



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE SINGULARIDAD DE HAWKING

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ARELIS SERRATO MARTÍNEZ

TUTOR

DR. JUAN MANUEL GARCÍA ISLAS



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Dedicatoria

A todas y todos los que confiaron en mi en este largo proceso (se veía difícil).

# Agradecimientos

A mis padres, por su infinito y tierno amor.

Al amor que me acompañó desde el principio, cuando todas estas ideas no existían en mi cabeza hasta el día de hoy, que escribo el punto final.

A mi hermano de sangre y de vida, por traerme al mundo de las Matemáticas.

A las y los grandiosos profesores que cruzaron en mi camino.

A cada una de las personas que compartieron conmigo el espacio y el tiempo.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	2
1.2. Estructura de la tesis . . . . .	3
1.3. Preliminares . . . . .	3
1.3.1. Nociones básicas . . . . .	3
1.3.2. Métrica . . . . .	5
1.3.3. Variedades diferenciables . . . . .	7
1.3.4. Construyendo un espacio tiempo . . . . .	13
1.3.5. Espacio tiempo de Minkowski . . . . .	21
<b>2. Espacio-tiempo y causalidad</b>	<b>28</b>
2.0.1. Orientación temporal . . . . .	29
2.0.2. Condición cronológica . . . . .	33
2.0.3. Causalidad y estabilidad causal . . . . .	37
2.0.4. Hipersuperficie de Cauchy . . . . .	39
<b>3. Teorema de Singularidad de Hawking</b>	<b>40</b>
3.0.1. Espacio-tiempo singular . . . . .	40
3.0.2. Curvatura media . . . . .	41
3.0.3. Teorema de Singularidad de Hawking . . . . .	41

# Índice de figuras

1.1. Stephen Hawking y Roger Penrose . . . . .	2
1.2. Variedad diferenciable . . . . .	8
1.3. Plano tangente en $R^3$ . . . . .	10
1.4. Representación de la construcción de un espacio-tiempo . . . . .	14
1.5. Línea recta en un espacio-tiempo . . . . .	15
1.6. Planos de tiempo vistos como meses del año. . . . .	15
1.7. Planos de tiempo vistos como instantes (meses del año). . . . .	16
1.8. Planos de tiempo apilados. . . . .	17
1.9. Círculo en expansión. . . . .	18
1.10. Diagrama espacio-tiempo. . . . .	19
1.11. ¡Conos de luz por todos lados! . . . . .	20
1.12. Representación cono de luz . . . . .	21
1.13. Imagen de las publicaciones originales de Minkowski. . . . .	22
1.14. Imagen de las publicaciones originales de Minkowski. . . . .	23
1.15. Hermann Minkowski . . . . .	23
1.16. Representación de un cono de luz futuro y pasado. . . . .	27
2.1. Vectores tangentes dirigidos hacia el pasado y futuro . . . . .	30
2.2. Conos de luz y vectores. . . . .	30
2.3. Banda de Moebius. . . . .	31
2.4. Curva no cerrada. . . . .	36
2.5. Curva cerrada. . . . .	36

*We are just an advanced breed of monkeys on a minor planet of a very average star.  
But we can understand the Universe. That makes us something very special.*

**Stephen Hawking**

# Capítulo 1

## Introducción

En 1965 Roger Penrose probó el teorema pionero en singularidades, en su trabajo titulado *Conformal treatment of infinity*, con el cual introdujo también las técnicas globales para el estudio del espacio tiempo. Sin embargo, hay que remontarse tiempo atrás; George Gamow, en 1946, piensa sobre el origen del Universo, en el cual supone que la densidad y el calor eran suficientemente grandes para generar rápidamente reacciones termonucleares; Lemaitre, en 1950, argumenta que la expansión del Big bang se aproximaría rápidamente al Universo estático planteado por Einstein en 1917. Finalmente a mediados de 1960 Roger Penrose y Stephen Hawking se dedicaron al estudio de singularidades, desarrollando nuevas técnicas para analizarlas, los teoremas de singularidad propuestos por ellos, nos dicen que salvo efectos cuánticos, cualquier modelo 'razonable' del universo debe ser singular, es decir, el universo contiene regiones en donde las leyes de la física clásica se rompen, en otras palabras; la existencia de singularidades. Finalmente, en 1970, consiguen demostrar que según la teoría general de la relatividad, tuvo que haber en el pasado del universo un estado de densidad infinita, con toda la materia y energía concentradas en un espacio mínimo. Esa singularidad sería el principio del universo, el big bang, y el que marcaría el inicio del tiempo.

Penrose, se dedicó al estudio de las singularidades que surgen del colapso gravitacional (black holes), mientras que Hawking, se dedicó al estudio de la existencia de singularidades cosmológicas (big bang). En el presente trabajo, abordaremos a las singularidades desde el punto de vista de Hawking, ya que nuestra herramienta matemática es amable y nos permite mayor comprensión y claridad.

Los teoremas de singularidad se han convertido en una de las partes principales de la relatividad general y en un campo de interés tanto para otras ramas de la física o las matemáticas como para el público en general. Esto se debe a sus posibles consecuencias sobre el colapso gravitacional, la astrofísica y la cosmología. Dichos teoremas pueden considerarse como uno de los mayores logros de la relatividad, pero contienen algunas sutilezas matemáticas y físicas que hacen que, en algunas ocasiones, se interpreten incorrectamente o no se entiendan bien. Dado que la teoría de singularidades en la relatividad general es un asunto difícil, siempre se ha tratado de simplificar la redacción exacta de los teoremas manteniendo lo esencial, al señalar los puntos más





Figura 1.1: Stephen Hawking y Roger Penrose

importantes para que sus supuestos y conclusiones se puedan entender fácilmente y aplicarse a algunas situaciones físicas más sencillas.

Desafortunadamente, todos estos intentos de simplificación no han tenido mucho éxito, dado que se necesita un conocimiento bastante amplio de matemáticas y de causalidad en la relatividad general.

Se espera que el lector tenga conocimientos sólidos en Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Lineal, Geometría Diferencial y conceptos básicos de Geometría Riemanniana y Topología. De no ser así, se invita a consultar [1], [3], [4] [7], [14].

Para el lector que no posea conocimientos de Relatividad y desee profundizar, se invita a consultar [20], como un texto introductorio y de lectura obligada.

## 1.1. Objetivo

Uno de los retos más grandes al que se enfrentó este texto, es a la falta de información clara y amigable para un estudiante de Licenciatura.

Motivada por esto, se tiene como objetivo dar a un alumno de Licenciatura en Matemáticas y/o Física una introducción breve y elemental a las ideas que se requieren para una comprensión del Teorema de singularidad de Hawking, con la intención de establecer un nuevo enfoque contextualizado, a partir de trabajos existentes y relacionados, el cual nos permitirá obtener datos relevantes acerca de los enfoques teóricos e históricos del Teorema de Singularidad de Hawking, se organizará el material existente que conlleve a una mejor y más profunda comprensión en términos más familiares para un estudiante de iniciación. En cada caso, se opta por la presentación más elemental de cada idea.

## 1.2. Estructura de la tesis

Para clarificar los fines que se persiguen, tracemos la ruta a seguir en los cuatro capítulos que contiene este texto.

En el capítulo 1, se encuentran los preliminares que necesitamos para trabajar más adelante, se introducen los conceptos que se requieren para el desarrollo de la tesis, pasando por nociones básicas, variedades diferenciables, hasta algunas propiedades geométricas del espacio tiempo de Minkowski.

En el capítulo 2, hacemos una breve clasificación de las 4 – *variedades* que nos permitan diferenciar a los espacios tiempo que buscamos, se presentan los conceptos fundamentales de curvatura, y una elemental definición de una hipersuperficie de Cauchy.

En el capítulo 3, se muestran las propiedades de un espacio tiempo singular, se hace una recopilación de definiciones y propiedades de los capítulos anteriores que nos permitan finalmente enunciar el Teorema de singularidad de Hawking.

## 1.3. Preliminares

### 1.3.1. Nociones básicas

La métrica se puede definir de modo sencillo: la forma en que medimos distancias en un lugar o espacio determinado. Es la regla que determina a qué distancia se encuentra un objeto de otro, o que dimensiones tienen dichos objetos. Las geodésicas, por otra parte, se definen como las curvas de longitud mínima que unen los puntos del espacio o la variedad. Por lo tanto la métrica y las geodésicas tienen una estrecha relación.

Consideremos un ejemplo clásico, el de la geometría euclídeana para un espacio cartesiano de  $n$  dimensiones de números reales, es decir  $R^n$ .

Los puntos los llamaremos vectores y los denotaremos como  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde las  $n$  componentes  $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$ ; se dice que  $\mathbf{x} \in R^n$ .

La norma de un vector, o la distancia del punto al origen se define de la manera siguiente:

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)^{1/2}$$

y de modo similar se define la distancia entre dos puntos como

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

donde  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  son vectores de  $R^n$

Tenemos que la norma también puede representarse como una forma cuadrática, es decir, un producto de vectores y matrices, de modo tal que:

$$\|x\| = (xAx^T)^{1/2}$$

Donde  $A$  es una matriz cuadrada de  $n \times n$ , que denota la métrica. En el caso eu-

clideano, las componentes  $a_{ij}$  de esta matriz son justamente  $\delta_{i,j}$ , es decir, la delta de Kronecker, donde  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ . De este modo tenemos que la matriz  $A$  es justamente la matriz identidad de  $n \times n$ . Podemos expresar a la norma euclideana en forma matricial, como:

$$\|x\| = (xIx^T)^{1/2} = (\sum_{j=1}^n x_i x_j)^{1/2} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)^{1/2}$$

Por lo que las dos representaciones son equivalentes.

Ahora podemos medir la longitud de un vector, utilizaremos ésta para medir la longitud de una curva. Es necesario tomar para una curva parametrizada  $\alpha(t)$  el intervalo  $t$  de los extremos a medir.

De esta forma, la longitud de arco  $S(t)$  es dada por la forma:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

donde  $\alpha'(t) = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t))$ .

Claramente si  $A$  es otra vez la matriz identidad, por lo cual se obtiene la fórmula inicial:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t_0}^t (\alpha'(t)I(\alpha'(t))^T)^{1/2} dt \\ &= \int_{t_0}^t (\sum_{j=1}^n (\frac{d\alpha_i}{dt}(t))\delta_{i,j}(\frac{d\alpha_j}{dt}(t)))^{1/2} dt \\ &= \int_{t_0}^t ((\frac{d\alpha_1}{dt}(t))^2 + (\frac{d\alpha_2}{dt}(t))^2 + \dots + (\frac{d\alpha_n}{dt}(t))^2)^{1/2} dt \\ &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt. \end{aligned}$$

La geometría riemanniana en la relatividad general introduce fundamentos en los que el tipo de matrices presentadas, describen la métrica del espacio-tiempo en sí mismo. Éstas definen la manera en que la superficie o el espacio cambian punto a punto. De este modo, pueden describir entonces, la curvatura de dicho lugar. Este tipo de matrices tendrá un sentido lógico después de trabajar con ellas. Será claro por qué cuando una variedad es equivalente a un espacio euclideano en un punto, su métrica será equivalente a la matriz identidad, pero de igual manera, si en algún punto es similar a una esfera, será entonces, una matriz distinta que refleje la curvatura positiva de este sitio en particular.

A continuación recordaremos algunas nociones básicas de Álgebra tensorial.

Por convención a los vectores, covectores y formas cuadráticas, les llamaremos tensores, clasificaremos éstos de la siguiente manera.

- Escalares. Invariantes bajo el cambio de coordenadas, son tensores de rango cero.
- Vectores  $\xi = (\xi^i)$ . Como los vectores tangentes a una curva, son de rango uno y se transforman de acuerdo a:

$$\xi^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial z^j}{\partial x^i}$$

- Covectores  $\xi = (\xi_i)$ . Como el gradiente a una función, son de rango uno y se transforman de acuerdo a:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$$

- Los coeficientes  $g_{ij}$  del producto escalar de vectores, son de rango dos y se transforman como:

$$g_{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^n g_{k,l}(x) \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}$$

- Los coeficientes  $g^{ij}$  del producto escalar de covectores, son de rango dos y se transforman como:

$$g^{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^n g^{k,l}(x) \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l}$$

- Operadores lineales  $A = a_j^i$  en vectores (o covectores), son de rango dos y se transforman como:

$$a_j^i = \sum_{k,l=1}^n a_l^k(x) \frac{\partial z^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial z^j}$$

Siendo en todos los casos anteriores:

$$x^i = x^i(z^1, \dots, z^n), z^j = z^j(x^1, \dots, x^n)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta_j^i$$

$i, j = 1, \dots, n.$

### 1.3.2. Métrica

En geometría riemanniana con el uso del álgebra tensorial tomaremos la métrica como una 2-forma, es decir un tensor del tipo  $(0, 2)$ , que denotará la manera en que la variedad en cuestión cambia en cada dirección.

Podemos medir la longitud de arco de cualquier curva en la variedad, tomando la idea diferencial, tenemos:

$$\int_{t_0}^t (\sqrt{g_{ij} x^i x^j}) dt,$$

$$\int_{t_0}^t (\sqrt{g_{ij} \xi^i \xi^j}) dt,$$

$$\int_{t_0}^t (\sqrt{g_{kl} \frac{dz^k}{dx^i} \frac{dz^l}{dx^j} \xi^i \xi^j}) dt,$$

$$\int_{t_0}^t (\sqrt{g'_{kl} \eta^k \eta^l}) dt,$$

Por lo tanto, la longitud de arco de una curva es invariante bajo los sistemas de

coordenadas que usemos. De manera análoga podemos emplear la métrica para medir la longitud en los covectores, tomando:

$$S(t) = \int_{t_0}^t (\sqrt{g^{ij} \xi_i \xi_j}) dt$$

Con un desarrollo similar se muestra que  $S(t)$  es invariante bajo cambios de coordenadas.

### Una breve introducción a geodésicas y curvatura

La idea intuitiva de curvatura proviene de las superficies dos dimensionales que están inmersas en un espacio ordinario de tres dimensiones euclideo. Normalmente, se piensa en una superficie curvada por la forma en que se dobla en  $R^3$ . El interés que tendremos es de investigar la curvatura del espacio-tiempo. Hasta donde sabemos no existe una inmersión natural de esta variedad (nuestro espacio-tiempo) en un espacio de dimensión mayor. Por lo tanto, nuestra meta es desarrollar una noción de curvatura “ intrínseca ” sin importar dónde esté inmersa.

Dado que la métrica cambiará la manera de medir distancias punto a punto y la longitud de arco entre dos puntos dependerá de la curva en cuestión, entonces, será admisible unir los conceptos para hallar la trayectoria que nos lleve de A a B en el recorrido más corto. Estas curvas son conocidas como *geodésicas*. Ahora la pregunta es , ¿y qué relación tiene con la curvatura todo esto?

