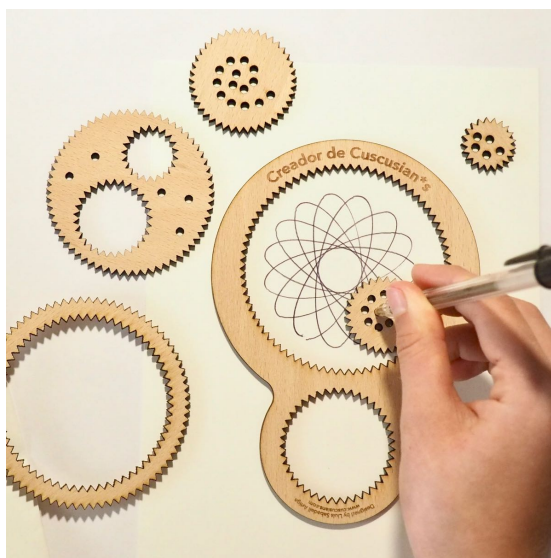
Algo importante de haber hecho esto, además de corroborar que en efecto logramos describir una espiral como habíamos intuido, es la posibilidad de probar de manera muy sencilla una de las propiedades más llamativas de esta espiral: el hecho de que cualquier radio vector que parte del centro de la espiral la corta siempre con el mismo ángulo de inclinación. Esto se debe, de

nuevo, a la conformalidad de la función exponencial y al hecho de que en el dominio la recta  $y = mx$  (que se transforma en la espiral) corta a las rectas horizontales (que se transforman en los rayos) siempre con el mismo ángulo; es dicho ángulo el que se mantiene siempre igual también en el contradominio.

### Hipotrocoides: las curvas del espirógrafo

Posiblemente el lector de esta tesis (a semejanza de quién la escribe) haya pasado buenos momentos de su niñez jugando con un espirógrafo. En tal caso recordará cómo se podía elaborar así una multitud de dibujos bastante coloridos y bellos mediante la acción coordinada de las manos, algunas plumas de colores y esta colección de anillos, círculos y otras figuras con los bordes dentados (algunas por dentro y otras por fuera) y con algunos orificios en determinados lugares.

Maravillosamente, para echar a andar este fascinante mecanismo de dibujo uno no necesitaba entender gran cosa, y sin embargo no podía dudar de que en el fondo algo muy interesante debía estar sucediendo, pues si se procedía con suficiente cautela, el resultado final solía ser bastante asombroso.

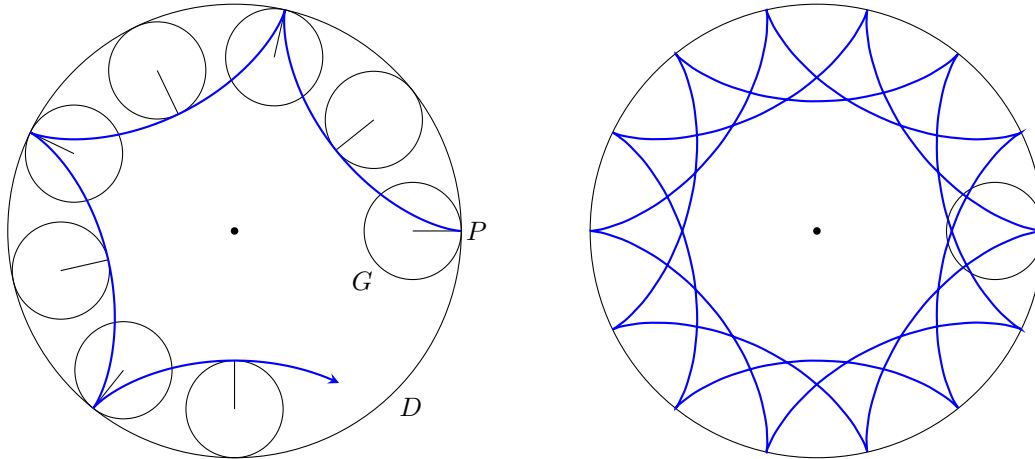


**Figura 1.11:** Espirógrafo de madera (imagen obtenida de internet).

Ya con algo de experiencia práctica uno podía quizá comenzar a hacerse algunas preguntas de tinte científico como las siguientes: ¿luego de comenzar a dibujar con el espirógrafo una cierta curva, será posible unir su final con su principio si uno sigue y sigue dibujando lo suficiente?, ¿cuándo sí y cuándo no?, ¿en caso de que sí, cuántas vueltas será necesario dar?, ¿y en tal situación, cuántos puntos extremos (los más alejados y los más cercanos a su centro) tendrá la figura resultante?, ¿de qué depende todo esto?

Pues bien, en esta sección, ya con más elementos teóricos que cuando éramos niños, con el ejemplo de Richard Courant y Fritz John (2001, pp. 347-351), y con la herramienta de la función exponencial compleja, abordaremos éstas y otras cuestiones que nos ayudarán a familiarizarnos con este tipo de curvas cuyo nombre matemático es el de *hipotrocoides*, y algunas de las cuales de manera sorpresiva aparecen y son relevantes al estudiar la dinámica de la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ .

Comenzaremos este estudio analizando un caso particular. Para empezar, una *hipocicloide* se define como la trayectoria descrita por un punto  $P$  situado sobre una circunferencia (*generatriz*)  $G$  de radio  $r > 0$  que rueda sin deslizamiento por el interior de otra circunferencia (*directriz*)  $D$  de radio  $R > 0$ .



**Figura 1.12:** Trazado de una hipocicloide.

Mirando el proceso de trazado de una hipocicloide podemos hacer varias observaciones:

1. Al ir girando la circunferencia  $G$  por el interior de la circunferencia  $D$ , el punto  $P$  se acerca y se aleja del centro de  $D$  de manera alternada. A los lugares por los que pasa  $P$  que están más alejados del centro de la circunferencia directriz les llamaremos *crestas* y a los lugares por los que pasa que están más cercanos al centro les llamaremos *valles*.
2. Es geoméricamente claro que cuando la circunferencia  $G$  pasa de estar en la posición en la que se alcanza una cresta a estar en la posición en la que se alcanza la siguiente, la longitud del arco de  $D$  recorrido debe ser igual al perímetro de  $G$ , pues en este movimiento cada punto de la circunferencia  $G$  entró en algún momento en contacto con alguno de dicho arco de la circunferencia  $D$  y tal contacto es por definición sin deslizamiento.
3. También es geoméricamente visible que cuando la circunferencia  $G$  da una vuelta completa a lo largo de toda la circunferencia  $D$  y su centro llega al mismo punto que en el que estaba al principio, la longitud recorrida coincide justamente con el perímetro de  $D$ . Nótese que no necesariamente la circunferencia  $G$  queda en la misma orientación que en la que estaba inicialmente (como en el ejemplo de la figura 1.12, en la que el punto  $P$  después de esta vuelta no quedó en el mismo lugar; de hecho, que eso suceda es lo más probable).
4. Finalmente, para que la curva pueda cerrar, se necesita que en algún momento el centro de  $G$  caiga de nuevo donde estaba al inicio (de lo cual se habla en el inciso anterior) así como que el punto  $P$  caiga de nuevo sobre la circunferencia  $D$ , de lo cual se habla en el inciso previo al anterior). Es decir, que la longitud recorrida sea tanto múltiplo del perímetro de  $D$  como múltiplo del perímetro de  $G$ . Eso equivale a que existan  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que

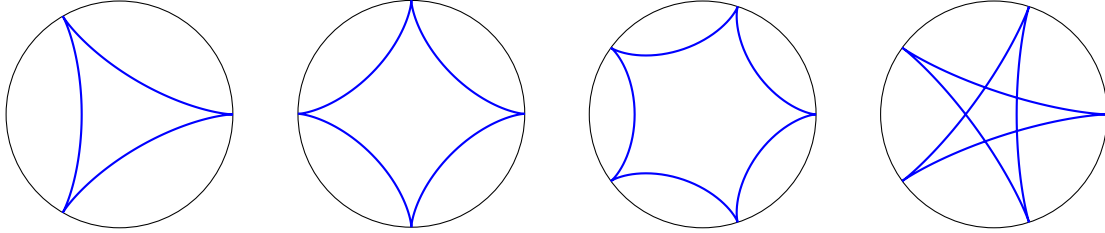
$$p(2r\pi) = q(2R\pi),$$

o, lo mismo, tales que

$$\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$$

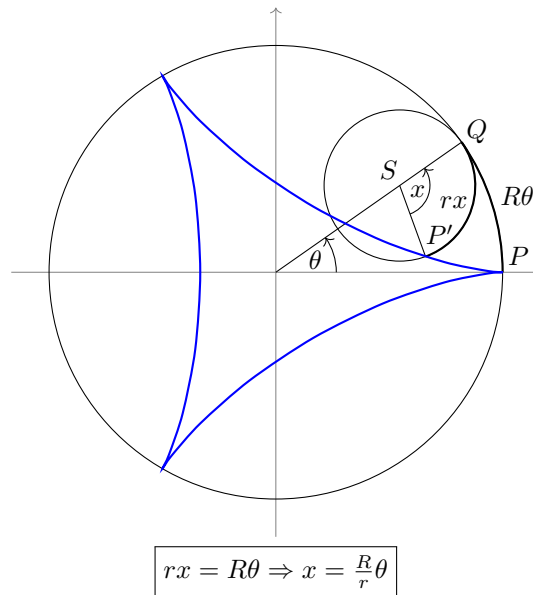
(es decir, en términos griegos, que los segmentos de longitudes  $R$  y  $r$  sean conmensurables). La penúltima ecuación se puede interpretar además como que la circunferencia  $G$  hizo su recorrido dando  $p$  vueltas (generando entonces  $p$  crestas y  $p$  valles) y para ello tuvo que darle  $q$  vueltas a  $D$  (si bien esto es cierto para cualesquiera números naturales  $p$  y  $q$ , la información más precisa, como veremos adelante, se obtiene cuando la fracción  $p/q$  ya está simplificada). En la figura 1.12 se tiene por ejemplo que  $R/r = 14/3$ .

En seguida, algunos ejemplos más (ver figura 1.13).



**Figura 1.13:** Hipocicloides con razón  $R/r$  igual a 3, 4, 5 y  $5/2$ .

Ahora bien, para encontrar cómo describir una hipocicloide en el plano complejo, y formular y demostrar en tal contexto lo que hasta ahora hemos observado visualmente, comencemos ubicando la circunferencia directriz de radio  $R$  con su centro en el origen, la circunferencia generatriz de radio  $r$  internamente tangente a ella del lado positivo del eje horizontal y el punto  $P$  en la intersección de ambas.



**Figura 1.14:** Parametrización de una hipocicloide.

Luego de que al girar  $G$  su centro  $S$  se ha movido un ángulo  $\theta$ , y considerando el punto de tangencia  $Q$  en la figura 1.14, podemos notar que la longitud  $R\theta$  del arco  $PQ$  coincide con la del arco  $P'Q$ , por lo que el ángulo central del arco  $P'Q$  es  $\frac{R}{r}\theta$ . Ya con esto es posible calcular la nueva posición  $P'$  del punto  $P$  al considerar el camino del origen a  $P'$  pasando por  $S$ , y con

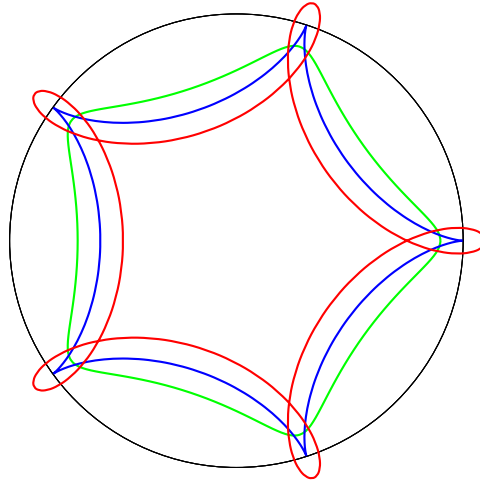
ayuda de las parametrizaciones de las circunferencias involucradas en estos dos pasos. Dicha posición, tomada en función del ángulo  $\theta$ , resulta ser entonces  $\gamma(\theta) = (R - r)e^{i\theta} + re^{i(\theta - \frac{R}{r}\theta)}$  o, lo mismo:

$$\gamma(\theta) = (R - r)e^{i\theta} + re^{-i(\frac{R-r}{r}\theta)}.$$

Ahora bien, si en lugar de tomar inicialmente el punto  $P$  en la orilla de la circunferencia generatriz  $G$  lo tomamos en general a una distancia  $d \geq 0$  de su centro (a la que llamaremos *desplazamiento central*), lo que se dibuja es una *hipotrocoide*, con la ecuación ligeramente distinta:

$$\tau(\theta) = (R - r)e^{i\theta} + de^{-i(\frac{R-r}{r}\theta)},$$

que coincide con una hipocicloide en el caso particular en el que  $d = r$ . Adicionalmente, se le llama *hipotrocoide disminuida* cuando  $0 \leq d < r$  e *hipotrocoide aumentada* cuando  $r < d$  (ver figura 1.15).



**Figura 1.15:** Hipocicloide (*azul*) e hipotrocoides aumentada (*rojo*) y disminuida (*verde*).

Suponiendo que  $0 < r < R$  (veremos que basta analizar este caso para comprender también el caso  $0 < R < r$ ), dicha ecuación también se puede escribir como:

$$\tau(\theta) = me^{i\theta} + ne^{-ik\theta},$$

con

$$m = R - r > 0, \quad n = d \geq 0 \quad \text{y} \quad k = \frac{R - r}{r} > 0.$$

Notemos que según las tres igualdades anteriores, también se puede hacer el proceso a la inversa. Es decir, si lo que se tiene son los tres parámetros  $m > 0$ ,  $n \geq 0$  y  $k > 0$ , entonces se obtiene que:

$$r = \frac{m}{k} > 0, \quad R = \frac{m}{k} + m > r \quad \text{y} \quad d = n \geq 0.$$

Además el cociente del radio de la circunferencia directriz entre el de la circunferencia generatriz, al que llamaremos *razón radial* dada su relevancia, se puede calcular como  $\frac{R}{r} = k + 1$ .

Algunas propiedades importantes de las hipotrocoides así descritas se tratan a continuación.

**Proposición 5.** Dados tres números reales  $m > 0$ ,  $n > 0$  y  $k > 0$ , y la siguiente parametrización:

$$\tau(\theta) = me^{i\theta} + ne^{-ik\theta},$$

se tiene que la hipotrocoide generada por  $\tau(\theta)$  al variar  $\theta \in \mathbb{R}$ :

1. Se encuentra acotada en un anillo centrado en el origen de radio menor  $|m - n|$  y radio mayor  $m + n$ .
2. Toca a la circunferencia mayor si y sólo si

$$\theta = c\hat{\theta}, \quad \text{con } c \text{ par y } \hat{\theta} = \frac{2\pi}{2(k+1)},$$

y eso sucede en el punto  $\tau(\theta)$ , al que llamaremos *cresta*, de módulo  $m + n$  y argumento  $\theta$ .

3. Toca a la circunferencia menor si y sólo si

$$\theta = c\hat{\theta}, \quad \text{con } c \text{ impar y } \hat{\theta} = \frac{2\pi}{2(k+1)},$$

y eso sucede en el punto  $\tau(\theta)$ , al que llamaremos *valle*, de módulo  $|m - n|$  y argumento

$$\begin{cases} \theta & \text{si } m > n \\ \theta + \pi & \text{si } m < n \end{cases}$$

(si por otro lado  $m = n$ ,  $\tau(\theta)$  es el origen, que no tiene módulo definido).

*Nota:* Las fracciones a la que se iguala  $\theta$  en este inciso y en el anterior se pueden simplificar, por supuesto, pero así como están queda más claro que dividiendo la vuelta total de medida  $2\pi$  entre el doble del número  $k + 1 = R/r$  y variando  $c$  en todos los enteros, la curva va alternando su paso entre ambas circunferencias una y otra vez infinitamente.

4. Es periódica si y sólo si el número  $k + 1 = R/r$  es racional y en ese caso su periodo es  $q(2\pi)$ , donde  $q$  es el denominador de la fracción ya simplificada  $k + 1 = p/q$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$  sin factores primos en común.
5. Es periódica si y sólo si el número de crestas y el número de valles son finitos, y en ese caso hay exactamente  $p$  crestas y  $p$  valles, donde  $p$  es el numerador de la fracción ya simplificada  $k + 1 = p/q$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$  sin factores primos en común.

### Demostración:

1. Debemos probar que  $|m - n| \leq |\tau(\theta)| \leq m + n$ . Nombrando

$$\tau(\theta) = \underbrace{me^{i\theta}}_z + \underbrace{ne^{-ik\theta}}_w,$$

y usando las desigualdades del triángulo

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{y} \quad ||z| - |w|| \leq |z - (-w)|,$$

obtenemos que:

$$|\gamma(t)| \leq |m| + |n| \quad \text{y} \quad ||m| - |n|| \leq |\gamma(t)|,$$

y como  $m$  y  $n$  son no negativos, se obtiene lo que se quería.

2. Sabemos que en la primera de las dos desigualdades del triángulo del inciso anterior se da la igualdad si y sólo si  $z$  y  $w$  tienen las mismas dirección y sentido y eso sucede si y sólo si sus argumentos son congruentes módulo  $2\pi$ , es decir,

$$\theta \equiv -k\theta \pmod{2\pi},$$

es decir si y sólo si

$$\theta(k+1) \text{ es múltiplo de } 2\pi.$$

Esto es, existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\theta = 2t \left[ \frac{\pi}{k+1} \right] = c \left[ \frac{2\pi}{2(k+1)} \right], \quad \text{con } c = 2t \text{ par.}$$

Además, en este caso se tiene que  $\tau(\theta) = z + w$  tiene el mismo argumento que ambos, es decir igual a  $\theta$ .

3. Sabemos que en la segunda de las dos desigualdades del triángulo usadas en el primer inciso se da la igualdad si y sólo si  $z$  y  $-w$  tienen las mismas dirección y sentido, es decir, si y sólo si  $z$  y  $w$  tienen la misma dirección y sentidos contrarios. Esto, en términos de sus argumentos, significa que

$$\theta + \pi \equiv -k\theta \pmod{2\pi},$$

o lo mismo,

$$\theta(k+1) + \pi \text{ es múltiplo de } 2\pi.$$

Es decir, existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\theta = (2t-1) \left[ \frac{\pi}{k+1} \right] = c \left[ \frac{2\pi}{2(k+1)} \right], \quad \text{con } c = 2t-1 \text{ impar.}$$

Además, en este caso se tiene que si  $m > n$ , entonces  $\tau(\theta) = z+w$  tiene el mismo argumento que  $z$ , es decir  $\theta$ ; pero si  $m < n$ , entonces  $\tau(\theta)$  tiene el mismo argumento que  $w$ , es decir, tiene la misma dirección pero sentido contrario que  $z$ , es decir, tiene argumento  $\theta + \pi$ .

4. Comenzaremos probando que

$$\tau \text{ es periódica} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \exists \tilde{\theta} \in \mathbb{R}, \text{ con } \tilde{\theta} \neq 0, \text{ tal que } \tau(\tilde{\theta}) = \tau(0) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} k+1 \in \mathbb{Q}.$$

$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$  Tenemos que

$$\tau(\tilde{\theta}) = \tau(0) \Leftrightarrow |\tau(\tilde{\theta})| = m+n \quad \text{y} \quad \arg(\tau(\tilde{\theta})) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Por los incisos anteriores, para  $\tilde{\theta} \neq 0$  eso sucede si y sólo si para algún  $c$  par (que no sea cero)

$$\tilde{\theta} = \frac{c}{2(k+1)} 2\pi \quad \text{y} \quad \tilde{\theta} \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Y esto sucede si y sólo si para algún (entero)  $\in \mathbb{Z}$  (que tampoco sea cero)

$$\frac{c}{2(k+1)} 2\pi = 2\pi(\text{entero}) \Leftrightarrow k+1 = \frac{c}{2(\text{entero})} \Leftrightarrow k+1 \in \mathbb{Q}$$

(recuerde que  $k+1 > 0$ ).



$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$  Si  $\tau(\theta)$  es periódica, por definición existe  $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ , con  $\tilde{\theta} \neq 0$ , tal que  $\tau(\theta + \tilde{\theta}) = \tau(\theta)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , en particular para  $\theta = 0$ .

$\stackrel{(1)}{\Leftarrow}$  Si  $\tau(\tilde{\theta}) = \tau(0)$ , entonces  $\tilde{\theta}$  es múltiplo de  $2\pi$  (ver demostración de  $\stackrel{(2)}{\Leftarrow}$ ) y para cualquier  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\tau(\theta + \tilde{\theta}) = me^{i\theta} \underbrace{e^{i\tilde{\theta}}}_1 + ne^{-ik\theta} \underbrace{e^{-ik\tilde{\theta}}}_1 = \tau(\theta).$$

Ya resuelta esta parte, veremos que el periodo de  $\tau$  es  $q(2\pi)$ , donde  $q$  es el denominador de la fracción ya simplificada  $p/q = k + 1$ .

Siguiendo la cadencia de implicaciones y retomando algunas partes de las demostraciones anteriores, tenemos que si  $\tau(\theta + \tilde{\theta}) = \tau(\theta)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\tau(\tilde{\theta}) = \tau(0)$  y luego existe un (entero)  $\in \mathbb{Z}$  tal que  $\tilde{\theta} = 2\pi(\text{entero})$ . Además

$$\frac{p}{q} = k + 1 = \frac{2t}{2(\text{entero})} \quad \text{donde} \quad 2t = c.$$

De ahí que

$$(\text{entero}) = \frac{tq}{p}$$

y como  $p$  es primo relativo con  $q$ , pero divide a  $tq$ , entonces  $p$  divide a  $t$  y el valor mínimo positivo que puede tomar (entero) es cuando  $t = p$ , es decir, (entero) =  $\frac{pq}{p} = q$ . Así, el periodo de  $\tau$  es igual a  $\tilde{\theta} = q(2\pi)$ .

5. Primero veamos que si el número de crestas es finito, entonces existen  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  distintos, con

$$\theta_1 = 2t_1 \left[ \frac{2\pi}{2(k+1)} \right] \quad \text{y} \quad \theta_2 = 2t_2 \left[ \frac{2\pi}{2(k+1)} \right], \quad \text{para algunos } t_1, t_2 \in \mathbb{Z} \text{ distintos,}$$

tales que

$$\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

Como el lector podrá corroborar, eso implica que en  $\theta_2 - \theta_1 \neq 0$  se alcanza también una cresta, de hecho tal que  $\tau(\theta_2 - \theta_1) = \tau(0)$ , por lo que  $\tau$  es periódica, según la demostración del inciso anterior.

A la inversa, si lo que sabemos es que  $\tau$  es periódica, entonces como ya vimos, la razón  $R/r = k + 1$  es racional y la podemos escribir como  $k + 1 = p/q$  con  $p, q \in \mathbb{N}$  sin factores primos en común. Luego, tenemos que dos ángulos  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ , con  $\theta_i = 2t_i(2\pi/2(k+1))$  para  $i = 1, 2$ , corresponden con la misma cresta si y sólo si  $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ , es decir, si y sólo si existe (entero)  $\in \mathbb{Z}$  tal que:

$$(2t_2 - 2t_1) \left[ \frac{2\pi}{2(k+1)} \right] = (\text{entero})2\pi.$$

Esto equivale a que

$$q(t_2 - t_1) = (\text{entero})p.$$

Luego,  $p$  divide a  $q(t_2 - t_1)$ , pero como  $p$  es primo relativo con  $q$ , entonces  $p$  divide a  $(t_2 - t_1)$ , es decir

$$t_1 \equiv t_2 \pmod{p}.$$

Esto es:  $\theta_1$  y  $\theta_2$  corresponden con la misma cresta si y sólo si  $t_1$  y  $t_2$  están en la misma clase de congruencia módulo  $p$ . En conclusión hay  $p$  crestas distintas, correspondientes a

$$\theta = 2t \left[ \frac{2\pi}{2(k+1)} \right], \quad \text{con } t \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}.$$

Y algo análogo ocurre con los valles, aunque para

$$\theta = (2t-1) \left[ \frac{2\pi}{2(k+1)} \right], \quad \text{con } t \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}.$$

□

Este teorema nos será muy útil para darnos una idea del aspecto de una hipotrocoide dada su ecuación, como se muestra a continuación.

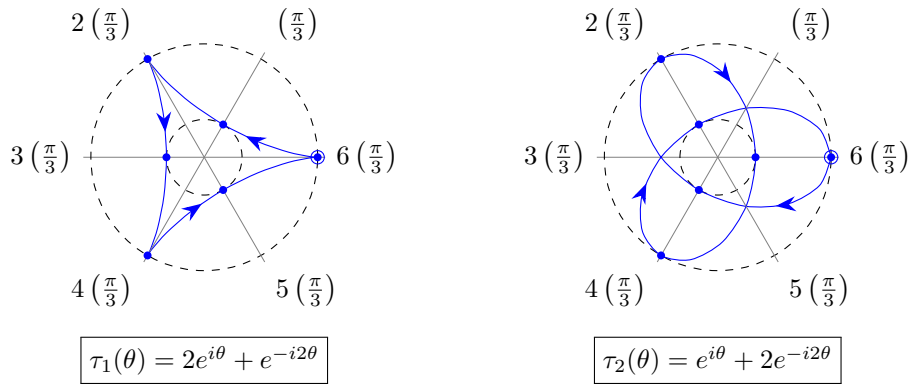
**Ejemplo 2.** Considérese las curvas parametrizadas como

$$\tau_1(\theta) = 2e^{i\theta} + e^{-i2\theta} \quad \text{y} \quad \tau_2(\theta) = e^{i\theta} + 2e^{-i2\theta}.$$

En ambos casos se tiene que

$$|m-n| = 1, \quad m+n = 3 \quad \text{y} \quad \hat{\theta} = 2\pi/2(k+1) = \pi/3,$$

por lo que ambas curvas están contenidas en un anillo de radio menor 1 y radio mayor 3. Según ambas ecuaciones,  $k+1 = 3/1$ , por lo que el periodo de las dos hipotrocoides es  $2\pi$ , y tienen ambas 3 crestas y 3 valles. Ambas curvas pasan por los puntos de la circunferencia mayor con argumentos  $0, 2\pi/3$  y  $4\pi/3$ . Finalmente, la primera curva, en la que  $m > n$ , pasa por los puntos de la circunferencia menor de argumentos  $\pi/3, 3\pi/3$  y  $5\pi/3$  y la segunda curva, en la que  $m < n$ , pasa por los puntos que resultan de rotar los tres anteriores media vuelta alrededor del origen (ver figura 1.16).



**Figura 1.16:** Curvas generadas por  $\tau_1$  y  $\tau_2$ .

Adicionalmente, en cuanto a su construcción mecánica, la primera curva corresponde con una hipotrocoide de radio directriz  $R = m/k+m = 3$ , radio generatriz  $r = m/k = 1$  y desplazamiento central  $d = n = 1 = r$  (es decir que es en realidad una hipocicloide). Por su parte, la segunda curva corresponde con una hipotrocoide de radio directriz  $R = m/k+m = 3/2$ , radio generatriz  $r = m/k = 1/2$  y desplazamiento central  $d = n = 2$ .

### ¡Más hipotrocoides?

Dados  $m > 0$ ,  $n \geq 0$  y  $k > 0$  ya sabemos que la parametrización

$$\tau(\theta) = me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}$$

describe una hipotrocoide con determinadas características. Pero, uno también puede preguntarse qué sucede con expresiones ligeramente distintas como:

1.  $\gamma_1(\theta) = -me^{i\theta} - ne^{-ik\theta}$ .
2.  $\gamma_2(\theta) = me^{i\theta} - ne^{-ik\theta}$ .
3.  $\gamma_3(\theta) = -me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}$ .

Cada una de ellas está compuesta por dos sumandos que de manera independiente generan circunferencias al variar el ángulo  $\theta$ , sólo que una girando en un sentido y la otra en sentido inverso. Esa articulación de movimientos recuerda la manera de construir las hipotrocoides, así que la intuición podría sugerir que, en efecto, eso sucede en cualquiera de estos casos. Pero, ¿será esto así?

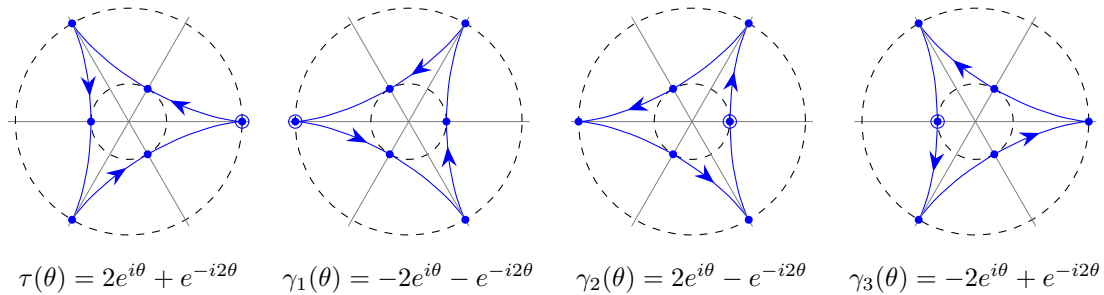
Veamos qué sucede con  $\gamma_2$ . Recordando la relación de los coeficientes  $m$ ,  $n$  y  $k$  con las medidas  $R$ ,  $r$  y  $d$ , resulta que cambiar  $n$  por  $-n$  equivale a cambiar  $d$  por  $-d$ . Y en el esquema del que obtuvimos la parametrización de las hipotrocoides eso equivale a tomar la posición inicial del punto  $P$  en un valle en lugar de una cresta, pero la construcción de la hipotrocoide sigue funcionando. Geométricamente eso equivale a rotar la hipotrocoide original un ángulo  $\hat{\theta}$  pero comenzar a recorrerla con un desfase de  $-\hat{\theta}$  donde  $\hat{\theta} = \pi/(k+1)$ . En efecto, analíticamente todo cuadra, pues esto último se ve así:

$$\begin{aligned} e^{i\hat{\theta}}\tau(\theta - \hat{\theta}) &= me^{i(\theta - \hat{\theta})}e^{i\hat{\theta}} + ne^{-ik(\theta - \hat{\theta})}e^{i\hat{\theta}} \\ &= me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}e^{i(k+1)\hat{\theta}} \\ &= me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}e^{i\pi} \\ &= me^{i\theta} - ne^{-ik\theta}. \end{aligned}$$

Llegar a  $\gamma_1$  a partir de  $\tau$  es mucho más fácil, pues basta multiplicar por  $-1$ , que equivale a rotar la figura un ángulo  $\pi$ . Es decir:

$$e^{i\pi}\tau(\theta) = -1(me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}) = -me^{i\theta} - ne^{-ik\theta}.$$

Finalmente, ambas estrategias se pueden usar para llegar de  $\tau$  a  $\gamma_3$  pasando por  $\gamma_2$ . Esto es: la curva descrita por  $\gamma_3$  es la misma que la curva generada por  $\gamma_2$ , pero rotada un ángulo  $\pi$  (ver figura 1.17).



