



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Modelo de Flujo-Geomecánico para la
predicción del colapso de la formación**

TESIS

Que para obtener el título de

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A

Aarón Guadalupe Téllez Arellano

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Fernando Samaniego Verduzco



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Esta tesis esta enteramente dedicada a mis papás:

Sonia Catalina Arellano Flores y Guadalupe Téllez Centeno.

Ustedes son y siempre serán mis héroes.

“Algunos hombres ven las cosas como son y dicen porqué. Yo, en cambio, veo cosas que todavía no son, y digo, ¿por qué no?”

Robert F. Kennedy

Agradecimientos

Agradezco a mis padre: **Guadalupe Téllez Centeno** y **Sonia Catalina Arellano Flores** por su devoción en proporcionarme las herramientas, los consejos, el tiempo, recursos y fé para lograr este trabajo. A mi padre por su natural paciencia y a mi madre por la educación que rigurosamente me dio.

Agradezco a mi segunda madre: **Maria elsa** por consentirme y siempre creer en mi, me diste seguridad y sonrisas aunque no las mereciera. A mis hermanos: **Katherine, Camila** y **Alexis** por escucharme y hacerme reír en cualquier momento, pero sobre todo por amarme como soy. A los relativos de la familia **Arellano**, en especial las tías por consetirme y quererme sin importar mi situación, tía **Alma Rosa** dejo un vacío que nunca se volviera a llenar.

Agradezco al señor **Francisco Navarro** y señora **Lulú**,y toda su familia, por brindarme una casa, una educación y los consejos que con desesperación requería para encontrar el tipo de estudiante que quería ser, si existen piedras angulares en el destino, seguro ustedes fueron la mía.

Agradezco a la familia **Acosta García** por haberme aceptado como miembro de su familia y brindado una ayuda incomparable en toda mi carrera. Aprendí mucho del ingeniero **David**.

Agradezco a mis compañeros de clase: **Leydi, Constanza, Daniel** y **Emiliano**. Sin ustedes no sería ni la mitad de la persona que fui en la universidad, ustedes son mi ejemplo a seguir.

Agradezco al **Dr. Fernando Samaniego Verduzco** por guíarme en todo mi camino de la universidad y en este trabajo, junto a el y a toda la comunidad **Petrobowl** pasamos los mejores momentos que se pueden soñar. Al **Dr. Victor Leonardo** y **Dr Bruno López**, por confiar ciegamente en mi proceso de titulación y ayundatía, llevan una gran parte en este trabajo sin duda. Al **Mtro. José Eduardo**, por todas sus explicaciones y el tiempo que tomo para realizar este trabajo con éxito. Al Dr **Fernando Rodríguez** y Mtro. **Juan Pedro** por sus valiosos comentarios y consejos a lo largo de este trabajo.

Pero sobre todas las cosas, le agradezco a mi siempre casa y mi alma máter la **Universidad Nacional Autónoma de México**, Goya!.

Resumen

Una cantidad significativa de reservas de aceite y gas se encuentran en formaciones donde la matriz está ligeramente compactada y por consecuencia, se genera una producción de sólidos de la formación que hace que la matriz de roca se empiece a erosionar; por lo tanto, se generan problemas geomecánicos y la formación se colapsa. Por esta razón es importante disponer de un método de predicción para describir el flujo de fluidos y sólidos de una formación deleznable hacia un pozo productor, y también del colapso de la roca cercana al pozo. Como primer paso se desarrolla un modelo de simulación numérica capaz de generar una predicción confiable. Dentro de este proceso, se muestran distintos métodos reportados en la literatura y se realiza una revisión general de los temas necesarios que se deben conocer para entender el modelo de simulación numérica que se ha reportado en la literatura. Más adelante se muestra el comportamiento y la sensibilidad de las variables principales de este modelo, con el fin de tener un entendimiento físico del flujo de la mezcla y del colapso de la formación. Se describe detalladamente el desarrollo del simulador numérico implícito. Después de haberse validado, el simulador se aplica a una formación propuesta para evaluar las complicaciones que se tendrían en distintos casos de producción, y así establecer una estrategia óptima de producción de los pozos que producen sólidos de una matriz ligeramente compactada, que permita prevenir el colapso de la formación.

Abstract

A significant amount of oil and gas reserves are found in formation where the matrix is slightly compacted and consequently, a production of solids from the formation is generated that eventually causes the rock matrix to begin to erode; therefore, geomechanical problems are created and the formation collapses. For this reason, it is important to have a prediction method that describes the fluid and solid flow from the weak formation to a producing well, and the collapse of the rock near the wellbore. As a first step, a numerical simulation model competent of generating a reliable prediction is developed. Within this process, different methods used in the literature are shown and a general review of the necessary topics that must be known to understand the numerical simulation model that has been reported in the literature is made. The behavior and sensitivity of the main variables of this model are shown, in order to have a physical understanding of the mixture flow and the collapse of the formation.

The development of the implicit numerical simulator is described in detail. After being validated, the simulator is applied to a proposed formation to evaluate the complications that would occur in different production cases, and thus establish an optimal production strategy for wells that produce solids from a slightly compacted matrix, which allows preventing the formation collapse.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 11 |
| 1.1. Objetivos | 11 |
| 2. Revisión de Literatura | 12 |
| 2.1. Definición de arenamiento | 12 |
| 2.2. Causas de Producción de Arena | 12 |
| 2.2.1. Típicos Problemas de Arenamiento | 13 |
| 2.2.1.1. Arena producida por formaciones pobremente consolidadas | 13 |
| 2.2.1.2. Arena producida por formaciones con resistencia de compresión intermedia | 13 |
| 2.2.1.3. Arena producida en formaciones consolidadas debido a caídas de presión | 13 |
| 2.2.1.4. Arena producida de formaciones consolidadas debido a fuerzas tectónicas | 14 |
| 2.2.1.5. Arena producida con alto gradiente de presión a lo largo de una cavidad | 14 |
| 2.3. Consecuencias de la Producción de Arena | 14 |
| 2.3.1. Acumulación en el fondo del pozo | 14 |
| 2.3.2. Acumulación en equipo superficial | 14 |
| 2.3.3. Erosión en el fondo del pozo y equipo superficial | 15 |
| 2.3.4. Colapso de la formación | 16 |
| 2.4. Métodos de predicción | 16 |
| 2.4.1. Resistencia de la formación | 16 |
| 2.4.2. Registro Sónico | 16 |
| 2.4.3. Registro de las Propiedades de la formación | 17 |
| 2.4.4. Porosidad | 17 |
| 2.4.5. Caída de presión | 17 |
| 2.4.6. Métodos analíticos | 17 |
| 2.4.6.1. Modelo esfuerzo-deformación | 18 |
| 2.4.7. Métodos numéricos | 18 |
| 2.4.8. Flujo multifásico | 19 |
| 2.5. Técnicas de control de Producción de Arena | 19 |
| 2.5.1. Mantenimiento y reparación | 19 |
| 2.5.2. Restricción de gasto | 20 |
| 2.5.3. Prácticas de terminación selectiva | 20 |
| 2.5.4. Consolidación plástica | 20 |
| 2.5.5. Colocación de resina a alta energía | 21 |
| 2.5.6. Grava recubierta de resina | 22 |
| 2.5.7. Tubería de revestimiento independiente ranurado | 22 |
| 2.5.8. Empacamiento de grava | 22 |
| 2.6. Introducción a la geomecánica | 23 |
| 2.6.1. Esfuerzo | 24 |
| 2.6.2. Tensor de esfuerzos | 25 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 2.6.3. | Ecuación de momento lineal | 26 |
| 2.6.4. | Deformación | 27 |
| 2.6.4.1. | Deformación en una dimensión | 27 |
| 2.6.4.2. | Deformación en dos dimensiones | 29 |
| 2.6.5. | Tensor de Deformación | 31 |
| 2.6.6. | Ecuación constitutiva: relación esfuerzo-deformación | 32 |
| 2.6.7. | Esfuerzo efectivo | 37 |
| 2.6.8. | Círculos de Mohr | 38 |
| 2.6.9. | Criterio de falla de Mohr-Coulomb | 41 |
| 2.6.10. | Cohesión | 42 |
| 2.6.11. | Esfuerzos Locales | 43 |
| 3. | Modelo Hidromecánico | 45 |
| 3.1. | Modelo matemático | 45 |
| 3.2. | Ley de Conservación de Masa | 47 |
| 3.2.0.1. | Relación de la Masa con un Volumen de control | 47 |
| 3.2.0.2. | Flujo de masa | 48 |
| 3.2.0.3. | Término fuente y/o sumidero | 49 |
| 3.2.0.4. | Forma integral de la conservación de la masa | 50 |
| 3.2.0.5. | Forma diferencial de la conservación de masa | 50 |
| 3.2.0.6. | Ecuación de balance de materia de las fases | 52 |
| 3.3. | Ley Constitutiva de Generación de Masa | 54 |
| 3.4. | Ley de Darcy | 55 |
| 3.5. | Ecuación de Carman-Kozeny | 56 |
| 3.6. | Ecuación de continuidad | 56 |
| 3.7. | Esfuerzos en el pozo, deformación y falla | 57 |
| 4. | Modelo del simulador | 59 |
| 4.1. | Introducción | 59 |
| 4.2. | Ecuaciones del simulador | 60 |
| 4.2.1. | Condiciones iniciales y de frontera | 60 |
| 4.3. | Diferencias finitas | 61 |
| 4.3.1. | Discretización espacial | 62 |
| 4.3.2. | Discretización temporal | 63 |
| 4.4. | Acoplamiento de condiciones de fronteras | 63 |
| 4.5. | Método Newton-Raphson | 66 |
| 4.6. | Acoplamiento de la deformación mecánica | 68 |
| 4.7. | Algoritmo de solución | 71 |
| 4.8. | Validación del simulador | 71 |
| 4.9. | Análisis de casos | 79 |
| 4.9.1. | Análisis físico | 79 |
| 4.9.1.1. | Efecto físico de la permeabilidad | 80 |
| 4.9.1.2. | Efecto físico de la cohesión de la roca | 81 |
| 4.9.1.3. | Efecto físico de la relación de Poisson | 81 |
| 4.9.1.4. | Ángulo de fricción interna | 82 |
| 4.9.1.5. | Efecto físico del coeficiente de erosión | 82 |
| 4.9.2. | Análisis numérico | 84 |
| 5. | Conclusiones y Recomendaciones | 87 |
| | Nomenclatura | 88 |

| | |
|--|------------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | 5 |
| Apéndice A | 91 |
| A. Derivación de la ecuación de momento lineal | 91 |
| Apéndice B | 93 |
| B. Formulación de la discretización en espacio | 93 |
| Apéndice C | 95 |
| C. Formulación de discretización temporal | 95 |
| C.1. Euler Explícito | 95 |
| C.2. Euler Implícito | 96 |
| Apéndice D | 97 |
| D. Matriz Jacobiana | 97 |
| Apéndice E | 105 |
| E. Condiciones de frontera geomecánica | 105 |
| Apéndice F | 106 |
| F. Discretización Criterio de Esfuerzos Efectivos de Pozo | 106 |
| Bibliografía | 108 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Falla de la sección del pozo debido a la producción de arena. (Penberthy, 2006) | 15 |
| 2.2. Falla del estrangulador debido a la producción de arena. (Penberthy, 2006) | 15 |
| 2.3. Diagrama de zonas de producción de arena en una formación. (Zhou, 2016) | 18 |
| 2.4. Esquemas de empacamiento de grava de un agujero descubierto (izquierda) y un agujero con tubería de revestimiento (derecha). (Penberthy, 2006) | 23 |
| 2.5. Tres objetos sometidos a una fuerza, cuyas áreas transversales son distintas. | 25 |
| 2.6. Representación gráfica de un tensor de esfuerzos. (Espinoza, 2017) | 27 |
| 2.7. Cilindro bajo un estado de tensión uniaxial. | 28 |
| 2.8. Gráfica de la relación entre desplazamiento y distancia. | 29 |
| 2.9. Deformación geométrica en dos dimensiones. (Sanpaz, 2008) | 31 |
| 2.10. Ilustración de la ley constitutiva elástica. En la figura izquierdo se muestra un modelo físico análogo, en el centro, modelos de roca ideal y en la derecha, modelos de roca real. (Zoback, 2007) | 33 |
| 2.11. Datos típicos de laboratorio de pruebas esfuerzo-deformación para rocas bien cementadas, en condiciones de deformación. (Zoback, 2007). | 34 |
| 2.12. Compresión de un sólido con comportamiento isotrópico y elasticidad lineal por medio de un esfuerzo no confinado. (Espinoza, 2017) | 35 |
| 2.13. Tensor de Esfuerzo Efectivo (Espinoza, 2017) | 38 |
| 2.14. Diagrama de esfuerzos de una prueba triaxial. (Zoback, 2017) | 39 |
| 2.15. Objeto sujeto a esfuerzos normales y cortantes. | 40 |
| 2.16. Círculo de Mohr en dos dimensiones. (Antico y Pezotti, 2008) | 40 |
| 2.17. Diagrama de Mohr, con curva de falla con la línea AL. La falla ocurrirá en este plano específico con un ángulo β , marcado por la línea CP. (Jaeger et al, 2007) | 42 |
| 2.18. Pozo con un sistema de esfuerzos locales alrededor del pozo y yacimiento. (Pasic et al. 2007) | 44 |
| | |
| 3.1. Representación de las fases en el volumen de control. (Wan, 2002) | 46 |
| 3.2. Flujo vectorial a través de un plano YZ. | 49 |
| 3.3. Componentes de esfuerzos en un plano simétrico en el mismo eje. | 58 |
| | |
| 4.1. Modelo cilíndrico base del simulador. | 60 |
| 4.2. Malla discretizada en espacio con nodos centrados y uniformes. | 62 |
| 4.3. Configuración del simulador con sus condiciones de frontera. | 65 |
| 4.4. a) Perfil espacial de la porosidad a varios tiempos. b) Perfil espacial de presión a varios tiempos. Ambas de referencia [25] | 73 |
| 4.5. a) Perfil espacial de la porosidad a varios tiempos de simulación b) Perfil espacial de presión a distintos tiempos del simulador | 73 |
| 4.6. a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo en el primer nodo. Ambas de referencia [25] | 74 |
| 4.7. a) Variación de la porosidad respecto al tiempo en el primer nodo, del simulador. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo en el primer nodo, del simulador. | 74 |

4.8. a) Distribución de desplazamiento radial simulado a varios tiempos. b) Variación del desplazamiento radial y la deformación radial con respecto al tiempo, evaluados en el radio del pozo. Ambas de referencia [25] 75

4.9. Distribución de desplazamiento radial simulado a varios tiempos de producción. 75

4.10. a) Variación con respecto al tiempo del desplazamiento radial en la pared del pozo obtenida por medio del simulador. b) Variación temporal de la derivada de la deformación en la pared del pozo obtenida por medio del simulador 76

4.11. a) Distribución del esfuerzo efectivo radial para varios tiempos. b) Distribución de esfuerzo efectivo tangencial a varios tiempos. Ambas de referencia [25]. 76

4.12. a) Distribución del esfuerzo efectivo radial a varios tiempos del simulador. b) Distribución de esfuerzo efectivo tangencial a varios tiempos obtenidas por medio del simulador. 77

4.13. Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos ($\phi = 37^\circ$, $\bar{C} = 7.5$ [Mpa]) de referencia [25]. 77

4.14. a) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos ($\Phi = 37^\circ$, $\bar{C} = 7.5$ [Mpa]) obtenidas por medio del simulador. b) Variación de la envoltente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos ($\Phi = 37^\circ$, $\bar{C} = 7.5$ [Mpa]) obtenidas por medio del simulador. 78

4.15. a) Mapa de calor de porosidad a tiempo de 0 segundos. Los valores empiezan desde la porosidad inicial 0.25 y terminan en el valor de 1. b) Mapa de calor de porosidad a tiempo de 5010 segundos. Los valores empiezan desde la porosidad inicial 0.25 y terminan en el valor de 1. c) Mapa de calor de porosidad a tiempo de 10000 segundos. Los valores empiezan desde la porosidad inicial 0.25 y terminan en el valor de 1. 78

4.16. a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial, del simulador. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo del nodo inicial, del simulador. c) Variación de la envoltente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador. 80

4.17. a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial a dos distintas permeabilidades. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo del nodo inicial a dos distintas permeabilidades. c) Variación de la envoltente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintas permeabilidades. 80

4.18. a) Variación de la envoltente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintos valores de cohesión. b) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos ángulos de fricción de 27° . c) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con ángulo de fricción de 38° 81

4.19. Variación de la envoltente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintas relaciones de Poisson. 82

4.20. a) Variación de la envoltente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintos ángulos de fricción interna. b) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos ángulos de fricción de 27° . c) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con ángulo de fricción de 38° 82

4.21. a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial variando el coeficiente de erosión. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo del nodo inicial variando el coeficiente de erosión. c) Variación de la envoltente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador variando el coeficiente de erosión. 83

4.22. a) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con coeficiente de daño igual a 5 b) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con coeficiente de daño igual a 10 83

ÍNDICE DE FIGURAS

8

| | |
|---|----|
| 4.23. Gráfico semilog del valor del Porosidad a mitad del tiempo vs Número CFL. | 85 |
| 4.24. a)Variación de la porosidad y el tiempo a un paso del tiempo de 100 segundos . b) Perfil de calor de la porosidad al tiempo final con un paso del tiempo de 100 segundos. | 85 |
| 4.25. a)Variación de la porosidad y el tiempo a un paso del tiempo de 1000 segundos . b) Perfil de calor de la porosidad al tiempo final con un paso del tiempo de 1000 segundos. | 86 |
| 4.26. a)Variación de la porosidad y el tiempo a un paso del tiempo de 1000 segundos . b) Perfil de calor de la porosidad al tiempo final con un paso del tiempo de 1000 segundos. | 86 |
| A.1. Cuerpo sujeto a fuerzas de contacto (Negro) y fuerzas de cuerpo (Azul). | 92 |

Índice de cuadros

| | |
|---|----|
| 4.1. Datos de entrada para el simulador de Stavropoloulou et al. (1998) | 72 |
| 4.2. Datos de entrada para el simulador caso sintético. | 79 |

Algoritmos

| | |
|--|----|
| 4.1. Algoritmo General de Solución | 71 |
|--|----|

Capítulo 1

Introducción

La producción de partículas de sólidos durante la etapa de producción de un pozo de aceite y/o gas, posee desventajas técnicas y económicas que se encuentran desde el pozo hasta las instalaciones superficiales del campo. Formaciones que presentan una resistencia uniaxial a la compresión (UCS) menor de 1000 psi (formaciones geológicamente jóvenes), tienden a presentar problemas de producción de sólidos. Inicialmente este problema se conocía como arenamiento, pero este problema también aplica a otros tipos de rocas y por esto se reformula el nombre a producción de sólidos. Las soluciones del problema más común de producción de sólidos varían desde reparaciones a pozos (continuas) hasta aplicar métodos de control de arena, donde ambas presentan desafíos económicos y técnicos. Dentro de los problemas menos comunes y más severos se encuentra el colapso de la formación, con la única opción de cerrar el pozo. Debido a esto, es de gran interés para el operador estimar si el control de sólidos es necesario o tener medidas para evitar una caída de presión que genere un colapso total de la formación. Por tal motivo se requiere una herramienta numérica que logre predecir las condiciones a las cuales se generan problemas mayores de producción de sólido, para evitar totalmente el colapso de la formación.

1.1. Objetivos

- Desarrollar una herramienta numérica que permita predecir de acuerdo a distintos esquemas de producción de sólidos, el flujo de sólidos para formaciones productoras de aceite y el colapso de la formación
- Establecer los fundamentos físicos y numéricos que se emplean para resolver el problema y entender como ampliarlos.
- Utilizar la porosidad como el parámetro de acoplamiento entre la erosión y la mecánica de la roca.
- Usar esta herramienta para explicar problemas de producción de sólidos en distintos escenarios de producción.

Capítulo 2

Revisión de Literatura

2.1. Definición de arenamiento

El fenómeno de arenamiento es la migración de arena o finos de formación hacia el pozo y equipo superficial, causado por el flujo de fluidos del yacimiento. Conceptualmente, este proceso se divide en tres etapas:

1. Falla de la roca alrededor de un agujero descubierto o un disparo.
2. Separación de los granos de arena de la matriz de roca fallada
3. El transporte de arena hacia el pozo y la superficie.

Es necesario mencionar que en cuestión de la física de producción, la definición de arenamiento cumple de manera análoga para producir cualquier sólido o fino de formación.

2.2. Causas de Producción de Arena

La producción de arena es un fenómeno común en formaciones no consolidadas, las cuales son formaciones con resistencia uniaxial a la compresión (UCS) menor a 1000 psi, estas formaciones son geológicamente jóvenes (Era Terciaria) y poco profundas. También es común que las formaciones no consolidadas presenten poca cementación, debido a la edad geológica corta donde las rocas quedan expuestas limitadamente a las dos primeras etapas de la diagénesis, las cuales son: compactación y cementación. Penberthy (1992) y Clegg (2006) dividen de forma general las causas de producción de arenas como:

1. Flujo de fluidos.-El flujo de fluidos hacia el pozo es una consecuencia generada debido a que el potencial hidráulico del pozo es menor que la del yacimiento, el cual genera una fuerza de arrastre de arena o de los finos de formación, debido al producto velocidad-viscosidad del fluido que genera una fuerza de arrastre.
2. Fuerzas de retención.- De manera inversa a las fuerza de flujo de fluidos están las fuerzas de retención, las cuales se encargan de mantener la arena o finos en la matriz de roca. Estas consisten en a) cementación natural (resistencia uniaxial a la compresión); b) fricción entre partículas de la formación; c) presión de poro debido los fluidos de la formación; y d) fuerzas capilares. La resistencia a la compresión, la fuerza de retención principal, está controlada por la cementación intergranular generada durante las primeras etapas de diagénesis. Como una regla geológica menciona que los sedimentos geológicamente viejos están más consolidados que los sedimentos geológicamente jóvenes. Formaciones jóvenes comúnmente tienen poco material cementado, refiriéndose comúnmente a ellas como formaciones ligeramente consolidadas. Dicho de otra forma, tienen resistencia uniaxial a la compresión (UCS) muy baja, con valores menores a 1000 psi incluso llegando a valores tan pequeños que la resistencia no puede medirse (Penberthy (1992)). Las

fuerzas de fricción están relacionadas con los esfuerzos de confinamiento o de sobrecarga. El esfuerzo que causa que falle la roca incluye el esfuerzo mecánico que resulta de las fuerzas de sobrecarga y las fuerzas de arrastre asociadas al flujo de fluidos a través del medio poroso. Las fuerzas capilares también contribuyen a la producción de arena, Morita y Boyd (1991), Wu y Tan (2005) muestran que la producción de arena ocurre cuando se presenta la irrupción de agua. Las razones que causan que se produzca arena durante la irrupción del agua dependen de la cantidad de arcilla que tenga la roca y la saturación inicial de agua.

Morita et al. (1991) captura cinco problemas típicos de producción de arena que se observan comúnmente en campo, donde explican las causas que producen su avance. Además, mencionan los dos tipos de fallas que son dominantes durante la producción de arenas: falla cortantes y fallas de tensión. Si el gasto es muy grande, ocurre el arenamiento por falla de tensión. Si la presión del fondo fluyendo declina, ocurre el arenamiento por falla cortante. La reducción de presión capilar reduce la cohesión de los granos de arenas, el cual afecta significativamente el fallo por tensión. Estos dos tipos de fallas tienen relación con las fuerzas que causan el arenamiento, por lo que en cada proceso es necesario tener en cuenta cómo se comportan estas dos fallas distintas.

Como menciona Morita et al. (1991), existe una influencia geomecánica para la producción de sólidos, la cual se describe por:

1. Falla por compresión o corte.- Esta falla está relacionada con un esfuerzo tangencial importante que rodea la pared del pozo, la cual causa una falla de corte en la formación. Este ejemplo es común en la etapa de producción y largas declinaciones de presión en un yacimiento.
2. Falla por tensión.- Esta falla se relaciona con los esfuerzos radiales a la tensión, que van hacia el pozo. En esta falla los esfuerzos radiales exceden la resistencia de la roca y generan una falla. Esta falla es común durante el proceso de perforación, donde el peso del fluido de perforación excede la resistencia de tensión de la roca, lo que genera falla por tensión.
3. Erosión.- Esta falla está relacionada con las fuerzas de arrastre que se ejercen por el flujo de la mezcla de fluidos y sólidos, las cuales llegan a exceder la cohesión de la roca.

2.2.1. Típicos Problemas de Arenamiento

2.2.1.1. Arena producida por formaciones pobremente consolidadas

La producción de arena debido a formaciones pobremente consolidadas es la causa principal y está asociada con la cohesión de la roca. Este problema ocurre durante las primeras etapas de producción de arena o en la segunda etapa de producción después de un cierre. La cantidad de arena producida por formaciones poco consolidadas es significativa debido a las fallas de corte generadas durante la producción de fluidos.

2.2.1.2. Arena producida por formaciones con resistencia de compresión intermedia

Morita y Boyd (1991) definen a una roca con resistencia de compresión intermedia con un rango de 500 a 1000 psia. Estas formaciones no producen arena inicialmente, hasta que ocurre la irrupción de agua. La principal causa de este problema es la pérdida causada por el decremento de la presión capilar que mantiene las partículas de arenas juntas (fuerza de retención). El tiempo de mayor caída de presión de yacimiento usualmente coincide con el de irrupción de agua. Por lo que cuando ocurre esta caída de presión, se crea un incremento de falla de corte en la zona de falla.

2.2.1.3. Arena producida en formaciones consolidadas debido a caídas de presión

Los problemas de arenamiento también ocurren en formaciones consolidadas (resistencia a la compresión mayor a 1000 psia), cuando el esfuerzo efectivo in situ aumenta debido a la reducción de la presión del poro en la etapa de producción. Este caso de producción de arena es menor que en los primeros dos casos de formaciones no consolidadas y poco consolidadas.

2.2.1.4. Arena producida de formaciones consolidadas debido a fuerzas tectónicas

Morita y Boyd (1991) mencionan que los dos esfuerzos horizontales no son tan significativas en zonas productoras de arenas. Sin embargo, si una formación es rígida con porosidad muy baja, movimientos tectónicos pequeños inducen esfuerzos direccionales. Esta diferencia de esfuerzos causa un derrumbamiento del pozo, por lo cual induce a una producción posible de arenas o finos. Esta situación se puede presentar en formaciones que se encuentran en zonas geológicas activas.

2.2.1.5. Arena producida con alto gradiente de presión a lo largo de una cavidad

Las nuevas herramientas de disparos han incrementado sus capacidades, estas herramientas generan disparos múltiples con una profundidad de penetración grande. Al realizarse los disparos, se forman cavidades, estas cavidades son zonas donde la acción de los disparos provoca una falla de corte y llegan a inducir la falla de tensión si a lo largo de esta cavidad existen caídas de presión grandes debido a fricción generada por flujo y sus cambios drásticos posibles.

La discusión previa es una simplificación de todas las posibles causas para la producción de arenas, además de otros posibles factores que llegan a impactar. De manera general todas las posibles causas del arenamiento se pueden relacionar los conceptos de gasto de producción, declinación de presión cercana al pozo y resistencia de compresión de la formación.

2.3. Consecuencias de la Producción de Arena

Las consecuencias del arenamiento son un problema de productividad de corto y largo plazo. Aunque algunos pozos con producción de arena puede controlarse de forma efectiva, el resto de los pozos (la mayoría), no se pueden controlar y le cuestan a las industria petrolera decenas de billones de dólares anualmente (Acock et al. (2004)). El conocer las consecuencias de la producción de arena muestra que tan atractivo sería analizar pozos que presenten características para producir arena, además que valores de gastos se tienen que tomar en cuenta para que los pozos no presenten problemas serios de producción de arena o un colapso, el equipo superficial para manejar de manera óptima la producción de arena y el mantenimiento de pozos para evitar daños severos. A continuación se mencionarán las consecuencias más comunes de producción de arena.

2.3.1. Acumulación en el fondo del pozo

Si el gradiente de presión a lo largo del pozo no es suficiente para transportar arena a la superficie, entonces se empezará a llenar el fondo del pozo con arena. Eventualmente, el intervalo productor podría estar completamente cubierto de arena. En este caso, el gasto de producción declinara hasta que el pozo quede “arenado” y la producción cese. En estas situaciones, las operaciones de intervención de pozos se requieren para limpiar el pozo y restablecer la producción. Una técnica común es bajar un “achicador” de arena en una línea de acero para remover la arena que se encuentra en la tubería de producción o tubería de revestimiento. Otra operación de intervención es insertar una tubería flexible dentro de la tubería de producción, agitar la arena e incitar el flujo de fluidos a través del pozo. Esta operación debe de realizarse con cuidado, ya que existe la gran posibilidad de que la tubería flexible se atasque en la tubería de producción. Si la producción de arena es continua, las operaciones de limpieza deben ser hechas periódicamente aunque esto signifique pérdida de producción e incremento de los costos de mantenimiento.

2.3.2. Acumulación en equipo superficial

Si el gradiente de presión es suficiente para transportar arena hacia la superficie, es posible que la arena quede atrapada en el separador, tratadores de calor o línea de flujo de producción. Si una cantidad suficiente de arena queda atrapada en una de esas áreas, se requerirá la limpieza para permitir la producción eficiente de pozos.

Para restablecer la producción, el pozo debe ser cerrado, el equipo superficial abierto y la arena es removida manualmente. Además del costo de limpieza, el costo de interferencia de producción debe ser considerado.

2.3.3. Erosión en el fondo del pozo y equipo superficial

Si el flujo es turbulento, el flujo de arena será altamente erosivo. La **figura (2.1)** presenta una imagen de una sección de pozo erosionada. La **figura (2.2)** muestra un estrangulador superficial erosionado. Si la erosión es severa u ocurre de forma duradera podría ocurrir un fallo del equipo del fondo de pozo o superficial podría ocurrir, resultando en problemas críticos de seguridad y medio ambiente, al igual que una pérdida de dinero debido a la interrupción de la de producción de pozo.

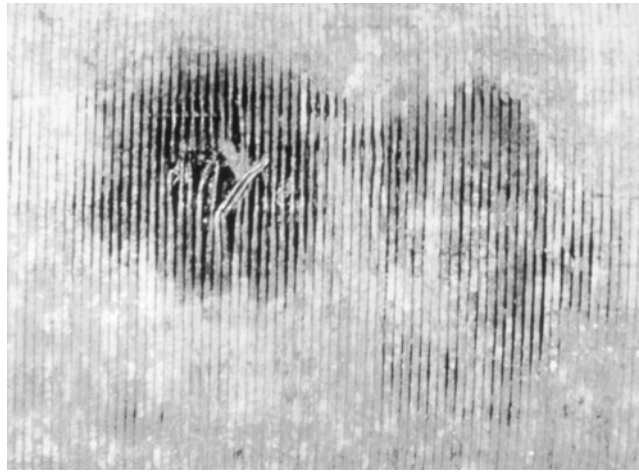


Figura 2.1: Falla de la sección del pozo debido a la producción de arena. (Penberthy, 2006)



Figura 2.2: Falla del estrangulador debido a la producción de arena. (Penberthy, 2006)

2.3.4. Colapso de la formación

El colapso de formación alrededor del pozo puede ocurrir cuando se han producido volúmenes grandes de arena. Aparentemente, cuando se forman espacios vacíos de la matriz de roca suficientemente grandes para no poder mantener la integridad de la formación, ocurre el colapso. Cuando se presenta el colapso, los granos de arena se vuelven a acomodar de tal forma que crean condiciones de más baja permeabilidad a la que se tenía originalmente. Esto es una realidad para formaciones con alto contenido de arcilla o una cantidad variada de tamaños de granos (Wu (2005)). Para el caso contrario, donde la formación tiene menos arcilla y menor variedad de tamaños de roca entonces el cambio de permeabilidad no es tan severa. Cuando un estrato de roca adyacente superior es lutita, el colapso de esta roca adyacente puede causar un colapso completo de la formación. En muchos casos, la producción continua de arena declina la productividad del pozo y su recuperación final.

La compactación del yacimiento ocurre como resultado de la reducción de presión del poro creando una subsidencia superficial. Un ejemplo de subsidencia causado por la producción de fluidos y arenas es la del campo Ekofisk en el Mar del Norte, donde las plataformas se hunden cerca de 10 ft.

2.4. Métodos de predicción

Conforme los operadores tienen programas de producción más agresivos, se genera una demanda para el entendimiento de los mecanismos de producción de sólidos para que se realicen predicciones correctas de una cantidad anticipada de producción de sólidos en función del tiempo, esfuerzo aplicado y flujo de fluidos. Predecir si un pozo producirá fluidos sin producir arena ha sido la meta de la mayoría de los ingenieros de terminación y proyectos de investigación. La meta es extender a un máximo, permisible y seguro gasto de producción de arena. Con esto la toma de decisiones y estrategias de producción se basan en la consideración del índice de productividad de pozos, capacidad de producción de arena, equipo superficial para manejar arena y las condiciones entre la cuales se logran el control de arenamiento. A continuación se presentarán los métodos más comunes para la predicción de la producción de arena.

2.4.1. Resistencia de la formación

El procedimiento más común para determinar si el control de arena es determinar la resistencia a la compresión de la roca. La forma más común es a través de una prueba “triaxial” la cual se describe en el capítulo 3. Debido a que la resistencia a la compresión de la roca tiene las mismas unidades que el gradiente de presión entre el yacimiento y el fondo del pozo, estos dos parámetros pueden relacionarse y es posible establecer límites para el diferencial de presión de pozos específicos. Un estudio hecho por Penberthy y Shaughensy (1992) muestra que la roca falla y empieza a producir arena cuando la diferencia de presión entre el fondo de pozo y el yacimiento es 1.7 veces mayor a la resistencia de compresión de la roca. Como ejemplo, si una roca de formación tiene una resistencia a la compresión de 500 psi entonces para producir arena iniciaría cuando la caída de presión entre el fondo de pozo y el yacimiento fuera igual o mayor de 850 psi.

2.4.2. Registro Sónico

El registro sónico es un tipo de registro acústico que mide el tiempo de tránsito (Δt) de onda de sonido que se mueven a través de una longitud de formación. El registro sónico puede usarse para determinar el potencial de producción de arena de los pozos. Si la velocidad de matriz de roca es conocida, la porosidad puede ser calculada. Los registros sínicos en el área de producción de sólidos son usados para determinar la porosidad y determinar propiedades geomecánicas de la roca, tales como el módulo de Young, relación de Poisson y módulo de corte. La porosidad está relacionada con la resistencia de la formación y el tiempo de viaje sónico. Tiempos cortos de viajes, menos de 50 microsegundos, indican porosidad muy baja correspondientes a una roca bien cementada; tiempos largos de viaje, 95 microsegundos o más, se asocian con una roca frágil, altamente porosa y pobremente cementada. Una técnica común para determinar si el control de arena en un área geológica es correlacionar

incidencias de producción de arena con las lecturas de los registros sínicos de porosidad arriba y abajo de la zona donde la producción de arena.

2.4.3. Registro de las Propiedades de la formación

Ciertos registros de pozos, tal como el registro sínico (ya discutido) , registro de densidad y registro de neutrones son herramientas que sirven como indicadores de porosidad y dureza de la formación. Para una formación particular, una lectura de baja densidad indica porosidad alta. Los registros de neutrones son indicadores de porosidad. Varias compañías de servicios de registros ofrecen registros de propiedades de formación que usan los resultados de registros sínico, de densidad y de neutrón para determinar si la formación producirá arena o finos de la formación, para ciertas caídas de presión. Penberthy (2006) menciona que aunque los registros de propiedades de la formación se han usado durante 20 años, la experiencia muestra que normalmente sobre predicen la necesidad de control de arena.

2.4.4. Porosidad

Como se ha intuido de los dos métodos anteriores, la porosidad de la formación puede usarse como guía para saber si el control de arena es necesario. Penberthy (2006) establece el rango de valores para el cual la porosidad tiene una cierta probabilidad de generar arenamiento, estableciendo que, si es mayor del 30 %, la probabilidad de control de arena es alta debido a la falta de cementación que se traduce como una falta de cohesión de roca. De forma inversa si la porosidad es menor del 20 %, la necesidad de control de arena será probablemente mínima debido a que la arena estará más consolidada. El rango de porosidad entre 20 y 30 % es donde la incertidumbre usualmente existe. En un medio natural, la porosidad esta relacionado con el grado de cementación de la formación; así, con esta base esta técnica puede ser utilizada cualitativamente. La información de porosidad puede ser derivada de registros de pozos o análisis de núcleos en laboratorios.

2.4.5. Caída de presión

La caída de presión generada por la producción puede ser un indicador del potencial de producción de arena. Es muy poco probable que la producción de arena ocurra con gradientes pequeños de presión a lo largo del pozo, mientras que una caída de presión excesiva puede causar que la formación produzca arena a niveles críticos. La magnitud de caída de presión es normalmente asociada a la permeabilidad y viscosidad de los fluidos producidos. Fluidos pocos viscosos como el gas, generan pequeñas caídas de presión, al contrario con las caídas de presión grandes asociados a fluidos muy viscosos (más de 1000 cp) que se producen al mismo intervalo. Así que la producción de arena esta asociada usualmente a fluidos muy viscosos (Zhang (2'004)).

2.4.6. Métodos analíticos

En las primeras etapas, la predicción del gasto de producción de arena se basó en relaciones empíricas entre el gasto de producción de arena con fluidos y parámetros de pozos tal como la profundidad del pozo, tiempo de viaje acústico, gasto de producción de pozo, caídas de presión del pozo, productividad del pozo, saturación del fluido y otros más.

Kanj et al. (1999) coleccionaron una gran cantidad de datos de pozos con producción de arenas, para construir un modelo de redes neuronales para predecir el gasto de producción de arena. Este modelo tiene una estructura basada en un modelo de aprendizaje de propagación inversa, con parámetros de entradas tal como: Porosidad, cantidad de arcilla, edad geológica, densidad API del aceite y caída de presión. La red neuronal necesita ser “entrenada” y ser probada de manera efectivamente antes de aplicar la predicción de arenamiento. La efectividad de la aplicación y predicción depende en los datos obtenidos del pozo que producen arena. J. Tronvoll et al. (2001) desarrolló un análisis de regresión para un conjunto de datos de producción de arena de un pozo piloto en el cual la producción de arena estaba autorizada y le fue aplicada una administración para manejar la producción de arena, la investigación muestra que el gasto de producción de arena alcanza un nuevo pico cada vez que la

caída de presión incrementa. Estas relaciones empíricas indican el comportamiento de la producción de arena en muchos pozos pero no muestran detalles cuantitativos del gasto de producción de arena y no muestran detalles de la evolución de las propiedades de la formación.

