



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VALUACIÓN DE OPCIONES FX CON VOLATILIDAD
ESTOCÁSTICA.
EL MODELO HESTON.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
CARLOS ADRIÁN SANDOVAL CUENCA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. JORGE HUMBERTO DEL CASTILLO SPÍNDOLA
ACT. JOSÉ ROBERTO DE JESÚS GONZÁLEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

MARZO, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Valuación de Opciones FX con Volatilidad Estocástica.
El Modelo Heston.**

por

Carlos Adrián Sandoval Cuenca

Tesis presentada para obtener el grado de

Actuario

en el

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad Universitaria, CDMX. marzo, 2022

Datos del Jurado

- Datos del alumno
Carlos Adrián Sandoval Cuenca
5561095651
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
313119534
- Datos del tutor
M. en C.
Jorge Humberto
Del Castillo
Spindola
- Datos del cotutor
Act.
José Roberto
De Jesús
González
- Datos del sinodal 1
Dr.
Pablo
Padilla
Longoria
- Datos del sinodal 2
M. en C.
Alma Rosa
Bustamante
García
- Datos del sinodal 3
M. en C.
Alejandro
Santoyo
Cano
- Datos del trabajo escrito
Valuación de Opciones FX con Volatilidad Estocástica. El Modelo Heston.
99 p.
2022

*“Derivatives are financial weapons of mass destruction,
carrying dangers that, while now latent, are potentially lethal.”*
WARREN BUFFET, 2002.

Agradecimientos

A mi mamá, mi papá, mi hermano y mi familia por su cariño, apoyo y consejos. Sin ellos no estaría donde me encuentro ahorita.

A mis queridos amigos de la Facultad Lucy, Truj, Amy, Atzin, Eric, Daniel, Bernie, Mike, Zare, Jasiel, Fabela, Miguel, Leches, Alan, Knapp, Cynthia y Fer por haber hecho de mi estancia en la universidad mi etapa favorita y de la cual me llevo una innumerable lista de buenos recuerdos y aventuras.

A mis tutores Humberto y Jesús por su maravillosa clase de Derivados, la cual me mostró el camino que me gustaría seguir en mi vida profesional. Agradezco mucho la retroalimentación que me brindaron, el tiempo invertido en leer las distintas versiones que existieron y por motivarme a no rendirme y aventarme la calibración, especialmente a Jesús por su experiencia y consejos para que la calibración del modelo fuera posible.

A mis sinodales por su tiempo, dedicación y por su paciencia en este proceso. Especialmente a Alejandro por sus numerosas correcciones, por compartirme toda su experiencia en el tema y abrirme nuevas líneas de investigación que espero algún día poder abordar en el posgrado.

A la UNAM y a la Facultad de Ciencias por permitirme realizar una licenciatura de calidad por tan solo 2 pesos y con profesores de tan alto nivel y preparación. De igual forma, le agradezco a la UNAM por el intercambio académico, el cual formó parte de mi desarrollo personal y me dejó vivencias muy gratas que llevaré siempre en mi memoria.

Índice general

1. El Modelo de Black-Scholes	1
1.1. Conceptos y fundamentos	1
1.1.1. El modelo de mercado e instrumentos financieros derivados	1
1.1.2. Estrategias autofinanciadas y de replicado	5
1.2. El modelo de Black-Scholes	8
1.2.1. Valuación martingala	10
1.2.2. La ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	20
2. La Volatilidad	23
2.1. Volatilidad histórica	24
2.2. Volatilidad implícita	25
2.3. La superficie de volatilidad	26
2.4. Volatilidad local	28
2.5. Volatilidad estocástica	30
2.5.1. El modelo Heston	33
2.5.2. El modelo SABR	33
3. El Modelo Heston de Volatilidad Estocástica	35
3.1. El modelo Cox-Ingersoll-Ross	35
3.1.1. Construcción	36
3.1.2. Distribución	38

3.1.3. Reversión a la media	39
3.1.4. Positividad	40
3.2. El modelo Heston	43
3.2.1. Deducción de la fórmula	45
3.2.2. Análisis de los parámetros	53
4. Implementación y Calibración	57
4.1. El mercado de opciones FX	57
4.2. Estimación de los parámetros	60
4.3. Aplicación del modelo Heston	64
5. Conclusiones	73
A. Resultados técnicos	76
B. Códigos en R	83

Prólogo

La primer piedra en la historia de las finanzas cuantitativas se remonta a principios del siglo XX cuando el matemático Louis Bachelier en su artículo *The theory of speculation* (1900) introduce el concepto de movimiento Browniano en las finanzas para modelar el precio de las acciones de la bolsa de París [6]. Sin embargo, hasta 1970 aún no se contaba con una fórmula para calcular el precio justo de una opción. No fue sino hasta la Guerra Fría, cuando la carrera armamentista de la Unión Soviética y de los Estados Unidos produjo una sobreoferta de físicos, ingenieros y matemáticos. Debido a esto, muchos de estos profesionistas tuvieron que recurrir a áreas no convencionales, y una de las que se vió más beneficiada fue la de las finanzas cuantitativas [12].

Tras la publicación de la célebre fórmula de Black-Scholes en 1973 para valuar opciones, y su posterior formalización matemática, por Robert Merton a través del cálculo estocástico, el mercado de derivados a nivel global creció de manera exponencial, ocasionando que varios bancos y fondos de inversión crearan grupos de especialistas para mejorar y extender este modelo, aplicándolo a diversos tipos de derivados, desde aquellos de tasas de interés y tipo de cambio, hasta aquellos de crédito y clima, así como la creación de nuevos productos exóticos cada vez más complejos y difíciles de valuar. Como lo menciona Merton en [26], el modelo de Black-Scholes-Merton tiene la ventaja de tener una fórmula semi-analítica a través de variables observables en el mercado y además brinda una estrategia de cobertura (*hedging*). Sin embargo, las suposiciones del modelo no se asemejan a la realidad, en particular, no se tiene una volatilidad constante en el tiempo.

Los derivados pueden ser empleados tanto para mitigar el riesgo y reducir pérdidas, como para fines especulativos y generar ganancias. La importancia de tener un precio justo para estos instrumentos radica en que la institución financiera que emite el producto, cobre lo suficiente para poder cubrir el riesgo generado por esta posición. En la historia de las finanzas han existido grandes acontecimientos en los que los derivados se han visto involucrados como han sido las crisis de 1987 en Estados Unidos (EU), la de 1997 en Asia y la de 2008 una vez más en EU; las cuales llevaron a bancarrota a bancos y fondos de inversión como los casos del banco británico Barings en 1995, el hedge fund Long Term Capital Management en 1998, el banco Lehman Brothers en 2008 y muchos más [19]. Es por esto que en ocasiones estos instrumentos han recibido el nombre de *armas financieras de destrucción masiva* y es vital tener modelos sofisticados que reflejen eficientemente el comportamiento del mercado.

El objetivo de esta tesis consiste en corregir el problema de la volatilidad en el modelo de Black-Scholes mediante el modelo Heston de volatilidad estocástica, abarcando desde su deducción hasta su implementación para la valuación de una opción de tipo de cambio USDMXN. Además de esto, también se busca que lo desarrollado en esta tesis pueda servir como material de apoyo para un curso de Derivados Financieros o incluso servir de base para su implementación en alguna institución financiera.

En el Capítulo 1 se presentan las bases para poder introducir la teoría de valuación de opciones, abarcando los conceptos de arbitraje, valuación martingala y su conexión con las ecuaciones diferenciales parciales. Debido a que esta teoría es muy extensa, se tratará de ser lo más breve y conciso posible, presentando únicamente los conceptos básicos, de una manera más intuitiva que rigurosa, que permita introducir esta teoría con las bases de probabilidad y cálculo. Los temas avanzados de probabilidad y cálculo estocástico se presentan en el Apéndice A. Posteriormente, en el Capítulo 2, se profundiza en el problema de la volatilidad en el modelo de Black-Scholes, mencionando algunos hechos históricos que evidenciaron la gravedad de este problema y sus posteriores soluciones. En el Capítulo 3 se analiza a detalle el modelo Heston y se demuestran algunas de sus propiedades, así como la deducción de las fórmulas. Una vez explicado el modelo, proseguimos con el Capítulo 4 mencionando algunas prácticas del mercado de opciones de tipo de cambio, así como un análisis del mercado mexicano durante el año 2020 y la implementación y calibración del modelo usando información real de mercado. Con el fin de que cualquiera pueda replicar los resultados obtenidos en esta tesis, agregamos los códigos de R en el Apéndice B.

Capítulo 1

El Modelo de Black-Scholes

1.1. Conceptos y fundamentos

El objetivo de este capítulo es brindar un primer acercamiento al modelo de Black-Scholes (B-S) de manera que los lectores no familiarizados con el tema puedan comprender los conceptos clave para el desarrollo de esta tesis. No profundizaremos en este modelo y omitiremos muchas pruebas y resultados, mencionando sólo los resultados más importantes. Primero desarrollamos el modelo de B-S usando la teoría de martingalas y posteriormente haremos la conexión entre este y las ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Las bases de cálculo estocástico se mencionan en el Apéndice [A](#). Este capítulo está basado principalmente en Fouque, Papanicolau y Sircar [\[15\]](#), Shreve [\[25\]](#), Clark [\[8\]](#), Castagna [\[5\]](#) y Del Castillo [\[11\]](#).

1.1.1. El modelo de mercado e instrumentos financieros derivados

El modelo de mercado puede describirse mediante dos instrumentos financieros: un activo riesgoso y un activo libre de riesgo. A lo largo de la tesis, \mathbb{T} denotará el intervalo de tiempo $[0, T]$ con horizonte de tiempo $T > 0$.

Definición 1.1.1 (Cuenta de Mercado de Dinero) Definimos la cuenta de mercado de dinero (o activo libre de riesgo) a través del proceso $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, el cual satisface

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1, \quad (1.1)$$

o equivalentemente

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}, \quad (1.2)$$

donde $\{r(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es la *tasa libre de riesgo*, la cual puede ser determinista o estocástica pero debe de ser \mathcal{F}_t medible.

En su forma más elemental, consideramos la tasa libre de riesgo como una constante r , de forma que (1.2) se convierte en $B(t) = e^{rt}$. El proceso $B(t)$ representa el valor de una unidad monetaria en un tiempo futuro t .

Definición 1.1.2 Definimos el precio de un activo (riesgoso) que no paga dividendos como el proceso estocástico $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, el cual sigue un movimiento Browniano geométrico con la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (1.3)$$

donde $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es un movimiento Browniano definido sobre el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$, con $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ la filtración natural del movimiento Browniano y la medida de probabilidad \mathbb{P} , la cual llamamos medida real, es con la cual medimos los movimientos del activo de riesgo. A la constante μ le llamamos la tendencia (drift) y a σ le llamamos la volatilidad.

Usando Lema de Itô para $\log S(t)$ y despejando $S(t)$ es fácil comprobar que la solución de (1.3) está dada por

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\}. \quad (1.4)$$

Dividiendo $S(T)/S(t)$ y despejando $S(T)$, obtenemos

$$S(T) = S(t) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma (W(T) - W(t)) \right\}, \quad (1.5)$$

y además, $S(T) = S(t)e^X$ donde bajo \mathbb{P} , $X \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right)$.

Definición 1.1.3 (Derivado Financiero) *Un instrumento financiero derivado es un contrato entre dos partes (una posición larga y una posición corta) cuyo precio depende del precio de otro activo llamado activo subyacente.*

Los derivados pueden clasificarse de diversas maneras, principalmente se clasifican por el momento en el que los contratos pueden ser ejercidos; si la decisión de ser ejercido se da a vencimiento T , se dice que es de tipo *européo*, si el contrato puede ejercerse en cualquier instante $t \in \mathbb{T}$, se dice que es de tipo *americano* y si el valor del contrato depende de la trayectoria recorrida por el subyacente, diremos que es una opción *exótica*. En este trabajo nos enfocaremos en derivados de tipo europeo, en particular en opciones call y put, cuyas definiciones se presentan a continuación.

Definición 1.1.4 (Forward) *Un forward es un derivado, donde la posición larga se compromete a comprar en una fecha futura T (vencimiento) una unidad de subyacente a la posición corta a un precio (strike) K pactado desde el inicio del contrato.*

Definición 1.1.5 (Call Europeo) *Una opción call es un derivado que brinda a la posición larga el derecho, mas no la obligación, de comprar a vencimiento T una unidad de subyacente a la posición corta a un precio (strike) K pactado al inicio del contrato.*

Definición 1.1.6 (Put Europeo) *Una opción put es un derivado que brinda a la posición larga el derecho, mas no la obligación, de vender a vencimiento T una unidad de subyacente a la posición corta a un precio (strike) K pactado al inicio del contrato.*

De las definiciones anteriores podemos pensar en los derivados como un juego de suma cero entre la posición larga y la posición corta, es decir, lo que uno gana, el otro lo pierde. Por lo tanto, siempre analizaremos los flujos de efectivo desde la posición larga, y los correspondientes flujos de efectivo de la posición corta serán los de la posición larga con signo opuesto.

Para ejemplificar las definiciones anteriores haremos uso de la Figura 1.1 y denotaremos a $S(t)$ como el valor del subyacente a tiempo t , el cual puede ser el valor de cualquier activo riesgoso, ya sea acción, commodity, tipo de cambio, índice de precios, etc. y este se modela a través de un movimiento Browniano geométrico como se mencionó en la Definición 1.1.2.

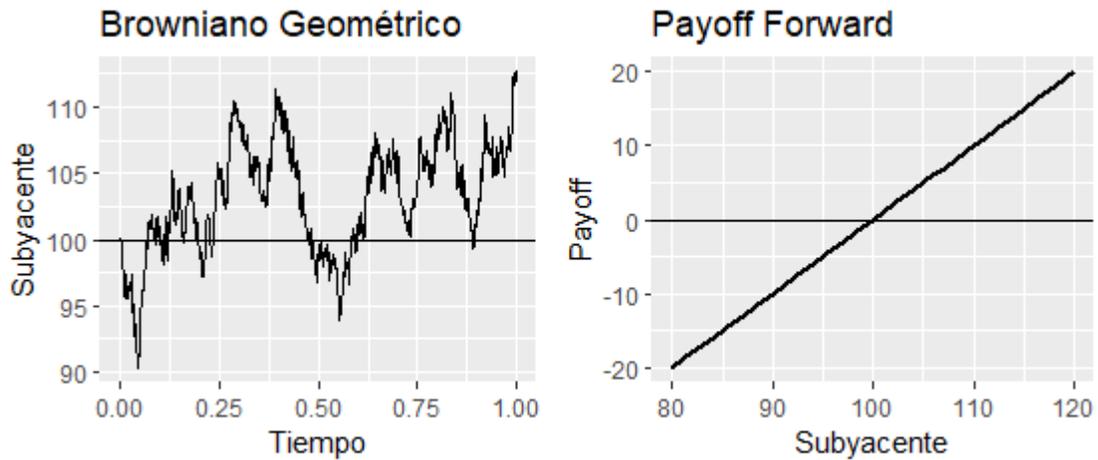


Figura 1.1: Gráfica de un activo riesgoso y del payoff de un forward largo con strike $K = 100$

Con base en las definiciones anteriores, una posición larga en un forward recibiría a vencimiento T una unidad de subyacente cuyo valor es de $S(T)$ a cambio de K pesos, lo cual implicaría que el valor del forward a vencimiento (*payoff*) para la posición larga valdría $S(T) - K$. Análogamente, el valor del *payoff* para la posición corta es de $K - S(T)$.

Formalmente se define el *payoff* de un derivado $X(T)$ como el valor intrínseco del contrato en el momento de ser ejercido (en nuestro caso a vencimiento T), el cual puede ser visto como una función del subyacente $X(T) = h(S(T))$.

En el caso de un call, la posición larga al tener el derecho, mas no la obligación, de comprar una unidad de subyacente con valor $S(T)$ a un precio K ; este sólo ejercería la opción si $(S(T) - K)_+ := \max(S(T) - K, 0) > 0$, por lo que el payoff del call largo es de $X(T) = (S(T) - K)_+$ y el del call corto es $X(T) = -(S(T) - K)_+$. Análogamente, el payoff del put largo es $X(T) = (K - S(T))_+$ y el del put corto es $X(T) = -(K - S(T))_+$.

En un call largo, cuando se cumple $S(T) > K$ se dice que la opción está *in-the-money* (ITM), cuando $S(T) = K$, se dice que está *at-the-money* (ATM) y si $S(T) < K$, se dice que está *out-of-the-money* (OTM) y para el caso de un put largo se invierte el orden de ITM por OTM. La gráfica del payoff del call y el put largos se ve en la Figura 1.2. En general, el término ITM hace referencia a cuando el payoff de una posición tiene valor positivo y OTM lo opuesto.

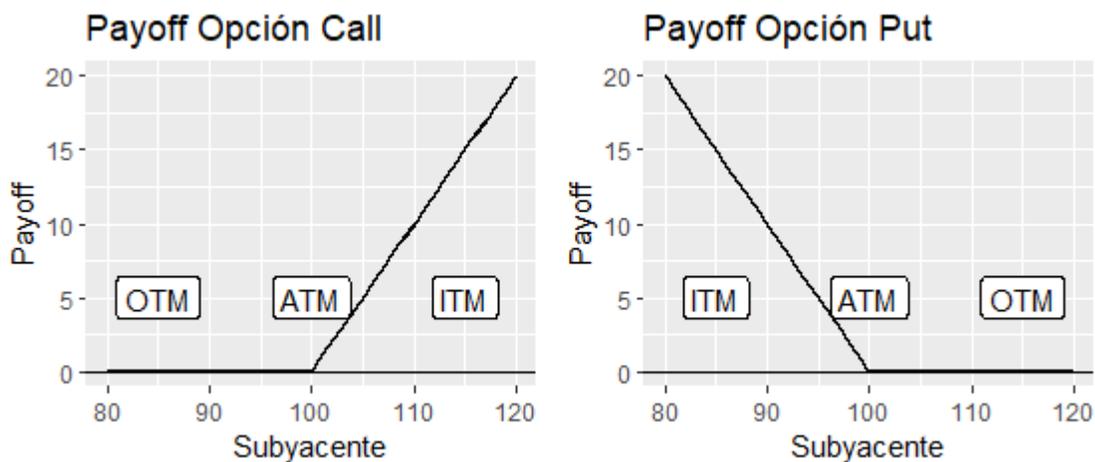


Figura 1.2: Gráfica del payoff de una opción call y put, ambas con strike $K = 100$

1.1.2. Estrategias autofinanciadas y de replicado

Para proseguir con el análisis de valuación de derivados, debemos introducir el concepto de no arbitraje, el cual intuitivamente nos dice que “no existe una forma segura de hacer dinero de la nada”.

Definición 1.1.7 (Oportunidad de Arbitraje) *Una oportunidad de arbitraje establece que es posible generar una ganancia sin riesgo al participar en dos mercados simultáneamente.*

Una implicación directa de esta definición es que si no existe oportunidad de arbitraje y el proceso de precios de dos activos $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ valen lo mismo a vencimiento, es decir, $X(T) = Y(T)$, entonces $X(t) = Y(t)$ para toda $t \in \mathbb{T}$; de otro modo, si en $t < T$ tuvieramos $X(t) < Y(t)$, podríamos pedir prestado $Y(t)$ y con esto comprar $X(t)$; en $t = T$ tenemos $X(T)$ y debemos $Y(T)$, de modo que obtuvimos una ganancia sin riesgo de $Y(t) - X(t) > 0$, lo cual contradice la hipótesis de no arbitraje. El razonamiento es análogo si $X(t) > Y(t)$.

Aplicando el razonamiento anterior a los payoffs de los instrumentos antes mencionados y usando la siguiente igualdad

$$(S(T) - K)_+ - (K - S(T))_+ = S(T) - K, \quad (1.6)$$

obtenemos una relación de no arbitraje entre el precio de un call $C(t, S(t); T, K)$, el precio de un put $P(t, S(t); T, K)$ y el precio de un forward $f(t, S(t); T, K)$ sobre el mismo subyacente y con mismo vencimiento y strike, el cual se le conoce como *paridad put-call* y establece que

$$C(t, S(t); T, K) - P(t, S(t); T, K) = f(t, S(t); T, K), \text{ para toda } t \geq 0. \quad (1.7)$$

Observese que el resultado anterior se obtuvo usando únicamente un argumento de no arbitraje y no requerimos de hacer ninguna suposición sobre el comportamiento del subyacente, por esto se dice que la paridad put-call es libre de modelo. Un desarrollo más detallado de la paridad put-call se puede consultar en Hull [19].

Sea $V(t)$ el valor de un portafolio en tiempo t constituido de $a(t)$ unidades de subyacente y $b(t)$ unidades de dinero invertidas en la cuenta de mercado de dinero, de modo que el valor del portafolio es $V(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$.

Definición 1.1.8 (Portafolio de replicado) *Sea un derivado sobre el subyacente asociado a $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ con payoff $X(T)$. Decimos que un portafolio $V(t)$ replica al derivado si $V(T) = X(T)$.*

Si un portafolio $V(t)$ replica a un derivado, por el supuesto de no arbitraje, $V(t)$ representaría el valor del derivado en tiempo t . Un portafolio que replique un derivado nos da el precio del derivado en cualquier instante, sin embargo, falta introducir la propiedad de autofinanciamiento de un portafolio para tener la estrategia de cobertura perfecta.

Definición 1.1.9 (Portafolio autofinanciado) *Diremos que un portafolio $V(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$ es autofinanciado si*

$$dV(t) = a(t)dS(t) + b(t)dB(t). \quad (1.8)$$

La definición anterior significa que *los cambios en el portafolio se deben únicamente a cambios en el precio del subyacente y en el activo libre de riesgo y no se requieren ingresos extras después de la inversión inicial.*

Por ejemplo, considere tiempos t_0, \dots, t_N . A tiempo t_n se tienen $a(t_n)$ unidades de subyacente y $b(t_n)$ unidades del activo libre de riesgo. Cuando los precios de mercado cambian a $S(t_{n+1})$ y $B(t_{n+1})$, tenemos que rebalancear nuestras cantidades del portafolio a $a(t_{n+1})$ y a $b(t_{n+1})$. Como no requerimos ingresos extras de capital, tenemos que el valor del portafolio debe valer lo mismo antes y después de rebalancear las cantidades, lo cual implica

$$a(t_n)S(t_{n+1}) + b(t_n)B(t_{n+1}) = a(t_{n+1})S(t_{n+1}) + b(t_{n+1})B(t_{n+1})$$

lo cual a su vez implica que

$$\begin{aligned} a(t_{n+1})S(t_{n+1}) + b(t_{n+1})B(t_{n+1}) - a(t_n)S(t_n) - b(t_n)B(t_n) \\ = a(t_n)(S(t_{n+1}) - S(t_n)) + b(t_n)(B(t_{n+1}) - B(t_n)), \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\Delta V(t_n) = a(t_n)\Delta S(t_n) + b(t_n)\Delta B(t_n), \quad (1.9)$$

donde $\Delta S(t_n) := S(t_{n+1}) - S(t_n)$ y análogo para $\Delta B(t_n)$ y $\Delta V(t_n)$. Lo anterior viene siendo la versión discreta de la ecuación (1.8).