**Figura 1.17:** Hipotrocoides con parametrizaciones parecidas.

Todo esto puede resumirse de la siguiente manera.

**Proposición 6.** Sean  $m > 0$ ,  $n \geq 0$  y  $k > 0$ ,  $\tau(\theta) = me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}$  y  $\widehat{\theta} = \pi/(k+1)$ . Entonces:

1.  $\gamma_1(\theta) = -me^{i\theta} - ne^{-ik\theta}$  se obtiene a partir de  $\tau$  con rotación de ángulo  $\pi$ .
2.  $\gamma_2(\theta) = me^{i\theta} - ne^{-ik\theta}$  se obtiene a partir de  $\tau$  con rotación de ángulo  $\widehat{\theta}$  y desface  $-\widehat{\theta}$ .
3.  $\gamma_3(\theta) = -me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}$  se obtiene a partir de  $\tau$  con rotación  $\widehat{\theta} + \pi$  y desface  $-\widehat{\theta}$ .

Análogamente se puede probar que si rotamos  $\tau$  un ángulo  $2\widehat{\theta}$  obtenemos la misma curva, lo cual es geoméricamente claro.

**Proposición 7.** La curva  $\tau(\theta) = me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}$  es invariante bajo rotaciones de ángulo  $2\widehat{\theta}$  y desface  $-2\widehat{\theta}$ , donde  $\widehat{\theta} = \pi/(k+1)$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
 e^{i2\widehat{\theta}}\tau(\theta - 2\widehat{\theta}) &= me^{i(\theta-2\widehat{\theta})}e^{i2\widehat{\theta}} + ne^{-ik(\theta-2\widehat{\theta})}e^{i2\widehat{\theta}} \\
 &= me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}e^{i(k+1)2\widehat{\theta}} \\
 &= me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}e^{i2\pi} \\
 &= me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}.
 \end{aligned}$$

□



## Capítulo 2

# Sistemas dinámicos discretos en el plano: un primer vistazo

En este capítulo introduciremos algunos conceptos que son básicos en el estudio de los sistemas dinámicos discretos en el plano. Para ello, comenzaremos desde el contexto más general de los sistemas dinámicos discretos en espacios métricos y poco a poco nos iremos acercando al objetivo, pasando también en algún momento por los sistemas dinámicos discretos en la recta.

Para empezar, un *espacio métrico* es un conjunto dotado de una forma de medir la *distancia* entre cualesquiera dos de sus elementos (también llamados *puntos* del espacio). Ejemplos de espacios métricos son: la recta real  $\mathbb{R}$ , el plano (ya sea visto como el plano real  $\mathbb{R}^2$  o como el plano complejo  $\mathbb{C}$ ), pedacitos de ellos, o el espacio de símbolos  $\Psi$  que veremos más adelante.

Luego, dado un espacio métrico  $X$  se puede formar un *sistema dinámico discreto* al considerar en combinación con dicho espacio a cualquier función continua  $f: X \rightarrow X$  y analizar lo que sucede al aplicar tal función de manera reiterada.

### Dinámica de puntos individuales

El estudio de los sistemas dinámicos discretos comienza poniendo atención en las órbitas de puntos individuales del espacio  $X$ . Esto es, si pensamos a  $f$  como una función que va moviendo cada punto  $x$  del espacio, la *órbita* de  $x$  es el conjunto de lugares por los que dicho punto va pasando, es decir, el conjunto

$$o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}.$$

Aquí, la notación  $f^n$  se utiliza para referirse de manera abreviada a la función resultante de aplicar  $n$  veces seguidas la función  $f$ , de tal forma que  $f^1(x) = f(x)$ ,  $f^2(x) = f(f(x))$ ,  $f^3(x) = f(f(f(x)))$ , y así sucesivamente. Adicionalmente se utiliza la notación  $f^0$  para referirse a la función identidad, de modo que  $f^0(x) = x$  se refiere al primer elemento de la órbita, y con ello es posible escribir que

$$o(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\},$$

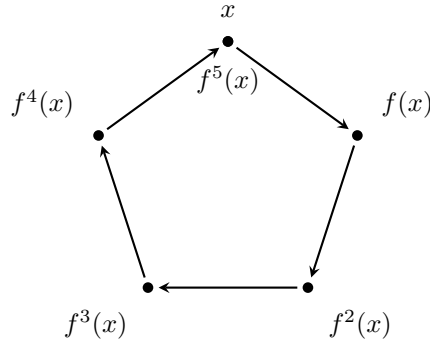
donde  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  es el conjunto de los números naturales (empezando por 1) y  $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$  es el conjunto que incluye también al cero. La órbita de cada punto individual del espacio es entonces una sucesión, que puede comportarse de distintas maneras.

Los comportamientos más sencillos se dan cuando el punto vuelve en algún momento a su posición inicial, es decir, cuando existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) = x$ . En tal caso se dice que  $x$  es un punto *periódico* de  $f$ . Además, si  $n$  es el primer natural para el que eso sucede, se dice que  $x$  es un punto periódico de  $f$  de *periodo*  $n$  y entonces se pueden definir los siguientes conjuntos importantes:

$$\text{Per}_n(f) = \{x \in X : x \text{ es un punto periódico de } f \text{ de periodo } n\} \text{ y}$$

$$\text{Per}(f) = \{x \in X : x \text{ es un punto periódico de } f\},$$

donde claramente  $\text{Per}(f) = \cup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(f)$ .



**Figura 2.1:** Un punto periódico  $x$  de periodo  $n = 5$ .

Como se puede ver en la figura 2.1, la órbita de un punto periódico  $x$  de periodo  $n$  es totalmente predecible. Si para cada  $k \in \mathbb{N}_0$  nombramos  $x_k = f^k(x)$ , entonces  $x_{k+1} = f(x_k)$  y, dado que  $x_n = x_0$ , es visiblemente claro que la órbita de  $x$  está compuesta por  $n$  puntos que se repiten una y otra vez:

$$o(x, f) = \underbrace{\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}}_{n \text{ puntos que se repiten}}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \dots.$$

De hecho, con mayor detalle:

$$x_m = x_k \Leftrightarrow m \equiv k \pmod{n}.$$

A partir de ahí se pueden obtener ciertas conclusiones.

**Observación 2.** Si  $x \in X$  un punto periódico de periodo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces:

1.  $f^k(x) = x \Leftrightarrow k$  es múltiplo de  $n$ .
2.  $y \in o(f, x) \Rightarrow y$  es un punto periódico de  $f$  de periodo  $n$ .

Ahora bien, el periodo más pequeño y simple posible es  $n = 1$ . A los puntos de periodo 1, es decir, aquellos tales que  $f(x) = x$ , se les llama puntos *fijos* de la función  $f$  (pues tal función, pensada en términos de movimiento, los deja siempre en el mismo lugar).

Por otro lado, es importante observar que cualquier punto periódico  $x$  de periodo  $n$  de la función  $f$ , tal que  $f^n(x) = x$ , es a su vez punto fijo de la función  $f^n$ . Así, los resultados relacionados con puntos fijos tendrán mucho que ver también con los de los puntos periódicos en general.

En los ejemplos que siguen veremos éste y algunos otros tipos de comportamiento de las órbitas, en primer lugar para puntos individuales y, más adelante, para conjuntos de puntos.

### El ejemplo de $f(x) = x^2$ en la recta

Consideremos a la función  $f(x) = x^2$  para  $x \in \mathbb{R}$ . En primer lugar podemos ver que:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0,$$

por lo que sus puntos fijos son 0 y 1.

Ahora bien, dado que para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  sucede que  $f(x) = f(-x)$ , entonces las órbitas de  $x$  y de  $-x$  son esencialmente la misma a excepción de su punto inicial. Lo anterior muestra que basta con analizar el comportamiento ya sea de  $x$  o de  $-x$  para ver qué sucede con el otro. Por ejemplo, la órbita de  $-1$  coincide con la del 1 a partir de la primera iteración de  $f$ , por lo que desde ese momento es idéntica a la órbita de un punto fijo:

$$\begin{aligned} o(1, f) &= \{ 1, \underbrace{1, 1, \dots} \} \\ o(-1, f) &= \{-1, \underbrace{1, 1, \dots} \}. \end{aligned}$$

Dicho sea de paso, los puntos que no son fijos, pero cuya órbita coincide a partir de cierto momento con la de un punto fijo se llaman puntos *prefijos*, como en este caso el  $-1$ . Y más en general, los puntos que no son periódicos, pero cuya órbita a partir de cierto momento se integra a la de un punto periódico se denominan puntos *preperiódicos*.

Siguiendo con el análisis, notemos que si  $0 < x < 1$ , entonces  $0 < x^2 < x$  y, en particular,  $f(x) = x^2$  queda entre 0 y 1, como lo estaba  $x$  al principio. De ahí que, aplicando reiteradamente la implicación anterior, tenemos que

$$1 > x > f(x) > f^2(x) > \dots > 0,$$

es decir que la órbita de  $x$  es una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Luego, por la completez de  $\mathbb{R}$  y de acuerdo con el teorema de sucesiones monótonas acotadas, dicha órbita debe converger a algún  $L \in \mathbb{R}$ . Ahora bien, por la continuidad de  $f$  tenemos que si la sucesión  $\{f^n(x)\}$  converge a  $L$ , es decir  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = L$ , o con otra notación  $f^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ , entonces

$$f(f^n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(L).$$

Por otro lado, dado que  $\{f^{n+1}(x)\}$  es subsucesión de  $\{f^n(x)\}$ , entonces también

$$f^{n+1}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L.$$

Finalmente, como el límite de una sucesión es único, concluimos que  $f(L) = L$ , lo cual indica que  $L$  debe ser un punto fijo de  $f$ . Y como no puede ser 1 (pues 1 es mayor que toda la sucesión y ésta es decreciente), debe ser entonces 0. Así,

$$0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0.$$

Dicho sea de paso, se le llama punto *asintóticamente fijo* de la función  $f$  a cualquiera que como éstos no es fijo ni prefijo, pero cuya órbita converge a un punto fijo (que claramente no forma parte de dicha órbita, lo cual muestra por qué se le llama así). Análogamente se define lo que es un punto *asintóticamente periódico*.

La argumentación anterior se puede ajustar fácilmente para demostrar un resultado general.

**Proposición 8.** Si  $f: X \rightarrow X$  es una función continua en un espacio métrico  $X$  y  $x, p \in X$  son tales que  $f^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$ , entonces  $p$  es un punto fijo de  $f$ .



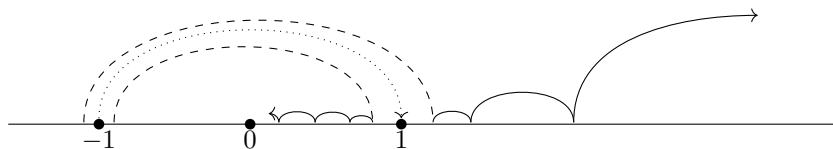
Ahora analicemos qué sucede si  $x > 1$ . En este caso,  $x^2 > x$  y en particular  $f(x) = x^2$  es de nuevo mayor que 1, como la  $x$ . De ahí que:

$$1 < x < f(x) < f^2(x) < f^3(x) < \dots,$$

es decir que la órbita de  $x$  es una sucesión creciente. Ahora bien, utilizando de nuevo el teorema de sucesiones monótonas acotadas podemos concluir que esta sucesión no es acotada superiormente, pues si lo fuera, convergería a un punto fijo, pero eso no puede ser porque 0 y 1 son menores que todos los elementos de esta sucesión creciente. De todo lo anterior se puede concluir que de hecho la órbita de  $x$  diverge a infinito. Así, en este caso:

$$x > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty.$$

Finalmente, recordando que  $x$  y  $-x$  viajan juntos a partir de la primera iteración, hemos terminamos el estudio de los distintos tipos de órbita para esta función. Pero vale la pena hacer un comentario más y es que el 0 y el 1, a pesar de ser ambos puntos fijos de la función  $f$ , son en otro sentido muy distintos: por un lado los puntos cercanos a 0 se acercan cada vez más a él y, por otro, los puntos cercanos a 1 más bien se alejan de él (ver figura 2.2). Por tal motivo se dice que 0 es un punto fijo atractor y 1, un punto fijo repulsor. La definición precisa, que no es difícil verificar que se cumple para estos dos puntos a partir de lo anterior, es la siguiente.



**Figura 2.2:** El 0 es punto fijo atractor y el 1, punto fijo repulsor de  $f(x) = x^2$ .

**Definición 2.** Sean  $X$  un espacio métrico,  $f: X \rightarrow X$  una función continua y  $p \in X$  un punto fijo de  $f$ . Decimos que  $p$  es un punto fijo *atractor* de  $f$  si para todo conjunto abierto  $W$  tal que  $p \in W$  existe algún subconjunto abierto  $U \subseteq W$  tal que  $p \in U$ ,  $f(U) \subseteq U$  y para toda  $x \in U$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ . Por otro lado, decimos que  $p$  es un punto fijo *repulsor* de  $f$  si existe algún subconjunto abierto  $U$  tal que  $p \in U$  y para cada  $x \in U$  con  $x \neq p$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) \notin U$ .

## El análisis gráfico de sistemas dinámicos discretos en la recta

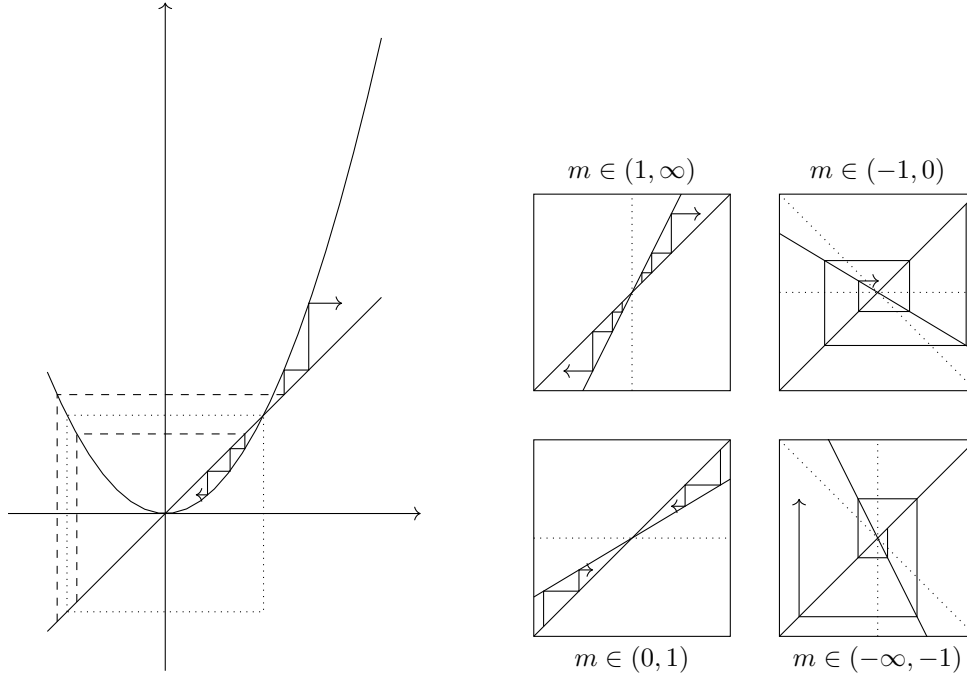
Dada en particular una función  $f: X \rightarrow X$  con  $X \subseteq \mathbb{R}$ , el análisis gráfico del sistema dinámico discreto generado a partir de ella consiste en considerar su gráfica junto con la de la función identidad, elegir un punto  $x$  del dominio de  $f$  y ubicar nuestro punto de partida en la posición  $(x, x)$ ; una vez hecho esto, seguir una y otra vez las siguientes dos instrucciones:

V. Moverse verticalmente hasta llegar a la gráfica de la función  $f$ .

H. Moverse horizontalmente hasta llegar a la recta identidad.

Como el lector podrá corroborar (ver figura 2.3), el recorrido que vamos haciendo va pasando por los siguientes puntos:

$$\boxed{(x, x)} \quad (x, f(x)) \quad \boxed{(f(x), f(x))} \quad (f(x), f^2(x)) \quad \boxed{(f^2(x), f^2(x))} \quad \dots$$



**Figura 2.3:** Análisis gráfico de la función  $f(x) = x^2$ .

Es decir que nos va revelando cómo se comporta la órbita del punto  $x$ . Y básicamente todo lo que justificamos analíticamente para la función  $f(x) = x^2$  se puede visualizar ahora aquí de manera bastante clara. Por otro lado, las cosas se pueden hacer también en el sentido inverso: explorar el análisis gráfico para descubrir qué sucede, y luego, si hace falta, hallar su justificación formal pero ya con más claridad.

Por ejemplo, retomando la función  $f(x) = x^2$  que acabamos de analizar, algo interesante puede decirse acerca de su derivada  $f'(x) = 2x$ . Si consideramos por ejemplo al punto fijo  $p = 1$ , se tiene que  $f'(p) = 2$ , es decir, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(p, f(p))$  vale 2. Por otro lado, recordando que la recta tangente es la que “más se parece” a la función  $f$  cerca de dicho punto, podemos indagar qué pasa si momentáneamente sustituyéramos la gráfica de  $f$  por la de tal recta tangente. En la figura 2.3 se puede ver con el análisis gráfico que si la recta tangente en el punto  $(p, f(p))$  tuviera pendiente  $m = f'(p)$  con  $m > 1$ , entonces dicho punto  $p$  resultaría ser repulsor. Por otro lado, si se tuviera que  $0 < m < 1$ , entonces  $p$  resultaría ser un punto fijo atractor. En el caso particular en el que  $m = 0$  se tendría que empezando en cualquier punto  $x$ , a la primer iteración ya llegaríamos a  $p$ . Por otro lado, notando que si  $m = -1$  según el análisis gráfico se formaría un cuadrado, variando un poco las cosas se podría concluir que si  $-1 < m < 0$ , entonces  $p$  sería un punto fijo atractor y si  $m < -1$ , entonces  $p$  sería un punto fijo repulsor. En efecto se puede probar esto que el análisis geométrico sugiere.

**Proposición 9.** Sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua con  $X \subseteq \mathbb{R}$  y sea  $p \in X$  un punto tal que  $f(p) = p$  y  $f$  es derivable en  $p$ . Entonces se tiene que:

1.  $|f'(p)| < 1 \Rightarrow p$  es un punto fijo atractor de  $f$ .
2.  $|f'(p)| > 1 \Rightarrow p$  es un punto fijo repulsor de  $f$ .
3. Si  $|f'(p)| = 1$ , no se puede garantizar que  $p$  sea atractor ni tampoco que sea repulsor.

**Observación 3.** Un teorema análogo se puede demostrar también cuando  $X \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z \in X$  y  $f'(z)$  representa la derivación compleja.

Volviendo a nuestro ejemplo, según el análisis gráfico también es evidente que los puntos  $x \in [-1, 1]$  son tales que  $f(x) \in [-1, 1]$ . Esto indica que si empezamos con un punto en dicho intervalo, siempre nos mantendremos ahí. Por eso se dice que dicho conjunto es *invariante* bajo la función  $f$ . Por otro lado, este conjunto corresponde también con el de todos los puntos del dominio de  $f$  cuya órbita es acotada (pues como vimos antes, todos los demás se alejan cada vez más del origen). En seguida trataremos más acerca de este tipo de conjuntos invariantes.

## Dinámica de conjuntos de puntos

Dado un sistema dinámico discreto generado por una función  $f: X \rightarrow X$  de un espacio métrico en sí mismo, muchas veces es posible restringir nuestra atención a lo que sucede en algún fragmento del espacio  $S \subseteq X$  y analizar  $f: S \rightarrow S$ . Para esto último sólo se requiere que  $f(S) \subseteq S$ , lo cual motiva la siguiente definición.

**Definición 3.** Sea  $X$  un espacio métrico,  $f: X \rightarrow X$  una función continua y  $S \subseteq X$  un subconjunto del espacio. Decimos que  $S$  es un conjunto *invariante* bajo  $f$  si  $f(S) \subseteq S$ . Y si, más aun, sucede que  $f(S) = S$ , decimos que  $S$  es un conjunto *fuertemente invariante* bajo  $f$ .

Además del espacio completo, otros ejemplos importantes de conjuntos invariantes son el conjunto de puntos atrapados y la cuenca de atracción de infinito, definidos a continuación.

**Definición 4.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Llamamos *conjunto de puntos atrapados* bajo  $f$  al siguiente subconjunto del espacio

$$A(f) = \{x \in X : \text{la órbita de } x \text{ es acotada}\}.$$

Y llamamos *cuenca de atracción de infinito* al conjunto de puntos del espacio cuya órbita, en módulo, diverge a infinito, es decir, al conjunto

$$A_\infty(f) = \{z \in X : |f^n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\}.$$

Es fácil ver que los conjuntos  $A(f)$  y  $A_\infty(f)$  son invariantes notando que la órbita de  $f(x)$  es casi idéntica que la órbita de  $x$ , sólo que empezando un paso después:

$$o(x, f) = \{x, \underbrace{f(x), f(f(x)), \dots}_{o(f(x), f)}\}.$$

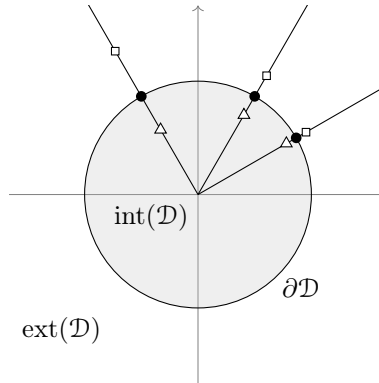
De ahí que si la órbita de  $x$  es acotada, también la órbita de  $f(x)$  lo es. Y análogamente, si la órbita de  $x$  diverge en módulo a infinito, entonces lo mismo hace la órbita de  $f(x)$ . De ambas implicaciones se concluye, respectivamente, que  $f(A(f)) \subseteq A(f)$  y  $f(A_\infty(f)) \subseteq A_\infty(f)$  se cumplen siempre.

Por otro lado, dado que las dos implicaciones anteriores valen también en sentido inverso, si adicionalmente se tuviera que  $A(f) \subseteq f(X)$ , es decir que todos los puntos de órbita acotada fueran la imagen de algún punto en  $X$ , se podría concluir que  $f(A(f)) \supseteq A(f)$  y entonces  $A(f)$  sería fuertemente invariante. Análogamente, si  $A_\infty(f) \subseteq f(X)$ , se tendría que  $A_\infty(f)$  sería fuertemente invariante.

### El mismo ejemplo de $\varphi(z) = z^2$ , pero ahora en el plano

Volvamos a la función  $\varphi(z) = z^2$ , pero ahora con  $z \in \mathbb{C}$  en el plano complejo. Tal función cobra en este universo más amplio un nuevo significado geométrico, pues obtener el cuadrado de un número complejo equivale a duplicar su argumento y elevar su módulo al cuadrado. Ahora bien, si tomamos  $z \in \mathbb{C}$  y consideramos su órbita, dado que  $|\varphi(z)| = |z|^2$ , la sucesión formada por los módulos de los elementos de la órbita de  $z$ , es decir  $\{|\varphi^n(z)| : n \in \mathbb{N}_0\}$ , se comporta según los casos que ya se han estudiado en la sección anterior. De ahí que (ver figura 2.4):

1.  $|z| < 1 \Rightarrow |\varphi^n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \varphi^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
2.  $|z| = 1 \Rightarrow |\varphi^n(z)| = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
3.  $|z| > 1 \Rightarrow |\varphi^n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .



**Figura 2.4:** Iterando  $\varphi(z) = z^2$ , los puntos en el interior del disco unitario  $\mathcal{D}$  convergen al origen, los de su frontera permanecen ahí y los de su exterior se alejan cada vez más del origen.

Si llamamos  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  al disco unitario con su frontera incluida, esto indica que:

$$A(f) = \mathcal{D} \quad \text{y} \quad A_\infty(f) = \text{ext}(\mathcal{D}).$$

Por otro lado,  $\partial\mathcal{D}$  es un conjunto fuertemente invariante en el que parece concentrarse la parte más interesante de la dinámica de  $\varphi$ . De hecho, su comportamiento nos servirá como ejemplo de lo que es una *dinámica caótica* según la definición de Devaney.

### Dinámica caótica según Devaney

Veamos primero que  $\varphi(z) = z^2$ ,  $\varphi^2(z) = z^4$ ,  $\varphi^3(z) = z^8$  y en general  $\varphi^n(z) = z^{2^n}$ . Luego,

$$\varphi^n(z) = z \Leftrightarrow z^{2^n} = z \Leftrightarrow z(z^{2^n-1} - 1) = 0.$$

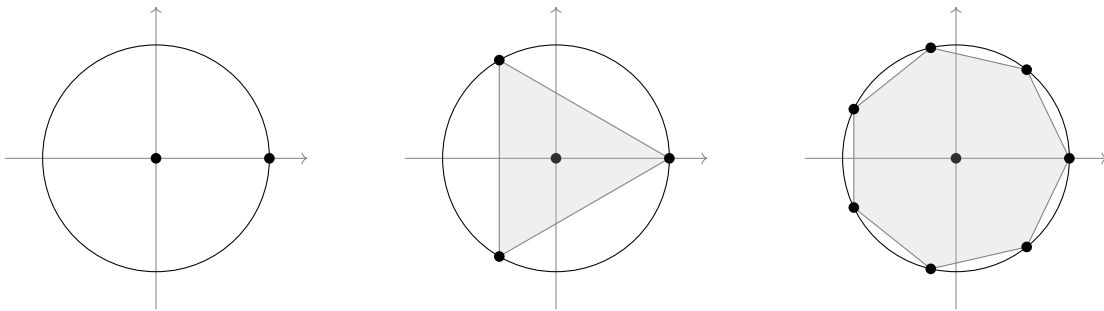
Esto es:

$$\varphi^n(z) = z \Leftrightarrow z = 0 \text{ o } z^{2^n-1} = 1.$$

Para  $n = 1$  tenemos entonces que los puntos en los que  $\varphi(z) = z$ , es decir los puntos fijos de  $\varphi$ , son  $z = 0$  y  $z = 1$ . Para  $n = 2$  tenemos que los puntos de periodo 2 son las raíces cúbicas de la unidad (a excepción de  $z = 1$ , que más bien es de periodo 1), que son vértices de un

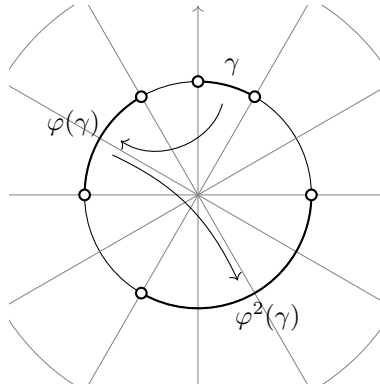
triángulo equilátero. Para  $n = 3$  tenemos que los puntos de periodo 3 son las raíces séptimas de la unidad (a excepción de nuevo de  $z = 1$ ), que son vértices de un heptágono regular (ver figura 2.5). Y, en general los puntos de periodo  $n$  son las raíces de la unidad de grado  $2^n - 1$  (excepto los que ya hayan aparecido antes con un periodo menor), que son vértices de un polígono de  $2^n - 1$  lados. Pero sean de periodo  $n$  o menor, es geoméricamente claro que los puntos periódicos están por todos lados en  $\partial\mathcal{D}$ . Se puede demostrar con detalle que entonces  $\varphi$  cumple la siguiente característica.

**Definición 5.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Se dice que  $f$  tiene *densidad de puntos periódicos* en  $X$  si para todo  $x \in X$  y cualquier  $\delta > 0$  existe  $p \in \text{Per}(f)$  tal que  $p \in B_\delta(x)$ .



**Figura 2.5:** Puntos periódicos de la función  $\varphi(z) = z^2$ .

Otra característica importante de esta función  $\varphi$  en  $\partial\mathcal{D}$  es que al aplicarla a cualquier segmento de arco  $\gamma \subseteq \partial\mathcal{D}$  con ángulo central  $\theta > 0$  dicha función lo convierte en otro segmento de arco con ángulo central  $2\theta$ . De manera que sin importar qué tan pequeño sea el arco inicial  $\gamma$ , al aplicar  $\varphi$  un número suficiente de veces resulta que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $2^n\theta > 2\pi$ , lo cual se traduce en que  $\varphi^n(\gamma) = \partial\mathcal{D}$  (ver figura 2.6).



**Figura 2.6:** Al aplicar  $\varphi$  reiteradamente, los arcos se van alargando.

Esta propiedad tiene diversas implicaciones. Una de ellas es que dados cualesquiera dos conjuntos abiertos no vacíos en  $\partial\mathcal{D}$ , al aplicar a uno de ellos la función  $\varphi$  repetidamente el suficiente número de veces, forzosamente en algún momento intersectaremos al otro conjunto abierto. Esto es geoméricamente claro porque dicho conjunto abierto no vacío debe contener un arco (sin los

extremos) que, por más pequeño que sea, para  $n$  suficientemente grande se transforma en todo  $\partial\mathcal{D}$  y este conjunto intersecta a cualquier conjunto abierto en  $\partial\mathcal{D}$ . En términos dinámicos esto implica que dado un conjunto abierto no vacío, al aplicar  $\varphi$  repetidamente, dicho conjunto va viajando por cada parte del conjunto  $\partial\mathcal{D}$ . La formulación exacta de esta característica de la que hablamos es la siguiente.