2.4.6.1. Modelo esfuerzo-deformación

M. B. Geilikman et al. (1994) encontraron que los esfuerzos alrededor del pozo cambian con la declinación de presión debido a la producción del pozo. Cuando la zona de producción alcanza un estado crítico de esfuerzos debido a la producción, la producción de arena empieza a desarrollarse. La **figura (2.3)** muestra la área desde la parte interna del pozo hasta la parte externa, la cual se divide en las siguientes zonas: Zona de producción de arena, zona plástica, zona elástica-plástica, zona elástica y zona virgen o zona imperturbable. Ellos estudiaron la relación entre el gasto de producción de arena y los parámetros de la zona plástica, indicando que la producción de arena resulta principalmente de la continua extensión de la zona plástica. Y desarrollaron la siguiente ecuación:

$$S_c(t) = \pi (\phi_p - \phi_c) (R^2 - r_w^2) \quad (2.4.1)$$

Donde S_c es la producción acumulada de arena, ϕ_p es la porosidad de la zona plástica, ϕ_c es la porosidad de la zona virgen, R es el radio de la zona plástica y r_w es el radio del pozo. Al inicio de la producción la porosidad de la zona virgen (ϕ_c) y la porosidad de la zona plástica (ϕ_p) serán iguales. A medida que se produce el pozo y aumenta el tiempo: el radio (R) y porosidad (ϕ_p) de la zona plástica empiezan incrementarse, en consecuencia la producción acumulada de arena incrementará ($S_c(t)$).

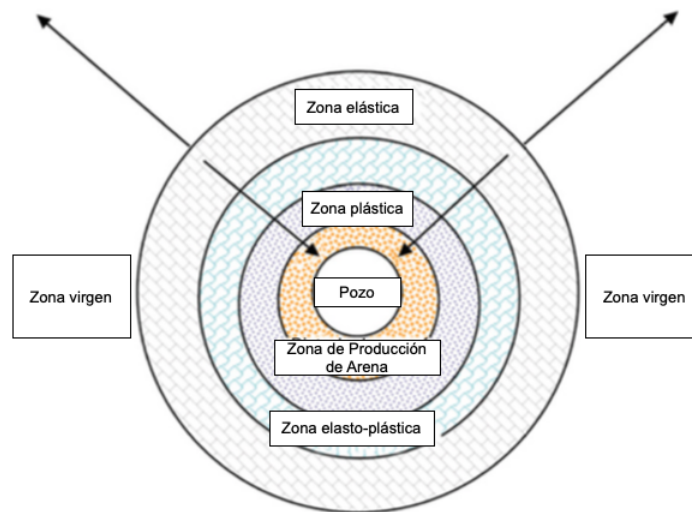


Figura 2.3: Diagrama de zonas de producción de arena en una formación. (Zhou, 2016)

P. J. Van de Hoek et al. (2004) mejoraron el modelo propuesto por Geilikman y expandieron la aplicación del modelo. Este modelo mejorado muestra que la permeabilidad y porosidad de la zona plástica incrementa después de la producción de arena y la formación vuelve a un estado estable. Esto significa que las partículas de arena tienden a formar un arco estable alrededor del pozo o cerca de los túneles de perforación durante de la producción de arena. Y se vuelve inestable conforme hay mucha producción de arena y cambios drásticos de caídas de presión debido a la producción.

2.4.7. Métodos numéricos

Los métodos más sofisticados para predecir la producción de arena es el uso de modelos numéricos de geoméca, desarrollados para analizar el flujo de fluidos del yacimiento en relación con la resistencia de la formación.

. El efecto del esfuerzo de la formación, asociado con el flujo de fluido en la región inmediata alrededor de pozo, se simula a través de una herramienta de análisis numérico.

Vardoulakis et al. (1996) desarrollaron un modelo totalmente determinístico basado en un teoría de mezcla de tres fases para un medio continuo de esqueleto de sólido, sólido móvil y fluido. Este modelo matemático de erosión cinética el cual está basado en balance de masa, considera que el transporte de las partículas está regido por la Ley de Darcy. La ley de Darcy se acopla con la ecuación de Carman-Kozemy para relacionar los cambios de porosidad con los de permeabilidad. Este modelo se discretizó numéricamente por medio del método de diferencias finitas. Stavropoulou et al. (1998) utilizaron el modelo de erosión propuesto anteriormente por Vardoulakis (1996) y acoplaron el daño mecánico de la roca, donde la porosidad cambia respecto al tiempo y espacio conforme se desarrolla la erosión, usándose como parámetro de acoplamiento. La elasticidad y resistencia de la roca (cohesión) dependen de la porosidad, de tal manera que el material se vuelve más débil al incrementarse la porosidad. Este modelo matemático se discretizó mediante el método de Galerkin, empleando el método de elemento finito..

La herramienta computacional usada en esta tesis se basará en la investigación desarrollado por Stavropoulou, en la cual se emplea otro tipo de discretización, conocido como diferencias finitas. La dificultad de este método consiste en la parte numérica y datos de entrada. Respecto a la parte numérica, las ecuaciones obtenidas resultan ser no lineales, por lo que se requiere emplear un método iterativo para su solución; respecto a los datos de entrada, es necesario que para que este método de predicción se valide adecuadamente, los parámetros de entrada deben obtenerse de forma correcta, lo cual en algunos casos resulta difícil, por lo que es posible que los resultados sean erróneos.

2.4.8. Flujo multifásico

Predecir cuando el flujo multifásico empezará es de ayuda. Muchos casos pueden citarse donde los pozos empiezan a producir arena cuando ocurre la irrupción de agua, tal como lo menciona Morita y Boyd (1991). La producción de arena al presentarse el flujo multifásico es causada principalmente por dos fenómenos: el movimiento de finos mojados por agua y los efectos de la permeabilidad relativa. La mayoría de las formaciones son mojadas por agua y, como consecuencia, inmóviles cuando se produce la fase de aceite, ya que ocupa la mayor parte del espacio poroso. Cuando la saturación del agua incrementa hasta el punto en el que el agua se vuelve móvil, es decir, se alcanza la saturación crítica, los finos de la formación empiezan a moverse con la fase mojante (agua en este caso), lo cual genera un taponamiento en los poros del medio poroso. Adicionalmente, el flujo de dos fases causa un incremento en la caída de presión debido a que el flujo multifásico genera más resistencia que el flujo de un solo fluido. Fanchi et al (2015) mencionan que los efectos de permeabilidad relativa incrementan la caída de presión alrededor del pozo por un factor de 5 por unidad de producción. El resultado compuesto de la migración de finos, taponamiento y reducción de la permeabilidad relativa alrededor del pozo, incrementa la caída de presión al punto que excede la resistencia de la formación. La consecuencia de estas situaciones es la producción excesiva de arena.

2.5. Técnicas de control de Producción de Arena

Cuando los pozos tienen las características necesarias para presentar problemas de flujo de arena, se requiere un esfuerzo para lograr controlar y minimizar la producción de arena. Hay diversos métodos de control de arena, los cuales cada uno cuentan con características que los hacen adecuados para distintos pozos con problemas específicos de producción de arena. Las opciones varían desde prácticas simples de operación hasta operaciones de terminación de alto costo, tal como consolidación de arena o empacamiento de grava. La técnica que se elija depende de las condiciones del pozo en estudio, prácticas de operación y consideraciones económicas. Algunas de las técnicas de control de arena son:

2.5.1. Mantenimiento y reparación

El Mantenimiento y reparación de pozos es un método pasivo para el control de arena. Este método básicamente

requiere tolerar la producción de arena y contener los efectos. Esta técnica requiere verter, lavar y limpiar las instalaciones superficiales de manera rutinaria para mantener la productividad del pozo. Es posible que tenga éxito en formaciones específicas. Este método se utiliza principalmente en pozos donde la producción de arena es mínima, bajos gastos de producción y un servicio a pozos económico.

2.5.2. Restricción de gasto

El restringir el gasto de un pozo hasta un nivel que reduce la producción de arena es un método usado ocasionalmente. La meta de este procedimiento es reducir o incrementar secuencialmente el gasto de fluido hasta que se alcanza un valor aceptable de producción de arena. El objetivo de esta técnica es intentar establecer el gasto máximo libre de arena. Es un método de prueba y error que se tiene que repetir conforme cambia la presión del yacimiento, gasto y corte de agua. El problema de la restricción del gasto es que el gasto requerido para establecer y mantener una producción libre de arena es generalmente menor al potencial absoluto del pozo. Comparado con el gasto máximo, este representaría una pérdida significativa de productividad e ingresos..

2.5.3. Prácticas de terminación selectiva

La meta de esta técnica es producir solo de las secciones del yacimiento que son capaces de resistir las caídas de presión anticipadas, sin presentar daños por producción de arena. Esto se logra disparando las secciones de formación con alta resistencia a la compresión, que permiten grandes caídas de presión. Las secciones con alta resistencia a la compresión son secciones que muy probablemente son zonas cementadas y de baja permeabilidad. Mientras que esta técnica tiene la capacidad de eliminar la producción de arena, es defectuosa ya que es posible que las zonas con el contenido mayor de hidrocarburos no estarán plenamente comunicadas con el pozo.

2.5.4. Consolidación plástica

La consolidación plástica implica la inyección de resinas plásticas las cuales se agregan a los granos de arena de formación. Subsecuentemente las resinas se endurecen y forman una masa consolidada, soportando y juntando los granos de arena en sus puntos de contacto. Si se llega a tener éxito, entonces la resistencia a la compresión de la formación aumentará y será suficiente para soportar las fuerzas de arrastre cuando se produce a gastos deseados. La meta de esta técnica es consolidar la roca alrededor de un radio de 3 ft sin reducir la permeabilidad de la roca. Tres tipos de resinas son comercialmente disponibles: Epoxís, furanes y fenóles. Las resinas se encuentran en forma líquida cuando entran a la formación y se requiere un agente catalizador para endurecerlas. Algunos catalizadores se clasifican “internos” porque se mezclan en superficie con la solución de resina y requieren cierto tiempo y/o temperatura para endurecer la resina. Otros tipos de catalizadores se clasifican como “externos” y son inyectados después de que la resina está en la formación. Los catalizadores internos tienen la ventaja de una colocación positiva debido a que toda la resina está en contacto con el catalizador. Una desventaja asociada con los catalizadores internos son la posibilidad de endurecimiento prematuro en la sarta de trabajo. Existen dos tipos de sistemas de consolidación plástica, las cuales son:

1. Sistema de Separación de fase.- Estos sistemas contienen de 15 a 20 %de resina activa en una solución inerte. La resina es preferencialmente atraída a los granos de arena, dejando la parte inerte que no afectará en los espacios porosos. Esos sistemas usan catalizadores internos. Un control preciso de la colocación de la resina es crítico debido a que un sobre desplazamiento resultará en arena no consolidada en un área crítica cercana al pozo. Este sistema no es efectivo en formaciones que contienen más de 10 % de arcillas, las arcillas que tienden a atraer resinas, tiene una gran área de superficie en comparación a las arenas. Entonces las arcillas atraerán más resina, además de que el sistema de separación incluyen poco porcentaje de resina por lo que no habrá resina suficiente para consolidar los granos de arenas.
2. Sistema de Sobre desplazamiento.- Estos sistemas incluyen un alto porcentaje de resina activa. Cuando se inyectan, los espacios porosos se rellenan de resina y después se requiere un sobre desplazamiento para empujar el exceso de resina que se encuentra en área cercana del pozo y así restablecer la permeabilidad.

Muchos de los sistemas de sobre desplazamiento requieren un catalizador externo, aunque algunos incluyen catalizadores internos.

De acuerdo con Clegg (2006) La mayor dificultad de usar sistemas de resinas es la colocación de los químicos en la formación. Por ejemplo en formaciones lenticulares, la colocación de resinas puede ser irregular debido a la gran variante de permeabilidades en la formación debido a ciertas características geológicas. Por esta razón, la consolidación plástica es adecuada para intervalos con longitudes menores de 10 a 15 ft. Intervalos largos pueden ser tratados usando empacadores para aislar y tratar pequeñas secciones de zonas al mismo tiempo, pero estas operaciones son difíciles y consumen tiempo. Además las consolidaciones plásticas no deben aplicarse en formaciones con permeabilidades menores a 50 mD. También es posible que las resinas se emblandezcan a temperaturas mayores de 255 °F por lo que no proveen suficiente resistencia a temperaturas altas. Este método ha sido usado extensivamente en el golfo de México durante los años tardíos de 1950s y los medios de 1970s, este método representa menos del 1 % de las terminaciones de control de arena de forma mundial actualmente. La mayor desventaja de este método es los altos costos y la limitada longitud de intervalo para realizar la terminación y tener un tratamiento efectivo.

2.5.5. Colocación de resina a alta energía

Como se menciona anteriormente, una de las razones principales de la falta de aceptación de técnicas de consolidación química han sido las dificultades en colocar las resinas de forma uniforme a lo largo del intervalo planeado. La colocación irregular es más severo en intervalos mayores a 15 ft. Las causas de esto son atribuidas a las diferencias de inyectividad causadas por limpiezas incompletas de disparos durante esquemas bajo balance o por variaciones de permeabilidades en una longitud de intervalo de formación.

La colocación de resina a alta energía resuelve alguno de esos problemas tal como lo muestra Hollabaugh et al. (1993) y Dees et al. (1994). Esta técnica inyecta resina de forma muy rápida bajo condiciones de gran sobrebalance. La resina es puesta en la formación de manera tan rápida que no puede tener posibilidad de fallar. Otro beneficio de la colocación rápida de resina es que la técnica parece ser menos afectada por propiedades como la de permeabilidad. Esta característica permite una colocación uniforme sobre el intervalo disparado. Dos métodos están disponibles para crear presiones de sobrebalance que pueden ayudar a colocación de resina, tal como:

1. Fracturación por Propulsión de Gas.- El uso de herramientas de fracturación por propulsor de gas implica la conversión de un propulsor sólido a gas por una reacción química en la zona deseada del pozo. El propulsor químico es cambiado a gases de combustión por uno de estos dos mecanismos: Detonación o propagación de flama. La detonación involucra una reacción caracterizada por una onda de choque se mueve rápidamente a través del intervalo que se busca tratar. Esta onda de choque viajan a velocidades entre 15000 y 25000 ft/seg, induciendo presiones desde 400 a 4000000 psi con presurizaciones arriba de 100000 psia. La alta presión coloca la resina de forma más uniforme en los largos intervalos de la formación donde los métodos convencionales de consolidación plástica son poco prácticos. Una ventaja de este sistema es que la resina se coloca en todos los disparos de forma inmediata desde una zona de la herramienta del generador de gas.
2. Disparos Sobrebalance.- La colocación de resina por disparos sobrebalanceados pueden ser usados si el pozo no ha sido previamente disparado. La composición de la solución de resina es alcohol furfurílico, un agente acoplado y un agente mojante. La resina cataliza con un ácido para formar un plástico furano. La solución de resina se posiciona a lo largo del intervalo de los disparados planeados. Un fluido más denso puede usarse debajo de la resina para llenar una porción del pozo debajo de la zona de interés. Esta técnica asegura más precisión de colocación de resina en todo el intervalo perforado. Operacionalmente, la presión de fondo fluyendo, a la profundidad de disparo, se incrementa substancialmente de una forma mayor a la presión del poro.

Mientras la técnica de colocación de resina a alta energía ofrece una gran ventaja respecto los métodos convencionales, estos no son tan usados y el sistema tiene muchas desventajas las cuales pueden ser:

- Altos costos.
- Bajo índice de éxito.
- Falta de longevidad.

2.5.6. Grava recubierta de resina

Tratamientos de gravas recubierta de resinas son bombeadas en dos distintas formas. La primera es la forma seca, donde la grava recubierta de fenoles está parcialmente catalizada. Cuando se exponen a calor, la resina se cataliza, resultando en una masa consolidada en arena. El uso de grava recubierta de resina como técnica de control de producción de arena requiere bombear la grava en un pozo para llenar completamente los disparos y la tubería de revestimiento. La temperatura del fondo del pozo, o la inyección de vapor, causan que la resina se catalicé y se convierta en un empaque consolidado. Después de catalizar, la grava recubierta de resina se coloca en los disparos. La grava consolidada restante en los disparos actúan como un filtro permeable para prevenir la producción de arena de formación. Resinas húmedas es el otro método de bombeo. Para bombear esos sistemas, el pozo es usualmente preempaquetado con grava; después, la resina es bombeada y catalizada para endurecer el plástico. Después de catalizarse, la mezcla de arena consolidada con resina se deja en los disparos. Aunque parezca sencillo en concepto, usar gravas recubiertas de resina resultan ser complejas. Primero, y la más importante, un trabajo exitoso requiere que todos los disparos este completamente llenos con grava recubierta de resina, y que la grava se catalicé. El completo llenado de los disparos se vuelve muy difícil, conforme la longitud y desviación de la zona incrementa. Segundo, la grava recubierta de resina debe de catalizarse con la suficiente resistencia compresiva. Mientras los sistema de recubrimiento de resina fueron utilizado fuertemente de forma inmediata en su desarrollo, ahora su uso es limitado. Experiencia con este método muestra buen éxito al inicio pero pobre longevidad.

2.5.7. Tubería de revestimiento independiente ranurado

Las tubería de revestimiento ranurados han servido como único medio para controlar la cantidad de producción de arena. En esta operación, esta herramienta funciona como filtro. A menos que la formación no sea bien seleccionado, arena limpia con gran tamaño de grano, este tipo de terminación será de un tiempo de producción muy corto debido a que en poco tiempo se taponaa con el material de formación. Cuando estas herramientas se utilizan a lo largo del intervalo productivo, la arena de forma un arco impermeable alrededor de las ranuras. La teoría y pruebas de laboratorios muestran que las partículas forman un puente alrededor de la ranura. El ancho de la ranura es igual al tamaño de grano de arena al punto de percentil 10 del análisis de tamizado. Esta teoría es debido a que el 10% de los granos de arena se detendrán por las aberturas de la tubería ranura, la arena más grande detendrá el 90% restante de la formación. El puente formado dejará de ser estable conforme el tiempo pase o el pozo sea cerrado por alguna razón. Cuando esta técnica es usada para controlar la producción de arena las ranuras de las tuberías deben ser lo más largo posible para maximizar el área de afluencia. Una desventaja de la tubería de revestimiento ranurada es la probabilidad de falla debido a problemas de erosión antes de que se forme un puente.

Usar la tubería de revestimiento ranurado sin empacamiento de grava no es generalmente una buena técnica de control de arena, en muchos casos, las ranuras no previenen el taponamiento de arena. Esta técnica es ideal cuando se tiene una terminación a agujero descubierto en formaciones altamente permeables y bien seleccionadas.

2.5.8. Empacamiento de grava

El empacamiento de grava consiste en colocar una tubería ranurada en un pozo de manera opuesta al intervalo de de terminación y colocar grava de forma concéntrica en la tubería. La grava esta compuesta de arena de granos grandes que previenen la producción de arena de la formación pero permite el flujo de fluido hacia el pozo. La grava es medida para ser de 5 a 6 veces mas largo que el tamaño medio de la arena de formación. El empacamiento de grava crea un filtro en el fondo del pozo que permite la producción de los fluidos de formación

y al mismo tiempo previene la entrada de la arena de formación. Esquemas de un empacamiento de grava de agujero descubierto y agujero con tubería de revestimiento se muestran en la **figura (2.4)**. Si la grava está empaquetada de forma estrecha entre la formación y la tubería de revestimiento, el puente formado por la arena es estable, el cual previene el reordenamiento y movimiento de la arena de formación. Si el empacamiento de arena se diseña y ejecuta de forma precisa, el empacamiento de grava mantiene su permeabilidad bajo cierto rango de condiciones de producción.

De acuerdo a Clegg (2006) el empacamiento de grava es actualmente uno de las técnicas de control de arena más usado para terminación de pozo. Más del 90 % de las terminación de control de arena son empacamiento de grava. Debido a su flexibilidad, casi todos los pozos desviados pueden ser empacados con grava. La excepción es terminación sin tubería de producción donde los rangos no permiten el uso de herramientas convencionales. El uso de empacamiento de arena sin tubería de producción ha sido aplicada pero con muy poco éxito.

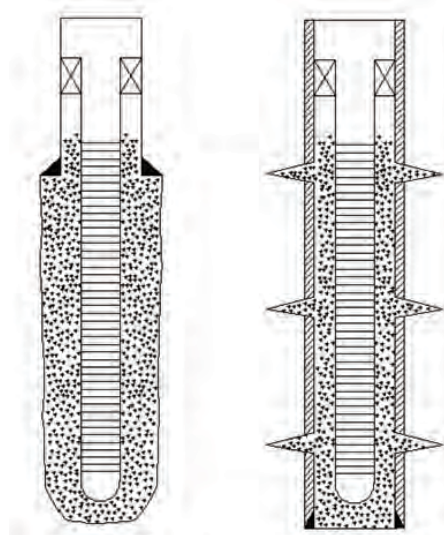


Figura 2.4: Esquemas de empacamiento de grava de un agujero descubierto (izquierda) y un agujero con tubería de revestimiento (derecha). (Penberthy, 2006)

2.6. Introducción a la geomecánica

Los componentes claves en un modelo geomecánico son el sistema de esfuerzos y las deformaciones causadas por el mismo sistema de esfuerzos. El colapso de un pozo ocurre cuando el esfuerzo concentrado alrededor de la circunferencia del pozo excede la resistencia de la roca. Una falla se activa cuando la relación del esfuerzo cortante y el esfuerzo normal que actúan sobre la falla excede la resistencia de fricción que se tiene en el cuerpo de roca. Debido a que la declinación en la producción causa cambios en los esfuerzos que actúan en el yacimiento, es necesario determinar si esta alteración puede ser beneficiosa, o perjudicial, para la producción. Para en el caso de pozos con producción de arena, esto puede llevar desde una mejora de la permeabilidad en las etapas iniciales hasta el colapso del pozo a largo plazo. En este capítulo se explicarán los términos básicos para desarrollar un modelo geomecánico en un pozo y se obtendrán las ecuaciones que modelarán el comportamiento geomecánico del pozo cuando presenta producción de arena.

Stravopoulou et al. (1998) establecieron que el medio es una roca porosa que estará saturada por un fluido, la cual experimentará un fenómeno de erosión donde los granos de roca llegan a desprenderse de la matriz de roca fija y se mezclan al flujo de fluidos. Así que si la roca empieza a perder sólidos de la matriz entonces sus propiedades geomecánicas empezarán a impactar menos el medio, por lo que se establece una relación donde un parámetro de geomecánica tal como: p_g tenderá a obedecer que:

$$p_g = (1 - \phi)\overline{p_g} \quad (2.6.1)$$

En el cual $0 < \phi < 1$. Es importante mencionar que $\overline{p_g}$ es la propiedad geomecánica en la matriz mientras que p_g refiere a la propiedad geomecánica en el medio. La ecuación (2.3) muestra que si aumenta la porosidad, el parámetro geomecánico tendrá un valor menor debido a que el cuerpo de roca está perdiendo masa y su daño interno también incrementaría. Se observa que en el caso que la porosidad fuera 1, entonces este valor sería cero, ya que, no representaría un material fijo y no se podrían medir propiedades mecánicas.

2.6.1. Esfuerzo

El concepto del esfuerzo ha sido originado para determinar el valor de resistencia cuando los materiales fallan. En términos simples, el esfuerzo se define como la fuerza que actúa de manera perpendicular sobre una cierta área. De manera más concisa (para evitar confundirlo con el concepto de presión), un esfuerzo es un tensor, el cual describe la densidad de fuerzas que actúan en todas las superficies de un cuerpo a través de un punto dado. Si se observa la **figura (2.5)**, se observan tres cuerpos, donde dos actúan en una misma área (a y c) y el otro (b) en un área más pequeña. Estos cuerpos están sometidos al mismo vector de fuerza, F , y actúan en dos áreas distintas. De acuerdo a la definición del esfuerzo de manera general se obtiene:

$$\vec{F} = \sum \sigma_{ij} A_j \quad (2.6.2)$$

ó de otra forma:

$$\vec{F} = \sum S_{ij} A_j \quad (2.6.3)$$

Donde σ_{ij} será la fuerza que actúa en la dirección i sobre un área orientada de forma perpendicular a la dirección j . Si se considera la figura **(2.5)**, entonces se tendrá:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} \quad (2.6.4)$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} \quad (2.6.5)$$

$$\sigma_3 = \frac{F}{A_3} \quad (2.6.6)$$

Con base en estas ecuaciones se infiere del primer y segundo casos que la fuerza, F , que actúa de la misma forma en esas dos áreas distintas, que el caso b) tiene un mayor esfuerzo que en el caso a), esto debido a que el área del objeto b) donde actúa la misma fuerza es más pequeña. De esto se infiere que el esfuerzo es un parámetro que depende de la posición donde actúa. En el caso c, que es cuando no se aplica la fuerza en dirección a la normal de la superficie, se debe descomponer la fuerza (F) en una fuerza normal (F_n) una fuerza paralela (F_p) al punto de superficie.

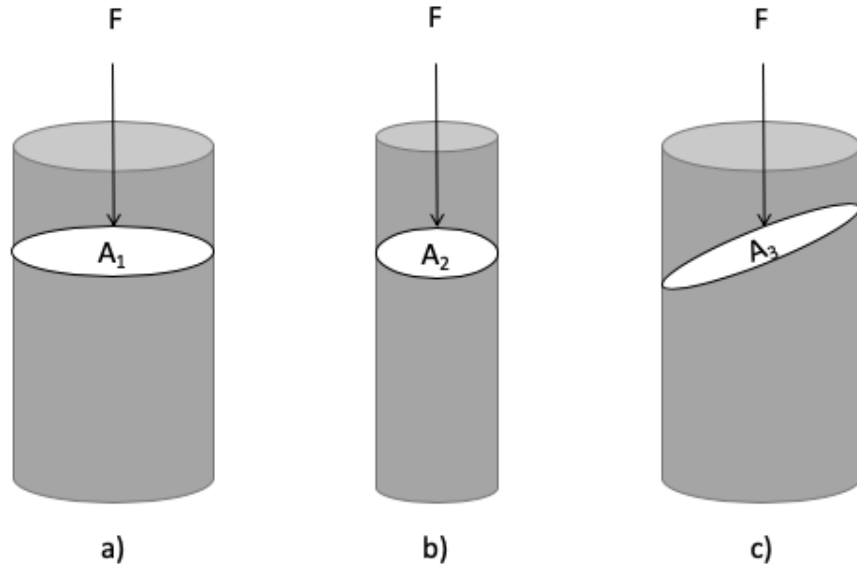


Figura 2.5: Tres objetos sometidos a una fuerza, cuyas áreas transversales son distintas.

Las unidades de esfuerzos son unidades de presión, tal como MPa, psi, etc; aunque esto no implica que el esfuerzo sea totalmente igual a la presión. El esfuerzo depende de la dirección en la cual se mide, mientras que la presión es la misma en todas las direcciones. Otro aspecto importante es que la presión solo actúa de manera perpendicular. Cabe mencionar que la variación de esfuerzos respecto a la dirección depende de la capacidad que tiene el material a resistir esfuerzos. Además de que el esfuerzo representa una fuerza interna, ya que al aplicarse a un cierto punto causa un desbalance de fuerzas internas, y no una fuerza externa como sucede con la presión.

2.6.2. Tensor de esfuerzos

El número que representa el valor de un escalar (tal como temperatura o presión de poro) en un cierto punto (x_1, x_2, x_3) es independiente del origen y orientación del sistema de coordenadas. Mientras tanto, los números que representan el valor de un vector (tal como la velocidad v) depende del sistema de coordenadas. Un tensor (tal como el esfuerzo) depende del sistema de coordenada y dirección para expresar su valor numérico. De forma convencional en un espacio de m -dimensiones, un tensor de rango n es un objeto matemático que tiene n índices, m^n componentes y obedece ciertas reglas de transformación.

Cuando el vector de Fuerza que actúa sobre un objeto dependen de la posición donde actúan (e) la orientación (\vec{n}) y el plano (A), el uso de vectores se vuelve más complejo. En consecuencia se debe utilizar una herramienta matemática para solucionar este problema y adecuar el vector fuerza en función de orientación y posición. Si se considera que:

$$\vec{F}(e_1) = \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \end{pmatrix} \quad (2.6.7)$$

En la ecuación (2.6.7), que representa el vector fuerza, los componentes 1, 2, 3 en los subíndices i, j denotarán: el primer índice la dirección del vector normal unitario y el segundo el componente del vector de fuerza, y e_i denota la posición en la orientación i donde actúan los vectores. La ecuación (2.6.7) solo representa a la posición 1. Si se considera la combinación en tres dimensiones se obtiene:

$$\vec{F}(\vec{n}) = \vec{n}_1 \vec{F}(e_1) + \vec{n}_2 \vec{F}(e_2) + \vec{n}_3 \vec{F}(e_3) \quad (2.6.8)$$

La ecuación (2.6.8) esta en función de la posición y dirección. El hecho que el vector fuerza este en función de dos vectores genera dificultad en utilizar la ecuación (2.6.8). La solución propuesta por Cauchy (1823) fue encontrar una herramienta matemática para simplificar el problema, el cual matemáticamente se conoce como tensor y en este caso: tensor de esfuerzos. Si se considera el área donde los vectores actúan y se sustituye la ecuación (2.6.3), se obtiene:

$$\vec{F}(\vec{n}) = \vec{n}_1 A_1 \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \end{pmatrix} + \vec{n}_2 A_2 \begin{pmatrix} S_{21} \\ S_{22} \\ S_{23} \end{pmatrix} + \vec{n}_3 A_3 \begin{pmatrix} S_{31} \\ S_{32} \\ S_{33} \end{pmatrix}$$

Si se considera que los elementos de Áreas donde actúan las direcciones 1, 2 y 3 son iguales y se denota con A , de manera simplificada se obtiene:

$$\vec{F} = A \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.6.9)$$

Donde la matriz de la ecuación (2.6.7) representa el tensor de esfuerzos y matemáticamente transforma el vector dirección en un vector de fuerza. Si el sistema de coordenadas cambiará, entonces el tensor de esfuerzos cambiaría de coeficientes y transformaría el vector \vec{n} en un vector \vec{F} en el nuevo sistema de coordenadas.

De manera más simple considera un espacio en tres dimensiones con un sistema de coordenadas ortogonal en dirección 1, 2 y 3, tal como en la **figura (2.6)**. En este sistema actúa un tensor de esfuerzos en un punto dado, el cual se subdivide en 9 componentes S . El tensor de esfuerzos representa un tensor de rango 2. Los subíndices indican la dirección donde el esfuerzo está actuando. Los esfuerzos que actúan sobre un cuerpo se dividen en dos tipos: **Esfuerzos normales** y **Esfuerzos cortantes**. Los esfuerzos normales actúan de forma perpendicular a un plano de la superficie, en la dirección de una coordenada ortogonal. Mientras que los esfuerzos cortantes actúan de forma tangencial a la superficie del plano perpendicular a la coordenada orthogonal, por lo que en este sistema de tres dimensiones se tienen nueve componentes que se representan de forma matemática tal como:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (2.6.10)$$

La ecuación (2.6.10) representa un tensor de todos los esfuerzos que actúan en el objeto de la **figura (2.6)**. En este trabajo se utilizará el símbolo σ_{ij} para designar la componente del tensor esfuerzos que actúan en dirección i y una dirección perpendicular al plano j . Tomando en cuenta este nuevo símbolo y sustituyendo en la ecuación (2.6.10) se tendrá:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.6.11)$$

2.6.3. Ecuación de momento lineal

Cuando se tiene un objeto, siempre existirán fuerzas que actúan alrededor de este cuerpo. La clasificación de estas fuerzas que actúan en el objeto se dividen en dos: Fuerzas de contacto y Fuerzas de cuerpo. Las fuerzas de contacto son aquellas fuerzas externas que actúan en el objeto para producir una reacción, estas son cero si se mantienen en un estado de inercia. En geomecánica las fuerzas de contacto son los esfuerzos cortantes y normales, o bien el tensor de esfuerzos representado por la ecuación (2.6.11).

Las fuerzas de cuerpo son aquellas fuerzas producidas por algún campo de fuerza alrededor del cuerpo y dependen del tamaño y la distancia, usualmente en geomecánica esta resulta ser la gravedad. Las fuerzas de cuerpo se representarán mediante el parámetro b . Para establecer un balance de fuerzas que actúan en un cuerpo se utiliza

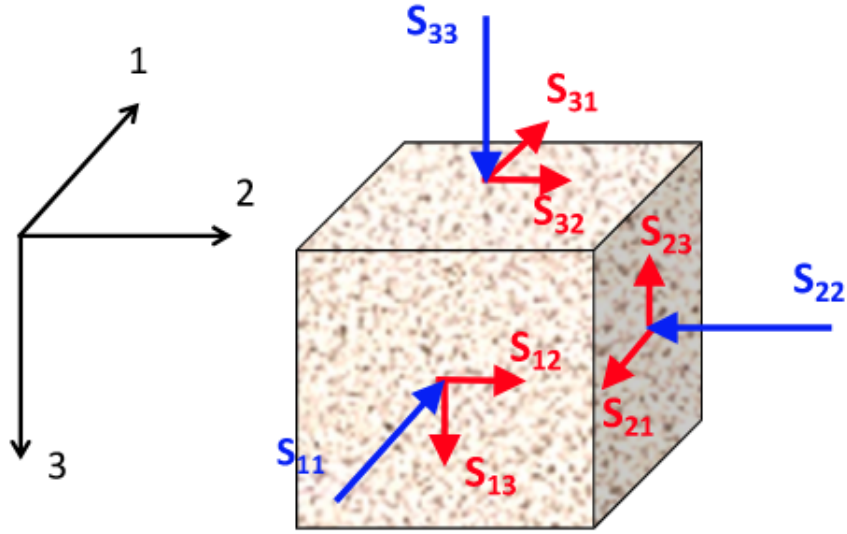


Figura 2.6: Representación gráfica de un tensor de esfuerzos. (Espinoza, 2017)

la Segunda Ley de Newton la cual establece que la suma del conjunto de fuerzas que afectan a un cuerpo debe producir una fuerza resultante igual a la masa del objeto multiplicado por la aceleración que el cuerpo experimenta. En geomecánica es común que las aceleraciones sean tan pequeñas que se igualan a cero. La ecuación de momento lineal en 3 dimensiones que describe este balance de fuerza es:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \quad (2.6.12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0 \quad (2.6.13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \quad (2.6.14)$$

El desarrollo para llegar a las ecuaciones (2.6.12)-(2.6.14) se encuentra en el **Apéndice A**.

2.6.4. Deformación

La aplicación de esfuerzos a un objeto resulta en una deformación y un cierto desplazamiento. Para que se efectúe una deformación en un objeto se requiere un cambio de longitud y orientación relativa en el mismo cuerpo. La deformación, de forma general, de un cuerpo resultará en el cambio de longitud por unidad de longitud original. Tal como los esfuerzos, existen dos tipos de deformaciones que una estructura experimenta: Deformación normal y Deformación cortante. El objetivo de resolver este problema en geomecánica, es calcular el desplazamiento a cualquier punto de la roca con base en conocimiento de los fuerzas aplicadas en el cuerpo de roca.

2.6.4.1. Deformación en una dimensión

Considera un cuerpo cilíndrico bajo un estado de tensión uniaxial, tal como el de la **figura (2.7)**. En este cilindro actúa un esfuerzo normal (σ_x) por lo que el cuerpo sufre una elongación. Es necesario establecer una relación entre la deformación (ε) con el desplazamiento (u_x) causado cuando el cilindro se somete a un esfuerzo (σ_x). Si se asume un comportamiento lineal entre el desplazamiento y la distancia de deformación, tal como el mostrado en la **figura (2.8)**, la pendiente sería la deformación (ε) y se obtiene la siguiente ecuación:

$$u_1 = \varepsilon(x_1 - x_0) + u_0 \quad (2.6.15)$$

Si se considera que $h = x_1 - x_0$, entonces se tiene que la ecuación (2.6.15) se convierte en:

$$u_1 = \varepsilon h + u_0 \quad (2.6.16)$$

Si el desplazamiento se pone en forma de función de las distancias recorridas, se tiene que la ecuación (2.6.16) se convierte a:

$$u(x_0 + h) = \varepsilon h + u(x_0) \quad (2.6.17)$$

Despejando ε en la ecuación (2.6.17), se llega a:

$$\varepsilon = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \quad (2.6.18)$$

Si se toma que el límite de h tiende a cero, la ecuación (2.6.18) se transforma a:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6.19)$$

La ecuación (2.6.19) representa el cambio de longitud entre dos puntos, o el desplazamiento, dividido entre la longitud de referencia o longitud original. Esta deformación es una deformación normal, ya que en la figura (2.7) se observa como actúa un esfuerzo normal al plano y en la dirección x . Para ser congruente con la definición previa acerca de como se considerarán las deformaciones respecto a la dirección del esfuerzo aplicado, ya que se tiene un esfuerzo por tensión la ecuación (2.6.19) se convertirá en:

$$\varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6.20)$$

Cuando se tenga un esfuerzo por compresión la ecuación (2.6.19) será la indicada para determinar la deformación.

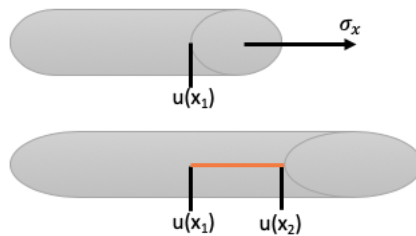


Figura 2.7: Cilindro bajo un estado de tensión uniaxial.

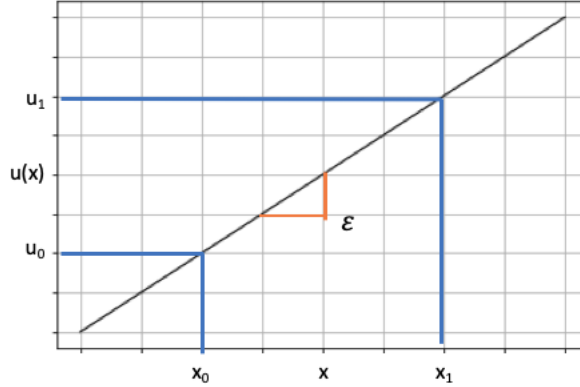


Figura 2.8: Gráfica de la relación entre desplazamiento y distancia.