La cualidad más importante de los derivados es que si existe un portafolio autofinanciado que replique al derivado, entonces estos pueden ser creados (sintetizados) a partir de los elementos básicos de mercado, es decir, a través de un portafolio conformado por una cantidad del subyacente y una cantidad invertida en la cuenta de dinero, donde es posible rebalancear estas cantidades continuamente para obtener el valor del derivado en cada instante.

Definición 1.1.10 (Mercado Completo) *Un modelo de mercado se dice que es completo si para cualquier derivado, existe un portafolio autofinanciado que lo replica.*

Veremos que el modelo de B-S es completo.

1.2. El modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes (B-S) se basa en los siguientes supuestos del mercado:

- Los participantes del mercado son entes racionales.
- La competencia del mercado es perfecta.
- El subyacente no paga dividendos y su precio sigue un movimiento Browniano geométrico.
- Es posible comprar, vender y pedir prestado (venta en corto) cualquier cantidad (no necesariamente entera) del subyacente en cualquier instante de tiempo, sin costos de transacción.
- La tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad son constantes en el tiempo.

La primera suposición es equivalente a que no existen oportunidades de arbitraje, pues de existir, los participantes racionales las tomarían y por oferta y demanda su precio se estabilizaría

en un punto de equilibrio, el cual correspondería con el precio justo. La segunda suposición significa que todos los participantes tienen acceso a la misma información y los precios son iguales para todos, además nadie puede influir en los precios para modificarlos a su conveniencia.

Puesto que el enfoque de este trabajo son las opciones de tipo de cambio, presentaremos el modelo de B-S para opciones de tipo de cambio (también conocido como modelo de Garman-Kohlhagen) donde se incorpora una tasa libre de riesgo extranjera r_f (la cual puede verse como incluir dividendos en el subyacente a tasa continua), mientras que r_d representará la tasa libre de riesgo local. El subyacente en este caso será el tipo de cambio $S(t)$ para los pares XXXYYY, donde XXX es la divisa extranjera (por ejemplo USD), y YYY representa la divisa local (por ejemplo MXN), entendiéndose que una unidad de moneda extranjera XXX a tiempo t vale $S(t)$ unidades de moneda local YYY. Debido a la existencia de la tasa extranjera, si el día de hoy compráramos una unidad de moneda extranjera $S(0)$, a tiempo t el activo valdría $e^{r_f t} S(t)$ unidades de la moneda local. Si denotamos por $Y(t) = e^{r_f t} S(t)$, el cual representa el valor de la cuenta de mercado de dinero extranjera en moneda local, entonces usando la dinámica del tipo de cambio $S(t)$ (1.3) y la regla del producto de Itô encontramos que

$$\begin{aligned} dY(t) &= e^{r_f t} dS(t) + S(t) de^{r_f t} \\ &= e^{r_f t} (\mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)) + r_f e^{r_f t} S(t) dt \\ \therefore dY(t) &= (\mu + r_f) Y(t) dt + \sigma Y(t) dW(t). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Así mismo, en este contexto de tipo de cambio, ahora el valor del portafolio a tiempo t estaría dado por

$$V(t) = a(t) e^{r_f t} S(t) + b(t) B(t) = a(t) Y(t) + b(t) B(t) \tag{1.11}$$

y la propiedad de autofinanciamiento del portafolio sería

$$dV(t) = a(t) dY(t) + b(t) dB(t). \tag{1.12}$$

Para obtener la fórmula de B-S para valorar una opción call europea existen dos posibles vías, una es mediante la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y la otra es recurriendo a la teoría de valuación martingala.

1.2.1. Valuación martingala

Para comenzar con la teoría de valuación martingala, primero se debe empezar por dos teoremas fundamentales que se enuncian a continuación.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Girsanov) *Sea $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ la filtración asociada al movimiento Browniano. Sea $\{\theta(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ un proceso adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$. Definamos*

$$Z = \exp \left\{ - \int_0^T \theta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(s) ds \right\},$$

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(s) ds.$$

Entonces $\mathbb{E}(Z) = 1$ y $\{\widetilde{W}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es un movimiento Browniano bajo la medida $\widetilde{\mathbb{P}}$ definida por

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{para toda } A \in \mathcal{F}.$$

El hecho de que la v.a. Z del Teorema de Girsanov sea $Z > 0$ c.s. y $\mathbb{E}(Z) = 1$, implica que podemos tomar a Z como la derivada de Radon-Nikodým $\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$, y por lo tanto $Z(t) = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_t)$ es un proceso derivada de Radon-Nikodým (ver Apéndice A).

Teorema 1.2.2 (Teorema de la Representación Martingala) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$ espacio de probabilidad filtrado y sea $\{M(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ martingala con proceso de volatilidad $\{\sigma(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ diferente de cero casi seguramente. Si $\{N(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es otra martingala en el mismo espacio, entonces existe un único proceso previsible ¹ $\{\Delta(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ tal que $\mathbb{E} \left(\int_0^T \Delta(s) \sigma(s) ds \right) < \infty$ y

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Delta(s) dN(s).$$

El concepto de martingala fue introducido por Paul Lèvy en 1934 y mucha de la teoría de martingalas fue desarrollada por Joseph Doob. El concepto está asociado con el precio justo de una apuesta, razón por la cual tiene aplicaciones en el mundo de las finanzas.

De la definición de martingala, tenemos que si $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es martingala, entonces por esperanza iterada

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(X(0)) = X(0).$$

Lo anterior implica que, en promedio, el proceso tiende a mantenerse constante en el tiempo. Por consiguiente, si consideramos una dinámica estocástica para la martingala $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, por ejemplo, $dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$, entonces el término que acompaña a dt (drift) debe de ser igual a cero, es decir, $\mu = 0$, pues de otro modo, si $\mu > 0$ ($\mu < 0$), el proceso en promedio crecería (decrecería) conforme transcurre el tiempo y no se cumpliría el hecho de mantenerse constante en el tiempo.

El inverso de la implicación también es cierto bajo ciertos supuestos adicionales y lo enunciamos formalmente en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1 Si un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es martingala en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$ y sigue la siguiente EDE

$$dX(t) = \mu(t)X(t)dt + \sigma(t)X(t)dW(t),$$

¹Un proceso $X(t)$ es previsible/predecible si $X(t)$ es \mathcal{F}_t medible para toda $t \in \mathbb{T}$, donde $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ es la filtración generada por todos los procesos continuos por la derecha. En palabras sencillas, son aquellos procesos que se conocen hasta tiempo t sin incluir t .

entonces $\mu \equiv 0$.

Por otra parte, si un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ tiene EDE

$$dX(t) = \sigma(t)X(t)dW(t)$$

y su variación cuadrática finita, i.e. $\mathbb{E} \left(\int_0^T \sigma^2(t)X^2(t)dt \right) < \infty$, entonces $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es martingala.

Demostración. Como $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es \mathbb{P} -movimiento Browniano, entonces $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ son \mathbb{P} -martingalas. Por el Teorema de la Representación Martingala 1.2.2, existe $\{\Delta(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ previsible tal que

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(s)dW(s)$$

o equivalentemente $dX(t) = \Delta(t)dW(t)$. Pero $dX(t) = \mu(t)X(t)dt + \sigma(t)X(t)dW(t)$, por lo tanto, como la representación en EDE de un proceso es única, se sigue que $\mu \equiv 0$ y $\Delta(t) = \sigma(t)X(t)$.

Ahora supongamos que $dX(t) = \sigma(t)X(t)dW(t)$, lo cual es equivalente a

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s)X(s)dW(s).$$

La condición $\mathbb{E} \left(\int_0^T \sigma^2(t)X^2(t)dt \right) < \infty$ garantiza que la integral de Itô anterior está bien definida. Como las integrales de Itô son martingalas (ver Apéndice A), entonces si $s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t) | \mathcal{F}_s) &= X(0) + \mathbb{E} \left(\int_0^t \sigma(u)X(u)dW(u) | \mathcal{F}_s \right) \\ &= X(0) + \int_0^s \sigma(u)X(u)dW(u) \\ &= X(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es martingala. ■

Recapitulemos hasta este punto. Para nuestro caso de opciones europeas, lo único que se conoce del derivado a priori es su payoff $X(T)$, el cual se quiere replicar/igualar con un portafolio

autofinanciado $V(t) = a(t)Y(t) + b(t)B(t)$, de forma que $V(t)$ sea igual al valor del derivado en cada instante. El hecho de querer igualar dos procesos estocásticos nos sugiere que debemos recurrir al Teorema de la Representación Martingala, para lo cual requerimos de dos martingalas bajo la misma medida de probabilidad. Por la Proposición 1.2.1, sabemos que lo único que necesitamos para que un proceso estocástico sea martingala es que su EDE carezca de drift y que su variación cuadrática sea finita, es ahí donde entra en juego el Teorema de Girsanov, el cual nos permite cambiar los drifts de procesos estocásticos al usar una nueva medida de probabilidad.

Antes de continuar es importante mencionar que todos los activos siempre están referenciados al precio de otro activo llamado *numeraire*². En nuestro caso, todos los activos (incluyendo el subyacente) están denominados en pesos, los cuales tienen un costo de oportunidad representado por la cuenta de mercado de dinero local y su comportamiento afecta a todos los activos denominados en pesos. Por lo tanto, para eliminar este efecto del numeraire en los activos, debemos descontar el numeraire del precio de los activos.

De modo que el truco de la teoría de valuación martingala para encontrar el portafolio de replicado es hacer martingala el precio del activo descontado $\{e^{-r_d t}Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$. Para esto primero necesitamos encontrar el drift de dicho proceso. Una vez más usando la regla del producto de Itô y la dinámica del proceso $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ (1.10) es fácil ver que

$$d(e^{-r_d t}Y(t)) = (\mu + r_f - r_d)e^{-r_d t}Y(t)dt + \sigma e^{-r_d t}Y(t)dW(t) \quad (1.13)$$

Haciendo uso del Teorema de Girsanov 1.2.1, si definimos $\theta(t) = \frac{\mu + r_f - r_d}{\sigma}$ claramente $\theta(t)$ es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ y entonces podemos definir la derivada de Radon-Nikodym como

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ - \int_0^T \theta(s)dW(s) - \int_0^T \theta^2(s)ds \right\}, \quad (1.14)$$

con lo cual generamos un movimiento Browniano $\{\tilde{W}(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ con respecto a una nueva medida

²Un numeraire es cualquier activo positivo que no paga dividendos

de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$, equivalente a \mathbb{P} , a través de

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(s) ds = W(t) + \frac{\mu + r_f - r_d}{\sigma} t, \quad (1.15)$$

o en su forma diferencial

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) + \frac{\mu + r_f - r_d}{\sigma} dt. \quad (1.16)$$

Utilizando esta herramienta y sustituyendo (1.16) en (1.13), vemos que ahora la dinámica de $\{e^{-r_d t} Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ está dada por

$$d(e^{-r_d t} Y(t)) = \sigma e^{-r_d t} Y(t) d\tilde{W}(t). \quad (1.17)$$

y sustituyendo (1.16) en (1.10)

$$dY(t) = r_d Y(t) dt + \sigma Y(t) d\tilde{W}(t). \quad (1.18)$$

Por no tener término dt y como la variación cuadrática es finita, de acuerdo con nuestra Proposición 1.2.1, el activo descontado $\{e^{-r_d t} Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ y la solución de (1.18) es un caso particular de (1.3) y (1.4) con $\mu = r_d$

$$Y(t) = Y(0) \exp \left\{ \left(r_d - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\}. \quad (1.19)$$

Ahora, recordando que $Y(t) = e^{r_f t} S(t)$, obtenemos

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(r_d - r_f - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\}. \quad (1.20)$$

Sustituyendo (1.16) en la dinámica del tipo de cambio $S(t)$ (1.3) obtenemos la dinámica del tipo de cambio bajo la medida equivalente martingala $\tilde{\mathbb{P}}$

$$dS(t) = (r_d - r_f) S(t) dt + \sigma S(t) d\tilde{W}(t). \quad (1.21)$$

Con esto, obtenemos una nueva distribución para el tipo de cambio $S(T) = S(t)e^X$ donde $X \sim N\left(\left(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma^2(T - t)\right)$ bajo esta nueva medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

Lo que nos dice la ecuación (1.21) es que si queremos encontrar la dinámica del tipo de cambio sin considerar el efecto de la cuenta de mercado de dinero extranjera, debemos descontar los intereses generados por la tasa libre de riesgo extranjera r_f .

Definición 1.2.1 (Medida Martingala Equivalente) *Definimos la medida martingala equivalente como aquella medida $\tilde{\mathbb{P}}$ equivalente a la medida \mathbb{P} que hace martingala al activo descontado $\{e^{-r_d t} Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$.*

La medida $\tilde{\mathbb{P}}$ también es conocida como *medida de riesgo neutral* porque en nuestro mercado de un activo libre de riesgo $B(t) = e^{r_d t}$ y un activo riesgoso $Y(t)$, en promedio ambos crecen a la misma tasa libre de riesgo r_d .

Pasaremos a emplear el segundo teorema importante de la teoría de la valuación martingala, el Teorema de la Representación Martingala 1.2.2, el cual utilizaremos para probar la propiedad de autofinanciamiento del portafolio. Para la primera martingala requerida en el teorema, usaremos la del subyacente descontado $\{e^{-r_d t} Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ bajo la medida martingala equivalente $\tilde{\mathbb{P}}$ y para la segunda martingala crearemos todo un proceso estocástico a partir de una v.a. definiendo $\{M(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ como la esperanza del payoff descontado bajo la medida martingala equivalente condicionado a la información a tiempo t , es decir,

$$M(t) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r_d T} X(T) \mid \mathcal{F}_t), \quad (1.22)$$

donde $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ es la filtración generada por el movimiento Browniano $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$.

La cualidad de este proceso es que por la propiedad de torre (ver Apéndice A) es martingala bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$, es decir, si $s < t$

$$\tilde{\mathbb{E}}(M(t) \mid \mathcal{F}_s) = \tilde{\mathbb{E}}(\tilde{\mathbb{E}}(e^{-r_d T} X(T) \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r_d T} X(T) \mid \mathcal{F}_s) = M(s). \quad (1.23)$$

Una vez que ya tenemos las dos $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingalas $\{e^{-r_d t} Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{M(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, el Teorema de la Representación Martingala afirma que existe un único proceso previsible $\{\Delta(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ que relaciona a las dos $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingalas de la siguiente forma

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Delta(s) d(e^{-r_d s} Y(s)), \quad (1.24)$$

o equivalentemente en forma diferencial

$$dM(t) = \Delta(t) d(e^{-r_d t} Y(t)). \quad (1.25)$$

Este teorema nos dice que en el mundo de riesgo neutral la única fuente de incertidumbre proviene del movimiento Browniano del subyacente $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, por lo que para cualesquiera dos martingalas bajo la misma medida, estas están relacionadas a través de un proceso previsible $\{\Delta(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, el cual, intuitivamente, debemos definir como la cantidad de subyacente a conservar a tiempo t , es decir, $a(t) = \Delta(t)$.

Como queremos que nuestro portafolio replique el valor del derivado, necesitamos que

$$X(T) = V(T) = a(T)Y(T) + e^{r_d T} b(T),$$

por lo que

$$b(T) = e^{-r_d T} X(T) - a(T)e^{-r_d T} Y(T) = M(T) - a(T)e^{-r_d T} Y(T),$$

lo cual nos sugiere que la cantidad que debemos tener invertida en la cuenta de mercado es $b(t) = M(t) - a(t)e^{-r_d t} Y(t)$. Manteniendo esta cantidad de $b(t)$, logramos que nuestro portafolio replique al derivado, lo cual, por no arbitraje, implica que nuestro portafolio vale lo mismo que el derivado en cada instante, es decir, $V(t)$ es el correspondiente valor del derivado para toda

$t \in \mathbb{T}$. Una vez establecido esto, observamos que el valor de nuestro portafolio es

$$\begin{aligned} V(t) &= a(t)Y(t) + b(t)e^{rt} \\ &= a(t)Y(t) + (M(t) - a(t)e^{-rt}Y(t))e^{rt} \\ &= e^{rt}M(t). \end{aligned}$$

Lo anterior nos brinda el valor del portafolio en cada instante

$$V(t) = e^{rt}\tilde{\mathbb{E}}(e^{-r_d T}X(T) \mid \mathcal{F}_t) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r_d(T-t)}X(T) \mid \mathcal{F}_t). \quad (1.26)$$

A la ecuación (1.26) le llamamos *fórmula de valuación de riesgo neutral* y nos sirve para calcular el valor de cualquier derivado de tipo europeo suponiendo que la tasa libre de riesgo r y la volatilidad σ son constantes. Sin embargo, la fórmula es análoga si $r(t)$ y $\sigma(t)$ son deterministas o estocásticas bajo ciertas condiciones, sólo que calcular esa esperanza puede ya no ser fácil.

Proposición 1.2.2 *El precio de una opción call europea con vencimiento T y strike K está dado por*

$$C(t, S(t); T, K) = S(t)e^{-r_f(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r_d(T-t)}N(d_2), \quad (1.27)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right), \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

y $N(x)$ es la función de distribución de una normal estándar

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Demostración. Gracias a la fórmula de valuación de riesgo neutral (1.26), sabemos que el

precio de la opción call está dado por

$$C(t, S(t); T, K) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r_d(T-t)}(S(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t). \quad (1.28)$$

Para calcular la esperanza anterior hacemos uso de la distribución del subyacente bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ (1.20) y definimos $\tau = T - t$ y $\mu = (r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$, de modo que

$$S(T) = S(t)e^X = S(t)e^{\mu + \sigma\sqrt{\tau}Z},$$

donde $Z \sim N(0, 1)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} C(t, S(t); T, K) &= \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r_d\tau}(S(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r_d\tau}\tilde{\mathbb{E}}((S(T) - K)\mathbb{1}_{\{S(T) > K\}} | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Es fácil ver que $S(T) > K$ si y sólo si $Z > \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\log\left(\frac{K}{S(t)}\right) - \mu\right) = -d_2$, por lo que

$$\begin{aligned} C(t, S(t); T, K) &= e^{-r_d\tau}\tilde{\mathbb{E}}((S(t)e^{\mu + \sigma\sqrt{\tau}Z} - K)\mathbb{1}_{\{Z > -d_2\}} | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r_d\tau}\left[S(t)\tilde{\mathbb{E}}(e^{\mu + \sigma\sqrt{\tau}Z}\mathbb{1}_{\{Z > -d_2\}} | \mathcal{F}_t) - K\tilde{\mathbb{E}}(\mathbb{1}_{\{Z > -d_2\}} | \mathcal{F}_t)\right] \\ &= S(t)e^{-r_d\tau}\int_{-d_2}^{\infty} e^{\mu + \sigma\sqrt{\tau}z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz - Ke^{-r_d\tau}\tilde{\mathbb{P}}(Z > -d_2) \\ &= e^{-r_d\tau}e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}S(t)\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{\tau})^2}dz - Ke^{-r_d\tau}\tilde{\mathbb{P}}(Z > -d_2) \\ &= S(t)e^{-r_f\tau}\int_{-d_2 - \sigma\sqrt{\tau}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - Ke^{-r_d\tau}\tilde{\mathbb{P}}(Z > -d_2) \\ &= S(t)e^{-r_f\tau}\tilde{\mathbb{P}}(Z > -d_2 - \sigma\sqrt{\tau}) - Ke^{-r_d\tau}\tilde{\mathbb{P}}(Z > -d_2) \\ &= S(t)e^{-r_f\tau}\tilde{\mathbb{P}}(Z > -d_1) - Ke^{-r_d\tau}\tilde{\mathbb{P}}(Z > -d_2) \\ &= S(t)e^{-r_f\tau}N(d_1) - Ke^{-r_d\tau}N(d_2). \end{aligned}$$

■

Por último veremos que este portafolio $V(t)$ cumple la propiedad de ser autofinanciado, lo cual nos indicaría que el precio arrojado por la fórmula de valuación de riesgo neutral es sufi-

ciente para replicar el derivado y no requerimos de más dinero para hacer la cobertura, razón por la cual el modelo de B-S es tan importante.

Hasta ahora no hemos especificado el valor de la cantidad de subyacente $a(t) = \Delta(t)$ en todas las fórmulas anteriores, sin embargo, el Teorema de la Representación Martingala 1.2.2 nos garantiza la existencia de $a(t)$. Más adelante encontraremos un valor específico para esta cantidad.

Una vez mencionado esto, utilizamos las siguientes ecuaciones ya mencionadas anteriormente

$$\begin{aligned} V(t) &= e^{rt}M(t), \\ dM(t) &= \Delta(t)d(e^{-rt}Y(t)) = a(t)d(e^{-rt}Y(t)), \\ M(t) &= b(t) + a(t)e^{-rt}Y(t), \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} dV(t) &= d(e^{rt}M(t)) \\ &= e^{rt}dM(t) + M(t)de^{rt} \\ &= e^{rt}a(t)d(e^{-rt}Y(t)) + (b(t) + a(t)e^{-rt}Y(t))de^{rt} \\ &= e^{rt}a(t)(e^{-rt}dY(t) - r_dY(t)e^{-rt}dt) + r_de^{rt}(b(t) + a(t)e^{-rt}Y(t))dt \\ &= a(t)dY(t) + b(t)de^{rt}. \end{aligned}$$

Con esto concluimos que el portafolio $V(t) = a(t)Y(t) + e^{rt}b(t)$ replica al derivado con payoff $X(T)$ y es autofinanciado, por lo que el modelo de Black-Scholes es completo.

Lo único que tenemos pendiente es encontrar una fórmula para el valor de $a(t)$ para lo cual debemos recurrir al uso de ecuaciones diferenciales parciales.

1.2.2. La ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Procederemos a hacer la conexión entre las EDP y la teoría de valuación martingala, para esto haremos uso del siguiente teorema.

Notación 1.2.1 *De aquí en adelante, para una función en dos variables $f(t, x)$, denotaremos a sus derivadas parciales como*

$$f_t(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x), \quad f_x(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}f(t, x), \quad f_{xx}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(t, x).$$

Para funciones de más variables, se procede de forma análoga.

Teorema 1.2.3 (Feynman-Kac) *Considere el proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ con EDE*

$$dX(t) = \beta(t, X(t))dt + \gamma(t, X(t))dW(t). \quad (1.29)$$

Sea $h(y)$ una función Borel-medible y definamos

$$g(t, x) = \mathbb{E}(h(X(T)) \mid X(t) = x), \quad (1.30)$$

$$f(t, x) = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}h(X(T)) \mid X(t) = x) \quad (1.31)$$

Entonces $g(t, x)$ satisface la EDP

$$g_t(t, x) + \beta(t, x)g_x(t, x) + \frac{1}{2}\gamma^2(t, x)g_{xx}(t, x) = 0, \quad g(T, x) = h(x) \quad (1.32)$$

y $f(t, x)$ satisface la EDP

$$f_t(t, x) + \beta(t, x)f_x(t, x) + \frac{1}{2}\gamma^2(t, x)f_{xx}(t, x) = rf(t, x), \quad f(T, x) = h(x) \quad (1.33)$$

Este teorema nos brinda la conexión entre la solución de EDP con el cálculo de esperanzas condicionadas. En el Capítulo 3 haremos uso extensivo de una versión un poco más generalizada de este teorema.