**Definición 6.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Se dice que  $f$  es *topológicamente transitiva* en  $X$  si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos  $U$  y  $V$  del espacio  $X$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  (es decir, existe  $x \in U$  tal que  $f^n(x) \in V$ ).

Otra consecuencia es la siguiente. Por la continuidad de  $\varphi$  sabemos que “puntos cercanos en  $\partial\mathcal{D}$  van a dar, al aplicarles la función, a puntos cercanos en  $\partial\mathcal{D}$ ”. Sin embargo, al aplicar la función  $\varphi$  el suficiente número de veces, puede que los puntos que inicialmente estaban cerca se hayan alejado “mucho” entre sí. Esto se formula de la siguiente manera.

**Definición 7.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Se dice que  $f$  es *sensible a las condiciones iniciales* en  $X$  si existe algún  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para toda  $x \in X$  y para cualquier  $\delta > 0$  existen  $y \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que

$$d(x, y) < \delta \quad \text{y} \quad d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon_0.$$

A dicho valor  $\varepsilon_0 > 0$  se le llama *constante de sensibilidad* de  $f$ .

Esto se cumple para nuestra función  $\varphi(z) = z^2$  en  $\partial\mathcal{D}$ , pues dado cualquier punto  $x \in \partial\mathcal{D}$ , y cualquier bola de radio  $\delta > 0$  alrededor de él, el arco  $B_\delta(x) \cap \partial\mathcal{D}$  a la larga se transforma en  $\partial\mathcal{D}$ , por lo que hay un punto del arco inicial que bajo  $\varphi^n$ , para alguna  $n$  suficientemente grande, va a dar al punto diametralmente opuesto a  $\varphi^n(x)$ . Así, puede tomarse como constante de sensibilidad en este caso el diámetro de la circunferencia  $\partial\mathcal{D}$ , es decir,  $\varepsilon_0 = 2$ .

Finalmente estas tres características juntas conforman lo que Devaney llamó una dinámica caótica, como se establece a continuación.

**Definición 8.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Se dice que  $f$  es *caótica* en  $X$  si  $f$  tiene densidad de puntos periódicos en  $X$ , es topológicamente transitiva en  $X$  y es sensible a las condiciones iniciales en  $X$ .

Por otro lado, para demostrar que una función es caótica, basta por lo general mostrar que se cumplen las primeras dos de estas características, según el siguiente teorema de J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey (ver [2]).

**Proposición 10.** Sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua definida en el espacio métrico [no finito]  $X$ . Si  $f$  es transitiva y tiene densidad de puntos periódicos, entonces también es sensible a las condiciones iniciales.

## Un poco de dinámica simbólica

Ahora bien, para entender un poco mejor la dinámica de  $\varphi$  en otros puntos de  $\partial\mathcal{D}$  que no son periódicos (e incluso para reinterpretar el comportamiento de éstos) sirve introducir lo que llamaremos *dinámica simbólica*, que esencialmente es dar a cada punto un nombre especial directamente relacionado con su órbita, y que por ello resultará ser muy conveniente. Un ejemplo de ello se muestra a continuación.

Cada  $z \in \partial\mathcal{D}$  se puede escribir según el ángulo que forma con el eje real como  $z = e^{i(v)2\pi}$  con  $v \in \mathbb{R}$ , donde el parámetro  $v$  se interpreta entonces como la cantidad de vuelta que damos a partir del punto  $1 + 0i$  sobre la circunferencia unitaria para llegar a  $z$  (en el sentido de las

manecillas del reloj si  $v > 0$  y al revés si  $v < 0$ ). Hay así una infinidad de formas de representar a tal número complejo  $z$ , pero sólo una que cumple que  $v \in [0, 1)$ . Además  $e^{i(v)2\pi} = e^{i(v')2\pi}$  si y sólo si  $v \equiv v' \pmod{1}$ . Si representamos dicha  $v \in [0, 1)$  en notación binaria, tenemos que  $v = 0.a_1a_2a_3\dots$ , con  $a_i \in \{0, 1\}$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ . Además la órbita de  $z$

$$z \mapsto z^2 \mapsto z^4 \mapsto z^8 \mapsto \dots$$

puede pensarse en términos del parámetro  $v$  así:

$$v \mapsto 2v \mapsto 4v \mapsto 8v \mapsto \dots$$

y expresado todo (módulo 1) en base binaria, como

$$0.a_1a_2a_3\dots \mapsto 0.a_2a_3a_4\dots \mapsto 0.a_3a_4a_5\dots \mapsto 0.a_4a_5a_6\dots \mapsto \dots$$

Así, queda claro que los puntos  $z = e^{i(v)2\pi}$  con  $v \in \mathbb{Q}$ , que por ello tiene representación binaria infinita periódica o eventualmente periódica, son respectivamente puntos periódicos o preperiódicos; y en los que  $v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , cuya representación es infinita no periódica, su órbita pasa siempre por puntos distintos. Como ejemplos pensemos en los puntos

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i(v_1)2\pi} \text{ con } v_1 = 0.0100011011000001\dots \\ z_2 &= e^{i(v_2)2\pi} \text{ con } v_2 = 0.1010010001\dots \end{aligned}$$

Por la forma en la que están contruidos  $v_1$  y  $v_2$  (el primero, concatenando todas las posibles cadenas de un dígito, todas las de dos, etc.; y el segundo, intercalando cada vez más ceros), se puede verificar que  $z_1$  tiene órbita densa en  $\partial\mathcal{D}$  y  $z_2$  tiene órbita no densa en  $\partial\mathcal{D}$ .

**Observación 4.** También se puede probar los siguientes resultados (vale la pena intentarlos como ejercicio).

1. La función  $\varphi$  tiene en  $\partial\mathcal{D}$  puntos periódicos y preperiódicos de todos los periodos.
2. El conjunto de puntos de órbita densa en  $\partial\mathcal{D}$  es, a su vez, denso en  $\partial\mathcal{D}$ .

## En busca de puntos fijos: el teorema de la contracción

Para las funciones  $f(x) = x^2$  con  $x \in \mathbb{R}$  y  $\varphi(z) = z^2$  con  $z \in \mathbb{C}$  fue posible determinar con exactitud sus puntos fijos y en general sus puntos periódicos. Esto no siempre es tarea sencilla dada cualquier función. Sin embargo, al menos la existencia de tales puntos se puede garantizar para algunas de ellas con ayuda de ciertos teoremas, como el teorema de la contracción.

**Definición 9.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow X$  una función. Diremos que  $f$  es una *contracción* si existe  $r \in \mathbb{R}$ , con  $0 \leq r < 1$ , tal que para cualesquiera  $x, y \in X$  se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y).$$

En tal caso, a la constante  $r$  se le llama *factor de contracción* de  $f$ .

**Proposición 11** (Teorema de la contracción). Sea  $X$  un espacio métrico completo. Si  $f: X \rightarrow X$  es una contracción, entonces  $f$  tiene un único punto fijo, es decir, existe un único  $p \in X$  tal que  $f(p) = p$ . Además para todo  $x \in X$ :  $f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ .

**Observación 5.** Notemos que, en la proposición anterior, la hipótesis de que  $X$  sea un espacio métrico completo se puede cambiar por la hipótesis de que  $X$  sea un subconjunto compacto de un espacio métrico completo  $Y$ , pues según un teorema de análisis matemático, esto último implica lo primero. Esa nueva versión de este teorema es la que utilizaremos más adelante.

Una vez dicho esto, ahora sí, la prueba.

**Demostración:** Sea  $f: X \rightarrow X$  una contracción definida en el espacio métrico completo  $X$ . Sea  $x \in X$  cualquier punto del espacio y consideremos su órbita  $\{x_n = f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Veremos que dicha órbita es siempre una sucesión de Cauchy en  $X$ . Como  $f$  es una contracción, existe  $0 \leq r < 1$  tal que para cualesquiera  $x, y \in X$  se cumple que  $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ . Aplicando esto reiteradamente y llamando  $c = d(x_0, x_1) \geq 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_0, x_1) &\leq c, \\ d(x_1, x_2) &\leq rc, \\ d(x_2, x_3) &\leq r^2c, \\ &\vdots \\ d(x_n, x_{n+1}) &\leq r^n c. \end{aligned}$$

Luego, tomando  $n \in \mathbb{N}$  fija y cualquier  $k \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leq r^n(1 + r + \cdots + r^k)c = r^n \left( \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} \right) c = r^n c \left( \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{k+1}}{1 - r} \right) \\ &\leq r^n \left( \frac{c}{1 - r} \right). \end{aligned}$$

Pero esta última expresión converge a 0 cuando  $n$  tiende a infinito, por lo que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier  $n \geq N$ :

$$0 \leq r^n \left( \frac{c}{1 - r} \right) < \varepsilon.$$

Lo anterior implica que para cualesquiera  $n, m \geq N$  se cumple que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

es decir, que la órbita de  $x$  es una sucesión de Cauchy. Y como estamos en un espacio métrico completo, dicha órbita es entonces convergente a algún punto  $p \in X$  que, por la proposición 8, debe ser un punto fijo de  $f$ . Finalmente no puede haber otro punto fijo distinto, pues si  $q \in X$  es tal que  $f(q) = q$ , entonces  $d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq rd(p, q)$ , de donde  $d(p, q)(1 - r) \leq 0$  y eso sólo puede ocurrir si  $p = q$ .

□





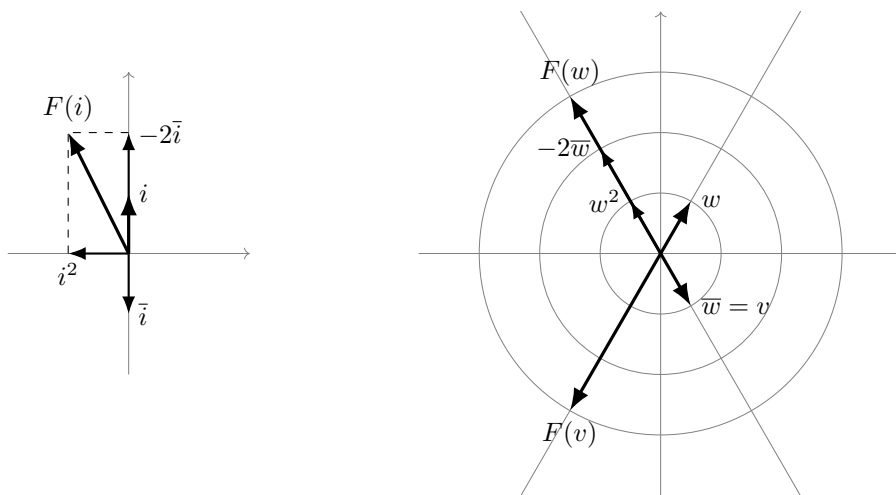
## Capítulo 3

# Acción geométrica de $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ en el plano

El comportamiento dinámico de la familia de funciones  $F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}$  con  $a \in \mathbb{C}$  fue estudiado por el profesor Jefferson King para su tesis doctoral (ver [7]). En tal familia, la función de parámetro  $a = -1$  resultó ser especialmente interesante. En este capítulo retomamos su estudio.

Mirando la definición de la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ , uno puede visualizar qué es lo que hace geoméricamente con cada número complejo individual del plano:

- (a) Por un lado, la función  $F$  toma a  $z \in \mathbb{C}$ , duplica su argumento y eleva su norma al cuadrado para obtener  $z^2$ ;
- (b) por otro lado, refleja a  $z$  por el eje real (obteniendo  $\bar{z}$ ), lo duplica y lo refleja por el origen para obtener  $-2\bar{z}$ ;
- (c) y finalmente, suma ambos resultados parciales.



**Figura 3.1:**  $F(z)$  para algunos  $z \in \mathbb{C}$ .

Por dar algunos ejemplos sencillos, para  $z = i$  (que tiene argumento  $\pi/2$ , módulo 1 y conjugado  $-i$ ), se tiene siguiendo este procedimiento que  $F(i) = -1 + 2i$  (ver figura 3.1, lado izquierdo). También, para los números complejos  $w = e^{i(\pi/3)}$  y  $v = \bar{w} = e^{-i(\pi/3)}$ , se tiene que  $F(w) = 3e^{i(2\pi/3)}$  y  $F(v) = 3e^{-i(2\pi/3)}$  (ver figura 3.1, lado derecho).

Análogamente, con  $z = 1$  (cuyo argumento es 0, cuyo módulo es 1, y cuyo conjugado es él mismo), se tiene que  $F(1) = 1 - 2 = -1$ ; y por otro lado,  $F(0) = 0$ . Esto último en particular indica que  $z = 0$  es un punto fijo de la función. Por otro lado, si por curiosidad continuamos aun más la órbita de  $z = 1$ , obtenemos que  $F(1) = -1$  (como ya habíamos dicho),  $F(-1) = 3$  y  $F(3) = 3$ , con lo cual llegamos a otro punto fijo.

Pues bien, siguiendo la manera usual de estudiar la dinámica de una función, busquemos determinar los demás puntos periódicos de  $F$  y qué podemos decir acerca de ellos.

## Cuentas que se complican

Veamos para empezar qué tan sencillo es rastrear los puntos fijos de esta función. Ya encontramos dos; ¿habrá más? Encontrarlos implica resolver la ecuación  $F(z) = z$ . Es decir,

$$z^2 - 2\bar{z} - z = 0.$$

Si se tratara de una ecuación común y corriente de segundo grado sabríamos que, por el Teorema Fundamental del Álgebra, habría exactamente dos soluciones (si bien, ambas podrían coincidir, es decir, ser una misma solución de multiplicidad dos), pero hay por ahí un conjugado que puede afectar las cosas. Por otro lado, si se tratara de una ecuación común y corriente de segundo grado, o incluso de grado mayor, factorizar la expresión de la izquierda ayudaría mucho a resolverla o al menos a bajarle algunos grados al problema, pero con ese conjugado no es tan claro en principio cómo lograr hacer tal factorización.

Algo que ayuda, aunque en un primer momento podría parecer complicar las cosas, es pensar a la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  en términos de las partes real e imaginaria de  $z$ . Identificando al complejo  $z = x + iy$  con el par  $(x, y)$ , la versión real de la función  $F$  es tal que:

$$F(x, y) = (x^2 - y^2 - 2x, 2xy + 2y),$$

y la ecuación por resolver sería entonces

$$F(x, y) = (x, y),$$

que corresponde con el siguiente sistema de dos ecuaciones de segundo grado en dos variables:

$$x^2 - y^2 - 2x - x = 0 \quad (1)$$

$$2xy + 2y - y = 0 \quad (2)$$

Factorizando (2), obtenemos que  $y(2x+1) = 0$ , de donde se desprenden dos caminos posibles. Según el primero, si  $y = 0$ , entonces por (1):

$$0 = x(x - 3) \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 3,$$

que da las soluciones  $(x, y) = (0, 0)$  y  $(x, y) = (3, 0)$ , correspondientes con los números complejos que ya habíamos detectado como puntos fijos. Por otro lado, según el otro camino, con  $x = -\frac{1}{2}$ , se tiene por (1) que:

$$\frac{7}{4} - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2},$$

que da los dos nuevos puntos fijos  $-1/2 + i\sqrt{7}/2$  y  $-1/2 - i\sqrt{7}/2$ .

En total hay entonces exactamente 4 puntos fijos y no sólo 2, como quizá en un primer momento podría haberse conjeturado. La presencia del conjugado de  $z$  tiene algunos efectos un tanto inesperados como este.

Ahora, si después de esta primer experiencia nos aventuramos a buscar los puntos periódicos de periodo 2, intentaremos comenzar quizá observando que:

$$\begin{aligned} F^2(z) &= F(F(z)) = (z^2 - 2\bar{z})^2 - 2\overline{(z^2 - 2\bar{z})} \\ &= z^4 - 4z^2\bar{z} + 4\bar{z}^2 - 2\bar{z}^2 + 4z, \end{aligned}$$

que se parece a una ecuación de cuarto grado, pero con algunos conjugados por ahí.

Por otro lado, podría más bien intentarse trabajar en términos de las componentes  $x$  e  $y$  de  $z = x + iy$ , de manera que si llamamos  $F(x, y) = (\alpha, \beta)$ , tendremos que:

$$F^2(x, y) = F(F(x, y)) = (\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha, 2\alpha\beta + 2\beta),$$

con  $\alpha = x^2 - y^2 - 2x$  y  $\beta = 2xy + 2y$ . Y habría que ver cuándo eso es igual a  $(x, y)$ , cuentas que no seguiremos desarrollando, pero que dan una buena idea de lo complicada que puede ponerse la situación aun para los periodos pequeños. Baste decir que lo anterior equivaldría a un sistema de dos ecuaciones de cuarto grado en dos variables, el cual no necesariamente será sencillo de resolver.

Esto muestra que, a diferencia de la función  $\varphi(z) = z^2$ , con la que fue posible hacer sin demasiadas complicaciones todas las cuentas necesarias para encontrar los puntos periódicos, para la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  conviene intentar algún camino alternativo. Entender lo que la función hace geoméricamente no sólo a puntos individuales sino a conjuntos de ellos ayuda muchísimo a avanzar en ese sentido y a comprender mejor la dinámica de esta función.

## Una familia invariante de curvas

Como ya vimos antes, la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  se puede entender también como la función

$$F(x, y) = (x^2 - y^2 - 2x, 2xy + 2y),$$

donde  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  está representado por el punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

La derivada de esta función es:

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 & -2y \\ 2y & 2x + 2 \end{pmatrix},$$

y el determinante de ésta:

$$|DF(x)| = 4(x^2 + y^2 - 1).$$

Así es que el conjunto de los puntos críticos de  $F$  (es decir, en los que el determinante de la derivada es cero) corresponde con la circunferencia unitaria  $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Dicha circunferencia, como hemos visto en el capítulo 1, se puede parametrizar como  $e^{i\theta}$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

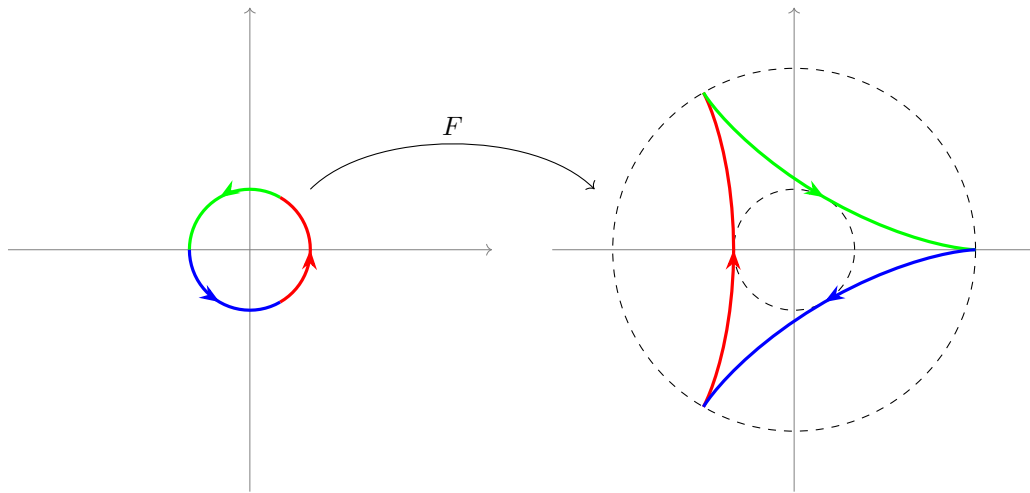
Luego, el conjunto de valores críticos (es decir, los números complejos a los que van a dar los puntos críticos bajo la función) está dado por

$$\begin{aligned} F(e^{i\theta}) &= e^{i2\theta} - 2e^{-i\theta} \\ &= -2e^{i(-\theta)} + e^{-i2(-\theta)}, \end{aligned}$$

que según vimos en el capítulo 1 (ver proposición 6, pág. 23, y figura 1.17), para  $\theta \in [0, 2\pi]$  describe exactamente a la misma curva que

$$2e^{i\theta} + e^{-i2\theta},$$

nuestra deltoide de los ejemplos (aunque comenzada con un desfase de  $+\pi$  y recorrida al revés), encerrada entre el anillo de radio interior 1 y radio exterior 3 (ver figura 3.2).

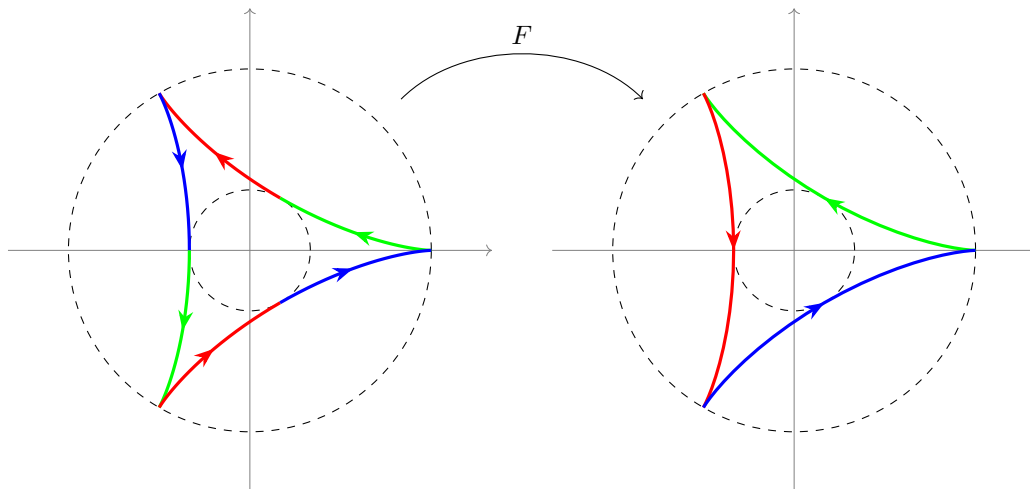


**Figura 3.2:** Conjuntos de puntos críticos (*izquierda*) y de valores críticos (*derecha*) de  $F$ .

Si llamamos  $\Lambda$  a dicho conjunto de valores críticos, es decir

$$\Lambda = \{z = 2e^{i\theta} + e^{-i2\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\},$$

resulta algo bastante notable.



**Figura 3.3:**  $F(\Lambda) = \Lambda$  (recorrida dos veces).

**Proposición 12.** El conjunto  $\Lambda$  es invariante bajo  $F$ , es decir:  $F(\Lambda) = \Lambda$ .

**Demostración:** Sea  $2e^{i\theta} + e^{-i2\theta} \in \Lambda$ . Entonces:

$$\begin{aligned} F(2e^{i\theta} + e^{-i2\theta}) &= 4e^{i2\theta} + 4e^{-i\theta} + e^{-i4\theta} - 4e^{-i\theta} - 2e^{i2\theta} \\ &= 2e^{i2\theta} + e^{-i4\theta} \\ &= 2e^{i(2\theta)} + e^{-i2(2\theta)}, \end{aligned}$$

que reconocemos como otra parametrización de la deltoide  $\Lambda$ , sólo que recorrida al doble de velocidad y, por ello, recorrida dos veces al variar  $\theta \in [0, 2\pi]$  (ver figura 3.3).  $\square$

Ahora bien, en realidad resulta que  $\Lambda$  no es la única curva que se comporta bastante bien con la función  $F$  (si bien es la que mejor se comporta en cierto sentido), sino que es parte de toda una gran familia. A continuación presentamos a cada uno de sus integrantes. Para cada  $t \in \mathbb{R}$  consideremos la curva

$$\Lambda_t = \{z = te^{i\theta} + e^{-i2\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Nuestro estudio previo de las curvas con parametrizaciones de la forma  $me^{i\theta} + ne^{-ik\theta}$  (ver capítulo 1) nos permite identificar a  $\Lambda_t$  para  $t > 0$  como una hipotrocoide de periodo  $2\pi$ , con 3 crestas y 3 valles de argumentos en el conjunto  $\{0, \hat{\theta}, 2\hat{\theta}, 3\hat{\theta}, 4\hat{\theta}, 5\hat{\theta}\}$  con  $\hat{\theta} = 2\pi/6$ , encerrada en un anillo de radio interior  $|t-1|$  y radio exterior  $t+1$ . Además se tiene que  $\Lambda_{-t} = \Lambda_t$ , y por otro lado  $\Lambda_2 = \Lambda$  y  $\Lambda_0 = \mathbb{C}$ . Finalmente, para  $t > 2$ ,  $\Lambda_t$  es una hipotrocoide disminuida; para  $t = 2$ , una hipocicloide; para  $0 < t < 2$ , una hipotrocoide aumentada; y para  $t = 0$ , una circunferencia.

Sea  $\Gamma = \{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}\}$ . En la figura 3.4 se presentan algunos elementos de dicha familia, que resultan tener también propiedades interesantes, como en seguida veremos.

**Proposición 13.** La familia  $\Gamma$  es invariante bajo la función  $F$ , es decir, para cada  $t \in \mathbb{R}$  existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $F(\Lambda_t) = \Lambda_s$ .

**Demostración:** Sean  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Lambda_t \in \Gamma$  y  $te^{i\theta} + e^{-i2\theta} \in \Lambda_t$ . Entonces:

$$\begin{aligned} F(te^{i\theta} + e^{-i2\theta}) &= t^2e^{i2\theta} + 2te^{-i\theta} + e^{-i4\theta} - 2te^{-i\theta} - 2e^{i2\theta} \\ &= (t^2 - 2)e^{i2\theta} + e^{-i4\theta}. \end{aligned}$$

Luego, tomando  $s = t^2 - 2$  y  $\eta = 2\theta$ , tenemos que:

$$F(te^{i\theta} + e^{-i2\theta}) = se^{i\eta} + e^{-i2\eta}.$$

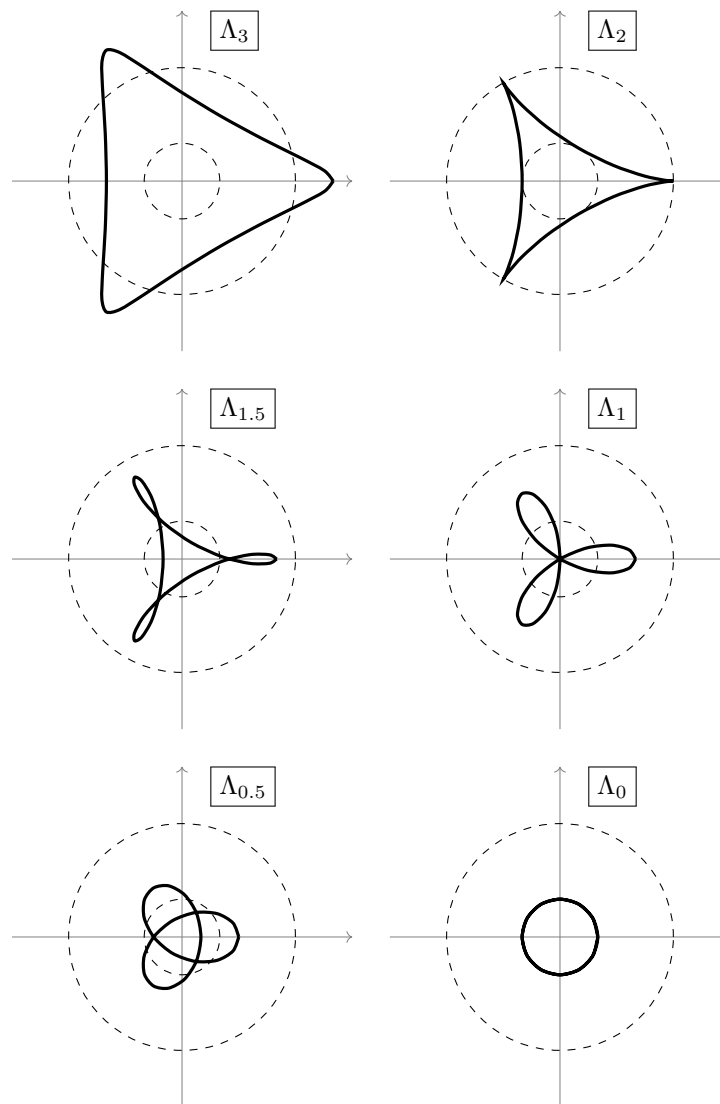
Así es que  $F(\Lambda_t) = \Lambda_s$ .  $\square$

**Observación 6.** Nótese que de acuerdo con la demostración de la proposición anterior:

1. Si  $t \neq 0$  y  $\theta$  varía en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , entonces  $\Lambda_t$  se recorre una vez, mientras que  $\Lambda_s = F(\Lambda_t)$  se recorre dos veces.
2. Si  $t \neq 0$ , tanto las crestas como los valles de  $\Lambda_t$  van a dar bajo la función  $F$  a las crestas de  $\Lambda_s$  si  $s > 0$ , o a los valles si  $s < 0$ ; esto es consecuencia de que estos puntos importantes en  $\Lambda$  se alcanzan para  $\theta = c(2\pi/6)$ , según sea  $c$  par o impar, mientras que en  $\Lambda_s$  para  $\eta = 2\theta = 2c(2\pi/6)$  el coeficiente inicial es siempre par (ver proposición 5, pág. 18).
3. Cuando  $t = 0$ , tanto  $\Lambda_t$  como  $\Lambda_s$  se recorren dos veces al variar  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Observación 7.** No es difícil ver lo siguiente:

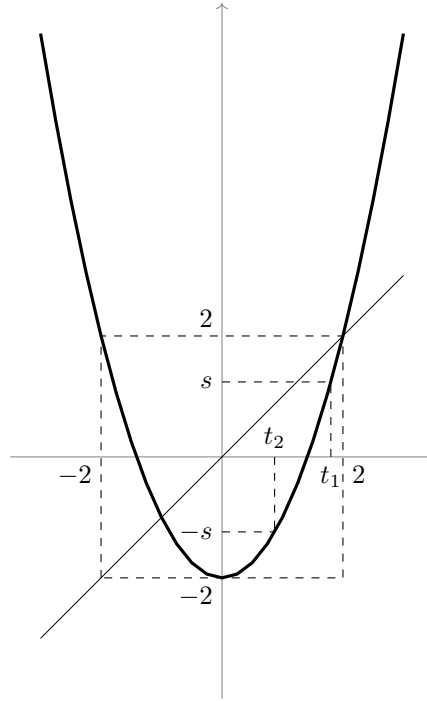
1.  $\Lambda_t$  es una curva simple cerrada cuando  $t \geq 2$ ; y si  $2 \leq t < s$ , entonces  $\Lambda_t \cap \Lambda_s = \emptyset$ .
2. Según el teorema de la curva de Jordan, el conjunto  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  está formado por dos componentes conexas abiertas y ajenas  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$ , la primera acotada y la segunda no acotada, tales que  $\Lambda$  es frontera común de ambas.
3. Todo elemento de  $\mathcal{L}$  está en  $\Lambda_t$  para alguna  $t \in (2, \infty)$ .
4. Todo elemento de  $\mathcal{K}$  está en  $\Lambda_t$  para alguna  $t \in [1, 2)$ .



