



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS

FUNCIONES DE CORRELACIÓN Y EFECTOS NO MARKOVIANOS EN
ÁTOMOS INTERACTUANDO CERCA DE UNA NANOFIBRA ÓPTICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ALBERTO DEL ÁNGEL MEDINA

TUTOR PRINCIPAL
DOCTOR PABLO BARBERIS BLOSTEIN
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN
SISTEMAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DOCTORA ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

DOCTOR PEDRO ANTONIO QUINTO SU
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO DE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

En este trabajo estudiamos la dinámica colectiva de dos átomos de ^{87}Rb interactuando mediante el modo fundamental HE_{11} de una nanofibra óptica considerando explícitamente su función dieléctrica. Este proceso se vuelve no markoviano debido a los efectos de retardo en la interacción entre los átomos, así como de los tiempos de correlación del campo. Calculamos las funciones de correlación del modo fundamental para diferentes valores de la distancia entre los átomos a lo largo del eje de propagación de la fibra y de su radio, los cuales encontramos que son los parámetros relevantes del sistema cuando los efectos no markovianos son apreciables. Resolvemos numéricamente las ecuaciones de evolución atómica en el régimen no markoviano y estimamos la modificación de los ritmos de decaimiento colectivos de estados inicialmente súper y subradiantes, utilizando dos funciones dieléctricas para poder contrastar los resultados. Estos muestran una modificación de entre el 0.5 % y 4 % dependiendo de la función dieléctrica utilizada; además, debido al acoplamiento no despreciable de los átomos con una fracción de los modos de la nanofibra, encontramos que el fenómeno subradiante perfecto es en principio imposible en esta plataforma.

Abstract

We study the collective dynamics of two two-level ^{87}Rb atoms interacting via the fundamental guided mode HE_{11} of an optical nanofiber (ONF) whose dielectric function is explicitly taken into account. The process is rendered non-markovian due to the effects of retardation and finite correlation times of the field. We accomplish this by calculating the field correlation functions for several values of the atoms' separation along the propagation axis of the ONF and its radius, which are found to be the relevant parameters when we look for non-markovian effects in this system. We solve numerically the evolution equations of the atoms and estimate how the collective decay rates of initial super and subradiant states are modified when non markovian effects are relevant. In order to compare our results, we employ two toy model dielectric functions of the ONF, one based on the Drude-Lorentz model and a naively approached function in which we assume that all frequencies experience the same refractive index. Our results show that the collective decay rates are modified between 0.5 % and 4 % depending on the dielectric function employed and that, as a consequence of the atoms' non-negligible coupling with a variety of frequencies, a perfect subradiant process in this platform is in principle impossible.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a las siguientes personas:

- A mis tutores, Pablo Barberis y Pablo Solano, por ser entrañables personas y por su increíble apoyo y amistad.
- A los miembros de mi comité tutor, la Dra. Rocío Jáuregui Renaud y el Dr. Pedro Antonio Quinto Su, por su apoyo y acompañamiento a lo largo de este proyecto.
- A los miembros que conforman al jurado, los doctores Roberto León Montiel, Asaf Paris Mandoki y Neil Corzo Trejo, por sus observaciones y su amable disposición.
- A mis papás, Andrés y María, con especial cariño a esta última pues, sin esperar nada a cambio, ha luchado con una valentía excepcional contra el COVID-19 en beneficio de la gente que menos tiene. Eres un gran motivo de orgullo.
- A Blanca, la mamá de las 8 gatitas y gatitos, a quien sigo llevando en mi corazón.
- A mis hermanos, Andrés y Norma, porque, aunque hemos tenido muy poco tiempo para conocernos, los siento muy cerca de mi corazón.
- Al profesor Ricardo Hernández, por su calidez, amistad sincera y su apoyo incondicional en mi desarrollo profesional.
- A mis amigos Samuel e Israel, porque aunque el tiempo pasa siguen siendo igual de especiales y a Rodrigo, por su acompañamiento y ayuda en tiempos difíciles.
- Y al final, pero no menos importante, a mi muy querida Alejandra, por el tiempo que pasamos juntos y por ser mi compañera y apoyo en las buenas y en las malas. Esto no pudo haber sido sin ti (y sin Roku).

También agradezco sinceramente al proyecto PAPIIT-BG101421 y al CONACYT por las becas que me fueron entregadas a lo largo de la maestría.

Índice general

1. Introducción	5
2. Campos electromagnéticos guiados de una nanofibra óptica	10
2.1. Teoría general de la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de onda dieléctrica	10
2.1.1. Propiedades algebraicas de las soluciones y convenciones	12
2.2. Modos guiados de una nanofibra óptica	14
2.2.1. Estructura general de los campos guiados	15
2.2.2. Análisis de los modos guiados de la fibra y estimación de las frecuencias de corte	17
2.2.3. Regímenes operativos de la fibra	20
2.2.4. Modos de la fibra empleados en este trabajo	21
2.3. Cuantización de los modos guiados de una nanofibra óptica	24
2.3.1. Aproximación canónica	24
2.3.2. Cuantización	25
2.4. Funciones dieléctricas utilizadas en este trabajo	27
3. Dinámica de átomos alcalinos acoplados con una nanofibra óptica en el régimen markoviano	29
3.1. Estructura de átomos alcalinos, consideraciones generales y hamiltoniano del sistema átomos-nanofibra	30
3.1.1. Interacción átomos-campo: mecanismos de transición y reglas de selección	31
3.1.2. Descripción del sistema y su hamiltoniano	32
3.2. Evolución markoviana del sistema atómico	33
3.2.1. Ecuación maestra	34
3.2.2. Análisis de los términos de acoplamiento	37
3.3. Solución de la ecuación maestra: dinámica de estados súper y subrradiantes . .	41
4. Dinámica colectiva no markoviana de átomos macroscópicamente separados	46
4.1. Planteamiento del sistema y ecuaciones de evolución	47
4.2. Solución a las ecuaciones de evolución	49
4.3. Análisis de los resultados	52
4.3.1. Separación crítica y ritmos de decaimiento colectivo	52

4.3.2. Probabilidad de supervivencia de estados subradiantes y estudio de la evolución de estados colectivos.	54
5. Funciones de correlación de la nanofibra óptica para uno y dos átomos	58
5.1. Funciones de correlación para el caso de estados en la variedad de una excitación	59
5.2. Análisis de la densidad espectral en función de los parámetros atómicos y de la nanofibra	60
5.2.1. Relación de dispersión y velocidad de grupo	60
5.2.2. Consideraciones en el cálculo de la densidad espectral	62
5.3. Cálculo de las funciones de correlación	64
5.3.1. Función de correlación en presencia de un átomo	65
5.3.2. Función de correlación en presencia de dos átomos	65
6. Dinámica colectiva no markoviana de átomos microscópicamente separados	73
6.1. Algoritmo de integración de las ecuaciones de evolución del sistema	74
6.2. Resultados	76
6.2.1. Curvas de evolución colectiva súper y subradiante	76
6.2.2. Ritmos de decaimiento colectivo y de un solo átomo	77
6.2.3. Tiempo y velocidad de comunicación entre los átomos	78
7. Conclusiones	82

Capítulo 1

Introducción

El uso de estructuras nanofotónicas en el logro y control de la interacción entre átomos y fotones ha dado paso a una comprensión más profunda y rica de los fenómenos previamente observados en configuraciones en el vacío, así como en la definición de nuevos paradigmas de interacción entre radiación y materia. Por un lado, la estructura energética de los átomos (particularmente la de los alcalinos) los ha convertido en el ingrediente principal de un vasto conjunto de experimentos en física atómica y óptica cuántica, pues son las fuentes de luz no clásica por excelencia [1], [2]. Por otra parte, antes de la llegada e implementación de las estructuras nanofotónicas a estas áreas (aproximadamente a inicios del siglo XXI [2]), ya existía un amplio catálogo de esquemas convencionales de interacción eficiente entre átomos y fotones mediante arreglos macroscópicos en el vacío. De entre ellos, vale la pena mencionar los siguientes:

- *Electrodinámica cuántica en cavidades (Cavity QED)*. En este esquema se tienen átomos individuales dentro de una cavidad de Fabry-Perot de alta calidad interactuando con un solo modo, el cual es prácticamente resonante con la frecuencia de transición atómica. La figura de mérito de esta configuración es la *cooperatividad* $C = g^2/\kappa\gamma$ [3], [4], donde $g = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}/\hbar$ es la frecuencia de Rabi, γ es el ritmo de decaimiento espontáneo del átomo y κ el ritmo de decaimiento del campo fuera de la cavidad. La cooperatividad es, en esencia, una medida de la competencia entre el acoplamiento del átomo con el campo y los procesos disipativos del sistema. Con el uso de estas cavidades ha sido posible la observación experimental de las oscilaciones de Rabi reversibles entre átomos y fotones, la demostración del efecto Purcell, así como la producción y preparación bajo demanda de luz cuyas propiedades estadísticas son no clásicas [1],[4].
- *Ensamblados atómicos*. En esta aproximación se aprovecha el uso de conjuntos grandes de átomos, generalmente dentro de una trampa magnetoóptica (MOT), para maximizar la probabilidad de que interactúen con fotones. La correspondiente figura de mérito de este sistema es la *profundidad óptica* $OD = N_a\sigma_0/A_{\text{eff}}$, donde N_a es el número de átomos con sección eficaz transversal $\sigma_0 = 3\lambda_0^2/2\pi$ y A_{eff} es el área efectiva de los modos del campo. La profundidad óptica caracteriza el grado de atenuación exponencial de un campo que atraviesa el ensamble. Mediante esta técnica ha sido posible producir gases atómicos de tres niveles que exhiben transparencia inducida electromagnéticamente (EIT), a partir de la cual se obtienen otros efectos ópticos no lineales interesantes tales como el frenado de

luz dentro del medio, el mezclado de cuatro ondas y la generación de suma de frecuencias, entre otros [5]. Una de las desventajas del uso de este esquema radica en que, a medida que se aumenta el número de átomos, la respuesta del sistema se vuelve lineal, disminuyendo así la posibilidad de generar campos de luz no clásica.

- *Gases de Rydberg*. Una manera de darle la vuelta al problema de la respuesta lineal en ensamblajes atómicos consiste en el uso de átomos de Rydberg. En este caso, utilizando dos láseres fuera de resonancia es posible transitar al átomo coherentemente del estado base a uno de Rydberg $|r\rangle$, generando una respuesta no lineal de tercer orden efectiva en el medio similar a aquella que se produce en un sistema de tres niveles en el esquema de escalera interactuando con dos campos externos [5]. Así, los fotones emitidos en el decaimiento espontáneo del estado de Rydberg al base poseen las propiedades no clásicas deseadas [2], [5].

A pesar del gran éxito alcanzado por los acercamientos arriba descritos, las técnicas de enfriamiento y atrapamiento de átomos empleadas en el vacío fueron migradas a diferentes estructuras nanofotónicas tales como la nanofibra óptica y las guías de onda y cavidades de cristal nanofotónico, entre otras [2],[3],[6]. Entre los diferentes motivos se encuentran la necesidad de maximizar la probabilidad de interacción entre fotones y átomos explotando la capacidad que tienen las estructuras para confinar campos en regiones menores a su longitud de onda, su eficiencia en la recolección de los fotones emitidos por átomos a un nivel comparable con el de la emisión hacia el vacío, así como la posibilidad establecer interacciones a largo alcance entre los átomos debido a la estructura particular de los campos.

De todas las estructuras nanofotónicas empleadas, la nanofibra óptica es, probablemente, la más sencilla de todas. Esta consiste en una guía de onda dieléctrica cilíndrica (típicamente de vidrio de dióxido de silicio SiO_2 [7],[8]), la cual es adelgazada en su parte central hasta obtener radios de unos cuantos cientos de nanómetros mediante la aplicación de calor y estiramiento [3]. Este procedimiento las vuelve monomodales para un rango amplio de frecuencias e implica que el área transversal de los modos del campo se aproxima al límite de difracción para frecuencias en el visible $A_{\text{eff}} \propto \lambda^2$. Esto resulta en que una fracción no despreciable de la luz se propague como un campo evanescente fuera de la nanofibra, dando paso a una alta probabilidad de interacción entre un átomo en la vecindad de su superficie y un modo guiado resonante con su frecuencia de transición. Esto lo podemos apreciar en la profundidad óptica, la cual es una de las figuras de mérito de este esquema $OD = A_{\text{átomo}}/A_{\text{eff}} \approx 1/2$ en el límite de difracción.

Otras ventajas que ofrecen las nanofibras ópticas como una plataforma para hacer experimentos en óptica cuántica son los avances de la ingeniería en telecomunicaciones alrededor de las fibras ópticas, así como su versatilidad de en términos de conectividad con otros dispositivos [3], [7].

La riqueza de los campos de las estructuras fotónicas han dado paso también a nuevos paradigmas de interacción entre átomos y fotones, los cuales no necesariamente poseen una analogía directa con las configuraciones en el vacío. De forma muy breve, podemos clasificar la variedad de fenómenos que emergen del uso de las estructuras nanofotónicas en tres partes [2]:

- *Disipación coherente*, asociada con la realización de estados colectivos atómicos súper o subradiantes.
- *Fenómenos quirales y de muchos cuerpos*, los cuales surgen de la polarización longitudinal de los campos generados por las estructuras.
- *Fenómenos en la banda prohibida*, los cuales se dan cuando la frecuencia de transición atómica se encuentra igual o por debajo de la frecuencia de corte del campo generado por la estructura.

Generalmente, estos fenómenos se estudian desde la perspectiva de sistemas cuánticos abiertos, en los cuales los diferentes modos de los campos de las estructuras nanofotónicas actúan como reservorios de los átomos. Las aproximaciones de Born y Markov juegan un papel central en estos sistemas, pues nos permiten reducir las ecuaciones de evolución del subsistema pequeño, cuya estructura generalmente es complicada, a ecuaciones maestras que podemos resolver analíticamente para una variedad de casos [1], [9], [10]. Ambas aproximaciones están justificadas con base en argumentos físicos razonables tales como el acoplamiento débil entre el subsistema pequeño y el reservorio, así como la amplia diferencia entre el tiempo de correlación del reservorio y el de evolución apreciable del subsistema.

En este trabajo buscamos explorar cómo se modifican las propiedades colectivas de átomos de ^{87}Rb interactuando a través de una nanofibra óptica en situaciones que van más allá de la aproximación markoviana. Las razones detrás de esto son, primeramente, que la nanofibra óptica tiene la capacidad de propagar eficientemente los campos a lo largo de grandes distancias, por lo que es indispensable tomar en cuenta los efectos de retardo en la dinámica colectiva de los átomos cuando interactúan mediante este mecanismo. Adicionalmente, la posibilidad de que en esta plataforma los átomos disipen colectivamente igual que en el vacío para ciertas configuraciones espaciales resulta de suponer que los átomos se acoplan exclusivamente con el modo del campo que es resonante con su frecuencia de transición ([10], [11], [12], por ejemplo). Es interesante entonces explorar cómo se modifican estos resultados si consideramos explícitamente el acoplamiento de los átomos con las demás componentes en frecuencia del campo.

Concretamente, los objetivos de este trabajo son:

- Calcular y analizar las funciones de correlación de la nanofibra óptica en presencia de los átomos en el caso en que sólo consideramos la acción de los modos guiados de la fibra. Utilizamos dos funciones dieléctricas para modelar la respuesta en frecuencias de la nanofibra.
- Investigar para cuáles parámetros de los átomos y la nanofibra las funciones de correlación indican un comportamiento no markoviano, el cual se determina a partir de la forma y la anchura de las funciones de correlación.

- Resolver numéricamente las ecuaciones de evolución del sistema atómico cuando los efectos no markovianos son apreciables y estimar la modificación a los ritmos de decaimiento colectivo.

Con este fin, nos centramos en el caso de dos átomos preparados en estados súper o subrradiante con a lo más una excitación, pues es la situación más sencilla de estudiar y capaz de mostrar un comportamiento no trivial. Adicionalmente, con el fin de obtener una intuición más profunda acerca de en cuáles situaciones la dinámica del sistema no es markoviana, estudiamos el caso en que la separación entre los átomos es comparable con la longitud de coherencia de un fotón emitido por un átomo independiente propagándose dentro de la nanofibra $l_{\text{coh}} = v_g(\omega_0)/\gamma \sim 1 \text{ m}$, como originalmente se plantea en el artículo [13].

Los resultados de este trabajo indican que los ritmos de decaimiento colectivo de los átomos se modifican entre 0.5 % y 4 % con respecto a la aproximación de Markov dependiendo de la función dieléctrica empleada. Los efectos no markovianos sobre la evolución de los átomos son más apreciables cuando el radio de la nanofibra es menor a aproximadamente 4 veces la longitud de onda asociada a la frecuencia de transición de los átomos y cuando estos están separados a menos de la mitad de la longitud de onda. Como consecuencia del acoplamiento de los átomos con una fracción no despreciable de los modos de la nanofibra, encontramos que, contrario a la predicción markoviana, no existe alguna separación entre los átomos (salvo $d = 0$) para la cual se dé un comportamiento subrradiante perfecto $\gamma_{\text{sub}} = 0$, lo cual sugiere que este efecto no es posible bajo este esquema en principio. Obtuvimos además que la evolución de los átomos es cualitativamente independiente de la función dieléctrica empleada.

Cuando estudiamos el caso en que los átomos están separados a una distancia comparable con la longitud de coherencia, encontramos que es necesario considerar la acción de un número considerable de términos en la suma que compone a la amplitud de probabilidad colectiva de los átomos con el fin de obtener resultados físicamente consistentes. Esto resulta en un decaimiento superradiante 2.2 veces mayor al de un átomo independiente, lo cual es más moderado con respecto a los resultados publicados en la referencia [13], donde se encontró que el ritmo de decaimiento superradiante llega a ser hasta 4.6 veces más grande comparado con el de un átomo independiente. Nuestros resultados fueron discutidos y corroborados por uno de los autores del artículo, quien amablemente nos indicó desde el principio la existencia de un error en los resultados que aparecen en el artículo.

El contenido de esta tesis está dispuesto de la siguiente manera: en el capítulo 2 presentamos los aspectos generales de la teoría de los modos guiados de la nanofibra óptica junto con un esquema de cuantización sencillo basado en la teoría de cuantización de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell y desarrollamos las funciones dieléctricas que caracterizan la respuesta de la nanofibra. En el capítulo 3 discutimos la estructura de los átomos alcalinos y su relevancia en la aproximación de dos niveles; estudiamos la dinámica de un par de átomos de ^{87}Rb que se acoplan con el campo de la nanofibra mediante transiciones dipolares eléctricas en el régimen markoviano y calculamos las cantidades relevantes tales como los ritmos de decaimiento colectivo para ambos estados súper y subrradiante. En el capítulo 4 presentamos las ideas propuestas en el artículo [13] adecuadas al contexto de dos átomos macroscópicamente separados interac-

tuando a través de una nanofibra óptica, así como la comparaciones de nuestros resultados con los publicados.

Los resultados originales de esta tesis se presentan en los capítulos **5** y **6**, los cuales consisten en el análisis y detalles en el cómputo de las funciones de correlación de la nanofibra óptica y la solución numérica a las ecuaciones de evolución fuera del régimen markoviano cuando los átomos están separados a unas cuantas longitudes de onda, respectivamente. Finalmente, en el capítulo **7** presentamos las conclusiones de este escrito, así como las perspectivas a futuro a lo largo de esta línea de trabajo.

Capítulo 2

Campos electromagnéticos guiados de una nanofibra óptica

Desarrollamos los aspectos generales de la teoría de propagación de campos electromagnéticos guiados en una nanofibra óptica desde la perspectiva de la solución a las ecuaciones macroscópicas de Maxwell como un problema de eigenvalores. Deducimos las relaciones de ortogonalidad de las soluciones, así como el análisis de los valores y funciones propias de la ecuación de onda como función de las componentes en frecuencia de los campos que buscamos que se propaguen en la fibra. Los valores y vectores propios de la ecuación de onda los asociamos con las frecuencias de corte de la fibra y con la estructura de los campos respectivamente. Encontramos que existe un modo, denominado fundamental, para el cual la frecuencia de corte (la cual corresponde al límite inferior de las frecuencias que pueden propagarse en forma de modos guiados) es nula y obtenemos expresiones explícitas para las amplitudes de los campos asociados a esta estructura, pues es con la que trabajamos a lo largo de este escrito.

Discutimos brevemente las condiciones necesarias de los regímenes operativos monomodal y multimodal de la fibra y desarrollamos un esquema sencillo de cuantización de los modos guiados de la fibra basado en la cuantización de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell cuando los efectos dispersivos y de absorción son despreciables. Finalmente proponemos para nuestro análisis dos modelos para la respuesta en frecuencias de la fibra a campos eléctricos externos.

2.1. Teoría general de la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de onda dieléctrica

En electromagnetismo, el término **guía de onda** se refiere al conjunto de estructuras capaces de sustentar y propagar ondas electromagnéticas de forma altamente eficiente (esto es, con pérdidas mínimas de potencia debidas a la atenuación por parte del medio que las sustenta o por efectos de radiación) a lo largo de una o más direcciones preferenciales. Estamos interesados en estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos en una sola dirección, por lo que modelamos a la guía de onda como un cilindro dieléctrico con perfil transversal arbitrario S y de una longitud L , la cual es mucho mayor comparada con cualquier escala

espacial relevante en nuestra discusión.

El medio dieléctrico está caracterizado por su permitividad eléctrica $\epsilon(\mathbf{x}, \omega)$ y permeabilidad magnética $\mu(\mathbf{x}, \omega)$. En su forma más general, estas son cantidades tensoriales que acoplan las diferentes componentes de los campos que interactúan con el medio y que se construyen a partir de considerar las interacciones entre los diferentes constituyentes del material; además, el principio de Neumann [14] garantiza que ambas cantidades heredan todas las simetrías asociadas a las celdas unitarias que resultan del proceso de formación del mismo. En nuestro caso, suponemos que el medio es homogéneo y que los campos de desplazamiento $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ y auxiliar $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ están relacionados con los campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ de la siguiente forma [15]

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = [\mu(\omega)]^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.1b)$$

Finalmente, suponemos que el medio es isotrópico, de tal manera que toda la información contenida en la permitividad y permeabilidad se condensa en dos funciones escalares $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega) \rightarrow \epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$.

Comenzamos nuestro análisis escribiendo las ecuaciones macroscópicas de Maxwell para las componentes de los campos en la base de Fourier para el tiempo usando la convención de la referencia [15]

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de Maxwell para las componentes de Fourier de los campos dentro de la guía toman la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega \mu \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.4)$$

donde hemos asumido que no hay distribuciones de carga y corriente libres y omitimos la dependencia en frecuencia de la permitividad y permeabilidad. Desacoplamos las ecuaciones y como consecuencia de la homogeneidad del medio obtenemos que los campos dentro de la guía satisfacen la ecuación de onda

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \epsilon) \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Debido a que existe una dirección preferencial de transmisión (que por convención tomaremos como el eje \hat{z} del cilindro), separamos la variación espacial de los campos en la dirección de propagación y proponemos que los campos tengan la siguiente forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t) e^{\pm i\beta z} e^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

donde el subíndice t se refiere a las coordenadas transversales a la dirección de propagación. Descomponemos al campo en sus partes paralela y transversal $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \equiv \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \omega) + F_z(\mathbf{x}, \omega)\hat{z}$, con $\mathbf{F}_t = (\hat{z} \times \mathbf{F}) \times \hat{z}$, y al sustituir en las ecuaciones de Maxwell obtenemos que las componentes transversales pueden ser escritas en términos de las paralelas E_z, B_z

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{\gamma^2}[\pm\beta\nabla_t E_z - \omega(\hat{z} \times \nabla_t B_z)], \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B}_t(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{\gamma^2}[\pm\beta\nabla_t B_z + \omega\mu\epsilon(\hat{z} \times \nabla_t E_z)], \quad (2.8)$$

$$\gamma^2 = \omega^2\mu\epsilon - \beta^2, \quad (2.9)$$

donde ∇_t se refiere al gradiente respecto a las variables transversales. Así, una vez que hemos resuelto la ecuación de onda para las componentes paralelas al eje de propagación de la guía de onda

$$[\nabla_t^2 + \gamma^2(\omega)] \cdot \begin{bmatrix} E_z(\mathbf{x}, \omega) \\ B_z(\mathbf{x}, \omega) \end{bmatrix} = 0, \quad (2.10)$$

el resto de las componentes quedan automáticamente determinadas.

2.1.1. Propiedades algebraicas de las soluciones y convenciones

La ecuación 2.10 junto con las condiciones a la frontera definidas por la guía de onda y el medio que la rodea definen una ecuación de eigenvalores para los campos cuyo espectro de valores y funciones propias $\{\gamma_\lambda, \mathbf{F}_\lambda | \lambda \in \mathbb{N}\}$ conocemos como los *modos de la guía* [15]. Dado uno de los eigenvalores de la solución de la ecuación 2.10 obtenemos el valor para el número de onda β

$$\beta_\lambda = \sqrt{\mu\epsilon} \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}, \quad (2.11)$$

$$\omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\epsilon}}; \quad (2.12)$$

la cantidad ω_λ es conocida como la *frecuencia de corte* del λ -ésimo modo de la guía y determina la cota inferior en las componentes de Fourier de los campos que pueden propagarse en forma de ondas a lo largo de esta. Para ver este comportamiento, notamos que para $\omega > \omega_\lambda$, $\beta_\lambda \in \mathbb{R}$ y por tanto el modo se propaga como una onda, mientras que para $\omega < \omega_\lambda$, $\beta_\lambda \in \mathbb{C}$ y las amplitudes de los campos decaen exponencialmente a medida que se alejan de su fuente dentro de la fibra.

Por otro lado, las funciones propias constituyen una base completa para representar las componentes de Fourier de un campo dentro de la guía

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{f=-1}^1 \sum_{\lambda=1}^N a_\lambda(\omega, f) \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_t, f) e^{if\beta_\lambda z} e^{-i\omega t}, \quad (2.13)$$

donde la suma en λ corre sobre los N diferentes modos asociados a la frecuencia ω , $f = \pm 1$ se refiere a las direcciones paralela y antiparalela al eje de propagación de la guía y $a_\lambda(\omega, f)$ es el factor de peso que acompaña a cada modo. El hecho de que los modos formen una base linealmente independiente nos permite construir una ortogonal una vez que definimos el producto interno en el espacio de funciones. En este trabajo deducimos la ortogonalidad de los modos en términos de la idea de reciprocidad en electromagnetismo, la cual está relacionada con el concepto de operadores hermíticos [7], [16].

Dadas dos distribuciones de corriente libre, $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$, contenidas en un volumen V no magnético ($\mu \approx \mu_0$) pero con permitividad con dependencia arbitraria en la frecuencia $\epsilon(\omega) \in \mathbb{C}$, definimos el campo $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{B}_1$ generado por las distribuciones y calculamos el flujo a través del volumen V

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV &= \int_S dS [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{B}_1] \cdot \hat{n}, \\ &= i\mu_0\omega[\epsilon(\omega) - \epsilon^*(\omega)] \int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* dV - \mu_0 \int_V [\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* + \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1] dV. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En el caso en que el volumen sea muy poco absorbente a las componentes de Fourier de los campos con frecuencia ω (una situación de primera necesidad en una guía de onda) y en ausencia de distribuciones de corriente libre, la ecuación 2.14 se reduce a

$$\int_S dS [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{B}_1] \cdot \hat{n} = 0, \quad (2.15)$$

la cual es una de las diferentes formas del *teorema de reciprocidad de Lorentz* [16],[7]. Para el caso de una guía de onda, tomamos a $\hat{n} = \hat{z}$ y a S como la superficie en la que están contenidas las componentes transversales a la dirección de propagación; para definir la ortogonalidad de los modos, notamos de las ecuaciones 2.7 y 2.8 que tenemos la libertad, ya sea de tomar la componente transversal de los campos real y la paralela puramente imaginaria o viceversa sin cambiar ninguno de los resultados que hemos obtenido. Para nuestro escrito, tomamos la siguiente convención

$$\mathbf{F}_t \in \mathbb{R}^2 \iff F_z \in i \cdot \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

en cuyo caso, obtenemos la siguiente relación para las componentes de los campos asociados a la propagación paralela y antiparalela en el eje \hat{z} (denotados con los superíndices + y - respectivamente)

$$\mathbf{E}_{-\lambda} = [\mathbf{E}_\lambda]^*, \quad (2.17)$$

$$= \mathbf{E}_t^+ - E_z^+ \hat{z},$$

$$\mathbf{B}_{-\lambda} = -[\mathbf{B}_\lambda]^*, \quad (2.18)$$

$$= -\mathbf{B}_t^+ + B_z^+ \hat{z}.$$

Si derivamos la ecuación 2.15 con respecto a z para los casos $(1 \rightarrow j, 2 \rightarrow k)$ y $(1 \rightarrow j, 2 \rightarrow -k)$,

donde j, k se refieren al j -ésimo y k -ésimo modo de la guía a frecuencia ω obtenemos

$$\begin{aligned} (\beta_j - \beta_k) \int_S dS [\mathbf{E}_j \times \mathbf{B}_k^* + \mathbf{E}_k^* \times \mathbf{B}_j] \cdot \hat{z} &= 0, \\ (\beta_j + \beta_k) \int_S dS [\mathbf{E}_j \times \mathbf{B}_{-k}^* + \mathbf{E}_{-k}^* \times \mathbf{B}_j] \cdot \hat{z} &= 0, \\ \Rightarrow \beta_j \int_S dS [\mathbf{E}_j^* \times \mathbf{B}_k] \cdot \hat{z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\beta_k \int_S dS [\mathbf{E}_j \times \mathbf{B}_k^*] \cdot \hat{z} = 0; \quad (2.20)$$

puesto que, en general, $\beta_\lambda \neq 0$, el teorema de reciprocidad se cumple sólo si

$$\int_S dS [\mathbf{E}_j^* \times \mathbf{B}_k] \cdot \hat{z} = \int_S dS [\mathbf{E}_j \times \mathbf{B}_k^*] \cdot \hat{z} = 0 \iff j \neq k, ; \quad (2.21)$$

estas son las relaciones de ortogonalidad con las que trabajaremos a lo largo de este escrito. Estas relaciones nos permiten no solo discriminar los diferentes modos de la guía sino además trabajar con una base ortonormal definida como

$$\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}, \omega)}{\sqrt{N_\lambda}}, \quad (2.22)$$

$$N_\lambda = \frac{1}{2} \left| \int_S dS [\mathbf{E}_\lambda \times \mathbf{B}_\lambda^*] \cdot \hat{z} \right|, \quad (2.23)$$

la cual es una expresión útil para la cuantización de los modos guiados del campo generado por una guía de onda.

Habiendo presentado algunas herramientas y propiedades básicas de los campos propagándose en guías de onda dieléctricas, estamos en posición de discutir con detalle el caso específico de la **nanofibra óptica**.

2.2. Modos guiados de una nanofibra óptica

En general, una fibra óptica consiste en un cilindro circular dieléctrico de radio a (habitualmente llamado **núcleo** [7]) y no magnético de vidrio de dióxido de silicio [3], SiO_2 , cuyo índice de refracción, para frecuencias en el régimen óptico, tiene valores entre 1.4 y 1.5 [17]. Una de las características importantes de las fibras ópticas en general es que el núcleo está recubierto por materiales con diferentes propiedades dispersivas y absorbentes. Las razones son, primeramente, proveer soporte estructural a la fibra para evitar efectos de distorsión y esparcimiento de los campos que se propagan dentro de la fibra; mucho más importante para nuestra discusión es, como veremos más adelante, que la relación entre los índices de refracción del núcleo y el recubrimiento resultan críticos en aspectos tales como el régimen operativo de la fibra, las velocidades de propagación de los campos y la determinación de la cota superior de la frecuencia para la propagación de los campos en forma de modos guiados.

Las nanofibras ópticas poseen radios típicos de unos cuantos cientos de nanómetros [3]; como resultado del proceso de adelgazamiento del vidrio, una nanofibra óptica carece del recubrimiento de algún otro material, por lo que los campos son enteramente guiados con aire o vacío actuando como recubrimiento (Ver Figura 2.1).

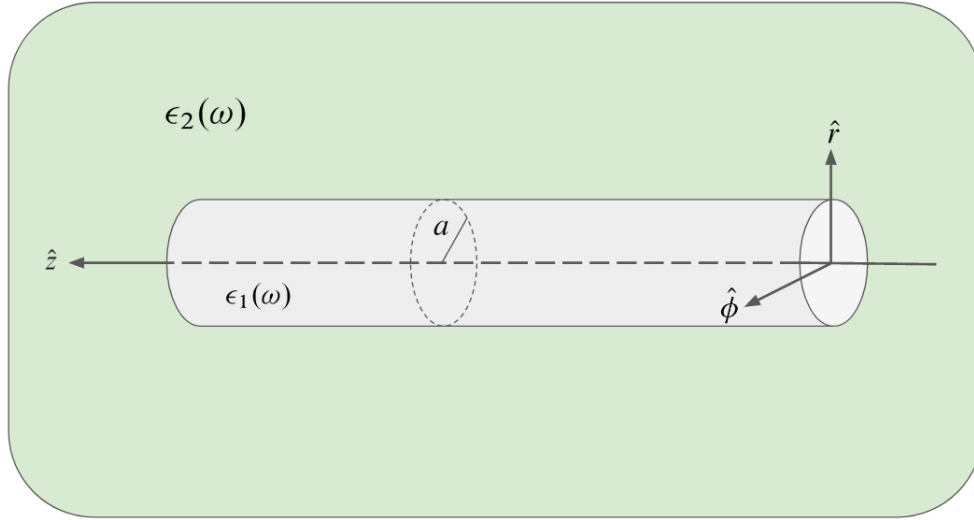


Figura 2.1: *Esquema de una nanofibra óptica.* En coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , tomamos el eje \hat{z} como la dirección de propagación de los modos guiados. La nanofibra óptica carece de recubrimientos que la separen del medio circundante y tiene un radio a junto con una función dieléctrica $\epsilon_1(\omega)$. El medio que la rodea posee una función dieléctrica muy cercana a la del vacío $\epsilon_2(\omega) \approx \epsilon_0$.