Sea $C(t, S(t))$ el valor de una opción call con strike K y vencimiento T , y consideremos el portafolio autofinanciado $V(t) = a(t)Y(t) + b(t)B(t) = a(t)e^{r_f t}S(t) + e^{r_d t}b(t)$ que replica la opción call, lo cual implica que $V(T) = C(T, S(T)) = (S(T) - K)_+$.

Por el supuesto de no arbitraje, se sigue que

$$C(t, S(t)) = V(t) = a(t)e^{r_f t}S(t) + e^{r_d t}b(t) \quad \text{para toda } t \in \mathbb{T}.$$

lo cual a su vez implica que $b(t) = e^{-r_d t}(C(t, S(t)) - a(t)e^{r_f t}S(t))$ y además

$$dC(t, S(t)) = dV(t) \tag{1.34}$$

Por otra parte, de la propiedad de autofinanciamiento obtenemos

$$\begin{aligned} dV(t) &= a(t)d(e^{r_f t}S(t)) + b(t)de^{r_d t} \\ &= a(t)(r_d e^{r_f t}S(t)dt + \sigma e^{r_f t}S(t)d\widetilde{W}(t)) + e^{-r_d t}(C(t, S(t)) - a(t)e^{r_f t}S(t))r_d e^{r_d t}dt \\ \therefore dV(t) &= r_d C(t, S(t))dt + \sigma a(t)e^{r_f t}S(t)d\widetilde{W}(t). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Usando Lema de Itô y omitiendo los parámetros de $C(t, x)$

$$dC(t, S(t)) = \left(C_t + (r_f - r_d)S(t)C_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)C_{xx} \right) dt + \sigma C_x S(t)d\widetilde{W}(t). \tag{1.36}$$

Por lo tanto, sustituyendo (1.35) y (1.36) en (1.34) e igualando los términos $d\widetilde{W}(t)$, obtenemos que

$$a(t) = e^{-r_f t}C_x(t, S(t)). \tag{1.37}$$

A la ecuación (1.37) se le llama *delta hedging* y nos dice que la cantidad explícita de subyacente que tenemos que tener en cada instante es igual a la derivada parcial de $C(t, x)$ con respecto a la segunda entrada. Si mantenemos esta cantidad de subyacente en el portafolio y

$b(t) = e^{-r_d t}(C(t, S(t)) - a(t)e^{r_f t}S(t))$ unidades en la cuenta de mercado, podemos replicar el valor del derivado en cada instante. Ya sea realizando el cálculo directo de $C_x(t, S(t))$ o igualando la fórmula encontrada para el precio de una opción call de tipo de cambio $C(t, S(t))$ (1.27) con el valor del portafolio $V(t) = a(t)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ y despejando $a(t) = e^{-r_f t}C_x(t, S(t))$, obtenemos

$$C_x(t, S(t)) = e^{-r_f(T-t)}N(d_1), \quad (1.38)$$

Por otra parte, ya sea igualando los términos dt de las ecuaciones (1.35) y (1.36), o haciendo uso del Teorema de Feynman-Kac 1.2.3 y usando la dinámica del tipo de cambio bajo la medida de riesgo neutral $dS(t) = (r_d - r_f)S(t)dt + \sigma S(t)d\widetilde{W}(t)$ y la fórmula de valuación de riesgo neutral (1.26), obtenemos la famosa *ecuación diferencial parcial de Black-Scholes*

$$C_t(t, x) + (r_d - r_f)x C_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_{xx}(t, x) = r_d C(t, x) \quad (1.39)$$

y su solución con condición de frontera $C(T, x) = (x - K)_+$ nos da el precio de la opción call, el cual coincide con el obtenido anteriormente.

Capítulo 2

La Volatilidad

Originalmente, la volatilidad σ era el único parámetro del modelo de B-S que no se podía observar directamente en el mercado como sucede con la tasa de interés o precios del activo subyacente, por lo que necesitaba ser estimado a través de las demás variables observadas. Esta estimación depende del método que usemos para calcularla. Sin embargo, sin importar el método usado, se debe entender a la volatilidad como una medida de cuánto varía el precio del subyacente en el tiempo.

Así como la tasa de rendimiento de un bono nos habla indirectamente de su precio, la volatilidad nos habla del precio de una opción, entre más volátil sea el activo, más grande puede ser la ganancia que obtengamos al comprar la opción, y por lo tanto, el precio por adquirir esta opción debe ser mayor.

En este capítulo hablaremos de los diferentes métodos para calcular la volatilidad de opciones que fueron desarrollados desde un enfoque histórico. Este capítulo está basado principalmente en Derman [12], Fouque, Papanicolau y Sircar [15] y Musiela [23].

2.1. Volatilidad histórica

En su artículo original de 1973, Fischer Black y Myron Scholes [3] usaron precios históricos diarios del activo que van de 1966-1969 para estimar la volatilidad pero sugirieron que la eficacia del modelo radica en la habilidad de hacer buenas predicciones para la volatilidad.

De acuerdo con los supuestos de su modelo, tenemos que la distribución del subyacente bajo la medida de riesgo neutral está dada por

$$S(t+1) = S(t)e^X, \quad \text{con } X \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma\right).$$

Lo cual implica que si definimos $R_t = \log(S(t+1)/S(t))$, entonces

$$R_t \sim N\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma\right). \quad (2.1)$$

Definición 2.1.1 (Volatilidad histórica) *Definimos la volatilidad histórica como el estimador por máxima verosimilitud de (2.1), es decir, sea $S(t_1), \dots, S(t_n)$ una muestra aleatoria, entonces*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{t_i} - \bar{R}_t)^2, \quad \text{donde } \bar{R}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{t_i}. \quad (2.2)$$

Observación 2.1.1 *Es importante observar que los precios usados en la volatilidad histórica son medidos bajo \mathbb{P} , mientras que la distribución del subyacente se mide bajo $\tilde{\mathbb{P}}$. A pesar de esto, el método es consistente pues el cambio de medida sólo afecta la esperanza de la distribución del subyacente, mientras que la volatilidad se preserva bajo el cambio de medida.*

Para que la estimación por el método de máxima verosimilitud sea buena, requerimos de muestras muy grandes, lo cual podemos llevar acabo ya sea tomando observaciones diarias de muchos años atrás o incrementando la frecuencia de las observaciones en un día. Sin embargo, hay mucha evidencia empírica de que la volatilidad no es constante en el tiempo, por lo tanto, la volatilidad histórica es una técnica muy pobre para hacer predicciones de la volatilidad futura.

2.2. Volatilidad implícita

Como la volatilidad histórica no reproduce los precios de mercado con el modelo de B-S, la forma más natural de lograr esto es utilizar una volatilidad, la cual al introducir en la fórmula de B-S nos da los precios de mercado. De modo que la fórmula de B-S funge como traductor entre precios de mercado y niveles de volatilidad .

Definición 2.2.1 (Volatilidad implícita) *Considere una opción call europea a tiempo t con precio spot $S(t)$, strike K , vencimiento T y tasa de interés r . Sea $C(t, S(t), K, T, r, \sigma)$ el precio de esta call calculado con la fórmula de B-S y $C^M(t)$ el precio observado en mercado de esta misma opción. Definimos la volatilidad implícita $\hat{\sigma}(t)$ como la volatilidad que satisface*

$$C^M(t) = C(t, S(t), K, T, r, \hat{\sigma}(t)) \quad (2.3)$$

Observación 2.2.1 :

- Como la vega de una opción call $\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$ es monótona, la volatilidad implícita es única.
- Como la vega de un forward es 0, por paridad put-call, la volatilidad implícita $\hat{\sigma}(t)$ es la misma para un call y put con los mismos parámetros, lo cual significa que la volatilidad implícita es independiente del tipo de opción que se considere.

El objetivo de este método es aprovechar la fórmula cerrada del modelo de B-S y los precios observables de mercado para rescatar la volatilidad del mercado, razón por la cual es el método utilizado en la práctica.

Otro aspecto a destacar es que la ecuación (2.3) es no-lineal, por lo que no existe una fórmula cerrada para la volatilidad implícita y tenemos que recurrir a aproximar este valor usando métodos numéricos, por ejemplo, usando el método de *Newton-Raphson*.

2.3. La superficie de volatilidad

Durante los 90's, el índice Nikkei 225 de la bolsa de Tokio vivió una de sus rachas más prolongadas y dio origen a lo que se conocería como la *crisis asiática*. Si bien los derivados no fueron la principal causa de esta crisis, sí fueron un fuerte potenciador de esta. Durante esta década, los derivados exóticos se encontraban en su apogeo y cada día se creaban productos más complejos y difíciles de valorar.

A medida que el índice Nikkei continuaba creciendo, varios traders se cuestionaban sobre una posible burbuja, razón por la cual pactaban puts largos para protegerse ante una repentina caída del índice. Sin embargo, con el fin de que estas opciones resultaran baratas, se pactaban con strikes OTM, así en caso de que el índice se hundiera, las opciones podrían ser ejercidas.



Figura 2.1: Gráfica del Índice Nikkei 225 de la bolsa de Tokio.

Conforme las especulaciones sobre la burbuja y la estrategia se iban haciendo populares, la demanda de opciones put OTM provocó que el precio de estas opciones aumentara de modo que si se calculaba la volatilidad implícita para diferentes niveles de strike, las opciones OTM tenían más volatilidad implícita que las ATM o ITM. Antes de este momento, la volatilidad era constante para diferentes strikes y ahora que la volatilidad también dependía del strike, los

bancos descubrieron que sus productos estaban mal valuados. A esta corrección en la valuación de opciones mediante la incorporación del strike en el nivel de volatilidad implícita se le llamó *smile risk*.

Esta corrección capturaba mejor las preferencias de los participantes del mercado y también implicaba romper los supuestos de lognormalidad del modelo de Black-Scholes e incluir asimetría y kurtosis en la distribución del subyacente, quebrantando así los principales supuestos del modelo. Las modificaciones fueron validadas cuando el índice Nikkei perdió casi la mitad de su valor en 1997.

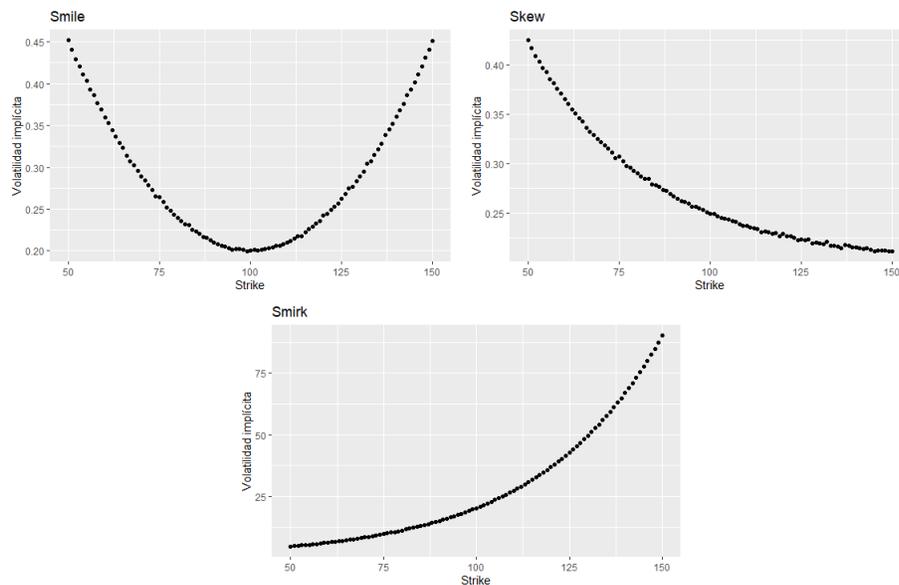


Figura 2.2: Gráfica de los diferentes tipos de smile de volatilidad con $K_{ATM} = 100$

Los diferentes tipos de curvas de la superficie de volatilidad reciben ciertos nombres. Fijemos el vencimiento T , cuando $\sigma(T, K)$ tiene un mínimo, se le llama *smile* y, por lo general el mínimo se encuentra cerca del strike ATM (K_{ATM}), cuando la pendiente de $\sigma(T, K)$ es negativa, se le llama *skew* y en el caso opuesto se le llama *smirk*. Los tres casos se muestran en la Figura 2.2. Es común que en el mercado de capitales el comportamiento sea un skew y en el mercado de tipo de cambio (FX) el comportamiento es mayormente smile, sin embargo, pueden presentarse diferentes movimientos en ambos mercados.

Si fijamos ahora el strike K , $\sigma(T, K)$ puede ser tanto creciente como decreciente dependiendo de las expectativas del mercado. La superficie de volatilidad cambia conforme transcurre el tiempo, sin embargo, la estructura general de la superficie tiende a preservarse [9]. El fenómeno de skew/smirk, también implica que la distribución de los rendimientos no es simétrica y está inclinada hacia las preferencias de los participantes del mercado. Sin embargo, el tipo de comportamiento de la superficie $\sigma(T, K)$ es diferente para cada tipo de subyacente (acciones, FX, tasas de interés, commodities, etc.) y también depende de la situación actual del mercado. Un ejemplo de superficie $\sigma(T, K)$ se vería como en la Figura 2.3.

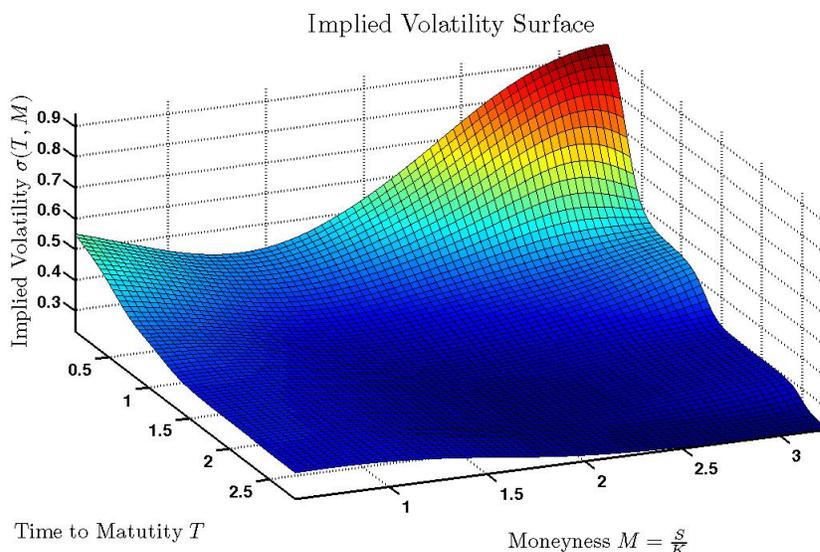


Figura 2.3: Superficie de volatilidad extraída de MathWorks

2.4. Volatilidad local

Con la superficie de volatilidad se logra corregir el modelo de Black-Scholes rescatando así las cotizaciones del mercado. El problema con este método es que sólo se cuenta con unas cuantas cotizaciones de mercado, mientras que el resto se debe obtener mediante otras técnicas como interpolaciones. Dupire (1994) e independientemente Derman-Kani (1996) propusieron una función determinista $\sigma(t, S(t))$ que dependiera del subyacente $S(t)$ y del tiempo t , sólo que

Derman-Kani lo hicieron de forma discreta con un *árbol binomial de volatilidad implícita*. A continuación presentamos el modelo de Dupire.

Definición 2.4.1 (Volatilidad local) *Sea una función $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que bajo la medida de riesgo neutral $\tilde{\mathbb{P}}$, la dinámica del subyacente es $dS(t) = rS(t)dt + \sigma(t, S(t))S(t)d\tilde{W}(t)$. Decimos que $\sigma(t, S(t))$ es un modelo de volatilidad local si el precio de una opción call $C(t; T, K)$ está dado por la fórmula de valuación de riesgo neutral, es decir,*

$$C(t; T, K) = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}}((S(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t).$$

Dupire demostró que bajo ciertas condiciones, si el precio de una opción call $C(t; T, K)$ es de clase $C^{1,2}$, es decir, con primera derivada parcial continua en T y segunda derivada parcial continua en K , entonces se satisface la EDP de Dupire

$$C_T(t; T, K) = -rKC_K(t; T, K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T, K)K^2C_{KK}(t; T, K), \quad (2.4)$$

con condición inicial $C(0; 0, K) = (S(0) - K)_+$.

Lo anterior implica que la volatilidad local está dada por

$$\sigma^2(T, K) = 2 \left(\frac{C_T(t; T, K) + rKC_K(t; T, K)}{K^2C_{KK}(t; T, K)} \right). \quad (2.5)$$

El modelo brinda una superficie suave y rescata muy bien los precios de mercado, además de que la implementación es fácil, sin embargo, se requiere del importante supuesto de que los precios de la opción son continuos y diferenciables en las variables K y T , lo cual no siempre es posible de aplicar, ya que en ocasiones sólo se cuenta con precios de opciones para ciertos strikes y vencimientos, por lo que la eficiencia del modelo depende de la liquidez del tipo de mercado. También requiere cierta estabilidad numérica para aproximar las derivadas parciales y en ocasiones necesitan ser recalibrados muy frecuentemente. A pesar de estas desventajas, es un punto de referencia muy importante en la práctica.

2.5. Volatilidad estocástica

Debido a que los métodos anteriores requieren de gran liquidez en el mercado para poder generar la superficie de volatilidad, una buena alternativa cuando no se cuenta con muchos precios de mercado es generar observaciones a través de un modelo estocástico, lo cual nos lleva al método de volatilidad estocástica.

Antes de proseguir con nuestro estudio de la volatilidad estocástica, mencionaremos algunas de las características que se presentan en la mayoría de datos empíricos de diversos instrumentos financieros, como lo son acciones, tipo de cambio, índices y commodities. De acuerdo con gran variedad de autores, entre ellos Hull [19] Douglas-Heston [13], McNeil et al. y Wang et al. [29], estas observaciones son cada vez más recurrentes en el mercado que han sido elevadas al nivel de considerarse “hechos” y se les conoce como *hechos estilizados*. Estos suelen ocurrir incluso cambiando el intervalo de tiempo de las observaciones, ya sea con datos mensuales, semanales e incluso con observaciones intradía. A continuación enunciamos los hechos estilizados.

- Cluster de volatilidad: La volatilidad no es constante en el tiempo y los periodos de alta volatilidad van alternados con periodos de baja volatilidad.
- Colas pesadas en la distribución de los rendimientos: Los eventos extremos de cambios en los rendimientos de los activos tienen una probabilidad más alta que la implicada por el supuesto de lognormalidad.
- Correlación entre precios y volatilidad: Principalmente en el mercado de acciones, cuando los precios de los activos son altos, la volatilidad es baja y viceversa. Sin embargo, dependiendo del tipo de mercado esta correlación puede ser positiva o negativa.
- Reversión a la media en la volatilidad: En promedio, la volatilidad siempre tiende a estabilizarse y regresar a un valor fijo.

Estás características de la volatilidad del mercado, motivaron a suponer que la volatilidad $\sigma(t)$ ahora sigue un proceso estocástico, lo cual puede reproducir las características antes mencionadas. Es por esto que se han desarrollado una inmensa cantidad de modelos de este tipo. Sin embargo, muchos de estos son con fines meramente académicos y sólo unos cuantos encuentran aplicaciones en el mundo real.

Definición 2.5.1 (Volatilidad estocástica) *Un modelo de volatilidad estocástica supone que el subyacente sigue la difusión*

$$dS(t) = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t)S(t)dW_1(t) \quad (2.6)$$

y la volatilidad $\sigma(t)$ sigue otra difusión

$$d\sigma(t) = a(t, \sigma(t))dt + b(t, \sigma(t))dW_2(t), \quad (2.7)$$

de donde $\{W_1(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{W_2(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ son dos movimientos Brownianos definidos en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$, con correlación $\rho \in [-1, 1]$ entre ambos movimientos Brownianos, es decir, $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$.

Al suponer que la volatilidad sigue una difusión, sus valores pueden alcanzar valores muy altos o bajos de forma aleatoria, lo cual explica el fenómeno del clustering y las colas pesadas. También con el parámetro ρ , podemos explicar el fenómeno de correlación entre la volatilidad y el subyacente, lo cual a su vez nos servirá para modelar el efecto smile. Por lo que la volatilidad estocástica no sólo corrige el supuesto de Black-Scholes, sino que describe mejor la complejidad del mercado. Más adelante retomaremos el análisis de los parámetros de una forma más detallada.

Sin embargo, estos modelos también tienen muchos inconvenientes. Al tener dos difusiones, es posible usar el Teorema de Girsanov para cambiar de la medida real \mathbb{P} a la medida de riesgo

neutral $\tilde{\mathbb{P}}$, con lo cual cambiamos los drifts de ambas difusiones a

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma(t)S(t)d\tilde{W}_1(t), \quad (2.8)$$

$$d\sigma(t) = \tilde{a}(t, \sigma(t)) + b(t, \sigma(t))d\tilde{W}_2(t), \quad (2.9)$$

a través de la derivada de Radon-Nikodym definida por

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E} \left(\int_0^T \frac{r - \mu(u, S(u))}{\sigma(u)} dW_1(u) \right) \mathcal{E} \left(\int_0^T \frac{\tilde{a}(u, S(u)) - a(u, S(u))}{b(u, S(u))} dW_2(u) \right), \quad (2.10)$$

con

$$\mathcal{E} \left(\int_0^T f(u) dW(u) \right) = \exp \left(\int_0^T f(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^T f^2(u) du \right),$$

donde la elección del drift \tilde{a} en la dinámica de la volatilidad es independiente de la elección del drift r en la dinámica del subyacente. Esto significa que podemos encontrar muchas medidas de riesgo neutral que hacen al subyacente descontado martingala, lo cual implica que la medida de riesgo neutral no es única y por lo tanto, el mercado no es completo, es decir, no podemos crear el portafolio perfecto que replique el valor del derivado.

Algunos ejemplos de modelos para la volatilidad son

$$d\sigma(t) = \kappa(\nu - \sigma(t))dt + \theta dW(t),$$

$$d\sigma(t) = \kappa\sigma(t)(\nu - \sigma(t))dt + \theta\sigma(t)dW(t),$$

$$d\sigma(t) = \kappa\sigma(t)dt + \theta\sigma(t)dW(t),$$

$$d\sigma(t) = \sigma^{-1}(t)(\nu - \kappa\sigma^2(t))dt + \theta dW(t),$$

$$d\sigma^2(t) = \kappa(\nu - \sigma^2(t))dt + \theta\sigma(t)dW(t).$$

Sin embargo, el segundo mayor inconveniente de estos modelos es hacer consistente los resultados del modelo de volatilidad estocástica con la superficie de volatilidad implícita observada en el mercado. Y por último, de la gran variedad de modelos, sólo unos cuantos cuentan con

fórmulas cerradas para valuar opciones o distribuciones conocidas, lo cual ayuda al momento de estimar los parámetros del modelo. Por lo anterior, sólo mencionaremos los modelos más usados en la práctica.