2.6.4.2. Deformación en dos dimensiones

En el ejemplo anterior solo se observó el comportamiento de una deformación normal. Como se mencionó existe otro tipo de deformación llamada deformación cortante, la cual describe el cambio de ángulo interno entre dos direcciones, que inicialmente eran ortogonales. Esta deformación se observa mejor en una figura en dos dimensiones, tal como en la **figura (2.9)**, en la cual se observa un cuerpo inicial con configuración de referencia \overline{ABCD} que al exponerse a los dos tipos de esfuerzos se deforma, obteniéndose un cuerpo con la nueva configuración \overline{abcd} .

El objetivo es obtener una ecuación que relacione las deformaciones normal y cortante. Así que si se define la deformación de otra manera; se tiene que a lo largo de un eje la deformación es la relación entre el cambio de longitud entre la longitud original, por lo que de acuerdo a esta definición y las coordenadas de la figura (2.9) se tiene que:

$$\varepsilon_x = \frac{|ab| - |AB|}{|AB|} \quad (2.6.21)$$

Si se despeja $|ab|$ de la ecuación (2.6.21) y considerando que $|AB| = dx$ se tiene:

$$|ab| = (\varepsilon_x + 1)dx \quad (2.6.22)$$

donde $|ab|$ representa la distancia entre dos puntos; si se utiliza esta definición, se tiene que:

$$|ab| = \sqrt{ab_x^2 + ab_y^2} \quad (2.6.23)$$

Buscando las equivalencias de ab_x y ab_y en la figura (2.9) y asumiendo que $u_x = u$ y $u_y = v$, se observa que:

$$ab_x = b_x - a_x = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.6.24)$$

$$ab_y = b_y - a_y = \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.6.25)$$

Sustituyendo esta definición en la ecuación (2.6.23), igualando a la ecuación (2.6.22) y despejando la raíz cuadrada de la ecuación (2.6.23) se llega a:

$$\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 = [(\varepsilon_x + 1)dx]^2 \quad (2.6.26)$$

Cuando se deforma un cuerpo lo hace en proporción al material del que está hecho, por lo que una goma común tendrá mayor deformación al de una roca; incluso se observa de forma visible, algo que no sucede en el caso de las rocas. De acuerdo a esta lógica es posible asumir que las deformaciones de las rocas son mucho más pequeñas que las dimensiones del cuerpo de roca. Esta consideración se basa en la teoría de deformación infinitesimal. Asumiendo que las deformaciones tienen magnitudes muy pequeñas o bien $|\nabla u| \ll 1$, despejando dx y expandiendo los binomios al cuadrado, la ecuación (2.6.26) se convierte en:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6.27)$$

Y si esto se realiza en el eje y , entonces se tiene que:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.6.28)$$

La ecuación (2.6.27) y (2.6.28) muestran que la deformación se mide en la misma dirección aplicada. Por lo que si el cuerpo se deforma en tres dimensiones, simplemente se agrega el desplazamiento expresado por la ecuación (2.6.28). Ahora falta determinar la ecuación que calcula la deformación cortante o la deformación del ángulo interno de la nueva configuración \overline{abcd} , el cual se representará por $2\varepsilon_{xy}$ el cual representa la deformación entre las direcciones x y y que inicialmente eran ortogonales. Se sabe que el ángulo interno de una esquina del cuadrado es 90° y que se tienen dos igualdades:

$$90^\circ - 2\varepsilon_{xy} = 90^\circ - (\beta + \alpha) \quad (2.6.29)$$

Reduciendo la ecuación (2.6.29) se llega a:

$$2\varepsilon_{xy} = (\beta + \alpha) \quad (2.6.30)$$

Pero aún quedan por definir β y α . Tomando la definición de tangente se tiene que:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{\frac{\partial u}{\partial x} dx + dx} \right) \quad (2.6.31)$$

Debido a que las deformaciones son muy pequeñas (como se mencionó anteriormente) es posible plantear la relación trigonométrica siguiente:

$$\tan(\theta) \approx \theta \quad (2.6.32)$$

Sustituyendo la relación (2.6.32) en la ecuación (2.6.31) y factorizando dx , la ecuación (2.6.31) resulta en:

$$\alpha = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x} + 1} \quad (2.6.33)$$

Se observa que en el denominador de la ecuación (2.6.33) hay una suma de una derivada con el número uno; si también se considera que las deformaciones son pequeñas (más pequeñas que el valor 1), se llega a:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.6.34)$$

Siguiendo la misma lógica con β :

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.6.35)$$

Entonces sustituyendo la ecuación (2.6.34) y (2.6.35) en la ecuación (2.6.30), se obtiene:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.6.36)$$

La ecuación (2.6.36) representa la deformación cortante que se tiene en los ejes xy y y . Para un sistema en 3 direcciones se tendría:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.6.37)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.6.38)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.6.39)$$

$$\varepsilon_{xy} = \Gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.6.40)$$

$$\varepsilon_{xz} = \Gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (2.6.41)$$

$$\varepsilon_{yz} = \Gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (2.6.42)$$

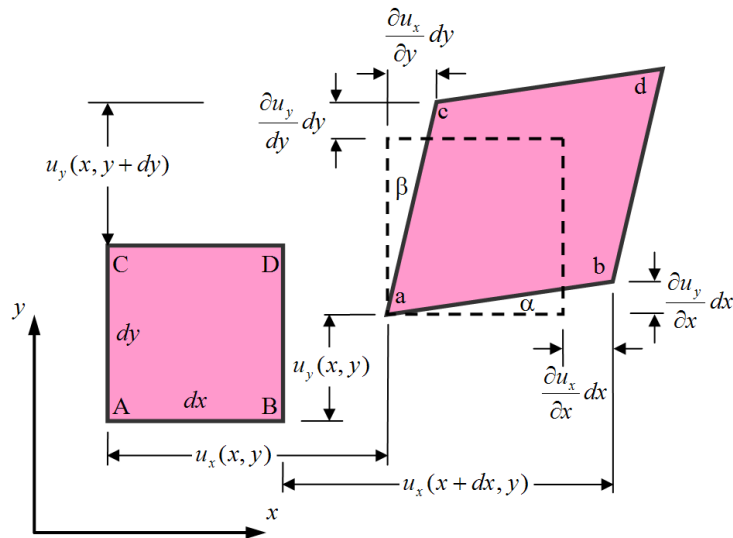


Figura 2.9: Deformación geométrica en dos dimensiones. (Sanpaz, 2008)

2.6.5. Tensor de Deformación

De la misma forma que al tensor de esfuerzo, es posible representar las deformaciones como un tensor en el cual los elementos de la diagonal contribuyen a una deformación volumétrica, mientras que los otros elementos contribuyen a la deformación cortante. Utilizando como componentes las relaciones de ecuaciones (2.6.37)-(2.6.42), se deriva el tensor siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{xy} & \varepsilon_y & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{xz} & \Gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.6.43)$$

Del tensor (2.6.43) se obtiene la expresión siguiente para la deformación volumétrica como:

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.6.44)$$

La ecuación (2.6.44) representa la traza del tensor (2.6.43), el cual representa una medida de la deformación volumétrica de la roca. Es importante mencionar que debido a que la traza es un invariable en cualquier matriz, entonces la deformación volumétrica también es un invariante, por lo que si el sistema de coordenadas cambiara, la traza del tensor en el nuevo sistema de coordenadas sigue teniendo el mismo valor. Elegir una ecuación constitutiva depende de los cambios de la deformación, magnitud de los esfuerzos y de la tasa de aplicación de esfuerzos, entre otros factores.

2.6.6. Ecuación constitutiva: relación esfuerzo-deformación

En física e ingeniería, una ecuación constitutiva es una relación entre dos cantidades físicas que son específicas de un material o sustancia, y aproxima una respuesta del material hacia un estímulo externo, que usualmente son fuerzas. En este caso la ecuación constitutiva determinará la deformación de un sólido como respuesta de un esfuerzo aplicado. La relación constitutiva más sencilla para sólidos es la de modelar un material isótropo con elasticidad lineal, tal como se muestra en la **figura (2.10)**, en la que los esfuerzos y deformaciones están relacionados linealmente por un coeficiente constante y la deformación es reversible. Esto se conceptualiza mediante la Ley de Hooke que establece:

$$F = -K\Delta x \quad (2.6.45)$$

La ecuación (2.6.45) sirve para establecer una relación lineal entre una fuerza, F , aplicada a un resorte y el desplazamiento del resorte, Δx , a distintas fuerzas donde la constante de proporcionalidad, K , determina la medida en que se va a deformar el resorte acorde a una fuerza aplicada. Una prueba mecánica real se presenta en la **figura (2.11)** donde se muestra como se comporta una roca bien cementada, en la cual durante un rango de esfuerzos aplicados se observa un comportamiento elástico. Conforme un esfuerzo axial es aplicado a la roca tal como se muestra en la figura (2.11), al inicio se presenta una curvatura debido a una diferencia de carga que ocurre por el cierre de microfracturas. Una vez que esas microfracturas están cerradas (aproximadamente a un esfuerzo de 9 MPa en este ejemplo), la roca exhibe un comportamiento elástico lineal hasta que alcanza un esfuerzo cerca de 45 MPa. A este punto, el esfuerzo aplicado a la roca es tan largo que empieza a dañar a la roca en forma permanente o dicho de otra forma, presenta una deformación plástica. Este último comportamiento ya no representa un comportamiento lineal pero si el de una roca real y es posible alcanzar este estado en diversas operaciones. La pendiente que se muestra en la figura (2.10) y figura (2.11) para el comportamiento elástico es el Módulo de Young, E .



Figura 2.10: Ilustración de la ley constitutiva elástica. En la figura izquierdo se muestra un modelo físico análogo, en el centro, modelos de roca ideal y en la derecha, modelos de roca real. (Zoback, 2007)

Antes de realizar la analogía de la Ley de Hooke y usarla es necesario entender los coeficientes que se usan normalmente en geomecánica. Para esto considera un sólido prismático con longitud L al cual se le aplica un esfuerzo σ_{33} en la dirección 3 (**figura (2.12)**). La cara del fondo del objeto no se permite mover en la dirección de 3 pero puede expandirse hacia los lados. Las otras cuatro caras son libres de moverse en todas direcciones. Notesé que la cara de arriba también se deforma en las direcciones 1 y 2. El Módulo de Young se define como la relación entre el esfuerzo aplicado, σ_{33} , y la deformación resultante (en la dirección del esfuerzo aplicado), ε_{33} .

$$E = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} \quad (2.6.46)$$

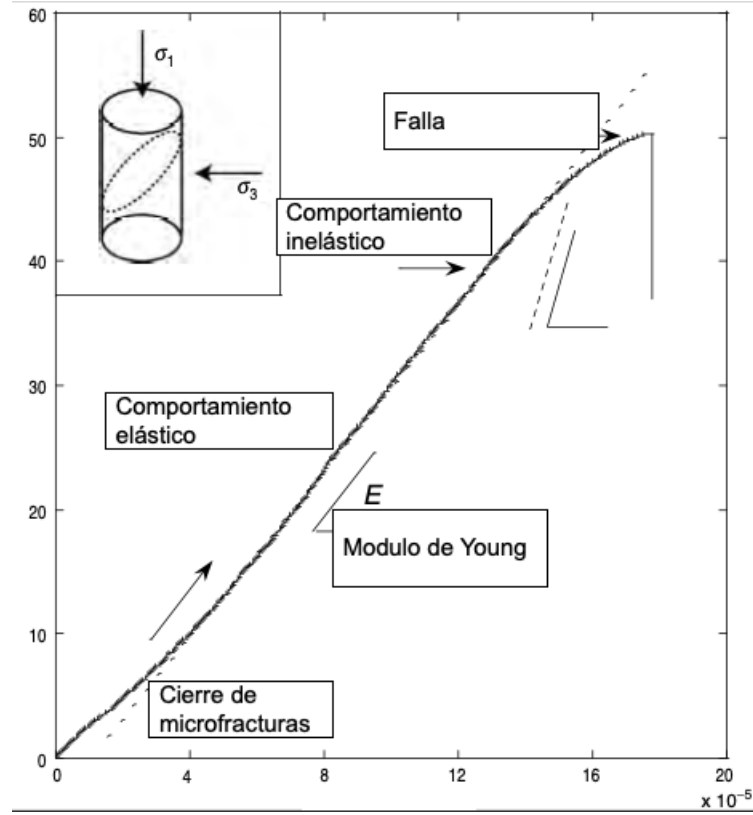


Figura 2.11: Datos típicos de laboratorio de pruebas esfuerzo-deformación para rocas bien cementadas, en condiciones de deformación. (Zoback, 2007).

La ecuación (2.6.46) representa el Módulo de Young, el cual mide la rigidez de un material sólido. Notesé que si se mantiene constante el valor del esfuerzo, σ_{33} , y se varía la deformación, ϵ_{33} , se obtiene que en valores altos de deformación se tendrían valores bajos del Módulo de Young, por lo que se requiere menos esfuerzo para tener estas deformaciones. En el caso contrario, valores bajos de deformación crean valores altos del Módulo de Young, lo cual se interpreta que como que el sólido requiere mayor esfuerzo para deformarse. Como se menciona al inicio de este capítulo, el fenómeno de erosión causa que la roca pierda masa y entonces las propiedades mecánicas carezcan de valor, por lo que tomando en cuenta la ecuación (2.6.1) y considerando que el parámetro geomecánico es igual al Modulo de Young, $p_g = E$, se tiene que:

$$E = \bar{E}(1 - \phi) \tag{2.6.47}$$

De la ecuación (2.6.47) se tiene que \bar{E} es el módulo de Young de la matriz, mientras que E es el módulo de Youngo del medio poroso. Si se observa la **figura (2.12)** se observa que el Módulo de Young se obtiene de manera uniaxial, o sea cuando se aplica un esfuerzo solo en una dirección, pero en realidad cuando se tiene un objeto tridimensional la deformación no ocurre solamente en un eje. Es decir, se requiere una relación que mida la deformación relativa de un eje con respecto a los otros ejes para tener una medida de la variación de la deformación en diferentes direcciones. Es muy probable que el sólido tenga que alargarse en la dirección perpendicular al esfuerzo aplicado. La relación de Poisson se define como la división negativa entre la deformación perpendicular al esfuerzo aplicado, ϵ_{11} , (ó ϵ_{22}) y la deformación en la dirección del esfuerzo aplicado ϵ_{33} .

$$v_p = -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} \tag{2.6.48}$$

Otra forma de ver la ecuación (2.6.48) es como la relación entre la deformación latitudinal y la deformación longitudinal. De manera general el rango de valores que se tiene para la relación de Poisson se encuentra entre 0 y $\frac{1}{2}$. Otros parámetros usados en elasticidad lineal son los parámetros de Lamé el cual también caracterizan el comportamiento elástico lineal de un sólido isótropo en deformaciones pequeñas. El primero es conocido como el primer parámetro de Lamé (λ_l), los cuales también caracterizan por completo el comportamiento elástico lineal de un sólido isótropo en deformaciones pequeñas. El segundo parámetro es el módulo de corte (G) el cual representa la relación entre el esfuerzo de corte (σ_{12}) y la deformación del sólido (ε_{12}) debido al cizallamiento. El módulo de corte es una medida análoga al módulo de Young, con la única diferencia que el primero es para esfuerzos cortantes mientras que el segundo es para esfuerzos normales. El módulo de corte se define como:

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}}{\varepsilon_{12}} \right) \tag{2.6.49}$$

Las constantes elásticas tienen relaciones entre ellas (Fjaer (2019)); basta con conocer dos para obtener una nueva. Por lo que los parámetros de Lamé también se definen como:

$$\lambda_l = \frac{v_p E}{(1 + v_p)(1 - 2v_p)} \tag{2.6.50}$$

y

$$G = \frac{E}{2(1 + v_p)} \tag{2.6.51}$$

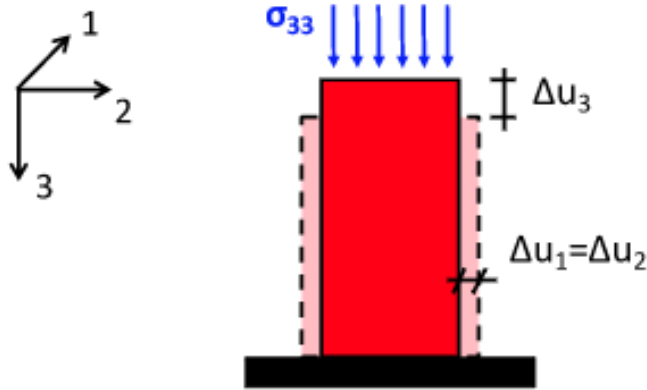


Figura 2.12: Compresión de un sólido con comportamiento isótropico y elasticidad lineal por medio de un esfuerzo no confinado. (Espinoza, 2017)

Con estos parámetros es posible obtener una relación constitutiva entre la deformación y el esfuerzo en tres dimensiones. La primer suposición que se emplea es que el medio se deforma de la misma manera sin importar las direcciones; cuando un objeto se comporta así, se dice que es un medio isótropo. El considerar un medio isótropo en tres direcciones simplifica las ecuaciones, ya que solo se tendrá un módulo de Young y una relación de Poisson para las tres direcciones. Considerando que el medio es isótropico y que el comportamiento de la roca es elástica, se obtiene que:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} \tag{2.6.52}$$

y

$$v_p = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} \quad (2.6.53)$$

La deformación en la dirección ε_{11} debido a los esfuerzos en las tres direcciones principales:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11\sigma_{11}} + \varepsilon_{11\sigma_{22}} + \varepsilon_{11\sigma_{33}} \quad (2.6.54)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.6.52) y (2.6.53) en la ecuación (2.6.54) se obtiene:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\sigma_{22}v_p}{E} - \frac{\sigma_{33}v_p}{E} \quad (2.6.55)$$

Con la ecuación (2.6.55), la generalización de las ecuaciones de los módulos de Young y relaciones de Poisson en todas direcciones dan como resultado:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\sigma_{22}v_p}{E} - \frac{\sigma_{33}v_p}{E} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\sigma_{11}v_p}{E} - \frac{\sigma_{33}v_p}{E} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\sigma_{11}v_p}{E} - \frac{\sigma_{22}v_p}{E} \end{cases} \quad (2.6.56)$$

Para los esfuerzos cortantes con la ecuación (2.6.49) llegaría a:

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \\ \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \end{cases} \quad (2.6.57)$$

Si se substituye la definición (2.6.51) de la ecuación anterior (2.6.57) se convierte a:

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}(1+v_p)}{E} \\ \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}(1+v_p)}{E} \\ \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}(1+v_p)}{E} \end{cases} \quad (2.6.58)$$

Las ecuaciones (2.6.56) y (2.6.57) se representan de forma matricial (conocida como notación de Voigt) de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{v_p}{E} & -\frac{v_p}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_p}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{v_p}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_p}{E} & -\frac{v_p}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v_p)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v_p)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v_p)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (2.6.59)$$

De forma matricial se tiene: $\varepsilon = D\sigma$; si se deseara expresar las ecuaciones (2.6.56) y (2.6.57) de tal forma que el esfuerzo sea la variable dependiente, entonces se obtiene la inversa de D :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v_p)(1-2v_p)} \begin{bmatrix} 1-v_p & v_p & v_p & 0 & 0 & 0 \\ v_p & 1-v_p & v_p & 0 & 0 & 0 \\ v_p & v_p & 1-v_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v_p)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v_p)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v_p)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (2.6.60)$$

Usando la ecuación (2.6.50) y (2.6.51), y substituyendo a la ecuación (2.6.60) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = (\lambda_l + 2G)\varepsilon_{11} + \lambda_l\varepsilon_{22} + \lambda_l\varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} = (\lambda_l + 2G)\varepsilon_{22} + \lambda_l\varepsilon_{11} + \lambda_l\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} = (\lambda_l + 2G)\varepsilon_{33} + \lambda_l\varepsilon_{22} + \lambda_l\varepsilon_{11} \\ \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \\ \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} \end{array} \right. \quad (2.6.61)$$

La ecuación (2.6.61) se representa de manera más compacta como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda_l\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.6.62)$$

El parámetro δ_{ij} de la ecuación (2.6.62) representa el delta de Kronecker, que es una función de dos variables, el cual cumple con las características siguientes:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.6.63)$$

2.6.7. Esfuerzo efectivo

Las discusiones previas de la roca y sus propiedades mecánicas ignoran el hecho de que son porosas y que están llenas de fluidos que ejercen una presión sobre la roca. El fluido que se encuentra en el poro es usualmente agua, aceite y/o gas. El fluido que se encuentra en los poros afecta la forma en que fallan las rocas: debido al efecto mecánico que genera la presión del poro y a la interacción química entre la roca y el fluido. En este trabajo solo se discutirá el primer caso. Con respecto al efecto mecánico generado por la presión del poro, es plausible mencionar que esta presión la cual actúa hacia fuera, o de manera perpendicular, en algún momento actúa como un esfuerzo de tensión. Sin embargo, en una roca con comportamiento isótropico, este efecto debe ser el mismo en cualquiera de las tres direcciones ortogonales. De esta manera Terzaghi (1936), propuso que la falla de una roca se controlará mediante los esfuerzos efectivos, σ' .

Las consideraciones que utilizó para desarrollar este principio son las siguientes:

1. El suelo es homogéneo (uniforme en composición) e isótropico (misma propiedad física en dirección).
2. El suelo esta totalmente saturado de un fluido.
3. Las partículas de sólido son incompresibles.
4. La compresión y el flujo ocurren en una dirección.
5. Las deformaciones en el suelo son relativamente pequeñas.
6. La Ley de Darcy es válida para todos los gradientes hidráulicos.
7. El coeficiente de permeabilidad y coeficiente de compresión volumétrica permanecen constante durante el proceso.
8. Existe una relación única, independiente del tiempo, entre el esfuerzo efectivo y la porosidad.

En este trabajo las suposiciones 7 y 8 se modificarán debido a que la formación se someterá a un proceso donde la caída de presión e incremento de porosidad generan un cambio de permeabilidad y compresión volumétrica en el medio. Para entender este concepto, observa en la **figura (2.13)** puede observarse que existe un medio poroso saturado con agua, el cual está sujeto a un tensor de esfuerzos total y a la presión de poro. El tensor de esfuerzos total es como se muestra en la ecuación (2.6.11), mientras que la presión de poro solo ejerce esfuerzos normales, ya que la presión de los fluidos no actúa de manera cortante; se describe con la expresión siguiente:

$$p_p = \begin{bmatrix} p_p & 0 & 0 \\ 0 & p_p & 0 \\ 0 & 0 & p_p \end{bmatrix} \quad (2.6.64)$$

Otra forma de expresar a la ecuación (2.6.64) es como $p_p \delta_{ij}$ donde δ_{ij} , representa el delta de Kronecker. La diferencia entre el tensor de esfuerzos y presión del poro tendrá como resultado el tensor esfuerzos que soportan los granos de rocas por si mismo, a este esfuerzo se le conoce como esfuerzo efectivo. Así que el esfuerzo efectivo descompone los esfuerzos que actúan en la roca en un sistema de esfuerzos internos que se aplican al medio poroso. Entonces utilizando las ecuaciones (2.6.11) y (2.6.64) se obtendrá la expresión siguiente:

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_p & 0 & 0 \\ 0 & p_p & 0 \\ 0 & 0 & p_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p_p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p_p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p_p \end{bmatrix} \quad (2.6.65)$$

Pero al igual que el modulo de Young, conforme el fenómeno de arenamiento empiece a erosionar la roca, entonces los parámetros geomecánicos carecen de valor. Introduciendo la ecuación (2.6.1) en la ecuación (2.6.65) se obtendrá:

$$\sigma' = (1 - \phi) \bar{\sigma}' = (1 - \phi) \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p_p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p_p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p_p \end{bmatrix} \quad (2.6.66)$$

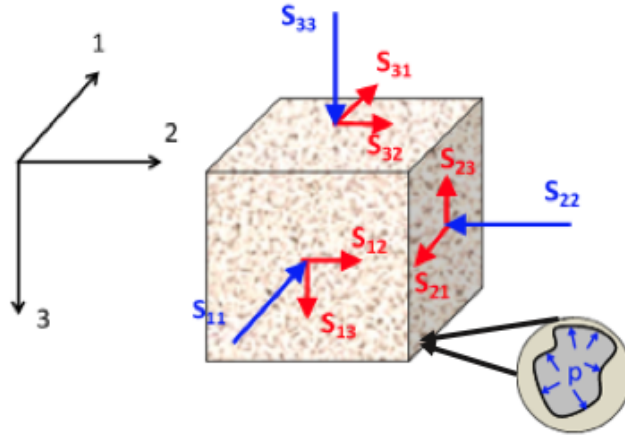


Figura 2.13: Tensor de Esfuerzo Efectivo (Espinoza, 2017)

2.6.8. Círculos de Mohr

Los círculos de Mohr son una representación gráfica en dos dimensiones del plano de esfuerzos que actúa sobre un medio. Esta representación gráfica es muy útil, ya que te permite visualizar la relación entre los esfuerzos normales y esfuerzos cortantes que actúan en varios planos en un punto del medio sometido a esfuerzos. Se tiene la siguiente **figura (2.14)** en la que se muestra una prueba “triaxial” en la que actúan dos esfuerzos sobre un cuerpo de roca. Cuando la fuerza compresiva generada por los esfuerzos sobrepasa la resistencia de compresión de la roca, la roca se fractura y crea un plano de falla. Por lo que los círculos de Mohr descomponen la fuerza compresiva en un esfuerzo normal y un esfuerzo cortante que actúan sobre el plano de falla.

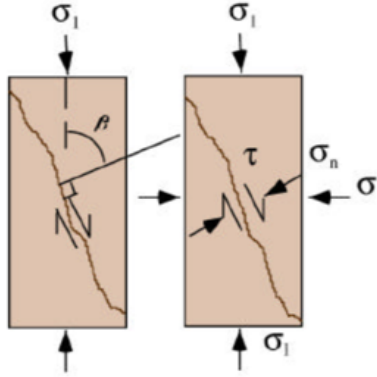


Figura 2.14: Diagrama de esfuerzos de una prueba triaxial. (Zoback, 2017)

Se tiene un esquema como el de la **figura (2.15)**, en el que se observa que el cuerpo de roca está sometido a una situación similar al de una prueba “triaxial”. De acuerdo a la segunda Ley de Newton, que estipula que el conjunto de fuerzas resultantes que actúan en cuerpo es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a} \quad (2.6.67)$$

De la figura (2.15), si se requiere obtener la relación entre las esfuerzos generados en las Áreas A_x y A_y considerando deformaciones muy pequeñas, la aceleración se aproxima a cero por lo que la ecuación (2.6.67) se iguala a cero. Evaluando el equilibrio de fuerzas en el eje x:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_x = -\sigma_x A_x - \tau_n A_n \text{sen}(\theta) + \sigma_n A_n \text{cos}(\theta) = 0 \quad (2.6.68)$$

Y para el equilibrio de fuerzas en el eje y:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_y = -\sigma_y A_y + \tau_n A_n \text{cos}(\theta) + \sigma_n A_n \text{sen}(\theta) = 0 \quad (2.6.69)$$

Donde A_n es el área normal donde actúa el esfuerzo normal (σ_n) al plano inclinado a θ grados. Considerando que $A_x = A_n \text{cos}(\theta)$ y que $A_y = A_n \text{sen}(\theta)$, reescribiendo las ecuaciones (2.6.68) y (2.6.69), y despejando A_n se tiene:

$$-\sigma_x \text{cos}(\theta) - \tau_n \text{sen}(\theta) + \sigma_n \text{cos}(\theta) = 0 \quad (2.6.70)$$

$$-\sigma_y \text{sen}(\theta) + \tau_n \text{cos}(\theta) + \sigma_n \text{sen}(\theta) = 0 \quad (2.6.71)$$

Multiplicando $\text{cos}(\theta)$ con la ecuación (2.6.70), $\text{sen}(\theta)$ con la ecuación (2.6.71) y sumando ambas se llega:

$$-\sigma_x \text{cos}^2(\theta) - \tau_n \text{cos}(\theta) \text{sen}(\theta) + \sigma_n = 0 \quad (2.6.72)$$

Y considerando las relaciones trigonométricas siguientes:

$$\text{cos}^2(\theta) = \frac{1 + \text{cos}(2\theta)}{2} \quad (2.6.73)$$

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \text{cos}(2\theta)}{2} \quad (2.6.74)$$

Se obtiene:

$$\sigma_n = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos(2\theta) \tag{2.6.75}$$

Si se analizan las ecuaciones (2.6.70) y (2.6.71), se observa que para obtener el esfuerzo cortante en el plano de la figura (2.15) se debe de multiplicar por $\text{sen}(\theta)$ con la ecuación (2.6.70) y $\text{cos}(\theta)$ con la ecuación (2.6.71) para restarlos y obtener:

$$\tau_n = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \text{sen}(2\theta) \tag{2.6.76}$$

Las ecuaciones (2.6.75) y (2.6.76) representan ecuaciones paramétricas que se utilizarán para formar los círculos de Mohr tal como el de la **figura (2.16)** y tener una idea gráfica acerca del fenómeno. En esas ecuaciones σ_n y τ_n son las coordenadas mientras que 2θ es el parámetro, por lo que se obtendría la ecuación siguiente:

$$\left[\sigma_n - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_n^2 = \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 \tag{2.6.77}$$

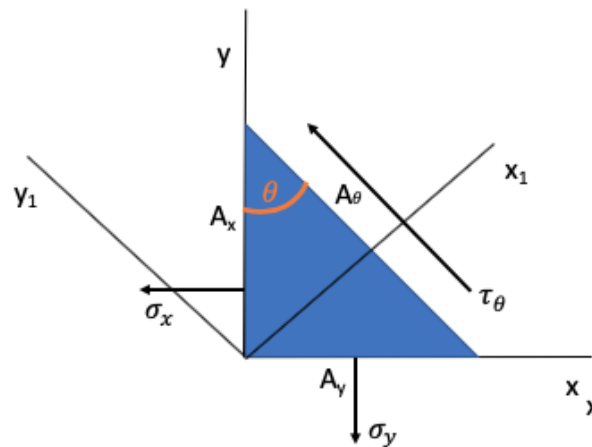


Figura 2.15: Objeto sujeto a esfuerzos normales y cortantes.

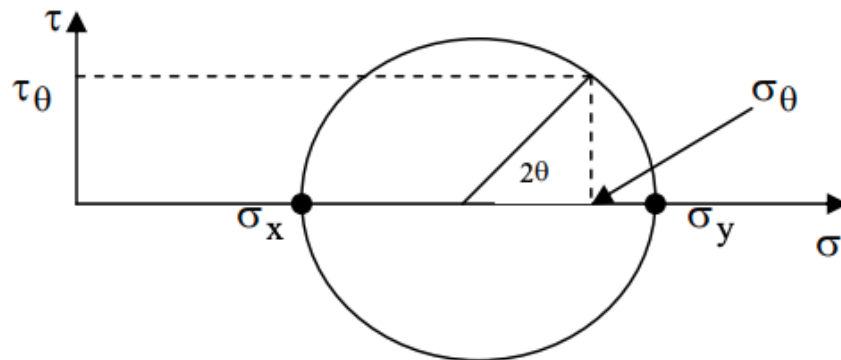


Figura 2.16: Círculo de Mohr en dos dimensiones. (Antico y Pezotti, 2008)

2.6.9. Criterio de falla de Mohr-Coulomb

Cuando se discute acerca de la resistencia de la roca, este se refiere a la habilidad del material de resistir la deformación y de su fracturamiento, por medio de las propiedades de cohesión y fricción interna. El criterio más simple y usado es el propuesto por Coulomb C. A. (1973), mediante sus estudios experimentales de fricción, encontró que la falla de la roca ó el suelo toma lugar a lo largo del plano debido al esfuerzo cortante (τ). Para la falla de superficies soldadas, encontró dos fenómenos: El primero; donde la falla se resiste por una fuerza de tipo fricción donde la magnitud es proporcional al esfuerzo normal (σ) que actúa en el plano y la multiplicación de una constante (μ_f), y el segundo; que la falla de la roca no se manifestaba hasta que se venciera una fuerza inicial o bien una fuerza interna cohesiva del material (C). El resultado fue encontrar un modelo matemático que obtenga la combinación de valores de esfuerzos cortantes y normales que produzcan una falla en el material. De la **figura (2.17)** se observa la representación del criterio de Mohr-Coulomb, la realización de esquema se obtiene a través de una prueba triaxial o de corte, siendo la primera la más común, donde se obtienen los ángulos de plano de falla y la cohesión de la roca. Al gráficarlos se obtiene un diagrama similar al de la figura (2.17), donde se obtiene los puntos del círculo de Mohr, si la línea recta toca el círculo entonces la roca falla. De la figura (2.17) se obtiene la relación siguiente:

$$\tau = \sigma \tan(\phi) + C \quad (2.6.78)$$

La ecuación (2.6.78) representa el criterio de falla de Mohr-Coulomb, el cual describe una relación lineal entre esfuerzo cortante y normal, donde c es la cohesión, e intercepta en el eje y , tal parámetro refleja que en la ausencia de una esfuerzo normal, se requiere un esfuerzo cortante finito para iniciar una falla en la roca.

El ángulo que se forma en el eje σ está dado por ϕ que representa el ángulo de la fricción. Savage et al. (1996) argumentaron que este efecto es causado por las fuerzas de fricción actuando a lo largo de porciones de microescala en la superficie de la fractura. En efecto es posible establecer el criterio de Mohr-Coulomb en la forma siguiente:

$$\tau = \sigma \mu_f + C \quad (2.6.79)$$

La ecuación (2.6.79) incluye el término de μ_f que es el coeficiente de fricción, el cual depende de la pendiente de la gráfica. Empleando la figura (2.17), el criterio de Mohr-Coulomb establece que un estado de esfuerzos inferior al establecido por la línea AL no generará una falla en ningún plano. Si los esfuerzos principales son tales que “tocan” la línea de falla, entonces la roca fallará de forma cortante. Círculos que se extienden arriba de la línea de falla no están permitidos porque el estado de falla en la roca podría ocurrir antes de que la roca haya desarrollado ese estado de esfuerzos. De manera matemática la falla de la roca no ocurrirá hasta que :

$$\tau > \sigma \mu_f + C \quad (2.6.80)$$

Otra forma (muy útil) de representar la ecuación (2.6.78) es observar la figura (2.17), en la que se tiene que $|CP| = (|AO| + |OC|) \text{sen}(\phi)$ y considerando el cambio de σ_x y σ_y por σ_1 y σ_3 , se obtiene:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \left[\cot(\phi)C + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \text{sen}(\phi) \quad (2.6.81)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \cos(\phi)C + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{sen}(\phi) \quad (2.6.82)$$

Entonces si se consideran los términos siguientes:

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Sustituyendo estos términos en la ecuación (2.6.82) el criterio de falla se representaría como:

$$\tau_m = \cos(\phi)C + \sigma_m \text{sen}(\phi) \quad (2.6.83)$$

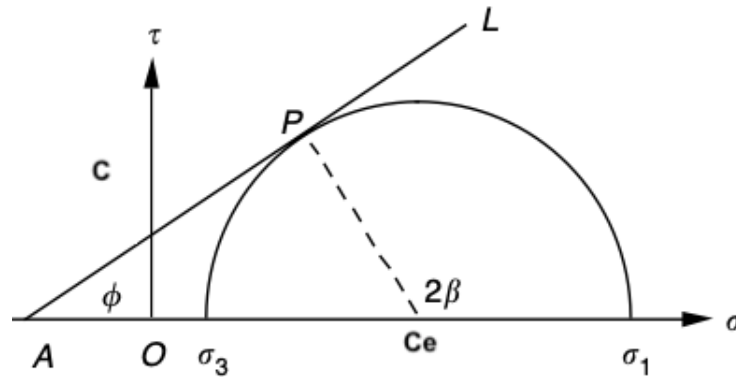


Figura 2.17: Diagrama de Mohr, con curva de falla con la línea AL. La falla ocurrirá en este plano específico con un ángulo β , marcado por la línea CP. (Jaeger et al, 2007)

2.6.10. Cohesión

La cohesión tiene un significado físico y uno geológico, donde el concepto de interés es el geológico, ya que este concepto tiene relación con los yacimientos que tienden a producir arena, o bien yacimientos relativamente jóvenes que no se sometieron a los procesos físicos-químicos que desarrollan una fuerte cohesión entre los granos de roca. Así que la cohesión es el componente de la resistencia a esfuerzos cortantes de una roca, el cual es independiente de la fricción interpartícula. Esto quiere decir que la fricción entre granos de roca no se considera parte de la cohesión, por lo que los fenómenos de estática no cuantifican esta definición. De manera general se distinguen dos tipos de cohesión, que cual son la verdadera y aparente, conformadas como sigue:

- La cohesión verdadera es causada por:

1. Fuerzas electroestáticas en arcillas sobreconsolidadas.
2. Cementación, causada por la precipitación de minerales durante la diagénesis, tales como Fe_2O_3 , $CaCO_3$, $NaCl$, etc.

- La cohesión aparente se genera por:

1. Presión capilar negativa (causada por el fenómeno de mojabilidad).
2. La respuesta de la presión del poro generada durante la producción.

Plumb et al. (1994) encontró una relación entre la cohesión y la porosidad, donde menciona que a menor porosidad (las cuales tienden a pertenecer a rocas de edad madura) la cohesión tiende a ser mayor, o bien la roca está bien compactada, debido a que se sometió a más procesos físicos-químicos que generaron un proceso de cementación adecuado. Por el contrario, las rocas con porosidad alta, las cuales tienden a ser rocas con edad relativamente joven, no tienden a estar bien compactadas debido a que no estuvieron sometidas por el tiempo necesario para una cementación adecuada; por esto algunas veces los yacimientos presentan flujo de granos sólidos cuando se empiezan a producir por primera vez. Es importante entender esta relación, ya que la variación de la porosidad debido a la producción de sólidos que provienen de la matriz conforme avanza pasa el tiempo de producción, se relaciona con el incremento en la debilidad de la formación..

De acuerdo con este análisis, Rumpf et al. (1995) describe una simple ley de daño, en el que describe que la cohesión tiene una relación con la porosidad:

$$C = \bar{C}(1 - \phi) \quad (2.6.84)$$

La ecuación (2.6.84) ya tiene introducido el concepto del daño interno generado por el fenómeno de erosión, o bien el que representa la ecuación (2.6.1). Si este criterio es aplicado al criterio de falla de Mohr-Coulomb y se sustituye en la ecuación (2.6.79), se llega a:

$$\tau = \sigma \mu_f + \bar{C}(1 - \phi) \quad (2.6.85)$$

La ecuación (2.6.85) se refiere al criterio de falla de Mohr-Coulomb que permite analizar la falla conforme la roca está perdiendo matriz de roca, la porosidad aumenta y la cohesión empieza a disminuir.