2.2.1. Estructura general de los campos guiados

Como demostramos en la sección anterior, resolver la ecuación de onda para las componentes de los campos en la dirección \hat{z} determina también sus componentes transversales; en coordenadas cilíndricas, donde

$$\mathbf{x} = (r, \phi, z), \quad (2.24)$$

$$\nabla_t = \hat{r} \partial_r + \hat{\phi} \frac{1}{r} \partial_\phi, \quad (2.25)$$

la ecuación de onda 2.10 para cualesquiera componentes paralelas con la siguiente estructura

$$F_z(\mathbf{x}_t, \omega) = A(\omega)g(r)e^{il\phi} \quad , \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (2.26)$$

toma la siguiente forma

$$0 = x^2 \partial_x^2 g(x) + x \partial_x g(x) + (x^2 - l^2)g(x), \quad (2.27)$$

$$x = \gamma(\omega) \cdot r, \quad (2.28)$$

la cual es la ecuación diferencial de Bessel para la función radial $g(x)$. Tomamos las soluciones a esta ecuación de tal manera que los campos satisfagan las condiciones a la frontera: para $r \rightarrow 0$, las soluciones deben ser finitas y para $r \rightarrow \infty$, $F_z \rightarrow 0$. Entonces, para $r < a$ (con a el radio de la fibra) tomamos las funciones de Bessel del primer tipo y de orden l , $J_l(\gamma r)$ y las componentes de los campos eléctrico y auxiliar \mathbf{H} de la fibra son

$$E_z^l = A J_l(hr) e^{il\phi}, \quad (2.29)$$

$$E_r^l = -\frac{i}{h^2} \left[Ah\beta J_l'(hr) + i\frac{\mu_0\omega l}{r} B J_l(hr) \right] e^{il\phi}, \quad E_\phi^l = -\frac{i}{h^2} \left[A\frac{l\beta}{r} J_l(hr) - B\mu_0\omega h J_l'(hr) \right] e^{il\phi},$$

$$H_z^l = B J_l(hr) e^{il\phi}, \quad (2.30)$$

$$H_r^l = -\frac{i}{h^2} \left[B\beta h J_l'(hr) - iA\frac{\omega\epsilon_1 l}{r} J_l(hr) \right] e^{il\phi}, \quad H_\phi^l = -\frac{i}{h^2} \left[iB\frac{\beta l}{r} J_l(hr) + A\omega\epsilon_1 h J_l'(hr) \right] e^{il\phi},$$

donde el subíndice en la susceptibilidad $\epsilon_1(\omega)$ se refiere a la región $r \leq a$ y la cantidad h está definida por la relación

$$\begin{aligned} h^2 &= \omega^2 \epsilon_1(\omega) \mu_0 - \beta^2, \\ &= k_1^2 - \beta^2, \\ k_1 &= n_1(\omega) \frac{\omega}{c}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para la región $r > a$, las funciones de Hankel del primer tipo, $H_l^{(1)}(ix)$, decaen exponencialmente a 0 a medida que x crece y son finitas $\forall x \neq 0$. De esta manera (omitiendo el superíndice (1) para denotar a la función de Hankel de primer tipo pero quedándonos clara su identidad), los campos fuera de la fibra son

$$E_z^l = C H_l(iqr) e^{il\phi}, \quad (2.32)$$

$$E_r^l = -\frac{1}{q^2} \left[C\beta q H_l'(iqr) + D\frac{\mu_0\omega l}{r} H_l(iqr) \right] e^{il\phi}, \quad E_\phi^l = -\frac{1}{q^2} \left[C\frac{\beta l}{r} H_l(iqr) - D\mu_0\omega q H_l'(iqr) \right] e^{il\phi},$$

$$H_z^l = D H_l(iqr) e^{il\phi}, \quad (2.33)$$

$$H_r^l = -\frac{1}{q^2} \left[D\beta q H_l'(iqr) - C\frac{\omega\epsilon_2 l}{r} H_l(iqr) \right] e^{il\phi}, \quad H_\phi^l = -\frac{1}{q^2} \left[D\frac{\beta l}{r} H_l(iqr) + C\omega\epsilon_2 q H_l'(iqr) \right] e^{il\phi};$$

de manera similar, el subíndice en ϵ_2 se refiere a los posibles medios que recubren a la fibra (para el caso de una nanofibra, consideraremos al vacío $\forall r > a$) y la cantidad q está definida por

$$\begin{aligned} q^2 &= \beta^2 - \omega^2 \epsilon_2(\omega) \mu_0, \\ &= \beta^2 - k_2^2, \\ k_2 &= n_2(\omega) \frac{\omega}{c}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Determinamos las amplitudes de las componentes paralelas en todo el espacio imponiendo las condiciones de continuidad de los campos en la interfase de la nanofibra y el medio que la recubre

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2^l - \mathbf{E}_1^l)|_{r=a} = 0, \quad \hat{n} \cdot (\mathbf{H}_2^l - \mathbf{H}_1^l)|_{r=a} = 0, \quad (2.35)$$

con $\hat{n} = (\hat{\phi}, \hat{r})$, los vectores normales transversales. Aplicando estas condiciones obtenemos un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones para las amplitudes

$$\begin{bmatrix} J_l(ha) & 0 & -H_l(ika) & 0 \\ \frac{l\beta}{ah^2} J_l(ha) & i \frac{\omega\mu_0}{h} J_l'(ha) & \frac{l\beta}{aq^2} H_l(ika) & -\frac{\omega\mu_0}{q} H_l'(ika) \\ 0 & J_l(ha) & 0 & -H_l(ika) \\ -i \frac{\omega\epsilon_1}{h} J_l'(ha) & \frac{l\beta}{ah^2} J_l(ha) & \frac{\omega\epsilon_2}{q} H_l'(ika) & \frac{l\beta}{aq^2} H_l(ika) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

cuyas soluciones son

$$C = A \frac{J_l(ha)}{H_l(ika)}, \quad D = B \frac{J_l(ha)}{H_l(ika)}, \quad (2.37)$$

$$B = iA \frac{hqa}{l} \left[\frac{\epsilon_1 q J_l'(ha) H_l(ika) + i h \epsilon_2 J_l(ha) H_l'(ika)}{\omega \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \beta J_l(ha) H_l(ika)} \right], \quad A \equiv \text{Libre}. \quad (2.38)$$

Estas son las formas más generales de los campos que se propagan en la nanofibra para una sola componente de Fourier. A continuación estudiamos las posibles formas particulares de los modos guiados de la nanofibra, así como el comportamiento del número de onda, ambos como funciones de la frecuencia ω .

2.2.2. Análisis de los modos guiados de la fibra y estimación de las frecuencias de corte

Dada una componente de Fourier con frecuencia ω , notamos de las expresiones para las amplitudes de los campos, 2.37 y 2.38, que la única cantidad que resta por determinar es el número de onda β , el cual queda fijo al imponer que el determinante de la matriz en la ecuación 2.36 sea nulo. De esta forma, el número de onda queda definido implícitamente en términos de la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\mathcal{F}(\omega, \beta) = 0, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{F}(\omega, \beta) = \frac{J_{l-1}(ha)}{ha J_l(ha)} - \left\{ \left[\frac{n_1^2 + n_2^2}{4n_1^2} \right] \cdot \left(\frac{K_l'(qa)}{qa K_l(qa)} \right) + \frac{1}{(ha)^2} \pm R(\omega, \beta) \right\}, \quad (2.40)$$

$$R(\omega, \beta) = \sqrt{\left[\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{4n_1^2} \right) \cdot \left(\frac{K_l'(qa)}{qa K_l(qa)} \right) \right]^2 + \left[\left(\frac{l\beta}{k_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right) \right]^2},$$

$$K_l(x) = \frac{\pi}{2} i^{l+1} H_l^{(1)}(ix),$$

donde $K_l(x)$ es la función modificada de Bessel del segundo tipo de orden l . La determinación de la estructura de los modos y la estimación de las frecuencias de corte están directamente relacionadas, por lo que haremos un análisis unificado de ambas, el cual sigue minuciosamente aquel presentado en la referencia [8, Cap. 8]. Utilizando las diferentes relaciones de recurrencia para las funciones cilíndricas, reescribimos la ecuación de eigenvalores $\mathcal{F}(\omega, \beta)$ como

$$(\epsilon J^- - H^-)(J^+ - H^+) + (\epsilon J^+ - H^+)(J^- - H^-) = 0, \quad (2.41)$$

con $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2$ y

$$J^+ = \frac{1}{ha} \frac{J_{l+1}(ha)}{J_l(ha)}, \quad J^- = \frac{1}{ha} \frac{J_{l-1}(ha)}{J_l(ha)}, \quad (2.42)$$

$$H^+ = -\frac{i}{qa} \frac{H_{l+1}(iqa)}{H_l(iqa)}, \quad H^- = -\frac{i}{qa} \frac{H_{l-1}(iqa)}{H_l(iqa)}. \quad (2.43)$$

La forma en que determinamos la estructura y frecuencias de corte de los modos de la fibra a partir de la ecuación 2.41 es aproximando en series de Taylor a las cantidades J^\pm, H^\pm para los casos límites en que β se aproxima a sus valores de corte dentro ($q \rightarrow 0$) y fuera ($h \rightarrow 0$) de la fibra y analizando los valores que deben tomar los argumentos de las funciones de Bessel tal que se satisfaga la ecuación de eigenvalores.

Brevemente, a medida que β se aproxima a su valor de corte fuera de la fibra (es decir $q \rightarrow 0$), los términos H^\pm tienen el siguiente comportamiento para $l \neq 0$

$$\lim_{q \rightarrow 0} H^+ = -\frac{2l}{(aq)^2}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (2.44)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} H^- = \frac{1}{2(l-1)}, \quad l = 2, 3, \dots \quad (2.45)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} H^- = -\ln\left(\frac{\Gamma a}{2}\right), \quad l = 1; \quad \Gamma \approx 1.7816, \quad (2.46)$$

mientras que para el caso en que $h \rightarrow 0$ tenemos,

$$\lim_{h \rightarrow 0} J^+ = \frac{1}{2(l+1)}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (2.47)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} J^- = \frac{2l}{(ha)^2}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (2.48)$$

Sustituyendo las aproximaciones en la ecuación 2.41 y considerando cada valor de l , obtenemos las estructuras y valores de corte para los diferentes órdenes de las funciones de Bessel. En la tabla 2.1 mostramos los posibles resultados; puesto que β queda fijo a través de la ecuación 2.40, el valor de corte en la tabla 2.1, h_c , en los argumentos de las funciones de Bessel de primer tipo que hacen cumplir la ecuación de eigenvalores 2.41 corresponde al valor de la frecuencia de corte ω_c asociada a la componente de Fourier de los campos.

Estructura y valores de corte de modos guiados de la fibra			
Nombre de la estructura	Abreviación	Valor de corte h_c	Órdenes l, m
Transversales eléctrico/magnético	TE_m, TM_m	$J_0(h_c a) = 0$	$l = 0, m \in \mathbb{N}$
Híbridos eléctricos	HE_{11}	$h_c a = 0$	$l = 1$
	HE_{1m}	$h_c a = Z_{1m} \neq 0$	$l = 1, m \in \mathbb{N}$
	HE_{lm}	$(\epsilon + 1)J_l(h_c a) = h_c a J_l'(h_c a)/(l - 1)$	$l = 2, 3, \dots$
Híbridos magnéticos	EH_{lm}	$h_c a = Z_{lm} \neq 0$	$l, m \in \mathbb{N}$

Tabla 2.1: *Estructura y valores de corte de los modos guiados de una fibra óptica. El término h_c se refiere al valor de la cantidad h en la ecuación 2.31 para el cual se satisface la ecuación de eigenvalores consistente con las ecuaciones de continuidad de los campos en la interfase. La cantidad Z_{lm} corresponde al m -ésimo cero de la función de Bessel del primer tipo de orden l , J_l .*

Notamos que, en general, los campos dentro de la fibra óptica son tales que sus tres componentes espaciales son no nulas, lo cual da paso a una mayor riqueza en su estructura en comparación con situaciones más familiares tales como los modos soportados por guías metálicas huecas, cavidades resonantes o medios homogéneos infinitos. Particularmente, el hecho de que exista la componente no nula paralela al eje de propagación, F_z , implica que los campos también están longitudinalmente polarizados. A partir de la ley de Gauss

$$F_z = \pm \frac{i}{\beta} \nabla_t \cdot \mathbf{F}_t, \quad (2.49)$$

observamos que la componente longitudinal de la polarización está desfasada por $\pm\pi/2$ respecto a las componentes transversales. Para el orden $l = 0$ en las funciones de Bessel, notamos que en las expresiones para las amplitudes de los campos dentro y fuera de la fibra 2.36 y 2.38 sólo es posible mantenerlas finitas si

$$A = 0 \iff \frac{h}{q} \frac{J_1(ha)}{J_0(ha)} + i \frac{H_1(iqa)}{H_0(iqa)} = 0, \quad (2.50)$$

$$B = 0 \iff \epsilon \frac{q}{h} \frac{J_1(ha)}{J_0(qa)} + i \frac{H_1(iqa)}{H_0(iqa)} = 0. \quad (2.51)$$

Los campos que resultan a este orden son los *transversales eléctrico y magnético* (incluido, por supuesto, el transversal electromagnético TEM) respectivamente, pues alguna de las componentes longitudinales de los campos es nula.

Para órdenes mayores a 0, en vista de que ninguna componente está obligada a ser nula, los nombres asignados a las estructuras de los campos son los *híbridos eléctricos* (HE_{lm}) y *magnéticos*

(EH_{lm}), en los cuales alguna de las componentes longitudinales es dominante en magnitud respecto a la otra [18]

$$\text{HE}_{lm} \iff |E_z| \ll |B_z|, \quad (2.52)$$

$$\text{EH}_{lm} \iff |E_z| \gg |B_z|. \quad (2.53)$$

De entre todos los modos con órdenes mayores a 0, resalta particularmente el *modo fundamental* HE₁₁, cuyo valor de corte $h_c = 0$ implica que

$$\begin{aligned} \omega_c &= \frac{h_c^{\text{HE}_{11}}}{\sqrt{\mu_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}}, \\ &\equiv 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

por tanto, tenemos que campos preparados con esta estructura pueden propagarse como ondas dentro de la fibra independientemente de su frecuencia o del radio de la fibra siempre y cuando las relaciones 2.31, 2.34 se mantengan válidas.

2.2.3. Regímenes operativos de la fibra

Discutimos brevemente los dos regímenes de operación de una fibra óptica: *multimodal* y *monomodal*. Desde la perspectiva geométrica, la luz se propaga completamente dentro de la fibra sólo si se satisface la condición de reflexión total interna

$$\theta < \theta_{\max} = \cos^{-1} \left(\frac{n_1}{n_2} \right), \quad (2.55)$$

donde θ es el ángulo de dirección de los rayos de luz medido con respecto al eje \hat{z} . En el espacio fase, hacemos una aproximación burda del número de modos N con número de onda β , que se encuentran dentro de la sección transversal de la fibra [15]

$$dN = 2 \cdot \pi a^2 \cdot \frac{d^2\beta}{(2\pi)^2},$$

donde $d^2\beta$ es un elemento de área en el espacio del número de onda transversal. Aproximando la magnitud del número de onda transversal como $k_t \approx \beta\theta$ obtenemos

$$\begin{aligned} d^2\beta &= 2\pi\beta^2\theta d\theta, \\ \rightarrow N &\approx (a\beta)^2 \int_0^{\theta_{\max}} \theta d\theta = \frac{1}{2}V^2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde V es el *parámetro de la fibra*

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}}, \quad (2.57)$$

el cual es proporcional a la apertura numérica de la fibra $\text{N.A.} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. Para una fibra de vidrio de SiO₂ y longitudes de onda en el espectro visible, las fibras operan en un régimen multimodal ($N = \mathcal{O}(300)$) para radios de la fibra de entre $(12 < a < 100)\mu\text{m}$, mientras que para radios menores a $5\mu\text{m}$ operan en el régimen monomodal, donde $N = \mathcal{O}(1)$ [7].

2.2.4. Modos de la fibra empleados en este trabajo

En vista de los radios típicos de las nanofibras ópticas, nuestro análisis se centrará exclusivamente en el régimen operativo monomodal, lo cual se traduce en campos con la siguiente forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{l, f=-1}^1 a(\omega, f, p) \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \omega, f, l) e^{if\beta z} e^{-i\omega t}, \quad (2.58)$$

$$= \sum_{l, f=-1}^1 a(\omega, f, l) \mathbf{f}(r, \omega, f, l) e^{il\phi} e^{if\beta z} e^{-i\omega t} \quad (2.59)$$

donde la variable $l = \pm 1$ es sobre la polarización en la base circular. Adicionalmente, asumimos a lo largo de este trabajo que los campos que se propagan en la fibra tienen la estructura del modo fundamental HE_{11} . Escribimos explícitamente las componentes del campo eléctrico para este modo dentro y fuera de la fibra [11]; para $r < a$ tenemos

$$e_r(r, \omega) = iA \frac{q}{h} \frac{K_1(qa)}{J_1(ha)} [(1-s)J_0(hr) - (1+s)J_2(hr)], \quad (2.60)$$

$$e_\phi(r, l, \omega) = -lA \frac{q}{h} \frac{K_1(qa)}{J_1(ha)} [(1-s)J_0(hr) + (1+s)J_2(hr)], \quad (2.61)$$

$$e_z(r, f, \omega) = fA \frac{2q}{\beta} \frac{K_1(qa)}{J_1(ha)} J_1(hr), \quad (2.62)$$

mientras que para $r > a$

$$e_r(r, \omega) = iA [(1-s)K_0(qr) + (1+s)K_2(qr)], \quad (2.63)$$

$$e_\phi(r, l, \omega) = -lA [(1-s)K_0(qr) - (1+s)K_2(qr)], \quad (2.64)$$

$$e_z(r, f, \omega) = fA \frac{2q}{\beta} K_1(qr), \quad (2.65)$$

La cantidad adimensional s está definida como

$$s = \left(\frac{1}{aqh} \right)^2 \cdot \left[\frac{q^2 + h^2}{\frac{J_1'(ha)}{haJ_1(ha)} + \frac{K_1'(qa)}{qaK_1(qa)}} \right], \quad (2.66)$$

mientras que la amplitud del campo A la escogemos tal que los modos constituyan una base ortonormal 2.23

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr r \cdot n^2(\omega, r) |e|^2, \\ &= 2\pi |A|^2 a^2 (P_1 n_1^2 + P_2 n_2^2), \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{qK_1(qa)}{hJ_1(ha)} \right)^2 \cdot \left((1-s)^2 [J_0^2(ha) + J_1^2(ha)] + (1+s)^2 [J_2^2(ha) - J_1(ha)J_3(ha)] \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{h}{\beta} \right)^2 \cdot [J_1^2(ha) - J_0(ha)J_2(ha)], \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= (1-s)^2 [K_1^2(qa) - K_0^2(qa)] + (1+s)^2 [K_1(qa)K_3(qa) - K_2^2(qa)] \\ &\quad + 2 \left(\frac{q}{\beta} \right)^2 \cdot [K_0(qa)K_2(qa) - K_1^2(qa)]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Si escogemos $A \in \mathbb{R}$, las componentes del campo poseen las siguientes simetrías

$$e_r(f, l) = e_r(-f, l) = e_r(f, -l), \quad (2.70)$$

$$e_\phi(f, l) = e_\phi(-f, l) = -e_\phi(f, -l), \quad (2.71)$$

$$e_z(f, l) = -e_z(-f, l) = e_z(f, -l), \quad (2.72)$$

$$e_r^*(f, l) = -e_r(f, l); \quad e_\phi^*(f, l) = e_\phi(f, l); \quad e_z^*(f, l) = e_z(f, l). \quad (2.73)$$

En la figura 2.2 se muestra la variación espacial del perfil de intensidad del modo fundamental HE_{11} para un valor de z constante, $I(x, y) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^*(\mathbf{x})|_{z=\text{cte}}$ utilizando dos radios para la nanofibra $a = (200, 300)$ nm y dos frecuencias $\omega = (0.5, 2.414)$ rad/fs, que corresponden a longitudes de onda en el vacío $\lambda = (3770, 780)$ nm respectivamente.

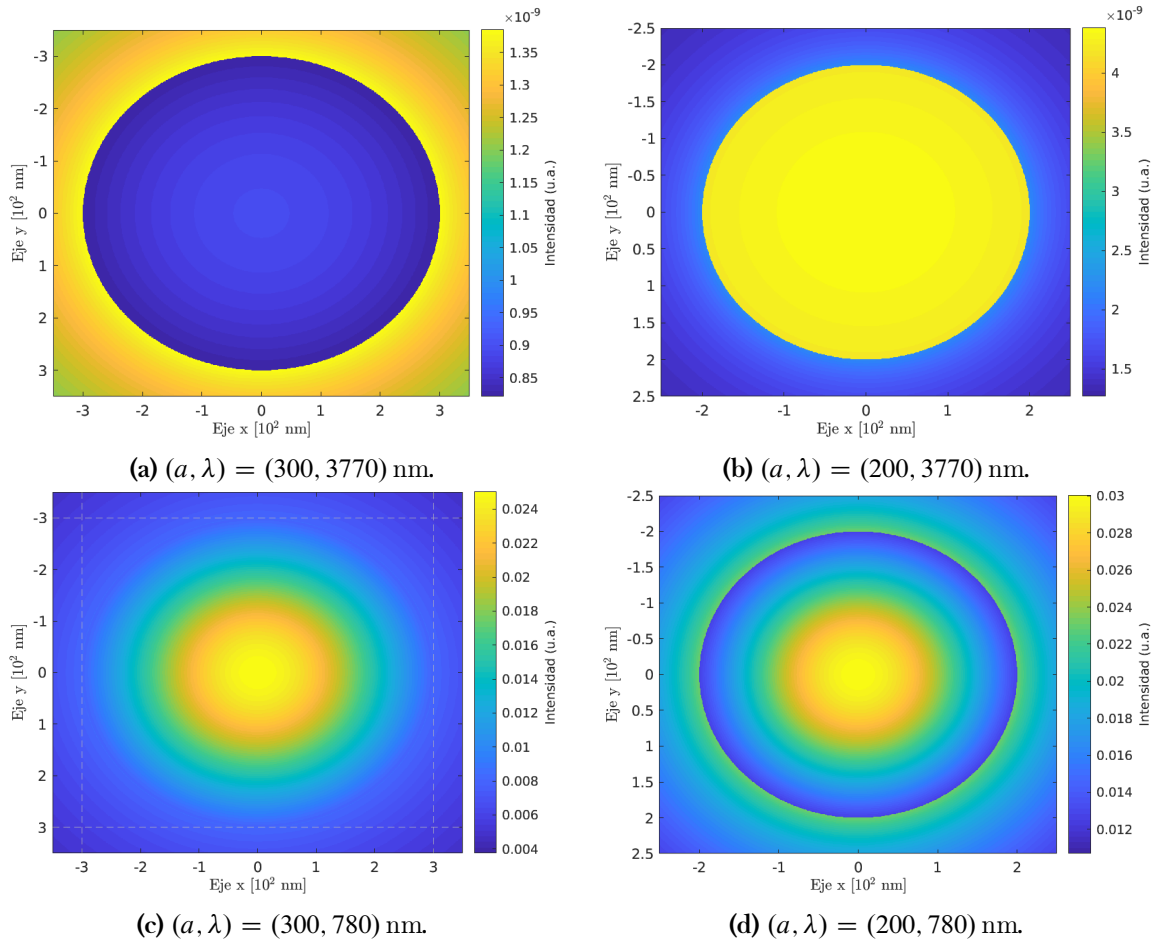


Figura 2.2: *Variación espacial del perfil de intensidad del modo fundamental HE_{11} . La intensidad del campo está definida para un valor de z constante, $I(x, y) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^*(\mathbf{x})|_{z=cte}$ y se calcula para dos radios de la fibra $a = (200, 300)$ nm y dos frecuencias con longitudes de onda en el vacío asociadas $\lambda = (780, 3770)$ nm. Para $\lambda = 3770$ nm = $3.77 \mu\text{m}$ el campo se transmite, ya sea completamente fuera 2.2a, o dentro 2.2b de la fibra; en contraste, para $\lambda = 780$ nm observamos que, si bien la mayoría del campo se transmite dentro de la fibra, en la vecindad de la superficie externa de la fibra la intensidad del campo es comparable con la del interior 2.2c, 2.2d.*

2.3. Cuantización de los modos guiados de una nanofibra óptica

Cuantizamos la teoría del campo electromagnético guiado de la fibra utilizando la técnica de **cuantización macroscópica**, la cual consiste en desarrollar una teoría cuántica de campos a partir de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell 2.3, 2.4. Este procedimiento tiene la gran ventaja de que no es necesario proveer un modelo microscópico detallado de la estructura del dieléctrico que genera los campos, así como de las interacciones de sus constituyentes con campos externos y el medio que los rodea [19]. Sin embargo, esta misma razón implica que nuestra teoría es incapaz de incorporar los efectos de absorción y disipación de la nanofibra.

Nuestro objetivo es obtener las expresiones para el campo electromagnético en términos de operadores de creación y aniquilación que resulten una expresión para el hamiltoniano libre del campo que tenga una escala de energía bien definida, así como expresiones correctas para las ecuaciones de Maxwell para los campos [20]. Asumimos que los efectos de absorción del dieléctrico son pequeños, de tal forma que las relaciones de ortogonalidad 2.14, 2.21 se mantienen válidas y por tanto podemos hacer una descomposición modal del los campos en términos de operadores de creación y aniquilación que satisfacen las reglas de conmutación bosónicas.

2.3.1. Aproximación canónica

Dadas las expresiones para los campos en términos de los potenciales en el espacio recíproco \mathbf{k} y de frecuencias ω , $\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega)$, $\phi(\mathbf{k}, \omega)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i\mathbf{k}\phi(\mathbf{k}, \omega) - i\omega\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega), \quad (2.74)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega), \quad (2.75)$$

proponemos la siguiente densidad lagrangiana [15], [19],

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*], \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_1 \cdot \left[k^2 \phi \phi^* - \omega(\phi \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^* + \phi^* \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + \omega^2 A_j^* A^j \right] - \frac{1}{\mu_0} k^2 A_j^* A^j \right\}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde hemos usado la convención de la suma de Einstein para expresar los productos internos. Comprobamos la consistencia de la densidad lagrangiana propuesta calculando las ecuaciones de Lagrange para las componentes del potencial $\mathbf{A}_\mu = (\phi, \mathbf{A})$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = 0. \quad (2.77)$$

Para ϕ^* , recuperamos la ley de Gauss

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.78)$$

$$\Pi_\phi = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} \right)^* = 0, \quad (2.79)$$

el hecho de que el momento canónico conjugado a ϕ sea nulo implica que este no es una variable dinámica y por tanto el sistema está constreñido. Contrario a la situación en el espacio libre,

donde podemos asignar $\phi \equiv 0$, para este caso no es posible fijar la norma de de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ junto con $\phi = 0$ de manera consistente. De la ley de Gauss, obtenemos que ϕ satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.80)$$

Para las componentes del potencial vectorial A_j^* obtenemos la ley de Ampere-Maxwell

$$\frac{1}{\mu_0} k^2 A_j = i\omega\epsilon(\omega)[ik_j\phi - i\omega A_j] \iff \nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}, \quad (2.81)$$

$$\Pi_j = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j^*} \right)^* = \frac{D_j}{2}, \quad (2.82)$$

es decir, que en la teoría macroscópica es el vector de desplazamientos \mathbf{D} y no el campo eléctrico \mathbf{E} la variable canónica conjugada a \mathbf{A} . Construimos la densidad hamiltoniana \mathcal{H} aplicando la transformada de Legendre a la densidad lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{A}_j^* \Pi^j + \Pi_j^* \dot{A}^j - \mathcal{L}, \\ &= \frac{2}{\epsilon} \Pi_j^* \Pi^j + \frac{1}{2\mu_0} k^2 A_j^* A^j - \underbrace{ik^j [\Pi_j \phi^* - \phi \Pi_j^*]}_{\rightarrow 0}, \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*], \end{aligned} \quad (2.83)$$

la cual es la expresión apropiada de la densidad de energía del campo electromagnético dentro de un medio dieléctrico.

2.3.2. Cuantización

Tomamos las relaciones de conmutación para los campos \mathbf{A} , Π consistentes con el hecho de que la divergencia de ambos es nula

$$[A_m(\mathbf{k}, \omega), \Pi_n(\mathbf{k}', \omega')] = i\hbar \left[\delta_{mn} - \frac{k_n k_m}{|k|^2} \right] \delta(\omega - \omega'), \quad (2.84)$$

en donde el término entre corchetes del lado derecho es la función delta transversal $\delta_{mn}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ [19], [21], en el espacio recíproco. Introducimos la expansión modal de los campos en términos de los operadores de creación y aniquilación, $a_j(\mathbf{k}, \omega)$ definidos como las variables normales de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell

$$a_j(\mathbf{k}, \omega) = \frac{N}{2} \left[\frac{k^2}{\mu_0} A_j - i\omega D_j \right], \quad (2.85)$$

$$a_j^\dagger(\mathbf{k}, \omega) = \frac{N}{2} \left[\frac{k^2}{\mu_0} A_j^* + i\omega D_j^* \right], \quad (2.86)$$

cuyo factor de normalización es tal que el hamiltoniano tenga la forma más clara posible y la relación de conmutación 2.84 preserve su forma. Notamos que el hecho de que estos operadores dependan explícitamente del campo de desplazamientos implica que dentro de la fibra

estos corresponden a la creación/anihilación de excitaciones colectivas del campo y la materia que conforman el dieléctrico, mientras que fuera de ella podemos darle la interpretación usual de fotones [20],[19].

Utilizando el orden normal para los operadores de creación y anihilación, integramos la densidad hamiltoniana 2.83 en el espacio recíproco y utilizamos la identidad de Parseval para las coordenadas transversales a la dirección de propagación, obteniendo así el hamiltoniano del sistema \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \int_0^\infty d\mathbf{x}_t \int_0^\infty \hbar\omega a_j^\dagger a^j(\mathbf{x}_t, \omega) d\omega, \quad (2.87)$$

donde hemos asumido que la dirección transversal al eje de propagación se mantiene prácticamente constante y por tanto $d\beta = d\omega/v_g$, donde v_g es la *velocidad de grupo* de los campos dentro de la fibra.

Asumiendo que el medio es muy poco absorbente y dispersivo en el régimen de frecuencias que estamos interesados en estudiar, podemos expresar el campo eléctrico de una nanofibra como una expansión en términos de operadores de creación y anihilación bosónicos

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \quad (2.88)$$

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{x}, t) = i \sum_{fl} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega\beta'}{4\pi\epsilon_0}} a_\mu \mathbf{e}_\mu(r) e^{-i(\omega t - f\beta z - l\phi)}, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{E}^- = [\mathbf{E}^+]^\dagger,$$

$$[a_\mu(\omega'), a_{\mu'}^\dagger(\omega')] = \delta_l^{l'} \delta_f^{f'} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.90)$$

donde $\mathbf{e}_\mu(r) = (e_r, e_\phi, e_z)(r, \omega)$ están definidas a través de las ecuaciones 2.60-2.65 y el subíndice $\mu = (f, l, \omega)$ es una abreviación para las direcciones de la polarización circular y de propagación del fotón, así como de su frecuencia. El hecho de que nuestra teoría sea incapaz de implementar los efectos de dispersión y absorción considerables implica que estamos considerando como instantánea la conexión temporal entre el campo eléctrico y de desplazamientos, lo cual deja a nuestra teoría incapaz de tomar en cuenta el principio de causalidad [22], [20], [15]; podemos concluir entonces que es muy importante tomar en consideración los límites de nuestra teoría en el momento de interpretar y analizar nuestros resultados.

2.4. Funciones dieléctricas utilizadas en este trabajo

Trabajamos con dos propuestas para modelar la respuesta de la nanofibra a campos eléctricos externos. La primera posee una forma trivial, en la cual la absorción es nula y el índice de refracción es el mismo para todas las componentes de Fourier

$$\text{Re}[\epsilon_N(\omega)] = n_1 \approx 1.4534, \quad \text{Im}[\epsilon_N(\omega)] \equiv 0; \quad (2.91)$$

el subíndice N se refiere a la palabra *Naïve*, o ingenua, debido a que no es una función dieléctrica realista en el sentido de que el valor del índice de refracción depende de la frecuencia, además de que no es posible suprimir la absorción de un material. La razón por la que consideramos esta función dieléctrica es que, comúnmente, en el estudio sistemas cuánticos abiertos la aproximación de Markov reduce la respuesta del reservorio solamente a la frecuencia característica del subsistema pequeño que se estudia. En este sentido, el valor escogido para n_1 coincide con el índice de refracción de las nanofibras ópticas utilizadas en los experimentos que nos interesa describir ([Ver 23, 24, por ejemplo]), en los cuales actúan como reservorios de átomos de ^{87}Rb , cuya frecuencia de resonancia para la línea D_2 , ω_{780} , corresponde a una longitud de onda de aproximadamente 780 nm.

