Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Una construcción geométrica de clases características

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

José Manuel Mendoza Dimas

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Omar Antolín Camarena

CIUDAD DE MÉXICO 2022

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

La teoría de clases características inició en el año 1935 de manera casi simultánea con los trabajos de Hassler Whitney en los Estados Unidos de América y Eduard Stiefel en Suiza.

En la tesis de Stiefel, escrita bajo la dirección de Heinz Hopf, se introdujeron y estudiaron ciertas clases en homología, las cuales estaban determinadas por los haces tangentes a una variedad suave. Cuando Whitney estaba en la universidad de Harvard, estudió el caso de haces esféricos arbitrarios. Posteriormente se introdujo el concepto de clase característica en cohomología como hoy en día se conoce y se probó con estas herramientas el teorema básico del producto.

Más adelante en 1942 se hicieron ciertos avances con respecto a la homología de variedades grassmannianas por parte de Lev Pontryagin, el cual se basó en trabajos previos de Charles Ehresmann acerca de subdivisiones de celdas.

Algunos años más tarde en 1946 Shing-Shen Chern, definió clases características para haces complejos, además probó que las variedades grassmannianas complejas tiene una estructura cohomológica más intuitiva y más fácil de entender que las variedades grassmannianas reales.

En el trabajo original de Stiefel–Whitney, las clases características se definieron como obstrucciones a la existencia de secciones linealmente independientes, de manera más específica; dado ξ un haz vectorial de rango n sobre B un complejo CW, se definió la i-ésima clase característica (de Stiefel–Whitney) $w_i(\xi)$ del haz ξ como la clase de obstrucción primaria a la existencia de $n-i+1$ secciones linealmente independientes sobre el i-ésimo esqueleto de B. Bajo estos conceptos demostraron que si ξ admitía $n-i+1$ secciones linealmente independientes, entonces $w_i(\xi)=0$. Este método en particular usa herramientas de teoría de obstrucción, donde las clases de obstrucción están definidas sobre un grupo de cohomología con coeficientes en un sistema local.

A lo largo de los años se han perfeccionado las distintas técnicas respecto al trabajo realizado previamente y todas estas tienen una naturaleza un tanto algebraica. En mi trabajo de tesis, presentaré de manera detallada, dentro del capítulo 4, una construcción de clases características realizada por Marcelo Aguilar, José Luis Cisneros y Eduardo Frías en [1], en el cual dan una construcción de las clases características apoyándose en la noción de transversalidad en topología diferencial.

En resumen, se mostrará que dado ξ un haz vectorial suave sobre una variedad suave M, la existencia de $n-i+1$ secciones linealmente independiantes es equivalente a la existencia de un morfismo de haces $h : \varepsilon^{n-i+1} \longrightarrow \xi$ del haz producto ε^{n-i+1} a ξ tal que h es inyectiva en cada fibra. Por lo que la obstrucción a la existencia de $n-i+1$ secciones linealmente independientes está representada por un subconjunto $\bar{Z}_1(h)$ de puntos de M donde h no es inyectiva. En general $\bar{Z}_1(h)$ no es una variedad suave pero si h es genérico, entonces adquiere una estructura de variedad suave estratificada.

Se construirá una variedad cerrada orientable $\tilde{Z}(h)$ y una función $\varphi : \tilde{Z}(h) \longrightarrow M$ cuya imagen es $\bar{Z}_1(h)$. La imagen de la clase fundamental de $\tilde{Z}(h)$ bajo el homomorfismo inducido en homología por φ nos da un elemento en la homología de M, con lo cual definiremos la i-ésima clase $Cl_i(\xi)$ asociada al haz ξ como su clase dual de Poincaré.

Posteriormente, se dará una generalización de las clases $Cl_i(\xi)$ para haces vectoriales no necesariamente suaves usando el hecho de que todo haz vectorial es un producto fibrado del haz universal, y el haz universal está filtrado por haces vectoriales suaves, para los cuales podemos aplicar la construcción anterior.

Se observará que las clases $Cl_i(\xi)$ son las clases de Stiefel–Whitney para haces reales y son las clases de Chern para haces complejos y además no dependen del morfismo genérico.

Capítulo 2

Preliminares.

El motivo de este capítulo es estudiar de manera concisa los temas necesarios para entender y desarrollar con mayor facilidad las construcciones relacionadas a la teoría de clases características, las cuales son un tanto técnicas. Es necesario tratar temas como: haces vectoriales, transversalidad de variedades suaves, cohomología, entre otros. Seremos breves, para un tratamiento más extenso acerca de estos temas le recomendamos al lector consultar [2, Capítulo 3], [3, Capítulo 14] y [4, Capítulo 2 y 3].

2.1. Haces Vectoriales.

2.1.1. Conceptos Básicos.

Definición 2.1.1. *Sea $r \in \mathbb{N}$. Un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r, con $\mathbb{F}$ un campo, el cual supondremos que es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, es una terna $\xi^r = (E, \pi, M)$ tal que:*

1. *M es variedad suave de dimensión m y E es variedad suave de dimensión $m + r$, llamados el espacio base y el espacio total del haz respectivamente.*

2. *$\pi : E \longrightarrow M$ es una función suave y suprayectiva.*

3. *$E_p := \pi^{-1}(p)$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión r, para todo $p \in M$.*

4. *Existe una cubierta abierta $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ de M y difeomorfismos*

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times \mathbb{F}^r \arrow[dl, "\mathrm{proy}_{U_\alpha}"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

y para cada $p \in U_\alpha$ *se tiene que* $\varphi_{\alpha_p} := \varphi_{\alpha_{\restriction_{E_p}}} : E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{F}^r$ *es un isomorfismo lineal.*

El par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *es una carta del haz y la familia* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ *es un atlas del haz.*

Dentro del capítulo de clases caraterísticas, primeramente se trabajará la noción de haces vectoriales suaves, conforme se avance en la teoría se trabajará con haces vectoriales sobre cualquier espacio topológico cambiando la nocion de suavidad por continuidad.

Ejemplo 2.1.2. *Si* M *es variedad suave de dimensión* m*, entonces el haz tangente de* M*,* (TM, π, M) *es una haz vectorial suave de rango* m*.*

Ejemplo 2.1.3. *Si* M *es una variedad suave de dimensión* m *y* $r \in \mathbb{N}$*, entonces* $\varepsilon^r = (M \times \mathbb{F}^r, \pi, M)$ *es un haz vectorial de rango* r*, llamado el haz producto.*

Ejemplo 2.1.4. *Sea* M *una subvariedad suave de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensión* m*. Para cada* $x \in M$*, definimos el espacio normal* M *en el punto* x *respecto a* $\mathbb{R}^n$*, como*

$$V_x M = [T_x M]^\perp$$

el cual es un espacio vectorial de dimensión $n - m$*. De esta manera, definimos el haz normal de* M *como la terna* (ν, ρ, M) *donde*

$$\nu := \{(x, u) \in M \times \mathbb{R}^n : u \in V_x M\},$$

y $\rho : \nu \longrightarrow M$ *está dada por la proyección en el primer factor. Esta construcción se puede extender análogamente para una subvariedad suave* M *de una variedad suave* N*.*

Definición 2.1.5. *Sean* $\xi^{r_1} = (E, \pi, M)$ *y* $\xi'^{r_2} = (E', \pi', M')$ $\mathbb{F}$*-haces vectorial vectoriales suaves. Un homomorfismo de* ξ *a* ξ' *es un par de funciones suaves* $F : E \longrightarrow E'$ *y* $f : M \longrightarrow M'$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

y para cada $p \in M$ *se tiene que* $F_{\restriction_{\pi^{-1}(p)}} : \pi^{-1}(p) \longrightarrow (\pi')^{-1}(f(p))$ *es una transformación lineal.*

Observación 2.1.6. *Sean (U,φ) y (V,ψ) cartas de ξ y ξ' respectivamente, tal que $f(U) \subset V$. Observemos que la función $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) : U \times \mathbb{F}^{r_1} \longrightarrow V \times \mathbb{F}^{r_2}$ es de la forma $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(q,u) = (f(q), l(q,u))$ con $l : U \times \mathbb{F}^{r_1} \longrightarrow \mathbb{F}^{r_2}$ una función suave, la cual cumple que $l : \{q\} \times \mathbb{F}^{r_1} \longrightarrow \mathbb{F}^{r_2}$ es lineal para cada $q \in U$ fija.*

En efecto, si suponemos que $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(q,u) = (h(q,u), l(q,u))$ con $h : U \times \mathbb{F}^{r_1} \longrightarrow V$ una función suave tenemos que $\pi_1(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(q,u) = h(q,u)$, por otro lado

$$\begin{aligned}
\pi_1(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(q,u) &= (\pi_1 \circ \psi) \circ (F \circ \varphi^{-1})(q,u) \\
&= ((\pi' \circ F) \circ \varphi^{-1})(q,u) \\
&= ((f \circ \pi) \circ \varphi^{-1})(q,u) \\
&= f(q).
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.7. *Si $f : M \longrightarrow N$ es una función suave, entonces $df : TM \longrightarrow TN$ y $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de haces del haz (TM, π, M) al haz (TN, π, N) donde $df : TM \longrightarrow TN$ está dada de la siguiente forma:*

Sea $l \in TM$, existe $p \in M$ tal que $l \in T_pM$, entonces $df(l) := df(p)(l)$.

Definición 2.1.8. *Sean $\xi_1 = (E_1, \pi_1.M)$ y $\xi_2 = (E_2, \pi_2, M)$ $\mathbb{F}$-haces vectoriales suaves. Se dice que ξ_1 y ξ_2 son isomorfos ($\xi_1 \cong \xi_2$), si existe un difeomorfismo $F : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

conmuta y para cada $p \in M$ $F_p : \pi_1^{-1}(p) \longrightarrow \pi_2^{-1}(p)$ es un isomorfismo lineal.

Definición 2.1.9. *Un $\mathbb{F}$-haz vectorial $\xi^r = (E, \pi, M)$ de rango r es trivializable si es isomorfo al haz $\varepsilon^r = (M \times \mathbb{F}^r, \pi, M)$. Una variedad suave se dice que es paralelizable, si su haz tangente es trivializable.*

A continuación, daremos una caracterización más accesible de un isomorfismo entre haces vectoriales en términos de isomorfismos lineales, por lo cual es necesario introducir el siguiente lema.

Lema 2.1.10. *Sea Z variedad suave y $\mathbb{F}(m,n)$ el conjunto de las matrices de m por n, $f : Z \longrightarrow \mathbb{F}(m,n)$ una función suave y $F : Z \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ tal que $F(p,u) = f(p)u$. Entonces f es suave si y solo si F lo es.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $f : Z \longrightarrow \mathbb{F}(m,n)$ es suave, consiremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Z \times \mathbb{F}^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f\times Id"'] & \mathbb{F}^m \\
\mathbb{F}(m,n) \times \mathbb{F}^n \arrow[ur, "ev"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde $ev : \mathbb{F}(m,n) \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ es la función evaluación , la cual es suave.

Como $(ev \circ (f \times Id))(p,u) = ev(f(p),u) = f(p)u = F(p,u)$ entonces F es suave.

$\Leftarrow$) Suponga que $F : Z \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ es suave.

Consideremos

$$
f(p) = \begin{pmatrix} f_{11}(p) & f_{12}(p) & \dots & f_{1n}(p) \\ f_{21}(p) & f_{22}(p) & \dots & f_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(p) & f_{m2}(p) & \dots & f_{mn}(p) \end{pmatrix} \in \mathbb{F}(m,n).
$$

Sea $\{e_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{F}^n$ base canónica y definamos $h_i : Z \longrightarrow Z \times \mathbb{F}^n$ como $h_i(p) := (p, e_i)$, la cual es suave. Entonces

$$
F \circ h_i : Z \longrightarrow \mathbb{F}^n
$$

es suave y como $(F \circ h_i)(p) = F(h_i(p)) = F(p, e_i) = f(p)e_i$, entonces f es suave ya que lo es en cada entrada.

□

Teorema 2.1.11. *Sean $\xi = (E, \pi, M)$, $\xi' = (E', \pi', M)$ $\mathbb{F}$-haces vectoriales suaves de rango r y $F : E \longrightarrow E'$ un homomorfismo de haces. Entonces F es un isomorfismo si y solo si $F\rvert_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \longrightarrow (\pi')^{-1}(p)$ es un isomorfismo para cada $p \in M$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si F es un isomorfismo, entonces $F\rvert_{\pi^{-1}(p)}$ es un isomorfismo lineal.

$\Leftarrow$) Suponga que $F : E \longrightarrow E'$ es un homomorfismo de haces y que para cada $p \in M$, $F\rvert_{\pi^{-1}(p)}$ es un isomorfismo lineal.

Como para cada $p \in M$, $F\rvert_{\pi^{-1}(p)}$ es biyectiva, tenemos que

$$
F : E = \coprod_{p \in M} \pi^{-1}(p) \longrightarrow E' = \coprod_{p \in M} (\pi')^{-1}(p)
$$

es biyectiva.

Veamos que $F^{-1} : E' \longrightarrow E$ es suave. Sea $e' \in E'$ y sea $\pi'(e') = p = \pi(F^{-1}(p))$. Consideremos (U, φ) y (U, ψ) cartas de E y E' respectivamente tal que $p \in U$. Tomemos la siguiente representación local de F

$$
(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) : U \times \mathbb{F}^r \longrightarrow U \times \mathbb{F}^r
$$

la cual sabemos es de la forma $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(p,u) = (p, l(p)u)$ donde $l : U \longrightarrow GL(r)$ es una función suave debido al lema anterior. Ahora como la función $I : GL(r) \longrightarrow GL(r)$, dada por $A \mapsto A^{-1}$ es suave, tenemos que la representacion coordenada de F^{-1},

$$(\varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}) : U \times \mathbb{F}^r \longrightarrow U \times \mathbb{F}^r,$$

dada por $(\varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1})(p,u) = (p, l^{-1}(p)(u))$ es suave. Por lo tanto F^{-1} es suave.

$\square$

2.1.2. Funciones de transición.

Las funciones de transición de un haz juegan un papel muy importante dentro del estudio de los haces vectoriales, pues éstas cargan con la información necesaria para reconstruir e identificar un haz a partir de espacios dados.

Sea $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r y $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ un atlas del haz. Sean $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y consideremos la función

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : (U_\alpha \cap U_\alpha) \times \mathbb{F}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\alpha) \times \mathbb{F}^r$$

la cual es un difeomorfismo. Notemos que $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) = (p, g_{\beta\alpha}(p,u))$, donde $g_{\beta\alpha} : (U_\alpha \cap U_\alpha) \times \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^r$. En efecto, si suponemos que $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) = (h_{\beta\alpha}(p,u), g_{\beta\alpha}(p,u))$ entonces

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) &= \pi_1(h_{\beta\alpha}(p,u), g_{\beta\alpha}(p,u)) \\ &= h_{\beta\alpha}(p,u). \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) &= (\pi_1 \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\alpha^{-1}(p,u) \\ &= (\pi \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) = p. \end{aligned}$$

Para cada $p \in U_\alpha \cap U_\alpha$ fijo se tiene que $g_{\beta\alpha}(p,u) = (\varphi_{\beta_p} \circ \varphi_{\alpha_p}^{-1})(u)$. Así,

$$g_{\beta\alpha}(p) : \{p\} \times \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^r$$

resulta ser un ismorfismo, de donde $g_{\beta\alpha}(p) \in GL(r, \mathbb{F})$. De esta manera, se tiene una familia de funciones

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta &\xrightarrow{g_{\beta\alpha}} GL(r, \mathbb{F}) \\ p &\longmapsto g_{\beta\alpha}(p) \end{aligned}$$

para toda $\alpha, \beta \in I$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, las cuales son suaves debido al Lema 2.1.10 y a que $\pi_2 \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = g_{\beta\alpha}(p,u)$ es suave.

Esta familia de funciones suaves son llamadas las funciones de transición del haz ξ.

Note que $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) = (p, g_{\beta\alpha}(p)(u))$.

Las funciones de transición del haz cumplen las siguientes condiciones:

1. $g_{\lambda\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p) = g_{\lambda\alpha}(p)$ para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\lambda$,
2. $g_{\alpha\beta}(p) = (g_{\beta\alpha}(p))^{-1}$ para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$,
3. $g_{\alpha\alpha}(p) = Id \in GL(r, \mathbb{F})$ para todo $p \in U_\alpha$,

llamadas condiciones de cociclo.

2.1.3. Secciones.

Definición 2.1.12. *Sea $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave. Una sección de ξ es una función suave $s : M \longrightarrow E$ donde $\pi \circ s : M \longrightarrow M$ es tal que $(\pi \circ s)(p) = p$.*

Ejemplo 2.1.13. *Todo $\mathbb{F}$-haz vectorial $\xi^r = (E, \pi, M)$ tiene una sección $s_0 : M \longrightarrow E$ tal que $s_0 = 0 \in E_p$ la cual es llamada la sección cero.*

Observación 2.1.14. *Dado $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave, denotemos por $\Gamma(E)$ al conjunto de todas las secciones de ξ, el cual resulta ser un $C^\infty(M, \mathbb{F})$-módulo con las siguientes operaciones*

$$(s_1 + s_2)(p) = s_1(p) + s_2(p),$$
$$(fs)(p) = f(p)s(p).$$

Definición 2.1.15. *Sea $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave y $s_1, ..., s_k : M \longrightarrow E$ secciones de ξ. Se dice que $s_1, ..., s_k$ son linealmente independientes si $\{s_1(p), ..., s_k(p)\} \subset E_p$ es linealmente independiente para toda $p \in M$.*

Teorema 2.1.16. *Sea $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r. Entonces ξ es trivializable si y solo si ξ tiene r-secciones linealmente independientes.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que ξ es trivializable, entonces existe un isomorfismo $F : M \times \mathbb{F}^r \longrightarrow E$. Sea $\{e_i : 1 \leq i \leq r\} \subset \mathbb{F}^r$ la base canónica y consideremos $h_i : M \longrightarrow M \times \mathbb{F}^r$ dada por $h_i(p) = (p, e_i)$ las cuales son suave. Definimos $s_i : M \longrightarrow E$ para $1 \leq i \leq r$ dada por $s_i(p) = (F \circ h_i)(p)$, las cuales son secciones linealmente independientes, pues para cada $p \in M$, $\{s_1(p), ..., s_r(p)\} \subset E_p$ es linealmente independiente.

$\Leftarrow$) Suponga que el haz ξ tiene r-secciones linealmente independientes $s_1, ..., s_r : M \longrightarrow E$. Definamos $F : M \times \mathbb{F}^r \longrightarrow E$ como $F(p,u) = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i s_i(p)$, la cual es suave y $F_{\restriction_{E_p}}$ es un isomorfismo lineal ya que $\{s_1(p), ..., s_r(p)\} \subset E_p$ es linealmente independiente para cada p.

$\square$

2.1.4. Construcción de haces vectoriales a partir de haces dados.

Definición 2.1.17. *Sea $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave y $F \subset E$, si para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) del haz tal que $\varphi(\pi^{-1}(U) \cap F) = U \times \mathbb{F}^k \subset U \times \mathbb{F}^r$ se dice que F es un subhaz vectorial de rango k del haz ξ.*

De hecho $(F, \pi_{\restriction_F}, M)$ es un $\mathbb{F}$-haz vectorial de rango k.

Definición 2.1.18. *Sea $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r y $Z \subset M$ subvariedad, se define la restricción de ξ a Z como:*

$$\xi_{\restriction_Z} = (\pi^{-1}(Z), \pi_{\restriction_{\pi^{-1}(Z)}}, Z)$$

el cual es un haz vectorial suave de rango r.

Teorema 2.1.19. *Sea $r \in \mathbb{N}$. Sea M variedad suave de dimensión m, E un conjunto distinto del vacío y $\pi : E \longrightarrow M$ una función suprayectiva.*

Sea $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in I\}$ un atlas suave de M. Supongamos que existe una familia de funciones biyectivas $\{\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r \mid \alpha \in I\}$ tal que:

1. *$(\pi \circ \varphi_\alpha^{-1})(p, u) = p$ para todo $p \in U_\alpha$ y $\alpha \in I$.*
2. *$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r$ es un difeomorfismo, el cual es lineal en cada fibra para todo $\alpha, \beta \in I$ tal que $(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset$.*

Entonces existe una única estructura de $(m + r)$-variedad suave E tal que $\xi^r = (E, \pi, M)$ es un haz vectorial suave sobre M.

Demostración. Primero definimos una topología en E tal que los $\pi^{-1}(U_\alpha)$ sean abiertos en E, $\pi : E \longrightarrow M$ sea continua y los $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ sean homeomorfismos.

Sea $\tau(E) = \{W \subset E : \varphi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap W) \subset U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ es abierto para toda $\alpha \in I\}$, la cual es una topología en E. Como $\varphi_\beta(\pi^{-1}(U_\beta) \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) = \varphi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r$ es abierto en $U_\beta \times \mathbb{F}^r$ para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\pi^{-1}(U_\alpha)$ es abierto en E.

Veamos que $\pi : E \longrightarrow M$ es continua. Sea $W \subset M$ abierto, veamos que $\pi^{-1}(W)$ es abierto en E. Debido a que

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(W)) &= \varphi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha \cap W)) \\ &= (U_\alpha \cap W) \times \mathbb{F}^r \end{aligned}$$

es abierto en $U_\beta \times \mathbb{F}^r$, se tiene que $\pi^{-1}(W)$ es abierto en E, por lo tanto la función $\pi : E \longrightarrow M$ es continua.

Para ver que $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ es un homeomorfismo, basta probar que es continua y abierta. Sea $A \subset U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ abierto, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) &= \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(A)) \cap \varphi_\beta(\pi^{-1}(U_\beta \cap U_\alpha)) \\ &= (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(A) \cap [(U_\beta \cap U_\alpha) \times \mathbb{F}^r]\end{aligned}$$

es abierto en $U_\beta \times \mathbb{F}^r$, por lo que φ_α es continua.

Sea $V \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ abierto, como $\pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau(E)$ y V es abierto, entonces $V \in \tau(E)$. Así $\varphi_\beta(\pi^{-1}(U_\beta) \cap V)$ es abierto en $U_\beta \times \mathbb{F}^r$ para toda $\beta \in I$, en particular para $\beta = \alpha$, por lo tanto φ_α es abierta.

Ahora definamos un atlas suave para E; sea $e \in E$ y (U_α, ψ_α) carta de M tal que $\pi(e) \in U_\alpha$, consideremos la siguiente composición

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{F}^r \xrightarrow{\psi_\alpha \times Id} \psi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{F}^r$$

la cual es un homeomorfismo. Debido a que $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r$ es un difeomorfismo, $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), ((\psi_\alpha \times Id) \circ \varphi_\alpha)) : \alpha \in I\}$ es un atlas suave de E.

$\square$

Haz inducido.

Sea $\xi^r = (E, \pi, N)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r y $f : M \longrightarrow N$ una función suave. Se define el haz inducido ó haz producto fibrado de ξ por f, denotado por $f^*\xi$ como sigue:

$$\begin{tikzcd} E_* \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

el espacio total de $f^*\xi$ está dado por $E_* = \{(p, e) \in M \times E : f(p) = \pi(e)\}$ y la proyección $\pi_* : E_* \longrightarrow M$ es tal que $\pi_*(p, e) = p$, la cual es supreyectiva.

Dada $p \in M$ se tiene que $\pi_*^{-1}(p) = \{(p, e) \in M \times E : f(p) = \pi(e)\} = \{p\} \times \pi^{-1}(f(p))$, al cual le damos la estructura obvia de espacio vectorial que lo hace isomorfo a $\pi^{-1}(f(p))$.

Sea $\{(V_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in I\}$ un atlas suave de ξ. Sea $p \in M$, entonces existe $\alpha \in I$ tal que $f(p) \in V_\alpha$, sea $U_\alpha \subset M$ una vecindad abierta de p tal que $f(U_\alpha) \subset V_\alpha$.

Consideremos $\pi_2 : V_\alpha \times \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^r$ la proyección en el segundo factor, y definamos la función $\varphi_\alpha : \pi_*^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ dada por $\varphi_\alpha(p, e) = (p, \pi_2(\psi_\alpha(e)))$. Así, $(\pi_1 \circ \varphi_\alpha)(p, e) = \pi_1(p, \pi_2(\psi_\alpha(e))) = p = \pi_*(p, e)$.

Obserevemos que φ_α es biyectiva pues su inversa $\varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{F}^r \longrightarrow \pi_*^{-1}(U_\alpha)$ está dada por $\varphi_\alpha^{-1}(p,u) = (p, \psi_\alpha^{-1}(f(p),u))$. En efecto, φ_α^{-1} es la inversa pues:

$$\begin{aligned}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) &= \varphi_\alpha(p, \psi_\alpha^{-1}(f(p),u)) \\ &= (p, \pi_2(\psi_\alpha(\psi_\alpha^{-1}(f(p),u)))) \\ &= (p,u)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha)(p,e) &= \varphi_\alpha^{-1}(p, \pi_2(\psi_\alpha(e))) \\ &= (p, \psi_\alpha^{-1}(f(p), \pi_2(\psi_\alpha(e)))) \\ &= (p, \psi_\alpha^{-1}(\pi(e), \pi_2(\psi_\alpha(e)))) \\ &= (p, (\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha)(e)) \\ &= (p,e).\end{aligned}$$

Además $\varphi_{\alpha_p} : \pi_*^{-1}(p) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{F}^r$ es un isomorfismo porque así definimos la estructura de espacio vectorial en $\pi_*^{-1}(p)$.

Sean $\alpha, \beta \in I$ tal que $(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset$. Veamos que $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r$ es un difeomorfismo ya que

$$\begin{aligned}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) &= \varphi_\beta(p, \psi_\alpha^{-1}(f(p),u)) \\ &= (p, \pi_2(\psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(f(p),u)))) \\ &= (p, \pi_2 \circ (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(f(p)(u))) \\ &= (p, g_{\beta\alpha}(f(p))(u))\end{aligned}$$

la cual es suave y cuya inversa está dada por $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p,u) = (p, g_{\alpha\beta}(f(p))(u))$ que de igual forma es suave.

Así por el Teorema 2.1.19 $f^*\xi = (E_*, \pi_*, M)$ es un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r.

Teorema 2.1.20. *Sea M una variedad suave de dimensión m y $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de M. Supongamos que para todo $\alpha, \beta \in I$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ se tiene una función suave $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{F})$. Supongamos que la familia de funciones $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r,\mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$ cumple las condiciones de cociclo. Entonces existe un único $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r definido salvo isomorfismo, cuyas funciones de transición son la familia $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r,\mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$.*

Demostración. En el conjunto:

$$\chi = \{(\alpha, p, u) \in I \times M \times \mathbb{F}^r : p \in U_\alpha\},$$

consideremos la relación dada por $(\alpha, p, u) \sim (\beta, q, v) \iff p = q$ y $g_{\beta\alpha}(p)(u) = (v)$ la cual es relación de equivalencia debido a las condiciones de cociclo. Sea

$E := \mathcal{X}/\sim$ y denotemos por $[\alpha, p, u]$ a la clase del elemento (α, p, u), consideremos $\pi : E \longrightarrow M$ dada por $\pi([\alpha, p, u]) = p$, la cual está bien definida y es supreyectiva.

Dado $p \in M$, sea $\alpha \in I$ tal que $p \in U_\alpha$. Observemos que $\pi^{-1}(p) = \{[\alpha, p, u] : u \in \mathbb{F}^r\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}[\alpha, p, u] + [\alpha, p, v] &= [\alpha, p, u + v], \\ \lambda[\alpha, p, u] &= [\alpha, p, \lambda u].\end{aligned}$$

Observemos que estas operaciones están bien definidas. En efecto, supongamos que $(\alpha, p, u_1) \sim (\beta, p, u_2)$ y $(\alpha, p, v_1) \sim (\beta, p, v_2)$ entonces $g_{\beta\alpha}(p)(u_1) = u_2$ y $g_{\beta\alpha}(p)(v_1) = v_2$, lo que implica que $g_{\beta\alpha}(p)(u_1 + v_1) = u_2 + v_2$, por lo que $[\alpha, p, u_1 + v_1] = [\alpha, p, u_2 + v_2]$.

Notemos que $(\alpha, p, u) \sim (\beta, p, g_{\beta\alpha}(p)(u))$.

Para cada $\alpha \in I$ consideremos la función $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ dada por $\varphi_\alpha([\alpha, p, u]) = (p, u)$, la cual está bien definida ya que si $(\beta, q, v) \sim (\alpha, p, u)$, entonces $p = q$ y $g_{\alpha\beta}(p)(v) = u$. Así $\varphi_\alpha([\beta, p, v]) = \varphi_\alpha([\beta, q, g_{\beta\alpha}(p)(u)]) = \varphi_\alpha([\alpha, p, u])$.

La función $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ es biyectiva, pues su inversa $\varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{F}^r \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ está dada por $\varphi_\alpha^{-1}(p, u) = [\alpha, p, u]$, lo cual implica que restringido a fibras es un isomorfismo.

Sean $\alpha, \beta \in I$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Veamos que $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^r$ es un difeomorfismo. En efecto,

$$\begin{aligned}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p, u) &= \varphi_\beta([\alpha, p, u]) \\ &= \varphi_\beta([\beta, p, g_{\beta\alpha}(p)(u)]) \\ &= (p, g_{\beta\alpha}(p)(u)),\end{aligned}$$

la cual es suave y su inversa está dada por $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(p, u) = (p, g_{\alpha\beta}(p)(u))$, la cual de igual manera es suave. Por lo tanto, debido al Teorema 2.1.19, (E, π, M) es un haz vectorial suave de rango r cuyas funciones de transición son $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$.

Denotemos por $\xi^r = (E, \pi, M)$ al $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r construido previamente a partir de la familia de funciones $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$. Ahora supongamos que existe otro $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r, $\eta^r = (E', \rho, M)$ cuyas funciones de transición están dadas por la familia $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$ asociada a la cubierta $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$; veamos que $\xi \cong \eta$.

Consideremos $\psi_\alpha : \rho^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^r$ trivializaciones del haz η que dan lugar las funciones de transición $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{F})$. Definimos una función

$$f : E' \longrightarrow E$$

dada por $f(v) = [\alpha, \psi_\alpha(v)]$ si $\rho(v) \in U_\alpha$. Observemos que f esta bien definida pues no de pende de α sólo de v. En efecto, si $\rho(v) \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que

$$[\beta, \psi_\beta(v)] = [\alpha, \varphi_\beta \circ \alpha_\alpha^{-1}(\psi_{\beta(v)})] = [\alpha, \psi_\alpha(v)] \in E.$$

Debido a que f restringido a fibras es una transformación lineal y $\pi(f(v)) = \pi([\alpha, \psi_\alpha(v)]) = \pi_1(\psi_\alpha(v)) = \rho(v)$, tenemos que f es un morfismo de haces. Ya que la composición

$$U_\alpha \times \mathbb{F}^r \xrightarrow{\varphi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}} U_\alpha \times \mathbb{F}^r$$

resulta ser la identidad, tenemos que f es suave, además ya que ψ_α y φ_α restringidos a fibras son isomorfismos para cada $\alpha \in I$, tenemos que f es un isomorfismo restringido en fibras; por lo tanto debido al Teorema 2.1.11 tenemos que el morfismo f resulta ser un isomorfismo de haces.

□

Gracias al resultado anterior, es posible dar una descripción exacta y salvo isomorfismo de las siguientes construcciones entre haces vectoriales, en términos de sus funciones de transición.

Suma de Whitney.

Sean $\xi^{r_1} = (E_1, \pi_1, M)$, $\xi^{r_2} = (E_2, \pi_2, M)$ $\mathbb{F}$-haces vectoriales suaves de rangos r_1 y r_2 respectivamente. Sean $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r_1, \mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$, $\{h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r_2, \mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$ las funciones de transición de ξ^{r_1} y ξ^{r_2} respectivamente asociadas a una cubierta trivializadora común.

Se define la suma de Whitney de ξ^{r_1} y ξ^{r_2}, denotada $\xi^{r_1} \oplus \xi^{r_2}$, como el haz de rango $r_1 + r_2$ con fibras $E_{1_p} \oplus E_{2_p}$ para cada $p \in M$, determinado por las funciones de transición:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{f_{\beta\alpha}} & GL(r_1 + r_2, \mathbb{F}) \\ p & \longmapsto & \begin{pmatrix} g_{\beta\alpha}(p) & 0 \\ 0 & h_{\beta\alpha}(p) \end{pmatrix} \end{array}$$

Observación 2.1.21. *Dado $\xi_1 \times \xi_2 = (E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, M \times M)$ el producto de haces de rango $r_1 + r_2$ y $\Delta : M \longrightarrow M \times M$ la función diagonal $\Delta(p) = (p, p)$. Entonces $\Delta^*(E_1 \times E_2) \cong E_1 \oplus E_2$.*

$$\begin{tikzcd} \Delta^*(E_1 \times E_2) \arrow[r, "\tilde{\pi}_2"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E_1 \times E_2 \arrow[d, "\tilde{\pi} = \pi_1 \times \pi_2"] \\ M \arrow[r, "\Delta"] & M \times M \end{tikzcd}$$

Para verificar esto analizaremos las funciones de transición del haz $\Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$. Sea $\{(V_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in I)\}$ un atlas suave de $\xi_1 \times \xi_2$. Dado $p \in M$ existe $\alpha \in I$ tal que $\Delta(p) \in V_\alpha$, tomemos U_α una vecindad abierta de p tal que $\Delta(U_\alpha) \subset V_\alpha$.

Dada la trivialización local del haz $\xi_1 \times \xi_2$

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}^{-1}(V_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr] & & V_\alpha \times \mathbb{F}^{r_1+r_2} \arrow[dl] \\ & V_\alpha & \end{tikzcd}$$

y $\pi_2 : V_\alpha \times \mathbb{F}^{r_1+r_2} \longrightarrow \mathbb{F}^{r_1+r_2}$ la proyección en el segundo factor, definamos la siguiente trivialización local del haz $\Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}_1^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr] & & U_\alpha \times \mathbb{F}^{r_1+r_2} \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_\alpha(p,e) = (p, \pi_2(\psi_\alpha(e)))$ el cual es un difeomorfismo pues su inversa está dada por $\varphi_\alpha^{-1}(p,u) = (p, \psi_\alpha^{-1}(\Delta(p),u))$.

De esta manera obtenemos que para cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ la función

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{F}^{r_1+r_2} \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{F}^{r_1+r_2}$$

está dada por

$$\begin{aligned} (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(p,u) &= \varphi_\beta(p, \psi_\alpha^{-1}(\Delta(p),u)) \\ &= (p, \pi_2(\psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(\Delta(p),u))) \\ &= (p, \pi_2 \circ (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(f(p))(u)) \\ &= (p, g_{\beta\alpha}(\Delta(p)(u))). \end{aligned}$$

Sin peridida de generalidad podemos suponer que cada carta (V_α, ψ_α) del atlas para el haz $\xi_1 \times \xi_2$ es de la forma $(\psi_{\alpha'} \times \tilde{\psi}_{\alpha'}, U_{\alpha'} \times U_{\alpha'})$ donde $(\psi_{\alpha'}, U_{\alpha'})$ y $(\tilde{\psi}_{\alpha'}, U_{\alpha'})$ denotan cartas para ξ_1 y ξ_2 respectivamente.

Definimos

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta &\xrightarrow{g^*_{\beta\alpha}} GL(r_1+r_2, \mathbb{F}) \\ p \quad &\longmapsto \quad g_{\beta\alpha}(\Delta(p)) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g_{\beta\alpha}(\Delta(p),u) &= (\varphi_{\beta_{(p,p)}} \circ \varphi_{\beta_{(p,p)}})(u) \\ &= ((\varphi_{\beta'} \times \tilde{\varphi}_{\beta'}) \circ (\varphi_{\alpha'} \times \tilde{\varphi}_{\alpha'})^{-1})(u) \\ &= ((\varphi_{\beta'_p} \circ \varphi_{\alpha'_p}^{-1}) \times (\tilde{\varphi}_{\beta'_p} \circ \tilde{\varphi}_{\alpha'_p}^{-1}))(u) \\ &= (h_{\beta'\alpha'}(p) \times \tilde{h}_{\beta'\alpha'}(p))(u) \end{aligned}$$

y $h_{\beta'\alpha'}(p)$ y $\tilde{h}_{\beta'\alpha'}(p)$ denotan las funciones de transición de ξ_1 y ξ_2, respectivamente.

Claramente

$$h_{\beta'\alpha'}(p) \times \tilde{h}_{\beta'\alpha'}(p) = \begin{pmatrix} h_{\beta'\alpha'}(p) & 0 \\ 0 & \tilde{h}_{\beta'\alpha'}(p) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\Delta^*(E_1 \times E_2) \cong E_1 \oplus E_2$.

Si consideremos la función $\Delta_n : M \longrightarrow \underbrace{M \times \cdots \times M}_{\text{n}}$ dada por $\Delta_n(p) = \underbrace{(p, ..., p)}_{\text{n}}$, procediendo de manera inductiva para el producto de n haces vectoriales, obtenemos que $\Delta_n^*(E_1 \times \cdots \times E_n) \cong E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

Sean ξ^{r_1} y ξ^{r_2} $\mathbb{F}$-haces vectoriales suaves como arriba.

Producto tensorial.