2.5.1. El modelo Heston

Este modelo fue publicado por Heston S. (1993) y se trata de un modelo de volatilidad estocástica no basado en la fórmula de B-S, donde la volatilidad sigue un proceso Cox-Ingersoll-Ross (CIR) que está correlacionado con el precio del subyacente y la gran ventaja de este modelo es que se obtiene una solución cerrada para el precio de una opción call europea.

El modelo bajo una medida de riesgo neutral $\tilde{\mathbb{P}}$ sigue la siguiente dinámica

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)d\tilde{W}_1(t), \\ dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}d\tilde{W}_2(t), \end{aligned}$$

donde $\{\tilde{W}_1(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{\tilde{W}_2(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ son dos movimientos Brownianos correlacionados con coeficiente de correlación $\rho \in [-1, 1]$ definidos en el mismo espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$ y la volatilidad está dada por $\sqrt{V(t)}$.

La ventaja de poseer una fórmula cerrada para el precio de una opción hace de este modelo uno de los modelos de volatilidad estocástica más usados en la práctica. Más detalles sobre este modelo serán explicados en el siguiente capítulo.

2.5.2. El modelo SABR

Otro de los modelos de volatilidad estocástica más usados en la práctica es el modelo SABR (*Stochastic alpha beta rho*) propuesto por Hagan et al. (2002). El objetivo de este modelo es corregir el efecto presente en cualquier modelo de volatilidad local, en los cuales, cuando el precio del subyacente decrece, el modelo de volatilidad local predice que el smile de volatilidad aumenta y viceversa, lo cual en el mercado no siempre sucede así y ocasiona que el delta-hedging

y vega-hedging sea incluso peor que en el modelo de B-S [17].

En este modelo, en lugar de modelar el precio del subyacente, se modela su precio forward $F(t)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}dF(t) &= \alpha(t)F^\beta(t)d\widetilde{W}_1(t), \\d\alpha(t) &= \nu\alpha(t)d\widetilde{W}_2(t),\end{aligned}$$

con $\{\widetilde{W}_1(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{\widetilde{W}_2(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ movimientos Brownianos correlacionados con coeficiente de correlación $\rho \in [-1, 1]$ definidos en el mismo espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$.

Puede ser visto como una extensión del modelo CEV (*Constant Elasticity of Variance*) y tiene la ventaja de tener una fórmula de aproximación cerrada para la superficie de volatilidad, por lo que el modelo se calibra usando volatilidades implícitas de mercado y así se puede replicar el efecto smile, lo cual es su mayor ventaja y es en lo que se basa su popularidad, para más detalles ver al artículo original [17].

Capítulo 3

El Modelo Heston de Volatilidad Estocástica

Como se mencionó anteriormente, la ventaja de los modelos de volatilidad estocástica es que cumplen los hechos estilizados del mercado, como cluster de volatilidad, colas pesadas en los rendimientos, reversión a la media en la volatilidad y correlación entre la volatilidad y el precio del subyacente. En este capítulo, elegimos el modelo Heston por la gran ventaja de poseer una fórmula semi-analítica para el precio de una opción de tipo call. Este capítulo está principalmente basado en el artículo original de Heston [18], así como en Shreve [25] y Douglas-Heston [13], y mostraremos detalladamente la deducción del modelo.

3.1. El modelo Cox-Ingersoll-Ross

Se trata de un modelo publicado en 1985 por Cox-Ingersoll-Ross (CIR) aplicado originalmente para modelar la tasa corta de interés mediante un proceso de reversión a la media proporcional a nivel. Este modelo es importante en este trabajo porque se usa para la dinámica de la volatilidad en el modelo Heston y es por esto que demostraremos sus propiedades más importantes.

3.1.1. Construcción

El proceso CIR puede construirse como una suma de procesos de Ornstein-Uhlenbeck, el cual introducimos a continuación.

Definición 3.1.1 (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck) Sean W_1, \dots, W_d movimientos Brownianos independientes y $b, \sigma > 0$. Para cada $j = 1, \dots, d$, definimos el proceso de Ornstein-Uhlenbeck $\{X_j(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ como la solución de la EDE

$$dX_j(t) = -\frac{b}{2}X_j(t)dt + \frac{\sigma}{2}dW_j(t). \quad (3.1)$$

Dado que $\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 dt\right) < \infty$, el proceso X_j tiene variación cuadrática finita y está bien definido para cada $j = 1, \dots, d$. Ahora usando (3.1) y aplicando regla del producto de Itô a $e^{\frac{b}{2}t}X_j(t)$, se sigue

$$\begin{aligned} d(e^{\frac{b}{2}t}X_j(t)) &= e^{\frac{b}{2}t}dX_j(t) + X_j(t)de^{\frac{b}{2}t} \\ &= e^{\frac{b}{2}t}\left(-\frac{b}{2}X_j(t)dt + \frac{\sigma}{2}dW_j(t)\right) + \frac{b}{2}e^{\frac{b}{2}t}X_j(t)dt \\ &= \frac{\sigma}{2}e^{\frac{b}{2}t}dW_j(t). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t y despejando $X_j(t)$ concluimos

$$X_j(t) = e^{-\frac{b}{2}t}X_j(0) + \frac{\sigma}{2}e^{-\frac{b}{2}t}\int_0^t e^{\frac{b}{2}u}dW_j(u). \quad (3.2)$$

Definamos $I_j(t) = \int_0^t e^{\frac{b}{2}u}dW_j(u)$. Dado que $\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\frac{b}{2}u}\right)^2 du\right) < \infty$, vemos que la integral de Itô $I_j(t)$ está bien definida y sigue una distribución normal con media 0 y por isometría de Itô

$$\begin{aligned} \text{Var}(I_j(t)) &= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t e^{\frac{b}{2}u}dW_j(u)\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(e^{\frac{b}{2}u}\right)^2 du\right) \\ &= \frac{1}{b}(e^{bt} - 1). \end{aligned}$$

Así obtenemos que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck $\{X_j(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ tiene una distribución normal con

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_j(t)) &= e^{-\frac{b}{2}t} X_j(0) \\ \text{Var}(X_j(t)) &= \text{Var}\left(\frac{\sigma}{2} e^{-\frac{b}{2}t} I_j(t)\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{4} e^{-bt} \text{Var}(I_j(t)) \\ &= \frac{\sigma^2}{4b} (1 - e^{-bt}).\end{aligned}$$

Ahora definamos

$$V(t) = \sum_{j=1}^d X_j^2(t), \quad W(t) = \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{X_j(u)}{\sqrt{V(u)}} dW_j(u). \quad (3.3)$$

Como $X_j(t)$ tiene trayectorias continuas, entonces $W(t)$ tiene trayectorias continuas. Además $W(0) = 0$ y

$$\begin{aligned}dW(t)dW(t) &= \left(\sum_{j=1}^d \frac{X_j(t)}{\sqrt{V(t)}} dW_j(t)\right) \left(\sum_{j=1}^d \frac{X_j(t)}{\sqrt{V(t)}} dW_j(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{X_j^2(t)}{V(t)} dW_j(t)dW_j(t) + \sum_{j \neq i} \frac{X_j(t)X_i(t)}{V(t)} dW_j(t)dW_i(t).\end{aligned}$$

Al ser $W_j(t)$, $j = 1, \dots, d$, movimientos Brownianos independientes, es decir, $dW_j(t)dW_i(t) = 0$ para $j \neq i$, obtenemos

$$dW(t)dW(t) = \sum_{j=1}^d \frac{X_j^2(t)}{V(t)} dW_j(t)dW_j(t) = \frac{1}{V(t)} \sum_{j=1}^d X_j^2(t) dt = \frac{1}{V(t)} V(t) dt = dt.$$

El Teorema de Caracterización de Lévy [A.0.2](#) nos dice que $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es un movimiento Browniano. Ahora usando Lema de Itô para la función x^2 y [\(3.1\)](#)

$$\begin{aligned} dX_j^2(t) &= 2X_j(t)dX_j(t) + \frac{1}{2}2dX_j(t)dX_j(t) \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{4} - bX_j^2(t) \right) dt + \sigma X_j(t)dW_j(t). \end{aligned}$$

Sumando de $j = 1, \dots, d$ y por definición de $V(t)$ y definición de $W(t)$ [\(3.3\)](#)

$$\begin{aligned} dV(t) &= \sum_{j=1}^d dX_j^2(t) \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\frac{\sigma^2}{4} - bX_j^2(t) \right) dt + \sum_{j=1}^d \sigma X_j(t)dW_j(t) \\ &= (a - bV(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW(t), \end{aligned}$$

con $a = \frac{d\sigma^2}{4}$.

Por lo tanto, el proceso CIR es construido a partir de la suma del cuadrado de procesos de Ornstein-Uhlenbeck.

Definición 3.1.2 *A la solución¹ $\{V(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ de la ecuación diferencial estocástica*

$$dV(t) = (a - bV(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW(t) \tag{3.4}$$

se le llama proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

3.1.2. Distribución

De acuerdo con la sección pasada, si definimos $X_j(0) = \sqrt{\frac{V(0)}{d}}$, obtuvimos que $X_j(t) \sim N(\mu(t), v(t))$ con

$$\mu(t) = e^{-\frac{b}{2}t} \sqrt{\frac{V(0)}{d}} \quad \text{y} \quad v(t) = \frac{\sigma^2}{4b}(1 - e^{-bt}).$$

¹La solución fuerte y única del proceso CIR está garantizada por la condición de Yamada-Watanabe, sin embargo, dichos resultados se escapan del objetivo de este trabajo. Para mayor detalle se puede consultar Karatzas y Shreve[\[20\]](#) o Kloeden y Platen [\[21\]](#)

Como $W_j(t)$ es independiente de $W_i(t)$, entonces $X_j(t)$ es independiente de $X_i(t)$, para $j \neq i$, de modo que $V(t)$ es una suma del cuadrado de variables aleatorias normales e idénticamente distribuidas, lo cual implica que $V(t)$ tiene una distribución χ^2 no central, donde el término no central proviene del hecho de que $\mu(t) \neq 0$

Esta distribución se puede escribir de la siguiente manera

$$V(t) \sim \frac{\sigma^2(1 - e^{-bt})}{2b} Y,$$

donde Y tiene una distribución χ^2 no central con parámetro de no centralidad λ y ν grados de libertad dados por

$$\lambda = \frac{4be^{-bt}V(0)}{(1 - e^{-bt})\sigma^2}, \quad \nu = \frac{4a}{\sigma^2}.$$

3.1.3. Reversión a la media

El término de reversión a la media se refiere a que a medida que avanza el tiempo, puede que el proceso se aleje de este valor pero siempre tiende a estabilizarse alrededor de este.

Para probar esto reescribiremos la dinámica de $V(t)$ dada por (3.4) de la siguiente manera

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW(t), \tag{3.5}$$

donde $\kappa = b$ y $\theta = a/b$.

Usando regla del producto de Itô para la función $e^{\kappa t}V(t)$

$$\begin{aligned} d(e^{\kappa t}V(t)) &= e^{\kappa t}dV(t) + V(t)de^{\kappa t} \\ &= \theta\kappa e^{\kappa t}dt + \sigma e^{\kappa t}\sqrt{V(t)}dW(t). \end{aligned}$$

Integrando y despejando $V(t)$

$$V(t) = e^{-\kappa t}V(0) + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{V(s)} dW(s).$$

Tomando esperanza y usando el hecho de que las integrales de Itô tienen media cero, obtenemos

$$\mathbb{E}(V(t)) = e^{-\kappa t}V(0) + \theta(1 - e^{-\kappa t}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \theta.$$

De la expresión anterior, observamos que sin importar cual sea la volatilidad σ y el valor inicial de $V(0)$, a medida que el tiempo crece, el proceso $V(t)$ convergerá en media al parámetro θ , de ahí que a $\theta = a/b$ se le llame parámetro de reversión a la media y $\kappa = b$ es el parámetro de velocidad de convergencia a la media, si κ es grande, $V(t)$ convergerá más rápidamente a θ .

Usando la misma técnica, podemos calcular el segundo momento de $V(t)$ y con esto obtener la varianza. La varianza está dada por

$$\text{Var}(V(t)) = \frac{\sigma^2 e^{-\kappa t}}{\kappa} V(0)(1 - e^{-\kappa t}) + \frac{\theta \sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa t})^2,$$

en particular

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(V(t)) = \frac{\theta \sigma^2}{2\kappa}.$$

3.1.4. Positividad

Una de las cualidades más importantes del modelo CIR es que el modelo siempre es no negativo y bajo ciertas condiciones, el proceso es estrictamente positivo. Esto es ideal cuando se está modelando una tasa de interés² o una volatilidad (como en el caso del modelo Heston).

Intuitivamente de la dinámica de $V(t)$ con $a, b > 0$

$$dV(t) = (a - bV(t))dt + \sigma \sqrt{V(t)} dW(t).$$

²Cabe mencionar que en el panorama actual, varios países cuentan con tasas de interés negativas, por lo que este modelo ya no sería aplicable para modelar esas tasas.

Observamos que si el proceso $V(t)$ se aproxima a 0, el término de la volatilidad $\sigma\sqrt{V(t)}$ también se aproxima a 0, lo que produce que la volatilidad desaparezca y que la dinámica dependa únicamente del drift $a - bV(t)$, la cual se aproxima a a y por ser positivo este parámetro hace que el procesos vuelva a subir, alejándose de la región negativa.

Para demostrar la positividad del modelo CIR, nos basaremos en la demostración de Gikhman [16], la cual usa el siguiente Lema sin demostración³.

Lemma 3.1.1 (Desigualdad de Gronwall) *Sea $f : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que*

$$0 \leq f(t) \leq A + B \int_0^t f(s) ds,$$

para $t \in [0, T]$ y $A, B \geq 0$. Entonces

$$f(t) \leq Ae^{Bt}.$$

Teorema 3.1.1 *Sea $a, b, \sigma > 0$ y considere el proceso CIR $\{V(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ como la solución de la ecuación diferencial estocástica*

$$dV(t) = (a - bV(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW(t),$$

con condición inicial $V(0) = v$.

Además considere $\tau_0^v = \inf \{t \geq 0 \mid V(t) = 0\}$ el primer momento en que el proceso toca el origen empezando en el punto v . Si $v > 0$ y se satisface la condición de Feller $2a > \sigma^2$, entonces

$$\mathbb{P}(\tau_0^v = \infty) = 1,$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos $\tau_\epsilon^v = \inf \{t \geq 0 \mid V(t) \leq \epsilon\}$. Observemos que

$$\mathbb{P}(\tau_0^v = \infty) = 1 - \mathbb{P}(\tau_0^v \leq t) = 1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\tau_\epsilon^v \leq t),$$

³Para su demostración ver ejercicio 28 del Capítulo 18 de Spivak [27].

para alguna $t \geq 0$ fija. Bastará demostrar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\tau_\epsilon^v \leq t) = 0$$

Tomemos $\epsilon, t > 0$ y definamos $m = \frac{2a - \sigma^2}{\sigma^2}$, como $2a > \sigma^2$, entonces $m > 0$. Usando Lema de Itô para la función $f(x) = x^{-m}$ y usando la dinámica de $V(t)$

$$\begin{aligned} dV^{-m}(t) &= -mV^{-(m+1)}(t)dV(t) + \frac{1}{2}m(m+1)V^{-(m+2)}dV(t)dV(t) \\ &= \left(bmV^{-m}(t) + \left(\frac{\sigma^2}{2}(m+1) - a \right) m \right) dt - \sigma m V^{-(m+\frac{1}{2})}(t)dW(t). \end{aligned}$$

Por definición de m , es fácil observar que $\frac{\sigma^2}{2}(m+1) - a = 0$, de modo que

$$dV^{-m}(t) = bmV^{-m}(t)dt - \sigma m V^{-(m+\frac{1}{2})}(t)dW(t).$$

Ahora, integrando de 0 a $t \wedge \tau_\epsilon^v$ y usando cambio de variable

$$\begin{aligned} V^{-m}(t \wedge \tau_\epsilon^v) &= v^{-m} + bm \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon^v} V^{-m}(s)ds - m\sigma \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon^v} V^{-(m+\frac{1}{2})}(s)dW(s) \\ &= v^{-m} + bm \int_0^t V^{-m}(s \wedge \tau_\epsilon^v)ds - m\sigma \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon^v} V^{-(m+\frac{1}{2})}(s)dW(s). \end{aligned}$$

Como $v, \epsilon > 0$, entonces $V(s \wedge \tau_\epsilon^v) > 0$ casi seguramente para toda $s \in (0, t)$. Además como las integrales de Itô tienen media cero, se tiene que

$$\mathbb{E}(V^{-m}(t \wedge \tau_\epsilon^v)) \leq v^{-m} + bm \int_0^t \mathbb{E}(V^{-m}(s \wedge \tau_\epsilon^v))ds.$$

Usando la desigualdad de Grönwall

$$\mathbb{E}(V^{-m}(t \wedge \tau_\epsilon^v)) \leq v^{-m} e^{bmt}.$$

Ahora, usando la desigualdad de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_\epsilon^v \leq t) &= \mathbb{P}(V(\tau_\epsilon^v) \leq \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(V(t \wedge \tau_\epsilon^v) \leq \epsilon) \\
&= \mathbb{P}(V^{-m}(t \wedge \tau_\epsilon^v) \geq \epsilon^{-m}) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(V^{-m}(t \wedge \tau_\epsilon^v))}{\epsilon^{-m}} && (\text{como } V(t \wedge \tau_\epsilon^v) > 0 \text{ y } m > 0) \\
&\leq \epsilon^m \mathbb{E}(V(t \wedge \tau_\epsilon^v)) \\
&\leq \epsilon^m v^{-m} e^{bmt}
\end{aligned}$$

Como $m > 0$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^m = 0$, por lo que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_\epsilon^v \leq t) = 0.$$

■

3.2. El modelo Heston

Procedemos con el principal modelo a tratar en este trabajo. Como se mencionó anteriormente el modelo Heston se trata de un modelo de volatilidad estocástica no basado en la fórmula de Black-Scholes, donde la volatilidad sigue un proceso CIR, y nos brinda una solución cerrada para el precio de un call europeo.

El modelo supone que el subyacente sigue la siguiente dinámica estocástica bajo la medida de riesgo neutral $\tilde{\mathbb{P}}$

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)d\tilde{W}_1(t), \quad (3.6)$$

donde r es la tasa libre de riesgo, $\{\tilde{W}_1(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es un movimiento Browniano y la volatilidad

$\sqrt{V(t)}$ sigue un proceso CIR (a través del proceso varianza $V(t)$)

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}d\widetilde{W}_2(t), \quad (3.7)$$

donde $\{\widetilde{W}_2(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es otro movimiento Browniano correlacionado bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ tal que $d\widetilde{W}_1(t)d\widetilde{W}_2(t) = \rho dt$, $\rho \in [-1, 1]$ ⁴. Recordando la sección pasada, θ es el término de reversión a la media de la volatilidad, κ es la velocidad de convergencia a θ y σ es la volatilidad de la volatilidad. Además suponemos que $\theta, \kappa, \sigma > 0$ y que se satisface la condición de Feller $2\kappa\theta > \sigma^2$ para asegurar que la volatilidad siempre es positiva.

Bajo este modelo es posible calcular el valor de una opción call $C(t, S(t), V(t))$ con la siguiente solución semi-analítica

$$C(t, s, v) = sP_1(t, \log(s), v) - Ke^{-r(T-t)}P_2(t, \log(s), v), \quad (3.8)$$

donde para $j = 1, 2$

$$P_j(t, x, v; \log(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\phi \log(K)} f_j(t, x, v; \phi)}{i\phi} \right\} d\phi, \quad (3.9)$$

$$f_j(t, x, v; \phi) = e^{C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi)v + i\phi x}, \quad (3.10)$$

$$C_j(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2 \log \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right], \quad (3.11)$$

$$D_j(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right), \quad (3.12)$$

con

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j},$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$$

⁴La existencia y unicidad del sistema de EDEs del modelo Heston se escapa de los objetivos de este trabajo pero se puede consultar en Fallah y Mehrdoust [14]

y

$$u_1 = 1/2, \quad u_2 = -1/2, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda.$$

La integral compleja de (3.9) no tiene solución analítica pero puede calcularse con la ayuda de métodos numéricos y al parámetro λ se le llama *precio por riesgo de volatilidad* (*price of volatility risk*) y representa el nivel de aversión al riesgo (por lo general, este parámetro se toma como 0).

A continuación, explicaremos a detalle cómo obtener las fórmulas mencionadas para el caso más simple de valorar un call sobre un activo que no paga dividendos.

3.2.1. Deducción de la fórmula

El desarrollo del modelo Heston está fuertemente basado en una generalización del Teorema de Feynman-Kac 1.2.3, el cual enunciamos a continuación. Con el fin de simplificar la notación, se omitirán los parámetros de las funciones en las EDP cuando sea necesario.

Teorema 3.2.1 (Teorema Multidimensional de Feynman-Kac) Sean $\{W_1(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{W_2(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ dos movimientos Brownianos correlacionados con $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$, $\rho \in [-1, 1]$ y considere las siguientes EDE

$$dS(u) = \beta_1(u, S(u), V(u))du + \gamma_{11}(u, S(u), V(u))dW_1(u) + \gamma_{12}(u, S(u), V(u))dW_2(u),$$

$$dV(u) = \beta_2(u, S(u), V(u))du + \gamma_{21}(u, S(u), V(u))dW_1(u) + \gamma_{22}(u, S(u), V(u))dW_2(u),$$

con condiciones iniciales $S(t) = s$ y $V(t) = v$. Sea $h(s, v)$ función Borel medible y para $t \in \mathbb{T}$ definimos las funciones

$$g(t, s, v) = \mathbb{E}(h(S(T), V(T)) \mid S(t) = s, V(t) = v),$$

$$f(t, s, v) = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}h(S(T), V(T)) \mid S(t) = s, V(t) = v).$$

Entonces $\{g(t, S(t), V(t))\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{e^{-rt}f(t, S(t), V(t))\}_{t \in \mathbb{T}}$ son martingalas y satisfacen las EDP

$$g_t + \beta_1 g_s + \beta_2 g_v + \left(\frac{1}{2} \gamma_{11}^2 + \rho \gamma_{11} \gamma_{12} + \frac{1}{2} \gamma_{12}^2 \right) g_{ss} \\ + (\gamma_{11} \gamma_{21} + \rho \gamma_{11} \gamma_{22} + \rho \gamma_{12} \gamma_{21} + \gamma_{12} \gamma_{22}) g_{sv} + \left(\frac{1}{2} \gamma_{21}^2 + \rho \gamma_{21} \gamma_{22} + \frac{1}{2} \gamma_{22}^2 \right) g_{vv} = 0,$$

$$f_t + \beta_1 f_s + \beta_2 f_v + \left(\frac{1}{2} \gamma_{11}^2 + \rho \gamma_{11} \gamma_{12} + \frac{1}{2} \gamma_{12}^2 \right) f_{ss} \\ + (\gamma_{11} \gamma_{21} + \rho \gamma_{11} \gamma_{22} + \rho \gamma_{12} \gamma_{21} + \gamma_{12} \gamma_{22}) f_{sv} + \left(\frac{1}{2} \gamma_{21}^2 + \rho \gamma_{21} \gamma_{22} + \frac{1}{2} \gamma_{22}^2 \right) f_{vv} = rf,$$

con condiciones de frontera $g(T, s, v) = f(T, s, v) = h(s, v)$ para toda $s, v \in \mathbb{R}$.