Puesto que estamos interesados en estudiar los efectos no markovianos en átomos interactuando con la nanofibra, proponemos como segunda opción de análisis la función dieléctrica de **Lorentz-Drude**, la cual es una aproximación sencilla y físicamente consistente pues satisface las relaciones de Kramers y Kronig aunque, como mencionamos en la sección anterior, esto es irrelevante pues nuestra teoría cuántica de los modos guiados de la nanofibra es inconsistente con estas relaciones. Modelamos a la fibra como un dieléctrico con una densidad Ω de constituyentes que participan en la interacción con el campo. El electrón de valencia de cada constituyente oscila armónicamente alrededor de un núcleo pesado con una frecuencia de resonancia ω_R y experimenta una fuerza de amortiguamiento caracterizada por una constante fenomenológica γ . La ecuación de movimiento de un solo electrón es

$$-e\mathbf{E}(t) = m[\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_R^2\mathbf{x}], \quad (2.92)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(\omega) = -\frac{e}{m}[(\omega_R^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]^{-1}\mathbf{E}(\omega), \quad (2.93)$$

donde aplicamos la transformada de Fourier en la ecuación de movimiento del electrón para resolver su trayectoria en el espacio de frecuencias.

La suma de los momentos dipolares eléctricos $\mathbf{p}(\omega) = -e\mathbf{x}(\omega)$ de cada partícula forman la polarización $P(\omega) = \Omega\mathbf{p}(\omega)$ que, a primer orden, está conectada con el campo externo mediante la susceptibilidad eléctrica $\chi(\omega) = 1 + \epsilon(\omega)/\epsilon_0$ de la siguiente manera

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi(\omega) \cdot \mathbf{E}(\omega). \quad (2.94)$$

Sustituyendo las expresiones en esta relación, obtenemos la función dieléctrica de Drude-Lorentz, $\epsilon_L(\omega)$

$$\frac{\epsilon_L(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \omega_p^2 \cdot [(\omega_R^2 - \omega^2) - i\gamma\omega]^{-1}, \quad (2.95)$$

donde $\omega_p = \Omega e^2 / \epsilon_0 m$ es la *frecuencia del plasma* del dieléctrico. A lo largo de este escrito, tomaremos la frecuencia de resonancia de la fibra como aquella asociada a una longitud de onda de 350nm en el vacío, que es aproximadamente a la mitad del intervalo ultravioleta, en el cual el SiO₂ de la fibra es altamente absorbente [17]. La frecuencia del plasma la calculamos pidiendo que para la frecuencia de resonancia del ⁸⁷Rb, el índice de refracción coincida con $n_1 = 1.4534$. Finalmente, suponemos que los electrones de valencia radian como dipolos eléctricos en el vacío. Los valores de cada una de estas constantes se muestran a continuación

$$\omega_{350} = \frac{2\pi c}{350 \text{ nm}} \approx 5.385 \text{ rad/fs}, \quad (2.96)$$

$$\gamma_{350} = \frac{4 \alpha a_0^2 \omega_{350}^2}{3 c^2} \approx 4.73 \times 10^{-8} \text{ rad/fs}, \quad (2.97)$$

$$\omega_p \approx 5.0774 \text{ rad/fs}. \quad (2.98)$$

En la figura 2.3 se muestran las partes real 2.3a e imaginaria 2.3b de la función dieléctrica de Drude-Lorentz con los parámetros arriba mencionados.

Habiendo descrito las herramientas y resultados básicos que necesitamos para los modos guiados de la nanofibra óptica, estamos en posición de plantear y analizar su interacción con átomos alcalinos en la vecindad de su superficie.

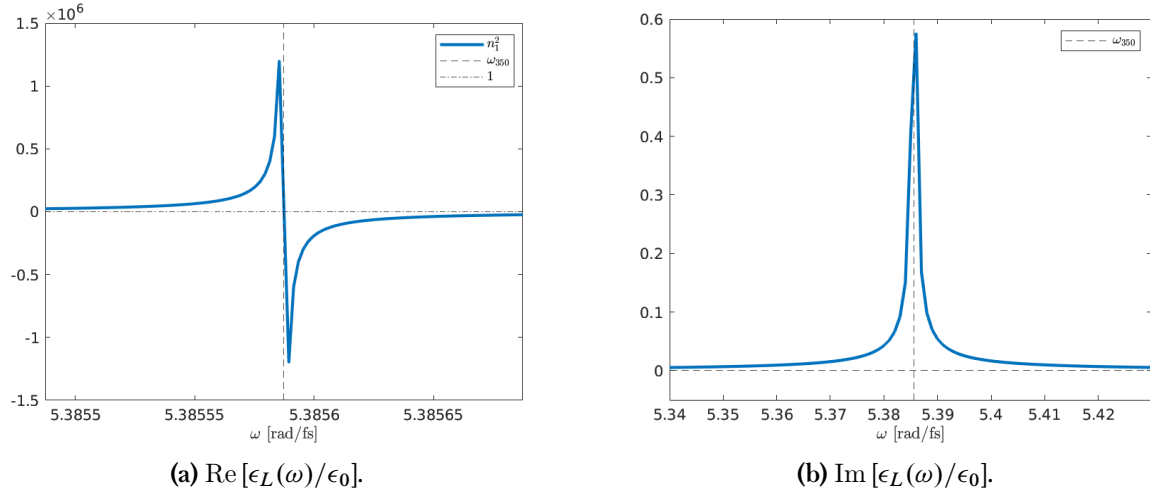


Figura 2.3: *Comportamiento de la función dieléctrica de Drude-Lorentz cerca de la frecuencia de resonancia de la nanofibra. En 2.3a se muestra la parte real de ϵ_L/ϵ_0 asociada con el índice de refracción de la nanofibra. Observamos que en la vecindad antes (después) de la frecuencia de resonancia de la fibra, el índice de refracción crece (decrece) exponencialmente para después obtener valores negativos. Este comportamiento lo asociamos con el fenómeno de dispersión anómala [15] y establece una cota superior a las componentes de Fourier de los campos que pueden propagarse en forma de modos guiados a través de la nanofibra. En 2.3b se muestra la parte imaginaria asociada a la absorción de la fibra; su máximo se encuentra centrado en la frecuencia de resonancia desplazada respecto al ritmo de decaimiento espontáneo de los constituyentes ($\omega_{350} - \gamma_{350}$).*

Capítulo 3

Dinámica de átomos alcalinos acoplados con una nanofibra óptica en el régimen markoviano

Ya que hemos desarrollado la teoría de los campos guiados de una nanofibra óptica, estamos en posición de plantear su interacción con átomos localizados en la vecindad de su superficie. Comenzamos nuestra discusión con la estructura de átomos alcalinos, resaltando sus características más relevantes y centrándonos en la aproximación de dos niveles para dar una descripción efectiva del proceso de decaimiento espontáneo. A continuación, planteamos los diferentes mecanismos de interacción entre los átomos y el campo de la nanofibra, siendo el término dipolar eléctrico $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$ el más relevante en nuestra discusión debido a que el tamaño de los átomos es mucho menor a la longitud de onda característica del campo.

Escribimos el hamiltoniano total del sistema átomos-campo y deducimos la ecuación maestra del operador de densidad atómico en las aproximaciones de Born, Markov y de onda rotante. Analizamos la acción de cada aproximación en la estructura de la ecuación, así como su significado físico. Estudiamos la forma de los términos de acoplamiento que dividen la evolución en una parte unitaria, mediada por el corrimiento de Lamb y la energía electrostática de Van der Waals, y una no unitaria mediada por los ritmos de decaimiento espontáneo individual y de transferencia energética entre los átomos. Para estos últimos, estudiamos su dependencia en la alineación de los momentos dipolares eléctricos de los átomos, así como de sus orientaciones relativas con respecto a la nanofibra.

Finalmente, resolvemos las ecuaciones de evolución del sistema atómico en la base de estados que diagonalizan al hamiltoniano de interacción. Obtenemos que el sistema decae colectivamente en fases súper y subrradiantes dependiendo de la orientación de los átomos y que existen ciertas configuraciones para las cuales los efectos son máximos, resultando incluso en un congelamiento indefinido de la evolución de la fase subradiante.

3.1. Estructura de átomos alcalinos, consideraciones generales y hamiltoniano del sistema átomos-nanofibra

Al conjunto de átomos que conforman los metales del grupo I de la tabla periódica se les denomina **alcalinos** y consisten en el litio (${}_{3}\text{Li}$), sodio (${}_{11}\text{Na}$), potasio (${}_{19}\text{K}$), rubidio (${}_{37}\text{Rb}$), cesio (${}_{55}\text{Cs}$) y el francio (${}_{87}\text{Fr}$). Para fines de nuestra discusión, la principal característica de este conjunto es que poseen un solo electrón de valencia, lo cual implica que la configuración electrónica de sus capas internas es igual a la de los gases nobles y por tanto, salvo en condiciones extremas, estas son muy poco susceptibles a interactuar con campos electromagnéticos externos. Este comportamiento resulta del hecho de que las capas internas son cerradas, de tal manera que por el teorema de Unsöld, su contribución al momento angular total (orbital y de espín) es nula [25]. En la base desacoplada de estados del electrón de valencia y el núcleo, el estado de un átomo alcalino se escribe como

$$|\psi\rangle_A = \underbrace{|n, l, m_l, m_s\rangle}_{e^-} \otimes \underbrace{|I, m_I\rangle}_{\text{Núcleo}}, \quad (3.1)$$

donde I, m_I se refieren a las magnitudes del espín nuclear \mathbf{I} y su componente a lo largo del eje de cuantización \mathbf{I}_z respectivamente.

Para el electrón de valencia tenemos el número cuántico principal n que da paso a la estructura energética gruesa del átomo (cuya magnitud es del orden de $\alpha^2 E_0$, $\alpha \approx 1/137$, $E_0 = m_e c^2$). Los números asociados a la magnitud del momento angular orbital \mathbf{L}^2 y su proyección en el eje de cuantización incluyendo al espín ($\mathbf{L}_z, \mathbf{S}_z$) $|l, m_l, m_s\rangle$ generan la estructura fina del átomo (con orden de magnitud $\alpha^4 E_0$) cuando consideramos el acoplamiento del momento dipolar magnético total del electrón de valencia con el campo magnético efectivo generado por el núcleo. Si tomamos en cuenta además al espín del núcleo obtenemos la estructura hiperfina del átomo (con orden de magnitud $\alpha^4 E_0 \cdot (m_e/m_p)$ para los átomos alcalinos [26]), la cual resulta del acoplamiento de los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico del núcleo con el campo magnético y el gradiente del campo eléctrico y generados por el electrón de valencia respectivamente [27].

Debido a la complejidad con la que escala considerar los diferentes niveles de la estructura fina e hiperfina en el proceso de radiación de los átomos en la fibra [Ver 24, P.e.], [23], [12], en este trabajo estudiamos la evolución efectiva entre niveles de energía del átomo considerando solamente los grados de libertad del electrón de valencia. De esta manera, la dinámica atómica cuando sólo ocurre una transición se reduce a la de un sistema de dos niveles ($\{|e\rangle, |g\rangle\}$, $E_e > E_g$) descrito mediante las matrices de Pauli

$$\sigma_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|, \quad \sigma_y = i(|g\rangle\langle e| - |e\rangle\langle g|), \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad \sigma = |g\rangle\langle e|, \quad (3.3)$$

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l, \quad j, k, l = x, y, z. \quad (3.4)$$

3.1.1. Interacción átomos-campo: mecanismos de transición y reglas de selección

En contraste con las formulaciones más familiares de la cuantización de las interacciones entre radiación y materia [ver 28, P.e.], la transformación de Wooley-Zineau-Power [21, Cap 4] nos permite describir las interacciones entre distribuciones de carga y corriente con campos electromagnéticos directamente en términos de los campos (y no los potenciales) y la expansión multipolar de las distribuciones. El hamiltoniano de interacción tiene la siguiente forma

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \underbrace{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{R}_0}}_{\mathcal{O}([\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{k}]^0)} + \underbrace{\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{R}_0} + \mathcal{Q}_{jk} \partial^j E^k(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{R}_0}}_{\mathcal{O}([\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{k}]^1)} + \mathcal{O}([\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{k}]^2), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} (\mathbf{x}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{Q}_{jk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} (3x_j^{\alpha} x_k^{\alpha} - \delta_{jk} x_{\alpha}^2), \quad (3.8)$$

donde \mathbf{D} es el momento dipolar eléctrico de la distribución y se asocia con el término de orden 0 en la expansión del hamiltoniano cuando comparamos la longitud de onda característica de los campos $|k| = 2\pi/\lambda$ con el tamaño característico de la distribución de carga R_0 . A primer orden en la expansión, cuando las variaciones de los campos a lo largo de las dimensiones de la distribución de carga comienzan a ser apreciables, aparecen el momento dipolar magnético \mathbf{m} , que se acopla con el campo magnético, y el momento cuadrupolar eléctrico $\bar{\mathcal{Q}}$ que se acopla con los gradientes del campo eléctrico. Los términos de orden mayor se obtienen de continuar con la expansión considerando cada vez más la variación espacial de los campos.

Para átomos alcalinos en el vacío con frecuencias de transición en el régimen óptico, el ritmo de decaimiento espontáneo entre dos niveles atómicos, $|a\rangle, |b\rangle$, debido a transiciones dipolares eléctricas obedece a la regla de oro de Fermi

$$\gamma^{(0)} = \frac{\omega_{ab}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\langle b|\mathbf{d}|a\rangle|^2, \quad (3.9)$$

$$\propto 10^6 \text{ Hz},$$

mientras que para transiciones de orden superior el decaimiento va como

$$\gamma^{(1)} = \langle b|\mathbf{m}|a\rangle = \langle b|\bar{\mathcal{Q}} : \nabla\mathbf{E}|a\rangle,$$

$$= \frac{e^2\omega_{ab}^5}{\pi\epsilon_0\hbar c^5} \left| \langle b|(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R}_0)(\hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R}_0)|a\rangle \right|^2, \quad (3.10)$$

$$\propto 10^0 \text{ Hz},$$

donde $\hat{\mathbf{e}}$ es el vector de polarización del campo eléctrico o magnético en cada caso. En el contexto de nuestra discusión, el hecho de que en el vacío haya una diferencia de 6 órdenes de

magnitud entre los diferentes ritmos de decaimiento espontáneo, $\gamma^{(0)}$ y $\gamma^{(1)}$, nos sugiere fuertemente que para átomos radiando en la vecindad de una nanofibra óptica el único término relevante en la expansión es el de interacción dipolar eléctrica (sin embargo, una investigación reciente [29] ha encontrado una excepción a este argumento para átomos en estados de Rydberg con $n \geq 25$ radiando en la vecindad de nanofibras ópticas, para los cuales las transiciones cuadrupolares eléctricas se vuelven cada vez más relevantes a medida que $n \rightarrow 30$).

Nuestro trabajo se centrará exclusivamente en las transiciones mediadas por este término, que en la base de estados de dos niveles se escribe como

$$\mathbf{H}_{\text{int}} \rightarrow \sum_{j=1}^N \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_j, t), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{d}_j (\sigma_j + \sigma_j^\dagger), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{d}_j = \langle e | e \mathbf{x}_j | g \rangle = \langle g | e \mathbf{x}_j | e \rangle. \quad (3.13)$$

Para determinar si dos niveles de la estructura energética del átomo están conectados mediante una transición dipolar eléctrica, evaluamos el elemento de matriz $\langle b | \mathbf{H}_{\text{int}} | a \rangle$ mediante el *teorema de Wigner-Eckart*, el cual nos da expresiones formales de las leyes de conservación del momento angular en mecánica cuántica. Para el caso de transiciones dipolares eléctricas, el elemento de matriz es no nulo sólo si se satisfacen las siguientes condiciones para los grados de libertad del electrón de valencia

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m_l = 0, \pm 1, \quad \Delta S = 0. \quad (3.14)$$

Estas son las reglas de selección de las transiciones dipolares eléctricas; el hecho de que en el proceso de transición entre dos niveles energéticos mediados por este término el átomo pueda emitir un fotón con momento angular ($l = 1, m = 1$) nos dice que este puede acoplarse con el modo fundamental de la nanofibra óptica HE₁₁; podemos entonces usar las expresiones para esta estructura obtenidas a través de la cuantización macroscópica 2.89, las cuales escribimos nuevamente junto con sus reglas de conmutación

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \\ \mathbf{E}^+(\mathbf{x}, t) &= i \sum_{fl} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar\omega\beta'}{4\pi\epsilon_0}} a_{\mu} \mathbf{e}_{\mu}(r) e^{-i(\omega t - f\beta z - l\phi)}, \\ \mathbf{E}^- &= [\mathbf{E}^+]^\dagger, \\ [a_{\mu}(\omega'), a_{\mu'}^\dagger(\omega')] &= \delta_l^{l'} \delta_f^{f'} \delta(\omega - \omega'). \end{aligned}$$

3.1.2. Descripción del sistema y su hamiltoniano

En los experimentos que estamos interesados en describir [24], [23], átomos fríos de una nube de rubidio 87, ^{87}Rb , que se encuentran en la vecindad de una nanofibra óptica, son

preparados en el estado excitado $|5P_{3/2}\rangle \equiv |e\rangle$ con una polarización bien definida mediante un láser centrado en la longitud de onda asociada a la transición de la línea D_2 , $\lambda \approx 780$ nm. Tiempo después de que el láser es apagado, los átomos decaen espontáneamente al estado base $|5S_{1/2}\rangle \equiv |g\rangle$, radiando en todos los canales posibles (modos radiados + guiados) y la luz que es colectada por la fibra se registra y contabiliza. A partir de esta información podemos inferir el ritmo de decaimiento espontáneo de los átomos en ambos canales y su dependencia en el alineamiento del momento dipolar eléctrico de los átomos \mathbf{d}_j , el radio de la fibra a , la separación a su superficie R y la orientación relativa entre pares de átomos. En la figura 3.1 presentamos un esquema del sistema que queremos describir junto con sus parámetros relevantes.

En la imagen de interacción, el hamiltoniano total del sistema átomos-nanofibra tomando en cuenta solamente los modos guiados es el siguiente

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{Átomos}} + \mathbf{H}_{\text{Campo}} + \mathbf{H}_{\text{int}}, \quad (3.15)$$

cuyas partes son

$$\mathbf{H}_{\text{Átomos}} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^z, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{H}_{\text{Campo}} = \sum_{\mu} \hbar\omega a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = i\hbar \sum_{\mu j}^N \left\{ G_{\mu j} \left(\sigma_j e^{-i(\omega+\omega_0)t} + \sigma_j^{\dagger} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \right) a_{\mu} - G_{\mu j}^* \left(\sigma_j e^{i(\omega-\omega_0)t} + \sigma_j^{\dagger} e^{i(\omega+\omega_0)t} \right) a_{\mu}^{\dagger} \right\}, \quad (3.18)$$

con $N = 1, 2$ para los casos de uno y dos átomos respectivamente; $\omega_0 = \omega_{780}$ es la frecuencia de resonancia de la línea D_2 del ^{87}Rb , la suma $\sum_{\mu} = \sum_{f,l} \int_0^{\infty} d\omega$ con $f, l = \pm 1$ condensa toda la información de la polarización y dirección de propagación de los modos guiados y

$$G_{\mu j} = \sqrt{\frac{\omega\beta^l}{4\pi\epsilon_0\hbar}} \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{e}_{\mu}(\mathbf{x}_j) e^{i(f\beta z_j + l\phi_j)}, \quad (3.19)$$

es el acoplamiento en unidades de frecuencia entre los átomos y el campo guiado de la nanofibra análogo a la frecuencia de Rabi en el vacío.

3.2. Evolución markoviana del sistema atómico

Antes de tratar el caso más general, y con el objetivo de tener expresiones con las cuales confirmar la consistencia del mismo, resolvemos la dinámica del sistema atómico en el régimen markoviano, el cual consiste en simplificar sus ecuaciones de evolución mediante las *aproximaciones de Born y Markov*. Muchos de los resultados presentados en esta sección fueron publicados originalmente en la referencia [11].

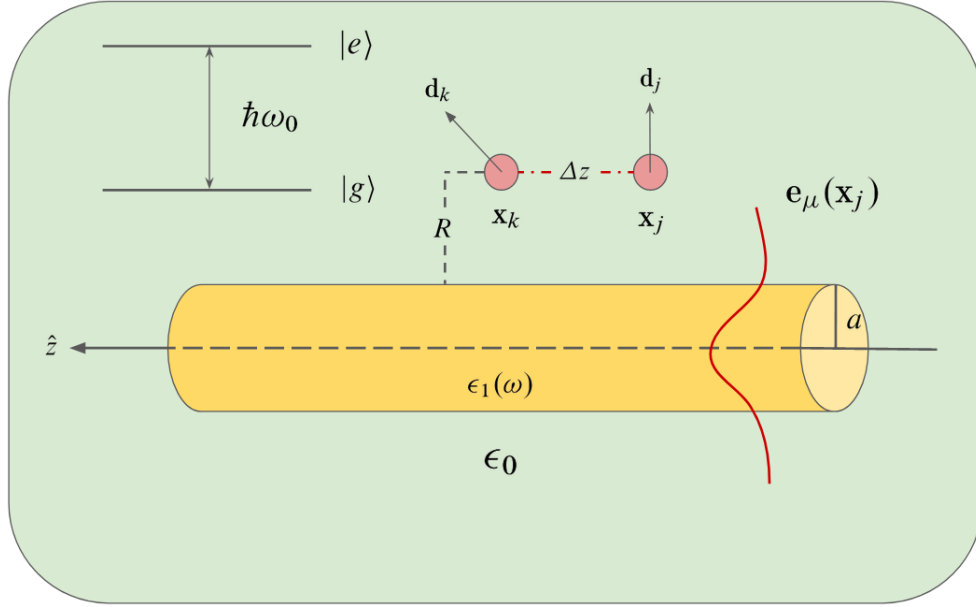


Figura 3.1: *Esquema del sistema átomos-nanofibra.* En la esquina superior izquierda: estructura energética simplificada de los átomos de ^{87}Rb , $|e\rangle \equiv |5P_{3/2}\rangle$, $|g\rangle \equiv |5S_{1/2}\rangle$ separados por la energía de transición de la línea D_2 $\omega_0 = \omega_{780}$. Al centro: en la vecindad de la nanofibra óptica de radio a con función dieléctrica $\epsilon_1(\omega)$ se encuentran un par de átomos j, k con coordenadas $\mathbf{x} = (r, \phi, z)$ y momentos dipolares eléctricos \mathbf{d} separados a una distancia R de la superficie de la fibra, los cuales están separados entre sí una distancia Δz a lo largo del eje de propagación de la fibra. Los átomos se acoplan con el modo fundamental de la fibra HE_{11} $\mathbf{e}_\mu(\mathbf{x}_j)$, donde el subíndice $\mu = (\omega, f, l)$ caracteriza su frecuencia, dirección de propagación f y polarización en la base circular l .

3.2.1. Ecuación maestra

En la imagen de interacción, la evolución del operador de densidad del sistema completo (átomos + modos guiados de la fibra), χ , obedece la ecuación de Von Neumann, la cual expresamos en una forma que nos permite identificar la acción de las aproximaciones [1]

$$\dot{\chi}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}_{\text{int}}(t), \chi(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\mathbf{H}_{\text{int}}(t), [\mathbf{H}_{\text{int}}(t'), \chi(t')]]. \quad (3.20)$$

A lo largo de este trabajo asumimos que inicialmente todas las excitaciones se encuentran en los átomos, por lo que en $t = 0$ el operador de densidad es factorizable en términos de los operadores de densidad de los subsistemas atómico, ρ , y del campo $R_0 = |\{0\}\rangle\langle\{0\}|$, $\chi(0) = \rho \otimes R_0$. La *aproximación de Born* consiste en ignorar la formación de correlaciones entre los átomos y el campo debido a que suponemos que estos se acoplan débilmente y que este último actúa como un reservorio con un número infinito de grados de libertad, de manera que el acoplamiento con los átomos lo afecta muy poco. Así, es razonable suponer que el operador de densidad completo evoluciona como un producto factorizado con desviaciones ligeras del orden de la magnitud

del término de interacción $\chi(t) = \rho(t) \otimes R_0 + \mathcal{O}(\mathbf{H}_{\text{int}})$.

Aplicando la traza parcial en ambos lados de 3.20 y desarrollando los conmutadores dentro de la integral obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \text{Tr}_R \left\{ \mathbf{H}(t) \mathbf{H}(t') \rho(t') R_0 + \rho(t') R_0 \mathbf{H}(t') \mathbf{H}(t) \right. \\ & \left. - \mathbf{H}(t') \rho(t') R_0 \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}(t) \rho(t') R_0 \mathbf{H}(t') \right\}, \end{aligned}$$

donde por simplicidad hemos hecho $\mathbf{H}_{\text{int}} \rightarrow \mathbf{H}$. Calculamos la traza parcial de cada término y mediante una *aproximación de onda rotante* (RWA por sus siglas en inglés) eliminamos los términos fuertemente oscilantes que van como $\exp\{\pm 2i\omega_0(t-t')\}$ y que representan procesos de doble excitación o desexcitación, $\sigma_j^\dagger \sigma_k^\dagger$, $\sigma_j \sigma_k$, respectivamente. Con estas consideraciones, la ecuación de evolución del operador de densidad atómico tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & - \int_0^t dt' \sum_{jk} \sum_{\mu} \left\{ G_{\mu j} G_{\mu k}^* \left[\sigma_j^\dagger \sigma_k \rho(t') - \sigma_k \rho(t') \sigma_j^\dagger \right] e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} \right. \\ & + G_{\mu j}^* G_{\mu k} \left[\rho(t') \sigma_j^\dagger \sigma_k - \sigma_j \rho(t') \sigma_k^\dagger \right] e^{i(\omega - \omega_0)(t-t')} + G_{\mu j} G_{\mu k}^* \left[\sigma_j \sigma_k^\dagger \rho(t') - \sigma_k^\dagger \rho(t') \sigma_j \right] e^{-i(\omega + \omega_0)(t-t')} \\ & \left. + G_{\mu j}^* G_{\mu k} \left[\rho(t') \sigma_j \sigma_k^\dagger - \sigma_j^\dagger \rho(t') \sigma_k \right] e^{i(\omega + \omega_0)(t-t')} \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & - \sum_{jk} \int_0^t dt' \left\{ F_{jk}(t-t') \left[\sigma_j^\dagger \sigma_k \rho(t') - \sigma_k \rho(t') \sigma_j^\dagger \right] + F_{jk}^*(t-t') \left[\rho(t') \sigma_j^\dagger \sigma_k - \sigma_j \rho(t') \sigma_k^\dagger \right] \right. \\ & \left. + K_{jk}(t-t') \left[\sigma_j \sigma_k^\dagger \rho(t') - \sigma_k^\dagger \rho(t') \sigma_j \right] + K_{jk}^*(t-t') \left[\rho(t') \sigma_j \sigma_k^\dagger - \sigma_j^\dagger \rho(t') \sigma_k \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Los kernels de integración en la ecuación 3.22

$$F_{jk}(t-t') = \sum_{f,l=-1}^1 \int_0^\infty d\omega G_{\mu j} G_{\mu k}^* e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')}, \quad (3.23)$$

$$= \sum_{f,l=-1}^1 \int_0^\infty d\omega \frac{\omega \beta'}{4\pi \epsilon_0 \hbar} [\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{e}_\mu(\mathbf{x}_j)] [\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{e}_\mu^*(\mathbf{x}_k)] e^{if\beta(z_j - z_k)} e^{il(\phi_j - \phi_k)} e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')},$$

$$K_{jk}(t-t') = \sum_{f,l=-1}^1 \int_0^\infty d\omega G_{\mu j} G_{\mu k}^* e^{-i(\omega + \omega_0)(t-t')}, \quad (3.24)$$

son las *funciones de correlación temporal* de los modos guiados de la nanofibra en presencia de uno $j = k$ y dos átomos $j \neq k$. Como veremos enseguida, la diferencia entre F_{jk} y K_{jk} radica en

que la primera captura los procesos que son resonantes con la transición atómica $\omega - \omega_0 \approx 0$ mientras que la segunda representa exclusivamente procesos dispersivos no resonantes con la transición $\omega + \omega_0 \neq 0, \forall \omega \geq 0$.

La ecuación 3.22 representa un sistema de ecuaciones integrodiferenciales acopladas para las diferentes componentes del operador de densidad atómico, ρ_{lm} . La *aproximación de Markov* consiste en suponer que el tiempo de correlación, τ_{corr} , codificado en las anchuras de F_{jk}, K_{jk} , es mucho menor a la escala de tiempo en la que los átomos evolucionan de manera apreciable y por tanto, para $t \gg \tau_{\text{corr}}$, el estado presente del sistema depende únicamente de su estado anterior inmediato.

En vista de la naturaleza de las interacciones, es razonable esperar la existencia de dos tiempos de correlación: aquel dado por la interacción de los átomos de forma individual con el campo de la nanofibra y otro que sea del mismo orden que el tiempo que tarda en recorrer una excitación dentro de la fibra la distancia entre los átomos $\tau_{\text{corr}} \approx \Delta z/v_g(\omega_0)$. Entonces, el efecto de la aproximación markoviana en nuestra descripción es ignorar el tiempo de memoria del campo de la nanofibra acerca de la presencia de los átomos de forma individual, así como los procesos de retardo en la propagación de la información entre los átomos a través de la acción del campo de la fibra. Sin embargo, la aproximación markoviana es bastante razonable y se encuentra en gran parte de las discusiones de fenómenos en óptica cuántica y física atómica del siglo pasado, empezando, probablemente, con la descripción de Wigner y Weisskopf del proceso de decaimiento espontáneo de un átomo en el vacío mediante una transición en el régimen óptico [30], [1], [31].

En nuestro caso, la aproximación de Markov consiste en hacer $\rho(t') \rightarrow \rho(t)$ para los operadores dentro de las integrales de lado derecho en la ecuación 3.22; para $t \gg t'$ las funciones de correlación se comportan como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt' \sum_{\mu} G_{\mu j} G_{\mu k}^* e^{\pm i(\omega \pm \omega_0)(t-t')} = \sum_{\mu} G_{\mu j} G_{\mu k}^* \left\{ \pi \delta(\omega \pm \omega_0) \pm i \mathcal{P} \left[\frac{1}{\omega \pm \omega_0} \right] \right\}, \quad (3.25)$$

la cual es la fórmula de Sokhotski y Plemelj y \mathcal{P} se refiere al valor principal de Cauchy.

Aplicando la aproximación de Markov en la ecuación 3.22 obtenemos la **ecuación maestra del sistema atómico**

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{jk=1}^N \gamma_{jk} \left(\left\{ \sigma_j^{\dagger} \sigma_k, \rho(t) \right\} - 2\sigma_k \rho(t) \sigma_j^{\dagger} \right) - i \sum_{jk} \Omega_{jk} \left[\sigma_j^{\dagger} \sigma_k, \rho(t) \right]. \quad (3.26)$$

Observamos cómo la aproximación de Markov tiene el efecto de separar la evolución del sistema atómico en una parte unitaria dada por el conmutador de ρ con $\sigma_j^{\dagger} \sigma_k$ y en una no unitaria codificada por los coeficientes $\gamma_{jk} \in \mathbb{R}$. A continuación presentamos un breve análisis del comportamiento de los diferentes términos que aparecen en la ecuación maestra, así como de su significado físico.

3.2.2. Análisis de los términos de acoplamiento

Ritmos de decaimiento espontáneo

Los términos asociados a los procesos resonantes con la transición atómica $[\delta(\omega - \omega_0)]$

$$\gamma_{jk} = 2\pi \sum_{f,l} \left(G_{\mu j} G_{\mu k}^* \right) \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (3.27)$$

son los ritmos de decaimiento espontáneo del sistema atómico cuyas formas explicitas son

$$\gamma_{jj} = 2 \frac{\omega_0 \beta'_0}{\epsilon_0 \hbar} \sum_{p=r,\phi,z} d_{jp}^2 |e_p(r_j, \omega_0)|^2, \quad (3.28)$$

$$\gamma_{jk} = 2 \frac{\omega_0 \beta'_0}{\epsilon_0 \hbar} \sum_{p_1, p_2=r,\phi,z} d_{jp_1} d_{kp_2} U_{p_1 p_2}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k), \quad j \neq k. \quad (3.29)$$

Los coeficientes diagonales $j = k$ cuantifican el decaimiento espontáneo individual de los átomos a los modos guiados de la nanofibra, mientras que aquellos fuera de la diagonal $j \neq k$ representan procesos de decaimiento asociados con la influencia de un átomo sobre el otro a través de la nanofibra [11]. Las funciones $U_{p_1 p_2}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ contienen toda la información relativa a la orientación de los átomos

$$U_{pp} = e_p(r_j, \omega_0) e_p^*(r_k, \omega_0) \cos(\phi_j - \phi_k) \cos \beta_0(z_j - z_k), \quad (3.30a)$$

$$U_{r,\phi} = i e_r(r_j, \omega_0) e_\phi(r_k, \omega_0) \sin(\phi_j - \phi_k) \cos \beta_0(z_j - z_k), \quad (3.30b)$$

$$U_{zr} = i e_z(r_j, \omega_0) e_r^*(r_k, \omega_0) \cos(\phi_j - \phi_k) \sin \beta_0(z_j - z_k), \quad (3.30c)$$

$$U_{z\phi} = -e_z(r_j, \omega_0) e_\phi^*(r_k, \omega_0) \sin(\phi_j - \phi_k) \sin \beta_0(z_j - z_k). \quad (3.30d)$$

Notamos cómo la presencia de la nanofibra óptica hace que el ritmo de transferencia de energía entre los átomos dependa fuertemente de su configuración espacial relativa, además de permitir la comunicación entre los átomos a pesar de estar arbitrariamente separados. Adicionalmente, contrario a la situación del vacío, los átomos son capaces de decaer hacia los modos guiados de la fibra aún cuando su momento dipolar eléctrico apunta en la dirección de propagación.