Sean $A \in \mathbb{F}(m, n)$ y $B \in \mathbb{F}(r, s)$. Se define el producto de Kronecker de A y B como la matriz $A \otimes B \in \mathbb{F}(mr, ns)$ donde

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Se define el producto tensorial de ξ^{r_1} y ξ^{r_1} denotado por $\xi^{r_1} \otimes \xi^{r_2}$, como el haz de rango $r_1 \cdot r_2$ con fibras $E_{1_p} \otimes E_{2_p}$ para cada $p \in M$, determinado por las funciones de transición:

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta &\xrightarrow{f_{\beta\alpha}} GL(r_1 \cdot r_2, \mathbb{F}) \\ p &\longmapsto g_{\beta\alpha}(p) \otimes h_{\beta\alpha}(p). \end{aligned}$$

Haz de morfismos.

Se define el haz de morfismos de ξ^{r_1} y ξ^{r_2} denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\xi^{r_1}, \xi^{r_2})$, como el haz de rango $r_1 r_2$ con fibras $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(E_{1_p}, E_{2_p})$ para cada $p \in M$, determinado por las funciones de transición:

$$\begin{aligned} U_\alpha \cap U_\beta &\xrightarrow{f_{\beta\alpha}} GL(r_1 r_2, \mathbb{F}) \\ p &\longmapsto h_{\beta\alpha}(p) \circ (\_) \circ g_{\alpha\beta}(p). \end{aligned}$$

donde $h_{\beta\alpha}(p) \circ (\_) \circ g_{\alpha\beta}(p) \in GL(r_1 r_2, \mathbb{F})$ denota la matriz asociada al isomorfismo lineal dado por la composición:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^{r_1},\mathbb{F}^{r_2}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^{r_1},\mathbb{F}^{r_2}) \\ f & \longmapsto & \tilde{h}_{\beta\alpha}(p)\circ f\circ \tilde{g}_{\alpha\beta}(p) \end{array}$$

en la cual, $\tilde{g}_{\beta\alpha}(p) : \mathbb{F}^{r_1} \longrightarrow \mathbb{F}^{r_1}$ denota el isomorfismo lineal cuya matriz asociada es $g_{\beta\alpha}(p) \in GL(r_1,\mathbb{F})$ y $\tilde{h}_{\beta\alpha}(p) : \mathbb{F}^{r_2} \longrightarrow \mathbb{F}^{r_2}$ denota el isomorfismo lineal cuya matriz asociada es $h_{\beta\alpha}(p) \in GL(r_2,\mathbb{F})$.

Dual de un haz.

Dado un espacio vectorial W sobre $\mathbb{F}$, se define su espacio dual como el espacio W^* cuyos elementos son transformaciones lineales $l : W \longrightarrow \mathbb{F}$.

Sean V, W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente, si $T : V \longrightarrow W$ es lineal, entonces T determina una transformación lienal $T^* : W^* \longrightarrow V^*$ tal que $T^*(l)(v) = l(T(v))$ llamada la transpuesta de T.

Si $A = [T]_\alpha^\beta \in \mathbb{F}(m,n)$ es la matriz asociada a T respecto a la base α de V y β de W, entonces $A^T \in \mathbb{F}(n,m)$ es la matriz asociada las bases duales α^* de V^* y β^* de W^*.

Sea $\xi^r = (E,\pi,M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r y sean $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r,\mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha,\beta \in I\}$ las funciones de transición del haz, asociadas a un atlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de ξ.

Se define el dual del haz ξ denotado como ξ^*, como el haz de rango r con fibras $E_p^* = (E_p)^*$ para cada $p \in M$, determinado por las funciones de transición:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{g^*_{\beta\alpha}} & GL(r,\mathbb{F}) \\ p & \longmapsto & ((g_{\alpha\beta}(p))^T)^{-1}. \end{array}$$

Cabe mencionar que el haz dual ξ_* es isomorfo al haz de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\xi^r,\varepsilon)$.

Cociente de un haz.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $V' \subset V$ un subespacio , entonces podemos considerar el espacio considerar el espacio cociente V/V'.

Sea W un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, $W' \subset W$ subespacio y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal tal que $T(V') = W'$. Entonces T induce una transformación lineal $\tilde{T} : V/V' \longrightarrow W/W'$ tal que $\tilde{T}(u + V') = T(u) + W'$.

Dadas bases de V' y W', las podemos extender para obtener bases de V y W respectivamente, donde la matriz asociada a la transformación T respecto a estas bases es de la forma:

$$[T] = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Así, D es la matriz asociada a la transformación $\tilde{T}$ respecto a las bases de V/V' y W/W'. Ahora, si $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo donde $\dim V = r$ y $\dim V' = k$

con $V' \subset V$ subespacio, entonces podemos hacer un arreglo en los renglones y columnas de tal manera que

$$[T] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde $D \in \mathbb{F}(r-k, r-k)$ es invertible.

Sea $\xi^r = (E, \pi, M)$ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango r y F un subhaz de rango k de ξ. Así, existe un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de ξ tal que $\phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap F) = U_\alpha \times \mathbb{F}^k \subset U_\alpha \times \mathbb{F}^r$.

Sean $\{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbb{F}) \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \alpha, \beta \in I\}$ las funciones de transición asociadas al atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I\}$.

Se define el cociente de ξ determinado por el subhaz $(F, \pi_{\downharpoonleft_{F}, M})$ denotado por E/F, como el haz de rango $r-k$ con fibras E_p/F_p, determinado por las funciones de transición:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{f_{\beta\alpha}} & GL(r-k, \mathbb{F}) \\ p & \longmapsto & D_{\beta\alpha}(p) \end{array}$$

donde $D_{\beta\alpha}(p)$ denota el bloque dentro de la matriz

$$g_{\beta\alpha}(p) = \begin{pmatrix} A_{\beta\alpha}(p) & B_{\beta\alpha}(p) \\ C_{\beta\alpha}(p) & D_{\beta\alpha}(p) \end{pmatrix} \in GL(r, \mathbb{F}).$$

2.2. Transversalidad.

Sean M y N variedades suaves de dimensión m y n respectivamente. Sea $f : M \longrightarrow N$ una función suave y $q \in N$ tal que $f^{-1}(q) \neq \emptyset$. Sabemos que si q es un valor regular de f, entonces $f^{-1}(q)$ es una variedad suave de dimension $m-n$ y $T_p f^{-1}(q) = \ker df_p$ para cada $p \in f^{-1}(q)$.

Ahora, queremos ver bajo que condiciones en f, se tiene que si $Z \subset N$ es una subvariedad de N, entonces $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de M.

Definición 2.2.1. *Sea $f : M \longrightarrow N$ suave y $Z \subset N$ subvariedad. Se dice que f es transversal a Z en el punto $p \in M$ si $f(p) \notin Z$ ó bien $f(p) \in Z$ y $df_p(T_pM) + T_{f(p)}Z = T_{f(p)}N$, lo cual denotaremos como $f \pitchfork_p Z$.*

Se dice que f es transversal a Z, lo cual denotaremos como $f \pitchfork Z$, si $f \pitchfork_p Z$ para todo $p \in f^{-1}(Z)$.

Teorema 2.2.2. *Sea N variedad suave y $Z \subset N$. Entonces Z es una subvariedad de N si y solo si para cada punto $q \in Z$ existe una vecindad abierta $V \subset N$ de q, $g : V \longrightarrow \mathbb{F}^r$ una sumersión tal que $g^{-1}(0) = V \cap Z$, donde $r = \mathrm{cod}(Z)$ es la codimensión de Z.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $n = \dim N$ y supongamos que Z es una subvariedad de N de dimensión k. Sea $q \in Z$, entonces existe una carta (V, ψ) de q en N tal que

$$\psi(V \cap Z) = \psi(V) \cap (\mathbb{F}^r \times \{0\}).$$

Sea $\pi : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{F}^{n-k}$ la proyección en el segundo factor, la cual es una sumersión.

Sea $g : V \longrightarrow \mathbb{F}^{n-k}$ dada por $g(p) = (\pi_{\restriction_{\psi(V)}} \circ \psi)(p)$ la cual es una sumersión y $g^{-1}(0) = \psi^{-1}(\pi^{-1}_{\restriction_{\psi(V)}}(0)) = \psi^{-1}[\psi(V) \cap (\mathbb{F}^k \times \{0\})] = V \cap Z$.

$\Leftarrow$) Sea $q \in Z$, por hipótesis existe $V \subset N$ vecindad abierta de q y $g : V \longrightarrow \mathbb{F}^r$ sumersión tal que $g^{-1}(0) = V \cap Z$.

Como g es una sumersión se tiene que $0 \in \mathbb{F}^r$ es valor regular de g, así por el teorema del valor regular, $g^{-1}(0)$ es una subvariedad de N de dimensión $(n-r)$, por lo tanto Z es una subvariedad de N de dimensión $(n-r)$.

□

Lema 2.2.3. *Sea $T : E \longrightarrow F$ una transformación lineal suprayectiva y $W \subset E$ un subespacio. Entonces $T(W) = F$ si y solo si $E = W + \ker T$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $T(W) = F$. Dado $e \in E$, existe $u \in W$ tal que $T(e) = T(u)$ por lo que $T(e-u) = 0$, lo cual implica que existe $v \in \ker T$ tal que $v = e - u$, asi $e = u + v$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $T(E) = F$ y $E = W + \ker T$. Entonces

$$F = T(E) = T(W + \ker T) = T(W)$$

□

Teorema 2.2.4. *Sea $f : M \longrightarrow N$ suave, $Z \subset N$ subvariedad tal que $\mathrm{cod}(Z) = r$. sea $p \in f^{-1}(Z)$, $V \subset N$ vecindad abierta de $f(p)$ y $g : V \longrightarrow \mathbb{F}^r$ sumersión tal que $g^{-1}(0) = V \cap Z$. Entonces $f \pitchfork_p Z$ si y solo si $(g \circ f)$ es una sumersión en p.*

Demostración. Como $0 \in \mathbb{F}^r$ es un valor regular de g, entonces $g^{-1}(0) = V \cap Z$ es una $(n-r)$-variedad con $\dim N = n$ y $T_{f(p)}Z = T_{f(p)}V \cap Z = \ker dg_{f(p)}$. Notemos que $dg_{f(p)} : T_{f(p)}N \longrightarrow \mathbb{F}^r$ es suprayectiva, haciendo uso del Lema 2.2.3 tenemos que:

$$\begin{aligned} f \pitchfork_p Z &\Leftrightarrow df_p(T_pM) + T_{f(p)}Z = T_{f(p)}N \\ &\Leftrightarrow df_p(T_pM) + \ker dg_{f(p)} = T_{f(p)}N \\ &\Leftrightarrow dg_{f(p)}[d_{f(p)}(T_pM)] = dg_{f(p)}(T_{f(p)}N) = \mathbb{F}^r \\ &\Leftrightarrow d(g \circ f)_p(T_pM) = \mathbb{F}^r, \end{aligned}$$

por lo tanto $g \circ f$ es una sumersión en p.

$\square$

Teorema 2.2.5. *Sea $f : M \longrightarrow N$ suave y $Z \subset N$ subvariedad tal que $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$. Si $f \pitchfork Z$, entonces $f^{-1}(Z)$ es subvariedad de M, $\operatorname{cod}(f^{-1}(Z)) = \operatorname{cod}(Z)$ y $T_p f^{-1}(Z) = (df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z)$ para todo $p \in f^{-1}(Z)$.*

Demostración. Probemos que dado $p \in f^{-1}(Z)$, existe una vecindad abierta $W \subset M$ de p tal que $W \cap f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de M.

Sea $r = \operatorname{cod}(Z)$, ya que $Z \subset N$ es una subvariedad, por el Teorema 2.2.2 existe $V \subset N$ vecindad abierta de $f(p)$ y $g : V \longrightarrow \mathbb{F}^r$ una sumersión tal que $g^{-1}(0) = V \cap Z$. Sea $W \subset M$ vecindad abierta de p tal que $f(W) \subset V$.

Debido al Teorema 2.2.4, $f \pitchfork_p Z$ si y solo si $g \circ f : W \longrightarrow \mathbb{F}^r$ es una sumersión en p. Por el teorema de la sumersión podemos tomar W suficientemente pequeño tal que $g \circ f : W \longrightarrow \mathbb{F}^r$ es una sumersión.

Así, $0 \in \mathbb{F}^r$ es valor regular de $(g \circ f)$ y $(g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = f^{-1}(V \cap Z) = W \cap f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de M de dimensión $(m - r)$. Por lo tanto $\operatorname{cod}(f^{-1}(Z)) = \operatorname{cod}(Z) = r$.

Sea $p \in f^{-1}(Z)$, veamos que $T_p f^{-1}(Z) = (df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z)$. Como $0 \in \mathbb{F}^r$ es valor regular de $g \circ f : W \longrightarrow \mathbb{F}^r$ entonces:

$$\begin{aligned} T_p f^{-1}(Z) &= T_p f^{-1}(V \cap Z) \\ &= \ker d(g \circ f)_p \\ &= (d(g \circ f)_p)^{-1}(0) \\ &= (dg_{f(p)} \circ df_p)^{-1}(0) \\ &= (df_p)^{-1}[(dg_{f(p)})^{-1}(0)] \\ &= (df_p)^{-1}(\ker dg_{f(p)}) \\ &= (df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z). \end{aligned}$$

$\square$

Para algunos resultados haremos uso del concepto de métrica riemanianna en un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave $\xi = (E, \pi, M)$, que a grandes razgos es una función $g(p) : E_p \times E_p \longrightarrow \mathbb{R}$ que varía suavemente, la cual es un producto interno definido positivo para cada $p \in M$.

Teorema 2.2.6. *Sea (E, π, M) un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave equipado con una métrica riemanianna. Sea $\{N_i \subset E : i \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de subvariedades suaves y $\epsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función suave y positiva sobre M. Entonces existe una sección suave $s : M \longrightarrow E$ tal que $s \pitchfork N_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $|s(p)| < \epsilon(p)$ para todo $p \in M$.*

Demostración. Primeramente se demostrará para una subvariedad suave $N \subset E$ y posteriormente se extenderá a una cantidad numerable de subvariedades haciendo uso del Teorema de Sard.

Debido a [3, Lema 14.4], tenemos que todo $\mathbb{F}$-haz vectorial suave tiene tipo finito, por lo que elegimos un complemento (E', π', M) del haz (E, π, M), esto es $E \oplus E' \underset{\cong}{\xrightarrow{\beta}} M \times \mathbb{F}^k$. Sea $\tilde{f} : E \oplus E' \longrightarrow E$ la proyección en el primer factor y sea $f := \tilde{f} \circ \beta^{-1}$, entonces $f : M \times \mathbb{F}^k \longrightarrow E$ es una sumersión y por consiguiente $f^{-1}(N) \subset M \times \mathbb{F}^k$ es una subvariedad donde las fibras del haz normal de $f^{-1}(N)$ en $M \times \mathbb{F}^k$ son mandadas por la derivada de f de manera isomorfa en las fibras del haz normal de N en E.

Por lo tanto una sección s de un haz trivial $M \times \mathbb{F}^k \longrightarrow M$ es transversal a $f^{-1}(N)$ si y solo si $f \circ s \pitchfork N$. De esta manera podemos suponer sin perdida de generalidad que el haz (E, π, M) es trivial, por lo que el problema se reduce a encontrar una sección s del haz trivial $M \times \mathbb{F}^k \longrightarrow M$ que sea transversal a una subvariedad N de $M \times \mathbb{F}^k$ y posteriormente a una cantidad numerable de subvariedades.

La demostración consiste en aplicar el teorema de Sard para escoger un valor regular de una función suave $\eta : N \cap E\mid_U \longrightarrow \mathbb{F}^k$ la cual está descrita de la siguiente forma:

Consideremos A un subconjunto cerrado dentro de un subconjunto abierto V de $\mathbb{F}^k$, entonces podemos cubribir el conjunto $V \setminus A$ con una sucesión de discos $\{K_v : v \in \mathbb{N}\}$ localmente finita y elegir para cada $v \in \mathbb{N}$ una función suave $\psi_v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \psi_v$ y $\psi_v > 0$ si y solo si $x \in K_v$. Así, dado $L \subset M$ cerrado, podemos elegir una partición de la unidad $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que $\text{sop}(\phi_i) \subset V_i$ con cada V_i carta de M, entonces $\text{sop}(\phi_i) \cap L$ es cerrado en V_i y por lo anterior podemos encontrar una función suave $\lambda_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda_i \geq 0$ y $\lambda_i(x) = 0$ si y solo si $x \in \text{sop}(\phi_i) \cap L$.

Definimos

$$\lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \lambda_i \text{ con } \lambda_i = 0 \text{ fuera de } V_i,$$

la cual está bien definida y es suave debido a las condiciones sobre la familia $\{K_v : v \in \mathbb{N}\}$. Si $x \notin L$ entonces $\lambda_i(x) > 0$ para algún i y $x \in \text{sop}(\phi_i) \cap L$, por lo tanto $\lambda_i(x) > 0$, por lo que $\lambda(x) > 0$.

Definamos $\alpha := \exp(-\lambda(x)^2)$ entonces $0 \leq \alpha < 1$ y $\alpha^{-1}(0) = L$, por lo tanto para cada subconjunto cerrado L, podemos construir una función suave α con las características anteriores.

Sea A un subconjunto cerrado de M y α su función asociada, sea $U = M \setminus A$ y denotemos por $\delta := \epsilon\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$, consideremos la función suave

$$g : E\mid_U = U \times \mathbb{F}^k \longrightarrow U \times \mathbb{F}^k \qquad (p, v) \longmapsto (p, \delta(p)^{-1} v)$$

tomemos $\eta := \pi_2 \circ g : N \cap E\lfloor_U \longrightarrow \mathbb{F}^k$ con π_2 la proyección en el segundo factor y sea w un valor regular de η, el cual existe gracias al teorema de Sard.

Por lo tanto definimos la sección $s : M \longrightarrow M \times \mathbb{F}^k$ como $s(p) := (p, \delta(p)w)$. Basta mostrar que el valor regular w determina la transversalidad de la sección s con respecto a la subvariedad N.

En efecto, sea $E\lfloor_U \xrightarrow[\cong]{\Theta} U \times \mathbb{F}^k$ la correspondiente carta del haz; denotemos por $\tilde{N} = \Theta(E\lfloor_U \cap N)$. Sea $p \in U$, tenemos $g \circ s(p) = (p, w)$, entonces $d(g \circ s)_p(v) = (v, 0) \in T_pU \times \mathbb{F}^k$, por lo que $\operatorname{im}(d(g \circ s)_p) = T_pU \times \{0\}$. Ahora, debido a que w es un valor regular de $\pi_2 \circ g$, la derivada $d(\pi_2 \circ g)_{(p,\delta(p)w)} : T_{(p,\delta(p)w)}\tilde{N} \longrightarrow \mathbb{F}^k$ resulta ser suprayectiva para todo $p \in U$, pues $g^{-1}(w) = s(U)$. Así, para cada $p \in U$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_{(p,\delta(p)w)}\tilde{N} \arrow[r, "d(\pi_2 \circ g)_{(p,\delta(p)w)}"] \arrow[d, "dg_{(p,\delta(p)w)}"'] & \mathbb{F}^k \\
T_{(p,w)}g(\tilde{N}) \arrow[ur, "d\pi_{2(p,w)}"'] \arrow[d, hook] & \\
T_pU \times \mathbb{F}^k \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

donde $d\pi_{2(p,w)} : T_{(p,w)}g(\tilde{N}) \longrightarrow \mathbb{F}^k$ resulta ser suprayectiva.

Así para todo $(u, v) \in U \times \mathbb{F}^k$ existe $l \in T_{(p,w)}g(\tilde{N})$ con $l = (u', v)$ tal que $(u, v) = l + (u - u', 0)$ donde $(u - u', 0) \in \operatorname{im}(d(g \circ s)_p)$. Por lo tanto $g \circ s\lfloor_U \pitchfork g(\tilde{N})$ lo que implica $s\lfloor_U \pitchfork \tilde{N}$ y por consiguiente $s \pitchfork N$.

Siguiendo el mismo razonamiento podemos dar una generalización la cual depende fuertemente del teorema de Sard, que nos proporciona el hecho de que los valores críticos de la función η son de medida cero. Así la unión de todos los valores críticos para una cantidad numerable de subvariedades N_i sigue siendo de medida cero, por lo que simplemente escogemos w en el complemento de esa unión, el cual es distinto del vacío, pues el complemento de un conjunto de medida cero en $\mathbb{F}^k$ es no vacío. Así aseguramos la existencia de una sección que sea transversal a una cantidad numerable de subvariedades, y por consiguiente, por el teorema de transversalidad de Thom, la existencia de morfismos genéricos.

□

Observación 2.2.7. *Teniendo en cuenta la construcción anterior, podemos generalizar el teorema de transversalidad de Thom para secciones de funciones suaves [3, Teorema 14.6] a una cantidad numerable de subvariedades, pues este se basa en tomar una vecindad tubular de la sección s anteriormente construida.*

2.3. Homología y Cohomología singular.

Definición 2.3.1. *Sea R un anillo con unidad. Un complejo de cadenas sobre R es una una sucesión de R-módulos $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y homomorfismos de R-módulos $d = \{d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$*

$$(\mathcal{C}, d) : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

tal que $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

Definición 2.3.2. *Dados dos complejos de cadenas $(\mathcal{C}, d)$ y $(\mathcal{C}', d')$ sobre un anillo R definimos un morfismo $f : (\mathcal{C}, d) \longrightarrow (\mathcal{C}', d')$, llamado morfismo de complejos de cadenas, como una colección de $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de homomorfismos de R-módulos $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}, d) : \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
(\mathcal{C}', d') : \cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Observación 2.3.3. *Notemos que para cualesquiera dos homomorfismos de complejos de cadenas $f : (\mathcal{C}, d) \longrightarrow (\mathcal{C}', d')$ y $g : (\mathcal{C}', d') \longrightarrow (\mathcal{C}'', d'')$ la composición está definida de manera obvia como $g \circ f = \{g_n \circ f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Definición 2.3.4. *Dado R un anillo con unidad, definimos **Comp(R-Mod)** como la categoría cuyos objetos son complejos de cadena sobre R y cuyos morfismos son homomorfismos de complejos de cadenas.*

Definición 2.3.5. *Sea $(\mathcal{C}, d)$ un complejo de cadeanas sobre un anillo con unidad R, para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos la n-homología de $(\mathcal{C}, d)$ como el R-módulo dado por*

$$H_n(\mathcal{C}) := \frac{Z_n(\mathcal{C})}{B_n(\mathcal{C})}$$

donde $Z_n(\mathcal{C}) = \ker(d_n)$ es llamado el módulo n-ciclos y $B_n(\mathcal{C}) = \mathrm{im}(d_{n+1})$ es llamado el módulo n-fronteras.

Observación 2.3.6. *Un elemento de $H_n(\mathcal{C})$ es de la forma $z + B_n(\mathcal{C})$ con $z \in Z_n(\mathcal{C})$, la cual es llamada clase de homología y usualmente se denota por $\mathrm{cls}(z)$.*

Proposición 2.3.7. *Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, H_n define un funtor aditivo entre las categorías **Comp(R-Mod)** y **R-Mod**.*

Demostración. Debido a que ya sabemos como es la asignación a nivel objetos, $\mathcal{C} \mapsto H_n(\mathcal{C})$, basta mostrar como es a nivel de morfimos. Si $f : (\mathcal{C}, d) \longrightarrow$

$(\mathcal{C}', d')$ es un homomorfismo entre complejos de cadenas sobre R, definimos el homomorfismo

$$H_n(f) : H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}')$$

dado por $H_n(f)(\text{cls}(z)) = \text{cls}(f_n(z))$ donde $\text{cls}(z) = z + B_n(\mathcal{C})$, $z \in Z_n(\mathcal{C})$.

Veamos que $H_n(f)$ está bien definida y no depende del representante. En efecto, si consideramos $\text{cls}(z) \in H_n(\mathcal{C})$ entonces $z \in Z_n(\mathcal{C})$ lo cual implica que $d_n(z) = 0$ y por consiguiente $0 = f_{n-1}(0) = f_{n-1}(d_n(z)) = d'_n(f_n(z))$. Así $f_n(z) \in Z_n(\mathcal{C}')$ y por lo tanto $\text{cls}(f_n(z)) \in H_n(\mathcal{C}')$. Ahora si $z + B_n(\mathcal{C}) = y + B_n(\mathcal{C})$ entonces $z - y \in B_n(\mathcal{C}) = \text{im}(d_{n+1})$, por lo que existe $c \in C_{n+1}$ tal que $d_{n+1}(c) = z - y$, lo que implica que $f_n(z) - f_n(y) = f_n(z - y) = f_n(d_{n+1}(c)) = d'_{n+1}(f_{n+1}(c))$. Así $f_n(z) - f_n(y) \in B_n(\mathcal{C})$ lo que nos premite concluir que $\text{cls}(f_n(z)) = \text{cls}(f_n(y))$.

Veamos que H_n es un funtor:

1. Si consideramos $I_{\mathcal{C}} = \{Id_{C_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, claramente $H_n(I_{\mathcal{C}}) = I_{H_n(\mathcal{C})}$
2. Sean $f : (\mathcal{C}, d) \longrightarrow (\mathcal{C}', d')$ y $g : (\mathcal{C}', d') \longrightarrow (\mathcal{C}'', d'')$ homomorfismos de complejos de cadenas, entonces $H_n(gf) = H_n(g)H_n(f)$ pues por un lado $H_n(gf)(\text{cls}(z)) = \text{cls}((g_n f_n)(z))$ y por otro

$$\begin{aligned} H_n(g)(H_f(\text{cls}(z))) &= H_n(g)(\text{cls}(f_n(z))) \\ &= \text{cls}(g_n(f_n(z))). \end{aligned}$$

Por último, chequemos la aditividad. Sean $f, h : (\mathcal{C}, d) \longrightarrow (\mathcal{C}', d')$ homomorfismos de complejos de cadenas entonces tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} H_n(f + g)(\text{cls}(z)) &= \text{cls}((f_n + g_n)(z)) \\ &= \text{cls}(f_n(z)) + \text{cls}(g_n(z)) \\ &= (H_n(f) + H_n(g))(\text{cls}(z)). \end{aligned}$$

□

Definición 2.3.8. *$H_n(f)$ es el morfismo inducido el cual se denota por f_*.*

2.3.1. Homología singular.

Definición 2.3.9. *Consideremos $\{e_0, e_1, ..., e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ los vectores canónicos. Definimos el n-simplejo estándar como el conjunto de todas las combinaciones convexas de los vectores canónicos en $\mathbb{R}^{n+1}$,*

$$\Delta^n = [e_0, ..., e_n] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n} t_i e_i : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \Big\}.$$

Para X un espacio topológico, un n-simplejo singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$.

Definición 2.3.10. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Para un espacio topológico X definimos $S_{-1}(X;R) := \{0\}$ y para cada $n \geq 0$, definimos $S_n(X;R)$ como el R-módulo libre cuya base es el conjunto de todos los n-simplejos singulares en X,*

$$S_n(X;R) := R\langle C\ (\Delta^n,\ X)\rangle.$$

Definición 2.3.11. *Denotemos por $(t_0, ..., t_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} t_i e_i$ a los elementos de Δ^n. Definimos el i-ésimo mapeo de cara como la función continua $\varepsilon_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ dada por*

$$\varepsilon_i^n(t_0, ..., t_{n-1}) = (t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1}) \quad \text{con } 0 \leq i \leq n-1,$$

donde omitimos el término t_{-1} si $i = 0$.

Observación 2.3.12. *Los mapeos de cara definidos de esta manera, para $0 \leq j < i \leq n-1$ cumplen que*

$$\varepsilon_i^n \varepsilon_j^{n-1} = \varepsilon_j^n \varepsilon_{i-1}^{n-1} : \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^n.$$

Definición 2.3.13. *Sea X un espacio topológico. Si σ es un 0-simplejo singular en X, definimos $\partial_0(\sigma) = 0$. Si $n \geq 1$ y $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ es un n-simplejo, definimos*

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \varepsilon_i^n,$$

donde $\sigma\varepsilon_i^n$ denota la composición $\sigma \circ \varepsilon_i^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$.

Definimos el mapeo de frontera singular $\partial_n : S_n(X;R) \longrightarrow S_{n-1}(X;R)$ extendiendo por linealidad,

$$\partial_n\left(\sum m_j \sigma_j\right) = \sum m_j \partial_n(\sigma_j).$$

Proposición 2.3.14. *Para todo $n \geq 1$ $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.*

Demostración. Para cualquier n-simplejo σ

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) &= \partial_{n-1}\Big(\sum_i (-1)^i \sigma\varepsilon_i^n\Big) \\
&= \sum_i (-1)^i \partial_{n-1}(\sigma\varepsilon_i^n) \\
&= \sum_i (-1)^i \sum_j (-1)^j \sigma\varepsilon_i^n \varepsilon_j^{n-1} \\
&= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \sigma\varepsilon_i^n \varepsilon_j^{n-1} + \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} \sigma\varepsilon_i^n \varepsilon_j^{n-1}.
\end{aligned}$$

Debido a la observación anterior tenemos que $\sigma\varepsilon_i^n\varepsilon_j^{n-1} = \sigma\varepsilon_j^n\varepsilon_{i-1}^{n-1}$ si $j < i$. El término $\sigma\varepsilon_i^n\varepsilon_j^{n-1}$ aparece en el primer sumando, sobre todo $j < i$ con signo $(-1)^{i+j}$, y el término $\sigma\varepsilon_j^n\varepsilon_{i-1}^{n-1}$ aparece en el segundo sumando (el índice j es ahora el más grande) y con signo opuesto $(-1)^{i+j-1}$. Así, todos los términos se cancelan y obtenemos que $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

$\square$

Definición 2.3.15. *Teniendo en cuenta la Proposición 2.3.14, el mapeo de frontera singular da lugar a un complejo de cadenas*

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X;R) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X;R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X;R) \longrightarrow \cdots$$

por lo que definimos la n-ésima homología singular de X con coeficientes en R como:

$$H_n(X;R) := \frac{Z_n(X;R)}{B_n(X;R)} = \frac{\ker(\partial_n)}{\operatorname{im}(\partial_{n+1})}.$$

Lema 2.3.16. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces para todo $n \geq 0$ existe un homomorfismo de R-módulos $\tilde{f} : S_n(X;R) \longrightarrow S_n(Y;R)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc}
S_n(X;R) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X;R) \\
\tilde{f}\downarrow & & \downarrow\tilde{f} \\
S_n(Y;R) & \xrightarrow{\partial'_n} & S_{n-1}(Y;R)
\end{array}$$

Demostración. Comencemos haciendo la siguiente observación. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ es un n-simplejo singular en X, entonces $f\sigma : \Delta^n \longrightarrow Y$ es un n-simplejo singular en Y. De acuerdo a lo anterior, definimos

$$\tilde{f} : S_n(X;R) \longrightarrow S_n(Y;R)$$

como $\tilde{f}\big(\sum_j m_j\sigma_j\big) = \sum_j m_j f\sigma_j$, la cual está bien definida.

Ahora observemos la conmutatividad del diagrama depende sólo de los elementos básicos en $S_n(X;R)$, pues se puede extender, posteriormente por linealidad. Sea $\sigma \in S_n(X;R)$ un n-simplejo singular básico; por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\partial_n(\sigma) &= \tilde{f}\big(\sum_i (-1)^i\sigma\varepsilon_i^n\big) \\
&= \sum_i (-1)^i\tilde{f}(\sigma\varepsilon_i^n) \\
&= \sum_i (-1)^i f\sigma\varepsilon_i^n,
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\partial'_n \tilde{f}(\sigma) &= \partial'_n(f\sigma)\\ &= \sum_i (-1)^i (f\sigma)\varepsilon_i^n\\ &= \sum_i (-1)^i f\sigma\varepsilon_i^n.\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.17. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces para todo $n \geq 0$ $\tilde{f}(Z_n(X;R)) \subset Z_n(Y;R)$ y $\tilde{f}(B_n(X;R)) \subset B_n(Y;R)$*

Demostración. Si $\alpha \in Z_n(X;R)$ entonces $\partial_n(\alpha) = 0$, lo cual implica que

$$\partial'_n(\tilde{f}(\alpha)) = \tilde{f}(\partial_n(\alpha)) = \tilde{f}(0) = 0,$$

de donde obtenemos que $\tilde{f}(\alpha) \in \ker(\partial'_n)$.

Si $\beta \in B_n(X;R)$ entonces existe $\gamma \in S_{n+1}(X;R)$ tal que $\partial_{n+1}(\gamma) = \beta$, por lo que

$$\tilde{f}(\beta) = \tilde{f}(\partial_{n+1}(\gamma)) = \partial'_n(\tilde{f}(\gamma)),$$

de donde obtenemos que $\tilde{f}(\beta) \in B_n(Y;R)$.

□

Teorema 2.3.18. *Tomar homología singular con coeficientes en un anillo conmutativo con unidad R, define un funtor $H_n : TOP \longrightarrow R-Mod$, entre la categoría de espacios topologicos TOP y la catagoría de R-módulos $R-Mod$.*

Demostración. Para $X \in TOP$ tenemos que $H_n(X;R) = \frac{Z_n(X;R)}{B_n(X;R)} \in R-Mod$.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entonces definimos el homomorfismo de R-módulos $H_n : H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$ como $H_n(f)(\mathrm{cls}(z)) = \mathrm{cls}(\tilde{f}(z))$, la cual está bien definida gracias al Lema 2.3.17.

Observemos que este funtor lo podemos ver como la composición de los siguiente funtores

$$TOP \xrightarrow{S_*} Comp(R-Mod) \xrightarrow{H_n} R-Mod$$

donde el primer funtor es tomar cadenas singulares respecto al anillo R, el cual está bien definido gracias al Lema 2.3.16

□

Definición 2.3.19. *Para X un espacio topológico, R un anillo conmutativo con unidad y M un R-módulo. Definimos el n-ésimo grupo de homología singular de X con coeficientes en M como*

$$H_n(X; M) := H_n(S_*(X; R) \otimes M)$$

donde $S_*(X; R) \otimes M = \{(S_n(X; R) \otimes_R M, \partial_n \otimes Id_M)\}_{n \geq 0}$.

2.3.2. Homología de parejas.

Sea X un espacio topológico y R un anillo conmutativo con unidad, recordemos que $S_q(X; R)$ denota el R-módulo libre generado por los q-simplejos singulares $\Delta^q \longrightarrow X$.

Sea $A \subset X$ un subespacio, notemos que este induce un morfismo de cadenas

$$\begin{array}{ccc} S_n(A; R) & \xrightarrow{\partial_q^A} & S_{n-1}(A; R) \\ \tilde{i}\downarrow & & \downarrow\tilde{i} \\ S_n(X; R) & \xrightarrow{\partial_q^X} & S_{n-1}(X; R) \end{array}$$

donde $\tilde{i}$ denotan las inclusiones de cadenas singulares.

Consideremos los módulos $S_*(X; R)/S_*(A; R)$, entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo inducido por las proyecciones naturales.

$$\begin{array}{ccccc} S_q(A; R) & \xrightarrow{\tilde{i}} & S_q(X; R) & \xrightarrow{\pi} & S_q(X; R)/S_q(A; R) \\ \downarrow\partial_q^A & & \downarrow\partial_q^X & & \downarrow\bar{\partial}_q \\ S_{q-1}(A; R) & \xrightarrow{\tilde{i}} & S_{q-1}(X; R) & \xrightarrow{\pi} & S_q(X; R)/S_q(A; R) \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} S_q(X; R)/S_q(A; R) & \xrightarrow{\bar{\partial}_q} & S_{q-1}(X; R)/S_{q-1}(A; R) \\ \bar{c} & \longmapsto & \overline{\partial_q^X(c)} \end{array}$$

la cual está bien definida pues si $\bar{c} = \bar{d}$, entonces $c - d \in S_q(A; R)$, por lo cual $\partial_q^X(c - d) = \partial_q^X(c) - \partial_q^X(d) \in S_{q-1}(A; R)$.

Debido a las observaciones anteriores, la pareja (X, A) con $A \subset X$ da lugar a un complejo de cadenas de cadenas $(S_*(X; R)/S_*(A; R), \bar{\partial}_*)$ el cual denotaremos por $(S_*(X, A; R), \bar{\partial}_*)$.