Realmente la curvatura es la culpable de que estas trayectorias ya no sean la línea recta como sucedía en nuestra experiencia euclidea. Los casos de superficies son estudiados en libros de geometría diferencial [3]. En nuestro contexto cotidiano es fácil considerar la Tierra como una esfera regular. Si a ésta le pegamos en un punto un plano el cual será tangente, veremos que toda la superficie de la esfera se queda de un solo lado de este plano. Es decir, en cualesquiera dos direcciones que se genere el plano (digamos el eje x y el eje y), la superficie “dobla” en la misma dirección, lo cual, determinaremos como una curvatura de signo positivo,  $K > 0$ . En caso de que el plano no pueda colocarse de manera tal que toque un sólo punto, entonces tenemos dos casos genéricos: cuando aún así la superficie queda de un solo lado del plano,  $K = 0$ , como el caso de los cilindros; y cuando la superficie se encuentra a ambos lados del plano, en cuyo caso, tomaremos esta curvatura como negativa,  $K < 0$ . Estos casos son las ideas intuitivas y generales, dado que solo tomaremos en cuenta estas referencias para vecindades cercanas al punto donde hemos colocado el plano tangente. Asimismo, ha de mencionarse que esta  $K$  se conoce como la curvatura gaussiana y se encuentra como el producto de la curvatura en las dos direcciones principales, es decir, las más extremas [19]. Parándonos nuevamente sobre la Tierra nos preguntamos cómo encontrar estas geodésicas dada la superficie. Es más fácil de lo que aparenta. Si caminamos en "línea recta"(lo cual no es posible pues estamos en una superficie curva, pero la sensación sí la obtenemos), lo hacemos en una geodésica, en un movimiento perpendicular al radio, pero sobre éste. Agrandemos la imagen un poco y seguimos caminando en nuestra línea recta, sin cambiar de dirección y justamente con el radio

que nos une al centro girando en una única dirección . Así, la intersección del plano de los radios y la esfera será la geodésica: un círculo de radio máximo de la esfera. Es decir, tanto el Ecuador como los meridianos son geodésicas, pero los paralelos no.

### 1.3.3. Variedades diferenciables

En esta sección, se introducen las definiciones básicas de la teoría de variedades diferenciables, se presenta sólo el material que es indispensable para nuestro estudio. Se siguen las definiciones de [4], [19],[18] .

Así como la teoría general de la relatividad modela mejor el Universo a gran escala, la geometría diferencial es el lenguaje más adecuado para desarrollar los principios de dicha teoría.

Comenzaremos por recordar algunas definiciones.

Una buena parte de los conceptos y resultados del análisis en  $R^n$  se puede extender a espacios más generales  $\mathbf{M}$ , que denominaremos variedades diferenciables. De una manera intuitiva, una variedad diferenciable  $\mathbf{M}$ , es un espacio que localmente es equivalente a  $R^n$ .

**Definition 1.3.1.** *Un subconjunto conexo  $M$  de algún  $\mathbf{R}^n$  es llamado una  $k$ -variedad si es localmente difeomorfo a  $\mathbf{R}^n$  i.e si para cada  $p \in M$  existe un subconjunto abierto conexo  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  y un mapeo  $\chi : U \rightarrow M$  tal que  $p \in \chi(U)$ .  $\chi(U)$  es abierto en  $M$  y  $\chi$  es un difeomorfismo de  $U$  en  $\chi(U)$ .*

**Definition 1.3.2.** *Un subconjunto  $U \subset R^n$ ,  $n \geq 1$  se dice que es abierto, si para cada  $p \in U$  existe una bola abierta contenida en  $U$ . Es decir  $B(p, \epsilon) := \{x \in R^n : \|p - x\| < \epsilon\} \subset U$  con  $\epsilon > 0$*

**Definition 1.3.3.** *Un conjunto abierto que contiene a  $p$  es llamado una vecindad de  $p$ .*

**Definition 1.3.4.** *Un subconjunto  $K$  de  $R^n$  es cerrado si su complemento es abierto.*

**Definition 1.3.5.** *Un subconjunto de  $X$  de la forma  $U \cap X$  donde  $U$  es abierto en  $R^n$ , es llamado abierto en  $X$ .*

*Un subconjunto  $K$  de  $X$  es cerrado en  $X$  si  $X - K$  es abierto en  $X$ .*

**Definition 1.3.6.** *Si  $X \subseteq R^n$  y  $Y \subseteq R^n$ , entonces el mapeo  $F : X \rightarrow Y$  es un difeomorfismo si  $F$  es suave, uno a uno y en la inversa del mapeo  $F^{-1} : Y \rightarrow X$  es también suave. (Si  $F$  y  $F^{-1}$  son sólo continuas entonces  $F$  es un homeomorfismo).*

**Definition 1.3.7.** *Si un difeomorfismo de  $X$  en  $Y$  existe, decimos que  $X$  y  $Y$  son difeomorfos (homeomorfos en el caso continuo).*

**Definition 1.3.8.** *Un subconjunto es conexo si se puede escribir como  $X = U_1 \cup U_2$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  son abiertos en  $X$  y disjuntos.*

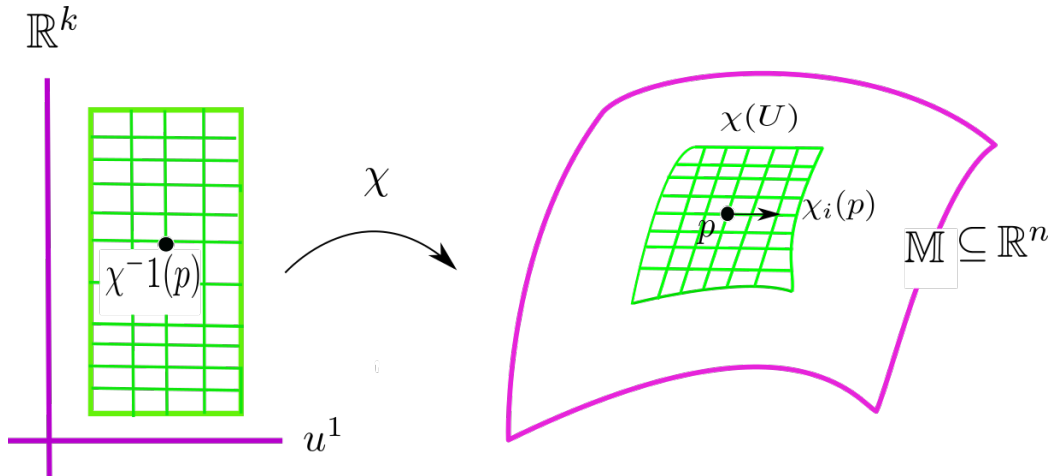


Figura 1.2: Variedad diferenciable

**Definition 1.3.9.** Un subconjunto conexo  $M$  de algún  $R^n$  es llamado una  $k$ -variedad suave si es localmente difeomorfo a  $R^k$  i.e si para cada  $p \in M$  existe un subconjunto abierto conexo  $U$  de  $R^k$  y un mapeo  $\chi : U \rightarrow M$  tal que  $p \in \chi(U)$ .

$\chi(U)$  es abierto en  $M$  y  $\chi$  es un difeomorfismo de  $U$  en  $\chi(U)$ .

De la definición anterior podemos deducir que para cada punto en una  $k$ -variedad suave está contenido en algún subconjunto abierto de  $M$  que es difeomorfo a todos los  $R^k$ .

Tal difeomorfismo local es llamado *carta de coordenadas* para  $M$ .

De la definición anterior se sigue que cada punto en una  $k$ -variedad suave está contenido en algún subconjunto abierto de  $M$  que es difeomorfo a todos los  $R^k$ .

Consideremos el conjunto de los números reales  $R$ , tomemos la identidad  $Id_R : R \rightarrow R$ . Entonces la carta coordenada de la identidad determina una estructura diferenciable 1 - dimensional en el conjunto  $R$ .

Sea  $U$  un conjunto abierto de  $R^n$ , consideremos la la función  $f : U \rightarrow R^n$  que es inyectiva y tiene codominio abierto. Entonces la carta coordenada  $f$  da una estructura diferenciable  $n$  - dimensional al abierto  $U$ .

En particular la identidad en  $R^n$  induce una estructura canónica de una variedad en  $R^n$ .

**Definition 1.3.10.** Un punto  $p \in R^{k+1}$  es un **punto regular** de  $f$  si al menos una de las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ , con  $i = 1, \dots, k + 1$  es distinta de cero en  $p$ . Un número real  $r$  es un **valor regular** de  $f$  si  $f^{-1}(r)$  consiste enteramente de puntos regulares.

**Definition 1.3.11.** Una  $k$  - variedad en  $R^{k+1}$  de la forma  $f^{-1}(r)$  donde  $r$  es un valor regular de  $f : R^{k+1} \rightarrow R$  es llamada una *hipersuperficie de nivel* de  $f$ .

En particular, la  $k$  - esfera  $S^k = \{p \in R^{k+1} : \|p\| = 1\}$  es una hipersuperficie de nivel de la función  $f(p) = \|p\|$ .

Cualquier subconjunto abierto de  $R^k$  es una  $k$  – variedad suave (tomando a  $\chi$  como el mapeo identidad).

En general, si  $M$  y  $N$  son variedades suaves en  $R^n$  y  $N \subseteq M$  entonces  $N$  es llamada una subvariedad de  $M$ .

En particular,  $M$  por sí mismo es una subvariedad de su espacio ambiente euclideo.

**Definition 1.3.12.** Si  $M$  es una subvariedad  $k$  – dimensional de  $R^n$  y  $N$  es una subvariedad  $1$  – dimensional de  $R^m$  entonces el producto cartesiano  $M \times N$  es un subconjunto de  $R^n \times R^m = R^{n+m}$ .

Mostramos ahora que en efecto es una subvariedad  $(k+1)$  – dimensional de  $R^{n+m}$ . Fijamos un punto  $(p, q) \in M \times N$  entonces existe un subconjunto abierto conexo  $D_1$  de  $R^k$  y un difeomorfismo  $\chi_1$  de  $D_1$  en un subconjunto abierto  $\chi(D_1)$  de  $N$  que contiene a  $p$ .

Analogamente para  $D_2$ , existe un subconjunto conexo abierto  $D_2$  de  $R^1$  y un difeomorfismo  $\chi_2$  de  $D_2$  sobre un subconjunto abierto  $\chi_2(D_2)$  de  $N$  que contiene a  $q$ .

Definimos el mapeo  $\chi_1 \times \chi_2 : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{n+m}$  por  $\chi_1 \times \chi_2(x, y) = (\chi_1(x), \chi_2(y))$ . Mostramos que  $D_1 \times D_2$  es un subconjunto conexo abierto de  $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^1$  y que  $\chi_1 \times \chi_2$  es un difeomorfismo de  $D_1 \times D_2$  en  $\chi_1(D_1), \chi_2(D_2)$  que es abierto en  $M \times N$ .

Llamamos a  $M \times N$  el producto de  $M$  y  $N$ .

**Definition 1.3.13.** Llamaremos a cada punto de una superficie suave en  $R^3$  asociado a ella un **plano tangente**  $2$  – dimensional que consiste de los vectores velocidad de todas las curvas suaves en la superficie a través de ese punto. La construcción análoga en una  $k$  – variedad suave  $M \in R^n$  procede como sigue: Si  $I \subset R$  es un intervalo, entonces el mapeo continuo  $\alpha : I \longrightarrow M(\subseteq R^n)$ ,  $\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , es una curva en  $M$ ,  $\alpha$  es suave si cada función coordenada  $x^i(t)$  con  $i = 1, \dots, n$  es  $C^\infty$  y si los  $\alpha$ 's vectores velocidad  $\alpha'(t) = (\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt})$  son distintos de cero para cada  $t \in I$ .

**Definition 1.3.14.** Sea  $\chi : D \longrightarrow M$  una carta coordenada en  $M$  donde  $D$  es un subconjunto abierto conexo de  $R^k$ .

Denotamos a las coordenadas estándar en  $R^k$  por  $u^1, \dots, u^k$  la  $i$  –ésima curva coordenada para  $\chi$  de  $\chi(u^1, \dots, u^k)$  con  $u^j (j \neq 1)$  fijos, su vector velocidad se denota por  $\chi_i$  y está dado por

$$\chi_i : \frac{\partial \chi}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i} (x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^n(u^1, \dots, u^k)) = \frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i}. \quad (1.1)$$

Las curvas de coordenada de  $\chi$  cubren a  $\chi(D)$  con un sistema de coordenada para cada  $p \in \chi(D)$  está especificado únicamente por  $k$  coordenadas (las coordenadas Cartesianas de  $\chi^{-1}(p)$ ).

En particular, cualquier función real definida en  $\chi(D)$  puede ser considerada como una función de estas  $k$  coordenadas al componer con  $\chi : f(u^1, \dots, u^k) = f \circ \chi$ .



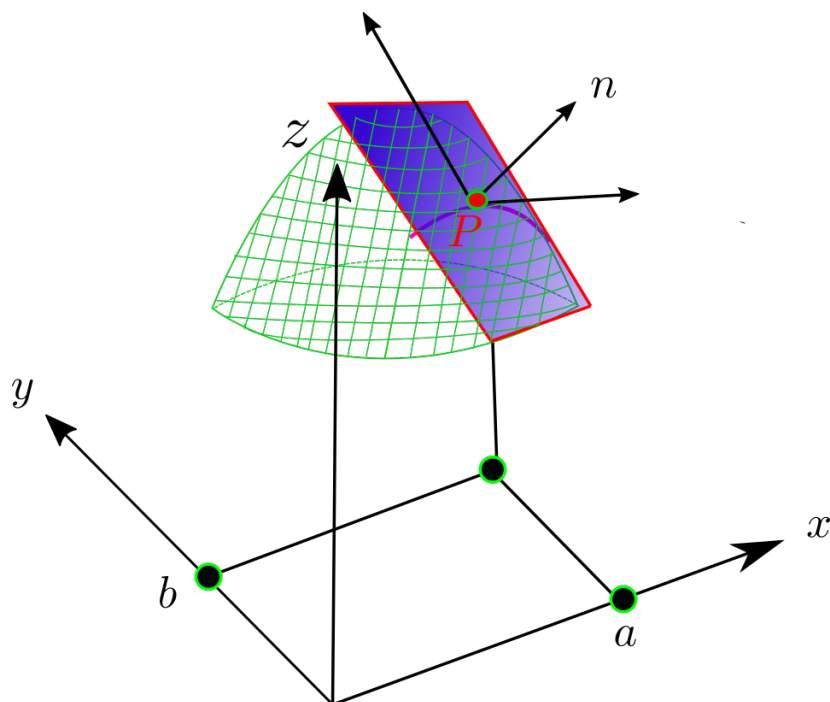


Figura 1.3: Plano tangente en  $R^3$

**Lemma 1.3.1.** *Sea  $\chi : D \rightarrow M$  suave, donde  $D$  es un subconjunto abierto conexo de  $R^k$  y  $M \subseteq R^n$  es una  $k$  - variedad suave. Definimos  $\chi_1, \dots, \chi_k$  a cada punto de  $D$  por*

$$f\chi_i = \frac{\partial \chi}{\partial u^i} = \left( \frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i} \right) \tag{1.2}$$

y sea  $p$  un punto de  $D$ .

Entonces  $\chi$  es un difeomorfismo de algún subconjunto abierto  $U$  de  $D$  que contiene a  $p$  sobre algún subconjunto  $V$  de  $M$  que contiene a  $F(p)$  si y sólo si  $\chi_1(p), \dots, \chi_k(p)$  son linealmente independientes i.e si y sólo si el **Jacobiano**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dots & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \dots & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix}$$

(1.3)

de  $F$  tiene rango  $k$  en  $p$ .

**Definición 1.3.15.** Consideramos una curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$  y asumimos que la imagen de  $\alpha$  está contenida en  $\chi(D)$  para alguna carta coordenada  $\chi : D \rightarrow M$ . Entonces  $\chi^{-1} \circ \alpha(t)$  es una curva suave  $t \rightarrow (u^1(t), \dots, u^k(t))$  en  $D$  y como  $\alpha$  puede escribirse como

$$\alpha(t) = \chi(u^1(t), \dots, u^k(t)). \quad (1.4)$$

Por la regla de la cadena,

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}\chi(u^1, \dots, u^k(t)) \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \chi}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt}, \quad (1.6)$$

$$\alpha(t) = (u^i(t))' \chi_i(\alpha(t)) = (u^i)' \chi_i \quad (1.7)$$

En cada punto  $p \in M$  decimos que es el **espacio tangente** de  $M$  en el punto  $p$ , denotado por  $T_p(M)$ , formado por el conjunto de todos los vectores velocidad en  $p$  de curvas suaves en  $M$  a través de  $p$ , junto con el vector cero.