2.6.11. Esfuerzos Locales

La teoría de esfuerzos describe a un yacimiento bajo a un sistema de esfuerzos in-situ (esfuerzo vertical (σ_v) esfuerzo horizontal máximo (σ_H) y esfuerzo horizontal mínimo (σ_h)). El problema del sistema de esfuerzos in-situ es que no concuerda con el sistema de esfuerzos que se desarrolla en la perforación del pozo. Al perforar se altera de forma física, química, termodinámica e hidráulica al sistema de esfuerzos alrededor del yacimiento y el sistema de esfuerzos in-situ se redistribuye a un sistema de esfuerzos locales. El nuevo sistema de esfuerzos local se encuentran tal como en la **figura [2.18]**, donde muestra los esfuerzos alrededor de la pared del pozo descritas por el: esfuerzo radial (σ_r), esfuerzo tangencial (σ_θ) y esfuerzo axial (σ_a).

De acuerdo a Pasic et al. (2007) los esfuerzos locales que resultan de la combinación de los esfuerzos in-situ y efectos hidráulicos en la pared del pozo ($r = r_w$) se describen de la forma siguiente:

$$\sigma_r = p_{wf} \quad (2.6.86)$$

$$\sigma_\theta = (\sigma_x - \sigma_y) - (\sigma_x - \sigma_h) \cos(2\theta) - p_{wf} \quad (2.6.87)$$

De acuerdo a las ecuaciones anteriores y la figura [2.18], se observa que el esfuerzo radial (σ_r) actúa en todas las direcciones perpendiculares del pozo, ó bien depende de la presión de fondo del pozo, mientras que el esfuerzo tangencial (σ_θ) es una combinación de esfuerzos que rodean al pozo y es el más perturbado durante la producción.

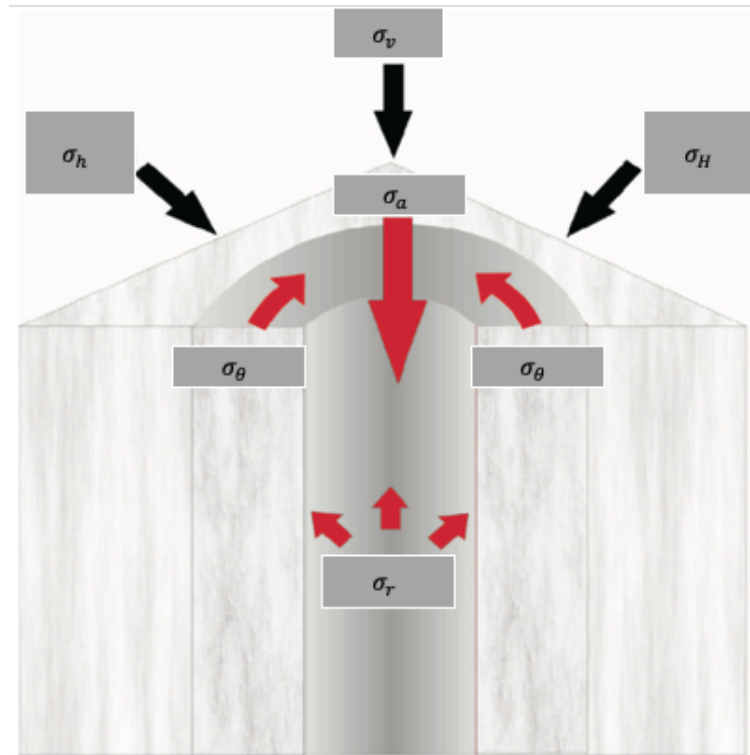


Figura 2.18: Pozo con un sistema de esfuerzos locales alrededor del pozo y yacimiento. (Pasic et al. 2007)

Capítulo 3

Modelo Hidromecánico

Esta sección examina los aspectos hidromecánicos de la producción de arena y fluidos. Los procesos que se encuentran en la producción de arena están asociados con el transporte de sólidos y fluido, interacción roca/fluido, y deformación de la roca. En esta sección se describe el primer y tercer fenómeno. La inestabilidad hidromecánica se debe a la erosión interna de la roca, la cual se manifiesta debido al desacoplamiento y transferencia de las partículas de sólidos en la roca, causadas la fuerza de fricción generada por el fluido en contacto con las partículas desprendidas de sólidos. La propuesta presentada la desarrollaron Vardoulakis et al. (1996), el cual menciona que este estudio es determinístico y está basado en la teoría de mezcla de tres fases para un medio continuo, que se conforman por sólidos, sólidos móviles y fluido. En la deformación de la roca se considera que el flujo es radial y hay una simetría radial alrededor del eje del pozo; bajo estas condiciones cualquier deformación en el pozo se considera en un plano normal al eje del pozo. En este trabajo el esqueleto del sólido es deformado por el campo de esfuerzos, y la deformación no afecta las condiciones de flujo.

3.1. Modelo matemático

Se considera un elemento de volumen de un medio poroso saturado (dV), tal como se muestra en la **figura (3.1)**. El volumen está compuesto de tres partes: Sólido (s), fluido (ff), y sólidos móviles (fs) con masa dM_s , dM_{ff} , dM_{fs} y volumen dV_s , dV_{ff} y dV_{fs} , respectivamente, tal como se muestra en la figura (3.1). El símbolo dV_v indica el volumen de los espacios de poros interconectados, que está saturado con una mezcla de fluido y partículas móviles:

$$dV_v = dV_{ff} + dV_{fs} \quad (3.1.1)$$

Se considera que las partículas móviles son partículas en suspensión que se mueven con el fluido. Cualquier partícula libre que está atrapado en el espacio poroso será considerado de la fase sólida. También se considera que el fluido y las partículas móviles tienen la misma velocidad en cualquier instante. La parte sólida se considera inamovible. De acuerdo con estas premisas se obtiene:

$$v_i^{fs} = v_i^{ff} = \bar{v}_i \quad (3.1.2)$$

$$v_i^s = 0 \quad (3.1.3)$$

Lo anterior expresa que las partículas de sólidos solo presentan dos estados: el primero donde tienen velocidad cero y son consideradas como la parte sólida, y el segundo cuando se tiene la misma velocidad de fluido y se considera parte de la mezcla.

La fracción de volumen de los poros se expresa como porosidad absoluta:

$$\phi = \frac{dV_v}{dV} \quad (3.1.4)$$

La concentración de sólidos móviles está indicada de la forma siguiente:

$$c = \frac{dV_{fs}}{dV_v} \quad (3.1.5)$$

Se considera que las variables ϕ y c están en función de espacio (x_i) y tiempo (t). La ecuación (3.1.5) establece una relación entre los volúmenes del sólido móvil y volumen de la mezcla, por lo que será un término asociado a la saturación del medio poroso.

Las densidades de la fase de fluido (ρ_{ff}) y fase sólido móvil (ρ_{fs}), se definen en la forma siguiente:

$$\rho_f = \frac{dM_{ff}}{dV_{ff}} \quad (3.1.6)$$

$$\rho_s = \frac{dM_{fs}}{dV_{fs}} = \frac{dM_s}{dV_s} \quad (3.1.7)$$

Es importante mencionar que $\rho_s = \rho_{fs}$. La densidad parcial de la mezcla es:

$$\bar{\rho} = \frac{dM_{ff} + dM_{fs}}{dV_{ff} + dV_{fs}} \quad (3.1.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1.5), (3.1.6) y (3.1.7), en la ecuación (3.1.8) resulta en:

$$\bar{\rho} = (1 - c)\rho_f + c\rho_s \quad (3.1.9)$$

La ecuación (3.1.9) define la densidad de la mezcla, donde a mayor concentración existe una mayor influencia del sólido. Definiendo la densidad parcial de la fase del sólido móvil:

$$\rho_{fs} = \frac{dM_{fs}}{dV} = c\phi\rho_s \quad (3.1.10)$$

La velocidad de descarga de la mezcla está definida como:

$$v_D = \frac{dV}{dSdt} \quad (3.1.11)$$

Donde dV es el volumen de flujo a través de la área seccional dS en un tiempo dt . La variable v_D refiere a la velocidad de Darcy, que representa la velocidad que tiene el flujo de un fluido través del medio poroso.

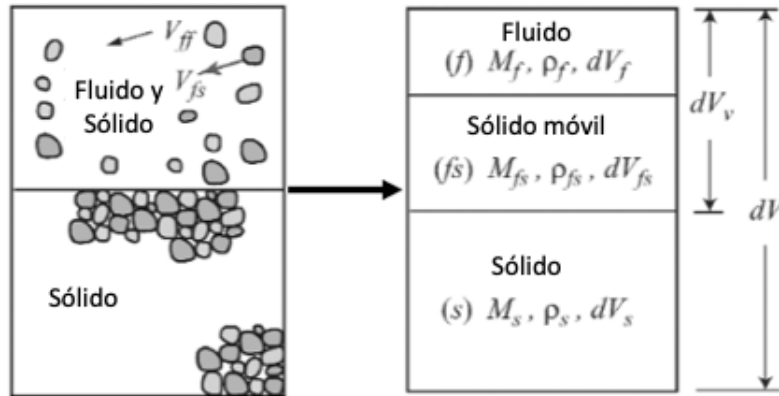


Figura 3.1: Representación de las fases en el volumen de control. (Wan, 2002)

3.2. Ley de Conservación de Masa

En esta sección se desarrollarán las ecuaciones de balance de materia para después modelar el flujo de la fase sólida, partículas móviles y fluido. La ley de conservación de masa postula que la materia en un sistema aislado no se crea ni se destruye, lo cual requiere que las cantidades de masa en tiempo y espacio, siempre sean las mismas.

3.2.0.1. Relación de la Masa con un Volumen de control

Se define el volumen de control con la siguiente letra Ω , con una superficie $\partial\Omega$. La ley de conservación de masa formula que el cambio de masa en Ω es igual a la diferencia entre la cantidad de la masa que entra al sistema Ω y la cantidad de masa que ha salido del sistema Ω . En este caso el volumen de control Ω es una roca porosa saturada de un fluido y sólidos móviles. Se define al volumen de control Ω con un volumen y posición fijo. La densidad relaciona la masa y volumen, y será propiedad tanto del sólido como del fluido:

$$\rho = \frac{m}{V_{\Omega}} \quad (3.2.1)$$

La densidad es una propiedad intensiva y está definida en cualquier región del sistema Ω , en el caso de que el yacimiento sea grande ó bien Ω sea grande, la densidad y la porosidad podrían variar. Si se divide Ω en partes muy pequeñas, esto aproximaría el problema tal que:

$$m_i = \rho_i V_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, N$$

Si se calcula la masa total del sistema, se obtiene:

$$m = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \rho_i V_i \quad (3.2.2)$$

¿En cuántas partes se tiene que dividir el sistema para que represente un medio continuo? La mejor respuesta es cuando se considera el máximo límite conocido, cuando $N \rightarrow \infty$, así que ahora:

$$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \rho_i V_i \quad (3.2.3)$$

La ecuación (3.2.3) es la definición de integral de volumen, por lo que la ecuación de masa contenida en todo el sistema se define:

$$m = \int_{\Omega} \rho dV \quad (3.2.4)$$

El subíndice Ω de la ecuación (3.2.4), representa que la integral esta definida con respecto volumen de control y dV es un elemento diferencial del sistema de volumen. La ecuación (3.2.4) se modifica cuando la heterogeneidad se introduce en las propiedades, con esto la densidad varía respecto al espacio y tiempo. Pero la masa ¿Comó variará? Resulta que la masa no varía respecto al espacio, ya que, en un principio se mencionó que Ω es un volumen de control fijo y la masa de la ecuación (3.2.4) representa la del todo el sistema, como conclusión la masa varía solo respecto al tiempo. Por lo que tomando en cuenta esto, se obtiene que:

$$m(t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) dV \quad (3.2.5)$$

Notesé que en la ecuación (3.2.5) no interviene la porosidad, debido a que esta ecuación nos sirve para modelar no solo el fluido y sólido móvil, sino también el sólido fijo.

3.2.0.2. Flujo de masa

El fluido y sólido móvil fluirán a través del medio poroso, con fluido y sólido móvil entrando y saliendo en un cierto rango de tiempo, por lo que es importante cuantificar cuanta masa entra y sale por las fronteras del volumen de control. Considerando que el fluido y sólido móvil viajan con una cierta velocidad (v) a través de una cierta área (A) se obtendrá:

$$F_m = \rho v A \quad (3.2.6)$$

En la ecuación (3.2.6): F_m refiere al flujo másico y resulta como una magnitud escalar, lo cual no es general en un sistema de flujo, ya que la velocidad se representa por una magnitud vectorial y el área es un plano en el cual el flujo de masa está atravesando. Es imperativo que sea magnitud vectorial. Si se cuantifica la cantidad de masa que atraviesa dicho plano, primero se debe plantear un esquema como el de la **figura (3.2)**, en que se observa como el plano está alineado a los ejes y y z , por lo que el vector velocidad solo se manifiesta en dirección de x , además de que se alinea al sentido positivo de la dirección contraria del eje x , entonces de manera correcta se obtiene:

$$F_m = -\rho(\vec{v} \cdot \vec{i})A_p = -\rho v_x A_p \quad (3.2.7)$$

La diferencia entre las ecuaciones (3.2.6) y (3.2.7) radica en la variable rapidez se formuliza de forma vectorial. Se tiene que tomar en cuenta que en este caso se supone que el plano donde pasa el flujo de masa se considero perpendicular al eje x , pero esto no siempre es correcto ya que el plano esta sujeto a tener cualquier forma arbitraria, por lo que si se requiere calcular el flujo másico se debe descomponer el vector de rapidez en las direcciones distintas a la que se tiene en este caso. Si se se toma en cuenta que la proyección del vector \vec{v} , que atraviesa un área perpendicular (A_p), respecto a la normal se obtiene con el producto punto entre estas mismas se tendrá:

$$F_m = -\rho(\vec{v} \cdot \vec{n})A_p \quad (3.2.8)$$

La ecuación (3.2.8) formula que el vector velocidad que se encuentra en la figura (3.2) entra en cualquier dirección, y con el producto punto del vector normal (\vec{n}) proyectará el valor final del vector velocidad con respecto al plano YZ , además para ajustar el sentido, el signo negativo se introduce para que que la ecuación (3.2.8) refiera a un flujo que esta de afuera hacia adentro. Por lo que la normal apunta hacia afuera y $-\vec{n}$ apunta hacia adentro . Dividiendo la superficie del plano en N elementos de pequeñas áreas donde se calcula el flujo a través de cada elemento, la ecuación (3.2.8) se transforma:

$$F_{mi} = -(\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i)\rho_i A_{pi} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N$$

Debido a que con esta ecuación se modelará el flujo total, entonces se suman los flujos de cada subdivisión de elementos en $\partial\Omega$ y se calcula el flujo neto como:

$$F_m = \sum_{i=1}^N F_{mi} = \sum_{i=1}^N -(\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i)\rho_i A_{pi} \quad (3.2.9)$$

Por lo que asumiendo la suma del límite de elementos para calcular el flujo neto, se tiene:

$$F_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N F_{mi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N -(\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i)\rho_i A_{pi} \quad (3.2.10)$$

Debido a que se habla del flujo total del sistema, entonces solo varía respecto al tiempo, y la ecuación (3.2.10) se convierte a:

$$F_m(t) = - \int_{\partial\Omega} \rho(v \cdot \vec{n})dA_p \quad (3.2.11)$$

La ecuación (3.2.11) expresa a el flujo másico a través de la superficie $\partial\Omega$ de un volumen de control Ω respecto a un cierto tiempo t . Debe de considerarse que \bar{v} , refiere a la velocidad intersticial, ó bien a la velocidad del fluido consideran el plano completo. Por lo que cuando se requiere conocer velocidad a través de medios porosos, la porosidad se debe de tomar en cuenta y convertirla a la velocidad de Darcy.

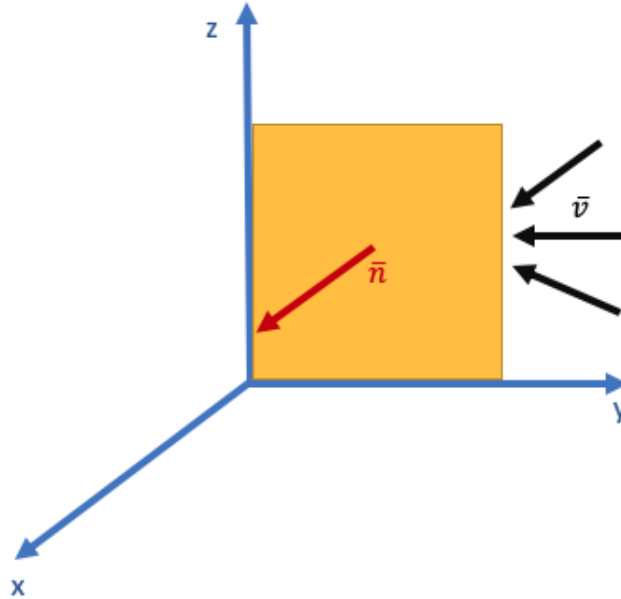


Figura 3.2: Flujo vectorial a través de un plano YZ.

3.2.0.3. Término fuente y/o sumidero

En la subsección anterior se obtuvo una ecuación que representa el flujo másico que aún no condensa el problema de arenamiento, porque no se calculan los sólidos móviles que se generan de la misma matriz de roca, los cuales pierden fuerza de cohesión cuando incrementa la erosión y porosidad. Esto sugiere que una cantidad de masa tiene que aparecer a lo largo del tiempo, como volumen de sólido inyectado, y al mismo tiempo una cantidad de matriz de roca (fija) se erosione. El parámetro que se encarga de formular lo mencionado, es el término fuente/sumidero, el cual es un término que considera el flujo másico externo del sistema e incluye la generación y producción de sólidos móviles. Este término se define de la forma siguiente:

$$q_m = \rho q \quad (3.2.12)$$

La ecuación (3.2.12) refiere a la cantidad de masa que entra a un sistema, pero no relaciona explícitamente que el sistema al que se inyectará o producirá es el sistema de volumen de control Ω . Por lo que se introduce variable (\bar{q}) que caracterizará la cantidad de volumen inyectado/producido de fluido, o sólido móvil por una unidad de tiempo, y una unidad de volumen roca (volumen de control). Lo que permite esta variable es que la ecuación (3.2.12) relacione explícitamente el sistema de volumen de control Ω , y se obtendrá:

$$q_m = \int_{\Omega} \rho \bar{q} dV \quad (3.2.13)$$

La **ecuación (3.2.13)** variará solo respecto al tiempo, ya que de forma espacial representa todo el volumen de control y este es fijo:

$$q_m(t) = \int_{\Omega} \rho \bar{q} dV \quad (3.2.14)$$

3.2.0.4. Forma integral de la conservación de la masa

Se analizará el volumen de control Ω bajo un cierto rango de tiempo $[t_0, t]$ (donde t_0 es constante y t es variable), donde la masa en cierto instante de tiempo se representa con la ecuación (3.2.5), por lo que $m(t) - m(t_0)$ determina el cambio de masa en un rango de tiempo. La cantidad de masa que entra en un instante es:

$$F_m(t) = - \int_{\partial\Omega} \rho(v \cdot \bar{n}) dA_p \quad (3.2.15)$$

Pero como se menciona, se requiere conocer la cantidad de masa que ha entrado al volumen de control en el rango de tiempo $[t_0, t]$. Durante dicho rango de tiempo el flujo de masa se mantuvo constante, por lo que la cantidad total de masa que ha entrado al sistema será:

$$m(t) - m(t_0) = (t - t_0) \cdot F_m \quad (3.2.16)$$

En el caso con el flujo de masa variable, se divide el rango de $[t_0, t]$ en N intervalos (dependiendo de la duración de los distintos flujos) y se suma el total:

$$\sum_{i=1}^N F_m(t_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (3.2.17)$$

Aproximando la suma de N intervalos a infinito ($N \rightarrow \infty$) se obtendrá:

$$m(t) - m(t_0) = \int_{t_0}^t F_m(T) dT \quad (3.2.18)$$

La ecuación solo incluye el flujo másico de la mezcla que existe en el medio poroso, pero falta introducir el término del flujo adicional en el sistema. Así que juntando las ecuaciones (3.2.18) y (3.2.14), se obtiene:

$$m(t) - m(t_0) = \int_{t_0}^t F_m(T) dT + \int_{t_0}^t q_m(T) dT \quad (3.2.19)$$

Sustituyendo las definiciones de cada variable, ó las ecuaciones (3.2.5), (3.2.11) y (3.2.14), y despejando el término del lado izquierdo que incluye el tiempo inicial se obtendrá:

$$\int_{\Omega} \rho(x, t) dV = \int_{\Omega} \rho(x, t_0) dV + \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \rho(x, T) \bar{q}(x, T) dV dT - \int_{t_0}^t \int_{\partial\Omega} \rho(x, T) (v(x, T) \cdot \bar{n}(x)) dA_p dT \quad (3.2.20)$$

La ecuación (3.2.20) expresa explícitamente la dependencia de las variables respecto a la distancia y tiempo. Dentro de esta ecuación, se obtiene la cantidad de masa a distintos tiempos, la cantidad de masa que entra debido al flujo de fluidos, y sólidos movibles en el yacimiento, así como la cantidad de masa que entra debido al término sumidero/fuente.

3.2.0.5. Forma diferencial de la conservación de masa

Para discretizar en diferencias finitas y desarrollar el modelo matemático del simulador se deben obtener ecuaciones en su forma diferencial, la ecuación (3.2.20) es una ecuación en su forma integral, pero usando esta ecuación y derivándola respecto a las variables dependientes se obtendría su forma diferencial.

Para los términos de masa se obtendrá:

$$\frac{d}{dt}m(t_0) = 0 \quad (3.2.21)$$

$$\frac{d}{dt}m(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dV = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t)) dV \quad (3.2.22)$$

Para las integrales de flujo másico y término fuente/sumidero se aplicará el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$f(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(T) dT \quad (3.2.23)$$

Entonces aplicando la ecuación (3.2.23) a (3.2.11) y (3.2.14):

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t F_m(T) dT = F_m(t) \quad (3.2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t q_m(T) dT = q_m(t) \quad (3.2.25)$$

La ecuación de balance de materia en su forma diferencial es:

$$\frac{d}{dt}m(t) = F_m(t) + q_m(t) \quad (3.2.26)$$

Y de forma explícita la ecuación (3.2.26) se escribe:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t)) dV = \int_{\Omega} \rho(x, T) \bar{q}(x, T) dV - \int_{\partial\Omega} \rho(x, T) (v(x, T) \cdot \bar{n}(x)) dA_p \quad (3.2.27)$$

Se observa que la ecuación (3.2.27) se opera a través de integrales de volumen y superficie, por lo que para homogeneizar los términos de superficie a volumen, se utiliza el Teorema de Gauss; el teorema relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de su divergencia en el volumen delimitado por dicha superficie, ó bien:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \bar{n} dA = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F dV \quad (3.2.28)$$

Utilizando la ecuación (3.2.27) para el término de flujo másico se obtendrá:

$$\int_{\partial\Omega} \rho(x, T) (\bar{u}(x, T) \cdot \bar{n}(x)) dA_p = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho(x, T) (v(x, T))) dV \quad (3.2.29)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2.29) en la ecuación (3.2.27) y ordenándolo, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t)) dV - \int_{\Omega} \rho(x, T) \bar{q}(x, T) dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho(x, T) (v(x, T))) dV = 0 \quad (3.2.30)$$

ó

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t)) - \rho(x, T) \bar{q}(x, T) + \nabla \cdot (\rho(x, T) (\bar{v}(x, T))) \right) dV = 0 \quad (3.2.31)$$

La ecuación (3.2.31) demuestra que sin importar la forma, tamaño y posición del volumen de control, el integrando debe ser exactamente igual a cero, y quitará la integral de volumen de la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(x, t)) = \rho(x, T)\bar{q}(x, T) - \nabla \cdot (\rho(x, T)\bar{v}(x, T)) \quad (3.2.32)$$

La ecuación (3.2.32) expresa la conservación de masa en su forma diferencial y es la ecuación que se utilizará para deducir las siguientes secciones. Hay que recordar que esta ecuación no es solo para modelar el flujo de fluidos y sólidos móviles, sino también para el sólido mismo, por lo que en la siguiente sección se harán consideraciones, las cuales se adaptarán a la ecuación (3.2.32) y se obtendrán ecuaciones que servirán para describir el comportamiento general del fenómeno de arenamiento. Debido a que la ecuación (3.2.32) es una ecuación más débil que la ecuación (3.2.20), ya que es una derivada, el medio debe ser continuo y si las propiedades, tal como: porosidad, y densidad son heterogéneas y con cambios abruptos, entonces la ecuación diferencial deja de carecer sentido. En consecuencia, en el simulador a desarrollar se propone que el medio es inicialmente homogéneo y sus cambios no son bruscos.

3.2.0.6. Ecuación de balance de materia de las fases

En esta sección se desarrollará la ecuación de masa para el sólido, fluido y sólido móvil utilizando la ecuación (3.2.32). Entonces, si se considera que:

$$\rho(x, t) = (1 - \phi)\rho_s \quad (3.2.33)$$

Se considera que la porosidad (ϕ) es dependiente del espacio y tiempo, tal como la densidad. Si se sustituye la ecuación (3.2.33) en la ecuación (3.2.32) se obtendrá:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s(1 - \phi)) = \rho_s\bar{q} - \nabla \cdot (\rho_s(1 - \phi)(\bar{v}_x)) \quad (3.2.34)$$

De la ecuación (3.2.34) se observa que las variables de densidad y porosidad, varían respecto a la distancia y tiempo, y estas solo se sustituyen en los términos de flujo másico en el tiempo. Tomando en cuenta que la velocidad del sólido (\bar{v}_x) es 0 se sustituye la ecuación (3.1.3) con la ecuación (3.2.34) y se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s(1 - \phi)) = \rho_s\bar{q} \quad (3.2.35)$$

En el fenómeno de arenamiento, el sólido móvil se genera cuando la matriz de roca pierde cohesión y empieza a desprenderse el sólido de este mismo medio, por lo que la ecuación (3.2.35) hace referencia a que la matriz de roca fija estará perdiendo sólido, y produciendo sólidos móviles. El parámetro \bar{q} representa el volumen de sólido que pierde la matriz por unidad de tiempo. Matemáticamente el lado derecho de la ecuación (3.2.35) se vuelve negativo, ya que se está perdiendo el sólido y esta parte perdida aparecerá en el sistema de sólidos móviles:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s(1 - \phi)) = -\rho_s\bar{q} \quad (3.2.36)$$

Considerando que ρ_s es constante a lo largo del tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi)) = -\bar{q} \quad (3.2.37)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \bar{q} \quad (3.2.38)$$

A partir de ahora se considera que:

$$F_m = \bar{q}\rho_s \quad (3.2.39)$$

La ecuación (3.2.39) refiere a la cantidad de masa que pierde la matriz en una unidad de tiempo por una unidad de volumen. Combinando las ecuaciones (3.2.38) y (3.2.39):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{F_m}{\rho_s} \quad (3.2.40)$$

La ecuación (3.2.40) representa la ecuación de continuidad del sólido, el cual determina el cambio de porosidad respecto al tiempo cuando la roca se está erosionando debido al flujo de masa.

Con la ecuación que gobierna al sólido, se busca obtener el de los sólidos móviles. Para esta ecuación se considera definición de densidad que es la masa del sólido movi por unidad de volumen de roca:

$$\rho_2 = c\phi\rho_{fs} = c\phi\rho_s \quad (3.2.41)$$

La ecuación (3.2.41) define la densidad del sólido movable. Entonces sustituyendo la ecuación (3.2.41) en la ecuación (3.2.32) se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (c\rho_s\phi) = \rho_s\bar{q} - \nabla \cdot (c\rho_s\phi(\bar{v}_x)) \quad (3.2.42)$$

En la ecuación (3.2.42) se considera que la densidad y la porosidad varían respecto a la distancia y tiempo. Para el término sumidero/fuente se considera que es positivo, ya que el sólido que se desprende de la matriz de roca se está acumulando en el volumen de control.

$$\frac{\partial}{\partial t} (c\rho_s\phi) + \nabla \cdot (c\rho_s\phi\bar{v}_x) = F_m \quad (3.2.43)$$

$$\frac{\partial(c\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (c\phi\bar{v}_x) = \frac{F_m}{\rho_s} \quad (3.2.44)$$

Se observa que la unidad de \bar{v}_x refiere a la velocidad intersticial o bien el flujo de fluido entre la roca. Este término no está definido a través de un medio poroso por lo que necesita transformarse a la velocidad de Darcy con la siguiente relación:

$$v_x = \frac{v_D}{\phi} \quad (3.2.45)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2.45) en la ecuación (3.2.44) se obtendrá:

$$\frac{\partial(c\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (cv_D) = \frac{F_m}{\rho_s} \quad (3.2.46)$$

La ecuación (3.2.46) establece la relación que existe entre el flujo de sólidos móviles, la degradación de la porosidad respecto al tiempo y la cantidad de sólido que se produce en el sistema debido a los sólidos que se desprenden de la roca. Si se combinan las ecuaciones (3.2.46) y (3.2.40) se obtiene:

$$\frac{\partial(c\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (cv_D) = \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.2.47)$$

Para describir la del fluido se utiliza la definición de masa de fluido por unidad de volumen de roca, en consecuencia se considera la definición de densidad siguiente:

$$\rho_3 = (1 - c)\phi\rho_f \quad (3.2.48)$$

La ecuación (3.2.48) representa la densidad del fluido que estará en el flujo de fluido a través del medio poroso. Sustituyendo la ecuación (3.2.48) en la ecuación (3.2.32) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - c)\rho_f\phi) = \rho_f\bar{q} - \nabla \cdot ((1 - c)\rho_f\phi(\bar{v}_x)) \quad (3.2.49)$$

En la ecuación (3.2.49) se elimina el término sumidero/fuente, por lo que la ecuación (3.2.49) se transforma a:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-c)\rho_f\phi) = -\nabla \cdot ((1-c)\rho_f\phi(\bar{v}_x)) \quad (3.2.50)$$

Con la misma suposición de velocidad intersticial a velocidad de Darcy se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-c)\rho_f\phi) = -\nabla \cdot ((1-c)\rho_f v_D) \quad (3.2.51)$$

Suponiendo que la densidad del fluido (ρ_f) es constante:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-c)\phi) = -\nabla \cdot ((1-c)v_D) \quad (3.2.52)$$

Combinando las ecuaciones (3.2.47) y (3.2.52) se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-c)\phi) + \nabla \cdot ((1-c)v_D) + \frac{\partial(c\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (cv_D) = \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.2.53)$$

Reduciendo la ecuación (3.2.53)

$$\nabla \cdot v_D = 0 \quad (3.2.54)$$

La ecuación (3.2.54) es la ecuación de continuidad que refiere al flujo de fluido a través del medio poroso, donde \bar{q} es equivalente a la velocidad de Darcy (v_D). Esta ecuación necesita de la Ley de Darcy para obtener los parámetros físicos para el flujo a través de medio poroso y definir la presión de forma explícita. Las ecuaciones (3.2.40), (3.2.47) y (3.2.54) constituyen al conjunto de ecuaciones de balance de masa del problema propuesto. Estas ecuaciones no son suficiente para resolver el problema, ya que se requiere un término que represente la generación de sólidos y la tasa a la que esta introduciendo sólido a la mezcla. Este término se obtiene en la siguiente parte.

3.3. Ley Constitutiva de Generación de Masa

Extensos estudios teóricos y experimentales en relación a la filtración de partículas no-coloidales en medios porosos fueron realizados por H. A. Einstein (1966). Para el problema que se analiza, se requiere una ley constitutiva que describa la tasa de masa erosionada de la matriz de roca y la tasa de nuevos sólidos móviles que entra a la mezcla de flujo del medio poroso:

$$\dot{m}_{er} = \lambda' \| m_i^{fs} \| \quad (3.3.1)$$

La ecuación (3.3.1) muestra que el fenómeno de erosión está gobernada por el flujo de los sólidos móviles m_i^{fs} , si este parámetro aumenta entonces la erosión aumenta, debido a las fuerzas cinéticas en el sistema. La otra variable que afecta la ecuación (3.3.1) es el coeficiente (λ') la cual relaciona la frecuencia espacial del potencial de erosión; el coeficiente refleja la frecuencia de puntos con potencial de erosión en el sistema, por lo que si el coeficiente incrementa, la roca se vuelve débil. El coeficiente tiene dimensiones de longitud inversa $\lambda' = [L^{-1}]$ y de acuerdo a Gravanis et al (2015), el valor se determina experimentalmente y el valor de media esta entre .07 y .105 $[\frac{1}{m}]$. En acoplamiento del proceso de erosión y geomecánica de la roca, se espera que λ' incremente en función del daño de la roca o bien cuando haya un incremento de porosidad, el cual implícitamente se relaciona de forma inversa con la cohesión. Vardoulakis et al. (1996) mencionan que el proceso de erosión será más activo en zonas intactas (caracterizadas con canales de poros pequeños), por lo que asumen que:

$$\lambda' = \lambda(1 - \phi) \quad (3.3.2)$$

La variable $\| m_i^{fs} \|$ refiere a la norma de la velocidad másica del sólido movable, que representa la magnitud del vector de velocidad másica. Esta variable se representa como:

$$m_i^{fs} = \rho_s \bar{c} v_D \quad (3.3.3)$$

Por lo que combinando las ecuaciones (3.3.3), (3.3.2) y (3.3.1), se obtendrá el flujo másico (\dot{m}_{er}):

$$\dot{m}_{er} = \lambda(1 - \phi) \parallel \rho_s \bar{c} v_D \parallel \quad (3.3.4)$$

donde $\dot{m}_{er} = F_m$

Debido a que ρ_s y c son variables escalares la ecuación (3.3.4) se convierte a:

$$\dot{m}_{er} = \lambda(1 - \phi) \rho_s \bar{c} \parallel v_D \parallel \quad (3.3.5)$$

La ecuación (3.3.5) muestra un sentido intuitivo del fenómeno de erosión, ya que se muestra que la tasa de erosión es proporcional a la concentración de sólidos móviles que existe en el sistema, al coeficiente λ es la frecuencia de potencial de erosión y a la velocidad de Darcy que existe en el sistema. En el caso de $(1 - \phi)$; la ecuación muestra que mientras exista porosidad, el proceso de erosión tendrá lugar en el sistema porque si la porosidad es 1 (no hay roca en el sistema) la ecuación se hará cero, indicando que ya no habrá potencial de erosión.

La contraparte de la ecuación (3.3.5) es el término \bar{c} , el cual carece de sentido físico cuando no se considera el balance de erosión y depósito de sólidos móviles. Esto quiere decir que se requiere una concentración crítica de sólidos móviles a la cual los sólidos móviles se depositan y taponan el espacio poroso. Este balance se obtiene cuando:

$$\bar{c} = c - \frac{c^2}{c_{cr}} \quad (3.3.6)$$

La ecuación (3.3.6) representa la concentración en el cual se encuentra el balance de depositación y erosión. En el momento que c y c_{cr} tengan el mismo valor, la ecuación (3.3.6) dará un valor de cero, por lo que indicará que el medio poroso está tapado por los sólidos móviles y por lo tanto no se puede generar nuevos sólidos hasta que el valor de concentración disminuya. Esto depende de la roca, y sus propiedades petrofísicas tal como la porosidad, permeabilidad o fábrica de la roca. Por lo que sustituyendo la ecuación (3.3.6) en (3.3.5) se obtiene:

$$\dot{m}_{er} = \lambda(1 - \phi) \rho_s \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \parallel v_D \parallel = F_m \quad (3.3.7)$$

La ecuación (3.3.7) se combina con (3.2.40) para obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda(1 - \phi) \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \parallel v_D \parallel \quad (3.3.8)$$

3.4. Ley de Darcy

En Ingeniería Petrolera la ley de Darcy se utiliza para describir el flujo a través de medios porosos. Esta ley fue establecida por Darcy (1856) estudiando el flujo de agua a través de un empacamiento de arena. Muskat (1931) adaptó la ley de Darcy para la ingeniería petrolera y así modelar el flujo de aceite. La Ley de Darcy describe una relación proporcional entre el gasto (q) a través de un medio poroso de una cierta permeabilidad (k), viscosidad dinámica del fluido (μ) y la caída de presión ($\frac{dp}{dl}$) a lo largo de un medio homogéneo permeable.

$$q = - \frac{k A dp}{\mu dl} \quad (3.4.1)$$

La ecuación (3.4.1) tiene un signo negativo debido a que el fluido fluye de la zona de mayor presión a la de menor presión. Esta ecuación no considera los efectos gravitacionales. Debido a que esta ecuación está en términos de gasto (q) y se requiere conocer la velocidad de Darcy (v_D), la ecuación (3.4.1) se divide por el área A :

$$v_D = -\frac{kdp}{\mu dl} \quad (3.4.2)$$

La ecuación (3.4.2) describe la velocidad de Darcy, la cual se ocupa para las ecuaciones de balance de materia. Los cambios de porosidad debido al fenómeno de arenamiento afectan a la permeabilidad del sistema, por lo que es necesario relacionar la permeabilidad con la porosidad para que cada vez que cambie la porosidad, la permeabilidad similarmente cambie. Otro aspecto de la ecuación (3.4.2), es que la viscosidad es la viscosidad dinámica, el cual no considera la densidad de la mezcla y por lo tanto no calcula la variación conforme la concentración de sólidos móviles esta cambiando. Por esto se modifica la variable con el concepto de viscosidad cinemática e introduce la ecuación (3.1.9). La definición de viscosidad cinemática es:

$$\eta_k = \frac{\mu}{\bar{\rho}} \quad (3.4.3)$$

La ecuación (3.4.3) describe la viscosidad cinemática, que representa la resistencia inherente de un fluido a fluir cuando no hay fuerzas externas más que la fuerza de gravedad, además considera la densidad de la mezcla ($\bar{\rho}$) que resulta de alta importancia en el estudio de arenamiento y esta descrita en la ecuación (3.1.9). Entonces sustituyendo la ecuación (3.4.3) en (3.4.2) se obtiene:

$$v_D = -\frac{kdp}{\eta_k \bar{\rho} dl} \quad (3.4.4)$$

En la siguiente sección se considera la modificación de la permeabilidad para que la variable que se incluye en la ecuación (3.4.4) cambie respecto al cambio de porosidad. Si se sustituye la ecuación (3.1.9) en la ecuación (3.4.4) se obtiene:

$$v_D = -\frac{kdp}{\eta_k((1-c)\rho_f + c\rho_s)dl}$$

3.5. Ecuación de Carman-Kozeny

El cambio de porosidad afecta de manera drástica a la permeabilidad del medio, ya que si la porosidad aumenta es más probable que haya más canales de flujo y el valor de permeabilidad incrementa. Por esto, es necesario tener una relación matemática que relacione el cambio de permeabilidad cuando la porosidad cambia. La relación que se utilizará, es la ecuación de Carman-Kozeny desarrollada por Kozeny (1927), y modificada por Carman (1937, 1956).

$$k = k_0 \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2} \quad (3.5.1)$$

Donde k_0 es una constante que representa la permeabilidad inicial.