Definición 2.3.20. *Sea X un espacio topológico, definimos la q-ésima homología de parejas con coeficientes en R, denotado por $H_q(X, A; R)$, como la homología del complejo de cadenas $(S_*(X, A; R), \bar{\partial}_*)$, esto es*

$$H_q(X, A; R) = H_q(S_*(X, A; R)).$$

Observación 2.3.21. *De la misma forma que en la definición 2.3.19, dado M un R-módulo, es posible extender el concepto de homología de parejas con coeficientes en R a homología de parejas con coeficientes en M.*

Observación 2.3.22. *La homología de parejas se comporta de manera funtorial sobre la categoría de parejas de espacios topológicos.*

Definición 2.3.23. *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$, definimos la q-ésima homología reducida con coeficientes en un anillo conmutativo R, como el R-módulo*

$$\tilde{H}_q(X;R) := H_q(X,\{x_0\};R).$$

2.3.3. Axiomas de Eilenberg-Steenrod.

De acuerdo a las construcciones anteriores, sabemos que la teoría de homología singular con coeficientes en cualquier R-módulo, con R un anillo conmutativo con unidad, está constituida de manera natural por una sucesión de funtores H_n sobre la categoría de espacio topológicos por parejas a la categoría de grupos abelianos, los cuales están equipados con transfomaciones naturales $\partial : H_i(X,A) \longrightarrow H_i(X)$. Es bien sabido que estos funtores y transformaciones naturales cumplen los siguientes axiomas:

1. **Homotopía.** Si $f,g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ son dos funciones continuas y homotópicas, entonces $H_n(f) = H_n(g)$.
2. **Escisión.** Si (X,A) es una pareja de espacio topológicos tal que $A \subset X$ y U un subconjunto abierto de X tal que su cerradura está contenida en el interior de A, entonces la inclusión $i : (X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow (X,A)$ induce un isomorfismo en homología.
3. **Dimensión.** Sea P el espacio de un sólo punto, entonces $H_n(P) = 0$ sólo para $n \neq 0$, el grupo $H_0(P)$ es conocido como el grupo de coeficiente.
4. **Aditividad.** Si $X = \coprod_{\alpha} X_\alpha$, es la unión disjunta de una familia de espacios topológicos X_α, entonces $H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_n(X_\alpha)$.
5. **Exactitud.** Para cada par de espacio topológicos (X,A) con $A \subset X$, existe una suceción exacta larga inducida por las inclusiones $i : A \longrightarrow X$, $j : X \longrightarrow (X,A)$:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Estos axiomas son conocidos como los axiomas de Eilenberg−Steenrod para teorías de homología generalizadas, cabe mencionar que la homología singular no es la única teoría que cumple estos axiomas, existen algunas otras muy distintas como el bordismo y la teoría K topológica.

Observación 2.3.24. *Para una pareja de espacios topológicos (X, A) que cumplan la hipótesis del axioma 5, tenemos que $H_q(X, A; R) \cong \tilde{H}_q(X/A; R)$.*

Observación 2.3.25. *Sea X espacio topológico y $x_0 \in X$, aplicando el axioma 5 para la pareja (X, x_0) tenemos que $H_q(X; R) \cong \tilde{H}_q(X; R)$ para $q > 0$ y $H_0(X; R) \cong \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$. Gracias a lo anterior, si X es contraíble $\tilde{H}_0(X; R) = 0$.*

2.3.4. Cohomología singular.

Sea X un espacio topológico, R un anillo conmutativo con unidad y $M \in R-Mod$. Dado el complejo de cadenas singulares asociado al espacio X,

$$\cdots \longrightarrow S_n(X; R) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} S_{n-2}(X; R) \longrightarrow \cdots$$

tenemos que el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(\_, R) : R - Mod \longrightarrow R - Mod$ induce un nuevo complejo de cadenas

$$S^*(X; M) = (S^n(X; M), \delta) := (\mathrm{Hom_R}(S_n(X; R), M), \delta)$$

donde $\delta^n : S^{n-1}(X; R) \longrightarrow S^n(X; R)$ está dado por $\delta^n(f) = f \circ \partial_n$.

Definición 2.3.26. *Definimos la n-cohomología singular de X con coeficientes en el R-módulo M, como el R-módulo dado por:*

$$H^n(X; M) := \frac{\ker(\delta^{n+1})}{\mathrm{im}(\delta^n)}.$$

Observación 2.3.27. *Considerando la siguiente sustitución; $S^n(X; M) = C_{-n}$ y $\delta^n = d_{-n+1}$ tenemos que*

$$H^n(X; M) = H_{-n}((C_*, d_*)) = H_{-n}(\mathrm{Hom_R}(S_*(X; R), M))$$

Observación 2.3.28. *Dentro de la cohomología singular se puede definir de forma análoga que en homología singular, la cohomología por parejas y la cohomología reducida; gracias a esto es bien sabido que la cohomología singular cumple los axiomas de Eilenberg−Steenrod pero para una versión contravariante.*

2.3.5. Coeficientes Universales.

Dentro de la topología algebraica existen ciertas relaciones entre las teorías de homología y cohomología, las cuales son de gran utilidad a la hora de los calculos. Como un caso particular dentro de la cohomología singular, es posible expresar ésta en términos de la homología singular con coeficientes en distintos anillos y el funtor derivado del funtor $\mathrm{Hom}(\_, M)$ denotado por $\mathrm{Ext}^1_R(\_, M)$, con M un módulo fijo; de manera análoga para la homología singular y el funtor derivado del funtor $\_ \otimes M$ denotado por $\mathrm{Tor}_1^R(\_, M)$, con M un módulo fijo. No diremos nada acerca de estos funtores, para un mayor estudio acerca del tema, el lector puede consultar [5, Capítulo 2].

Teorema 2.3.29 (Coeficientes universales para homología)**.** *Si (X, A) es un par de espacios $A \subset X$, R un dominio de ideales principales y M un módulo sobre R; entonces para todo $q \geq 1$ existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to H_q(X, A; R) \otimes_R M \to H_q(X, A; M) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{q-1}(X, A; R), M) \to 0$$

la cual se escinde, esto es

$$H_q(X, A; M) \cong H_q(X, A; R) \otimes_R M \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{q-1}(X, A; R), M).$$

Demostración. Consultar [5, Corolario 2.35] □

Teorema 2.3.30 (Coeficientes universales para cohomología)**.** *Si (X, A) es un par de espacios $A \subset X$, R un dominio de ideales principales y M un módulo sobre R; entonces para todo $q \geq 1$ existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to \mathrm{Ext}_R^1(H_{q-1}(X, A; R), M) \to H^q(X, A; M) \to \mathrm{Hom}(H_q(X, A; R), M) \to 0$$

la cual se escinde, esto es

$$H^q(X, A; M) \cong \mathrm{Ext}_R^1(H_{q-1}(X, A; R), M) \oplus \mathrm{Hom}(H_q(X, A; R), M)$$

Demostración. Consultar [5, Corolario 2.32] □

2.4. Productos.

En esta sección daremos los conceptos necesarios pára definir los diferentes productos que existen dentro de la homología y cohomología singular, los cuales dotan a la teoría de una mayor estructura algebraica.

Definición 2.4.1. *Dos morfismos entre complejos de cadenas $f, g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ son homotópicos, denotado $f \simeq g$, si existe una sucesión de morfismos $s_n : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathcal{C}'_{n+1}$ que cumplen $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Definición 2.4.2. *Sean (C_*, ∂_*), (C'_*, ∂'_*) complejos de cadenas sobre una anillo conmutativo R, donde C_q y C'_q son no cero para todo $q \in \mathbb{Z}$. Se define el producto tensorial de (C_*, ∂_*) con (C'_*, ∂'_*) como el complejo de cadenas denotado por $(C_* \otimes C'_*, d)$, cuyas componentes están dados por el producto tensorial de módulos graduados, esto es*

$$(C_* \otimes C'_*)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C'_q,$$

donde d se define con la fórmula de Leibniz para la derivada de un producto.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, podemos introducuir de manera natural los productos dentro de la teoría de homología singular, debido a la existencia de los mapeos de Eilenberg−Zilber. Estos productos serán fundamentales dentro del estudio de las clases características.

Teorema 2.4.3. *(Eilenberg−Zilber) Sea Top^2 la categoría cuyos objetos son parejas de espacios (X, Y) (no suponemos que $Y \subset X$) y cuyos morfismos son pares de funciones continuas $(f : X' \longrightarrow X,\ g : Y' \longrightarrow Y)$.*

Entonces los funtores

$$F : (X, Y) \longmapsto S_*(X \times Y)$$
$$F' : (X, Y) \longmapsto S_*(X) \otimes S_*(Y)$$

de Top^2 a la categoría de complejos de cadenas son naturalmente equivalentes; esto es, existen transformaciones naturales $A : F \longrightarrow F'$, $B : F' \longrightarrow F$ tal que para cualquier par (X, Y) las composiciones:

$$S_*(X \times Y) \xrightarrow{A} S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{B} S_*(X \times Y)$$

y

$$S_*(X) \otimes S_*(Y) \xrightarrow{B} S_*(X \times Y) \xrightarrow{A} S_*(X) \otimes S_*(Y)$$

son homotópicas a las identidades. Más aún cualquiera dos elecciones de A (respectivamente B) son únicos salvo homotopía de cadenas.

Demostración. Consultar [5, Teorema 3.4]

□

Observación 2.4.4. *Debido al teorema anterior, tenemos el siguente isomorfismo $H_n(X \times Y) \cong H_n(S_*(X) \otimes S_*(Y))$, pues las transformaciones naturales*

$$A : S_*(X \times Y) \longrightarrow S_*(X) \otimes S_*(Y)$$
$$B : S_*(X) \otimes S_*(Y) \longrightarrow S_*(X \times Y)$$

determinan equivalencias homotópicas a nivel de complejos de cadenas para todo $(X, Y) \in Top^2$.

Definición 2.4.5. *Los morfismos A y B son conocidos como los mapeos de Eilenberg−Zilber y son únicos son salvo homotopia.*

2.4.1. Productos cruz y copa.

Ahora, haciendo uso de los mapeos de Eilenberg−Zilber introduciremos los productos cruz y copa, con los cuales podremos definir una estructura de anillo graduado conmutativo sobre $H^*(X; R)$ para cada espacio topológico X.

Definición 2.4.6. *Sean $\mathcal{C}_*$ y $\mathcal{D}_*$ complejos de cadenas sobre un anillo R, definimos el producto cruz algebraico homológico como el homomorfismo de R-módulos*

$$\times_{\text{alg}} : H_p\mathcal{C}_* \otimes H_q\mathcal{D}_* \longrightarrow H_{p+q}(C_* \otimes \mathcal{D}_*)$$

tal que $\times_{\text{alg}}(\text{cls}(z) \otimes \text{cls}(w)) = \text{cls}(z \otimes w)$. Denoteremos por $\text{cls}(z) \times_{\text{alg}} \text{cls}(w)$ a la imagen de $\text{cls}(z) \otimes \text{cls}(w)$ bajo $\times_{\text{alg}}$.

De manera similar, dados $(X, Y) \in Top^2$ consideremos el producto cruz algebraico homológico para los complejos de cadenas $S_*(X; R)$ y $S_*(Y, R)$ dado R un anillo conmutativo con unidad.

$$\times_{\text{alg}} : H_p(X; R) \otimes H_q(Y; R) \longrightarrow H_{p+q}(S_*(X; R) \otimes S_*(Y; R)).$$

Denotemos por B_* al isomorfismo inducido en homología por el mapeo de Eilenberg-Zilber

$$B_* : H_*(S_*(X; R) \otimes S_*(Y; R)) \longrightarrow H_*(S_*(X \times Y; R)) = H_*(X \times Y; R).$$

Componiendo $\times_{\text{alg}}$ con B_* obtenemos un morfismo

$$\times : H_p(X; R) \otimes H_q(Y; R) \longrightarrow H_{p+q}(X \times Y; R).$$

Definición 2.4.7. *Sean $\alpha \in H_p(X; R)$ y $\beta \in H_q(Y; R)$, la imagen de $\alpha \otimes \beta$ bajo el morfismo $\times$ es llamado el producto cruz homológico de α y β, el cual es denotado por $\alpha \times \beta$.*

De manera similar se puede definir un producto cruz cohomológico por medio de un producto cruz algebraico. Sean $\mathcal{C}_*$ un complejo de cadenas sobre un anillo conmutativo con unidad R, denotemos por $\mathcal{C}^* = \text{Hom}_R(\mathcal{C}_*, R)$. Si $\mathcal{C}_*$, $\mathcal{D}_*$ son complejos de cadenas, existe un mapeo natural

$$\times^{\text{alg}} : H^p\mathcal{C}^* \otimes H^q\mathcal{D}^* \longrightarrow H^{p+q}((\mathcal{C}_* \otimes \mathcal{C}_*)^*)$$

definido por $\text{cls}(\alpha) \otimes \text{cls}(\beta) \longrightarrow \text{cls}(\phi)$ donde $\phi(\sum z_i \otimes w_i) = \sum \alpha(z_i)\beta(w_i)$. Este morfismo es llamado producto cruz algebraico cohomológico. Dentro de esta expresión si α y z_i están en distintos grados entonces $\alpha(z_i)$ es cero, de igual forma para $\beta(w_i)$.

Sean $(X, Y) \in Top^2$, consideremos el mapeo de Eilenberg-Zilber

$$A : S_*(X \times Y; R) \longrightarrow S_*(X; R) \otimes S_*(Y; R),$$

de manera natural podemos inducir un mapeo de cadenas

$$A^* : (S_*(X; R) \otimes S_*(Y; R))^* \longrightarrow (S_*(X \times Y; R))^*$$

el cual resulta ser una equivalencia homotópica. Pasando a cohomología obtenemos un isomorfismo

$$A^* : H^*((S_*(X; R) \otimes S_*(Y; R))^*) \longrightarrow H^*(X \times Y; R)$$

el cual es independiente de la elección de A.

Definición 2.4.8. *Sean $a \in H^p(X;R)$, $b \in H^q(Y;R)$, la imagen de $a \otimes b$ bajo la composición*

$$H^p(X;R) \otimes H^q(Y;R) \xrightarrow{A^* \circ \times^{\mathrm{alg}}} H^{p+q}(X \times Y;R)$$

es llamado producto cruz cohomológico de a y b, y es denotado por $a \times b$.

Definición 2.4.9. *Sean $a \in H^p(X;R)$ y $b \in H^q(X;R)$, entonces el producto copa de a y b está definido por $a \smile b := \Delta^*(a \times b) \in H^{p+q}(X;R)$ donde $\Delta^* : H^*(X \times X;R) \longrightarrow H^*(X;R)$ es el homomorfismo inducido por la función diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times X$.*

Observación 2.4.10. *El producto copa da lugar a un homomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) & \xrightarrow{\smile} & H^{p+q}(X;R) \\ a \otimes b & \longmapsto & a \smile b \end{array},$$

el cual está definido por la composición

$$H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) \xrightarrow{\Delta^* \circ A^* \circ \times^{\mathrm{alg}}} H^{p+q}(X;R).$$

Proposición 2.4.11. *Dadas $f : X' \longrightarrow X$, $g : Y' \longrightarrow Y$ funciones continuas, $a, b \in H^*(X;R)$ y $c \in H^*(Y;R)$, tenemos las siguiente propiedades:*

1. *$a \times c = P_X^* a \smile P_Y^* c$ donde $P_X : X \times Y \longrightarrow X$ y $P_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ son las proyecciones en el primer y segundo facor respectivamente.*
2. *$f^*(a \smile b) = f^* a \smile f^* b$.*
3. *$(f \times g)^*(a \times c) = f^* a \times g^* c$.*

Para más detalles sobre la demostración de estas propiedades, consultar [5, Lema 3.10].

Proposición 2.4.12. *Dado X espacio topológico, tenemos que $H^*(X;R)$ es un anillo conmutativo graduado debido a las siguientes propiedades del producto copa.*

1. *Sea $1 \in H^0(X;R)$ el representado por el cociclo que toma todo 0-simplejo singular y lo manda a $1 \in R$. Entonces $1 \smile a = a = a \smile 1$*
2. *$(a \smile b) \smile c = a \smile (b \smile c)$.*
3. *$a \smile b = (-1)^{|a||b|} b \smile a$, donde $|a|$ es el grado de a, esto es $a \in H^{|a|}(X;R)$.*

para más detalles sobre la demostración de estas propiedades, consultar [5, teorema 3.13].

2.4.2. Productos cap y slant.

A continuación definiremos los productos cap y slant, donde por el producto cap nos permitirá definir sobre $H_*(X;R)$ una estructura de módulo graduado sobre el anillo graduado $H^*(X;R)$, y el producto slant será de gran utilidad para construir la noción de clase característica.

Definición 2.4.13. *Dado X un espacio topológico, definimos el indice de Kronecker*

$$\langle\ ,\ \rangle : S^*(X;R) \times S_*(X;R) \longrightarrow R$$

para $a \in S^q(X;R)$, $z \in S_q(X;R)$ como el morfismo definido por

$$\langle a, z\rangle = \begin{cases} a(z) & si\ p{=}q \\ 0 & si\ q \neq q. \end{cases}$$

Definición 2.4.14. *Dado X un espacio topológico, definimos la evaluación parcial, como el morfismo dado por*

$$\begin{array}{ccc} S^*(X;R) \otimes S_*(X;R) \otimes S_*(X;R) & \xrightarrow{E} & S_*(X;R) \\ a \otimes z \otimes w & \longmapsto & a(w) \cdot z \end{array}.$$

De acuerdo a la definición anterior, es posible definir el siguinte morfismo

$$\begin{array}{ccc} S^q(X;R) \times S_{p+q}(X;R) & \longrightarrow & S_q(X;R) \\ (a, z) & \longmapsto & E(a \otimes A(\Delta_*(z))) \end{array},$$

donde $A : S_*(X \times X;R) \longrightarrow S_*(X;R) \otimes S_*(X;R)$ es un mapeo de Eilenberg -Zilber y $\Delta_* : S_*(X;R) \longrightarrow S_*(X \times X;R)$ es el inducido por la diagonal a nivel de cadenas.

Definición 2.4.15. *Sean $\alpha \in S^q(X;R)$ y $\beta \in S_{p+q}(X;R)$ entonces el producto cap de α y β, está definido por $\alpha \frown \beta := E(\alpha \otimes A(\Delta_*(\beta)))$.*

Proposición 2.4.16. *Debido a que este morfismo baja al cociente, podemos considerar el siguiente morfismo en términos de los módulos de homología y cohomología;*

$$\begin{array}{ccc} H^q(X;R) \times H_{p+q}(X;R) & \xrightarrow{\frown} & H_q(X;R) \\ ([\alpha], [\beta]) & \longmapsto & [\alpha \frown \beta] \end{array}.$$

Proposición 2.4.17. *Dados $a, b \in H^*(X;R)$ y $z \in H_*(X;R)$, entonces tenemos que*

1. $\langle a, b \frown z\rangle = \langle a \smile b, z\rangle$.
2. $a \frown (b \smile z) = (a \smile b) \frown z$.

3. $\partial(a \frown z) = (-1)^{|a|}\partial a \frown z + a \frown \partial z$.

Debido a lo anterior, tenemos que el producto cap hace de $H_*(X;R)$ un módulo graduado sobre el anillo graduado $H^*(X;R)$.

Sean X y Y espacios topológicos, consideremos el siguiente morfismo

$$\begin{array}{ccc} S^q(Y;R) \times S_{p+q}(X \times Y;R) & \xrightarrow{\ \setminus\ } & S_p(X;R) \\ (a,z) & \longmapsto & E(a \otimes A(z)) \end{array},$$

donde $A : S_*(X \times Y;R) \longrightarrow S_*(X;R) \otimes S_*(Y;R)$ es un mapeo de Eilenberg-Zilber.

Definición 2.4.18. *Sean $\alpha \in S^q(Y;R)$ y $\beta \in S_{p+q}(X \times Y;R)$, entonces el producto slant de α y β está definido como $\alpha \setminus \beta =: E(\alpha \otimes A(\beta))$.*

Proposición 2.4.19. *Ya que el morfismo anterior pasa al cociente, tenemos un producto slant en términos de los módulos de homología y comología, el cual está definido de manera obvia*

$$\setminus : H^p(Y;R) \times H_{p+q}(X \times Y;R) \longrightarrow H_p(X;R).$$

Capítulo 3

Orientación en Variedades.

Dentro de este capítulo daremos las bases para entender ciertos conceptos que respectan a la orientabilidad de variedades suaves y orientabilidad de haces vectoriales, estos abarcan desde orientabilidad con cartas, orientabilidad con formas diferenciales hasta orientabilidad en el sentido homológico. Para desarrollar la teoría nos guiaremos principalmente en los siguientes libros; [6, Capítulo 9 y 10], [7, Capítulo 3].

3.1. Orientación con cartas.

Definición 3.1.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{R}$ tal que* $\dim V = m$. *Sean $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ y $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ bases ordenadas de V. Se dice que α y β tienen la misma orientación si* $\det T_\alpha^\beta > 0$ *donde T_α^β denota la matriz cambio de base.*

Observación 3.1.2. *De las fórmulas de cambio de base $T_\alpha^\alpha = I$, $T_\beta^\alpha = (T_\alpha^\beta)^{-1}$ y $T_\alpha^\gamma = T_\beta^\gamma \cdot T_\alpha^\beta$ y de la multiplicatividad del determinante, se deduce que tener la misma orientación define una relación de equivalencia en el conjunto de bases ordenadas de V.*

Notemos que un espacio vectorial V sólo de tiene dos clases de equivalencia en el conjunto de bases ordenadas de V, pues si consideramos las siguientes bases ordenas

$$\alpha = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_m\} \qquad\qquad \beta = \{u_2, u_1, u_3, ..., u_m\}$$

tenemos que $\det T_\alpha^\beta = -1$, por otro lado sea $\gamma = \{w_1, ..., w_m\}$ otra base ordenada de V, entonces tenemos $\det T_\alpha^\gamma < 0$ ó $\det T_\alpha^\gamma > 0$. Así, si $\det T_\alpha^\gamma > 0$ entonces γ tiene la misma orientación que α, de manera análoga si $\det T_\alpha^\gamma < 0$, γ tiene la misma orientación que β; por lo que sólo se tienen dos clases de equivalencia: $\{[\alpha], [\beta]\}$. Cualquiera de estas clases se llama una orientación de V.

Definición 3.1.3. *Un espacio vectorial V orientado es un espacio vectorial en el cual se ha fijado una orientación $[\alpha]$, el cual se denota por $(V, [\alpha])$.*

Definición 3.1.4. *Sea $(V, [\alpha])$ un espacio vectorial orientado y β un base ordenada en V. Se dice que β es una base positiva en V si β tiene la misma orientación α, en caso contrario se dice que β es una base negavita en V.*

Definición 3.1.5. *Sean $(V, [\alpha])$, $(W, [\beta])$ espacios vectoriales orientados y $T : (V, [\alpha]) \longrightarrow (W, [\beta])$ un isomorfismo. Se dice que T preserva la orientación si $T(\alpha)$ es positiva en $(W, [\beta])$ y se dice que T invierte la orientación si $T(\alpha)$ es negativa en $(W, [\beta])$.*

Teniendo en cuenta estos conceptos, es posible definir una noción de orientabilidad en una variedad suave con ó sin frontera, haciendo uso de las cartas y el espacio tangente en cada punto.

Definición 3.1.6. *Sea M variedad suave de dimensión m con o sin frontera. Se dice que M es orientable si para cada $p \in M$ se puede elegir un a orientación $[\lambda_p]$ en T_pM, de tal forma que para cada $q \in M$ existe una parametrización $\varphi : U \subset H^m \longrightarrow W \cap M$ con $\varphi(u) = q$ tal que $d\varphi_u : (\mathbb{R}^m, [t]) \longrightarrow (T_qM, [\lambda_q])$ preserva la orientación para todo $u \in U$, donde $[t]$ es la base canónica y H^m es el semiespacio superior de $\mathbb{R}^m$.*

Definición 3.1.7. *Un marco local para M es una m-tupla de campos vectoriales suaves $(E_1, ..., E_m)$ sobre un abierto $U \subset M$, tal que $(E_i \downharpoonright_p)$ forma una base para T_pM, para cada $p \in U$. Diremos que un marco local (E_i) es positivamente orientado si $(E_1 \downharpoonright_p, ..., E_m \downharpoonright_p)$ es una base orientada positiva para T_pM, para cada $p \in U$, análogamente se define un marco negativamente orientado.*

Reinterpretando la definición anterior, una orientación puntual es llamada continua si cada punto está en el dominio de un marco local orientado. De esta manera podemos pensar que una orientación de M es una orientación continua en cada punto.

Dada (U, φ) una carta coordenada, diremos que está positivamente orientada si el marco local asociado $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ está positivamente orientado, y negativamente orientado si el marco local $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ está negativamente orientado. De manera mas general, una colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ está consistentemente orientada si para cada α, β, las funciones de transición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ tienen el determinante de la derivada positiva sobre todo $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

La siguiente proposición nos brinda una perspectiva más práctica acerca de la elección de una orientación de una variedad, pues sólo depende de la interacción de las cartas en cada punto.

Proposición 3.1.8. *Sea M variedad suave, supongamos que existe un atlas suave $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ el cual consiste de una colección de cartas consistentemente orientadas. Entonces existe una única orientación para M con la propiedad* *de que cada carta φ_α está orientada. De manera contraria, si M está orientada entonces la colección de todas las cartas orientadas forman una cubierta consitentemente orientada de M.*

Demostración. Consultar [6, Proposición 10.3] $\square$

Proposición 3.1.9. *Toda variedad compleja es orientable.*

Demostración. Dada $A \in \mathbb{C}(n,n)$ tenemos que esta matriz tiene una matriz real subyacente $\tilde{A} \in \mathbb{R}(2n, 2n)$ donde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A & -\operatorname{Im} A \\ \operatorname{Im} A & \operatorname{Re} A, \end{pmatrix}$$

de esta manera tenemos que $\det(\tilde{A}) = \det(\operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A) \cdot \det(\operatorname{Re} A - i \operatorname{Im} A) = |\det(A)|^2 > 0$.

Por lo tanto todo atlas suave $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ está consistentemente orientado.

$\square$

3.2. Orientación con formas diferenciales.

Definición 3.2.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Un p-tensor en V es una aplicación p-lineal*

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \longrightarrow \mathbb{F}.$$

Denotaremos por $\mathfrak{Z}^p(V) := \{\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \longrightarrow \mathbb{F} \mid \alpha \text{ es } p\text{-lineal}\}$ al conjunto de todos los p-tensores en V.

Observación 3.2.2. *Bajo las operaciones usuales entre funciones p-lineales con valores en $\mathbb{F}$ tenemos que $\mathfrak{Z}^p(V)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.*

Definición 3.2.3. *Sea $\alpha \in \mathfrak{Z}^p(V)$ y $\beta \in \mathfrak{Z}^q(V)$, se define el producto tensorial de α y β como la aplicación $p+q$-lineal*

$$\alpha \otimes \beta : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p+q} \longrightarrow \mathbb{F}$$

tal que $\alpha \otimes \beta(v_1, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+q}) = \alpha(v_1, ..., v_p) \cdot \beta(v_{p+1}, ..., v_{p+q})$.

Observación 3.2.4. *El producto tensorial define una operación bilineal*

$$\otimes : \mathfrak{Z}^p(V) \times \mathfrak{Z}^q(V) \longrightarrow \mathfrak{Z}^{p+q}(V).$$

Observación 3.2.5. *Sea* $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ *una base y* $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset V^*$ *su base dual, es bien sabido que* $\{\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_p} : 1 \leq i_1, ..., i_p \leq i_n\}$ *es base de* $\mathfrak{Z}^p(V)$. *Así,* $\dim \mathfrak{Z}^p(V) = n^p$.

Definición 3.2.6. *Sea* $\alpha \in \mathfrak{Z}^p(V)$. *Se dice que* α *es alternante si*

$$\alpha(u_1, .., u_i, ..., u_j, .., u_p) = -\alpha(u_1, .., u_j, ..., u_i, .., u_p)$$

para $1 \leq i < j \leq p$.

Definición 3.2.7. *Sea* $\alpha \in \mathfrak{Z}^p(V)$. *Se define el alternante de* α *como la aplicación*

$$Alt(\alpha) : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \longrightarrow \mathbb{F}$$

dada por $Alt(\alpha)(u_1, ..., u_p) = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)\alpha(u_{\sigma(1)}, ..., u_{\sigma(p)})$ *donde* S_p *es el grupo simétrico.*

Denotaremos por $\mathcal{A}^p(V)$ *al conjunto de todos los p-tensores alternados en el espacio vectorial* V.

Observación 3.2.8. *Claramente* $\mathcal{A}^p(V)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathfrak{Z}^p(V)$. *Mas aún*

$$Alt : \mathfrak{Z}^p(V) \longrightarrow \mathfrak{Z}^p(V)$$

define una transformación lineal.

Observación 3.2.9. *Es bien sabido que el operador alternante cumple las siguiente propiedades*

1. *Si* $\alpha \in \mathfrak{Z}^p(V)$, *entonces* $Alt(\alpha) \in \mathcal{A}^p(V)$.
2. *Si* $w \in \mathcal{A}^p(V)$ *entonces* $Alt(w) = w$.

Definición 3.2.10. *Sean* $w \in \mathcal{A}^p(V)$ *y* $\eta \in \mathcal{A}^q(V)$. *Se define el producto exterior de* w *y* η *como la aplicación*

$$w \wedge \eta : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p+q} \longrightarrow \mathbb{F}$$

dada por

$$(w \wedge \eta)(u_1, ..., u_p, u_{p+1}, ..., u_{p+q}) = \frac{(p+q)!}{p!q!} Alt(w \otimes \eta)(u_1, ..., u_p, u_{p+1}, ..., u_{p+q}).$$

Observación 3.2.11. *Tenemos que el producto exterior define una aplicación bilineal entre los espacios de los tensores alternados*

$$\wedge : \mathcal{A}^p(V) \times \mathcal{A}^q(V) \longrightarrow \mathcal{A}^{p+q}(V).$$

Observación 3.2.12. *Sea* $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ *base ordenada y* $\{\varphi_1, .., \varphi_n\} \subset V^*$ *su base dual, tenemos que* $\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} : 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n\}$ *es base de* $\mathcal{A}^p(V)$*. Así,* $\dim \mathcal{A}^p(V) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

El siguiente resultado nos permite establecer una relación entre la orientabilidad de espacios vectoriales y la existencia de tensores alternantes distintos de cero, el cual es un resultado de gran utilidad a la hora de abstraer todos los conceptos anteriormente mencionados, dentro de la orientabilidad de variedades suaves.

Proposición 3.2.13. *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensión* $n \geq 1$ *y supongamos que* ω *es un elemento no cero de* $\mathcal{A}^n(V)$*. Entonces el conjunto de bases ordenadas* $(e_1, ..., e_n)$ *tal que* $\omega(e_1, ..., e_n) > 0$ *es una orientación para* V*.*

Demostración. Consultar [6, lemma 10.2] □

Observación 3.2.14. *Sea* V *un espacio vectorial real orientado y* ω *un* n*-tensor alternado como en la proposición anterior. Si la orientación determinada por* ω *es la misma con la que carga el espacio vectorial* V*, diremos que* ω *es un* n*-tensor positivamente orientado.*

Para poder definir el concepto de una forma diferencial, basta con abstraer las definiciones anteriores sobre el espacio tangente a un punto de una variedad suave.

Definición 3.2.15. *Sea* M *variedad suave de dimensión* m *con ó sin frontera. Una* m*-forma diferencial en* M *es una función*

$$\omega : M \longrightarrow \coprod_{p \in M} \mathcal{A}^m(T_pM)$$

tal que $\omega(p) \in \mathcal{A}^m(T_pM)$.

Observación 3.2.16. *Sea* $\varphi : U \longrightarrow W \cap M$ *parametrización. Para cada* $u \in U$ *tenemos una base canónica* $\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(u)\}$ *de* $T_{\varphi(u)}M$*; si denotamos por* $\{dx_1(\varphi(u)), ..., dx_m(\varphi(u))\} \subset (T_{\varphi(u)}M)^*$ *su base dual, se tiene que para* $\omega \in \Omega^q(M)$

$$\omega(\varphi(u)) = \sum_{1 \leq i_1 <, ..., < i_q \leq m} a_{i_1,...,i_q}(\varphi(u)) dx_{i_1}(\varphi(u)) \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}(\varphi(u))$$

donde $a_{i_1,...,i_q} : U \longrightarrow \mathbb{F}$ *con* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definición 3.2.17. *Diremos que una* m*-forma diferencial* ω *es continua ó suave si* $a_{i_1,...,i_q} : U \longrightarrow \mathbb{F}$ *lo es respectivamente para todo* $1 \leq i_1 <, ..., < i_q \leq m$*. Denotaremos por* $\Omega^m(M)$ *al conjunto de las* m*-formas diferenciales suaves en* M*.*

Observación 3.2.18. *El espacio* $\coprod_{p\in M} \mathcal{A}^m(T_pM)$ *se suele denotar por* $\Lambda^m(M)$ *y viene con una proyección natural* $\rho : \Lambda^m(M) \longrightarrow M$ *la cual lo dota de una estructura de haz vectorial, conocido como el haz determinante. Así, podemos redefinir el concepto de forma diferencial como una sección a este haz, por lo que* $\Omega^m(M)$ *adquiere una estructura de espacio vectorial, visto como secciones globales del haz determinante.*

Proposición 3.2.19. *Sea* M *variedad suave de dimenasión* $n \geq 1$*. Una* n*-forma diferencial* $\omega \in \Omega^n(M)$ *que nunca se anula determina una única orientación* M *para la cual* ω *está positivamente orientada. Recíprocamente, si* M *tiene una orientación definida, entonces existe una* n*-forma diferencial suave en* M *que nunca se anula y está positivamente orientada en cada punto.*

Demostración. Consultar [6, Proposición 10.4] □

3.2.1. Cohomología de de Rham.

Para poder introducir los grupos de cohomología de De Rham asociados a una variedad suave, es necesario definir un operador $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ tal que $d(d\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega^k(M)$. Este operador es llamado derivada exterior y se puede construir teniendo en cuenta los marcos locales asociados a un sistema coordenado. Primero construiremos el concepto de derivada exterior para 0-formas y posteriormente extenderemos este concepto haciendo uso de la base de $\mathcal{A}^m(T_pM)$, para poder obtener la regla de Leibniz para la derivada de un producto exterior.

Sea M variedad suave de dimensión m con ó sin frontera, $p \in M$ y (U, φ) carta de p en M; dada $\{\frac{\partial(p)}{\partial\varphi_i} : 1 \leq i \leq m\}$ la base de T_pM inducida por el sistema coordenado, denotaremos por $\{d\varphi_i(p) : 1 \leq i \leq m\} \subset (T_pM)^*$ su base dual.

Definición 3.2.20. *Sea* M *variedad suave de dimensión* m *con ó sin frontera,* $p \in M$*,* (U, φ) *carta de* p *en* M *y* $\eta \in \Omega^0(U)$ *se define la derivada exterior de* η *como la* 1*-forma:*

$$d\eta := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\eta}{\partial\varphi_i} d\varphi_i.$$

Definición 3.2.21. *Sea* M *variedad suave de dimensión* m *con ó sin frontera,* $p \in M$*,* (U, φ) *carta de* p *en* M *y* $\omega \in \Omega^q(U)$*. Así,*

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<,\dots,<i_q\leq m} a_{i_1,\dots,i_q} d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_q}.$$

Se define la derivada exterior de ω como la $(q+1)$-forma

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\leq i_1<,\dots,<i_q\leq m} d(a_{i_1,\dots,i_q})d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_q} \\ &= \sum_{1\leq i_1<,\dots,<i_q\leq m} \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(a_{i_1,\dots,i_q})}{\partial\varphi_i}d\varphi_i\wedge d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_q}\right). \end{aligned}$$

Para simplificar la notación se suele escribir

$$d\omega = \sum_I\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_I}{\partial\varphi_i}d\varphi_i\wedge d\varphi_I\right)$$

donde I recorre todas las p-tuplas de enteros $1\leq i_1<\dots<i_q\leq m$ y $d\varphi_I = d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_q}$.

Lema 3.2.22. *Sea M variedad suave de dimensión m, (U,φ) carta de $\omega\in\Omega_r^p(U)$, entonces $d(d\omega)=0$*

Demostración. Ya que

$$\omega = \sum_I a_I d\varphi_I \qquad y \qquad d\omega = \sum_I\left(\sum_{i=1}^m\frac{\partial a_I}{\partial\varphi_i}d\varphi_i\wedge d\varphi_I\right),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_I\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\frac{\partial^2 a_I}{\partial\varphi_j\partial\varphi_i}d\varphi_j\wedge d\varphi_i\wedge d\varphi_I \\ &= \sum_I\sum_{i<j}\left[\frac{\partial^2 a_I}{\partial\varphi_j\partial\varphi_i}-\frac{\partial^2 a_I}{\partial\varphi_j\partial\varphi_i}d\varphi_j\wedge d\varphi_i\right]\wedge d\varphi_I \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.23. *Se puede demostrar que esta definición no depende de la elección del sistema coordenado. Más en general, el siguiente resultado nos da la unicidad con respecto a la definición de la derivada exterior.*

Teorema 3.2.24. *Sobre cualquier variedad suave M de dimensión m y para todo $k\geq 0$, existe un único operador lineal $d:\Omega^k(M)\longrightarrow\Omega^{k+1}(M)$ que satiface las siguientes condiciones:*

1. *Si f es una función suave (0-forma), $p\in M$ y (U,φ) es una carta de p en M, entonces df es la diferencial de f definida en la base canónica $\{\frac{\partial(p)}{\partial\varphi_i}:1\leq i\leq m\}$ de T_pM por*

$$df\left(\frac{\partial(p)}{\partial\varphi_i}\right)=\frac{\partial f}{\partial\varphi_i}.$$

2. *Si* $\omega \in \Omega^k(M)$ *y* $\eta \in \Omega^l(M)$ *entonces*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. *Para cualquier* k*-forma* ω*, tenemos que* $d(d\omega) = 0$.

Demostración. Consultar [6, Teorema 9.12]. □

Dada M variedad suave de dimensión m, debido a que $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ es un operador lineal, entre espacio vectoriales, tenemos que el núcleo y la imagen de este operador definen subespacios vectoriales. Así, definimos

$$\mathcal{Z}^p(M) = \ker[d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)] = \{p\text{-formas cerradas}\}.$$
$$\mathcal{B}^p(M) = \operatorname{im}[d : \Omega^{p-1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M)] = \{p\text{-formas exactas}\}.$$

Debido a que $d^2 = 0$, tenemos que $\mathcal{B}^p(M) \subset \mathcal{Z}^p(M)$.