Los elementos de  $T_p(M)$  son llamados **vectores tangentes** de  $M$  en  $p$  y cada uno es una combinación lineal de los vectores velocidad  $\{\chi_i(p)\}_{i=1}^k$ , para alguna carta coordenada  $\chi$  con  $p \in \chi(D)$ .

Ya que  $\chi$  es un difeomorfismo, los  $\chi_i$ , siendo columnas del Jacobiano, son linealmente independientes. En consecuencia, cualquier carta coordenada en  $p$  da lugar a una base para  $T_p(M)$  que consiste de vectores velocidad en  $p$ . En particular,  $T_p(M)$  es un espacio vectorial de dimensión  $k$ .

Enunciaremos algunas propiedades antes de definir al espacio tiempo de Minkowski, empezaremos por recordar algunas nociones básicas del Álgebra lineal.

**Definición 1.3.16.** Denotamos por  $V$  a un espacio vectorial arbitrario de dimensión  $n \geq 1$  en  $R$ .

Una forma bilineal en  $V$  es un mapeo  $g : V \times V \rightarrow R$  lineal en cada variable, i.e que cumpla que

$$g(a_1v_1 + a_2v_2, w) = a_1g(v_1, w) + a_2g(v_2, w) \quad (1.8)$$

$$g(v, a_1w_1 + a_2w_2) = a_1g(v, w_1) + a_2g(v, w_2), \quad (1.9)$$

$\forall a \in R; \forall v, w \in V.$

**Definition 1.3.17.** Si  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  y  $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  son dos bases ortonormales de  $M$  entonces existe una única transformación lineal  $L : M \rightarrow M$  tal que  $L(e_a) = \bar{e}_a$  para cada  $a = 0, 1, 2, 3$ . (Dicho mapeo, preserva el producto interior en  $M$ ). Una transformación lineal  $L : M \rightarrow M$  la llamamos una transformación ortogonal de  $M$  si  $L_x \cdot L_y = x \cdot y \quad \forall x, y \in M$   
Donde el producto interior es no degenerado, y el mapeo es un isomorfismo.

**Lemma 1.3.2.** Sea  $L : M \rightarrow M$  una transformación lineal, es equivalente:

- (a)  $L$  es una transformación ortogonal.
- (b)  $L$  preserva la forma cuadrática de  $M$  i, e  $Q(Lx) = Q(x) \quad \forall x \in M.$
- (c)  $L$  manda una base ortonormal de  $M$  a otra base ortonormal de  $M$ .

Ahora, sea  $L : M \rightarrow M$  una transformación ortogonal de  $M$  y  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  una base ortonormal de  $M$ , por el Lema se tiene que

$$\bar{e}_0 = Le_0, \quad \bar{e}_1 = Le_1, \quad \bar{e}_2 = Le_2, \quad \bar{e}_3 = Le_3$$

también forma una base ortonormal para  $M$ , en particular cada  $e_u, u = 1, 2, 3, 4$ , puede expresarse como combinación lineal de  $\bar{e}_a$ :

$$e_u = \Lambda_u^0 \bar{e}_0 + \Lambda_u^1 \bar{e}_1 + \Lambda_u^2 \bar{e}_2 + \Lambda_u^3 \bar{e}_3 \quad u = 0, 1, 2, 3 \quad (1.10)$$

donde los  $\Lambda_u^a$  son constantes.

Ahora las condiciones de ortogonalidad  $e_c \cdot e_d = \eta_{cd} \quad cd = 0, 1, 2, 3$  pueden escribirse como

$$-\Lambda_c^0 \Lambda_d^0 + \Lambda_c^1 \Lambda_d^1 + \Lambda_c^2 \Lambda_d^2 + \Lambda_c^3 \Lambda_d^3 = \eta_{cd}. \quad (1.11)$$

donde  $c, d = 0, 1, 2, 3$ . O por convención, escrita como

$$\Lambda_c^a \Lambda_d^b \eta_{ab} = \eta_{cd} \quad (1.12)$$

donde  $c, d = 0, 1, 2, 3$ .

Definimos la matriz  $\Lambda = [\Lambda_b^a]_{a,b=0,1,2,3}$  asociada a  $L$  por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{bmatrix}$$

Consideramos la matriz asociada a una transformación ortogonal  $L$  como una transformación coordenada de la matriz. Específicamente, si el evento  $x \in M$  tiene coordenadas  $x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$  a  $\{e_a\}$  entonces las coordenadas a  $\{\bar{e}_a\}$  son  $\{Le_a\}$  son  $x = \bar{x}^0 \bar{e}_0 + \bar{x}^1 \bar{e}_1 + \bar{x}^2 \bar{e}_2 + \bar{x}^3 \bar{e}_3$  donde

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{bmatrix} = [\Lambda_a^b] = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

i.e

$$\begin{aligned} \bar{x}^0 &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 + \Lambda_2^0 x^2 + \Lambda_3^0 x^3 \\ \bar{x}^1 &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 + \Lambda_2^1 x^2 + \Lambda_3^1 x^3 \\ \bar{x}^2 &= \Lambda_0^2 x^0 + \Lambda_1^2 x^1 + \Lambda_2^2 x^2 + \Lambda_3^2 x^3 \\ \bar{x}^3 &= \Lambda_0^3 x^0 + \Lambda_1^3 x^1 + \Lambda_2^3 x^2 + \Lambda_3^3 x^3 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Que generalmente escribiremos de manera más práctica como

$$\bar{x}^a = \Lambda_b^a x^b \quad (1.14)$$

donde  $a = 0, 1, 2, 3$ .

Cualquier matriz 4 x 4 que satisfaga  $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ , será llamada la transformación general (homogénea) de Lorentz. Nos referiremos a (1.13) como las transformaciones de Lorentz.

Las matrices de 4 x 4 que satisfacen  $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$  forman un grupo bajo la multiplicación de matrices, i.e es cerrado bajo productos e inversas. A este grupo lo llamaremos el grupo general (homogéneo) de Lorentz, el cual denotaremos como  $L_{GH}$ .

### 1.3.4. Construyendo un espacio tiempo

Construimos un espacio-tiempo tomando “instantes”, imaginemos que son representados como “planos de tiempo” y los iremos apilando. Es más fácil imaginar esto si empezamos con un espacio bidimensional. Las instantes tomados en diferentes momentos se apilan para obtener un espacio-tiempo tridimensional. En este espacio-tiempo, un pequeño cuerpo en reposo estará representado por una línea vertical. Para ver por qué es vertical, recordemos que tiene que intersectar cada “plano de tiempo” en el mismo punto. Una línea vertical lo hará. Si está en movimiento, intersectará cada “plano de tiempo” en un punto diferente; un cuerpo en movimiento se presenta mediante una línea inclinada hacia la vertical.

En la figura (1.5), una línea en movimiento se representa por las trayectorias en el espacio-tiempo de sus extremos. La línea en zig-zag es una señal de luz que rebota entre estos dos extremos.

Un punto que se mueve inercialmente, es decir, un punto que se mueve uniformemente en línea recta en el espacio, se representa por una línea recta en un espacio-tiempo. Pues tal movimiento cubre la misma distancia en el mismo tiempo.

A continuación mostramos un ejemplo un tanto familiar y geométrico para clarificar las ideas.

Tomamos los planos de tiempo de la Tierra orbitando el Sol en el espacio tridimensional en el curso de un año, que se verá como la figura (1.6)

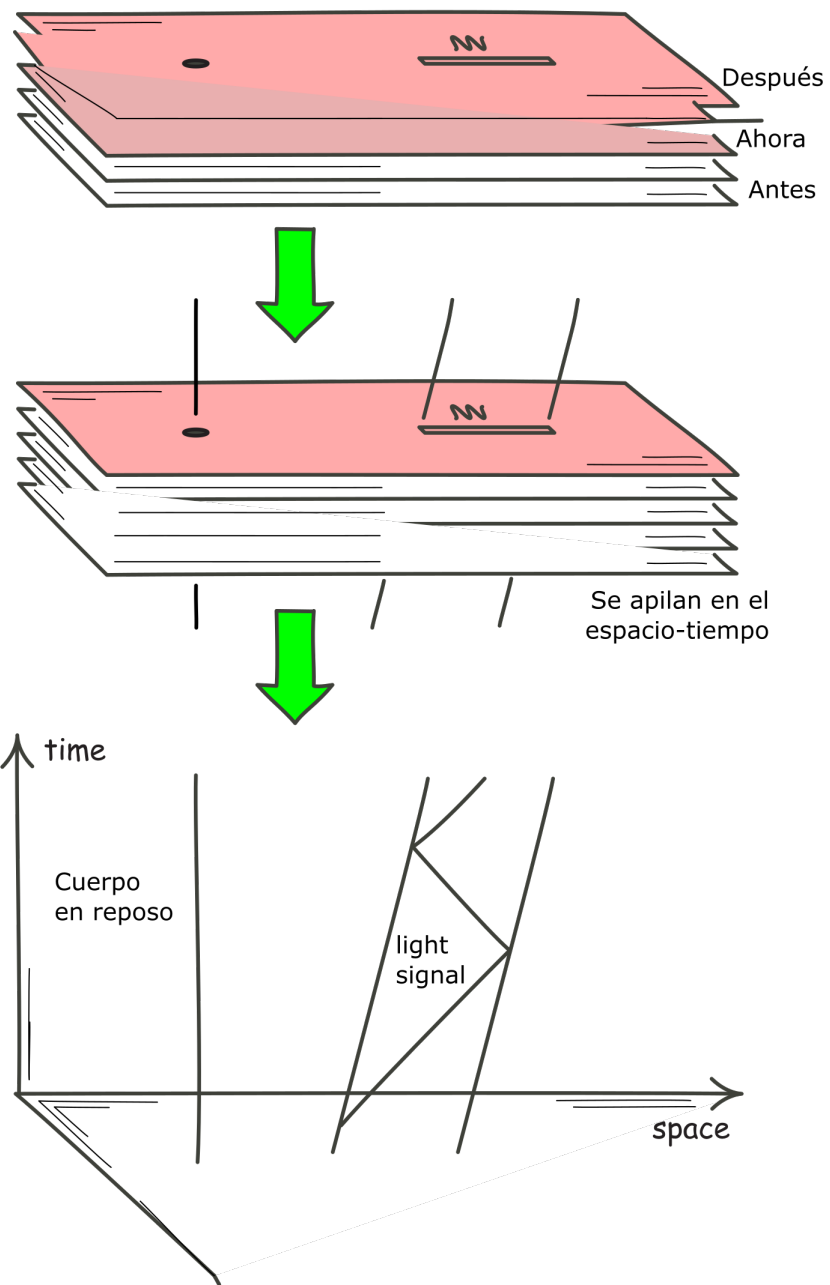


Figura 1.4: Representación de la construcción de un espacio-tiempo

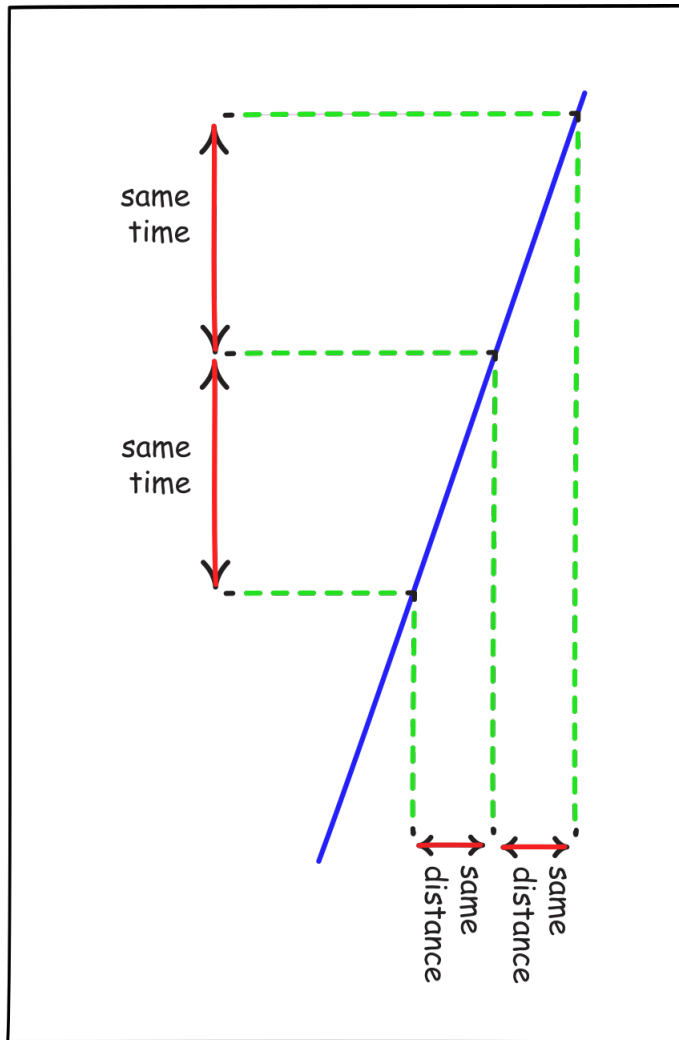


Figura 1.5: Línea recta en un espacio-tiempo

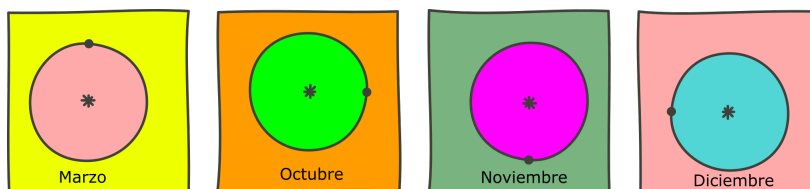


Figura 1.6: Planos de tiempo vistos como meses del año.

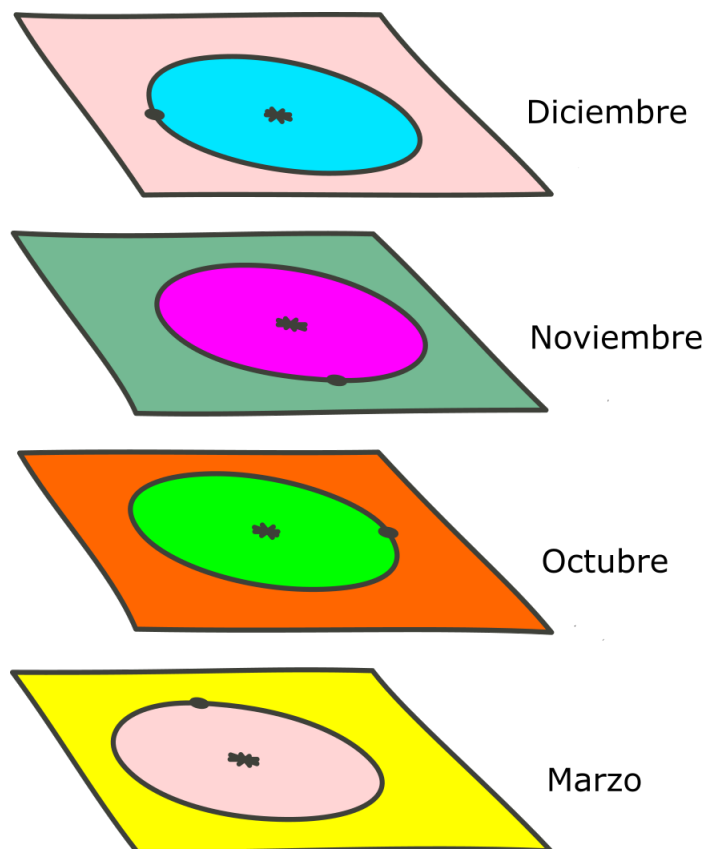


Figura 1.7: Planos de tiempo vistos como instantes (meses del año).