En las figuras 3.2 y 3.3 mostramos los valores y comportamientos de los ritmos de decaimiento espontáneo de átomos individuales y de transferencia de energía en función de las coordenadas de los átomos, así como de las orientaciones de sus momentos dipolares eléctricos.

Corrimientos en frecuencia

Los términos que generan la evolución unitaria en la ecuación maestra y que surgen de los procesos no resonantes con la transición atómica $\mathcal{P}[1/\omega \pm \omega_0]$

$$\Omega_{jk} = -\mathcal{P} \int_0^\infty d\omega \sum_{f,l} \left(\frac{G_{\mu j} G_{\mu k}^*}{\omega - \omega_0} - (-1)^{j+k} \frac{G_{\mu j}^* G_{\mu k}}{\omega + \omega_0} \right), \quad (3.31)$$

representan, para $j = k$, el *corrimiento de Lamb* que resulta de la interacción individual de los átomos con las fluctuaciones del campo del vacío de la nanofibra y para $j \neq k$ la *energía de interacción electrostática de Van der Waals*. Notemos que no es posible integrar analíticamente la ecuación 3.31 y por tanto no resulta obvio identificarla con estos términos; sin embargo, esta expresión tiene una forma similar a los términos que dan origen al corrimiento de Lamb y la energía de Van der Waals para átomos interactuando en el vacío ([ver 30, P.e.] y [32]), en cuyo caso, las integrales pueden ser calculadas exactamente para $j \neq k$ dando como resultado

$$\hbar\Omega_{jk} = \frac{d^2}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}^3} \left[1 - \frac{3(\hat{\epsilon} \cdot \mathbf{r}_{jk})^2}{r_{jk}^2} \right], \quad (3.32)$$

la cual la energía de interacción electrostática entre dos dipolos eléctricos en el vacío.

La magnitud típica de estos términos en el vacío es del orden de 10^6 Hz [32], [11], por lo que para la transición de la línea D_2 representan correcciones pequeñas a la frecuencia de resonancia de los átomos. De esta manera, para obtener intuición acerca de la dinámica del sistema, hacemos su análisis ignorando estos términos $\Omega_{jk} \equiv 0$, aunque es importante notar que para $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\| \leq \lambda_0$, el cociente entre el ritmo de decaimiento espontáneo del vacío contra el término de interacción electrostática escala como $\gamma_0/\Omega_{jk} \propto (\lambda_0/r_{jk})^3$, por lo que es importante tomar en consideración que el análisis es válido para separaciones de los átomos mayores a la longitud de onda característica del campo.

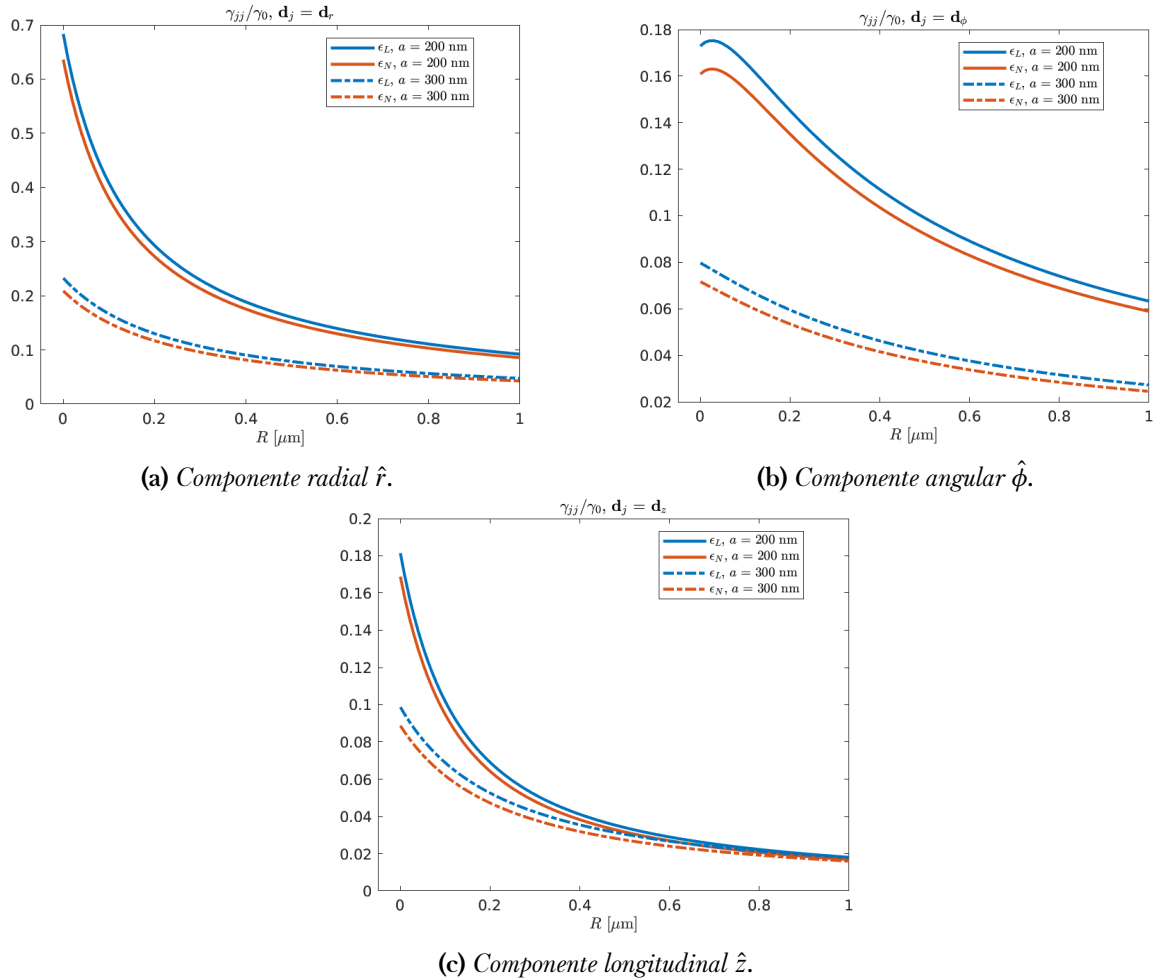


Figura 3.2: *Ritmos de decaimiento espontáneo de átomos individuales en función de la distancia a la superficie de la nanofibra R . Se muestra la variación del ritmo de decaimiento de un átomo en la estructura HE_{11} γ_{jj} 3.28 variando la separación del átomo a la superficie de la nanofibra R y la alineación del momento dipolar eléctrico del átomo. Tomamos en consideración dos radios de la fibra $a = (200, 300)$ nm y ambas funciones dieléctricas. En todos los casos el ritmo está normalizado con respecto al ritmo de decaimiento de un átomo en el vacío, $\gamma_0 = \omega_0^3 d^2 / (3\pi \epsilon_0 \hbar c^3)$; el momento dipolar eléctrico del ^{87}Rb en nuestros resultados se tomó como el elemento de matriz reducido de la línea D_2 , $d = \langle e || \mathbf{ex} || g \rangle \approx 4.227 e a_0$ [27] sin considerar las intensidades relativas debidas a transiciones sobre la estructura hiperfina. Observamos que el ritmo decae exponencialmente de manera apreciable sobre un rango de aproximadamente $1 \mu\text{m}$ y que el acoplamiento es el más intenso cuando el momento dipolar eléctrico está alineado en la dirección radial. Adicionalmente, en todos los casos obtenemos que el ritmo de decaimiento de un átomo en el vacío es mayor a cuando está en la vecindad de la nanofibra.*

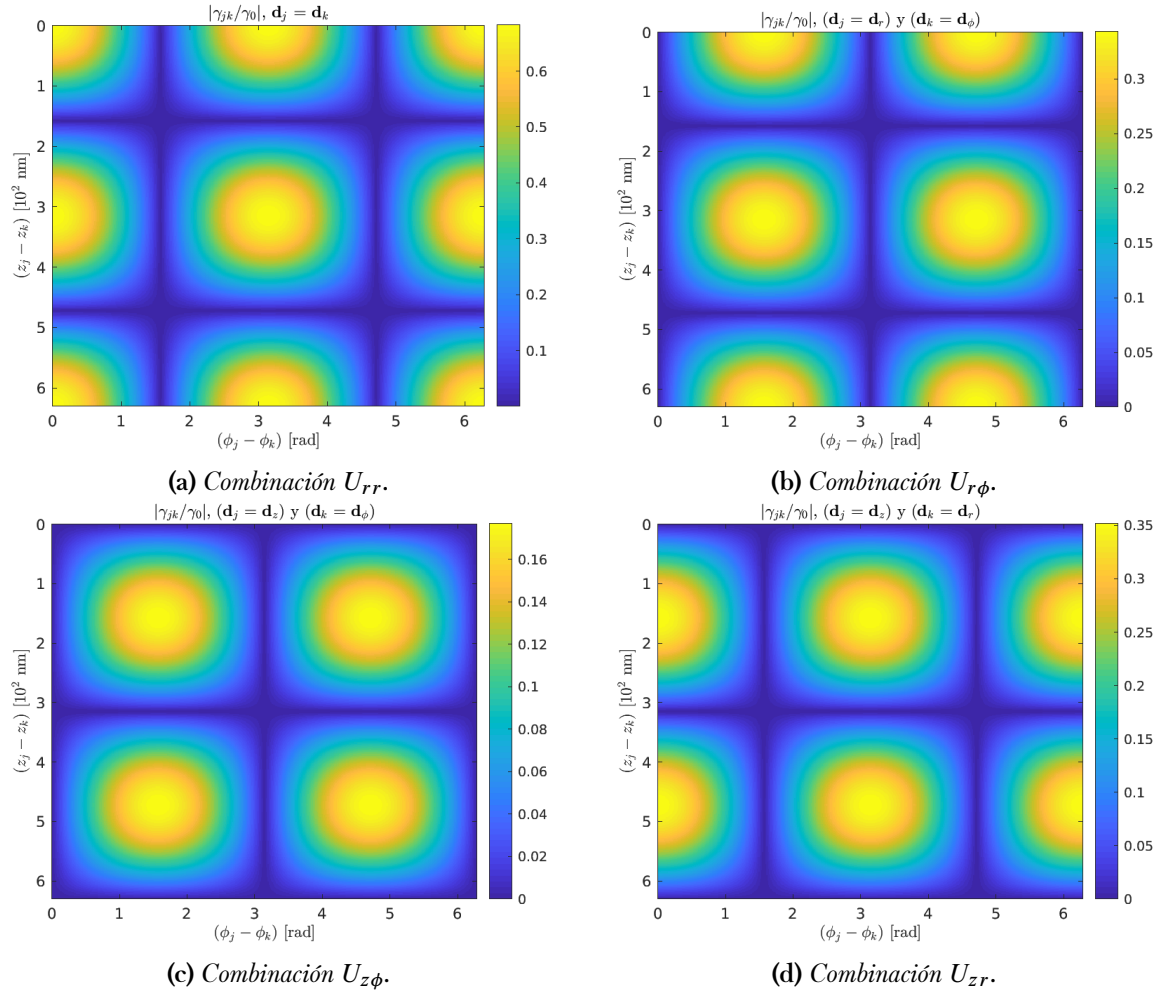


Figura 3.3: *Ritmos de transferencia de energía entre dos átomos comunicándose mediante el campo guiado de la nanofibra. Mostramos la variación del ritmo de transferencia energética entre dos átomos γ_{jk} 3.29 normalizado con respecto al ritmo de decaimiento espontáneo de un átomo en el vacío γ_0 en función de la configuración espacial relativa de los átomos $\phi_j - \phi_k \in [0, 2\pi]$, $z_j - z_k \in [0, 2\pi/\beta_0]$, $\beta_0 = \beta(\omega_0)$, y las diferentes combinaciones de las alineaciones de los momentos dipolares eléctricos de los átomos $U_{p_1 p_2}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ 3.30. Fijamos el radio de la fibra y la separación a la superficie en $(a, R) = (200, 0)$ nm. Como podemos ver en la figura 3.2, las variaciones en los resultados para las diferentes funciones dieléctricas son pequeñas cuando consideramos solamente la frecuencia de resonancia del ^{87}Rb y por tanto mostramos solamente los resultados para ϵ_L . Observamos el comportamiento periódico (que en principio debe mantenerse para separaciones arbitrariamente grande de los átomos) del ritmo debido a los senos y cosenos en las funciones 3.30 y la posibilidad de anular la transferencia de energía $\gamma_{jk} \equiv 0$ para configuraciones espaciales de los átomos que dependen solamente de las direcciones de sus momentos dipolares eléctricos.*

3.3. Solución de la ecuación maestra: dinámica de estados súper y subrradiantes

El hecho de que los átomos en la vecindad de la nanofibra (con polarizaciones y en posiciones arbitrarias) interactúen con el mismo campo guiado implica que estos también interactúan entre si de forma indirecta. Es de esperar entonces que el sistema atómico evolucione hacia un estado entrelazado y por tanto es útil trabajar en una base de estados acoplados que se obtiene a partir de diagonalizar el hamiltoniano de interacción 3.18 utilizando la base de estados de dos átomos desacoplada $\{|u\rangle = |ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |b\rangle = |gg\rangle\}$

$$|+\rangle = \cos \theta |eg\rangle + \sin \theta |ge\rangle, \quad E_+ = \hbar \left(\gamma_a + \sqrt{\gamma_{12}^2 + \Delta^2} \right), \quad (3.33)$$

$$|-\rangle = -\sin \theta |eg\rangle + \cos \theta |ge\rangle, \quad E_- = \hbar \left(\gamma_a - \sqrt{\gamma_{12}^2 + \Delta^2} \right), \quad (3.34)$$

$$\gamma_a = (\gamma_{11} + \gamma_{22})/2, \quad \Delta = (\gamma_{11} - \gamma_{22})/2. \quad (3.35)$$

Los vectores que diagonalizan el hamiltoniano de interacción $|\pm\rangle$ son superposiciones coherentes de los estados en los que hay a lo más una excitación en el sistema atómico y sus amplitudes están escritas en términos del ángulo de mezclado θ definido a partir de las relaciones

$$\sin 2\theta = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{12}^2 + \Delta^2}}, \quad \cos 2\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{\gamma_{12}^2 + \Delta^2}}, \quad (3.36)$$

por lo que es posible preparar al sistema atómico en estados arbitrarios utilizando su configuración espacial relativa. En el caso particular en que los átomos se acoplan de la misma manera con la nanofibra salvo en su posición en el eje \hat{z} 3.1, tenemos que $\gamma_a = \gamma_{jj}$, $\Delta = 0$ y, sin pérdida de generalidad

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \text{sgn}(\gamma_{12}) \frac{1}{\sqrt{2}},$$

lo cual implica que, dependiendo de la dirección en la que se transfiere la energía de un átomo al otro $\text{sgn}(\gamma_{12})$, los estados $|\pm\rangle$ son totalmente simétrico y antisimétrico con respecto al intercambio de la excitación, además de estar máximamente entrelazados.

Como veremos enseguida, las propiedades de simetría de los estados acoplados y su papel en la formación de correlaciones atómicas dan paso a la evolución colectiva de los átomos en los estados **súper** y **subrradiante** en el contexto de átomos interactuando mediante nanofibras ópticas [30], [11], [24]. En la base de estados acoplados $\{|u\rangle, |\pm\rangle, |b\rangle\}$ e ignorando las correcciones a la frecuencia de transición atómica $\Omega_{jk} \equiv 0$, las ecuaciones de evolución para las poblaciones del operador de densidad atómico son

$$\dot{\rho}_{uu} = -2\gamma_a \rho_{uu}, \quad \dot{\rho}_{bb} = \gamma^+ \rho_{++} + \gamma^- \rho_{--}, \quad (3.37)$$

$$\dot{\rho}_{++} = \kappa^+ \rho_{uu} - \gamma^+ \rho_{++}, \quad \dot{\rho}_{--} = \kappa^- \rho_{uu} - \gamma^- \rho_{--}, \quad (3.38)$$

$$\kappa^\pm = \gamma_a \pm \frac{\gamma_{12}^2 - \Delta^2}{\sqrt{\gamma_{12}^2 + \Delta^2}}, \quad \gamma^\pm = \gamma_a \pm \sqrt{\gamma_{12}^2 + \Delta^2}, \quad (3.39)$$

cuyas soluciones poseen una forma analítica

$$\rho_{uu}(t) = \rho_{uu}(0)e^{-2\gamma_a t}, \quad (3.40)$$

$$\rho_{++}(t) = -\frac{\kappa^+}{\gamma^-} \rho_{uu}(0)e^{-2\gamma_a t} + \left(\rho_{++}(0) + \frac{\kappa^+}{\gamma^-} \rho_{uu}(0) \right) e^{-\gamma^+ t}, \quad (3.41)$$

$$\rho_{--}(t) = -\frac{\kappa^-}{\gamma^+} \rho_{uu}(0)e^{-2\gamma_a t} + \left(\rho_{--}(0) + \frac{\kappa^-}{\gamma^+} \rho_{uu}(0) \right) e^{-\gamma^- t}, \quad (3.42)$$

$$\rho_{bb}(t) = 1 - (\rho_{uu} - \rho_{++} - \rho_{--}), \quad (3.43)$$

donde hemos usado la propiedad de la traza del operador atómico para la expresión de la población en el estado base.

Las ecuaciones describen el proceso de decaimiento colectivo espontáneo de dos átomos inicialmente excitados a un ritmo $2\gamma_a = \gamma_{11} + \gamma_{22}$ hacia los dos estados intermedios $|\pm\rangle$ para finalmente llegar al estado totalmente desexcitado en un tiempo del orden de $\tau = \gamma_a^{-1}/2$ (figura 3.4). Entonces, el proceso de decaimiento colectivo está acompañado por la emisión de dos fotones indistinguibles uno del otro tal que se satisfaga la relación de incertidumbre $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$. Notamos que el decaimiento hacia los estados intermedios no es simétrico, pues los factores que acompañan al decaimiento del estado doblemente excitado en las ecuaciones 3.41, 3.42 satisfacen la desigualdad

$$\frac{\kappa^+}{\gamma^-} \geq \frac{\kappa^-}{\gamma^+},$$

y por tanto, el sistema tiene la preferencia de decaer a través del estado simétrico $|+\rangle$.

Para dos átomos con sus momentos dipolares eléctricos alineados en el mismo eje \hat{p} y acoplados idénticamente con el campo de la nanofibra salvo en su separación con el eje \hat{z} tenemos

$$\begin{aligned} \kappa^\pm &= \gamma^\pm, \\ \gamma^\pm &= \gamma_{jj}(\hat{p}, R) \cdot \{1 \pm |\cos \beta_0(z_1 - z_2)|\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Así, para separaciones de la forma

$$\Delta z = \frac{n\pi}{\beta_0}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.45)$$

el efecto colectivo es *máximo*, pues $\gamma^\pm = [2\gamma_{jj}, 0]$. A las separaciones de la forma 3.45 las llamamos *de equilibrio*. Tomando este resultado en consideración, los estados acoplados $|\pm\rangle$ los relacionamos directamente con las fases súper y subradiantes respectivamente. Observamos también que el sistema es capaz de emitir colectivamente a pesar de que sólo haya una excitación en los átomos, provisto que estén inicialmente preparados en un estado correlacionado. En la figura 3.5 ejemplificamos los resultados de la evolución del sistema atómico en la aproximación de Markov para dos separaciones entre los átomos, de las cuales una se encuentra muy cerca de la primera posición de equilibrio $\Delta z \approx \pi/\beta_0$. En todos los casos observamos claramente la preferencia del sistema a decaer sobre los estados que son simétricos con respecto al

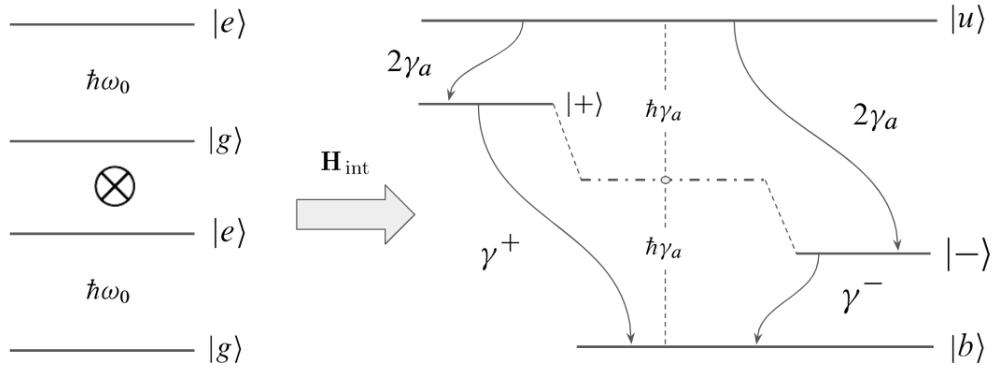


Figura 3.4: *Estructura energética y dinámica del sistema atómico debido a la interacción colectiva a través del campo guiado de la nanofibra.* La interacción colectiva indirecta que resulta de los átomos acoplándose con el campo guiado de la nanofibra \mathbf{H}_{int} resulta en la modificación de la estructura energética del sistema atómico. Dos átomos inicialmente excitados $|u\rangle = |ee\rangle$ decaen en una fase superradiante $2\gamma_a = \gamma_{11} + \gamma_{22}$ hacia los estados acoplados $|\pm\rangle$; posteriormente, estos decaen hacia el estado totalmente desexcitado $|b\rangle = |gg\rangle$ con ritmos γ^\pm respectivamente. El proceso completo de decaimiento tiene una duración del orden de $\tau = \gamma_a^{-1}/2$ acompañado por la emisión de dos fotones indistinguibles el uno del otro.

intercambio de las excitaciones en los átomos $|u\rangle \rightarrow |+ \rangle \rightarrow |gg\rangle$, siendo el efecto más dramático cuando la separación de los átomos se acerca a la de equilibrio.

El resultado más inusual que obtenemos es que en $\Delta z = n\pi/\beta_0$ la evolución en la fase subradiante se frena completamente después de tiempos muy cortos 3.5c y es capaz de mantenerse así indefinidamente. Notamos que esto resulta de que, en la aproximación de Markov, el átomo se acopla solamente con la componente del campo que es exactamente resonante con la frecuencia de transición atómica. De esta forma, el fenómeno de subradiancia perfecta se entiende en términos de los efectos de interferencia destructiva del estado antisimétrico sobre las correlaciones atómicas junto con el acoplamiento máximo de los átomos con el campo en las separaciones de equilibrio.

Comentarios conclusivos

Como hemos visto, la aproximación de Markov aplicada en nuestro problema ha resultado en una descripción de la evolución de los átomos a tiempos del orden del tiempo de vida media del estado excitado $\tau \propto \gamma_{jj}^{-1}$. A pesar de la validez general de la aproximación markoviana y lo razonables que son los resultados que obtuvimos, es necesario reconsiderar su validez en el contexto del problema que estamos interesados en describir.

En primera instancia, el modelo predice que el comportamiento colectivo del sistema es instantáneo, independientemente de la separación de los átomos a lo largo del eje de la fibra. Para separaciones mayores a la longitud asociada a la vida media del estado excitado ($l \propto v_g(\omega_0)/\gamma_{jj}$,

la *longitud de coherencia*), es claro que los efectos de retardo en la propagación de los campos dentro de la fibra deben afectar la formación de las correlaciones atómicas que originan el comportamiento colectivo, pues, para el tiempo en que un átomo se entera de la presencia del otro, la probabilidad de que este haya decaído de forma independiente es cercana a 1.

Por otro lado, obtuvimos que la aproximación de Markov considera que la parte no unitaria de la dinámica (dada por los términos γ_{jk}) se debe exclusivamente al acoplamiento del átomo con el modo cuya frecuencia es exactamente resonante con la transición atómica $\delta(\omega - \omega_0)$. Esto ignora que, contrario a la situación en el vacío, la densidad de modos del campo guiado de la nanofibra tiene una estructura no trivial que depende de los parámetros que la caracterizan, incluyendo su función de respuesta. Entonces, es posible que los átomos se acoplen apreciablemente con varias componentes en frecuencia del campo de la nanofibra, resultando en un comportamiento diferente de los ritmos de decaimiento espontáneo.

Estas cuestiones nos motivan a preguntarnos si existen modificaciones cualitativas a los resultados que hemos obtenido con la aproximación markoviana cuando las incorporamos en nuestro modelo. En el siguiente capítulo consideraremos el primero de estos casos: los efectos de retardo en la formación de las correlaciones del sistema atómico.

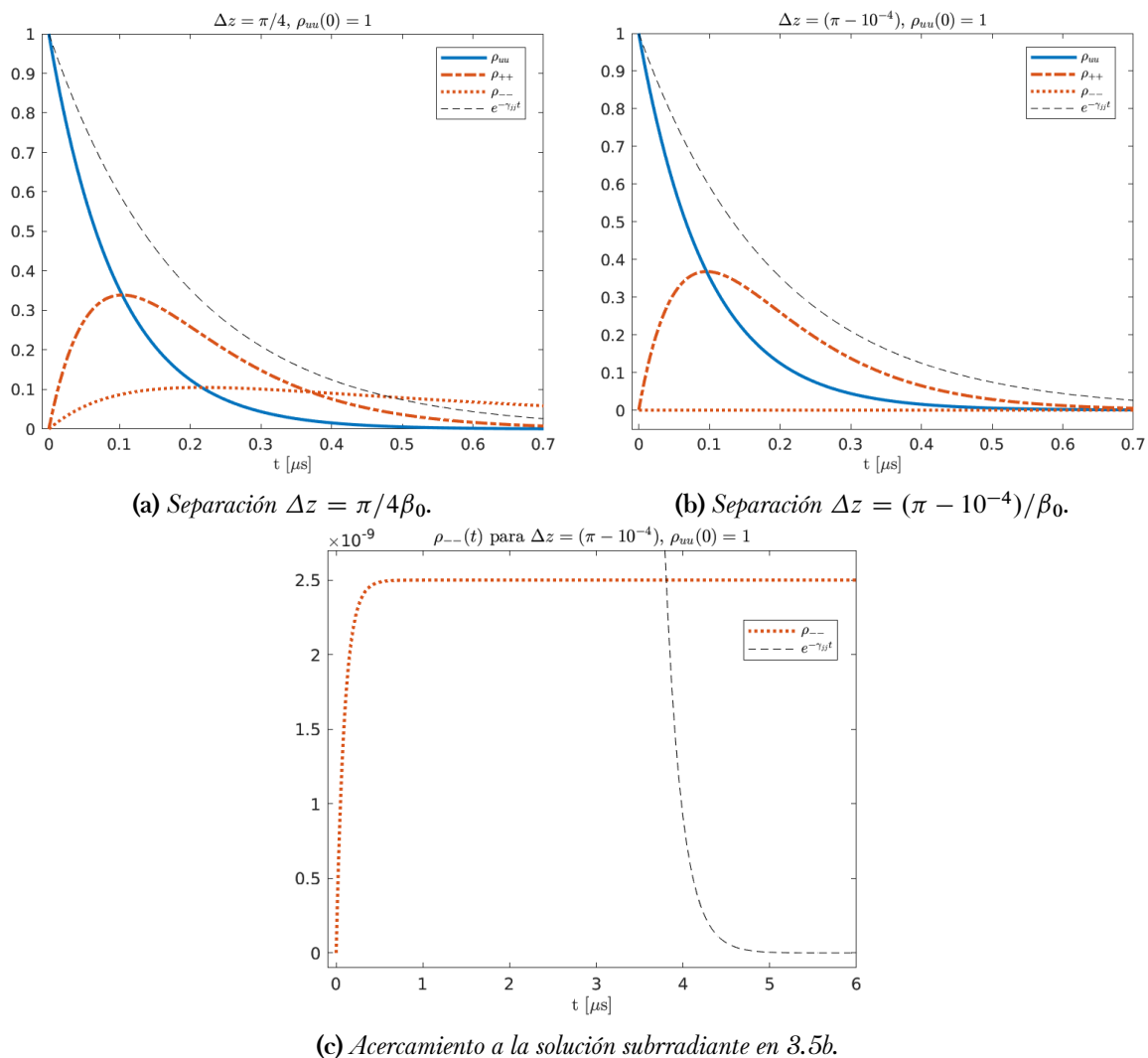


Figura 3.5: Ejemplos de la evolución colectiva del sistema atómico en presencia de la nanofibra . Mostramos las soluciones a las ecuaciones del sistema atómico tomando como condición inicial ambos átomos en el estado excitado $\rho_{uu}(0) = 1$. Fijamos el radio de la fibra y la distancia a la superficie como $(a, R) = (200, 0)$ nm. En 3.5a y 3.5b se muestra la evolución de todas las poblaciones para dos separaciones de los átomos en el eje \hat{z} , $\Delta z = [\pi/4, (\pi - 10^{-4})]/\beta_0$. Observamos que la evolución colectiva del sistema resulta en un decaimiento **superradiante**, el cual es más rápido en ambos casos comparado a cuando los átomos radian de forma independiente $e^{-\gamma_{jj}t}$. La población del estado antisimétrico $|-\rangle$ asociado a la fase **subradiante** evoluciona mucho más lento que las demás poblaciones en todos los casos, siendo el efecto más dramático cuando $\Delta z \rightarrow n\pi/\beta_0$. En el caso presentado en 3.5c, la evolución de la población del estado $|-\rangle$ se congela de manera efectiva por un periodo de tiempo 9 órdenes de magnitud mayor al de un sólo átomo radiando de forma independiente $\gamma^-/\gamma_{jj} \propto 10^{-9}$.

Capítulo 4

Dinámica colectiva no markoviana de átomos macroscópicamente separados

En este capítulo estudiamos los efectos de retardo e interferencia del campo dentro de la fibra en la dinámica colectiva de un par de átomos cuando están separados a una distancia comparable con la longitud de coherencia de una excitación emitida durante el decaimiento espontáneo de un átomo independiente, $l_{\text{coh}} = v_p(\omega_0)/\gamma_{jj}$. Comenzamos nuestra discusión reescribiendo al hamiltoniano de interacción del sistema en una forma que da énfasis a la dirección de propagación de los modos guiados de la fibra. Obtenemos las ecuaciones de evolución de una superposición de estados en la cual hay a lo más una excitación, ya sea en los átomos o en los modos de la fibra. Así como en el capítulo anterior, asumimos que la fibra posee una función de respuesta apreciable únicamente en la frecuencia de transición de los átomos. Este procedimiento resulta en un conjunto de ecuaciones diferenciales en las cuales la amplitud de probabilidad del estado atómico $|e_m g_n\rangle$ al tiempo t depende de la amplitud del estado $|g_m e_n\rangle$ a un tiempo pasado $t - t_{mn}$, donde $t_{mn} = d/v_p(\omega_0)$ es el tiempo que tarda en recorrer una excitación la separación entre los átomos $d = |z_m - z_n|$ moviéndose a la velocidad de fase dentro de la fibra.

Resolvemos la dinámica del sistema en el caso en que los átomos están preparados en estados súper y subradiantes mediante la transformada de Laplace, la cual reduce el problema a uno algebraico. Obtenemos la solución en el espacio de tiempos en términos de todas las ramas de la función de Lambert $W(z)$, la cual aparece frecuentemente en la solución de ecuaciones diferenciales con términos de retraso [33]. Realizamos un análisis de las soluciones en el cual utilizamos a la rama principal de la función de Lambert para obtener expresiones analíticas de ciertas cantidades interesantes tales como una separación entre los átomos asociada al punto de ramificación (la cual denominamos crítica y cuyo significado físico aún no nos resulta claro), los ritmos instantáneos de decaimiento colectivo, así como la probabilidad de supervivencia de un estado subradiante a tiempos arbitrariamente largos. Complementamos este análisis implementando numéricamente las correcciones debidas a las primeras 401 ramas de la función de Lambert. De esta manera podemos especificar el rango de validez de las expresiones analíticas.

Recalamos que este capítulo consiste en una adecuación de las ideas publicadas original-

mente en la referencia [13] al caso concreto de átomos interactuando mediante los modos guiados de una nanofibra óptica.