3.6. Ecuación de continuidad

Se consideran las ecuaciones (3.3.8) y (3.2.47), donde la primera ecuación modela el cambio de porosidad y la segunda modela el balance de masa entre la concentración y el efecto que tiene la porosidad. Se considera también las ecuaciones (3.4.4) y (3.5.1), las cuales modelan el flujo del fluido y la variación de la permeabilidad en relación a la porosidad. Aún falta dos ecuaciones, la primera ecuación que describa la relación entre todas las ecuaciones y modele el flujo de la mezcla, o bien el flujo del fluido y el sólido móvil, y la segunda es que gobierne el comportamiento de deformación de la roca. Para la primera ecuación, primero se combinarán las ecuaciones (3.4.4) y (3.5.1) para obtener la ecuación siguiente:

$$v_D = -\frac{k_0\phi^3}{(1-\phi)^2\eta_k\bar{\rho}} \frac{dp}{dr} \quad (3.6.1)$$

Sustituyendo la ecuación (3.1.9) en la ecuación (3.6.1), se obtiene:

$$v_D = -\frac{k_0\phi^3}{(1-\phi)^2[\eta_k(1-c)\rho_f + c\rho_s]} \frac{dp}{dr} \quad (3.6.2)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6.2) en la ecuación (3.2.54) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \left[\frac{1}{r} + \alpha_c \frac{\partial \phi}{\partial r} + \beta_c \frac{\partial c}{\partial r} \right] = 0 \quad (3.6.3)$$

Donde:

$$\alpha_c = \frac{3-\phi}{\phi(1-\phi)}, \quad \beta_c = -\frac{\rho_s - \rho_f}{(1-c)\rho_f + c\rho_s}$$

3.7. Esfuerzos en el pozo, deformación y falla

En el capítulo anterior se mencionó la contribución de la perforación y el efecto que genera sobre los esfuerzos locales cercanos al pozo, por esto es necesario tener el modelo mecánico para calcular el momento en el que la roca colapsará. Para dicho problema se considera un análisis de deformación axisimétrica en el plano, tal como la **figura [3.3]**. Los esfuerzos regionales se transforman en tres nuevos esfuerzos locales: esfuerzo radial (σ_r), esfuerzo tangencial (σ_θ), y esfuerzo axial (σ_a). Cuando se propuso el simulador, se menciona que sería de una dimensión, por lo que el esfuerzo axial (σ_a) no tendrá ninguna repercusión en el valor numérico. Para las condiciones propuestas las deformaciones correspondientes están en términos solo del desplazamiento radial $u_r = u(r, t)$, por lo que:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.7.1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (3.7.2)$$

Considerando las ecuaciones (2.6.60), (2.6.66), (2.6.86) y (4.11b) se obtienen las relaciones constitutivas elásticas entre esfuerzo total y deformación total:

$$\sigma_r = \frac{\bar{E}(1-\phi)}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta] \quad (3.7.3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\bar{E}(1-\phi)}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r] \quad (3.7.4)$$

Donde la ecuación de equilibrio (2.6.12) en un plano axisimétrico se transforma a :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3.7.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.7.1)-(3.7.4) a la ecuación (3.7.5) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + g_1 \frac{\partial u}{\partial r} - g_2 u = g_3 \frac{\partial(\phi p)}{\partial r} \quad (3.7.6)$$

Donde:

$$g_1(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.7.7)$$

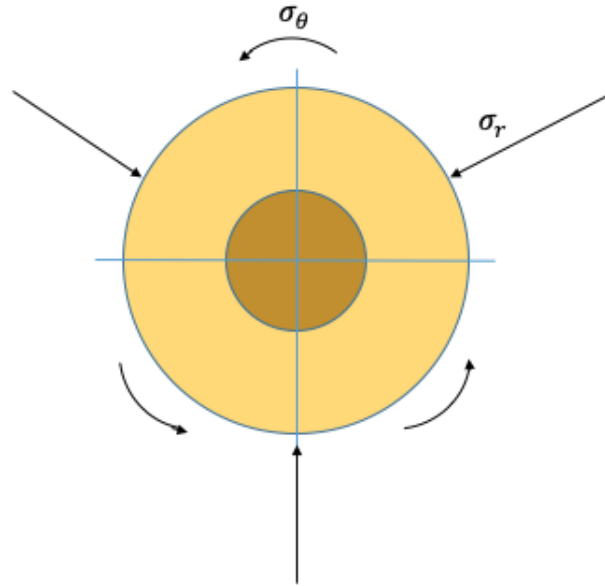


Figura 3.3: Componentes de esfuerzos en un plano simétrico en el mismo eje.

$$g_2(r) = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{v}{1-v} \frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3.7.8)$$

$$g_3(r) = \frac{(1+v)(1-2\nu)}{E(1-\phi)(1-v)} \quad (3.7.9)$$

La ecuación (3.7.6) describe el comportamiento del desplazamiento conforme las variables de porosidad, concentración, presión y propiedades geomecánicas cambian. Conocer el comportamiento del desplazamiento ayudará a determinar el comportamiento del esfuerzo efectivo y con esto calcular cuando la roca colapsa.

Capítulo 4

Modelo del simulador

4.1. Introducción

Para la elaboración del modelo de simulación se consideró una estructura matemática que asemeje la estructural real. El simulador se basa en una estructura cilíndrica, tal como en la **figura [4.1]**, el cual considera: flujo en dirección radial (hacia el pozo), yacimiento isotrópico, espesor constante, un pozo cilíndrico vertical en el centro, y que producirá a una presión constante.

El simulador esta basado en cuatro principios:

1. Modelo hidromecánico.- El cual esta conformada por la ecuación de balance de masa y la ecuación de evolución de porosidad que gobierna el proceso de erosión. La primera describe el comportamiento de la variable de concentración (c); la segunda describe el comportamiento de la variable porosidad (ϕ).
2. Ley de Darcy.- Describe el movimiento del flujo a través de un medio poroso, ya que la que la porosidad es variable: cuando la porosidad efectiva incrementa entonces su permeabilidad incrementa, en consecuencia la Ley de Darcy se acopló con la ecuación de Carman-Kozeny para relacionar el cambio de permeabilidad respecto al cambio de porosidad.
3. Ecuación de continuidad.- Esta ecuación se encarga de reunir todos los cambios e interacciones de las variables de porosidad, concentración, y presión para así calcular el flujo de la mezcla.
4. Ecuación geomecánica.- Esta ecuación se encarga de acoplar las variables porosidad y cohesión, con parámetros geomecánicos. La reducción de la cohesión debido al incremento de porosidad es el fenómeno considerado para predecir la falla de la roca utilizando el criterio de Mohr-Coulomb.

Reunidas las cuatro características, se realiza una simulación numérica donde las variables principales tal como porosidad, concentración, presión y desplazamiento varían respecto al tiempo y espacio. El efecto de daño mecánico se acopla de forma implícita donde los valores de esfuerzo efectivo se utilizarón para predecir la falla mecánica de la roca y colapso cercano del pozo.

El desplazamiento radial (u_r) se obtiene resolviendo numéricamente la ecuación diferencial parcial (3.7.6) con las condiciones de fronteras que se mostrarán en este capítulo. Cuand las variables u y $\frac{\partial u}{\partial r}$ se determinen, el esfuerzo se determina introduciendo los resultados en la ecuación (3.7.3) y (3.7.4). Debido a la falta de dependencia de los ecuaciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 respecto a la variable u , es posible resolver la variable de forma paralela al mismo nivel de tiempo.

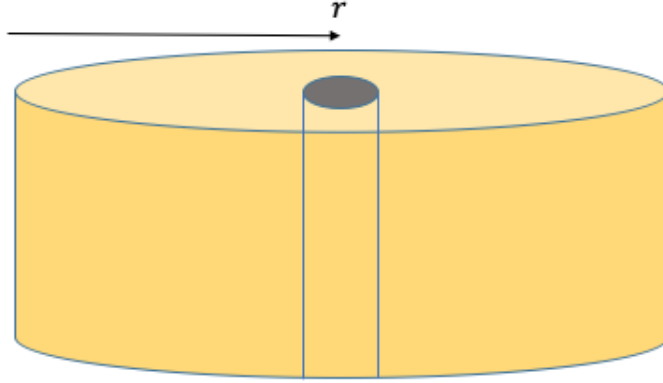


Figura 4.1: Modelo cilíndrico base del simulador.

4.2. Ecuaciones del simulador

Tal como se mencionó anteriormente, este simulador se basa en cuatro principios, los cuales están descritos por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial(c\phi)}{\partial t} + v_D \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda(1 - \phi) \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \| v_D \| \quad (4.2.2)$$

Las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) representan las ecuaciones que forman parte del modelo hidromecánico.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \left[\frac{1}{r} + \alpha_c \frac{\partial \phi}{\partial r} + \beta_c \frac{\partial c}{\partial r} \right] = 0 \quad (4.2.3)$$

La ecuación (4.2.3) representa la ecuación de continuidad para el flujo de la mezcla. En esencia las ecuaciones (4.2.1)-(4.2.3) representan las ecuaciones que modelan el fenómeno de arenamiento, aunque es necesario considerar que dependen de la variable v_D , la cual se representa:

$$v_D = - \frac{k_0 \phi^3}{(1 - \phi)^2 \eta_k [(1 - c)\rho_f + c\rho_s]} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.2.4)$$

Hay que notar que en las ecuaciones (4.2.1)-(4.2.4) las variables principales son: c , ϕ y p ; mientras que los otros parámetros son constantes. Estas tres variables se actualizan en cada paso del tiempo, lo que hace que las ecuaciones sean no lineales y por consecuencia difícil de resolver, donde la ecuación (4.2.4) es responsable de la mayor parte de no linealidad entre las ecuaciones.

4.2.1. Condiciones iniciales y de frontera

Las ecuaciones (4.2.1)-(4.2.3) son ecuaciones diferenciales que tienen solución para un medio continuo, pero este medio necesita ser finito y tener condiciones de frontera para que este simulador tenga una solución computacional.

Para un tiempo inicial (t_0) se considera que el sistema roca-fluido está en equilibrio, por lo que el yacimiento se encuentra en una misma presión inicial (p_0) y no hay flujo de fluido y sólidos ($v_D = 0$); también se considera que en todo el yacimiento se tiene una concentración inicial (c) de sólidos móviles y que la porosidad (ϕ) es

homogénea en todo el yacimiento. En la frontera externa del yacimiento, se considero una frontera con una presión externa constante.

Las condiciones iniciales y de fronteras para la presión son:

$$p(r_w \leq r \leq r_e, t_0) = p_0 \quad (4.2.5)$$

$$p_e = p_{cte1} \quad (4.2.6)$$

$$p_{wf} = p_{cte2} \quad (4.2.7)$$

Las condiciones iniciales y de fronteras para la porosidad son:

$$\phi(r_w \leq r \leq r_e, t_0) = \phi_0 \quad (4.2.8)$$

$$\phi_e = \phi_0 \quad (4.2.9)$$

Las condiciones iniciales y de fronteras para la concentración son:

$$c(r_w \leq r \leq r_e, t_0) = c_0 \quad (4.2.10)$$

$$c_c = c_0 \quad (4.2.11)$$

Las ecuaciones (4.2.5)-(4.2.11) representan las condiciones que son necesarias para resolver el problema de arenamiento; representan condiciones de fronteras e inicial del modelo hidromecánico, mientras que para el modelo geomecánico se obtienen las condiciones de fronteras siguientes:

$$\sigma_r(r_w, t) = -p_{wf} \quad (4.2.12)$$

$$\sigma_r(r_e, t) = -\sigma_e \quad (4.2.13)$$

donde las ecuaciones (4.2.12) y (4.2.13) en términos del desplazamiento se convierten en:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_w} = -\frac{v}{1-v} \frac{u(r_w)}{r_w} - g_3(r_w, t) [\phi(r_w, t) p_{wf} - p_{wf}] \quad (4.2.14)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_e} = -\frac{v}{1-v} \frac{u(r_e)}{r_e} + g_3(r_e, t) [\phi(r_e, t) p_e - \sigma_e] \quad (4.2.15)$$

4.3. Diferencias finitas

Las ecuaciones que modelan el flujo de la mezcla de sólidos y fluidos se encuentran en su forma diferencial, y tienen la característica de que son no lineales, por lo que su solución analítica se vuelve compleja. Se requiere simplificar las ecuaciones de forma que se tomen en cuenta todos los cambios de las al mismo espacio y tiempo. Las variables c , ϕ , p y u son las variables que importan más, por lo tanto se llamaran variables principales. El método de diferencias finitas se basa en la idea aproximar un medio continuo en uno discreto. Esta transformación hace cálculos más sencillos, pero con un error asociado debido a su discontinuación en el medio.

Es necesario que este conjunto de espacios discretos se dividan en un conjunto finito de puntos a lo largo del yacimiento. A este conjunto se le denomina malla, y será un arreglo tal y como se muestra en la **figura [4.2]**. En esencia, el método de diferencias finitas reemplaza las ecuaciones diferenciales por conjuntos de ecuaciones algebraicas que relacionaran las 4 variables principales. La discretización también se aplicó a la variable de desplazamiento (u) solo que en este caso la ecuación se discretiza de forma paralela.

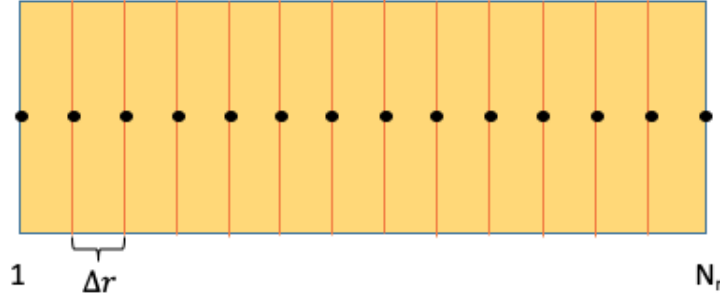


Figura 4.2: Malla discretizada en espacio con nodos centrados y uniformes.

4.3.1. Discretización espacial

La discretización espacial aproxima las derivadas que depende del espacio en una aproximación de derivada. Para la derivada espacial de primer orden se utiliza un esquema central (para toda la formulación de discretización espacial revise el apéndice B), esto debido a que estos términos dependen de los procesos de difusión y que actúan en todas las direcciones. El esquema central para primer orden se representa tal como la ecuación siguiente:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4.3.1)$$

Para un esquema central de segundo orden se obtiene:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (4.3.2)$$

En otros casos como cuando se utiliza la velocidad de Darcy: se utiliza la derivada de primer orden y se discretiza en esquema central:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (4.3.3)$$

donde f es la variable principal, x representa el espacio e i representa el nodo en el que se encuentra la variable principal. En este caso, las cuatro variables principales se representarán de la misma forma que f . Se debe recordar que existe el error de truncamiento de cada esquema (Ir a apéndice B para ver error de truncamiento). Así que discretizando espacialmente las ecuaciones de (4.2.1)-(4.2.4) y sustituyendo (4.2.4) en las ecuaciones (4.2.1)-(4.2.3) se obtiene:

$$\frac{\partial(c_i \phi_i)}{\partial t} + \left(-\frac{k_0 \phi_i^3}{(1 - \phi_i)^2 [\eta_k (1 - c_i) \rho_f + c_i \rho_s]} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta r_i} \right) \frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta r_i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda(1 - \phi_i) \left(c_i - \frac{c_i^2}{c_{cr_i}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_i^3}{(1 - \phi_i)^2 \eta_k [(1 - c_i) \rho_f + c_i \rho_s]} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta r_i} \right) \quad (4.3.5)$$

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta r_i^2} + \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta r_i} \left[\frac{1}{r_i} + \left(\frac{3 - \phi_i}{\phi_i(1 - \phi_i)} \right) \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta r_i} + \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i) \rho_f + c_i \rho_s} \right) \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2\Delta r_i} \right] = 0 \quad (4.3.6)$$

Donde:

$$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$$

Las ecuaciones (4.3.4)-(4.3.6) representan las ecuaciones discretizadas en espacio.

4.3.2. Discretización temporal

Es necesario discretizar las derivadas respecto al tiempo. Esta discretización hace que las variables principales se encuentren en el tiempo actual. En general hay dos formas de discretizar temporalmente una ecuación:

1. Método explícito.- Cuando las derivadas espaciales de una variable están valuados al tiempo conocido (n), y la variable en el tiempo desconocido ($n + 1$) en la derivada temporal.
2. Método implícito.- Cuando las derivadas espaciales de una variable están valuadas al tiempo desconocido ($n + 1$), y la variable en el tiempo conocido (n) en la derivada temporal.

El método explícito es más sencillo; debido a que solo existirá una incógnita por variable, pero dicha facilidad genera más errores por inestabilidad (ver **Apéndice C** que discute la discretización temporal) debido a este problema se utilizará el método implícito para tener estabilidad numérica. De manera general el método de Euler se describe:

$$y^{n+1} = y^n + f(t^{n+1}, y^{n+1})\Delta t \quad (4.3.7)$$

En la ecuación (4.3.7), y representa la variable principal; n , representa el tiempo actual; $n + 1$, el tiempo siguiente; t , el tiempo; Δt incremento del tiempo. Aplicando el método implícito a las ecuaciones (4.3.4)-(4.3.6) resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1}\phi_i^{n+1} - c_i^n\phi_i^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0\phi_i^{n+1^3}}{(1-\phi_i^{n+1})^2\eta_k [(1-c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{\Delta r_i} \dots \\ \dots = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1^2}}{c_{cri}} \right) \left(\frac{k_0\phi_i^{n+1^3}}{(1-\phi_i^{n+1})^2\eta_k [(1-c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_i^2} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\frac{1}{r_i} + \left(\frac{3 - \phi_i^{n+1}}{\phi_i^{n+1}(1 - \phi_i^{n+1})} \right) \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} + \dots \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s} \right) \right] \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Las ecuaciones (4.3.8)-(4.3.10) representan las ecuaciones para todos los nodos que se incorporan en la malla. Es necesario mencionar que estos son solo para los nodos internos de la malla, y que en los extremos se acoplarón las condiciones de frontera, tal y como se describe en las secciones siguientes.

4.4. Acoplamiento de condiciones de fronteras

Las ecuaciones (4.3.8)-(4.3.10) representan las ecuaciones para describir el problema de arenamiento dentro de un número de nodos internos, ó bien dentro de la malla. Para una simulación particular; se requieren las condiciones de fronteras, con el fin de darle una solución única al sistema de ecuaciones diferenciales. Es necesario que se adapten las condiciones de frontera para la malla tal como en la **figura [4.3]**. El sistema de ecuaciones que se discretiza se divide en tres grupos: Nodo inicial $i = 1$, nodos internos $i = 2, \dots, Nr - 1$ y nodo final $i = Nr$, ó bien para la ecuación (4.3.8):

$$i = 1$$

$$\frac{c_1^{n+1}\phi_1^{n+1} - c_1^n\phi_1^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0\phi_1^{n+1^3}}{(1-\phi_1^{n+1})^2\eta_k [(1-c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \frac{c_2^{n+1} - c_1^{n+1}}{\Delta r_1} = \frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} \quad (4.4.1)$$

$i = 2, \dots, Nr - 1$

$$\frac{c_i^{n+1}\phi_i^{n+1} - c_i^n\phi_i^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0\phi_i^{n+1^3}}{(1-\phi_i^{n+1})^2\eta_k [(1-c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{\Delta r_i} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} \quad (4.4.2)$$

$i = Nr$

$$\begin{aligned} \frac{c_{Nr}^{n+1}\phi_{Nr}^{n+1} - c_{Nr}^n\phi_{Nr}^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0\phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1-\phi_{Nr}^{n+1})^2\eta_k [(1-c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{Nr+1}^{n+1} - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) \frac{c_{Nr+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \\ \dots = \frac{\phi_{Nr}^{n+1} - \phi_{Nr}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Ahora para la ecuación (4.3.9) se obtiene:

$i = 1$

$$\frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} = \lambda(1 - \phi_1^{n+1}) \left(c_1^{n+1} - \frac{c_1^{n+1^2}}{c_{cr1}} \right) \left(\frac{k_0\phi_1^{n+1^3}}{(1-\phi_1^{n+1})^2\eta_k [(1-c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \quad (4.4.4)$$

$i = 2, \dots, Nr - 1$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1^2}}{c_{cri}} \right) \left(\frac{k_0\phi_i^{n+1^3}}{(1-\phi_i^{n+1})^2\eta_k [(1-c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \quad (4.4.5)$$

$i = Nr$

$$\frac{\phi_{Nr}^{n+1} - \phi_{Nr}^n}{\Delta t} = \lambda(1 - \phi_{Nr}^{n+1}) \left(c_{Nr}^{n+1} - \frac{c_{Nr}^{n+1^2}}{c_{crNr}} \right) \left(\frac{k_0\phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1-\phi_{Nr}^{n+1})^2\eta_k [(1-c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{Nr+1}^{n+1} - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) \quad (4.4.6)$$

Y finalizando con la ecuación (4.3.10):

$i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{p_2^{n+1} - 2p_1^{n+1} + p_0^{n+1}}{\Delta r_1^2} + \frac{p_2^{n+1} - p_0^{n+1}}{2\Delta r_1} \left[\frac{1}{r_1} + \left(\frac{3 - \phi_1^{n+1}}{\phi_1^{n+1}(1 - \phi_1^{n+1})} \right) \frac{\phi_2^{n+1} - \phi_0^{n+1}}{2\Delta r_1} + \right. \\ \left. \dots \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_2^{n+1} - c_0^{n+1}}{2\Delta r_1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$i = 2, \dots, Nr - 1$

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_i^2} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\frac{1}{r_i} + \left(\frac{3 - \phi_i^{n+1}}{\phi_i^{n+1}(1 - \phi_i^{n+1})} \right) \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} + \right. \\ \left. \dots \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

$i = Nr$

$$\begin{aligned} & \frac{p_{Nr+1}^{n+1} - 2p_{Nr}^{n+1} + p_{Nr-1}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}^2} + \frac{p_{Nr+1}^{n+1} - p_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \left[\frac{1}{r_{Nr}} + \left(\frac{3 - \phi_{Nr}^{n+1}}{\phi_{Nr}^{n+1}(1 - \phi_{Nr}^{n+1})} \right) \frac{\phi_{Nr+1}^{n+1} - \phi_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} + \right. \\ & \left. \dots \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_{Nr+1}^{n+1} - c_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

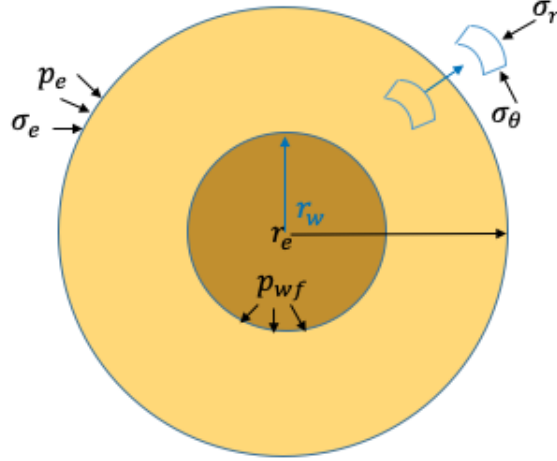


Figura 4.3: Configuración del simulador con sus condiciones de frontera.

Se debe notar en las ecuaciones (4.4.1)-(4.4.9) se tienen variables que se encuentran en nodos que no están definidos en la malla, tal como los nodos catalogados en $i = 0$ ó Nr , así que es necesario aplicar las condiciones de frontera y reescribir las ecuaciones que las contienen. Entonces aplicando las condiciones de frontera (4.2.5)-(4.2.11) a las ecuaciones (4.4.1)-(4.4.9), se obtiene:

$i = 1$

$$\frac{c_1^{n+1}\phi_1^{n+1} - c_1^n\phi_1^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0\phi_1^{n+1}{}^3}{(1 - \phi_1^{n+1})^2\eta_k [(1 - c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \frac{c_2^{n+1} - c_1^{n+1}}{\Delta r_1} = \frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} \quad (4.4.10)$$

$i = Nr$

$$\begin{aligned} & \frac{c_{Nr}^{n+1}\phi_{Nr}^{n+1} - c_{Nr}^n\phi_{Nr}^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0\phi_{Nr}^{n+1}{}^3}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2\eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{Nr+1}^{n+1} - p_{Nr}^n}{\Delta r_{Nr}} \right) \frac{c_{Nr+1}^{n+1} - c_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \\ & \dots = \frac{\phi_{Nr}^{n+1} - \phi_{Nr}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Para la ecuación (4.3.9) se obtiene:

$i = 1$

$$\frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} = \lambda(1 - \phi_1^{n+1}) \left(c_1^{n+1} - \frac{c_1^{n+1}{}^2}{c_{cr1}} \right) \left(\frac{k_0\phi_1^{n+1}{}^3}{(1 - \phi_1^{n+1})^2\eta_k [(1 - c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \quad (4.4.12)$$

$i = Nr$

$$\frac{\phi_{Nr}^{n+1} - \phi_{Nr}^n}{\Delta t} = \lambda(1 - \phi_{Nr}^{n+1}) \left(c_{Nr}^{n+1} - \frac{c_{Nr}^{n+1^2}}{c_{crNr}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1}) \rho_f + c_{Nr}^{n+1} \rho_s]} \frac{p_e - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) \quad (4.4.13)$$

Y finalizando con la ecuación (4.3.10):

$i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{p_2^{n+1} - 2p_1^{n+1} + p_{wf}}{\Delta r_1^2} + \frac{p_2^{n+1} - p_{wf}}{2\Delta r_1} \left[\frac{1}{r_1} + \left(\frac{3 - \phi_1^{n+1}}{\phi_1^{n+1}(1 - \phi_1^{n+1})} \right) \frac{\phi_2^{n+1} - 1}{2\Delta r_1} + \right. \\ \left. \dots \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s} \right) \frac{c_2^{n+1} - 1}{2\Delta r_1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

$i = Nr$

$$\begin{aligned} \frac{p_e - 2p_{Nr}^{n+1} + p_{Nr-1}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}^2} + \frac{p_e - p_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \left[\frac{1}{r_{Nr}} + \left(\frac{3 - \phi_{Nr}^{n+1}}{\phi_{Nr}^{n+1}(1 - \phi_{Nr}^{n+1})} \right) \frac{\phi_{Nr} - \phi_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} + \right. \\ \left. \dots \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_{Nr}^{n+1}) \rho_f + c_{Nr}^{n+1} \rho_s} \right) \frac{c_0 - c_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Si se nota que las ecuaciones (4.4.10)-(4.4.15) ya consideran las condiciones de fronteras, y también se debe de notar que en general se tiene 3 ecuaciones y en ellas se tiene tres incógnitas p^{n+1} , ϕ^{n+1} y c^{n+1} ; por lo que este sistema es posible resolverse. La variable u^{n+1} se agregara en forma paralela en la sección 4.6.

4.5. Método Newton-Raphson

Se observa que se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales en las ecuaciones (4.4.10)-(4.4.15). La no linealidad existe en el producto de las variables principales que se multiplican entre sí y estan al mismo tiempo $(n+1)$, esto representa un problema, ya que no es posible adaptar un algoritmo de solución de ecuaciones lineales. Existen múltiples formas de linealizar un sistema de ecuaciones no lineales y cada una tiene un cierto valor de estabilidad, se utilizará el método de Newton Raphson para linealizar el sistema de ecuaciones. El método de Newton Raphson es el método más eficiente y sencillo para resolver el sistema de ecuaciones no lineales. En este método se obtendran todas las incógnitas que se encuentran en el paso de tiempo $n + 1$.

Considera un sistema general de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$L_m \{F_m [w(x)]\} = f_m(x) \quad (4.5.1)$$

Donde $m = 1, 2, \dots, M$, $x \in \Omega$ y L_m denota un operador diferencial lineal, $F_m(\cdot)$ es una función no lineal, $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ es el vector de variables dependientes (en nuestro ejemplo es p, ϕ, c, u), $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ es un vector dado, M es el número total de ecuaciones y T denota la transpuesta de un vector. El método de Newton Raphson para resolver la ecuación (4.5.1): establece un sistema de ecuación iterativo. La Serie de expansión de Taylor es:

$$F_m(w + \delta x) = F_m(w) + \nabla F_m(w) \cdot \delta w + O(|\delta w|^2) \quad (4.5.2)$$

Donde $|\delta w|$ es la norma Euclideana de δw . Si el término $O(|\delta w|^2)$ se trunca entonces, $F_m(w + \delta x)$ se aproxima a:

$$F_m(w + \delta x) \approx F_m(w) + \nabla F_m(w) \cdot \delta w \quad (4.5.3)$$

Si sustituimos (4.5.3) en (4.5.1), se obtienen las ecuaciones iterativas siguientes:

$$L_m \{F_m(w^l) + \nabla F_m(w^l) \cdot \delta w^{l+1}\} = f_m(x) \quad (4.5.4)$$

Donde w^l es la l -ésima solución iterativa de w y $\nabla F_m(w^l)$ es $\nabla F_m(w)$ cuando $w = w^l$ con una solución inicial w^0 . En el sistema de ecuaciones iterativas (4.5.4), el vector corrección δw^{l+1} es la incógnita. Este sistema puede reescribirse:

$$L_m \{\nabla F_m(w^l) \cdot \delta w^{l+1}\} = g_m(x) \quad (4.5.5)$$

Donde $g_m(x) = f_m(x) - L_m \{F_m(w^l)\}$, $F_m(w^l)$ y $\nabla F_m(w^l)$ son fijas. Ahora (4.5.5) es un sistema lineal para δw^{l+1} . Si se nota que $\nabla F_m(w^l)$ es la matriz Jacobiana de F_m , y que g_m es el residual de la ecuación (4.5.1) a w^l . Se considera que $g_m(x) = R_i$, donde i será igual al número de variables principales. Un vector de solución actualizado w^{l+1} se obtiene sumando el vector de corrección δw^{l+1} con la iteración previa del vector solución w^l :

$$w^{l+1} = w^l + \delta w^{l+1} \quad (4.5.6)$$

Este proceso iterativo continúa hasta que la norma euclidiana de δw^{l+1} sea muy pequeña, siendo un número cercano a 0. Este número debe ser un valor prescrito y usualmente tiene el nombre de tolerancia descrito con la ecuación $|w^{l+1} - w^l| < \text{tolerancia}$. Entonces primero se definen los residuales R^i para las siguientes ecuaciones (4.3.8)-(4.3.10):

$$R_i^1 = \frac{c_i^{n+1} \phi_i^{n+1} - c_i^n \phi_i^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0 \phi_i^{n+1}{}^3}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{\Delta r_i} \quad (4.5.7)$$

$$\dots - \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = 0$$

$$R_i^2 = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - \lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1}{}^2}{c_{cr_i}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1}{}^3}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \quad (4.5.8)$$

$$R_i^3 = \frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_i^2} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\frac{1}{r_i} + \left(\frac{3 - \phi_i^{n+1}}{\phi_i^{n+1}(1 - \phi_i^{n+1})} \right) \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} + \dots \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] = 0 \quad (4.5.9)$$

Si se nota que si se deriva el residual respecto a cada nodo de variable principal, se obtiene la matriz jacobiana $\nabla F_m(w^l)$, donde la matriz jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden una función. Si se aplica la Ec. (4.5.5) residual respecto a las variables principales y se considera que $l = n$, se tendría que para la variable p :

$$\frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial p_{j+1}} \delta p_{i+1}^{n+1} + \frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial p_j} \delta p_i^{n+1} + \frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial p_{j-1}} \delta p_{i-1}^{n+1} = -R_i^{k^n} \quad (4.5.10)$$

Para la variable c :

$$\frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial c_{j+1}} \delta c_{i+1}^{n+1} + \frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial c_j} \delta c_i^{n+1} + \frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial c_{j-1}} \delta c_{i-1}^{n+1} = -R_i^{k^n} \quad (4.5.11)$$

Y para la variable ϕ :

$$\frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial \phi_{j+1}} \delta \phi_{i+1}^{n+1} + \frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial \phi_j} \delta \phi_i^{n+1} + \frac{\partial R_i^{k^n}}{\partial \phi_{j-1}} \delta \phi_{i-1}^{n+1} = -R_i^{k^n} \quad (4.5.12)$$

donde $k = 1, 2, 3$, $i = 1, \dots, Nr$ y $j = 1, \dots, Nr$

Las ecuaciones (4.5.10)-(4.5.12) se representan de forma matricial, en la que será una matriz con nueve submatrices por cada jacobiano, por lo que el numero de incógnitas sería $3Nr$. Las ecuaciones (4.5.10)-(4.5.12) se representan de forma matricial tal como:

$$\left[\begin{array}{c} \left[\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial \phi_j} \right] \\ \left[\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial \phi_j} \right] \\ \left[\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial \phi_j} \right] \end{array} \left[\begin{array}{c} \left[\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial c_j} \right] \\ \left[\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial c_j} \right] \\ \left[\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial c_j} \right] \end{array} \left[\begin{array}{c} \left[\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial p_j} \right] \\ \left[\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial p_j} \right] \\ \left[\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial p_j} \right] \end{array} \right]^n \left[\begin{array}{c} [\delta \phi_i] \\ [\delta c_i] \\ [\delta p_i] \end{array} \right]^{n+1} = - \left[\begin{array}{c} [R_i^1] \\ [R_i^2] \\ [R_i^3] \end{array} \right]^n \quad (4.5.13)$$

Si se realiza una analogía se tiene una sistema de ecuaciones lineales de forma $[A] \{\bar{x}\} = \{\bar{b}\}$, con este analogía se deduce que la solución se encuentra con un algoritmo de solución para sistema de ecuaciones lineales. Nótese que en la ecuación (4.5.13) la matriz está en el tiempo n , mientras que los deltas se encuentran en tiempo $n+1$ lo que sugiere que las únicas incógnitas se encuentran al tiempo $n+1$ y se calcularán con la ecuación (4.5.6). Los jacobianos y residuales de las ecuaciones (4.5.10)-(4.5.12) se encuentran en el apéndice D.