Así mismo, dadas las EDP anteriores, las soluciones son las definidas por f y g .

Una vez enunciado el Teorema Multidimensional de Feynman-Kac (MFK) 3.2.1, reescribimos la dinámica del proceso de la volatilidad (3.7) bajo la medida de riesgo neutral $\tilde{\mathbb{P}}$ de la siguiente forma

$$dV(t) = (a - bV(t))dt + \sigma \sqrt{V(t)} d\tilde{W}_2(t), \quad (3.13)$$

con $a = \kappa\theta$ y $b = \kappa + \lambda$

Sea $C(t, S(t), V(t))$ el precio a tiempo t de un call europeo con strike K y vencimiento T bajo la dinámica antes mencionada. Por lo tanto, nuestra fórmula de valuación de riesgo neutral nos dice que el precio del call es

$$C(t, s, v) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{r(T-t)}(S(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{r(T-t)}(S(T) - K)_+ | S(t) = s, V(t) = v). \quad (3.14)$$

Por no arbitraje sabemos que el call descontado $\{e^{-rt}C(t, S(t), V(t))\}_{t \in \mathbb{T}}$ es martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ y de acuerdo con el Teorema MFK 3.2.1, $C(t, s, v)$ satisface la EDP

$$C_t + rsC_s + (a - bv)C_v + \frac{1}{2}vs^2C_{ss} + \frac{1}{2}\sigma^2vC_{vv} + \sigma\rho svC_{sv} = rC, \quad (3.15)$$

con condiciones de frontera

$$C(T, s, v) = (s - K)_+ \quad \text{para toda } s \geq 0, v \geq 0, \quad (3.16)$$

$$C(t, 0, v) = 0 \quad \text{para toda } t \in \mathbb{T}, v \geq 0, \quad (3.17)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C_s(t, s, v) = 1 \quad \text{para toda } t \in \mathbb{T}, v \geq 0, \quad (3.18)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} C(t, s, v) = s \quad \text{para toda } t \in \mathbb{T}, v \geq 0. \quad (3.19)$$

La primera condición de frontera (3.16) es la condición del payoff de la opción call. La condición (3.17) es debido a que si el subyacente vale 0, la opción call está OTM, por lo cual no sería ejercida. La condición (3.18) implica que a medida que el subyacente crece, la delta de la opción se aproxima a 1. Finalmente, la condición (3.19) se debe a que si la volatilidad es muy grande, el precio por comprar la opción debería ser igual al precio del subyacente.

La solución de (3.15) nos da el precio de la opción call $C(t, s, v)$ bajo el modelo Heston. El truco para encontrar la fórmula semi-analítica es suponer que la solución es de la forma de Black-Scholes, es decir, suponer que existen funciones $f(t, s, v)$ y $g(t, s, v)$ tales que

$$C(t, s, v) = sf(t, \log(s), v) - Ke^{-r(T-t)}g(t, \log(s), v), \quad (3.20)$$

Calculando las parciales de $C(t, s, v)$ obtenemos

$$C_t = sf_t - Ke^{-r(T-t)}g_t - rKe^{-r(T-t)}g,$$

$$C_s = f + f_s - \frac{1}{s}Ke^{-r(T-t)}g_s,$$

$$C_v = sf_v - Ke^{-r(T-t)}g_v,$$

$$C_{vv} = sf_{vv} - Ke^{-r(T-t)}g_{vv},$$

$$C_{ss} = f_s + f_{ss} + \frac{1}{s^2}Ke^{-r(T-t)}g_s - \frac{1}{s^2}Ke^{-r(T-t)}g_{ss},$$

$$C_{sv} = f_v + f_{sv} - \frac{1}{s}Ke^{-r(t-t)}g_{sv}.$$

Por lo tanto, sustituyendo las parciales de $C(t, s, v)$ en (3.20), simplificando y separando las funciones f y g , la ecuación (3.15) se cumple si y sólo si

$$f_t + \left(r + \frac{1}{2}v\right) f_s + (a - bv + \rho\sigma v) f_v + \frac{1}{2}v f_{ss} + \rho\sigma v f_{sv} + \frac{1}{2}\sigma^2 v f_{vv} = 0, \quad (3.21)$$

$$g_t + \left(r - \frac{1}{2}v\right) g_s + (a - bv) g_v + \frac{1}{2}v g_{ss} + \rho\sigma v g_{sv} + \frac{1}{2}\sigma^2 v g_{vv} = 0. \quad (3.22)$$

Definamos $X(t) = \log(S(t))$ y usando Lema de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{1}{S(t)} dS(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2(t)} dS(t) dS(t) \\ &= \frac{1}{S(t)} \left(rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)d\tilde{W}_1(t) \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{S^2(t)} \left(\sqrt{V(t)} \right)^2 S^2(t)dt \\ &= \left(r \pm \frac{1}{2}V(t) \right) dt + \sqrt{V(t)}d\tilde{W}_1(t). \end{aligned}$$

Ahora, la segunda parte del truco consiste en aplicar el Teorema MFK 3.2.1 a

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(r + \frac{1}{2}V(t) \right) dt + \sqrt{V(t)}d\tilde{W}_1(t), \\ dV(t) &= (a - bV(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}d\tilde{W}_2(t), \end{aligned}$$

$$f(t, x, v) = \tilde{\mathbb{E}} \left(\mathbb{1}_{\{X(T) > \log(K)\}} \mid X(t) = x, V(t) = v \right), \quad (3.23)$$

de modo que f satisface la EDP (3.21) con condición de frontera $f(T, x, v) = \mathbb{1}_{\{x > \log(K)\}}$.

Análogamente, si aplicamos el mismo Teorema a

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(r - \frac{1}{2}V(t) \right) dt + \sqrt{V(t)}d\tilde{W}_1(t), \\ dV(t) &= (a - bV(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}d\tilde{W}_2(t), \end{aligned}$$

$$g(t, x, v) = \tilde{\mathbb{E}} \left(\mathbb{1}_{\{X(T) > \log(K)\}} \mid X(t) = x, V(t) = v \right), \quad (3.24)$$

obtenemos que g satisface la EDP (3.22) con condición de frontera $g(T, x, v) = \mathbb{1}_{\{x > \log(K)\}}$.

Por lo tanto, el precio del call $C(t, s, v)$ está dado por (3.20) donde f y g están dados por (3.23) y (3.24) y para la condición de frontera (3.16) se tiene

$$\begin{aligned}
C(T, s, v) &= sf(T, \log(s), v) - Kg(T, \log(s), v) \\
&= s\mathbb{1}_{\{\log(s) > \log(K)\}} - K\mathbb{1}_{\{\log(s) > \log(K)\}} \\
&= (s - K)\mathbb{1}_{\{s > K\}} \\
&= (s - K)_+.
\end{aligned}$$

De la misma forma se puede verificar que con las funciones f y g encontradas, también satisfacen las demás condiciones de frontera de $C(t, s, v)$.

Sin embargo, las funciones f y g no tienen una forma explícita y aquí es donde entra el tercer y último truco para llegar a la fórmula semi-analítica de $C(t, s, v)$. Utilizaremos las funciones características⁵ asociadas a f y g .

La función característica de f con $dX(t) = (r + \frac{1}{2}V(t))dt + \sqrt{V(t)}d\widetilde{W}_1(t)$ es

$$\varphi(t, x, v; \phi) = \widetilde{\mathbb{E}}(e^{i\phi X(T)} \mid X(t) = x, V(t) = v), \quad (3.25)$$

y la función característica de g con $dX(t) = (r - \frac{1}{2}V(t))dt + \sqrt{V(t)}d\widetilde{W}_1(t)$ es

$$\psi(t, x, v; \phi) = \widetilde{\mathbb{E}}(e^{i\phi X(T)} \mid X(t) = x, V(t) = v). \quad (3.26)$$

Una vez más, por el Teorema MFK 3.2.1, notamos que las funciones características φ y ψ

⁵Está técnica empleada por Heston de usar funciones características popularizó el uso de transformadas de Fourier en las finanzas cuantitativas y ahora es una herramienta relevante en la valuación de derivados.

satisfacen las mismas EDP de f y g , (3.21) y (3.22) respectivamente, con lo cual obtenemos

$$\varphi_t + \left(r + \frac{1}{2}v\right) \varphi_x + (a - bv + \rho\sigma v)\varphi_v + \frac{1}{2}v\varphi_{xx} + \rho\sigma v\varphi_{xv} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\varphi_{vv} = 0, \quad (3.27)$$

$$\psi_t + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \psi_x + (a - bv)\psi_v + \frac{1}{2}v\psi_{xx} + \rho\sigma v\psi_{xv} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\psi_{vv} = 0, \quad (3.28)$$

pero ahora la condición de frontera es $\varphi(T, x, v; \phi) = \psi(T, x, v; \phi) = e^{i\phi x}$. Para resolver (3.27) y (3.28), usaremos la ingeniosa técnica de suponer que la solución es de la forma

$$\varphi(t, x, v) = \exp\{A_1(T - t) + B_1(T - t)v + i\phi x\}, \quad (3.29)$$

$$\psi(t, x, v) = \exp\{A_2(T - t) + B_2(T - t)v + i\phi x\}. \quad (3.30)$$

Primero analizaremos (3.29). Usando cambio de variable se tiene que

$$\frac{\partial A_1(T - t)}{\partial t} = \frac{A_1(T - t)}{\partial(T - t)} \frac{\partial(T - t)}{\partial t} = -\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}$$

donde $\tau = T - t$ y análogo para B_1 . Por lo tanto, si denotamos $\frac{\partial A_1(\tau)}{\partial \tau} = A'_1$ y $\frac{\partial B_1(\tau)}{\partial \tau} = B'_1$, calculando las parciales de (3.29) obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (-A'_1 - B'_1 v)\varphi, & \varphi_x &= i\phi\varphi, \\ \varphi_v &= B_1\varphi, & \varphi_{xx} &= -\phi^2\varphi, \\ \varphi_{xv} &= i\phi B_1\varphi, & \varphi_{vv} &= B_1^2\varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo la solución propuesta (3.29) en la EDP (3.27)

$$\begin{aligned}
& \varphi_t + \left(r + \frac{1}{2}v\right) \varphi_x + (a - bv + \rho\sigma v)\varphi_v + \frac{1}{2}v\varphi_{xx} + \rho\sigma v\varphi_{xv} + \frac{1}{2}\sigma^2 v\varphi_{vv} = 0 \\
& \Leftrightarrow \\
& -A'_1 - B'_1 v + \left(r + \frac{1}{2}v\right) i\phi + (a - bv + \rho\sigma v)B_1 - \frac{1}{2}v\phi^2 + \rho\sigma v i\phi B_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 v B_1^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \\
& \left(\frac{1}{2}i\phi - \frac{1}{2}\phi^2 - (b - \rho\sigma - \rho\sigma\phi i)B_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 B_1^2 - B'_1\right)v + (ri\phi + aB_1 - A'_1) = 0 \cdot v + 0
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de v de ambos lados de la igualdad, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
B'_1 &= \frac{1}{2}i\phi - \frac{1}{2}\phi^2 - (b - \rho\sigma - \rho\sigma\phi i)B_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 B_1^2, \\
A'_1 &= ri\phi + aB_1.
\end{aligned}$$

Por último, la condición terminal en T es

$$\varphi(T, x, v; \phi) = e^{i\phi x} = \exp\{A_1(0) + B_1(0)v + i\phi x\},$$

lo cual nos sugiere que las condiciones finales para A_1 y B_1 deben ser $A_1(0) = 0$ y $B_1(0) = 0$.

Con esto no sólo hemos logrado simplificar la EDP de φ (3.27) en un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias donde la primer ecuación es independiente de la segunda, sino que la primera ecuación corresponde con la ecuación de Ricatti, cuya solución es bien conocida⁶ y la segunda ecuación se obtiene directamente de integrar la función obtenida en la primera ecuación.

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales, llegamos a que la solución de las funciones

⁶El desarrollo de la ecuación de Ricatti puede encontrarse en Douglas-Heston [13]

$A_1(\tau)$ y $B_2(\tau)$ está dada por

$$\begin{aligned} A_1(\tau; \phi) &= ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left((b - \rho\sigma - \rho\sigma\phi i + d_1)\tau - 2 \log \left(\frac{1 - h_1 e^{d_1\tau}}{1 - h_1} \right) \right), \\ B_1(\tau; \phi) &= \frac{b - \rho\sigma - \rho\sigma\phi i + d_1}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_1\tau}}{1 - h_1^{d_1\tau}} \right), \\ h_1 &= \frac{b - \rho\sigma - \rho\sigma\phi i + d_1}{b - \rho\sigma - \rho\sigma\phi i - d_1}, \\ d_1 &= \sqrt{(b - \rho\sigma - \rho\sigma\phi i)^2 + \sigma^2(\phi^2 - \phi i)}. \end{aligned}$$

Análogamente para ψ , sustituyendo (3.30) en la EDP (3.28) y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos que la solución de $A_2(\tau)$ y $B_2(\tau)$ está dada por

$$\begin{aligned} A_2(\tau; \phi) &= ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left((b - \rho\sigma\phi i + d_2)\tau - 2 \log \left(\frac{1 - h_2 e^{d_2\tau}}{1 - h_2} \right) \right), \\ B_2(\tau; \phi) &= \frac{b - \rho\sigma\phi i + d_2}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_2\tau}}{1 - h_2^{d_2\tau}} \right), \\ h_2 &= \frac{b - \rho\sigma\phi i + d_2}{b - \rho\sigma\phi i - d_2}, \\ d_2 &= \sqrt{(b - \rho\sigma\phi i)^2 + \sigma^2(\phi^2 + \phi i)}. \end{aligned}$$

El objetivo de moverse de f a su característica φ y de g a ψ , es usar el hecho de que la función característica siempre existe y después utilizamos un resultado de Gil-Pelaez (ver [13]) para expresar la densidad en términos de su función característica, es decir, f y g en términos de φ y ψ , obteniendo

$$\begin{aligned} f(t, \log(s), v; \log(K)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\phi \log(K)} \varphi(t, \log(s), v; \phi)}{i\phi} \right\} d\phi \\ g(t, \log(s), v; \log(K)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\phi \log(K)} \psi(t, \log(s), v; \phi)}{i\phi} \right\} d\phi \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos el precio del call europeo con strike K y vencimiento T bajo el modelo Heston. Para el precio de una opción put basta con utilizar la paridad put-call.

3.2.2. Análisis de los parámetros

Bajo el modelo Heston es posible calibrar los parámetros para poder replicar cualquiera de los diferentes tipos de smile. Así mismo, estos parámetros tienen efectos en la distribución de los rendimientos del subyacente que concuerdan con los hechos estilizados del mercado.

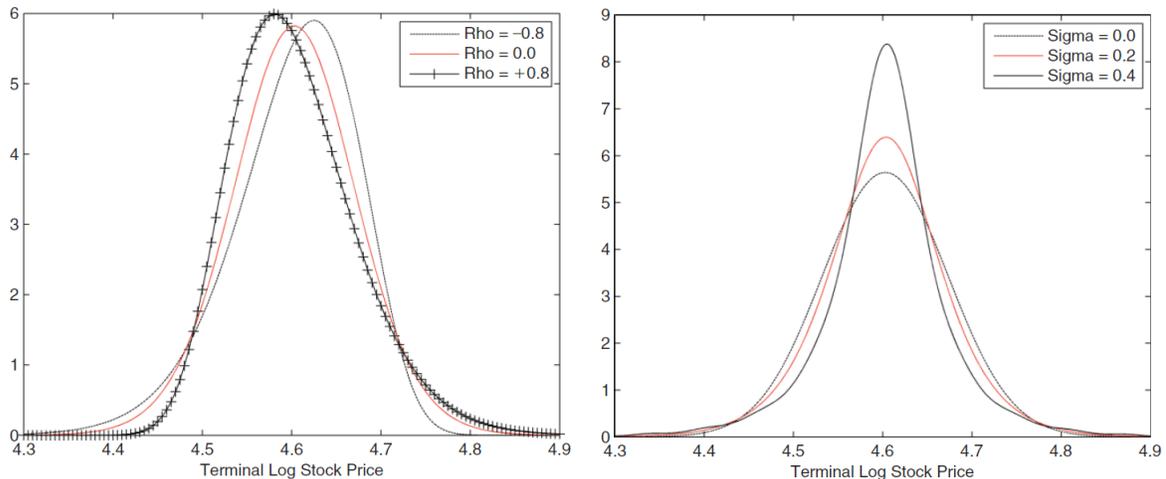


Figura 3.1: Efecto de los parámetros ρ y σ en la distribución del subyacente. Fuente [13]

Con el parámetro de correlación ρ se modela la asimetría (skewness) de la distribución del subyacente. Cuando $\rho < 0$, la volatilidad y el subyacente incrementan en direcciones opuestas, si el precio del subyacente sube, hay menos volatilidad y si el precio baja, la volatilidad aumenta; esto provoca que haya más oscilaciones en el subyacente cuando su precio baja y, por ende, la densidad de los rendimientos del subyacente esté inclinada hacia la derecha y la cola izquierda se vuelva más pesada. Por lo tanto, el precio de una opción call OTM sería más caro bajo el modelo Heston que en el modelo de B-S debido al peso de la cola izquierda en la densidad de los rendimientos, y lo opuesto ocurre cuando $\rho > 0$. Por otro lado, el parámetro de la volatilidad de la volatilidad σ controla la kurtosis de los rendimientos, con lo cual no sólo aumentamos una cola de la densidad de los rendimientos, sino que podemos aumentar la de ambas (Figura 3.2.2). Con esto logramos que el precio de una opción se ajuste mejor con la distribución de los rendimientos sin suponer log-normalidad.

En conjunto con el resto de los parámetros, es posible replicar correctamente el efecto smile. Los parámetros κ y σ controlan la concavidad (que tan abierto es el smile), θ controla la altura del smile y, finalmente, ρ controla la pendiente del smile, si $\rho > 0$, el efecto es smirk, si $\rho < 0$, el efecto es skew y si $\rho = 0$, el efecto es smile (Figura 3.2.2).

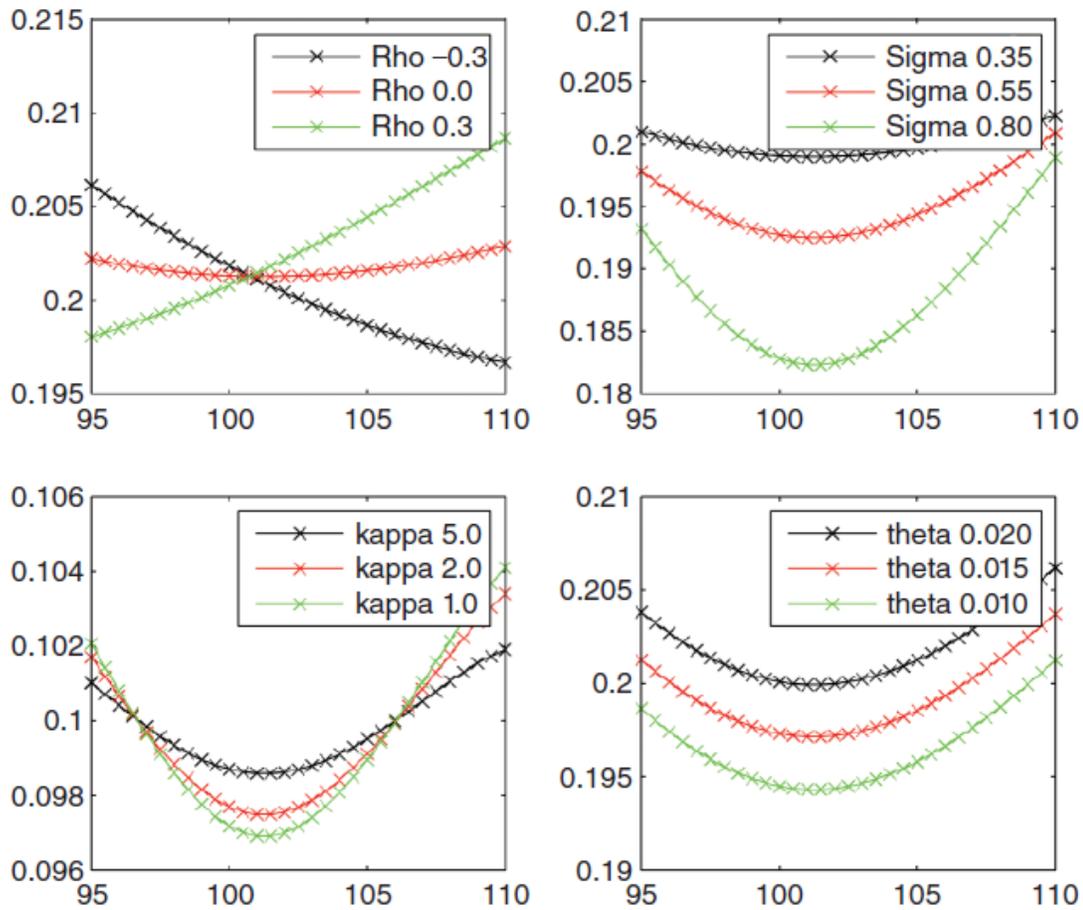


Figura 3.2: Efecto de los parámetros en el smile de volatilidad. Fuente [13]

Sin embargo, es importante mencionar que no hay fórmula cerrada para la volatilidad implícita $\sigma(T, K)$ bajo el modelo Heston, pero podemos utilizar el modelo de volatilidad local de Dupire, mencionada en el capítulo anterior

$$\sigma^2(T, K) = 2 \left(\frac{C_T(t; T, K) + rKC_K(t; T, K)}{K^2 C_{KK}(t; T, K)} \right).$$

La ventaja de esto es que debido a la fórmula semi-analítica del modelo Heston para una opción call $C(t, s, v)$, al calcular las parciales C_T, C_K y C_{KK} , encontramos una fórmula semi-analítica para la volatilidad local.

También es posible obtener el modelo de B-S como caso particular del modelo Heston al escoger $\sigma = 0$ y $\kappa = 0$, con lo cual se obtiene $dV(t) = 0$ o $V(t) = v_0$ para toda $t \geq 0$, de modo que el modelo Heston se convierte en

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + S(t)\sqrt{V(t)}dW(t) \\ &= rS(t)dt + S(t)\sqrt{v_0}dW(t) \\ &= rS(t)dt + \sigma_{BS}S(t)dW(t), \end{aligned}$$

donde $\sigma_{BS} = \sqrt{v_0}$ es el parámetro de la volatilidad del modelo de Black-Scholes. Por lo tanto, el parámetro de la volatilidad instantánea v_0 en el modelo Heston se puede rescatar de la volatilidad implícita de mercado.