4.1. Planteamiento del sistema y ecuaciones de evolución

En la aproximación de onda rotante, el hamiltoniano de interacción de los átomos con el campo guiado de la nanofibra tiene la forma

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = i\hbar \sum_{\mu j} G_{\mu j} e^{-i(\omega - \omega_0)t} \sigma_j^\dagger a_\mu + \text{H.C.},$$

$$\sum_{\mu} = \sum_{l=-1}^1 \sum_{f=-1}^1 \int_0^\infty d\omega, \quad G_{\mu j} = \sqrt{\frac{\omega \beta'}{4\pi \epsilon_0 \hbar}} \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}_j, f, l) e^{i(f\beta z_j + l\phi_j)}.$$

Comenzamos nuestra discusión expandiendo el hamiltoniano en términos de las direcciones de propagación de los modos guiados de la nanofibra

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = i\hbar \sum_{lj} \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega - \omega_0)t} \sigma_j^\dagger \left[g_{lj}^+ a_l e^{i\beta z_j} + g_{lj}^- b_l e^{-i\beta z_j} \right] + \text{H.C.}, \quad (4.1)$$

$$g_{lj}^\pm = \sqrt{\frac{\omega \beta'}{4\pi \epsilon_0 \hbar}} \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}_j, \pm 1, l) e^{il\phi_j}, \quad (4.2)$$

donde los operadores $a_l = a_\mu|_{f=1}$ y $b_l = a_\mu|_{f=-1}$ aniquilan a los modos propagándose a la derecha e izquierda respectivamente. Como vimos en el capítulo anterior, el sistema atómico es capaz de comportarse colectivamente aún cuando hay a lo más una sola excitación en el sistema, provisto de que hayan sido preparados en un estado correlacionado al inicio de la evolución. Así, para los elementos de la *variedad de una excitación*

$$\{|e_m g\rangle \otimes |\{0\}\rangle, |1_{lq,\omega}\rangle \otimes |gg\rangle \mid (m = 1, 2), (q = a, b)\} \quad (4.3)$$

estudiamos el comportamiento colectivo del sistema utilizando el siguiente estado $|\psi\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=1}^2 c_m(t) |e_m g\rangle \otimes |\{0\}\rangle + \sum_{l'} \int_0^\infty d\omega' [c_{l'a}(\omega', t) |1_{l'a,\omega'}\rangle + c_{l'b}(\omega', t) |1_{l'b,\omega'}\rangle] \otimes |gg\rangle. \quad (4.4)$$

Notamos que la aproximación de onda rotante garantiza la conservación del número de excitaciones durante la evolución de este estado generada por el hamiltoniano de interacción 4.1. La evolución de $|\psi\rangle$ está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \mathbf{H}_{\text{int}} |\psi(t)\rangle, \quad (4.5)$$

aplicando \mathbf{H}_{int} a $|\psi(t)\rangle$ y después proyectando con respecto a los elementos de la base de estados de la variedad de una excitación, obtenemos las ecuaciones de evolución para las amplitudes de probabilidad en el estado $|\psi\rangle$

$$\dot{c}_m(t) = \sum_l \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)t} \left[g_{lm}^+ e^{i\beta z_m} c_{la}(\omega, t) + g_{lm}^- e^{-i\beta z_m} c_{lb}(\omega, t) \right], \quad (4.6)$$

$$\dot{c}_{la}(\omega, t) = -e^{i(\omega-\omega_0)t} \sum_{n=1}^2 g_{ln}^{+*} e^{-i\beta z_n} c_n(t), \quad (4.7)$$

$$\dot{c}_{lb}(\omega, t) = -e^{i(\omega-\omega_0)t} \sum_{n=1}^2 g_{ln}^{-*} e^{i\beta z_n} c_n(t). \quad (4.8)$$

Integramos formalmente las ecuaciones 4.7 y 4.8 y sustituimos en la ecuación de evolución de las amplitudes de probabilidad atómicas $c_{m,n}$. En el caso en que los momentos dipolares eléctricos están orientados en la misma dirección $\mathbf{d}_m = \mathbf{d}_n$ y que los átomos se encuentran a la misma separación respecto de la superficie de la fibra $R_m = R_n \equiv R$, la ecuaciones de evolución para las amplitudes atómicas 4.6 son

$$\begin{aligned} \dot{c}_m(t) &= - \sum_n \sum_l \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} \cdot \left[2g_{lm}^+ g_{ln}^{+*} \text{Re}\left\{ e^{i\beta(z_m-z_n)} \right\} \right] c_n(t-\tau), \\ &= - \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{i(\omega-\omega_0)\tau} \left[4|g_m^+|^2 c_m(t-\tau) + 2 \sum_l g_{lm}^+ g_{ln}^{+*} \text{Re}\left\{ e^{i\beta(z_m-z_n)} \right\} c_n(t-\tau) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde hemos usado las propiedades de simetría del campo guiado de la nanofibra 2.72, de tal manera que $g_{lm}^+ g_{ln}^{+*} = g_{lm}^- g_{ln}^{-*}$.

Observemos que al hacer esta sustitución, la evoluciones de las amplitudes atómicas se han vuelto no markovianas, pues hemos removido de la descripción del sistema a los elementos de la base en los cuales la excitación se encuentra en los modos del campo. Si suponemos, como lo hicimos en el capítulo anterior, que los átomos se acoplan exclusivamente con los modos que son resonantes con su frecuencia de transición ω_0 , entonces los acoplamientos en la ecuación 4.9 son independientes de la frecuencia y recuperamos la expresión del ritmo de decaimiento espontáneo de un átomo en la vecindad de la fibra

$$4|g_m^+(\omega_0)|^2 = \frac{\gamma_{mm}}{2\pi}, \quad 2 \sum_l g_{lm}^+ g_{ln}^{+*} \Big|_{\omega_0} = \frac{\gamma_{mm}}{2\pi} \Lambda, \quad (4.10)$$

$$\Lambda = \frac{2 \sum_l g_{lm}^+ g_{ln}^{+*} \Big|_{\omega_0}}{4|g_m^+(\omega_0)|^2} = \cos(\phi_m - \phi_n), \quad (4.11)$$

donde la cantidad Λ la definimos como la eficiencia del acoplamiento de los átomos a través de la fibra.

A continuación, aplicamos las integrales en frecuencia y tiempo en la ecuación 4.9 respectivamente para llegar a la forma final de las ecuaciones de evolución de las amplitudes atómicas

$$\dot{c}_m(t) = -\frac{\gamma}{2} \left[c_m(t) + \Lambda e^{i\omega_0 t_{mn}} c_n(t - t_{mn}) \theta(t - t_{mn}) \right], \quad (4.12)$$

donde $\gamma \equiv \gamma_{jj}$ y $t_{mn} = d/v_p(\omega_0)$, con $d = |z_m - z_n|$ y $v_p(\omega_0) = \omega_0/\beta_0$ es la velocidad de fase del modo con frecuencia ω_0 . La expresión 4.12 es una ecuación diferencial en la cual la evolución del estado $|e_m g_n\rangle$ tiene una contribución retardada del estado $|g_m e_n\rangle$, la cual depende del tiempo en que tarda en propagarse el campo dentro de la fibra de un átomo al otro t_{mn} . Así, para $t < t_{mn}$ los átomos evolucionan de manera independiente y para $t \geq t_{mn}$ actúan colectivamente de manera instantánea.

A continuación presentamos la solución a las ecuaciones de evolución del sistema.

4.2. Solución a las ecuaciones de evolución

Dada la estructura de las ecuaciones de evolución de las amplitudes atómicas, la técnica más adecuada para resolverlas consiste en llevarlas al espacio de Laplace mediante la transformada

$$f(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} f(t),$$

(con $s \in \mathbb{C}$) para convertirlas en un sistema de ecuaciones algebraicas que podemos resolver fácilmente. Finalmente, las ecuaciones quedan resueltas mediante la aplicación de la transformada inversa que las lleva de nuevo al espacio de tiempo.

Aplicamos la transformada de Laplace a las ecuaciones 4.12

$$s c_m(s) - c_m(0) = -\frac{\gamma}{2} \left[c_m(s) + \Lambda e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-s t_{mn}} c_n(s) \right], \quad (4.13)$$

$$s c_n(s) - c_n(0) = -\frac{\gamma}{2} \left[c_n(s) + \Lambda e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-s t_{mn}} c_m(s) \right],$$

$$\Rightarrow c_m(\bar{s}) = \frac{2}{\gamma \zeta} \left[(2\bar{s} + 1) c_m(0) - \Lambda e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-\bar{s} \eta} c_n(0) \right], \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \left\{ (2\bar{s} + 1)^2 - \left(\Lambda e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-\bar{s} \eta} \right)^2 \right\}, \\ &= \left[(2\bar{s} + 1) + \Lambda e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-\bar{s} \eta} \right] \cdot \left[(2\bar{s} + 1) - \Lambda e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-\bar{s} \eta} \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde $\bar{s} = s/\gamma$ es la frecuencia de Laplace normalizada respecto al ritmo de decaimiento espontáneo y $\eta = d/l_{\text{coh}}$ es la separación de los átomos normalizada con respecto de la longitud de coherencia de una excitación propagándose dentro de la fibra $l_{\text{coh}} = v_p(\omega_0)/\gamma$. En los casos en los que los átomos se encuentran inicialmente preparados en los estados de máxima correlación (y simetría), $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_m g_n\rangle \pm |g_m e_n\rangle) \otimes |\{0\}\rangle$, asociados a los estados súper y

subradiante respectivamente, la evolución colectiva en el espacio de Laplace queda cuantificada por una única amplitud

$$c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \frac{1}{(\bar{s} + 1/2) \pm \frac{\Lambda}{2} e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-\bar{s}\eta}}. \quad (4.16)$$

Regresamos al espacio de tiempo aplicando la transformada inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\epsilon - iT}^{\epsilon + iT} ds e^{st} f(s), \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Así, definimos $z = -i\bar{s}$ y la amplitud de probabilidad colectiva en el espacio de tiempo es

$$c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T - i\epsilon}^{T - i\epsilon} dz \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{iyzt}}{(z - i/2) \mp i \frac{\Lambda}{2} e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-i\eta z}}. \quad (4.18)$$

La forma del integrando nos sugiere resolver la integral mediante el teorema del residuo; calculamos los ceros del denominador tomando $\bar{z} = z - i/2$ y

$$\begin{aligned} -i\eta \left(\bar{z} \mp i \frac{\Lambda}{2} e^{\eta/2} e^{i\omega_0 t_{mn}} e^{-i\eta \bar{z}} \right) &= 0, \\ i\eta \bar{z} e^{i\eta \bar{z}} &= \mp \frac{\eta \Lambda}{2} e^{\eta/2} e^{i\omega_0 t_{mn}}, \\ \iff i\eta \bar{z} &= W_p(\mp \alpha), \quad p \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow z_p = \frac{i}{2} \left[1 - \frac{W_p(\mp \alpha)}{\eta/2} \right], \quad (4.20)$$

donde $W_p(z)$ es la p -ésima rama de la función de Lambert y

$$\alpha = \Lambda \frac{\eta}{2} e^{\eta/2} e^{i\omega_0 t_{mn}} \quad (4.21)$$

es un parámetro adimensional que contiene toda la información relativa a los átomos y su acoplamiento con la nanofibra.

Tenemos entonces que el integrando tiene un polo simple por cada rama de la función de Lambert, lo cual, junto con el hecho de que $c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(z)$ es una función racional de la forma $f(z) = P(z)/Q(z)$, nos sugiere hacer una descomposición en fracciones parciales alrededor de los polos [34]

$$c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{a_p}{z - z_p}, \quad (4.22)$$

$$a_p = \left[\frac{P(z)}{Q'(z)} \right] \Big|_{z_p} = \frac{1}{1 + W_p(\mp \alpha)}. \quad (4.23)$$

Sustituyendo este resultado en 4.18 y aplicando el teorema del residuo, obtenemos la solución a la ecuación de evolución 4.12

$$c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{-\gamma_p^{\mp} t/2}, \quad (4.24)$$

$$\gamma_p^{\mp} = \gamma \left[1 - \frac{W_p(\mp \alpha)}{\eta/2} \right]. \quad (4.25)$$

Como veremos más adelante, esta solución en términos de las ramas de la función de Lambert nos es bastante útil para entender la dinámica colectiva de los átomos en este régimen, pues nos permite determinar la separación crítica de los átomos en la cual se espera que los efectos no markovianos sean máximos, el ritmo de decaimiento colectivo instantáneo que resulta una vez que se establece la comunicación entre los átomos, así como la probabilidad de supervivencia de un estado subradiante a medida que $t \rightarrow \infty$.

Existe también una solución equivalente a 4.24 que nos permite entender la modificación del comportamiento del sistema atómico en términos del número de recorridos que hace una excitación oscilando de un átomo al otro. Dada la expresión para la amplitud de probabilidad colectiva en el espacio de Laplace 4.16, notamos que

$$\left| \frac{\bar{s} + 1/2}{\frac{\Lambda}{2} e^{-\eta \bar{s}}} \right| \geq 1, \quad \forall \bar{s},$$

pues la exponencial decrece más rápido que cualquier polinomio. Factorizamos el término $(\bar{s} + 1/2)$ en 4.16 y obtenemos

$$\begin{aligned} c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(\bar{s}) &= \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \frac{1}{\bar{s} + 1/2} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{\Lambda}{2} \frac{e^{i\omega_0 t m n} e^{-\eta \bar{s}}}{\bar{s} + 1/2}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \frac{1}{\bar{s} + 1/2} \sum_{j=0}^{\infty} (\mp y)^j \frac{e^{-j\eta \bar{s}}}{(\bar{s} + 1/2)^j}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$y = \frac{\Lambda}{2} e^{i\omega_0 t m n}, \quad (4.27)$$

donde hemos utilizado la expresión para la serie geométrica $1/(1-x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$, $|x| < 1$. Aplicando la transformada inversa y usando la fórmula integral de Cauchy generalizada

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} dz \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}, \quad (4.28)$$

obtenemos la solución que buscamos

$$c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp y)^j \int_{[\epsilon - iT]/\gamma}^{[\epsilon + iT]/\gamma} d\bar{s} \frac{e^{(\gamma t - j\eta)\bar{s}}}{(\bar{s} + 1/2)^{j+1}}, \quad (4.29)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\gamma t/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mp y)^j}{j!} (\gamma t - j\eta)^j e^{j\eta/2} \theta(\gamma t - j\eta), \quad (4.30)$$

donde la función escalón $\theta(\gamma t - j\eta)$ surge de imponer que el integrando en la ecuación 4.29 sea una función analítica en toda la región donde calculamos la integral para cada valor de j .

En esta expresión es claro el carácter cooperativo de la evolución atómica, pues un átomo modifica su evolución de acuerdo con la retroalimentación que obtiene en cada reflexión acerca del estado pasado del otro átomo. Si expandimos la ecuación 4.30

$$c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-\gamma t/2} \mp y(\gamma t - \eta) e^{-(\gamma t - \eta)/2} \theta(\gamma t - \eta) \right] + \mathcal{O}(e^\eta), \quad (4.31)$$

tenemos que para $t < t_{mn}$ los átomos decaen espontáneamente de forma independiente y a partir de $t \geq t_{mn}$, su comportamiento se modifica de forma progresiva y con contribuciones cada vez más pequeñas con cada reflexión de la excitación.

4.3. Análisis de los resultados

A continuación presentamos el análisis de la amplitud de probabilidad colectiva de dos formas: la primera consiste en el originalmente publicado en el artículo [13], en el cual se considera que la contribución más significativa a la dinámica del sistema está dada únicamente por la rama principal de la función de Lambert W_0 . El segundo análisis implementa numéricamente la acción de las primeras 401 ramas de la función de Lambert $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 200$ en el cálculo de la amplitud de probabilidad, resaltando las correcciones a la modificación del comportamiento colectivo dado por la rama principal. El número de ramas empleadas en los cálculos se escogió de tal manera que sean computacionalmente económicos y que, para números más grandes, los resultados se mantengan prácticamente iguales.

En el caso particular en el que los átomos se encuentran en las separaciones de equilibrio

$$d = \frac{n\pi}{\beta_0}, \quad n \in \mathbb{N} \cup 0,$$

el parámetro α es un número real y podemos obtener expresiones analíticas utilizando la rama principal de las siguientes cantidades: la separación crítica del sistema η_c , el ritmo de decaimiento colectivo instantáneo γ_{inst} y la probabilidad de supervivencia de un estado subradiante a tiempos arbitrariamente largos $|c_{\text{sub}}(t \rightarrow \infty)|^2$. Los resultados que a continuación presentamos asumen que los átomos se encuentran en las separaciones de equilibrio.

4.3.1. Separación crítica y ritmos de decaimiento colectivo

Dada la expresión de la amplitud de probabilidad colectiva

$$c_{\text{sub}}^{\text{sup}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{\gamma_p t/2},$$

$$\gamma_p = \gamma \left[1 - \frac{W_p(\mp \alpha)}{\eta/2} \right], \quad a_p = [1 + W_p(\mp \alpha)]^{-1},$$

$$\alpha = \Lambda \frac{\eta}{2} e^{\eta/2},$$

cuando consideramos únicamente la rama principal $W_0(x)$, la cual es puramente real para valores mayores a su punto de ramificación $-1/e$ [35], obtenemos que para átomos preparados en el estado superradiante existe una separación crítica asociada a este punto, η_c , la cual calculamos igualando

$$\begin{aligned} -\frac{1}{e} &= -\alpha_c, \\ \Rightarrow \eta_c &= 2W_0\left(\frac{1}{\Lambda e}\right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para el caso de acoplamiento perfecto mediante la fibra, la separación crítica es aproximadamente la mitad de la longitud de coherencia de la excitación dentro de la fibra $d_c \approx 0.56 l_{\text{coh}}$. En la figura 4.2a mostramos la dependencia de la separación crítica en función de la eficiencia del acoplamiento de los átomos mediante la fibra. La naturaleza física de la aparición de la separación crítica aún no nos es clara

En el caso de eficiencia máxima, el cociente superradiante instantáneo alcanza su valor máximo en la separación crítica

$$\left. \frac{\gamma_0^{\text{sup}}}{\gamma} \right|_{\eta_c} \approx 1 + \frac{1}{0.27846} = 4.5911, \quad (4.33)$$

un resultado sorprendente considerando que el régimen markoviano permite una modificación de a lo más el doble bajo las mismas condiciones $\gamma_{\text{sup}}/\gamma = 2$. Estimamos las correcciones a esta cantidad utilizando las demás ramas de la función de Lambert mediante un ajuste lineal al logaritmo de la probabilidad de decaimiento superradiante, que observamos tiene la forma

$$\log[P_{\text{sup}}(t)] \equiv -\gamma_{\text{sup}}(t) \cdot t. \quad (4.34)$$

Esto lo hacemos en un intervalo de tiempo muy corto a partir de que el sistema comienza a comportarse colectivamente $\gamma t \in [\eta, \eta + 10^{-4}]$, de tal manera que podamos dar un buen estimado del decaimiento instantáneo.

En la figura 4.2b mostramos el comportamiento del ritmo superradiante instantáneo para ambos análisis en función de la separación de los átomos en el caso de eficiencia óptima en su acoplamiento $\Lambda = 1$. Las correcciones muestran un comportamiento menos alejado del límite markoviano, dando un cociente $\gamma_{\text{sup}}/\gamma \approx 2.2$ cuando los átomos se encuentran en la separación crítica. Observamos, además, que el ritmo instantáneo crece de forma más o menos lineal a medida que los átomos se separan, resultando en valores que se encuentran muy por encima del máximo dado por la rama principal para separaciones arbitrariamente grandes. Sin embargo, cuando la distancia entre los átomos es tan grande, para cuando uno se entera de la presencia del otro, la probabilidad de que hayan decaído al estado base como átomos independientes es cercana a la unidad.

En las figuras 4.2c y 4.2d mostramos los mapeos completos del ritmo de decaimiento instantáneo superradiante en ambos análisis, variando tanto la separación entre los átomos, así

como la eficiencia en su acoplamiento mediante la fibra.

En el estado subradiante, el coeficiente γ_0 es tal que para todas las separaciones

$$\gamma_0^{\text{sub}} = \gamma \left[1 - \frac{W_0(\alpha)}{W_0(\alpha/\Lambda)} \right], \quad (4.35)$$

que en el caso de eficiencia máxima de acoplamiento resulta en un congelamiento instantáneo y perpetuo de la evolución de los átomos independientemente de la separación en la que se encuentren (figura 4.3a). Este resultado resalta la importancia de considerar la contribución de las demás ramas para dar una descripción fidedigna de la evolución colectiva del sistema; en la figura 4.3b mostramos las correcciones, recuperando el comportamiento de átomos independientes en el caso en el que están desacoplados a través de la fibra $\Lambda = 0$.

Adicionalmente observamos que el efecto subradiante instantáneo es óptimo para varios valores de (η, Λ) y que, a medida que los átomos se separan, el ritmo se vuelve mayor al de un átomo independiente. Esta es una consecuencia de que en el régimen no markoviano, el ritmo de decaimiento espontáneo es una cantidad que cambia con el tiempo.

4.3.2. Probabilidad de supervivencia de estados subradiantes y estudio de la evolución de estados colectivos.

Considerando unicamente la contribución de la rama principal de la función de Lambert, la probabilidad de que el sistema sobreviva en el estado subradiante a tiempos arbitrariamente largos es

$$\begin{aligned} 2|c_{\text{sub}}(\infty)|^2 &= |a_0|^2, \\ &= \frac{1}{|1 + W_0(\alpha)|^2}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$= \left[\frac{1}{(1 + \eta/2)} \right]^2, \quad \Lambda = 1. \quad (4.37)$$

En las figuras 4.3c y 4.3d mostramos la variación de la probabilidad de supervivencia del estado subradiante para ambos análisis en función de la separación entre los átomos y la eficiencia en el acoplamiento a través de la fibra, (η, Λ) . Para eficiencias bajas en el acoplamiento de los átomos, la contribución W_0 nos dice que la supervivencia del estado subradiante es mucho mayor que cuando los átomos están eficientemente acoplados; particularmente, en el límite de eficiencia nula, la probabilidad de supervivencia es absoluta, independientemente de la separación de los átomos. Cuando consideramos las correcciones de las demás ramas, obtenemos que la probabilidad de supervivencia del estado subradiante es apreciable para valores óptimos de la eficiencia $\Lambda > 0.8$ y para separaciones menores a la longitud de coherencia de la excitación.

En las figuras 4.1a y 4.1b mostramos la evolución de la probabilidad de decaimiento espontáneo colectivo para los estados súper y subradiantes respectivamente, considerando la contribución de las 401 primeras ramas, cuatro separaciones ente los átomos $\eta \in [10^{-4}, 0.5, 1.5, 2]$ y

la eficiencia en el acoplamiento mediante la fibra como óptima $\Lambda = 1$.

Observamos que, antes de que la información de la presencia de un átomo haya llegado al otro, el sistema decae de forma independiente como $P = \exp(-\gamma t)$ y colectivamente de forma instantánea una vez que $t \geq d/v_p(\omega_0)$, el cual es el tiempo que tarda en recorrer una distancia (d) una excitación con frecuencia ω_0 propagándose a la velocidad de fase dentro de la fibra. Una vez que se establece el comportamiento colectivo en el sistema, las probabilidades muestran oscilaciones asociadas a las múltiples reflexiones de la excitación entre los átomos. Para el caso superradiante, las oscilaciones decaen a 0, mientras que para el subradiante se aproximan hacia el valor dado por la rama principal de la función de Lambert 4.36.

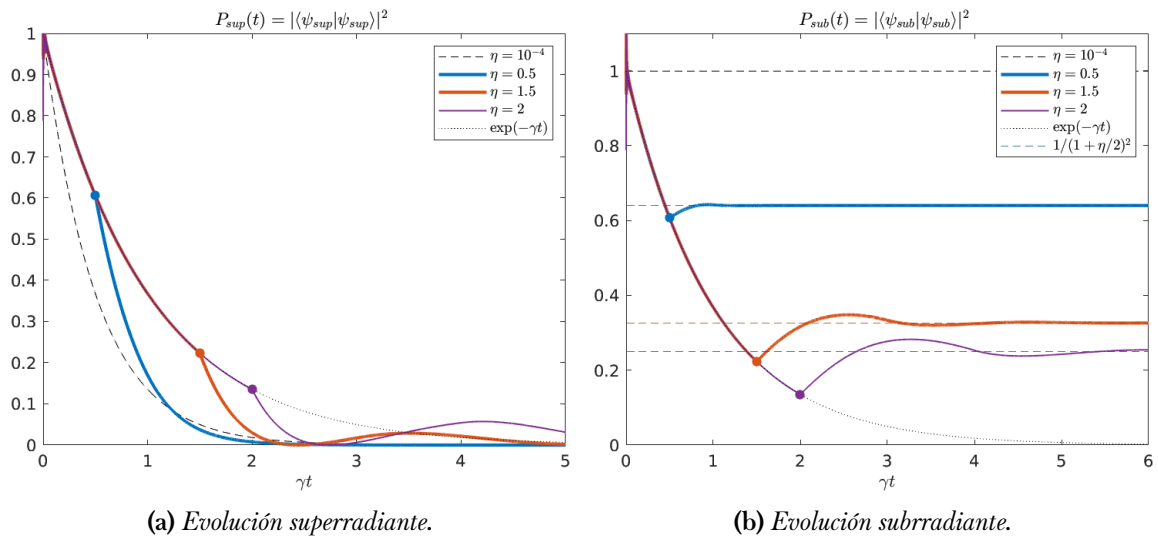


Figura 4.1: *Curvas de evolución colectiva para diferentes separaciones de los átomos en el caso de acoplamiento óptimo con la fibra $\Lambda = 1$. En 4.1a y 4.1b los átomos decaen de forma independiente hasta un tiempo $t = \eta/\gamma = d/v_p(\omega_0)$, el cual es el tiempo que tarda en recorrer una distancia d una excitación con frecuencia ω_0 moviéndose a la velocidad de fase v_p dentro de la fibra; el comportamiento colectivo se establece instantáneamente a partir de este tiempo, mostrando en ambos casos oscilaciones asociadas con la retroalimentación que experimentan los átomos debida a las múltiples reflexiones de la excitación dentro de la fibra. En el caso subradiante, la probabilidad oscila de forma asintótica a $2|c_{\text{sub}}(\infty)|^2 = (1 + \eta/2)^{-2}$, que es el valor que establece la rama principal de la función de Lambert. En los resultados que mostramos utilizamos 401 ramas $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 200$ para calcular las amplitudes de probabilidad colectivas.*

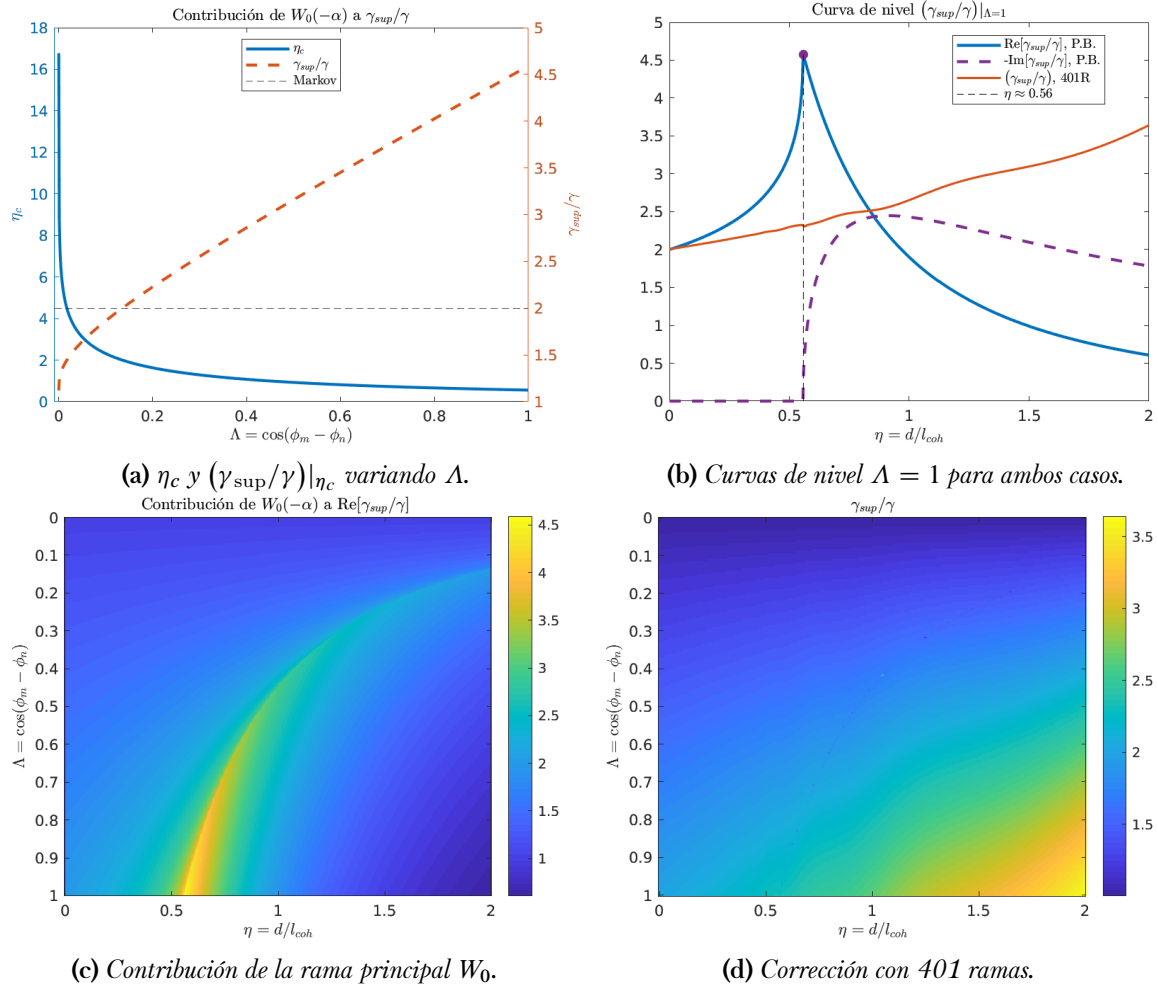


Figura 4.2: Ritmo instantáneo de decaimiento superradiante normalizado variando la separación entre los átomos η y la eficiencia en el acoplamiento Λ . En 4.2a: separación crítica entre los átomos η_c y su correspondiente ritmo superradiante $\gamma_{\text{sup}}/\gamma|_{\eta_c}$ considerando únicamente la contribución de la rama principal (P.B.) de la función de Lambert W_0 . Para $\Lambda \geq 0.2$ el decaimiento es mayor al límite establecido por el régimen markoviano y llega a ser hasta 2.3 veces más grande cuando la eficiencia en el acoplamiento es óptima. En 4.2b: curvas de nivel de los mapeos 4.2c y 4.2d cuando el acoplamiento mediante la fibra es óptimo. Si sólo consideramos la contribución de W_0 , el cociente es máximo (≈ 4.56) en $\eta_c \approx 0.56$ y decrece a 0 a medida que los átomos se alejan. Si consideramos las demás ramas (401 en este caso), el decaimiento se aminora significativamente con respecto al valor anterior, dando un cociente de ≈ 2.22 en la separación crítica. Adicionalmente, observamos que el ritmo llega a valores muy por encima de 4.56 para separaciones arbitrariamente grandes. En 4.2c y 4.2d: mapeos del ritmo de decaimiento superradiante variando los parámetros (η, Λ) . Si consideramos solo la contribución de W_0 observamos que para η y Λ que satisfacen la ecuación $\alpha = 1/e$, el decaimiento excede el límite markoviano. La tendencia nos sugiere que a medida que los átomos se separan se requiere de una eficiencia menor para superarlo. Esta situación se corrige cuando consideramos las contribuciones de las demás ramas, donde el cociente supera al markoviano solamente para valores altos de la eficiencia en el acoplamiento.

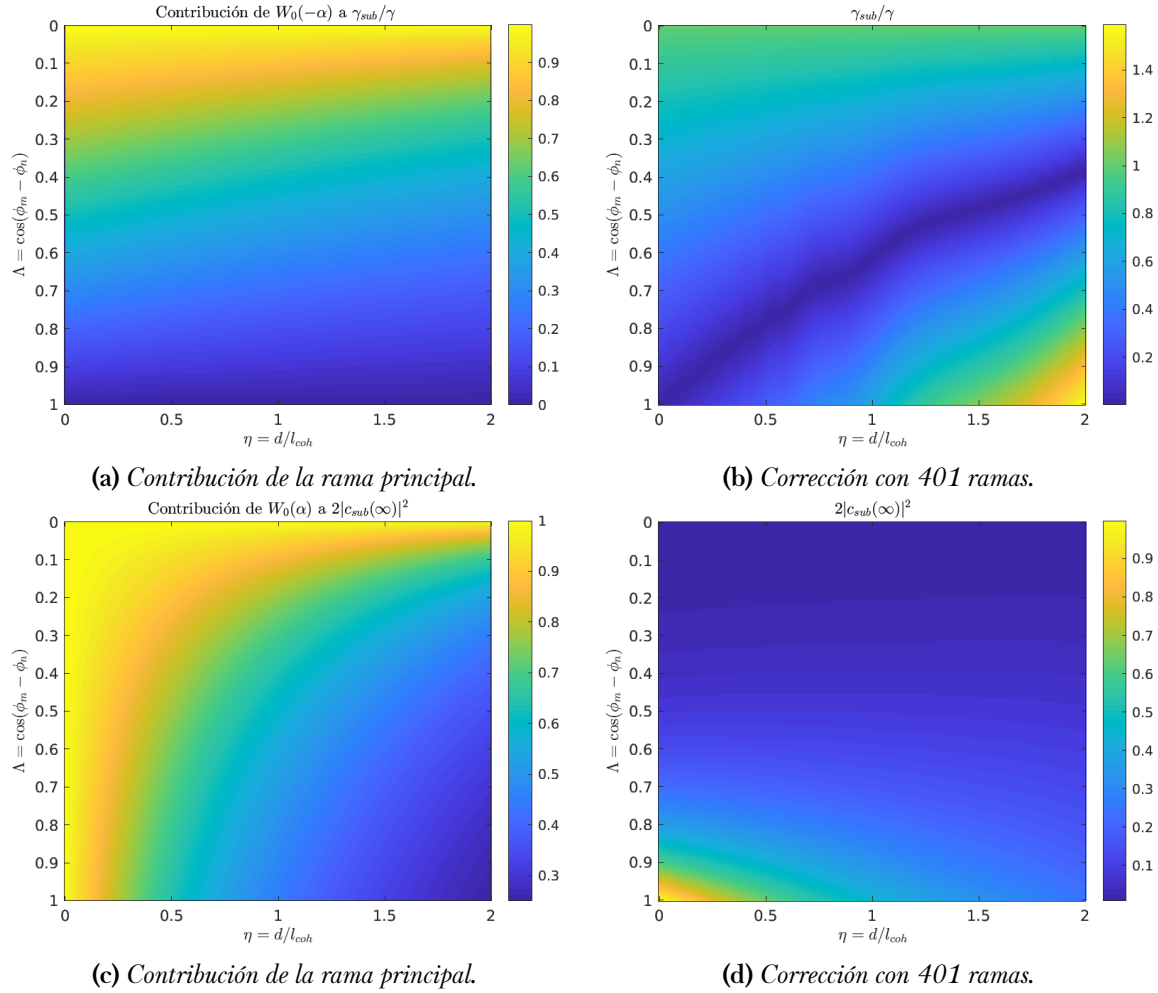


Figura 4.3: Ritmo instantáneo de decaimiento subradiante normalizado y probabilidad de supervivencia de estados subradiantes en función de η y la eficiencia en el acoplamiento Λ . En 4.3a y 4.3b: ritmo instantáneo subradiante en función de (η, Λ) . Si solo consideramos la contribución de W_0 tenemos que para un valor fijo de Λ , el cociente subradiante varía de forma poco apreciable a medida que los átomos se separan. En el límite de eficiencia óptima, el efecto subradiante es máximo y se vuelve independiente de la separación entre los átomos. Cuando tomamos en cuenta las correcciones de las demás ramas a la dinámica (401 en este caso), el efecto subradiante máximo depende de un conjunto no trivial de valores de (η, Λ) que no corresponden a los de la separación crítica en el caso superradiante 4.2a. En 4.3c y 4.3d: probabilidad de supervivencia del estado subradiante a tiempos largos en función de (η, Λ) . Si consideramos únicamente la contribución de la rama W_0 , la probabilidad de supervivencia es mayor al 90% para un amplio rango de parámetros, llegando incluso a ser del 100% e independiente de η en el límite de eficiencia nula $\Lambda \rightarrow 0$. Esto es inconsistente con que los átomos interactúan pobremente para valores pequeños de la eficiencia y se corrige cuando consideramos las correcciones debidas a las demás ramas, en cuyo caso el rango de valores para los cuales la probabilidad de supervivencia mayor al 80% se reduce a separaciones pequeñas $\eta < 0.1$ y altas eficiencias en el acoplamiento $\Lambda > 0.95$.