Para encontrar las variables de p^{n+1} , ϕ^{n+1} y c^{n+1} , simplemente se utilizarían las siguientes ecuaciones:

$$p^{n+1} = p^n + \delta p^{n+1} \quad (4.5.14)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \delta \phi^{n+1} \quad (4.5.15)$$

y

$$c^{n+1} = c^n + \delta c^{n+1} \quad (4.5.16)$$

4.6. Acoplamiento de la deformación mecánica

De forma paralela, debido a que los parámetros ϕ , c y p de cada nodo y tiempo son calculados al tiempo $(n+1)$, la ecuación diferencial parcial (3.7.6) se resuelve usando un esquema de diferencias finitas. La variable desconocida será la función desplazamiento (u) en los nodos. La ecuación (3.7.6) con las condiciones de fronteras (4.2.12) y (4.2.13) se discretizan de forma espacial para obtener el arreglo de matriz siguiente:

$$[\mathbf{A}] \{\bar{u}\} = \{\bar{b}\} \quad (4.6.1)$$

Es necesario mencionar que para llegar a la ecuación (4.6.1) la discretización temporal será de forma implícita, donde se actualiza la variable desplazamiento con respecto a las tres variables principales. Esto es posible a que el acoplamiento de la ecuación (4.6.2) es un acoplamiento débil, o bien la variable u depende de las tres variables principales ϕ , c y p , mientras que las respectivas tres variables principales no dependen de la variable desplazamiento u . Así que discretizando de forma espacial la ecuación (3.7.6) se llega a:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r_i^2} + g_{1i} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta r_i} - g_{2i} u_i = g_3 \frac{(\phi p)_{i+1} - (\phi p)_i}{\Delta r_i} \quad (4.6.2)$$

Donde:

$$g_{1i} = \frac{1}{r_i} - \frac{1}{1 - \phi_i} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta r_i} \quad (4.6.3)$$

$$g_{2i} = \frac{1}{r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{v}{1-v} \frac{1}{1-\phi_i} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta r_i} \quad (4.6.4)$$

$$g_{3i} = \frac{(1+v)(1-2v)}{\bar{E}(1-\phi_i)(1-v)} \quad (4.6.5)$$

Discretizando temporalmente la variable de deformación al nivel $k+1$, mientras que para las variables principales se seguirá conservando $n+1$ se llega a:

$$\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta r_i^2} + g_{1i}^{n+1} \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2\Delta r_i} - g_{2i}^{n+1} u_i^{k+1} = g_{3i}^{n+1} \frac{(\phi p)_{i+1}^{n+1} - (\phi p)_i^{n+1}}{\Delta r_i} \quad (4.6.6)$$

Donde para los cada nodo se obtiene:

Nodo $i = 1$

$$\frac{u_2^{k+1} - 2u_1^{k+1} + u_0^{k+1}}{\Delta r_1^2} + g_{11}^{n+1} \frac{u_2^{n+1} - u_0^{n+1}}{2\Delta r_1} - g_{21}^{n+1} u_1^{n+1} = g_{31}^{n+1} \frac{(\phi p)_2^{n+1} - (\phi p)_1^{n+1}}{\Delta r_1} \quad (4.6.7)$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1$

$$\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta r_i^2} + g_{1i}^{n+1} \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2\Delta r_i} - g_{2i}^{n+1} u_i^{k+1} = g_{3i}^{n+1} \frac{(\phi p)_{i+1}^{n+1} - (\phi p)_i^{n+1}}{\Delta r_i} \quad (4.6.8)$$

Nodo $i = Nr$

$$\frac{u_{Nr+1}^{k+1} - 2u_{Nr}^{k+1} + u_{Nr-1}^{k+1}}{\Delta r_{Nr}^2} + g_{1Nr-1}^n \frac{u_{Nr+1}^{k+1} - u_{Nr-1}^{k+1}}{2\Delta r_{Nr}} - g_{2Nr}^{n+1} u_{Nr}^{k+1} = g_{3Nr}^{n+1} \frac{(\phi p)_{Nr}^{n+1} - (\phi p)_{Nr-1}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \quad (4.6.9)$$

Aplicando las condiciones de frontera a la ecuación que se encuentran en apéndice E:

Nodo $i = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{u_2^{k+1} - 2u_1^{k+1}}{\Delta r_1^2} + g_{11}^{n+1} \frac{u_2^{k+1}}{2\Delta r_1} + \left(\frac{1}{\Delta r_1^2} - \frac{g_{11}^{n+1}}{2\Delta r_1} \right) \left(u_2^{k+1} + 2\Delta r_1 \left(\frac{v}{1-v} \frac{u_1^{k+1}}{r_1} + g_{31}^{n+1} [\phi_1 p_1 - p_1] \right) \right) \dots \\ & \dots - g_{21}^{n+1} u_1^{k+1} = g_{31}^{n+1} \frac{(\phi p)_2^{n+1} - (\phi p)_1^{n+1}}{\Delta r_1} \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

La ecuación (4.6.10) se simplifica:

$$\begin{aligned} & \frac{2u_2^{k+1} - 2u_1^{k+1}}{\Delta r_1^2} - g_{21}^{n+1} u_1^{k+1} + \left(\frac{2}{\Delta r_1} - g_{11}^{n+1} \right) \left(\frac{v}{1-v} \frac{u_1^{k+1}}{r_1} \right) \dots \\ & \dots = g_{31}^{n+1} \frac{(\phi p)_2^{n+1} - (\phi p)_1^{n+1}}{\Delta r_1} + \left(g_{31}^{n+1} g_{11}^{n+1} - \frac{2g_{31}^{n+1}}{\Delta r_1} \right) [\phi_1 p_1 - p_1] \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

Del mismo modo para el nodo $i = Nr - 1$

$$\begin{aligned} & \frac{-2u_{Nr}^{k+1} + 2u_{Nr-1}^{k+1}}{\Delta r_{Nr}^2} + \left(\frac{2}{\Delta r_{Nr}} + g_{1Nr}^{n+1} \right) \left(-\frac{v}{1-v} \frac{u_{Nr-1}^{k+1}}{r_{Nr}} \right) - g_{2Nr-1}^{n+1} u_{Nr-1}^{k+1} \dots \\ & \dots = g_{3Nr-1}^{n+1} \frac{(\phi p)_{Nr}^{n+1} - (\phi p)_{Nr-1}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} - \left(g_{3Nr}^{n+1} g_{1Nr}^{n+1} + \frac{2g_{3Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) [\phi_e p_e - S_e] \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

Ya que se acoplaron las condiciones de fronteras se adaptan las ecuaciones (4.6.10), (4.6.8) y (4.6.12), se obtendra el arreglo matricial siguiente:

$$\{\vec{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{Nr} \end{Bmatrix}^{k+1} \quad (4.6.13)$$

$$\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} g_{3_1}^n \frac{(\phi p)_2^{n+1} - (\phi p)_1^{n+1}}{\Delta r_1} + \left(g_{3_1}^{n+1} g_{1_1}^{n+1} - \frac{2g_{3_1}^{n+1}}{\Delta r_1} \right) [\phi_1 p_1 - p_1] \\ g_{3_2}^n \frac{(\phi p)_3^n - (\phi p)_2^{n+1}}{\Delta r_2} \\ \vdots \\ g_{3_i}^n \frac{(\phi p)_{i+1}^n - (\phi p)_i^n}{\Delta r_i} \\ \vdots \\ g_{3_{Nr-1}}^n \frac{(\phi p)_{Nr}^n - (\phi p)_{Nr-1}^n}{\Delta r_{Nr-1}} - \left(g_{3_{Nr-1}}^n g_{1_{Nr-1}}^n + \frac{2g_{3_{Nr-1}}^n}{\Delta r_{Nr-1}} \right) [\phi_e p_e - S_e] \end{Bmatrix}^{n+1} \quad (4.6.14)$$

Nótese que ahora se tiene:

$$[\mathbf{A}]^{n+1} \{\vec{u}\}^{k+1} = \{\vec{b}\}^{n+1} \quad (4.6.15)$$

El sistema de ecuaciones (4.6.15) se resuelve con métodos convencionales para resolver matrices y así obtener los valores del vector desplazamiento (\vec{u}). De esta forma se actualiza la deformación al mismo paso del tiempo que las variables principales ϕ , c y p .

4.7. Algoritmo de solución

Algoritmo 4.1 Algoritmo General de Solución

1 :**Empieza**

2 :Introducir valores de entrada.

3 :Definir malla de simulación.

4 :Definir incremento de tiempo, delta tiempo y tiempo total.

5 :Definir tolerancia.

6 :**Mientras** $tiempo < tiempo_{simulación}$ **realizar** :

7 : **Mientras** $\Delta Norma > tolerancia$ **realizar** :

8 : Obtener matriz Jacobiana de residuales y vector de residuales (tal como la ecuación (4.5.13)).

9 : Resolver el sistema de ecuaciones.

10 : Calcular $\Delta Norma$.

11 : **Si** $\Delta Norma > tolerancia$:

12 : Encontrar las variables principales con la ecuaciones (4.5.14)-(4.5.16).

13 : Las soluciones son p^{n+1}, ϕ^{n+1} y c^{n+1} .

14 : **Si No** $\Delta Norma > tolerancia$:

15 : Regresar al paso 1 y verificar posible error.

16 : Sustituir las variables principales al tiempo $n + 1$ de la ecuación (4.6.15) para obtener el vector desplazamiento.

17 : La solución es u^{n+1} .

18 : Encontrar esfuerzos efectivos con el resultado de la u^{k+1} .

19 : Imprimir gráficas y resultados.

20 :**Finaliza.**

4.8. Validación del simulador

Para validar y comprobar el funcionamiento del simulador se realizaron múltiples corridas para replicar los resultados del trabajo publicado por Stavropoloulou et al. (1998). De la misma forma se utilizan los datos que se encuentran en la tabla I propuesta por Stavropoloulou et al. (1998) mediante la **tabla [4.1]** de este trabajo. Es importante también mencionar que el código del simulador se realizó en el lenguaje de programación llamado Python en su versión 3.

Se reproducen **las figuras (3) y (4)** de [25] en la cual se muestra la alteración de la porosidad respecto a la distancia a distintos tiempos y la alteración de la presión respecto a la distancia, igual a distintos tiempos. La **figura (4.4a) y (4.4b)** son las que representan la figura (3) y (4) del artículo. Las figuras están representadas por las **figuras (4.5a) y (4.5b)**. Se debe considerar que la diferencia es que el artículo fue realizado por medio de elemento finito y el simulador de este trabajo fue realizado por medio de diferencias finitas. Tener un esquema de diferencias finitas presenta un error cuando se aproximan las derivadas con Series de Taylor, mientras que en elemento finito su error es minimizado debido a que su discretización se presenta esquema continuo de integrales (en lugar de derivadas). Es importante mencionar que el simulador la presión inicial empezó con la presión externa, en cambio en la figura (4.4b) se observa que la distribución inicial es logarítmico.

Cuadro 4.1: Datos de entrada para el simulador de Stavropoloulou et al. (1998) .

| Parámetros físicos | Valor |
|-----------------------------------|--|
| Radio del pozo | $r_{wf} = 0.1 [m]$ |
| Radio externo | $r_e = 5 [m]$ |
| Porosidad Inicial | $\phi_0 = 0.25$ |
| Concentración inicial | $c_0 = 10^{-3}$ |
| Concentración crítica | $c_{cr} = 0.3$ |
| Permeabilidad Inicial | $k = 373 [md]$ |
| Módulo de Young | $E = 2 [GPa]$ |
| Relación de Poisson | $\nu = 0.3$ |
| Viscosidad cinemática del fluido | $\eta_k = 5 \times 10^{-6} [m^2 s^{-1}]$ |
| Densidad del fluido | $\rho_f = 840 [kgm^{-3}]$ |
| Densidad de los sólidos | $\rho_s = 2650 [kgm^{-3}]$ |
| Presión del pozo ó fondo fluyendo | $p_{wf} = 5 [MPa]$ |
| Presión externa | $p_e = 8 [MPa]$ |
| Esfuerzo exterior | $\sigma_e = 20 [MPa]$ |
| Coefficiente de Erosión | $\lambda = 5 [m^{-1}]$ |
| Cohesión inicial | $C_o = 7.5 [MPa]$ |
| Ángulo de fricción interna | $\Phi = 37 [^\circ]$ |
| Número de nodos | $N_r = 100$ |
| Tiempo final | $t_f = 10000 [s]$ |
| Delta del tiempo | $dt = 10 [s]$ |
| Delta del radio | $dr = 0.5$ |
| Epsilon de Newton-Raphson | $\varepsilon_{NR} = 1 \times 10^{-5}$ |

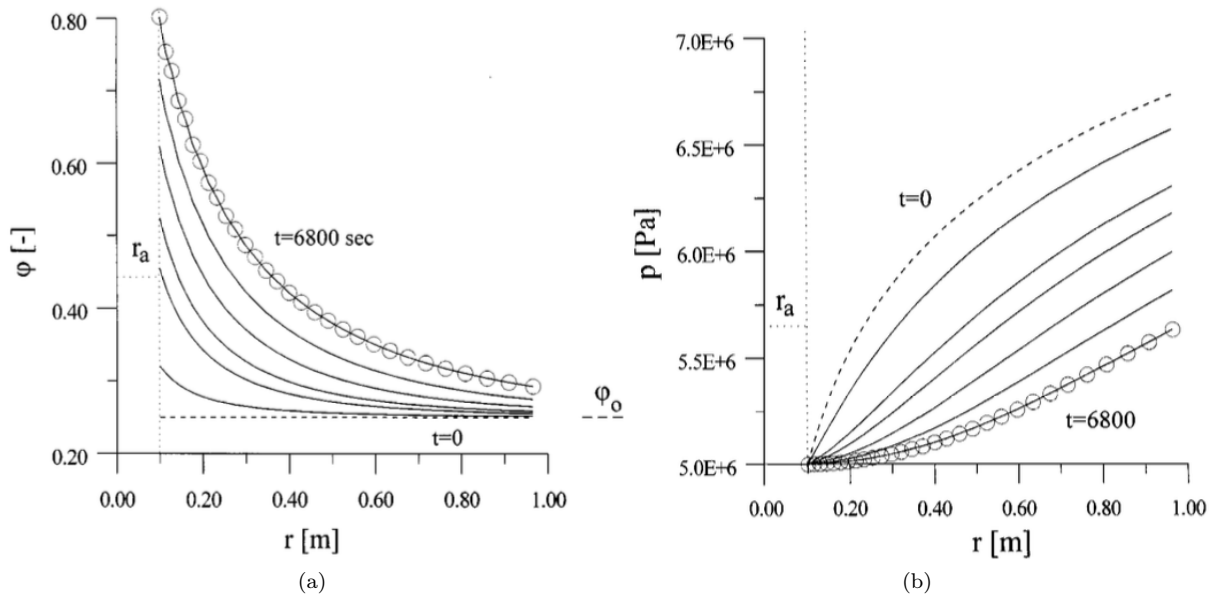


Figura 4.4: a) Perfil espacial de la porosidad a varios tiempos. b) Perfil espacial de presión a varios tiempos. Ambas de referencia [25]

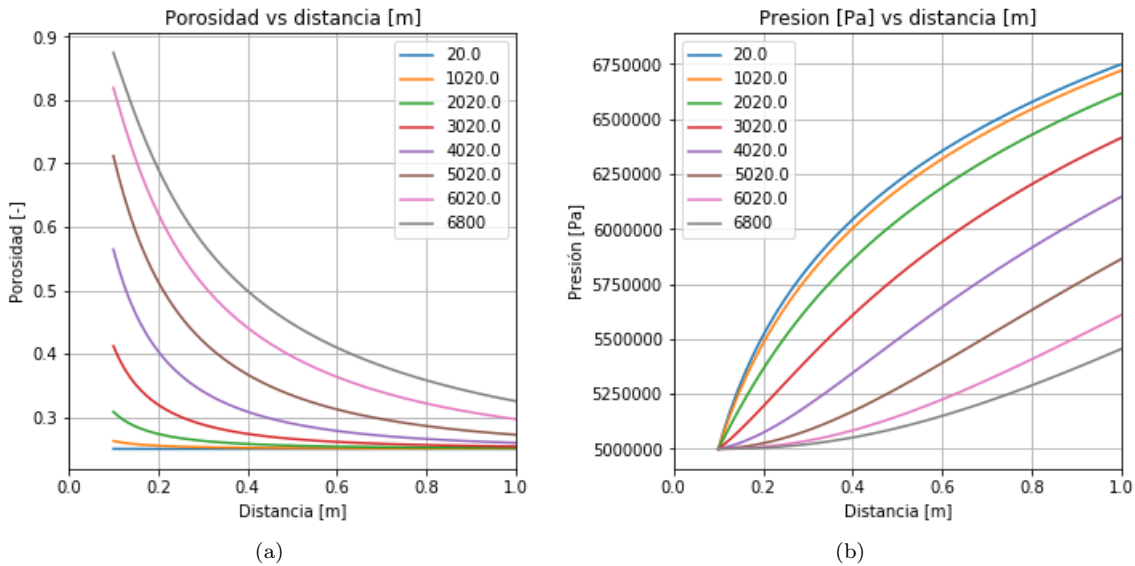


Figura 4.5: a) Perfil espacial de la porosidad a varios tiempos de simulación b) Perfil espacial de presión a distintos tiempos del simulador

Para la **figura (5) y (6)** del artículo, las cuales muestran el comportamiento de la porosidad y la concentración de transporte en el primer nodo conforme el tiempo está cambiando. Estas figuras están representadas por las **figuras (4.6a) y (4.6b)**. Los resultados del simulador de este trabajo están comparadas con **figura (4.7a) y (4.7b)**. Notesé el rápido incremento de la porosidad y concentración después de un cierto tiempo. En la figura (4.7a) se observa como el valor se aproxima a 1, la cual es la porosidad máxima, ó bien una superficie libre. En

la figura (4.7b) es claro que la concentración converge hacia el valor asintótico de 0.3, el cual corresponde a la concentración crítica.

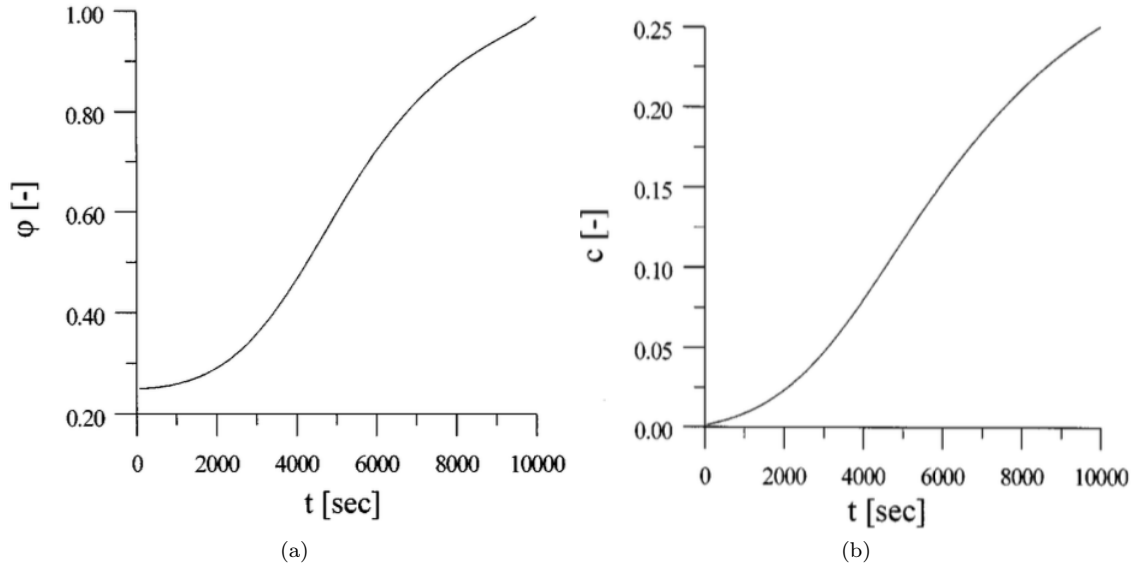


Figura 4.6: a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo en el primer nodo. Ambas de referencia [25]

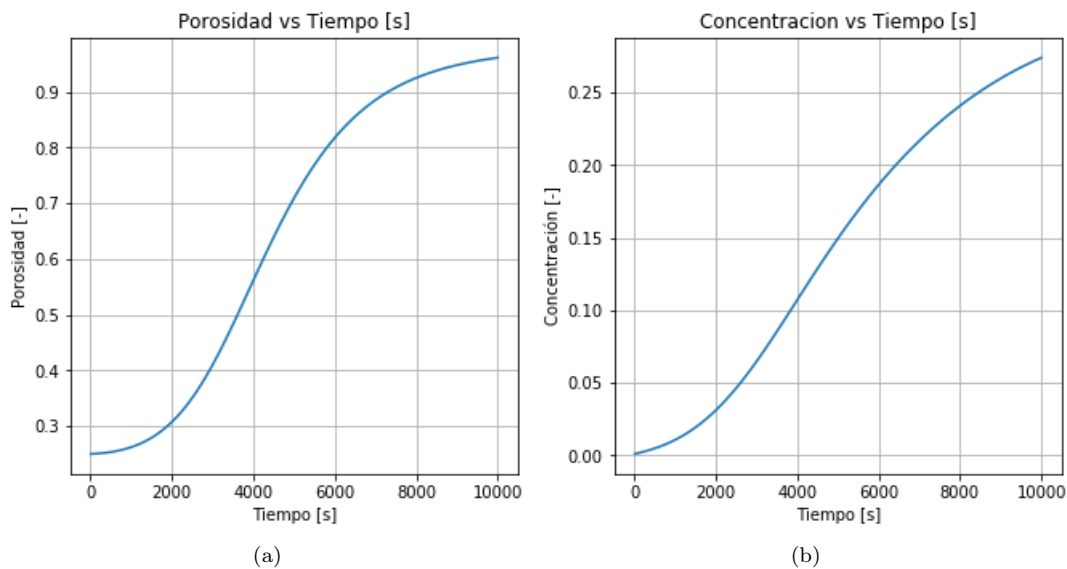


Figura 4.7: a) Variación de la porosidad respecto al tiempo en el primer nodo, del simulador. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo en el primer nodo, del simulador.

Para los parámetros geomecánicos primero se determina la deformación para calcular los esfuerzos efectivos. Las figuras 8 y 9 del artículo se comparan por medio de las figuras (4.8a) y (4.8b). Las figuras se reproducen

por medio del simulador y se obtienen como resultado las **figuras (4.9), (4.10a), y (4.10b)**. Nótese que la erosión de la vecindad del pozo induce una alteración mecánica del medio. La figura (4.9) muestra los perfiles espaciales del desplazamiento radial a distintos tiempos. Las figuras (4.10a) y (4.10b) demuestran la variación del tiempo del desplazamiento radial y su derivada en la cara del pozo.

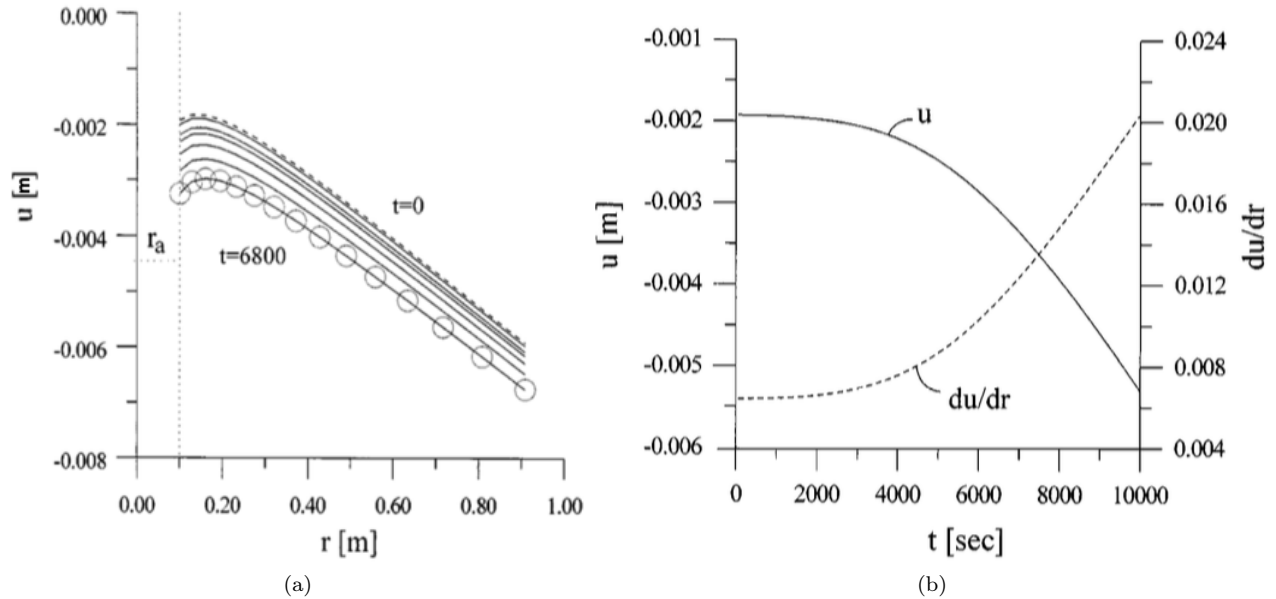


Figura 4.8: a) Distribución de desplazamiento radial simulado a varios tiempos. b) Variación del desplazamiento radial y la deformación radial con respecto al tiempo, evaluados en el radio del pozo. Ambas de referencia [25]

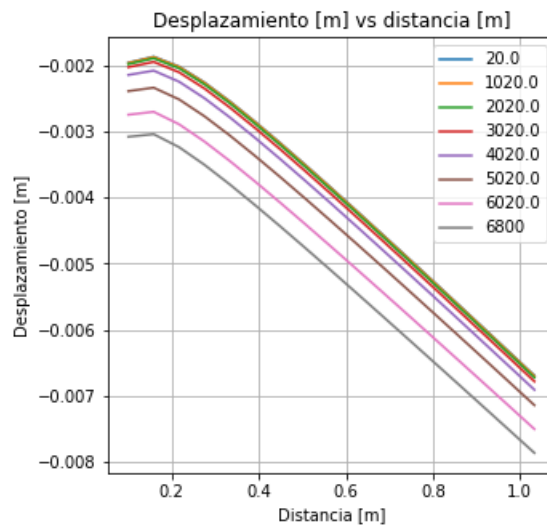


Figura 4.9: Distribución de desplazamiento radial simulado a varios tiempos de producción.

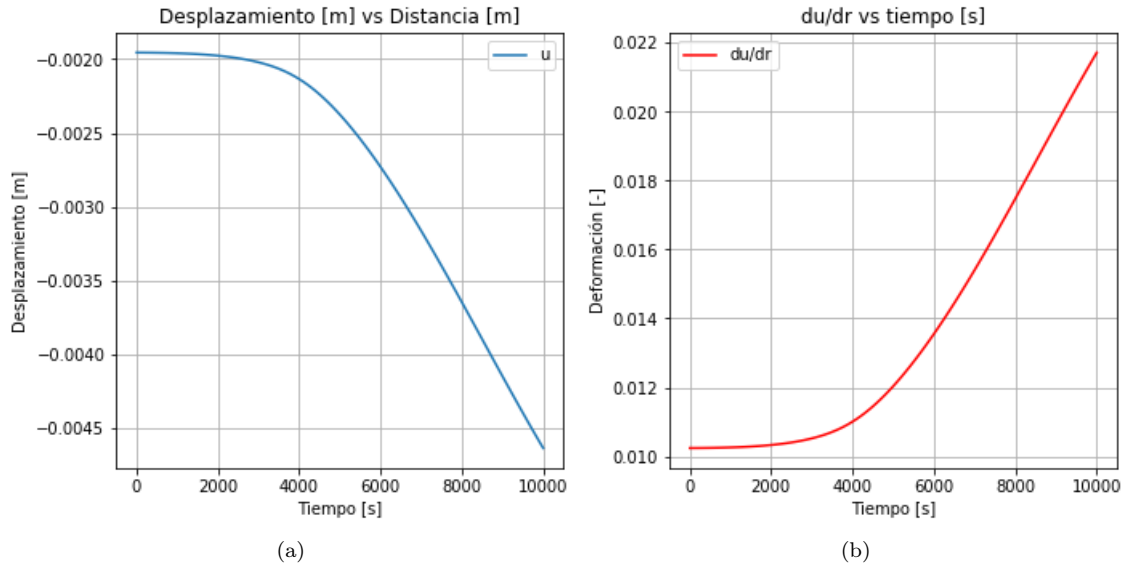


Figura 4.10: a) Variación con respecto al tiempo del desplazamiento radial en la pared del pozo obtenida por medio del simulador. b) Variación temporal de la derivada de la deformación en la pared del pozo obtenida por medio del simulador .

Para los esfuerzos efectivos se obtienen las **figuras (10) y (11)** del artículo, las cuales están representadas por las **figuras (4.11a) y (4.11b)**. Las figuras están comparadas por la **figuras (4.12a) y (4.12b)**, respectivamente. Como se observó anteriormente, existe un incremento en el valor absoluto del desplazamiento radial y su pendiente. Estos incrementos causan un decremento en el gradiente del esfuerzo efectivo radial como se observa en la figura (4.12a) y a su vez un decremento en el esfuerzo efectivo tangencial, tal como en la figura (4.12b).

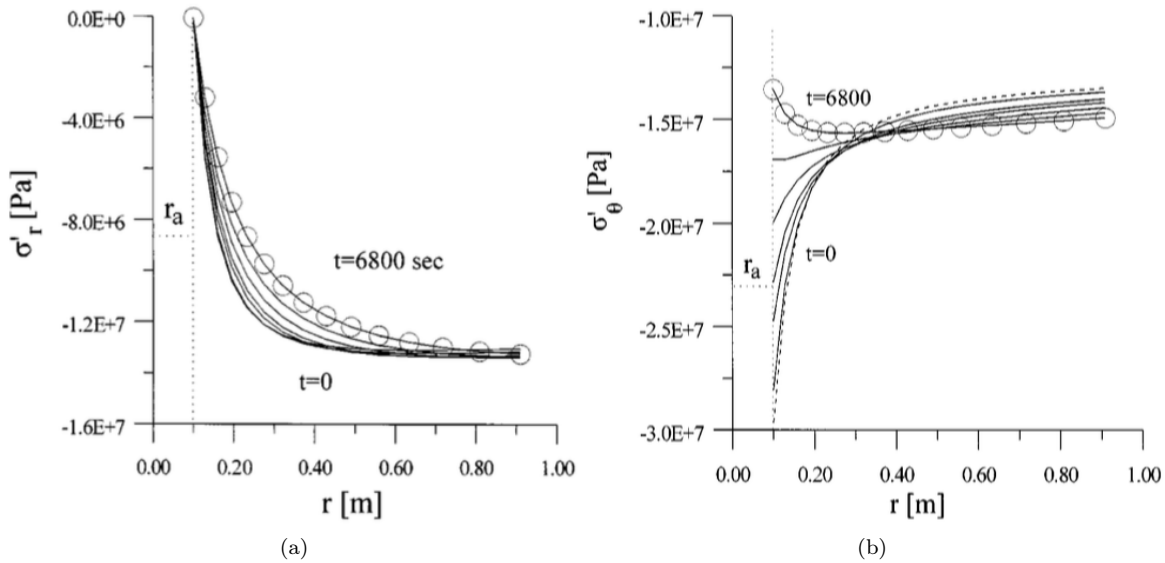


Figura 4.11: a) Distribución del esfuerzo efectivo radial para varios tiempos. b) Distribución de esfuerzo efectivo tangencial a varios tiempos. Ambas de referencia [25].

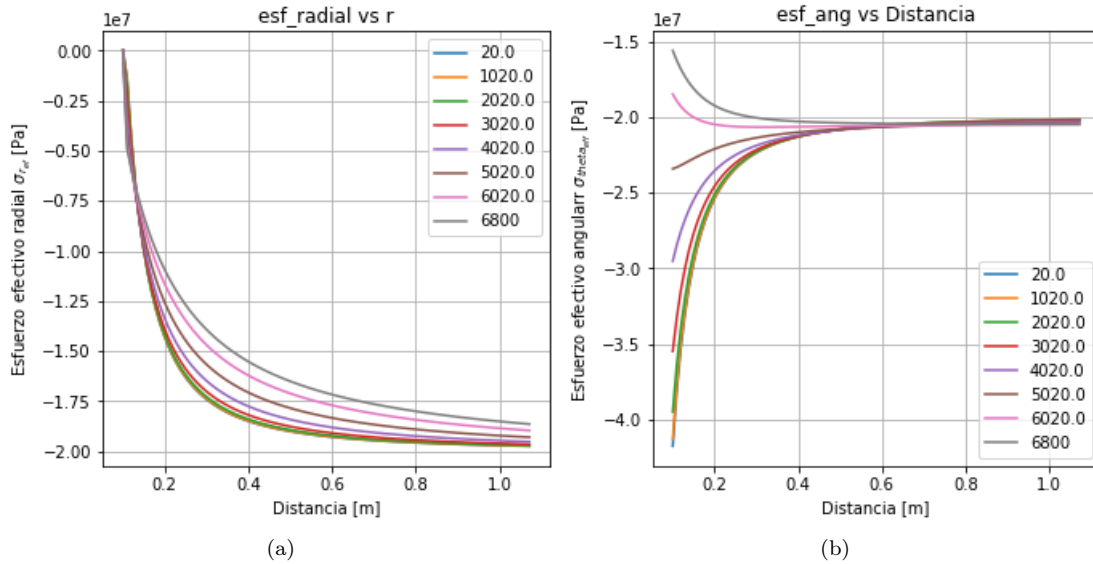


Figura 4.12: a) Distribución del esfuerzo efectivo radial a varios tiempos del simulador. b) Distribución de esfuerzo efectivo tangencial a varios tiempos obtenidas por medio del simulador.

Considerando la solución del problema de esfuerzo elástico, se realiza un análisis de falla del pozo usando el criterio de Mohr-Coulomb modificado. Los resultados del artículo se muestran en la **figura (4.13)**, mientras que los del simulador se muestran en la **figura (4.14a)** y de forma más detallada en la **figura (4.14b)**. De la figura (4.14b) se observa de manera continua como la envolvente de falla alcanza al campo de esfuerzos y por lo tanto existe un colapso de roca en dicho punto. Nótese que en la figura (4.14b) se observa que después de 3300 la envolvente de falla encuentra el campo de esfuerzos y entonces este nodo de la formación empieza a colapsar.

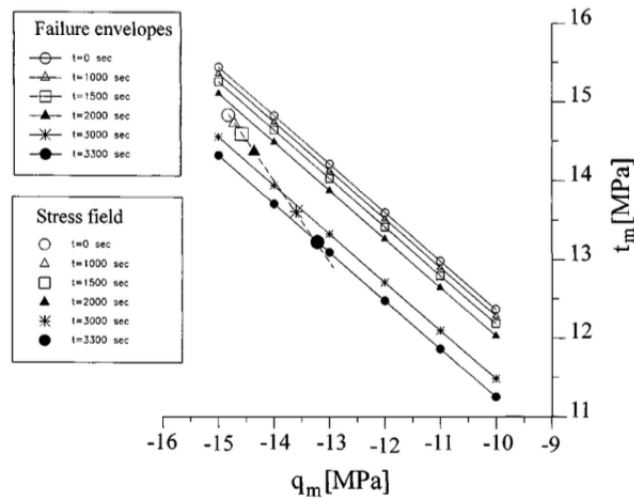


Figura 4.13: Envolventes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos ($\phi = 37^\circ$, $\bar{C} = 7.5$ [Mpa]) de referencia [25].

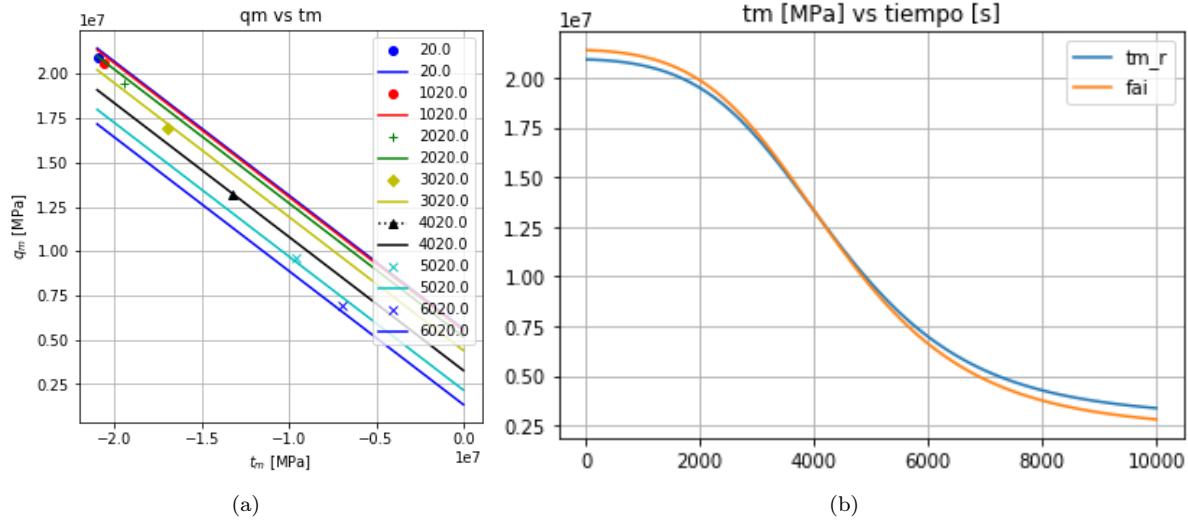


Figura 4.14: a) Envolventes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos ($\Phi = 37^\circ$, $C = 7.5$ [Mpa]) obtenidas por medio del simulador. b) Variación de la envolvente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos ($\Phi = 37^\circ$, $C = 7.5$ [Mpa]) obtenidas por medio del simulador.

En analogía con el fenómeno de difusión de calor, valores oscuros reflejan una porosidad cercana a 1, mientras que la más clara una porosidad cercana al valor inicial. En la **figura (4.15a)** se observa el espacio inicial con la porosidad uniforme con el valor inicial. Se observa en la **figura (4.15b)** que denota la mitad del tiempo: como el fenómeno es visible muy cercano al pozo. Mientras que en la **figura (4.15c)** se observa: como la porosidad ha cambiado en la tercia de distancia del pozo. Sin olvidar que la porosidad y la cohesión están directamente relacionados, estas figuras son utilizadas para visualizar la cohesión cerca del pozo.

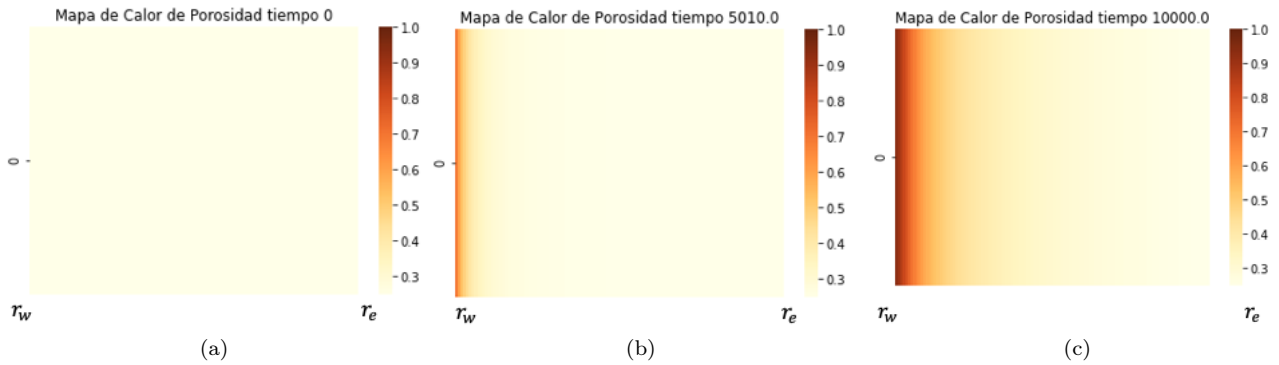


Figura 4.15: a) Mapa de calor de porosidad a tiempo de 0 segundos. Los valores empiezan desde la porosidad inicial 0.25 y terminan en el valor de 1. b) Mapa de calor de porosidad a tiempo de 5010 segundos. Los valores empiezan desde la porosidad inicial 0.25 y terminan en el valor de 1. c) Mapa de calor de porosidad a tiempo de 10000 segundos. Los valores empiezan desde la porosidad inicial 0.25 y terminan en el valor de 1.

4.9. Análisis de casos

En esta sección se realizó un análisis de caso con características de un yacimiento real que se representan con datos de la tabla (4.2). El análisis se divide en dos partes:

1. Análisis físico.- Se realiza una variación de parámetros tal como permeabilidad, caída de presión y relación de Poisson para observar el comportamiento físico.
2. Análisis numérico.- Se realiza un breve análisis de estabilidad numérica a través de la condición CFL (Courant-Friederich-Lewy) donde se varían los pasos del tiempo (Δt).

Cuadro 4.2: Datos de entrada para el simulador caso sintético.

| Parámetros físicos | Valor |
|-----------------------------------|--|
| Radio del pozo | $r_{wf} = 0.1 [m]$ |
| Radio externo | $r_e = 5 [m]$ |
| Porosidad Inicial | $\phi_0 = 0.33$ |
| Concentración inicial | $c_0 = 10^{-3}$ |
| Concentración crítica | $c_{cr} = 0.3$ |
| Permeabilidad Inicial | $k = 8.5 [mD]$ |
| Módulo de Young | $E = 1.213 [GPa]$ |
| Relación de Poisson | $\nu = 0.26$ |
| Viscosidad cinemática del fluido | $\eta_k = 3.7 \times 10^{-7} [m^2 s^{-1}]$ |
| Densidad del fluido | $\rho_f = 834.2 [kgm^{-3}]$ |
| Densidad de sólidos | $\rho_s = 2670 [kgm^{-3}]$ |
| Presión del pozo ó fondo fluyendo | $p_{wf} = 5700 [psi]$ |
| Presión externa | $p_e = 6000 [MPa]$ |
| Esfuerzo exterior | $\sigma_e = 220 [MPa]$ |
| Coefficiente de Erosión | $\lambda = 5 [m^{-1}]$ |
| Cohesión inicial de la roca | $C_o = 150 [MPa]$ |
| Ángulo de fricción interna | $\Phi = 38 [^\circ]$ |
| Número de nodos | $N_r = 100$ |
| Tiempo final | $t_f = 90000 [s]$ |
| Delta del tiempo | $dt = 100 [s]$ |
| Delta del radio | $dr = 0.5$ |
| Epsilon de Newton-Raphson | $\varepsilon_{NR} = 1 \times 10^{-5}$ |

4.9.1. Análisis físico

Observar el comportamiento físico del simulador cuando se varía un parámetro es imperativo para constatar las ecuaciones utilizadas. Los parámetros físicos que se varían son: permeabilidad (k), cohesión de la roca (C), relación de Poisson (ν), ángulo de fricción interna (Φ), y coeficiente de erosión (λ). La intención es observar el efecto físico que se genera cuando uno de los parámetros cambia. De los valores de la **Tabla 2** se obtienen la **figura (4.16)**, nótese de la figura (4.16a) que el valor de porosidad esta arriba del valor de 0.9 y la roca empezará a fallar, tal como lo muestra la **figura (4.16c)**. Esto no sucede en el caso de validación del simulador representada por las figuras (4.7a) y (4.14a) la roca empieza a fallar aproximadamente a los 3500 [s] con una porosidad cercana a 0.5. De este análisis es posible inferir que parámetros afectan más la falla de la roca y cuanto llegan a ser afectadas.