Definición 3.2.25. *Sea* M *variedad suave de dimensión* m*, se define el* p*-ésimo grupo de cohomología de de Rham como*

$$H^p_{dR}(M) := \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}.$$

Nota : *Llamarle grupo es tradicional, pero más que ser un grupo, es un espacio vectorial.*

Observación 3.2.26. *Notemos que para* $p > \dim M$, $H^p_{dR}(M) = 0$ *pues* $\Omega^p(M)$ *es cero en este caso.*

Teorema 3.2.27. *Sea* M *variedad suave de dimensión* n *compacta, conexa y no orientable. Entonces* $H^n_{dR}(M) = 0$

Demostración. Consultar [6, Teorema 11.18]. □

3.2.2. Isomorfismo de de Rham.

Sea M variedad suave con o sin frontera y consideremos un p-simplejo en M, $\sigma : \Delta^p \longrightarrow M$, donde pensamos a Δ^p incluido en $\mathbb{R}^p$. Decimos que $\sigma : \Delta^p \longrightarrow M$ es un p-simplejo suave en M, si esta función tiene una extensión suave a alguna vecindad abierta de Δ^p en $\mathbb{R}^p$. El subgrupo de $C(\Delta^p, M)$ generado por todos los simplejos suaves es denotado por $C^\infty_p(M)$ y es llamado el subgrupo de cadenas suaves de dimensión p; los elementos de este grupo son combinaciones lineales finitas de simplejos suaves, los cuales son llamados cadenas suaves.

Ya que la frontera de un simplejo suave es una cadena suave, podemos definir el p-ésimo grupo de homología singular suave de M, como el grupo cociente:

$$H^\infty_p(M) := \frac{\ker[\partial : C^\infty_p(M) \longrightarrow C^\infty_{p-1}(M)]}{\operatorname{im}[\partial : C^\infty_{p+1}(M) \longrightarrow C^\infty_p(M)]},$$

el cual es isomorfo a $H_p(M;\mathbb{Z})$ [6, Teorema 11.29]

Por otro lado, dado ω una p-forma cerrada ($d\omega = 0$), y σ un p-simplejo suave en M, podemos definir la integral de ω sobre σ como

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta^p} \sigma^*\omega,$$

donde $\sigma^*\omega$ denota el *pullback* de ω a lo largo de de la función suave $\sigma : \Delta^p \longrightarrow M$. Así, si $c = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\sigma_i$ es una p-cadena suave , la integral de ω sobre c está definida como

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\sigma_i} \omega.$$

Ahora, gracias al teorema de Stokes para cadenas [6, Teorema 11.31], es posible definir un operador lineal $J : H^p_{dR}(M) \longrightarrow H^p(M;\mathbb{R})$ llamado homomorfismo de de Rham, el cual está dado de la siguiente manera:

Para cualquier $[\omega] \in H^p_{dR}(M)$ y $[c] \in H_p(M;\mathbb{Z}) \cong H^\infty_p(M)$

$$J[\omega][c] = \int_{\tilde{c}} \omega,$$

donde $\tilde{c}$ es cualquier representante de la clase $[c]$. Notemos que está bien definido, pues si $\tilde{c}$ es la frontera de una $(p-1)$-cadena suave $\tilde{b}$, entonces

$$\int_{\tilde{c}} \omega = \int_{\partial\tilde{b}} \omega = \int_{\tilde{b}} d\omega = 0.$$

Si ω es exacta ($\omega = d\eta$), entonces

$$\int_{\tilde{c}} \omega = \int_{\tilde{c}} d\eta = \int_{\partial\tilde{c}} \omega = 0,$$

y claramente J es lineal. El homomorfismo $J : H^p_{dR}(M) \longrightarrow H^p(M;\mathbb{R})$ es un isomorfismo. [6, Teorema 11.34].

3.3. R-orientabilidad.

A partir de este momento, M denotará una variedad suave de dimensión n con $n \geq 1$ y R un anillo conmutativo con unidad.

Lema 3.3.1. *Para cualquier $x \in M$*

$$H_n(M, M - \{x\}; R) \cong R.$$

Demostración. Sea U una vecindad abierta de x homeomorfa a una bola abierta en $\mathbb{R}^n$, escindiendo el subconjunto cerrado $M-U$ del abierto $M-\{x\}$ tenemos el siguiente isomorfismo:

$$H_n(U, U-\{x\}; R) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M-\{x\}; R).$$

Ya que U es contraíble, la sucesión exacta del par $(U, U-\{x\})$ nos proporciona el siguiente isomorfismo

$$H_n(U, U-\{x\}; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n-1}(U-\{x\}; R),$$

donde $\tilde{H}_{n-1}(U-\{x\}; R) \cong R$ pues $U-\{x\}$ es homotópicamente equivalente a S^{n-1}.

□

Observación 3.3.2. *Considerando el caso especial $n=2$, $R=\mathbb{Z}$. Entonces existen dos posibles elementos de $H_2(M; M-\{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_1(U-\{x\}; \mathbb{Z})$ que pueden generar este grupo cíclico infinito, los cuales correponden a recorrer lazos basados en x en direcciones opuestas. Elegir uno de estos generadores, corresponde intuitivamene a elegir una orientación en el punto x.*

Definición 3.3.3. *Una R-orientación local de M en el punto x, es un generador del R-módulo $H_n(M, M-\{x\}; R)$.*

Lema 3.3.4 (Continuidad)**.** *Dado un elemento $\alpha_x \in H_n(M; M-\{x\}; R)$. Entonces existe una vecindad abierta U de x y $\alpha \in H_n(M, M-U; R)$ tal que $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$ donde*

$$j_x^U : H_n(M, M-U; R) \longrightarrow H_n(M, M-\{x\}; R)$$

es el morfismo inducido por la inclusión $(M, M-U) \hookrightarrow (M, M-\{x\})$.

Demostración. Consultar [7, Lema 22.2]. □

Observación 3.3.5. *Este lema nos proporciona el hecho de poder obtener elementos $\alpha_y \in H_n(M, M-\{y\}; R)$ para todo $y \in U$, a partir de un elemento dado α_x tomando $\alpha_y = j_y^U(\alpha)$. De esta manera podemos pensar qur todos los elementos están relacionados, pues provienen de una misma α. Llamaremos a α una continuación de α_x en U.*

Lema 3.3.6 (Coherencia)**.** *Toda vecindad W de x contiene una vecindad U de x tal que para todo $y \in U$, j_y^U es un isomorfismo. (por lo tanto α_x tiene una única continuación en U)*

Demostración. Consultar [7, Lema 22.4] □

Observación 3.3.7. *Debido al lema enterior, tenemos que si el elemento α_x genera a $H_n(M, M-\{x\}; R)$, entonces U y α pueden ser elegidos de tal manera que α_y genera a $H_n(M, M-\{y\}; R)$ para todo $y \in U$.*

Definición 3.3.8. *Dado un subespacio $U \subset M$. Un elemento $\alpha \in H_n(M, M - U; R)$ tal que $j_y^U(\alpha)$ genera a $H_n(M, M - \{y\}; R)$ para cada $y \in U$ se llamará un R-orientación local de M a lo largo de U.*

Notación. Si $V \subset U$ son subespacios de M,

$$j_V^U : H_n(M, M - U; R) \longrightarrow H_n(M, M - V; R)$$

denota el homomorfismo inducido por la inclusión. Si α es una R-orientación local a lo largo de U, entonces $j_V^U(\alpha)$ una R-orientación a lo largo de V, ya que para cualquier $y \in V$,

$$j_y^V[j_V^U(\alpha)] = j_y^U(\alpha).$$

Ahora procederemos a definir una R-orientación global de M.

Definición 3.3.9. *Un sistema de R-orientación es una colección $\{(U_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ que cumple lo siguiente:*

1. *$\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios abiertos los cuales cubren a M.*
2. *Cada $\alpha_i \in H_n(M, M - U_i; R)$ es una R-orientación local de M a lo largo de U_i.*
3. *Dado $x \in M$, si $x \in U_i \cap U_j$ entonces $j_x^{U_i}(\alpha) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$; en este caso una R-orientación local es indistinta para cada punto x al definir $\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i)$ con $x \in U_i$.*

Definición 3.3.10. *Dado cualquier otro sistema de R-orientación $\{(V_k, \beta_k)\}_{k \in K}$, decimos que definen la misma R-orientación si $\alpha_x = \beta_x$ para todo $x \in M$. Así, una R-orientación global de M está definida como una clase de equivalencia dentro de todos los sistemas de R-orientación.*

Definición 3.3.11 (R-orientabilidad)**.** *Decimos que M es R-orientable, si admite una R-orientación global.*

Otra forma de definir una R-orientación para una variedad suave es a partir de vecindades compactas; tomando un generador $\alpha_x \in H_n(M, M - \{x\}; R)$ tal que varía continuamente para cada $x \in X$, en el siguiente sentido. Para cada x existe una vecindad compacta N y una clase $\alpha_N \in H_n(M, M - N; R)$ tal que $j_y^N(\alpha_N) = \alpha_y$ para cada $y \in N$. Así, podemos dar un análogo al lema de coherencia en términos de vecindades compactas.

Teorema 3.3.12. *Para cualquier variedad R-orientable M y cualquier compacto $K \subset X$ hay una y sólo una clase $\alpha_K \in H_n(M, M - K; R)$ la cual satistace $j_x^K(\alpha_K) = \alpha_x$ para cada $x \in K$.*

Demostración. Consultar [8, Teorema 20.8]. □

Definición 3.3.13. *Si M es una variedad compacta R-orientada, entonces hay una y sólo una $[M] \in H_n(M; R)$ tal que $j_x^M([M])$ es un generador de $H_n(M; M - \{x\}; R)$ para toda $x \in M$. La clase $[M]$ es llamada la clase fundamental de la variedad M.*

Proposición 3.3.14. *Sea M una variedad suave compacta conexa. Asumamos que para $a \in R$, $a \neq u$ y u unidad del anillo, $ua = a$ implica que $u = 1$. Entonces*

$$H_n(M;R) \cong \begin{cases} R & \textit{si } M \textit{ es } R\textit{-orientable.} \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Consultar [7, Corolario 22.8]. □

Teorema 3.3.15 (Dualidad de Poincaré)**.** *Si M es una variedad compacta de dimensión $n \geq 1$ y $\mathbb{Z}$-orientable, entonces $H^i(M;\mathbb{Z})$ es isomorfo a $H_{n-i}(M;\mathbb{Z})$ bajo la correspondencia $a \mapsto a \frown [M]$.*

Demostración. Consultar [8, Teorema 20.9]. □

Observación 3.3.16. *El teorema de dualidad de Poincaré se puede definir de manera más general para variedades R-orientables no compactas [7, 26.6], haciendo uso de la cohomología con soporte compacto $H^i_{comp}(M)$ la cual es el limite directo de los módulos $H^i(M, M-K;R)$ donde K varia sobre el conjunto dirigido de todos los subconjuntos compactos.*

3.3.1. Cubrientes de Orientación.

Sea M una variedad suave de dimensión n, con $n \geq 1$, definimos el siguiente conjunto

$$\tilde{M}_R = \{\alpha_x \in H_n(M, M - \{x\}; R) : x \in M, \alpha_x \text{ es un generador}\},$$

el cual viene con una proyección canónica $\rho : \tilde{M}_R \longrightarrow M$, $\rho(\alpha_x) = x$.

Consideremos U una vecindad coordenada de M y $\alpha_U \in H_n(M, M - U; R)$ un generador. Entonces definimos

$$\tilde{B}(\alpha_U) = \{\alpha_x \in \tilde{M}_R : x \in U, \alpha_x = j^U_x(\alpha_U)\}$$

donde $j^U_x : H_n(M, M - U; R) \longrightarrow H_n(M, M - \{x\}; R)$ es el homomorfismo inducido por la inclusión. Estos conjuntos definen una base para una topología de $\tilde{M}_R$ [7, p.162], para la cual $\rho : \tilde{M}_R \longrightarrow M$ es un espacio cubriente, que consta de m hojas donde m es el orden de R^*(unidades de R).

Observación 3.3.17. *Notemos que una R-orientación global para M, es equivalente a una sección global s de $\rho : \tilde{M}_R \longrightarrow M$.*

Proposición 3.3.18. *Si M es conexa, entonces M es $\mathbb{Z}$-orientable si y solo si $\tilde{M}_\mathbb{Z}$ tiene dos componentes. En particular, si M es simplemente conexo, o más general si $\pi_1(M)$ no tiene subgrupos de orden 2, entonces M es $\mathbb{Z}$-orientable.*

Demostración. Consultar [4, Proposición 3.25]. Esta proposición nos dice que una variedad conexa sólo tiene definidas dos orientaciones. □

Debido a que $H_{n-1}(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) = 0$, tenemos por coeficientes universales que

$$H_n(M, M - \{x\}; R) \cong H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R,$$

por lo que es más fácil dar una descripción de $\tilde{M}_R$, pues cada $r \in R$ determina un subcubriente

$$M_r := \{\pm\alpha_x \otimes r \in H_n(M, M - \{x\}; R) : \alpha_x \in H_n(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}) \text{ genera}\}.$$

Si definimos en R la relación $r \sim s \iff r \in \{\pm s\}$ la cual es una relación de equivalencia, y consideramos $J \subset R$ un subconjunto que contiene un representante por cada clase de equivalencia, obtenemos $\tilde{M}_R = \coprod_{r \in J} M_r$.

Observación 3.3.19. *Notemos que si $r = -r$, entonces M_r es una copia de M. Ahora si $r \neq -r$, entonces M_r es una copia de $\tilde{M}_{\mathbb{Z}}$.*

Debido a está observación tenemos los siguientes resultados:

1. Una variedad M que no es $\mathbb{Z}$-orientable es R-orientable si y solo si R contiene una unidad de orden 2, es decir $1 + 1 = 0$ en R

2. Por coeficientes universales, si una variedad M es $\mathbb{Z}$-orientable, entonces M es R-orientable para todo anillo R. Esto se debe a que si tenemos una sección $s : M \longrightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$, podemos definir $\tilde{s} : M \longrightarrow \tilde{M}_R$ de la siguiente manera $\tilde{s}(x) = s(x) \otimes u$, con u una unidad del anillo.

3. Si $R = \mathbb{Z}/p$, con p un primo distinto de 2, entonces todo elemento no cero de $\mathbb{Z}/p$ es unidad. Así una $\mathbb{Z}/p$-orientación de M corresponde a una sección global de $\rho : \tilde{M}_{\mathbb{Z}/p} \longrightarrow M$, que sea compatible con una cubierta dada para M. Por otro lado, ya que $r \neq -r$ para todo $r \in \mathbb{Z}/p^*$, una sección global de $\rho : \tilde{M}_{\mathbb{Z}/p} \longrightarrow M$ solo puede existir, si existe una sección global de $\tilde{\rho} : \tilde{M}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow M$, sin embargo una de estas secciones globales de $\tilde{\rho} : \tilde{M}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow M$ constituye una $\mathbb{Z}$-orientación. Por lo tanto concluímos que $\mathbb{Z}/p$-orientable implica $\mathbb{Z}$-orientable.

Corolario 3.3.20. *Sea M variedad suave de dimensión $n \geq 1$, entonces*

$$H_n(M; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de la observación anterior y la proposición 3.3.14 para el caso $R = \mathbb{Z}/2$. □

3.3.2. Equivalencia.

A continuación presentaremos un teorema que nos permite dar una relación entre todos los conceptos de orientabilidad mencionados hasta ahora.

Teorema 3.3.21. *Sea M variedad suave compacta con o sin frontera de dimensión $n \geq 1$. Entonces M es $\mathbb{Z}$-orientable si y solo si existe un atlas suave, el cual consiste en una colección de cartas consistentemente orientadas.*

Demostración. Antes de proceder con la prueba, hagamos la siguiente observación.

Si suponemos que la variedad M es $\mathbb{Z}$-orientable, tenemos que en particular M es $\mathbb{R}$-orientable, así aplicando la Proposición 3.3.14 obtenemos que

$$H_n(M;\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } M \text{ es } \mathbb{Z}\text{-orientable.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, gracias al isomorfismo de de Rham tenemos que $H^n_{dR}(M) \cong H^n(M;\mathbb{R})$. Ahora, debido al Teorema de Coeficientes Universales para coeficientes en un campo tenemos que $H^n(M;\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H_n(M;\mathbb{R}),\mathbb{R})$.

Recordemos que para cualquier R-módulo N con R un anillo conmutativo con unidad tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(R,N) \cong N$. Entonces por la observación anterior con respecto a $H_n(M;\mathbb{R})$ obtenemos que

$$H^n_{dR}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si M es } \mathbb{Z}\text{-orientable.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$) Procederemos por contrapositiva; si M no admite un atlas consistentemente orientado, entonces por el Teorema 3.2.27, obtenemos que $H^n_{dR}(M) = 0$, lo cual implica por la observación anterior, que M no es $\mathbb{Z}$-orientable. Así, obtenemos que si M es $\mathbb{Z}$-orientable entonces M admite un atlas consistentemente orientado.

$\Leftarrow$) Si M admite un atlas consitentemente orientado, por la Proposición 3.2.19 existe una n-forma $\mu \in \Omega^n M$ que nunca se anula. Ya que μ es una n-forma cerrada por la observación 3.2.26, ésta pasa con una clase al cociente $[\mu] \in H^n_{dR}(M)$, la cual es distinta de cero, pues $\int_M \mu \neq 0$ Así $H^n_{dR}(M) \neq 0$, con lo cual podemos concluir debido a lo observado previamente, que $H^n_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$ y M es $\mathbb{Z}$-orientable.

□

3.4. Orientabilidad de haces vectoriales.

Especificaremos la orientación de un simplejo escogiendo algún orden en los vértices, así nuestro concepto de orientación se relaciona de la siguiente manera. Sea Σ^n un n-simplejo encajado linealmente en un espacio vectorial V de dimensión n, cuyo conjuto de vértices $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ está ordenado. Tomando el vector de a_0 a a_1 como primer vector de la base, el vector de a_1 a a_2 como el segundo y así sucesivamente, obtenemos una orientación correspondiente para el espacio vectorial V.

Notemos que la elección de una orientación para V induce una elección de uno de los generadores del grupo de homología singular $H_n(V, V_0; \mathbb{Z})$. En efecto, consideremos Δ^n el n-simplejo estándar, con vértices canónicamente ordenados y denotemos por V_0 a los elementos distintos de cero de V. Escojamos algún encaje lineal que preserve la orientación $\sigma : \Delta^n \hookrightarrow V$, el cual está dado por mandar el baricentro de Δ^n en el vector cero (y por lo tanto manda la frontera de Δ^n en V_0). Así, σ es un n-simplejo singular que representa un elemento en el grupo de n-ciclos relativos $Z_n(V, V_0; \mathbb{Z})$. La clase de homología de este n-ciclo σ es ahora el generador preferido μ_V para el grupo de homología $H_n(V, V_0; \mathbb{Z})$.

De manera similar el grupo de cohomología $H^n(V, V_0; \mathbb{Z})$ tiene un generador preferido el cual denotaremos por u_V, y está determinado por la identidad con respecto al índice de Kronecker $\langle u_V, \mu_V \rangle = 1$.

Definición 3.4.1. *Sea ξ un haz vectorial con fibras de dimensión $n > 0$. Una orientación para ξ es una función que asigna una orientación a cada fibra F de ξ, sujeta a la siguiente condición de compatibilidad local. Para cada punto b_0 en el espacio base existe una carta (U, φ), con $b_0 \in U$ y $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$, tal que para cada fibra $F = \pi^{-1}(b)$ sobre U el isomorfismo $\varphi_b : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ preserva la orientación.*

Observación 3.4.2. *Dado ξ un haz vectorial, es fácil mostrar que ξ es orientable si existe alguna elección de cubierta abierta con trivializaciones tales que las funciones de transición tienen determinante positivo.*

Observación 3.4.3. *En términos de cohomología, esto significa que para cada fibra F hay asignado un generador preferido $u_F \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$. La condición de compatibilidad local implica que para cada punto en el espacio base existe una vecindad U y una clase de cohomología $u \in H^n(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U)_0; \mathbb{Z})$, donde $\pi^{-1}(U)_0$ denota los elementos distintos de cero en $\pi^{-1}(U)$; tal que para cada fibra sobre U la restricción $u_{\restriction_{(F,F_0)}} \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ es igual a u_F.*

Dado $\xi = (E, \pi, B)$ un haz vectorial de rango n, es posible asociarle a B un haz fibrado con fibra S^n de la siguiente manera:

Definimos $E^\bullet = \coprod_{p \in B} E_p^\bullet$ donde $E_p^\bullet = E_p \cup \{\infty_p\}$ es la compactación por un punto, donde claramente $E_p^\bullet \cong S^n$. De manera similar definimos la proyección $\pi^\bullet : E^\bullet \longrightarrow B$ de tal manera que $\pi^\bullet(v) = \pi(v)$ si $v \in E_p$ y $\pi^\bullet(\infty_p) = p$.

Bajo esta construcción, es posible dar una sección $s_\infty : B \longrightarrow E^\bullet$ tal que $s_\infty(p) = \infty_p$. Gracias a esta construcción es posible dar la siguiente definición

Definición 3.4.4. *Sea $\xi = (E, \pi, B)$ un haz vectorial de rango n, definimos el* *espacio de Thom asociado al haz vectorial ξ como el espacio cociente:*

$$Th(\xi) := \frac{E^{\bullet}}{s_{\infty}(B)}.$$

Observación 3.4.5. *Se puede probar que el espacio de Thom se puede definir equivalentemente de la siguiente manera:*

$$Th(\xi) \cong \frac{D(E)}{S(E)} = \frac{\{(x,v) \in E_x : |v|_g \leq 1\}}{\{(x,v) \in E_x : |v|_g = 1\}}$$

con g una métrica riemanniana. Denotemos por E_0 el conjunto de todos los elementos no cero de E, se puede probar que $\tilde{H}_n(Th(\xi);\mathbb{Z}) \cong H_n(E,E_0;\mathbb{Z})$.

Teorema 3.4.6. *Sea ξ un haz vectorial orientado de rango n con espacio total E. Entonces el grupo de cohomología $H^i(E,E_0;\mathbb{Z})$ es cero para $i < n$, y $H^n(E,E_0;\mathbb{Z})$ contiene una y sólo una clase de cohomología u cuya restricción*

$$u|_{(F,F_0)} \in H^n(F,F_0;\mathbb{Z})$$

es igual al generador preferido u_F para cada fibra F de ξ. Más aún la correspondecia $y \mapsto y \smile u$ transforma a $H^k(E;\mathbb{Z})$ de manera isomorfa sobre $H^{k+n}(E,E_0;\mathbb{Z})$ para cada entero k.

Demostración. Consultar [8, Teorema 10.2] comparando con el teorema [8, Teorema 10.1] para cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

□

Observación 3.4.7. *En resumen, el teorema anterior nos asegura la existencia de una clase $u \in \tilde{H}^n(Th(\xi);\mathbb{Z})$ tal que $\iota^*(u)$ genera a $\tilde{H}^n(E_x^{\bullet};\mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^n(S^n;\mathbb{Z})$ para cada x en el espacio base de ξ donde $i : S^n \hookrightarrow Th(\xi)$ es la inclusión obvia. La clase $u \in \tilde{H}^n(Th(\xi);\mathbb{Z})$ es llamada la clase de Thom asociada al haz ξ.*

Corolario 3.4.8. *Sea $\xi = (E,\pi,B)$ haz vectorial orientado de rango n, debido a que E es debilmente homotópicamente equivalente a B, tenemos por el teorema anterior que para cada entero k el morfismo*

$$\phi : H^k(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k+n}(E,E_0;\mathbb{Z}).$$

dado por $\phi(\alpha) = \pi^*(\alpha) \cup u$ define un isomorfismo. Este isomorfismo es llamado isomorfismo de Thom.

Retomando el concepto de orientabilidad con respecto a las cartas de un haz, existe una relación entre orientabilidad de haces vectoriales suaves y orientabilidad del espacio total y el espacio base, esto se puede expresar más explicitamente en la siguiente proposición.

Proposición 3.4.9. *Sea $\pi : E \longrightarrow B$ un haz vectorial suave orientable de rango n tal que B es una variedad suave orientable, entonces E es una variedad suave orientable.*

Demostración. Dada W_α una cubierta trivializadora de B para el haz $\pi : E \longrightarrow B$, podemos refinar la cubierta a un atlas adecuado $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ donde $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es también una cubierta trivializadora para B.

Debido a que B es una variedad orientable, se puede escoger la cubierta trivializadora $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ con trivializaciones tales que para cada $\alpha, \beta \in I$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, y para todo $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ se tiene que

$$\det(d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_x) > 0,$$

Similarmente, ya que $\pi : E \longrightarrow B$ es un haz orientable, podemos considerar la cubierta trivializadora con trivializaciones para cada abierto U_α;

$$\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

tales que para cada $\alpha, \beta \in I$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que

$$\det(g_{\beta\alpha}(p)) > 0,$$

donde $g_{\beta\alpha}(p)$ son las funciones de transición del haz. (Obs. 3.4.2)

Definimos el siguiente atlas para E,

$$\{\tilde{U}_\alpha := \pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha := (\varphi_\alpha \times Id_{\mathbb{R}^n}) \circ \theta_\alpha\}$$

donde $\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^n$ y $b = \dim B$. Claramente es un homeomorfismo pues es continua y tiene inversa continua $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ la cual está dada por la composición $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1} := \theta_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times Id_{\mathbb{R}^n})$. Más aún, las funciones de transición para $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta \neq \emptyset$,

$$\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} : \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta) \longrightarrow \tilde{\varphi}_\beta(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta)$$

resultan ser difeomorfismos, pues están dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(u, v) &= \tilde{\varphi}_\beta(\theta_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times Id_{\mathbb{R}^n}))(u, v) \\
&= \tilde{\varphi}_\beta(\theta_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha^{-1}(u), v)) \\
&= \varphi_\beta \times Id_{\mathbb{R}^n}(\theta_\beta(\theta_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha^{-1}(u), v))) \\
&= \varphi_\beta \times Id_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\alpha^{-1}(u), g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(u))(v)) \\
&= (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(u), g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(u))(v)).
\end{aligned}$$

Así , obtenemos

$$d(\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1})_{(u,v)} = \begin{pmatrix} d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_u & 0 \\ 0 & dg_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(u))_v \end{pmatrix}$$

donde $dg_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(u))_v = g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(u))$ pues es un isomorfismo lineal.

Por lo tanto, tenemos que para todo $(u, v) \in \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta)$,

$$\det(d(\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1})_{(u,v)}) = \det(d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_u) \cdot \det(g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(u))) > 0$$

Así, E es una variedad suave orientable.

$\square$

Capítulo 4

Clases características.

Como se mencionó dentro de la introducción de la tesis, la construcción de las clases características que se abordará dentro de este capítulo no es la construcción estandar. El desarrollo de esta construcción se basa en usar herramientas geométricas, especificamente herramientas de transversalidad, las cuales a mi parecer nos permiten tener una mayor intución acerca del concepto que engloba una clase característica.

Recordemos que esta perpectiva acerca de las clases características fue introducida y desarrollada por Marcelo Aguilar, José Luis Cisneros y Eduardo Frías en [1], por lo que en este capítulo nos enfocaremos a desarrollar los detalles pertinentes del artículo haciendo uso de los capítulos previos.

También se harán algunas correcciones a [1, Teorema 11] referentes al axioma A_4', lo cual nos ayudará a tener una visión más amplia acerca de las normalizaciones de los axiomas de las clases características.

Debido a que se trabajará con haces vectoriales reales y complejos, adoptaremos las siguientes convenciones. Usaremos un parámetro b que valdrá 1 o 2, cuando $b = 1$ denotaremos $K_1 = \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, en el caso en que estemos trabajando sobre haces vectoriales reales; cuando $b = 2$ denotaremos por $K_2 = \mathbb{Z}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ en el caso en que estemos trabajando sobre haces vectoriales complejos.

Sea $G_n(\mathbb{F}^{n+k})$ la variedad grassmanniana de la cual consta de todos los planos n-dimensionales a través el origen del espacio coordenado $\mathbb{F}^{n+k}$, la cual es una variedad suave compacta de dimensión bnk [8, Lema 5.1]. Como un caso particular tenemos que $\mathbb{F}P^n = G_1(\mathbb{F}^{n+1})$, el cual consiste de todas las $\mathbb{F}$-lineas en $\mathbb{F}^{n+1}$ a través del origen.

Sea $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+k}) = \{(l, v) \in G_n(\mathbb{F}^{n+k}) \times \mathbb{F}^{n+k} : v \in l\}$ el n haz canónico sobre $G_n(\mathbb{F}^{n+k})$; para más detalles consultar [8, Lema 5.2]. Denotaremos por γ_n^1 el haz canónico sobre $\mathbb{F}P^n$ el cual está dado por $\gamma_n^1 := \gamma^1(\mathbb{F}^{n+1})$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $v(n) = bn - 1$ y sea $S^{v(n)}$ la esfera de dimensión real $v(n)$. Notemos que cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $S^{v(1)} = S^0 = \{\pm 1\}$ y cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $S^{v(1)} = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$.

Consideremos $\mathbb{F}P^n$ como el espacio de órbitas ${}^{S^{v(n+1)}}/_{S^{v(1)}}$ donde $S^{v(1)} \curvearrowright S^{v(n+1)}$ por $\lambda \cdot (x_1, ..., x_{n+1}) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_{n+1})$, y denotemos por $[x]$ a los elementos de $\mathbb{F}P^n$ con $x \in S^{v(n+1)}$. Ahora consideremos que $S^{v(1)} \curvearrowright S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n$ por $\lambda \cdot (x, v) = (\lambda x, \lambda v)$, definiremos un haz vectorial ζ^n sobre $\mathbb{F}P^n$ de la siguiente manera:

1. El espacio total de ζ^n está dado por $E(\zeta^n) = {}^{S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n}/_{S^{v(1)}}$ cuyos elementos los denoteremos por $[x, v]$ donde $x \in S^{v(n+1)}$ y $v \in \mathbb{F}^n$.

2. La proyección $\pi : E(\zeta^n) \longrightarrow \mathbb{F}P^n$ está dada por $\pi([x, v]) = [x]$.

Para mayor facilidad a la hora de trabajar con este haz, daremos la siguiente caracterización en términos de una descomposición de otros haces.

Lema 4.0.1. *El haz ζ^n es isomorfo a la suma de Whitney de n copias del haz de lineas γ_n^1 sobre $\mathbb{F}P^n$.*

Demostración. Debido a la contrucción de la suma de Whitney, tenemos que para el producto de n factores del haz γ_n^1 sobre $\mathbb{F}P^n$ obtenemos que $\Delta_n^*(\gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1) \cong \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$, por lo que basta mostrar que $\Delta_n^*(\gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1) \cong E(\zeta^n)$.

Por [2, Proposición 7.7.1] tenemos que $\gamma_n^1 \cong {}^{S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}}/_{S^{v(1)}}$ donde $S^{v(1)} \curvearrowright S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}$ por $\lambda \cdot (x, v) = (\lambda x, \lambda v)$ con $\lambda \in S^{v(1)}$, $x \in S^{v(n+1)}$, por lo que denotamos por $[x, v]$ a los elementos de γ_n^1. De esta manera es posible definir un morfismo de haces $f : E(\zeta^n) \longrightarrow \Delta_n^*(\gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
E(\zeta^n) \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, bend left, "\bar{\Delta}"] \arrow[ddr, bend right, "\pi"'] & & \\
& \Delta_n^*(\gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1 \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\
& \mathbb{F}P^n \arrow[r, "\Delta_n"] & \mathbb{F}P^n \times \cdots \times \mathbb{F}P^n
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\Delta}([x, v_1, ..., v_n]) = ([x, v_1], ..., [x, v_n])$ y el morfismo f está definido a nivel de fibras como $f([x, v_1, ..., v_n]) = ([x], [x, v_1], ..., [x, v_n])$, el cual resulta ser un isomorfismo pues su inversa $f^{-1} : \Delta_n(\gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1) \longrightarrow E(\zeta^n)$ está dada por $f^{-1}([\tilde{x}], [y_1, w_1], ..., [y_n, w_n]) = [\tilde{x}, w_1, ..., w_n]$.

Por lo tanto $\gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1 \cong E(\zeta^n)$.

□

4.1. Axiomas para las clases características.

Denotaremos por g_n al generador canónico de $H^{bn}(\mathbb{F}P^n; K_b)$, el cual está dado por el dual de Kronecker de la clase fundamental de $\mathbb{F}P^n$. Para el caso $\mathbb{C}P^n$, este está dado por la orientación canónica.

Consideremos las clases características como clases en el anillo de cohomología $H^*(B; K_b)$ asociadas a cualquier $\mathbb{F}$-haz vectorial ξ sobre un espacio topológico B, las cuales satisfacen los siguientes axiomas:

$\mathbf{A_1}$. Para cada haz vectorial ξ de rango n existe una sucesión de clases de cohomología $cl_i(\xi) \in H^{bi}(B; K_b)$, $i = 0, 1, 2, ...$ tal que $cl_0(\xi) = 1$ y $cl_i(\xi) = 0$ si $i > n$.

$\mathbf{A_2}$. Si $f : B' \longrightarrow B$ es una función continua entonces

$$cl_i(f^*(\xi)) = f^*(cl_i(\xi))$$

$\mathbf{A_3}$. Si ξ y η son haces vectoriales sobre B entonces

$$cl_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^{i} cl_j(\xi) \smile cl_{i-j}(\eta).$$

$\mathbf{A_4}$. Para el haz canónico γ_1^1 sobre $\mathbb{F}P^1$

$$cl_1(\gamma_1^1) = g_1 \in H^b(\mathbb{F}P^1; K_b)$$

La suma $cl(\xi) = 1 + cl_1(\xi) + ... + cl_n(\xi) \in H^*(B; K_b)$ es la clase característica total asociada al haz ξ.

En nuestra construcción de clases características se probaran los axiomas $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ donde en primera instancia sustituiremos $\mathbf{A_3}$ y $\mathbf{A_4}$ por axiomas $\mathbf{A_3}'$ y $\mathbf{A_4}'$, mostrando posteriormente que los cojuntos de axiomas $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}\}$ y $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}', \mathbf{A_4}'\}$ son equivalentes.

$\mathbf{A_3}'$. Sea ε^k el haz producto de rango k, entonces

$$Cl_i(\xi \oplus \varepsilon^k) = Cl_i(\xi).$$

$\mathbf{A_4}'$. Sea ζ^n el n-haz canónico sobre $\mathbb{F}P^n$, entonces

$$Cl_n(\zeta^n) = g_n \in H^{bn}(\mathbb{F}P^n; K_b).$$

Denotemos por $cl_i(\xi)$ a las clases que satisfacen el conjunto de axiomas $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}\}$ y por $Cl_i(\xi)$ a las clases que satisfacen el conjunto de axiomas $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}', \mathbf{A_4}'\}$.

De acuerdo a estos conjuntos de axiomas tenemos una normalización con respecto al axioma $\mathbf{A_4}'$, pero hay una normalización alternativa que también se usa; si consideramos una nueva clase característica $\tilde{C}l_i(\xi)$ asociada al haz ξ la cual cumple el conjunto de axiomas $\{\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}', \mathbf{A_4}''\}$ donde $\mathbf{A_4}''$ está dado por:

$\mathbf{A_4}''$. Sea ζ^n el n-haz canónico sobre $\mathbb{F}P^n$, entonces

$$\tilde{C}l_n(\zeta^n) = (-1)^n g_n \in H^{bn}(\mathbb{F}P^n; K_b),$$

podemos observar que para todo haz vectorial ξ, $Cl_n(\xi) = (-1)^n \tilde{C}l_n(\xi)$ lo cual nos permite observar la equivalencia entre $\mathbf{A_4}''$ y $\mathbf{A_4}'$. De igual manera se puede hablar de una normalización para las clases $cl_i(\xi)$. Esta convención de signo es de utilidad dentro de la geometría algebraica a la hora de calcular la clase característica para el haz $O_{\mathbb{F}P^n}(d)$ sobre $\mathbb{F}P^n$, cuyas funciones de transición están esencialmente determinadas por d; pues bajo esta normalización tenemos que $\tilde{C}l_i(O_{\mathbb{P}^n}(d)) = dg_i \in H^{bi}(\mathbb{P}^n, K_b)$ donde $g_i \in H^{bi}(\mathbb{P}^n, K_b)$ denota un generador fijo de antemano de $H^{bi}(\mathbb{P}^n, K_b)$.

Para haces vectoriales reales $cl_i(\xi)$ son las clases de Stiefel–Whitney $w_i(\xi)$. Para haces vectoriales complejos las clases $cl_i(\xi)$ son las clases de Chern $c_i(\xi)$.

4.2. Morfismos genéricos.

Dentro de esta sección introduciremos el concepto de morfismo genérico entre dos haces vectoriales dado por MacPherson [9], el cual sera de gran utilidad para próximas construcciones.

Para cada una de las contrucciones a realizar, sean $\pi : \zeta \longrightarrow M$ y $\rho : \xi \longrightarrow M$ $\mathbb{F}$-haces vectoriales suaves de rango n y m respectivamente sobre una variedad suave M.