Capítulo 5

Funciones de correlación de la nanofibra óptica para uno y dos átomos

En este capítulo presentamos el análisis, así como los detalles del cómputo de las funciones de correlación de los modos guiados de la nanofibra óptica en presencia de uno y dos átomos en el caso de estados que pertenecen a la variedad de una sola excitación. Primeramente obtenemos las expresiones para las funciones de correlación tomando como punto de partida las ecuaciones de evolución de las amplitudes de probabilidad atómica tal y como las trabajamos en el capítulo anterior. Un elemento fundamental en el cálculo de las funciones de correlación es la *densidad espectral*, la cual caracteriza la interacción entre los átomos y la nanofibra y está escrita en términos de la relación de dispersión y la densidad de estados de la nanofibra.

En este sentido, mostramos primero los detalles involucrados en el cálculo eficiente de la relación de dispersión de la fibra para ambas funciones dieléctricas empleadas en este trabajo: la función ingenua ϵ_N y la de Drude-Lorentz ϵ_L . Esto se hace hallando numéricamente las raíces de la ecuación de eigenvalores de los modos guiados de la nanofibra 2.40 en intervalos de búsqueda apropiados, los cuales obtuvimos para un intervalo relativamente amplio de radios de la fibra. A continuación analizamos la densidad espectral de uno y dos átomos variando los diferentes parámetros del sistema tales como el radio de la fibra, la función de respuesta y las posiciones y momentos dipolares atómicos. En el caso de la densidad espectral de dos átomos encontramos que es necesario cortarla abruptamente para evitar el efecto de fuga espectral cuando calculamos la función de correlación, así como la necesidad de evitar el régimen de alta absorción y dispersión en el caso de la función dieléctrica de Lorentz.

Finalmente, mostramos los detalles del cálculo de las funciones de correlación utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier y presentamos un análisis de su estructura y comportamiento considerando los diferentes parámetros del sistema.

5.1. Funciones de correlación para el caso de estados en la variedad de una excitación

Para el estado $|\psi\rangle$ definido en el capítulo anterior, 4.4, sin hacer la separación de los modos en términos de las direcciones de propagación a lo largo del eje de la fibra

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=1}^2 c_m(t) |e_m g\rangle \otimes |\{0\}\rangle + \sum_{\nu} c_{\nu}(t, \omega') |1_{\nu}\rangle \otimes |g g\rangle,$$

$$\sum_{\nu} = \sum_{f', l'} \int_0^{\infty} d\omega',$$

las ecuaciones de evolución para las amplitudes de probabilidad atómica bajo la acción del hamiltoniano de interacción del sistema antes de hacer cualquier aproximación respecto al acoplamiento de los átomos con la fibra son

$$\dot{c}_n(t) = - \sum_{\mu} G_{\mu n} c_{\mu}(t, \omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t}, \quad (5.1)$$

$$\dot{c}_{\mu}(t, \omega) = \sum_{m=1}^2 G_{\mu m}^* c_m(t) e^{i(\omega - \omega_0)t}, \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow \dot{c}_n(t) = - \sum_m \int_0^t dt' \sum_{\mu} G_{\mu n} G_{\mu m}^* c_m(t') e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')}, \quad (5.3)$$

donde hemos sustituido la solución formal de la ecuación 5.2 en 5.1 para obtener la ecuación 5.3.

Los términos que acompañan a las amplitudes de probabilidad atómica dentro de la integral en el lado derecho de la ecuación 5.3 definen las *funciones de correlación temporal* de los modos guiados de la nanofibra en presencia de uno $n = m$ y dos átomos $n \neq m$. La estructura de las funciones de correlación en el caso en que los átomos están separados a una distancia $d = |z_n - z_m|$, con sus momentos dipolares eléctricos apuntando en la misma dirección $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_m$ y ambos situados a la misma distancia respecto a la superficie de la fibra $R_n = R_m \equiv R$ es

$$F_{nm}(t - t') = \sum_{\mu} G_{\mu n} G_{\mu m}^* e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')},$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega J_{nm}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')}, \quad (5.4)$$

$$J_{nm}(\omega) = S(\omega) \cos[\beta(\omega)d], \quad (5.5)$$

$$S(\omega) = \left(\frac{d^2}{\pi \epsilon_0 \hbar} \right) \cdot \omega \frac{\partial \beta}{\partial \omega} |\mathbf{e}_r(\omega, R)|^2. \quad (5.6)$$

Así, las funciones de correlación del sistema resultan del cálculo de la transformada parcial de Fourier de la función $J_{nm}(\omega)$, conocida como la *densidad espectral* [10], la cual caracteriza

la interacción de los modos guiados de la nanofibra con los átomos a través de la relación de dispersión $\beta(\omega)$, la densidad de estados $\partial\beta/\partial\omega$, las posiciones de los átomos, así como de las direcciones de sus dipolos eléctricos.

Las funciones de correlación son una parte esencial en el estudio de cualquier sistema dinámico, pues sus anchuras determinan las escalas de tiempo en los cuales son considerables los efectos de correlación entre los estados presente y pasados del sistema a través de la interacción con el reservorio. En el caso en que el tiempo de correlación es muy corto comparado con el tiempo en que el sistema evoluciona apreciablemente, la aproximación de Markov es válida, tal como lo hemos visto en el capítulo 3 donde estudiamos la evolución del sistema a tiempos del orden del inverso del decaimiento espontáneo de un átomo individual $\tau \approx \gamma_{jj}^{-1}$, considerando únicamente el acoplamiento de los átomos con los modos resonantes con su frecuencia de transición e ignorando el efecto de retardo en la propagación de la información a través de la fibra.

Por el otro lado, el comportamiento de la densidad espectral depende fuertemente de cómo caracterizamos la respuesta de la nanofibra a la presencia de los átomos. Una parte considerable de este trabajo consistió en calcular de manera eficiente las relaciones de dispersión $\beta(\omega)$ y la densidad de estados $\partial\beta/\partial\omega$ para las dos funciones dieléctricas ϵ_N y ϵ_L , así como para diferentes radios de la nanofibra. A continuación presentamos el análisis de la dependencia de la densidad espectral en función de los diferentes parámetros de los átomos y la fibra, así como los detalles involucrados en su cómputo.

5.2. Análisis de la densidad espectral en función de los parámetros atómicos y de la nanofibra

5.2.1. Relación de dispersión y velocidad de grupo

La relación de dispersión del modo fundamental HE_{11} en una nanofibra óptica de radio a se obtiene de resolver la ecuación de eigenvalores 2.40, cuya expresión recordamos que es

$$\mathcal{F}(\omega, \beta) = 0, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{F}(\omega, \beta) = \frac{J_0(ha)}{haJ_1(ha)} - \left\{ \left[\frac{n_1^2 + n_2^2}{4n_1^2} \right] \cdot \left(\frac{K_1'(qa)}{qaK_1(qa)} \right) + \frac{1}{(ha)^2} + R(\omega, \beta) \right\}, \quad (5.8)$$

$$R(\omega, \beta) = \sqrt{\left[\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{4n_1^2} \right) \cdot \left(\frac{K_1'(qa)}{qaK_1(qa)} \right) \right]^2 + \left[\left(\frac{\beta}{k_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(qa)^2} \right) \right]^2}, \quad (5.9)$$

$$n_2k < \beta(\omega) < n_1(\omega)k, \quad (5.10)$$

donde $q^2 = \beta^2 - (n_2k)^2$, $h^2 = (n_1(\omega)k)^2 - \beta^2$ y $k = \omega/c$. Resolvemos numéricamente la ecuación fijando los valores del radio y la frecuencia utilizando la función nativa de Matlab, `fzero`, la cual combina los métodos de la secante, bisección e interpolación cuadrática para encontrar la raíz de una función dado que especificamos un intervalo de búsqueda. El hecho de que el régimen multimodal de la fibra aparezca a medida que la frecuencia de la componente de

Fourier del campo aumente implica la aparición de varias raíces cuando resolvemos la ecuación de eigenvalores (EVE).

De entre todas las raíces que aparecen dado un valor de ω y a , encontramos que la única con la que podemos producir una relación de dispersión continua en todo el intervalo de frecuencias es aquella que se encuentra más cercana a la cota superior $\beta_{\text{sup}} = n_1(\omega)k$. Para frecuencias arbitrariamente grandes (del orden de 2500 PHz para la función dieléctrica ingenua y ω_{350} para la de Lorentz) las raíces de la EVE se cuentan por cientos, por lo que es necesario trabajar con intervalos de búsqueda específicos que nos permitan hallar eficientemente la raíz que deseamos. Estos intervalos los encontramos dando prioridad a la robustez ante la variación del radio de la nanofibra, logrando calcular la relación de dispersión en ambos intervalos de frecuencias relevantes para radios entre 150 y 400 nm.

En las figuras 5.1a y 5.1b mostramos las relaciones de dispersión que resultan de resolver la EVE para ambas funciones dieléctricas y diferentes radios de la fibra. En ambos casos observamos que la relación de dispersión de la nanofibra transita de forma continua de la relación de dispersión en el vacío ($\beta = \omega/c$) a frecuencias bajas ($\omega < 0.9$ PHz) hacia la de un medio dieléctrico homogéneo e infinito con relación de dispersión $\beta = n_1(\omega)\omega/c$. Este comportamiento es el mismo para todos los radios de la nanofibra, aunque la transición sucede más rápido a medida que el radio aumenta.

Para el caso de la función dieléctrica de Drude-Lorentz la relación de dispersión de la nanofibra crece exponencialmente con la frecuencia; para valores cercanos a la frecuencia de resonancia del medio ω_{350} , el comportamiento de la parte real de la función dieléctrica es

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\frac{\epsilon_L(\omega)}{\epsilon_0} \right] &\approx \left[\frac{\omega_p}{\gamma\omega_{350}} \right]^2 \cdot (\omega_{350}^2 - \omega^2), \\ &\approx \frac{\omega_{350}^2 - \omega^2}{\gamma^2} \propto 10^6, \end{aligned} \quad (5.11)$$

lo cual resulta en valores para el vector de propagación del orden de 10^5 nm^{-1} , lo cual es una señal clara de que la frecuencia de resonancia determina el régimen altamente dispersivo del material. A partir de frecuencias mayores a la de resonancia del medio $\omega \geq \omega_{350}$, el hecho de que el índice de refracción de la fibra sea menor al de su recubrimiento $n_1 < n_2$ implica que la condición de guía 5.10 deja de ser válida y, por tanto, la transmisión de los campos en forma de modos guiados de la nanofibra deja de ser posible. Este resultado es consistente con el hecho de que la absorción del dieléctrico en su frecuencia de resonancia es máxima (ver 2.3b) y para valores mayores el material se encuentra en el régimen de dispersión anómala 2.3a.

Podemos obtener expresiones analíticas para la densidad de estados de la nanofibra (o equivalentemente la velocidad de grupo) derivando implícitamente la EVE con respecto a la frecuencia

$$\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(\omega, \beta) = \frac{\partial}{\partial\omega}\mathcal{F} + \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{F} \equiv 0, \quad (5.12)$$

y recolectando los factores $(\partial\beta/\partial\omega)$ que resultan al derivar $\mathcal{F}(\omega, \beta)$ respecto a ω . Sin embargo, el procedimiento es laborioso y las expresiones resultantes son oscuras y difíciles de manipular, por lo que preferimos calcular la densidad de estados de forma numérica, derivando directamente los valores de la relación de dispersión respecto a la frecuencia. Esta forma de hacer el cálculo resultó más eficiente a nivel numérico y corroboramos que estos coincidieran con el valor teórico, obteniendo resultados positivos a nivel de doble precisión.

En las figuras 5.1c y 5.1d mostramos la velocidad de grupo normalizada con respecto a la velocidad de la luz en el vacío para varios radios de la nanofibra. En el caso de la función dieléctrica ingenua, observamos que tanto la velocidad de fase, así como la de grupo tienden asintóticamente a un valor constante dado por

$$v|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{c}{n_1}, \quad (5.13)$$

lo cual es consistente con el hecho de que estamos considerando que todos los modos de la nanofibra experimentan el mismo índice de refracción independientemente de su frecuencia. Para la función dieléctrica de Lorentz obtenemos que las velocidades decrecen de forma monótona hacia a 0 cuando la frecuencia es igual a la de resonancia del medio.

5.2.2. Consideraciones en el cálculo de la densidad espectral

Una vez que hemos obtenido la relación de dispersión y la densidad de estados de la nanofibra, calculamos la densidad espectral para varias configuraciones atómicas. En la imagen 5.2 mostramos las densidades espectrales de uno y dos átomos para ambas funciones dieléctricas, varios radios de la fibra y diferentes configuraciones espaciales de los átomos. Para la función dieléctrica ingenua encontramos que la densidad espectral en presencia de un solo átomo con la fibra 5.2a posee un máximo centrado en una frecuencia asociada a una longitud de onda dentro de la fibra aproximadamente 3.8 veces más grande que el radio de la nanofibra

$$\lambda_{\max}^N = \frac{2\pi}{\beta(\omega_{\max}, a)}, \quad (5.14)$$

$$\approx 3.8a.$$

Esto se obtuvo mediante un ajuste lineal realizado a la tendencia de los máximos de la densidad espectral de un átomo. Esto nos sugiere que el radio óptimo para lograr la transición $|5P_{3/2}\rangle \rightarrow |5S_{1/2}\rangle$ es aproximadamente de 205 nm. El decaimiento de la densidad espectral en este caso es bastante lento, lo cual significa que, contrario a lo que esperaríamos, modos con frecuencias muy altas se acoplan significativamente con los átomos.

El ancho de banda de la densidad espectral en el caso de la función dieléctrica ingenua lo estimamos mayor a $2000 \text{ PHz} = 2 \times 10^{18} \text{ Hz}$ para poder muestrear correctamente la función de correlación calculada a partir de la transformada de Fourier. Puesto que el ancho de banda de la densidad espectral es así de amplio, podemos anticipar que las funciones de correlación para esta función dieléctrica se encontrarán fuertemente localizadas en el espacio de tiempo.

En el caso de la función dieléctrica de Drude-Lorentz, la densidad espectral de un átomo con la fibra 5.2c posee su máximo en una frecuencia asociada con una longitud de onda dentro de la fibra de la forma

$$\lambda_{\max}^L \approx 3.4a. \quad (5.15)$$

En contraste con el caso anterior, la densidad espectral se encuentra localizada en el intervalo entre 0 y la frecuencia de resonancia del material ω_{350} ; esto se debe a que la intensidad del campo eléctrico evaluada en la posición del átomo se anula más rápido de lo que diverge la densidad de estados a medida que la condición de guía se rompe

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{350}} \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \cdot |\mathbf{e}_\mu(\omega, R)|^2 = 0, \quad (5.16)$$

mientras que para frecuencias mayores a la de resonancia del material, la relación de dispersión no está definida, por lo que consideramos que la densidad espectral sea nula $\forall \omega \geq \omega_{350}$. Podemos esperar entonces que las funciones de correlación estén más esparcidas en el tiempo en comparación al caso donde utilizamos la función dieléctrica ingenua.

Las densidades espectrales cuando la fibra está en presencia de dos átomos poseen las oscilaciones dadas por el término $\cos[\beta(\omega)d]$ asociadas a la separación entre los átomos a lo largo del eje de propagación 5.2b, 5.2d. Estas oscilaciones deben ser consideradas con cuidado al momento de calcular las funciones de correlación, pues dan origen al fenómeno de fuga espectral o *windowing*, en el cual aparecen componentes espurias en el espectro de tiempo debido a que calculamos la transformada de Fourier en un intervalo de frecuencias en el cual la densidad espectral no se anula en los extremos [36]. La manera usual de evitar este efecto en el cálculo numérico de transformadas de Fourier consiste en multiplicar el espectro por una función llamada *ventana*, la cual anula de manera suave al espectro en los extremos que definen su ancho de banda.

En nuestro caso, tenemos que en $\omega = 0$ las densidades espectrales son nulas y sólo hay problemas en el caso en que consideramos a ambos átomos. Optamos entonces por introducir una frecuencia de corte abrupto en algún nodo del espectro de densidad de dos átomos (como se ejemplifica en la figura 5.2d), lo cual elimina la posibilidad de fuga espectral y mantiene al espectro continuo (aunque no diferenciable) en su extremo derecho. La forma de justificar la selección de una frecuencia de corte particular se hace considerando cortes abruptos a frecuencias mayores y comparando las variaciones entre los espectros resultantes de la transformada de Fourier [10]. En caso de que a frecuencias de corte mayores respecto a la seleccionada las variaciones en el espectro resultante sean mínimas, podemos entonces considerar como válida la frecuencia de corte abrupto seleccionada.

Existe otra razón de peso por la cual debemos introducir una frecuencia de corte abrupta en la densidad espectral con dos átomos: en el caso de la función dieléctrica de Drude-Lorentz, el hecho de que la relación de dispersión crezca exponencialmente hace que el factor $\cos[\beta(\omega)d]$ oscile cada vez más rápido a medida que la frecuencia se acerca a la de resonancia de la fibra. Esto implica que es necesario un número muy grande de puntos para poder muestrear correctamente a la densidad espectral de dos átomos (mucho mayor a 2^{23} puntos en nuestras simulaciones), lo cual es numérica y computacionalmente costoso además de que nuestra teoría cuántica para el campo guiado de la fibra es incapaz de incorporar los efectos de absorción y alta dispersión.

En el caso de la función de Drude-Lorentz escogemos las frecuencias de corte que son más cercanas a

$$\omega_{\text{corte}}^L \equiv 5.25 \left[\frac{\text{rad}}{\text{fs}} \right], \quad (5.17)$$

mientras que para la función ingenua escogemos aquellas que más se acercan a

$$\omega_{\text{corte}}^N \equiv 2500 \left[\frac{\text{rad}}{\text{fs}} \right]. \quad (5.18)$$

La razón detrás de la selección de la frecuencia en el caso de la función dieléctrica de Drude-Lorentz es que la absorción es tres órdenes de magnitud menor comparado con el valor que adquiere en la frecuencia de resonancia de la fibra. Para la función dieléctrica ingenua consideramos únicamente el tener un número suficiente de puntos para muestrear adecuadamente la función de correlación resultante.

5.3. Cálculo de las funciones de correlación

Ya que entendemos el comportamiento de las densidades espectrales en los límites de altas y bajas frecuencias, estamos en posición de calcular las funciones de correlación de la nanofibra. Con este fin, calculamos la transformada de Fourier de las densidades espectrales utilizando la función nativa de Matlab `fft`, la cual está basada en una subrutina de C altamente eficiente del algoritmo de la transformada rápida de Fourier. Los detalles de esta función se pueden encontrar en la siguiente referencia [37].

Con el fin de reproducir fielmente las funciones de correlación, el teorema de Nyquist [36] requiere que dividamos el intervalo de muestreo de la densidad espectral, así como de la función de correlación en 2^N puntos equidistantes tal que

$$N = \Delta\omega \cdot \Delta t, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.19)$$

donde $\Delta\omega$ y Δt representan el ancho de banda de la densidad espectral y de la función de correlación respectivamente. En caso de que en la densidad espectral existan componentes de frecuencia que sean mayores al ancho de banda, que en nuestro caso serían las oscilaciones asociadas a la separación entre los átomos, debemos reemplazar en la ecuación 5.19 el ancho de

banda por la frecuencia más grande que compone a la densidad espectral.

En las figuras 5.3, 5.4 y 5.5 presentamos una galería de las partes real e imaginaria de las funciones de correlación de los modos guiados de la nanofibra en presencia de uno y dos átomos para ambas funciones dieléctricas y variando los parámetros de la nanofibra y los átomos; la parte real de la función de correlación la asociamos con la parte no unitaria de la dinámica atómica (decaimiento espontáneo o absorción), mientras que la parte imaginaria se refiere a las correcciones a la estructura energética de un átomo debido a la presencia de la nanofibra y el otro átomo (corrimiento de Lamb e interacción dipolo-dipolo respectivamente) [11], [30], [10].

5.3.1. Función de correlación en presencia de un átomo

Para un sólo átomo interactuando con la nanofibra, la parte real de la función de correlación posee la forma de un pico localizado alrededor de $t = 0$, independientemente de la función dieléctrica empleada 5.3a, 5.3c. En el caso de la función dieléctrica ingenua tenemos un comportamiento tipo delta de Dirac, con un tiempo de correlación definido como la anchura a media altura (FWHM) de aproximadamente $\tau_{\text{corr}} \approx 0.05$ fs, mientras que para la función dieléctrica de Lorentz la forma de la función de correlación se aproxima más a la función $\sin(\Omega t)/\Omega t$, la cual aparece frecuentemente en la teoría del muestreo y es análoga a la función delta de Dirac [36]; el tiempo de correlación en este caso es de aproximadamente $\tau_{\text{corr}} \approx 1.15$ fs. Para la parte imaginaria 5.3b, 5.3d tenemos un comportamiento antisimétrico con respecto al tiempo y un valor nulo en $t = 0$, el cual evoluciona rápidamente a su máximo para después decaer lentamente hacia 0. Las amplitudes en ambos casos son del orden de 10^6 Hz, lo cual se encuentra en buen acuerdo con los valores típicos del corrimiento de Lamb tanto en el caso del vacío, así como en el de la nanofibra [32], [11].

Podemos concluir entonces que la aproximación markoviana está plenamente justificada en el caso de un solo átomo interactuando con la nanofibra en vista de lo minúsculos que son los tiempos de correlación y la ausencia de cualquier efecto de propagación del campo en un tiempo finito, esperando únicamente modificaciones ligeras a los valores de los ritmos de decaimiento y corrección de la energía.

5.3.2. Función de correlación en presencia de dos átomos

Cuando consideramos la situación de dos átomos interactuando mediante la nanofibra, tenemos de nuevo la aparición de picos altamente localizados en el tiempo para ambas partes real e imaginaria de la función de correlación en el caso de la función dieléctrica ingenua (Fig. 5.4). La posición de los picos corresponde al tiempo que tarda en recorrer la separación entre los átomos una excitación propagándose dentro de la fibra moviéndose a la velocidad asintótica que encontramos al calcular la densidad de estados 5.13

$$t_{\text{pico}} = n_1 \frac{d}{c}, \quad (5.20)$$

lo cual nos sugiere que la teoría es consistente con el principio de causalidad cuando utilizamos la función dieléctrica ingenua a pesar de que esta no satisface las relaciones de Kramers y Kronig.

Contrario al caso anterior, cuando consideramos la función de Lorentz, las partes real e imaginaria de las funciones de correlación de dos átomos se encuentran dispersadas en el tiempo, presentando oscilaciones cuyas amplitudes decrecen lentamente hacia 0 a medida que t aumenta (ver Fig.5.5). Encontramos que la posición de los máximos en la oscilación más grande exhibe un comportamiento no trivial en función de la separación entre los átomos. Para separaciones menores a la longitud de onda asociada a la frecuencia de transición atómica $d \leq \lambda_0 \approx 780$ nm, la velocidad de propagación de la información acerca de la presencia de los átomos y la consecuente evolución colectiva es siempre menor a la velocidad de grupo de una excitación con la frecuencia de transición atómica. El efecto es más marcado a medida que el radio de la nanofibra decrece, dando velocidades de hasta un tercio de la velocidad de grupo para $(a, d) = (150, \pi/2\beta_0)$ nm y aproximadamente $0.7v_g^L(a, \omega_0)$ cuando $(a, d) = (300, 2\pi/\beta_0)$ nm.

Otro comportamiento interesante surge a medida que los átomos se separan por encima de la longitud de onda de la transición atómica (ver Fig.5.6): para separaciones suficientemente grandes (pero mucho menores a la separación crítica 4.32) las funciones de correlación son esencialmente las mismas para tiempos menores al que tarda en propagarse la excitación a la velocidad de grupo, independientemente de la función dieléctrica empleada. Las diferencias más apreciables entre ambas funciones aparecen en la vecindad del tiempo en que esperamos que la excitación haya recorrido la separación entre los átomos; finalmente, ambas funciones se amortiguan hacia 0 a medida que el tiempo pasa sin que se muestren efectos de absorción del campo por los átomos.

Este resultado nos sugiere que para separaciones suficientemente grandes, la propagación del campo depende únicamente de la estructura de la fibra y las condiciones a la frontera y no de la forma particular en la que los átomos se acoplan con la fibra. En este sentido, el efecto de considerar la respuesta de la fibra a la presencia de los átomos es en determinar la forma y el tiempo en el que se establece el comportamiento colectivo: abrupto en el caso de la función dieléctrica ingenua y de forma suave en el caso de la función de Lorentz.

Ya que hemos descrito cualitativa y cuantitativamente el cálculo y la estructura de las funciones de correlación de los modos guiados de la nanofibra óptica, procedemos a resolver las ecuaciones de evolución atómicas en el régimen no markoviano.

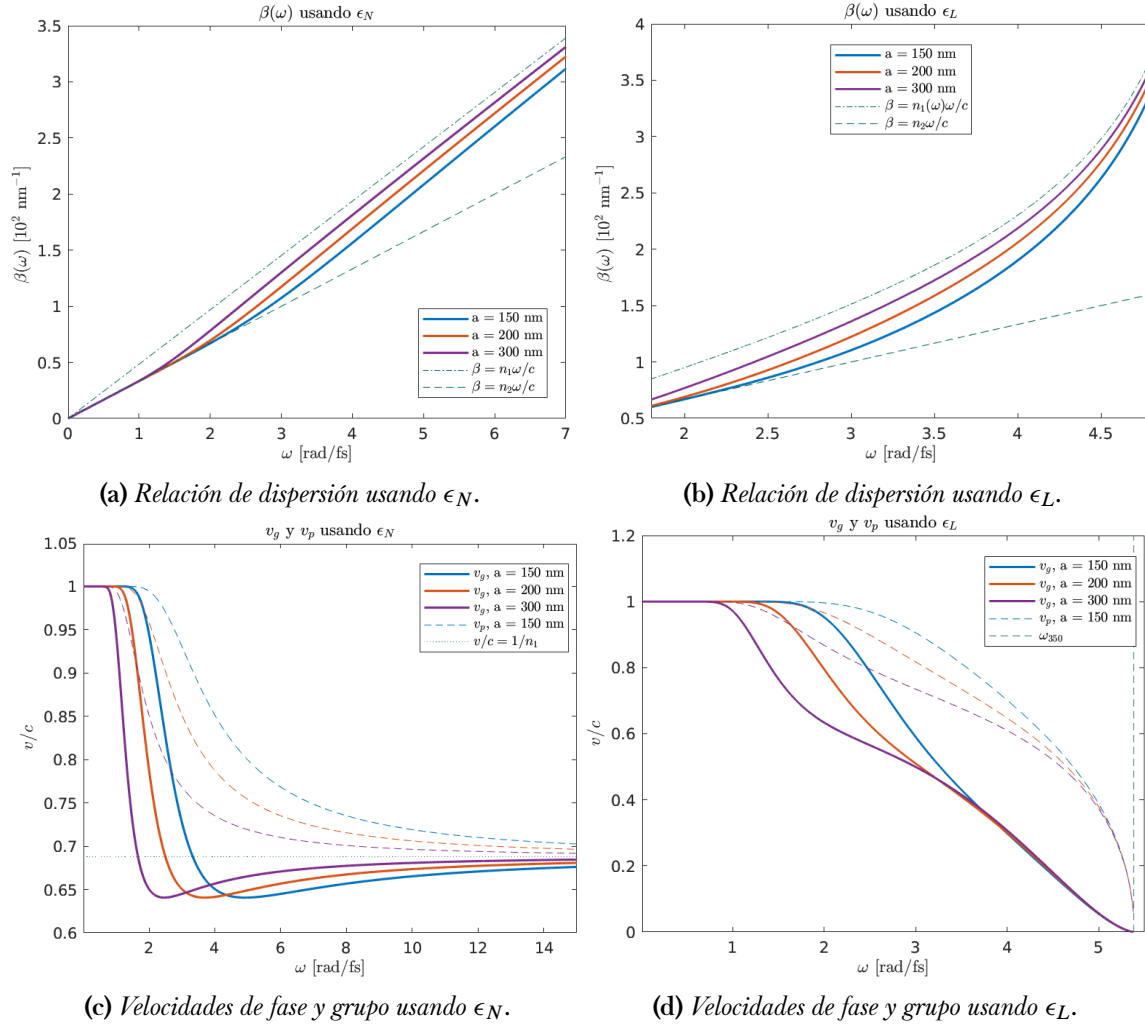


Figura 5.1: Relaciones de dispersión y velocidades de fase y grupo de una nanofibra óptica.

En 5.1a y 5.1b mostramos la relación de dispersión de la nanofibra en función de su radio para ambas funciones dieléctricas ingenua y de Drude-Lorentz. Las curvas quebradas se refieren a los comportamientos asintóticos a altas y bajas frecuencias. Estas corresponden a la relación de dispersión en el vacío $\beta = \omega/c$ y la de un medio homogéneo infinito con índice de refracción $n_1(\omega)$. Observamos que para ambas funciones dieléctricas, la relación de dispersión de la nanofibra transita de manera suave de un comportamiento asintótico al otro a medida que aumenta la frecuencia. En 5.1c y 5.1d mostramos las velocidades de fase v_p y grupo v_g normalizadas con respecto a la velocidad de la luz en el vacío. En el caso de la función dieléctrica ingenua, ambas velocidades tienden a un valor asintótico no nulo dado por c/n_1 , lo cual es una consecuencia de haber asumido que todas las frecuencias experimentan un mismo valor del índice de refracción y absorción nula. Por otro lado, para la función dieléctrica de Drude-Lorentz obtenemos que ambas velocidades decrecen monótonicamente hacia 0 en el límite $\omega \rightarrow \omega_{350} - \gamma_{350}$, lo cual es consecuente con el hecho de que la absorción de la fibra es máxima. Para frecuencias mayores a la de resonancia del medio, las velocidades no están bien definidas pues deja de ser satisfecha la condición de guía de los modos de la nanofibra.

