



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

GAVILLAS SOBRE ENDOMORFISMOS DEL INTERVALO UNITARIO

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

LUIS JESÚS TURCIO CUEVAS

DIRECTOR DE LA TESIS

Dr. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

Dr. OCTAVIO MENDOZA HERNÁNDEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

Dr. ADRIÁN VÁZQUEZ MÁRQUEZ, CINVCAT

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO DE 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	1
1 Cohesión Axiomática	7
1.1 Cohesión	7
1.2 Cohesión sobre conjuntos	15
1.3 Objetos débilmente Kan	20
2 Precohesión	23
2.1 Pregavillas	23
2.2 Gráficas Reflexivas	28
2.3 Preservación de objetos débilmente Kan	30
2.4 Conjuntos simpliciales	32
2.5 Conjuntos bipuntuados	35
2.6 Gaeta y Zariski	36
3 Cohesión	43
3.1 El topos de funciones unilaterales	45
3.2 El topos de cubiertas que se traslapan	55
Conclusiones	61
Bibliografía	63

Introducción

Cohesión axiomática es el resultado de un programa que inicia con la escuela de mecánica racional de Clifford A. Truesdell y Walter Noll. Uno de los objetivos de esta escuela es hacer un fundamento matemático para la termodinámica y la física continua (ver, por ejemplo, [35] y [32]).

De la misma forma que la física continua, muchas otras actividades humanas requieren desarrollar un concepto adecuado de espacio y hacer ciertas construcciones en él. En las aplicaciones es necesario obtener resultados confiables por lo que deben usarse sólo ciertos principios de pensamiento, los cuales son la lógica del sistema, y principios acerca del espacio, o bien geometría. Esta es una buena razón por la cual usar teoría de categorías como herramienta principal en las aplicaciones ya que, como en los topos, se hace explícita la estrecha relación que hay entre geometría y lógica. Así, el fundamento del concepto de espacio debe ser categórico y no se debe olvidar las aplicaciones que lo motivaron. En palabras de Lawvere:

During the past forty years we have become accustomed to the fact that foundations are relative, not absolute. I believe that even greater clarifications of foundations will be achieved by consciously applying a concentration of applications from geometry and analysis, that is, by pursuing the dialectical relation between foundations and applications. (Ver [34].)

Como nota Lawvere en [18], por un lado una construcción esencial en física continua es el espacio de funciones y por otro lado el contexto matemático en el que se desarrolla esta teoría es la categoría de espacios topológicos o la de variedades de Banach. Como estas categorías no tienen una buena noción de exponencial se elimina la simplicidad de las motivaciones geométricas y físicas para las construcciones que suelen hacerse. En el mismo trabajo Lawvere señala que la teoría geométrica para hablar de “movimiento” debe ser necesariamente categórica y muestra algunas de las ventajas de hacer esto.

Por lo anterior, un contexto razonable para el fundamento matemático de dichas teorías es el de categorías cartesianas cerradas. Además, para dar claridad e intuición a las construcciones necesarias en lo que debería ser una categoría de espacios será necesario usar categorías extensivas. Como explica Lawvere en [19] este tipo de categorías permiten construir morfismos como los de Johnstone en [7] y mostrar que todo objeto es colímite de decidibles conexos, como es el caso en pregavillas con los representables.

Regresando al problema original, dado el contexto de categorías cartesianas cerradas y extensivas como categorías de espacios para los fundamentos de la escuela de mecánica racional surge la necesidad de pedir algo más para modelar cuerpos continuos y movimiento; por lo que hace falta dar una noción de continuidad en estas categorías espacios. En [14] Lawvere explica que el concepto de cohesión es parecido al de continuidad:

Because the term ‘continuous’ has had a particular mathematical definition for more than a century, I will instead use ‘cohesive’ for this philosophical concept, but of course I will immediately try to tame it with mathematical definitions.

Para “domesticar” este concepto de cohesión, Lawvere sigue a Cantor, como por ejemplo en [17]. En este trabajo Lawvere explica la categoría de *Mengen* como una categoría de espacios con variación y cohesión y su negación (de estructura) para obtener la categoría de *Kardinalen*. Dada una categoría \mathbf{M} de *Mengen* explica el paso que hizo Cantor de esta categoría a la categoría de *Kardinalen* asociada \mathbf{K} por medio de la siguiente pareja de funtores adjuntos

$$\text{discreto} \left[\begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \dashv \\ \downarrow \\ \mathbf{K} \end{array} \right] \text{puntos}$$

Así, todo *Kardinale* es un *Menge* de tipo degenerado, es decir, uno que no tiene cohesión. Además la counidad $\text{discreto}(\text{puntos}(M)) \rightarrow M$ es una aproximación de M dada sólo su cardinalidad.

Hay una forma completamente diferente de obtener un *Menge* dado un *Kardinale*, esta forma se da como el adjunto derecho de puntos, es decir, hay una cadena

$$\text{discreto} \left(\begin{array}{c} \mathbf{M} \\ \uparrow \quad | \quad \uparrow \\ \text{puntos} \\ \downarrow \\ \mathbf{K} \end{array} \right) \text{codiscreto}$$

de funtores adjuntos. La diferencia a la que nos referimos está enfatizada al tomar dos *Kardinalen* $K_1, K_2 \in \mathbf{K}$ y notar que los \mathbf{M} -morfismos de la forma $\text{codiscreto}(K_1) \rightarrow \text{discreto}(K_2)$ son constantes. Esto significa que $\text{codiscreto}(K_1)$ tiene un tipo de cohesión totalmente opuesto al de $\text{discreto}(K_2)$.

Con esto lo que hace falta para la construcción de categorías adecuadas como espacios para la física continua es domesticar esta noción de cohesión por medio de funtores adjuntos. La interpretación que hace Lawvere acerca del trabajo de Cantor usa las técnicas de topos y morfismos geométricos desarrolladas por Grothendieck. Como explica Lawvere en [15], el trabajo de Grothendieck acerca de morfismos geométricos se puede interpretar diciendo que $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ expresa el contraste de cohesión \mathcal{E} con no cohesión \mathcal{S} , donde \mathcal{S} es un topos “arbitrario”. Por lo tanto, es posible aplicar la doble negación de Cantor en este contexto para obtener una 2-categoría de “espacios” sobre \mathcal{S} . En este sentido Grothendieck nos da una forma completamente general de pensar en continuidad, una forma tan robusta que, como mencionamos antes, Lawvere prefiere llamar cohesión.

De nuevo en el contexto de física y siguiendo [18], Lawvere explica cómo hace dos siglos se resolvieron exitosamente algunos problemas de cálculo de variaciones usando la noción de trayectoria en lugar de abierto como noción básica. Esto lleva a dar categorías con ciertas figuras geométricas como tipo básico o primitivo. Por ejemplo, el topos de Lawvere. Este topos se construye, como lo hace Johnstone en [6], tomando el monoide M de funciones continuas del intervalo unitario $I = [0, 1]$ en sí mismo. Como para cada espacio X el conjunto de funciones continuas PX de I en X es un M -conjunto, entonces damos a M la topología de Grothendieck más grande tal que los M -conjuntos anteriores son gavillas. Sin embargo Isbell muestra en [5] que la criba generada por las funciones $x \mapsto x/2$ y $x \mapsto (x + 1)/2$ no puede ser cubriente en dicha topología. Así, Johnstone decide abandonar las ideas y motivaciones de Lawvere para hacer su topos topológico, el cual es el resultado de cambiar la noción primitiva de trayectoria continua a sucesión convergente. Al hacer esto Johnstone logra el objetivo puramente matemático de Lawvere, crear una categoría de espacios topológicos con mejores propiedades que la categoría de espacios topológicos común.

Para lograr esto, como se menciona en [6], Johnstone se ve obligado a abandonar la filosofía de Lawvere y en particular las aplicaciones que tenía en mente.

Por otro lado, usar trayectorias continuas como concepto básico crea un marco conceptual donde parece natural hablar de movimiento. Como sugiere Lawvere en [20] y [15], si es posible realizar movimientos infinitesimalmente pequeños en un “espacio” entonces este debería ser “continuo”.

This “continuity” property [...] also holds if the contrast with \mathcal{S} is determined [...] by an infinitely divisible interval in \mathcal{E} . ([15])

Estas ideas nos motivaron a pensar que si no el topos de Zariski al menos sus versiones suaves deberían ser “espacios continuos”.

En [15] Lawvere logra una axiomatización para que una categoría sea considerada una categoría de espacios adecuada para las formalizaciones que mencionamos al principio. Esta axiomatización incluye dos cosas, una de ellas es distinguir un espacio generalizado de una categoría de espacios descartando las categorías del primer tipo; y la otra es una propiedad para distinguir la continuidad de los espacios (ver [16]). Incluso con las motivaciones y los comentarios de Lawvere en diversos artículos no ha sido fácil encontrar modelos de esta noción de continuidad. Un ejemplo de estos es el topos de Menni en [30] con funciones lineales (o polinomiales) a pedazos del intervalo unitario en sí mismo. En este ejemplo se reduce radicalmente la cantidad de morfismos $I \rightarrow I$ comparado con el topos de Lawvere. De esta manera la patología encontrada por Isbell ya no aparece. Además, este ejemplo se puede pensar como una primera respuesta al topos topológico de Johnstone, en el sentido de que sólo hacía falta volver a pensar la idea original de Lawvere para encontrar un “topos de espacios topológicos” que siga teniendo a trayectoria continua como noción primitiva. En otras palabras, es una forma de regresar a la idea original de Lawvere para hacer un topos de espacios topológicos. De esta manera podemos rehacer los resultados de Johnstone en un topos donde la noción primitiva es trayectoria en lugar de sucesión convergente.

Desde el topos de Menni no se había encontrado ningún otro ejemplo de esta naturaleza de “categoría de espacios continúa”, por lo que en este trabajo nos dimos a la tarea de encontrar más ejemplos. Además, los ejemplos que se encontraron también se pueden pensar como una continuación del topos de Lawvere y una respuesta al topos topológico de Johnstone. Más aún, en [30] Menni deja una pregunta sin responder:

¿cuál es el monoide de funciones continuas del intervalo unitario en sí mismo más grande que genera un topos continuo? Nuestro primer ejemplo es una respuesta a esta pregunta y muestra que en estos topos es posible desarrollar los resultados de Johnstone en [6] con sus mismas técnicas. Nuestro segundo ejemplo trata de retomar al topos de Lawvere pero por las observaciones anteriores se cambió la topología siguiendo las ideas de Isbell en [5]. A pesar de que en la referencia anterior parecen estar todas las ideas que hacen funcionar a nuestros ejemplos, no fue un trabajo fácil extraer tales ideas ya que esa cita es sólo el siguiente párrafo:

The sheaves for the canonical topology on the monoid M of continuous selfmaps on a 1-cell are described. Such a sheaf X is an M -set with two more types of partial operations. An element π of X is a sort of “path”; by applying suitable maps in M one can obtain the first half of π , the points of π , etc. Two paths π_1, π_2 in X can be amalgamated if a non-degenerate end segment of π_1 coincides with a beginning segment of π_2 , but not if only endpoints agree. In the later case, however, one have splices $\pi_1 \circ \pi_0 \circ \pi_2$ where π_0 is a constant path, giving a definite well-behaved operation on homotopy classes. Finally for certain $\alpha \in M$, the covering maps, any π satisfying all equations $\pi\beta = \pi\gamma$ satisfied by α can be lifted to π^* , where $\pi^*\alpha = \pi$. They are generated by amalgamation from those α_0 such that the pullback of α_0 along any $\gamma \in M$ contains a path projecting onto the domain of γ , which are those maps mapping some subinterval J of the cell I lightly onto I so that each interior point p of J has a neighborhood composed of two intervals on each of which $\alpha_0(x) - \alpha_0(p)$ does not change sign.

La organización de este trabajo es como sigue. En el primer capítulo se enuncian las definiciones y resultados conocidos, indicando en todos ellos de dónde fueron extraídos. Esto puede servir como un panorama rápido de la situación actual del axioma de continuidad. Además se muestran las técnicas que serán útiles para el desarrollo de los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo encontramos una caracterización de los objetos débilmente Kan (aquellos que satisfacen el axioma de continuidad) en algunas categorías. Estos ejemplos muestran que la intuición de Marmolejo y Menni en [28] acerca de la preservación de pedazos, en la dirección que no se muestra en el trabajo citado, era correcta. Esta intuición permitió dar la caracterización deseada de manera fácil. Además, se muestra con un ejemplo de gráficas reflexivas que la exponencial de objetos débilmente Kan no es necesariamente un objeto débilmente Kan. Por último tratamos de encontrar una caracterización de estos objetos en el topos de Zariski que nos permitiera mostrar si este es o no un ejemplo más de topos continuo. Aunque fracasamos en tal caracterización mostramos que tanto el topos de Gaeta como el

de Zariski satisfacen todos los axiomas propuestos por Lawvere en [15] salvo por la condición de continuidad.

Finalmente, en el tercer capítulo mostramos tres ejemplos de categorías cohesivas sobre **Con**. El primero es un “ejemplo de juguete” donde la categoría sobre **Con** no es un topos. Los siguientes dos ejemplos son, como se mencionó antes, una continuación del trabajo de Lawvere y Menni. En uno se encuentra el submonoide de funciones continuas del intervalo unitario en sí mismo más grande para el cual las particiones de Menni siguen siendo una topología de Grothendieck y por tanto induce un topos cohesivo sobre **Con**. En este ejemplo también desarrollamos una parte del trabajo de Johnstone en [6] con la intención de mostrar que las mismas técnicas usadas en el topos topológico también funcionan en este tipo de topos. El otro ejemplo es un intento de reivindicar el topos de Lawvere. Para esto usamos el monoide completo de funciones continuas del intervalo en sí mismo pero cambiamos la topología. Tanto la topología como las técnicas en este ejemplo son el resultado de tratar de entender el trabajo de Isbell en [5] y ponerlo en el contexto del topos de Menni [30].

Capítulo 1

Cohesión Axiomática

1.1 Cohesión

En 2007 Lawvere da los axiomas para cohesión en [15]. Aunque nosotros usaremos topos la definición original se enuncia para categorías cartesianas cerradas y extensivas.

Definición 1.1. Sean \mathcal{E} y \mathcal{S} categorías cartesianas cerradas y extensivas. \mathcal{E} es *precohesiva* relativa a \mathcal{S} si hay una cadena de funtores adjuntos

$$\begin{array}{c} \mathcal{E} \\ \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ p^* \\ \downarrow \end{array} \right| \begin{array}{c} \downarrow \\ p_* \\ \uparrow \end{array} \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ p^! \\ \downarrow \end{array} \right| \mathcal{S} \end{array}$$

que satisfacen lo siguiente:

1. p^* (o equivalentemente $p^!$) es fiel y pleno,
2. $p_!$ preserva productos finitos,
3. (*Nullstellensatz*) la transformación natural canónica $\theta: p_* \rightarrow p_!$ es puntualmente un epimorfismo.

Cuando esto se satisfaga también diremos que hay un *morfismo precohesivo* $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$. Denotaremos con σ y τ a la unidad y counidad de $p_! \dashv p^*$, con α y β a las de $p^* \dashv p_*$ y con η y ε a las de $p_* \dashv p^!$.

Un ejemplo elemental de una categoría precohesiva sobre conjuntos es el de digráficas reflexivas. Una digráfica reflexiva es una digráfica donde cada vértice tiene un lazo especial. Otra forma de obtener esta categoría es truncando la categoría simplicial $\mathbf{\Delta}$ en uno y tomar $\mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$. Para facilitar la notación denotaremos con \mathbf{GraR} a la categoría de digráficas reflexivas y morfismos entre ellas. Un morfismo precohesivo $p : \mathbf{GraR} \rightarrow \mathbf{Con}$ está dado por los siguientes funtores: $p_!G$ es el conjunto de componentes conexas de la gráfica, p^*S es la gráfica con vértices S y sólo lazos especiales, p_*G es el conjunto de vértices de la gráfica y $p^!S$ es la gráfica que tiene a S como conjunto de vértices y si $(x, y) \in S \times S$ entonces la arista $x \rightarrow y$ está en $p^!S$. Así, entre dos vértices distintos hay dos aristas, una en cada dirección.

De este ejemplo se toma la nomenclatura de los funtores, de izquierda a derecha son: pedazos, discreto, puntos y codiscreto. Además, en este caso $\theta_G : p_*G \rightarrow p_!G$ es la función que a cada vértice le asigna la componente conexa donde está. De esta forma el *Nullstellensatz* afirma que toda componente conexa tiene al menos un vértice. La conexión entre el *Nullstellensatz* como fue expuesto arriba y el *Nullstellensatz* de Hilbert en geometría algebraica se explica en [22].

Johnstone muestra en [8] algunas de las propiedades que se tienen por tener los cuatro adjuntos. Por ejemplo, usando que p^* es fiel y pleno es equivalente a que la unidad α y las counidades τ y ε sean isomorfismos, construye las transformaciones naturales canónicas $\theta : p_* \rightarrow p_!$ y $\varphi : p^! \rightarrow p^*$ como cualquiera de las composiciones de los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 p_* & \xrightarrow{p_*\sigma} & p_*p^*p_! \\
 \tau_{p_*}^{-1} \downarrow & \searrow \theta & \downarrow \alpha_{p_!}^{-1} \\
 p_!p^*p_* & \xrightarrow{p_!\beta} & p_!
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 p^* & \xrightarrow{p^*\varepsilon^{-1}} & p^*p_*p^! \\
 \eta_p^* \downarrow & \searrow \varphi & \downarrow \beta_p^! \\
 p^!p_*p^* & \xrightarrow{p^!\alpha^{-1}} & p^!
 \end{array}$$

y muestra que θ sea puntualmente un epimorfismo es equivalente a que φ sea puntualmente un monomorfismo, como comenta Lawvere en [15]. Aunque el resultado importante en este momento es la equivalencia que mencionamos, para demostrar esto Johnstone introduce una tercera equivalencia. Con nuestros funtores esta equivalencia es: p_* es fiel en morfismos cuyo codominio está en la imagen de p^* . Algunas consecuencias de este enunciado son expuestas en [29].

Además, en la sección 1 de [8] Johnstone da una condición necesaria y suficiente para la existencia de morfismos precohesivos de topos de Grothendieck sobre \mathbf{Con} .

Para esto recordamos una categoría es conexa si cualesquiera dos objetos se pueden conectar con una sucesión finita de copalmos. Además, un sitio (\mathbf{C}, J) es localmente conexo si toda criba cubriente sobre C es conexa, cuando la pensamos como una subcategoría plena de \mathbf{C}/C . Si (\mathbf{C}, J) es localmente conexo y \mathbf{C} tiene objeto terminal, entonces (\mathbf{C}, J) es conexo y localmente conexo.

Proposición 1.2. $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo si y sólo si \mathcal{E} tiene un sitio de definición (\mathbf{C}, J) conexo y localmente conexo tal que todo objeto de \mathbf{C} tiene un punto.

Esta proposición nos será útil para notar que los ejemplos del capítulo 3 son precohesivos.

Como fue observado en [15], el *Nullstellensatz* implica que el morfismo $p_1(A \times B) \rightarrow p_1A \times p_1B$ es un epimorfismo. Para esto basta notar que p_* preserva productos, que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p_*(A \times B) & \xrightarrow{\cong} & p_*A \times p_*B \\ \theta_{A \times B} \downarrow & & \downarrow \theta_A \times \theta_B \\ p_1(A \times B) & \longrightarrow & p_1A \times p_1B \end{array} \quad (1.1)$$

conmuta y que cuando \mathcal{S} es un topos, como lo será para nosotros, se tiene que $\theta_A \times \theta_B$ es epimorfismo. En efecto, por el *Nullstellensatz* θ_A y θ_B son epimorfismos y el producto de epimorfismos es un epimorfismo (ver proposición 7 del capítulo 4 en [25]). Si \mathcal{S} no es un topos, sólo cartesiana cerrada y extensiva, será necesario pedir que satisfaga el axioma de elección interno para que $\theta_A \times \theta_B$ sea un epimorfismo.