Consideremos el haz de morfismos entre ζ y ξ, $\tilde{\pi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \longrightarrow M$; notemos que dado $h : \zeta \longrightarrow \xi$ un morfismo suave de haces, éste determina una sección suave $s_h : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ dada por $s_h(p) = h_p$, donde $h_p : \zeta_p \longrightarrow \xi_p$ es la transformación inducida en fibras sobre p por el morfismo h.

Ahora tomemos los productos fibrados de ζ por $\tilde{\pi}$ y ξ por $\tilde{\pi}$:

$$\tilde{\pi}^*\zeta = \{(f, z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \times \zeta : \tilde{\pi}(f) = \pi(z)\}$$

$$\tilde{\pi}^*\xi = \{(g, e) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \times \xi : \tilde{\pi}(g) = \rho(e)\}$$

cuyas fibras sobre $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ están dadas por:

$$(\tilde{\pi}^*\zeta)_v = \{(f, z) \in \tilde{\pi}^*\zeta : \pi_1(f, z) = v\}$$

$$(\tilde{\pi}^*\xi)_v = \{(g, e) \in \tilde{\pi}^*\xi : \tilde{\pi}_1(g, e) = v\}$$

donde π_1, $\tilde{\pi}_1$ denotan las respectivas proyecciones en el primer factor. Notemos que $(\tilde{\pi}^*\zeta)_v \cong \zeta_{\tilde{\pi}(v)}$; pues podemos dar una transformación lineal

$$\lambda : \zeta_{\tilde{\pi}(v)} \longrightarrow (\tilde{\pi}^*\zeta)_v$$
$$l \longmapsto (v, l)$$

la cual es un isomorfismo, pues tiene una inversa

$$\lambda^{-1} : (\tilde{\pi}^*\zeta)_v \longrightarrow \zeta_{\tilde{\pi}(v)} \; (v, z) \longmapsto z$$

Haciendo la misma observación tenemos que $(\tilde{\pi}^*\xi)_v \cong \xi_{\tilde{\pi}(v)}$. De acuerdo a esto, podemos introducir de manera natural la siguiente definición.

Definición 4.2.1. *Llamaremos morfismo tautólogico τ al morfismo de haces sobre el espacio* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ *el cual va de $\tilde{\pi}^*\zeta$ a $\tilde{\pi}^*\xi$ cuya restricción en las fibras sobre $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ es identicamente v, considerado como una transformación lineal de $\zeta_{\tilde{\pi}(v)}$ a $\xi_{\tilde{\pi}(v)}$.*

$$\tau : \tilde{\pi}^*\zeta \longrightarrow \tilde{\pi}^*\xi$$
$$v = \tau_v : (\tilde{\pi}^*\zeta)_v \longrightarrow (\tilde{\pi}^*\xi)_v$$

Ahora, dado un morfismo de haces suaves $h : \zeta \longrightarrow \xi$ sobre una variedad suave M, éste induce una partición de la variedad dada por subconjuntos de "singularidad"

$$Z_j(h) = \{x \in M : \dim_{\mathbb{F}} \ker h_x = j\} \qquad\qquad 0 \leq j \leq \operatorname{rango} \zeta.$$

Recordemos que un haz fibrado suave es similar a un haz vectorial suave pero sin estructura de espacio vectorial en las fibras; se pide que las funciones de transición sean difeomorfismos en cada fibra sin pedir que éstos sean lineales.

Proposición 4.2.2. *Sea $\tau : \tilde{\pi}^*\zeta \longrightarrow \tilde{\pi}^*\xi$ el morfismo tautológico sobre el haz de morfismos* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$*, entonces cada conjunto de singularidad $Z_j(\tau)$ es un subhaz fibrado de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ *con fibra $Z_j(\tau)_x = \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x) : \dim_{\mathbb{F}} \ker v = j\}$.*

Demostración. Recordemos que dadas cubiertas trivializadoras tanto para ζ como para ξ, podemos obtener una cubierta trivializadora común la cual nos permitirá definir un atlas para $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$. Sean $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$, $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in I}$ atlas suaves para ζ y ξ respectivamente. Definimos ahora un atlas suave para $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ dado por $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ donde

$$\varphi_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x)$$
$$f_x \longmapsto (x, \psi_{\alpha_x} f_x \phi_{\alpha_x}^{-1}),$$

la cual es suave, y su inversa está dada por

$$\varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x) \longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$$
$$(x, g) \longmapsto \psi_{\alpha_x}^{-1} g \phi_{\alpha_x}$$

que de igual forma es suave.

Observemos que para cada $v \in Z_j(\tau)$, tenemos que $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{im}\, v = n - j$. En consecuencia de la contrucción anterior; para cada $x \in M$ existe una carta del haz de morfismos $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tal que $\varphi_\alpha(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \cap Z_j(\tau)) = U_\alpha \times \mathbb{F}_{n-j}(m,n) \subset U_\alpha \times \mathbb{F}(m,n)$ donde $\mathbb{F}_{n-j}(m,n)$ denota las matrices de m por n de rango $n-j$ sobre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{F}(m,n)$ denota las matrices de m por n sobre $\mathbb{F}$.

Por lo tanto $(Z_j(\tau), \tilde{\pi} \downharpoonright_{Z_j(\tau)}, M)$ es un subhaz fibrado de $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi), \tilde{\pi}, M)$.

□

Observación 4.2.3. *Notemos que* $(Z_j(\tau), \tilde{\pi} \downharpoonright_{Z_j(\tau)}, M)$ *no es un subhaz vectorial de* $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi), \tilde{\pi}, M)$*, pues* $\mathbb{F}_{n-j}(m,n)$ *no es un subespacio vectorial de* $\mathbb{F}(m,n)$ *ya que no es cerrado bajo la resta.*

Lema 4.2.4. *Sea* $\mathbb{F}(m,n)$ *el espacio vectorial de las matrices de* $m \times n$ *con entradas en* $\mathbb{F}$ *y sea* $\mathbb{F}_r(m,n)$ *el subconjunto de las* $m \times n$*- matrices de rango* r *con* $r \leq min\{m,n\}$*, entonces* $\mathbb{F}_r(m,n)$ *es una subvariedad de* $\mathbb{F}(m,n)$ *de* $\mathbb{F}$*-codimensión* $(m-r)(n-r)$*.*

Demostración. Sea $X_0 \in \mathbb{F}_r(m,n)$. Mediante un cambio de renglones y columnas, podemos suponer que

$$X_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

con $\det(A_0) \neq 0$, $B_0 \in \mathbb{F}(r, n-r)$, $C_0 \in \mathbb{F}(m-r, r)$ y $D_0 \in \mathbb{F}(m-r, n-r)$.

Consideremos la siguiente función

$$\mathbb{F}(m,n) \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{F}(r,r) \xrightarrow{\det} \mathbb{F}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto A \mapsto \det(A)$$

la cual es suave, en particular continua. Así, $V = (\det \circ \pi_1)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es una vecindad abierta de X_0 en $\mathbb{F}(m,n)$.

Por otro lado, consideremos

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{F}(m,n),$$

con las mismas condiciones que en X_0, entonces bajo un arreglo de renglones y columnas tenemos

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Así podemos definir la función $g : V \subset \mathbb{F}(m,n) \longrightarrow \mathbb{F}(m-r, n-r)$;

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto D - CA^{-1}B$$

la cual es suave y $g^{-1}(0) = V \cap \mathbb{F}_r(m,n)$.

Por último, veamos que g es una sumersión. Sea

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in g^{-1}(0)$$

Probaremos que $Dg(X) : \mathbb{F}(m,n) \longrightarrow \mathbb{F}(m-r, n-r)$ es suprayectiva. Sea $E \in \mathbb{F}(m-r, n-r)$ y sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F}(m,n)$ tal que

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + tE \end{pmatrix}$$

la cual es suave y $\alpha(0) = X$. Además $(g \circ \alpha)(t) = D + tE - CA^{-1}B$, la cual es diferenciable y $(g \circ \alpha)'(0) = E$. Por otra parte $(g \circ \alpha)'(0) = D[g \circ \alpha](0) = Dg(\alpha(0)(\alpha'(0))$ con

$$\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Así, $Dg(x)$ es supreyectiva y por consiguiente $\mathbb{F}_r(m,n)$ es una subvariedad suave de $\mathbb{F}$-dimensión $r(m+n-r)$ y por lo tanto de $\mathbb{F}$-codimension igual a $mn - r(m+n-r) = (m-r)(n-r)$. □

Teniendo en cuenta que $Z_j(\tau)_x = \{v \in \mathbb{F}(m,n) : \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{im} v = n - j\}$, tenemos por el resultado anterior que $Z_j(\tau)_x \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}$-codimensión $b(m-(n-j))(n-(n-j)) = bj(m-n+j)$.

Teorema 4.2.5. *El subconjunto de singularidad* $Z_j(\tau) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ *es una subvariedad tal que* $\operatorname{cod}_{\mathbb{R}}(Z_j(\tau)) = bj(m-n+j)$.

Demostración. Sea $v \in Z_j(\tau)$ entonces existe U_α vecindad trivializadora tal que $x = \tilde{\pi}(v) \in U_\alpha \subset M$.

Denotemos por $\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \mid_{U_\alpha}$. Sabemos que existe un difeomorfismo

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \mid_{U_\alpha} \xrightarrow[\cong]{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{F}(m,n)$$

tal que $\varphi_\alpha(v) = (x, \psi_{\alpha_x} \circ v \circ \phi_{\alpha_x}^{-1}) \in U_\alpha \times Z_j(\tau)_x$ con (U_α, ϕ_α) y (U_α, ψ_α) cartas de ζ y ξ respectivamente; ya que $Z_j(\tau)_x$ es subvariedad de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x)$, existen $W \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x)$ vecindad abierta de $\psi_{\alpha_x} \circ v \circ \phi_{\alpha_x}^{-1}$ y $g : W \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathrm{cod}_{\mathbb{F}}(Z_j(\tau)_x)}$ sumersión con $g^{-1}(0) = W \cap Z_j(\tau)_x$.

Sea $V = \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times W)$, la cual es una vecindad abierta de v en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$. Definimos $\tilde{g} : V \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathrm{cod}_{\mathbb{F}}(Z_j(\tau))}$ como $\tilde{g} := g \circ \pi_2 \circ \varphi_\alpha$ con π_2 la proyección en el segundo factor; notemos que $\tilde{g}$ es una sumersión pues es la composición de un difeomorfismo con dos sumersiones. Además se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{-1}(0) &= \varphi_\alpha^{-1}(\pi_2^{-1}(g^{-1}(0))) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(\pi_2^{-1}(W \cap Z_j(\tau)_x)) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(\{(\tilde{x}, \tilde{v}) \in U_\alpha \times W : \tilde{v} \in W \cap Z_j(\tau)_x\}) \\
&= \{\tilde{v} \in V : \psi_{\alpha_x} \circ \tilde{v} \circ \phi_{\alpha_x}^{-1} \in W \cap Z_j(\tau)_x\} \\
&= V \cap Z_j(\tau).
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que $Z_j(\tau) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ es una subvariedad donde $\mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(Z_j(\tau)) = bj(m - n + j)$.

□

Claramente $Z_{j+1}(\tau)$ está contenido en la adherencia de $Z_j(\tau)$, por lo que

$$\overline{Z_j(\tau)} = \bigcup_{l \geq j} Z_l(\tau),$$

y de hecho, se puede probar que los subconjuntos $Z_l(\tau)$ con $l \geq j$ forman una estratificación de Whitney de $\overline{Z_j(\tau)}$. Para más información y detalle acerca de estratificaciones de Whitney, el lector puede consultar [10, Capítulo 1].

Gracias a las observaciones anteriores, ahora podemos introducir la noción de morfismo genérico entre dos haces vectoriales.

Definición 4.2.6 (Morfismo genérico)**.** *Sean ζ y ξ $\mathbb{F}$-haces vectoriales suaves sobre una variedad suave M. Un morfismo de haces $h : \zeta \longrightarrow \xi$ es llamado genérico si la correspondiente sección $s_h : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ con $s_h(p) = h_p$, es transversal a todas las subvariedades $Z_j(\tau)$.*

Observación 4.2.7. *La existencia de morfismos genéricos entre $\mathbb{F}$-haces vectoriales es un caso particular del Teorema 2.2.6, pues si abstraemos esta noción para el haz $\tilde{\pi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \longrightarrow M$, podemos encontrar una sección $s : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ tal que $s \pitchfork Z_j(\tau)$ para toda j. Debido a esto, definimos el morfismo genérico $h : \zeta \longrightarrow \xi$ como aquel cuya restricción en las fibras $h_p : \zeta_p \longrightarrow \xi_p$ está dado por $h_p = s(p)$.*

Proposición 4.2.8. *Sean ζ y ξ $\mathbb{F}$-haces vectoriales suaves de rango n y m respectivamente sobre una variedad suave M. Si $h : \zeta \longrightarrow \xi$ es un morfismo genérico sobre M, entonces $Z_j(h)$ es una subvariedad de M donde $\mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(Z_j(h)) = bj(m - n + j)$.*

Demostración. Sea s_h la sección de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta,\xi)$ correspondiente a h. Entonces

$$s_h^{-1}(Z_j(\tau)) = \{p \in M : \dim\ker \tau_{s_h(p)} = j\} = \{p \in M : \dim\ker h_p = j\} = Z_j(h).$$

Por lo tanto ya que $s_h \pitchfork Z_j(h)$, $Z_j(h)$ es una subvariedad de M tal que $\mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(s_h^{-1}(Z_j(\tau))) = \mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(Z_j(\tau)) = bj(m-n+j)$

□

4.3. La variedad $\tilde{Z}(h)$.

Sea ξ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango n sobre una variedad suave cerrada M de dimensión m. También asumamos que la variedad M es K_b-orientable, donde recordemos que para $b=1$, $K_1=\mathbb{Z}_2$ y para $b=2$, $K_2=\mathbb{Z}$.

Sea $h:\varepsilon^k \longrightarrow \xi$ un morfismo de haces del haz producto ε^k de rango k al haz ξ. Definamos

$\tilde{Z}(h) = \{(x,L) \in M \times \mathbb{F}P^{k-1} : \{x\}\times L \subset \ker h_x\}$

$\tilde{Z}^\circ(h) = \{(x,L) \in \tilde{Z}(h) : \{x\}\times L = \ker h_x\}$.

Proposición 4.3.1. *El subconjunto $\tilde{Z}^\circ(h)$ es abierto en $\tilde{Z}(h)$.*

Demostración. Veamos que $Z_1(h)$ es abierto en $\overline{Z_1(h)}$. Sea A_{h_x} la matriz asociada a la transformación lineal $h_x:\varepsilon_x^k \longrightarrow \xi_x$. Sea $x\in Z_1(h)$; podemos hacer un cambio de renglones y columnas de tal manera que la matriz asociada a h_x sea de la forma

$$A_{h_x} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$$

donde $A_0 \in \mathbb{F}(k-1,k-1)$ y $\det(A_0)\neq 0$.

Consideremos la siguiente función

$$M \xrightarrow{\bar{S}_h} \mathbb{F}(n,k) \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{F}(k-1,k-1) \xrightarrow{\det} \mathbb{F}$$
$$x \longmapsto A_{h_x} \longmapsto A_0 \longmapsto \det(A_0)$$

la cual es continua.

Definamos $V = (\det\circ\pi_1\circ\bar{S}_h)^{-1}(\mathbb{F}\setminus\{0\})$, entonces V es una vecindad abierta de x en M. Así definamos $W = \overline{Z_1(h)}\cap V$, entonces $x\in W\subset Z_1(h)$.

Por lo tanto $Z_1(h)$ es abierto en $\overline{Z_1(h)}$. Ahora consideremos $\pi:\tilde{Z}(h)\longrightarrow\overline{Z_1(h)}$ la proyección en el primer factor la cual es continua. Por lo tanto $\pi^{-1}(Z_1(h)) = \tilde{Z}^\circ(h)$ es abierto en $\tilde{Z}(h)$.

□

Sea $\tilde{\pi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \longrightarrow M$, el haz de morfimos de ε^k a ξ y consideremos τ el haz tautológico sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$; claramente

$\tilde{Z}(\tau) = \{(f, L) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1} : \{\tilde{\pi}(f)\} \times L \subset \ker f_{\tilde{\pi}(f)}\}$

pues en primera instancia

$\tilde{Z}(\tau) = \{(f, L) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1} : \{f\} \times L \subset \ker \tau_f\}$ y $(f, e) \in \ker \tau_f$ si y solo si $e = (\tilde{\pi}(f), L) \in \ker f_{\tilde{\pi}(f)}$.

Proposición 4.3.2. *Sea $\hat{\varphi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$ la proyección en el primer factor. Entonces*

1. $\hat{\varphi}(\tilde{Z}(\tau)) = \overline{Z_1(\tau)}$.
2. $\tilde{Z}(\tau)$ *es una subvariedad de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1}$ *de codimensión real bn.*

Demostración. 1. $\subseteq$) Sea $(f, L) \in \tilde{Z}(\tau)$, entonces $\{\pi(f)\} \times L \subset \ker f_{\pi(f)}$, ahora ya que $\{\pi(f)\} \times L \neq \bar{0}_{\varepsilon^k_{\pi(f)}}$ tenemos $\dim_{\mathbb{F}} \ker f_{\pi(f)} = l \geq 1$, por lo tanto $f \in \overline{Z_1(\tau)}$.

$\supseteq$) Sea $f \in \overline{Z_1(\tau)}$, por lo que $\dim \ker f_{\pi(f)} \geq 1$. Así $\ker f_{\pi(f)}$ contiene al menos una linea L, por lo tanto $(f, L) \in \tilde{Z}(\tau)$ y $\hat{\varphi}(f, L) = f$.

2. Consideremos $\tilde{\pi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \longrightarrow M$ el haz de morfismos de ε^k a ξ sobre M y $\gamma^1_{k-1} = \{(l, v) \in \mathbb{F}P^{k-1} \times \mathbb{F}^k : v \in l\}$ el haz de lineas sobre $\mathbb{F}P^{k-1}$. Dada la proyección en el primer factor $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1} \longrightarrow \mathbb{F}P^{k-1}$, denotemos por $\varepsilon_1 = \eta^*(\gamma^1_{k-1}) = \{(f, L, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1} \times \mathbb{F}^k : v \in L\}$.

   Sea $\xi' = \hat{\varphi}^* \tilde{\pi}^*(\xi)$; tomemos $\rho : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1}$ el haz de morfismos de ε_1 a ξ' sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1}$ y definamos la función

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$$

   dada por $\psi(f, L) = f_{\restriction L}$ donde $f_{\restriction L}$ es la restricción a la linea L, la cual es suave y está bien definida pues

$$\xi'_{(f,L)} = (\hat{\varphi}^* \pi^*(\xi))_{(f,L)} = (\pi^*(\xi))_f = \xi_{\pi(f)}$$
$$\varepsilon_{1_{(f,L)}} = (\eta^*(\gamma^1_{k-1}))_{(f,L)} = (\gamma^1_{k-1})_L = L.$$

   Notemos que ψ es una sección de ρ. En efecto, sea $(f, L) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1}$ entonces $f_{\restriction L}$ la podemos pensar como una transformación entre las fibras $\xi'_{(f,L)}$ y $\varepsilon_{1_{(f,L)}}$, por lo que obtenemos $\rho(\psi(f, L)) = (f, L)$.

Ahora, para cada $(f,L)\in\tilde{Z}(\tau)$ tenemos que $\{\pi(f)\}\times L\subset\ker f_{\pi(f)}$ lo que implica que $f_{\restriction_L}:L\longrightarrow\xi_{\pi(f)}$ es la constante $\hat{0}$; con lo cual llegamos a que $\tilde{Z}(\tau)$ es el conjunto de ceros de ψ.

Así $\tilde{Z}(\tau)=\psi^{-1}(\operatorname{im}S_0)$ donde $S_0:\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\times\mathbb{F}^{k-1}\longrightarrow\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')$ denota la sección cero.

Para mostrar que $\tilde{Z}(\tau)$ es subvariedad de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\times\mathbb{F}^{k-1}$ basta mostrar que $\psi\,\overline{\pitchfork}\,(\operatorname{im}S_0)$.

Para esto, basta dar una representación coordenada de ψ en términos de abiertos trivializadores en cada punto $(f,L)\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\times\mathbb{F}P^{k-1}$.

Sea $(f,L)\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\times\mathbb{F}P^{k-1}$ entonces existe $U\subset M$ abierto tal que $\tilde{\pi}(f)\in U$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)_{\restriction_U}\cong U\times\mathbb{F}(n,k)$, de esta manera tenemos $\xi_{\restriction_U}\cong U\times\mathbb{F}^n$. Por otro lado consideremos $V\subset\mathbb{F}P^{k-1}$ una vecindad abierta de L tal que $\gamma^1_{k-1_{\restriction_V}}\cong V\times\mathbb{F}$, así podemos suponer que el abierto $\pi^{-1}(U)\times V\subset\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\times\mathbb{F}P^{k-1}$ trivializa a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')$, esto es $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')_{\restriction_{\pi^{-1}(U)\times V}}\cong\pi^{-1}(U)\times V\times\mathbb{F}(n,1)$, pues dadas cubiertas trivializadoras para los haces ξ y γ^1_{k-1}, podemos obtener cubiertas trivializadoras ξ' y ε_1 y posteriormente obtener una cubierta trivializadora común, para obtener una cubierta trivializadora para $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')$.

Considerando el isomorfismo $\gamma^1_{k-1_L}\overset{\theta}{\cong}\{L\}\times\mathbb{F}$, definimos $\upsilon_L:=\theta(1)$ donde υ_L lo podemos pensar como un vector columna. Notemos que $f_{\restriction_L}\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')_{\restriction_{\pi^{-1}(U)\times V}}$, pues tenemos la siguiente descomposición

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')_{\restriction_{\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V}}=\coprod_{(f,L)\in\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V}\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(L,\xi_{\tilde{\pi}(f)})$$

Así, dada $f\in\tilde{\pi}^{-1}(U)\subset\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)$, tenemos que $(\tilde{\pi}(f),A_f)\in U\times\mathbb{F}(n,k)$ donde A_f es la matriz asociada a la trasformación $f_{\tilde{\pi}(f)}$. De esta manera $f_{\restriction_L}\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')_{\restriction_{\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V}}$ está representado como una terna $(f,L,\upsilon_f)\in\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V\times\mathbb{F}(n,1)$ con $\upsilon_f=A_f\upsilon_L\in\mathbb{F}(n,1)$; por lo que obtenemos una representación de ψ en términos de abiertos trivializadores de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\psi_{\restriction_{\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V}}:\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V&\longrightarrow\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V\times\mathbb{F}(n,1)\\(f,L)&\longmapsto(f,L,\upsilon_f)\ .\end{aligned}$$

Ahora, definamos la función $\bar{\psi}_{\restriction_{\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V}}:\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V\longrightarrow\mathbb{F}(n,1)$ tal que $\psi_{\restriction_{\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V}}(f,L)=\upsilon_f$. Sin perdida de la generalidad podemos suponer que $V\subset\mathbb{F}P^{k-1}$ también es una vecindad trivializadora para $\gamma^{1^\perp}_{k-1}$ alrededor de L, esto es $\gamma^{1^\perp}_{k-1_{\restriction_V}}\cong V\times\mathbb{F}^{k-1}$, por lo que obtenemos un isomorfismo $\langle\upsilon_L\rangle\oplus\mathbb{F}^{k-1}\overset{\lambda}{\cong}\mathbb{F}^k$, donde $\langle\upsilon_L\rangle$ es el generado por υ_L; con lo cual podemos dar una expresión explicita de la derivada de $\bar{\psi}_{\restriction_{\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V}}$, de la siguiente manera:

Sea $(H,h)\in\mathbb{F}(n,k)\times\mathbb{F}^{k-1}\cong T_{(f,L)}(\tilde{\pi}^{-1}(U)\times V)$, entonces

$$d\bar{\psi}_{(f,L)}(H,h)=H\upsilon_L+A_f\lambda(h),$$

donde $d\bar{\psi}_{(f,L)}:\mathbb{F}(n,k)\times\mathbb{F}^{k-1}\longrightarrow\mathbb{F}(n,1)$ resulta ser supreyectiva, ya que dado $(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{F}(n,1)$, podemos considerar $h=0$,

$$H=\begin{pmatrix}\frac{a_1}{v_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{a_2}{v_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_n}{v_n}\end{pmatrix}$$

y $\upsilon_L=(v_1,v_2,...,v_n)$; por lo que $H\upsilon_L+A_f\lambda(h)=(a_n,...a_n)$.

Por lo tanto tenemos que

$$d\psi_{(f,L)}:\mathbb{F}(n,k)\times\mathbb{F}^{k-1}\longrightarrow\mathbb{F}(n,k)\times\mathbb{F}^{k-1}\times\mathbb{F}(n,1)$$

está dada por $d\psi_{(f,L)}(H,h)=(H,h,H\upsilon_L+A_f\lambda(h))$.

Finalmente dado $(f,L)\in\tilde{Z}(\tau)$ tal que $f_{\downharpoonright L}\equiv\bar{0}$, consideremos $(p,q,r)\in T_{\psi(f,L)}\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')$, entonces por lo anterior, existe $(H,h)\in\mathbb{F}(n,k)\times\mathbb{F}^{k-1}$ tal que $d\psi_{(f,L)}(H,h)=(H,h,r)$, por lo que

$$d\psi_{(f,L)}(H,h)+(p-H,q-h,0)=(p,q,r),$$

donde $(p-H,q-h,0)\in T_{(\psi(f,L))}(\operatorname{im}S_0)$ pues $\operatorname{im}S_0\cong\mathbb{F}(n,k)\times\mathbb{F}^{k-1}\times\{\bar{0}\}$. Por lo tanto $\psi\pitchfork\operatorname{im}S_0$ y por consiguiente $\psi^{-1}(\operatorname{im}S_0)=\tilde{Z}(\tau)$ es una subvariedad de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\times\mathbb{F}P^{k-1}$ tal que $\operatorname{cod}_{\mathbb{R}}(\tilde{Z}(\tau))=\operatorname{cod}_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}S_0)=b(\dim_{\mathbb{F}}(\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1,\xi')))=bn$.

□

Proposición 4.3.3. *Sea $h:\varepsilon^k\longrightarrow\xi$ un morfismo de haces genérico. Entonces $\tilde{Z}(h)$ es una subvariedad compacta de $M\times\mathbb{F}P^{k-1}$ de dimensión $m+b(k-n-1)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\times\mathbb{F}P^{k-1} \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, shift left, "\tilde{\pi}\times Id"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi) \arrow[d, shift right, "\tilde{\pi}"'] \\
M\times\mathbb{F}P^{k-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, bend left, "\tilde{s}_h"] & M \arrow[u, bend right, "s_h"']
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{\pi}:\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)\longrightarrow M$ es el haz de morfismos de ε^k a ξ sobre M, $\hat{\varphi}$ y φ son las correspondientes proyecciones al primer factor, s_h es la sección de $\tilde{\pi}$ correspondiente al morfismo h y $\tilde{s}_h$ es la sección dada por $\tilde{s}_h=s_h\times Id$.

Sea τ el morfismo tautológico sobre $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)$,

$$\begin{tikzcd} \tilde{\pi}^*\varepsilon^k \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr] & & \tilde{\pi}^*\xi \arrow[dl] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi) & \end{tikzcd}$$

claramente $\tilde{Z}(h) = \tilde{s}_h^{-1}(\tilde{Z}(\tau))$; $\tilde{s}_h^{-1}(\tilde{Z}(\tau)) = \{(x,L) \in M \times \mathbb{F}P^{k-1} : \tilde{s}_h(x,L) \in \tilde{Z}(\tau)\} = \{(x,L) \in M \times \mathbb{F}P^{k-1} : (h_x, L) \in \tilde{Z}(\tau)\} = \{(x,L) \in M \times \mathbb{F}P^{k-1} : \{x\} \times L \subset \ker h_x\}$. Por lo que basta checar que $\tilde{s}_h \pitchfork \tilde{Z}(\tau)$, lo cual tiene sentido pues $\tilde{Z}(\tau)$ es una subvariedad de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi) \times \mathbb{F}P^{k-1}$.

Sea $(x,L) \in \tilde{Z}(h)$, haciendo uso de la Propocisión 4.3.2, tenemos que $\tilde{s}_h(x,L) = (h_x, L) \in \tilde{Z}(\tau)$ con $h_x \in Z_j(\tau)$ para $j \geq 1$; de donde tenemos que

$$d\hat{\varphi}_{(h_x,L)}(T_{h_x}Z_j(\tau) \times T_L\mathbb{F}P^{k-1}) = T_{h_x}Z_j(\tau) \subset d\hat{\varphi}_{(h_x,L)}(T_{(h_x)}\tilde{Z}(\tau)). \tag{4.1}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} & d\tilde{s}_{h_{(x,L)}}(T_xM \oplus T_L\mathbb{F}P^{k-1}) \oplus T_{(h_x,L)}\tilde{Z}(\tau) \\ & \cong ds_{h_x}(T_xM) \oplus dId_L(T_L\mathbb{F}P^{k-1}) \oplus T_{(h_x,L)}\tilde{Z}(\tau) \\ & \cong ds_{h_x}(T_xM) \oplus T_L\mathbb{F}P^{k-1} \oplus d\hat{\varphi}_{(h_x,L)}(T_{(h_x,L)}\tilde{Z}(\tau)) \oplus d\hat{\phi}_{(h_x,L)}(T_{(h_x,L)}\tilde{Z}(\tau)) \end{aligned}$$

donde $\hat{\phi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi) \times \mathbb{F}P^{k-1} \longrightarrow \mathbb{F}P^{k-1}$ es la proyección en el segundo factor.

Por 4.1 y usando el hecho de que $d\hat{\phi}_{(h_x,L)}(T_{(h_x,L)}\tilde{Z}(\tau)) \subset T_L\mathbb{F}P^{k-1}$ tenemos que $ds_{h_x}(T_xM) \oplus T_L\mathbb{F}P^{k-1} \oplus T_{h_x}Z_j(\tau) \subset d\tilde{s}_{h_{(x,L)}}(T_xM \oplus T_L\mathbb{F}P^{k-1}) \oplus T_{(h_x,L)}\tilde{Z}(\tau)$.

Debido a que h es genérico, s_h es transversal a $Z_j(\tau)$ para toda j, por lo que $ds_{h_x}(T_xM) \oplus T_{h_x}Z_j(\tau) = T_{h_x}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi)$. Por lo tanto

$$T_{h_x}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k,\xi) \oplus T_L\mathbb{F}P^{k-1} \subset d\tilde{s}_{h_{(x,L)}}(T_xM \oplus T_L\mathbb{F}P^{k-1}) \oplus T_{(h_x,L)}\tilde{Z}(\tau).$$

Ya que la otra inclusión es trivial, $\tilde{s}_h \pitchfork \tilde{Z}(\tau)$. Entonces $\tilde{Z}(h) = \tilde{s}_h^{-1}(\tilde{Z}(\tau))$ es una subvariedad de $M \times \mathbb{F}P^{k-1}$ tal que $\dim_{\mathbb{R}}\tilde{Z}(h) = \dim_{\mathbb{R}}(M \times \mathbb{F}P^{k-1}) - \mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(\tilde{Z}(h)) = \dim_{\mathbb{R}}(M \times \mathbb{F}P^{k-1}) - \mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(\tilde{Z}(\tau)) = m + b(k-1) - bn = m + b(k-1-n)$.

Para concluir, ya que $\tilde{Z}(\tau) = \psi^{-1}(\mathrm{im}\, S_0)$, tenemos que es cerrado, lo cual implica que $\tilde{Z}(h)$ es cerrado en $M \times \mathbb{F}P^{k-1}$ y por lo tanto compacto.

$\square$

Proposición 4.3.4. *La variedad $\tilde{Z}(h)$ es K_b-orientable. Por lo tanto ésta tiene una clase fundamental $[\tilde{Z}(h)] \in H_{m+b(k-n-1)}(\tilde{Z}(h); K_b)$.*

Demostración. Cuando $b = 1$, toda variedad es $\mathbb{Z}_2$-orientable y ya que $\tilde{Z}(h)$ es una variedad compacta, ésta tiene una clase fundamental.

Para $b = 2$, haremos uso de la Proposición 3.4.9. Si ε^k y ξ son haces vectoriales complejos, entonces estos tienen una orientación canónica, por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$ tiene una orientación canónica como haz vectorial. Ahora ya que M es una variedad $\mathbb{Z}$-orientable por hipótesis entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$ es una variedad $\mathbb{Z}$-orientable. Más aún, ya que el haz $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$ es un haz vectorial complejo, éste también tiene una orientación canónica y debido a que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1}$ es una variedad $\mathbb{Z}$-orientable, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$ es también una variedad $\mathbb{Z}$-orientable.

Notemos que la sección cero del haz $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$ es una variedad $\mathbb{Z}$-orientable siendo difeomorfa a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}P^{k-1}$, así $\tilde{Z}(\tau)$ es también una variedad $\mathbb{Z}$-orientable, pues es la imagen inversa de la sección bajo la sección transversal ψ.

Por lo tanto, si el morfismo de haces $h : \varepsilon^k \longrightarrow \xi$ es genérico, $\tilde{s}_h \pitchfork \tilde{Z}(\tau)$ lo cual implica que $\tilde{Z}(h) = \tilde{s}_h^{-1}(\tilde{Z}(\tau))$ es una variedad $\mathbb{Z}$-orientable por [11, p.101].

□

Proposición 4.3.5. *Sea $\phi : \tilde{Z}(h) \longrightarrow M$ la proyección en el primer factor. Entonces ϕ es propia y mapea a $\tilde{Z}^\circ(h)$ de manera difeomorfa en $Z_1(h)$.*

Demostración. Debido a que $\tilde{Z}(h)$ es compacto y M es Hausdorff, tenemos que $\phi : \tilde{Z}(h) \longrightarrow M$ es propia y cerrada. Por otro lado, claramente $\phi(\tilde{Z}(h)) = \overline{Z_1(h)}$, por lo que la correstricción $\phi : \tilde{Z}(h) \longrightarrow \overline{Z_1(h)}$ es cerrada y suprayectiva.

Ahora, observemos que

$$\phi^{-1}(Z_1(h)) = \{(x, L) \in \tilde{Z}(h) : \ker h_x = L\} = \tilde{Z}^\circ(h),$$

entonces para cada $x \in Z_1(h)$ tenemos que $\dim \ker h_x = 1$, por lo que x tiene una sola preimagen en $\tilde{Z}^\circ(h)$, lo cual implica que la restricción $\phi : \tilde{Z}^\circ(h) \longrightarrow \overline{Z_1(h)}$ es inyectiva. Así, ya que $\phi(\tilde{Z}^\circ(h)) = Z_1(h)$ tenemos que $\phi : \tilde{Z}^\circ(h) \longrightarrow Z_1(h)$ es continua, biyectiva y cerrada, por consiguiente es un homeomorfismo.

Debido a que $\tilde{Z}^\circ(h)$ es abierto en $\tilde{Z}(h)$, tenemos que $\tilde{Z}^\circ(h)$ es una variedad suave, lo cual implica que la restriccón y correstricción $\phi : \tilde{Z}^\circ(h) \longrightarrow Z_1(h)$ es un difeomorfismo.

□

4.4. Definición de las clases $Cl_i(\xi)$.

Dentro de esta sección, introduciremos la definición de clase característica en términos de la clase fundamental de la variedad $\tilde{Z}(h)$, la cual existe por la proposición 4.3.4. Antes de definir las clases caraterísticas, haremos uso de los siguientes resultados.

Lema 4.4.1. *Sean M y M' dos variedades suaves cerradas K_b-orientables y sea Z una subvariedad cerrada de M, K_b-orientable. Sea $f : M' \longrightarrow M$ una función suave tal que $f \pitchfork Z$ y sea $Z' = f^{-1}(Z)$. Denotemos por i y j las inclusiones de Z y Z' en M y M' respectivamente. Si $[Z]$ y $[Z']$ son las correspondientes clases fundamentales de Z y Z', entonces $j_*([Z']) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ i_*([Z])$ donde D_M y $D_{M'}$ denotan los isomorfismos de dualidad de Poincaré en M y M' respectivamente.*

Demostración. Debido a [11, p. 101], tenemos que si f es transversal a Z entonces Z' es K_b-orientable como subvariedad de M'. Sea $\dim M = m$, $\dim M' = m'$, $\dim Z = r$ y $\dim Z' = r'$; ya que Z y Z' tienen la misma codimension, por el Teorema 2.2.5 , sea $q = m - r = m' - r'$.