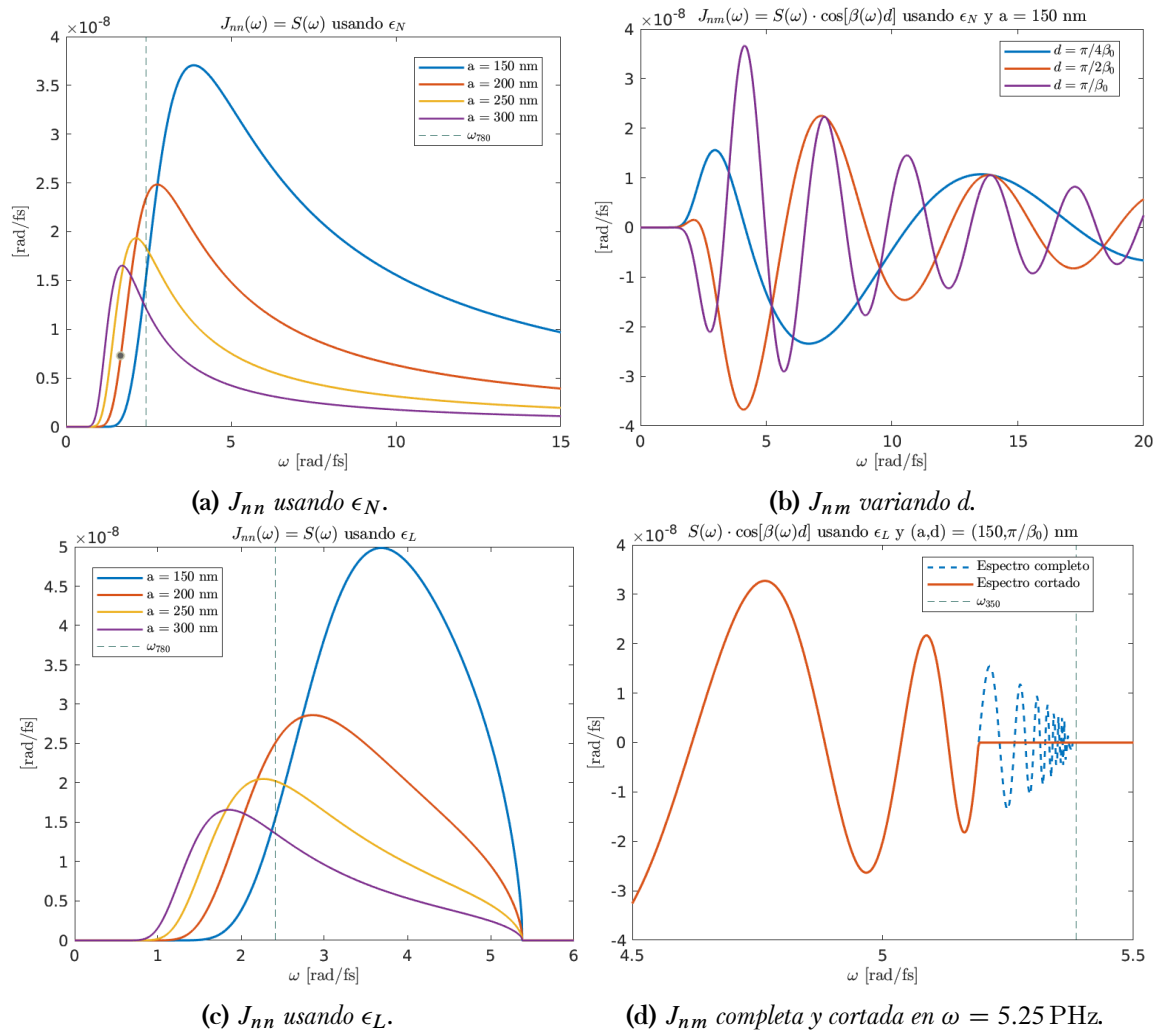


Figura 5.2: Densidad espectral de la nanofibra en presencia de uno y dos átomos. En 5.2a y 5.2c mostramos la densidad espectral de en presencia de un sólo átomo para las funciones dieléctricas ingenua y de Lorentz y varios valores del radio de la fibra. El valor numérico de los espectros los obtuvimos considerando el elemento de matriz reducido de la transición dipolar eléctrica $|5S_{1/2}\rangle \rightarrow |5P_{3/2}\rangle$, $d \approx 4.227e a_0$ [27]. Los máximos de los espectros se encuentran en una frecuencia asociada a una longitud de onda dentro de la fibra de aproximadamente $3.8a$ y $3.4a$ respectivamente, mientras que sus anchos de banda son aproximadamente 2000 PHz y ω_{350} respectivamente. En 5.2b y 5.2d mostramos la densidad espectral de la nanofibra en presencia de dos átomos para ambas funciones dieléctricas y varios valores del radio de la fibra. Las oscilaciones asociadas a la separación entre los átomos hacen necesario introducir una frecuencia de corte para prevenir el efecto de fuga espectral en el cálculo de la transformada de Fourier de las densidades espectrales. En la figura 5.2d mostramos el espectro completo hasta ω_{350} , donde se aprecia que no está correctamente muestreado con 2^{23} puntos equidistantes en el intervalo de frecuencias $\omega \in [0, 2500]$ PHz; incluimos también su forma cortada en $\omega_{\text{corte}} = 5.25$ PHz.

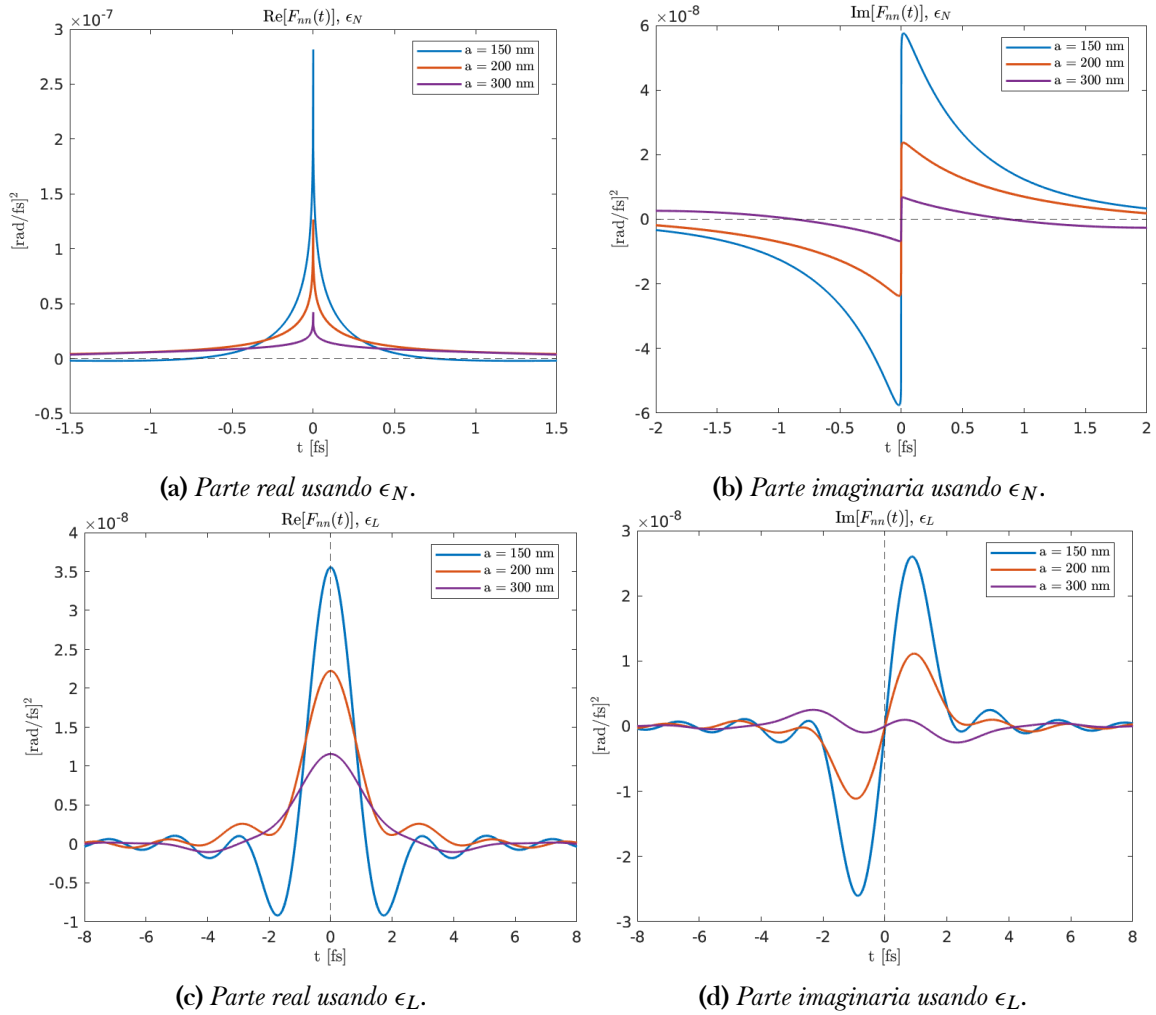


Figura 5.3: Funciones de correlación de la nanofibra en presencia de un átomo para varios radios. Partes real (5.3a, 5.3c) e imaginaria (5.3b, 5.3d) de la función de correlación de la nanofibra en presencia de un átomo para ambas funciones dieléctricas y varios radios. El comportamiento de la parte real asociada con el decaimiento espontáneo del átomo en los modos guiados de la nanofibra tiene un perfil tipo delta de Dirac para la función dieléctrica ingenua y tipo $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ para la de Lorentz. El tiempo de correlación definido en términos de la anchura a media altura es de aproximadamente 0.05 fs y 1.15 fs respectivamente en promedio para todos los radios. La parte imaginaria que asociamos con las correcciones a la frecuencia de transición atómica es antisimétrica respecto al tiempo y posee su máximo (mínimo) en una vecindad de $t = 0$ menor a 3 fs. Los órdenes de magnitud de ambas partes junto con lo diminuto del tiempo de correlación justifican el uso de la aproximación markoviana en la descripción de un único átomo en presencia de la nanofibra.

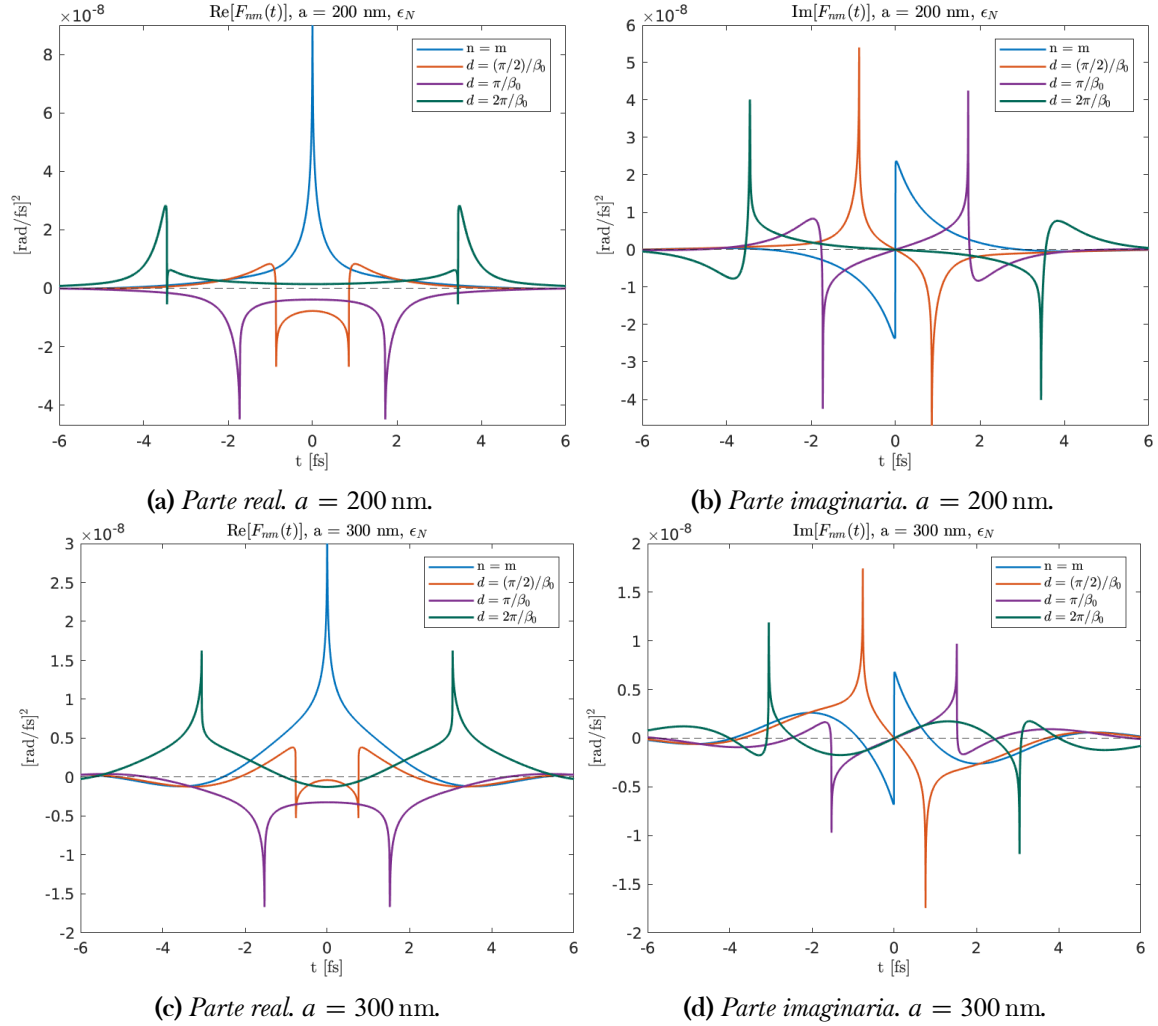


Figura 5.4: *Funciones de correlación de la nanofibra en el caso de dos átomos utilizando la función dieléctrica ingenua ϵ_N y varias separaciones entre los átomos. Mostramos las partes real e imaginaria de las funciones de correlación empleando la función dieléctrica ingenua con el radio de la fibra igual a 200nm (5.4a, 5.4b) y 300nm (5.4c, 5.4d) utilizando separaciones entre los átomos menores o iguales a la longitud de onda asociada a la frecuencia de transición atómica ($\lambda = 780$ nm). Observamos la aparición de picos bien localizados, los cuales están centrados alrededor del tiempo que tarda en recorrer la separación entre los átomos una excitación dentro de la fibra moviéndose a la velocidad límite a la que tienden los modos guiados de la nanofibra $t_{\text{pico}} = n_1 d/c$. En el caso en que el radio de la fibra es igual a 200 nm, los picos poseen una anchura cercana a la de la función de correlación de un sólo átomo $\tau_{\text{corr}} \approx 0.05$ fs. Cuando el radio de la fibra se fija en 300 nm, observamos que la función se vuelve más ancha en su base y tiende a decaer más lento comparado con el caso anterior.*

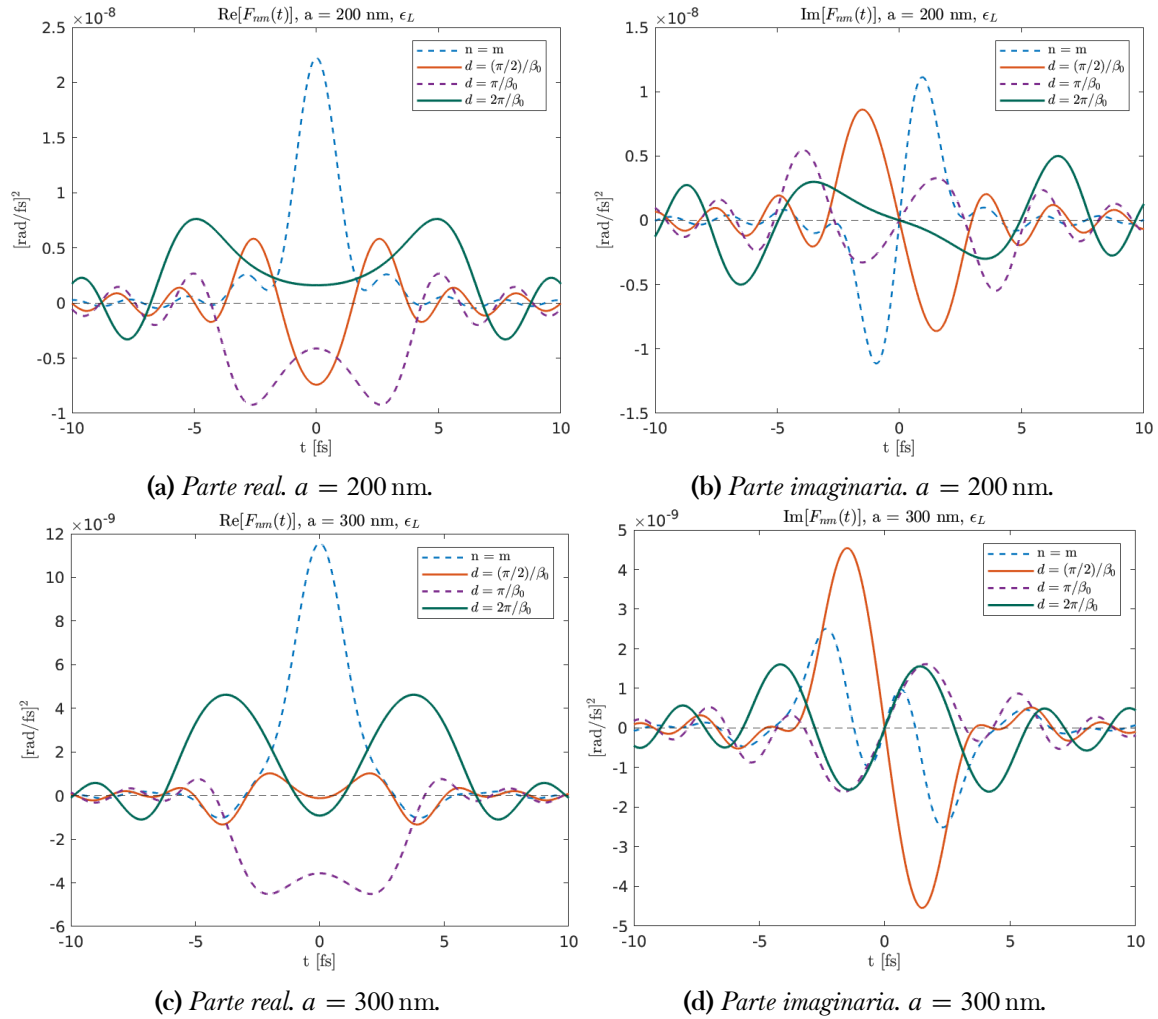


Figura 5.5: *Funciones de correlación de la nanofibra en el caso de dos átomos utilizando la función dieléctrica de Lorentz ϵ_L y varias separaciones entre los átomos. Mostramos las partes real e imaginaria de las funciones de correlación empleando la función dieléctrica de Drude-Lorentz con el radio de la fibra igual a 200 nm (5.5a, 5.5b) y 300 nm (5.5c, 5.5d) para varias separaciones entre los átomos menores o iguales a la longitud de onda asociada a la frecuencia de transición atómica $\lambda = 780$ nm. Para estas separaciones, los máximos indican que el establecimiento del comportamiento colectivo de los átomos no es instantáneo, pues siempre están centrados en tiempos que corresponden a velocidades menores a la de grupo para la frecuencia de transición atómica. Este efecto aumenta con la disminución del radio y la separación entre los átomos, dando velocidades de hasta un tercio de la velocidad de grupo para la configuración $(a, d) = (150, 200)$ nm.*

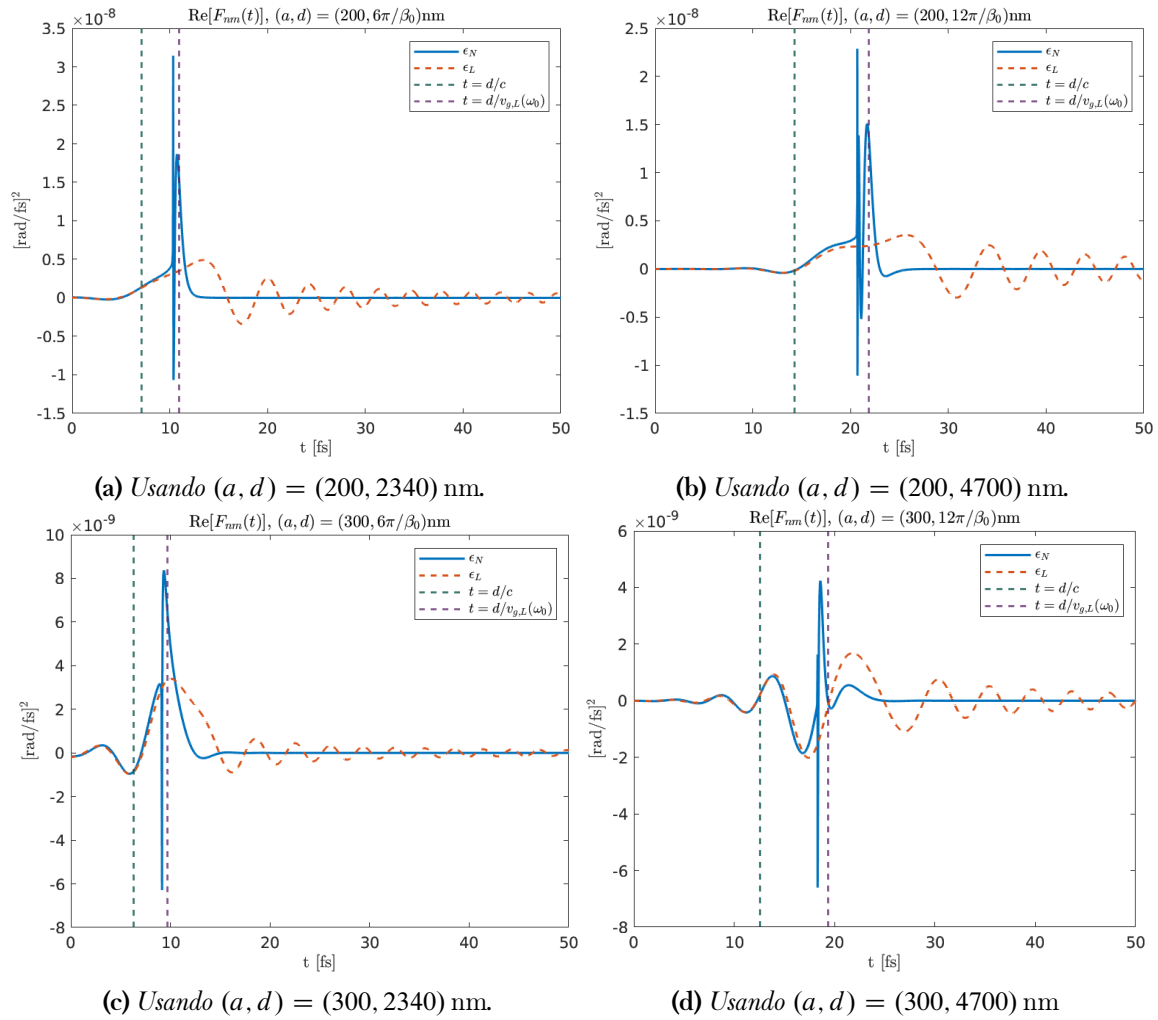


Figura 5.6: Funciones de correlación en el caso de dos átomos a separaciones grandes. Mostramos la parte real de la función de correlación de la nanofibra cuando hay dos átomos utilizando ambas funciones dieléctricas y dos radios de la fibra cuando las separaciones entre los átomos son varios 3 y 6 veces más grandes que la longitud de onda asociada a la frecuencia de transición atómica (5.6a, 5.6b y 5.6c, 5.6d respectivamente). Observamos que las funciones de correlación son prácticamente iguales a tiempos menores al tiempo en que esperaríamos que los átomos comenzaran a interactuar colectivamente. Las diferencias más marcadas se dan alrededor del tiempo en que la excitación recorre la separación entre los átomos si se moviera a la velocidad de grupo de la frecuencia de transición de los átomos. A tiempos mayores, ambas funciones decaen a 0 sin mostrar la posibilidad de efectos de absorción de la excitación por parte de los átomos. El efecto observado sugiere que cuando los átomos se encuentran lo suficientemente separados, la propagación de la excitación dentro de la fibra depende únicamente su radio y las condiciones a la frontera y no de la forma particular en la que la fibra responde a la presencia de los átomos.

Capítulo 6

Dinámica colectiva no markoviana de átomos microscópicamente separados

Ya que hemos construido y analizado las funciones de correlación de los modos guiados de la nanofibra en presencia de uno y dos átomos, estamos en posición de resolver las ecuaciones de evolución de las amplitudes de probabilidad del sistema atómico cuando su separación es del orden de la longitud de onda asociada con la frecuencia de transición atómica. Con este fin, comenzamos nuestra discusión presentando el desarrollo del algoritmo de integración para este problema, el cual es una aplicación directa de la regla del trapecio frecuentemente utilizado en la estimación numérica de integrales definidas. El método consiste en convertir el sistema de ecuaciones integrodiferenciales en uno algebraico, el cual, dadas las condiciones iniciales, nos permite calcular la evolución del sistema de forma recursiva.

A continuación presentamos los resultados de aplicar el algoritmo a la evolución de uno y dos átomos preparados en estados súper y subradiante. Entre estos se encuentran las curvas de evolución súper y subradiante en las separaciones de equilibrio utilizando ambas funciones dieléctricas y varios radios de la nanofibra; mostramos también los ritmos de decaimiento espontáneo de un átomo y colectivos, así como su comparación con la predicción markoviana, encontrando variaciones de hasta el 4% cuando el radio de la fibra se fija en 150nm y modelamos su respuesta con la función ingenua. Finalmente, presentamos un estudio del tiempo en que tarda en establecerse el comportamiento colectivo de los átomos analizando las soluciones a las ecuaciones de evolución. Proponemos un método que nos permite cuantificar esta cantidad y encontramos que es consistente con lo que esperaríamos cuando la separación entre los átomos es mayor a la longitud de onda asociada a la frecuencia de transición atómica.

6.1. Algoritmo de integración de las ecuaciones de evolución del sistema

Las ecuaciones de evolución de las amplitudes de probabilidad atómicas para los estados en la variedad de una excitación definen un sistema de ecuaciones integrodiferenciales acopladas

$$\dot{c}_n(t) = - \int_0^t dt' [F_{nn}(t-t')c_n(t') + F_{nm}(t-t')c_m(t')], \quad (6.1)$$

donde c_n, c_m corresponden a las amplitudes de probabilidad de los estados $|e_{n,m}g\rangle \otimes |\{0\}\rangle$ respectivamente y F_{nn}, F_{nm} son las funciones de correlación de los modos guiados de la nanofibra en presencia de uno y dos átomos, las cuales definimos en el capítulo anterior 5.6

$$\begin{aligned} F_{nm}(t-t') &= \sum_{\mu} G_{\mu n} G_{\mu m}^* e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')}, \\ &= \int_0^{\infty} d\omega J_{nm}(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')}, \\ J_{nm}(\omega) &= S(\omega) \cos[\beta(\omega)d], \\ S(\omega) &= \left(\frac{d^2}{\pi \epsilon_0 \hbar} \right) \cdot \omega \frac{\partial \beta}{\partial \omega} |\mathbf{e}_r(\omega, R)|^2. \end{aligned}$$

Aquí, hemos asumido que los momentos dipolares atómicos apuntan ambos en la dirección radial y que los átomos se encuentran a $R = 100$ nm respecto de la superficie de la nanofibra. Resolvemos la dinámica del sistema utilizando el algoritmo del trapecio, lo cual convierte al sistema de ecuaciones integrodiferenciales en uno algebraico al expandir la integral del lado derecho en sumas sobre los estados pasados del sistema. Para un conjunto de N puntos uniformemente distribuidos en el intervalo $[a, b]$, el algoritmo del trapecio estima el valor de una integral de acuerdo con la siguiente suma [36]

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{h}{2} \left[2 \sum_{j=2}^{N-1} f(t_k) + f(t_N) + f(t_1) \right], \quad (6.2)$$

donde h es la separación entre cualesquiera dos puntos consecutivos en el intervalo, $t_N = b$, $t_1 = a$ y el error de la estimación va como

$$\text{Error} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} [f'(b) - f'(a)] + \mathcal{O}(N^{-3}). \quad (6.3)$$

Comenzamos el algoritmo separando las partes real e imaginaria de las ecuaciones, las cuales reescribimos por simplicidad de la siguiente manera

$$A(t, t') = \text{Re}[F_{nn}(t-t')], \quad B(t, t') = \text{Im}[F_{nn}(t-t')], \quad (6.4)$$

$$C(t, t') = \text{Re}[F_{nm}(t-t')], \quad D(t, t') = \text{Im}[F_{nm}(t-t')], \quad (6.5)$$

$$a_1(t) = \text{Re}[c_n(t)], \quad a_2(t) = \text{Im}[c_n(t)], \quad (6.6)$$

$$b_1(t) = \text{Re}[c_m(t)], \quad b_2(t) = \text{Im}[c_m(t)]. \quad (6.7)$$

Integramos ambos lados de la ecuación 6.1 de un punto j del intervalo a su sucesor ($j + 1$) y después estimamos las integrales correspondientes con la regla del trapecio. Tomando por ejemplo la parte real de la amplitud de probabilidad c_n tenemos

$$a_1^{j+1} = a_1^j - \int_j^{j+1} dt \int_0^t dt' [A(t, t')a_1(t') - B(t, t')a_2(t') + C(t, t')b_1(t') - D(t, t')b_2(t')]. \quad (6.8)$$

La forma general de las integrales del lado derecho es la siguiente (tomando la primera como ejemplo)

$$\int_j^{j+1} dt \int_0^t dt' A(t, t')a_1(t') = \frac{h}{2} \left[\int_0^j dt' A(j, t')a_1(t') + \int_0^{j+1} dt' A(j+1, t')a_1(t') \right], \quad (6.9)$$

$$\int_0^{j+1} dt' A(j+1, t')a_1(t') = \frac{h}{2} \left[2 \sum_{l=2}^{j-1} A(j+1, l)a_1^l + 2A(j+1, j)a_1^j + A(1, 1)a_1^{j+1} + A(j+1, 1)a_1^1 \right], \quad (6.10)$$

$$\int_0^j dt' A(j, t')a_1(t') = \frac{h}{2} \left[2 \sum_{l=2}^{j-1} A(j, l)a_1^l + A(1, 1)a_1^j + A(j, 1)a_1^1 \right], \quad (6.11)$$

$$\Rightarrow \int_j^{j+1} dt \int_0^t dt' A(t, t')a_1(t') = \left(\frac{h}{2}\right)^2 A(1, 1)a_1^{j+1} + Y^A a_1^j + X_{a_1}^A,$$

donde en la última línea hemos discriminado entre los estados presente e inmediato futuro a_1^j, a_1^{j+1} y los pasados del sistema codificados en el término $X_{a_1}^A$

$$Y^A = \left(\frac{h}{2}\right)^2 [2A(2, 1) + A(1, 1)], \quad (6.12)$$

$$X_{a_1}^A = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left\{ 2 \sum_{l=2}^{j-1} [A(j+1, l) + A(j, l)]a_1^l + [A(j+1, 1) + A(j, 1)]a_1^1 \right\}. \quad (6.13)$$

Siguiendo el mismo procedimiento sobre las demás integrales obtenemos un sistema lineal de ecuaciones de la forma $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para las partes real e imaginaria de las amplitudes de probabi-

lidad. Las expresiones para \mathbf{M} , \mathbf{x} e \mathbf{y} son

$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} a_1^{j+1} & a_2^{j+1} & b_1^{j+1} & b_2^{j+1} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{Id}_{4 \times 4} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} A(1, 1) & -B(1, 1) & C(1, 1) & -D(1, 1) \\ B(1, 1) & A(1, 1) & C(1, 1) & D(1, 1) \\ C(1, 1) & -D(1, 1) & A(1, 1) & -B(1, 1) \\ D(1, 1) & C(1, 1) & B(1, 1) & A(1, 1) \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} [1 - Y^A]a_1^j - \left\{ \left[X_{a_1}^A - X_{a_2}^B + X_{b_1}^C - X_{b_2}^D \right] - \left[Y^B a_2^j - Y^C b_1^j + Y^D b_2^j \right] \right\} \\ [1 - Y^A]a_2^j - \left\{ \left[X_{a_2}^A - X_{a_1}^B + X_{b_2}^C - X_{b_1}^D \right] - \left[Y^B a_1^j - Y^C b_2^j + Y^D b_1^j \right] \right\} \\ [1 - Y^A]b_1^j - \left\{ \left[X_{b_1}^A - X_{b_2}^B + X_{a_1}^C - X_{a_2}^D \right] - \left[Y^B b_2^j - Y^C a_1^j + Y^D a_2^j \right] \right\} \\ [1 - Y^A]b_2^j - \left\{ \left[X_{b_2}^A - X_{b_1}^B + X_{a_2}^C - X_{a_1}^D \right] - \left[Y^B b_1^j - Y^C a_2^j + Y^D a_1^j \right] \right\} \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

donde $\mathbf{Id}_{4 \times 4}$ es la identidad en el espacio de matrices de 4×4 .

Así, una vez que definimos las condiciones iniciales, obtenemos la evolución del sistema atómico en cada paso de tiempo resolviendo de forma recursiva el sistema lineal de ecuaciones arriba descrito. En nuestro caso, las funciones de correlación definen el intervalo de tiempo así como los puntos que utilizamos para integrar el sistema de ecuaciones. A continuación mostramos los resultados de aplicar el algoritmo a nuestro problema.

6.2. Resultados

6.2.1. Curvas de evolución colectiva súper y subradiante

En la figura 6.2 mostramos las curvas de evolución súper y subradiante que resultan de aplicar el algoritmo de integración propuesto; esto lo hicimos utilizando las funciones de correlación para ambas funciones dieléctricas, el radio de la fibra fijado en 150 nm y las primeras siete separaciones de equilibrio $d = n\pi/\beta_0$, $n \in [0, 6]$. Para el estado superradiante (figuras 6.2a, 6.2c) las curvas de evolución son cualitativamente iguales: al inicio, los átomos decaen de forma independiente y radian colectivamente a un ritmo muy cercano al doble una vez que se establece la comunicación a través de la nanofibra (figura 6.2c). A nivel cuantitativo (figura 6.2a), las curvas superradiantes calculadas con la función dieléctrica de Lorentz presentan pequeñas oscilaciones alrededor de las soluciones obtenidas con la función dieléctrica ingenua; en ambos casos, el inicio de la evolución superradiante se da suavemente, sin resultar claro en qué momento comienza.