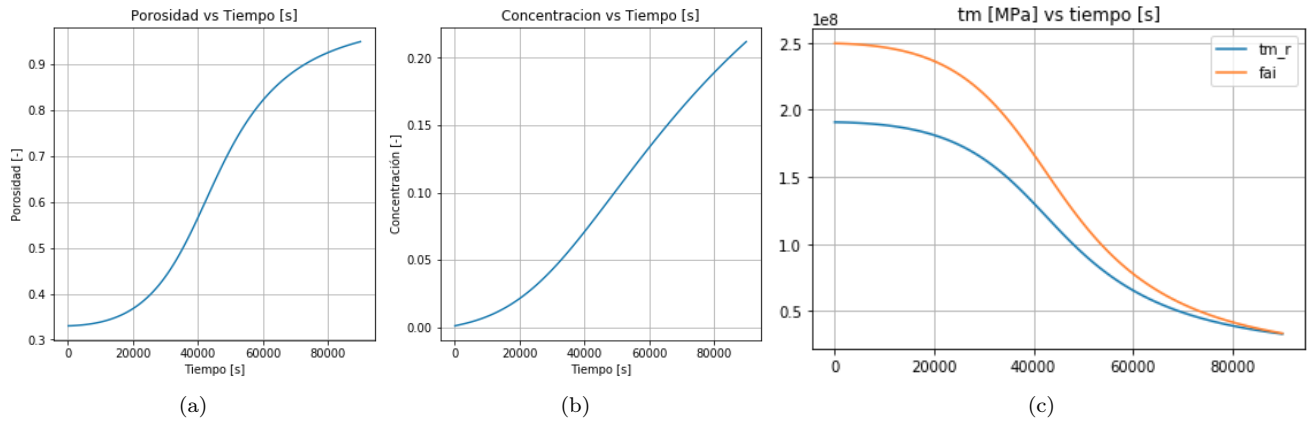


Figura 4.16: a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial, del simulador. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo del nodo inicial, del simulador. c) Variación de la envolvente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador.

4.9.1.1. Efecto físico de la permeabilidad

La permeabilidad es el parámetro más importante cuando se analiza el flujo de fluidos, cuando este valor aumenta el gasto es mayor, si el gasto es mayor las fuerzas de erosión se incrementa y la falla de la roca sera más rápida. La **figura (4.17a)** muestra que con una mayor permeabilidad la porosidad se acerca más al valor de 1.0 a mitad del tiempo de simulación, esto sugiere que yacimientos con mayor permeabilidad fallan de forma más rápida y esto se ilustra en la **figura (4.17c)**. Mientras que para el caso de concentración, la **figura (4.17b)** muestra que cuando el radio del pozo empieza a tener el valor de 1, la concentración alcanza su máximo y luego disminuye, esto debido a que ya no existe roca dispuesto a proporcionar sólido móvil para este nodo.

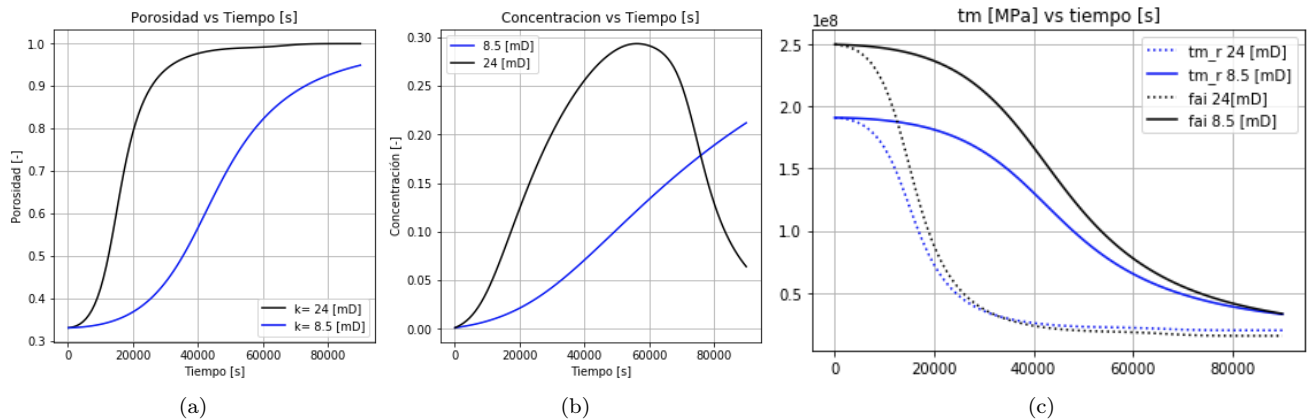


Figura 4.17: a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial a dos distintas permeabilidades. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo del nodo inicial a dos distintas permeabilidades. c) Variación de la envolvente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintas permeabilidades.

4.9.1.2. Efecto físico de la cohesión de la roca

Como se ha mencionado: la cohesión es el principal parámetro geomecánico que destaca en este modelo de flujo de fluidos acoplados a sólidos móviles, ya que la erosión de sólidos se incrementa cuando la cohesión de la roca disminuye. Si se disminuye la cohesión tal como muestra la **figura (4.18a)**, es notorio que la roca empieza a fallar más rápido y lo cerca que esta el campo de esfuerzos y la línea de falla. Nótese de las **figuras (4.18b)** y **(4.20c)** que la roca falla a mitad del tiempo del caso original.

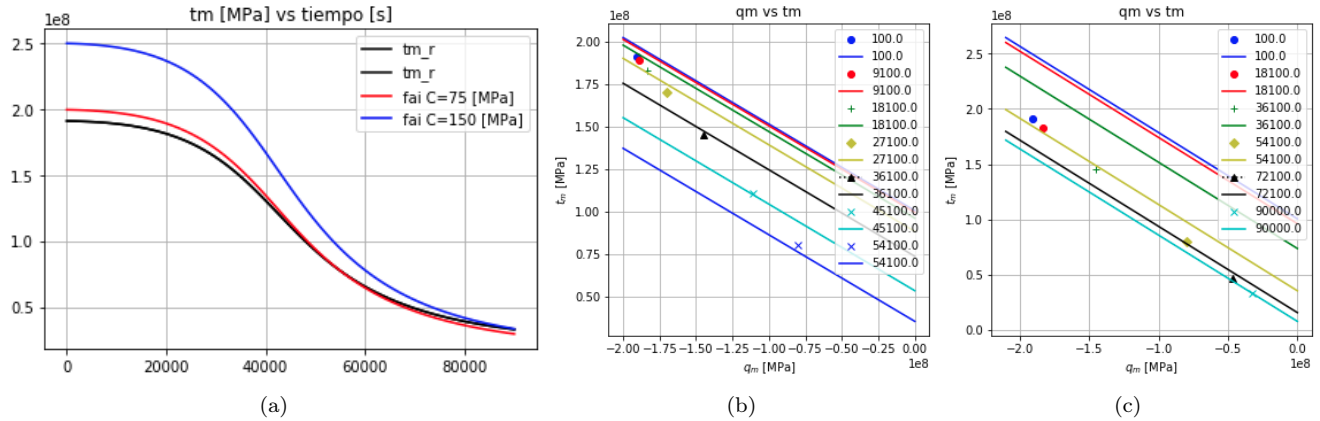


Figura 4.18: a) Variación de la envolvente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintos valores de cohesión. b) Envolventes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos con ángulo de fricción de 27° . c) Envolventes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con ángulo de fricción de 38° .

4.9.1.3. Efecto físico de la relación de Poisson

La relación de Poisson es una ecuación que miden la dureza de una roca, y una propiedad crítica que se relaciona con el esfuerzo de cierre de fracturas. Con respecto a la falla de roca, su influencia no es tan significativa, tal como muestra la **figura (4.19)**, el cambio es que tan fácil es de fallar, pero al disminuir la relación de poisson la generación del campo de esfuerzos se afecta, por lo que simplemente se genera un desplazamiento entre dos curvas a valores mayores.

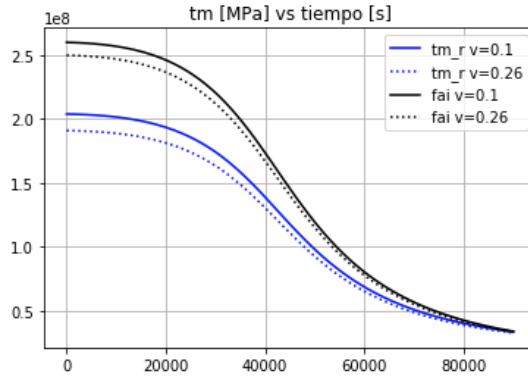


Figura 4.19: Variación de la envolvente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintas relaciones de Poisson.

4.9.1.4. Ángulo de fricción interna

El ángulo de fricción interna usualmente se obtiene de pruebas triaxiales, aunque el término deriva de la ecuación (2.6.79). Savage et al. (1996) argumentaron que el efecto es debido a fuerzas friccionales de deslizamiento a lo largo de las porciones de microescala de la superficie de la falla que no están intactas. Un ángulo menor genera pendientes menores y por lo tanto las líneas fallas están más cerca de tocar los campos de esfuerzos. Las figuras (4.20a), (4.20b) y (4.20c) ilustran esta noción y confirman que cuando hay menor ángulo del coeficiente de fricción, la falla ocurre de manera temprana y la envolvente de falla es más cercana al campo de esfuerzos.

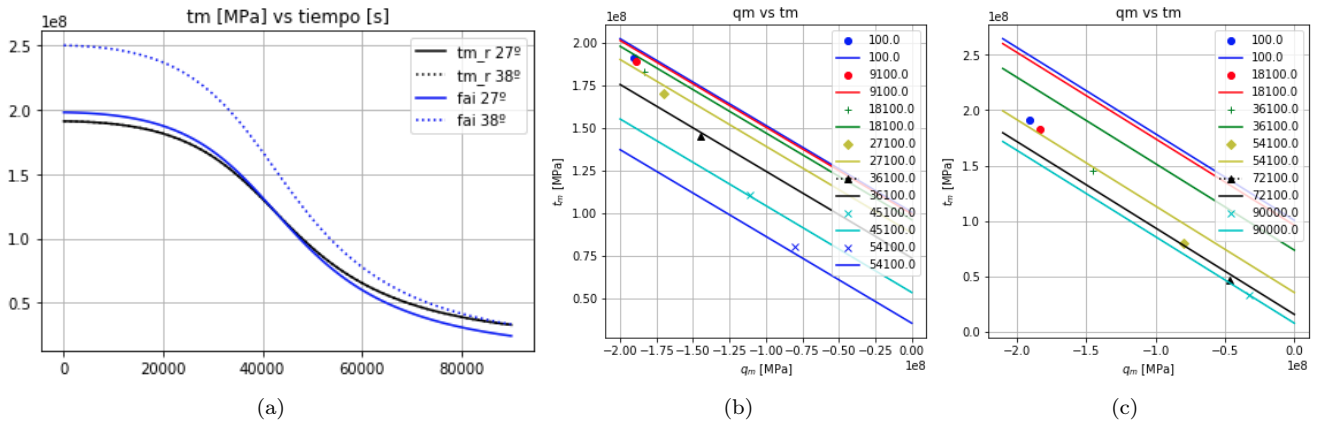


Figura 4.20: a) Variación de la envolvente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador a dos distintos ángulos de fricción interna. b) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos con ángulo de fricción de 27° . c) Envoltentes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con ángulo de fricción de 38° .

4.9.1.5. Efecto físico del coeficiente de erosión

Sin duda alguna el efecto del coeficiente de erosión es de los que más impactan en este estudio; Gravanis et al. (2015) establecen un método para calcular este parámetro mediante pruebas experimentales con núcleos. El rango de valores del coeficiente de erosión es de 10 a $.07 [m^{-1}]$, aquí se toma un caso extremo con un valor de 10.

De la **figura (4.21a)** se observa que a la mitad del tiempo final el valor es cercano a 1 y que la concentración esta en su máximo, tal como lo muestra la figura **(4.21b)**. De las **figuras (4.21c)**, **(4.22a)** y **(4.22b)** se observa que la falla de la roca empieza a mitad del tiempo final, por lo que determinar correctamente este parámetro (ya sea experimental o se derive otro método) es imperativo.

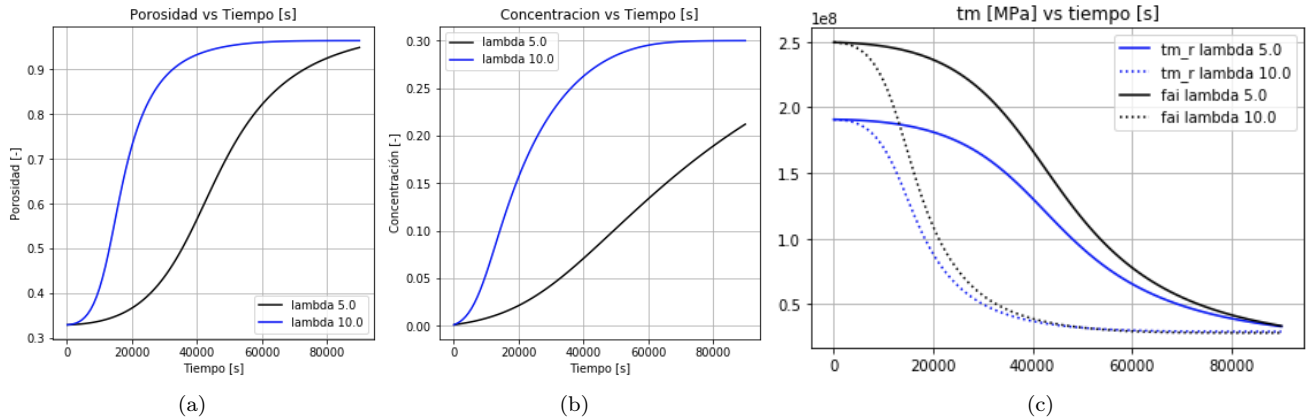


Figura 4.21: a) Variación de la porosidad respecto al tiempo del nodo inicial variando el coeficiente de erosión. b) Variación de la concentración de transporte respecto al tiempo del nodo inicial variando el coeficiente de erosión. c) Variación de la envolvente de falla y el campo de esfuerzos en la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos obtenidas por medio del simulador variando el coeficiente de erosión.

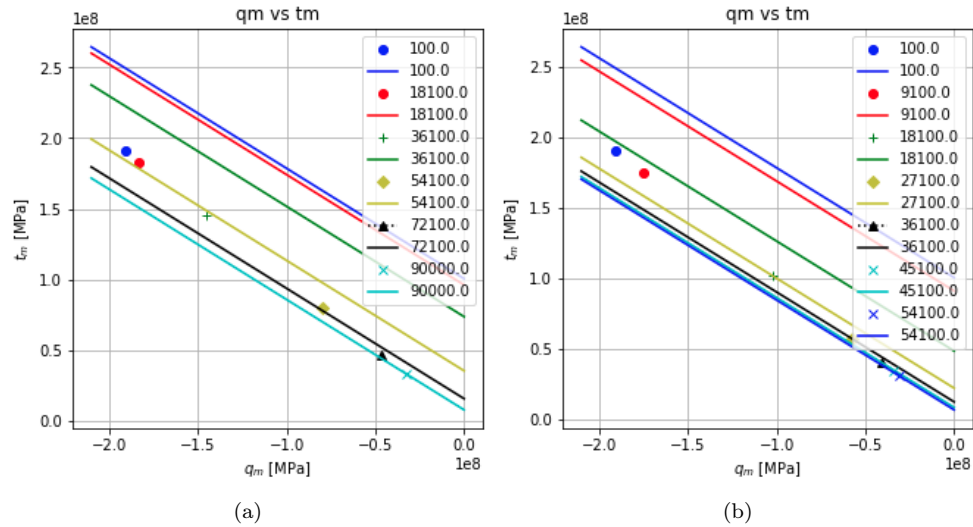


Figura 4.22: a) Envolventes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con coeficiente de daño igual a 5 b) Envolventes de fallas y esfuerzos críticos correspondientes a la frontera interna $r = r_w$, a distintos tiempos con coeficiente de daño igual a 10

4.9.2. Análisis numérico

La estabilidad numérica de un simulador es importante, ya que establece un rango de valores numéricos en el cual el simulador computa valores que son correctos. Los esquemas de estabilidad se dividen en tres:

1. Inestables.- Esquema cuya solución numérica crece de forma indefinida y posteriormente genera ruido sin importar el valor de Δt .
2. Condicionalmente estables.- Esquema cuya solución numérica son estables para un rango definido de valores de Δt .
3. Incondicionalmente estables.- Esquema cuya solución numérica son estables sin importar el tamaño de Δt .

Este trabajo se centrará en el segundo caso, que sucede cuando la combinación de ecuaciones diferenciales parciales proveen una solución numérica compleja. Para encontrar el rango de valores mencionados se requiere un criterio de estabilidad, en este caso se utiliza el criterio de Courant-Friedrichs-Lewy, ó bien el criterio de CFL propuesto por Courant et al. (1928).

El criterio de CFL establece una condición de estabilidad para soluciones numéricas condicionalmente estables. La esencia de este método se basa en que el completo dominio de dependencia numérica debe contener el completo dominio de dependencia física, dicho de otra forma esta condición expresa que la distancia de cualquier viaje de información durante un paso tiempo (Δt) dentro de la malla debe ser menor a la longitud de cada nodo (Δr), de esta forma la información de un nodo debe propagarse a sus nodos cercanos a un tiempo adecuado. Matemáticamente se expresa como:

$$CFL = v_{cfl} \frac{\Delta t}{\Delta r} \quad (4.9.1)$$

De la ecuación (4.9.1) se define Δt como paso del tiempo con unidades [s], Δr como longitud del nodo con unidades [m], v_{cfl} como la velocidad con unidades [$\frac{m}{s}$] y por último CFL como el número de Courant con unidades adimensionales. En este caso v_{cfl} será igual a la velocidad de darcy (v_D). Para que se cumpla el criterio CFL se estableció que para problemas de convección de esquema explícitos lineales siempre:

$$CFL \leq 1 \quad (4.9.2)$$

Nótese que la condición (4.9.2) fue desarrollada para un esquema explícito y en este trabajo se utiliza un esquema implícito, cuando se solucionan ecuaciones no lineales (como el de este trabajo) incluso el esquema implícito es incondicionalmente inestable si se presentan valores de CFL grandes. En consecuencia, es necesario realizar un análisis de estabilidad y establecer un rango de valores de Δt .

Se varían distintos pasos de tiempo (Δt) utilizando los valores de la tabla (4.2) y se encuentra el rango de valores donde el simulador es estable. El rango de pasos de tiempos que se utilizó es de .1 a 10,000 segundos, se obtuvo el valor de porosidad a mitad del tiempo y el resultado se muestra en el **figura (4.23)**. Nótese en la figura como el valor de porosidad varía entre .75 y 1, conforme se incrementa el número CFL se incrementa el error y al final todo diverge hacia 1, que es el valor máximo que genera el simulador. También se nota que a valores del número de CFL menores a 1 el simulador genera valores con un error pequeño.

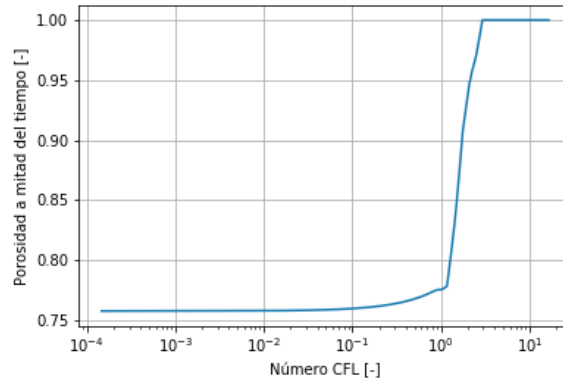


Figura 4.23: Gráfico semilog del valor del Porosidad a mitad del tiempo vs Número CFL.

Para ilustrar cuando el simulador es inestable, se realizan dos ejemplos: cuando $\Delta t = 100$ y $\Delta t = 1000$, los números de CFL generados respectivamente son: $CFL = 0.14593$ y $CFL = 1.46179$. El perfil de porosidad en relación al tiempo y su mapa de calor final se ilustran en la **figuras (4.24) y (4.25)**, se observa que la figura (4.25) presenta un comportamiento inestable en la parte a) con una inestabilidad numérica en los últimos tiempos y en la parte b) con una divergencia total al valor 1. Como última evidencia de la inestabilidad de este caso, se decide terminar el tiempo de simulación a la mitad del tiempo final y luego al cuarto del tiempo final, ya que en la figura (4.25) parte a) se puede argumentar que la inestabilidad se encuentra en el último rango del tiempo. De las **figuras (4.26)** se observa claramente que la inestabilidad persiste sin importar el tiempo final, incluso en la figura b) se observa una inestabilidad más grande, esto debido a que el algoritmo de Newton-Rapshon busca justificar los errores que generen menos error, y considerando el análisis de CFL, el error se genera por la rapidez que se pasa la información en los nodos vecinos sin que la información física se genere de forma correcta. Por lo que se confirma el criterio de CFL de la ecuación (4.9.2) cuando se varían los pasos del tiempo.

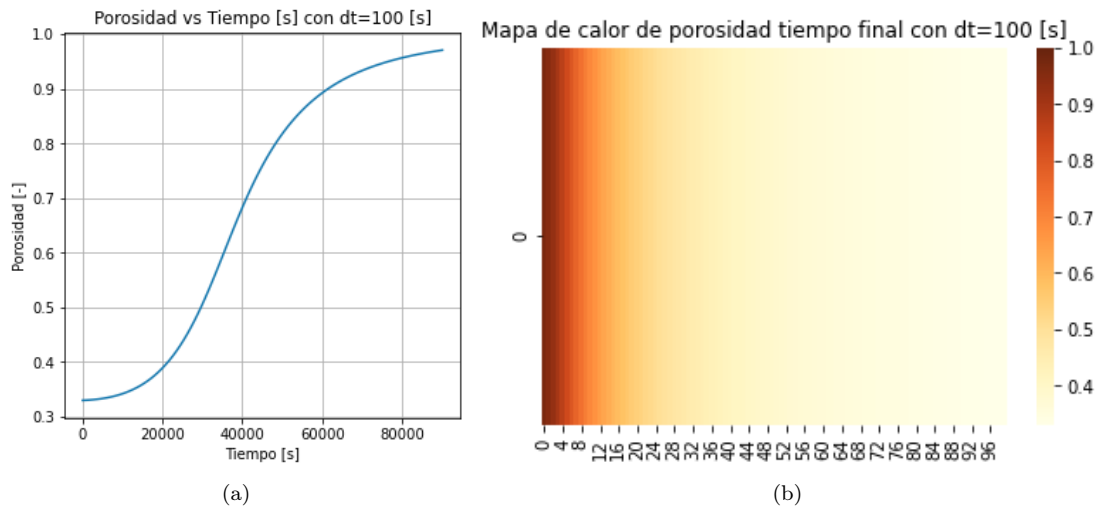


Figura 4.24: a)Variación de la porosidad y el tiempo a un paso del tiempo de 100 segundos . b) Perfil de calor de la porosidad al tiempo final con un paso del tiempo de 100 segundos.

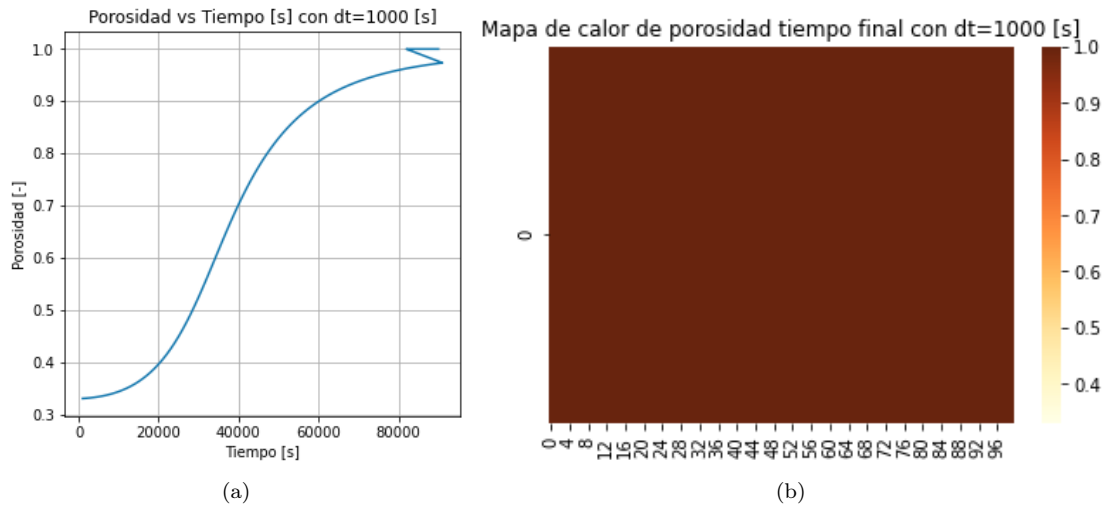


Figura 4.25: a) Variación de la porosidad y el tiempo a un paso del tiempo de 1000 segundos . b) Perfil de calor de la porosidad al tiempo final con un paso del tiempo de 1000 segundos.

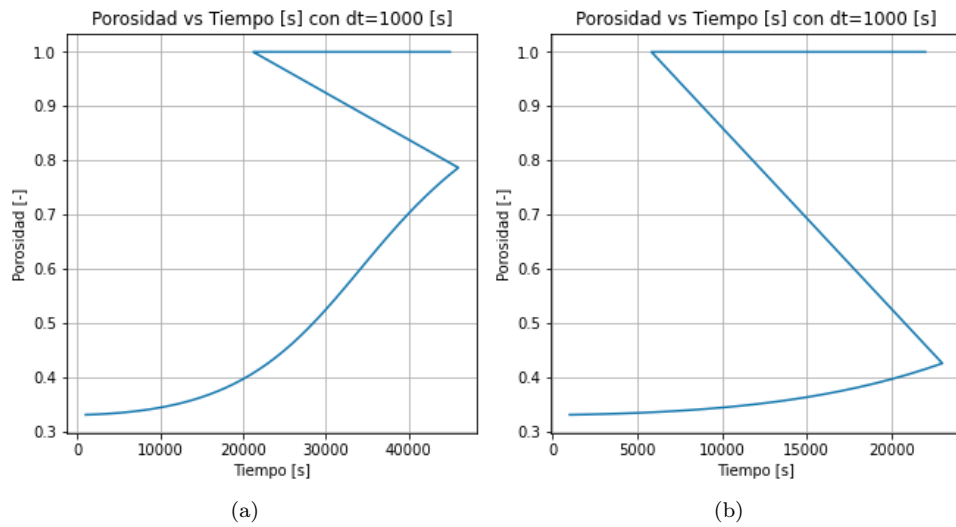


Figura 4.26: a) Variación de la porosidad y el tiempo a un paso del tiempo de 1000 segundos . b) Perfil de calor de la porosidad al tiempo final con un paso del tiempo de 1000 segundos.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

- La producción de sólidos de una formación dependen de aspectos físicos y mecánicos de la roca. La interacción entre estos dos aspectos generan una certidumbre del tiempo de la falla de la roca.
- Se derivó un modelo numérico a partir del análisis de fundamentos de flujo de fluidos, erosión de la roca causado por la fricción y aspectos geomecánicos en una dimensión de manera implícita.
- La cohesión acoplado con la porosidad y sus cambios respectivos generan las condiciones a la cual la roca falla y genera el colapso de la formación cercana al pozo.
- A tiempos tempranos la permeabilidad tiende a aumentar conforme la porosidad aumenta y se producen más sólidos, y esto genera una compensación a la caída de presión del pozo.
- El modelo numérico encuentra mayor aplicación en pozos ya en etapa maruda que presentan problemas de arenamiento y no se hay interés económico en control de arena, al igual en pozos de yacimientos maduros que no tengan datos geomecánicos y pruebas de fluido tan específicos.
- La validación del simulador presentan similitudes del comportamiento de los parámetros, rangos de valores y errores de segundos.
- El simulador solo aplica para radios de investigaciones donde se ha afectado el sistema de esfuerzos in-situ a un sistema de esfuerzos locales, por lo que a mayor distancia el aspecto geomecánico empieza a presentar errores.
- Se recomienda extender esta herramienta numérica a un flujo multifásico. Es reconocido que los efectos de agua y gas generan problemas adicionales para la producción de sólidos.
- Se recomienda extender esta herramienta a un sistema de tres dimensiones donde se consideren los esfuerzos axiales y los desplazamientos tangenciales y axiales.
- Es importante utilizar un criterio que defina el radio plástico que contengan los parámetros mecánicos y físicos fundamentales de este modelo.
- Es imperativo hacer un énfasis en el parámetro del coeficiente de erosión, se deben de establecer metodologías para el cálculo correcto del mismo. Al calcular este coeficiente, la caracterización del fenómeno de flujo de fluidos con sólidos se vuelve más significativa y realista.
- La obtención correcta de los datos geomecánicos es imperativo para tener predicciones más satisfactorias. Por lo que se recomienda ampliamente obtener núcleos durante la etapa de perforación para obtener los parámetros estáticos de la roca y realizar registros geofísicos para obtener los parámetros dinámicos de la roca, y calibrar las diferencias de frecuencias entre ellas.

Nomenclatura

| Variables | |
|----------------|--|
| \bar{a} | Aceleración $\left[\frac{ft}{s^2}\right]$ |
| A | Área $[ft^2]$ |
| A_p | Área perpendicular del plano YZ $[ft^2]$ |
| A_n | Área normal $[ft^2]$ |
| b_i | Fuerza de cuerpo $[lb_f]$ |
| c | Concentración de sólidos móviles $[adim.]$ |
| c_{bal} | Concentración balanceada $[adim.]$ |
| c_{cr} | Concentración crítica $[adim.]$ |
| C | Cohesión con daño $[psi]$ |
| C_o | Cohesión inicial con daño $[psi]$ |
| C | Cohesión $[psi]$ |
| CFL | Número Courant-Friedrichs-Lewy $[adim.]$ |
| dS_i | Área seccional $[ft^2]$ |
| e_i | Dirección de eje arbitraria en i $[adim.]$ |
| E | Módulo de Young con Daño $[psi]$ |
| E | Módulo de Young $[psi]$ |
| F | Fuerza $[lb_f]$ |
| F_m | Flujo másico $\left[\frac{lb}{s}\right]$ |
| G | Módulo cortante $[psi]$ |
| h_w | Altura del pozo $[ft]$ |
| k | Permeabilidad $[mD]$ |
| k_0 | Permeabilidad inicial $[mD]$ |
| K | Constante de Proporcionalidad $\left[\frac{lb_f}{ft}\right]$ |
| l | Longitud del sistema $[ft]$ |
| m | Masa $[lb]$ |
| \dot{m}_{cr} | Flujo másico crítico $\left[\frac{lb}{s}\right]$ |
| M_s | Masa del sólido $[lb]$ |
| M_{ff} | Masa del fluido $[lb]$ |
| M_{fs} | Masa del sólido móvil $[lb]$ |
| \bar{n} | Norma del vector $[adim.]$ |
| p | Presión $[psi]$ |
| p_g | Parámetro Geomecánico con Daño |
| \bar{p}_g | Parámetro Geomecánico |
| p_p | Presión de poro $[psi]$ |
| \bar{p} | Momento de Inercia $[lbft^2]$ |

| | |
|------------------------|---|
| q | Gasto de Darcy $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| q_m | Término Sumidero/Fuente $\left[\frac{1}{s}\right]$ |
| q_s | Gasto de producción de arena $[ft^3]$ |
| \bar{q} | Relación de volumen en cierto tiempo $\left[\frac{1}{s}\right]$ |
| r_w | Radio del pozo $[ft]$ |
| R | Radio de la zona plástica $[ft]$ |
| \mathbf{S} | Tensor de Esfuerzos $[psi]$ |
| S_{ij} | Esfuerzo en dirección ij $[psi]$ |
| S_c | Producción de arena acumulada $[ft^3]$ |
| t | Tiempo $[horas]$ |
| t_0 | Tiempo inicial $[horas]$ |
| \vec{t} | Vector tracción $[psi]$ |
| u_i | Desplazamiento en la dirección i $[ft]$ |
| \vec{u} | Vector proyección $[adim.]$ |
| \bar{v}_x | Velocidad intersticial $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| v | Velocidad de la materia $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| v_{CFL} | Velocidad de Courant-Friedrichs-Lewy $\left[\frac{m}{s}\right]$ |
| v_D | Velocidad de Darcy $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| v_i^{ff} | Velocidad de fluidos $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| v_i^{fs} | Velocidad de sólidos móviles $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| v_i^s | Velocidad de sólidos $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| \bar{v} | Velocidad de la mezcla $\left[\frac{ft}{s}\right]$ |
| v_p | Relación de Poisson $[adim.]$ |
| V | Volumen total $[ft^3]$ |
| V_s | Volumen de sólido $[ft^3]$ |
| V_{fs} | Volumen de sólidos móviles $[ft^3]$ |
| V_{ff} | Volumen de fluidos $[ft^3]$ |
| V_v | Volumen del espacio poroso $[ft^3]$ |
| V_Ω | Volumen del sistema de control Ω $[ft^3]$ |
| w | Desplazamiento en dirección y $[ft]$ |
| x | Punto en el espacio |
| Letras Griegas | |
| α | Ángulo entre dos rectas $[^\circ]$ |
| β | Ángulo entre dos rectas $[^\circ]$ |
| ε_i | Deformación en dirección i $[adim.]$ |
| ε_{vol} | Deformación Volumétrica $[adim.]$ |
| ε_θ^e | Deformación elástica cortante $[ft]$ |
| ε_θ^p | Deformación plástica cortante $[ft]$ |
| η_k | Viscosidad cinemática $[Poise]$ |
| θ | Ángulo entre dos rectas $[^\circ]$ |
| Φ | Ángulo de fricción interna $[^\circ]$ |
| λ_l | Constante de Lamé $[adim]$ |
| λ | Coefficiente de Erosión $\left[\frac{1}{ft}\right]$ |

| | |
|----------------------------|--|
| μ | Viscosidad dinámica [<i>St</i>] |
| μ_f | Coefficiente de fricción [<i>adim.</i>] |
| π | Constante Pi [<i>adim.</i>] |
| ρ | Densidad $\left[\frac{lb}{ft^3}\right]$ |
| ρ_s | Densidad del sólido $\left[\frac{lb}{ft^3}\right]$ |
| ρ_{ff} | Densidad del fluido $\left[\frac{lb}{ft^3}\right]$ |
| ρ_{fs} | Densidad del sólido móvil $\left[\frac{lb}{ft^3}\right]$ |
| $\bar{\rho}$ | Densidad de la mezcla $\left[\frac{lb}{ft^3}\right]$ |
| σ_1 | Esfuerzo máximo vertical [<i>psi</i>] |
| σ_3 | Esfuerzo mínimo horizontal [<i>psi</i>] |
| σ'_i | Esfuerzo efectivo con Daño [<i>psi</i>] |
| σ'_i | Esfuerzo efectivo [<i>psi</i>] |
| σ_h | Esfuerzo hidrostático [<i>psi</i>] |
| σ_d | Esfuerzo deviatorio [<i>psi</i>] |
| σ_n | Esfuerzo Normal [<i>psi</i>] |
| σ_m | Esfuerzo promedio [<i>psi</i>] |
| σ_r | Esfuerzo radial [<i>psi</i>] |
| σ'_r | Esfuerzo efectivo radial [<i>psi</i>] |
| σ'_θ | Esfuerzo efectivo tangencial [<i>psi</i>] |
| σ_θ | Esfuerzo tangencial [<i>psi</i>] |
| σ_{ij} | Esfuerzo en dirección <i>ij</i> [<i>psi</i>] |
| $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ | Tensor de esfuerzos [<i>psi</i>] |
| ϕ | Porosidad [<i>adim.</i>] |
| ϕ_p | Porosidad zona plástica [<i>adim.</i>] |
| ϕ_c | Porosidad zona elástica [<i>adim.</i>] |
| Φ | Coefficiente de fricción interna [<i>adim.</i>] |
| Γ_{xy} | Deformación en dirección <i>xy</i> [<i>adim.</i>] |
| τ_{ij} | Esfuerzos cortantes en la cara <i>ij</i> [<i>psi</i>] |
| τ_m | Esfuerzo cortante promedio [<i>psi</i>] |
| τ_n | Esfuerzos cortantes normal [<i>psi</i>] |
| Ω | Volumen de control [<i>ft</i> ³] |
| $\partial\Omega$ | Superficie de control [<i>ft</i> ³] |

Apéndice A

Derivación de la ecuación de momento lineal

Se tiene un cuerpo como el de la **figura (A.1)**, sujeto a una fuerza externa o de contacto y una fuerza de cuerpo b , que representa la gravedad. El momento es una medición de la masa en movimiento: cuánta masa está en cuánto movimiento y se define como:

$$d\bar{p} = \bar{v}dm \quad (\text{A.0.1})$$

La ecuación (A.0.1) representa el momento, en el que la roca que cambia conforme a la masa cambia. Tal como muestra la figura (A.A.1) en el color azul. Si se reescribe la ecuación (A.0.1) se obtiene:

$$d\bar{p} = \bar{v}\rho dV \quad (\text{A.0.2})$$

Integrando la ecuación (A.0.2) se obtiene:

$$\bar{p} = \int_{dV} \bar{v}\rho dV \quad (\text{A.0.3})$$

Se deriva el vector de momento respecto al tiempo y se obtiene un vector de fuerza; entonces derivando la ecuación (A.A.0.3) respecto al tiempo se tendrá:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{dV} \bar{v}\rho dV \quad (\text{A.0.4})$$

Para este paso, se rehúso la idea de que los cambios son de movimiento muy pequeños debido a que las deformaciones son pequeñas relativa al volumen del objeto que se modela. Por lo que la ecuación (A.0.4) queda como:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \int_{dV} \frac{d}{dt}(\bar{v}\rho) dV \quad (\text{A.0.5})$$

Debido a que ahora la ecuación (A.A.0.5) representa una ecuación con dimensiones de fuerzas, se utiliza la Segunda ley de Newton o la ecuación (2.6.67) para tomar en cuenta el conjunto de fuerzas que actúa en el sistema e igualando a la ecuación (A.0.5) se obtiene:

$$\int_{dV} \frac{d}{dt}(\bar{v}\rho) dV = \int_{dS} \bar{t}dS + \int_{dV} \rho\bar{b}dV \quad (\text{A.0.6})$$

El vector tracción, \tilde{t} , representa un vector de esfuerzos que actúan en el cuerpo de manera normal o sea:

$$\tilde{t} = \sigma^T \cdot \bar{n} \quad (\text{A.0.7})$$

Sustituyendo la ecuación (A.0.7) a la ecuación (A.0.6):

$$\int_{dV} \frac{d}{dt}(\bar{v}\rho)dV = \int_{dS} \sigma^T \cdot \bar{n}dS + \int_{dV} \rho\bar{b}dV \quad (\text{A.0.8})$$

La ecuación (A.A.0.8) tiene dos términos que relacionan el movimiento y la fuerza con el volumen de control, mientras que el otro término determina el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada. Para tener los términos en el volumen de control y lograr integrar la ecuación (A.A.0.8), se tiene que usar el Teorema de la Divergencia o Teorema de Gauss, por lo que se utiliza la ecuación (3.2.28), obteniéndose:

$$\int_{dV} \frac{d}{dt}(\bar{v}\rho)dV = \int_{dV} \nabla \cdot \sigma^T dV + \int_{dV} \rho\bar{b}dV \quad (\text{A.0.9})$$

Integrado la ecuación anterior :

$$\frac{d}{dt}(\bar{v}\rho) = \nabla \cdot \sigma^T + \rho\bar{b} \quad (\text{A.0.10})$$

La ecuación representa la ecuación de momento lineal de forma vectorial, el cual se expande de acuerdo al número de dimensiones en que se realiza el sistema. Considerando que la aceleración del cuerpo es cero ó bien se encuentra en inercia (tal como se supone en geomecánica) y el sistema se encuentra en tres dimensiones, se llega a las ecuaciones (2.6.12)-(2.6.14).