Sea ν el haz normal de Z en M, el cual está orientado de tal manera que $\nu \oplus TZ$ es isomorfo a $TM_{\restriction Z}$ preservando la orientación. Sea ν' el haz normal de Z' en M', notemos que $\nu' = f^*\nu$ pues en cada $p \in Z'$ tenemos

$$\begin{aligned} \nu'_p &\cong {}^{T_pM'}\!\big/_{T_pZ'} \\ &\cong {}^{df_p(T_pM')}\!\big/_{df_p(T_pZ')} \\ &\cong {}^{T_{f(p)}M/df_p(T_pZ')}\!\big/_{T_{f(p)}Z/df_p(T_pZ')} \\ &\cong {}^{T_{f(p)}M}\!\big/_{T_{f(p)}Z} \cong (f^*(\nu))_p \end{aligned}$$

Denotemos por $E(\nu)$ al espacio total de ν y sea $E(\nu)_0$ el conjunto de elementos no cero de $E(\nu)$, analogamente definimos por $E(\nu')$ y $E(\nu')_0$ para ν', así por [8, Corolario 11.1] tenemos los siguientes isomorfismos en los anillos de cohomología

$$\begin{aligned} H^*(E(\nu), E(\nu)_0; K_b) &\cong H^*(M, M - Z; K_b) \\ H^*(E(\nu'), E(\nu')_0; K_b) &\cong H^*(M', M' - Z'; K_b) \end{aligned}$$

bajo los cuales, las clases de Thom de ν y ν' se corresponden canonicamente a clases

$$u_\nu \in H^q(M, M - Z; K_b) \qquad\qquad u_{\nu'} \in H^q(M', M' - Z' : K_b).$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^q(M, M - Z; K_b) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f^*"'] & H^q(M; K_b) \arrow[r, "D_M"] \arrow[d, "f^*"] & H_r(M; K_b) & H_r(Z; K_b) \arrow[l, "i_*"'] \\ H^q(M', M' - Z'; K_b) \arrow[r, "\iota'"] & H^q(M'; K_b) \arrow[r, "D_{M'}"] & H_{r'}(M'; K_b) & H_{r'}(Z'; K_b) \arrow[l, "j_*"'] \end{tikzcd}$$

por [8, Problema 11.C] y orientando el haz ν en dirección opuesta obtenemos

$$\iota(u_\nu) = D_M^{-1} \circ i_*([Z]) \qquad\qquad \iota'(u_{\nu'}) = D_{M'}^{-1} \circ j_*([Z'])$$

Así, usando lo anterior, el hecho de que $u_{\nu'} = f^*(u_\nu)$, el cual se da por la naturalidad de las clases de Thom con respecto a la igualdad $f^*(\nu) = \nu'$, y usando la conmutatividad del diagrama anterior tenemos

$$D_{M'}^{-1}(j_*([Z'])) = \iota'(u_{\nu'}) = \iota'(f^*(u_\nu)) = f^*(\iota(u_\nu)) = f^*(D_M^{-1}(\iota_*([Z]))).$$

Por lo tanto $j_*([Z']) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ i_*([Z])$.

□

Proposición 4.4.2. *Sean M, M' y P variedades K_b-orientables cerradas, consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \arrow[d, "g"] \\ M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

donde f y g son funciones suaves, Q es el producto fibrado de f por g y π_1, π_2 son las proyecciones. Suponga que f y g son transversales y sean $[P]$ y $[Q]$ las clases fundamentales de P y Q respectivamente. Entonces $(-1)^{(m-r)m}\pi_{1*}([Q]) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ g_*([P])$, donde D_M y $D_{M'}$ denotan los isomorfismos de dualidad de Poincaré en M y M' respectivamente y $m = \dim M$ y $r = \dim P$

Demostración. Sea $i : \Delta \hookrightarrow M \times M$ la inclusión de la diagonal. Por [11, Lema p.113] tenemos que $f \pitchfork g$ si y solo si $(f \times g) \pitchfork \Delta$ donde $f \times g : M' \times P \longrightarrow M \times M$, entonces $Q = (f \times g)^{-1}(\Delta)$ es una subvariedad de $M' \times P$ K_b-orientable de dimensión $r' = r + m' - m$ con $m' = \dim M'$. Ya que $\Delta \subset M \times M$ es cerrado y K_b-orientable, podemos considerar su clase fundamental $[\Delta]$. Sea $u_\Delta = D_{M \times M}^{-1}(i_*([\Delta]))$, si $j : Q \hookrightarrow M' \times P$ es la inclusión entonces por el lema anterior obtenemos $j_*([Q]) = D_{M' \times P} \circ (f \times g)^*(u_\Delta) = (f \times g)^*(u_\Delta) \frown [M' \times P]$ donde $[M' \times P]$ es la clase fundamental de $M' \times P$.

Sea $\bar{\pi}_1 : M' \times P \longrightarrow M'$ la proyección en el primer factor, ya que $\pi_1 = \bar{\pi}_1 \circ j$ tenemos [12, Proposition 13.61(vi)]

$$\bar{\pi}_{1_*}(j_*([Q])) = \pi_{1_*}((f \times g)^*(u_\Delta) \frown [M' \times P]) \tag{4.2}$$
$$\pi_{1_*}([Q]) = ((f \times g)^*(u_\Delta)/[P]) \frown [M'] \tag{4.3}$$

Por una bien conocida propiedad del producto slant [7, (29.23)] tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H_r(M; K_b) \arrow[r, "u_\Delta/"] & H^{m-r}(M; K_b) \arrow[d, "f^*"] & \\ H_r(P; K_b) \arrow[u, "g^*"] \arrow[r, "(f\times g)^*(u_\Delta)/"] & H^{m-r}(M'; K_b) \arrow[r, "\frown [M']"] & H_{r'}(M'; K_b) \end{tikzcd}$$

Aplicando las dos diferentes composiciones a $(-1)^{(m-r)m}[P] \in H_r(P : K_b)$ y usando (4.3) tenemos las siguientes dos igualdades

$$(-1)^{(m-r)m}((f\times g)^*(u_\Delta)/[P]) \frown [M'] = f^*((-1)^{(m-r)m}u_\Delta/g_*([P])) \frown [M']$$
$$(-1)^{(m-r)m}\pi_{1_*}([Q]) = D_{M'} \circ f^*((-1)^{(m-r)m}u_\Delta/g_*([P]))$$

lo cual prueba la proposición, pues $D_{M'} \circ f^*((-1)^{(m-r)m}u_\Delta/g_*([P])) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ g_*([P])$ debido a que el morfismo $(-1)^{(m-r)m}u_\Delta/$ es el inverso de la dualidad de Poincaré D_M. [12, Teorema 30.6].

□

Antes de definir las clases $Cl_i(\xi)$ y checar que estas cumplen los axiomas preestablecidos, hagamos un paréntesis para tener una noción introductoria del concepto de grado de una función suave entre dos variedades diferenciables cerradas R-orientables de la misma dimensión.

Sea $f : M \longrightarrow N$ función con M y N variedades suaves cerradas K-orientables con K un dominio entero, tal que $\dim M = \dim N = n$. Sea $y \in N$ valor regular de f entonces $f^{-1}(y) = \{x_1, x_1, ..., x_l\}$, por el teorema de la pila de discos existe $V \subset N$ vecindad abierta de y tal que $f^{-1}(V) = \coprod_{x_i \in U_i} U_i$ con la propiedad de que $U_i \cap U_j = \emptyset$ y además $f_{\lfloor U_i} : U_i \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

Con esta información, podemos definir

$$\varepsilon_i := \begin{cases} 1 & \text{si } f_{\lfloor U_i} : U_i \longrightarrow V \text{ preserva la orientación,} \\ -1 & \text{si no la preserva} \end{cases}$$

por lo que el grado de f se define como $deg(f) = \sum \varepsilon_i$, el cual cumple la siguiente propiedad con respecto al morfismo f_* inducido por f en homología:

Sean $[M] \in H_n(M; K)$ y $[N] \in H_n(N; K)$ las clase fundamentales de M y N respectivamente, entonces se tiene que el morfismo $f_* : H_n(M; K) \longrightarrow H_n(N; K)$ inducido por f en homología manda la clase fundamental $[M]$ en $deg(f)[N]$; lo cual se da por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n(M;K) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha"'] & H_n(N;K) \arrow[d, "\alpha'"] \\
H_n(M, M \setminus \bigcup_i U_i; K) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\beta"', "\cong"] & H_n(N, N\setminus V; K) \arrow[d, "\cong"', "\beta'"] \\
\tilde{H}_n({}^{M}/_{M \setminus \bigcup_i U_i}; K) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\lambda"', "\cong"] & \tilde{H}({}^{N}/_{N\setminus V}; K) \arrow[d, "\cong"', "\lambda'"] \\
\tilde{H}_n(\bigvee_l S^n; K) \cong \mathbb{Z}^l \arrow[r, "\sum f_*"] & \tilde{H}_n(S^n; K) \cong \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda(\beta(\alpha([M]))) = \underbrace{(1, ..., 1)}_{l}$ y $\sum f_*(\underbrace{(1, ..., 1)}_{l}) = \sum \sigma_i$ con $\sigma_i \in \{\pm 1\}$, lo cual implica que $f_*([M]) = deg(f)[N]$.

Teorema 4.4.3. *Sea ξ un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave de rango n sobre una variedad suave cerrada K_b-orientable M de dimensión m. Sea $h : \varepsilon^{n-i+1} \longrightarrow \xi$ un morfismo genérico de haces del haz producto ε^{n-i+1} de rango $n-i+1$ a ξ, Entonces las clases $Cl_i(\xi) = \hat{\phi}([\tilde{Z}(h)]) \in H^{bi}(M; K_b)$ satisfacen los axiomas A_1, A_2, A_3' y A_4' donde $[\tilde{Z}(h)]$ es la clase fundamental de $\tilde{Z}(h)$ y $\hat{\phi}$ es la composición del isomorfismo de dualidad de Poincaré con el morfismo inducido en homología por la proyección en el primer factor $\phi : \tilde{Z}(h) \longrightarrow M$.*

$$\begin{tikzcd} H_{m-bi}(\tilde{Z}(h); K_b) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[dr, "\hat{\phi}"'] & H_{m-bi}(M; K_b) \arrow[d, "D_M^{-1}", "\cong"'] \\ & H^{bi}(M; K_b) \end{tikzcd}$$

Demostración. $\mathbf{A_1}$) Gracias a la observación anterior acerca del grado de una función suave entre dos variedades cerradas R-orientables de la misma dimensión, podemos proceder a checar la compatibilidad del primer axioma.

Por la Proposición 4.3.3, $\dim \tilde{Z}(h) = m - bi$ por lo que claramente $Cl_i(\xi) \in H^{bi}(M; K_b)$. Si $i = 0$ entonces $\phi(\tilde{Z}(h)) = \bar{Z}_1(h)$, ya que si tomamos $(x, L) \in \tilde{Z}(h)$ tal que $\phi(x, L) \notin \bar{Z}_1(h)$, tenemos que $\dim \ker h_x = 0$ entonces $\dim \operatorname{im} h_x = n+1$, lo cual es una contradicción. Así obtenemos que $\phi(\tilde{Z}(h)) = M = \bar{Z}_1(h)$; por la Proposición 4.3.5 todo $x \in Z_1(h)$ es valor regular de ϕ pues $\phi(\tilde{Z}^\circ(h)) \cong Z_1(h)$ con $\tilde{Z}^\circ(h)$ abierto en $\tilde{Z}(h)$.

Ahora, ya que todo $x \in Z_1(h)$ tiene una sola preimagen, se puede tomar la orientación adecuada en $\tilde{Z}(h)$ tal que ϕ preserve la orientación en cada abierto U_i anteriormente descrito; por lo cual $deg(f) = 1$ y por consiguiente $\phi_*([\tilde{Z}(h)]) = deg(f)[M] = [M]$. Por lo tanto $Cl_0(\xi) = D_M^{-1}\phi_*([\tilde{Z}(h)]) = 1$.

La construcción no tiene sentido para $i > n$, asi que declaramos que $Cl_i(\xi) = 0 \in H^{bi}(M; K_b)$ para $i > n$.

$\mathbf{A_2}$) Sea $f : M' \longrightarrow M$ una función suave y consideremos el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} f^*\xi \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \xi \arrow[d, "p"] \\ M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Sea $h : \varepsilon_M^{n-i+1} \longrightarrow \xi$ un morfismo genérico de haces. Reemplazando, si es necesario, a f por un mapeo homotópico, podemos suponer que $f \pitchfork Z_j(h)$ para toda j.

Consideremos el haz de morfismos $\pi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi) \longrightarrow M$, debido a que $f^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(f^*\varepsilon_M^{n-i-1}, f^*\xi)$ y $f^*\varepsilon_M^{n-i-1} \cong \varepsilon_{M'}^{n-i-1}$, obtenemos el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi) \arrow[d, "\pi"'] \\
M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[u, bend right, "s_h"']
\end{tikzcd}$$

donde s_h es la sección definida por h y $\tilde{f}$ está dada por la composición

$$\begin{tikzcd}
f^*\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi) \arrow[r, "\pi_2"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\tilde{f}"] &
\end{tikzcd}$$

donde α denota el ismorfismo definido en fibras como $\{p\}\times h' \mapsto \{p\}\times\alpha'_p(h')$ con $\alpha'_p : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}((\varepsilon_{M'}^{n-i+1})_p, (f^*\xi)_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}((\varepsilon_M^{n-i+1})_{f(p)}, \xi_{f(p)})$ el isomomorfismo natural restringido en fibras. Gracias a que la proyección en el segundo factor π_2 restringida en fibras es un isomorfismo, tenemos que $\tilde{f}$ es un isomorfismo.

Sea τ el morfismo de haces tautológico sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi)$ y sea τ' el morfismo de haces tautológico sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi)$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^{-1}(Z_j(\tau)) &= \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi) : \tilde{f}(v) \in Z_j(\tau)\} \\
&= \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi) : \dim\ker \tilde{f}(v)_{\pi(\tilde{f}(v))} = j\} \\
&= \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi) : \dim\ker \tilde{f}(v)_{f(\pi'(v))} = j\} \\
&= \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi) : \dim\ker v_{\pi'(v)} = j\} \\
&= Z_j(\tau')
\end{aligned}$$

Consideremos la sección del haz $\pi' : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi) \longrightarrow M'$, $s_g : M' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^*\xi)$ dada por $s_g(y) = (y, \tilde{f}_y^{-1}(s_h(f(y))))$ la cual está bien definida pues $\tilde{f}_y$ es un isomorfismo. Notemos que la sección s_g define un morfismo $g : \varepsilon_{M'}^{n-i+1} \longrightarrow f^*\xi$ el cual está definido en fibras como $g_y = \tilde{f}_y^{-1}(s_h(f(y)))$. Veamos que el morfismo g es genérico, para esto basta checar que $s_g \pitchfork Z_j(\tau')$ para toda j. Debido a que h es genérico $s_h \pitchfork Z_j(\tau)$ para toda j; por lo tanto, ya que $Z_j(h) = s_h^{-1}(Z_j(\tau))$ y $f \pitchfork Z_j(h)$ para toda j tenemos que $s_h \circ f \pitchfork Z_j(\tau)$ para toda j y de la conmutatividad del diagrama $\tilde{f} \circ s_g \pitchfork Z_j(\tau)$, lo cual es equivalente a que $s_g \pitchfork Z_j(\tau')$, pues $\tilde{f} \pitchfork Z_j(\tau)$ y $\tilde{f}^{-1}(Z_j(\tau)) = Z_j(\tau')$ como se mostró anteriormente. Por lo tanto g es genérico, lo que implica $\tilde{Z}(g)$ es una variedad suave K_b-orientable.

Por otro lado, denotemos por $\phi : \tilde{Z}(h) \longrightarrow M$ y $\phi' : \tilde{Z}(g) \longrightarrow M'$ a las respectivas proyecciones en el primer factor y para cada $x \in M$ definamos $\Lambda_x := \{L \in \mathbb{F}P^{n-i} : L \subset \ker h_x\}$ y $\Lambda := \coprod_{x\in M} \Lambda_x$. Denotemos por $\eta := \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi) \times \Lambda$, donde η es un haz fibrado sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi)$ con respecto a la proyección en el primer factor. Observemos que el haz inducido por el producto fibrado de η a lo largo de la restricción de s_h sobre $Z_j(h)$, da lugar a un haz fibrado $\phi^* : s_h^*(\eta) \longrightarrow Z_j(h)$ cuya fibra está dada por Λ_x para cada $x \in Z_j(h)$. Claramente $\phi^{-1}(Z_j(h)) = s_h^*(\eta)$, por lo que concluimos que $\phi : \phi^{-1}(Z_j(h)) \longrightarrow Z_j(h)$ es una sumersión; esto es $d\phi_{(x,L)}(T_{(x,L)}\phi^{-1}(Z_j(h))) = T_x Z_j(h)$. Ahora, ya que $d\phi_{(x,L)}(T_{(x,L)}\phi^{-1}(Z_j(h))) \subset d\phi_{(x.L)}(T_{(x,L)}\tilde{Z}(h))$ y $f \overline{\pitchfork} Z_j(h)$, tenemos que $df_p(T_pM') + d\phi_{(f(p),L)}(T_{(f(p),L)}\tilde{Z}(h)) = T_{f(p)}M$, lo que significa que $f \overline{\pitchfork} \phi$.

De esta manera tiene sentido hablar de la intersección transversal de f y g la cual está dada por

$$\begin{aligned}
M' \overline{\pitchfork} \tilde{Z}(h) &= \{(y,x,L) \in M' \times M' \times \mathbb{F}P^{n-i} : f(y) = x, \{x\} \times L \subset \ker h_x\} \\
&= \{(y,x,L) \in M' \times M' \times \mathbb{F}P^{n-i} : \{f(y)\} \times L \subset \ker h_{f(y)}\} \\
&\cong \{(y,L) \in M' \times \mathbb{F}P^{n-i} : \{y\} \times L \subset \ker g_y\} \\
&= \tilde{Z}(g)
\end{aligned}$$

Así, obtenemos el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Z}(g) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \tilde{Z}(h) \arrow[d, "\phi"] \\
M' \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

el cual cumple con las hipótesis de la Proposición 4.4.2. Por lo tanto obtenemos $(-1)^{bim}\phi'_*([\tilde{Z}(g)]) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ \phi_*([\tilde{Z}(h)])$.

Para el caso real $b = 1$, usamos coeficientes sobre $\mathbb{Z}_2$, por lo que el signo no es de importancia. Para el caso complejo $b = 2$, el signo resulta positivo, por lo tanto

$$Cl_i(f^*(\xi)) = D_{M'}^{-1} \circ \phi'([\tilde{Z}(g)]) = f^* \circ D_M^{-1} \circ \phi_*([\tilde{Z}(h)]) = f^*(Cl_i(\xi))$$

$\mathbf{A_3'}$) Sea $h : \varepsilon^{n-i+1} \longrightarrow \xi$ un morfismo de haces genérico y tomemos en cuenta el morfismo de haces $h \oplus id_{\varepsilon^k} : \varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k \longrightarrow \xi \oplus \varepsilon^k$, donde ε^k denota el haz producto de rango k y veamos que éste es un morfismo genérico.

Consideremos el morfismo de haces

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \arrow[rr, "\hat{f}"] \arrow[dr, "\pi"] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k) \arrow[dl, "\pi''"'] \\
& M \arrow[ul, bend left, "s_h"] \arrow[ur, bend right, "s_{h\oplus id_{\varepsilon^k}}"'] &
\end{tikzcd}$$

dado por $\hat{f}(v) = v \oplus id_{\varepsilon^k}$. Sean τ y τ'' los morfismos de haces tautológicos sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k)$ respectivamente. Denotemos por $S_j = Z_j(\tau)$ y $S''_j = Z_j(\tau'')$; observemos que

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{-1}(S''_j) &= \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) : \dim\ker(v \oplus id_{\varepsilon^k}) = j\} \\
&= \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) : \dim\ker v = j\} \\
&= S_j
\end{aligned}$$

Sea $s_{h\oplus id_{\varepsilon^k}}$ la sección de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k)$ correspondiente al morfismo $h \oplus id_{\varepsilon^k}$, debido a que $s_{h\oplus id_{\varepsilon^k}} = \hat{f} \circ s_h$, para mostrar que $s_{h\oplus id_{\varepsilon^k}}$ es transversal a S''_j para todo j, es suficiente mostrar que $\hat{f} \pitchfork S''_j$ pues por lo anterior y por el hecho de que $s_h \pitchfork S_j$ para toda j al ser h un morfismo genérico, se tendría que $(\hat{f} \circ s_h) \pitchfork S''_j$ si y solo si $s_h \pitchfork \hat{f}^{-1}(S''_j)$.

Para checar lo anterior, tengamos en cuenta las siguiente igualdades

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) = b^2(n-i+1)n + m \\
&\dim S_j = b^2(n-i+1)n + m - bj(n-k+j) \\
&\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k) = b^2(n-i+1+k)(n+k) + m \\
&\dim S''_j = b^2(n-i+1+k)(n+k) + m - bj(n-k+j).
\end{aligned}$$

Sea $v \in S_j$ y $w = \hat{f}(v)$, para checar la transversalidad necesitamos probar la siguiente igualdad

$$\dim\{d_v\hat{f}(T_v \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)) \oplus T_w S''_j\} = \dim\{T_w \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k)\}$$

Debido a que $\hat{f} : S_j \longrightarrow S''_j$ es una inmersión, pues la matriz asociada a su derivada sólo contiene un bloque correspondiente a v, tenemos que $d\hat{f}_v(T_v S_j) \cong T_v S_j$ y $d\hat{f}_v(T_v S_j) \subset d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi))$, por lo que $d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)) \cap T_w S''_j \cong T_v S_j$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\dim\{d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)) + T_w S''_j\} &= \dim\{d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi))\} \\
&\quad + \dim T_w S''_j - \dim T_v S_j \\
&= b^2(n-i+1+k)(n+k) + m \\
&= \dim T_w \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k),
\end{aligned}$$

por lo tanto $h \oplus id_{\varepsilon^k}$ es un morfismo genérico.

Por la proposición 4.3.3, $\tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k})$ es una subvariedad compacta de $M \times \mathbb{F}P^{n-i+k}$ de dimensión $m - bi$. Sea $\check{\phi} : \tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k}) \longrightarrow M$ la proyección en el primer factor. Sea $\Phi : M \times \mathbb{F}P^{n-i} \longrightarrow M \times \mathbb{F}P^{n-i+k}$ la inclusión dada por $\Phi((x, [x_1, ..., x_{n-i+1}])) = (x, [x_1, ..., x_{n-i+1}, \underbrace{0, ..., 0}_{\mathrm{k}}])$.

Claramente tenemos $\Phi(\tilde{Z}(h)) \cong \tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k})$ y $Z_j(h \oplus id_{\varepsilon^k}) = Z_j(h)$, por lo que $\bar{Z}_1(h \oplus id_{\varepsilon^k}) = \bar{Z}_1(h)$. Así el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Z}(h) \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
\tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k}) \arrow[r, "\check{\phi}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Así $\phi_*([\tilde{Z}(h)]) = \check{\phi}_*([\tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k})])$; por lo tanto $Cl_i(\xi) = Cl_i(\xi \oplus \varepsilon^k)$.

$\mathbf{A_4'}$) Consideremos ζ^n el n-haz canónico sobre $\mathbb{F}P^n$ y ε^1 el haz producto de rango 1 sobre $\mathbb{F}P^n$. Sea $h : \varepsilon^1 \longrightarrow \zeta^n$ el morfismo de haces sobre $\mathbb{F}P^n$ dado por $h([x_1, ..., x_{n+1}], t) = [x_1, ..., x_{n+1}, tx_1, ..., tx_n]$.

Observemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n) \cong \zeta^n$ pues en cada fibra tenemos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}, \zeta^n_{[x]}) \cong \zeta^n_{[x]}$ bajo el isomorfismo $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}, \zeta^n_{[x]}) \longrightarrow \zeta^n_{[x]}$ dado por $\psi(f) = f(1)$; por lo que la sección s_h correspondiente a h, está dada por

$$s_h([x_1, ..., x_{n+1}]) = [x_1, ..., x_{n+1}, x_1, ..., x_n].$$

Sea τ el morfismo tautológico sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$, notemos que el único subconjunto de singularidades es $S_1 = Z_1(\tau)$ y este es igual a la imagen de la sección cero, pues para todo $v \in Z_1(\tau)$ y $t \in \ker v$ se tiene que $v(t) = 0$ de donde obtenemos que $v(1) = 0$.

Sea $x_0 = [0, ..., 0, 1] \in \mathbb{F}P^n$ y sea $R := s_h(\mathbb{F}P^n) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$, claramente tenemos que $R \cap S_1 = [x_0, \bar{0}]$ pues para cada $[\tilde{x}] \in \mathbb{F}P^n$ la fibra sobre $[\tilde{x}]$, $\zeta^n_{[\tilde{x}]} = \{[\tilde{x}, w] : w \in \mathbb{F}\}$, tiene al elemento $[\tilde{x}, \bar{0}]$ como el cero del espacio vectorial. Veamos que $R \pitchfork S_1$, pero antes hagamos énfasis en la siguiente notación: sea $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1}$ y $\tilde{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{F}^n$, y escribiremos $x = (\tilde{x}, x_{n+1})$.

Debido a que $S^{v(1)} \curvearrowright S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n$ por $\lambda \cdot (x, v) = (\lambda x, \lambda v)$, tenemos que bajo el isomorfismo de haces $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}, \zeta^n) \longrightarrow \zeta^n = S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n / S^{v(1)}$,

$$S_1 \cong \{(x, y) \in S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n : y = \bar{0}\}/S^{v(1)},$$
$$R \cong \{(x, y) \in S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n : y = \tilde{x}\}/S^{v(1)}.$$

Así, ya que la acción es libre tenemos que

$$T_{[x,y]} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n) = T_{(x,y)} S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n / T_{(x,y)} Orb(x, y),$$

donde $Orb(x, y)$ denota la orbita de la acción. Siguiente el mismo razonamiento para S_1 y R, obtenemos que

$$T_{[x,y]} S_1 = T_{(x,y)} \{(v, w) \in S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n : w = \bar{0}\}/T_{(x,y)} Orb(x, y),$$
$$T_{[x,y]} R = T_{(x,y)} \{(v, w) \in S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n : w = \tilde{v}\}/T_{(x,y)} Orb(x, y),$$

por lo que procedemos a calcular $T_{(x,y)}Orb(x,y)$ para la acción $\lambda \cdot (x,v) = (\lambda x, \lambda v)$.

Para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tenemos que $b = 1$, por lo que $S^{v(n+1)} = S^n$ y $S^{v(1)} = S^0$. Así, dada la acción anteriormente descrita, obtenemos que para todo $(x,y) \in S^n \times \mathbb{R}^n$ la orbita está dada por $Orb(x,y) = \{(x,y), -(x,y)\}$, por lo que $T_{(x,y)}Orb(x,y)$ es el espacio vectorial trivial.

Por lo que obtenemos las siguientes expresiones para el caso real:

$$\begin{aligned} T_{[x_0,\bar{0}]} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\varepsilon^1, \zeta^n) &= \{(v,w) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n : v = (\tilde{v}, 0)\} \\ T_{[x_0,\bar{0}]} S_1 &= \{(v,w) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n : v = (\tilde{v}, 0), w = \bar{0}\} \\ T_{[x_0,\bar{0}]} R &= \{(v,w) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n : v = (w, 0)\}. \end{aligned}$$

De esta manera podemos reescribir $((\tilde{v},0),w) \in T_{[x_0,\bar{0}]} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$ como

$$((\tilde{v},0),w) = ((w,0),w) + ((\tilde{v}-w,0),0),$$

donde $((w,0),w) \in T_{[x_0,\bar{0}]}R$ y $((\tilde{v}-w,0),0) \in T_{[x_0,\bar{0}]}S_1$, por lo tanto $R \pitchfork S_1$.

Para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ tenemos que $b = 2$, entonces $S^{v(n+1)} = S^{2n+1}$ y $S^{v(1)} = S^1$. Así, para todo $(x,y) \in S^{2n+1} \times \mathbb{C}$ tenemos que $Orb(x,y) = \{\lambda \cdot (x,y) : \lambda \in S^1\}$; de esta manera para calcular el espacio tangente en el punto (x,y) consideremos la curva $\gamma : (-\pi,\pi) \longrightarrow Orb(x,y)$ dada por $\gamma(\theta) = (e^{i\theta}x, e^{i\theta}y)$, observemos que $\gamma(0) = (x,y)$ y $\gamma'(\theta)_{\downharpoonright 0} = (ix, iy)$, por lo que obtenemos que

$$T_{(x,y)}Orb(x,y) = \langle (ix, iy) \rangle$$

donde $\langle (ix,iy) \rangle$ denota el espacio vectorial generado por (ix, iy).

Debido a que la condición $x_0 \cdot v = 0$ implica que la $(n+1)$-ésima entrada de v sea puramente imaginaria, tenemos que para el caso complejo

$$\begin{aligned} T_{[x_0,\bar{0}]} \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n) &= \{(v,w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n : v = (\tilde{v}, it)\} / \langle (0,...,0,it,\bar{0}) \rangle, \\ T_{[x_0,\bar{0}]} S_1 &= \{(v,w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n : v = (\tilde{v}, it), w = \bar{0}\} / \langle (0,...,0,it,\bar{0}) \rangle, \\ T_{[x_0,\bar{0}]} R &= \{(v,w) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n : v = (w, it)\} / \langle (0,...,0,it,\bar{0}) \rangle. \end{aligned}$$

De está manera podemos reescribir $[(\tilde{v},it),w] \in T_{[x_0,\bar{0}]} \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$ de la siguiente manera

$$[((\tilde{v},it),w)] = [((w,\frac{it}{2}),w)] + [((\tilde{v}-w,\frac{it}{2}),\bar{0})]$$

donde $[((w,\frac{it}{2}),w)] \in T_{[x_0,\bar{0}]}R$ y $[((\tilde{v},\frac{it}{2}),\bar{0})] \in T_{[x_0,\bar{0}]}S_1$, por lo que concluimos que $R \pitchfork S_1$.

Retomando ambos casos; gracias a que $s_h : \mathbb{F}P^n \longrightarrow s_h(\mathbb{F}P^n)$ es un difeomorfismo, obtenemos que $ds_{h[x_0]}(T_{[x_0]}\mathbb{F}P^n) = T_{[x_0]}s_h(\mathbb{F}P^n)$, por lo que $s_h \pitchfork S_1$. Por lo tanto h es un morfismo genérico y $Z_1(h) = s_h^{-1}(Z_1(\tau)) = \{x_0\}$.

Ahora, ya que $\mathbb{F}P^0$ es un punto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1,\zeta)\times \mathbb{F}P^0 \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}\times Id"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1,\zeta) \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] \\ \mathbb{F}P^n \times \mathbb{F}P^0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, bend left, "\tilde{s}_h"] & \mathbb{F}P^n \arrow[u, bend right, "s_h"'] \end{tikzcd}$$

por lo que podemos identificar $\tilde{Z}(\tau)$ con $Z_1(\tau)$ y $\tilde{Z}(h)$ con $Z_1(h)$.

Consideremos el caso $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Tomemos en cuenta las orientaciones de R, S_1 y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1,\zeta)$ con el fin de determinar la orientación de $Z_1(h)$ y por lo tanto el signo de $[\tilde{Z}(h)]=[Z_1(h)]$.

Sea $\{e_1,...,e_{n+1}\}$ y $\{f_1,...,f_n\}$ las bases canónicas de $\mathbb{C}^{n+1}$ y $\mathbb{C}^n$ respectivamente, entonces bajo el encaje lineal dado por

$$\begin{aligned} T_{[x_0,\bar{0}]}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\varepsilon^1,\zeta^n) &\longrightarrow \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \\ (v,w) &\longmapsto (\tilde{v},w) \end{aligned}$$

tenemos que $\alpha := \{[(e_1,\bar{0})],...,[(e_n,\bar{0})],[(\bar{0},f_1),...,(\bar{0},f_n)]\}$ define una base para $T_{[x_0,\bar{0}]}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\varepsilon^1,\zeta^n)$, $\beta := \{[(e_1,\bar{0})],...,[(e_n,\bar{0})]\}$ define una base para $T_{[x_0,\bar{0}]}S_1$ y $\eta := \{[(e_1,f_1)],...,[(e_n,f_n)]\}$ define una base para $T_{[x_0,\bar{0}]}R$.

Por otro lado debido a que $s_h \pitchfork S_1$, una base para $T_{[x_0,\bar{0}]}R+T_{[x_0,\bar{0}]}S_1$ está dada por $\eta+\beta := \{[(e_1,f_1)],...,[(e_n,f_n)],[(e_1,\bar{0})],...,[(e_n,\bar{0})]\}$. Observemos que

$$sign(\eta+\beta)=sign(\beta)\cdot sign(\eta)$$

pues $\mathrm{cod}_{\mathbb{R}}\, S_1 = 2n$ y $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\varepsilon^1,\zeta^n)=4n$ lo cual implica que $\dim T_{[x_0,\bar{0}]}S_1 = 2n$.

Ahora, ya que la matriz real subyacente $\tilde{A}\in\mathbb{R}(2m,2m)$ de una matriz con entradas en los complejos $A\in\mathbb{C}(m,m)$ tiene determinante positivo, en particular tenemos que la matriz real subyacente asociada a la matriz cambio de base $T_\alpha^{\beta+\eta}$ tiene determiante positivo, por lo que

$$sign(\beta+\eta)=sign(\alpha).$$

De esta manera tenemos que $sign(\eta+\beta)=sign(\beta)$, donde concluimos que S_1 está orientada positivamente. Así, considerando el signo de S_1 y siguiendo el mismo argumento respecto a la matriz real subyacente de una matriz compleja, tenemos que s_h preserva la orientación y el complemento ortogonal de $T_{x_0}Z_1(h)$ en $T_{x_0}\mathbb{F}P^n$ tiene signo positivo [11, p.100], por lo que $Z_1(h)$ está orientada de manera positiva. Por lo tanto, el signo de $[\tilde{Z}(h)]=[Z_1(h)]$ es igual a uno.

En consecuencia, $Cl_n(\zeta^n)=\hat{\phi}([\tilde{Z}(h)])=g_n\in H^{2n}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$. Notemos que el signo de $[\tilde{Z}(h)]$ es siempre uno para el caso $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, pues la cohomología de $\mathbb{R}P^n$ se toma con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Por lo tanto concluimos que

$$Cl_n(\zeta^n)=g_n\in H^{bn}(\mathbb{F}P^n;K_b).$$

$\square$

4.5. Generalización.

Hasta el momento las clases $Cl_i(\xi)$ están definidas sólo para haces vectoriales suaves sobre variedades suaves. En esta sección extenderemos este concepto para cualquier haz vectorial numerable usando el hecho de que todo haz vectorial numerable es un producto fibrado del haz universal, y el haz universal está filtrado por haces vectoriales sobre variedades, para los cuales podemos aplicar la construcción de la sección anterior.

Consideremos $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+k}) = \{(l, v) \in G_n(\mathbb{F}^{n+k}) \times \mathbb{F}^{n+k} : v \in l\}$ el haz canonico sobre la variedad grassmaniana $G_n(\mathbb{F}^{n+k})$ de dimension bnk (conjunto de todo los planos n-dimensionales através del origen del espacio coordenado $\mathbb{F}^{n+k}$.

Las inclusiones $\mathbb{F}^{n+l} \subset \mathbb{F}^{n+l+1} \subset ...$, dan lugar a inclusiones $G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \subset G_n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \subset ...$ y $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \subset \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \subset ....$ Denotemos por

$$G_n := G_n(\mathbb{F}^\infty) = \bigcup_l G_n(\mathbb{F}^{n+l}); \qquad \gamma^n := \gamma^n(\mathbb{F}^\infty) = \bigcup_l \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})$$

con las topologias de límite directo: un subconjunto de G_n respectivamente γ^n es abierto (cerrado) si y solo si, su intersección con $G_n(\mathbb{F}^{n+l})$ respectivamente $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})$ es abierto (cerrado) como subconjunto de $G_n(\mathbb{F}^{n+l})$ respectivamente $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})$.

Teniendo en cuenta para cada l las inclusiones $i_l : G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \hookrightarrow G_n$, es posible definir el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H^{bi}(G_n; K_b) & \xrightarrow{\lambda} & \varprojlim H^{bi}(G_n(\mathbb{F}^{n+l}); K_b) \\ \omega & \longmapsto & ((i_0)^*(\omega), ..., (i_k)^*(\omega)) \end{array}$$

el cual se obtiene debido a las siguientes condiciones, teniendo en cuenta la estructura celular de $G_n(\mathbb{F}^{n+l})$. Para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se sigue de [4, Proposicion 3F.5]. Para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ya que $\dim H^{2i}(G_n(\mathbb{C}^{n+l}); \mathbb{Z}) < \infty$ pues tiene un generador por cada celda, y los grupos finitamente generados satisfacen la condición de cadena descendente, tenemos que el sistema inverso inducido por las inclusiones en cohomología $\{H^{2i}(G_n(\mathbb{C}^{n+l}); \mathbb{Z})\}_l$ cumple la condición de Mittag Leffler [12, Def.7.74]. Así por [12, Proposición 7.66 y Teorema 7.75] tenemos el resultado.

Sea $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})$ el haz canónico sobre $G_n(\mathbb{F}^{n+l})$ y sea γ^n el haz universal sobre G_n. Tenemos el siguiente producto fibrado para cada l

$$\begin{tikzcd} \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \arrow[d] \\ G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \arrow[r, hook, "\iota"] & G_n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \end{tikzcd}$$

entonces por el axioma A_2, tenemos que $\iota^*(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}))) = Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))$. Por lo tanto $(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n)), ..., Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))) \in \varprojlim H^{bi}(G_n(\mathbb{F}^{n+l}); K_b)$, con lo cual podemos definir $Cl_i(\gamma^n) := \lambda^{-1}((Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n)), ..., Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))))$, que claramente es un elemento en $H^{bi}(G_n; K_b)$.