Así mismo, es posible extender el modelo a tipo de cambio al considerar una tasa libre de riesgo extranjera r_f , donde ahora la dinámica del subyacente bajo la medida de riesgo neutral $\tilde{\mathbb{P}}$ es

$$\begin{aligned} dS(t) &= (r_d - r_f)S(t)dt + \sqrt{V(t)}d\tilde{W}_1(t), \\ dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}d\tilde{W}_2(t), \end{aligned}$$

y la fórmula queda muy parecida a la obtenida anteriormente

$$C(t, s, v) = se^{-r_f(T-t)}P_1(t, \log(s), v) - Ke^{-r_d(T-t)}P_2(t, \log(s), v), \quad (3.31)$$

donde para $j = 1, 2$

$$P_j(t, x, v; \log(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\phi \log(K)} f_j(t, x, v; \phi)}{i\phi} \right\} d\phi, \quad (3.32)$$

$$f_j(t, x, v; \phi) = e^{C_j(T-t; \phi) + D_j(T-t; \phi)v + i\phi x}, \quad (3.33)$$

$$C_j(\tau; \phi) = (r_d - r_f)\phi i\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2 \log \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right], \quad (3.34)$$

$$D_j(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right), \quad (3.35)$$

con

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j}, \quad (3.36)$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)} \quad (3.37)$$

y

$$u_1 = 1/2, \quad u_2 = -1/2, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda. \quad (3.38)$$

Para obtener el precio de la respectiva opción put usamos la *paridad put-call* (1.7).

Capítulo 4

Implementación y Calibración

A continuación mencionaremos algunas cuestiones prácticas sobre el mercado FX y sobre cómo calibrar el modelo Heston a partir de cotizaciones de mercado. Este capítulo está basado principalmente en Castagna [5], Wytsup [30] y Douglas [13].

4.1. El mercado de opciones FX

El mercado de tipo de cambio (FX por sus siglas en inglés) se caracteriza por ser de los mercados más líquidos y eficientes dentro de los mercados OTC (*Over The Counter*¹ por sus siglas en inglés).

El precio del contrato forward se puede obtener a través de un argumento de no-arbitraje y está dado por

$$f(T, K) = S_0 e^{-r_f T} - K e^{-r_d T}. \quad (4.1)$$

La paridad put-call se sigue cumpliendo bajo esta extensión del modelo de B-S y para un desarrollo más detallado se puede consultar Hull [19]. El strike K que hace que el forward valga

¹Son mercados descentralizados donde no existe una contraparte central que respalde las operaciones y está sujeto a menos regulaciones.

cero se le conoce como *precio forward* o *strike ATM forward* y está dado por

$$K_{ATM} = F(T, K) := S_0 e^{(r_d - r_f)T}. \quad (4.2)$$

Dentro de este mercado las cotizaciones de opciones FX se dan en términos de su volatilidad implícita, es decir, si preguntáramos por una opción call USDMXN con vencimiento en $T = 1$ año y strike de $K = 22$ pesos, una posible respuesta sería 20%, significando esto último que $\sigma_{BS} = 0.20$. La tasa de descuento doméstica r_d y la tasa de descuento extranjera r_f se supondrán conocidas y teniendo S_0, r_d, r_f, σ, T y K podemos obtener el precio de la respectiva opción a través de la fórmula de Black-Scholes .

Sin embargo, otra característica importante es que debido a la alta volatilidad del mercado FX, las opciones no se cotizan a través de su vencimiento T y strike K , sino a través de su vencimiento T y nivel de delta Δ (bajo el modelo de B-S), es decir, una vez especificado el vencimiento T , los niveles de delta pueden ser, por ejemplo, 25Δ call o 25Δ put, lo cual significa que el strike K pactado será aquel que nos de una delta $\Delta_c = 0.25$ en el caso del call o $\Delta_p = -0.25$ en el caso del put. Esta forma de cotización es más cómoda para los traders ya que les permite pactar operaciones cubiertas ante cambios en el subyacente a primer orden (delta-hedge), por lo que una vez cotizado el nivel de volatilidad y la delta, se puede recuperar el strike pactado usando las curvas de descuento implícitas del mercado y el tipo de cambio spot S_0 , como veremos más adelante.

A pesar de que las opciones FX son muy líquidas para varios vencimientos y niveles de strikes, existen instrumentos más líquidos que otros, dentro de estos están el ATM *straddle*, *risk-reversal* y *butterfly*.

El ATM straddle (STDL) corresponde a una posición larga en un call y larga en un put, ambos pactados con el strike tal que la delta del call es igual al delta del respectivo put con signo opuesto y su valor está relacionado con la altura del smile.

El risk-reversal (RR) corresponde a una posición larga en un call y corta en un put con delta

simétrico, usualmente 25 Delta. Un valor positivo del RR significa que la volatilidad del lado ITM call es más alta que la del ITM put y lo contrario si el RR es negativo y su valor está relacionado con la pendiente del smile.

El vega-weighted butterfly (VWB), o simplemente butterfly, corresponde a la venta de un ATM straddle y la compra de un strangle simétrico, donde este último corresponde a la compra de un call y un put simétrico, usualmente 25 Delta. El butterfly está relacionado con la curvatura del smile.

Ahora, recordando que las cotizaciones en el mercado FX son en términos de su volatilidad implícita, de los instrumentos anteriores obtenemos la volatilidad del ATM straddle σ_{ATM} , la volatilidad del risk-reversal σ_{RR} y la volatilidad del butterfly σ_{VWB} . De la definición de los instrumentos anteriores obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sigma_{RR} = \sigma_{25\Delta c} - \sigma_{25\Delta p}, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{VWB} = \frac{\sigma_{25\Delta c} + \sigma_{25\Delta p}}{2} - \sigma_{ATM}, \quad (4.4)$$

con lo cual obtenemos

$$\sigma_{25\Delta c} = \sigma_{ATM} + \sigma_{VWB} + \frac{1}{2}\sigma_{RR}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{25\Delta p} = \sigma_{ATM} + \sigma_{VWB} - \frac{1}{2}\sigma_{RR}. \quad (4.6)$$

De esta forma logramos rescatar las volatilidades de mercado para valuar opciones call y put y sólo nos falta obtener el strike K pactado.

Para esto, una vez pactado el vencimiento T , el nivel de delta $\alpha\Delta$ y su respectiva volatilidad $\sigma_{\alpha\Delta}$, utilizando las tasas de descuento de mercado r_d y r_f y el tipo de cambio spot S_0 debemos despejar el strike pactado K de la delta

$$\Delta = \omega e^{-r_f T} N(\omega d_1) = \alpha, \quad (4.7)$$

donde $\omega = 1$ en el caso de un call y $\omega = -1$ en el caso de un put, con lo cual obtenemos

$$K_{\alpha\Delta} = S_0 \exp \left\{ -\omega N^{-1}(|\alpha| e^{r_f T}) \sigma_{\alpha\Delta} \sqrt{T} + \left(r_d - r_f + \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\Delta}^2 \right) T \right\}. \quad (4.8)$$

Para nuestro caso particular de $25\Delta c$ y $25\Delta p$, obtenemos

$$K_{25\Delta c} = S_0 \exp \left\{ -N^{-1}(0.25 e^{r_f T}) \sigma_{25\Delta c} \sqrt{T} + \left(r_d - r_f + \frac{1}{2} \sigma_{25\Delta c}^2 \right) T \right\}, \quad (4.9)$$

$$K_{25\Delta p} = S_0 \exp \left\{ N^{-1}(0.25 e^{r_f T}) \sigma_{25\Delta p} \sqrt{T} + \left(r_d - r_f + \frac{1}{2} \sigma_{25\Delta p}^2 \right) T \right\}. \quad (4.10)$$

Por último, para obtener el strike ATM (K_{ATM}) asociado al straddle, debemos encontrar el strike tal que la delta del straddle sea igual a 0, lo cual es equivalentemente a resolver

$$\Delta c = -\Delta p, \quad (4.11)$$

con lo cual obtenemos

$$K_{ATM} = S_0 \exp \left\{ \left(r_d - r_f + \frac{1}{2} \sigma_{ATM}^2 \right) T \right\}. \quad (4.12)$$

Bajo condiciones normales de mercado, se satisface que $N^{-1}(0.25 e^{r_f T}) < 0$, de modo que $K_{25\Delta p} < K_{ATM} < K_{25\Delta c}$.

De esta forma obtenemos 3 puntos de la superficie de volatilidad $(K_{25\Delta p}, \sigma_{25\Delta p})$, (K_{ATM}, σ_{ATM}) y $(K_{25\Delta c}, \sigma_{25\Delta c})$, para cada uno de los vencimientos T que se coticen en mercado. Para calcular el precio de la respectiva opción basta con utilizar la formula de B-S y para valores intermedios se interpola sobre los strikes, volatilidades y vencimientos.

4.2. Estimación de los parámetros

Hasta ahora hemos hablado del desarrollo del modelo Heston, el efecto que tienen los parámetros en el smile y de cómo opera el mercado de opciones FX para obtener las volatilidades y

precios de mercado, sólo nos quedará averiguar cómo calibrar los parámetros del modelo Heston con estos precios de mercado para poder poner en práctica el modelo.

En general, dependiendo del modelo, las calibraciones suelen ser ya sea a través de cotizaciones de precios de mercado o a través de volatilidades de mercado, por ejemplo, el modelo SABR al tener una fórmula semi-analítica para la superficie de volatilidad $\sigma(T, K)$ se calibra con las volatilidades implícitas de mercado, mientras que el modelo Heston al tener fórmula semi-analítica para el precio de opciones $C(T, K)$ se calibra con precios de mercado de opciones.

Definamos el vector de parámetros del modelo Heston como $\Theta = (\kappa, \theta, \sigma, \rho)$ y los parámetros estimados como $\hat{\Theta} = (\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\rho})$ con $\kappa, \theta, \sigma > 0$, $\rho \in [-1, 1]$ y condición de Feller $2\kappa\theta > \sigma^2$. Denotaremos por $C(T, K)$ el precio de una opción call de mercado y $C(T, K; \Theta)$ el precio de una opción call bajo el modelo Heston y análogo para la opción put $P(T, K)$ y $P(T, K; \Theta)$. Supongamos que contamos con precios de mercado para diferentes vencimientos T_i , $i = 1, \dots, N_T$ y diferentes strikes K_j , $j = 1, \dots, N_K$. El modelo Heston es capaz de ajustar el efecto smile para un vencimiento en particular pero no para todos al mismo tiempo, es por esto que lo que se hace en la práctica es ajustar el modelo para cada uno de los vencimientos T_i , $i = 1, \dots, N_T$, y fijando el parámetro de la volatilidad instantánea v_0 con la volatilidad implícita de mercado $\sigma(T_i, K_{ATM})$ (como se justifico en el Capítulo 3), calibrando así los parámetros $\Theta_i = (\kappa_i, \theta_i, \sigma_i, \rho_i)$ para cada vencimiento T_i , $i = 1, \dots, N_T$ y para vencimientos intermedios entre T_i y T_{i+1} se interpola linealmente sobre los parámetros Θ_i y Θ_{i+1} .

Es sugerible no utilizar precios de opciones OTM con vencimiento muy próximo porque su valor es muy cercano a 0 y no aportan mayor información; tampoco precios de opciones con vencimientos muy largos, por ejemplo 10 años, porque en la mayoría de los casos estas opciones no son líquidas y sus precios no son los reflejados por el mercado. En la práctica sólo se usan precios de opciones con alta liquidez. Dentro de estas opciones también se debe excluir o ponderar las opciones que estén deep out of the money o deep in the money ya que sus precios son muy bajos o muy altos y pueden alterar la superficie de volatilidad generada. [2]

El método que usaremos consiste en fijar un vencimiento T y encontrar los parámetros Θ que minimicen una función de pérdida $\lambda(\Theta)$. Esta función de pérdida no es única y depende de la elección del modelador, sin embargo, pueden obtenerse diferentes resultados. En este trabajo utilizaremos 3 funciones de pérdida donde la primera λ_1 corresponde al error cuadrático medio, la segunda λ_2 corresponde con el error absoluto relativo medio y la tercera λ_3 es un error cuadrático medio ponderado por vega. De acuerdo con Christoffersen et al. [7], esta última función suele utilizarse para ajustar mejor las volatilidades implícitas a través de las diferencias de precios. Las funciones de pérdida se muestran a continuación.

$$\lambda_1(\Theta) = \frac{1}{N_K} \sum_{j=1}^{N_K} \left((C(T, K_j) - C(T, K_j; \Theta))^2 + (P(T, K_j) - P(T, K_j; \Theta))^2 \right), \quad (4.13)$$

$$\lambda_2(\Theta) = \frac{1}{N_K} \sum_{j=1}^{N_K} \left(\frac{|C(T, K_j) - C(T, K_j; \Theta)|}{C(T, K_j)} + \frac{|P(T, K_j) - P(T, K_j; \Theta)|}{P(T, K_j)} \right), \quad (4.14)$$

$$\lambda_3(\Theta) = \frac{1}{N_K} \sum_{j=1}^{N_K} \left(\frac{(C(T, K_j) - C(T, K_j; \Theta))^2 + (P(T, K_j) - P(T, K_j; \Theta))^2}{\nu_{BS}} \right), \quad (4.15)$$

donde ν_{BS} es la vega bajo el modelo de Black-Scholes y está dada por

$$\nu_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_{BS}} = S e^{r_f T} N'(d_1) \sqrt{T}. \quad (4.16)$$

Las funciones de pérdida anteriores están sujeto a $\kappa, \theta, \sigma > 0$, $\rho \in [-1, 1]$ y $2\kappa\theta > \sigma^2$.

Para minimizar las funciones anteriores debemos de utilizar algún método de optimización, en este caso utilizaremos el algoritmo de evolución diferencial o mejor conocido como *differential evolution* (DE) el cual sirve para encontrar mínimos globales de funciones multivariadas $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$, donde M es el número de parámetros.

Este algoritmo es un tipo de algoritmo evolutivo que está inspirado en la teoría de la evolución de Darwin y a grandes rasgos consiste en generar una muestra aleatoria de vectores, generar cruza entre estos y quedarnos con los que produzcan mejores resultados de la función de pérdida λ . A continuación mostramos los pasos del algoritmo.

PASO 0: Se genera una población inicial de $NP \geq 4$ vectores aleatorios (también conocidos como *individuos*) $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,M})$, $i = 1, \dots, NP$, definidos dentro de sus respectivos intervalos, donde M es el número de parámetros, el cual en nuestro caso es $M = 4$, es decir, $\mathbf{x}_i = \Theta_i = (\kappa_i, \theta_i, \sigma_i, \rho_i)$.

PASO 1: (Mutación) Se seleccionan aleatoriamente 3 individuos $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c$ y se genera un individuo mutado

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_a + F \cdot (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c), \quad (4.17)$$

donde F es un factor positivo menor que 1 y controla el tamaño de las mutaciones, si $F = 0$ no hay mutaciones. De esta forma se generan NP individuos mutados \mathbf{x}'_i , $i = 1, \dots, NP$. En caso de que un individuo mutado no cumpla con las restricciones de los parámetros, se reemplaza por un valor aleatorio válido.

PASO 2: (Crossover) Para cada entrada de cada individuo mutado $\mathbf{x}'_i = (x'_{i,1}, \dots, x'_{i,M})$, se escoge un número al azar $U(0, 1)$ y la entrada $x'_{i,j}$ entra en el individuo \mathbf{x}'_i si $U(0, 1) \leq CR$ o $j = r$, de no ser así se utiliza la entrada $x_{i,j}$, donde $0 \leq CR \leq 1$ se le conoce como *crossover ratio* y r es un valor aleatorio entre $1, \dots, M - 1, M$.

El parámetro CR controla el nivel de mutación del individuo \mathbf{x}'_i y el valor r asegura que al menos se realice una modificación del individuo \mathbf{x}'_i

PASO 3: (Selección) Por último, se calcula $\lambda(\mathbf{x}'_i)$ y $\lambda(\mathbf{x}_i)$ y se escoge el individuo que mejor valor de λ produzca para cada $i = 1, \dots, NP$ y con esto se termina la primera iteración y se regresa al paso 1 hasta completar cierto número de iteraciones o alcanzar cierto nivel de tolerancia.

El siempre tener una población de tamaño NP es lo que evita que se caiga en un mínimo local. Así mismo, el método no requiere del jacobiano, por lo que es de mucha utilidad cuando se trabaja con funciones de alta complejidad, como el caso del modelo Heston. Sin embargo, debido al gran número de cálculos requeridos, el algoritmo no es tan veloz. Para un análisis más a detalle se puede consultar el artículo de Vollrath y Wendland [28].

4.3. Aplicación del modelo Heston

Durante el 2020 ocurrieron varios acontecimientos que tuvieron fuertes impactos en todos los mercados financieros, tanto en divisas y tasas de interés como acciones y commodities. A principios de 2019 ya se hablaba de una recesión profunda tras una larga racha de crecimiento ininterrumpido en la mayoría de los países. Esta recesión se agravó debido a una guerra comercial entre Estados Unidos y China. Posteriormente, llegó la pandemia de COVID-19 y detuvo toda la economía global tras las cuarentenas implementadas en la mayoría de países. Este paro de las actividades económicas generó muchas pérdidas llevando los niveles de desempleo a máximos históricos, derrumbando las principales bolsas de valores de todos los países e incluso llevando los precios del petróleo a niveles negativos por la nula demanda. La crisis generada por esta pandemia ha sido una de las peores en la historia, comparables con la crisis del 2008 e incluso con la Gran Depresión.

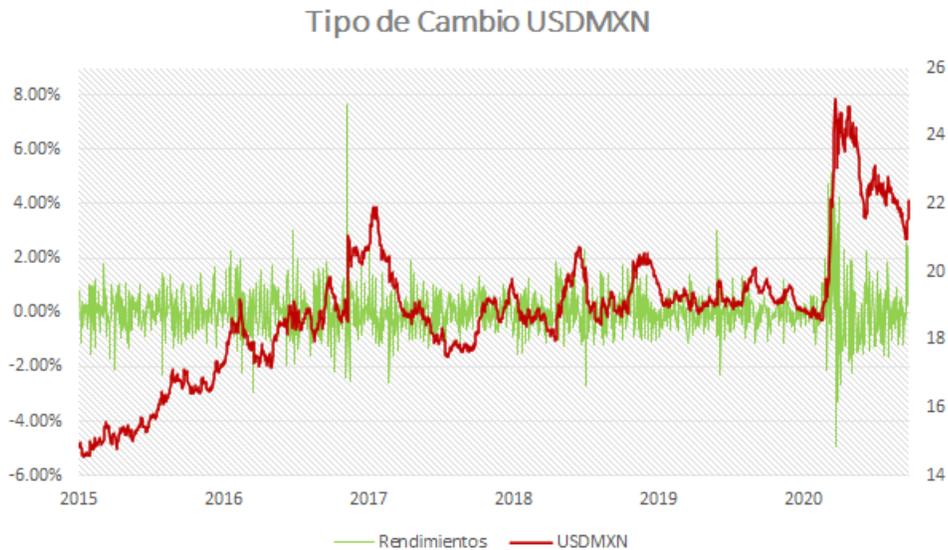


Figura 4.1: Gráfica del tipo de cambio USDMXN del periodo 2015 a septiembre de 2020 junto con sus variaciones.

Por su parte, las monedas de los mercados emergentes como México sufrieron una devaluación con respecto a las principales divisas como el dólar o el euro. Como se muestra en la Figura

4.1, el tipo de cambio USDMXN alcanzó su máximo histórico de \$25.1185 pesos por dólar el día 24 de marzo de 2020. Después de ese evento extremo a mediados de febrero, podemos notar como la volatilidad creció notablemente, con lo cual podemos observar claramente como la volatilidad no es constante en el tiempo y además la volatilidad siempre tiende a estabilizarse en algún punto fijo.

Haciendo un análisis del histograma de los rendimientos podemos notar la presencia de colas pesadas, lo cual corroboramos a través de la curtosis, la cual es de $9.039 > 3$, junto con el boxplot que cataloga estas observaciones como valores atípicos (puntos rojos), mientras que el coeficiente de asimetría es de $0.986 > 0$, lo cual significa que, a pesar de ser casi simétrica, la distribución está ligeramente inclinada a la izquierda haciendo que la cola derecha sea más pesada, lo cual implica que las variaciones aumentan cuando el tipo de cambio aumenta.

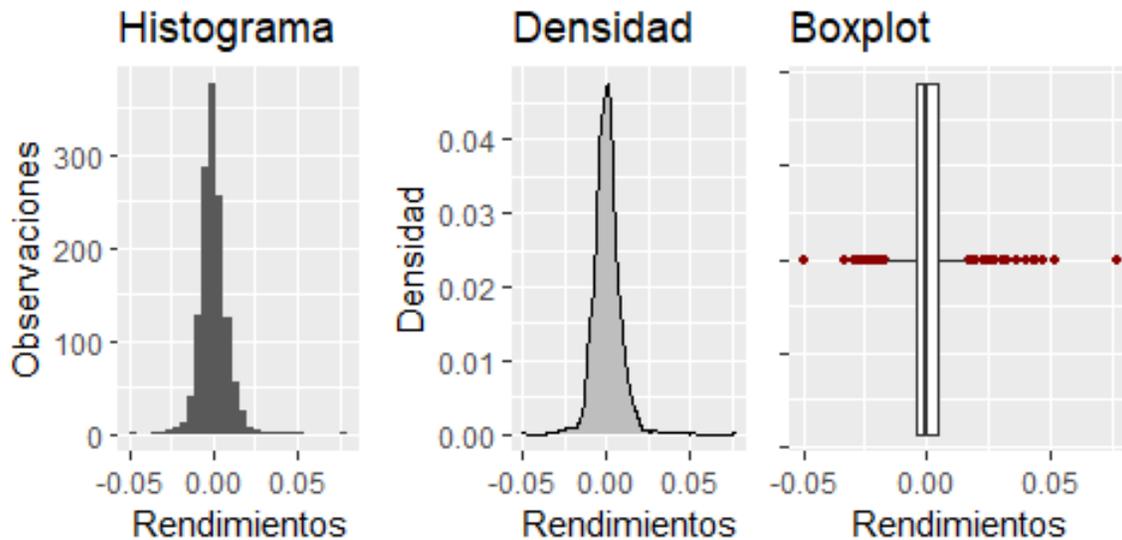


Figura 4.2: Histograma de los rendimientos del tipo de cambio USDMXN.

Debido a lo anterior y a lo expuesto en el Capítulo 3.2.2. podemos conjeturar que el tipo de smile será un smirk (pendiente positiva) no muy pronunciado, el valor de la volatilidad de la volatilidad σ será grande y que la correlación entre el tipo de cambio y la volatilidad ρ será positivo.