Ahora los apilamos en la tercera dimensión (1.7) y cuando limpiamos un poco las cosas (1.8) , ¡tenemos un espacio-tiempo!

Hasta ahora hemos descrito cómo un espacio bidimensional se combina para generar un espacio-tiempo tridimensional, tal como se muestra en las figuras anteriores. Así que cuando añadimos la dimensión extra del tiempo generamos un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

No hay una manera fácil de dibujar un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Visualizarlo puede ser muy difícil. Pero eso no lo convierte en algo misterioso. Se trata simplemente de otro tipo de espacio que trasciende la simple visualización. En física, las cuatro dimensiones son en realidad bastante modestas. ¡Así que no deberíamos asombrarnos demasiado por un espacio matemático con sólo cuatro dimensiones!

Que la velocidad de la luz es una constante es uno de los hechos más importantes sobre el espacio y el tiempo en la relatividad especial. Este hecho se expresa geométricamente en la geometría del espacio-tiempo a través de la existencia de conos de luz o, como se dice a veces, de la “estructura del cono de luz” del espacio-tiempo.

Para ver esa estructura, imaginamos un acontecimiento en el que se produce una explosión. La luz se propagará a partir de ella en una envoltura esférica en expansión. En un espacio bidimensional, se verá como un círculo en expansión, como se muestra a continuación.

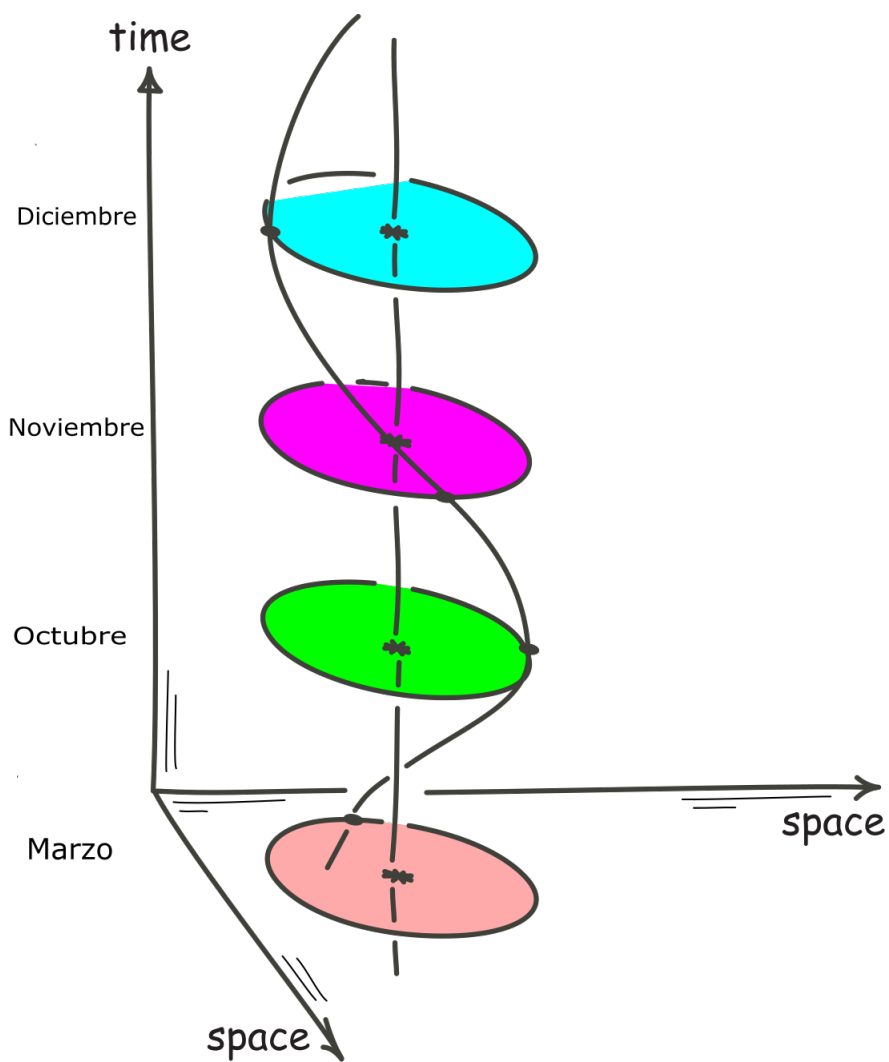


Figura 1.8: Planos de tiempo apilados.



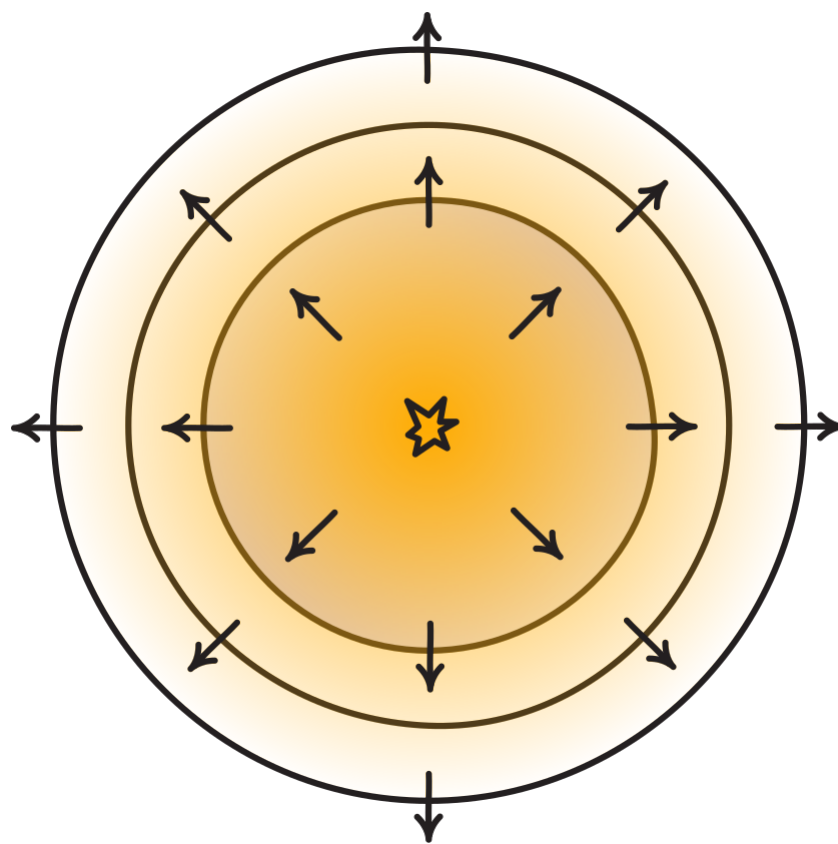


Figura 1.9: Círculo en expansión.

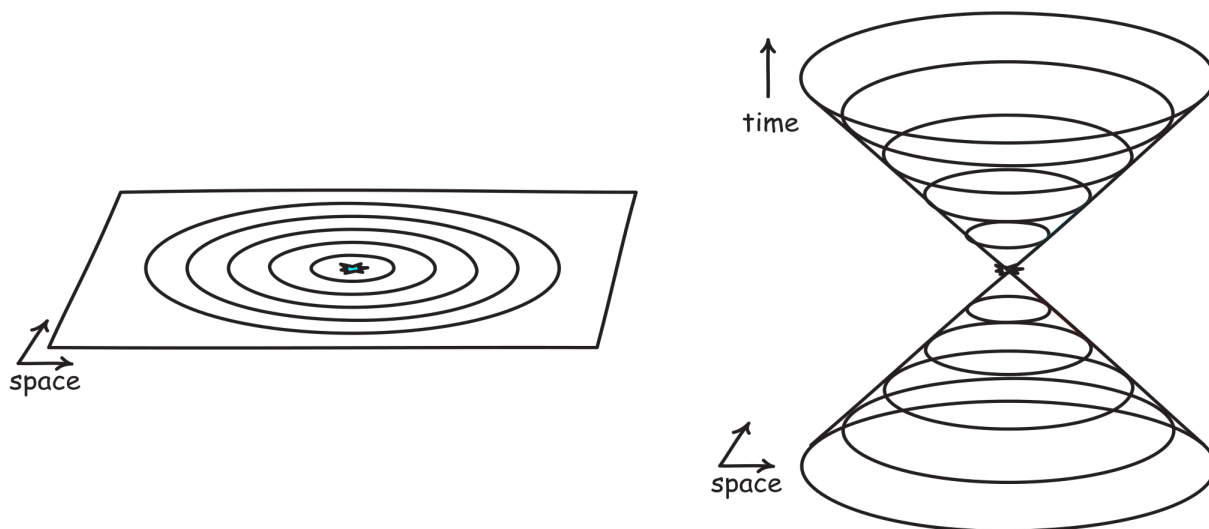


Figura 1.10: Diagrama espacio-tiempo.

Ahora apilamos estos planos de tiempo para formar un espacio-tiempo. El diagrama del espacio-tiempo que le corresponde tiene el aspecto de un cono. A medida que avanzamos por el cono, miramos en cada instante de tiempo para ver hasta dónde se ha propagado la luz. Cada intersección del cono con el espacio será un círculo.

Para tener un cono de luz, no necesitamos que la luz esté presente. Los conos trazan las trayectorias que seguiría la luz si ésta estuviera presente. Ya que sólo se trazan las posibilidades, no necesariamente las trayectorias de la luz real. El espacio-tiempo sigue teniendo una estructura de conos de luz en la oscuridad.

Para describir el cono de luz que acabamos de describir, hemos escogido un suceso en el espacio-tiempo y hemos imaginado todas las posibles trayectorias que podría tomar la luz al propagarse a través de ese suceso. Podríamos haber elegido cualquier evento en el espacio-tiempo. Habríamos encontrado conos de luz en cada uno de ellos. Eso significa que el espacio-tiempo está completamente lleno de conos de luz. Hay uno en cada evento

Hablar de espacio-tiempo puede dar lugar a muchas confusiones. Por ello, se ha creado un vocabulario bastante preciso que es importante utilizar correctamente.

- Espacio-tiempo. Cuando añadimos la dimensión extra del tiempo a un espacio, producimos un espaciotiempo.
- Eventos. Son los puntos individuales de un espaciotiempo. Representan puntos del espacio en un momento determinado.

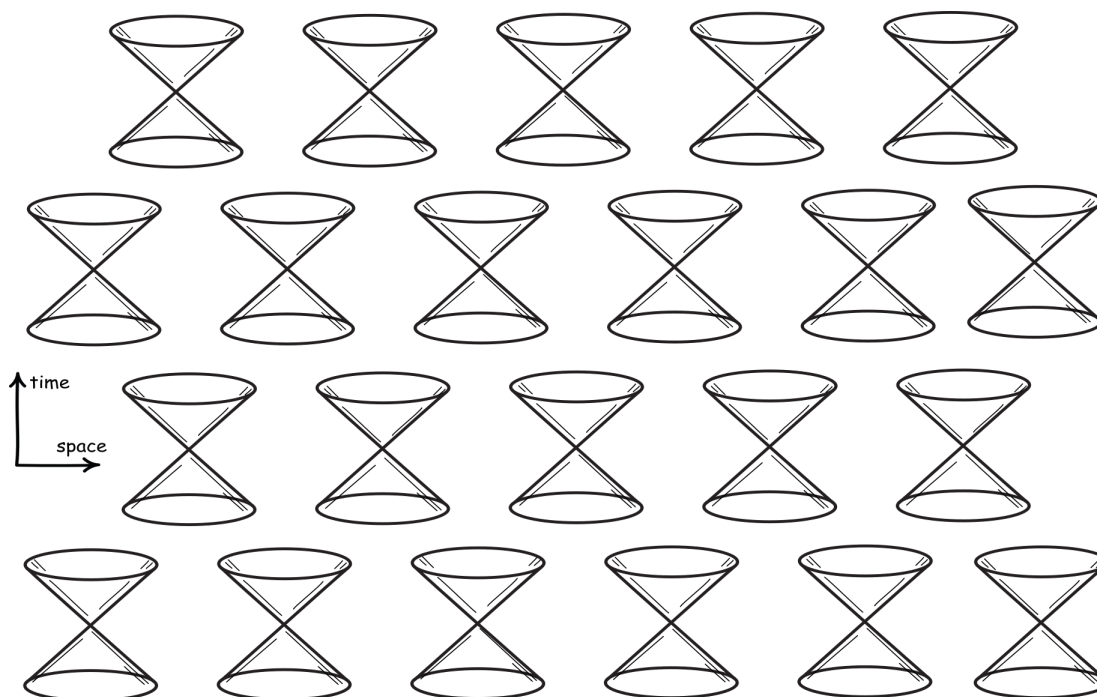


Figura 1.11: ¡Conos de luz por todos lados!

- Línea de tiempo. Es la trayectoria de un punto que se mueve a menos de la velocidad de la luz. Estas curvas están contenidas en el cono de luz. Representan las trayectorias de las partículas ordinarias, como los electrones, protones y neutrones, pero no de los fotones.
- Curva de luz. Es la trayectoria de un punto que se mueve a la velocidad de la luz: una señal luminosa o un fotón. Se encuentra en la superficie del cono de luz.
- Curva espacial. Es una curva que se encuentra fuera del cono de luz. Para que un objeto haga de esta curva su trayectoria, tendría que viajar más rápido que la luz.
- Hipersuperficies espaciales. Son los planos de tiempo del espacio-tiempo. Son tridimensionales en el caso de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.
- Conos de luz pasados y futuros. Todas las curvas de luz que pasan por un suceso forman el cono de luz en ese suceso. La parte del cono hacia el futuro de ese suceso es el cono de luz futuro. La parte hacia el pasado es el cono de luz pasado.
- Estructura de los conos de luz. Dado que la velocidad de la luz se considera generalmente la más rápida con la que las causas pueden propagar sus efectos,

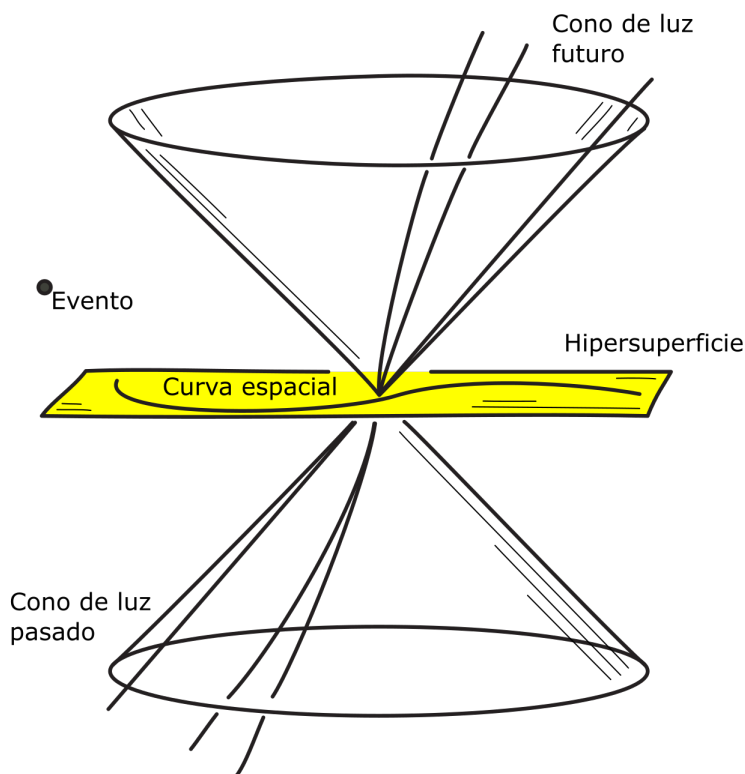


Figura 1.12: Representación cono de luz

una vez que sabemos cómo se distribuyen los conos de luz en el espacio podemos decir mucho sobre lo que es posible e imposible causalmente en el espaciotiempo. Por lo tanto, esta distribución es de gran interés para nosotros. Se denomina estructura de conos de luz del espacio.