**Figura 3.4:** Algunos elementos de la familia  $\Gamma = \{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}\}$ .

## El conjunto $\overline{\mathcal{K}}$ de puntos atrapados por $F$ y la cuenca de atracción de $\infty$

Ahora bien, para entender un poco más este movimiento entre curvas de la familia bajo la función  $F$ , conviene analizar la función de cambio de parámetro que aparece en la demostración de la proposición 13, es decir, la función  $p(t) = t^2 - 2$  (ver figura 3.5).



**Figura 3.5:** Gráfica de la función  $p(t) = t^2 - 2$

Para empezar, esta función tiene exactamente dos puntos fijos (repulsores), que son  $t = 2$  y  $t = -1$ , lo cual indica que además de  $\Lambda_2 = \Lambda$ , la curva  $\Lambda_{-1} = \Lambda_1$  es también invariante bajo  $F$ . Por otro lado, según el análisis gráfico de  $p(t)$ , tenemos por ejemplo que si  $-2 \leq t \leq 2$ , entonces  $-2 \leq p(t) \leq 2$ ; y que si  $t \notin [-2, 2]$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(t) = \infty$ . Recordemos que para  $t \geq 0$ , según lo visto en el capítulo 1,  $\Lambda_t$  está contenida en el anillo de radio menor  $|t-1|$  y radio mayor  $t+1$ . De ahí que si  $z \in \Lambda_t$  con  $t \in [-2, 2]$ , entonces  $|F^n(z)| \leq 3$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ; y si  $z \in \Lambda_t$  con  $t \notin [-2, 2]$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} |F^n(z)| = \infty$ . Es decir que para cualquier punto  $z \in \mathbb{C}$ , la órbita de  $z$  es acotada si y sólo si existe  $t \in [-2, 2]$  tal que  $z \in \Lambda_t$ . Esto es, el conjunto  $A(F)$  de puntos de órbita acotada y la cuenca de atracción de infinito  $A_\infty(F)$  resultan ser

$$A(F) = \{z \in \mathbb{C} : z \in \Lambda_t \text{ para alguna } t \in [-2, 2]\} \text{ y}$$

$$A_\infty(F) = \{z \in \mathbb{C} : z \in \Lambda_t \text{ para alguna } t \notin [-2, 2]\}.$$

De hecho nótese que, usando la observación 7 y que  $\mathbb{C} = \mathcal{K} \cup \Lambda \cup \mathcal{L}$ , se concluye que:

$$A(F) = \mathcal{K} \cup \Lambda = \overline{\mathcal{K}} \text{ y}$$

$$A_\infty(F) = \mathcal{L}.$$

Como habíamos visto en el capítulo 2, y aquí se observa de nuevo, estos dos conjuntos son invariantes bajo  $F$ .

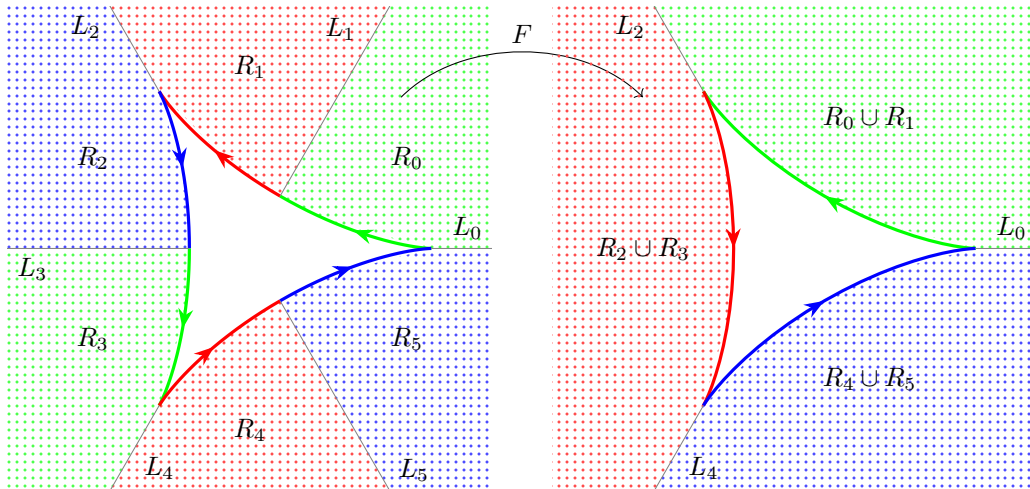


## Los conjuntos $\bar{\mathcal{L}}$ y $\bar{\mathcal{K}}$ transformados por $F$

Para visualizar cómo actúa  $F$  sobre  $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \Lambda$ , notemos que según la observación 6 y lo estudiado en el capítulo 1, si  $t \geq 2$  y  $F(\Lambda_t) = \Lambda_s$  (con  $s \geq 2$ , como ya vimos), entonces cada cresta o valle de  $\Lambda_t$  con aguntamiento  $\theta$  va a dar bajo la función  $F$  a la cresta de  $\Lambda_s$  de argumento  $\eta = 2\theta$ . Entonces, para cada  $i = 0, 1, \dots, 5$  se tiene que (módulo 6):

$$F(L_i) = L_{2i} \text{ y } F(R_i) = R_{2i} \cup R_{2i+1},$$

donde las  $L_i$  y las  $R_i$  son, respectivamente, los rayos y las regiones cerradas (incluyendo su frontera) indicadas en la figura 3.6.



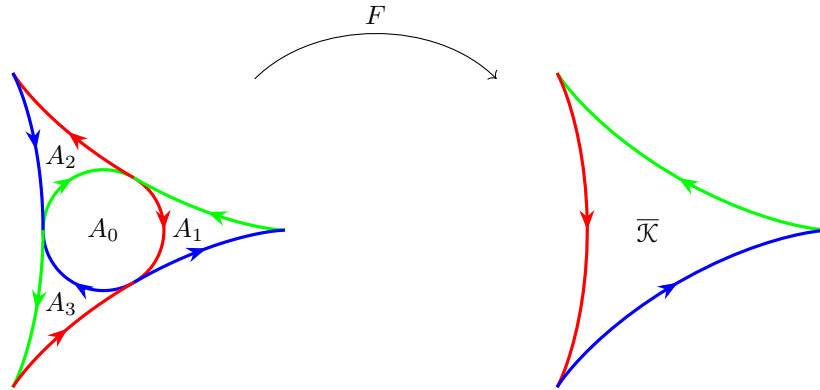
**Figura 3.6:**  $F(\Lambda \cup \mathcal{L}) = \Lambda \cup \mathcal{L}$ .

También la gráfica de cambio de parámetro muestra que la función  $F$  en  $\bar{\mathcal{L}}$  es dos a uno, pues dada  $\Lambda_s = \Lambda_{-s}$  con  $s > 2$ , sólo existen dos parámetros  $t$  y  $-t$  tales que  $p(t), p(-t) \in \{s, -s\}$ , es decir, tales que  $F(\Lambda_t) = \Lambda_s = F(\Lambda_{-t})$ ; pero  $\Lambda_t = \Lambda_{-t}$ , así que en realidad sólo existe una curva de la familia  $\Gamma$  que bajo  $F$  se convierte en  $\Lambda_s$ . Ahora bien, por las observaciones 6(1) y 7(1), dado un punto en  $\Lambda_s$  existen exactamente dos puntos en  $\Lambda_t$  que van a dar a dicho punto bajo  $F$  (el caso  $s = 2$  es un poco distinto, pero se obtiene la misma conclusión).

Por otro lado, para visualizar cómo actúa  $F$  en  $\bar{\mathcal{K}}$  notemos que dada  $\Lambda_s \subseteq \bar{\mathcal{K}}$  con  $0 \leq s < 2$ , existen  $t_1$  y  $t_2$  con  $0 < t_2 \leq \sqrt{2} \leq t_1 < 2$  tales que  $F(\Lambda_{t_1}) = \Lambda_s = \Lambda_{-s} = F(\Lambda_{t_2})$  (ver figura 3.5). De manera análoga a como lo acabamos de hacer, se puede concluir que cada punto de  $\Lambda_s$  tiene a lo más cuatro preimágenes (aunque pueden ser menos si es que caen en las intersecciones de las curvas  $\Lambda_{t_1}$  y  $\Lambda_{t_2}$ ).

Lo anterior y el hecho de que  $\Lambda$  y  $\mathcal{C}$  dividen a  $\bar{\mathcal{K}}$  en 4 regiones cerradas distintas  $A_0, A_1, A_2$  y  $A_3$  tales que sus fronteras van a dar bajo  $F$  a la frontera de  $\bar{\mathcal{K}}$ , según se ilustra en la figura 3.7, sugiere fuertemente que  $F(A_j) = \bar{\mathcal{K}}$  para cada  $j = 0, 1, 2, 3$ . En realidad, notando por ejemplo que  $\Lambda$  es el conjunto de valores críticos de  $F$ , y que  $a_0 = 0 \in A_0$  y  $a_j = 2e^{i((j-1)(2\pi/3))} \in A_j$  (si  $j \neq 0$ ) son tales que bajo la función  $F$  van a dar a 0, con argumentos de topología diferencial se puede llegar a la conclusión de que tal sospecha es cierta. Ver (King 2006, sección 1.4).

Finalmente, hagamos notar que la forma de  $F$  de transformar  $\bar{\mathcal{L}}$  en  $\bar{\mathcal{L}}$  recuerda lo que hace la función  $\varphi(z) = z^2$ . De hecho, más adelante, en el apéndice del capítulo 6, veremos que la



**Figura 3.7:**  $F(A_j) = \bar{\mathcal{K}}$  para cada  $j = 0, 1, 2, 3$ .

dinámica de  $F$  en  $\bar{\mathcal{L}} = \mathbb{C} \setminus \mathcal{K} = \mathbb{C} \setminus \text{int}(\bar{\mathcal{K}})$  es en realidad esencialmente la misma que la de la función  $\varphi$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D})$ , de la que ya hablamos en el capítulo 2, donde  $\mathcal{D}$  es el disco unitario con su frontera incluida.

Por otro lado, la manera de  $F$  de transformar a  $\bar{\mathcal{K}}$  en  $\bar{\mathcal{K}}$ , a pesar de ser más difícil de visualizar tal cual, contiene una cierta simetría muy particular que resulta ser muy útil para construir un modelo geométrico simple que ayuda a entender la dinámica de  $F$  en  $\bar{\mathcal{K}}$  con bastante claridad. De eso trata el siguiente capítulo.

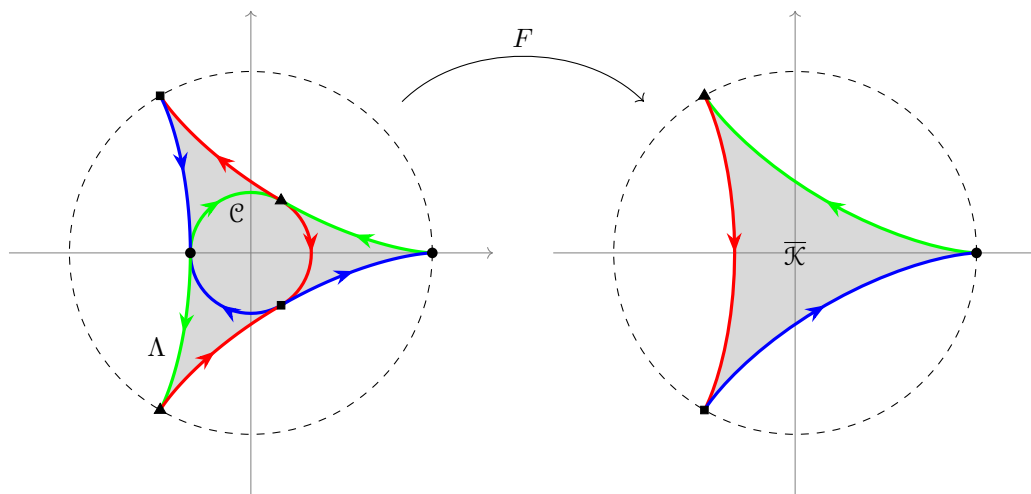


## Capítulo 4

# Un modelo geométrico $G: \Delta \rightarrow \Delta$ para $F: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$

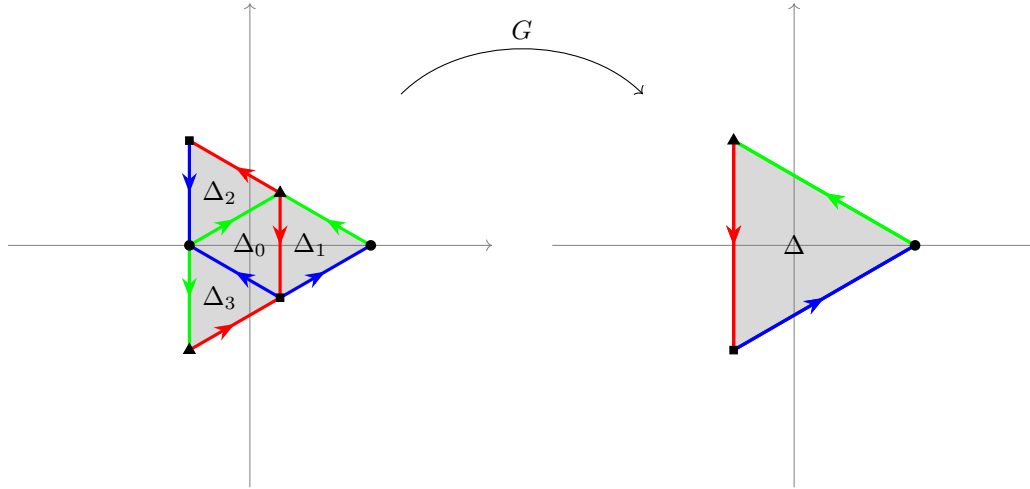
### La descripción del modelo geométrico

En el capítulo anterior concluimos que el conjunto de puntos atrapados de nuestra función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  es el conjunto acotado  $\overline{\mathcal{K}}$  del plano cuya frontera es la deltoide  $\Lambda$ . También vimos que  $F$  transforma en  $\Lambda$  tanto a  $\Lambda$  misma como a la circunferencia unitaria  $\mathcal{C}$ , así como se indica en la figura 4.1.



**Figura 4.1:**  $F$  transforma a  $\overline{\mathcal{K}}$  en  $\overline{\mathcal{K}}$  y a  $\mathcal{C} \cup \Lambda$  en  $\Lambda$ .

A partir de lo que sucede con este par de curvas y buscando entender la manera como  $F$  transforma a todo  $\overline{\mathcal{K}}$  en  $\overline{\mathcal{K}}$  mismo, uno podría (al menos intuitivamente) intentar enderezar un poco las cosas, representando por ejemplo segmentos de líneas curvas como si fueran segmentos de recta y obteniendo un diagrama como el de la figura 4.2 (cuya estructura tan simétrica llama bastante la atención).



**Figura 4.2:** El aspecto de  $\overline{\mathcal{K}}$  si las curvas fueran segmentos de recta.

Aquí,  $\Delta$  es el triángulo equilátero descrito como

$$\Delta = \{(x, y) : x \in [-1, 2] \text{ y } \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \leq y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)\},$$

y que está compuesto por los cuatro triángulos equiláteros siguientes:

$$\Delta_0 = \{(x, y) : x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \text{ y } -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)\},$$

$$\Delta_1 = \{(x, y) : x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ y } \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \leq y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)\},$$

$$\Delta_2 = \{(x, y) : x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \text{ y } \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \leq y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)\},$$

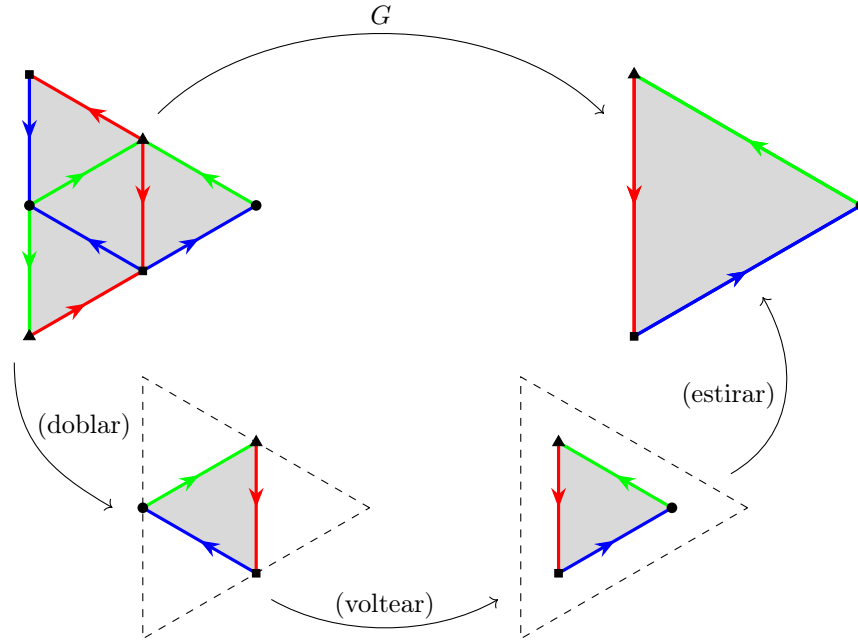
$$\Delta_3 = \{(x, y) : x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \text{ y } \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \leq y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)\}.$$

Nótese que mediante el procedimiento plástico antes descrito, el conjunto  $\overline{\mathcal{K}}$  toma la forma del triángulo  $\Delta$  y la función  $F$ , la de una nueva función  $G$ . Para nuestra sorpresa, dicha función  $G$  parece poder describirse en términos geométricos bastante simples.

Pues bien, siguiendo con la heurística imaginativa, uno puede pensar el triángulo  $\Delta$  como si estuviera hecho de algún tipo de papel altamente deformable y descubrir que la función  $G$  parece actuar de acuerdo con tres pasos básicos: doblar (hacia adentro), voltear (horizontalmente) y estirar (ver figura 4.3).

Esto corresponde con la siguiente expresión de  $G$  como una función lineal por partes:

$$G(x, y) = \begin{cases} (-2x, 2y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_0, \\ (2x-2, 2y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_1, \\ (1-x-\sqrt{3}y, \sqrt{3}+\sqrt{3}x-y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_2, \\ (1-x+\sqrt{3}y, -\sqrt{3}-\sqrt{3}x-y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_3. \end{cases}$$



**Figura 4.3:** La función  $G$  en tres pasos: doblar, voltear y estirar.

En el capítulo 6 se muestra que, maravillosamente, tal función  $G: \Delta \rightarrow \Delta$ , a la que llamaremos *modelo geométrico*, es topológicamente conjugada con nuestra función  $F: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$ . Eso indica, como se verá también ahí, que estudiar el sistema dinámico discreto generado por  $G$  en  $\Delta$  efectivamente nos ayudará a entender, con bastante nitidez, el generado por  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$ .

Para entender la dinámica de la función  $G: \Delta \rightarrow \Delta$  notemos en primer lugar que dividiendo el triángulo  $\Delta$  por los segmentos que unen los puntos medios de sus lados se obtienen los 4 triángulos equiláteros más pequeños a los que hemos llamado  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$  y  $\Delta_3$ , y que cumplen que  $G(\Delta_i) = \Delta$  para cada  $i = 0, 1, 2, 3$ . Dividiendo análogamente cada uno de dichos triángulos en cuatro, se obtienen ahora en total  $4^2$  triángulos equiláteros más pequeños de forma que, para cada  $i$  fija, cuatro de ellos, a los que podemos llamar  $\Delta_{0,i}, \Delta_{1,i}, \Delta_{2,i}$  y  $\Delta_{3,i}$ , son tales que  $\Delta_{j,i} \subseteq \Delta_i$  y  $G(\Delta_{j,i}) = \Delta_i$ . Siguiendo así, para cada pareja  $j, i$  fija existen cuatro triángulos equiláteros más pequeños  $\Delta_{0,j,i}, \Delta_{1,j,i}, \Delta_{2,j,i}$  y  $\Delta_{3,j,i}$  tales que  $\Delta_{k,j,i} \subseteq \Delta_{j,i}$  y  $G(\Delta_{k,j,i}) = \Delta_{j,i}$ . Este procedimiento puede continuarse de manera que si en general para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos el conjunto

$$\Psi_n = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n) \mid w_i \in \{0, 1, 2, 3\}\},$$

entonces dado  $w = (w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n) \in \Psi_n$  existe un triángulo equilátero nombrado  $\Delta_w$  tal que

$$\Delta_w \subseteq \Delta_{w_1}$$

y  $G(\Delta_w) = \Delta_{w_2, \dots, w_{n-1}, w_n},$

donde  $G: \Delta_w \rightarrow \Delta_{w_2, \dots, w_{n-1}, w_n}$  es un homeomorfismo que multiplica por 2 la distancia entre cualesquiera dos puntos.

Toda esta información, aunque con un poco más de detalles sobre la ubicación de  $\Delta_w$ , se puede concentrar en el siguiente teorema, en el que por cierto utilizamos la notación  $A \xrightarrow{G} B$

para referirnos a la función  $G: A \rightarrow B$  de manera un poco más gráfica.

**Proposición 14.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para cualquier  $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n) \in \Psi_n$ :

- (a)  $\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n} \subseteq \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}}$ .
- (b)  $\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n} \xrightarrow{G} \Delta_{w_2, \dots, w_{n-1}, w_n}$  es un homeomorfismo que multiplica por 2 la distancia entre cualesquiera dos puntos.

**Demostración:** Notemos para empezar que por construcción siempre se cumple el inciso (b), pero falta demostrar el inciso (a). Procediendo por inducción matemática, tenemos para  $n = 1$  que si a  $\Delta_{w_1}$  le quitamos el último índice o el primero, obtenemos simplemente  $\Delta$ , por lo que habría que probar que  $\Delta_{w_1} \subseteq \Delta$  y  $\Delta_{w_1} \xrightarrow{G} \Delta$  es un homeomorfismo que cumple lo pedido para cualquier  $w_1 = 0, 1, 2, 3$ , pero esto es cierto por construcción y por la definición de  $G$ . La afirmación para  $n = 2$  también se cumple por construcción, como ya hemos visto. Ahora bien, si la afirmación es cierta para algún  $n \geq 2$  (HI) y consideramos ahora

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}) \in \Psi_{n+1},$$

por construcción,  $\Delta_w \subseteq \Delta_u$  para algún  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n) \in \Psi_n$  y por otro lado  $\Delta_w$  fue nombrado de manera que

$$\begin{aligned} \Delta_w &\subseteq \Delta_{w_1} \\ \text{y } G(\Delta_w) &= \Delta_{w_2, \dots, w_n, w_{n+1}}. \end{aligned}$$

Resulta entonces que

$$\Delta_w \subseteq \Delta_{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n} \cap \Delta_{w_1} \subseteq \Delta_{u_1} \cap \Delta_{w_1}.$$

Pero para que esta última intersección no sea únicamente un vértice o un segmento de recta (en cuyo caso no podría contener a  $\Delta_w$  como lo hace), debe suceder que  $u_1 = w_1$ .

Por otro lado,

$$\Delta_w \subseteq \Delta_u \Rightarrow G(\Delta_w) \subseteq G(\Delta_u) \stackrel{(HI)}{=} \Delta_{u_2, \dots, u_{n-1}, u_n}.$$

Pero también

$$G(\Delta_w) = \Delta_{w_2, \dots, w_n, w_{n+1}} \stackrel{(HI)}{\subseteq} \Delta_{w_2, \dots, w_n},$$

por lo que

$$G(\Delta_w) = \Delta_{w_2, \dots, w_n, w_{n+1}} \subseteq \Delta_{u_2, \dots, u_{n-1}, u_n} \cap \Delta_{w_2, \dots, w_n}.$$

Y de nuevo para que esta última intersección no sea ni vacía, ni un vértice, ni un segmento de recta, debe ocurrir que  $u_i = w_i$  para cada  $i = 2, 3, \dots, n$ . En conclusión

$$\Delta_w \subseteq \Delta_u = \Delta_{w_1, \dots, w_n},$$

que era lo que faltaba probar. □

## La dinámica caótica de $G: \Delta \rightarrow \Delta$

De acuerdo con todo lo hecho anteriormente, tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para cualquier  $(w_1, \dots, w_n) \in \Psi_n$  el triángulo equilátero  $\Delta_{w_1, \dots, w_n}$  es tal que sus lados miden  $\ell/2^n$  (donde  $\ell = 2\sqrt{3}$  es la medida de los lados de  $\Delta$ ) y que  $\Delta_{w_1, \dots, w_n} \xrightarrow{G^n} \Delta$  es un homeomorfismo que multiplica por  $2^n$  la distancia entre cualesquiera dos puntos. De ahí se puede concluir, por ejemplo, lo siguiente (es un buen ejercicio justificarlo con detalle).

**Observación 8.**  $G$  no tiene ningún punto asintóticamente periódico.

Por otro lado, esta característica de que fragmentos arbitrariamente pequeños de  $\Delta$  se conviertan a la larga en todo  $\Delta$  tiene consecuencias muy importantes en la dinámica de  $G$  como veremos a continuación. En primer lugar notemos algo que geoméricamente es bastante evidente al ir haciendo subdivisiones de los triángulos cada vez más finas.

**Lema 1.** Dados cualesquiera  $(x, y) \in \Delta$  y  $\varepsilon > 0$ , existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $\Delta_w$  con  $w \in \Psi_n$  tales que  $(x, y) \in \Delta_w \subseteq B_\varepsilon(x, y)$ .

**Demostración:** Dado que la mayor distancia entre dos puntos de un triángulo equilátero se alcanzan entre dos cualesquiera de sus vértices y dicha distancia es igual a la longitud de sus lados, en realidad basta con tomar  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\ell/2^n < \varepsilon$  y algún  $\Delta_w$  con  $w \in \Psi_n$  tal que  $(x, y) \in \Delta_w$ . Eso garantiza que para todo  $(x', y') \in \Delta_w$  suceda que  $d((x', y'), (x, y)) \leq \ell/2^n < \varepsilon$ , es decir, se cumple que  $(x, y) \in \Delta_w \subseteq B_\varepsilon(x, y)$ .  $\square$

A partir de este lema se puede probar fácilmente que la función  $G$  es caótica en  $\Delta$  en el sentido de Devaney, es decir que tiene densidad de puntos periódicos, es transitiva y es sensible a las condiciones iniciales. Esto hacemos a continuación.

**Proposición 15.** La función  $G: \Delta \rightarrow \Delta$  tiene densidad de puntos periódicos.

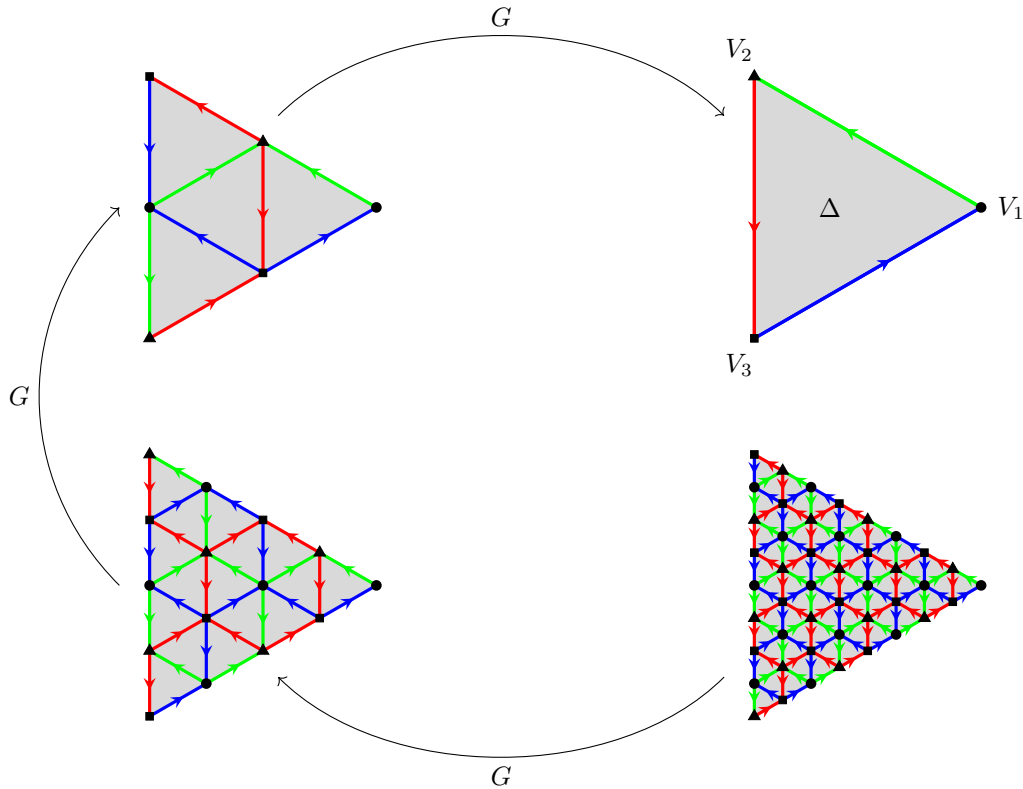
**Demostración:** Dados  $(x, y) \in \Delta$  y  $\varepsilon > 0$ , por el lema 1, existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $w \in \Psi_n$  tales que  $(x, y) \in \Delta_w \subseteq B_\varepsilon(x, y)$ . Por otro lado,  $\Delta_w \xrightarrow{G^n} \Delta$  es un homeomorfismo que multiplica por  $2^n$  la distancia entre cualesquiera dos puntos, así es que  $\Delta_w \xrightarrow{G^{-n}} \Delta$  es un homeomorfismo que, por el contrario, multiplica por  $1/2^n$  las distancias, es decir que se trata de una contracción. Ahora bien, como  $\Delta$  es un conjunto compacto, por el teorema de la contracción, existe una única pareja  $(u, v) \in \Delta$  tal que  $G^{-n}(u, v) = (u, v)$ , pero esta igualdad se da si y sólo si  $(u, v) = G^n(u, v)$ . Así es que en  $\Delta_{w_1, \dots, w_n}$  existe exactamente un punto fijo de  $G^n$ , es decir un punto periódico de  $G$  (que, recordemos, puede ser de periodo  $n$  o de periodo algún otro divisor de  $n$ ).  $\square$

Lo anterior se puede visualizar bastante bien considerando la figura 4.4, en la que se ilustra cómo es que cada triángulo  $\Delta_w$  con  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \Psi_n$  se convierten en el triángulo  $\Delta$  después de aplicar  $n$  veces la función  $G$ . Si la función  $G$  la estamos pensando como un doblar, voltear y estirar, entonces para obtener en esta figura cada paso “hacia atrás” se puede pensar en el proceso inverso: encoger, voltear y desdoblar (nótese que luego de este proceso, el triángulo  $\Delta_1$  queda en la misma dirección y orientación que el triángulo  $\Delta$ ).