En el caso en que los átomos están preparados en el estado subradiante (figuras 6.2b y 6.2d) los efectos de la función dieléctrica empleada en el cálculo de las funciones de correlación son más marcados, dando como resultado que las curvas de evolución asociadas a la función dieléctrica ingenua decaen en todos los casos más rápido que las que resultan de la función de

Lorentz (figura 6.2d). A propósito de este comportamiento, notamos que los átomos presentan un decaimiento espontáneo no nulo a pesar de encontrarse en las separaciones de equilibrio que en los regímenes anteriores predicen un congelamiento de la evolución. Esto se entiende en vista de que en la expresión para el ritmo de decaimiento colectivo súper y subradiante en el régimen markoviano 3.44

$$\gamma_{\text{sub}}^{\text{sup}} = \gamma_{nn} \cdot (1 \pm |\cos(\beta_0 d)|), \quad (6.17)$$

la cancelación del decaimiento espontáneo se debe a que los átomos se acoplan exclusivamente con el modo resonante a su frecuencia de transición. En el caso general, no existe separación alguna entre los átomos para los cuales $\cos[\beta(\omega)d] = 1 \forall \omega$ salvo $d = 0$, pues los átomos se acoplan significativamente con una fracción no despreciable de modos de la nanofibra, tal y como lo indican las densidades espectrales para uno y dos átomos. Este resultado nos lleva a concluir que la subradiancia perfecta es en principio imposible para ensambles de átomos interactuando colectivamente a través de una nanofibra óptica; a pesar de esto, como podemos ver en ambas figuras, el decaimiento espontáneo de los átomos se reduce drásticamente comparado con el de un átomo independiente y el de la fase superradiante.

6.2.2. Ritmos de decaimiento colectivo y de un solo átomo

En la figura 6.3 mostramos la modificación de los ritmos de decaimiento espontáneo de un solo átomo (figuras 6.3a y 6.3b) y de dos átomos en estados súper y subradiante (figuras 6.3c y 6.3d) variando los diferentes parámetros del sistema tales como el radio y la función de respuesta de la nanofibra, así como la separación entre los átomos. En todos los casos, los valores de estas cantidades se calcularon haciendo un ajuste lineal a las curvas de evolución a tiempos largos (>150 fs en nuestras simulaciones), en los cuales la derivada de la solución deja de variar apreciablemente.

En el caso de un solo átomo en la vecindad de la nanofibra, observamos (figura 6.3a) que el ritmo de decaimiento espontáneo calculado con la función de Lorentz es siempre mayor al de la función ingenua, dando una diferencia máxima de aproximadamente el 5% cuando el radio de la fibra se fija en 200 nm. Observamos además que el ritmo de decaimiento es máximo cuando el radio de la nanofibra es aproximadamente 4 veces menor a la longitud de onda asociada con la transición, lo cual nos indica que el acoplamiento del átomo con la fibra es máximo tal y como obtuvimos cuando estimamos la posición de los máximos de la densidad espectral de un átomo con la fibra $a = 3.8\lambda_{780}$ (figuras 5.2a, 5.2c). Cuando comparamos los ritmos de decaimiento espontáneo calculados numéricamente contra la predicción dada por la aproximación markoviana (figura 6.3b) obtenemos variaciones a partir de la segunda y tercera cifra significativa. Como anticipamos en el capítulo anterior, este resultado nos confirma que la aproximación de Markov está justificada en este caso.

Para el caso de átomos preparados en estados súper y subradiante, los cocientes entre el ritmo de decaimiento espontáneo colectivo e individual a tiempos largos $\gamma_{\text{sup, sub}}/\gamma_{nn}$ se encuentran por debajo (encima) de 2 y 0 respectivamente en todos los casos y son prácticamente independientes de la separación entre los átomos (excepto $d = 0$) (figuras 6.3c y 6.3d). Para ambas fases, el comportamiento más diferente resultó ser cuando el radio de la fibra es de

150nm, dando una variación del 4% con respecto a la predicción en la aproximación markoviana. A medida que el radio de la nanofibra aumenta, los ritmos de decaimiento colectivo convergen asintóticamente al valor que surge de la aproximación markoviana, dando como resultado tiempos de vida de estados subradiantes del orden de 10^{-4} s cuando el radio de la fibra se fija en 300nm.

6.2.3. Tiempo y velocidad de comunicación entre los átomos

En contraste con los casos que estudiamos en capítulos anteriores, el establecimiento del comportamiento colectivo de los átomos no es instantáneo cuando tomamos en cuenta el acoplamiento con los diferentes modos de la nanofibra (figuras 6.2a y 6.2b). Esto nos lleva a preguntarnos si existe alguna forma de cuantificar el tiempo en que tarda en establecerse el comportamiento colectivo una vez que los átomos han comenzado a comunicarse a través de la nanofibra, así como si es posible relacionarlo con los diferentes parámetros del sistema. Como una primera aproximación, proponemos extrapolar a tiempos cortos el comportamiento de las curvas de evolución colectiva mediante un ajuste lineal a los resultados a tiempos largos (>150 fs en nuestras simulaciones). Definimos entonces el tiempo de comunicación colectiva entre los átomos como la intersección entre las rectas de evolución colectiva extrapolada y la de un átomo independiente (figura 6.1).

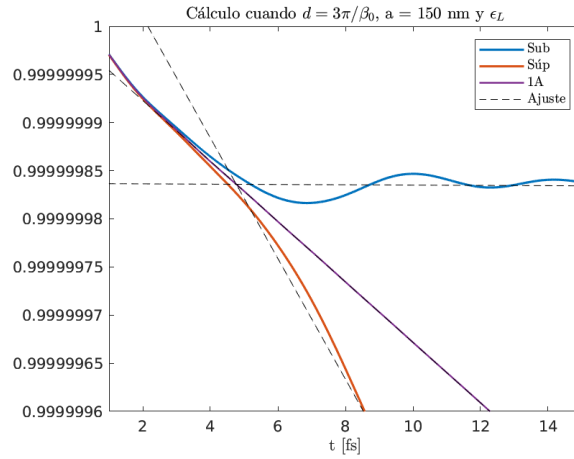
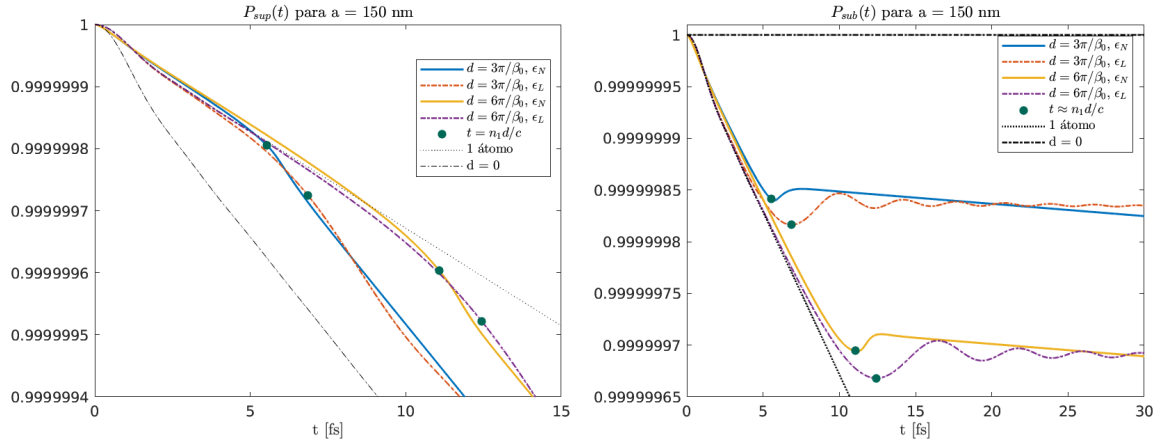


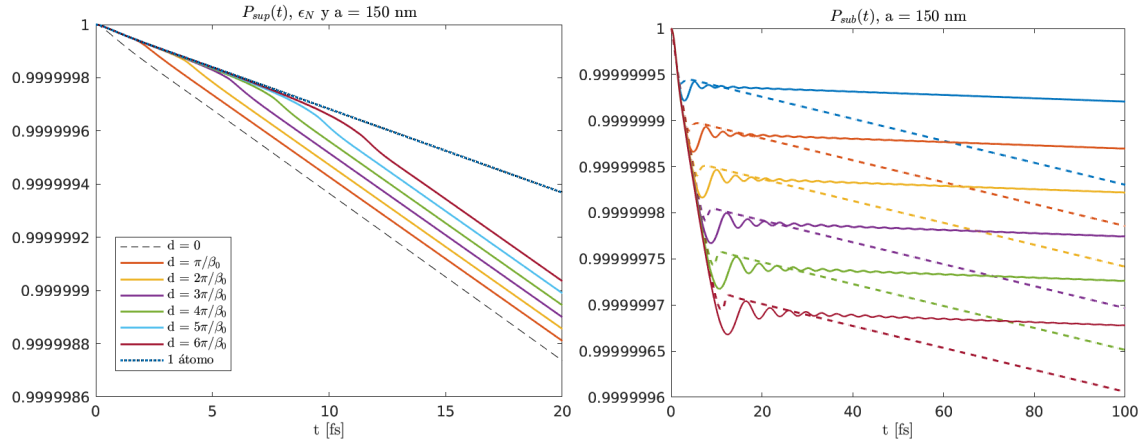
Figura 6.1: Ejemplo de la estimación del tiempo de comunicación colectiva de los átomos tomando la función dieléctrica de Lorentz, el radio de la fibra en 150nm y la separación atómica igual a $d = 3\pi/\beta_0$. Las curvas punteadas corresponden a los comportamientos a tiempos largos de las curvas de evolución.

Con esta propuesta obtenemos que el tiempo de comunicación es independiente del estado en que se preparan los átomos ; en las figuras 6.4a y 6.4b mostramos los tiempos de comunicación y las velocidades asociadas con la transmisión del comportamiento colectivo para las primeras 7 separaciones de equilibrio ($d = n\pi/\beta_0$, $n \in [0, 6]$). Para separaciones mayores a la mitad de longitud de onda asociada a la frecuencia de transición atómica $d > \pi/\beta_0$ el tiempo de comunicación coincide con el tiempo que tarda en recorrer una excitación la separación entre los átomos moviéndose a la velocidad de grupo de la frecuencia de transición.



(a) Evolución superradiante a tiempos cortos.

(b) Evolución subradiante a tiempos cortos.



(c) Evolución superradiante para varias separaciones.

(d) Evolución subradiante para varias separaciones.

Figura 6.2: Evolución de estados súper y subradiante en función de la separación entre los átomos. En las figuras 6.2a y 6.2b mostramos la comparación entre las curvas de evolución súper y subradiante para ambas funciones dieléctricas, así como la separación entre los átomos e incluyendo los casos límite de emisores independientes y de separación nula. A tiempos cortos observamos el decaimiento espontáneo de átomos individuales; posteriormente, en el caso superradiante el sistema transita suavemente a la fase colectiva y no resulta claro en qué momento particular del tiempo ocurre la transición (aquí, el tiempo asociado a la velocidad de grupo asintótica de la función dieléctrica ingenua fue puesto como una referencia). El caso subradiante muestra una transición a la fase colectiva mucho más marcada, dando un freno ligeramente abrupto en tiempos cercanos al asociado a la velocidad asintótica ingenua para después decaer lentamente hacia 0. En las figuras 6.2c y 6.2d mostramos las familias de curvas de evolución colectivas de ambos estados en función de las primeras 7 separaciones de equilibrio ($d = n\pi/\beta_0$, $n \in \mathbb{N}$). Para ambos estados observamos los mismos comportamientos independientemente de la función dieléctrica empleada en el cálculo de las funciones de correlación; tenemos por ejemplo que las soluciones son paralelas entre sí a medida que variamos la separación entre los átomos, lo cual nos indica que la periodicidad de las soluciones se preserva en este régimen. En el caso superradiante, mostramos únicamente la evolución utilizando la función dieléctrica ingenua, pues no hay diferencia entre las soluciones a nivel cualitativo.

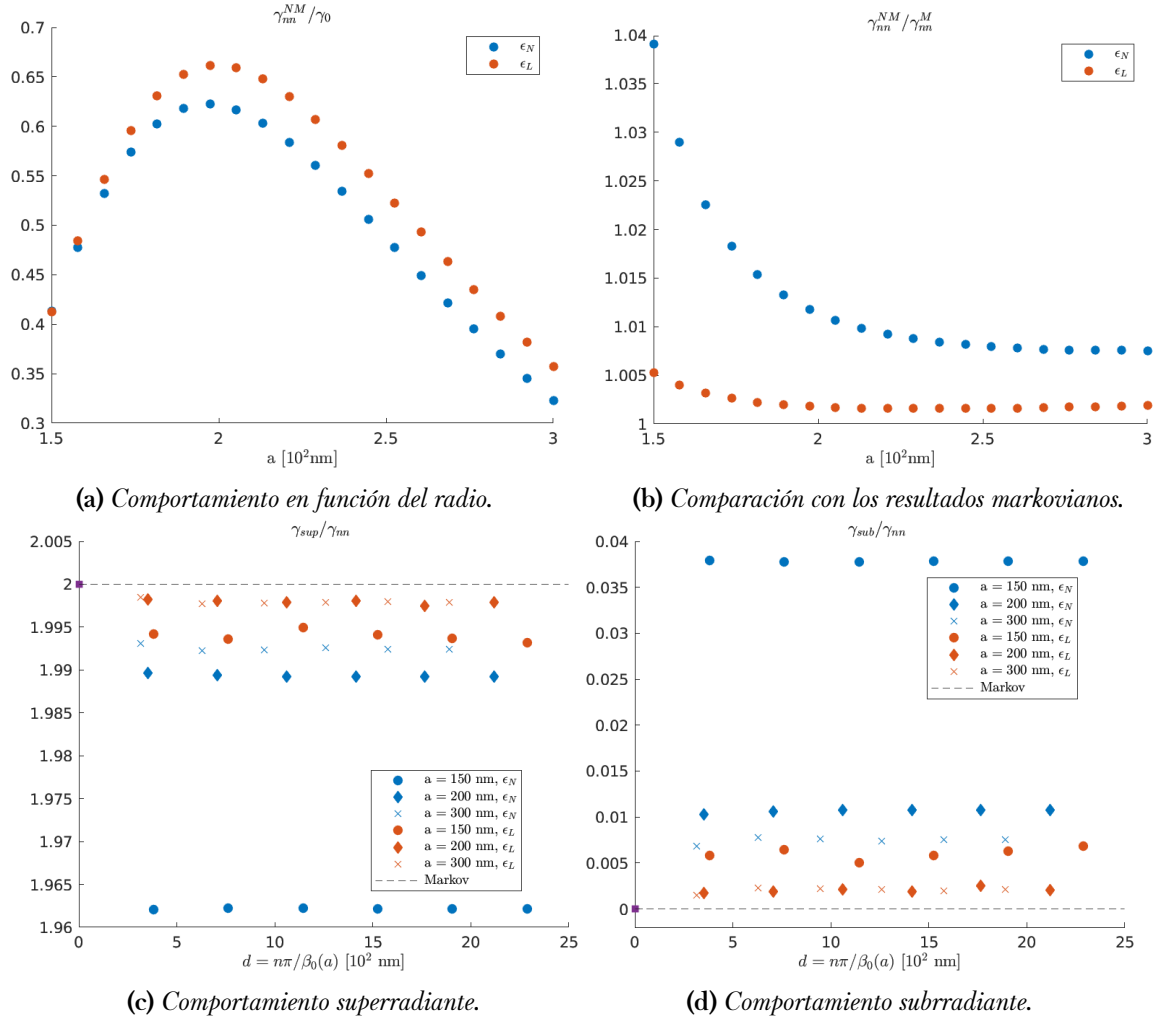
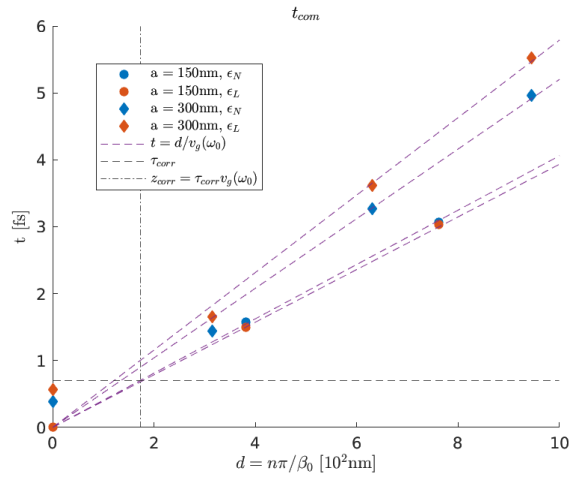
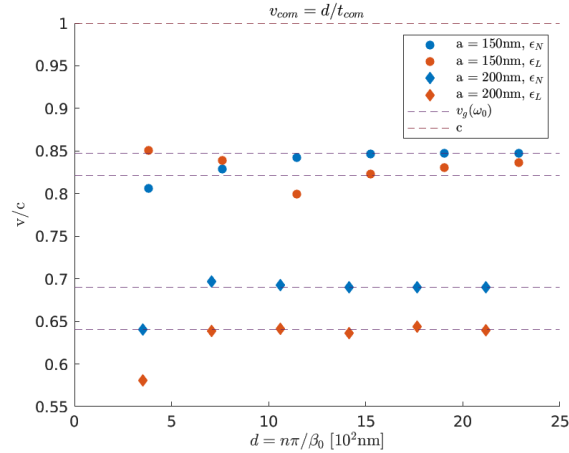


Figura 6.3: Ritmos de decaimiento espontáneo de átomos individuales y colectivos en el régimen no markoviano. En las figuras 6.3a y 6.3b mostramos el ritmo de decaimiento espontáneo de un átomo en la vecindad de la superficie de la nanofibra en el régimen no markoviano variando el radio y la función de respuesta de la nanofibra. En 6.3a observamos que en todos los casos el ritmo de decaimiento es mayor cuando modelamos la respuesta de la nanofibra con la función de Lorentz; el valor máximo del decaimiento se alcanza en $a \approx 200$ nm, lo cual coincide con que el acoplamiento es máximo cuando el radio de la nanofibra es entre 3.5 y 4 veces menor a la longitud de onda de la transición atómica (ec. 5.14 y 5.14). En esta figura, los ritmos están normalizados con respecto al ritmo de decaimiento espontáneo en el vacío $\gamma_0 = \omega_0^3 d^2 / (3\pi\epsilon_0 \hbar c^3)$. En 6.3b mostramos el cociente entre los resultados y la predicción markoviana; en el caso de la función de Lorentz la variación es menor al 0.5% para todos los radios, mientras que para la función ingenua existe una variación de hasta el 4% cuando el radio de la fibra se fija en 150 nm. En las figuras 6.3c y 6.3d mostramos los ritmos de decaimiento de estados súper y subradiantes normalizados con respecto al de átomos individuales, ambos en el régimen no markoviano y en función de la separación entre los átomos y el radio de la nanofibra. En ambos casos observamos que los resultados se alejan (acercan) a la predicción markoviana a medida que el radio de la fibra es más pequeño (grande).



(a) Tiempo de comunicación para las separaciones de equilibrio.



(b) Velocidad de comunicación para separaciones de equilibrio.

Figura 6.4: Tiempo y velocidad de comunicación entre los átomos. En las figuras 6.4a y 6.4b mostramos el tiempo y la velocidad de comunicación entre los átomos a partir del cual se estima que comienza su evolución colectiva en función de las separaciones de equilibrio mayores a la longitud de onda asociada con la frecuencia de transición λ_0 . Observamos que a partir de la mitad de la longitud de onda los tiempos y velocidades coinciden con el de una excitación recorriendo la separación entre los átomos a la velocidad de grupo de la frecuencia de resonancia $v_g(\omega_0)$. En el límite de separación nula, el tiempo de comunicación corresponde con el ancho de la función de correlación de un átomo consigo mismo $\tau_{\text{corr}} \approx 1$ fs, sugiriendo que este establece la cota inferior al tiempo en que tarda en establecerse el comportamiento colectivo.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo exploramos la dinámica de un par de átomos de ^{87}Rb interactuando colectivamente a través de una nanofibra óptica sin el uso de la aproximación de Markov. Esto nos permitió caracterizar dos situaciones en las que esperamos que no sea válida: cuando consideramos la estructura de la densidad de los modos guiados de la nanofibra y cuando los átomos están separados a una distancia comparable con la longitud de coherencia de un fotón emitido por un átomo independiente. Calculamos numéricamente las funciones de correlación de la nanofibra en presencia de uno y dos átomos cuando están separados a la misma distancia con respecto de la superficie de la nanofibra $R = 100$ nm y sus momentos dipolares apuntan en la dirección radial. Esto lo hicimos para radios de la nanofibra entre 150 y 300 nm, así como para varias separaciones entre los átomos $d \in [0, 2500]$ nm. Las funciones de correlación que obtuvimos para ambas funciones dieléctricas poseen la estructura de la función delta de Dirac en el caso ingenuo y del tipo sinc para la función de Drude-Lorentz, la cual es equivalente con la anterior en el contexto de la teoría del muestreo [36]. En todos los casos, la anchura de las funciones de correlación fueron menores a 1 fs, lo cual pareciera sugerir que, salvo cuando las separaciones entre los átomos son menores a la longitud asociada al tiempo de correlación, la aproximación de Markov está justificada en este esquema.

A continuación, desarrollamos un algoritmo de integración basado en la regla del trapecio y resolvimos numéricamente las ecuaciones de evolución de los átomos fuera del régimen markoviano cuando están separados a unas cuantas longitudes de onda. Encontramos que las curvas de evolución poseen un comportamiento similar para ambos estados colectivos, presentando unicamente variaciones cuantitativas en el caso superradiante. Para el caso subradiante, la función dieléctrica ingenua implica una transición abrupta al comportamiento colectivo, mientras que la función dieléctrica de Drude-Lorentz resulta en una transición suave con oscilaciones características de la función de correlación calculada en este caso. Nuestros resultados indican variaciones de hasta el 4 % en los ritmos de decaimiento súper y subradiante con respecto a la aproximación markoviana para radios de la nanofibra menores a 4 veces la longitud de onda asociada con la frecuencia de transición atómica y modelando la respuesta de la nanofibra con la función dieléctrica ingenua. Adicionalmente, y en contra de la predicción markoviana, encontramos que, debido a que los átomos se acoplan con una fracción no despreciable de modos guiados de la nanofibra, no existe alguna separación, salvo $d = 0$, para la cual exista un

comportamiento subradiante perfecto $\gamma_{\text{sub}} = 0$, aunque los ritmos de decaimiento colectivo calculados alcanzan valores hasta tres órdenes de magnitud más pequeños con respecto al decaimiento espontáneo de un solo átomo. Este resultado sugiere que, aunque pudiéramos eliminar los efectos de decaimiento de los átomos a otros canales disipativos, este comportamiento es inalcanzable en cualquier esquema de interacción de átomos con estructuras fotónicas que posean una estructura no trivial en su densidad de modos guiados.

Estimamos el tiempo de comunicación entre los átomos a través de la acción de la nanofibra utilizando una propuesta sencilla en la que consideramos al tiempo de comunicación como la intersección entre la curva de decaimiento de un solo átomo con la recta que resulta de extrapolar el comportamiento colectivo de los átomos a tiempos largos. Para separaciones mayores a la mitad de la longitud de onda asociada con la frecuencia de transición, los resultados concuerdan con el tiempo que tarda en recorrer un fotón la separación entre los átomos moviéndose a la velocidad de grupo de la frecuencia de transición.

Con respecto al análisis del artículo [13], en el cual estudiamos la dinámica colectiva de átomos que se encuentran a distancias comparables con la longitud de coherencia de un fotón emitido por un átomo individual, encontramos que es necesario considerar una cantidad considerable de términos en la expansión de la amplitud de probabilidad colectiva atómica para poder obtener resultados físicamente consistentes, particularmente en la probabilidad de supervivencia de un estado subradiante en el límite de eficiencia nula en el acoplamiento de los átomos mediante la nanofibra. Encontramos que, a partir de que utilizamos 401 términos en la expansión de la amplitud de probabilidad colectiva (correspondientes a las ramas de la función de Lambert $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 200$), los resultados dejan de variar apreciablemente. El uso de estos términos predice correcciones mucho más moderadas al ritmo de decaimiento superradiante, resultando en un ritmo aproximadamente 2.2 mayor al de un átomo individual comparado con el resultado publicado de hasta 4.56 cuando la separación entre los átomos es igual a la separación crítica asociada con el punto de bifurcación de la función de Lambert $d_c \approx 0.56l_{\text{coh}}$. En esta misma línea, descubrimos también que el ritmo de decaimiento colectivo instantáneo es cada vez mayor a medida que la separación entre los átomos aumenta y adquiere valores muy por encima 4.56 cuando la separación es arbitrariamente grande. Esto nos sugiere que el valor del decaimiento colectivo instantáneo no representa una cantidad significativa en la evolución colectiva de los átomos a separaciones mayores a la crítica.

A la vista de estos últimos resultados, nos preguntamos cuál es la naturaleza física de la separación crítica que aparece en la solución de este problema, pues no corresponde con aquella en la que los efectos no markovianos son máximos, como lo sugieren los resultados presentados en el artículo original. Tanto en los resultados publicados, así como en los que obtuvimos aparece un comportamiento singular análogo al de una transición de fase cuando los átomos se encuentran en la separación crítica, pues la derivada del ritmo de decaimiento instantáneo es discontinua en ese punto. Este cambio de comportamiento se manifiesta también en las curvas de evolución colectiva, pues, a separaciones menores a la crítica, los átomos decaen exponencialmente a lo largo de toda su evolución, mientras que a separaciones mayores aparecen efectos de absorción y reemisión del fotón entre los átomos. Actualmente, seguimos trabajando en dar

respuesta a esta pregunta.

Trabajo a futuro

Existen varias líneas interesantes sobre las cuales podemos trabajar a futuro:

- En este trabajo ignoramos los efectos de absorción y dispersión significativos en las funciones dieléctricas de la nanofibra debido a la dificultad que implica implementarlos en el esquema de cuantización canónica. Es posible hacer una implementación efectiva de estos efectos utilizando la cuantización de los campos en términos de funciones de Green [2], [38], [39] incluyendo además la acción de los modos radiados de la nanofibra.
- La generalización de nuestros resultados al caso de dos átomos con dos excitaciones.
- Como vimos en el capítulo anterior, el método que propusimos para medir el tiempo de comunicación predice resultados razonables cuando los átomos están separados a distancias que son múltiplos semienteros y enteros de la longitud de onda de la transición atómica. Aún no hemos descubierto un método que funcione para separaciones arbitrarias y que sea consistente con el principio de causalidad. En discusiones recientes hemos encontrado que la fuente de esta aparente falta de causalidad recae en que usamos la aproximación de onda rotante (RWA) para simplificar las ecuaciones de evolución de los átomos [40], [41]. Así, otra posible línea de trabajo a futuro sería estudiar el comportamiento del tiempo de comunicación de los átomos sin la aproximación de Markov ni de onda rotante.

Bibliografía

1. Carmichael, H. *An open systems approach to quantum optics* (Springer, 1993).
2. Chang, D. E., Douglas, J. S., González-Tudela, A., Hung, C.-L. y Kimble, H. J. Colloquium: Quantum matter built from nanoscopic lattices of atoms and photons. *Rev. Mod. Phys.* **90**, 031002 (3 ago. de 2018).
3. Solano, P. y col. en (eds. Arimondo, E., Lin, C. C. y Yelin, S. F.) 439-505 (Academic Press, 2017). doi:<https://doi.org/10.1016/bs.aamop.2017.02.003>. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1049250X1730006X>.
4. Haroche, S. y Kleppner, D. Cavity Quantum Electrodynamics. *Physics Today* **42**, 24-30 (1989).
5. Fleischhauer, M., Imamoglu, A. y Marangos, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.* **77**, 633-673 (2 jul. de 2005).
6. Bonifacio, R. *Dissipative Systems in Quantum Optics* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1982).
7. Snyder, A. W. y Love, J. D. *Optical Waveguide Theory* (Chapman y Hall Ltd, 1983).
8. Marcuse, D. *Light Transmission Optics, 2da ed. Van Nostrand Reinhold Electrical/Computer Science and Engineering Series.* (Krieger Pub Co, 1989).
9. Gardiner, C., Zoller, P. y Zoller, P. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics* (Springer, 2004).
10. De Vega, I. y Alonso, D. Dynamics of non-Markovian open quantum systems. *Rev. Mod. Phys.* **89**, 015001 (1 ene. de 2017).
11. Le Kien, F., Gupta, S. D., Nayak, K. P. y Hakuta, K. Nanofiber-mediated radiative transfer between two distant atoms. *Phys. Rev. A* **72**, 063815 (6 dic. de 2005).
12. Le Kien, F., Dutta Gupta, S., Balykin, V. I. y Hakuta, K. Spontaneous emission of a cesium atom near a nanofiber: Efficient coupling of light to guided modes. *Phys. Rev. A*. doi:10.1103/PhysRevA.72.032509. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.032509> (sep. de 2005).
13. Sinha, K. y col. Non-Markovian Collective Emission from Macroscopically Separated Emitters. *Phys. Rev. Lett.* **124**, 043603 (4 ene. de 2020).
14. Of Crystallography, T. O. D. *Neumann's principle* https://dictionary.iucr.org/Neumann%27s_principle.
15. Jackson, J. D. *Classical electrodynamics; 3era ed.* (Wiley, 1999).

16. Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media. Vol 8, 1era ed.* (Pergamon Press, 1960).
17. Handbook, C. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 88th Edition* 88.^a ed. (CRC Press, 2007).
18. Kumar, D. y Choudhury, P. K. Introduction to modes and their designation in circular and elliptical fibers. *American Journal of Physics* **75**, 546-551 (2007).
19. Hillery, M. y Mlodinow, L. D. Quantization of electrodynamics in nonlinear dielectric media. *Phys. Rev. A* **30**, 1860-1865 (4 oct. de 1984).
20. Drummond, P. D. e Hillery, M. *The Quantum Theory of Nonlinear Optics* doi:10.1017/CBO9780511783616 (Cambridge University Press, 2014).
21. Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J. y Grynberg, G. *Photons and atoms: introduction to quantum electrodynamics* (Wiley, New York, NY, 1989).
22. Bhat, N. A. R. y Sipe, J. E. Hamiltonian treatment of the electromagnetic field in dispersive and absorptive structured media. *Phys. Rev. A* **73**, 063808 (6 jun. de 2006).
23. Solano, P. y col. Alignment-dependent decay rate of an atomic dipole near an optical nanofiber. *Phys. Rev. A* **99**, 013822 (1 ene. de 2019).
24. Solano, P., Barberis-Blostein, P., Fatemi, F. K., Orozco, L. A. y Rolston, S. L. Super-radiance reveals infinite-range dipole interactions through a nanofiber. *Nature Communications* **8**. ISSN: 2041-1723. doi:10.1038/s41467-017-01994-3. <http://dx.doi.org/10.1038/s41467-017-01994-3> (nov. de 2017).
25. Blinder, S. M. *Unsoeld's Theorem, Wolfram Demonstrations Project* <http://demonstrations.wolfram.com/UnsoeldsTheorem/>.
26. Cowan, R. D. *The Theory of Atomic Structure and Spectra* (University of California Press, Ltd., Berkeley, 1981).
27. Steck, D. Rubidium 87 D Line Data. <https://steck.us/alkalidata> (2003).
28. Ballentine, L. E. *Quantum mechanics: a modern development; 2nd ed.* (World Scientific, Hackensack, NJ, 2014).
29. Stourm, E. y col. Spontaneous emission and energy shifts of a Rydberg rubidium atom close to an optical nanofiber. *Phys. Rev. A*. doi:10.1103/PhysRevA.101.052508. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.052508> (mayo de 2020).
30. Gross, M. y Haroche, S. Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission. *Physics Reports*. doi:[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(82\)90102-8](https://doi.org/10.1016/0370-1573(82)90102-8) (1982).
31. Weisskopf, V. y Wigner, E. Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators. *Zeitschrift für Physik* (1930).
32. Feynman, R. P. e Hibbs, A. R. *Quantum mechanics and path integrals* (McGraw-Hill, New York, NY, 1965).
33. Asl, F. M. y Ulsoy, A. G. Analysis of System of Linear Delay Differential Equations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. doi:10.1115/1.1568121. <https://doi.org/10.1115/1.1568121> (jun. de 2003).

34. Chang, F.-C. Recursive formulas for the partial fraction expansion of a rational function with multiple poles. *Proceedings of the IEEE*. doi:10.1109/PROC.1973.9216 (1973).
35. Weisstein, E. W. *Lambert W-Function*. <https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html>.
36. Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. y Vetterling, W. T. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 1992).
37. <http://www.fftw.org/>.
38. Buhmann, S. Y. y Welsch, D.-G. Dispersion forces in macroscopic quantum electrodynamics. *Progress in Quantum Electronics* **31**, 51-130. ISSN: 0079-6727 (2007).
39. Dung, H. T., Knöll, L. y Welsch, D.-G. Three-dimensional quantization of the electromagnetic field in dispersive and absorbing inhomogeneous dielectrics. *Phys. Rev. A* **57**, 3931-3942 (5 mayo de 1998).
40. Milonni, P. W., James, D. F. V. y Fearn, H. Photodetection and causality in quantum optics. *Phys. Rev. A* **52**, 1525-1537 (2 ago. de 1995).
41. Dickinson, R., Forshaw, J. y Millington, P. Probabilities and signalling in quantum field theory. *Phys. Rev. D* **93**, 065054 (6 mar. de 2016).