- Geodésicas de tipo tiempo. Son curvas que son las posibles trayectorias en el espaciotiempo de puntos que se mueven inercialmente. Son líneas rectas que se encuentran dentro del cono de luz.

### 1.3.5. Espacio tiempo de Minkowski

En 1907, el matemático Hermann Minkowski exploró una forma de visualizar los efectos relativistas. Se trataba de su representación en el espacio-tiempo. Los efectos relativistas, bastante desconcertantes, pudieron comprenderse con facilidad dentro de la representación del espacio-tiempo y del trabajo en la teoría de la relatividad, poco a poco empezó a transformarse en un estudio sobre la geometría del espacio-tiempo.

Un espaciotiempo de Minkowski tiene una geometría en un sentido análogo a la geometría de un espacio euclidiano. Ambas son geometrías "métricas". Esto significa que son geometrías que se ocupan de las distancias.

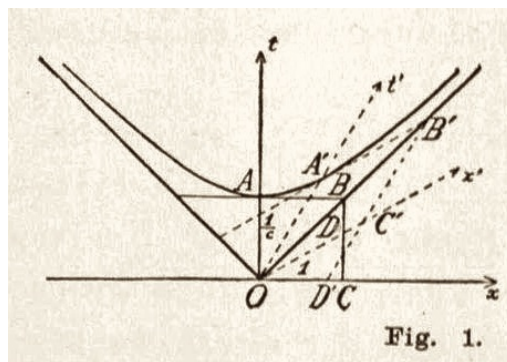


Figura 1.13: Imagen de las publicaciones originales de Minkowski.

El espaciotiempo de Minkowski también tiene una geometría métrica. En lugar de puntos euclidianos, se basa en eventos del espacio-tiempo. La geometría especifica la distancia espaciotemporal de cada suceso a cualquier otro suceso en el espacio-tiempo. La especificación es un poco más complicada que la de la geometría euclidiana. En el caso euclidiano, sólo hay un tipo de distancia. En un espacio-tiempo de Minkowski, hay tres tipos de distancia, conocidos conjuntamente como "intervalo." "intervalo del espacio-tiempo". La más sencilla es la distancia de un evento a otro que está separado espacialmente de él. Es decir, el segundo evento se encuentra fuera del cono de luz del primero. La distancia no es más que la distancia que se mide de la forma habitual. Se suele llamar "distancia propia". En el siguiente caso, el segundo evento está separado temporalmente del primero. Es decir, se encuentra dentro del cono de luz del primer suceso. Esta distancia en el espacio-tiempo se mide con un reloj que se mueve inercialmente desde el primer suceso hasta el segundo. El tiempo leído en el reloj nos da el intervalo de espaciotiempo entre los dos eventos. También se llama "tiempo propio".

Por último, el segundo evento puede estar ligeramente separado del primero. Es decir, se encuentra en el cono de luz del evento. Entonces el intervalo hasta el evento es cero; y es cero sin importar en qué lugar del cono de luz se encuentre ese segundo evento. Existe una construcción en la geometría del espacio-tiempo de Minkowski que es análoga al círculo de la geometría euclidiana. Una vez más, localizamos todos los puntos que están separados una unidad, dos unidades, etc., en el intervalo del espacio-tiempo desde nuestro evento inicial.

Las líneas punteadas representan el cono de luz del suceso inicial (1.13, 1.14). Las curvas dentro del cono de luz son los lugares de los puntos que distan una unidad y dos unidades de tiempo propio de él. Son hipérbolas que se aproximan al cono de luz de forma arbitraria. Las curvas fuera del cono de luz son también hipérbolas. Ahora son los lugares de todos los puntos que se encuentran a una unidad y dos unidades de distancia propia del suceso inicial. Las hipérbolas son los análogos en la geometría de Minkowski de los círculos en la geometría euclidiana.

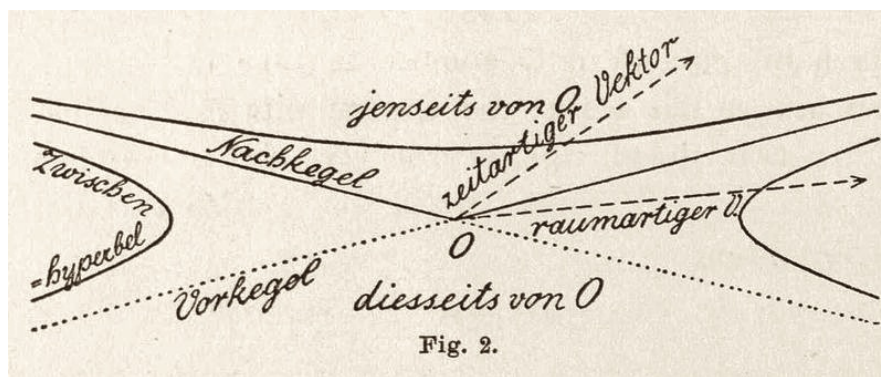


Figura 1.14: Imagen de las publicaciones originales de Minkowski.

Con las ideas antes mencionadas, ya podemos hablar de una manera más formal. Comenzamos por establecer una estructura en la cual podamos trabajar, dicha estructura es un conjunto abstracto que denotaremos por  $M$ , cuyos elementos llamaremos "eventos". Proporcionaremos a ese conjunto una estructura matemática que refleje ciertos hechos simples de la experiencia humana. Usaremos el término evento en el sentido idealizado de un "evento puntual", es decir, una ocurrencia física que no tiene extensión espacial ni duración en el tiempo. Toda la historia de una partícula estará representada por una secuencia continua de eventos que llamaremos "línea de mundo" de la partícula.

La idea de espacio tiempo abordada en este capítulo, es la formulada y propuesta por Hermann Minkowski. "En 1908 Hermann Minkowski mostró que la relatividad especial de Einstein podía reinterpretarse como la geometría de un espacio-tiempo de 4 dimensiones dotado de una estructura causal dada por los conos de luz"[20].



Figura 1.15: Hermann Minkowski

**Definition 1.3.18.** *Un espacio tiempo de Minkowski (el cual denotamos como  $\mathbf{M}$ ), es un espacio vectorial 4-dimensional con un producto interior  $g$ .*

Sea  $g : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{R}$  una forma bilineal, simétrica y no degenerada. Los elementos de  $M$  son llamados eventos.

**Definition 1.3.19.** Sea  $\mathbf{M}$  el espacio tiempo de Minkowski, existe una base  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ , para  $\mathbf{M}$  tal que

$$x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \quad (1.15)$$

$$y = y^0 e_0 + y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3 \quad (1.16)$$

entonces

$$g(x, y) = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \quad (1.17)$$

De ahora en adelante podemos considerar a  $\mathbf{M}$  como un modelo del mundo de eventos que es visto y descrito por observadores.

Ya que hemos determinado que la línea de mundo es localmente como  $\mathbf{M}$  en cada uno de sus puntos, elegimos modelarla con una 4 – variedad (formada por tres dimensiones espaciales y una temporal), cuyos espacios tangentes están todos dotados de la estructura del espacio tiempo de Minkowski, es decir, de un **producto interior de Lorentz**.

Una función suave de un producto interior de cada espacio tangente de una variedad  $\mathbf{M}$  es llamada una métrica en  $\mathbf{M}$ ; es decir.

**Definition 1.3.20.** Una métrica (o tensor métrico)  $g$  en una  $k$  – variedad suave  $\mathbf{M}$ , es una función de cada espacio tangente  $T_p(\mathbf{M})$  de un producto interior  $g_p = \langle, \rangle_p$  tal que las funciones componentes

$$g_{ij} = g_p(\chi_i(p), \chi_j(p)) = \langle \chi_i(p), \chi_j(p) \rangle_p \quad (1.18)$$

son  $C^\infty$  en  $\chi(D)$  para cada carta coordenada  $\chi$  en  $p$ .

Si cada producto interior  $g_p$  es de índice uno, entonces la métrica  $g$  es llamada una **métrica de Lorentz**; si cada  $g_p$  tiene índice cero (i.e es positivo definido), entonces  $g$  es una **métrica Riemanniana**.

El principio de equivalencia llevó a Einstein a pensar que la gravedad podía identificarse con la curvatura del espacio tiempo. Matemáticamente esto quiere decir que la teoría de la gravedad debería ser lo que se conoce como una “teoría métrica”, en la cual la gravedad se manifiesta única y exclusivamente a través de una distorsión en la geometría del espacio tiempo. [16]

**Definition 1.3.21.** Un **espacio tiempo**  $\mathbf{M}$  es una 4 – variedad en la que se define una métrica de Lorentz.

El espacio tiempo es un objeto físico que se estira, se deforma, se transforma, tal y como ocurre en el mundo topológico.

El obstáculo más grande para un estudio global de variedades espacio temporales, es su gran número y diversidad. Las 4-*variedades* son abundantes y casi todas admiten una métrica de Lorentz. Sin embargo, la mayoría de estas son físicamente sin sentido, así que debemos comenzar tratando de reducir un poco el campo de visión, tenemos que imponer ciertas restricciones adicionales a nuestras 4-*variedades* de Lorentz que cualquier modelo 'razonable' de la línea de mundo debería satisfacer. El interés en el estudio de las variedades de Lorentz radica en el hecho de que sirven como modelos del espacio tiempo en la Relatividad General.

**Definition 1.3.22.** *En  $M$ , una forma cuadrática asociada es*

$$Q(x) = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (1.19)$$

**Definition 1.3.23.** *Un vector  $x \in M$  es llamado tipo espacio, tipo tiempo o nulo si  $Q(x) > 0$ ,  $Q(x) < 0$  o  $Q(x) = 0$  respectivamente.*

Los vectores espaciales corresponden a eventos tales que un objeto tendrá que moverse más rápido que la luz para llegar de un intervalo a otro (están separados principalmente en el "espacio"), los vectores temporales son eventos en donde un objeto tiene que moverse más lento que la luz para llegar de un intervalo a otro (están separados principalmente en el "tiempo"), y los vectores nulos a eventos que pueden alcanzarse viajando precisamente a la velocidad de la luz (la frontera entre separación espacial y temporal). Todo objeto material se mueve siguiendo trayectorias de rango temporales, y la luz se mueve siguiendo trayectorias nulas. Las trayectorias nulas definen lo que se conoce como el cono de luz. El cono de luz indica los eventos que pueden tener influencia física entre sí, lo cual nos define la causalidad.

En cada punto  $p \in M$  se puede llamar "futuro" a la mitad superior del cono de luz. Si es posible hacer que la función sea continua en todos los puntos de la variedad, entonces diremos que la variedad es **orientable temporalmente** y, si tal es el caso, entonces existe un campo vectorial de clase  $C^\infty$  que no se anula en ningún punto y que es de tipo tiempo en toda la variedad. Diremos que una curva es de género luz, espacio o tiempo dependiendo de si su vector tangente es nulo, espacial o temporal en todos los puntos de la misma.

Consideramos dos eventos distintos  $x_0$  y  $x$  para los cuales el vector de desplazamiento  $x - x_0$  de  $x_0$  a  $x$  es nulo, *i.e.*;  $Q(x - x_0) = 0$  a cualquier base.

$$-(x^0 - x_0^0)^2 + (x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2 = 0 \quad (1.20)$$

**Definition 1.3.24.** *Decimos que  $x - x_0$  es un vector futuro dirigido si  $x^3 > 0$  y pasado dirigido si  $x^3 < 0$ .*

Ahora, definimos la relación binaria  $<$  en  $M$  como sigue:  $x_0 < x$  si  $x - x_0$  es nulo y futuro dirigido. La separación espacial de  $x_0$  y  $x$  es igual a la distancia que la luz



viajará durante el lapso de tiempo entre  $x_0$  y  $x$ , la interpretación física de  $x_0 < x$  es que un fotón "puede pasar" de  $x_0$  a  $x$ , i.e; que  $x_0$  y  $x$  respectivamente pueden considerarse como la emisión y posterior recepción de alguna señal luminosa.

**Definition 1.3.25.** Para cualesquiera dos eventos distintos  $x_0$  y  $x$  con  $Q(x - x_0) = 0$  definimos el rayo de luz;

$$R_{x_0,x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbf{R}\} \quad (1.21)$$

**Definition 1.3.26.** Definimos al cono de luz;

$$C_N(x_0) = \{x \in M : Q(x - x_0) = 0\} \quad (1.22)$$

**Lemma 1.3.3.** Dos vectores nulos  $x, y \in M$  distintos de cero son ortogonales si y solo si son paralelos, i.e; si y solo si existe  $t \in \mathbf{R}$  tal que  $x = ty$ .

**Proposition 1.3.4.** Sea  $x_0$  y  $x$  dos eventos distintos con  $Q(x - x_0) = 0$ . Entonces

$$R_{x_0,x} = C_N(x) \cap C_N(x_0).$$

*Demostración.* Sea  $z = x_0 + t(x - x_0)$  un elemento de  $R_{x_0,x}$ .

Entonces  $z - x_0 = t(x - x_0)$  y  $Q(z - x_0) = t^2 Q(x - x_0) = 0$  y  $z \in C_N(x_0)$ . Análogamente  $z \in C_N(x)$ . Donde cada uno de los vectores  $z - x$ ,  $z - x_0$  y  $x_0 - x$  son nulos.

Pero  $z - x_0 = (z - x) - (x_0 - x)$  y

$$0 = Q(z - x_0) = (z - x)^2 - 2(z - x)(x_0 - x) + (x_0 - x)^2 = -2(z - x)(x_0 - x).$$

Por lo que  $(z - x)(x_0 - x) = 0$ . Tenemos dos casos, si  $z = x$  se cumple. Si  $z \neq x$ , entonces como  $x_0 \neq x$  por el Lema 1.3.5, los vectores nulos ortogonales se obtienen con un  $t \in \mathbf{R}$  tal que  $z - x = t(x_0 - x)$ . Entonces  $z \in R_{x_0,x}$ .

$$R_{x_0,x} = C_N(x) \cap C_N(x_0).$$

□

**Definition 1.3.27.** Para cualquier  $x_0 \in M$  definimos el cono de luz futuro en  $x_0$  como

$$C_{N^+}(x_0) = \{x \in M : x_0 < x\}$$

y al cono de luz pasado en  $x_0$  por

$$C_{N^-}(x_0) = \{x \in M : x < x_0\} .$$

$x \in C_{N^+}(x_0)$  si y solo si una señal de luz emitida en  $x_0$  se puede recibir en  $x$ . Observemos que  $C_{N^+}(x_0)$  se puede considerar como la historia en el espacio tiempo de una onda esférica electromagnética (fotones en todas las direcciones) cuyo evento de emisión es  $x_0$ .