Además en esta figura se puede identificar fácilmente las imágenes inversas de los vértices y de los lados de  $\Delta$  bajo iteraciones cada vez mayores de  $G$ . Si  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$  es el conjunto de vértices del triángulo y  $\partial\Delta$  es su frontera, entonces

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\mathcal{V}) \quad \text{y} \quad \mathcal{J} = \bigcup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\partial\Delta)$$





**Figura 4.4:** Imágenes inversas bajo la función  $G$ .

son, respectivamente, el conjunto de vértices y el conjunto de lados de todos los triángulos  $\Delta_w$  con  $w \in \Psi_n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Y dado que es posible imaginarse esta figura como tejida por una araña muy trabajadora, llamaremos al conjunto  $\mathcal{T}$  *la telaraña* y a  $\mathcal{N}$ , el *conjunto de nudos*.

Es claro que tanto en

$$\mathcal{N} \setminus \mathcal{V} \quad \text{como en} \quad \mathcal{T} \setminus \partial\Delta$$

no hay ningún punto periódico, puesto que los del primer conjunto son todos preperiódicos, ya que a la larga su órbita cae en alguno de los vértices en  $\mathcal{V}$  y  $G(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ . Por otro lado, los del segundo conjunto están en el interior de  $\Delta$ , pero su órbita cae en algún momento en  $\partial\Delta$  y nunca vuelve al interior de  $\Delta$ , ya que  $G(\partial\Delta) = \partial\Delta$ . Esto tiene diversas consecuencias.

En particular se tiene que si  $(x, y)$  es un punto periódico de periodo  $n$  tal que  $(x, y) \in \text{int}(\Delta)$ , entonces  $(x, y) \notin G^{-1}(\partial\Delta)$ . De hecho  $o((x, y), G) \subseteq \text{int}(\Delta) \setminus G^{-1}(\partial\Delta)$ .

Luego, como en  $\text{int}(\Delta) \setminus G^{-1}(\partial\Delta)$  la función  $G$  es una expansión lineal por un factor 2, entonces  $G$  es derivable en cada punto de  $o((x, y), G)$  y los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $DG^n(x, y)$  cumplen que  $|\lambda_1| = 2^n = |\lambda_2|$ . Esto implica que cada punto periódico de  $G$  que está en  $\text{int}(\Delta)$  es expansivo, es decir, repulsor.

Por otro lado, ya sabemos que en cada uno de los 4 triángulos del primer paso hacia atrás de la figura 4.4 hay un punto  $(x, y)$  tal que  $G(x, y) = (x, y)$ , es decir, un punto fijo, pero por la observación previa sobre los conjuntos  $\mathcal{N} \setminus \mathcal{V}$  y  $\mathcal{T} \setminus \partial\Delta$ , es claro que cada uno de esos 4 puntos no puede estar más que en uno de dichos 4 triángulos, es decir, no puede estar en la intersección de 2 o más de ellos. Esto implica que  $G$  tiene exactamente 4 puntos fijos. Análogamente se tiene en el siguiente paso que existen  $4^2$  puntos  $(x, y)$  distintos tales que  $G^2(x, y) = (x, y)$ , es decir, hay

a lo más  $4^2$  puntos de periodo 2. En específico, todos deben serlo a excepción de los 4 puntos fijos. Esto indica que hay exactamente  $12 = 4^2 - 4$  puntos de periodo 2. En general se tiene que si  $p$  es primo, existen exactamente  $4^p - 4$  puntos periódicos de periodo  $p$  (lo cual recuerda el pequeño teorema de Fermat, que asegura que dicho número es divisible entre  $p$ ; aquí esto es claro porque dicha división  $(4^p - 4)/p$  cuenta el número de órbitas distintas de periodo  $p$  y eso es siempre un número entero). Por otro lado, contar el número de puntos periódicos de periodo  $n$  si  $n$  no es primo es algo más complicado, pero más fácil es probar el siguiente resultado.

**Proposición 16.** La función  $G$  tiene puntos periódicos de todos los periodos en  $\Delta$ .

**Demostración:** Por lo explicado anteriormente, en  $\Delta$  existen  $4^n$  puntos  $(x, y)$  distintos tales que  $G^n(x, y) = (x, y)$ . Estos pueden ser de periodo  $n$  o de periodo algún divisor de  $n$ . Como para cada  $k = 1, 2, \dots, n-1$  se tiene que a lo más hay  $4^k$  puntos de periodo  $k$ , entonces en el peor de los casos, habría que restar todos estos a los  $4^n$  candidatos a ser puntos periódicos de periodo  $n$ . Pero

$$(4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1}) = 4(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-2}) = 4 \left( \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} \right) < 4 \left( \frac{4^{n-1}}{3} \right) < 4^n,$$

por lo que al menos uno de esos  $4^n$  candidatos debe ser de periodo  $n$ .  $\square$

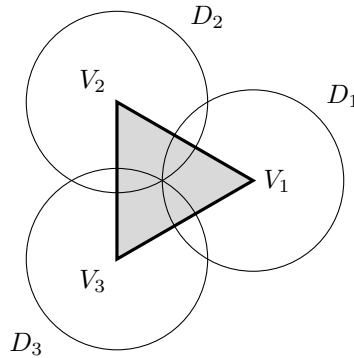
**Corolario 1.** La función  $G$  tiene puntos preperiódicos de todos los periodos y además forman un conjunto denso en  $\Delta$ .

Lo anterior es inmediato del siguiente resultado, fácil de visualizar y de probar.

**Observación 9.** Dado  $(x, y) \in \Delta$ , el conjunto  $\cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(x, y)$  es denso en  $\Delta$ .

**Proposición 17.** La función  $G: \Delta \rightarrow \Delta$  es transitiva.

**Demostración:** Dados  $U, V \subseteq \Delta$  conjuntos abiertos no vacíos en el espacio  $\Delta$ , existen  $(x, y) \in U$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $(x, y) \in B_\varepsilon(x, y) \cap \Delta \subseteq U$ . De acuerdo con el lema 1, existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $w \in \Psi_n$  tales que  $(x, y) \in \Delta_w \subseteq B_\varepsilon(x, y) \cap \Delta$ . De ahí que  $\Delta_w \subseteq U$  y entonces  $G^n(\Delta_w) \subseteq G^n(U)$ . Pero como  $\Delta = G^n(\Delta_w)$  y  $G^n(U) \subseteq G^n(\Delta) = \Delta$ , entonces  $G^n(U) = \Delta$ . Finalmente, como  $V \subseteq \Delta$  es no vacío, entonces  $G^n(U) \cap V = V \neq \emptyset$ .  $\square$



**Figura 4.5:** Ningún punto de  $\Delta$  está en el interior de todos los discos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  de radio 2.

**Proposición 18.** La función  $G: \Delta \rightarrow \Delta$  es sensible a las condiciones iniciales.

**Demostración:** Como en la demostración de las otras dos propiedades, dado  $(x, y) \in \Delta$  y  $\delta > 0$ , sabemos que existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $w \in \Psi_n$  tal que  $(x, y) \in \Delta_w \subseteq B_\delta(x, y)$ . Ahora, si llamamos  $x_1, x_2$  y  $x_3$  a los vértices de  $\Delta_w$ , sabemos que  $G^n(x_1), G^n(x_2)$  y  $G^n(x_3)$  son, en algún orden, los vértices de  $\Delta$ . Como se ve en la figura 4.5, sin importar en qué lugar de  $\Delta$  esté  $G^n(x, y)$ , se tiene que dista de alguno de dichos vértices, digamos de  $G^n(x_i)$ , al menos una distancia 2. Esa distancia  $\varepsilon_0 = 2 > 0$  funciona perfectamente como constante de sensibilidad, ya que  $d(G^n(x, y), G^n(x_i)) \geq \varepsilon_0$ .  $\square$

## La dinámica de $G$ en subconjuntos invariantes de $\Delta$

Las estrategias utilizadas en la sección anterior resultan también de utilidad en el estudio de la dinámica de  $G$  en algunos subconjuntos propios invariantes de  $\Delta$  que resultan interesantes. A su vez, este estudio ayuda a comprender mejor la dinámica de  $G$  en todo  $\Delta$ .

Para empezar, recordemos un par de definiciones del capítulo 2 y agreguemos una más.

**Definición 10.** Sea  $f: X \rightarrow X$  una función continua en el espacio métrico  $X$  y sea  $A \subseteq X$ . Diremos que  $A$  es...

1. ... *invariante* bajo  $f$  si  $f(A) \subseteq A$ .
2. ... *fuertemente invariante* bajo  $f$  si  $f(A) = A$ .
3. ... *totalmente invariante* bajo  $f$  si  $f(A) = A$  y  $f^{-1}(A) = A$ .

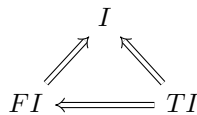
**Observación 10.** Notemos que en la última definición,  $f^{-1}(A) = A$  se puede sustituir por  $f^{-1}(A) \subseteq A$ , ya que  $f^{-1}(A) \supseteq A$  si y sólo si  $f(A) \subseteq A$ , y esto último se cumple pues  $f(A) = A$ .

**Proposición 19.** Sean  $f: X \rightarrow X$  una función continua en el espacio métrico  $X$  y  $x \in X$ . Entonces:

$$o(x, f) \text{ es fuertemente invariante} \Leftrightarrow x \text{ es un punto periódico de } f.$$

**Demostración:** Según la observación 2 (pág. 26) del capítulo 2, dado un punto periódico, también lo es cualquier elemento de su órbita (y de hecho, su órbita es la misma aunque recorrida quizá con algún desfase), así que la implicación de regreso ya se tiene. Para la implicación de ida, basta observar que si la órbita es invariante, entonces algún elemento de la órbita va a dar bajo  $f$  al primer elemento, es decir, existe  $f^n(x, y)$  tal que  $f(f^n(x, y)) = (x, y)$ , pero eso implica que  $(x, y)$  es periódico.  $\square$

Las definiciones de conjunto invariante (I), fuertemente invariante (FI) y totalmente invariante (TI), así como la proposición anterior y el hecho de que sabemos que en  $\Delta$  hay puntos con órbitas preperiódicas (por ejemplo los de  $\mathcal{N} \setminus \mathcal{V}$ ) nos permite construir el diagrama de implicaciones de la figura 4.6, en el que las implicaciones que no están es porque no se cumplen.

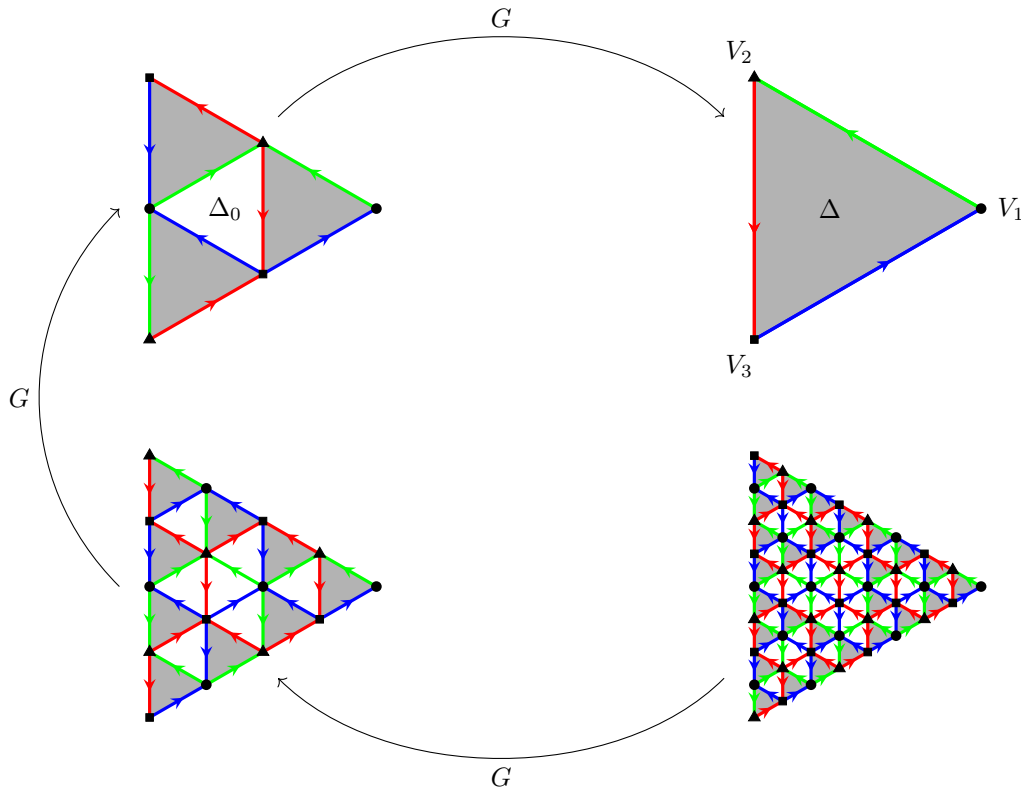


**Figura 4.6:** Diagrama de implicaciones de conjuntos invariantes.

Ahora sí, con estas definiciones y con las técnicas desarrolladas en la sección anterior, podemos dedicarnos a analizar algunos de los conjuntos invariantes que han aparecido hasta ahora, así como la dinámica de  $G$  en cada uno de ellos. Para esto, es de nuevo muy útil visualizar las cosas en diagramas como los de las figuras 4.4 y 4.7. Este último muestra la aparición del triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$ . Ir llenando la siguiente tabla puede ayudar a sintetizar toda esta información.

Conjunto	I	FI	TI	Ato	Cdo	Cto	D $\Delta$	DPP	TT	SCI	Caos
una órbita periódica											
$\Delta$											
$\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$											
$\partial\Delta$											
$\mathcal{N} = \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\mathcal{V})$											
$\mathcal{J} = \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\partial\Delta)$											
$\mathcal{O} = \Delta \setminus \mathcal{J}$											
$\mathcal{S} = \Delta \setminus \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\text{int}(\Delta_0))$											

Aquí, cada característica analizada, ya sea del conjunto dado o de la función  $G$  restringida a éste, se abrevia de la siguiente manera: invariante (I), fuertemente invariante (FI), totalmente invariante (TI), abierto (Ato), cerrado (Cdo), compacto (Cto), denso en  $\Delta$  (D $\Delta$ ), con densidad de puntos periódicos (DPP), con transitividad topológica (TT), con sensibilidad a las condiciones iniciales (SCI), con caos (Caos).



**Figura 4.7:** Quitando  $\text{int}(\Delta_0)$  y sus imágenes inversas, aparece un triángulo de Sierpiński.

En seguida hacemos este análisis caso por caso.

**$G$  en cualquier órbita periódica.** Si llamamos  $B = o((x, y), G)$  para algún punto  $(x, y)$  periódico dado, por la proposición 19 se tiene que  $B$  es fuertemente invariante. Por otro lado, por ser finito,  $B$  es un conjunto compacto y en  $G: B \rightarrow B$  hay densidad de puntos periódicos y transitividad topológica, pero no hay sensibilidad a las condiciones iniciales. Este es justamente un ejemplo de que el teorema de los 5 matemáticos (proposición 10, pág. 33 de esta tesis) no se cumple para conjuntos finitos (lo cual ellos mismos advierten al inicio de su artículo, pero podría generar confusión puesto que no lo escriben explícitamente como hipótesis en su teorema).

**$G$  en el triángulo  $\Delta$ .** Tenemos que el conjunto compacto  $\Delta$  es totalmente invariante bajo  $G$  y, como ya hemos visto,  $G$  es caótica en  $\Delta$ . Por otro lado, hay también algunas otras preguntas interesantes, como por ejemplo si en  $\Delta$  hay puntos de órbita densa y si sí, en dónde están.

**$G$  en el conjunto de vértices  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ .** Dicho conjunto compacto es fuertemente invariante bajo  $G$  y consiste en una órbita de un punto fijo y una órbita de periodo 2. Ahí sólo hay densidad de puntos periódicos, pero ninguna otra característica de la definición de caos.

**$G$  en  $\partial\Delta$ .** Dicho conjunto compacto es fuertemente invariante. Por otro lado, mirando con atención lo que la función  $G$  hace  $\partial\Delta$ , salta a la vista su gran parecido con la función  $\varphi(z) = z^2$  restringida a la circunferencia unitaria  $\mathcal{C}$ , en donde  $\varphi$  es caótica. De hecho, se puede emular aquí la demostración hecha en ese caso, en el capítulo 2, para probar que  $G$  es caótica en  $\partial\Delta$ . Más aun, en el capítulo 6 se mostrará que esto no es una simple coincidencia, pues las funciones  $\varphi$  en  $\mathcal{C}$  y  $G$  en  $\partial\Delta$  son topológicamente conjugadas.

**$G$  en el conjunto de nudos  $\mathcal{N} = \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\mathcal{V})$ .** Este conjunto es totalmente invariante, pero eso es consecuencia de un fenómeno más general que a continuación se describe.

**Proposición 20.** Si  $f: X \rightarrow X$  es una función continua y suprayectiva en un espacio métrico  $X$  y  $A \subseteq X$  es un conjunto invariante bajo  $f$ , entonces  $\tilde{A} = \cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)$  es un conjunto totalmente invariante.

**Demostración:** Para comenzar notemos que  $x \in \tilde{A} = \cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A)$  se puede interpretar en palabras como que “ $x$  está en  $A$  o en algún momento (bajo las iteraciones de  $f$ ) cae en  $A$ ”. Con ello es claro que si  $x \in \tilde{A}$ , entonces  $f(x) \in \tilde{A}$ , pues si  $x \in A$ , como  $A$  es invariante, entonces  $f(x) \in A$ ; si en cambio  $x$  cayera en  $A$  bajo la  $n$ -ésima iteración de  $f$  con  $n = 1$ , entonces  $f(x) \in A$ , y con  $n > 1$ , entonces en algún momento  $f(x)$  cae en  $A$  (de hecho bajo la  $(n-1)$ -ésima iteración de  $f$ ). Esto prueba que  $f(\tilde{A}) \subseteq \tilde{A}$ . Para la contención inversa, veamos que si  $x \in \tilde{A}$ , como  $f$  es suprayectiva, entonces existe  $\hat{x} \in X$  tal que  $f(\hat{x}) = x$ , pero como  $x$  está en  $\tilde{A}$  o en algún momento cae en  $\tilde{A}$ , entonces  $\hat{x}$  en algún momento cae en  $\tilde{A}$  (un paso después que  $x$ ). Hasta aquí,  $f(\tilde{A}) = \tilde{A}$ . Finalmente, la última condición para que sea totalmente invariante se da puesto que, de manera semejante, si  $x \in X$  es tal que  $f(x) \in \tilde{A}$ , entonces  $x$  también está en  $\tilde{A}$ . Es decir  $f^{-1}(\tilde{A}) \subseteq \tilde{A}$ .  $\square$

En particular esta proposición prueba que dado que  $\mathcal{V}$  es invariante bajo  $G$ , entonces  $\mathcal{N}$  es totalmente invariante. En dicho conjunto no hay densidad de puntos periódicos, pues por ejemplo todos los puntos en  $\mathcal{N} \cap \text{int}(\Delta)$  en algún momento van a dar a  $\mathcal{V}$  y ya no vuelven a caer en  $\text{int}(\Delta)$ . Por otro lado, sí hay transitividad topológica, pues dados dos conjuntos abiertos no vacíos  $U$  y  $V$  del conjunto  $\mathcal{N}$  y algún  $v \in V \subseteq \mathcal{N}$ , por la actividad 9, el conjunto  $\cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(v)$  es denso en  $\Delta$ . Y como ese conjunto está contenido en  $\mathcal{N}$ , eso prueba que existen  $u \in U \subseteq \mathcal{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$

tales que  $G^n(u) = v \in V$ . Finalmente, también hay sensibilidad a las condiciones iniciales, pues dado cualquier punto  $(x, y) \in \mathcal{N}$  siempre se pueden elegir un triángulo suficientemente pequeño del cual sea vértice y cualquiera de los otros dos vértices  $(x', y')$ , de manera que bajo el número adecuado de iteraciones  $(x', y')$  irá a dar a un vértice de  $\Delta$  distinto al que va a dar  $(x, y)$  y dichos vértices están a distancia  $\varepsilon_0 = 2\sqrt{3}$ .

**$G$  en la telaraña**  $\mathcal{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\partial\Delta)$ . Usando el mismo resultado que con el conjunto anterior, se prueba que  $\mathcal{T}$  es totalmente invariante bajo  $G$ , pues  $G(\partial\Delta) \subseteq \partial\Delta$ . Y también, de manera semejante a la de tal conjunto, se prueba que  $G$  no tiene densidad de puntos periódicos en  $\mathcal{T}$  pero sí es topológicamente transitiva y sensible a las condiciones iniciales (tomando por ejemplo como constante de sensibilidad la mitad de la  $\varepsilon_0$  que funcionaba para el conjunto anterior o bien  $\varepsilon_0 = 3$ ).

**$G$  en el conjunto de orificios**  $\mathcal{O} = \Delta \setminus \mathcal{T}$ . Este conjunto está definido como el complemento del conjunto  $\mathcal{T}$ , que ya hemos visto que es totalmente invariante, por lo que también debe serlo de acuerdo con el siguiente teorema.

**Proposición 21.** Si  $f: X \rightarrow X$  es una función continua y suprayectiva en un espacio métrico  $X$  y  $A$  es un conjunto totalmente invariante bajo  $f$ , entonces  $X \setminus A$  es también un conjunto totalmente invariante bajo  $f$ .

**Demostración:** En primer lugar vemos que

$$f(X \setminus A) \subseteq X \setminus A,$$

puesto que si  $x \in X \setminus A$ , entonces no puede pasar que  $f(x) \in A$  ya que al ser  $A$  totalmente invariante,  $f^{-1}(A) \subseteq A$ .

Además se da también la contención inversa

$$f(X \setminus A) \supseteq X \setminus A,$$

puesto que si  $y \in X \setminus A$ , entonces por ser  $f$  suprayectiva, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ , pero no puede ser que  $x \in A$  porque eso contradiría que  $f(A) \subseteq A$ , lo cual se sabe por ser  $A$  invariante. Luego,  $x \in X \setminus A$  y por lo tanto  $y \in f(X \setminus A)$ .

Finalmente,  $f^{-1}(X \setminus A) \subseteq X \setminus A$ , ya que si  $x \in f^{-1}(X \setminus A)$  entonces  $f(x) \in X \setminus A$ , y si ocurriera que  $x \in A$ , entonces como  $f(A) \subseteq A$ , se llegaría a contradicción, por lo que  $x \in X \setminus A$ .  $\square$

Otra característica interesante que tienen los subconjuntos totalmente invariantes de  $\Delta$ , y para cuya prueba es importante el teorema anterior, se puede interpretar como que en cada triángulo  $\Delta_w$  con  $w \in \Psi_n$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\Delta_w \cap A$  es una “copia” a escala del conjunto  $A$ . En seguida se expresa con precisión el enunciado de este teorema.

**Proposición 22.** Si  $A \subseteq \Delta$  es totalmente invariante, entonces para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier  $\Delta_w$  con  $w \in \Psi_n$  se tiene que  $G^n: \Delta_w \cap A \rightarrow A$  es un homeomorfismo.

**Demostración:** En primer lugar,  $G^n$  está bien definida en dicho dominio puesto que  $f(A) \subseteq A$ . También ahí es continua e inyectiva puesto que  $G^n: \Delta_w \rightarrow \Delta$  lo es. Además, también es suprayectiva sobre  $A$ , pues dado  $y \in A \subseteq \Delta$ , sabemos que existe  $x \in \Delta_w$  tal que  $f(x) = y$ . Pero como  $f^{-1}(A) \subseteq A$ , entonces  $x \in \Delta_w \cap A$ . Finalmente,  $G^{-n}: A \rightarrow \Delta_w \cap A$  es continua, puesto que  $G^{-n}: \Delta \rightarrow \Delta_w$  lo es.  $\square$

Ahora sí, volviendo al conjunto de orificios  $\mathcal{O}$ , que ya se vio que es totalmente invariante, se tiene además que en  $G: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  hay densidad de puntos periódicos, pues éstos son densos en  $\Delta$  y todos los puntos periódicos que están en  $\text{int}(\Delta)$  están en  $\mathcal{O}$ . Por otro lado, con ayuda del lema 1 y esta proposición que acabamos de enunciar, se demuestra (de manera análoga a como se hizo con el triángulo  $\Delta$ ) que en  $\mathcal{O}$  también hay transitividad topológica. Finalmente, también hay sensibilidad a las condiciones iniciales pues cualquier  $\varepsilon_0 < 2$  funciona como constante de sensibilidad (para convencerse de ello es muy útil mirar de nuevo la figura 4.5 y tomar en cuenta la observación 9). Por lo tanto, en  $\mathcal{O}$  hay también una dinámica caótica.

Una última observación es que

$$\mathcal{O} = \Delta \setminus (\cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\partial\Delta)) = \cap_{n=0}^{\infty} (\Delta \setminus G^{-n}(\partial\Delta)),$$

por las leyes de De Morgan. Es decir que  $\mathcal{O}$  es la intersección numerable de los conjuntos  $U_n = \Delta \setminus G^{-n}(\partial\Delta)$ , cada uno de los cuales es abierto y denso en  $\Delta$ . Así que por el teorema de Baire tenemos que dicho conjunto es denso en  $\Delta$ .

**$G$  en el triángulo de Sierpiński**  $\mathcal{S} = \Delta \setminus \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\text{int}(\Delta_0))$ . En primer lugar veamos que dado  $p \in \Delta$  se tiene que  $p \in \mathcal{S}$  si y sólo si  $o(p, G) \cap \text{int}(\Delta_0) = \emptyset$ . A partir de ahí es claro que  $G(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ . Por otro lado se tiene que  $\mathcal{S} \subseteq G(\mathcal{S})$ , pues dado cualquier  $p \in \mathcal{S}$ , existe  $q_0 \in \Delta_0$  tal que  $G(q_0) = p$ ; si  $q_0 \notin \text{int}(\Delta_0)$ , ya acabamos, pues  $q_0 \in \mathcal{S}$ , pero si  $q_0 \in \text{int}(\Delta_0)$ , entonces para cada  $i = 1, 2, 3$  existen  $q_i \in \text{int}(\Delta_i)$  tales que  $G(q_i) = p$ , y cualquiera de ellos no está en  $\text{int}(\Delta_0)$ . En segundo lugar, resulta que  $G$  está acotado y es un conjunto cerrado menos la unión de conjuntos abiertos, por lo que es compacto. Además se cumple algo parecido que lo que dice la proposición 9, salvo que tal afirmación no es válida para los triángulos  $\Delta_w$  cuyo interior se va quitando, como  $\Delta_0, \Delta_{1,0}, \Delta_{2,0}, \Delta_{3,0}, \dots$ . Notemos de hecho que los triángulos que se van quitando son los  $\Delta_w$  con  $w = (w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n)$  tales que  $w_i = 0$  para alguna  $i = 1, 2, \dots, n$ . Así que el resultado que sí se cumple queda formulado de la siguiente manera.

**Lema 2.** Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \Psi_n$ . Si  $w_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $G^n: \Delta_w \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es un homeomorfismo.

**Demostración:** Ya sabemos que  $G^n: \Delta_w \rightarrow \Delta$  es un homeomorfismo. Basta ver que se puede restringir al dominio y codominio dados. Así, si tomamos  $p \in \Delta_w \cap \mathcal{S}$ , como  $\mathcal{S}$  es invariante, entonces  $G^n(p) \in \mathcal{S}$ . A la inversa, si  $p \in \mathcal{S}$ , sabemos que existe  $q \in \Delta_w$  tal que  $G^n(q) = p$ . Para ver que  $q \in \mathcal{S}$  y por lo tanto  $q \in \Delta_w \cap \mathcal{S}$ , basta considerar los elementos  $q_i = G^i(q)$  de la órbita de  $q$  y lo que sabemos de ellos:

$$\begin{array}{cccccccc} & & (*) & & & & & \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & & & & \\ q_0 & q_1 & \dots & q_{n-1} & q_n & q_{n+1} & q_{n+2} & \dots \\ & & & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & & \\ & & & & p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ & & & & & & & (**) \end{array}$$

Los primeros  $n$  elementos (\*) de la órbita de  $q$  no están en  $\text{int}(\Delta_0)$ , pues  $q_{i-1} \in \Delta_{w_i}$  para cada  $i = 1, \dots, n$  y  $w_i \neq 0$  para cada uno de ellos. Y los siguientes elementos (\*\*) de la órbita de  $q$  tampoco están en  $\text{int}(\Delta_0)$  porque son los de la órbita de  $p$  y  $p \in \mathcal{S}$ . De ahí que  $q \in \mathcal{S}$ .  $\square$

Ya con este lema a la mano, se puede utilizar entonces esencialmente la misma estrategia que con  $\Delta$  para probar que  $G: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es caótica en  $\mathcal{S}$ .