Originalmente Lawvere escribió las definiciones 1.1 y la siguiente como una sola definición. Nosotros, siguiendo a Menni en [30], separamos las definiciones para enfatizar que encontrar categorías precohesivas, al menos sobre \mathbf{Con} , es mucho más fácil.

Definición 1.3. (Axioma de continuidad) \mathcal{E} es *cohesiva* sobre \mathcal{S} si además de los tres axiomas de la definición anterior se satisface que para cualesquiera $E \in \mathcal{E}$ y $S \in \mathcal{S}$ el morfismo canónico $p_1(E^{p^*S}) \rightarrow p_1E^S$ es un isomorfismo.

El morfismo canónico de la definición 1.3 se puede construir por medio de la

siguiente biyección

$$\frac{\frac{p_!(E^{p^*S}) \xrightarrow{\kappa} (p_!E)^{p_!p^*S}}{p_!(E^{p^*S}) \times p_!p^*S \longrightarrow p_!E}}{p_!(E^{p^*S} \times p^*S) \xrightarrow{p_!(ev)} p_!E}$$

y usando $\tau_S^{-1} : S \rightarrow p_!p^*S$ para obtener $(p_!E)^{\tau_S^{-1}\kappa} : p_!(E^{p^*S}) \rightarrow (p_!E)^{p_!p^*S} \rightarrow p_!E^S$. O bien, como en el lema 8.2 de [28], por medio de la propiedad universal de la evaluación:

$$\begin{array}{ccc} p_!E^{p_!p^*S} & p_!E^{p_!p^*S} \times p_!p^*S & \xrightarrow{ev} p_!E \\ \exists! \uparrow \kappa & \kappa \times 1 \uparrow & \uparrow p_!(ev) \\ p_!(E^{p^*S}) & p_!(E^{p^*S}) \times p_!p^*S & \xrightarrow{\cong} p_!(E^{p^*S} \times p^*S) \end{array}$$

Si seguimos una idea similar a la del diagrama (1.1) podemos mostrar que el morfismo del axioma de continuidad es un epimorfismo. Primero debemos notar que $p_*X^S \cong p_*(X^{p^*S})$, lo cual se sigue de

$$\frac{\frac{\frac{T \longrightarrow (p_*X)^S}{T \times S \longrightarrow p_*X}}{p^*(T \times S) \longrightarrow X}}{p^*T \times p^*S \longrightarrow X}}{p^*T \longrightarrow X^{p^*S}} \\ T \longrightarrow p_*(X^{p^*S})$$

Luego debemos notar que, como en [23, lema 9.1], el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} p_*(X^{p^*S}) & \xrightarrow{\cong} & (p_*X)^S \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta^S \\ p_!(X^{p^*S}) & \longrightarrow & (p_!X)^S \end{array} \quad (1.2)$$

Por el *Nullstellensatz* obtenemos que θ^S es epimorfismo si y sólo si el morfismo del axioma de continuidad también lo es. En particular si la base \mathcal{S} satisface el axioma de elección interno, entonces el morfismo de continuidad es un epimorfismo.

En el estudio de cohesión que inicia Lawvere en [15], señala que cohesión se puede clasificar en tipos y muestra como algunos son incompatibles con otros.

Definición 1.4. Un morfismo precohesivo $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ es un *tipo de cualidad* si $\theta: p_* \rightarrow p_!$ es un isomorfismo.

Como nota Lawvere, un tipo de cualidad satisface el axioma de continuidad. Esto es fácil del diagrama (1.2) ya que si θ es isomorfismo entonces θ^S también es isomorfismo. Además, en este caso no es necesaria ninguna hipótesis adicional sobre la base.

Si consideramos la analogía entre $p_!$ y pedazos o componentes conexas, entonces tenemos los siguientes conceptos.

Definición 1.5. Diremos que un objeto $E \in \mathcal{E}$ es *conexo* si $p_!E = 1$ y $Y \in \mathcal{E}$ es *contraíble* si Y^A es conexo para todo $A \in \mathcal{E}$.

De la definición anterior es claro que contraíble implica conexo. Con estos conceptos Lawvere distingue otra forma de cohesión.

Definición 1.6. Sea $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ precohesivo. El morfismo p es *suficientemente cohesivo* si para cada $E \in \mathcal{E}$ existen $Y \in \mathcal{E}$ contraíble y un monomorfismo $E \rightarrow Y$.

Lawvere menciona en [15] que un topos \mathcal{E} es suficientemente cohesivo (sobre \mathcal{S}) si y sólo si el clasificador de subobjetos es conexo; y que también es equivalente a que los inyectivos sean conexos. Sin embargo, la demostración de esta proposición en [15] no se hace con todo detalle. Por esta razón presentamos los detalles de la demostración, que además muestran la síntesis y elegancia del argumento en [15].

Definición 1.7. Sea \mathcal{E} un topos. Un objeto $M \in \mathcal{E}$ es un *monoide con cero* si existen morfismos $\cdot: M \times M \rightarrow M$, $e: 1 \rightarrow M$ y $c: 1 \rightarrow M$ que hacen conmutar a los diagramas

$$\begin{array}{ccccc}
 M^3 & \xrightarrow{M \times \cdot} & M^2 & & 1 \times M & \xrightarrow{e \times M} & M^2 & \xleftarrow{M \times e} & M \times 1 & & 1 \times M & \xrightarrow{c \times M} & M^2 & \xleftarrow{M \times c} & M \times 1 \\
 \cdot \times M \downarrow & & \downarrow \cdot & & \searrow \pi_2 & & \downarrow \cdot & & \swarrow \pi_1 & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \cdot & & \downarrow \pi_2 \\
 M^2 & \xrightarrow{\cdot} & M & & & & M & & & & 1 & \xrightarrow{c} & M & \xleftarrow{c} & 1
 \end{array}$$

de asociatividad, de neutro y c es cero para la multiplicación.

Lema 1.8. Sean \mathcal{E} y \mathcal{S} topos, $p: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ precohesivo y $M \in \mathcal{E}$ un monoide con cero. Si M es conexo y $A \in \mathcal{E}$ tiene una acción del monoide $\alpha: M \times A \rightarrow A$ punteada por $a: 1 \rightarrow A$, entonces A es conexo.

Demostración. Primero veamos que $p_1\alpha$ es un isomorfismo. Como M es conexo y α es una acción, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 p_1M \times p_1A & \xrightarrow{\cong} & p_1(M \times A) & \xrightarrow{p_1\alpha} & p_1A \\
 p_1e \times p_1A \uparrow & & p_1(e \times A) \uparrow & \nearrow p_1\pi_2 & \uparrow \\
 p_11 \times p_1A & \xrightarrow{\cong} & p_1(1 \times A) & & \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\pi_2} & & &
 \end{array}$$

donde los isomorfismos indicados provienen de que p_1 preserva productos finitos. Además como M es conexo la flecha de la izquierda es un isomorfismo; también, la flecha inferior es un isomorfismo, de donde se concluye que $p_1\alpha$ es isomorfismo. Ahora, como α está punteada por $a : 1 \rightarrow A$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 p_11 \times p_1A & \xrightarrow{p_1c \times p_1A} & p_1M \times p_1A \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 p_1(1 \times A) & \xrightarrow{p_1(c \times A)} & p_1(M \times A) \\
 p_1\pi_1 \downarrow & & \downarrow p_1\alpha \\
 p_11 & \xrightarrow{p_1a} & p_1A.
 \end{array}$$

Como $p_1\alpha$ es isomorfismo y M es conexo, entonces todos los morfismos del diagrama son isomorfismos, con la posible excepción de p_1a . Por lo tanto p_1a es isomorfismo y así A es conexo. \square

Con el lema anterior es posible mostrar que en algunos objetos estas nociones son equivalentes.

Lema 1.9. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ precohesivo con \mathcal{E} y \mathcal{S} topós. Si el clasificador de subobjetos $\Omega \in \mathcal{E}$ es conexo, entonces es contraíble.

Demostración. Usaremos el lema 1.8 para mostrar que Ω es contraíble, es decir, veremos que $(\Omega, \text{verd}, \wedge)$ es un monoide conexo, falso : $1 \rightarrow \Omega$ es un cero para el monoide y que Ω^E tiene una acción punteada para cualquier $E \in \mathcal{E}$. Es fácil ver que los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 1 \times \Omega & \xrightarrow{\text{verd} \times \Omega} & \Omega \times \Omega & \xleftarrow{\Omega \times \text{verd}} & \Omega \times 1 \\
 & \searrow \pi_2 & \downarrow \wedge & \swarrow \pi_1 & \\
 & & \Omega & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \Omega \times \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge \times \Omega} & \Omega \times \Omega \\
 \Omega \times \wedge \downarrow & & \downarrow \wedge \\
 \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega
 \end{array}$$

conmutan, por lo que $(\Omega, \text{verd}, \wedge)$ es un monoide. Además, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 1 \times \Omega & \xrightarrow{\text{falso} \times \Omega} & \Omega \times \Omega & \xleftarrow{\Omega \times \text{falso}} & \Omega \times 1 \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \wedge & & \downarrow \pi_2 \\
 1 & \xrightarrow{\text{falso}} & \Omega & \xleftarrow{\text{falso}} & 1
 \end{array}$$

muestra que $\text{falso} : 1 \rightarrow \Omega$ es un cero para el monoide.

Dado $E \in \mathcal{E}$ definimos la acción $\alpha : \Omega \times \Omega^E \rightarrow \Omega^E$ como la transpuesta de la siguiente composición

$$\Omega \times \Omega^E \times E \xrightarrow{\Omega \times \text{ev}} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

Para ver que α definida como arriba hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 1 \times \Omega^E & \xrightarrow{\text{verd} \times \Omega^E} & \Omega \times \Omega^E & & \Omega \times \Omega \times \Omega^E & \xrightarrow{\wedge \times \Omega^E} & \Omega \times \Omega^E \\
 & \searrow \pi_2 & \downarrow \alpha & & \Omega \times \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 & & \Omega^E & & \Omega \times \Omega^E & \xrightarrow{\alpha} & \Omega
 \end{array}$$

se toman las transpuestas de las composiciones de los diagramas. Los diagramas resultantes son conmutativos porque verd es neutro para \wedge y la asociatividad de \wedge .

Finalmente para ver que α es punteada consideramos la flecha $a : 1 \rightarrow \Omega^E$ definida como la transpuesta de

$$1 \times E \xrightarrow{\pi_1} 1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega.$$

Como $\text{falso} : 1 \rightarrow \Omega$ es un cero para el monoide $(\Omega, \text{verd}, \wedge)$ entonces el transpuesto del siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 1 \times \Omega^E & \xrightarrow{\text{falso} \times \Omega^E} & \Omega \times \Omega^E \\
 \downarrow \pi_1 & & \downarrow \alpha \\
 1 & \xrightarrow{a} & \Omega
 \end{array}$$

De esta forma, por el lema 1.8, tenemos que Ω es contraíble. □

Proposición 1.10. Sean \mathcal{E} y \mathcal{S} topós y $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ precohesivo. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ es suficientemente cohesivo,
2. el clasificador de subobjetos $\Omega \in \mathcal{E}$ es conexo,

3. todo objeto inyectivo en \mathcal{E} es conexo.

Demostración. Para demostrar que 1 implica 3 suponemos que p es suficientemente cohesivo y tomamos un objeto inyectivo $I \in \mathcal{E}$. Como p es suficientemente cohesivo existen un objeto contraíble $C \in \mathcal{E}$ y un monomorfismo $m : I \rightarrow C$. Por definición de inyectivo existe una extensión del morfismo identidad como en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{m} & C \\ 1_I \downarrow & \lrcorner & \dashrightarrow f \\ I & & \end{array} \quad (1.3)$$

Al aplicar $p_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ obtenemos que $p_1 I$ es un retracto de $p_1 C = 1$, por lo que $p_1 I = 1$ y así I es conexo.

Ahora veamos que 3 implica 2. Por la proposición IV.10.1 en [9] tenemos que Ω es inyectivo y así, por hipótesis, es conexo.

Finalmente, supongamos 2 y veamos 1. Como estamos suponiendo que el clasificador de subobjetos Ω es conexo, entonces el lema 1.9 implica que Ω es contraíble. Dado $E \in \mathcal{E}$, lo anterior implica que Ω^E es conexo. De esta forma si tomamos otro objeto $F \in \Omega$ concluimos que $\Omega^{E \times F} \cong (\Omega^E)^F$ es conexo, es decir, Ω^E es contraíble. Como el morfismo unitario $\{ \cdot \} : E \rightarrow \Omega^E$, que se obtiene como el transpuesto de la función característica de la diagonal, es un monomorfismo entonces todo objeto se encaja en un objeto contraíble. Así, $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ es suficientemente cohesivo. \square

En la proposición 3 de [15] Lawvere demuestra que tipo de cualidad es una forma de cohesión incompatible con suficiente cohesión.

Proposición 1.11. Si \mathcal{E} sobre \mathcal{S} es suficientemente cohesivo y tipo de cualidad, entonces \mathcal{S} es inconsistente.

Como nota Lawvere, si \mathcal{E} es suficientemente cohesivo sobre \mathcal{S} entonces todo objeto X tiene un monomorfismo $X \rightarrow Y$, con Y conexo. Como también es un tipo de cualidad, el morfismo del Nullstellensatz $\theta : p_* \rightarrow p_!$ es un isomorfismo. Así, por lo anterior y la naturalidad de θ se tiene que $p_* X$ es un subobjeto de 1 . Por lo que si tomamos $B \in \mathcal{S}$ y $X = p^!(B)$ obtenemos que $B \cong p_* p^! B$ es subobjeto de 1 lo cual hace trivial a \mathcal{S} .

1.2 Cohesión sobre conjuntos

Siguiendo las ideas de Lawvere “Esta propiedad de ‘continuidad’ [...] también se satisface si el contraste con \mathcal{S} está determinado [...] por un intervalo infinitamente divisible en \mathcal{E}^{m1} , Menni encuentra un ejemplo de un topos cohesivo sobre **Con**. Antes de este ejemplo se tenían, principalmente, ejemplos de topos que son cohesivos por “razones equivocadas”. Un ejemplo de qué significan estas “razones equivocadas” es que el topos de gráficas finitas es cohesivo sobre conjuntos finitos, pero esto se debe a que la preservación de exponenciales que debe satisfacer p_1 se traduce a preservación de productos finitos.

Por lo anterior, el “único ejemplo de verdad” de topos cohesivo es el topos de Menni. Por esta razón nos dimos la tarea de encontrar más ejemplos. Al igual que en el topos de Menni nuestros ejemplos se basan en la misma idea de Lawvere de un intervalo infinitamente divisible. Por esta razón haremos un resumen de la formalización de esta idea hecha por Menni en [30].

Sea **C** una categoría y consideramos la siguiente cadena de funtores

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} & \\
 \lim \downarrow & \uparrow \Delta \downarrow \lim & \uparrow \square^{\mathbf{C}(1,-)} \\
 & \mathbf{Con} &
 \end{array} \quad (1.4)$$

Sabemos que el funtor constante Δ siempre tiene como adjunto izquierdo al colímite \lim y como adjunto derecho al límite \lim . El funtor $\square^{\mathbf{C}(1,-)}$ requiere la existencia de un objeto terminal en **C** y en este caso su evaluación en un conjunto S es el funtor $S^{\mathbf{C}(1,-)}$ que a cada objeto $C \in \mathbf{C}$ le asigna el conjunto $S^{\mathbf{C}(1,C)}$. Para ver cuándo este morfismo canónico $p : \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo usaremos la proposición 4.1 de [30], que enunciamos a continuación.

Proposición 1.12. *Sea **C** una categoría pequeña donde los idempotentes se escinden. El morfismo canónico $p : \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo si y sólo si **C** tiene objeto terminal y todo objeto tiene un punto.*

Una categoría donde los idempotentes se escinden se llama *Cauchy completa*. Además toda categoría pequeña **C** tiene una completación de Cauchy $\bar{\mathbf{C}}$ como en la proposición 6.5.9 de [1]. Más aún, en el teorema 6.5.11 de [1] se muestra que las

¹ Este fragmento fue extraído de [30], que a su vez lo extrae de [15]

categorías de pregavillas $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ y $\mathbf{Con}^{\bar{\mathbf{C}}^{op}}$ son equivalentes. Por lo tanto, podemos suponer, sin perder generalidad, que las categorías pequeñas que usamos son Cauchy completas.

Con la proposición 1.12 tenemos que si \mathbf{C} tiene objeto terminal y todo objeto tiene un punto entonces el morfismo canónico en (1.4) es precohesivo. En esta situación seguiremos diciendo que $p : \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo y seguiremos usando la notación $p_!$, p^* , p_* y $p^!$ para referirnos a $\underline{\lim}$, Δ , $\overleftarrow{\lim}$ y $\square^{\mathbf{C}(1,-)}$ respectivamente.

Como paréntesis, Menni muestra en [30] que el contraste entre suficiente cohesión y tipo de cualidad se puede hacer explícito en la categoría \mathbf{C} .

Proposición 1.13. *Sea \mathbf{C} una categoría donde los idempotentes se escinden. Si el morfismo canónico $p : \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *p es suficientemente cohesivo si y sólo si existe un objeto $C \in \mathbf{C}$ con al menos dos puntos.*
2. *p es un tipo de cualidad si \mathbf{C} tiene un objeto cero.*

Además de mostrar la incompatibilidad señalada por Lawvere, la proposición 1.13 también permite encontrar ejemplos de estos dos tipos de cohesión de manera fácil. Por ejemplo, en [30] Menni menciona algunos ejemplos de topos suficientemente cohesivos sobre conjuntos, como conjuntos simpliciales o conjuntos bipuntuados que estudiaremos en el capítulo 2.

Menni demuestra que la situación de cohesión en pregavillas es poco favorable. Enunciamos aquí dichos resultados, proposición 7.3 y teorema 7.4 de [30].

Proposición 1.14. *Sea \mathcal{E} un topos de pregavillas de tal forma que el morfismo canónico $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo. Si p es suficientemente cohesivo entonces no satisface el axioma de continuidad.*

Una demostración elemental de la proposición 1.14 puede consultarse en [30]. Por otro lado, un resultado enfatiza el contraste que existe entre suficiente cohesión y tipo de cualidad es el siguiente.

Teorema 1.15. *Sea \mathcal{E} un topos de pregavillas tal que el morfismo canónico $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo. El morfismo p satisface el axioma de continuidad si y sólo si es un tipo de cualidad.*

Tanto en ejemplos de categorías de pregavillas como en los de gavillas será necesario dar una descripción del colímite que nos permita analizar el morfismo del axioma de continuidad. Sean $X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$, $a \in XA$ y $b \in XB$. Diremos que $a \in XA$ está conectado con $b \in XB$ si hay una sucesión de copalmos que satisface lo siguiente

$$A = C_0 \longrightarrow C_1 \longleftarrow \dots \longrightarrow C_{n-1} \longleftarrow C_n = B$$

$$a = x_0 \longleftarrow x_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow x_{n-1} \longleftarrow x_n = b$$

en esta situación diremos que la sucesión de copalmos es una *trayectoria* que *conecta* a a con b . Es fácil ver que la relación “estar conectado” es de equivalencia y que el colímite $p_1 X$ es el conjunto $\{a \in XA \mid A \in \mathbf{C}\}$ módulo esta relación de equivalencia.