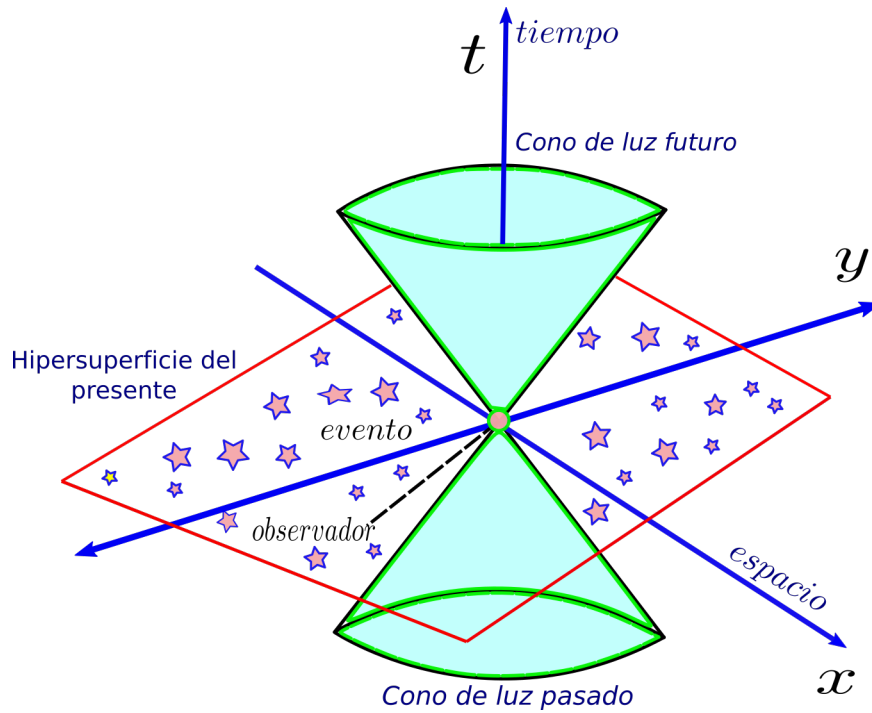


Figura 1.16: Representación de un cono de luz futuro y pasado.

**Definición 1.3.28.** Para cualesquiera dos eventos  $x$  y  $x_0$  para los cuales  $x - x_0$  es de tipo tiempo, definimos la **duración**  $\tau(x - x_0)$  de  $x - x_0$  por

$$\tau(x - x_0) = \sqrt{-Q(x - x_0)} \quad (1.23)$$

Si el vector  $x = x - 0$  es de tipo tiempo generalmente se escribe como

$$\tau(x - 0) = \tau(x) = \sqrt{-Q(x)}. \quad (1.24)$$

Por lo anterior  $\tau(x - x_0)$  se interpreta físicamente como la separación temporal de  $x$  y  $x_0$  en cualquier marco de referencia admisible en el que ambos eventos ocurran en el mismo punto espacial.

## Capítulo 2

# Espacio-tiempo y causalidad

Ya que hemos determinado que la línea de mundo es localmente como  $M$  en cada uno de sus puntos, elegimos modelarla por una 4 – *variedad* suave, cuyos espacios tangentes están todos dotados de la estructura del espacio tiempo de Minkowski, *i.e* de un producto interior de Lorentz.

**Definition 2.0.1.** *Una función suave de un producto interior de cada espacio tangente de una variedad  $M$  es llamada una **métrica** en  $M$ .*

Una métrica (o tensor métrico)  $g$  en una  $k$  – *variedad* suave  $M$ , es una función de cada espacio tangente  $T_p(M)$  de un producto interior  $g_p = \langle, \rangle_p$  tal que las funciones componentes

$$g_{ij} = g_p(\chi_i(p), \chi_j(p)) = \langle \chi_i(p), \chi_j(p) \rangle_p.$$

son  $C^\infty$  en  $\chi(D)$  para cada carta coordenada  $\chi$  en  $p$ .

Si cada producto interior  $g_p$  es de índice uno, entonces la métrica  $g$  es llamada una **métrica de Lorentz**; si cada  $g_p$  tiene índice cero (*i.e* es positivo definido), entonces  $g$  es una **métrica Riemanniana**.

**Definition 2.0.2.** *Un **espacio-tiempo**  $M$  es una 4 – *variedad* suave, en la que se define una métrica de Lorentz.*

La suposición de que la métrica  $g$  de un espacio-tiempo tiene índice uno, significa que cada  $T_p(M)$  tiene una base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  tal que  $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$ . Por otro lado, una base de coordenadas  $\chi_i(p)$  correspondiente a alguna carta coordenada,  $g(\chi_i, \chi_i) = g_{ij}$  de modo que si  $v = v^i \chi_i$  y  $w = w^j \chi_j$ , entonces

$$g(v, w) = g(v^i \chi_i, w^j \chi_j) = g^{ij} v^i w^j$$

**Definition 2.0.3.** *Si  $M$  es un espacio tiempo, entonces el vector tangente  $v$  es de tipo espacio si  $g(v, v) > 0$ , de tipo tiempo si  $g(v, v) < 0$ , nulo si  $g(v, v) = 0$ .*

**Definition 2.0.4.** *El cono nulo de  $p$  en  $M$  es el subconjunto  $\{v \in T_p(M) : g(v, v) = 0\}$  de  $T_p(M)$ .*

Sea  $D = R^4$  y tomamos  $\chi$  como el mapeo identidad en  $R^4$ , *i.e.*,

$$\chi(u^1, u^2, u^3, u^4) = (u^1, u^2, u^3, u^4)(x^i(u^1, u^2, u^3, u^4) = u^i, i = 1, 2, 3, 4.$$

Denotamos  $\chi(D)$  por  $M$  y tenemos  $\chi_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\chi_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\chi_3 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\chi_4 = (0, 0, 0, 1)$  tal que en efecto, cada  $T_p(M)$  puede identificarse con  $R^4$ .

Definimos una métrica  $g$  en  $M$ , especificando sus funciones componentes por  $g_{ij}(p)$  asociadas a  $\{\chi_i(p)\}_{i=1}^4$ .

Como se esperaba, tomamos

$$g_{ij}(p) = g(\chi_i(p), \chi_j(p)) = \eta_{ij}$$

Tenemos que  $g_{ij}(p)$  es en este caso constante *i.e.* linealmente independiente de  $p$ .

El espacio tiempo DeSitter denotado  $D$  será identificado como una variedad con una hipersuperficie de nivel en  $R^5$ .

Ciertamente, la métrica en  $D$  será la restricción al producto interior de Minkowski en  $R^5$ . Específicamente, denotamos por  $R_1^5$  al espacio lineal  $R^5$  con el producto interior  $g_1$  definido por

$$g_1(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4 - x^5y^5 \text{ donde } x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \text{ y } y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)$$

La forma cuadrática asociada  $Q_1 : R^5 \rightarrow R$  es definida, usualmente por

$$Q_1(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 - (x^5)^2$$

es suave en todo  $R^5$ .

Las 4-*variedades* son abundantes y casi todas admiten una métrica de Lorentz. Sin embargo, la mayoría de estos son, físicamente sin sentido, así que debemos comenzar tratando de reducir un poco el campo de visión, tenemos que imponer ciertas restricciones adicionales a nuestras 4-*variedades* de Lorentz que cualquier modelo razonable de la línea de mundo debería satisfacer.

### 2.0.1. Orientación temporal

Una curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$  es espacial, temporal o nula si sus vectores velocidad  $\alpha'(t)$  son tipo espacio, tipo tiempo, o nulos respectivamente para cada  $t \in I$ .

La línea de mundo de una partícula es una curva que atraviesa una "dirección" específica (de "pasado" a "futuro") determinada por lo que llamamos "*flecha del tiempo*". Ahora, en cualquier punto fijo  $p$  de  $M$ , la distinción entre vectores tangentes de tiempo "dirigidos hacia el pasado" "dirigidos hacia el futuro".

Si  $\{e_i\}_{i=1}^4$  es una base ortonormal de  $T_p(M)$  y  $v = v^i e_i$ ,  $w = w^i e_i$  son ambas tipo tiempo, entonces  $v^4 w^4 > 0$  si y sólo si  $g(v, w) < 0$ .

Así, la relación  $v \sim w$  si y sólo si  $g(v, w) < 0$ , es una relación de equivalencia en el conjunto de vectores tipo tiempo en  $T_p(M)$ , con precisamente dos clases de equivalencia. Por lo cual, podemos clasificar a los elementos en una de estas dos clases

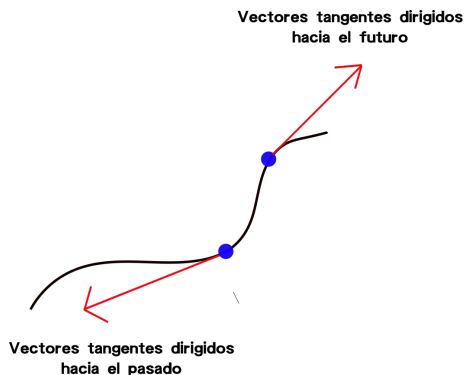


Figura 2.1: Vectores tangentes dirigidos hacia el pasado y futuro

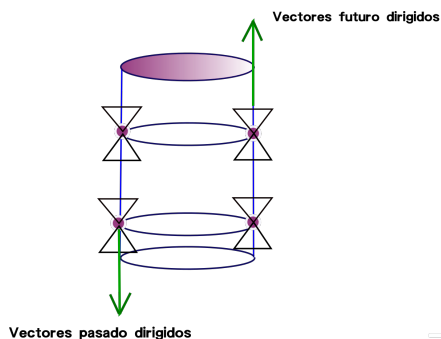


Figura 2.2: Conos de luz y vectores.

como "dirigidos al futuro" o "dirigidos al pasado" (la elección es bastante arbitraria, por supuesto, así como la elección de una base estándar para  $M$ ). Sin embargo, para proporcionar una orientación en el tiempo a lo largo de la longitud de una curva, la distinción local entre el pasado y el futuro en cada punto no es suficiente.

**Definición 2.0.5.** *Un vector tipo tiempo  $v$  en algún punto  $p \in M$  es futuro dirigido si  $g(V(p), v) < 0$  y pasado dirigido si  $g(V(p), v) > 0$ .*

**Definición 2.0.6.** *Una curva tipo tiempo  $\alpha : I \rightarrow M$  es futura dirigida si  $g(V(\alpha(t)), \alpha'(t)) < 0 \forall t \in I$  y pasada dirigida si  $g(V(\alpha(t)), \alpha'(t)) > 0$ .*

Las curvas temporales dirigidas al futuro se identifican con la línea de mundo de una partícula en  $M$ .

Las elecciones deben ser consistentes, es decir, deben variar suavemente de un punto a otro a lo largo de la curva y, si la curva se cierra, debemos insistir en que al atravesarla y regresar a nuestro punto de partida no suceda que nos encontremos con nosotros mismos en una clase de equivalencia diferente.

La situación aquí no es diferente a la de la banda de Mobius en  $R^3$ , que tiene la propiedad de que no hay una elección consistente y uniforme de un vector normal sobre toda la superficie, aunque los vectores normales se seleccionan fácilmente en cada punto (ver figura). También nos podemos imaginar un espacio tiempo en el que cualquier selección de clases de equivalencia para designar el futuro debe "girar sobre sí misma y ser inconsistente" [16].

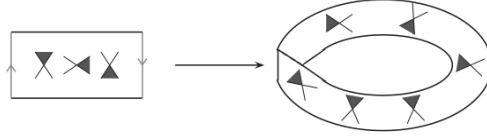


Figura 2.3: Banda de Moebius.

Para prohibir un comportamiento tan anómalo insistiremos en que todos nuestros espacios tiempo tengan que satisfacer una condición de “orientabilidad” a la que llegamos de la siguiente manera: primero observemos que seleccionar una de las dos clases de equivalencia de vectores tipo tiempo en cada  $p \in M$  para designar el futuro dirigido, es equivalente a seleccionar en cada  $p$ , solo un vector de tiempo  $V(p)$  y acordando que otro vector tipo tiempo  $v \in T_p(M)$  es futuro dirigido *si*  $g(V(p), v) < 0$ .

Por lo tanto definimos un campo vectorial en una variedad arbitraria  $M$  para ser una función  $V$  que asocia a cada  $p \in M$  un único vector tangente  $V(p) \in T_p(M)$ .  $V$  se dice que es suave si, para cualquier carta de coordenada  $\chi$ , las funciones componentes  $V^i$ ,  $i = 1, \dots, k$  definidas por  $V(p) = V^i \chi_i(p)$  son  $C^\infty$  en  $\chi(D)$ . [16], [17].

Ahora, podemos decir que un espacio tiempo  $M$  es orientable en el tiempo si podemos definir un campo vectorial suave  $V$  en donde cada vector es un vector tipo tiempo. De ahora en adelante, asumiremos que nuestros espacios tiempo, son orientables en el tiempo, *i.e* temporalmente orientables con una elección específica de algún vector tipo tiempo en un campo vectorial  $V$  (o  $M$ ,  $D$  y  $E$ ).

**Definition 2.0.7.** Sea  $M$  una variedad arbitraria con una métrica, definimos para cada carta coordenada  $\chi \in M$ , los símbolos de Christoffel (o la segunda forma fundamental)  $\Gamma_{i,j}^r$  por

$$\Gamma_{i,j}^r = \frac{1}{2} g^r \left\langle \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^1} \right\rangle \quad (2.1)$$

donde  $g_{ab}$  son las componentes de la métrica asociada a  $\chi$ ,  $(g^{ab})$  es la matriz inversa de  $g_{ab}$ ,  $u^1, \dots, u^k$  son las coordenadas cartesianas en el dominio de  $\chi$ .

**Definition 2.0.8.** Una curva suave,  $\mu = \mu(t)$  decimos que es una geodésica de  $M$  si, para cada  $\chi$

$$(u^r)'' + \Gamma_{i,j}^r (u^i)' (u^j)' = 0; \quad r = 1, \dots, k. \quad (2.2)$$

donde

$$\mu(t) = \chi(u^1(t), \dots, u^k(t)) \quad (2.3)$$

**Theorem 2.0.1.** Sea  $p$  un punto en una variedad  $M$  (Riemanniana o Lorentziana) y  $v$  un vector tangente de  $M$  en un punto  $p$ .

Existe una única geodésica maximal  $\mu$  definida en algún intervalo  $I$ , alrededor del cero, que se ajusta a  $v$  en  $p$ .

Ahora, consideramos una función  $f$  suave con valores reales en alguna variedad  $M$ . Para cada  $p \in M$  y  $v \in T_p(M)$ . Denotamos  $V[f]$  como la derivada de  $f$  en la dirección de  $v$  en  $p$ , i.e,

$$V[f] = \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0}$$

donde  $\alpha = \alpha(t)$  es alguna curva suave en  $M$  que ajusta a  $v$  en  $p$ . Observemos que si  $\chi$  es alguna carta coordenada de  $p$  en  $M$  con  $\alpha(t) = \chi(u^1(t), \dots, u^k(t))$  y  $v = v^i \chi_i$ , entonces

$$V[f] = \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \frac{du^i}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial u^i} v^i \quad (2.4)$$

de modo que la definición no depende de la elección de  $\alpha$ . Abusaremos de notación con lo siguiente,

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \text{ por } \frac{\partial(f \circ \chi)}{\partial u^i}(\chi^{-1}(p)).$$

Ahora, definimos un campo vectorial suave en  $M$  llamado el *gradiente* de  $f$  y denotado  $\nabla f$ . Cerca de cada punto  $p$  de  $M$ , seleccionamos una carta de coordenadas y establecemos lo siguiente,

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^i} \chi_j.$$

Si  $Q : M \rightarrow \mathbf{R}$  es definido por  $Q(u^1, u^2, u^3, u^4) = (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^4)^2$  tenemos que,

$$\nabla Q = g^{ij} \frac{\partial Q}{\partial u^i} \chi_j = \eta^{ij} \frac{\partial Q}{\partial u^i} e_j = 2u^1 e_1 + 2u^2 e_2 + 2u^3 e_3 + 2u^4 e_4 = 2u^i e_i.$$

Entonces, el gradiente de la función en  $M$  es un múltiplo del vector posición  $u^i e_i$ .