## Capítulo 5

# Un modelo simbólico $\sigma: \Psi \rightarrow \Psi$ para $F: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$

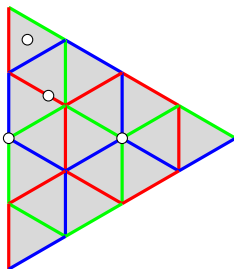
Partiendo de lo estudiado en el capítulo anterior, aquí veremos cómo cada punto del triángulo  $\Delta$  puede ser convenientemente representado mediante uno o varios códigos formados por una infinidad de dígitos tomados del conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Esto resultará tan bien que cada código de un punto dado tendrá la virtud de describirlo íntimamente, así como lo que el sistema dinámico generado por la función  $G$  hace con él. Estudiar tales códigos en el espacio en el que se encuentran y cómo es que interactúan unos con otros nos permitirá mirar desde una perspectiva privilegiada el sistema dinámico discreto  $G: \Delta \rightarrow \Delta$ , como si lo estuviéramos viendo a través de un microscopio o con ayuda de una máquina de rayos X, lo cual le dará un significado más rico a lo que hasta ahora hemos podido entender acerca de él. Más adelante veremos que tal modelo simbólico es también aplicable para la función  $F: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$ .

### La descripción del modelo simbólico

Dados  $p \in \Delta$  y  $n \in \mathbb{N}$ , como sabemos que  $\Delta = \cup_{w \in \Psi_n} \Delta_w$ , entonces  $p \in \Delta_w$  para al menos algún  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \Psi_n$  (ver figura 5.1).

Además, según lo que vimos en la proposición 14 del capítulo anterior,

$$p \in \Delta_w = \Delta_{w_1, \dots, w_n} \subseteq \Delta_{w_1, \dots, w_{n-1}} \subseteq \dots \subseteq \Delta_{w_1, w_2} \subseteq \Delta_{w_1}.$$



**Figura 5.1:** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , cada punto de  $\Delta$  puede estar en 1, 2, 3 o 6 triángulitos  $\Delta_w$  con  $w \in \Psi_n$ .



Por otro lado, si tomamos  $n$  cada vez más grande, los  $4^n$  triángulos distintos de la forma  $\Delta_w$  con  $w \in \Psi_n$  se van volviendo más y más pequeños, por lo que el código finito  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  nos va dando una información cada vez más precisa de la ubicación del punto  $p$ . Parece ser entonces que si  $w = (w_1, w_2, \dots)$  fuera un código infinito, el punto  $p$  quedaría totalmente determinado. Y en efecto así es, pues llamando

$$\Psi = \{(w_1, w_2, \dots) \mid w_n \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\},$$

tenemos que dado  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$ , existe un único punto  $p_w \in \Delta$  tal que

$$p_w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{w_1, \dots, w_n}.$$

Lo anterior se cumple puesto que  $\Delta$  es un espacio métrico completo y

$$\Delta_{w_1} \supseteq \Delta_{w_1, w_2} \supseteq \dots \supseteq \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n} \supseteq \dots$$

es una sucesión anidada de conjuntos compactos no vacíos en  $\Delta$  cuyo diámetro tiende a cero.

**Definición 11.** Diremos que  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  es un *código* del punto  $p \in \Delta$  o que *representa* al punto  $p$  si

$$\{p\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}.$$

Así, está probado lo siguiente.

**Proposición 23.** Para cada  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  existe un único  $p \in \Delta$  tal que  $w$  es un código de  $p$ .

Según lo hecho hasta aquí, tenemos que cada código  $w = (w_1, w_2, \dots)$  incluye información completa de la *procedencia* del punto  $p$  en el sentido de que hace referencia a toda una sucesión anidada de triángulos cada vez más pequeños a los que pertenece  $p$ . Por otro lado, como veremos a continuación, también incluye información completa acerca del *destino* del punto  $p$  al aplicarle reiteradamente la función  $G$ , es decir, información completa acerca de la órbita de  $p$ .

**Proposición 24.**  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  es un código de  $p \in \Delta$  si y sólo si  $G^{n-1}(p) \in \Delta_{w_n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:** Para la implicación de ida basta notar que si  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  es un código de  $p \in \Delta$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$p \in \Delta_{w_1, \dots, w_n} \subseteq \Delta_{w_1, \dots, w_{n-1}} \subseteq \dots \subseteq \Delta_{w_1, w_2} \subseteq \Delta_{w_1},$$

por la primera parte de la proposición 14; y de acuerdo también con la segunda parte,

$$\begin{aligned} G(p) &\in \Delta_{w_2, \dots, w_n} \subseteq \Delta_{w_2, \dots, w_{n-1}} \subseteq \dots \subseteq \Delta_{w_2} \\ &\vdots \\ G^{n-1}(p) &\in \Delta_{w_n}. \end{aligned}$$

Para la implicación de vuelta supongamos que  $G^{n-1}(p) \in \Delta_{w_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Debemos probar que  $p \in \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Esto puede hacerse por inducción. En primer lugar se tiene que  $p = G^{1-1}(p) \in \Delta_{w_1}$ . Luego, si se tiene que  $p \in \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se debe cumplir que  $p \in \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}}$ , pues de lo contrario, dado que  $\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}$  es la unión de los cuatro triángulos  $\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_*}$  con  $w_* = \{0, 1, 2, 3\}$  entonces está en alguno

(o varios) de ellos. Si suponemos que no está en el que queremos probar, sino en algún otro con  $w_* \neq w_{n+1}$ , entonces se tendría que  $p \in \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_*} \setminus \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}}$ , pero como estos dos triángulos están contenidos en  $\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}$  y la función  $G^n: \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n} \rightarrow \Delta$  es inyectiva ( $\star$ ), entonces

$$\begin{aligned} G^n(p) &\in G^n(\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_*} \setminus \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}}) \\ &\stackrel{(\star)}{=} G^n(\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_*}) \setminus G^n(\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}}) \\ &= \Delta_{w_*} \setminus \Delta_{w_{n+1}}, \end{aligned}$$

lo cual contradice la hipótesis de que  $G^n(p) \in \Delta_{w_{n+1}}$ .  $\square$

A partir de lo anterior es inmediato lo siguiente.

**Proposición 25.**  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  es un código de  $p \in \Delta$  si y sólo si  $(w_2, w_3, \dots) \in \Psi$  es un código de  $G(p)$ .

Y todo esto motiva la definición de la siguiente función.

**Definición 12.** Llamaremos *función corrimiento* (también llamada *función shift* en inglés) a la función  $\sigma: \Psi \rightarrow \Psi$  tal que para cada  $(w_1, w_2, w_3, \dots) \in \Psi$ :

$$\sigma(w_1, w_2, w_3, \dots) = (w_2, w_3, w_4, \dots).$$

La proposición 24 nos da, además, una manera alternativa para obtener un código de un punto dado  $p \in \Delta$  sin necesidad de determinar todos los triángulos anidados en los que está dicho punto, sino simplemente llevando nota de en cuál de los 4 triángulos  $\Delta_i$  con  $i = 0, 1, 2, 3$  están  $p$ ,  $G(p)$ ,  $G^2(p)$ , etc., lo cual es geoméricamente más sencillo de resolver.

Adicionalmente, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 26.** Para cada  $p \in \Delta$  existe al menos un  $w \in \Psi$  tal que  $w = (w_1, w_2, \dots)$  es un código de  $p$ . Además, existen a lo más seis códigos distintos de  $p$ .

**Demostración:** Para probar lo primero, sea  $p$  un punto en  $\Delta$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  elegimos  $w_n \in \{0, 1, 2, 3\}$  de manera que por ejemplo  $w_n = \min\{i : G^{n-1}(p) \in \Delta_i\}$ . De ahí que, por la proposición 24,  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  es un código de  $p$ .

Para ver que a lo más puede haber seis códigos distintos, notemos que:

1. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ :  $\#\{i : G^{k-1}(p) \in \Delta_i\} \in \{1, 2, 3\}$ .
2. Si para alguna  $k$  pasa que  $\#\{i : G^{k-1}(p) \in \Delta_i\} = 3$ , entonces  $G^{k-1}(p) \in G^{-1}(\mathcal{V})$  y para cada  $n > k$ :  $\#\{i : G^{n-1}(p) \in \Delta_i\} = 1$ .
3. Si para alguna  $k$  pasa que  $\#\{i : G^{k-1}(p) \in \Delta_i\} = 2$ , entonces  $G^{k-1}(p) \in G^{-1}(\partial\Delta)$  y para cada  $n > k$ :  $\#\{i : G^{n-1}(p) \in \Delta_i\} = 1$  con a lo más una excepción  $m > k$  en la que  $\#\{i : G^{m-1}(p) \in \Delta_i\}$  puede ser 3.

De ahí, que el número de códigos distintos del punto  $p$  puede ser a lo más 6 (de hecho, según lo anterior, puede ser 1, 2, 3 o 6).  $\square$

En la figura 5.2 se puede ver ejemplos de puntos con distinto número de códigos y visualizar también la validez de la proposición 25. En esta figura, por simplicidad, cada código  $(w_1, w_2, w_3, \dots)$  está escrito sin paréntesis ni comas y si uno o varios dígitos se repiten infinitamente a partir de cierto momento, se pone una barrita arriba de ellos (así como es común hacerlo

al representar en notación decimal números con expansión decimal periódica). Finalmente, cada rectángulo con varios dígitos indica que se puede elegir cualquiera de ellos para esa posición.

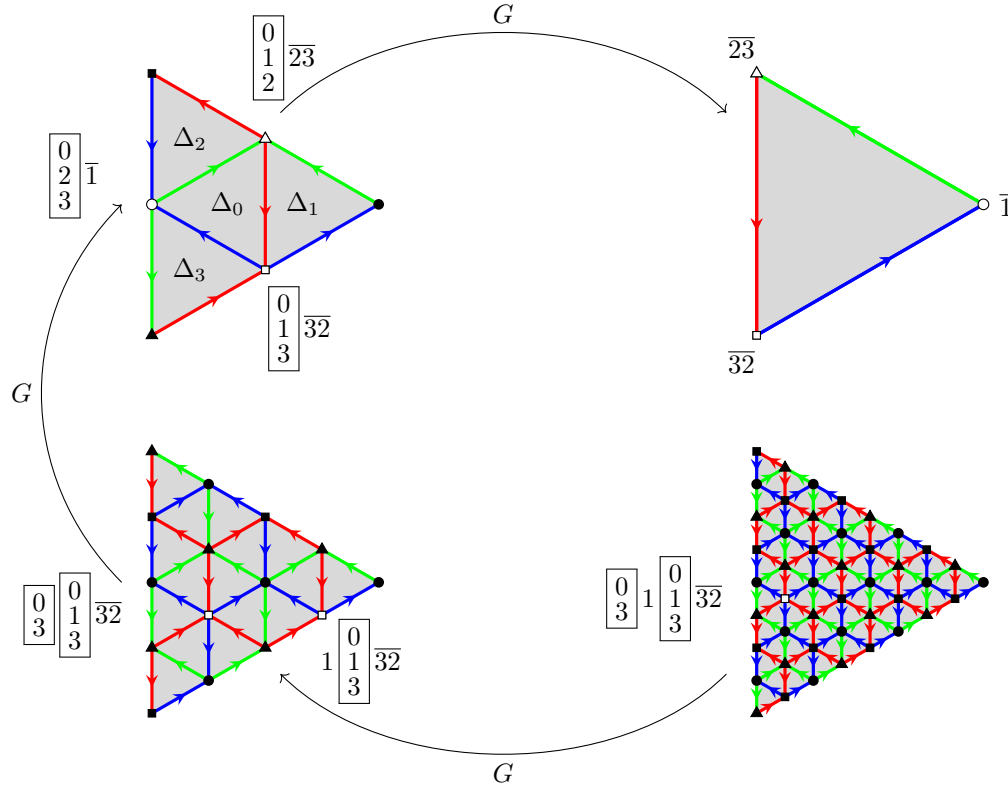


Figura 5.2: Puntos de  $\Delta$  con distinto número de códigos.

**Observación 11.** Considerando la división en casos en la prueba de la proposición 26 y mirando los ejemplos anteriores no es difícil notar que dado  $p \in \Delta$ :

$$\begin{aligned}
 p \in \mathcal{V} &\Rightarrow p \text{ tiene 1 código,} \\
 p \in \partial\Delta \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{V}) &\Leftrightarrow p \text{ tiene 3 códigos,} \\
 p \in \partial\Delta \setminus \mathcal{N} &\Rightarrow p \text{ tiene 1 código,} \\
 p \in \text{int}\Delta \cap \mathcal{N} &\Leftrightarrow p \text{ tiene 6 códigos,} \\
 p \in \text{int}\Delta \cap (\mathcal{T} \setminus \mathcal{N}) &\Leftrightarrow p \text{ tiene 2 códigos,} \\
 p \in \text{int}\Delta \setminus \mathcal{T} &\Rightarrow p \text{ tiene 1 código.}
 \end{aligned}$$

Nótese en particular que si  $p \in \Delta$  es un punto periódico, entonces debe tener un sólo código. Y lo mismo si  $p \in \Delta$  tiene órbita densa en  $\Delta$ .

## Códigos cercanos o lejanos en el espacio $\Psi$ de 4 símbolos

Tomando en cuenta que las primeras entradas de los códigos de los puntos de  $\Delta$  tienen que ver con su *origen* y las siguientes con su *destino* y dos puntos están inicialmente más cerca si sus

orígenes son semejantes que si sus destinos lo son, se puede definir una métrica en  $\Psi$  inspirada en la métrica en  $\Delta$  dando más peso a las primeras entradas. Esto es, una función distancia  $d: \Psi \times \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  tal que si  $w = (w_1, w_2, \dots)$  y  $z = (z_1, z_2, \dots)$  son dos elementos de  $\Psi$ , entonces:

$$d(w, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|w_i - z_i|}{2^i}.$$

**Proposición 27.** La función  $d: \Psi \times \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  descrita en el párrafo anterior es en efecto una métrica en el espacio  $\Psi$ . Es decir, está bien definida y cumple que para cualesquiera  $a, b, c \in \Psi$ :

1.  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ .
2.  $d(a, b) = d(b, a)$ .
3.  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ .

**Demostración:** Para empezar veamos que la función  $d$  está bien definida. Dados  $a, b \in \Psi$ , recordemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{|a_i - b_i|}{2^i}.$$

Además se tiene que

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \right\}$$

es una sucesión creciente de números reales no negativos y es tal que para cada  $i \in \mathbb{N}$ :  $0 \leq \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \leq \frac{3}{2^i}$ . Por el criterio de comparación de series,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}$  converge y

$$0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{2^i} = 3 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 3.$$

Esto es,  $d(a, b)$  siempre existe y además  $d(a, b) \in [0, 3]$ . Luego, las propiedades 1 y 2 se demuestran fácilmente y la propiedad 3 es consecuencia de que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , si llamamos  $\alpha_i = \frac{|a_i - c_i|}{2^i}$ ,  $\beta_i = \frac{|a_i - b_i|}{2^i}$  y  $\gamma_i = \frac{|b_i - c_i|}{2^i}$ , entonces se tiene que  $\alpha_i \leq \beta_i + \gamma_i$ , de donde para toda  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i$$

y como los límites de las tres sucesiones existen, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i,$$

es decir, lo que había que probar. □

Ahora bien, según esta métrica, dos puntos estarán más cercanos entre sí en la medida en que más de sus primeras entradas coincidan, como a continuación se detalla.

**Proposición 28.** Sean  $a = (a_1, a_2, \dots), b = (b_1, b_2, \dots) \in \Psi$ . Entonces

1.  $a_i = b_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, N \Rightarrow d(a, b) \leq \frac{3}{2^N}$ .

2.  $d(a, b) < \frac{1}{2^N} \Rightarrow a_i = b_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, N$ .

**Demostración:**

1. Si  $a_i = b_i$  para toda  $k = 1, 2, \dots, N$ , entonces

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} \leq 3 \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{3}{2^N}.$$

2. Si la conclusión no fuera cierta, es decir, si  $a_j \neq b_j$  para alguna  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \leq j \leq N$ , se tendría que

$$\frac{1}{2^N} \leq \frac{1}{2^j} \leq \frac{|a_j - b_j|}{2^j} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i} = d(a, b),$$

lo cual es incompatible con la hipótesis de la implicación. □

Una manera de entender mejor esta proposición es a partir del siguiente enunciado, muy impreciso pero muy útil: “Dos puntos en  $\Psi$  son muy cercanos el uno del otro si y sólo si sus primeras  $N$  entradas son iguales para alguna  $N$  suficientemente grande”.

Esto se puede aplicar de la siguiente manera: dado un punto en  $\Psi$ , si queremos encontrar un punto cercano de él, basta que tenga las primeras entradas iguales. Y a la inversa, si queremos encontrar un punto lejano de él, basta que tenga las primeras entradas distintas.

Con tal forma de medir distancias en el espacio  $\Psi$ , resulta claro que puntos cercanos del dominio se mantienen, bajo la función corrimiento, cercanos en la imagen, es decir lo siguiente.

**Proposición 29.** La función corrimiento  $\sigma: \Psi \rightarrow \Psi$  es continua.

**Demostración:** Sean  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  y  $\varepsilon > 0$  arbitrarios. Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{3}{2^N} < \varepsilon$  y sea  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \frac{1}{2^{N+1}}$ . Entonces dado  $a = (a_1, a_2, \dots) \in \Psi$ , se tiene que

$$d(a, w) < \delta < \frac{1}{2^{N+1}} \Rightarrow a_i = w_i \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, N+1 \Rightarrow d(\sigma(a), \sigma(w)) \leq \frac{3}{2^N} < \varepsilon. \quad \square$$

**Proposición 30.** La función corrimiento  $\sigma$  es caótica en  $\Psi$ , es decir:

1. Tiene densidad de puntos periódicos.
2. Es transitiva.
3. Es sensible a las condiciones iniciales.

**Demostración:**

1. Sean  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  y  $\varepsilon > 0$  cualesquiera. Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{3}{2^N} < \varepsilon$  y sea  $a = (a_1, a_2, \dots) \in \Psi$  construido a partir de  $w$  de la siguiente manera

$$w = (\underbrace{w_1, w_2, \dots, w_N}_{\text{bloques}}, w_{N+1}, w_{N+2}, \dots)$$

$$a = (\underbrace{w_1, w_2, \dots, w_N}_{\text{bloques}}, w_1, w_2, \dots),$$

donde  $a_i = w_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $a_{i+N} = a_i$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .

Lo anterior garantiza que  $a$  es un punto periódico bajo  $\sigma$  tal que  $d(a, w) < \varepsilon$ , y esto muestra que el conjunto de puntos periódicos es denso en  $\Psi$ .

2. Sean  $U, V \subseteq \Psi$  dos conjuntos abiertos no vacíos. Sean  $u = (u_1, u_2, \dots) \in U$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots) \in V$ ,  $\delta > 0$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $B_\delta(u) \subseteq U$  y  $B_\varepsilon(v) \subseteq V$ . Sean  $N, M \in \mathbb{N}$  tales que  $\frac{3}{2^N} < \delta$  y  $\frac{3}{2^M} < \varepsilon$ . Tenemos que

$$u = (\overbrace{u_1, u_2, \dots, u_N}^{\dots}) \quad \text{y} \quad v = (\overbrace{v_1, v_2, \dots, v_M}^{\dots}).$$

La estrategia es construir  $w \in \Psi$  copiando las partes iniciales de  $u$  y  $v$  de modo que:

$$w = (\overbrace{u_1, u_2, \dots, u_N}^{\dots}, \overbrace{v_1, v_2, \dots, v_M}^{\dots}, w_{N+M+1}, \dots),$$

donde después de  $v_M$  las siguientes entradas pueden ser lo que sea. Entonces se tiene que

$$\sigma^N(w) = (v_1, v_2, \dots, v_M, w_{N+M+1}, \dots).$$

De ahí que  $d(w, u) < \delta$  y  $d(\sigma^N(w), v) < \varepsilon$ , y por lo tanto  $G^N(U) \cap V \neq \emptyset$ .

3. Veremos que  $\varepsilon_0 = 1$  funciona como constante de sensibilidad. Sean  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  y  $\delta > 0$  cualesquiera. Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{3}{2^N} < \delta$ . Siempre es posible construir  $a = (a_1, a_2, \dots) \in \Psi$  de manera que  $a_i = w_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $|a_i - w_i| = 1$  para toda  $i > N$ . Entonces  $d(a, w) < \delta$  y  $d(\sigma^N(a), \sigma^N(w)) = 1 \geq \varepsilon_0$ . □

Como se puede ver, este modelo simbólico otorga muchísimo control sobre las órbitas de los puntos. Gracias a ello, es posible notar la existencia de órbitas con características muy especiales.

**Proposición 31.** En  $\Psi$  existen puntos de órbita densa. De hecho, el conjunto de puntos de órbita densa es denso en  $\Psi$ .

**Demostración:** Sea  $t \in \Psi$  construido de manera que sus coordenadas incluyan todas las posibles cadenas de longitud 1 formadas por elementos del conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ , luego las de longitud 2, las de longitud 3 y así sucesivamente:

$$t = (\underbrace{0, 1, 2, 3}_{\dots}, \underbrace{0, 0, 0, 1, 0, 2, \dots}_{\dots}, \underbrace{3, 3}_{\dots}, \dots).$$

Como dado cualquier  $w \in (w_1, w_2, \dots, w_N, \dots) \in \Psi$  siempre es posible igualar sus primeras  $N$  coordenadas aplicando a  $t$  la función  $\sigma$  el suficiente número de veces, entonces la órbita de  $t$  es densa en  $\Psi$ .

La segunda parte se debe a que se puede insertar al inicio de  $t$  cualquier cadena finita de longitud  $N$  para cualquier  $N \in \mathbb{N}$  y eso prueba la densidad del conjunto de puntos de órbita densa. □

Terminamos esta sección con un resultado que no es difícil de probar.

**Proposición 32.** El código de un punto  $p \in \Delta$  es periódico de periodo  $n$  bajo  $\sigma$  si y sólo  $p$  es periódico de periodo  $n$  bajo  $G$ .

Sin embargo esto es sólo un prelude de un resultado más general. En el capítulo 6 se demuestra que la función  $G$  en  $\Delta$  (y también la función  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$ ) es semiconjugada de  $\sigma$  en  $\Psi$ , por lo que lo que estudiamos en esta sección para esta última función en general será aplicable también para las otras.

## Subconjuntos invariantes y sus códigos.

Retomamos en esta sección la discusión sobre los subconjuntos invariantes de  $\Delta$  analizados en el capítulo anterior para mirarlos desde la nueva perspectiva que ofrece el modelo simbólico.

**Órbitas periódicas.** De acuerdo con la observación 11, cualquier punto periódico tiene exactamente un código. Además, según la proposición 32 un punto es periódico bajo  $G$  si y sólo si su código es periódico bajo  $\sigma$  y ambos son del mismo periodo. En el capítulo anterior vimos que hay 4 puntos  $p \in \Delta$  tales que  $G(p) = p$  (uno en cada triángulo  $\Delta_i$  con  $i = 0, 1, 2, 3$ ). Según el modelo simbólico es evidente que tales puntos fijos son los que tienen los códigos  $\overline{0}$ ,  $\overline{1}$ ,  $\overline{2}$  y  $\overline{3}$ . A su vez, los  $4^2 = 16$  puntos tales que  $G^2(p) = p$  son los que tienen los códigos que se pueden formar tomando dos dígitos del conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$  y haciendo un código periódico con ellos que los repita indefinidamente:

$$\begin{array}{cccc} \overline{00} & \overline{01} & \overline{02} & \overline{03} \\ \overline{10} & \overline{11} & \overline{12} & \overline{13} \\ \overline{20} & \overline{21} & \overline{22} & \overline{23} \\ \overline{30} & \overline{31} & \overline{32} & \overline{33} \end{array}$$

Descartando a  $\overline{00} = \overline{0}$ ,  $\overline{11} = \overline{1}$ ,  $\overline{22} = \overline{2}$  y  $\overline{33} = \overline{3}$ , que en realidad son puntos fijos, los restantes son los 12 puntos de periodo 2. Y análogamente se puede seguir así para encontrar los códigos de los demás puntos periódicos, que como vimos en el capítulo anterior, los hay de todos los periodos.

Ahora bien, con tal claridad sobre los códigos de los puntos periódicos, surge aquí la pregunta de a exactamente qué puntos del triángulo  $\Delta$  corresponden. Para tratar este asunto, veamos a continuación un ejemplo, el del punto fijo cuyo código es  $\overline{2}$ .

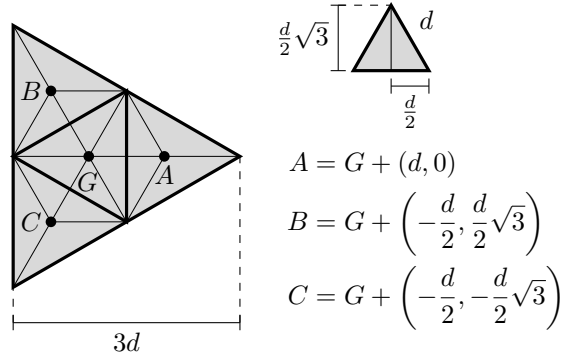
En primer lugar, volvamos a la figura 5.2 en la página 62, en la que los vértices y los lados de los distintos triángulos que ahí aparecen están marcados de manera que al aplicar la función  $G$ , la imagen de cada uno de ellos es del mismo tipo (puntos triangulares van a puntos triangulares, lados rojos van a lados rojos, etc.). Notemos entonces las siguientes propiedades que se preservan cada que damos un paso hacia atrás:

1. Si en alguno de los pasos hay algún punto circular (como por ejemplo el  $\overline{1}$ ), en los siguientes pasos hacia atrás dicho punto aparece también marcado así (a diferencia de los puntos marcados con triángulos o cuadrados, que se van alternando entre sí cada que regresamos un paso, como por ejemplo el  $\overline{23}$ ).
2. Los triángulos de cada paso se pueden clasificar en dos: los que podríamos decir que apuntan a la derecha  $\triangleright$  (como  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$ , y los que podríamos decir que apuntan a la izquierda  $\triangleleft$  (como  $\Delta_0$ ). Además, los lados de los que apuntan a la izquierda están recorridos como las manecillas del reloj y los de los que apuntan a la derecha están recorridos en sentido contrario.
3. En el primer paso hacia atrás, en el que el triángulo  $\Delta$  aparece formado por los triángulos  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  vemos que el del centro es el 0, el que está pegado al vértice circular es el 1, y si partimos de ahí y avanzamos por la frontera de  $\Delta$  siguiendo el sentido señalado

por las flechas, pasamos primero por el triángulo 2 y luego por el triángulo 3. Finalmente, el punto medio del lado opuesto al vértice circular también es circular.

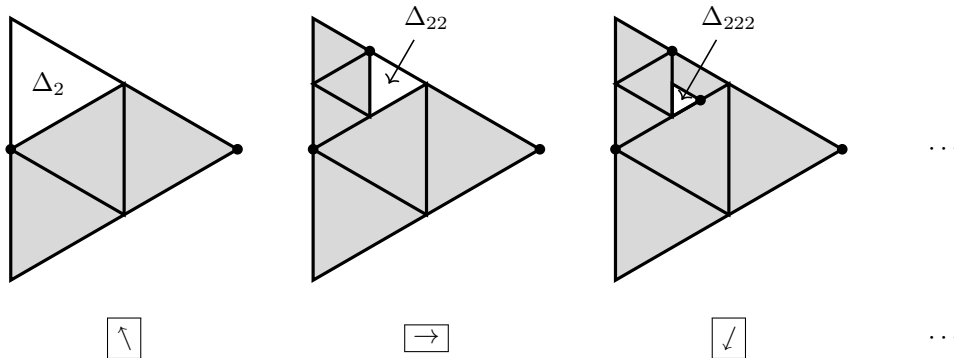
Ya sabemos que si  $(w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  es un código de  $p \in \Delta$ , entonces  $p \in \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Las observaciones anteriores nos ayudarán a identificar con precisión cada uno de esos triángulos anidados y, con ello, la ubicación del punto  $p$ .

En segundo lugar, notemos que si para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos  $q_n \in \Delta_{w_1, \dots, w_n}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p$ , pues tales triángulos están anidados y su diámetro tiende a cero. En particular servirá tomar como  $q_n$  el centro de gravedad del triángulo  $\Delta_{w_1, \dots, w_n}$ .



**Figura 5.3:** Cambiando de centro de gravedad.

En tercer y último lugar, veamos que si tomamos un triángulo equilátero y lo dividimos en cuatro al trazar los segmentos que unen los puntos medios de sus lados, el gravicentro (centro de gravedad) del que queda en medio coincide con el gravicentro  $G$  del triángulo original, y los gravicentros de los otros tres están a una distancia  $d$  de  $G$ , donde  $d$  es la distancia entre  $G$  y cualquier punto medio del triángulo original. De hecho, Con esos seis puntos alrededor de  $G$  se forma un hexágono regular (cuyo centro es precisamente  $G$ ), lo cual permite calcular las coordenadas de todos esos gravicentros a partir de las de  $G$ , como se muestra en la figura 5.3. Para ello recordemos que por el teorema de Pitágoras, si  $d$  es el lado de un triángulo equilátero, su altura es  $\frac{d}{2}\sqrt{3}$ .