Si \mathbf{C} es una categoría con objeto terminal y tal que todo objeto tiene un punto, entonces todo elemento $a \in XA$ está conectado con un elemento en $X1$. En efecto, dado $a \in XA$ consideramos el copalmo $id_A : A \rightarrow A \leftarrow 1 : f$, donde f es un punto de A . Aplicando X a este copalmo obtenemos una conexión entre $a \in XA$ y $a \cdot f \in X1$. Así, para calcular el colímite, es suficiente determinar las trayectorias de la forma

$$1 \longrightarrow C_1 \longleftarrow 1 \longrightarrow C_2 \longleftarrow 1 \dots \dots 1 \longrightarrow C_n \longleftarrow 1. \quad (1.5)$$

Como veremos en el capítulo 2, o también se puede ver en [28], el axioma de continuidad tiene que ver con acotar la longitud de la trayectorias en (1.5). Así, necesitamos una forma de reducir su complejidad.

Definición 1.16. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ un morfismo precohesivo. Un objeto bipuntuado $0, 1 : 1 \rightarrow I$ en \mathcal{E} es un *conector* para p si el siguiente diagrama

$$p_*(X^I) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_*ev_0} \\ \xrightarrow{p_*ev_1} \end{array} p_*(X) \xrightarrow{\theta} p_!(X)$$

es un coigualador en \mathcal{S} para todo $X \in \mathcal{E}$.

Una condición útil para encontrar conectores usará el siguiente concepto.

Definición 1.17. Sea $0, 1 : 1 \rightarrow I$ un objeto bipuntuado \mathcal{E} . Diremos que un objeto E en \mathcal{E} es *conexo por trayectorias* respecto a I si para todo copalmo de puntos $a : 1 \rightarrow E \leftarrow 1 : b$ en \mathcal{E} hay una flecha $f : I \rightarrow E$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & I & \xleftarrow{1} & 1 \\ & \searrow a & \downarrow f & \swarrow b & \\ & & E & & \end{array}$$

En el contexto de pregavillas, si \mathbf{C} es una categoría con objeto terminal y tal que todo objeto tiene un punto, entonces todo objeto bipuntuado $0, 1 : 1 \rightarrow I$ en \mathbf{C} inducirá un objeto bipuntuado representable en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$. Además, si suponemos que todo objeto de \mathbf{C} es conexo por trayectorias entonces toda conexión como en el diagrama 1.6

$$\begin{array}{ccc} 1 \longrightarrow C \longleftarrow 1 & (1.6) & 1 \longrightarrow I \longleftarrow 1 \\ x \longleftarrow y \longmapsto x' & & x \longleftarrow y \cdot f \longmapsto x' \end{array} \quad (1.7)$$

se puede obtener como en el diagrama 1.7, donde $f : I \rightarrow C$ es la flecha que se tiene por la conexidad por trayectorias de C . De esta manera toda trayectoria de la forma (1.5) se puede reducir a una *trayectoria combinatoria*, es decir, una de la forma:

$$1 \xrightarrow{0} I \xleftarrow{1} 1 \xrightarrow{0} I \xleftarrow{1} 1 \cdots \cdots 1 \xrightarrow{0} I \xleftarrow{1} 1. \quad (1.8)$$

Con esta observación se puede demostrar el siguiente resultado.

Lema 1.18. *Si \mathbf{C} tiene un objeto bipuntuado tal que todo objeto de \mathbf{C} es conexo por trayectorias respecto a ese objeto, entonces el objeto bipuntuado inducido en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ es un conector para el morfismo precohesivo canónico.*

Otra condición que se puede aplicar a más situaciones que el lema anterior (ver ejemplos 8.10–8.12 de [30]) es la siguiente.

Lema 1.19. *Si el objeto bipuntuado $0, 1 : 1 \rightarrow I$ en \mathbf{C} satisface que para cada copalmo $a : 1 \rightarrow I \leftarrow 1 : b$ hay un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xrightarrow{\sigma_{1,l}} & I & \xleftarrow{\sigma_{1,r}} & 1 & \xrightarrow{\sigma_{2,l}} & I & \xleftarrow{\sigma_{2,r}} & 1 & \cdots & 1 & \xrightarrow{\sigma_{n,l}} & I & \xleftarrow{\sigma_{n,r}} & 1 \\ & & \searrow & & \searrow & & \downarrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & & a_1 & & f_2 & & a_{n-1} & & & & & & \\ & & f_1 & & & & & & & & & & & & f_n \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ & & a & & & & C & & & & & & & & b \end{array}$$

donde el renglón de arriba es una trayectoria combinatoria cuyos morfismos son de la forma $0 : 1 \rightarrow I$ o $1 : 1 \rightarrow I$, entonces el objeto bipuntuado $0, 1 : 1 \rightarrow \mathbf{C}(-, I)$ es un conector en $\mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$.

Más aún, si J es una topología de Grothendieck sobre \mathbf{C} tal que (\mathbf{C}, J) es un sitio localmente conexo (si \mathbf{C} tiene objeto terminal esto implica que también es conexo), entonces se podrá obtener un conector en $\text{Gav}(\mathbf{C}, J)$.

Lema 1.20. Sean \mathbf{C} una categoría con un objeto bipuntuado I y una topología de Grothendieck J como la descrita arriba. Si I es una J -gavilla y todo objeto de \mathbf{C} es conexo por trayectorias respecto a I , entonces el objeto bipuntuado inducido $0, 1 : 1 \rightarrow I$ en $\text{Gav}(\mathbf{C}, J)$ es un conector para el morfismo precohesivo $\text{Gav}(\mathbf{C}, J) \rightarrow \mathbf{Con}$.

Por lo tanto, las observaciones que hemos hecho acerca de trayectorias son válidas en cualquier categoría de gavillas que satisfaga las condiciones del lema.

Finalmente, para reducir la longitud de las trayectorias combinatorias se necesita la idea del intervalo infinitamente divisible.

Definición 1.21. Un intervalo abstracto en \mathbf{C} es un objeto bipuntuado $0, 1 : 1 \rightarrow I$ con dos monomorfismos $l, r : I \rightarrow I$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. El copalmo $0 : 1 \rightarrow I \leftarrow 1 : 1$ es disjunto.
2. Los morfismos l y r hacen conmutar a los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{0} & I \\
 & \searrow & \downarrow l \\
 & & I \\
 & \swarrow 0 & \\
 & & I
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{1} & I \\
 & \searrow & \downarrow r \\
 & & I \\
 & \swarrow 1 & \\
 & & I
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{0} & I \\
 1 \downarrow & & \downarrow r \\
 I & \xrightarrow{l} & I
 \end{array}$$

donde el cuadrado es un producto fibrado.

Para inducir un intervalo abstracto en categorías de gavillas es necesario pedir cierta compatibilidad entre los monomorfismos l y r y la topología de Grothendieck.

Definición 1.22. Una base K para una topología de Grothendieck sobre \mathbf{C} es *compatible* con un intervalo abstracto dado $(I, 0, 1, l, r)$ si $\{l, r\} \in KI$.

Ahora supongamos que tenemos un sitio (\mathbf{C}, J) de tal forma que hay un morfismo precohesivo $p : \text{Gav}(\mathbf{C}, J) \rightarrow \mathbf{Con}$ y que \mathbf{C} tiene un intervalo abstracto compatible con la topología. Si $X \in \text{Gav}(\mathbf{C}, J)$ y tenemos una trayectoria combinatoria como la siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & I & \longleftarrow & 1 & \longrightarrow & I & \longleftarrow & 1 \\
 x & \longleftarrow & y_1 & \longrightarrow & x_1 & \longleftarrow & y_2 & \longrightarrow & x'
 \end{array}$$

entonces, como $\{l, r\}$ es una cubierta de I y $y_1 \cdot 1 = y_2 \cdot 0$, tenemos que $\{y_1, y_2\}$ es una familia compatible. Como X es una gavilla existe una amalgama $y \in XI$, que por los diagramas en 1.21 genera la siguiente trayectoria

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & I & \longleftarrow & 1 \\ x & \longleftarrow & y & \longrightarrow & x' \end{array} \quad (1.9)$$

con lo que es posible reducir el tamaño de las trayectorias. Con esto obtendremos siguiente resultado cuya demostración haremos más adelante.

Teorema 1.23. *Sea (\mathbf{C}, J) un sitio conexo y localmente conexo tal que \mathbf{C} tiene objeto terminal y todo objeto tiene un punto, de forma que $p : \text{Gav}(\mathbf{C}, J) \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo. Supongamos que \mathbf{C} tiene un intervalo abstracto. Si J es compatible con el intervalo y todo objeto de \mathbf{C} es conexo por trayectorias, entonces p es cohesivo.*

1.3 Objetos débilmente Kan

Dada la dificultad de encontrar ejemplos de cohesión Marmolejo y Menni definen la noción de débilmente Kan en [28].

Definición 1.24. Sea $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ un morfismo precohesivo. Un objeto $E \in \mathcal{E}$ es *débilmente Kan* si para cualquier $S \in \mathcal{S}$ el morfismo de continuidad $p_!(E^{p^*S}) \rightarrow p_!E^S$ es un isomorfismo.

Denotaremos con $k\mathcal{E}$ a la subcategoría plena de \mathcal{E} cuyos objetos son débilmente Kan. Podemos aplicar la proposición 1.12 a la categoría simplicial Δ para obtener que $\mathbf{Con}^{\Delta^{op}}$ es precohesiva sobre conjuntos. En el corolario 5.5 de [28] se muestra que en $\mathbf{Con}^{\Delta^{op}}$ todo complejo de Kan es débilmente Kan por lo que son, en efecto, un debilitamiento de objetos de Kan. Alternativamente, en la sección 2.4 daremos una caracterización de objetos débilmente Kan con la que es fácil ver que todo complejo de Kan es débilmente Kan.

Marmolejo y Menni también muestran algunas propiedades de $k\mathcal{E}$. Por ejemplo que los discretos son débilmente Kan, es decir, si $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ es precohesivo entonces $p^*B \in k\mathcal{E}$ para todo $B \in \mathcal{S}$. También muestran que $k\mathcal{E}$ es cerrada bajo productos finitos y que si $X \in k\mathcal{E}$ entonces $X^{p^*A} \in k\mathcal{E}$ para cualquier $A \in \mathcal{S}$. En la sección 2.2

veremos que la exponencial de objetos débilmente Kan no es necesariamente débilmente Kan. Así, incluso con las propiedades mostradas en [28], la categoría $k\mathcal{E}$ no podrá inducir un morfismo cohesivo ya que no es cartesiana cerrada.

El concepto principal en [28] es el de *preservación de pedazos*. Para enunciarlo empezamos con el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & \mathcal{E} \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & \mathcal{S} \end{array} \quad (1.10)$$

donde $p^* \dashv p_* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ es una adjunción con unidad $\alpha : 1_{\mathcal{S}} \rightarrow p_* p^*$ y counidad $\beta : p^* p_* \rightarrow 1_{\mathcal{E}}$, sobre esta la adjunción $f^* \dashv f_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ con unidad y counidad $\bar{\alpha} : 1_{\mathcal{S}} \rightarrow f_* f^*$ y $\bar{\beta} : f^* f_* \rightarrow 1_{\mathcal{F}}$ y la adjunción $g^* \dashv g_* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ cuya unidad es $\nu : 1_{\mathcal{E}} \rightarrow g_* g^*$ y counidad es $\xi : g^* g_* \rightarrow 1_{\mathcal{F}}$. Estas adjunciones satisfacen $f_* = p_* g_*$ y $f^* = g^* p^*$.

Definición 1.25. $g_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ *preserva coproductos \mathcal{S} -indexados* si la transformación natural $\nu_{p^*} : p^* \rightarrow g_* g^* p^* = g_* f^*$ es un isomorfismo.

Como en [28], cuando las adjunciones en (1.10) tuvieran funtores pedazos, es decir, un adjunto izquierdo, denotaremos con $\sigma : 1_{\mathcal{E}} \rightarrow p^* p_!$ y $\tau : p_! p^* \rightarrow 1_{\mathcal{S}}$ a la unidad y counidad de $p_! \dashv p^*$ respectivamente y sobre ella la adjunción $f_! \dashv f^*$ con unidad $\bar{\sigma} : 1_{\mathcal{E}} \rightarrow f^* f_!$ y counidad $\bar{\tau} : f_! f^* \rightarrow 1_{\mathcal{S}}$. En este caso se puede definir $\varrho : f_! g^* \rightarrow p_!$ como la composición

$$f_! g^* \xrightarrow{f_! g^* \sigma} f_! g^* p^* p_! \xrightarrow{=} f_! f^* p_! \xrightarrow{\bar{\tau}_{p_!}} p_!$$

y con esto el lema 6.4 loc.cit.

Lema 1.26. *Los siguientes son equivalentes:*

1. El funtor $g_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ *preserva coproductos \mathcal{S} -indexados*.
2. La transformación natural $\varrho : f_! g^* \rightarrow p_!$ *es un isomorfismo*.
3. *Hay una transformación natural $\rho : p_! \rightarrow f_! g^*$ tal que los siguientes diagramas*

$$\begin{array}{ccc} g^* & \xrightarrow{g^* \sigma} & g^* p^* p_! & \xrightarrow{id} & f^* p_! & & p_! p^* & \xrightarrow{\rho_{p^*}} & f_! g^* p^* & \xrightarrow{id} & f_! f^* \\ & \searrow \bar{\sigma}_{g^*} & & & \downarrow f^* \rho & & \searrow \tau & & & & \downarrow \bar{\tau} \\ & & & & f^* f_! g^* & & & & & & 1_{\mathcal{S}} \end{array}$$

conmutan. Además, en este caso, ρ es inversa de g .

Ahora podemos dar la noción que anunciamos.

Definición 1.27. La adjunción *preserva pedazos* si $g_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ preserva coproductos \mathcal{S} -indexados y la composición

$$p_1 g_* \xrightarrow{\rho_{g_*}} f_1 g^* g_* \xrightarrow{f_1 \xi} f_1$$

es un isomorfismo.

Siguiendo el mismo trabajo de Marmolejo y Menni diremos que p_1 *invierte la unidad de g* si $p_1 \nu : p_1 \rightarrow p_1 g_* g^*$ es un isomorfismo. De manera similar f_1 *invierte la counidad de g* si $f_1 \xi : f_1 g^* g_* \rightarrow f_1$ es un isomorfismo. Con esto podemos enunciar su siguiente resultado.

Proposición 1.28. Si $g_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ preserva coproductos \mathcal{S} -indexados, entonces los siguientes son equivalentes:

1. La adjunción $g_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ preserva pedazos.
2. El funtor $f_1 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ invierte la counidad de g .
3. Hay un isomorfismo natural $\lambda : p_1 g_* \rightarrow f_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} f_1 g^* g_* & \xrightarrow{\rho_{g_*}} & p_1 g_* \\ & \searrow f_1 \xi & \downarrow \lambda \\ & & f_1 \end{array}$$

Además en este caso p_1 invierte la unidad de g .

Finalmente el resultado principal en este contexto es el siguiente (ver proposición 8.6 en [28]).

Teorema 1.29. Si $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ preserva pedazos entonces $g_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ preserva (y refleja) objetos débilmente Kan.

Capítulo 2

Precohesión

Para encontrar quiénes son los objetos débilmente Kan en categorías de pregavillas empezamos dando una caracterización en general y luego la usaremos en los distintos ejemplos.

2.1 Pregavillas

Para encontrar los objetos débilmente Kan de una categoría de pregavillas sobre conjuntos notamos que el morfismo de continuidad es de la forma $p_!(\prod_{s \in S} X) \rightarrow \prod_{s \in S} (p_! X)$, ver [30, pág. 544]. Aunque la demostración de esa afirmación sólo consta de algunos cálculos sencillos, por completud se describen aquí dichos cálculos.

Sea \mathbf{C} una categoría tal que el morfismo canónico $p : \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ es precohesivo y sea $\mathbf{y} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ el funtor de Yoneda.

Si $X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ y $S \in \mathbf{Con}$, entonces definimos $\tau : X^{p^*S} \rightarrow \prod_S X$ en la componente C de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{Nat}(p^*S \times \mathbf{y}C, X) &\xrightarrow{\tau_C} \prod_S XC \\ (p^*S \times \mathbf{y}C \xrightarrow{\sigma} X) &\longmapsto (\sigma_C(s, 1_C))_{s \in S} \end{aligned}$$

Lema 2.1. τ es natural.

Demostración. Sea $c : C \rightarrow C'$ y consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\text{Nat}(p^*S \times \mathbf{y}C', X) & \xrightarrow{\tau_{C'}} & \prod_S XC' \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Nat}(p^*S \times \mathbf{y}C, X) & \xrightarrow{\tau_C} & \prod_S XC
\end{array}$$

para demostrar este diagrama conmuta basta ver que

$$(\sigma \circ (1 \times \mathbf{y}c))_{C(s, 1_C)} = (Xc\sigma_{C'}(s, 1_{C'}))_{s \in S}.$$

Notemos primero que

$$\begin{array}{ccc}
S \times \mathbf{C}(C, C) & \xrightarrow{1_S \times c^*} & S \times \mathbf{C}(C, C') \xrightarrow{\sigma_C} XC \\
(s, 1_C) & \longmapsto & (s, c) \longmapsto \sigma_C(s, c)
\end{array}$$

y luego por la naturalidad de σ tenemos $\sigma_C(s, c) = Ec\sigma_{C'}(s, 1_{C'})$. Por lo tanto, τ es natural. \square

Ahora definimos $\rho : \prod_S X \rightarrow X^{p^*S}$ en la componente C de la siguiente forma. Dado $(x_s)_{s \in S} \in \prod_S XC$ la transformación natural $\rho_C(x_s)_{s \in S} = \sigma_x$ en la componente A está definida como

$$\begin{array}{ccc}
S \times \mathbf{C}(A, C) & \xrightarrow{(\sigma_x)_A} & XA \\
(s, f) & \longmapsto & Xf(x_s)
\end{array}$$

Como X es un funtor contravariante, es fácil ver que $\sigma_x : p^*S \times \mathbf{y}C \rightarrow X$ es natural. Así, ρ está bien definida.

Lema 2.2. ρ es natural.

Demostración. Dada $c : C \rightarrow C'$ hay que demostrar que $\sigma_{Ec(y)} = \sigma_y \circ c^*$. Por definición tenemos $(Xc(y_s))_A(s, f) = Xf(Xc(y_s))$. Además, tenemos $(\sigma_y \circ \mathbf{y}c)_A(s, f) = X(cf)(y_s)$. Así, ρ es natural. \square

Finalmente hay que demostrar que las composiciones de τ y ρ son identidades. Primero se considera la composición

$$\begin{array}{ccc}
\prod_S XC & \xrightarrow{\rho_C} & \text{Nat}(p^*S \times \mathbf{y}C, X) \xrightarrow{\tau_C} \prod_S XC \\
(x_s)_{s \in S} & \longmapsto & \sigma_x \longmapsto ((\sigma_x)_{C(s, 1_C)})_{s \in S}
\end{array}$$

Por definición tenemos $(\sigma_x)_C(s, 1_C) = X1_C(x_s) = x_s$. Así, $\tau_C \circ \rho_C = 1$. Para la otra composición consideramos

$$\begin{array}{ccc} \text{Nat}(p^*S \times \mathbf{y}C, X) & \xrightarrow{\tau_C} & \prod_S XC & \xrightarrow{\rho_C} & \text{Nat}(p^*S \times \mathbf{y}C, X) \\ \sigma \longmapsto & & (\sigma_C(s, 1_C))_{s \in S} \longmapsto & & \sigma_{\sigma_C(s, 1_C)} \end{array}$$

Para ver que $\sigma_A = (\sigma_{\sigma_C(s, 1_C)})_A$ tomamos una flecha $f : A \rightarrow C$. Así, por definición, $(\sigma_{\sigma_C(s, 1_C)})_A(s, f) = Xf\sigma_C(s, 1_C)$ y por la naturalidad de σ aplicada a f se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S \times \mathbf{C}(C, C) & \xrightarrow{\sigma_C} & XC \\ \downarrow & & \downarrow \\ S \times \mathbf{C}(A, C) & \xrightarrow{\sigma_A} & XA \end{array}$$

el cual muestra que $Xf\sigma_C(s, 1_C) = \sigma_A(s, f)$. Por lo tanto, $\rho_C \circ \tau_C = 1$.