**Lemma 2.0.2.** *Sea  $M$  una variedad suave con métrica,  $p \in M$ ,  $v \in T_p(M)$  y  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  una función suave. Entonces*

$$V[f] = \langle \nabla f(p), v \rangle \quad (2.5)$$

*Demostración.* Elegimos una curva suave  $\alpha$  que se ajusta a  $v$  en  $p$ . Entonces, para alguna carta coordenada

$$\chi, \langle \nabla f(p), v \rangle = \langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle \quad (2.6)$$

$$= g_{ab} (g^{ia} \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \frac{du^a}{dt}(0)) \quad (2.7)$$

$$= \Delta_b^i \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \frac{du^b}{dt}(0) = v(f) \quad (2.8)$$

lo cual se cumple por (2.0.1).  $\square$

### 2.0.2. Condición cronológica

Para nuestro estudio de la condición de cronología en el espacio tiempo, necesitaremos una serie de propiedades básicas de las geodésicas. Pero antes, reformularemos la definición e introduciremos alguna terminología y notación estándar.

**Definición 2.0.9.** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva suave en una variedad  $M$ . Un campo vectorial a lo largo de  $\alpha$  es una función  $V$  que asigna a cada  $t \in I$  un vector tangente  $V(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$ .

**Definición 2.0.10.** Decimos que  $V$  es suave en  $t_0 \in I$ ,  $\alpha : I \rightarrow M$ , si para cada elección de  $J$  y  $\chi$ , las funciones componente  $V^i(t)$  definidas por  $V(t) = V^i(t)\chi_i(\alpha(t))$ ,  $t \in J$ , son  $C^\infty$ .

$V$  es suave si es suave en cada  $t_0 \in I$ . El ejemplo más evidente, es el campo vectorial de velocidad  $t$ .

**Definición 2.0.11.** Un campo vectorial es suave a lo largo de  $\alpha$  si para cada  $\chi$ ,

$$\frac{dV^r}{dt} + \Gamma_{ij}^r \frac{du^j}{dt} V^i = 0, \quad r = 1, \dots, k.$$

donde  $\alpha(t) = \chi(u^1(t), \dots, u^k(t))$ .

Entonces, una geodésica es una curva  $\mu$ , cuyo campo vectorial de velocidad  $\mu'$  es paralelo a lo largo de  $\mu$ .

Llamaremos a  $V(t)$  la *traslación paralela* de  $V(t_0)$  a lo largo de  $\alpha$ . Finalmente, si  $V$  es algún campo vectorial suave a lo largo de  $\alpha$  es otro campo vectorial a lo largo de  $\alpha$  denotado por  $D_{\alpha'}V$  y definido para cada  $t$  por

$$D_{\alpha'}V = \left[ \frac{dV^r}{dt} + \Gamma_{ij}^r \frac{du^j}{dt} V^i \right] \chi_r, \quad (2.9)$$

donde  $t$  está restringido a algún intervalo  $J$  de  $I$  que se asigna a una carta coordenada.

Entonces, un campo vectorial a lo largo de  $\alpha$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$ , si su derivada covariante a lo largo de  $\alpha$  es cero y las ecuaciones 2.0.11 se pueden escribir como

$$D_{\mu'}\mu' = 0.$$

**Lemma 2.0.3.** *Regla del producto.*

Sea  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ , es una curva suave en la variedad  $M$  con una métrica y  $V, W$  campos vectoriales a lo largo de  $\alpha$ . Entonces

$$\frac{d}{dt}(V \cdot W) = V \cdot D_{\alpha'}W + W \cdot D_{\alpha'}V. \quad (2.10)$$



*Demostración.* Escribimos  $\alpha(t) = \chi(u^1(t), \dots, u^k(t))$ ,  $V = V^r(t)\chi_r(\alpha(t))$  y  $W = W^r(t)\chi_r(\alpha(t))$  para  $t \in J$

Así ,

$$\begin{aligned} & V \cdot D_{\alpha'} W + W \cdot D_{\alpha'} V \\ &= g_{rl} V^r \left( \frac{dW^l}{dt} + \Gamma_{ij}^l \frac{du^j}{dt} W^i \right) + g_{rl} W^r \left( \frac{dV^l}{dt} + \Gamma_{ij}^l \frac{du^j}{dt} V^i \right) \\ &= g_{rl} \left( V^r \frac{dW^l}{dt} + W^r \frac{dV^l}{dt} \right) + g_{rl} \Gamma_{ij}^l \frac{du^j}{dt} (V^r W^i + W^r V^i) \end{aligned}$$

Simplificamos el segundo término como sigue,

$$g_{rl} \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g_{rl} g^{lm} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) = \frac{1}{2} \delta_r^m \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_{rl} \Gamma_{ij}^l \frac{du^j}{dt} (V^r W^i + W^r V^i) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right) \frac{du^j}{dt} (V^r W^i + W^r V^i) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} \frac{du^j}{dt} (V^r W^i + W^r V^i) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right) \frac{du^j}{dt} \frac{du^i}{dt} (V^r W^i + W^r V^i) \\ &= \frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} \frac{du^j}{dt} V^i W^r \\ &= \frac{dg_{ir}}{dt} V^i W^r = \frac{dg_{rl}}{dt} V^r W^l \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V \cdot D_{\alpha'} W + W \cdot D_{\alpha'} V &= g_{rl} \left( V^r \frac{dW^l}{dt} + W^r \frac{dV^l}{dt} \right) + \frac{dg_{rl}}{dt} V^r W^l \\ &= g_{rl} V^r \frac{dW^l}{dt} + g_{rl} W^l \frac{dV^r}{dt} + \frac{dg_{rl}}{dt} V^r W^l \\ &= \frac{d}{dt} (g_{rl} V^r W^l) \\ &= \frac{d}{dt} (V \cdot W). \end{aligned}$$

□

**Theorem 2.0.4.** *La traslación a lo largo de una curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$  preserva el producto punto, i.e si  $V$  y  $W$  son paralelos a lo largo de  $\alpha$ , entonces  $g(V(t), W(t))$  es constante.*

*Demostración.*  $\frac{d}{dt} g(V(t), W(t))$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} (V \cdot W) = V \cdot D_{\alpha'} W + W \cdot D_{\alpha'} V \\ &= V \cdot 0 + W \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Si  $\mu : I \rightarrow M$  es una geodésica de  $M$ , entonces  $g(\mu'(t), \mu'(t))$  es constante. Si una curva es o no geodésica depende tanto de su parametrización como de su imagen.

**Definition 2.0.12.** *Si  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva suave arbitraria y  $h : I \rightarrow J$ ,  $t = h(s)$ , es una función suave en el intervalo  $J$  con  $h'(s) > 0$  en  $J$ , entonces  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow M$  es una curva suave llamada una reparametrización de  $\alpha$ .*

**Theorem 2.0.5.** *Sea  $\mu : I \rightarrow M$  es una geodésica no degenerada. Una reparametrización  $\mu \circ h : J \rightarrow M$  de  $\mu$  es una geodésica sii es de la forma  $h(s) = ms + b$  para  $b$  y  $m$  constantes.*

*Demostración.* Sea  $\frac{d^2 u^r}{dt^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0$ ,  $r = 1, \dots, k$ .

Por la regla de la cadena

$$\frac{du^r}{ds} + \Gamma_{ij}^r \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = (h'(s))^2 \left[ \frac{d^2 u^r}{dt^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right] + (h''(s)) \frac{du^r}{dt} = (h''(s)) \frac{du^r}{dt}.$$

Como  $\mu$  es no degenerada,  $\mu'$  es distinta de cero por lo que algunos  $\frac{du^r}{dt}$  deben ser distintos de cero en cada  $t$ .

Entonces, la representación de la curva satisface las ecuaciones geodésicas sii,  $h''(s) = 0$  i.e  $h(s) = ms + b$ .  $\square$

**Definition 2.0.13.** *Si  $M$  es un espacio tiempo y  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva ( $\alpha = \alpha(t)$ ) y algunos  $t_0 \in I$  fijos, entonces un parámetro del tiempo propio  $\tau$  a lo largo de  $\alpha$  está definido por*

$$\tau = \tau(t) = \int_{t_0}^t |g(\alpha'(t), \alpha'(t))|^{1/2} dt \quad (2.11)$$

donde  $\frac{d\tau}{dt} = |g(\alpha', \alpha')|^{1/2}$  y  $g(\alpha', \alpha')$  nunca es cero.  $\alpha$  puede reparametrizarse en términos de  $\tau$ .

Usaremos el mismo nombre para estas parametrizaciones del tiempo propio de  $\alpha$  y escribiremos  $\alpha = \alpha(\tau)$ .

Observemos que si  $\mu$  es una geodésica temporal, entonces el corolario (2.0.2) implica que el parámetro del tiempo propio  $\tau$  a lo largo de  $\mu$  satisface  $\tau = k(t - t_0)$  para alguna constante positiva  $k$  y por el Teorema (2.0.5)  $\mu = \mu(\tau)$  es también una geodésica.

Antes de utilizar toda esta información para nuestro estudio de orientabilidad temporal y cronología, es necesario introducir el siguiente concepto, mediante el cual podemos precisar el hecho de que cada evento puede verse desde un *marco local de referencia inercial*.

**Definition 2.0.14.** *Sea  $M$  una variedad con métrica. Un punto fijo  $p \in M$  y sea  $D_p$  el conjunto de todos los vectores  $v \in T_p(M)$  para el cual la geodésica maximal  $\mu$  que ajusta a  $v$  en  $p$  en al menos  $[0, 1]$ .*

**Definition 2.0.15.** *El mapeo exponencial de  $p$  es la función  $\exp_p : D_p \rightarrow M$  definida por  $\exp_p(v) = \mu(1)$ ,  $\forall v \in D_p$ .*

Entonces,  $\exp_p(v)$  es el punto en  $M$  que es la distancia de parámetro 1 a lo largo de una única geodésica que ajusta a  $v$  en  $p$ . Observemos que  $\exp_p(0) = p$  (geodésica no degenerada) y que  $D_p$  cumple que  $tv \in D_p$  cuando  $v \in D_p$  y  $0t1$ .

Stephen Hawking trató de evitar el problema de las curvas cerradas tipo tiempo introduciendo lo que él llamó, “*conjetura de protección de la cronología*” sin embargo hasta ahora no hay ninguna prueba de esta conjetura. La condición de cronología nos establece lo siguiente.

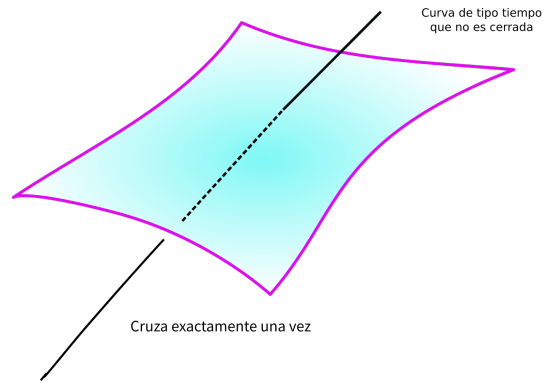


Figura 2.4: Curva no cerrada.

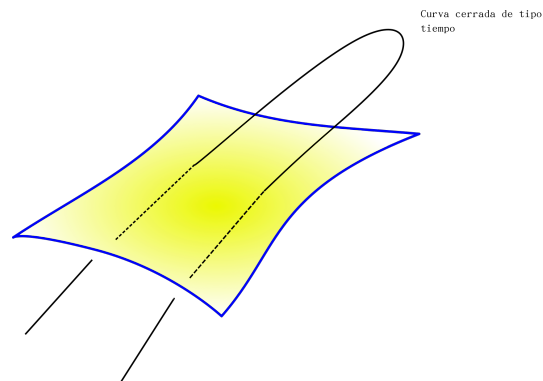


Figura 2.5: Curva cerrada.

1. Las leyes de la física no permiten la aparición de curvas cerradas de tipo tiempo.
2. Se puede enviar una señal entre dos puntos en el espacio tiempo solo si los puntos se pueden unir mediante una curva que no sea de tipo espacio; entonces se dice que la señal es causal.
3. El espacio tiempo será causal si no hay curvas cerradas que no sean de tipo espacio.
4. Supondremos que no hay curvas cerradas tipo tiempo en ninguna métrica de Lorentz.

**Definición 2.0.16.** *Se dice que una variedad  $M$  cumple con la condición de cronología si no contiene curvas cerradas tipo tiempo.*

Una variedad que cumpla con la condición de cronología representa un espacio tiempo en el cual no se observan viajes en el tiempo, en el sentido de que un observador no puede avanzar en el tiempo y regresar al punto de partida a encontrarse consigo mismo antes de partir. Toda variedad lorentziana compacta no cumple con esta condición.

### 2.0.3. Causalidad y estabilidad causal

El desarrollo de la teoría causal, construida a partir de las ideas de Roger Penrose, surge de la necesidad de modelar un espacio tiempo genérico y de eliminar modelos con propiedades geométricas que no se consideran causales, desde el punto de vista de la física.

Dado que la teoría de la Relatividad General considera la velocidad de la luz como un límite de nuestra experiencia, ya que no nos relacionamos causalmente con ningún evento en el universo ya que no podemos “observar”; las curvas nulas representarán dicho límite. La teoría causal se centra en las condiciones determinadas por las curvas nulas y temporales, que debe seguir todo espacio-tiempo con el objetivo de mostrar que, dadas las condiciones adecuadas, todo espacio-tiempo es singular.

Las relaciones causales entre eventos en un espacio-tiempo están determinadas por la métrica de Lorentz, que decide los conos de luz pasados y futuros en cada evento de la variedad. Si bien, a nivel local, la geometría es siempre la de la relatividad especial, el comportamiento global de los conos de luz ahora depende de la elección del tensor métrico, que es una función de las coordenadas espaciales y temporales. Por lo tanto, aunque a nivel local no se debe exceder la velocidad de la luz, a nivel global, los fenómenos, como la ocurrencia de curvas temporales cerradas y violaciones de causalidad, pueden ser permitidos en principio. La posibilidad de quebrantar la causalidad realmente depende de la topología global general del espacio-tiempo. Se imponen varias condiciones de causalidad al modelo considerado para asegurar una estructura causal regular del espacio-tiempo, como se especificará aquí. Mientras que las ecuaciones de Einstein gobiernan la dinámica local de la materia y curvatura del espacio-tiempo, no dicen nada sobre la topología global o la estructura causal del universo del espacio-tiempo. Estos son libres de ser elegidos según el modelo apropiado bajo consideración y las observaciones cosmológicas del universo en su conjunto. Como se ha observado en las últimas décadas, estos elementos, a saber, la topología y la estructura causal, pueden tener implicaciones físicas importantes para la cosmología y el universo, tal como se observa a mayor escala.

Las ecuaciones de campo de Einstein, al ser ecuaciones diferenciales parciales, solo nos dicen sobre el valor de una función y sus derivadas en una vecindad arbitrariamente pequeña de un punto. Si las curvas de tiempo cerradas existen o no, es una pregunta global que también puede depender de la topología del espacio-tiempo. Se conocen algunas cosas sobre las líneas de tiempo cerradas. Por ejemplo, para espacios asintóticamente planos, si se satisfacen ciertas condiciones de energía, las curvas de tipo tiempo cerradas solo pueden ocurrir si están presentes singularidades espacio temporales. Se puede enviar una señal entre dos puntos en el espacio-tiempo, solo si los puntos se pueden unir mediante una curva no espaciada, entonces se dice que la señal es causal (este tipo de formulación permite la posibilidad de que los dos puntos solo puedan unirse por rayos de luz). *El espacio tiempo será causal si no hay curvas cerradas que no sean espaciales.*

Hawking observó que ciertos espacios no tienen curvas temporales cerradas pero están “al borde” de tenerlas en el sentido de que una perturbación arbitrariamente pequeña de la métrica puede producir un nuevo espacio-tiempo en donde falla la condición de

cronología.