Debido al producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \gamma^n \arrow[d] \\ G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \arrow[r, hook, "i_l"] & G_n \end{tikzcd}$$

obtenemos

$$i_l^*(Cl_i(\gamma^n)) = Cl_i(i_l^*(\gamma^n)) = Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})) \qquad \forall l \geq 0 \tag{4.4}$$

Notemos que para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ya que $G_n(\mathbb{C}^{n+l})$ es una variedad compleja, ésta tiene una orientación natural y por lo tanto las clases $Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))$ están bien definidas con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tenemos el resultado de que toda variedad es $\mathbb{Z}_2$-orientable.

Para lo siguiente, debemos tener en cuenta que para cada $\mathbb{F}$-haz vectorial de rango n sobre un espacio paracompacto X existe una función $\psi_\xi : X \longrightarrow G_n$ conocida la como función clasificante, con la propiedad de que $\psi_\xi^*(\gamma^n) = \xi$.

Proposición 4.5.1. *Sea ξ un $\mathbb{F}$-haz vectorial de rango n sobre una variedad suave compacta K_b-orientable M. Sea $\psi_\xi : M \longrightarrow G_n$ la función clasificante asociada al haz ξ. Entonces $Cl_i(\xi) = \psi_\xi^*(Cl_i(\gamma^n))$.*

Demostración. Hagamos énfasis en la existencia de la función ψ_ξ, para esto basta checar que toda variedad suave es un espacio paracompacto; ya que toda variedad suave es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces es un espacio regular y debido a que también es un espacio segundo numerable tenemos por el teorema de metrización de Urysohn que es un espacio metrizable, así por el teorema de Stone tenemos toda variedad suave es un espacio paracompacto.

Dentro de esta prueba utilizaremos el resultado [8, Lema 5.3], el cual menciona que para l suficientemente grande existe $\varrho_l : M \longrightarrow G_n(\mathbb{F}^{n+l})$ tal que $\xi = \varrho_l^*(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))$.

Por el axioma A_2 tenemos $Cl_i(\xi) = \varrho_l^*(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})))$; por otro lado debido a que $\xi = (i_l \circ \varrho_l)^*(\gamma^n)$, donde $i_l : G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \longrightarrow G_n$ es la inclusión, tenemos que ψ_ξ y $i_l \circ \varrho_l$ son funciones homotópicas [8, Teorema 5.7]. Por lo tanto haciendo uso de 4.4 y del axioma de homotopía obtenemos

$$\begin{aligned}\psi_\xi^*(Cl_i(\gamma^n)) &= (i_l \circ \varrho_l)^*(Cl_i(\gamma^n)) \\ &= \varrho_l^*(i_l^*(Cl_i(\gamma^n))) \\ &= \varrho_l^*(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))) \\ &= Cl_i(\xi)\end{aligned}$$

□

Ahora, haremos uso de la caracterización dada por la proposición anterior para generalizar las clases $Cl_i(\xi)$ a cualquier haz vectorial numerable sobre cualquier espacio base, para esto recordemos las siguientes definiciones.

Definición 4.5.2. *Una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ de un espacio B es llamada numerable si existe una partición de la unidad $\{\phi_i\}_{i\in\Lambda}$ tal que el soporte de ϕ_i está contenido en U_i para cada $i \in \Lambda$.*

Definición 4.5.3. *Un $\mathbb{F}$-haz vectorial sobre un espacio B es numerable si existe una cubierta numerable $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ de B tal que $\xi_{\downharpoonright U_i}$ es trivial para cada $i \in \Lambda$.*

Por [2, Teorema 12.2 y 12.4] todo $\mathbb{F}$-haz vectorial numerable ξ de rango n tiene una función clasificante ($\xi \cong f_\xi^*(\gamma)$), la cual es única salvo homotopía. Teniendo en cuenta lo anterior, procederemos a extender de manera natural la noción de las clases $Cl_i(\xi)$ para cualquier $\mathbb{F}$-haz vectorial numerable.

Teorema 4.5.4. *Sea ξ un $\mathbb{F}$-haz vectorial numerable de rango n sobre un espacio B. Sea $\psi_\xi : B \longrightarrow G_n$ la función clasificante. Definamos $Cl_i(\xi) := \psi_\xi^*(Cl_i(\gamma^n))$. Entonces $Cl_i(\xi)$ satisface A_1, A_2, A_3' y A_4'.*

Demostración. Probaremos que $Cl_i(\xi)$ satisfacen A_1, A_2 y A_3' pues por la proposición 4.5.1 tenemos que la verificación de A_4' es la misma que la del teorema 4.4.3.

A_1) Por definición observemos que $Cl_i(\xi) \in H^{bi}(B; K_b)$. Si $i = 0$ por el teorema 4.4.3-A_1), $Cl_0(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})) = 1$ para toda l. Debido a que

$$Cl_0(\gamma^n) = \lambda^{-1}((Cl_0(\gamma^n(\mathbb{F}^n))), ..., (Cl_0(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))))$$

tenemos que $Cl_0(\gamma^n) = 1$. Por lo tanto $\psi_\xi^*(Cl_0(\gamma^n)) = 1 \in H^0(B; K_b)$.

Analogamente si $i > n$ tenemos que $Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})) = 0$ para toda l, entonces $Cl_i(\gamma^n) = 0$. Por lo tanto $Cl_i(\xi) = 0 \in H^{bi}(B; K_b)$.

A_2) Sea $f : B' \longrightarrow B$ una función continua. Sea ψ_ξ la función clasificante de ξ, observemos que como función clasificante para $f^*\xi$ podemos considerar la composición $\psi_\xi \circ f$, la cual es única salvo homotopía. Así, obtenemos que $(\psi_\xi \circ f)^*(Cl_i(\gamma^n)) = f^*(\psi_\xi^*(Cl_i(\gamma^n)))$; por lo tanto $Cl_i(f^*\xi) = f^*(Cl_i(\xi))$.

A_3) Consideremos $\psi_\xi : B \longrightarrow G_n$, $\psi_{\xi\oplus\varepsilon_B^k} : B \longrightarrow G_{n+k}$ y $l_n : G_n \longrightarrow G_{n+k}$ las funciones clasificantes de los haces ξ, $\xi \oplus \varepsilon_B^k$ y $\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k$ respectivamente, donde ε_B^k y $\varepsilon_{G_n}^k$ denotan los haces producto de rango k sobre los espacios B y G_n respectivamente.

Entonces

$$\begin{aligned}\psi_\xi^*(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k) &= \psi_\xi^*(\gamma^n) \oplus \psi_\xi^*(\varepsilon_{G_n}^k)\\ &= \xi \oplus \varepsilon_B^k\end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}(l_n \circ \psi_\xi)^*(\gamma^{n+k}) &= \psi_\xi^*(\gamma^n \oplus \varepsilon_B^k)\\ &= \xi \oplus \varepsilon_B^k\\ &= \psi_{\xi\oplus\varepsilon_B^k}(\gamma^{n+k})\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\psi_\xi^*(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \gamma^{n+k} \arrow[d] \\
B \arrow[r, "\psi_\xi"] & G_n \arrow[r, "l_n"] & G_{n+k}
\end{tikzcd}$$

de donde obtenemos $(l_n \circ \psi_\xi) \simeq \psi_{\xi\oplus\varepsilon_B^k}$. Así obtenemos la siguiente igualdad

$$Cl_i(\xi \oplus \varepsilon_B^k) = \psi_{\xi\oplus\varepsilon_B^k}^*(Cl_i(\gamma^{n+k})) = \psi_\xi^*(l_n^*(Cl_i(\gamma^{n+k}))) = \psi_\xi^*(Cl_i(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k)).$$

Por otro lado $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k \subset \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l+1})}^k \subset ...$, entonces $\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k = \bigcup_l (\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k)$, por lo que $\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k$ lo podemos ver como un filtrado de haces vectoriales $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k$ los cuales cumplen que $\iota^*(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l+1})}^k) = \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k$.

$$\begin{tikzcd}
\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l+1})}^k \arrow[d] \\
G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \arrow[r, hook, "\iota"] & G_n(\mathbb{F}^{n+l+1})
\end{tikzcd}$$

En consecuencia obtenemos

$$\iota^*(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l+1})}^k)) = Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k)$$

por lo tanto

$$(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^n)}^k), ..., Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k)) \in \varprojlim H^{bi}(G_n(\mathbb{F}^{n+l}); K_b)$$

Ahora, dada la inclusión $i_l : G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \hookrightarrow G_n$ obtenemos $i_l^*(\gamma^n \oplus \varepsilon^k_{G_n}) = \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon^k_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}$ y por consiguiente $(l_n \circ i_l)^*(\gamma^{n+k}) = \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon^k_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}$. Así, por la proposición 4.5.1

$$Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon^k_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}) = i_l^*(l_n^*(Cl_i(\gamma^{n+k}))) = i_l^*(Cl_i(\gamma^n \oplus \varepsilon^k_{G_n}))$$

pues además por la observación anterior $l_n \circ i_l \simeq \psi_{\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon^k_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}}$.

$$\begin{tikzcd}
\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon^k_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \gamma^n \oplus \varepsilon^k_{G_n} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \gamma^{n+k} \arrow[d] \\
G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \arrow[r, hook, "i_l"] & G_n \arrow[r, "l_n"] & G_{n+k}
\end{tikzcd}$$

Entonces por el teorema 4.4.3 A_3'

$$\begin{aligned}
Cl_i(\gamma^n \oplus \varepsilon^k_{G_n}) &= \lambda^{-1}(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n) \oplus \varepsilon^k_{G_n(\mathbb{F}^n)}), ..., Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon^k_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})})) \\
&= \lambda^{-1}(Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n)), ..., Cl_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})) \\
&= Cl_i(\gamma^n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Cl_i(\xi \oplus \varepsilon^k_B) &= \psi_\xi^*(Cl_i(\gamma^n \oplus \varepsilon^k_{G_n})) \\
&= \psi_\xi^*(Cl_i(\gamma^n)) \\
&= Cl_i(\xi).
\end{aligned}$$

□

4.6. Unicidad.

Ahora probaremos que los axiomas A_1, A_2, A_3' y A_4' caracterizan las clases $Cl_i(\xi)$ de manera única.

Lema 4.6.1. *Sea $p : \gamma^k \longrightarrow G_k$ el haz universal sobre G_k. Sea p_0 la restricción de p al subespacio $E(\gamma^k)_0$ de los vectores no cero del espacio total $E(\gamma^k)$. Entonces $p_0^*(\gamma^k) = \eta^{k-1} \oplus \varepsilon^1$ y $Cl_k(p_0^*(\gamma^k)) = 0$ donde η^{k-1} denota un haz de rango $k-1$ sobre $E(\gamma^k)_0$.*

Demostración. Notemos

$$\begin{aligned}
p_0^*(\gamma^k) &= \{((l, w), (h, v)) \in \gamma^k \times E(\gamma^k)_0 : l = h\} \\
&= \{(l, v, w) \in G_k \times \mathbb{F}^\infty \times \mathbb{F}^\infty : w, v \in l, v \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Definamos la función
$$\begin{array}{ccc} E(\gamma^k)_0 & \xrightarrow{s} & p_0^*\gamma^k \\ (l,v) & \longmapsto & (l,v,v) \end{array}$$
la cual es una sección global que no se anula, así la sección define un subhaz de lineas $s(E(\gamma^k)_0) = \varepsilon_1 \subset p_0^*(\gamma^k)$, el cual es isomorfo al haz trivial de rango 1. Ahora usando el hecho de que $\mathbb{F}^n$ tiene definido un producto interior natural para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbb{F}^\infty = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}^n$ tiene definida una métrica riemanniana, así $G_k \times \mathbb{F}^\infty$ tiene una métrica riemanniana canónica.

Por lo tanto γ^k tiene una métrica riemanniana canonica definida por la restricción. De esta manera podemos considerar el producto fibrado de ésta métrica sobre $p_0^*(\gamma^k)$, por lo que definimos η^{k-1} como el complemento ortogonal de ε^1 respecto a la métrica en $p_0^*(\gamma^k)$ descrita anteriormente.

De esta manera, tenemos que $p_0^*(\gamma^k) = \eta^{k-1} \oplus \varepsilon^1$. Entonces por el axioma A_3' tenemos que $Cl_k(p_0^*(\gamma^k)) = Cl_k(\eta^{k-1} \oplus \varepsilon^1) = Cl_k(\eta^{k-1}) = 0$.

□

Teorema 4.6.2. *Sea ξ un $\mathbb{F}$-haz vectorial numerable de rango n sobre un espacio topológico B. Entonces $Cl_k(\xi) = cl_k(\xi)$ para toda k.*

Demostración. Ya que ambos conceptos cumplen cumplen el axioma A_1, suponemos que $k \leq n$.

Sean $\psi_\xi : B \longrightarrow G_n$ y $l_k : G_k \longrightarrow G_n$ las funciones clasificantes de ξ y $\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}$ respectivamente . Veamos que los axiomas A_2 y A_3 implican A_3'.

Sea ε^k el haz producto de rango k sobre B, entonces obtenemos de manera natural el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \varepsilon^k \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \{x\} \times \mathbb{F}^k \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f"'] & \{x\} \end{tikzcd}$$

donde denotaremos por $\eta = \{x\} \times \mathbb{F}^k$; así por el axioma A_2 tenemos que $cl_i(\varepsilon^k) = f^*(cl_i(\eta)) = 0$ para toda $i > 0$, pues f^* es el morfismo inducido por la función constante en x, lo cual implica que es el morfismo cero.

Ahora, por el axioma A_3 obtenemos

$$\begin{aligned} cl_i(\xi \oplus \varepsilon^k) &= \sum_{j=0}^{i} cl_j(\xi) \smile cl_{i-j}(\varepsilon^k) \\ &= cl_i(\xi), \end{aligned}$$

lo cual prueba que las clases $cl_i(\_)$ cumplen el axioma A_3'.

Así, obtenemos que

$$l_k^*(cl_i(\gamma^n)) = cl_i(l_k^*(\gamma^n)) = cl_i(\gamma \oplus \varepsilon^{n-k}) = cl_i(\gamma^k) \tag{4.5}$$

Por otro lado, por lo axiomas A_2 y A_3' tenemos que para $0 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} l_k^*(Cl_i(\gamma^n)) &= Cl_i(l_k^*(\gamma^n)) \\ &= Cl_i(\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}) \\ &= Cl_i(\gamma^k). \end{aligned}$$

Por el lema 4.6.1 $p_0^*(Cl_k(\gamma^k)) = 0$; haciendo uso de la sucesión exacta de Gysin [8, Teorema 12.2] para el haz $p_0^*(\gamma^k)$

$$H^0(G_k; K_b) \xrightarrow{\smile cl_k(\gamma^k)} H^{bk}(G_k; K_b) \xrightarrow{p_0^*} H^{bk}(E(\gamma^k)_0; K_b) \longrightarrow \cdots$$

existe $\alpha_k \in H^0(G_n; K_b)$ tal que $Cl_k(\gamma^k) = \alpha_k \smile cl_k(\gamma^k)$.

Ahora, debido a que G_n es conexo por trayectorias para toda n, l_k induce un isomorfismo en cohomología en grado 0; para convencernos de esto consideremos X un espacio topológico y recodemos que por coeficientes universales $H^0(G_n : K_b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0(G_n; \mathbb{Z}); K_b)$ donde $H_0(G_n; \mathbb{Z})$ lo podemos pensar como el grupo abeliano libre cuyo rango es igual al número de componentes conexas de X.

Dada la observación anterior, sea ρ_k el único elemento en $H^0(G_n; K_b)$ tal que $l_k^*(\rho_k) = \alpha_k$ por lo tanto

$$\begin{aligned} l_k^*(Cl_k(\gamma^n)) &= Cl_k(\gamma^k) \\ &= \alpha_k \smile cl_k(\gamma^k) \\ &= \alpha_k \smile l_k^*(cl_k(\gamma^n)) \\ &= l_k^*(\rho_k \smile cl_k(\gamma^n)). \end{aligned}$$

El anillo de cohomología $H^*(G_n; K_b)$ es un álgebra polinomial sobre K_b libremente generada por las clases de Steifel Whitney de γ^n para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó es libremente generada por las clases de Chern de de γ^n para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. [8, p.69 y p.133] Por 4.5, tenemos que l_k induce un isomorfismo en los grupos de cohomología de G_n y G_k en grado $i \leq k$. Así por lo anterior $Cl_k(\gamma^n) = \rho_k \smile cl_k(\gamma^n)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} Cl_k(\xi) &= Cl_k(\psi_\xi^*(\gamma^n)) \\ &= \psi_\xi^*(Cl_k(\gamma^n)) \\ &= \psi_\xi^*(\rho_k \smile cl_k(\gamma^n)) \\ &= \psi_\xi^*(\rho_k) \smile cl_k(\psi_\xi^*(\gamma^n)) \\ &= \beta_k \smile cl_k(\xi) \end{aligned}$$

con $\beta_k = \psi_\xi^*(\rho_k)$.

El elemento $\beta_k \in H^0(B; K_b)$ es independiente del haz ξ pues para cualquier espacio conexo por trayectorías B y cualquier función $f : B \longrightarrow G_n$ el morfismo inducido $f^* : H^0(G_n; K_b) \longrightarrow H^0(B; K_b)$ es el mismo isomorfismo.

Sea ζ^k el n-haz canónico sobre $\mathbb{F}P^k$ de rango k. Por la normalización del axioma A_4' tenemos que $Cl_k(\zeta^k) = g_k \in H^{bk}(\mathbb{F}P^k; K_b)$. Consideremos la clase $cl_1(\gamma_k^1) \in H^b(\mathbb{F}P^k; K_b)$, entonces por [8, p.143] y la normalización para el axioma A_4 obtenemos

$$g_k = cl_1(\gamma_k^1)^k \tag{4.6}$$

Ahora debido a que $\zeta^k \cong \underbrace{\gamma_k^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_k^1}_{\text{k}}$ tenemos por A_3 y 4.6 que

$$\begin{aligned} cl_k(\zeta^k) &= cl_k(\gamma_k^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_k^1) \\ &= cl_1(\gamma_k^1)^k \\ &= g_k. \end{aligned}$$

De esta manera, para $Cl_k(\zeta^k) = \beta_k \smile cl_k(\zeta^k)$ tenemos que $\beta_k = 1$. Por lo tanto $cl_k(\xi) = Cl_k(\xi)$.

□

Corolario 4.6.3. *(Unicidad)*

Las clases $Cl_i(\xi)$ para un $\mathbb{F}$-haz vectorial suave están bien definidas y por lo tanto están bien definidas para cualquier $\mathbb{F}$-haz vectorial numerable.

Demostración. Si en el Teorema 4.4.3, de acuerdo a la construcción, nos tomamos un morfismo de haces genérico diferente $g : \varepsilon^{n-i+1} \longrightarrow \xi$, las clases correspondientes a este morfismo, las cuales denotaremos por $Cl_i^g(\xi)$, satisfacen el Teorema 4.6.2 por lo que coindicen con las clases caractrísticas $cl_i(\xi)$ las cuales son unicas.[8, Teorema 73]

□

Corolario 4.6.4. *Las clases $Cl_i(\xi)$ están bien definidas para cualquier $\mathbb{F}$-haz vectorial ξ sobre un espacio paracompacto.*

Demostración. Ya que cualquier cubierta abierta de un espacio paracompacto B tiene una partición de la unidad subordinada a un refinamiento localmente finito, entonces cualquier $\mathbb{F}$-haz vectorial sobre B es numerable.

□

En este capítulo se obtuvo un acercamiento más geometrico de las clases de Chern y las clases de Stiefel–Whitney, pero analizando cada una de las pruebas, puede parecer que la teoría de clases caracteríticas es un tanto restrictiva.

Para tener una visión más amplia, tengamos en cuenta que la teoría de clases características es un juego infinito, pues se pueden definir distintas clases características, las cuales tienen distintos usos dentro de la geometría y la topología algebraica; todo depende de tres factores. El primero es la clase de espacios donde se está trabajando, ya sean espacios topológicos, orbifolios, esquemas, variedades algebraicas, etc. El segundo factor es el tipo de estructura que le estamos dotando a nuestra categoría de espacios y a los cuales se les va asociar una clase característica, estas estructuras pueden ser foliaciones, haces algebraicos, alguna gavilla, etc. y el tercer factor depende de la teoría de cohomología donde están definidas las clases características, la cual en primera instancia debe ser una teoría de cohomología proveniente de un anillo espectro.

Así, dentro de un sentido utópico nos gustaria tener siempre una “buena” teoría de clases características, lo cual muchas veces es algo incierto, pues se están considerando posibilidades infinitas.

Capítulo 5

Aplicaciones.

Dentro de este capítulo analizaremos una serie de aplicaciones dentro de la teoría de clases características, más enfocado a las clases de Steifel–Whitney, las cuales nos brindarán un mayor conocimiento e intución sobre la geometría de variedades suaves respecto a sus haces tangentes; de manera particular obtendremos la paralelizabilidad de espacios proyectivos reales así como sus respectivos encajes dentro de espacios euclidianos de una dimensión dada.

Al final de este capítulo, se introducirá el concepto de la clase de Euler de un haz orientable el cual nos permitirá obtener una reformulación de la característica de Euler.

5.1. Clases de Stiefel–Whitney.

A continuación daremos algunas aplicaciones de las clases de Stiefel–Whitney, las cuales son consecuencias de los cuatro axiomas mencionados en la sección 4.1.

Como consecuencias inmediatas del axioma A_2, tenemos lo siguiente:

Proposición 5.1.1. *Dado ξ un $\mathbb{R}$-haz vectorial sobre una espacio paracompacto B. Si ξ es isomorfo a otro haz η, entonces $w_i(\xi) = w_i(\eta)$.*

Proposición 5.1.2. *Si ε es un $\mathbb{R}$-haz trivial entonces $w_i(\varepsilon) = 0$ para $i > 0$.*

Esto último se debe a que si ε es trivial, entonces existe un morfismo de haces de ε a un haz vectorial sobre un punto.

Proposición 5.1.3. *Sea ξ un $\mathbb{R}$-haz vectorial de rango n con una métrica euclidiana. Si ξ posee k secciones que son linealmente independientes en cada punto, entonces*

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = ... = w_n(\xi) = 0.$$

Demostración. Debido a que ξ tiene k-secciones linealmente independientes, tenemos que existe un morfismo de haces

$$h : \varepsilon^k \longrightarrow \xi$$

dado por $h(p, v) = \sum_{i=1}^{k} v_i s_i(p)$, donde $v = (v_1, ..., v_k)$ y $\{s_i(p)\}$ son las secciones linealmente independientes evaluadas en p. Claramente el morfismo $h : \varepsilon^k \longrightarrow \xi$ es inyectivo en cada fibra, por lo que podemos pensar al haz ε^k como un subhaz de ξ. Ahora ya que ξ tiene una métrica euclidiana, podemos tomar el complemento orogonal de ε en ξ, el cual denotaremos por $\varepsilon^\perp$ [8, Teorema3.1]. Así $\xi \cong \varepsilon \oplus \varepsilon^\perp$, por lo que la i-ésima clase de Stiefel–Whitney de ξ está dada por

$$w_i(\xi) = w_i(\varepsilon \oplus \varepsilon^\perp) = w_i(\varepsilon^\perp).$$

De esta manera gracias al axioma $\mathbf{A_1}$, concluimos que

$$w_{n-k+1}(\xi) = w_{n-k+2}(\xi) = ... = w_n(\xi) = 0,$$

pues el haz $\varepsilon^\perp$ tiene rango $n - k$.

□

Un caso interesante ocurre con respecto al axioma $\mathbf{A_3}$ cuando la suma de Whitney $\xi \oplus \eta$ es trivial, pues haciendo uso de las relaciones

$$\begin{aligned}
&w_1(\xi) + w_1(\eta) = 0\\
&w_2(\xi) + w_1(\xi)w_1(\eta) + w_2(\eta) = 0\\
&w_3(\xi) + w_2(\xi)w_1(\eta) + w_1(\xi)w_2(\eta) + w_3(\eta) = 0, etc.
\end{aligned}$$

e inducción, podemos expresar $w_i(\eta)$ como un polinomio en las clases de Stiefel–Whitney de ξ. (Omiteremos el simbolo $\smile$ para el producto cup siempre que resulte conveniente).

Definición 5.1.4. *Dado B espacio topológico, denotaremos por $H^\Pi(B; \mathbb{Z}/2)$ al anillo cuyos elementos consisten de todas las series formales infinitas*

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

con $a_i \in H^i(B)$. La operación en este anillo está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= (a_0 + a_1 + a_2 + ...)(b_0 + b_1 + b_2 + ...)\\
&= (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + ...
\end{aligned}$$

Observemos que este producto es conmutativo (pues estamos trabajando en $\mathbb{Z}/2$ y asociativo, donde $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$ lo podemos pensar de manera aditiva como el producto cartesiano de los grupos $H^i(B;\mathbb{Z}/2)$. También, notemos que la clase total de Stiefel–Whitney de un $\mathbb{R}$-haz vectorial ξ de rango n sobre B, define una clase en $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + ... + w_n(\xi) + 0 + ... \in H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2).$$

Observación 5.1.5. *De acuerdo al producto en $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$ y al axioma $\mathbf{A_3}$, dados ξ y η haces sobre B obtenemos que*

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta).$$

Lema 5.1.6. *La coleción de todas la series infinitas con coeficiente inicial* 1

$$w = 1 + w_1 + w_2 + ... \in H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2),$$

es precisamente el grupo de unidades del anillo $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$.

Demostración. Observemos que bajo el producto descrito anteriormente, la unidad del anillo $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$ está dada por el elemento $\bar{1} = 1 + 0 + 0 + ..$ el cual tiene al 1 como primer coeficiente y todos los demás sumandos son cero. Así, si nos consideramos un elemento no cero $a = a_0 + a_1 + a_2 + ...$ en las unidades del anillo $H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$ (un elemento invertible), tenemos que existe un elemento $b = b_0 + b_1 + b_2 + ... \in H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2)$ tal que

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 + a_1 + a_2 + ...)(b_0 + b_1 + b_2 + ...) \\ &= (b_0 + b_1 + b_2 + ...)(a_0 + a_1 + a_2 + ...) \\ &= b \cdot a = \bar{1}. \end{aligned}$$

Debido a como está dada la regla del producto, tenemos que $a_0 = b_0 = 1$, por lo tanto toda unidad tiene como coeficiente inicial 1.

Ahora, si consideremos un elemento

$$w = 1 + w_1 + w_2 + ... \in H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}/2),$$

el inverso $\tilde{w} = 1 + \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 + ...$ puede construirse de manera inductiva de la siguiente manera

$$\tilde{w}_n = w_1\tilde{w}_{n-1} + w_2\tilde{w}_{n-2} + ... + w_{n-1}\tilde{w}_1 + w_n.$$

De esta manera, obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= w_1 \\ \tilde{w}_2 &= w_1^2 + w_2 \\ \tilde{w}_3 &= w_1^3 + w_3 \\ \tilde{w}_4 &= w_1^4 + w_1^2 w_2 + w_2^2 + w_4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, todo elemento de la forma $w = 1+w_1+w_2+...$ es un elemento invertible.

□

Observación 5.1.7. *Consideremos dos $\mathbb{R}$-haces vectoriales ξ y η sobre el mismo espacio base. Gracias al lema anterior, se sigue que la ecuación*

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$$

se puede resolver de manera única como

$$w(\eta) = \tilde{w}(\xi)w(\xi \oplus \eta)$$

En particular, si la suma $\xi \oplus \eta$ es trivial, obtenemos que $w(\eta) = \tilde{w}(\xi)$.

Teorema 5.1.8 (Dualidad de Whitney)**.** *Si τ_M es el haz tangente de una variedad suave en un espacio euclidiano y ν denota el haz normal, entonces*

$$w_i(\nu) = \tilde{w}_i(\tau_M).$$

Demostración. Supongamos que M es m-subvariedad suave de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el haz normal de M contruido en el Ejemplo 2.1.4.

Debido a esta construcción, observamos que para cada $x \in M$ se tiene que $\nu_x \oplus T_xM \cong \mathbb{R}^n$, lo cual implica que $\nu \oplus \tau_M$ es trivial. Así, por el Lema 5.1.6 obtenemos que

$$\tilde{w}(\tau_M) = w(\nu).$$

En particular $\tilde{w}_i(\tau_M) = w_i(\nu)$.

□

Proposición 5.1.9. *Para el haz tangente τ_{S^n} de la esfera unitaria S^n, la clase $w(\tau_{S^n})$ es igual a 1.*

Demostración. Por definición, el haz normal $\nu(S^n)$ del encaje estándar $S^n \subset R^{n+1}$ está dado por el complemento ortogonal al haz tangente de S^n. De esta manera, observemos que para cada $p \in S^n$ tenemos que $\nu(S^n)_p = \langle p \rangle$, es decir $\nu(S^n)_p$ está dado por el espacio vectorial real generado por p.

Veamos que el haz normal $\nu(S^n)$ del encaje estándar $S^n \subset R^{n+1}$ es trivial. En efecto, definamos el siguiente morfismo de haces

$$\Psi : \nu(S^n) \longrightarrow S^n \times \mathbb{R}$$

dado por $\Psi(v) = (p, \langle v, p\rangle)$, donde $v \in \nu(S^n)_p$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definamos $\Phi : S^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \nu(S^n)$ dada por $\Phi(p,t) = tp \in \nu(S^n)_p$, entonces

$$\Psi \circ \Phi(p,t) = \Psi(tp) = (p, \langle tp, p\rangle) = (p, t\langle p, p\rangle) = (p,t).$$

Ahora, para cada $v \in \nu(S^n)$, tenemos que existe $p \in S^n$ tal que $v = tp$ para algún $t \in \mathbb{R}$, de esta manera tenemos que

$$\Phi \circ \Psi(v) = \Phi \circ \Psi(tp) = \Phi(p, \langle p, tp\rangle) = \langle p, tp\rangle p = t\langle p, p\rangle p = v.$$

Notemos que ambas funciones son continuas y lineales en cada fibra.

Por lo tanto, debido a que $\tau_{S^n} \oplus \nu(S^n)$ es trivial, obtenemos que

$$1 = w(\tau_{S^n} \oplus \nu(S^n)) = w(\tau_{S^n})w(\nu(S^n)) = w(\tau_{S^n}),$$

lo cual concluye la prueba.

□

Observación 5.1.10. *Notemos que por lo anterior, τ_{S^n} no puede distinguirse del haz trivial sobre S^n por medio de las clases de Stiefel–Whitney.*

A continuación, se hablará de las clases de Stiefel–Whitney para haces vectoriales cuyo espacio base es el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$, por lo que es necesario describir la cohomología de $\mathbb{RP}^n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$.

Lema 5.1.11. *El grupo $H^i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ es cíclico de orden 2 para $0 \leq i \leq n$ y es cero para $i > n$. Más aún, si a denota el elemento no cero de $H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ entonces cada $H^i(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ es generado por el i-ésimo producto cup a^i.*

Demostración. Consultar [13, 4.3.3]. □

Observación 5.1.12. *Debido al lema anterior, tenemos que $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$ puede ser descrito como el álgebra con unidad sobre $\mathbb{Z}/2$ que tiene un generador y una relación $a^{n+1} = 0$.*

Proposición 5.1.13. *La clase total de Stiefel–Whitney del haz de línea canónico γ_n^1 sobre $\mathbb{RP}^n$ está dada por*

$$w(\gamma_n^1) = 1 + a$$

donde a es el elemento no cero de $H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2)$.

Demostración. Consideremos la inclusión canónica $i : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $i(x, y) = (x, y, \bar{0})$ donde $\bar{0}$ es el origen de $\mathbb{R}^{n-1}$. Así, tenemos una inclusión canónica $j : \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ dada por $j([x, y]) = [i(x, y)]$. Claramente la inclusión $j : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ induce el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} \gamma_1^1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \gamma_n^1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ \mathbb{RP}^1 \arrow[r, "j"] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

Ahora, debido al axioma $\mathbf{A_2}$ obtenemos que

$$j^* w_1(\gamma_n^1) = w_1(\gamma_1^1)$$

donde $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$, pues γ_1^1 es no trivial. Esto muestra que $w_1(\gamma_n^1)$ es no cero, por lo tanto $w_1(\gamma_n^1) = a$. Como las clases de Stiefel–Whitney restantes de γ_n^1 están determinadas por el axioma $\mathbf{A_1}$, esto completa la prueba.

□

Observación 5.1.14. *Notemos que por definición, el haz de línea γ_n^1 sobre $\mathbb{RP}^n$ está contenido como un subhaz en el haz trivial ε^{n+1}. Denotemos por $\gamma^\perp$ al complemento ortogonal de γ_n^1 en ε^{n+1} Entonces, el espacio total de $\gamma^\perp$ está dado por todo los pares*

$$([x], v) \in \mathbb{RP} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

tal que v es perpendicular a x.

Proposición 5.1.15. *Sea γ_n^1 el haz de línea sobre $\mathbb{RP}^n$, entonces*

$$w(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + ... + a^n.$$

Demostración. Como $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ es trivial, tenemo que $w(\gamma^\perp) = \tilde{w}(\gamma_n^1)$. Ahora, debido a la Proposición 5.1.13 y al algoritmo construído en el Lema 5.1.6, inductivamente obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1(\gamma_n^1) &= w_1(\gamma_n^1)\\
\tilde{w}_2(\gamma_n^1) &= w_1^2(\gamma_n^1)\\
\tilde{w}_3(\gamma_n^1) &= w_1^3(\gamma_n^1)\\
\tilde{w}_4(\gamma_n^1) &= w_1^4(\gamma_n^1)\\
&.\\
&.\\
&.\\
\tilde{w}_n(\gamma_n^1) &= w_1^n(\gamma_n^1),
\end{aligned}$$

donde sabemos que $w_1(\gamma_n^1) = a$. Por lo tanto $w(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + ... + a^n$.

□

Proposición 5.1.16. *El haz tangente $\tau_{\mathbb{RP}^n}$ de $\mathbb{RP}^n$ es isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$.*

Demostración. Sea L una línea a través del origen en $\mathbb{R}^{n+1}$, la cual,intersecta a S^n en los puntos $\pm x$, y sea $L^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el n-plano complementario. Consideremos la función cociente canónica $f : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, $f(x) = \{\pm x\}$. Observemos que los vectores tangentes (x, v) y $(-x, -v)$ en τ_{S^n} tienen la misma imagen bajo la función $df : \tau_{S^n} \longrightarrow \tau_{\mathbb{RP}^n}$. De esta manera, el haz tangente $\tau_{\mathbb{RP}^n}$ puede identificarse con el conjunto de los pares $\{(x,v),(-x,-v)\}$ tal que $\langle x,x\rangle = 1$, $\langle x,v\rangle = 0$.

Pero cada uno de estos pares determina y es determinado por una transformación lineal $\lambda : L \longrightarrow L^{\perp}$ que satisface que $\lambda(x) = v$. Así, el espacio tangente de $\mathbb{RP}^n$ en $\{\pm x\}$ es canónicamente isomorfo al espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(L, L^{\perp})$, por lo que se sigue que $\tau_{\mathbb{RP}^n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \gamma^{\perp})$

$\square$

Proposición 5.1.17. *Sea ε^1 el haz trivial de rango 1 sobre $\mathbb{RP}^n$. Entonces la suma de Whitney $\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1$ es isomorfa a la suma de Whitney de $(n+1)$-sumandos $\gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$. Por lo tanto la clase total de Stiefel–Whitney de $\tau_{\mathbb{RP}^n}$ está dada por*

$$w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = (1+a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \ldots + \binom{n+1}{n}a^n.$$

Demostración. Claramente el haz $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ es trivial pues es un haz de línea con una sección que nunca se anula. Entonces por la proposición anterior tenemos que

$$\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \gamma^{\perp}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$$

de donde

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \gamma^{\perp}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1}).$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \varepsilon^1).\end{aligned}$$

Ahora, debido que γ_n^1 tiene una métrica euclidiana, podemos dar el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{ccc}\gamma_n^1 & \xrightarrow{h} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)\\ (p,v) & \longmapsto & ((x,w) \mapsto (x, \langle v,w\rangle))\end{array},$$

con lo que se concluye que $\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \cong \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$.

De esta manera obtenemos

$$w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = w(\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1) = w(\gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1) = w(\gamma_n^1) \cdots w(\gamma_n^1) = (1+a)^{n+1},$$

que bajo expanción binomial, completa la prueba.

$\square$

Observación 5.1.18. *El último termino de la expanción binomial de la expresión* $(1+a)^{n+1}$ *puede ignorarse, pues* $H^{n+1}(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2)=0$*. De esta manera, tenemos como ejemplos:*

$$\begin{aligned} w(\tau_{\mathbb{RP}^2}) &= 1+a+a^2 \\ w(\tau_{\mathbb{RP}^3}) &= 1 \\ w(\tau_{\mathbb{RP}^4}) &= 1+a+a^4 \end{aligned}$$

Corolario 5.1.19 (Stiefel)**.** *La clase* $w(\tau_{\mathbb{RP}^n})$ *es igual a uno si y solo si* $n+1$ *es una potencia de 2, Así los únicos espacios proyectivos que podrían ser paralelizables son* $\mathbb{RP}^1$, $\mathbb{RP}^3$, $\mathbb{RP}^7$, $\mathbb{RP}^{15}$,*...*

Demostración. Debido a la identidad $(a+b)^2 \equiv a^2+b^2$ mód 2 tenemos que $(1+a)^{2^r}=1+a^{2^r}$. Por lo tanto si $n+1=2^r$ entonces

$$w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = (1+a)^{n+1} = 1+a^{n+1} = 1.$$

De manera recíproca, si $(n+1)=2^r m$ con m impar, $m>1$, entonces

$$\begin{aligned} w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) &= (1+a)^{n+1} = (1+a)^{2^r m} \\ &= (1+a^{2^r})^m \\ &= 1+\binom{m}{1}a^{2^r}+\binom{m}{2}a^{2\cdot 2^r}+\ldots+\binom{m}{m-1}a^{2^r\cdot(m-1)} \\ &= 1+ma^{2^r}+\frac{m(m-1)}{2}a^{2\cdot 2^r}+\ldots+ma^{2^r\cdot(m-1)} \\ &\neq 1 \end{aligned}$$

pues $2^r<n+1$. Por lo tanto si $w(\tau_{\mathbb{RP}^n})=1$ entonces $n+1$ debe ser una potencia de 2.