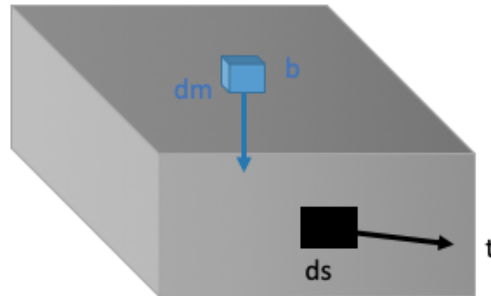


Figura A.1: Cuerpo sujeto a fuerzas de contacto (Negro) y fuerzas de cuerpo (Azul).

Apéndice B

Formulación de la discretización en espacio

Para las operaciones binarias que manejan las computadoras solo existen las sumas y restas, las otras operaciones como multiplicación, potencias, división, etc. salen de iteraciones de estas dos operaciones. El caso es similar para obtener la derivada, se requiere tener un método de aproximar la derivada que sea posible computar y que la solución aproximada sea lo más parecido a la solución de la función. La definición de la derivada es:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{B.0.1})$$

Si se aproxima la función considerando que h será suficientemente pequeño para aproximar la ecuación (B.0.1):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{B.0.2})$$

La ecuación (B.0.2) se encuentra en un formato que es computable, pero no se sabe el error que genera esta aproximación. En general el error representa la diferencia entre lo real y lo medido, por lo que si se aproxima a la derivada en un punto, y denotando la aproximación como:

$$f'(x_i) \approx \frac{\delta f}{\delta x}(x_i) \quad (\text{B.0.3})$$

Entonces el error de aproximación es:

$$\epsilon(x_i) = f'(x_i) - \frac{\delta f}{\delta x}(x_i) \quad (\text{B.0.4})$$

La meta es cuantificar el error que se genera si se utiliza la ecuación (B.0.2), entonces se aproxima la derivada de la función f en una serie de ecuaciones continuas. La Serie de Taylor se utiliza para aproximar funciones, el cual se basa en aproximar las funciones en polinomios. La Serie de Taylor se expresa como:

$$f(x) = f_i + f'_i(x - x_i) + \frac{f_i^{(2)}}{2}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{f_i^{(n)}}{n!}(x - x_i)^n \quad (\text{B.0.5})$$

En la ecuación (B.0.5) se denota f_i como la función evaluada en el punto x_i y de forma similar con las derivadas. Si se utiliza la ecuación (B.0.5) para calcular f_{i+1} y se considera que $h = x_{i+1} - x_i$ se tiene:

$$f_{i+1} = f_i + f'_i(x - x_i) + \frac{f_i^{(2)}}{2}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{f_i^{(2)}}{n!}(x - x_i)^2 \quad (\text{B.0.6})$$

Despejando la derivada de la ecuación (B.0.6), se tiene:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i^{(2)}}{2}h - \dots - \frac{f_i^{(n)}}{n}h^{n-1} \quad (\text{B.0.7})$$

Si se utiliza la definición de error (B.0.4), para la ecuación (B.B.0.7) y (B.B.0.2) se tiene:

$$\epsilon = \frac{f_i^{(2)}}{2}h - \dots - \frac{f_i^{(n)}}{n}h^{n-1} \quad (\text{B.0.8})$$

Nótese de la ecuación (B.0.8) que debido a no tener control sobre los coeficientes, entonces el error depende de h y el valor más alto será h , ya que si es un término menor a 1, las potencias solo lo harán de valor más pequeño. Dicho esto, el término dominante será el término h y se tendrá que el error es del orden de h :

$$\epsilon = O(h) \quad (\text{B.0.9})$$

Y esta nueva ecuación (B.0.9) será el error de truncamiento obtenido y la ecuación (B.0.7) se convierte en:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad (\text{B.0.10})$$

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (\text{B.0.11})$$

La ecuación (B.0.11) se conoce como aproximación por diferencia finita progresiva. De esta misma forma es posible obtener la ecuación de diferencias centradas que se establece en la ecuación (4.3.1). Así que se busco la aproximación para f_{i-1} se tiene:

$$f_{i-1} = f_i + f'_i h + \frac{f_i^{(2)}}{2}h^2 + \dots + \frac{f_i^{(n)}}{n!}h^n \quad (\text{B.0.12})$$

Si se combina la ecuación (B.0.7) y (B.0.12) se tiene:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + 2\frac{f_i^{(3)}}{6}h^3 + \dots \quad (\text{B.0.13})$$

Despejando f'_i de la ecuación (B.0.12) se tendrá:

$$f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (\text{B.0.14})$$

La ecuación (B.0.14) representa la ecuación (4.3.1), para este esquema, conocido como diferencia centradas, se tiene un error de aproximación de h^2 por lo que este esquema tiene menos error que diferencias progresivas. Los esquemas (B.0.14) y (B.0.11) sirven para discretizar la variable principal respecto al espacio, por lo que las derivadas parciales de una variable principal respecto al espacio serán resueltos mediante estos esquemas. El método de diferencias finitas realiza que las derivadas se vuelvan un medio discreto de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones; lo que realiza que las ecuaciones sean computables y se resuelvan numéricamente.

Apéndice C

Formulación de discretización temporal

Al igual que las derivadas parciales respecto al espacio, se discretizan, las derivadas parciales respecto al tiempo también deben de discretizarse. La operación matemática es similar pero las variables que se toman en cuenta son diferentes. Nótese que el Apéndice B las variables que se toman en cuenta para resolver el problema son variables que son del mismo tipo pero en diferente nodo, en este será por espacios discretos de tiempo. Suponga que se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y); y(t_0) = y_0; t \in [t_0, t_f] \quad (\text{C.0.1})$$

Se debe encontrar la función $y(t)$ tal que $y(t_0) = y_0$, que cumpla la condición de la ecuación diferencial ordinaria para el tiempo en el intervalo $t \in [t_0, t_f]$. Si se discretiza la variable continua t en intervalos donde se tomen en cuenta todos los tiempos, donde $t_{Nt} = t_f$:

$$y = [y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_{Nt-1}), y(t_{Nt})] \quad (\text{C.0.2})$$

Entonces tomando en cuenta el vector (C.0.2), considerando la notación siguiente donde $y_j = y(t_j)$ donde $j = 1, 2, \dots, Nt$.

C.1. Euler Explícito

El método de Euler explícito es el método más sencillo:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \quad (\text{C.1.1})$$

$$y_{j+1} - y_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \quad (\text{C.1.2})$$

El método de Euler consiste en integrar el lado derecho de la ecuación (C.1.2) en una forma discreta:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \approx f(t_j, y_j) \Delta t_j \quad (\text{C.1.3})$$

Donde $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. Si se requiere determinar el error asociado al utilizar la ecuación (C.1.3) entonces se expande la función $y(t)$ con series de Taylor tal como:

$$y(t) = y(t_j) + (t - t_j) \frac{dy}{dt}(t_j) + \frac{(t - t_j)^2}{2} \frac{d^2y}{dt^2}(t_j) + \dots \quad (\text{C.1.4})$$

Despejando $y(t)$ de la ecuación (C.1.4) y sustituyendo la ecuación (C.1.3) se obtiene:

$$y(t) \approx y(t_j) + (t - t_j) f(t_j, y_j) \quad (\text{C.1.5})$$

Buscando la solución para el tiempo t_{j+1} se tiene:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + f(t_j, y_j) \Delta t_j \quad (\text{C.1.6})$$

Donde $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$

Nótese que en el lado derecho de la ecuación (C.1.6) no se incluye ningún término al siguiente paso del tiempo, prácticamente todos se encuentran en el mismo paso del tiempo, términos que se conocen cuando se proponen el primer paso del tiempo. Aunque el método es muy sencillo de resolver, este tienden a ser condicionalmente estable, lo que quiere decir que en ciertos valores de Δt el método es estable.

C.2. Euler Implícito

El método de Euler implícito es similar al Euler explícito pero el cambio que se introduce es muy radical y tiene mucha influencia en la estabilidad numérica de la solución. Ahora la ecuación (C.1.3) se convertirá en:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, y(t)) dt \approx f(t_{j+1}, y_{j+1}) \Delta t_j \quad (\text{C.2.1})$$

Nótese que ahora las variables de las funciones se encuentran en el tiempo $j + 1$. Esto sugiere que la expansión de Serie de Taylor cambia a:

$$y(t) = y(t_{j+1}) + (t - t_{j+1}) \frac{dy}{dt}(t_{j+1}) + \frac{(t - t_{j+1})^2}{2} \frac{d^2y}{dt^2}(t_{j+1}) + \dots \quad (\text{C.2.2})$$

Truncando la serie (C.2.2) y evaluándola a $t = t_j$ se tiene:

$$y(t_j) = y(t_{j+1}) + (t_j - t_{j+1}) \frac{dy}{dt}(t_{j+1}) \quad (\text{C.2.3})$$

O bien de manera similar de la ecuación (C.1.6) se tiene:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1}) \Delta t_j \quad (\text{C.2.4})$$

Nótese el lado derecho de la ecuación (C.2.4), en el cual están las variables t_{j+1} y y_{j+1} , las cuales son variables que se encuentran en el siguiente paso del tiempo, esto es un problema (más cuando la ecuación es no lineal) por la manipulación algebraica y el hecho de que tienes variables en el siguiente paso del tiempo, el cual es incógnita. La gran ventaja de este método es su estabilidad, a diferencia del método de Euler explícito, este método resulta ser incondicionalmente estable o bien no alterará su comportamiento cambiando diferentes valores de Δt_j , solo se tiene que asegura que sean lo suficientemente pequeños para que se obtenga convergencia. El hecho de tener tres ecuaciones no lineales y con tres variables principales, muestra que este método sea el adecuado para este problema y así evitar problemas de estabilidad cuando se escojan los valores de paso del tiempo.

Apéndice D

Matriz Jacobiana

Si se observa la ecuación (4.5.13) se nota que se tiene una ecuación de la forma $[A] \{\vec{b}\} = \{\vec{x}\}$; es necesario determinar el valor de los elementos de la Matriz A y el vector \vec{x} para obtener el resultado del vector \vec{b} , donde i son filas y j son columnas.

Derivada $\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial \phi_j}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\frac{\partial R_1^{1^n}}{\partial \phi_1} = \frac{c_1^{n+1} - c_1^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0}{\eta_k [(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \left(\frac{(\phi_1^{n+1} - 3) \phi_1^{n+1^2}}{(\phi_1^{n+1} - 1)^3} \right) \dots \frac{c_2^{n+1} - c_1^{n+1}}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta t} \quad (\text{D.0.1})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{1^n}}{\partial \phi_2} = \mathbf{0} \quad (\text{D.0.2})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial \phi_{i-1}} = \mathbf{0} \quad (\text{D.0.3})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial \phi_i} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0}{\eta_k [(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \left(\frac{(\phi_i^{n+1} - 3) \phi_i^{n+1^2}}{(\phi_i^{n+1} - 1)^3} \right) \dots \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta t} \quad (\text{D.0.4})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial \phi_{i+1}} = \mathbf{0} \quad (\text{D.0.5})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{1^n}}{\partial \phi_{Nr}} = 0 \quad (\text{D.0.6})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{Nr}^{1^n}}{\partial \phi_{Nr}} = & \frac{c_{Nr}^{n+1} - c_{Nr}^n}{\Delta t} + \left(-\frac{k_0}{\eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s]} \frac{p_e - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) \left(\frac{(\phi_{Nr}^{n+1} - 3)\phi_{Nr}^{n+1^2}}{(\phi_{Nr}^{n+1} - 1)^3} \right) \\ & \dots \frac{c_e - c_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} - \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{D.0.7})$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial c_i}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\frac{\partial R_1^{1^n}}{\partial c_1} = \frac{\phi_1^{n+1} - \phi_1^n}{\Delta t} + \left(\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{((\rho_s - \rho_f)c_1^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \frac{1}{\Delta r_1} \quad (\text{D.0.8})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{1^n}}{\partial c_2} = \left(-\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \frac{1}{\Delta r_i} \quad (\text{D.0.9})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial c_{i-1}} = 0 \quad (\text{D.0.10})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial c_i} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{((\rho_s - \rho_f)c_i^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \frac{1}{\Delta r_i} \quad (\text{D.0.11})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial c_{i+1}} = \left(-\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \frac{1}{\Delta r_i} \quad (\text{D.0.12})$$

Nodo $i = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial c_{Nr-1}} = 0 \quad (\text{D.0.13})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{1^n}}{\partial c_{Nr}} = \frac{\phi_{Nr}^{n+1} - \phi_{Nr}^n}{\Delta t} + \left(\frac{k_0 \phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \eta_k} \frac{p_e - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{((\rho_s - \rho_f)c_{Nr}^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \frac{1}{\Delta r_{Nr}} \quad (\text{D.0.14})$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial p_i}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\frac{\partial R_1^{1^n}}{\partial p_1} = \left(\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_1} \right) \frac{c_2^{n+1} - c_1^{n+1}}{\Delta r_1} \quad (\text{D.0.15})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{1^n}}{\partial p_2} = \left(-\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s]} \right) \frac{c_2^{n+1} - c_1^{n+1}}{\Delta r_1} \quad (\text{D.0.16})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial p_{j-1}} = 0 \quad (\text{D.0.17})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial p_i} = \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_i} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{\Delta r_i} \quad (\text{D.0.18})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{1^n}}{\partial p_{i+1}} = \left(-\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_i} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}}{\Delta r_i} \quad (\text{D.0.19})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{1^n}}{\partial p_{Nr}} = 0 \quad (\text{D.0.20})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{1^n}}{\partial p_{Nr}} = \left(\frac{k_0 \phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1}) \rho_f + c_{Nr}^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_{Nr}} \right) \frac{c_e - c_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \quad (\text{D.0.21})$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial \phi_i}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1^{2^n}}{\partial \phi_1} = & \frac{1}{\Delta t} + \lambda \left(c_1^{n+1} - \frac{c_1^{n+1^2}}{c_{cr1}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) - \lambda (1 - \phi_1^{n+1}) \\ & \dots \left(c_1^{n+1} - \frac{c_1^{n+1^2}}{c_{cr1}} \right) \left(\frac{(\phi_1^{n+1} - 3) \phi_1^{n+1^2}}{(\phi_1^{n+1} - 1)^3} \right) \left(\frac{k_0}{\eta_k [(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.0.22})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{2^n}}{\partial \phi_2} = 0 \quad (\text{D.0.23})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial \phi_{i-1}} = 0 \quad (\text{D.0.24})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\begin{aligned} & \frac{p_2^{n+1} - 2p_1^{n+1} + p_{wf}}{\Delta r_1^2} + \frac{p_2^{n+1} - p_{wf}}{2\Delta r_1} \left[\frac{1}{r_1} + \left(\frac{3 - \phi_1^{n+1}}{\phi_1^{n+1}(1 - \phi_1^{n+1})} \right) \frac{\phi_2^{n+1} - 1}{2\Delta r_1} + \right. \\ & \quad \left. \dots \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_2^{n+1} - 1}{2\Delta r_1} \right] = 0 \\ & \frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial \phi_i} = \frac{1}{\Delta t} + \lambda \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1^2}}{c_{cr_i}} \right) \\ & \dots \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) - \lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \\ & \dots \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1^2}}{c_{cr_i}} \right) \left(\frac{(\phi_i^{n+1} - 3)\phi_i^{n+1^2}}{(\phi_i^{n+1} - 1)^3} \right) \left(\frac{k_0}{\eta_k [(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.0.25})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial \phi_{i+1}} = 0 \quad (\text{D.0.26})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{2^n}}{\partial \phi_{Nr-1}} = 0$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_{Nr}^{2^n}}{\partial \phi_{Nr}} = \frac{1}{\Delta t} + \lambda \left(c_{Nr}^{n+1} - \frac{c_{Nr}^{n+1^2}}{c_{cr_{Nr}}} \right) \\ & \dots \left(\frac{k_0 \phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s]} \frac{p_e - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) - \lambda(1 - \phi_{Nr}^{n+1}) \\ & \dots \left(c_{Nr}^{n+1} - \frac{c_{Nr}^{n+1^2}}{c_{cr_{Nr}}} \right) \left(\frac{(\phi_{Nr}^{n+1} - 3)\phi_{Nr}^{n+1^2}}{(\phi_{Nr}^{n+1} - 1)^3} \right) \left(\frac{k_0}{\eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s]} \frac{p_e - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.0.27})$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial c_i}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_1^{2^n}}{\partial c_1} = -\lambda(1 - \phi_1^{n+1}) \left(1 - \frac{2c_1^{n+1}}{c_{cr_1}} \right) \\ & \dots \left(\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s]} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) - \lambda(1 - \phi_1^{n+1}) \\ & \dots \left(c_1^{n+1} - \frac{c_1^{n+1^2}}{c_{cr_1}} \right) \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{((\rho_s - \rho_f)c_1^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \left(\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k} \frac{p_2^{n+1} - p_1^{n+1}}{\Delta r_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.0.28})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{2^n}}{\partial c_2} = 0 \quad (\text{D.0.29})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial c_{i-1}} = 0 \quad (\text{D.0.30})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial c_i} &= -\lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \left(1 - \frac{2c_i^{n+1}}{c_{cr_i}}\right) \\ &\dots \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s]} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) - \lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \\ &\dots \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1^2}}{c_{cr_1}} \right) \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{((\rho_s - \rho_f) c_i^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.0.31})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial c_{i+1}} = 0 \quad (\text{D.0.32})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{2^n}}{\partial c_{Nr}} = 0 \quad (\text{D.0.33})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{Nr}^{2^n}}{\partial c_{Nr}} &= -\lambda(1 - \phi_{Nr}^{n+1}) \left(1 - \frac{2c_{Nr}^{n+1}}{c_{cr_{Nr}}}\right) \\ &\dots \left(\frac{k_0 \phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1}) \rho_f + c_{Nr}^{n+1} \rho_s]} \frac{p_e - p_{Nr}^{n+1}}{\Delta r_{Nr}} \right) - \lambda(1 - \phi_{Nr}^{n+1}) \\ &\dots \left(c_{Nr}^{n+1} - \frac{c_{Nr}^{n+1^2}}{c_{cr_1}} \right) \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{((\rho_s - \rho_f) c_i^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k} \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.0.34})$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial p_i}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\frac{\partial R_1^{2^n}}{\partial p_1} = \lambda(1 - \phi_1^{n+1}) \left(c_1^{n+1} - \frac{c_1^{n+1^2}}{c_{cr_1}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_1} \right) \quad (\text{D.0.35})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{2^n}}{\partial p_2} = -\lambda(1 - \phi_1^{n+1}) \left(c_1^{n+1} - \frac{c_1^{n+1^2}}{c_{cr_1}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_1^{n+1^3}}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_1} \right) \quad (\text{D.0.36})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial p_{i-1}} = 0 \quad (\text{D.037})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial p_i} = \lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1^2}}{c_{cr_i}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_i} \right) \quad (\text{D.038})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{2^n}}{\partial p_{i+1}} = -\lambda(1 - \phi_i^{n+1}) \left(c_i^{n+1} - \frac{c_i^{n+1^2}}{c_{cr_i}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_i^{n+1^3}}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_i} \right) \quad (\text{D.039})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{2^n}}{\partial p_{Nr-1}} = 0 \quad (\text{D.040})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{2^n}}{\partial p_{Nr}} = \lambda(1 - \phi_{Nr}^{n+1}) \left(c_{Nr}^{n+1} - \frac{c_{Nr}^{n+1^2}}{c_{cr_{Nr}}} \right) \left(\frac{k_0 \phi_{Nr}^{n+1^3}}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \eta_k [(1 - c_{Nr}^{n+1}) \rho_f + c_{Nr}^{n+1} \rho_s]} \frac{1}{\Delta r_{Nr}} \right) \quad (\text{D.041})$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial \phi_i}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\frac{\partial R_1^{3^n}}{\partial \phi_1} = -\frac{p_2^{n+1} - p_{wf}^{n+1}}{2\Delta r_1} \left[\left(\frac{\phi_1^{n+1^2} - 6\phi_1^{n+1} + 3}{(1 - \phi_1^{n+1})^2 \phi_1^{n+1^2}} \right) \frac{\phi_2^{n+1} - \phi_0^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] \quad (\text{D.042})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{3^n}}{\partial \phi_2} = \frac{p_2^{n+1} - p_{wf}}{2\Delta r_i} \left[\left(\frac{3 - \phi_1^{n+1}}{\phi_1^{n+1} (1 - \phi_1^{n+1})} \right) \frac{1}{2\Delta r_1} \right] \quad (\text{D.043})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial \phi_{i-1}} = \frac{p_2^{n+1} - p_{wf}}{2\Delta r_i} \left[\left(\frac{\phi_1^{n+1^2} - 6\phi_1^{n+1} + 3}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \phi_i^{n+1^2}} \right) \frac{1}{2\Delta r_i} \right] \quad (\text{D.044})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial \phi_i} = -\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\left(\frac{\phi_i^{n+1^2} - 6\phi_i^{n+1} + 3}{(1 - \phi_i^{n+1})^2 \phi_i^{n+1^2}} \right) \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] \quad (\text{D.045})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial \phi_{i+1}} = \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\left(\frac{3 - \phi_i^{n+1}}{\phi_i^{n+1} (1 - \phi_i^{n+1})} \right) \frac{1}{2\Delta r_i} \right] \quad (\text{D.046})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{3^n}}{\partial \phi_{Nr-1}} = \frac{p_e - p_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \left[\left(\frac{\phi_{Nr}^{n+1^2} - 6\phi_{Nr}^{n+1} + 3}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \phi_{Nr}^{n+1^2}} \right) \frac{1}{2\Delta r_{Nr}} \right] \quad (\text{D.047})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{3^n}}{\partial \phi_{Nr}} = -\frac{p_e - p_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \left[\left(\frac{\phi_{Nr}^{n+1} - 6\phi_{Nr}^{n+1} + 3}{(1 - \phi_{Nr}^{n+1})^2 \phi_{Nr}^{n+1}} \right) \frac{\phi_e - \phi_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \right] \quad (D.048)$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial c_i}$:

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\frac{\partial R_1^{3^n}}{\partial c_1} = \frac{p_2^{n+1} - p_{wf}}{2\Delta r_1} \left[\left(\frac{(\rho_s - \rho_f)^2}{((\rho_s - \rho_f) c_1^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \frac{c_2^{n+1} - c_0^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] \quad (D.049)$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{3^n}}{\partial c_2} = \frac{p_2^{n+1} - p_e}{2\Delta r_1} \left[\left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_1^{n+1}) \rho_f + c_1^{n+1} \rho_s} \right) \frac{1}{2\Delta r_1} \right] \quad (D.050)$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial c_{i-1}} = -\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s} \right) \frac{1}{2\Delta r_i} \right] \quad (D.051)$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial c_i} = \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\left(\frac{(\rho_s - \rho_f)^2}{((\rho_s - \rho_f) c_i^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] \quad (D.052)$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial c_{i+1}} = \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s} \right) \frac{1}{2\Delta r_i} \right]$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{3^n}}{\partial c_{Nr-1}} = -\frac{p_e - p_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \left[\left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_{Nr}^{n+1}) \rho_f + c_{Nr}^{n+1} \rho_s} \right) \frac{1}{2\Delta r_{Nr}} \right] \quad (D.053)$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{3^n}}{\partial c_{Nr}} = \frac{p_e - p_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \left[\left(\frac{(\rho_s - \rho_f)^2}{((\rho_s - \rho_f) c_{Nr}^{n+1} + \rho_f)^2} \right) \frac{c_e - c_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \right] \quad (D.054)$$

Derivada $\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial p_i}$:

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_i^2} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \left[\frac{1}{r_i} + \left(\frac{3 - \phi_i^{n+1}}{\phi_i^{n+1}(1 - \phi_i^{n+1})} \right) \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} + \right. \\ & \left. \dots + \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1}) \rho_f + c_i^{n+1} \rho_s} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] \end{aligned} \quad (D.055)$$

Nodo $i = 1, j = 1$

$$\frac{\partial R_1^{3^n}}{\partial p_1} = \frac{-2}{\Delta r_1^2} \quad (\text{D.0.56})$$

Nodo $i = 1, j = 2$

$$\frac{\partial R_1^{3^n}}{\partial p_1} = \frac{1}{\Delta r_1^2} + \frac{1}{2\Delta r_1} \left[\frac{1}{r_1} + \left(\frac{3 - \phi_1^{n+1}}{\phi_1^{n+1}(1 - \phi_1^{n+1})} \right) \frac{\phi_2^{n+1} - \phi_0^{n+1}}{2\Delta r_1} + \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_1^{n+1})\rho_f + c_1^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_2^{n+1} - c_0^{n+1}}{2\Delta r_1} \right] \quad (\text{D.0.57})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i - 1$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial p_{i-1}} = \frac{1}{\Delta r_i^2} - \frac{1}{2\Delta r_i} \left[\frac{1}{r_i} + \left(\frac{3 - \phi_i^{n+1}}{\phi_i^{n+1}(1 - \phi_i^{n+1})} \right) \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} + \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] \quad (\text{D.0.58})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial p_i} = \frac{-2}{\Delta r_i^2} \quad (\text{D.0.59})$$

Nodo $i = 2, \dots, Nr - 1, j = i + 1$

$$\frac{\partial R_i^{3^n}}{\partial p_{i+1}} = \frac{1}{\Delta r_i^2} - \frac{1}{2\Delta r_i} \left[\frac{1}{r_i} + \left(\frac{3 - \phi_i^{n+1}}{\phi_i^{n+1}(1 - \phi_i^{n+1})} \right) \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} + \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_i^{n+1})\rho_f + c_i^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_{i+1}^{n+1} - c_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r_i} \right] \quad (\text{D.0.60})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr - 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{Nr}^{3^n}}{\partial p_{Nr-1}} &= \frac{1}{\Delta r_{Nr}^2} - \frac{1}{2\Delta r_{Nr}} \left[\frac{1}{r_{Nr}} + \left(\frac{3 - \phi_{Nr}^{n+1}}{\phi_{Nr}^{n+1}(1 - \phi_{Nr}^{n+1})} \right) \frac{\phi_e - \phi_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} + \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{\rho_f - \rho_s}{(1 - c_{Nr}^{n+1})\rho_f + c_{Nr}^{n+1}\rho_s} \right) \frac{c_e - c_{Nr-1}^{n+1}}{2\Delta r_{Nr}} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.0.61})$$

Nodo $i = Nr, j = Nr$

$$\frac{\partial R_{Nr}^{3^n}}{\partial p_{Nr}} = \frac{-2}{\Delta r_{Nr}^2} \quad (\text{D.0.62})$$

Apéndice E

Condiciones de frontera geomecánica

Utilizando las ecuaciones de frontera (4.2.14) y (4.2.15)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_w} = -\frac{v}{1-v} \frac{u(r_w)}{r_w} - g_3(r_w, t) [\phi(r_w, t) p_{wf} - p_{wf}] \quad (\text{E.0.1})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_e} = -\frac{v}{1-v} \frac{u(r_e)}{r_e} + g_3(r_e, t) [\phi(r_e, t) p_e - \sigma_e] \quad (\text{E.0.2})$$

Si se discretizan espacialmente (centradas) y temporalmente (E.0.1):

$$\frac{u_2^{k+1} - u_0^{k+1}}{2\Delta r_1} = -\frac{v}{1-v} \frac{u_1^{k+1}}{1} - g_{3r_w} [\phi_1 p_1 - p_1] \quad (\text{E.0.3})$$

Despejando u_0^{n+1} de la ecuación (E.0.3):

$$u_0^{k+1} = u_2^{k+1} + 2\Delta r_1 \left(\frac{v}{1-v} \frac{u_1^{k+1}}{r_1} + g_{31} [\phi_1 p_1 - p_1] \right) \quad (\text{E.0.4})$$

Ahora si se discretiza espacialmente y temporalmente (E.0.2) se tiene:

$$\frac{u_{N_r+1}^{k+1} - u_{N_r-1}^{k+1}}{2\Delta r_{N_r}} = -\frac{v}{1-v} \frac{u(r_{N_r})}{r_{N_r}} + g_3(r_{N_r}, t) [\phi(r_{N_r}, t) p_{N_r} - \sigma_{N_r}] \quad (\text{E.0.5})$$

Despejando u_{N_r} de la ecuación (E.0.5)

$$u_{N_r+1}^{k+1} = u_{N_r-1}^{k+1} + 2\Delta r_{N_r} \left(-\frac{v}{1-v} \frac{u(r_{N_r})}{r_{N_r}} + g_3(r_{N_r}, t) [\phi(r_{N_r}, t) p_e - \sigma_e] \right) \quad (\text{E.0.6})$$

Apéndice F

Discretización Criterio de Esfuerzos Efectivos de Pozo

Una vez que se obtiene el vector de desplazamiento (u) que la roca está experimentando, es posible determinar el comportamiento geomecánico conforme el yacimiento está produciendo fluido y sólidos de la formación. La discretización del comportamiento geomecánico es sencillo, ya que, solo se requiere discretizar en función del espacio. Debido a que se considera un análisis de deformación simétrica en un plano de deformación axial, se calculan las ecuaciones (3.7.1) y (3.7.2), que se discretizan:

Para los nodos $i = 2, \dots, Nr - 1$

$$\varepsilon_{ri} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta r_i} \quad (\text{F.0.1})$$

$$\varepsilon_{\theta i} = \frac{u_i}{r_i} \quad (\text{F.0.2})$$

Para las fronteras:

Nodo $i = 1$:

$$\varepsilon_{r1} = -\frac{v}{1-v} \frac{u_1}{1} - g_{3r_w} [\phi_1 p_1 - p_1] \quad (\text{F.0.3})$$

$$\varepsilon_{\theta 1} = \frac{u_1}{r_1}$$

Nodo $i = Nr$:

$$\varepsilon_{rNr} = -\frac{v}{1-v} \frac{u(r_{Nr})}{r_{Nr}} + g_3(r_{Nr}, t) [\phi(r_{Nr}, t) p_{Nr} - \sigma_{Nr}] \quad (\text{F.0.4})$$

$$\varepsilon_{\theta Nr} = \frac{u_{Nr}}{r_{Nr}} \quad (\text{F.0.5})$$

Con los vectores de las ecuaciones (F.0.1)-(F.0.5) se determinan las ecuaciones (F.0.6) y (F.0.7), que a su vez se discretizan y se obtiene:

Para los Nodos $i = 1, \dots, Nr$

$$\sigma_{ri} = \frac{\bar{E}(1-\phi_i)}{(1+v)(1-2v)} [(1-v)\varepsilon_{ri} + v\varepsilon_{\theta i}] \quad (\text{F.0.6})$$

$$\sigma_{\theta i} = \frac{\bar{E}(1-\phi_i)}{(1+v)(1-2v)} [(1-v)\varepsilon_{\theta i} + v\varepsilon_{ri}] \quad (\text{F.0.7})$$

Con las ecuaciones (F.0.6) y (F.0.7) es posible obtener los parámetros de τ_m y σ_m para generar las figuras (4.14a) y (4.14b).

Bibliografía

- [1]
- [2] Andrew Acock, Tom ORourke, Daniel Shirmboh, Joe Alexander, Greg Andersen, Toshinobu Kaneko, Adi Venkitaraman, Jorge López-de Cárdenas, Masatoshi Nishi, Masaaki Numasawa, et al. Practical approaches to sand management. *Oilfield Rev*, 16(1):10–27, 2004.
- [3] Philip Crosbie Carman. Fluid flow through granular beds. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 15:150–166, 1937.
- [4] Philip Crosbie Carman. Flow of gases through porous media. 1956.
- [5] Joe Dunn Clegg and Larry W Lake. *Petroleum Engineering Handbook: Production Operations*. Society of Petroleum Engineers, 2006.
- [6] CA Coulomb. An attempt to apply the rules of maxima and minima to several problems of stability related to architecture. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 7:343–382, 1776.
- [7] John M Dees, Patrick J Handren, et al. A new method of overbalanced perforating and surging of resin for sand control. *Journal of Petroleum Technology*, 46(05):431–435, 1994.
- [8] John R Fanchi and Larry W Lake. *Petroleum Engineering Handbook: General Engineering*. Society of Petroleum Engineers, 2005.
- [9] Erling Fjær. Relations between static and dynamic moduli of sedimentary rocks. *Geophysical Prospecting*, 67(1):128–139, 2019.
- [10] MB Geilikman, MB Dusseault, FA Dullien, et al. Fluid production enhancement by exploiting sand production. 1994.
- [11] E Gravanis, E Sarris, and P Papanastasiou. Hydro-mechanical erosion models for sand production. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 39(18):2017–2036, 2015.
- [12] GS Hollabaugh, JM Dees, et al. Propellant gas fracture stimulation of a horizontal austin chalk wellbore. 1993.
- [13] Yuan Jian-Yang, Bernard Tremblay, Alex Babchin, et al. A wormhole network model of cold production in heavy oil. 1999.
- [14] Mazen Y Kanj, Younane Abousleiman, et al. Realistic sanding predictions: a neural approach. 1999.
- [15] Josef Kozeny. Über kapillare leitung der wasser in boden. *Royal Academy of Science, Vienna, Proc. Class I*, 136:271–306, 1927.
- [16] N Morita, PA Boyd, et al. Typical sand production problems case studies and strategies for sand control. 1991.

- [17] E Papamichos, P Liolios, PJ Van den Hoek, et al. Breakout stability experiments and analysis. 2004.
- [18] E Papamichos, I Vardoulakis, J Tronvoll, and A Skjaerstein. Volumetric sand production model and experiment. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 25(8):789–808, 2001.
- [19] Borivoje Pašić, Nediljka Gaurina Međimurec, and Davorin Matanović. Wellbore instability: causes and consequences. *Rudarsko-geološko-naftni zbornik*, 19(1):87–98, 2007.
- [20] WL Penberthy Jr and CM Shaughnessy. Sand control, spe series on special topics. *Society of Petroleum Engineers*, page 1, 1992.
- [21] Santiago Pezzotti and Federico Antico. Introducción a la teoría de elementos finitos. *Tratamiento de la formulación de elementos*. Argentina: Universidad Nacional de La Plata, Ingeniería Aeronáutica y Mecánica de la UNLP, 2008.
- [22] RA Plumb et al. Influence of composition and texture on the failure properties of clastic rocks. 1994.
- [23] R Sakthivadivel and Shraga Irmay. *A review of filtration theories*. University of California, Hydraulic Engineering Laboratory, College of Eng, 1966.
- [24] JC Savage, DA Lockner, and JD Byerlee. Failure in laboratory fault models in triaxial tests. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 101(B10):22215–22224, 1996.
- [25] M Stavropoulou, P Papanastasiou, and I Vardoulakis. Coupled wellbore erosion and stability analysis. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 22(9):749–769, 1998.
- [26] Jean Sulem and IG Vardoulakis. *Bifurcation analysis in geomechanics*. CRC Press, 1995.
- [27] Ioannis Vardoulakis, Maria Stavropoulou, and Panos Papanastasiou. Hydro-mechanical aspects of the sand production problem. *Transport in porous media*, 22(2):225–244, 1996.
- [28] Ioannis Vardoulakis, Maria Stavropoulou, and Panos Papanastasiou. Hydro-mechanical aspects of the sand production problem. *Transport in porous media*, 22(2):225–244, 1996.
- [29] Karl Von Terzaghi and Otto Karl Fröhlich. *Theorie der Setzung von Tonschichten: eine Einführung in die analytische Tonmechanik*. Deuticke, 1936.
- [30] Yalong Wang et al. Sand production and foamy oil flow in heavy-oil reservoirs. 1997.
- [31] Bailin Wu, Chee Phuat Tan, Ning Lu, et al. Effect of water-cut on sand production-an experimental study. 2005.
- [32] Liangwen Zhang, Maurice B Dusseault, et al. Sand-production simulation in heavy-oil reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 7(06):399–407, 2004.
- [33] Shouwei Zhou and Fujie Sun. *Sand production management for unconsolidated sandstone reservoirs*. Wiley Online Library, 2016.