Ahora, desde el punto de vista de la física, la métrica, es un objeto que nos ayuda a medir (espacios e intervalos de tiempo) y ninguna medición es precisa. No sabemos ni podemos conocer la métrica de la línea de tiempo con absoluta certeza. Se deduce que cualquier suposición que tenga sentido físicamente sobre un espacio-tiempo debe ser insensible a pequeñas perturbaciones de la métrica. Por lo tanto, parece que las suposiciones tales como la condición de cronología son intrínsecamente débiles; lo más adecuado sería hacer la convención de que no hay curvas cerradas en el tiempo en ninguna métrica de Lorentz para  $M$ .

Esta es la noción original de Hawking de la causalidad estable, definida en términos de una topología apropiada en el conjunto de todas las métricas de Lorentz para  $M$ . Las relaciones de causalidad en una variedad lorentziana son fundamentales para saber cómo distintos puntos en ella se pueden encontrar conectados causalmente, y así empezar a modelar un espacio-tiempo. Recordemos que una curva causal es aquella cuyos vectores tangentes no son tipo espacio.

De lo anterior, se sigue la siguiente definición y teorema.

**Definition 2.0.17.** *Un espacio tiempo  $M$  temporalmente orientable, es establemente causal sii no posee curvas cerradas de tipo tiempo.*

**Theorem 2.0.6.** *La condición de estabilidad causal es más fuerte que la condición de cronología.*

El principio de causalidad local implica que, en pequeñas regiones de espacio y tiempo, la estructura causal es la misma que en la teoría de la relatividad especial. Sin embargo, a mayor escala, pueden encontrarse características globales, como no respetar la orientación temporal. Estas características deben descartarse mediante suposiciones topológicas razonables, y uno quisiera asegurarse de que el espacio-tiempo se comporta causalmente bien. Esto se lleva a cabo mediante la introducción de diversas condiciones de causalidad como la no aparición de curvas temporales cerradas o no espaciales (causalidad), y la estabilidad de esta condición ante pequeñas perturbaciones en la métrica (estabilidad causal). Parecería razonable exigir que los espacio-tiempo físicamente realistas no permitan curvas temporales cerradas ni curvas cerradas no espaciales, ya que esto daría lugar al fenómeno de entrar en el propio pasado. Sin embargo, la relatividad general y las ecuaciones de Einstein como tales no descartan esa posibilidad por sí solas. Por ejemplo, el universo de Godel (Godel, 1949) tiene curvas de tiempo cerradas a través de cada punto del espacio-tiempo.

El modelo de espacio-tiempo con el que se trabajó debe satisfacer varias condiciones de razonabilidad física para representar el universo físico tal como se observa. Uno de ellos es que el espacio-tiempo debería tener una estructura causal regular. La condición física de que ninguna señal de partículas puede viajar más rápido que la velocidad de la luz fija la estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski. Además, en la relatividad general, que utiliza el marco de una variedad de espacio-tiempo general, se observó que localmente las relaciones de causalidad eran las mismas que en el espacio-tiempo de Minkowski, que es la variedad de fondo para la relatividad especial.

Sin embargo, globalmente, podría haber diferencias importantes en la estructura de causalidad y otras propiedades físicas, debido a una topología espaciotemporal diferente, en comparación con la del espacio euclidiano del espaciotiempo de Minkowski (Geroch, 1967). Los fuertes campos gravitacionales que surgen en la cosmología o en el colapso gravitacional, como lo indica la ocurrencia de singularidades del espacio-tiempo en la relatividad general, también pueden tener implicaciones significativas de causalidad y topología para la estructura del espacio-tiempo. La estructura causal del espacio-tiempo se ha estudiado en detalle, especialmente desde la perspectiva de la aparición de singularidades del espacio-tiempo en el colapso y la cosmología (ver, por ejemplo, Geroch [8], Penrose [9], [10] Hawking y Ellis [6]).

La estructura causal del espacio-tiempo puede usarse para definir un límite o el borde del espacio-tiempo. Este límite representa tanto el infinito como la parte del borde del espacio-tiempo que está a una distancia finita, es decir, los puntos singulares. [10] Con esto, de aquí en adelante asumiremos que nuestra variedad buscada debe tener la propiedad de ser establemente causal, esta propiedad es de suma importancia para posteriormente poder mencionar el Teorema que en este trabajo se pretende interpretar.

#### 2.0.4. Hipersuperficie de Cauchy

Las hipersuperficies de Cauchy son los subconjuntos naturales donde se plantean las condiciones iniciales de las ecuaciones de campo de Einstein, estas condiciones iniciales nos permitirán predecir cualquier evento futuro.

**Definition 2.0.18.** *Un subconjunto  $S$  de una variedad  $M$  cuya intersección con toda curva inextensible tipo tiempo consta de un solo punto, se conoce como una hipersuperficie de Cauchy.*

O en otras palabras, una hipersuperficie de Cauchy en  $M$  es un subconjunto  $S$  que se encuentra exactamente una vez con cada curva inextensible de tiempo en  $M$ . A continuación, se mencionan algunas propiedades de las hipersuperficies de Cauchy.

**Lemma 2.0.7.** *Sea  $M$  un espacio-tiempo y  $N$  una hipersuperficie cerrada de tipo espacial.*

1. *Una curva cerrada que se encuentra con  $N$  exactamente una vez y luego transversalmente no es libremente homotópica a una curva cerrada que no se encuentra con  $N$*
2. *Si  $N$  separa a  $M$  (es decir,  $M/N$  no es conexa) entonces  $N$  es acronal.*

**Proposition 2.0.8.** *Sea  $M$  un espacio-tiempo que admite una hipersuperficie de Cauchy  $S$ . Entonces cualquier hipersuperficie cerrada y conexa  $N$  que no interseque a  $S$  es acronal.*

# Capítulo 3

## Teorema de Singularidad de Hawking

### 3.0.1. Espacio-tiempo singular

Los teoremas de Hawking-Penrose centraron la atención en la incompletitud geodésica como la marca de un espacio-tiempo singular. En parte, hubo una buena razón para esta elección: proporciona un criterio matemáticamente preciso que corresponde a juicios intuitivos en varios casos paradigmáticos [5]. La elección también fue en parte una cuestión de conveniencia: las técnicas de prueba desarrolladas por Penrose y Hawking se prestaron a esta definición. Pero, por poderosos y elegantes que sean, los teoremas de Hawking-Penrose no resolvieron el debate sobre la definición correcta de la singularidad espacio-temporal.

Volviendo a la tarea de limitar espacios-tiempo singulares, la idea intuitiva que motivó la mayoría de los teoremas de singularidad anteriores a Penrose-Hawking; a saber, un espacio-tiempo singular es aquel en el que estalla una física relevante. Pero las elaboraciones técnicas de esta idea han ido mucho más allá de lo considerado por los pioneros de los teoremas de singularidad. Por ejemplo, se puede considerar que un espacio-tiempo es singular aunque los polinomios escalares de curvatura permanezcan acotados. Resulta que es la noción de incompletitud geodésica la que caracteriza la noción de singularidad de manera efectiva para un espacio-tiempo, y permite demostrar su existencia mediante teoremas generales. Hay muchos tipos de comportamientos singulares posibles para un espacio-tiempo, y algunos de ellos podrían considerarse solo como patologías matemáticas en el espacio-tiempo, en lugar de tener algún significado físico.

**Definition 3.0.1.** *Un espacio tiempo  $M$  es singular sii contiene una geodésica temporal incompleta.*

La noción de incompletitud geodésica se puede entender mejor definiendo lo que queremos decir con geodésicamente completo. Un espacio tiempo es geodésicamente completo cuando no tiene "bordes" ni "agujeros" que entorpezcan el avance de la geodésica. Entonces, un espacio tiempo que no es geodésicamente completo, debe ser geodésicamente incompleta. La incompletitud geodésica describe intuitivamente que existe una obstrucción para que los observadores que caen libremente continúen via-

jando a través del espacio tiempo. En cierto sentido, han llegado al límite del espacio tiempo en un tiempo finito. Han encontrado una singularidad.

De los capítulos anteriores, tenemos las herramientas suficientes para a continuación enunciar el Teorema principal de este trabajo.

### 3.0.2. Curvatura media

Sophie Germain (1776-1831) es quien introduce el término de curvatura media en la segunda década del siglo XIX. La curvatura media desempeñó un papel importante dentro de las matemáticas (recuérdese la descripción de la geometría extrínseca de una superficie en el espacio euclidiano tridimensional, el estudio de superficies minimales y de superficies de curvatura media constante, el análisis de las fórmulas de variación del área, etc.). Pero no hay que olvidar que a la vez tiene una presencia poderosa en el mundo de las aplicaciones a la física clásica (elasticidad, ciencia de los materiales, superficie de equilibrio entre dos medios). Desde finales del siglo XX y en esta segunda década del nuevo siglo XXI estamos comprobando cómo la relación de este concepto tanto con problemas geométricos básicos como con aplicaciones a la Física fundamental se ha vuelto todavía más intensa.

Tenemos la intención de medir la expansión del Universo por la medida en que el campo normal unitario en  $S$  sea divergente, específicamente definimos la curvatura media, la cual denotamos por  $H_S$  de  $S$  en  $M$  (donde  $S$  es la función de tiempo global de una superficie de Cauchy) por

$$H_S = (\operatorname{div} N)|_S \quad (3.1)$$

A pesar de haber transcurrido ya prácticamente dos siglos desde la definición de curvatura media de Sophie Germain, este concepto sigue dando pie a nuevas ideas en física matemática. Roger Penrose propuso en 1982 una lista de los principales problemas no resueltos en Relatividad General. El primero de ellos era buscar una definición cuasi-local de masa para una superficie cerrada  $S$  en un espaciotiempo general. Aun cuando todavía hoy en el siglo XXI no se ha encontrado una solución completamente satisfactoria, parece claro que la solución considerará una vez más al vector de curvatura media de la superficie  $S$ .

### 3.0.3. Teorema de Singularidad de Hawking

Como hemos relatado, los teoremas de singularidad, le dieron una vuelta a nuestra imagen del Cosmos. Hasta antes de su aparición, sus implicaciones eran creíbles sólo en historias de ciencia ficción. A diferencia de las cosmologías antiguas tenemos la metodología para corroborar nuestras hipótesis; en este caso, el Big Bang y los agujeros negros.

**Theorem 3.0.1.** *Sea  $M$  un espacio-tiempo (orientable, establemente causal, globalmente hiperbólico) que satisface*



- $Ric(v, v) \geq 0$  para todos los vectores tangentes  $v$ ,  $y$
- Existe una hipersuperficie de Cauchy  $S$  en  $M$  en la que la curvatura media  $H_s$  está limitada por debajo de alguna constante positiva  $k$ , i.e  $H_s(p) \geq k$  para cada  $p$  en  $S$ .
- Entonces  $M$  es geodésicamente incompleto.

En un espacio-tiempo globalmente hiperbólico  $M$  con una superficie de Cauchy  $S$  cualquier punto  $p \in M$  se puede conectar mediante curvas temporales, cada curva tiene una distancia de tiempo adecuada de  $S$ . El teorema de Hawking depende de manera crucial del hecho de que entre curvas hay al menos una geodésica que maximiza la distancia de tiempo de  $p$  a  $S$ .

Establecimos que las 4-*variedades* que admiten una métrica de Lorentz no eran suficientes para modelar nuestro universo, entonces fuimos pidiendo que esos espacios tiempo cumplieran con ciertos comportamientos geométricos. La hipótesis del teorema de Hawking que corresponde a la afirmación física de que el universo se está expandiendo, es la suposición de que nuestro espacio tiempo dado (globalmente hiperbólico)  $\mathbf{M}$ , contiene al menos una hipersuperficie de Cauchy en la cual la curvatura media está delimitada por un número real positivo, así  $\mathbf{M}$  es geodésicamente incompleto.

El teorema de Hawking nos dice que cualquier modelo matemático del espacio-tiempo, que no contiene anomalías causales, que es determinista y que modela un universo en expansión en el cual la gravedad siempre es atractiva, debe ser singular. Este modelo matemático nos permite comprender de manera sutil y geométrica la existencia de singularidades en el espacio tiempo.

La demostración de este teorema, va más allá de los objetivos de este texto. Para el que desee estudiar la demostración puede consultar ([9]), ([12]), ([16]).

Se espera que este texto sirva de introducción para el estudiante de iniciación que se interesa por los Teoremas de Singularidad propuestos por Hawking-Penrose. Deseamos que el lector haya adquirido las ideas principales, geométricas, matemáticas e históricas. Y con mucha ambición, se espera que este texto sirva de inspiración para que físicos y matemáticos sigan trabajado de la mano para crear cada día más herramientas que nos permitan decifrar el origen de nuestro Universo.

# Bibliografía

- [1] APOSTOL, T.M. (2001) *Calculus*, Volumen I. México; Ed. Reverté.
- [2] BONDI, H. 1960. *Cosmology*, Cambridge University Press.
- [3] DO CARMO, M.P. (1998) *Differential Geometry of Curves and Surfaces in  $\mathbf{R}^3$* , New Jersey: Prentie Hall. Cambridge University Press.
- [4] DO CARMO, M.P. *Riemannian Geometry*, Birkhauser. Second Edition.
- [5] EARMAN JOHN. (1999) *The Penrose-Hawking Singularity Theorems: History and implications*, The expanding Worlds of General Relativity. (Einstein Studies volume 7) pp 235-267. The Center of Einstein studies.
- [6] ELLIS GEORGE F.R. *Stephen Hawking's 1966 Adams Prize Essay* , The European Physical Journal H. DOI:10.1140/epjh/e2014-50014-x
- [7] FRIEDBERG S., INSEL A., SPENCE LAWRENCE. (2011) *Linear Algebra*, Pearson.
- [8] GEROCH ROBERT. (1968) *What is a Singularity in General Relativity?*, Annals of Physics: 48,526-540.
- [9] HAWKING S. AND PENROSE R. (1970) *The singularities of gravitational collapse and cosmology* , Proc. Roy. Soc. Lond. A. 314, 529-548.
- [10] HAWKING S. *Hawking on the big bang and black holes*, World Scientific Publishing.
- [11] HAWKING S. *The large scale structure of space-time*, Cambridge monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- [12] HAWKING S. *Singularities and the geometry of spacetime*, The European Physical.
- [13] KUNZINGER MICHAEL, A. OHANYAN, B.SCHINNERL, R. STEINBAUER. (2021) *The Hawking-Penrose singularity theorem for  $C^{-1}$  Lorentzian metrics*, arXiv:2110.09176v2 [math-ph] 19 Oct 2021.
- [14] LANG SERGE *Linear Algebra*, Second Edition, Springer.

- [15] NABER GREGORY. L. (1998) *Spacetime and Singularities. An Introduction*, Cambridge University Press.
- [16] MORALES ALVAREZ PABLO AND SÁNCHEZ MIGUEL (2015). *Myers and Hawking Theorems: Geometry for the Limits of the Universe*, Milan J. Math. Vol. 83, 295–311 DOI 10.1007/s00032-015-0241-2. Published online July 26, 2015 © 2015 Springer Basel.
- [17] NABER GREGORY. L. (1998) *The Geometry of Minkowski Spacetime: An introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*, Springer. Cambridge University Press.
- [18] O'NEIL. *Semi-riemannian Geometry with applications to relativity. (1983)*, Ed. Alhambra.
- [19] PALMAS VELASCO ÓSCAR A. Y REYES VICTORIA J. GUADALUPE. *Curso de Geometría Diferencial.*, Parte I. Las prensas de Ciencias. Facultad de Ciencias, UNAM.
- [20] RAMOS-SÁNCHEZ SAÚL *Relatividad para futuros físicos*, CopIt-arXives, México Cd.Mx., 2018. ISBN: 978-1-938128-18-9 ebook.
- [21] SENOVILLA JOSÉ M M AND DAVID GARFINKLE (2015). *The 1965 Penrose singularity theorem* , arXiv:1410.5226v2 [gr-qc] 7 Jan 2015.