Además, este isomorfismo está relacionado con el morfismo del axioma de continuidad, ya que la evaluación $ev : p^*S \times X^{p^*S} \rightarrow X$ en la componente C es la siguiente función

$$\begin{array}{ccc} S \times \text{Nat}(p^*S \times \mathbf{y}C, X) & \xrightarrow{ev_C} & XC \\ (s, \sigma) \longmapsto & & \sigma_C(s, 1_C) \end{array}$$

es decir, el isomorfismo $\tau : X^{p^*S} \rightarrow \prod_S X$ está inducido por la propiedad universal del producto e instancias de la evaluación, o bien, la evaluación está inducida por las proyecciones y τ .

Ahora, la función $p_1(ev)$ es de la forma

$$p_1(ev) : S \times \varinjlim_{C \in \mathbf{C}} (X^{p^*S} C) \longrightarrow \varinjlim_{C \in \mathbf{C}} (XC).$$

Por lo anterior esta función se puede escribir de la siguiente manera

$$p_1(ev) : S \times \varinjlim_{C \in \mathbf{C}} (\prod_S XC) \longrightarrow \varinjlim_{C \in \mathbf{C}} (XC).$$

Por lo que está inducida por proyecciones, es decir, por funciones de la forma

$$\begin{array}{ccc} S \times \prod_S XC & \xrightarrow{ev_C} & XC \\ (s, (x_s)_{s \in S}) \longmapsto & & x_s \end{array}$$

que no sólo es la proyección dada por el elemento de S en la primer entrada, sino que también es la evaluación compuesta con el isomorfismo τ de arriba. Con esto concluimos que el morfismo del axioma de continuidad es la función

$$\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} \prod_S XC \longrightarrow \left(\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} XC \right)^S$$

que a una clase $\overline{(x_s)_{s \in S}}$ la manda a la función $f : S \rightarrow \lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} XC$ definida mediante la asignación $s \mapsto \overline{x_s}$.

Finalmente, si $\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} \prod XC \cong \prod \lim XC$, el morfismo del axioma continuidad manda a $\overline{(x_s)_{s \in S}}$ a la función $f : S \rightarrow \lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} XC$ dada por $s \mapsto \overline{x_s}$, que es claramente un isomorfismo. En la otra dirección, si el morfismo del axioma de continuidad fuera un isomorfismo, entonces $\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} \prod XC \cong \prod \lim XC$.

Lo anterior es la demostración del siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Un objeto $X \in \mathbf{Con}^{\text{cop}}$ es débilmente Kan si y sólo si para todo $S \in \mathbf{Con}$ hay un isomorfismo*

$$\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} \left(\prod_S XC \right) \cong \left(\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} XC \right)^S = \prod_S \left(\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} XC \right).$$

Además, tenemos las siguientes equivalencias de ser débilmente Kan.

Teorema 2.4. *Sea $X \in \mathbf{Con}^{\text{cop}}$, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. X es débilmente Kan.
2. El morfismo canónico $\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} \prod_S XC \rightarrow \prod_S \lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} XC$ es un isomorfismo para todo $S \in \mathbf{Con}$.
3. El morfismo canónico $\lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} \prod_{\mathbb{N}} XC \cong \prod_{\mathbb{N}} \lim_{\rightarrow C \in \mathbf{C}} XC$ es un isomorfismo.
4. Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $\bar{x} = \bar{y}$ (en $p_1 X$) entonces existe una trayectoria de longitud $\leq M$ que conecta a x con y .
5. El morfismo canónico $p_1(X^{p^*\mathbb{N}}) \rightarrow (p_1 X)^{\mathbb{N}}$ es un isomorfismo.

Demostración. La equivalencia de 1 y 2 ya fue hecha arriba. Notando que en esa prueba el conjunto S está fijo se tiene la equivalencia de 3 y 5. La implicación de 2 a 3 es clara.

Veamos que 3 implica 4. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\overline{x_n}, \overline{y_n} \in p_!E$ tales que son conectables y toda trayectoria que los conecta es de longitud mayor o igual a n , entonces es claro que $(\overline{x_n})_{n \in \mathbb{N}} = (\overline{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y que $\overline{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}} \neq \overline{(y_n)_{n \in \mathbb{N}}}$. Esto significa que el morfismo en 3 no es inyectivo.

Finalmente, veamos que 4 implica 2. Como **Con** satisface el axioma de elección, entonces el morfismo en 2 es suprayectivo (en este caso la suprayectividad también es clara de la definición). Para ver que es inyectivo supongamos que $(\overline{x_s})_{s \in S} = (\overline{y_s})_{s \in S}$. Así, $\overline{x_s} = \overline{y_s}$ para toda $s \in S$. De esta forma x_s está conectado con y_s por medio de una trayectoria de longitud $\leq M$. Repitiendo elementos de la sucesión que conecta a x_s con y_s , podemos suponer que la trayectoria que los conecta es de longitud exactamente M . Por lo que tenemos

$$(x_s)_{s \in S} = (x_s^0)_{s \in S} \sigma_1 \dots \sigma_M (x_s^M)_{s \in S} = (y_s)_{s \in S}$$

es decir, $\overline{(x_s)_{s \in S}} = \overline{(y_s)_{s \in S}}$. \square

También es posible encontrar una descripción, similar a la del teorema anterior, en una situación más general. Por ejemplo, si $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ es precohesivo y \mathcal{E} tiene un conector $0, 1 : 1 \rightarrow I$, entonces un objeto $X \in \mathcal{E}$ es débilmente Kan si el diagrama

$$p_*(X^I) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_* ev_0} \\ \xrightarrow{p_* ev_1} \end{array} p_* X \xrightarrow{\theta} p_! X$$

es un igualador potenciado (ver [28, Lema 5.2]). En general, un diagrama como el de (2.1) es potenciado

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{e_0} \\ \xrightarrow{e_1} \end{array} D \xrightarrow{q} Q \quad (2.1) \quad E^A \begin{array}{c} \xrightarrow{e_0^A} \\ \xrightarrow{e_1^A} \end{array} D^A \xrightarrow{q^A} Q^A \quad (2.2)$$

si el diagrama en (2.2) es un coigualador para cualquier objeto A , ver definición 5.1 en [28]. Además, si el topos \mathcal{S} es **Con**, entonces el Lema 5.3 en [28] muestra algunas otras equivalencias ser débilmente Kan. En dicho lema puede observarse la misma equivalencia acerca de “distancias acotadas” que aparece en el inciso 4 del teorema anterior.

Finalmente, podemos hacer una demostración del teorema 1.23 usando el teorema anterior.

Demostración del teorema 1.23. Sea $X \in \text{Gav}(C, J)$ y supongamos que $\overline{x} = \overline{y}$ en $p_!X$. Como estamos suponiendo que **C** tiene un intervalo abstracto, en particular

es un conector. Así, por los comentarios antes del teorema 1.23 podemos suponer que \bar{x} y \bar{y} son de la forma $x \in X1$ y $y \in X1$, respectivamente (para conectar puntos arbitrarios con elementos de $X1$ se necesitan trayectorias de longitud 1, es decir, un sólo cospan). La igualdad de las clases significa que hay una trayectoria que conecta a x con y . Como vimos antes del teorema 1.23 podemos suponer que están conectados por una trayectoria combinatoria como en la ecuación (1.8).

Luego usando que \mathbf{C} tiene un intervalo abstracto y la topología J es compatible con él podemos reducir la trayectoria combinatoria anterior a una de longitud 1, como en la ecuación (1.9). De esta manera la trayectoria que conecta a $x \in X1$ con $y \in X1$ es de longitud 1 y así la conexión entre \bar{x} y \bar{y} es de longitud a lo más 3. Por lo tanto, por el teorema 2.4, concluimos que X es débilmente Kan y así $\text{Gav}(C, J)$ es cohesivo sobre \mathbf{Con} . \square

2.2 Gráficas Reflexivas

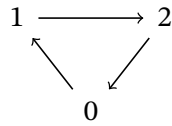
La categoría de digráficas reflexivas (o simplemente gráficas) se obtiene al truncar la categoría simplicial Δ en 1, es decir, $\mathbf{GraR} = \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$. Como Δ_1 tiene objeto terminal y todo objeto tiene un punto, entonces hay una situación precohesiva canónica $p: \mathbf{GraR} \rightarrow \mathbf{Con}$ (ver [30, Proposición 4.1]). Además, si recordamos que si tenemos una gráfica $G \in \mathbf{GraR}$ y una trayectoria de la forma $[0] \rightarrow [1] \leftarrow [0]$ en Δ_1 entonces al aplicar G a esta trayectoria obtenemos una arista en el sentido usual. Así, las trayectorias por medio de copalmos se traducen a trayectorias comunes entre vértices. Por lo tanto, por el inciso 4 del Teorema 2.4, tenemos que una gráfica es débilmente Kan si y sólo si tiene diámetro finito, es decir, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que cualesquiera dos vértices están conectados por una trayectoria de longitud a lo más M .

Como haremos algunas observaciones acerca de la exponencial en \mathbf{kGraR} vale la pena mencionar que si estas exponenciales existen, entonces coinciden con las de \mathbf{GraR} ya que

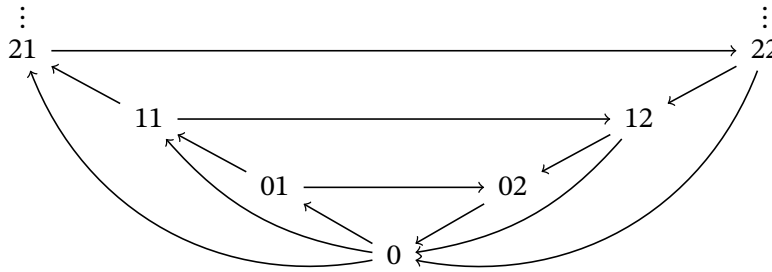
$$\mathbf{kGraR}(y[0], G^H) \cong \mathbf{kGraR}(y[0] \times H, G) \cong \mathbf{GraR}(y[0] \times H, G) \cong \mathbf{GraR}(H, G)$$

y lo mismo para aristas.

Con esta caracterización de objetos débilmente Kan es fácil encontrar propiedades de la categoría \mathbf{kGraR} . Por ejemplo, dicha categoría es cerrada bajo coproductos. Otra propiedad es que no es cartesiana cerrada. Para esto basta tomar H la gráfica:



Como es finita, es débilmente Kan. Además se considera la siguiente gráfica G de diámetro 2



De esta forma tanto G como H son débilmente Kan. Ahora se consideran los vértices en G^H , es decir, los morfismos $f_n : H \rightarrow G$ definidos como $f_n(i) = ni$, donde $i = 1, 2$ y $f_n(0) = 0$. Es fácil ver que tenemos una trayectoria en G^H de la forma:

$$f_0 \longrightarrow f_1 \longrightarrow f_2 \longrightarrow \dots$$

Notemos que si $g : H \rightarrow G$ es el morfismo constante 0, entonces no hay aristas de la forma $f_n \rightarrow g$ ni de la forma $g \rightarrow f_n$. Esto se debe a que en H no hay aristas de la forma $n1 \rightarrow 0$ ni de la forma $0 \rightarrow n2$. Además, si se consideran trayectorias en H de $n1$ a $m1$ que no pasen por 0, es fácil ver que las más cortas son de la forma:

$$n1 \longrightarrow (n + 1)1 \longrightarrow \dots \longrightarrow m1.$$

Lo mismo sucede con trayectorias de $n2$ a $m2$ que no pasen por 0. Por último hay que notar que toda trayectoria en G^H que conecta a f_n con f_m define una trayectoria en H que conecta a $n1$ con $m1$ que no pasa por 0, por lo que debe tener longitud al menos $m - n$. De esta forma los f_n definen una trayectoria infinita en G^H .

Con esto se concluye que en general $k\mathbf{GraR}$ no es cartesiana cerrada, en cuyo caso no puede ser un modelo de cohesión.

2.3 Preservación de objetos débilmente Kan

Antes de dar una caracterización de objetos débilmente Kan en otras categorías haremos una observación en general. Dicha observación es resultado de analizar la situación en conjuntos simpliciales y bipuntuados.

Consideremos topos y morfismos geométricos de tal forma que el siguiente sea un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & \mathcal{E} \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & \mathcal{S} \end{array}$$

es decir, $f_* = p_* g_*$ y $f^* = g^* p^*$. En el contexto de cohesión axiomática se asumirá que $f_! : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ y $p_! : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ hacen conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{g^*} & \mathcal{E} \\ & \searrow f_! & \downarrow p_! \\ & & \mathcal{S} \end{array} \quad (2.3)$$

De la misma forma que en la sección 2 de [28], dado un functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ que preserva productos finitos hay un morfismo de comparación $\kappa_F : F(A^B) \rightarrow FA^{FB}$ que se obtiene transponiendo el morfismo

$$F(A^B) \times FB \xrightarrow{\cong} F(A^B \times B) \xrightarrow{F(ev)} FA.$$

Si $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$ es otro functor que preserva productos finitos, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} GF(A^B) & \xrightarrow{G(\kappa_F)} & G(FA^{FB}) \\ & \searrow \kappa_{GF} & \downarrow \kappa_G \\ & & GFA^{GFB} \end{array}$$

En particular, cuando $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ y $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$ son precohesivos y $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ es un morfismo geométrico se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} p_!(X^{p^*S}) & \equiv & f_!g^*(X^{p^*S}) & \xrightarrow{f_!(\kappa_g)} & f_!(g^*X^{g^*p^*S}) & \equiv & f_!(g^*X^{f^*S}) \\ & \searrow \kappa_p & & \searrow k_{fg} & \downarrow \kappa_f & & \downarrow \kappa_f \\ & & p_!X^{p_!p^*S} & \equiv & f_!g^*X^{f_!g^*p^*S} & \equiv & f_!g^*X^{f_!f^*S} \end{array}$$

para cualesquiera $X \in \mathcal{E}$ y $S \in \mathcal{S}$. Con esto es fácil ver que si $f_!(\kappa_g)$ es un isomorfismo, entonces $X \in \mathcal{E}$ es débilmente Kan si y sólo si $g^*X \in \mathcal{F}$ es débilmente Kan. Así, los ejemplos mostrarán que la descripción de objetos débilmente Kan en el topos \mathcal{E} puede ser trasladado al topos más simple \mathcal{F} . En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Consideramos el siguiente diagrama conmutativo de topos y morfismos geométricos*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & \mathcal{E} \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & \mathcal{S} \end{array}$$

Si p^* y f^* tienen adjuntos izquierdos, denotados $f_!$ y $p_!$ respectivamente, que satisfacen $f_!g^* = p^*$ y $f_!(\kappa_g)$ es un isomorfismo, entonces $X \in \mathcal{E}$ es débilmente Kan si y sólo si $g^*X \in \mathcal{F}$ es débilmente Kan.

En el caso de pregavillas es posible empezar con un funtor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. Este induce un morfismo geométrico que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} & \xrightarrow{g} & \mathbf{Con}^{\mathbf{D}^{op}} \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & \mathbf{Con} \end{array}$$

donde $g^* = F^*$ y, en este caso, g^* tiene adjuntos derecho e izquierdo dados por las extensiones de Kan, $\text{lan} \dashv g^* \dashv \text{Dan}$. Además, los morfismos p y f están dados de forma canónica, es decir, son una cadena de funtores adjuntos $p_! \dashv p^* \dashv p_*$ y $f_! \dashv f^* \dashv f_*$ definidos mediante colímite, constante y límite respectivamente. Es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} & \xleftarrow{g^*} & \mathbf{Con}^{\mathbf{D}^{op}} \\ & \swarrow f^* & \uparrow p^* \\ & & \mathbf{Con} \end{array} \tag{2.4}$$

ya que tanto f^* como g^*p^* son constantes.

Lema 2.6. *Si $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ satisface que para cada $D \in \mathbf{D}$ la categoría F/D es conexa, entonces $f_!g^* = p_!$.*

Demostración. Se demostrará la igualdad de los adjuntos derechos, es decir, $\text{Dan}f^* = p^*$. Dado $S \in \mathbf{Con}$ se evalúa $\text{Dan}f^*S$ de la siguiente manera

$$\text{Dan}f^*S(D) = \varprojlim_{F\mathbf{C} \rightarrow D} S = S^{\pi_0(F/D)} = S$$

y claramente $p^*(D) = S$. Es fácil ver que $\text{Dan}f^*S$ manda a cualquier flecha a la identidad en S , por lo que $\text{Dan}f^* = p^*$. \square

Con este lema es posible aplicar el teorema 2.5 para encontrar un refinamiento de las condiciones para que g^* preserve objetos débilmente Kan en el caso de pregavillas.

Corolario 2.7. Sea $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un funtor tal que para cada $D \in \mathbf{D}$ la categoría F/D es conexa, de manera que el diagrama de topos y morfismos geométricos inducido

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}} & \xrightarrow{g} & \mathbf{Con}^{\mathbf{D}^{op}} \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & \mathbf{Con} \end{array}$$

conmuta. Entonces, $X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{D}^{op}}$ es débilmente Kan si y sólo si $g^*X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ es débilmente Kan.

Demostración. Por el teorema 2.5 es suficiente mostrar que $f_!(\kappa_g)$ es un isomorfismo. En este caso mostraremos que, de hecho, κ_g es isomorfismo.

En la sección 2.1 vimos que X^{p^*S} es isomorfo al producto $\prod_S X$ y que el isomorfismo está inducido por la evaluación y proyecciones, o bien, por un morfismo de comparación y proyecciones. Además, sabemos que g^* tiene adjunto izquierdo dado por la extensión de Kan $\text{Ian}: \mathbf{Con}^{\mathbf{D}^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$, por lo que g^* preserva productos. Con esto tenemos los siguientes isomorfismos

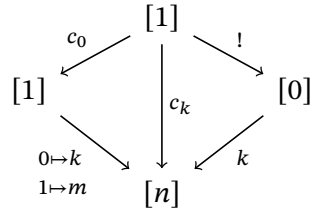
$$g^*X^{p^*S} \cong g^* \prod_S X \cong \prod_S g^*S \cong g^*X^{g^*p^*S}.$$

Así, κ_g es isomorfismo con lo que podemos concluir que $X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{D}^{op}}$ es débilmente Kan si y sólo si $g^*X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{C}^{op}}$ es débilmente Kan. \square

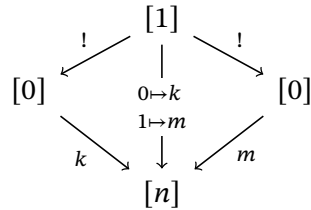
2.4 Conjuntos simpliciales

Para dar una caracterización de objetos débilmente Kan en conjuntos simpliciales basta ver que la inclusión $i: \Delta_1 \rightarrow \Delta$ satisface que para cualquier simplejo $[n]$ la categoría $i/[n]$ es conexa.