A continuación se muestran las volatilidades de mercado de un STDL, 10D RR, 25D RR, 10D VWB, 25D VWB para el tipo de cambio USDMXN al día 21/08/2020. En la práctica los vencimientos más líquidos dentro del mercado de opciones FX son el 2w, 1m, 2m, 3m, 6m, 9m, 1y y 2y.

	VOLATILIDADES MERCADO				
	ATM	25D RR	25D BF	10D RR	10D BF
1d	11.09%	0.91%	0.25%	1.65%	0.91%
1w	14.47%	1.47%	0.40%	2.55%	1.42%
2w	14.35%	1.87%	0.42%	3.25%	1.46%
3w	14.36%	2.01%	0.44%	3.53%	1.43%
1m	14.19%	2.24%	0.46%	3.97%	1.53%
2m	14.29%	2.68%	0.55%	4.68%	1.80%
3m	15.47%	3.37%	0.64%	5.95%	2.03%
4m	15.10%	3.48%	0.67%	6.17%	2.08%
5m	14.85%	3.61%	0.72%	6.52%	2.21%
6m	14.63%	3.75%	0.75%	6.67%	2.32%
9m	14.34%	3.93%	0.84%	7.05%	2.44%
1y	14.12%	4.10%	0.90%	7.45%	2.69%
18m	14.05%	4.16%	0.97%	7.64%	2.76%
2y	13.98%	4.30%	1.04%	8.02%	2.95%
3y	13.92%	4.54%	1.16%	8.56%	3.36%
4y	14.02%	4.66%	1.29%	8.83%	3.63%

Figura 4.3: Cotizaciones de los instrumentos straddle, risk-reversal y butterfly.

Como se mencionó anteriormente, a través del straddle, risk-reversal y butterfly podemos recuperar la superficie de volatilidad del mercado por vencimientos y niveles de delta como se muestra en la Figura 4.4 a continuación.

	VOLATILIDADES IMPLÍCITAS DE MERCADO				
	10D P	25D P	ATM	25D C	10D C
1d	11.18%	10.89%	11.09%	11.80%	12.83%
1w	14.61%	14.13%	14.47%	15.60%	17.16%
2w	14.18%	13.84%	14.35%	15.70%	17.43%
3w	14.02%	13.79%	14.36%	15.80%	17.55%
1m	13.73%	13.52%	14.19%	15.76%	17.70%
2m	13.74%	13.50%	14.29%	16.17%	18.43%
3m	14.52%	14.42%	15.47%	17.79%	20.47%
4m	14.10%	14.03%	15.10%	17.51%	20.26%
5m	13.80%	13.77%	14.85%	17.38%	20.33%
6m	13.61%	13.50%	14.63%	17.24%	20.28%
9m	13.26%	13.21%	14.34%	17.15%	20.31%
1y	13.09%	12.97%	14.12%	17.06%	20.53%
18m	12.99%	12.93%	14.05%	17.10%	20.62%
2y	12.92%	12.86%	13.98%	17.16%	20.94%
3y	13.00%	12.81%	13.92%	17.36%	21.56%
4y	13.23%	12.98%	14.02%	17.64%	22.06%

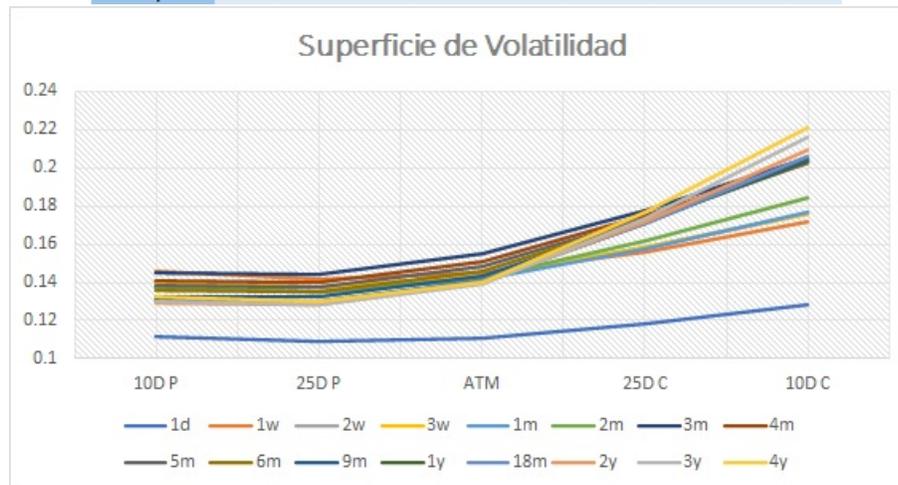


Figura 4.4: Superficie implícita de mercado por vencimientos y niveles de delta.

En la superficie podemos observar como en todos los vencimientos la volatilidad esta más cargada hacia una subida del tipo de cambio, lo cual va acorde con nuestras conjeturas. Como se explicó al principio de este capítulo, una vez que se rescató la volatilidad implícita de mercado procedemos a rescatar el strike pactado para cada nivel de delta y con la respectiva volatilidad obtenida en la tabla de la Figura 4.4, obteniendo así los siguientes strikes.

En conjunto con la tabla de strikes de la Figura 4.5 y la tabla de las volatilidades implícitas de la Figura 4.4, más las tasas de descuento del mercado podemos obtener los precios de opciones call y put de tipo de cambio USDMXN, obteniendo así los siguientes precios.

	STRIKES				
	10D P	25D P	ATM	25D C	10D C
1d	21.87	21.95	22.04	22.13	22.23
1w	21.49	21.77	22.06	22.39	22.75
2w	21.31	21.68	22.08	22.55	23.08
3w	21.17	21.62	22.11	22.69	23.35
1m	21.04	21.56	22.14	22.83	23.65
2m	20.69	21.42	22.24	23.26	24.52
3m	20.36	21.28	22.35	23.75	25.54
4m	20.22	21.24	22.45	24.06	26.16
5m	20.10	21.22	22.54	24.36	26.78
6m	20.00	21.21	22.64	24.63	27.34
9m	19.78	21.21	22.94	25.44	28.96
1y	19.63	21.27	23.25	26.20	30.58
18m	19.45	21.43	23.89	27.70	33.58
2y	19.41	21.70	24.59	29.23	36.80
3y	19.55	22.45	26.16	32.51	43.90
4y	19.91	23.44	28.03	36.27	52.15

Figura 4.5: Strikes pactados para cada nivel de delta y respectiva volatilidad implícita de la tabla de la Figura

Las primeras dos columnas corresponden a precios de opciones put, las últimas tres a precios de opciones call. No es recomendable calibrar el modelo usando únicamente opciones call u opciones put, esto porque en el respectivo caso, las opciones con strikes ITM valdrán más que las OTM y el modelo calibrará mejor las opciones ITM. Al combinar opciones put y call, los precios se mantienen relativamente simétricos con respecto al strike ATM y la calibración resulta mejor.

Para este trabajo sólo calibraremos los precios con vencimiento de un año con el fin de mostrar una implementación del modelo Heston y para el resto de vencimientos se procede de forma análoga. El tipo de cambio al 21/08/2020 fue de $S_0 = 22.0362$ y las respectivas curvas de descuento con vencimiento a un año fueron $r_d = 4.56\%$ para la tasa local y $r_f = 0.2027\%$ para la tasa extranjera. Usando estos datos fijos junto con la volatilidad instantánea igual a la volatilidad implícita ATM a un año, $\sqrt{v_0} = \sigma_{BS} = 14.1175\%$, se calibró los parámetros restantes κ, θ, ρ y σ mediante el algoritmo differential evolution (DE) para cada una de las tres funciones de pérdida mencionadas en la sección anterior.

El programa utilizado para la calibración fue el software estadístico de licencia libre R. Para el cálculo del precio de una opción call bajo el modelo Heston se utilizó la función `callHestoncf`

	PRECIOS DE MERCADO				
	10D P	25D P	ATM	25D C	10D C
1d	0.0062	0.0189	0.0512	0.0204	0.0070
1w	0.0214	0.0654	0.1751	0.0707	0.0247
2w	0.0295	0.0909	0.2445	0.1002	0.0354
3w	0.0358	0.1113	0.2983	0.1231	0.0435
1m	0.0420	0.1308	0.3510	0.1462	0.0522
2m	0.0599	0.1862	0.4945	0.2101	0.0761
3m	0.0781	0.2459	0.6477	0.2799	0.1024
4m	0.0879	0.2775	0.7257	0.3163	0.1164
5m	0.0965	0.3057	0.7940	0.3491	0.1298
6m	0.1046	0.3294	0.8523	0.3777	0.1412
9m	0.1258	0.3990	1.0105	0.4542	0.1710
1y	0.1444	0.4558	1.1367	0.5166	0.1973
18m	0.1777	0.5656	1.3588	0.6228	0.2384
2y	0.2063	0.6580	1.5366	0.7112	0.2749
3y	0.2592	0.8212	1.8239	0.8586	0.3371
4y	0.3104	0.9820	2.0670	0.9852	0.3888

Figura 4.6: Precios de opciones Put (primeras 2 columnas) y opciones Call (últimas tres columnas).

de la paquetería NMOF (Numerical Methods and Optimization in Finance) del autor Enrico Schumann [24], mientras que el respectivo precio de la opción put se obtiene con paridad put-call. Para el algoritmo DE se utilizó la función DEoptim de la paquetería homónima DEoptim y autores Ardia, D. et al [1]. Para mayor detalle de ambas funciones, referirse directamente a la documentación de las paqueterías. Los códigos y archivos utilizados se pueden consultar en el Apéndice B o en el sitio de Github <https://github.com/CharlySC/Heston-Model>.

Para la implementación del algoritmo DE se requiere establecer límites superiores e inferiores de cada parámetro, así como indicar el número máximo de iteraciones y el número de individuos de la población (parámetro NP). Los intervalos utilizados para cada parámetro fueron $\theta \in [0.000001, 1]$, $\rho \in [-1, 1]$, $\sigma \in [.01, 3]$ y $\kappa \in [1, 20]$. El tamaño de la población se escogió como $NP = 200$, al igual que el número máximo de iteraciones. Desafortunadamente el algoritmo DE no permite incluir restricciones no-lineales, por lo que no se puede garantizar la condición de Feller en la calibración, sin embargo, más adelante veremos que los resultados obtenidos son consistentes con los precios y volatilidades de mercado.

En la Figura 4.7 se muestran los parámetros calibrados para cada una de las funciones

pérdida λ_1 (4.13), λ_2 (4.14) y λ_3 (4.15), las cuales se mencionaron en la sección anterior. Podemos observar que los parámetros calibrados son similares para las diferentes funciones, lo cual nos brinda un cierto nivel de confianza de los resultados obtenidos y además se cumplen nuestras conjeturas sobre los parámetros ρ positiva y σ alta. Sin embargo, en ningún caso se logró satisfacer la condición de Feller, lo cual es común en en la práctica al calibrar el modelo Heston como lo menciona Clark (ver Tabla 6.3 en [8]).

Modelo	1	2	3
theta	0.00001	0.00192	0.00052
rho	0.43356	0.42305	0.47009
sigma	2.74430	2.95757	2.56303
kappa	15.42518	16.83493	15.97842
Perdida	0.00002	0.00597118	0.00000
Feller	FALSO	FALSO	FALSO

Figura 4.7: Parámetros calibrados para cada una de las 3 funciones de pérdida λ_1 (Modelo 1), λ_2 (Modelo 2) y λ_3 (Modelo 3).

Los precios obtenidos para cada función de pérdida junto con sus respectivas diferencias se muestran en la Figura 4.8. La función de pérdida que mejor se ajusto a los precios de mercado fue λ_2 (4.14), la cual corresponde con el error absoluto relativo medio y la mayor diferencia la tuvo en el nodo $25\Delta_c$. Por otro lado, en la Figura 4.9 se muestran las volatilidades implícitas obtenidas con la fórmula de Black-Scholes para los precios del modelo Heston y la volatilidad implícita de mercado. Los errores de las volatilidades implícitas se muestran en la Figura 4.10 y una vez más el modelo que mejor se ajustó a la volatilidad implícita de mercado fue λ_2 (4.14), donde una vez más la mayor diferencia la tuvo en el nodo $25\Delta_c$. Para el cálculo de las volatilidades implícitas se usó la función `EuropeanOptionImpliedVolatility` de la paquetería `RQuantLib` de los autores Eddelbuettel, D. y Nguyen, K. (durante 2009-2010) y Leitch, T. (desde 2016) [10].

En la práctica es usual calibrar todos los parámetros del modelo Heston una vez al mes y únicamente se calibran diariamente los parámetros referentes a la altura del smile, que en el caso del modelo Heston corresponden a los parámetros θ y v_0 , de forma que estos parámetros se ajusten al nivel de volatilidad ATM.

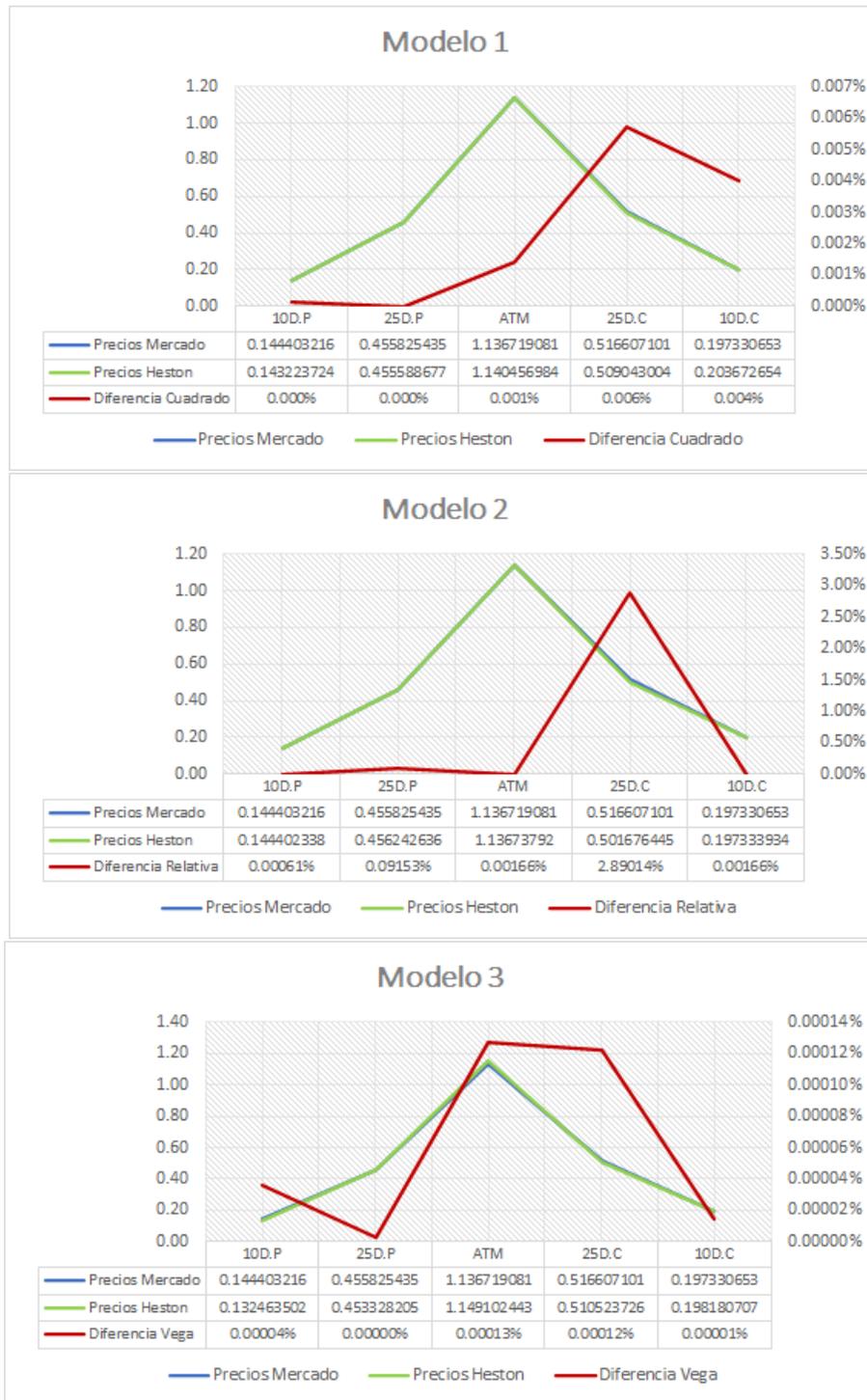


Figura 4.8: Diferencias de los precios de mercado y lo precios calibrados para cada una de las 3 funciones de pérdida λ_1 (Modelo 1), λ_2 (Modelo 2) y λ_3 (Modelo 3).

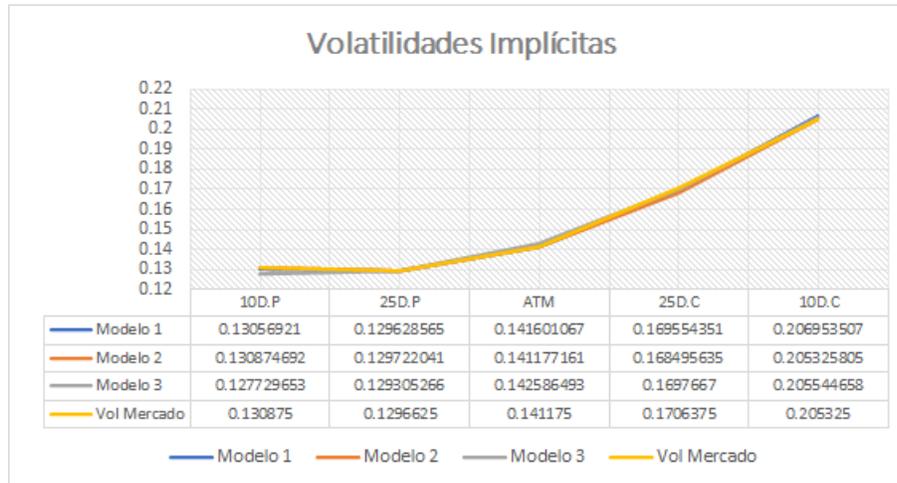


Figura 4.9: Volatilidad implícita de mercado y de las 3 funciones de pérdida λ_1 (Modelo 1), λ_2 (Modelo 2) y λ_3 (Modelo 3).

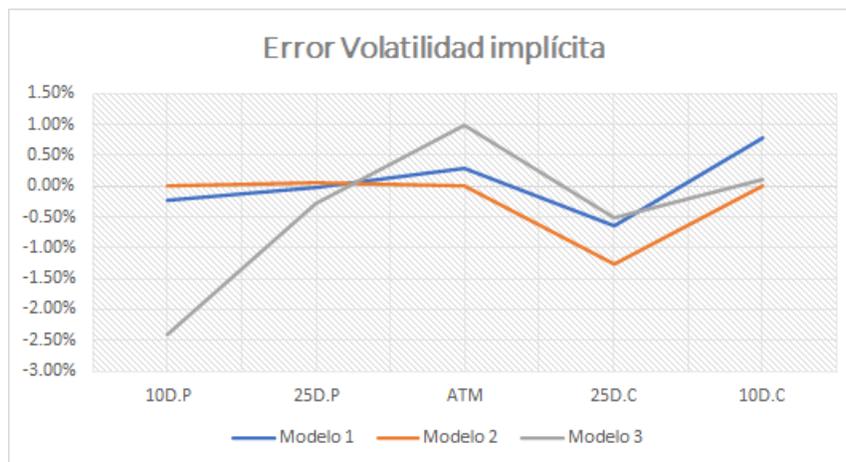


Figura 4.10: Errores relativos de la volatilidad implícita de mercado y de las 3 funciones de pérdida λ_1 (Modelo 1), λ_2 (Modelo 2) y λ_3 (Modelo 3).

Capítulo 5

Conclusiones

Durante este trabajo analizamos el modelo de Black-Scholes desde el punto de vista de la teoría de martingalas, así como su conexión con las ecuaciones diferenciales parciales. Posteriormente profundizamos en los supuestos del modelo y observamos que dichos supuestos no son compatibles con la realidad, en particular no se tiene una volatilidad constante. Sin embargo, es posible corregir el modelo mediante una superficie de volatilidad que depende del vencimiento y del nivel de strike. Mediante esta corrección se rompe el supuesto de log-normalidad en la densidad de los rendimientos del subyacente y el precio incorpora la kurtosis y la asimetría en la densidad de los rendimientos del subyacente, razón por la cual en la práctica se usa la superficie de volatilidad. La pregunta ahora es, ¿cómo generar esta superficie de volatilidad?. En general sólo se cuenta con unas cuantas cotizaciones de opciones para diferentes strikes y vencimientos y para valores intermedios se interpola o extrapola. Es aquí donde entra el modelo Heston.

Los modelos de volatilidad estocástica surgen como una alternativa al modelo de Black-Scholes con el fin de modelar mejor el comportamiento de los mercados financieros. Estos modelos logran reproducir los llamados *hechos estilizados* que son volatilidad no constante en el tiempo, presencia de alta kurtosis, asimetría en la distribución de los rendimientos y reversión a la media de la volatilidad. El modelo Heston logra reproducir cada uno de estos fenómenos al incorporar un proceso CIR en la distribución de la volatilidad y tiene la ventaja de contar

con una fórmula semi-analítica para el precio de una opción call europea, razón por la cual es de los métodos de volatilidad estocástica más usados en la práctica.

Al implementar el modelo Heston el principal problema con el que nos enfrentamos radica en la complejidad de las fórmulas y en la calibración de sus parámetros. Sin embargo, gracias al gran avance tecnológico con respecto a cuando fue publicado el modelo, cada vez es más fácil de implementar y existen gran variedad de programas que ya tienen implementado el modelo Heston. De igual forma, los algoritmos de optimización cada vez son más sofisticados y, en particular, el algoritmo Differential Evolution sirve para encontrar mínimos globales de funciones de gran nivel de complejidad, como es el caso del modelo Heston.

A pesar del avance computacional, el modelo aún presenta problemas en la calibración para vencimientos de corto plazo, lo cual podría solucionarse probando varios métodos de integración numérica en lugar de la función `callHestoncf`. Para el caso particular del vencimiento a un año, aún cuando la condición de Feller no se satisface en ninguna de las tres funciones de pérdida, notamos que los resultados se ajustan bien a la información de mercado, tanto en precios de mercado como en volatilidades de mercado, siendo el error absoluto relativo medio el que mejor se ajustó y el que cuenta con menores desviaciones, donde la mayor diferencia se muestra en el nodo $25\Delta_c$ y la cual podría generar oportunidades de arbitraje dependiendo de la liquidez del mercado. Sin embargo, el modelo Heston puede resultar de suma importancia para mercados con baja liquidez o para la valuación de opciones exóticas, donde es de suma importancia contar con modelos más sofisticados para su eficiente cobertura.