**Figura 5.4:** Procedimiento para localizar el punto fijo con código  $\overline{2}$ .

Después de todas estas observaciones estamos por fin en condiciones de ubicar el punto  $p$  de  $\Delta$  correspondiente al código  $\overline{2}$ . En primer lugar identificamos los triángulos  $\Delta_2, \Delta_{22},$



$\Delta_{222}$ , ... tomando como referencia los puntos marcados con un círculo negro y el sentido en el que se recorre cada triángulo (que depende de si es del tipo  $\triangleright$  o  $\triangleleft$ ). El recorrido que vamos realizando (ver figura 5.4) por los centros de dichos triángulos partiendo del centro de  $\Delta$  podemos simbolizarlo como  $\boxed{\nearrow} \rightarrow \boxed{\searrow} \nearrow \dots$  en el que se repiten los primeros tres símbolos una y otra vez, puesto que el cuarto triángulo está en la misma posición y con la misma orientación que  $\Delta$  y entonces el movimiento se repite, aunque a menor escala cada vez. Finalmente, para hallar las coordenadas horizontal y vertical del punto  $p = (x, y)$  resolvemos las series que corresponden con tales movimientos, donde  $d = 1$ :

$$\begin{aligned}
 x &= \left(-\frac{1}{2}(d) + 1\left(\frac{d}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2^2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2^3}\right) + \dots\right) + \dots \\
 &= \left(-\frac{d}{8}\right)(1) + \left(-\frac{d}{8}\right)\left(\frac{1}{2^3}\right) + \dots \\
 &= \left(-\frac{d}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{8}\right)\frac{8}{7} = -\frac{1}{7} \\
 y &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(d) + 0\left(\frac{d}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{d}{2^2}\right)\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{d}{2^3}\right) + \dots\right) + \dots \\
 &= \left(\frac{3\sqrt{3}(d)}{8}\right)(1) + \left(\frac{3\sqrt{3}(d)}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \dots \\
 &= \left(\frac{3\sqrt{3}(d)}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{8} + \dots\right) \\
 &= \left(\frac{3\sqrt{3}(d)}{8}\right)\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{3}{7}\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $p = \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\sqrt{3}\right)$  es el punto con código  $\bar{2}$ . Veamos que en efecto es un punto fijo bajo  $G$  (recordar su definición en la página 48), puesto que

$$G(p) = \left(1 - \left(-\frac{1}{7}\right) - \sqrt{3}\left(\frac{3}{7}\sqrt{3}\right), \sqrt{3} + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{7}\right) - \frac{3}{7}\sqrt{3}\right) = p.$$

Es un ejercicio interesante determinar también por ejemplo los puntos de  $\Delta$  cuyos códigos son  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$  y  $\bar{3}$ , y verificar que en efecto son puntos fijos bajo  $G$ . Para ello sirve utilizar, como ya se ha hecho, los símbolos  $\boxed{\rightarrow}$ ,  $\boxed{\nearrow}$ ,  $\boxed{\nwarrow}$ ,  $\boxed{\leftarrow}$ ,  $\boxed{\searrow}$  y  $\boxed{\swarrow}$  para representar el movimiento entre los gravicentros de los correspondientes triángulos anidados (o el símbolo  $\boxed{\circ}$  si no hay movimiento de un paso al siguiente) y resolver la serie resultante.

**Conjunto de vértices**  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ . Ya hemos visto que sus códigos son  $\bar{1}$ ,  $\bar{23}$  y  $\bar{32}$ , el primero es un punto fijo y los otros forman una órbita de periodo 2.

**Conjunto de nudos**  $\mathcal{N} = \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\mathcal{V})$ . Notemos que  $p \in \mathcal{N}$  si y sólo si  $G^n(p) \in \mathcal{V}$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , y eso sucede si y sólo si el código de  $p$  se vuelve periódico en algún momento y termina justo como los códigos de  $V_1$ ,  $V_2$  o  $V_3$ , es decir con  $\bar{1}$ ,  $\bar{23}$  o  $\bar{32}$ .

**Conjunto frontera  $\partial\Delta$ .** En primer lugar veamos que según la discusión en cuanto a los distintos números de códigos, si  $p$  es un punto en  $\partial\Delta$ , entonces puede tener 1 o 3 códigos. Lo último sucede sólo cuando  $p \in \partial\Delta \cap (\mathcal{N} \setminus \mathcal{V})$ , en cuyo caso de esos tres códigos en uno aparece exactamente una vez el dígito 0 y en los otros dos códigos no aparece nunca. Esto indica que descartando momentáneamente el dígito 0, cualquier punto en  $\partial\Delta$  puede expresarse con sus dígitos en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Ahora bien, nombremos los seis lados de los triángulos  $\Delta_1, \Delta_2$  y  $\Delta_3$  que están en la frontera, según en cuál de dichos triángulos están y su color, como se muestra en la figura 5.5. Notando que cada punto  $p \in \partial\Delta$  está en uno (o dos) de dichos seis segmentos, tomando en cuenta a qué lado de  $\Delta$  va a dar cada uno de ellos bajo  $G$  y dicho lado por cuáles dos de los seis segmentos está formado, se observa que los códigos (que no utilizan el dígito 0) de los puntos de  $\partial\Delta$  son exactamente aquellos que se pueden formar tomando dígitos en  $\{1, 2, 3\}$  siguiendo las flechas mostradas en el diagrama adentro del triángulo  $\Delta$  en la figura 5.5. Para referencias posteriores, a esta forma de construir un código de un punto en  $\partial\Delta$  le llamaremos el *procedimiento X*.

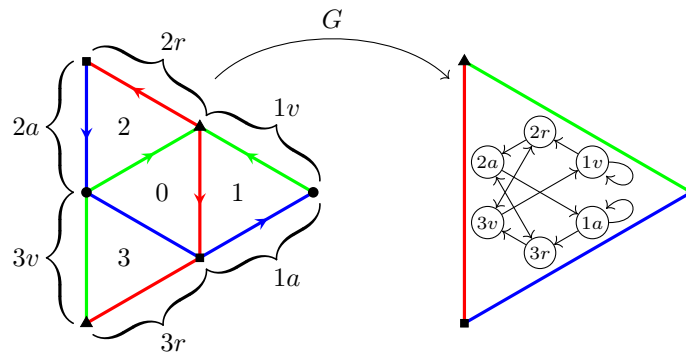


Figura 5.5: Órbitas en la frontera.

Un ejemplo es cuando comenzamos en  $1v$  y luego nos movemos infinitamente de ida y vuelta entre  $2r$  y  $3v$ . Eso nos da el código  $\overline{123}$ , que corresponde con el punto medio de  $\Delta$  marcado con un triángulo negro. Notemos que también se puede obtener con el procedimiento  $X$  otro código suyo empezando en  $2r$  y luego moviéndose de ida y vuelta entre  $2a$  y  $3r$ , es decir, el código  $\overline{223}$ . Finalmente notemos que el tercer código de este punto (que no se puede obtener mediante el procedimiento  $X$ ) se obtiene sustituyendo  $\overline{123}$  o  $\overline{223}$  por  $\overline{023}$ . Esto lo podemos sintetizar diciendo que una cola  $\overline{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} 2\overline{3}$  se puede sustituir por la cola  $\overline{\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}} 2\overline{3}$  para obtener el código faltante. Algo análogo se puede hacer cambiando una cola  $\overline{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} 3\overline{2}$  por la cola  $\overline{\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}} 3\overline{2}$  o una cola  $\overline{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} \overline{1}$  por la cola  $\overline{\begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}} \overline{1}$ .

No obstante el aparente éxito para describir simbólicamente el conjunto  $\partial\Delta$ , pronto notaremos que no es del todo cómodo trabajar con el tipo de códigos que aquí aparecen. Más natural es considerar la dinámica simbólica de dos símbolos asociada a la función  $\varphi(z) = z^2$  en la circunferencia unitaria  $\mathcal{C}$ , lo cual es posible en virtud de que  $G$  en  $\partial\Delta$  y  $\varphi$  en  $\mathcal{C}$  son funciones conjugadas, como se demuestra en el apéndice del capítulo 6.

**Triángulo de Sierpiński  $S$ .** Este conjunto está definido como el complemento del conjunto de puntos de  $\Delta$  que están en  $\text{int}(\Delta_0)$  o que en algún momento bajo alguna iteración de  $G$  caen en  $\text{int}(\Delta_0)$ , de los que por lo tanto cualquier código forzosamente tendrá al menos un dígito 0.

De ahí que los puntos en el triángulo de Sierpiński (por ser el complemento de los otros) son aquellos que pueden ser representados por algún código que no utilice ningún dígito 0.

La información anterior, junto con otra relativa a los demás conjuntos invariantes que hemos resaltado en el capítulo anterior, se sintetiza en la siguiente tabla:

Conjunto	Representación simbólica
$\Delta$	$\Psi = \{t = (t_1, t_2, t_3, \dots) \mid t_n \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}$
Órbita de periodo $n$	Código de periodo $n$
$\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$	$\Psi_{\mathcal{V}} = \{\bar{1}, \bar{2}\bar{3}, \bar{3}\bar{2}\}$
$\partial\Delta$	$\Psi_{\partial\Delta} = \{t \in \Psi \mid t \text{ se pueden formar con el procedimiento } X\}$
$\mathcal{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\mathcal{V})$	$\Psi_{\mathcal{N}} = \{t \in \Psi \mid t \text{ tiene cola } \bar{1}, \bar{2}\bar{3} \text{ o } \bar{3}\bar{2}\}$
$\mathcal{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\partial\Delta)$	$\Psi_{\mathcal{T}} = \{t \in \Psi \mid t \text{ tiene cola en } \Psi_{\partial\Delta}\}$
$\mathcal{O} = \Delta \setminus \mathcal{T}$	$\Psi_{\mathcal{O}} = \Psi \setminus \Psi_{\mathcal{T}}$
$\mathcal{S} = \Delta \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\text{int}(\Delta_0))$	$\Psi_{\mathcal{S}} = \{t \in \Psi \mid t_n \in \{1, 2, 3\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$

Como vimos en la sección anterior, muchos resultados que ya se habían probado en el modelo geométrico pueden probarse ahora desde esta otra perspectiva del modelo simbólico con una claridad especial. Así también esta nueva visión puede dar lugar a nuevas preguntas y nuevos resultados, como los siguientes.

### Observación 12.

1. En  $\Delta$  hay puntos que no son periódicos y que tampoco tienen órbita densa en  $\Delta$ , por ejemplo el punto asociado al código  $(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$ .
2. En  $\Psi_{\mathcal{S}}$  hay puntos cuya órbita bajo  $\sigma$  es densa en  $\Psi_{\mathcal{S}}$ , por ejemplo el punto correspondiente al código formado por todas las posibles cadenas de un dígito, de dos dígitos, de tres dígitos, etc., tomadas del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , es decir  $(\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{1}, \underline{3}, \underline{2}, \underline{1}, \dots)$ .

En ambos casos, es interesante preguntarse para qué otros conjuntos de códigos de la tabla anterior se cumple algo semejante.

## Apéndice. Un pequeño toque a la entropía

La entropía topológica de una función es un concepto estrechamente ligado al del caos. Fue originalmente propuesta por Adler, Konheim y McAndrew en su artículo *Topological Entropy*, incluido en la bibliografía de esta tesis. Se puede probar que funciones simples como las constantes o la función identidad tienen entropía topológica igual a cero, mientras que funciones caóticas según la definición de Devaney, como la función  $\sigma$  tratada en este capítulo, tienen entropía topológica positiva. Desarrollar con detalle este tema es algo que escapa de los objetivos de esta tesis. Sin embargo, dicho concepto es útil para contrastar las dinámicas caóticas que se observan en el triángulo  $\Delta$ , el triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$  y la frontera  $\partial\Delta$  del triángulo  $\Delta$ . Con ese objetivo en mente, es aquí incluido de manera bastante sucinta.

**Definición 13.** Sean  $X$  un espacio topológico compacto y  $f: X \rightarrow X$  una función continua. Si  $\alpha$  es una cubierta abierta de  $X$ , sea  $N(\alpha)$  el número de elementos de una subcubierta finita de  $\alpha$  de menor cardinalidad. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son cubiertas abiertas de  $X$ , sea  $\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \text{ y } B \in \beta\}$  y sea  $f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A) : A \in \alpha\}$ . Para una cubierta abierta  $\alpha$  y un número natural  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)$$

y

$$\text{ent}(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)).$$

La entropía topológica de  $f$  se define como

$$\text{ent}(f) = \sup\{\text{ent}(f, \alpha) : \alpha \text{ es una cubierta abierta de } X\}.$$

Las propiedades básicas de la entropía se pueden consultar en el capítulo 7 del libro *An Introduction to Ergodic Theory*, de Peter Walters, incluido en la bibliografía.

Ahora bien, dado  $n \in \mathbb{N}$ , sean

$$\Sigma_n = \{t = (t_1, t_2, t_3, \dots) : t_k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ para toda } k \in \mathbb{N}\}$$

y  $\sigma_n: \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$  la función tal que

$$\sigma_n(t_1, t_2, t_3, \dots) = (t_2, t_3, t_4, \dots).$$

Análogamente a como se hizo para  $\sigma = \sigma_4$  definida en  $\Psi = \Sigma_4$ , es posible demostrar que cualquiera de estas funciones es caótica. Además, se puede probar lo siguiente, que corresponde con el teorema 7.2 (pág. 177) de [18] y cuya demostración aparece ahí.

**Proposición 33.**  $\text{ent}(\sigma_n) = \log(n)$ .

En el capítulo siguiente utilizaremos varias veces este resultado. Por lo pronto, tenemos que la entropía de  $\sigma$  en  $\Psi$  es igual  $\log(4)$ .



## Capítulo 6

# De viaje entre tres mundos distintos: $\overline{\mathcal{K}}$ , $\Delta$ y $\Psi$

En el capítulo 1 se ilustró, mediante un par de ejemplos, la estrategia para estudiar ciertos fenómenos de un universo  $U$  haciendo representaciones de sus elementos en un universo  $\widehat{U}$  (en donde quizá por alguna razón es más fácil trabajar), buscando ahí la solución del problema y volviendo con ella de vuelta al universo  $U$ . En los capítulos 5 y 6 también se ejemplificó tal estrategia al estudiar aspectos de la dinámica de la función  $F: \overline{\mathcal{K}} \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$  de manera indirecta, primero mediante el modelo geométrico  $G: \Delta \rightarrow \Delta$ , y luego mediante el modelo simbólico  $\sigma: \Psi \rightarrow \Psi$ . En este capítulo se verá que tales características dinámicas estudiadas para las funciones  $G$  en  $\Delta$  y  $\sigma$  en  $\Psi$  en realidad muestran bastante bien lo que sucede con la función  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$ , con ayuda de los conceptos de conjugación y semiconjugación topológicas y sus propiedades.

### Funciones conjugadas y semiconjugadas

**Definición 14.** Sean  $X$  y  $\widehat{X}$  espacios métricos, y  $f: X \rightarrow X$  y  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  funciones continuas. Diremos que  $f$  es *semiconjugada* de  $\widehat{f}$  si existe alguna función  $h: \widehat{X} \rightarrow X$  continua y suprayectiva tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{X} \end{array}$$

es decir, tal que para todo  $\widehat{x} \in \widehat{X}$  se cumple que

$$f(h(\widehat{x})) = h(\widehat{f}(\widehat{x})). \quad (6.1)$$

Si más aún se tiene que  $h$  es un homeomorfismo (es decir, es en realidad una función biyectiva y su inversa es también continua), entonces se dice que  $f$  es *conjugada* de  $\widehat{f}$ .

Visualmente, la función  $h$  de esta definición tiene la propiedad de que puede intercambiar lugar con la función  $f$  pero sustituyéndola a su vez por la función  $\widehat{f}$ , o viceversa (ver la igualdad 6.1). De acuerdo con esto, se tiene que

$$f^2(h(\widehat{x})) = f(f(h(\widehat{x}))) = f(h(\widehat{f}(\widehat{x}))) = h(\widehat{f}(\widehat{f}(\widehat{x}))) = h(\widehat{f}^2(\widehat{x})).$$

Esto también resulta evidente al duplicar el diagrama de la definición y conectar ambas copias de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow h & & \uparrow h & & \uparrow h \\ \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{X} \end{array} \quad \text{o de manera reducida:} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^2} & X \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{f}^2} & \widehat{X} \end{array}$$

En general, de hecho, se puede probar inductivamente lo siguiente.

**Lema 3.** Sean  $X$  y  $\widehat{X}$  espacios métricos,  $f: X \rightarrow X$  y  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  funciones continuas tales que  $f$  es semiconjugada de  $\widehat{f}$  y sea  $h$  la función de la definición 14. Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $\widehat{x} \in \widehat{X}$  se cumple que

$$f^n(h(\widehat{x})) = h(\widehat{f}^n(\widehat{x})).$$

Por otro lado, según estos diagramas, la función  $h$  puede pensarse como aquella que nos permite viajar entre los universos  $\widehat{X}$  y  $X$ , ayudándonos también a encontrar caminos alternativos. Por ejemplo, si para algún  $x \in X$  (esquina superior izquierda del diagrama) quisiéramos determinar  $y = f^n(x)$  (esquina superior derecha) pero conocemos mejor  $\widehat{f}^n$  que  $f^n$ , bastaría tomar  $\widehat{x} \in \widehat{X}$  (esquina inferior izquierda) tal que  $h(\widehat{x}) = x$  (eso siempre es posible por ser  $h$  suprayectiva), obtener  $\widehat{y} = \widehat{f}^n(\widehat{x})$  (esquina inferior derecha) en el universo  $\widehat{X}$  y luego volver al universo  $X$ , puesto que

$$y = f^n(x) = f^n(h(\widehat{x})) = h(\widehat{f}^n(\widehat{x})) = h(\widehat{y}).$$

Eso se ve con claridad en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f^n} & y \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ \widehat{x} & \xrightarrow{\widehat{f}^n} & \widehat{y} \end{array}$$

Con esa misma estrategia es posible deducir algunas características dinámicas de la función  $f$  a partir de las de la función  $\widehat{f}$ .

**Lema 4.** Sean  $X$  y  $\widehat{X}$  espacios métricos, y  $f: X \rightarrow X$  y  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  funciones continuas. Si  $f$  es semiconjugada de  $\widehat{f}$  y  $\widehat{A} \subseteq \widehat{X}$  es denso en  $\widehat{X}$ , entonces  $A = h(\widehat{A}) \subseteq X$  es denso en  $X$ .

**Demostración:** Sean  $x \in X$  y  $r > 0$  cualesquiera. Como  $h$  es suprayectiva, existe  $\widehat{x} \in \widehat{X}$  tal que  $h(\widehat{x}) = x$ . Por la continuidad de  $h$ , sabemos que existe  $\widehat{r} > 0$  tal que para toda  $\widehat{p} \in \widehat{X}$  se tiene que si  $\widehat{p} \in B_{\widehat{r}}(\widehat{x})$ , entonces  $p = h(\widehat{p}) \in B_r(x)$ . Ahora, como  $\widehat{A}$  es denso en  $\widehat{X}$ , entonces existe  $\widehat{a} \in \widehat{A}$  tal que  $\widehat{a} \in B_{\widehat{r}}(\widehat{x})$ . Pero entonces  $a = h(\widehat{a}) \in A = h(\widehat{A})$  es tal que  $a \in B_r(x)$ . Por lo tanto  $A \subseteq X$  es denso en  $X$ .  $\square$

**Proposición 34.** Sean  $X$  y  $\widehat{X}$  espacios métricos, y sean  $f: X \rightarrow X$  y  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  funciones continuas. Si  $f$  es semiconjugada de  $\widehat{f}$ , entonces:

1.  $\widehat{f}$  tiene densidad de puntos periódicos en  $\widehat{X} \Rightarrow f$  la tiene en  $X$ .

2.  $\widehat{f}$  es topológicamente transitiva en  $\widehat{X} \Rightarrow f$  lo es en  $X$ .

**Demostración:**

1. Primero notemos que  $h(\text{Per}(\widehat{f})) \subseteq \text{Per}(f)$ . Esto ocurre porque si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\widehat{f}^n(\widehat{x}) = \widehat{x}$  y  $x = h(\widehat{x})$ , entonces, por el lema 3,  $f^n(x) = h(\widehat{f}^n(\widehat{x})) = x$ . Luego, por el lema 4, se tiene que  $h(\text{Per}(\widehat{f})) \subseteq X$  es denso en  $X$  y por lo tanto también lo es  $\text{Per}(f)$ .
2. Sean  $U$  y  $V$  conjuntos abiertos no vacíos de  $X$ . Como  $h$  es una función continua y supra-yectiva, los conjuntos  $\widehat{U} = h^{-1}(U)$  y  $\widehat{V} = h^{-1}(V)$  son conjuntos abiertos y no vacíos de  $\widehat{X}$ . Luego, como  $\widehat{f}$  es topológicamente transitiva, existen  $\widehat{p} \in \widehat{U}$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\widehat{f}^n(\widehat{p}) \in \widehat{V}$ . De ahí que  $p = h(\widehat{p}) \in U$  cumple que  $f^n(p) \in V$ .

□

**Proposición 35.** Sean  $X$  y  $\widehat{X}$  espacios métricos,  $f: X \rightarrow X$  y  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  funciones continuas y supongamos que  $f$  es semiconjugada de  $\widehat{f}$ . Si  $X$  es no finito y  $\widehat{f}$  es caótica en  $\widehat{X}$ , entonces  $f$  es caótica en  $X$ .

**Demostración:** Si  $\widehat{f}$  es caótica en  $\widehat{X}$ , entonces en particular tiene ahí densidad de puntos periódicos y transitividad topológica. Luego, por la proposición anterior, hereda esas características a  $f$ . Finalmente, por el teorema 10,  $f$  es también sensible a las condiciones iniciales y, por lo tanto, caótica en  $X$ . □

De manera semejante, recordando la definición 2 de la página 28, se puede probar lo siguiente.

**Proposición 36.** Sean  $X$  y  $\widehat{X}$  espacios métricos,  $f: X \rightarrow X$  y  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  funciones continuas tales que  $f$  es semiconjugada de  $\widehat{f}$ . Entonces:

1.  $\widehat{x}$  es punto fijo atractor de  $\widehat{f} \Rightarrow x = h(\widehat{x})$  es punto fijo atractor de  $f$ .
2.  $\widehat{x}$  es punto fijo repulsor de  $\widehat{f} \Rightarrow x = h(\widehat{x})$  es punto fijo repulsor de  $f$ .

Finalmente, tampoco es difícil probar que la conjugación entre funciones es una relación de equivalencia, como se enuncia en seguida.

**Proposición 37.** La conjugación topológica es una relación de equivalencia. Esto es, dados cualesquiera espacios métricos  $X$ ,  $\widehat{X}$  y  $\widetilde{X}$ , y cualesquiera funciones  $f: X \rightarrow X$ ,  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$  y  $\widetilde{f}: \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$ , se tiene que:

1.  $f$  es conjugada de  $f$ . (Reflexividad)
2.  $f$  es conjugada de  $\widehat{f} \Rightarrow \widehat{f}$  es conjugada de  $f$ . (Simetría)
3.  $f$  es conjugada de  $\widehat{f}$  y  $\widehat{f}$  es conjugada de  $\widetilde{f} \Rightarrow f$  es conjugada de  $\widetilde{f}$ . (Transitividad)

Lo anterior nos permite decir simplemente que “ $f$  y  $\widehat{f}$  son funciones conjugadas” sin necesidad de decir cuál es conjugada de cuál, pues ambas opciones son equivalentes.



## $F$ en $\overline{\mathcal{K}}$ y $G$ en $\Delta$ son funciones conjugadas

Notemos que el intervalo  $[-1, 2] \subseteq \mathbb{R}$  es invariante bajo la función  $G$ . Si llamamos  $g$  a la función  $G|_{[-1, 2]}$ , entonces:

$$g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ 2x - 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

Esta definición trae a la memoria la regla de correspondencia de la función Tienda en el intervalo  $[0, 1]$ :

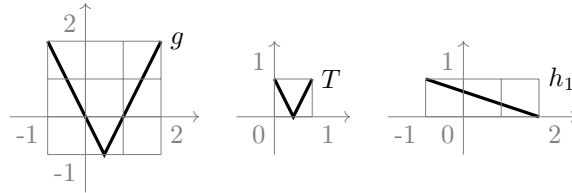
$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Lema 5.** Las funciones  $g$  y  $T$  son conjugadas.

**Demostración:** Consideremos la función  $h_1: [-1, 2] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $h_1(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$  (ver figura 6.1). Entonces se cumple que en dicho dominio  $h_1 \circ g = T \circ h_1$ , pues:

$$h_1 \circ g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x & \text{si } x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases} \quad T \circ h_1(x) = \begin{cases} 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x & \text{si } x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

□



**Figura 6.1:** Gráficas de las funciones  $g$ ,  $T$  y  $h_1$ .

Por otro lado, el intervalo  $[-1, 3]$  es invariante bajo la función  $F$ . Si llamamos  $f$  a la función restringida  $F|_{[-1, 3]}$ , resulta que  $f(x) = x^2 - 2x$ . Consideremos también a la función logística  $L(x) = 4x(1 - x)$  definida en el intervalo  $[-1, 1]$ .

**Lema 6.** Las funciones  $L$  y  $f$  son conjugadas.

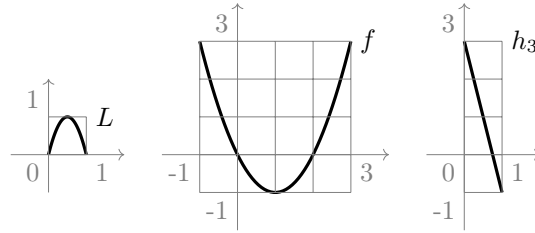
**Demostración:** Consideremos la función  $h_3: [0, 1] \rightarrow [-1, 3]$  tal que  $h_3(x) = 3 - 4x$  (ver figura 6.2). Entonces se cumple que en dicho dominio  $h_3 \circ L = f \circ h_3$ , pues

$$\begin{aligned} h_3 \circ L(x) &= 3 - 16x(1 - x) & f \circ h_3(x) &= (3 - 4x)^2 - 2(3 - 4x) \\ & & &= 3 - 16x + 16x^2. \end{aligned}$$

□

Por otro lado, recordemos que las funciones  $T$  y  $L$  son también conjugadas según el homeomorfismo

$$h_2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$



**Figura 6.2:** Gráficas de las funciones  $L$ ,  $f$  y  $h_3$ .

de manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{L} & [0, 1] \\
 h_2 \uparrow & & \uparrow h_2 \\
 [0, 1] & \xrightarrow{T} & [0, 1]
 \end{array}$$

Reuniendo toda esta información se tiene lo siguiente.

**Proposición 38.** Las funciones  $g$  y  $f$  son conjugadas.

**Demostración:** Sea  $h: [-1, 2] \rightarrow [-1, 3]$  la composición  $h = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ , es decir

$$h(x) = -4 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{2} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x \right) \right) + 3.$$

Entonces para cada  $x \in [-1, 2]$  se cumple que  $h \circ g(x) = f \circ h(x)$ . Basta con ver que el siguiente diagrama es conmutativo de acuerdo con los lemas anteriores.

$$\begin{array}{ccc}
 [-1, 3] & \xrightarrow{f} & [-1, 3] \\
 h_3 \uparrow & & \uparrow h_3 \\
 [0, 1] & \xrightarrow{L} & [0, 1] \\
 h_2 \uparrow & & \uparrow h_2 \\
 [0, 1] & \xrightarrow{T} & [0, 1] \\
 h_1 \uparrow & & \uparrow h_1 \\
 [-1, 2] & \xrightarrow{g} & [-1, 2]
 \end{array}$$

□

**Observación 13.** Utilizando la fórmula  $\cos(2\theta) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(\theta)$ , se tiene que

$$h(x) - 1 = 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} (2 - x) \right).$$

Una vez hecho lo anterior, mostraremos que el homeomorfismo  $h: [-1, 2] \rightarrow [-1, 3]$  puede extenderse a un homeomorfismo  $H: \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$  que mostrará que las funciones G y F son conjugadas. Sea entonces  $H: \Delta \rightarrow H(\Delta)$  dada por

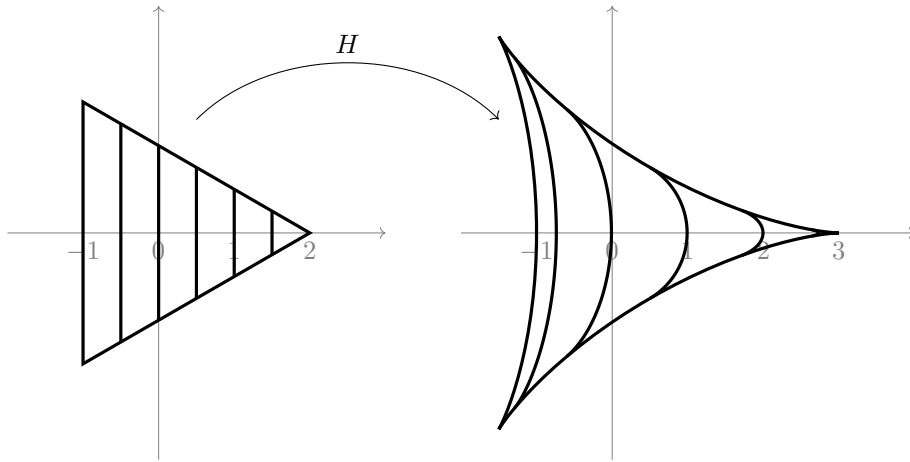
$$H(x, y) = (h(x) - 1)e^{i\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

Notemos lo siguiente:

1.  $H$  es continua y  $H(x, 0) = h(x)$ . Luego, si  $x \in [-1, 2]$ ,  $H(x, 0) \in [-1, 3]$ .
2. Para cada  $x \in [-1, 2]$  fijo,  $(x, y) \in \Delta$  se encuentra en un segmento vertical y  $H(x, y)$  está en un subarco de un miembro de la familia  $\Gamma$ , en específico  $H(x, y) \in \Lambda_{h(x)-1}$ . Esto es,  $H$  mapea el intervalo  $\{x\} \times \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2), -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \right]$  en el subarco de  $\Lambda_{h(x)-1}$  que va del punto  $2e^{i\frac{2\pi}{9}(x-2)} + e^{-i2\frac{2\pi}{9}(x-2)}$  al punto  $2e^{-i\frac{2\pi}{9}(x-2)} + e^{i2\frac{2\pi}{9}(x-2)}$ . Estos dos puntos se encuentran en  $\partial\overline{\mathcal{K}}$ . De ahí se sigue que  $H$  es inyectiva y  $H(\Delta) = \overline{\mathcal{K}}$  (ver figura 6.3).
3. Reemplazando  $h(x)$  en la fórmula para  $H(x, y)$ , tenemos que

$$H(x, y) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}(2-x)\right) e^{i\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

De ahí se sigue que en cada punto de  $\text{int}(\Delta)$ ,  $H$  es un difeomorfismo local.