Notemos que un objeto de $i/[n]$ de la forma $[1] \rightarrow [n]$ está conectado a un punto, por ejemplo su valor en cero, como lo muestra el siguiente diagrama

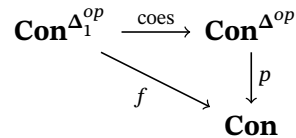


donde $k \leq m$. Por lo tanto, para mostrar que $i/[n]$ es conexa es suficiente mostrar que cualesquiera dos puntos están conectados en la categoría $i/[n]$. Sean $k : [0] \rightarrow [n] \leftarrow [0] : m$ y supongamos que $k \leq m$. El siguiente diagrama conmutativo



muestra que es posible conectar los puntos k y m en $i/[n]$, por lo que esta categoría es conexa.

La inclusión $i : \Delta_1 \rightarrow \Delta$ induce al functor truncar en $[1]$, $\text{tr} : \mathbf{Con}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$, que tiene adjuntos derecho e izquierdo llamados coesqueleto y esqueleto respectivamente y se denotan coes , es : $\mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}^{\Delta^{op}}$, ver [4]. Como tr tiene adjunto izquierdo, entonces preserva límites. Así, el functor $\text{coes} : \mathbf{Con}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$ es un morfismo geométrico. Como Δ y Δ_1 tienen objeto terminal y todo objeto tiene un punto, entonces hay morfismos geométricos precohesivos $p : \mathbf{Con}^{\Delta^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$ y $q : \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}} \rightarrow \mathbf{Con}$, es decir, podemos considerar el siguiente diagrama de topos y morfismos geométricos



Dado $S \in \mathbf{Con}$ se tiene que tanto p^*S como q^*S son funtores constantes S , por lo que $\text{tr}(p^*S) = q^*S$, como en la ecuación (2.4). Por lo tanto, el diagrama anterior conmuta y por el corolario 2.7 se concluye el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Un conjunto simplicial $X \in \mathbf{Con}^{\Delta^{op}}$ es débilmente Kan si y sólo si su gráfica subyacente $\text{tr}(X)$ es débilmente Kan, o bien, si y sólo si $\text{tr}(X)$ tiene diámetro finito.*

El teorema anterior se pudo deducir usando el mismo argumento que en el ejemplo de gráficas. De hecho, originalmente habíamos hecho así cada uno de los ejemplos. Sin embargo, como el mismo argumento funcionó para todos nuestros ejemplos, entonces escribimos los resultados generales para presentarlos como lo hemos hecho.

Finalmente, se demostrará que la exponencial de conjuntos simpliciales débilmente Kan no siempre es débilmente Kan. Para demostrar esto es necesario ver que coesqueleto preserva exponenciales.

Lema 2.9. *Si $X, Y \in \mathbf{Con}^{\Delta_1^{op}}$ entonces $\text{coes}(X^Y) = \text{coes}(X)^{\text{coes}(Y)}$.*

Demostración. Sea $Z \in \mathbf{Con}^{\Delta^{op}}$. Como coes es fiel y pleno entonces la counidad $\text{tr}(\text{coes}(Y)) \rightarrow Y$ es un isomorfismo (véase [4, sección 3]). Por lo que se puede considerar la siguiente cadena de isomorfismos:

$$\begin{array}{c} Z \longrightarrow \text{coes}(X)^{\text{coes}(Y)} \\ \hline Z \times \text{coes}(Y) \longrightarrow \text{coes}(X) \\ \hline \text{tr}(Z \times \text{coes}(Y)) \longrightarrow X \\ \hline \text{tr}(Z) \times \text{tr}(\text{coes}(Y)) \longrightarrow X \\ \hline \text{tr}(Z) \times Y \longrightarrow X \\ \hline \text{tr}(Z) \longrightarrow X^Y \\ \hline Z \longrightarrow \text{coes}(X^Y) \end{array}$$

que muestran que coesqueleto preserva exponenciales. \square

Para demostrar que $\mathbf{kCon}^{\Delta^{op}}$ no es cartesiana cerrada se toman las gráficas G y H de la sección 2.2. De esta forma tenemos los conjuntos simpliciales $\text{coes}(G)$ y $\text{coes}(H)$ están en $\mathbf{kCon}^{\Delta^{op}}$. Por el lema anterior se tiene el isomorfismo $\text{coes}(G)^{\text{coes}(H)} \cong \text{coes}(G^H)$. Por el teorema 2.8 este último es débilmente Kan si su gráfica subyacente $\text{tr}(\text{coes}(G^H))$ tiene diámetro finito y esta última es isomorfa a G^H que no tiene diámetro finito. Por lo tanto $\text{coes}(G)^{\text{coes}(H)}$ no es débilmente Kan y así $\mathbf{kCon}^{\Delta^{op}}$ no es cartesiana cerrada.

2.5 Conjuntos bipuntuados

Sea \mathbf{A} la categoría bipuntuada, es decir, sus objetos son de la forma $\bar{n} = (\{0, \dots, n\}, 0, n)$ con $n \geq 1$ y sus morfismos $f : \bar{n} \rightarrow \bar{m}$ son funciones tales que $f(0) = 0$ y $f(n) = m$. Es fácil ver que $\bar{1}$ es el objeto inicial de \mathbf{A} y que en \mathbf{A}^{op} todo objeto tiene un punto, por lo que existe un morfismo precohesivo canónico $p : \mathbf{Con}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{Con}$.

En la categoría \mathbf{A} hay exactamente dos morfismos $\bar{2} \rightarrow \bar{1}$, uno determinado por $1 \mapsto 0$ y el otro por $1 \mapsto 1$. Esto significa que en \mathbf{A}^{op} el objeto $\bar{2}$ tiene dos puntos. Por lo tanto, al restringir la categoría \mathbf{A} en 2 se obtiene la subcategoría \mathbf{A}_2 , que es de la forma:

$$\bar{2} \begin{array}{c} \xrightarrow{1 \mapsto 0} \\ \xleftarrow{\quad \quad \quad} \\ \xrightarrow{1 \mapsto 1} \end{array} \bar{1}$$

De la misma manera que en conjuntos simpliciales, se puede truncar un conjunto bipuntuado en 2 , es decir, hay un functor $\text{tr} : \mathbf{Con}^{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{A}_2}$ inducido por la inclusión, donde $\mathbf{Con}^{\mathbf{A}_2}$ es la categoría \mathbf{GraR} . De esta forma, también tenemos un morfismo geométrico $\text{Dan} : \mathbf{Con}^{\mathbf{A}_2} \rightarrow \mathbf{Con}^{\mathbf{A}}$ que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Con}^{\mathbf{A}_2} & \xrightarrow{\text{Dan}} & \mathbf{Con}^{\mathbf{A}} \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & \mathbf{Con} \end{array}$$

Para encontrar los objetos débilmente Kan en conjuntos bipuntuados se hace lo mismo que en conjuntos simpliciales, es decir, veremos que la inclusión $i : \mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}$ satisface que para cualquier $\bar{n} \in \mathbf{A}^{op}$, la categoría i/\bar{n} es conexa. Para esto basta notar que cualquier morfismo $\bar{2} \rightarrow \bar{n}$ está conectado con $\bar{1} \rightarrow \bar{n}$ por medio del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{2} & & \\ & \swarrow 1 \mapsto 0 & \downarrow & \searrow 1 \mapsto 0 & \\ \bar{2} & & & & \bar{1} \\ & \searrow & \downarrow 1 \mapsto 0 & \swarrow ! & \\ & & \bar{n} & & \end{array}$$

Por lo tanto, por el corolario 2.7 un conjunto bipuntuado $X \in \mathbf{Con}^{\mathbf{A}}$ es débilmente Kan si y sólo si su gráfica subyacente $\text{tr}(X) \in \mathbf{Con}^{\mathbf{A}_2}$ tiene diámetro finito.

2.6 Gaeta y Zariski

Un ejemplo que esperamos sea un modelo de cohesión es el topos de Zariski. Este topos es importante, por ejemplo, en geometría algebraica con el trabajo de Grothendieck o las versiones suaves de este mismo para geometría diferencial. Por estas y más razones es un topos que nos gustaría que fuera cohesivo sobre conjuntos. En esta sección veremos cómo mostrar que sí es precohesivo sobre conjuntos, pero hemos fallado en la demostración o refutación del axioma de continuidad.

Empezaremos recordando lo que usaremos de categorías extensivas que necesitamos para el contenido de esta sección. Para ver más acerca de estas categorías se puede consultar [3] o [33].

Una categoría \mathbf{C} es extensiva si tiene coproductos finitos y si $\{X_i \mid i = 1, \dots, n\}$ y $\{A_i \mid i = 1, \dots, n\}$ son familias de objetos en \mathbf{C} , entonces los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_i & \longrightarrow & \sum A_i \end{array}$$

son productos fibrados si y sólo si $(X_i \rightarrow Z)$ es un coproducto.

Además, recordemos que los coproductos en una categoría extensiva son ajenos, es decir, el producto fibrado de $A \rightarrow A + B \leftarrow B$ es el objeto inicial. Esto se debe a que $0 \rightarrow B \leftarrow B$ es un coproducto y la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xleftarrow{i_B} & B \\ \downarrow & & \downarrow i_B & & \downarrow 1_B \\ A & \xrightarrow{i_A} & A + B & \xleftarrow{i_B} & B \end{array}$$

Dada una categoría extensiva \mathbf{C} siempre es posible construir un *topos de Gaeta* sobre \mathbf{C} mediante la siguiente base para una topología de Grothendieck: familias finitas de la forma

$$\{A_i \rightarrow A \mid 1 \leq i \leq n\}$$

están en $K_G(A)$ si y sólo si el morfismo inducido $\sum A_i \rightarrow A$ es isomorfismo.

Lema 2.10. *Dada una categoría extensiva \mathbf{C} , las familias $K_G(A)$ forman una base para una topología de Grothendieck.*

Demostración. Es claro que cualquier isomorfismo $B \rightarrow A$ está en $K_G(A)$. Si la familia finita $(A_i \rightarrow A)$ está en $K_G(A)$ y $g : B \rightarrow A$ es un morfismo en \mathbf{C} , entonces la familia de productos fibrados

$$\begin{array}{ccc} B \times_A A_i & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow g \\ A_i & \longrightarrow & A \end{array}$$

satisface $\sum B \times_A A_i \cong B$, ya que $\sum A_i \cong A$ y la categoría \mathbf{C} es extensiva. Por lo que $(B \times_A A_i \rightarrow B)$ está en $K_G(B)$. Finalmente, si $(A_i \rightarrow A)$ está en $K_G(A)$ y para cada i suponemos que $(A_{ij} \rightarrow A_i)$ está en $K_G(A_i)$, entonces se tienen los siguientes isomorfismos

$$A \cong \sum_i A_i \cong \sum_i \sum_j A_{ij} \cong \sum_{i,j} A_{ij},$$

de esta forma $(A_{ij} \rightarrow A_i \rightarrow A)_{i,j}$ está en $K_G(A)$. □

Con esto podemos tomar J_G la topología de Grothendieck generada por K_G . Si \mathbf{C} es una categoría extensiva, el *topos de Gaeta* sobre \mathbf{C} es el topos $Ga(\mathbf{C}) = \text{Gav}(\mathbf{C}, J_G)$. Como los coproductos en una categoría extensiva son ajenos, es posible dar una caracterización de las gavillas con la topología J_G .

Proposición 2.11. *Sea \mathbf{C} una categoría extensiva. Una pregavilla $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Con}$ es una gavilla para la topología J_G si y sólo si F preserva productos finitos.*

Demostración. Supongamos que F es una gavilla y que $A_1, \dots, A_n \in \mathbf{C}$. Tomamos $A = A_1 + \dots + A_n$ en \mathbf{C} , es decir, A es un producto finito en \mathbf{C}^{op} y veamos que $FA \cong \prod FA_i$. Como F es una gavilla, el diagrama

$$FA \xrightarrow{e} \prod FA_i \xrightleftharpoons[p]{p} \prod F(A_i \times_A A_j) \quad (2.5)$$

es un igualador. Como \mathbf{C} es extensiva, los coproductos son ajenos y así $A_i \times_A A_j = 0$. De nuevo usando que F es gavilla tenemos que $F(0) = \{*\}$, por lo que el digrama (2.5) es de la forma

$$FA \xrightarrow{e} \prod FA_i \xrightleftharpoons[p]{p} \{*\}.$$

Por lo tanto, $p = q$ y entonces e es un isomorfismo.

Supongamos que F preserva productos finitos y sea $A \cong A_1 + \dots + A_n$ el opuesto de una familia cubriente. Por hipótesis tenemos un isomorfismo $FA \cong FA_1 \times \dots \times FA_n$.

Dada una familia compatible $\{x_i \in FA_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ tomamos $x \in FA$ tal que el isomorfismo anterior cumple $x \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. De esta forma tenemos:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\cong} & FA_1 \times \dots \times FA_n & \xrightarrow{\pi_i} & FA_i \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Lo cual implica que x es una amalgama para la familia compatible. Además, si $y \in FA$ es otra amalgama entonces, al tener las mismas restricciones que x , tiene asignado mismo elemento (x_1, \dots, x_n) en el producto. Como la primer flecha del diagrama anterior es un isomorfismo, entonces $x = y$. Por lo que F es una gavilla. \square

Ahora consideramos la categoría $\mathbf{A} = (k - \text{Alg})_{fg}$, de k -álgebras conmutativas finitamente generadas, donde k es un campo algebraicamente cerrado.

Lema 2.12. \mathbf{A}^{op} es extensiva.

La demostración de este lema es extensa y como tal demostración no es fundamental para el ejemplo sólo citamos [33], de donde se puede extraer una demostración usando la proposición 7.1.2 y el teorema 7.1.30.

Con esto podemos considerar el topos $Ga(\mathbf{A}^{op})$. Ahora, un álgebra es *indescomponible* si no se puede expresar como producto de álgebras. Lo siguiente es ver que si tomamos $\text{Indes}(\mathbf{A})$, la subcategoría plena de \mathbf{A} cuyos objetos son álgebras indescomponibles, entonces $Ga(\mathbf{A}^{op})$ es equivalente a $\mathbf{Con}^{\text{Indes}(\mathbf{A})}$. Para obtener esta equivalencia, veremos que toda $A \in \mathbf{A}$ se descompone como un producto finito de álgebras indescomponibles. Esto último es equivalente a demostrar la existencia de un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos, es decir, idempotentes $e_1, \dots, e_n \in A$ tales que:

1. $1 = e_1 + \dots + e_n$,
2. si $i \neq j$ entonces $e_i e_j = 0$,
3. si $e_i = e_j + e_k$ entonces $e_i = e_j$ o $e_i = e_k$.

El procedimiento para encontrar la existencia de un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos nos la sugirió Johnstone en una conversación. Escribimos a continuación los detalles de esta idea.

Como puede verse en [2] o en [10] si R es un anillo conmutativo con 1, entonces $\text{Idem}(R) = \{e \in R \mid e^2 = e\}$ es un álgebra de Boole con las operaciones

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 &= e_1 e_2, \\ e_1 \vee e_2 &= e_1 + e_2 - e_1 e_2, \\ \neg e &= 1 - e. \end{aligned}$$

Como toda k -álgebra finitamente presentada es noetheriana, basta ver que si R es noetheriano entonces el álgebra de Boole $\text{Idem}(R)$ es finita.

Supongamos que R es un anillo conmutativo con 1 y noetheriano.

Lema 2.13. *Las cadenas ascendentes en $\text{Idem}(R)$ son finitas.*

Demostración. Sean $e, f \in \text{Idem}(R)$ y supongamos que $e \leq f$, es decir, $e \wedge f = e$. Como el ínfimo del álgebra $\text{Idem}(R)$ es el producto, entonces e está en el ideal generado por f , es decir, $e \in (f)$. Con esto concluimos $(e) \subseteq (f)$. De esta forma toda cadena ascendente en $\text{Idem}(R)$ define una cadena ascendente de ideales en R . Como R es noetheriano, las cadenas ascendentes de ideales son finitas, lo cual implica el resultado. \square

Corolario 2.14. *Las cadenas descendentes en $\text{Idem}(R)$ son finitas.*

Demostración. Basta notar que si $e \leq f$ entonces $\neg f \leq \neg e$. Por lo tanto, al tomar complementos, toda cadena descendente define una cadena ascendente y por el lema anterior debe ser finita. \square

Corolario 2.15. *$\text{Idem}(R)$ es un álgebra de Boole atómica.*

Demostración. Supongamos que no es atómica, entonces existe $e \in \text{Idem}(R)$ que no tiene átomos menores o iguales a él. Con esto es posible definir una cadena descendente infinita

$$e \geq e_1 \geq e_2 \geq \dots$$

definiendo e_{n+1} como un elemento no cero más chico que e_n . Lo cual es una contradicción. \square

Corolario 2.16. *$\text{Idem}(R)$ es finita.*

Demostración. Basta ver hay una cantidad finita de átomos en $\text{Idem}(R)$. Supongamos que $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ son átomos, entonces definimos la siguiente cadena ascendente infinita:

$$e_0 \preceq (e_0 \vee e_1) \preceq (e_0 \vee e_1 \vee e_2) \preceq \dots$$

de donde podemos concluir que $\text{Idem}(R)$ tiene un conjunto finito de átomos. \square

En conclusión, dado R un anillo conmutativo con 1 y noetheriano, el álgebra de Boole $\text{Idem}(R)$ tiene un conjunto finito de átomos, digamos e_1, \dots, e_n . Notemos que estos idempotentes satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si $i \neq j$ entonces $e_i \wedge e_j = 0$, es decir, $e_i e_j = 0$,
2. $e_1 \vee \dots \vee e_n = 1$, esta igualdad se traduce a $e_1 + \dots + e_n = 1$.
3. Si $f_1, f_2 \in \text{Idem}(R)$ son tales que $e_i = f_1 \vee f_2$, entonces $f_1 = e_i$ o $f_2 = e_i$.

Con lo anterior podemos concluir que, como toda álgebra $A \in \mathbf{A}$ es noetheriana, entonces se puede descomponer como un producto finito de álgebras indescomponibles. Si $e_1, \dots, e_n \in A$ es un conjunto completo de indescomponibles ortogonales y primitivos, entonces

$$A \cong e_1 A \times \dots \times e_n A \quad (2.6)$$

Con esta descomposición podemos definir funtores $F : \text{Ga}(\mathbf{A}^{op}) \rightarrow \mathbf{Con}^{\text{Indes}(\mathbf{A})}$ y $G : \mathbf{Con}^{\text{Indes}(\mathbf{A})} \rightarrow \text{Ga}(\mathbf{A}^{op})$ como sigue: $FX = X|_{\text{Indes}(\mathbf{A})}$ y $GY(A) = YA_1 \times \dots \times YA_n$, donde $A \cong A_1 \times \dots \times A_n$ con A_i indescomponible para toda i . Es fácil ver que estos funtores definen una equivalencia de categorías.

La diferencia entre \mathbf{A} e $\text{Indes}(\mathbf{A})$ es que la segunda no tiene al álgebra trivial, donde $0 = 1$, más aún $\text{Indes}(\mathbf{A})$ consta de álgebras con exactamente dos idempotentes, de esta manera la categoría $\text{Indes}(\mathbf{A})^{op}$ tiene objeto terminal y toda álgebra tiene un punto. Por lo tanto hay un morfismo precohesivo $p : \mathbf{Con}^{\text{Indes}(\mathbf{A})} \rightarrow \mathbf{Con}$. Por la equivalencia anterior, p induce un morfismo precohesivo $q : \text{Ga}(\mathbf{A}^{op}) \rightarrow \mathbf{Con}$.