□

Observación 5.1.20. *Si* $n+1=2^r m$ *con* m *impar,* $m>1$*, entonces no existen* 2^r *campos vectoriales suaves sobre el espacio proyectivo* $\mathbb{RP}^n$ *que sean linealmente independientes en todas partes.*

A continuación veremos que realmente $\mathbb{RP}^1$, $\mathbb{RP}^3$ y $\mathbb{RP}^7$ son paralelizables. Por otro lado se sabe que los espacio proyectivos restantes $\mathbb{RP}^{15}$, $\mathbb{RP}^{31}$,... no son paralelizables. (Consultar [14], [15], [16]).

5.1.1. Álgebras de división.

Teorema 5.1.21 (Stiefel)**.** *Supongamos que existe un producto blineal*

$$p:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

sin divisores de cero, no necesariamente asociativo y no necesariamente con un elemento identidad. Entonces el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ es paralelizable, por tanto n debe ser una potencia de 2.

Demostración. Sea $\{b_1, ..., b_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Ya que $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ no tiene divisores de cero, tenemos que la correspondencia $y \mapsto p(y, b_1)$ define un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. De esta manera, la expresión

$$v_i(p(y, b_1)) = p(y, b_i)$$

define una transformación lineal

$$v_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

donde $v_1(x), ..., v_n(x)$ son linealmente independientes para $x \neq 0$, y $v_1(x) = x$.

Las funciones $\{v_2,...,v_n\}$ definen $(n-1)$ secciones linealmente independientes del haz vectorial

$$\tau_{\mathbb{RP}^n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma^1_{n-1}, \gamma^{\perp}).$$

De hecho para cada línea L a través del origen, una transformación lineal

$$\bar{v}_i : L \longrightarrow L^{\perp}$$

se define como sigue. Para $x \in L$, denotemos por $\bar{v}_i(x)$ a la imagen de $v_i(x)$ bajo la proyección ortogonal

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow L^{\perp}.$$

Claramente $\bar{v}_1 = 0$ y $\{\bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\}$ son linealmente independientes en todas partes. Por lo tanto el haz tangente $\tau_{\mathbb{RP}^n}$ es trivial.

□

Se sabe que estas álgebras de división existen para $n = 1, 2, 4, 8$: a saber, los números reales, los números complejos, los cuaternios y los números de Cayley. Se sigue que los espacio proyectivos $\mathbb{RP}^1$, $\mathbb{RP}^3$ y $\mathbb{RP}^7$ son paralelizables. El hecho de que no existan álgebras de división para $n > 8$ se sigue de las referencias citadas en la parte de arriba sobre paralelizabilidad.

5.1.2. Inmersiones.

Si una variedad suave M de dimensión n puede ser inmersa en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+k}$ entonces el Teorema de dualidad de Whitney 5.1.8

$$w_i(\nu) = \bar{w}_i(\tau_M)$$

implica que las clases de Stiefel–Whitney duales $\bar{w}_i(\tau_M)$ son cero para $i > k$. Como un ejemplo, consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^9$. Ya que

$$w(\tau_{\mathbb{RP}^9}) = (1+a)^{10} = 1 + a^2 + a^8$$

tenemos que

$$\bar{w}(\tau_{\mathbb{RP}^9}) = 1 + a^2 + a^4 + a^6.$$

En consecuencia, si $\mathbb{RP}^9$ puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{9+k}$, entonces k debe ser al menos 6.

Los resultados más llamativos para $\mathbb{RP}^n$ se obtienen cuando n es una potencia de 2. Si $n = 2^r$ entonces

$$w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = (1+a)^{n+1} = 1 + a + a^n,$$

por lo que

$$\bar{w}(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = 1 + a^2 + ... + a^{n-1}.$$

De esta manera, obtenemos de manera inmediata el siguiente teorema.

Teorema 5.1.22. *Si $\mathbb{RP}^{2^r}$ puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{2^r+k}$, entonces k debe ser al menos $2^r - 1$.*

Observación 5.1.23. *Notemos que las estimaciones para otros espacios proyectivos se siguen del teorema anterior. Por ejemplo, debido a que $\mathbb{RP}^8$ no puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{14}$ se sigue entonces que $\mathbb{RP}^9$ no puede ser inmerso en $\mathbb{R}^{14}$. esto duplica la estimación anterior con respecto a $\mathbb{RP}^9$.*

5.1.3. Números de Stiefel–Whitney.

Sea M una variedad suave de dimensión n, cerrada, posiblemente disconexa. Ya que toda variedad es $\mathbb{Z}/2$-orientable, existe una única clase de homología fundamental

$$\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z}/2).$$

Por lo tanto, para cualquier clase de cohomología $v \in H^n(M; \mathbb{Z}/2)$ el índice de Kronecker

$$\langle v, \mu_M \rangle \in \mathbb{Z}/2$$

está bien definido. Algunas veces denotaremos por $v[M]$ a este índice de Kronecker.

Sean $\{r_1, ..., r_n\}$ enteros no negativos con $r_1 + 2r_2 + ... + nr_n = n$. Entonces para cada haz vectorial ξ podemos formar el monomio

$$w_1(\xi)^{r_1} \cdots w_n(\xi)^{r_n}$$

en $H^n(B(\xi); \mathbb{Z}/2)$. En particular, podemos realizar la misma construcción para el haz tangente a una variedad M.

Definición 5.1.24. *El entero asociado módulo 2 correspondiente*

$$\langle w_1(\tau_M)^{r_1} \cdots w_n(\tau_M)^{r_n}, \mu_M \rangle \qquad \textit{o brevemente} \qquad w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M],$$

es llamado el número de Stiefel-Whiney de M asociado con el monomio $w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}$.

Dentro del estudio de estos números, estaremos más interesados en la colección de los posibles números de Stiefel–Whitney de una variedad dada. De esta manera, dos variedades M y M' tienen los mismos números de Stiefel–Whitney si $w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M] = w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M']$ para cada monomio $w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}$ de dimensión total n

Como un ejemplo, analicemos los números de Stiefel–Whitney del espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$. Sea $\tau_{\mathbb{RP}^n}$ el haz tangente de $\mathbb{RP}^n$, si n es par entonces clase de cohomología $w_n(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = (n+1)a^n \neq 0$, lo que implica que el número de Stiefel–Whitney $w_n[\mathbb{RP}^n]$ es distinto de cero. Analogamente, ya que $w_1(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = (n+1)a \neq 0$ se sigue que $w_1^n[\mathbb{RP}^n] \neq 0$. Si n es una potencia de 2, entonces $w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = 1 + a + a^n$, por lo que los demás números de Stiefel–Whitney de $\mathbb{RP}^n$ son cero. Notemos que en cualquier otro caso, incluso si n es una potencia de 2, los números de Stiefel–Whitney restantes pueden calcularse como productos de coeficientes binomiales.

Por otro lado, si n es impar, a saber $n = 2k - 1$, entonces $w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k$, por lo que $w_j(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = 0$ siempre que j sea impar. Ahora, debido a que cada monomio de dimensión total $2k-1$ debe contener un factor w_j de dimensión impar, se sigue que todos los números de Stiefel–Whitney de $\mathbb{RP}^{2k-1}$ son cero.

Teorema 5.1.25 (Pontryagin)**.** *Si B es una variedad suave, compacta, de dimensión $n+1$, con frontera igual a M, entonces los números de Stiefel–Whitney de M son todos cero.*

Demostración. Sea $K \subset B$ un subconjunto compacto, consideremos para cada $x \in K \cap (B - M)$ el homomorfismo inducido por la inclusión de las parejas $(B, B - (K \cap (B - M))) \subset (B, B - \{x\})$

$$H_{n+1}(B, (B-K) \cup M; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_{n+1}(B, B - \{x\}; \mathbb{Z}/2).$$

Sabemos que para cada $x \in K \cap (B - M)$, existe una única clase $\mu_K \in H_{n+1}(B, (B-K) \cup M; \mathbb{Z}/2)$ con la propiedad que $\rho(\mu_K) = \mu_x$, con $\mu_x \in$

$H_{n+1}(B, B-\{x\}; \mathbb{Z}/2)$ un generador. En particular, debido a que B es compacta, existe una única clase de homología fundamental $\mu_B \in H_{n+1}(B, M; \mathbb{Z}/2)$, la cual cumple el análogo a la propiedad anterior. Puede mostrarse que el homomorfismo natural

$$\partial : H_{n+1}(B, M; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_n(M; \mathbb{Z}/2)$$

manda la clase μ_B a la clase fundamental μ_M [17, p. 304]. De esta manera, para cualquier $v \in H_n(M; \mathbb{Z}/2)$ obtenemos la siguiente igualdad

$$\langle v, \mu_M \rangle = \langle v, \partial\mu_B \rangle = \langle \delta v, \mu_B \rangle,$$

donde $\delta : H^n(M; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{n+1}(B, M; \mathbb{Z}/2)$ es el homomorfismo natural.

Consideremos $\tau_{B\downharpoonright M}$ el haz tangente τ_B retringido a M y τ_M el subhaz dado por el haz tangente de M. Escogiendo una métrica euclidiana sobre τ_B, hay un único campo vectorial normal a lo largo de M que genera al haz de línea trivial ε^1, por lo que se sigue que

$$\tau_{B\downharpoonright M} \cong \tau_M \oplus \varepsilon^1.$$

Por lo tanto las clases de Stiefel–Whitney de τ_B, restringidas a M, son iguales a las clases de Stiefel–Whitney de τ_M. Usando la sucesión exacta

$$H^n(B; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{i^*} H^n(M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B, M; \mathbb{Z}/2)$$

donde i^* es el homomorfismo de restricción, se sigue que $\delta(w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}) = 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}, \mu_M \rangle &= \langle w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}, \partial\mu_B \rangle \\ &= \langle \delta(w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}), \mu_B \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, todos los números de Stiefel–Whitney de M son cero.

□

El teorema recíproco es debido a Thom y es mucho más complicado de demostrar.

Teorema 5.1.26 (Thom)**.** *Si todos los números de Stiefel–Whitney de M son cero, entonces M puede verse como la frontera de alguna variedad suave compacta.*

Demostración. Para una demostración, referirse a [18].

□

Por ejemplo la union de dos copias ajenas de M, la cual tiene ciertamente todos los números de Stiefel–Whitney igual a cero, es igual a la frontera del cilindro $M \times [0,1]$. De manera similar, el espacio proyectivo de dimensión impar $\mathbb{RP}^{2k-1}$ tiene todos los números de Stiefel–Whitney igual a cero, por lo que podemos pensar que $\mathbb{RP}^{2k-1}$ es la frontera de alguna variedad suave compacta.

Definición 5.1.27. *Dos variedades suaves cerradas M_1 y M_2 de dimensión n, pertenecen a la misma clase de cobordismo no orientado si y sólo si su unión disjunta $M_1 \cup M_2$ es la frontera de una variedad diferenciable compacta de dimensión $(n+1)$.*

Corolario 5.1.28. *Dos variedades suaves cerradas de dimensión n pertenecen a la misma clase de cobordismo no orientado si y solo si sus correspondientes números de Stiefel–Whitney son iguales.*

Demostración. El punto principal de esta prueba es notar que para cada n-tupla $r_1, ..., r_n$ de números enteros no negativos con la propiedad de que $r_1 + 2r_2 + ... + nr_n = n$, se cumple que

$$w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M \sqcup N] = w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M] + w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[N]$$

con M y N variedades suaves cerradas de dimensión n. En efecto, ya que la union $M \sqcup N$ es dijunta, tenemos el siguiente isomorfismo en cohomología

$$\begin{array}{ccc} H^*(M \sqcup N; \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{k} & H^*(M; \mathbb{Z}/2) \oplus H^*(N; \mathbb{Z}/2) \\ u & \longmapsto & k_M^*(u) \oplus k_N^*(u) \end{array},$$

donde $k_M : M \hookrightarrow M \sqcup N$ y $k_N : N \hookrightarrow M \sqcup N$ son las inclusiones naturales. Analogamente se tiene un isomorfismo inducido en homología

$$\begin{array}{ccc} H_*(M; \mathbb{Z}/2) \oplus H_*(N; \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\tilde{k}} & H_*(M \sqcup N; \mathbb{Z}/2) \\ u \oplus v & \longmapsto & k_{M_*}(u) \oplus k_{N_*}(v) \end{array}.$$

Ahora, ya que $k_M^* \tau_{M \sqcup N} \cong \tau_M$ y $k_N^* \tau_{M \sqcup N} \cong \tau_N$ tenemos que

$$k(w_1^{r_1}(\tau_{M \sqcup N}) \cdots w_n^{r_n}(\tau_{M \sqcup N})) = w_1^{r_1}(\tau_M) \cdots w_n^{r_n}(\tau_M) \oplus w_1^{r_1}(\tau_N) \cdots w_n^{r_n}(\tau_N).$$

Por lo tanto, debido a que la clase fundamental $\mu_{M \sqcup N}$ de $M \sqcup N$ se corresponde con la clase $\mu_M \oplus \mu_N$ bajo el isomorfismo $\tilde{k}$, tenemos que

$$\begin{aligned} w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M \sqcup N] &= \langle w_1^{r_1}(\tau_{M \sqcup N}) \cdots w_n^{r_n}(\tau_{M \sqcup N}), \mu_{M \sqcup N} \rangle \\ &= \langle w_1^{r_1}(\tau_{M \sqcup N}) \cdots w_n^{r_n}(\tau_{M \sqcup N}), \tilde{k}(\mu_M \oplus \mu_N) \rangle \\ &= \langle k(w_1^{r_1}(\tau_{M \sqcup N}) \cdots w_n^{r_n}(\tau_{M \sqcup N})), \mu_M \oplus \mu_N \rangle \\ &= w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M] + w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[N]. \end{aligned}$$

Ahora, si M y N pertenecen a la misma clase de cobordismo, entonces $M \sqcup N$ es la frontera de una variedad suave compacta de dimensión $n+1$, entonces por el Teorema 5.1.26 tenemos que para cada monomio $w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}$

$$w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M \sqcup N] = 0.$$

lo cual implica que $w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M] = w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[N]$.

Recíprocamente, si $w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M] = w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[N]$ entonces tenemos que $w_1^{r_1} \cdots w_n^{r_n}[M \sqcup N] = 0$, así por el Teorema 5.1.25, tenemos que $M \sqcup N$ es la frontera de una variedad suave compacta de dimensión $(n+1)$, consecuentemente M y N pertenecen a la misma clase de cobordismo no orientado.

□

5.2. Clase de Euler.

Dado $\xi = (E, \pi, B)$ un haz vectorial real de rango n, recordemos que E_0 denota el conjunto de los elementos distintos de cero de E. Consideremos el homomorfismo de restricción

$$H^*(E, E_0; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(E; \mathbb{Z}),$$

inducido por la inclusión $E \hookrightarrow (E, E_0)$, el cual denotaremos $y \mapsto y|_E$. En particular, aplicando este homomorfismo a la clase de Thom $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$, (descrita en el Teorema 3.4.6), obtenemos una nueva clase de cohomología

$$u|_E \in H^n(E; \mathbb{Z}).$$

Pero $H^n(E; \mathbb{Z})$ es canonicamente isomorfo al grupo de cohomología $H^n(B; \mathbb{Z})$.

Definición 5.2.1. *La clase de Euler de un haz vectorial real de rango n orientable ξ, es la clase de cohomología*

$$e(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z})$$

que corresponde a $u|_E$ bajo el isomorfismo canónico $\pi^* : H^n(B; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(E; \mathbb{Z})$.

Ahora, presentaremos algunas de las propiedades fundamentales de la clase de Euler.

Proposición 5.2.2. *Si $f : B \longrightarrow B'$ está cubierta por una transformación de haces que preserva la orientación $\xi \longrightarrow \xi'$, entonces $e(\xi) = f^*(e(\xi'))$.*

Demostración. Este resultado se sigue del hecho de que que la clase de Thom del haz ξ' es mapeada a la clase de Thom del haz ξ bajo el morfismo inducido en cohomología

$$f^* : H^*(B'; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(B; \mathbb{Z}).$$

En particular, si ξ es un haz trivial de rango n, $n > 0$, Entonces $e(\xi) = 0$. Porque en este caso podemos tomar a ξ' como un haz sobre un punto.

□

Proposición 5.2.3. *Si se invierte la orientación de ξ, entonces la clase de Euler $e(\xi)$ cambia de signo.*

Demostración. Esto se sigue inmediatamente del hecho de que se invierte la orientación de ξ entonces cambia el signo de la clase de Thom.

□

Proposición 5.2.4. *Sea ξ un haz vectorial real orientable de rango n, si n es impar, entonces $e(\xi) + e(\xi) = 0$.*

Demostración. Claramente el isomorfismo de Thom $\phi(x) = (\pi^*(x)) \smile u$ (Corolario 3.4.8), manda $e(\xi)$ en la clase de cohomología

$$\pi^* e(\xi) \smile u = (u|_E) \smile u = u \smile u,$$

En otras palabra $e(\xi) = \phi^{-1}(u \smile u)$. Ahora, usando la identidad $a \smile b = (-1)^{|a||b|} b \smile a$ observamos que $u \smile u$ es un elemento de orden 2 siempre que la dimensión n sea impar.

□

Debido a esto, usualmente asumiremos que la dimensión de la fibra es par cuando estemos haciendo uso de las clases de Euler.

Proposición 5.2.5. *El homomorfismo natural $\Gamma : H^n(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(B;\mathbb{Z}/2)$ manda la clase de Euler $e(\xi)$ en la clase de Stiefel–Whitney más alta $w_n(\xi)$.*

Demostración. En primera instancia sabemos que $e(\xi) = \phi^{-1}(u \smile u)$, donde $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ denota la clase de Thom del haz ξ y

$$\phi : H^n(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z})$$

está dado por el isomorfismo de Thom.

Para el caso módulo 2 definimos la clase fundamental $\tilde{u} \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}/2)$ como la imagen de la clase de Thom $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ bajo el morfismo natural $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(E, E_0; \mathbb{Z}/2)$, el cual está inducido por la sobreyección de coeficientes $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$. Esta clase fundamental cumple las mismas propiedades descritas en el Teorema 3.4.6.

De esta manera, tenemos que la clase $u \smile u \in H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z})$ se corresponde con la clase $\tilde{u} \smile \tilde{u} = Sq^n(\tilde{u}) \in H^{2n}(E, E_0; \mathbb{Z}/2)$.

Así, aplicando el morfismo natural $\Gamma : H^n(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(B;\mathbb{Z}/2)$ a la identidad $e(\xi) = \phi^{-1}(u \smile u)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma(e(\xi)) &= \Gamma(\phi^{-1}(u \smile u))\\ &= \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{u} \smile \tilde{u})\\ &= \tilde{\phi}^{-1}(Sq^n(\tilde{u}))\\ &= w_n(\xi)\end{aligned}$$

donde $\tilde{\phi} : H^n(B;\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^n(E, E_0;\mathbb{Z}/2)$ es el isomorfismo dado por $\tilde{\phi}(x) = (\pi^*(x)) \smile \tilde{u}$ y $Sq^n : H^n(E, E_0;\mathbb{Z}/2)) \longrightarrow H^{2n}(E, E_0;\mathbb{Z}/2)$ denota el n-ésimo cuadrado de Steenrod, el cual cumple que $Sq^n(\tilde{u}) = \tilde{u} \smile \tilde{u}$ y $\phi^{-1}(Sq^n(\tilde{u})) = w_n(\xi)$. [8, p.76]

□

Proposición 5.2.6. *La clase de Euler de una suma de Whitney está dado por* $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$*. De manera similar la clase de Euler de un producto cartesiano está dada por* $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$*.*

Demostración. Denotemos por $\xi'' = \xi \times \xi'$ con proyección

$$\pi \times \pi' : E \times E' \longrightarrow B \times B'.$$

Consideremos $u(\xi) \in H^m(E, E_0;\mathbb{Z})$ y $u(\xi') \in H^n(E', E_0';\mathbb{Z})$ las clases de Thom de ξ y ξ'. Como E_0 es abierto en E y E_0' en E', el producto cruz

$$u(\xi) \times u(\xi') \in H^{m+n}(E \times E', E \times E_0' \cup E_0 \times E';\mathbb{Z})$$

está bien definido. Notemos que el subconjunto abierto $E \times E_0' \cup E_0 \times E'$ en el espacio total $E'' = E \times E'$ es precisamente igual al conjunto E_0'' de vectores no nulos en E''. Se puede mostrar que la clase $u(\xi) \times u(\xi')$ es igual a la clase $(-1)^{mn}u(\xi'') \in H^{m+n}(E'', E_0'';\mathbb{Z})$ donde $u(\xi'')$ denota la clase de Thom del haz ξ'', esto es a consecuencia de que la restricción de la clase de cohomología $u(\xi) \times u(\xi')$ en $H^{m+n}(F'', F_0'';\mathbb{Z})$ es no nula para cada fibra $F'' = F \times F'$, y más aún está dada por

$$u(\xi) \times u(\xi')|_{(F'',F_0'')} = (-1)^{mn}u(\xi)|_{(F,F_0)} \times u(\xi')|_{(F',F_0')}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos aplicar el homomorfismo de restricción

$$H^{m+n}(E \times E', (E \times E')_0;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{m+n}(E \times E';\mathbb{Z}) \cong H^{m+n}(B \times B';\mathbb{Z})$$

a la identidad $u(\xi'') = (-1)^{mn}u(\xi) \times u(\xi')$, donde obtenemos que

$$e(\xi'') = (-1)^{mn}e(\xi) \times e(\xi');$$

el signo puede ignorarse ya que el lado derecho de esta ecuación es un elemento de orden 2 si m ó n es impar.

Ahora, suponiendo que $B = B'$. Tomando el producto fibrado en ambos lados de esta ecuación a $H^{m+n}(B;\mathbb{Z})$ por medio del encaje diagonal $B \longrightarrow B \times B$, obtenemos la igualdad $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$.

□

5.2.1. Característica de Euler.

A continuación, daremos los teoremas y proposiciones necesarias para una reformulación de la característica de Euler de una variedad suave compacta, tanto para el caso orientable como para el caso no orientable.

Consideremos M una variedad suave de dimensión n encajada de manera suave en una variedad riemanniana A. Para estudiar las clases caractrísticas del haz normal v de M en A, necesitaremos tomar en cuenta la existencia de vecindades tubulares en M, donde una vecindad tubular en M es una vecindad abierta de M en A la cual es difeomorfa al espacio total del haz normal bajo el difeomorfismo que trasforma cada punto $x \in M$ en el vector normal no nulo en x. [8, Teorema 11.1]

Debido a este resultado, obtenemos que si M es cerrada en A, entonces el anillo de cohomología $H^*(E(v), E(v)_0; \Lambda)$ asociado al haz normal de M en A es isomorfo canónicamente al anillo de cohomología $H^*(A, A-M; \Lambda)$, donde Λ puede ser cualquier anillo de coeficientes. [8, Corolario 11.1]

Gracias a esto la clase de Thom u del haz normal de M en A (siempre que M sea cerrada en A), la podemos pensar como una clase de $H^*(A, A-M; \mathbb{Z})$; de igual manera para la correspondiente clase funadamental módulo 2, $\tilde{u} \in H^*(A, A-M; \mathbb{Z}/2)$

Teorema 5.2.7. *Sea M una variedad suave de dimensión n encajada como un subconjunto cerrado de una variedad riemanniana A de dimensión $n+k$, entonces la composición de los dos homomorfismos de restricción*

$$H^k(A, A-M) \longrightarrow H^k(A) \longrightarrow H^k(M)$$

con coeficientes módulo 2 manda la clase fundamental $\tilde{u}$ en la clase de Stiefel-Whitney más alta $w_k(v^k)$ del haz normal. De manera similar, si v^k es orientable, entonces la composición correspondiente con coeficientes enteros manda la clase de Thom u en la clase de Euler $e(v^k)$.

Demostración. Denotemos por $s_0 : M \longrightarrow E(v)$ a la sección cero del haz normal v^k de M en A, la cual induce un isomorfismo canónico $H^*(E(v)) \longrightarrow H^*(M)$. Consideremos el homomorfismo de restricción

$$\begin{array}{ccc} H_k(E(v), E(v)_0) & \longrightarrow & H_k(E) \\ x & \longmapsto & x|_E \end{array}.$$

Primero observemos que la composición

$$H^k(E(v), E(v)_0) \longrightarrow H^k(E) \xrightarrow{s_0^*} H^k(M)$$

con coeficientes módulo 2 manda la clase fundamental $\tilde{u}$ en la clase de Stiefel–Whitney $w_k(v^k)$. De hecho la imagen de $s_0^*(\tilde{u}|_E)$ bajo el isomorfismo de Thom

$$\phi : H^k(M) \longrightarrow H^{2k}(E(v), E(v)_0)$$

es igual a $\pi^* s_0^*(\tilde{u}|_E) \smile \tilde{u} = \tilde{u}|_E \smile \tilde{u} = \tilde{u} \smile \tilde{u} = Sq^k(\tilde{u})$. Por lo tanto, $s_0^*(\tilde{u}|_E)$ es igual a $\phi^{-1} Sq^k(u) = w_k(v)$.

Ahora, remplazando la pareja $(E(v), E(v)_0)$ por la prareja difeomorfa $(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M)$, donde N_ε es una vecindad tubular de M, se sigue que la composición de los dos homomorfismos de restricción

$$H^k(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M) \longrightarrow H^k(N_\varepsilon) \longrightarrow H^k(M)$$

manda la clase correspondiente a $\tilde{u}$ en $w_k(v)$. Así, haciendo uso del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^k(A, A - M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^k(A) \arrow[d] \\
H^k(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M) \arrow[r] & H^k(M)
\end{tikzcd}$$

se sigue el resultado. La demostración en el caso orientable es completamente analoga, pues $e(v) = \phi^{-1}(u \smile u)$, con ϕ el correspondiente isomorfismo de Thom con coeficientes enteros.

$\square$

Definición 5.2.8. *La imagen de $\tilde{u}$ en $H^k(A; \mathbb{Z}/2)$, (analogamente la imagen de u en $H^k(A; \mathbb{Z}/2)$) se llama la clase de cohomología dual a la subvariedad M de codimensión k.*

Observación 5.2.9. *Si la clase dual $\tilde{u}|_A$ a la subvariedad M de codimensión k es cero, se sigue que la clase de Stiefel–Whitney más alta (o la clase de euler) de v también debe ser cero.*

A partir de este momento, supondremos que M es una variedad suave, la cual está orientada o bien que le anillo de coeficientes Λ es $\mathbb{Z}/2$, de modo que la clase fundamental (o clase de Thom) asociada al haz normal v del encaje $\Delta : M \longrightarrow M \times M$,

$$u' \in H^n(M \times M, M \times M - \Delta(M))$$

está bien definida. Notemos que el homomorfismo de restricción

$$H^n(M \times M, M \times M - \Delta(M)) \longrightarrow H^n(M \times M)$$

manda u' en la clase de cohomología $u'|_{M\times M}$ la cual, por definición, es dual a la subvariedad del encaje diagonal de $M \times M$.

Definición 5.2.10. *Esta clase de cohomología $u'|_{M\times M}$ se denotará concisamente como u'' y se llamará la clase de cohomología de la diagonal en $H^n(M \times M)$.*

Lema 5.2.11. *Para cualquier clase de cohomología $a \in H^*(M)$, el producto $(a \times 1) \smile u'$ es igual a $(1 \times a) \cup u''$.*

Demostración. Sea N_ε una vecindad tubular de la subvariedad diagonal $\Delta(M)$ en $M \times M$. Claramente $\Delta(M)$ es un retracto por deformación de N_ε. Consideremos las proyecciones

$$p_1, p_2 : M \times M \longrightarrow M,$$

con $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$. Como p_1 y p_2 coinciden en $\Delta(M)$, se sigue que la restricción $p_1|_{N_\varepsilon}$ es homotópica a $p_2|_{N_\varepsilon}$. Por lo tanto las dos clase de cohomología $p_1^*(a) = a \times 1$ y $p_2^*(a) = 1 \times a$ tienen la misma imagen bajo el homomorfismo de restricción $H^i(M \times M) \longrightarrow H^i(N_\varepsilon)$. Así, haciendo uso del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^i(M \times M) \arrow[r] \arrow[d, "\smile u'"] & H^i(N_\varepsilon) \arrow[d, "\smile u'|_{(N_\varepsilon, N_\varepsilon - \Delta(M))}"] \\
H^{i+n}(M \times M, M \times M - \Delta(M)) \arrow[r, "\cong"] & H^{i+n}(N_\varepsilon, N_\varepsilon - \Delta(M)),
\end{tikzcd}$$

se sigue que $(a \times 1) \smile u' = (1 \times a) \smile u'$. Considerando la restricción a $H^{i+n}(M \times M)$, obtenemos el resultado.

□

Lema 5.2.12. *Supongamos que M es compacta, de tal manera que la clase de homología fundamental $\mu_M \in H_n(M)$ está bien definida. Entonces la clase de cohomología de la diagonal $u'' \in H^n(M \times M)$ y la clase de homología fundamental μ_M se relacionan mediante la identidad $u''/\mu_M = 1 \in H^0(M)$.*

Demostración. Consultar [8, Lema 11.5] □

Ahora, estudiaremos la cohomología de M con coeficientes en un campo Λ, asumiendo que M está orientada o bien que $\Lambda = \mathbb{Z}/2$.

Teorema 5.2.13 (Teorema de Dualidad)**.** *Sea M variedad suave compacta. Para cada base $\{b_1, .., b_r\}$ de $H^*(M)$ existe una correspondiente base dual $\{b_1^*, ..., b_r^*\}$ para $H^*(M)$ que satisface la identidad*

$$\langle b_i \smile b_j^*, \mu_M \rangle = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Observación 5.2.14. *Se sigue como corolario que el rango del espacio vectorial $H^k(M)$ es igual al rango de $H^{n-k}(M)$, puesto que si un elemento de la base b_i tiene dimensión k entonces el elemento de la base dual b_i^* debe dimensión $n-k$. De hecho, se sigue que el espacio vectorial $H^k(M)$ es isomorfo al espacio vectorial dual $\mathrm{Hom}_\Lambda(H^{n-k}(M), \Lambda)$, usando la correspondencia $a \mapsto h_a$, donde $h_a(b) = \langle a \smile b, \mu_M \rangle$.*

Mientras demostramos el Teorema 5.2.13, daremos una expresión explicita de la clase fundamental $u'' \in H^n(M \times M)$

Teorema 5.2.15. *Sean $\{b_i\}$ y $\{b_i^*\}$ bases como arriba, la clase de cohomología de la diagonal u'' es igual a*

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{\dim b_i} b_i \times b_i^*.$$

Demostración. (5.2.15 y 5.2.13)

Usando la fórmula de Künneth

$$H^*(M \times M) \cong H^*(M) \otimes H^*(M) = \bigoplus_{p+q=r} H^p(M) \otimes H^q(M)$$

[5, Teorema 3.6], se sigue fácilmente que la clase de la diagonal puede expresarse como una suma de r-términos

$$u'' = b_1 \times c_1 + ... + b_r \times c_r,$$

donde $c_1, ..., c_r$ son ciertas clases de cohomología bien definidas en $H^*(M)$ con $\dim b_i + \dim c_i = n$.

Ahora, apliquemos el homomorfismo $/\mu_M$ a ambos lados de la ecuación

$$(a \times 1) \smile u'' = (1 \times a) \smile u''.$$

Usando del lado izquiero, la linealidad por la izquierda del producto slant, obtenemos que

$$((a \times 1) \smile u'')/\mu_M = a \smile (u''/\mu_M) = a.$$

Del lado derecho, sustituyendo u'' por $\sum b_j \times c_j$ y haciendo uso de [7, Proposición 29.17.5 y (29.22)], obtenemos

$$\begin{aligned} ((1 \times a) \smile u'')/\mu_M &= \sum ((1 \times a) \smile (b_j \times c_j))/\mu_M \\ &= \sum (-1)^{\dim a \cdot \dim b_j} (b_j \times (a \smile c_j))/\mu_M \\ &= \sum (-1)^{\dim a \cdot \dim b_j} b_j \langle a \smile c_j, \mu_M \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto esta última expresión debe ser igual a a. Así, si sustituimos a por b_i se sigue que el coeficiente

$$\sum (-1)^{\dim b_i \cdot \dim b_j} \langle b_i \smile c_j, \mu_M \rangle$$

de b_j debe ser 1 para $i = j$ y 0 para $i \neq j$. Haciendo $b_i^* = (-1)^{\dim b_i} c_i$, se sigue automaticamente el resultado.

□

Recordemos que la característica de Euler de un complejo CW finito K se define como la suma alternada

$$\chi(K) = \sum (-1)^k \dim H^k(K)$$

usando coeficienctes en un campo. Se sabe que la anterior suma alternada es igual a la suma alternada del número de k-celdas, por lo que es independiente del campo de coeficientes que se use.(Consultar [19])

Corolario 5.2.16. *Si M es una variedad suave, orientada compacta, entonces el índice de Kronecker $\langle e(\tau_M), \mu_M \rangle$, usando coeficientes enteros, es igual a la característica de Euler $\chi(M)$. Similarmente, para una variedad no orientada, el número de Stiefel–Whitney $\langle w_n(\tau_M), \mu_M \rangle$ es congruente con $\chi(M)$ módulo* 2.

Demostración. Debido a que toda variedad suave compacta admite una estructura de complejo CW, tenemos que $\chi(M)$ está bien definida.

Notemos que el haz normal v^n asociado al encaje diagonal de M en $M \times M$ es canónicamente isomorfo al haz tangente de M, [8, Lema 11.1].

Ahora, suponiendo que M es $\mathbb{Z}$-orientable, tenemos que la clase de Thom asociado al haz normal v^n

$$u'' \in H^n(M \times M, M \times M - \Delta(M))$$

está bien definida para cohomolgía con coeficientes enteros. Así por 5.2.7, tenemos que la restricción de u a la subvariedad diagonal $\Delta(M) \cong M$ es igual a la clase de Euler

$$e(v^n) = e(\tau_M).$$

De donde obtenemos que la clase de Euler del haz tangente de M está dada por

$$e(\tau_M) = \Delta^*(u'').$$

Podemos sustituir en la fórmula anterior la identidad

$$u'' = \sum (-1)^{\dim b_i} b_i \times b_i^*,$$

por lo que

$$e(\tau_M) = \sum (-1)^{\dim b_i} b_i \smile b_i^*.$$

Así, aplicando el homomorfismo $\langle \, \cdot \, , \mu_M \rangle$ en ambos lados, obtenemos la fórmula deseada

$$\langle e(\tau_M), \mu_M \rangle = \sum (-1)^{\dim b_i} = \chi(M)$$

El argumento módulo 2 es completamente análogo.

$\square$

Referencias

[1] M.A. Aguilar, J.L. Cisneros Molina, and M.E. Frías Armenta. Characteristic classes and transversality. *Topology and its Aplications*, 154:1220–1235, 2007.

[2] D. Husemoller. *Fibre Bundles.* Springer-Verlag, New York, tercera edition, 1994.

[3] T. Bröcker and K. Jänich. *Introduction to Differential Topology.* Cambridge University, Cambridge, London, 1982.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[5] Davis J. F. and Kirk P. *Lecture Notes in Algebraic Topology.* Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington, IN 47405, 2001.

[6] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 2000.

[7] M. J. Greenberg and J.R. Harper. *Algebraic Topology. A first course.* Addison-Wesley, Cambridge, 1981.

[8] J.W. Milnor and J.D. Stacheff. *Clases Características.* Papirhos, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

[9] R. MacPherson. Generic vector bundle maps, in: Dynamical systems. *Sympos., Univ. Bahia, Salvador. Academic Press*, 1:165–175, 1971.

[10] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A.A. du Plessis, and E.N. Looijenga. *Stability of Smooth Mappings, Lecture Notes in Math.*, volume 552. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[11] V. Guillemin and Pollack. *Differential Topology.* Prentice-Hall, Englenwood Cliffs, New Jersey, 1974.

[12] R.M. Switzer. *Algebraic Topology- Homotopy and Homology.* Grundlehrender mathematischen Wissenschften. Springer, Berlin, 1970.

[13] P.J. Hilton and S. Wylie. *Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology.* Cambridge University Press, New York, 1960.

[14] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:87–89, 1958.

[15] Michael A. Kervaire. Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 44(3):280–283, 1958.

[16] J. F. Adams. On the non-existence of elements of hopf invariant one. *Ann. of Math*, 72:20–140, 1960.

[17] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[18] Robert E. Stong. *Notes on Cobordism Theory.* Mathematical notes. Princeton University Press, University of Tokio Press, Tokio, 1968.

[19] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology.* Grundlehrender mathematischen Wissenschften. Springer, 1972.