Sin duda es posible mejorar la precisión en la calibración del modelo, donde algunas posibles mejoras serían explorar otras funciones de pérdida diferentes a las utilizadas en este trabajo o al realizar el proceso de calibración, una vez calculado el precio bajo el modelo Heston, convertir ese precio en volatilidad implícita con la fórmula de Black-Scholes y así aplicar la función de pérdida a dicha volatilidad implícita calculada contra la volatilidad implícita de mercado. Esto

último con el fin de calibrar mejor el modelo Heston contra la volatilidad implícita de mercado, pues los traders que operan opciones FX suelen darle más prioridad a las volatilidades que a los precios de las opciones.

Apéndice A

Resultados técnicos

A continuación se presentan los conceptos básicos de probabilidad, procesos estocásticos y cálculo estocástico para poder comprender el desarrollo de esta tesis. Únicamente se enuncian las definiciones y propiedades más importantes sin profundizar. Para un análisis más detallado de estos resultados, se recomienda consultar Karatzas y Shreve [20] o para un análisis completo pero no tan profundo también se puede ver Shreve [25].

En esta sección todo lo que enunciemos estará definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a menos que se indique lo contrario y $\mathbb{T} = [0, T]$. Diremos que una familia de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ es una *filtración* si para toda $0 \leq s \leq t$, se cumple $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. A la tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$ le llamamos *espacio de probabilidad filtrado*. Definimos la filtración generada por un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s) \mid 0 \leq s \leq t)$, como la mínima σ -álgebra para la cual $X(s)$ es \mathcal{F}_t -medible para toda $s \in [0, t]$. Para simplificar la notación eliminaremos el superíndice X de la filtración y sólo mencionaremos que la filtración es la generada por el proceso.

Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ si $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible.

Definición A.0.1 (Esperanza Condicional) *Dada una sub- σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y una v.a. X integrable, definimos la esperanza condicional de X dado \mathcal{G} como la v.a. integrable y \mathcal{G} -medible,*

denotada por $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$, que satisface

$$\int_G \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P} \quad \text{para toda } G \in \mathcal{G}$$

o equivalentemente $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_G)$ para toda $G \in \mathcal{G}$.

Proposición A.0.1 *Sea X v.a. integrable y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sub- σ -álgebra. La esperanza condicional cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{G})$ es lineal.
2. $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X)$ donde $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$,
3. Si X es \mathcal{G} -medible, entonces $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = X$ \mathbb{P} -c.s.
4. Si X y Y son v.a. integrables tal que XY es integrable y Y es \mathcal{G} -medible, entonces

$$\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) = Y \mathbb{E}(X | \mathcal{G}).$$

5. Si X es independiente de \mathcal{G} , entonces $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
6. (Propiedad de torre) Si \mathcal{H} es otra sub- σ -álgebra tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Entonces

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{H}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{H}).$$

Definición A.0.2 (Martingala) *Un proceso estocástico $\{M(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es una martingala con respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$ si es integrable, adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ y satisface*

$$\mathbb{E}(M(t) | \mathcal{F}_s) = M(s) \quad \text{para toda } s \leq t.$$

Definición A.0.3 (Movimiento Browniano) *Un movimiento Browniano es un procesos estocástico $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ que satisface:*

1. $W(0) = 0$ \mathbb{P} -c.s.

2. Tiene trayectorias continuas.
3. Tiene incrementos independientes, es decir, $W(t) - W(s)$ es independiente de \mathcal{F}_s para toda $s < t$.
4. Tiene incrementos estacionarios con $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ para toda $s < t$.

Se puede demostrar que el movimiento Browniano $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es una martingala.

Consideremos ahora una partición $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ del intervalo \mathbb{T} y sea $\|\Pi\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{t_{i+1} - t_i\}$. Definimos la *variación cuadrática* de una función f con dominio en \mathbb{T} como

$$\langle f, f \rangle [T] = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2$$

Teorema A.0.1 *El movimiento Browniano $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ tiene variación cuadrática $\langle W, W \rangle [t] = t$ para cada $t \in \mathbb{T}$ \mathbb{P} -c.s.*

Lo anterior representa que el movimiento Browniano acumula variación cuadrática a tasa de uno por unidad de tiempo.

Así mismo, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))(t_{i+1} - t_i) &= 0 \\ \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_i) &= 0 \end{aligned}$$

Escribimos lo anterior de manera informal como las siguientes reglas de multiplicación

$$dW(t)dW(t) = dt, \quad dW(t)dt = 0 = dtdW(t) \quad \text{y} \quad dt dt = 0$$

Teorema A.0.2 (Teorema de Caracterización de Lévy) *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ una martingala en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}})$ tal que $X(0) = 0$ \mathbb{P} -c.s., tiene trayectorias continuas y $dX(t)dX(t) = dt$. Entonces $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es un movimiento Browniano.*

El Teorema de Caracterización de Lévy establece que el movimiento Browniano es el único proceso de Lévy que empieza en el origen con trayectorias continuas y acumula variación cuadrática a tasa 1 por unidad de tiempo.

Una vez mencionado lo anterior, podemos comenzar con la parte de cálculo estocástico. Comenzaremos definiendo la integral de Itô, aunque no nos detendremos en su construcción y la definiremos a través de sus propiedades

Definición A.0.4 (Integral de Itô) Sea $\{\Delta(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ un proceso adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ tal que $\mathbb{E} \left(\int_0^T \Delta^2(s) ds \right) < \infty$. Definimos la integral de Itô como el proceso estocástico $\{I(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ con $I(t) = \int_0^t \Delta(s) dW(s)$ el cual satisface las siguientes propiedades:

1. Tiene trayectorias continuas.
2. $I(t)$ es \mathcal{F}_t -medible.
3. Si $I(t) = \int_0^t \Delta_1(s) dW(s)$ y $J(t) = \int_0^t \Delta_2(s) dW(s)$ entonces

$$aI(t) + bJ(t) = \int_0^t (a\Delta_1(s) + b\Delta_2(s)) dW(s) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

4. $\{I(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ es martingala.
5. (Isometría de Itô) $\mathbb{E}(I^2(t)) = \mathbb{E} \left(\int_0^T \Delta^2(s) ds \right)$

También se puede demostrar que la integral de Itô $\{I(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ se distribuye normal con media 0 y varianza

$$\text{Var}(I(t)) = \mathbb{E}(I^2(t)) = \mathbb{E} \left(\int_0^T \Delta^2(s) ds \right),$$

y usando las reglas de multiplicación se puede encontrar la variación cuadrática de la siguiente manera

$$dI(t)dI(t) = (\Delta(t)dW(t))(\Delta(t)dW(t)) = \Delta^2(t)dt.$$

Definición A.0.5 (Proceso de Itô) Sean $\{\mu(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{\sigma(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ procesos adaptados a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ tal que $\mathbb{E} \left(\int_0^T \sigma^2(s) ds \right) < \infty$. Definimos el proceso de Itô $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ como

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s),$$

o en su forma diferencial

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

A menudo usaremos más la forma diferencial, a pesar que lo más formal es utilizar la forma integral. Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición A.0.6 (Ecuación diferencial estocástica) Una EDE es un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ que satisfice

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t),$$

con condición inicial $X(0) = x$.

En la definición anterior, se debe de pedir que $\mathbb{E} \left(\int_0^T \sigma^2(s, X(s)) ds \right) < \infty$ para que la integral de Itô este bien definida. Sin embargo, se debe de pedir más condiciones a las funciones $\mu(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ para garantizar la existencia de la solución. Para más referencias sobre este tema se puede consultar Kloeden [21].

Lemma A.0.1 (Lema de Itô) Sea un $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ solución de la EDE

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

y sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sus derivadas parciales $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ y $f_{xx}(t, x)$ existen. Entonces

$$df(t, X(t)) = f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))dX(t)dX(t).$$

El Lema de Itô se puede generalizar el resultado anterior de la siguiente manera

Lemma A.0.2 Sean $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ y $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ soluciones de las siguientes EDE

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu_1(t, X(t))dt + \sigma_1(t, X(t))dW(t), \\ dY(t) &= \mu_2(t, Y(t))dt + \sigma_2(t, Y(t))dW(t). \end{aligned}$$

Si $f(t, x, y) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sus derivadas parciales existen, entonces

$$\begin{aligned} df(t, X(t), Y(t)) &= f_t(t, X(t), Y(t))dt + f_x(t, X(t), Y(t))dX(t) + f_y(t, X(t), Y(t))dY(t) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t), Y(t))dX(t)dX(t) + \frac{1}{2}f_{yy}(t, X(t), Y(t))dY(t)dY(t) \\ &+ f_{xy}(t, X(t), Y(t))dX(t)dY(t). \end{aligned}$$

Si aplicamos el resultado anterior a $f(t, x, y) = xy$, obtenemos la *regla del producto de Itô*

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)dY(t). \quad (\text{A.1})$$

Lo que sigue es introducir el concepto de cambio de medida, por lo que ahora estaremos trabajando con dos medidas de probabilidad \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$. Hay que ser cuidadosos al momento de trabajar con distribuciones, esperanzas o variables independientes ya que todos estos dependen de una medida de probabilidad, por lo que bajo \mathbb{P} se puede tener cierta distribución y bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ se puede tener otra. Por lo tanto, siempre se debe especificar la medida de probabilidad con la que se está trabajando.

Definición A.0.7 (Medidas equivalentes) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $\tilde{\mathbb{P}}$ otra medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) . Decimos que \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ son equivalentes si

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ si y sólo si } \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0 \text{ para toda } A \in \mathcal{F}.$$

Teorema A.0.3 (Teorema de Radon-Nikodým) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $\tilde{\mathbb{P}}$ medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) equivalente a \mathbb{P} . Entonces existe una v.a. $Z > 0$ c.s. tal que

$$\mathbb{E}(Z) = 1 \text{ y}$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \text{ para toda } A \in \mathcal{F}.$$

A Z le llamamos *derivada de Radon-Nikodým* y la denotamos por $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$ y a Z^{-1} la denotamos por $\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}$.

La igualdad del Teorema de Radon-Nikodým nos permite cambiar de la medida \mathbb{P} a la medida $\tilde{\mathbb{P}}$ y también se cumple que para X v.a.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}(X) &= \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}\left(X \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right), \\ \mathbb{E}(X) &= \tilde{\mathbb{E}}\left(\frac{X}{Z}\right) = \tilde{\mathbb{E}}\left(X \frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right). \end{aligned}$$

Ahora definimos el *proceso derivada de Radon-Nikodým* como el proceso estocástico definido por

$$Z(t) = \mathbb{E}\left(\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t\right), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Por la propiedad de torre, este proceso cumple con ser una martingala y si tomamos Y v.a. \mathcal{F}_t -medible, se cumple para $s \leq t$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}(Y) &= \mathbb{E}(YZ(t)), \\ \tilde{\mathbb{E}}(Y \mid \mathcal{F}_s) &= \frac{1}{Z(s)} \mathbb{E}(YZ(t) \mid \mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

Apéndice B

Códigos en R

A continuación se muestra el código de R utilizado para esta tesis y los archivos y códigos se pueden consultar en mi sitio de Github <https://github.com/CharlySC/Heston-Model>.

Para el precio de una opción call bajo el modelo Heston de la ecuación 3.31 se utilizó la siguiente función, la cual hace uso de la función `callHestoncf` de la paquetería NMOF, y para el respectivo precio de la opción put se utiliza paridad put-call.

```
Heston <- function(tipo,s,K,tau,r,q,v,theta,rho,kappa,sigma){
  p <- callHestoncf(s,K,tau,r,q,v,theta,rho,kappa,sigma)
  if(tipo==1){
    # para call
    precio <- p
  }else if(tipo==-1){
    # para put
    precio <- p - (s*exp(-q*tau)-K*exp(-r*tau))
  }
  return(precio)
}
```

Las funciones de pérdida λ_1 , λ_2 y λ_3 se resumen en la siguiente función, la cual depende del parámetro `metodo`

```
Perdida <- function(parametros){

  theta <- parametros[1]
```

```

rho <- parametros[2]
sigma <- parametros[3]
kappa <- parametros[4]

# Se utiliza el data frame PreciosBS,
# el cual incluye curvas de descuento, precios, strikes y volatilidades
precios_bs <- PreciosBS[which(PreciosBS$dias==dia),2:length(PreciosBS)]
precios_heston <- numeric(length(precios_bs))
vega <- numeric(length(precios_bs))
tau <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"tau"]
r <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"r"]
q <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"q"]
for(j in 1:length(precios_heston)){
  K <- Strikes[which(Strikes$dias==dia),1+j]
  tipo <- Tipo[which(Strikes$dias==dia),j]
  vol_mercado <- Vol[which(Vol$dias==dia),1+j]
  precios_heston[j] <- Heston(tipo,s,K,tau,r,q,v,theta,rho,kappa,sigma)
  vega[j] <- Vega(s,r,q,K,tau,vol_mercado)
}
if(metodo==1){L <- mean(as.numeric((precios_bs-precios_heston)^2))}
if(metodo==2){L <- mean(as.numeric(abs(precios_bs-precios_heston)/precios_bs))}
if(metodo==3){L <- mean(as.numeric(((precios_bs-precios_heston)/vega)^2))}
return(L)
}

```

donde la función *Vega* está dada por

```

Vega <- function(s,r,q,K,tau,sigma){
  d1 <- (log(s/K)+(r-q+.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau))
  V <- s*exp(-q*tau)*pnorm(d1)*sqrt(tau)
  return(V)
}

```

Por último se muestra el código final que incluye las funciones anteriores y en donde se implementa el algoritmo differential evolution a través de la función *DEoptim* de la paquetería *DEoptim* y la función *EuropeanOptionImpliedVolatility* de la paquetería *RQuantLib* para el cálculo de la volatilidad implícita.

```

library(stringr)

```

```

library(dplyr)
library(tidyr)
library(NMOF)
library(DEoptim)
library(RQuantLib)

##### Funciones requeridas y datos de mercado #####

setwd("C:/Users/KB/Documents/Adrian/Tesis/Codigos v3/")
source("Funciones Tesis v3.R")

# El csv contiene las curvas de descuento, precios, strikes y volatilidades
datos <- read.csv("Precios Opciones de Mercado.csv",header = T)

Tasas <- select(datos,dias,tau,r,q)
Strikes <- select(datos,dias,starts_with("Strike"))
Vol <- select(datos,dias,starts_with("Vol"))
PreciosBS <- select(datos,dias,starts_with("Call"))

names(Strikes) <- str_replace(names(Strikes),"Strike.", "")
names(Vol) <- str_replace(names(Vol),"Vol.", "")
names(PreciosBS) <- str_replace(names(PreciosBS),"Call.", "")

# Indicadora con 1 para call y -1 para put
Tipo <- matrix(1,nrow=nrow(PreciosBS),ncol=ncol(PreciosBS)-1)
names(Tipo) <- names(PreciosBS)[2:ncol(PreciosBS)]
Tipo[,which(str_sub(names(Tipo),start = -1)=="P")] <- -1

# Parametros Mercado
s <- 22.0362
dia <- 360
v <- Vol[which(Vol$dias==dia),"ATM"]^2
metodo <- 2

# metodo 1: error medio cuadrado
# metodo 2: error medio relativo
# metodo 3: error medio cuadrado ponderado por vega

##### Calibracion con Differential Evolution #####

set.seed(7954597)

```

```

A <- DEoptim(Perdida,lower = c(0.000001,-1,0.1,1),upper = c(1,1,3,20),
            control = list(NP=50*4,itermax=200))
A$optim$bestval
P <- A$optim$bestmem
theta <- P[1]
rho <- P[2]
sigma <- P[3]
kappa <- P[4]

##### Comparativa con precios de mercado #####

precios_bs <- PreciosBS[which(PreciosBS$dias==dia),2:length(PreciosBS)]
precios_heston <- numeric(length(precios_bs))
vega <- numeric(length(precios_bs))
tau <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"tau"] # vencimiento
r <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"r"] # tasa descuento local
q <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"q"] # tasa descuento extranjera
for(j in 1:length(precios_heston)){
  K <- Strikes[which(Strikes$dias==dia),1+j]
  tipo <- Tipo[which(Strikes$dias==dia),j]
  vol_mercado <- Vol[which(Vol$dias==dia),1+j]
  precios_heston[j] <- Heston(tipo,s,K,tau,r,q,v,theta,rho,kappa,sigma)
  vega[j] <- Vega(s,r,q,K,tau,vol_mercado)
}

if(metodo==1){
  L <- mean(as.numeric((precios_bs-precios_heston)^2))
  Dif <- (precios_bs-precios_heston)^2
  resultados <- rbind(precios_bs,precios_heston,Dif)
  row.names(resultados) <- c("Precios Mercado","Precios Heston","Diferencia Cuadrado")
}

if(metodo==2){
  L <- mean(as.numeric(abs(precios_bs-precios_heston)/precios_bs))
  Dif <- abs(precios_bs-precios_heston)/precios_bs
  resultados <- rbind(precios_bs,precios_heston,Dif)
  row.names(resultados) <- c("Precios Mercado","Precios Heston","Diferencia Relativa")
}

if(metodo==3){
  L <- mean(as.numeric(((precios_bs-precios_heston)/vega)^2))
  Dif <- ((precios_bs-precios_heston)/vega)^2
}

```

```

resultados <- rbind(precios_bs,precios_heston,Dif)
row.names(resultados) <- c("Precios Mercado","Precios Heston","Diferencia Vega")
}

write.csv(resultados,"Resultados.csv")

##### Comparativa con volatilidades implícitas #####

# El csv contiene los precios bajo el modelo Heston para cada función de pérdida
resultados <- read.csv("Resultados Heston.csv")
names(resultados) <- gsub("X","",names(resultados))
resultados$Modelo <- paste0("Heston",resultados$Modelo)
tau <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"tau"] # vencimiento
r <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"r"] # tasa descuento local
q <- Tasas[which(Tasas$dias==dia),"q"] # tasa descuento extranjera
Vol_Implicita <- matrix(nrow = nrow(resultados),ncol = ncol(resultados)-1)
for (i in 2:length(Strikes)) {
  K <- Strikes[which(Strikes$dias==dia),i]
  sigma <- Vol[which(Vol$dias==dia),i]
  tipo <- Tipo[which(Vol$dias==dia),i-1]
  tipo <- ifelse(tipo==-1,"put","call")
  for (j in 1:nrow(resultados)) {
    precio <- resultados[j,i]
    aux <- as.double(EuropeanOptionImpliedVolatility(type=tipo,
                                                    value=precio,
                                                    underlying=s,
                                                    strike=K,
                                                    dividendYield=q,
                                                    riskFreeRate=r,
                                                    maturity=tau,
                                                    volatility=sigma))

    Vol_Implicita[j,i-1] <- aux
  }
}

Vol_Implicita <- rbind(Vol_Implicita,as.numeric(Vol[which(Vol$dias==dia),-1]))
Modelo <- c(resultados[,1],"Mercado")
Vol_Implicita <- cbind.data.frame(Modelo,Vol_Implicita)
names(Vol_Implicita) <- names(resultados)

write.csv(Vol_Implicita,"Vol_Implicita.csv",row.names = F)

```

Bibliografía

- [1] ARDIA, D., MULLEN, K., PETERSON, B. and BOUNDT, K. (2021) *Package ‘DEoptim’*, CRAN. <https://cran.r-project.org/web/packages/DEoptim/DEoptim.pdf>.
- [2] BOUDEN (2007) *The behaviour of Implied Volatility Surface: Evidence from Crude Oil Futures Options*, University of Paris, January 2007.
- [3] BLACK, F. and SCHOLES, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. The Journal of Political Economy, 81, 637-654.
- [4] BRIGO, D. and MERCURIO, F. (2006) *Interest Rate Models: Theory and Practice. With Smile, Inflation and Credit*, Springer-Verlag, Berlin.
- [5] CASTAGNA, A. (2010) *FX Options and Smile Risk*, Wiley, New Jersey.
- [6] CESA, M. (2017) *A brief history of quantitative finance*, Probab Uncertain Quant Risk 2, 6.
- [7] CHRISTOFFERSEN, P., HESTON, S. and JACOBS, K. (2009) *The Shape and Term Structure of the Index Option Smirk: Why Multifactor Stochastic Volatility Models Work so Well*, Management Science, Vol. 55, No. 12, 1914-1932.
- [8] CLARK, I. (2011) *Foreign Exchange Option Pricing*, Wiley, United Kingdom.
- [9] DAGLISH, T., HULL, J. and SUO, W. (2007) *Volatility Surfaces: Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence*, Quantitative Finance, 7, 507-524.

- [10] EDDERBUETTEL, D., NGUYEN, K. and LEITCH, T. (2021) *Package ‘RQuantLib’*, CRAN. <https://cran.r-project.org/web/packages/RQuantLib/RQuantLib.pdf>.
- [11] DEL CASTILLO SPINDOLA, J.H. (2006) *Notas de clase de la materia de productos financieros derivados*, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [12] DERMAN, E. (2004) *My Life as a quant: Reflections on physics and finance*, Wiley, New Jersey.
- [13] DOUGLAS, R.F. and HESTON, S. (2013) *The Heston model and its extensions in Matlab and C#*, Wiley, New Jersey.
- [14] FALLAH, S. and MEHRDOUST, F. (2018) *On the existence and uniqueness of the solution to the double Heston model equation and valuing Lookback option*, Journal of Computational and Applied Mathematics.
- [15] FOUQUE, J.P., PAPANICOLAOU, G.C. and SIRCAR, K.R. (2000) *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [16] GIKHMAN, ILYA I., (2011) *A Short Remark on Feller’s Square Root Condition*, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1756450>.
- [17] HAGAN, P., KUMARY, D., LESNIEWSKI, A. and WOODWARD, D. (2002) *Managing smile risk*, Wilmott, September, 84-108.
- [18] HESTON, S. (1993) *A closed-form solution for options with stochastic volatility and application to bond and currency options*, The Review of Financial Studies, 6, 327-343.
- [19] HULL, J. (2018) *Options, Futures and other Derivative Securities*, 10th edition, Pearson, New York.
- [20] KARATZAS, I. and SHREVE, S. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York.

- [21] KLOEDEN, P. and PLATEN, E. (1995) *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer-Verlag, New York.
- [22] MCNEIL, A., FREY, R. and EMBRECHTS, P. (2005) *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, USA.
- [23] MUSIELA, M. and RUTKOWSKI, M. (2005) *Martingale Methods in Financial Modelling*, Spinger-Verlag, New York.
- [24] SCHUMANN, E. (2021) *Package ‘NMOF’*, CRAN. <https://cran.r-project.org/web/packages/NMOF/NMOF.pdf>.
- [25] SHREVE, S. (2004) *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer-Verlag, New York.
- [26] MERTON, R. C. (1973) *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183.
- [27] SPIVAK, M. (2012) *Calculus*, Reverté, Barcelona.
- [28] VOLLRATH, I. and WENDLAND, J. (2009) *Calibration of Interest Rate and Option Models using Differential Evolution*, FINCAD Corporation, Canada.
- [29] WANG, X., HE, X., BAO, Y. and ZHAO, Y. (2018) *Parameter estimates of Heston stochastic volatility model with MLE and consistent EKF algorithm*, Sci China Inf Sci, 61(4).
- [30] WYTSUP, UWE (2017) *FX Options and Structured Products*, Wiley, United Kingdom.