La topología de Zariski esta dada por una base de la siguiente manera (ver [25]). Dada un álgebra $A \in \mathbf{A}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ el dual de la familia

$$\{A \rightarrow A[a_i^{-1}] \mid 1 \leq i \leq n\}$$

cubre a A si $1 \in (a_1, \dots, a_n)$. No podemos usar esta topología en la categoría $\text{Indes}(\mathbf{A})$ ya que es posible que $A[a_i^{-1}]$ no sea indescomponible. Para restringir la topología es

necesario descomponer cada $A[a_i^{-1}]$ como un producto de indescomponibles:

$$A[a_i^{-1}] \cong A_{i1} \times \cdots \times A_{in_i}.$$

Así, la topología de Zariski en $\text{Indes}(\mathbf{A})$ tiene como base la función K_Z que a cada álgebra indescomponible A le asigna el dual de familias de la forma

$$\{A \rightarrow A[a_i^{-1}] \rightarrow A_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i\} \quad (2.7)$$

Por la descomposición en (2.6) sabemos que $A_{ij} = e_{ij}A[a_i^{-1}]$, donde $e_{i1}, \dots, e_{in_i} \in A[a_i^{-1}]$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos. De nuevo, dicha familia es cubriente si $1 \in (a_1, \dots, a_n)$.

Es claro que la familia $id : A \rightarrow A$ cubre a A , por lo que la función K_Z satisface el primer axioma de base para una topología de Grothendieck.

Lema 2.17. *La función K_Z satisface el axioma de transitividad.*

Demostración. Supongamos que $\{A \rightarrow A[a_i^{-1}] \rightarrow A_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i\}$ cubre a A y que para cada i, j hay una familia $\{A_{ij} \rightarrow A_{ij}[b_k^{-1}] \rightarrow A_{ijr} \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq r \leq m_i\}$ que cubre a A_{ij} . Como $1 \in (b_1, \dots, b_m)$ en $A_{ij} = e_{ij}A[a_i^{-1}]$, entonces

$$\begin{aligned} e_{ij} &= e_{ij}\alpha_1 b_1 + \cdots + e_{ij}\alpha_m b_m \\ &= e_{ij}(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_m b_m) \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cada i, j y $1 = e_{i1} + \cdots + e_{in_i}$ en $A[a_i^{-1}]$, entonces sumando la ecuación anterior sobre todas las $1 \leq j \leq n_i$ se obtiene que $\{A_{ij} \rightarrow A_{ij}[b_k^{-1}] \rightarrow A_{ijr} \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq r \leq m_i\}$ “cubre” a cada $A[a_i^{-1}]$. Con esto se puede continuar como en [25, pág. 120] para obtener el resultado que queremos. \square

Antes de demostrar estabilidad necesitamos hacer una observación. Supongamos que $g : A \rightarrow B$ es un morfismo de k -álgebras y que $f_1, \dots, f_m \in B$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Dado un idempotente $e \in A$ se tiene que $g(e) \in B$ es un idempotente. Como $\{f_1, \dots, f_m\}$ es el conjunto de átomos del álgebra de Boole de idempotentes de B , entonces existe i tal que $f_i \leq g(e)$ y por tanto $f_i g(e) = f_i$. Con esto definimos $\bar{g} : eA \rightarrow f_i B$ como $ea \mapsto f_i(g(e)g(a)) = f_i g(a)$. Como g es un morfismo entonces \bar{g} es un morfismo, además el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ eA & \xrightarrow{\bar{g}} & f_i B \end{array}$$

conmuta, donde las flechas verticales son proyecciones.

Con esto demostraremos la versión de estabilidad para categorías que no tienen productos fibrados (ver [25, ejercicio III-3]).

Lema 2.18. *La función K_Z satisface el axioma de estabilidad.*

Demostración. Supongamos que $g : A \rightarrow B$ es un morfismo de k -álgebras y que tenemos el dual de una familia cubriente como en (2.7), con $e_{i1}, \dots, e_{in_i} \in A[a_i^{-1}]$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Como $1 \in (a_1, \dots, a_n)$ en A entonces $1 \in (g(a_1), \dots, g(a_n))$ en B . Así,

$$\{B \rightarrow B[g(a_i)^{-1}] \rightarrow f_{ik}B[g(a_i)^{-1}] \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m_i\}$$

es el dual de una familia cubriente, donde $f_{i1}, \dots, f_{im_i} \in B[g(a_i)^{-1}]$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Además es fácil ver que hay un morfismo $g' : A[a_i^{-1}] \rightarrow B[g(a_i)^{-1}]$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[a_i^{-1}] & \xrightarrow{g'} & B[g(a_i)^{-1}] \end{array}$$

Dado $f_{ik} \in B[g(a_i)^{-1}]$ podemos tomar un idempotente $e_{ij} \in A[a_i^{-1}]$ tal que, en el álgebra de Boole de idempotentes, $f_{ik} \leq g(e_{ij})$. De esta manera tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A[a_i^{-1}] & \longrightarrow & e_{ij}A[a_i^{-1}] \\ g \downarrow & & \downarrow g' & & \downarrow \overline{g'} \\ B & \longrightarrow & B[g(a_i)^{-1}] & \longrightarrow & f_{ik}B[g(a_i)^{-1}] \end{array}$$

Lo cual muestra que se satisface el axioma de estabilidad. \square

Ahora tenemos un sitio $(\text{Indes}(\mathbf{A}), K_Z)$. Es fácil ver que $\text{Indes}(\mathbf{A})$ es una categoría con objeto terminal y en donde todo objeto tiene un punto. Además, el sitio es conexo y localmente conexo por lo que, por los resultados en la sección 1 de [8], tenemos que hay un morfismo precohesivo $p : \text{Gav}(\text{Indes}(\mathbf{A}), K_Z) \rightarrow \mathbf{Con}$.

No fue posible encontrar una caracterización de los objetos débilmente Kan en el topos de Zariski, $\text{Gav}(\text{Indes}(\mathbf{A}), K_Z)$, por lo que tampoco pudimos determinar si este es otro modelo de cohesión.

Capítulo 3

Cohesión

Un ejemplo simple de un modelo de cohesión consiste en tomar la categoría **2** dada por $! : 0 \rightarrow 1$. Veremos una restricción del topos \mathbf{Con}^{2op} que satisface el axioma de continuidad. Aunque la restricción no será un topos, veremos que es una categoría extensiva y cartesiana cerrada, por lo que será un modelo de cohesión.

Aunque no es cierto que todo objeto de **2** tiene un punto, existe una cadena de adjuntos $p_! \dashv p^* \dashv p_* \dashv p^!$. El functor discreto $\Delta : \mathbf{Con} \rightarrow \mathbf{Con}^{2op}$ siempre tiene adjuntos derecho e izquierdo, dados por límite y colímite respectivamente. Como la categoría **2** tiene objetos terminal e inicial, límite es lo mismo que evaluar en 1 y colímite es evaluar en 0. Por lo que sólo falta ver que $\square^{2(1,-)}$ (para recordar la definición de este functor ver (1.4)) es adjunto derecho de ev_1 .

Por un lado, dados $F \in \mathbf{Con}^{2op}$, $S \in \mathbf{Con}$ y $f : F1 \rightarrow S$, se define una transformación natural $F \rightarrow S^{2(1,-)}$ con la siguiente información:

$$\begin{array}{ccc} F0 & \xrightarrow{!} & \{*\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ F1 & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

Por otro lado, si $\tau : F \rightarrow S^{2(1,-)}$ es una transformación natural se toma la función $\tau_1 : F1 \rightarrow S$. Además es fácil ver que lo anterior define una biyección natural $\mathbf{Con}^{2op}(F, S^{2(1,-)}) \rightarrow \mathbf{Con}(F1, S)$, por lo que hay una adjunción $ev_1 \dashv \square^{2(1,-)}$. Así, hay una cadena de cuatro funtores adjuntos.

Como **2** tiene un objeto sin puntos, entonces el morfismo $p : \mathbf{Con}^{2op} \rightarrow \mathbf{Con}$ no satisface el *Nullstellensatz*. Sin embargo, como veremos a continuación, satisface el

axioma de continuidad. En este caso el morfismo del axioma de continuidad es la siguiente función:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Con}^{2^{op}}(\Delta S \times \mathbf{2}(-, 0), F) & \longrightarrow & F0^S \\ \tau \longmapsto & & S \xrightarrow{f} F0 \end{array}$$

donde $f(s) = \tau_0(s)$. Es fácil ver que su inversa es la función que a cada $f : S \rightarrow F0$ la manda a la transformación natural $\tau : \Delta S \times \mathbf{2}(-, 0) \rightarrow F$ definida como sigue

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\emptyset} & F1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{f} & F0 \end{array}$$

Ahora consideramos la subcategoría plena de $\mathbf{Con}^{2^{op}}$ cuyos objetos son aquellos que satisfacen el *Nullstellensatz*, es decir, aquellos $X \in \mathbf{Con}^{2^{op}}$ para los cuales el morfismo $ev_1(X) \rightarrow ev_0(X)$ es epimorfismo. En otras palabras, tomamos \mathbf{C} la subcategoría plena de $\mathbf{Con}^{2^{op}}$ cuyos objetos satisfacen que $X1 \rightarrow X0$ es un epimorfismo.

Observación 3.1. \mathbf{C} tiene productos finitos.

Demostración. Sean $X, Y \in \mathbf{C}$. Se considera el producto $X \times Y \in \mathbf{Con}^{2^{op}}$. Como $X1 \rightarrow X0$ y $Y1 \rightarrow Y0$ son epimorfismos y los límites se calculan puntualmente, entonces $(X \times Y)(1) \rightarrow (X \times Y)(0)$ es un epimorfismo. Por lo tanto, $X \times Y \in \mathbf{C}$. \square

De forma análoga es fácil ver que \mathbf{C} tiene coproductos finitos y que estos coinciden con los de $\mathbf{Con}^{2^{op}}$. Para ver si es cartesiana cerrada primero recordamos cómo es la exponencial en $\mathbf{Con}^{2^{op}}$. Dados $X, Y \in \mathbf{Con}^{2^{op}}$ e $i \in \{0, 1\}$, el conjunto $Y^X(i)$ se define como $\mathbf{Con}^{2^{op}}(X \times \mathbf{2}(-, i), Y)$ y si tomamos la flecha $! : 0 \rightarrow 1$ entonces la función $Y^X(1) \rightarrow Y^X(0)$ se define como sigue: a la transformación natural $\tau \in Y^X(1)$ se le asigna $\sigma \in Y^X(0)$ definida como la composición

$$X \times \mathbf{2}(-, 0) \xrightarrow{X \times \mathbf{2}(-, !)} X \times \mathbf{2}(-, 1) \xrightarrow{\tau} Y$$

Observación 3.2. \mathbf{C} es cartesiana cerrada.

Demostración. Se demostrará que la exponencial en \mathbf{C} coincide con la de $\mathbf{Con}^{2^{op}}$. Sean $X, Y \in \mathbf{C}$ y consideramos $Y^X \in \mathbf{Con}^{2^{op}}$. Como $Y1 \rightarrow Y0$ es epimorfismo se puede considerar una sección $s : Y0 \rightarrow Y1$. Para mostrar que $Y^X(1) \rightarrow Y^X(0)$ es

epimorfismo consideramos $\sigma \in Y^X(0) = \mathbf{Con}^{2^{op}}(X \times \mathbf{2}(-, 0), Y)$. Podemos definir $\tau \in Y^X(1)$ mediante $\tau_0 = \sigma_0$ y τ_1 como la composición:

$$X1 \longrightarrow X0 \xrightarrow{\sigma_0} Y0 \xrightarrow{s} Y1.$$

Es fácil ver que así definida τ es natural y que $Y^X(1) \rightarrow Y^X(0)$ satisface $\tau \mapsto \sigma$, es decir, $Y^X \in \mathbf{C}$. \square

Para tener un modelo de cohesión, falta ver que \mathbf{C} es una categoría extensiva.

Observación 3.3. \mathbf{C} es extensiva.

Demostración. Al tomar elementos de \mathbf{C} ya se satisface que las flechas inducidas por $0 \rightarrow 1$ son epimorfismos. De esta manera el resultado es una consecuencia del hecho que toda categoría de pregavillas (más aún, que todo topos) es extensiva. \square

Finalmente notemos que $\Delta S \in \mathbf{C}$ y que $S^{2(1,-)} \in \mathbf{C}$, por lo que la cadena de funtores adjuntos se restringe a \mathbf{C} . Por lo tanto, tenemos un morfismo $p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Con}$ cohesivo.

3.1 El topos de funciones unilaterales

En [30] Menni construye un topos cohesivo por medio de un submonoide del monoide de funciones continuas del intervalo $I = [0, 1]$ en sí mismo. En esta sección obtendremos el submonoide más grande del monoide anterior que induce un topos cohesivo sobre conjuntos, como en [36]. Además veremos que lo mismo será cierto para ciertos submonoides de nuestro monoide obteniendo, en particular, que el ejemplo en [30] es un caso particular de nuestro método.

Aunque muchos resultados se demuestren de forma similar a los análogos en [30] haremos la demostración de cada uno de ellos y en algunos casos haremos una demostración que pensamos es más simple a las que aparecen en el trabajo mencionado.

La única dificultad para encontrar estos topos cohesivos es que el submonoide de funciones continuas satisfaga el axioma de estabilidad con las cubiertas dadas por las particiones de Menni.

Recordemos que para cada submonoide del monoide de funciones continuas de I en sí mismo, que contiene a las funciones lineales, se tiene una asignación K que manda al único objeto I al conjunto KI de familias de la forma

$$\{f_i : I \rightarrow I \mid 1 \leq i \leq n\},$$

donde $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = 1$ es una partición y f_i es la función lineal que cumple $f_i(0) = r_{i-1}$ y $f_i(1) = r_i$, ver [30, pág. 562]. Es fácil ver que esta asignación satisface dos de los axiomas que definen base para una topología de Grothendieck, pero en general no satisface el axioma de estabilidad, como notó Isbell (ver [5]) en el caso del topos de Lawvere.

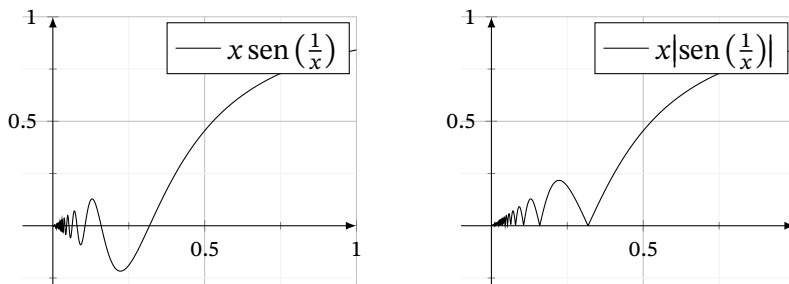
Definición 3.4. Sean $f : I \rightarrow I$ una función continua y $t \in I$. Diremos que f es *unilateral en t* si existe $\varepsilon > 0$ tal que las siguientes funciones no cambian de signo

$$f - f(t) : [t, t + \varepsilon] \cap [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \quad \text{y} \quad f - f(t) : [t - \varepsilon, t] \cap [0, 1] \rightarrow [-1, 1].$$

Diremos que f es *unilateral* si es unilateral en cada $t \in I$. Además, denotaremos con $\text{Uni}(I)$ al conjunto de funciones unilaterales del intervalo I en sí mismo.

Este concepto se puede ver por primera vez en [5], donde Isbell describe las gavillas del topos de Lawvere (este topos es el generado por monoide de funciones continuas del intervalo unitario en sí mismo) como pregavillas con dos operaciones parciales. Una de esas operaciones es el levantamiento de una trayectoria α . Los levantamientos se obtienen como la amalgamación de funciones α_0 que mapean un subintervalo J de I “ligeramente” en I tal que cada punto interior $p \in J$ tiene una vecindad compuesta por dos intervalos en los cuales $\alpha_0(x) - \alpha_0(p)$ no cambia de signo.

Enunciamos la definición anterior usando al intervalo unitario I porque de esta forma es más cercano a la idea original de Lawvere y su topos, pero puede ser fácilmente escrita en términos de intervalos cerrados arbitrarios, $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Con esta observación es más fácil dar ejemplos de funciones conocidas que resultan ser unilaterales. Consideramos las siguientes dos funciones (definiendo su valor en 0 como 0)



es fácil ver que $x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ no es unilateral en 0. Por otro lado, la función $x|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})|$ tiene un mínimo local en 0 por lo que es unilateral en ese punto. Además, es fácil ver que también es unilateral en cualquier otro punto de $(0, 1]$.

Lema 3.5. *Una función continua satisface el axioma de estabilidad para la asignación K si y sólo si es unilateral.*

Demostración. Supongamos que f satisface estabilidad y sea $t \in I$. Sólo haremos el caso en que $f(t) \in (0, 1)$ ya que los casos extremos son claros. Consideramos la partición $0 < f(t) < 1$, como f satisface estabilidad entonces hay una partición $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = 1$ tal que la imagen de cada intervalo $[r_{i-1}, r_i]$ está contenida en $[0, f(t)]$ o en $[f(t), 1]$. Ahora consideramos dos casos: $t \in (r_{i-1}, r_i)$ para algún i y t es alguno de r_0, \dots, r_n . En el primer caso basta tomar $\varepsilon > 0$ tal que $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq (r_{i-1}, r_i)$. En el segundo caso, si $t = r_i$ entonces la condición para ε es que $(t - \varepsilon, t) \subseteq (r_{i-1}, r_i)$ y que $(t, t + \varepsilon) \subseteq (r_i, r_{i+1})$. En ambos casos se concluye que f es unilateral.

Ahora supongamos que f es unilateral y que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ es una partición de I . Para cada $x \in I$ tomamos $\varepsilon_x > 0$ tal que: si $f(x) \in (t_{j-1}, t_j)$ entonces $f([x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x] \cap I) \subseteq (t_{j-1}, t_j)$ (tal ε existe por la continuidad de f); y si $f(x) = t_j$ entonces $f([x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x] \cap I) \subseteq (t_{j-1}, t_{j+1})$ (usando continuidad y el hecho que f es unilateral). Con esto tenemos una cubierta abierta $\bigcup_{x \in I} (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del compacto I , por lo que hay una subcubierta finita

$$I \subseteq (x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \cup \dots \cup (x_m - \varepsilon_m, x_m + \varepsilon_m),$$

con el cambio obvio de notación en las ε . Es claro que si $f(x_i) \in (t_{j_1}, t_{j_2})$ entonces la composición

$$[x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i] \cap I \hookrightarrow I \xrightarrow{f} I$$

se factoriza con la inclusión $[t_{j_1}, t_{j_2}] \hookrightarrow I$. Además, si $f(x_i) = t_j$ entonces

$$[x_i - \varepsilon_i, x_i] \cap I \hookrightarrow I \xrightarrow{f} I$$

se factoriza a través de la inclusión $[t_{j-1}, t_j] \hookrightarrow I$ o a través de la inclusión $[t_j, t_{j+1}] \hookrightarrow I$, dependiendo del signo de $f - f(t)$. Análogamente para el intervalo $[x_i, x_i + \varepsilon_i]$. Con esto es claro que el conjunto de puntos

$$(\{0, 1\} \cup \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_n + \varepsilon_n\} \cup \{x_1 - \varepsilon_1, \dots, x_n - \varepsilon_n\}) \cap [0, 1]$$

genera una partición que muestra que f satisface el axioma de estabilidad. \square

Es claro que funciones que satisfacen el axioma de estabilidad son cerradas bajo composición, por lo que se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.6. *La composición de funciones unilaterales es una función unilateral.*

Como la identidad en I es unilateral se puede definir la categoría **Uni** con un único objeto I y cuyos morfismos son funciones unilaterales.

El lema 3.5 muestra que los endomorfismos unilaterales de I son el monoide de endomorfismos continuos de I más grande, que contiene a las funciones lineales, para el cual la topología de particiones de Menni es una topología de Grothendieck.