**Figura 6.3:** La imagen bajo  $H$  de segmentos verticales en  $\Delta$ .

**Proposición 39.** El diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{K}} & \xrightarrow{F} & \overline{\mathcal{K}} \\ H \uparrow & & \uparrow H \\ \Delta & \xrightarrow{G} & \Delta \end{array}$$

conmuta.

**Demostración:** Sea  $(x, y) \in \Delta$ . Haremos esta demostración por casos dependiendo de en cuál triángulo  $\Delta_i$  esté el punto  $(x, y)$ . Sin embargo, en cualquiera de los cuatro casos se tiene que

$$\begin{aligned} F \circ H(x, y) &= (h(x)^2 - 2h(x) + 1) e^{i \frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + 2(h(x) - 1) e^{-i \frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} \\ &\quad + e^{-i \frac{4y\pi}{3\sqrt{3}}} - 2(h(x) - 1) e^{-i \frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} - 2e^{i \frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} \\ &= (h(x)^2 - 2h(x) - 1) e^{i \frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i \frac{4y\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

*Caso 1.* Si  $(x, y) \in \Delta_0$ , entonces

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= H(-2x, 2y) \\ &= (h(-2x) - 1) e^{i \frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i \frac{4y\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Pero como  $x \in [-1, \frac{1}{2}]$  y  $h$  tiene la propiedad de que  $f \circ h = h \circ g$ , entonces  $h(x)^2 - 2h(x) = h(-2x)$ . De ahí y de lo anterior que

$$F \circ H(x) = H \circ G(x).$$

*Caso 2.* Si  $(x, y) \in \Delta_1$ , entonces

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= H(2x - 2, 2y) \\ &= (h(2x - 2) - 1) e^{i \frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i \frac{4y\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Pero como ahora  $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ , entonces  $h(x)^2 - 2h(x) = h(2x - 2)$ , por lo que también aquí

$$F \circ H(x) = H \circ G(x).$$

*Caso 3.* Si  $(x, y) \in \Delta_2$ , llamemos

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \left( 1 + x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right)$$

y

$$\beta = \frac{\pi}{3} \left( 1 + x + \frac{3y}{\sqrt{3}} \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} \left( 2 - \left( 1 - x - \sqrt{3}y \right) \right) \right) e^{i\alpha} + e^{-i2\alpha} \\ &= 2 \cos(\beta) (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)) + (\cos(-2\alpha) + i \operatorname{sen}(-2\alpha)) \\ &= 2 \cos(\beta) \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + i (2 \cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(2\alpha)) \\ &= \cos(\beta + \alpha) + \cos(\beta - \alpha) + \cos(2\alpha) \\ &\quad + i (\operatorname{sen}(\beta + \alpha) - \operatorname{sen}(\beta - \alpha) - \operatorname{sen}(2\alpha)). \end{aligned}$$

Ahora, notando que  $\beta + \alpha = \frac{2\pi}{3} \left( 1 + x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right)$  y  $\beta - \alpha = \frac{4y\pi}{3\sqrt{3}}$ , y escribiendo  $a = \frac{2\pi}{3} (1 + x)$  y  $b = \frac{2\pi}{3} \left( \frac{y}{\sqrt{3}} \right)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= \cos(a + b) + \cos(2b) + \cos(a - b) \\ &\quad + i (\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(-2b) - \operatorname{sen}(a - b)) \\ &= 2 \cos(a) \cos(b) + \cos(2b) \\ &\quad + i (2 \operatorname{sen}(b) \cos(a) + \operatorname{sen}(-2b)) \\ &= 2 \cos(a) e^{ib} + e^{-i2b}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$F \circ G(x, y) = (h(x)^2 - 2h(x) - 1)e^{ib} + e^{-i2b}.$$

Y como  $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ , se tiene que

$$h(x)^2 - 2h(x) - 1 = h(-2x) - 1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}(2 + 2x)\right) = 2 \cos(a).$$

De ahí que

$$F \circ H(x) = H \circ G(x).$$

*Caso 4.* Si  $(x, y) \in \Delta_3$ , llamamos  $\gamma$  al mapeo que refleja por el eje horizontal. Esto es  $\gamma(x, y) = (x, -y)$  en  $\mathbb{R}^2$  o bien  $\gamma(z) = \bar{z}$  en  $\mathbb{C}$ . Geométricamente es claro que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_2 & \xrightarrow{G} & \Delta \\ \gamma \uparrow & & \uparrow \gamma \\ \Delta_3 & \xrightarrow{G} & \Delta \end{array}$$

También es fácil comprobar que en  $\overline{\mathcal{K}}$  se tiene que  $F \circ \gamma = \gamma \circ F$  y en  $\Delta$  se tiene que  $\gamma \circ H \circ \gamma = H$ . Entonces, dado  $(x, y) \in \Delta_3$ , ocurre que

$$H \circ G(x, y) = \gamma \circ H \circ \gamma \circ G(x, y) = \gamma \circ H \circ G \circ \gamma(x, y),$$

y como  $\gamma(x, y) \in \Delta_2$ , por el caso anterior

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= \gamma \circ H \circ G \circ \gamma(x, y) \\ &= \gamma \circ F \circ H \circ \gamma(x, y) \\ &= F \circ \gamma \circ H \circ \gamma(x, y) \\ &= F \circ H(x, y). \end{aligned}$$

□

**Corolario 2.** La función  $F$  es cáotica en  $\overline{\mathcal{K}}$  y tiene en dicho conjunto puntos periódicos de todos los periodos.

## $F$ en $\overline{\mathcal{K}}$ es semiconjugada de $\sigma$ en $\Psi$

En realidad veremos primero que  $G$  en  $\Delta$  es semiconjugada de  $\sigma$  en  $\Psi$ . Llamamos  $h: \Psi \rightarrow \Delta$  a la función tal que para cada  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  se cumple que

$$h(w) = p \in \Delta \Leftrightarrow p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}.$$

Según la proposición 23, esta función está bien definida. Y según la proposición 25, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{G} & \Delta \\ h \uparrow & & \uparrow h \\ \Psi & \xrightarrow{\sigma} & \Psi \end{array}$$

Además, de acuerdo con la proposición 26,  $h$  es suprayectiva y para cada  $p \in \Delta$  el número de elementos de  $h^{-1}(p)$  es menor o igual que 6. Para mostrar que  $h$  es una semiconjugación sólo falta demostrar que es continua.

**Proposición 40.** La función  $h: \Psi \rightarrow \Delta$  arriba definida es continua.

**Demostración:** Sean  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \Psi$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{\ell}{2^N} < \varepsilon$  (donde  $\ell$  es la longitud de los lados de  $\Delta$ ) y sea  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \frac{1}{2^N}$ . Entonces, por la proposición 28, se tiene que si  $a = (a_1, a_2, \dots) \in \Psi$  y  $d(a, w) < \delta$ , entonces  $a_i = w_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ahora, por ello y por la definición de  $h(a)$  y de  $h(w)$ , se tiene que  $h(a), h(w) \in \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_N}$  y dado que la mayor distancia entre cualesquiera puntos de ese triángulo es la que se alcanza entre sus vértices, y los lados del triángulo miden  $\frac{\ell}{2^N}$ , entonces  $d(h(a), h(w)) < \varepsilon$ .  $\square$

Así concluimos que la función  $G$  en  $\Delta$  es semiconjugada de la función  $\sigma$  en  $\Psi$ , y como  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$  es conjugada de  $G$  en  $\Delta$ , entonces  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$  es semiconjugada de  $\sigma$  en  $\Psi$ .

De ahí, y de lo estudiado para  $\sigma$  en el capítulo anterior, podemos concluir lo siguiente.

**Corolario 3.** La función  $F$  es caótica en  $\overline{\mathcal{K}}$ , tiene puntos de órbita densa y el conjunto de puntos de órbita densa es denso en  $\overline{\mathcal{K}}$ .

Además, se puede hacer uso del siguiente resultado, cuyos primeros dos incisos corresponden con el teorema 7.2 (pág. 67) de [18], y cuyo último inciso es el teorema 1.8 (pág. 374) de [13]. En dichas referencias se pueden consultar las demostraciones correspondientes.

**Proposición 41.** Sean  $f: X \rightarrow X$  y  $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  dos funciones definidas en espacios métricos compactos. Sea  $h: \hat{X} \rightarrow X$  una función continua tal que  $f \circ h = h \circ \hat{f}$ . Entonces:

- (i)  $\text{ent}(f) \leq \text{ent}(\hat{f})$ .
- (ii) Si  $h$  es un homeomorfismo, entonces  $\text{ent}(f) = \text{ent}(\hat{f})$ .
- (iii) Si existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $x \in X$  se cumple que  $\#(h^{-1}(x)) \leq M$ , entonces  $\text{ent}(f) = \text{ent}(\hat{f})$ .

**Corolario 4.** La entropía de  $G$  en  $\Delta$ , y por lo tanto también la de  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$ , es igual a la entropía de  $\sigma$  en  $\Psi$ , es decir,  $\log(4)$ .

**Observación 14.** También se puede probar que la función  $\sigma: \Psi \rightarrow \Psi$ , pero restringida a  $\Psi_{\mathcal{S}}$ , es topológicamente conjugada a la función corrimiento  $\sigma_3: \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3$ , tal que  $\sigma_3(t_1, t_2, \dots) = (t_2, t_3, \dots)$ . De ahí que la entropía de  $\sigma$  en  $\Psi_{\mathcal{S}}$  es igual a  $\log(3)$  y, por lo tanto, la entropía de  $G$  en el triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S}$  es también  $\log(3)$ .

## Apéndice. $\varphi$ en $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D})$ y $F$ en $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\overline{\mathcal{K}})$ son funciones conjugadas

Como vimos en el capítulo 3, el comportamiento dinámico de la función  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$  en el complemento de  $\overline{\mathcal{K}}$  se parece mucho al de la función  $\varphi(z) = z^2$  en el complemento del disco unitario  $\mathcal{D}$ . En esta sección probaremos que de hecho la función  $\varphi$  en el complemento del interior del disco unitario  $\mathcal{D}$  es conjugada con la función  $F$  en el complemento del interior de la deltoide  $\overline{\mathcal{K}}$ .

Para empezar, notemos que el intervalo  $[1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$  es estrictamente invariante bajo  $\varphi$ , el 1 es ahí el único punto fijo y las órbitas del resto de ellos divergen a  $\infty$ . Por otro lado, el intervalo  $[3, \infty) \subseteq \mathbb{R}$  es estrictamente invariante bajo la función  $F$ , el 3 es ahí el único punto fijo y las órbitas del resto de los puntos de dicho intervalo divergen a infinito. Esto sugiere que se cumple lo siguiente.

**Lema 7.** Existe un homeomorfismo  $h: [1, \infty) \rightarrow [3, \infty)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} [3, \infty) & \xrightarrow{F} & [3, \infty) \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ [1, \infty) & \xrightarrow{\varphi} & [1, \infty) \end{array}$$

Esto es, para cada  $x \in [1, \infty)$  se cumple que  $h(x)^2 - 2h(x) = h(x^2)$ .

**Demostración:** Tomando  $x \in \mathbb{R}$  y considerando la gráfica de  $\varphi(x) = x^2$  y  $F(x) = x^2 - 2x$ , es claro que las restricciones  $\varphi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  y  $F: [3, \infty) \rightarrow [3, \infty)$  son homeomorfismos, en específico, funciones crecientes cuyas inversas por lo tanto también son crecientes. Además, cumplen que para cualquier  $x \in (1, \infty)$  y para cualquier  $y \in (3, \infty)$ :

$$x < \varphi(x) \quad \text{y} \quad y < F(y) \quad (6.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-n}(x) = 1 \quad (6.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(y) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^{-n}(y) = 3 \quad (6.4)$$

Si tomamos ahora cualesquiera  $x_0 \in (1, \infty)$  y  $y_0 \in (3, \infty)$  y llamamos  $x_m = \varphi^m(x_0)$  y  $y_m = F^m(y_0)$  para cualquier  $m \in \mathbb{Z}$  (donde los exponentes negativos se refieren a aplicar la función inversa el número indicado de veces), tenemos que:

$$1 < \dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

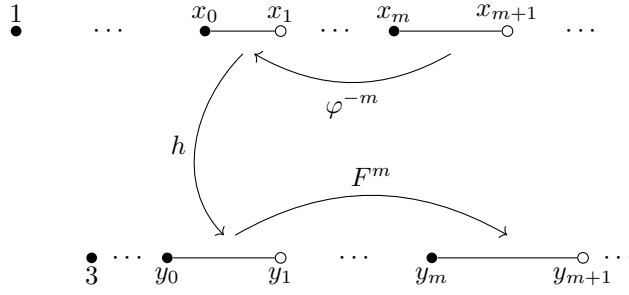
$$3 < \dots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \dots$$

Como veremos, las órbitas hacia adelante y hacia atrás de estos dos puntos nos ayudarán a construir un homeomorfismo  $h: [1, \infty) \rightarrow [3, \infty)$ . Esto lo haremos por pasos.

*Paso 1.* Definimos  $h$  en el intervalo  $[x_0, x_1)$  de manera que la gráfica de  $h$  en ese intervalo sea la de una función continua y creciente tal que  $h(x_0) = y_0$  y  $\lim_{x \rightarrow x_1} h(x) = y_1$ , por ejemplo un segmento de recta entre los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ . Hasta aquí,  $h$  es un homeomorfismo del intervalo  $[x_0, x_1)$  al intervalo  $[y_0, y_1)$ .

*Paso 2.* Si  $x_m \leq x < x_{m+1}$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ , se tiene que por ser crecientes tanto  $\varphi$  como su inversa, entonces:  $x_{m+k} = \varphi^k(x_m) \leq \varphi^k(x) < \varphi^k(x_{m+1}) = x_{m+k+1}$  para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ . En particular con  $k = -m$  se tiene que  $\varphi^{-m}(x) \in [x_0, x_1)$ ; además es el único valor de  $k$  para el que  $\varphi^k(x)$  está en ese intervalo. Por lo anterior, podemos definir (ver figura 6.4)

$$h(x) = F^m \circ h \circ \varphi^{-m}(x).$$



**Figura 6.4:** Definición de la función  $h$  comenzando con un solo intervalo.

Notemos que tal función  $h$  es un homeomorfismo del intervalo  $[x_m, x_m + 1)$  al intervalo  $[y_m, y_{m+1})$  y cumple que  $h(x_m) = y_m$  y que  $\lim_{x \rightarrow x_{m+1}} h(x) = y_{m+1}$ . Además, variando  $m \in \mathbb{Z}$ , tenemos que de acuerdo con 6.3 y 6.4, la función  $h$  está bien definida para cualquier  $x \in (1, \infty)$  y es un homeomorfismo del intervalo  $(1, \infty)$  al intervalo  $(3, \infty)$ .

*Paso 3.* Definimos  $h(1) = 3$  y entonces  $h: [1, \infty) \rightarrow [3, \infty)$  es un homeomorfismo.

*Paso 4.* Finalmente notemos que si  $x \in [x_m, x_{m+1})$  y por lo tanto  $h(x) = F^m \circ h \circ \varphi^{-m}(x)$ , entonces  $\varphi(x) \in [x_{m+1}, x_{m+2})$  y, por la definición de  $h$ :

$$h(\varphi(x)) = F^{m+1} \circ h \circ \varphi^{-m-1}(\varphi(x)),$$

de donde  $h \circ \varphi(x) = F \circ h(x)$ . Y la misma igualdad ocurre para  $x = 1$ , por lo que  $h$  es una conjugación topológica. □

Una vez demostrado este lema, a partir de  $h$  podemos definir  $H: \mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \text{int}(\overline{\mathcal{K}})$  tal que si  $z = \rho e^{i\theta}$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ , entonces

$$H(z) = H(\rho e^{i\theta}) = (h(\rho) - 1)e^{i\theta} + e^{-i2\theta}.$$

Otra forma de expresar  $H$  es la siguiente:

$$H(z) = (h(|z|) - 1) \frac{z}{|z|} + \frac{\bar{z}}{z}.$$

Nótese que  $H$  convierte circunferencias en hipotrocoides de la familia  $\Gamma$ . En particular, cuando  $\rho = 1$ , es decir para la circunferencia unitaria  $\mathcal{C}$ , se tiene que  $H(\mathcal{C}) = \Lambda$ . Y dado que  $h(\rho) - 1 \geq 2$  para toda  $\rho \geq 1$ , se sigue que la imagen de la circunferencia  $\rho e^{i\theta}$  bajo  $H$  (es decir, la curva  $\Lambda_{h(\rho)-1}$ ) es una curva simple cerrada, y entonces  $H$  es inyectiva. No es difícil ver que  $H$  es también continua y suprayectiva.

**Proposición 42.** El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \text{int}(\overline{\mathcal{K}}) & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \setminus \text{int}(\overline{\mathcal{K}}) \\ \uparrow H & & \uparrow H \\ \mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D}) \end{array}$$



**Demostración:** Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| \geq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} H \circ \varphi(z) &= H(z^2) = (h(|z^2|) - 1) \frac{z^2}{|z^2|} + \frac{\overline{(z^2)}}{z^2} \\ &= (h(|z|^2) - 1) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 \\ &= (h(|z|)^2 - 2h(|z|) - 1) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} F \circ H(z) &= F\left(h(|z|) - 1 \frac{z}{|z|} + \frac{\bar{z}}{z}\right) \\ &= (h(|z|) - 1)^2 \frac{z^2}{|z|^2} + 2(h(|z|) - 1) \frac{z}{|z|} \frac{\bar{z}}{z} + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 - 2\left((h(|z|) - 1) \frac{\bar{z}}{|z|} + \frac{z}{\bar{z}}\right) \\ &= (h(|z|) - 1)^2 \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 - 2\frac{z}{\bar{z}} \\ &= (h(|z|)^2 - 2h(|z|) + 1) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 - 2\frac{z}{\bar{z}} \\ &= (h(|z|)^2 - 2h(|z|)) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Esto demuestra que  $\varphi$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathcal{D})$  es conjugada de  $F$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\overline{\mathcal{K}})$ .

**Observación 15.** Nótese también que dado que  $H(\mathcal{C}) = \Lambda$  y  $H(\text{ext}(\mathcal{D})) = \text{ext}(\overline{\mathcal{K}})$ , entonces:

1.  $\varphi$  en  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$  es conjugada de  $F$  en  $\Lambda = \partial\overline{\mathcal{K}}$ , y
2.  $\varphi$  en  $\text{ext}(\mathcal{D})$  es conjugada de  $F$  en  $\text{ext}(\overline{\mathcal{K}})$ .

**Observación 16.** Adicionalmente se puede probar que la función  $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $\varphi(z) = z^2$  para cualquier  $z$  en la circunferencia unitaria  $\mathcal{C}$  es topológicamente semiconjugada de la función corrimiento  $\sigma_2: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , tal que  $\sigma_2(t_1, t_2, \dots) = (t_2, t_3, \dots)$ . De ahí que la entropía de  $\varphi$  en  $\mathcal{C}$  es igual a  $\log(2)$ . Luego, la entropía de  $F$  en la deltoide  $\Lambda$  es también  $\log(2)$ .

## Capítulo 7

# De vuelta al punto de partida

## $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ en el plano

Nuestro estudio de la dinámica de la función  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  en distintos conjuntos invariantes comenzó desde el capítulo 3. Ahí exploramos la manera en la que esta función transforma el plano complejo  $\mathbb{C}$  en sí mismo, el primer conjunto invariante en aparecer. Éste, a su vez, está dividido en dos subconjuntos invariantes ajenos muy contrastantes: el conjunto  $\mathcal{K}$  de puntos de órbita acotada y su complemento  $\mathcal{L}$  (que coincide, de hecho, con la cuenca de atracción de infinito). En este último conjunto,  $F$  se comporta dinámicamente a semejanza de la función  $\varphi(z) = z^2$  en el exterior del disco unitario  $\mathcal{D}$ , pues en tales dominios son funciones conjugadas entre sí, como se muestra en el apéndice del capítulo 6.

Por otro lado, para estudiar la dinámica de  $F$  en  $\mathcal{K}$  se recurrió en primer lugar, en el capítulo 4, al análisis de un modelo geométrico en el que  $\mathcal{K}$  se ve como un triángulo equilátero  $\Delta$  y la función  $F$  se ve como una función  $G$  más sencilla de trabajar. Ahí hicieron su aparición, de manera bastante natural, otros conjuntos invariantes: el conjunto de vértices del triángulo  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ , las órbitas periódicas en general, el conjunto frontera  $\partial\Delta$  formado por la unión de los lados del triángulo, el conjunto de nudos  $\mathcal{N} = \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\mathcal{V})$ , el conjunto telaraña  $\mathcal{T} = \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\partial\Delta)$ , el conjunto de orificios  $\mathcal{O} = \Delta \setminus \mathcal{T}$  y, finalmente, el triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S} = \Delta \setminus \cup_{n=0}^{\infty} G^{-n}(\text{int}(\Delta_0))$ . Por ser tales conjuntos invariantes, pudimos centrar nuestra atención en la función  $G$  restringida a cada uno de dichos conjuntos y analizar su dinámica, resultando ser también caótica en algunos de ellos.

Luego, en el capítulo 5, a cada punto de  $\Delta$  se le puso como nombre (o código, como en realidad ahí le llamamos) una sucesión infinita (o hasta seis de ellas) de dígitos tomados del conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$  (llamando  $\Psi$  a la colección de todas las posibles sucesiones así formadas), de manera que la función corrimiento  $\sigma$ , que “borra” el primer elemento de cada una de estas sucesiones y “recorre” todas las demás un lugar para llenar el espacio desocupado, describe detalladamente lo que la función  $G$  hace con el punto de  $\Delta$  correspondiente a tal sucesión. Este modelo simbólico nos sirvió tanto para repasar los resultados obtenidos en el capítulo anterior desde una nueva perspectiva, como para afinarlos y agregar algunos resultados más como los relativos a los puntos de órbita densa.

Finalmente, en el capítulo 6 se probó que, en efecto, lo estudiado para los modelos dinámico y simbólico es relevante en el estudio de la función  $F$  en  $\mathcal{K}$ , puesto que  $F$  en  $\mathcal{K}$  es conjugada de  $G$  en  $\Delta$  y semiconjugada de  $\sigma$  en  $\Psi$ . Asimismo, lo estudiado en el capítulo 2 para la función  $\varphi(z) = z^2$  es también relevante puesto que  $F$  en la deltoide  $\Lambda = \partial\mathcal{K}$  es conjugada de  $\varphi$  en la circunferencia unitaria  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$ , como se señala en el apéndice del capítulo 6.

Considerando entonces las propiedades que se heredan a partir de tales relaciones, y retomando los resultados de los capítulos anteriores, podemos hacer en seguida una síntesis de lo que hasta ahora hemos podido deducir acerca de la dinámica de la función  $F$  en  $\overline{\mathcal{K}}$ .

Para ello, nótese que dado cualquier conjunto  $\mathcal{X} \subseteq \Delta$ , hay un correspondiente conjunto  $\mathcal{X}^* = H(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathcal{K}}$  homeomorfo a  $\mathcal{X}$ , determinado por la conjugación  $H: \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{K}}$ , de la que se habló en el capítulo 6, y que es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{K}} & \xrightarrow{F} & \overline{\mathcal{K}} \\ H \uparrow & & \uparrow H \\ \Delta & \xrightarrow{G} & \Delta \end{array}$$

Por ejemplo,  $\Delta^* = \overline{\mathcal{K}}$ ,  $(\partial\Delta)^* = \partial\overline{\mathcal{K}} = \Lambda$ , y así también aparecen los conjuntos invariantes  $\mathcal{V}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{J}^*, \mathcal{O}^*, \mathcal{S}^* \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ .

## Conclusiones sobre $F$ en $\overline{\mathcal{K}}$

1. En  $\overline{\mathcal{K}}$  hay puntos periódicos (y preperiódicos) de todos los periodos.
2. En  $\overline{\mathcal{K}}$  no hay ningún punto asintóticamente periódico.
3. Los puntos periódicos (y también los preperiódicos) son densos en  $\overline{\mathcal{K}}$ .
4.  $F$  es topológicamente transitiva en  $\overline{\mathcal{K}}$ .
5.  $F$  es sensible a las condiciones iniciales en  $\overline{\mathcal{K}}$ .
6.  $F$  es caótica (según la definición de Devaney) en  $\overline{\mathcal{K}}$ .
7. Existen puntos de órbita densa en  $\overline{\mathcal{K}}$  y además forman un conjunto denso en  $\overline{\mathcal{K}}$ .
8. Existe un conjunto  $\mathcal{S}^* \subseteq \overline{\mathcal{K}}$  homeomorfo al triángulo de Sierpiński  $\mathcal{S} \subseteq \Delta$  que es invariante bajo  $F$  y tal que  $F$  es caótica en  $\mathcal{S}^*$ .
9. La función  $F$  es también caótica en  $\Lambda$ .
10. En los conjuntos compactos  $\mathcal{S}^*$  y  $\Lambda$  se cumplen las mismas propiedades que para el conjunto  $\overline{\mathcal{K}}$  descritas en los incisos 1, 2 y 7.
11. Siendo  $F$  caótica tanto en  $\overline{\mathcal{K}}$  como en  $\mathcal{S}^*$  como en  $\Lambda$ , presenta en cada uno de estos conjuntos distinto grado de entropía topológica positiva:  $\log(4)$ ,  $\log(3)$  y  $\log(2)$ , respectivamente. Por otro lado,  $F$  también es caótica en el conjunto no compacto  $\mathcal{O}^*$  y, sin embargo, ahí no tiene entropía topológica definida.
12. Los puntos periódicos de  $F$  se encuentran o bien en  $\Lambda$  o bien en  $\mathcal{O}^*$ .
13. Los puntos de órbita densa en  $\overline{\mathcal{K}}$  se encuentran en  $\mathcal{O}^*$ .

# Bibliografía

- [1] Adler, R. L., A. G. Konheim y M. H. McAndrew. 1965. “Topological Entropy”. *Transactions of the American Mathematical Society* 114, no. 2 (febrero): 309–319. <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.2307/1994177>
- [2] Banks, J., J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey. 1992. “On Devaney’s Definition of Chaos”. *The American Mathematical Monthly* 99, no. 4 (abril): 332-334. <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.2307/2324899>
- [3] Beardon, Alan F. 1991. *Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems*. Graduate Texts in Mathematics 132. New York: Springer-Verlag.
- [4] Cárdenas Rubio, Silvestre. 2013. *Notas de geometría*. México, D.F.: UNAM, Facultad de Ciencias.
- [5] Courant, Richard y Fritz John. 2001. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Vol. 1. Traducido por Saúl Hahn Goldberg, Rolando V. Jiménez Domínguez y José S. Florio. México, D. F.: Limusa.
- [6] Devaney, Robert L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2a ed. Redwood City, California: Addison-Wesley.
- [7] King Dávalos, Jefferson Edwin. 2006. *Algunos aspectos dinámicos y bifurcaciones de la familia  $F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}$* . Tesis de doctorado en ciencias (matemáticas), Universidad Nacional Autónoma de México. Versión electrónica disponible en <https://bibliotecas.unam.mx/>
- [8] King Dávalos, Jefferson Edwin y Héctor Méndez Lango. 2014. *Sistemas dinámicos discretos*. México, D. F.: UNAM, Facultad de Ciencias.
- [9] King Dávalos, Jefferson Edwin, Héctor Méndez Lango y Guillermo Javier Francisco Sierra Loera. 2004. “Some Dynamical Properties of  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$ ”. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 5, no. 1: 101-120. <https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1007/BF02968132>
- [10] Maor, Eli. 2006. *e: historia de un número*. Traducido por Juan Pablo Pinasco. México, D. F.: Librería-CNCA.
- [11] Marsden, Jerrold E. y Michael J. Hoffman. 1999. *Basic Complex Analysis*. 3a ed. New York: W. H. Freeman.
- [12] Ramírez Galarza, Ana Irene y Guillermo Javier Francisco Sierra Loera. 2000. *Invitación a las geometrías no euclidianas*. México, D. F.: UNAM, Facultad de Ciencias.

- 
- [13] Robinson, R. Clark. 1999. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. 2a ed. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- [14] Sienna Loera, Guillermo Javier Francisco. 2008. “Fractales y dinámica: imágenes en la matemática”. *Ciencia - Academia Mexicana de Ciencias* 59, no. 3 (julio-septiembre): 34-44. Versión electrónica disponible en <https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/>
- [15] Sabogal Pedraza, Sonia Marleni y Gilberto Arenas Díaz. 2011. *Una introducción a la geometría fractal*. Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- [16] Stewart, Ian. 2013. *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*. Traducción de Laura Sánchez Fernández. Barcelona, España: Crítica.
- [17] Szudzik, Matthew y Eric W. Weisstein. «Parallel Postulate». Wolfram MathWorld. Recuperado el 14 de marzo de 2022. <https://mathworld.wolfram.com/ParallelPostulate.html>
- [18] Walters, Peter. 1982. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate texts in mathematics 79. New York: Springer-Verlag.