Sea M un submonoide del monoide de endomorfismos unilaterales de I tal que M contiene a las funciones lineales. Así, M determina una subcategoría \mathbb{M} de **Uni**. Le daremos a \mathbb{M} la topología J de particiones de Menni y por lo anterior obtenemos un sitio (\mathbb{M}, J) . Denotamos con \mathcal{M} al topos $\text{Gav}(\mathbb{M}, J)$ y veremos que el morfismo canónico $p : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Con}$ es un modelo de cohesión.

Antes de eso seguiremos con el camino trazado en [30] para construir un sitio subcanónico para el topos \mathcal{M} . Primero consideramos la categoría \mathbf{M}_0 cuyos objetos son intervalos cerrados $[a, b]$ con $a \leq b$ en \mathbb{R} y cuyos morfismos son funciones $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ que se pueden construir como composiciones de la forma

$$[a, b] \longrightarrow I \xrightarrow{m} I \longrightarrow [c, d]$$

donde las flechas sin nombre son funciones lineales y $m \in M$.

Es fácil ver que las funciones lineales $[a, b] \rightarrow [c, d]$ están en \mathbf{M}_0 , que todos los morfismos de \mathbf{M}_0 son unilaterales, con la extensión obvia de la definición 3.4 a funciones continuas entre intervalos cerrados, y que \mathbb{M} es una subcategoría plena de \mathbf{M}_0 .

Definición 3.7. Una M -disección de una función continua $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es una familia

$$\{g_j : [r_{j-1}, r_j] \hookrightarrow [a, b] \mid 1 \leq j \leq n\}$$

tal que $f g_j \in \mathbf{M}_0$. Se dice que la función f es “ M a pedazos” si tiene una M -disección.

Proposición 3.8. *Las funciones M a pedazos son cerradas bajo composición.*

Demostración. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones M a pedazos. Consideramos disecciones $\{f_j : [r_{j-1}, r_j] \hookrightarrow A \mid 1 \leq j \leq n\}$ y $\{g_i : [t_{i-1}, t_i] \hookrightarrow B \mid 1 \leq i \leq m\}$ de

f y g respectivamente. Como ser unilateral es una propiedad local, entonces f y g son unilaterales. Por un argumento similar al del lema 3.5 hay una partición de A , digamos x_0, \dots, x_k , tal que para cada l existe un i tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} [x_{l-1}, x_l] & \xrightarrow{f|_{[x_{l-1}, x_l]}} & [t_{i-1}, t_i] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Con esto se obtiene una partición $\{x_0, \dots, x_k\} \cap [r_{j-1}, r_j]$ de cada intervalo $[r_{j-1}, r_j]$ para la cual la composición con gf esta en \mathbf{M}_0 . Por lo que hemos obtenido una M -disección de gf . \square

Ahora definimos la categoría \mathbf{M} de intervalos cerrados $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, y funciones M a pedazos entre ellos. Como todas las funciones involucradas son unilaterales, es claro que la topología de particiones de Menni es una topología de Grothendieck sobre \mathbf{M} , es decir, una base L para esta topología está definida como $L[a, a] = \{\text{id}\}$ y si $a < b$, entonces $L[a, b]$ es la familia

$$\{[r_{j-1}, r_j] \hookrightarrow [a, b] \mid 1 \leq j \leq n\}$$

determinada por una partición $a = r_0 < \dots < r_n = b$.

No es difícil ver que (\mathbf{M}, L) es subcanónico ya que los elementos del representable $\mathbf{M}(-, [a, b])$ son funciones continuas y las familias cubrientes, o bien elementos de $L[a, b]$, son cubiertas en el sentido usual.

Además, por el lema de comparación (teorema C.2.2.3 en [9]), tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.9. \mathcal{M} es equivalente a $\text{Gav}(\mathbf{M}, L)$.

Ahora podemos ver que \mathcal{M} es cohesivo sobre **Con**.

Teorema 3.10. Sea M un submonoide de $\text{Uni}(I, I)$ tal que M contiene a los endomorfismos lineales. Entonces, \mathcal{M} es cohesivo sobre **Con**.

Demostración. Para cualesquiera $x, y \in [a, b]$ hay una única función lineal $f : I \rightarrow [a, b]$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$, es decir, todo objeto en \mathbf{M} es conexo por trayectorias con respecto al objeto I . Por lo tanto, tomando los puntos $0, 1 : 1 \rightarrow I$ tenemos que I

es un conector. Además, tomando las funciones lineales $l, r : I \rightarrow I$ definidas como $l(x) = \frac{x}{2}$ y $r(x) = \frac{x+1}{2}$, es fácil ver $(I, 0, 1, l, r)$ es un intervalo abstracto. Como la familia $\{l, r\}$ genera la misma criba que la familia

$$\left\{ \left[0, \frac{1}{2} \right] \hookrightarrow I, \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \hookrightarrow I \right\},$$

es decir, una familia cubriente, entonces la topología es compatible con el intervalo abstracto. Así, por el teorema 1.23, concluimos que \mathcal{M} es cohesivo sobre **Con**. \square

La relación con teoría clásica de gavillas

Ahora seguiremos las ideas de Johnstone en [6] con el objetivo de mostrar que no era necesario abandonar la filosofía de Lawvere para obtener la mayoría de los resultados de dicho trabajo.

Primero veremos que una clase suficientemente grande de espacios topológicos está incluida en nuestro topos \mathcal{M} , por lo que podremos considerar a \mathcal{M} como una “buena categoría de espacios topológicos”.

Sea **Top** la categoría de espacios topológicos y funciones continuas. Es claro que hay un funtor fiel **Top** $\rightarrow \mathcal{M}$ dado por $X \mapsto (\mathbf{Top}(-, X) : \mathbf{M}^{op} \rightarrow \mathbf{Con})$. Hace falta encontrar una clase de espacios donde este funtor es fiel, es decir, dar una clase donde la topología (o bien, las funciones continuas) esté determinada por las trayectorias continuas.

Lema 3.11. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios primero numerables y localmente conexos por trayectorias. Si para cada trayectoria continua $\gamma : I \rightarrow X$ la composición $f\gamma$ es continua, entonces f es continua.*

Demostración. Supongamos que f satisface la hipótesis y no es continua. Sean $x \in X$ y V una vecindad de $f(x)$ que muestran que f no es continua en el punto x . Como X es localmente conexo por trayectorias y primero numerable, entonces podemos construir una base local de x formada por vecindades conexas por trayectorias, $\{U_n \mid n \geq 1\}$, tales que si $n < m$ entonces $U_m \subseteq U_n$. Como f no es continua en x , para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in U_n$ tal que $f(x_n) \notin V$. Como las vecindades U_n son conexas por trayectorias podemos tomar una trayectoria $\gamma_n : I \rightarrow U_n$ que conecta a x_n con x_{n+1} . Finalmente, definimos una trayectoria $\gamma : I \rightarrow X$ como $\gamma(t) = \gamma_n(t)$ si $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$ y $\gamma(1) = x$. De esta forma $f\gamma(1 - \frac{1}{n}) \notin V$ para toda $n \geq 1$. Así, la

sucesión $\{1 - \frac{1}{n}\}$ converge a 1 pero al aplicar $f\gamma$ no converge a $f(x)$, contradiciendo que $f\gamma$ es continua. \square

Con esto podemos concluir que el funtor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathcal{M}$ es fiel y pleno cuando se restringe a la subcategoría de espacios primero numerables y localmente conexos por trayectorias. En particular esta categoría contiene a las variedades reales y a los complejos CW.

Para simplificar la notación identificamos a X con $\mathbf{Top}(-, X)$ como objetos de \mathcal{M} .

Siguiendo el lema 9.1 en [6] definiremos un morfismo geométrico $v : \mathcal{M}/X \rightarrow \mathbf{Gav}(X)$, donde X es un espacio topológico. Primero, $v_* : \mathcal{M}/X \rightarrow \mathbf{Gav}(X)$ se define como sigue: dado $\psi : E \rightarrow X$ en \mathcal{M}/E la pregavilla $v_*\psi$ es tal que a cada abierto $U \subseteq E$ lo manda al conjunto de transformaciones naturales $\varphi : U \rightarrow E$ que hacen conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & E \\
 & \searrow & \swarrow \psi \\
 & & X
 \end{array}
 \tag{3.1}$$

Lema 3.12. Sean \mathbf{A} una categoría y K una base para una topología de Grothendieck sobre \mathbf{A} , $f : C \rightarrow D$ una flecha en \mathbf{A} , $G \in \mathbf{Gav}(\mathbf{C}, K)$, $\{D_j \rightarrow D \mid j \in J\}$ una cubierta de D y $\{C_i \rightarrow C \mid i \in I\}$ la cubierta de C que se obtiene usando estabilidad, es decir, para cada $i \in I$ existe $j \in J$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 C_i & \xrightarrow{f_{ij}} & D_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{f} & D
 \end{array}
 \tag{3.2}$$

conmuta. Si $\{y_j \in GD_j \mid j \in J\}$ es una familia compatible y $\{x_i \in GC_i \mid i \in I\}$ es la familia que se obtiene mediante $Gf_{ij} : GD_j \rightarrow GC_i$ y para cada $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $x_i = y_j \cdot f_{ij}$, entonces las amalgamas y y x , de las familias anteriores, satisfacen $y \cdot f = x$.

Demostración. Por la unicidad de las amalgamas es suficiente ver que para cada $i \in I$ las restricciones de $y \cdot f$ y x a C_i coinciden. Sea $i \in I$, entonces existe $j \in J$ tal que el cuadrado en (3.2) conmuta. Así, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} GD & \xrightarrow{f} & GC \\ \downarrow & & \downarrow \\ GD_j & \xrightarrow{Gf_{ij}} & GC_i \end{array}$$

afirma que la restricción de $y \cdot f$ a C_i es $y_j \cdot f_{ij} = x_i$. Por lo tanto $y \cdot f = x$. \square

Lema 3.13. Para cada $\psi : E \rightarrow X$ en \mathcal{M}/E , la pregavilla $v_*\psi$ es una gavilla sobre X .

Demostración. Sean $U \subseteq X$ un abierto y $U = \bigcup_i U_i$ una cubierta abierta. Dada una familia compatible

$$\{\varphi_i : U_i \rightarrow E \mid i \in I\} \quad (3.3)$$

queremos definir una amalgama $\varphi : U \rightarrow E$ para dicha familia. Tomamos un intervalo $[a, b]$ y $f : [a, b] \rightarrow U$ en **Top**. De la misma forma que en 3.4 es posible demostrar, usando que $[a, b]$ es compacto, que existe una partición $a = r_0 < \dots < r_n = b$ tal que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se cumple $f_j := f|_{[r_{j-1}, r_j]} : [r_{j-1}, r_j] \rightarrow U_{i_j}$ para algún i_j . Consideramos la familia

$$\{(\varphi_{i_j})_{[r_{j-1}, r_j]}(f_j) \in E[r_{j-1}, r_j] \mid 1 \leq j \leq n\}. \quad (3.4)$$

Si tomamos una intersección $[r_{j-1}, r_j] \cap [r_j, r_{j+1}]$ (estas son la únicas intersecciones relevantes), entonces de las siguientes igualdades $f_j(r_j) = f_{j+1}(r_j)$ y $\varphi_{i_j}|_{U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}}} = \varphi_{i_{j+1}}|_{U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}}}$ (este último es porque (3.3) es una familia compatible) concluimos que (3.4) es una familia compatible.

Como E es una gavilla, la familia (3.4) tiene una única amalgama $\varphi_{[a,b]}(f)$. Además notemos que como (3.3) es compatible, la amalgama no depende de la elección de los i_j .

Para ver que φ es natural tomamos $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ en **M** y $g : [c, d] \rightarrow U$ continua. Por lo anterior existe una partición $c = s_0 < \dots < s_m = d$ tal que $g_j = g|_{[s_{j-1}, s_j]} : [s_{j-1}, s_j] \rightarrow U_{i_j}$ para algún $i_j \in I$. Como f es unilateral existe una partición $a = r_0 < \dots < r_n = b$ tal que para toda $1 \leq k \leq n$ existe $1 \leq j \leq m$ que satisface $f[r_{k-1}, r_k] \subseteq [s_{j-1}, s_j]$. Con esto definimos f_k como la composición:

$$[r_{k-1}, r_k] \xrightarrow{f} [s_{j-1}, s_j] \xrightarrow{g_j} U_{i_j}.$$

Por la naturalidad de φ_{i_j} tenemos $Ef(\varphi_{i_j})_{[s_{j-1}, s_j]}(g_j) = (\varphi_{i_j})_{[r_{k-1}, r_k]}(f_k)$. Por lo que podemos aplicar el lema 3.12 para concluir $Ef\varphi_{[c,d]}(g) = \varphi_{[a,b]}(gf)$ y así, φ es natural.

Finalmente, para ver que (3.1) conmuta notamos que al hacer la construcción de $\varphi_{[a,b]}(f)$ para una función continua $f : [a, b] \rightarrow U$ se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & E \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U_{i_j} & \xrightarrow{\varphi_{i_j}} & E \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & X
 \end{array}$$

conmuta, donde la flechas verticales son restricciones. Por lo tanto, usando el lema 3.12, podemos concluir que φ hace conmutar (3.1). Con esto concluimos que $v_*(\phi) \in \text{Gav}(X)$. \square

También hay un functor $v^* : \text{Gav}(X) \rightarrow \mathcal{M}/X$ que a una gavilla F y le asigna el homeomorfismo local $\Lambda F \rightarrow X$ determinado por F considerado como un elemento de \mathcal{M}/X .

Teorema 3.14. *Para cada espacio topológico X hay un morfismo geométrico*

$$v : \mathcal{M}/X \rightarrow \text{Gav}(X).$$

Demostración. Definimos la unidad $\eta_F : F \rightarrow v_*v^*F$ en una gavilla $F \in \text{Gav}(X)$ como sigue: si $U \subseteq X$ es un abierto y $s \in FU$, entonces $(\eta_F)_U(s) = \dot{s} : U \rightarrow \Lambda F$ considerado como un objeto en \mathcal{M}/X , donde $\dot{s}(y) = [s \in FV]_y$ es la clase de s en $\varinjlim_{U \ni y} FU$. No es difícil ver que η_F es natural y por tanto también η es natural (ver capítulo II de [25]).

Ahora definiremos la counidad $\varepsilon : v^*v_* \rightarrow 1_{\mathcal{M}/X}$. Sea $\psi : E \rightarrow X$ un objeto en \mathcal{M}/X y sea $f : [a, b] \rightarrow \Lambda v_*(\psi)$ en $v^*v_*(\psi)[a, b]$. Sea f_0 la composición de f con la proyección $\Lambda v_*(\psi) \rightarrow X$. Si $a < b$ existe una partición $a = r_0 < \dots < r_n = b$ de $[a, b]$ tal que $f[r_{i-1}, r_i]$ está contenido en un $\dot{s}_i(U_i)$. Por lo tanto, para cada $t \in [r_{i-1}, r_i]$ tenemos $f(t) = [s_i \in (v_*(\psi))(U_i)]_{f_0(t)}$. Es fácil ver que la familia

$$\langle (s_i)_{[r_{i-1}, r_i]}(f_0|_{[r_{i-1}, r_i]}) \in E[r_{i-1}, r_i] \rangle_{i=1}^n$$

es compatible. Así, define un único elemento $(\varepsilon_\psi)_{[a,b]}(f) \in E[a, b]$. De la misma que en la construcción de φ del lema 3.13, este elemento no depende de la elección de la partición ni de las s_i . La demostración de que ε es natural es similar a la de φ del lema 3.13 y no la escribiremos.

Por último las identidades triangulares son un cálculo directo. \square

Algunos objetos

De nuevo siguiendo a Johnstone describimos el clasificador de subobjetos y el objeto de números reales del topos \mathcal{M} .

Para ver una descripción del clasificador de subobjetos de $\text{Gav}(\mathbf{M}, L)$ empezaremos dando una equivalencia de criba cerrada.

Lema 3.15. *Sea R una criba sobre $[a, b]$. R es cerrada si y sólo si para cualquier función unilateral $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ hay una partición $c = r_0 < \dots < r_n = d$ que cumple:*

$$\{[r_{i-1}, r_i] \hookrightarrow [c, d] \xrightarrow{f} [a, b] \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq R \implies f \in R.$$

Demostración. Supongamos que R es cerrada, que $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es unilateral y que existe una partición $c = r_0 < \dots < r_n = d$ tal que $\{[r_{i-1}, r_i] \hookrightarrow [c, d] \xrightarrow{f} [a, b] \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq R$. Para ver que $f \in R$ basta ver que R cubre a f , es decir, que $f^*(R)$ cubre a $[c, d]$. Notemos que la condición que satisface la partición anterior de $[c, d]$ significa que $\{[r_{i-1}, r_i] \hookrightarrow [c, d] \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq f^*(R)$ y como las particiones son base para la topología de Grothendieck en cuestión, entonces $f^*(R)$ cubre a $[c, d]$ como se quería.

Ahora supongamos que R es una criba que satisface la condición del lema. Para ver que R es cerrada supongamos que R cubre a f . Como la topología está generada por la base de particiones, entonces existe una partición $c = r_0 < \dots < r_n = d$ tal que $\{[r_{i-1}, r_i] \hookrightarrow [c, d] \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq f^*(R)$, es decir, $\{[r_{i-1}, r_i] \hookrightarrow [c, d] \xrightarrow{f} [a, b] \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq R$. Por hipótesis concluimos que $f \in R$. \square

Es fácil ver que el clasificador de subobjetos de $\text{Gav}(M, L)$ tiene exactamente dos puntos, ya que las únicas cribas sobre 1 son la total y la vacía; además, ambas son cerradas. Por lo tanto, $\Omega_1 = \{v, f\}$.

Como ya tenemos un morfismo geométrico cohesivo $p : \text{Gav}(M, K) \rightarrow \mathbf{Con}$, entonces $p^* : \mathbf{Con} \rightarrow \text{Gav}(M, K)$ preserva a \mathbb{Q} . Esto significa que el objeto de números racionales $Q \in \text{Gav}(M, K)$ es el espacio discreto de racionales, $p^*\mathbb{Q}$. Recordemos, de [6], que un número real es un par $r = (L, U)$ de subobjetos de Q que satisface los siguientes axiomas:

1. $\forall q(q \in L \iff \exists q' > q \wedge q' \in L)$,
2. $\forall q(q \in U \iff \exists q' < q \wedge q' \in U)$,
3. $\forall q \forall q'(q \in L \wedge q' \in U \implies q < q')$,

$$4. \forall n \exists q \exists q' (q \in L \wedge q' \in U \wedge q' - q < \frac{1}{n}).$$

Los subobjetos de Q en $\text{Gav}(M, K)$ son los subconjuntos de \mathbb{Q} en **Con** como espacios discretos y como p_* tiene adjuntos derecho e izquierdo, entonces preserva la verdad de dichos axiomas. Por lo tanto, el objeto R de reales de Dedekind en $\text{Gav}(M, K)$ satisface $R(1) = \mathbb{R}$. Finalmente, a cada elemento $x \in R[a, b]$ le podemos asignar una trayectoria $\gamma_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: dado $t \in [a, b]$ consideramos el morfismo $\lceil t \rceil : 1 \rightarrow [a, b]$, este genera al elemento $x \cdot \lceil t \rceil \in \mathbb{R}$ que tomaremos como $\gamma_x(t)$.

3.2 El topos de cubiertas que se traslapan

En esta sección construiremos un topos cohesivo más cercano a las ideas de Lawvere en [21], es decir, generaremos un topos a partir del monoide completo de endomorfismos continuos del intervalo $[0, 1]$ en sí mismo. Como señala Isbell en [5] la topología de Menni no será adecuada, o bien, por el lema 3.5, no se satisface el axioma de estabilidad. Así, el objetivo de esta sección es dar una topología adecuada y modificar la noción de intervalo abstracto para obtener un topos cohesivo sobre **Con**.

Empezamos con la categoría **C** cuyos objetos son intervalos cerrados de la recta real y sus morfismos son funciones continuas. También es posible empezar con el monoide de funciones continuas del intervalo unitario en sí mismo, como en la sección anterior, y luego para hacer subcanónico al sitio que se obtendría considerar la categoría **C** como la definimos.

Definimos una base para una topología de Grothendieck sobre **C** como sigue: $K[a, a]$ es la familia trivial $\{\text{id}\}$ y si $a < b$ entonces $K[a, b]$ consiste de familias de la forma $\{[r_i, s_i] \hookrightarrow [a, b] \mid 1 \leq i \leq n\}$ tales que $r_i < s_i$ para toda i y además

$$(a, b) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (r_i, s_i) \quad (3.5)$$

Como la familia anterior es finita entonces $a = r_i$ para alguna i y $b = s_j$ para alguna j .

Lema 3.16. *K es una base para una topología de Grothendieck sobre **C**.*

Demostración. El único axioma que no es inmediato es el de estabilidad. Sean $\{[r_i, s_i] \hookrightarrow [c, d] \mid 1 \leq i \leq n\}$ una familia cubriente y $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una función continua. Supongamos que $c = r_1$ y $d = s_n$. Sea $t \in [a, b]$, si $f(t) = c$ o $f(t) = d$

entonces, por continuidad, existe $\varepsilon_t > 0$ tal que $f([t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t] \cap [a, b]) \subseteq [r_1, s_1]$ o $f([t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t] \cap [a, b]) \subseteq [r_n, s_n]$, respectivamente. En otro caso existe i tal que $f(t) \in (r_i, s_i)$, entonces podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $f([t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t] \cap [a, b]) \subseteq (r_i, s_i)$. Lo anterior define una cubierta abierta $[a, b] \subseteq \bigcup_{t \in [a, b]} (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t)$ y por compacidad una subcubierta finita

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^m (t_i - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon_i)$$

con el cambio obvio de notación en las ε . Además, podemos suponer que $t_1 = a$ y $t_m = b$. Con esto tenemos la familia $\{[t_j - \varepsilon_j, t_j + \varepsilon_j] \cap [a, b] \mid 1 \leq j \leq m\}$. Es fácil ver que es una familia cubriente para $[a, b]$ y por definición las composiciones

$$[t_j - \varepsilon_j, t_j + \varepsilon_j] \cap [a, b] \hookrightarrow [a, b] \xrightarrow{f} [c, d]$$

se factorizan a través de una inclusión $[r_i, s_i] \hookrightarrow [c, d]$, lo cual muestra K es una base para una topología de Grothendieck sobre \mathbf{C} . \square

Es fácil ver que las familias en K son epimórficas. Esto se debe a la ecuación (3.5) y que $a = r_i$ y $b = s_j$ para algunos i y j . Por lo tanto, el sitio (\mathbf{C}, K) es subcanónico. Además, es fácil ver que (\mathbf{C}, K) es conexo y localmente conexo y que \mathbf{C} tiene objeto terminal y todo objeto tiene un punto. Así, por la proposición 1.2, hay un morfismo precohesivo $p : \text{Gav}(\mathbf{C}, K) \rightarrow \mathbf{Con}$.

Para demostrar que $p : \text{Gav}(\mathbf{C}, K) \rightarrow \mathbf{Con}$ es cohesivo seguiremos las ideas de Menni en [30] esbozadas al final del capítulo 1. Así, notemos que $I = [0, 1]$ es un objeto bipuntuado y que si $s, t \in [a, b]$ entonces hay una parametrización lineal de I que conecta a s con t . Por el lema 1.18, I es un conector en $\text{Gav}(\mathbf{C}, K)$.

Para hacer que un intervalo abstracto sea compatible con nuestra topología es necesario modificar la intuición de que I puede ser dividido en dos partes, $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$, que se intersectan en el punto $1/2$ por la intuición de dividir a I en las partes $[0, 2/3]$ y $[1/3, 1]$ que se intersectan en el segmento $[1/3, 2/3]$.

Definición 3.17. Un *intervalo abstracto superpuesto* es un objeto bipuntuado $0 \rightarrow I \leftarrow 1$ con monomorfismos $l, m, r : I \rightarrow I$ tales que

1. El cospan $0 : 0 \rightarrow I \leftarrow 1 : 1$ es disjunto.
2. Los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 1 \xrightarrow{0} I & 1 \xrightarrow{1} I & I \longrightarrow I \\
 \searrow 0 \quad \downarrow l & \searrow 1 \quad \downarrow r & \downarrow \quad \searrow m \quad \downarrow r \\
 & & I \xrightarrow{l} I
 \end{array}$$

donde el cuadrado es un producto fibrado.

El monomorfismo m sirve para capturar la intersección de las imágenes de l y r , también hace que las flechas que no tienen nombre sean parametrizaciones lineales de dicha intersección.

Siguiendo [30] diremos que una cubierta sobre \mathbf{C} es compatible con el intervalo abstracto superpuesto si $\{l, r\}$ cubre a I .

En nuestro ejemplo el intervalo unitario con los puntos $0 : 1 \rightarrow I \leftarrow 1 : 1$ y las funciones $l, m, r : I \rightarrow I$ definidas como

$$l(x) = \frac{2}{3}x, \quad m(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \quad r(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

es un intervalo abstracto superpuesto que es compatible con la topología generada por la base K de arriba.

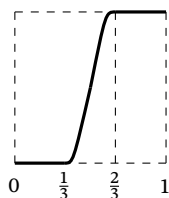
Con la topología anterior no es posible amalgamar trayectorias que coincidan sólo en sus puntos finales. Para amalgamar trayectorias tales que el punto final de una coincida con el punto inicial de la otra usaremos que el intervalo I puede ser dividido en tres partes, $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ y $[2/3, 1]$, y que toda trayectoria puede ser conectada con una trayectoria segmentos inicial y final constantes como menciona Isbell en [5].

Definición 3.18. Un intervalo abstracto superpuesto admite *empalmes* si hay una flecha $\mathcal{J} : I \rightarrow I$ que hace conmutar a los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 I \xrightarrow{l} I & I \xrightarrow{r} I \\
 \downarrow \quad \downarrow \mathcal{J} & \downarrow \quad \downarrow \mathcal{J} \\
 1 \xrightarrow{0} I & 1 \xrightarrow{1} I
 \end{array}$$

Aunque admitir empalmes es una propiedad que puede tener un intervalo abstracto, resulta útil cuando se usa con intervalos abstractos superpuestos ya que en principio sólo estos no pueden pegar trayectorias que coinciden en puntos finales.

Es fácil ver que, en nuestro ejemplo, el intervalo I es un intervalo abstracto superpuesto que admite empalmes en \mathbf{C} , donde \mathcal{J} es la función cuya gráfica es la siguiente



Si se aplica \mathcal{J} a la trayectoria $\gamma : I \rightarrow [a, b]$, es decir, si se aplica la función $\mathbf{C}(\mathcal{J}, [a, b]) : \mathbf{C}(I, [a, b]) \rightarrow \mathbf{C}(I, [a, b])$ a γ se obtiene la trayectoria $\gamma \cdot \mathcal{J}$ que es constante $\gamma(0)$ en el primer tercio del tiempo, luego hace γ en un tercio de tiempo y en el último tercio es la constante $\gamma(1)$. Así, el resultado es una trayectoria que es homotópica a la original relativa a los extremos, como dice Isbell en [5]. Además, esta cumple una propiedad adicional a la definición 3.18, es decir, hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{m} & I \\
 \parallel & & \downarrow \mathcal{J} \\
 & & I.
 \end{array} \tag{3.6}$$

Como muestra el ejemplo anterior, este axioma hace que el resultado de aplicar \mathcal{J} a una trayectoria sea homotópica a la trayectoria original relativa a los extremos. Para mostrar que la categoría de intervalos cerrados y funciones continuas con la topología de intervalos superpuestos genera un topos cohesivo no es necesario este resultado acerca de clases de homotopía, por lo que el diagrama en 3.6 no se incluye en la definición 3.18.

Una observación acerca de la definición de intervalo abstracto superpuesto es que podemos determinar cuáles son los puntos inicial y final de un empalme. Por ejemplo, para ver que el punto inicial de un empalme es el mismo que el punto inicial del original se considera el diagrama conmutativo (3.7)

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{0} & I \\
 \downarrow 0 & & \downarrow \mathcal{J} \\
 I & \xrightarrow{l} & I \\
 \downarrow & & \downarrow \mathcal{J} \\
 1 & \xrightarrow{0} & I
 \end{array} \tag{3.7}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{1} & I \\
 \downarrow 1 & & \downarrow \mathcal{J} \\
 I & \xrightarrow{r} & I \\
 \downarrow & & \downarrow \mathcal{J} \\
 1 & \xrightarrow{1} & I
 \end{array} \tag{3.8}$$

Análogamente, usando los otros dos diagramas de la definición, el punto final del empalme es el punto final del original, como en el diagrama (3.8).

Lema 3.19. *Sea \mathbf{A} una categoría con un intervalo abstracto superpuesto que admite empalmes y sea K una cubierta sobre \mathbf{A} compatible con el intervalo abstracto superpuesto. Para cualesquiera $X \in \text{Gav}(\mathbf{A}, K)$ y $z_1, z_2 \in XI$ tales que $z_1 \cdot 1 = z_2 \cdot 0$ existe $z \in XI$ tal que $z \cdot 0 = z_1 \cdot 0$ y $z \cdot 1 = z_1 \cdot 1$.*

Demostración. Dadas $z_1, z_2 \in XI$ tales que $z_1 \cdot 1 = z_2 \cdot 0$, aplicamos el empalme a z_1 y z_2 para obtener $z_1 \cdot \mathcal{J}, z_2 \cdot \mathcal{J} \in XI$. Por los dos cuadrados de la definición 3.18 y la hipótesis sobre z_1 y z_2 , tenemos que $z_1 \cdot \mathcal{J} \cdot r$ coincide con $z_2 \cdot \mathcal{J} \cdot l$. Como m parametriza a la intersección de l con r , entonces lo anterior significa que coinciden en la intersección $m : I \rightarrow I$. Por lo que si consideramos la cubierta $\{l, r\}$, entonces $\{z_1 \cdot \mathcal{J}, z_2 \cdot \mathcal{J}\}$ es una familia compatible. Como X es una gavilla, la familia tiene una única amalgama, digamos $z \in XI$. Esta amalgama satisface $z \cdot l = z_1 \cdot \mathcal{J}$ y $z \cdot r = z_2 \cdot \mathcal{J}$. Por los dos triángulos en la definición 3.17 y el diagrama (3.7) se tiene que

$$z \cdot 0 = z \cdot l \cdot 0 = z_1 \cdot \mathcal{J} \cdot 0 = z_1 \cdot 0.$$

De la misma manera tenemos $z \cdot 1 = z_2 \cdot 1$. □

Con esto podemos hacer la misma reducción en el tamaño de trayectorias que hicimos antes del teorema 1.23.

Lema 3.20. *Sean \mathbf{A} , K y X como en el lema anterior. Si $x, y \in XI$ son conectables entonces pueden ser conectados por un sólo cospan $0 : 1 \rightarrow I \leftarrow : 1$.*

Demostración. Supongamos que x y y están conectados por una trayectoria combinatoria de longitud 2 como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longleftarrow & z_1 & \longrightarrow & x_1 & \longleftarrow & z_2 & \longrightarrow & y \\ 1 & \xrightarrow{0} & I & \xleftarrow{1} & 1 & \xrightarrow{0} & I & \xleftarrow{1} & 1 \end{array}$$

Como $z_1 \cdot 1 = x_1 = z_2 \cdot 0$ entonces podemos aplicar el lema 3.19 para obtener $z \in XI$ tal que:

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftarrow & z & \longrightarrow & y \\ 1 & \xrightarrow{0} & I & \xleftarrow{1} & 1 \end{array}$$

Por lo tanto, x y y se pueden conectar con un sólo cospan. □

Con este resultado es posible seguir la demostración del teorema 1.23 en la página 27 para obtener el resultado que queremos.

Teorema 3.21. *Sea (\mathbf{C}, J) un sitio tal que J es localmente conexa, \mathbf{C} tiene objeto terminal y todo objeto tiene un punto. Si \mathbf{C} tiene un intervalo abstracto superpuesto y es compatible con la topología J , entonces el morfismo canónico $p : \mathbf{Gav}(\mathbf{C}, J) \rightarrow \mathbf{Con}$ es cohesivo.*

Demostración. Sea $X \in \mathbf{Gav}(\mathbf{C}, J)$ y supongamos que $\bar{x} = \bar{y}$ en $p_1 X$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $x, y \in X_1$. Como $\bar{x} = \bar{y}$ entonces hay una trayectoria que conecta a x con y . Además, como \mathbf{C} tiene un intervalo abstracto superpuesto y este es un conector, entonces podemos suponer que la trayectoria que conecta a x con y es una trayectoria combinatoria, como en (1.5). Por último, usando el lema 3.20, la trayectoria combinatoria se puede reducir a una de longitud 1, es decir, un sólo cospan conecta a x con y .

De esta forma cualquier $X \in \mathbf{Gav}(\mathbf{C}, J)$ es débilmente y Kan y así $p : \mathbf{Gav}(\mathbf{C}, J) \rightarrow \mathbf{Con}$ es cohesivo. □

Conclusiones

En general este trabajo está centrado en los ejemplos que pueden ser útiles en las aplicaciones propuestas por Lawvere, es decir, física continua. Los topos de funciones unilaterales y el topos de cubiertas superpuestas del capítulo 3 son una continuación de la filosofía de Lawvere, es decir, son topos cohesivos de espacios topológicos donde la noción indefinida es trayectoria continua. Además, como vimos en el ejemplo de unilaterales, en estos topos se pueden hacer las mismas construcciones y caracterizaciones de objetos que hace Johnstone en su topos topológico (ver [6]). Por lo tanto, pueden ser considerados como una mejor alternativa para nuestros propósitos como categoría de espacios topológicos.

En el capítulo 2 investigamos la situación del topos de Zariski. Como no encontramos en la literatura, a pesar de ser un resultado conocido, la demostración de que este topos es precohesivo sobre conjuntos, nos dimos a la tarea de escribir los detalles en este trabajo. Sin embargo, no hemos sido capaces de mostrar si es o no un topos cohesivo, dejando así el análisis de este topos como un trabajo futuro. De forma más precisa, no fuimos capaces de dar una buena caracterización de débilmente Kan en el topos de Zariski. Tal vez un análisis más detallado de las ideas de Lawvere en la sección IV de [15] pueda darnos la demostración que buscamos.

Cohesión axiomática es una teoría reciente que tiene mucho por hacer. Por el lado de las aplicaciones hace falta desarrollar los objetos Leibniz y Birkhoff, ya que su existencia puede garantizar la unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. Por el lado teórico Marmolejo y Menni han dado los principales avances, por ejemplo en [28, 27, 29], también se ha desarrollado el *Aufhebung* en [31] y se ha visto en algunos ejemplos en [13].

Bibliografía

- [1] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1–3*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- [2] F. Borceux y G. Janelidze. *Galois Theories*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
- [3] A. Carboni, S. Lack y R. Walters. “Introduction to extensive and distributive categories”. En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 84 (1993), págs. 145-158.
- [4] P. Gabriel y M. Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [5] J. R. Isbell. “Pulling paths and canonical sheaves of paths”. En: *Notices Amer. Math. Soc.* 1976, pág. 1.
- [6] P. T. Johnstone. “On a Topological Topos”. En: *Proc. London Math. Soc.* s3-38.2 (1979), págs. 237-271.
- [7] P. T. Johnstone. “Quotients of decidable objects in a topos”. En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 93.3 (1983), págs. 409-419.
- [8] P. T. Johnstone. “Remarks on Punctual Local Connectedness”. En: *Theory and Applications of Categories* 25.3 (2011), págs. 51-63.
- [9] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press, 2002.
- [10] P. T. Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.
- [11] P. T. Johnstone. *Topos Theory*. Dover Publications, 2013.
- [12] A. Joyal y M. Tierney. *Notes on simplicial homotopy theory*. 2011. URL: <http://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern47.pdf>.

- [13] C. Kennett y col. “Levels in the toposes of simplicial sets and cubical sets”. En: *Journal of Pure and Applied Algebra* 215.5 (2011), págs. 949-961.
- [14] F. W. Lawvere. “Alexander Grothendieck and the Concept of Space”. En: *Category Theory*. 2015.
- [15] F. W. Lawvere. “Axiomatic Cohesion”. En: *Theory and Applications of Categories* 19.3 (2007), págs. 41-49.
- [16] F. W. Lawvere. “Categories of Spaces may not be Generalized Spaces as Exemplified by Directed Graphs”. En: *Reprints in Theory and Applications of Categories* 9 (2005), págs. 1-7.
- [17] F. W. Lawvere. “Cohesive Toposes and Cantor’s *lauter Einsen*”. En: *Philosophia Mathematica* 2.3 (1994), págs. 5-15.
- [18] F. W. Lawvere. “Introduction”. En: *Categories in Continuum Physics*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag, 1982, págs. 1-16.
- [19] F. W. Lawvere. “Some Thoughts on the Future of Category Theory”. En: *Como meeting 1990*. Ed. por A. Carboni, M. C. Pedicchio y G. Rosolini. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1991, págs. 1-13.
- [20] F. W. Lawvere. *Toposes of Laws of Motion*. Transcript from video. 1997.
- [21] F. W. Lawvere. “Variable sets, topoi and étendu”. En: *Notices American Mathematical Society* 22.A675 (1975).
- [22] F. W. Lawvere. *What makes a theorem a “Nullstellensatz”*. 2011. URL: <https://mathoverflow.net/a/52894/103420> (visitado 2022).
- [23] F. W. Lawvere y M. Menni. “Internal Choice Holds in the Discrete Part of any Cohesive Topos Satisfying Stable Connected Codiscreteness”. En: *Theory and Applications of Categories* 30.26 (2015), págs. 909-932.
- [24] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1998.
- [25] S. Mac Lane e I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1992.
- [26] F. Marmolejo. “Cohesión Axiomática”. 2018.
- [27] F. Marmolejo y M. Menni. “Level ϵ ”. En: *Cah. Topologie Géom. Différ. Catégoriques* 60.4 (2019), págs. 450-477.

- [28] F. Marmolejo y M. Menni. “On the relation between continuous and combinatorial”. En: *Journal of Homotopy and Related Structures* 12 (2017), págs. 379-412.
- [29] F. Marmolejo y M. Menni. “The canonical intensive quality of a cohesive topos”. En: *Theory and Applications of Categories* 36 (2021), págs. 250-279.
- [30] M. Menni. “Continuous Cohesion over sets”. En: *Theory and Applications of Categories* 29.20 (2014), págs. 542-568.
- [31] M. Menni. “Monic skeleta, Boundaries, Aufhebung, and the meaning of ‘one-dimensionality’”. En: *Theory and Applications of Categories* 34.5 (2019), págs. 714-735.
- [32] W. Noll. *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1974.
- [33] J. A. Orozco. “Caracterización de Grothendieck de la categoría de acciones continuas de un grupo profinito”. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, 2018.
- [34] J. Picado y M. Clementino. “An Interview with F.W. Lawvere”. En: *CIM Bulletin* 23 (2007), págs. 23-27.
- [35] C. A. Truesdell. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Vol. 1–3. Academic Press, Inc., 1991.
- [36] L. Turcio. “Cohesive toposes of sheaves on monoids of continuous endofunctions of the unit interval”. En: *Theory and Applications of Categories* 35.29 (2020), págs. 1087-1100.