



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y**  
**DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA**

**CONTROLABILIDAD UNIFORME DE UNA ECUACIÓN**  
**PARABÓLICA CON TÉRMINO DE TRANSPORTE Y CON**  
**CONDICIÓN DE FRONTERA TIPO ROBIN-DIRICHLET**

# **TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN CIENCIAS**

**PRESENTA:**  
**LIC. EN C. EDDYE ALAMO GOMEZ**

**DIRECTOR DE LA TESIS:**  
**DR. FRANCISCO MARCOS LÓPEZ GARCÍA**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD CUERNAVACA**  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**CUERNAVACA MORELOS, ENERO 2022**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Agradezco principalmente a Estefanía Albarrán Aguirre que fue quien más me apoyó en el proceso de la realización de este trabajo, le agradezco mucho por sus consejos y porque siempre estuvo ahí para animarme cada vez que no lograba resolver un problema. Muchas gracias por ser parte de mi vida.

Agradezco a mi madre Cira, a mis hermanos Gary y Dolly y a mis sobrinos Yostin, Michelle y Cruz Emmanuel por apoyarme a la distancia con su cariño. Además sigo agradeciendo a mi padre Crescenciano, ya que aunque no está con nosotros, sus consejos aún son de gran importancia en mi vida.

Agradezco al Dr. Marcos López por haber confiado en la realización de este trabajo y por compartir sus conocimientos y guiarme en el proceso.

Al Dr. Jorge Rivera, gracias por haber fungido como mi asesor en la maestría y por apoyarme en todo lo necesario para cumplir con los requisitos que el Instituto requería.

Gracias a todos mis amigos, dentro y fuera de las instalaciones siempre mostraron la calidad de personas que son, gracias por sacarme una sonrisa en épocas difíciles y por estar ahí cada vez que lo necesité.

Agradezco al CONACyT por el apoyo económico brindado durante la realización de este proyecto.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.2. Resultados obtenidos . . . . .	4
<b>2. El sistema adjunto</b>	<b>7</b>
2.1. Existencia y unicidad de soluciones Método I . . . . .	7
2.2. Existencia y unicidad de soluciones Método II . . . . .	16
2.3. Solución por transposición del sistema original . . . . .	19
2.4. Solución fuerte del sistema original . . . . .	21
2.5. Controlabilidad a cero . . . . .	21
2.6. Motivación del operador de frontera $B$ . . . . .	24
<b>3. Estimación superior del costo del control a cero</b>	<b>27</b>
3.1. Construcción del multiplicador complejo . . . . .	27
3.2. Prueba de la desigualdad de observabilidad . . . . .	36
<b>4. Estimación inferior del costo del control a cero</b>	<b>41</b>
4.1. Cota inferior para el costo del control a cero . . . . .	41
<b>5. Condición de frontera Robin-Dirichlet</b>	<b>45</b>
5.1. Planteamiento del problema . . . . .	45
5.2. Estimaciones por arriba y por abajo del costo de control nulo . . . . .	50
<b>6. Conclusiones</b>	<b>55</b>
<b>A. Herramientas del análisis complejo</b>	<b>57</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Para motivar el problema tratado en esta tesis reproducimos parte de la Sección 4.5 del texto [4]. Una perturbación singular es una modificación de una Ecuación Diferencial Parcial dada, por medio de la adición de un pequeño múltiplo  $\varepsilon$  veces un término de orden más alto. De acuerdo con el principio informal que el comportamiento de las soluciones está gobernado ante todo por los términos de orden más alto, una solución  $u^\varepsilon$  del sistema perturbado a menudo se comportará analíticamente bastante diferente que una solución del sistema original.

En nuestro caso, el sistema original es la ecuación de transporte unidimensional sobre un intervalo de longitud  $L$ , al cual le añadimos un término de orden dos (viscosidad) produciendo un sistema perturbado que es una EDP parabólica unidimensional. Es conocido que ciertas soluciones de la ecuación de transporte pueden ser funciones discontinuas, contrario a las soluciones del sistema parabólico que son funciones analíticas respecto a la variable espacial, ya que se comportan como soluciones de la ecuación del calor.

Queremos mencionar que en la teoría de las EDPs existen otros tipos de análisis asintótico, por ejemplo, el método de Laplace y el método de la fase estacionaria; para el lector interesado en estos temas le sugerimos consultar la Sección 4.5 de [4].

En [11], Glass estudia el problema de controlabilidad uniforme a cero de una ecuación de transporte con un término adicional de viscosidad que en el límite se anula según un parámetro  $\varepsilon > 0$ , es decir, analiza la controlabilidad a cero de una perturbación singular de la ecuación de transporte. A continuación explicamos tal concepto.

En concreto, fijamos  $L > 0$  y  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y consideramos el sistema parabólico

$$\begin{cases} u_t + Mu_x - \varepsilon u_{xx} = 0, & (t, x) \in Q_T \\ u(t, 0) = v(t), \quad u(t, L) = 0, & t \in (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (1.1)$$

En el sistema anterior  $Q_T = (0, T) \times (0, L)$ ,  $v(t)$  es un control que actúa en la frontera y  $\varepsilon$  es un parámetro positivo y pequeño destinado a tender a cero.



El primer aspecto a considerar es la controlabilidad a cero del sistema, esto es, dado un tiempo fijo  $T > 0$  y cualquier dato inicial  $u_0 \in L^2(0, L)$  tenemos que hallar un control  $v \in L^2(0, T)$  tal que la solución correspondiente de (1.1) satisface

$$u(T, x) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0, L]. \quad (1.2)$$

En general, la controlabilidad a cero de ecuaciones parabólicas unidimensionales, como la considerada aquí con  $\varepsilon > 0$  fijo, fue analizada y resuelta por Fattorini & Russell en [5]. La controlabilidad de ecuaciones parabólicas en dimensiones mayores se estableció de manera independiente por Fursikov & Imanuvilov en [6] y por Lebeau & Robbiano en [10].

En [11], Glass investiga el costo del control cuando el término de viscosidad se anula según  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . En particular da condiciones sobre  $T, L$  y  $M$  para mostrar que existen controles  $v_\varepsilon$  que permanecen acotados cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Cuando esta condición se cumple, se dice que el sistema es uniformemente controlable a cero.

Este problema fue introducido y estudiado por Coron & Guerrero en [2]. Enseguida Guerrero & Lebeau en [9] extendieron algunos de los resultados en [2] a subconjuntos abiertos  $\Omega$  de dimensión arbitraria y con  $M$  como un campo vectorial variable. En estos artículos se prueba que si el campo vectorial  $M$  es tal que la ecuación de transporte no es controlable (debido a la existencia de una característica de  $M$  que permanece fuera de la zona de control  $\omega$ ) entonces la norma del control puede crecer como  $e^{C/\varepsilon}$ . Por otro lado, si todas las características permanecen suficiente tiempo en la zona de control  $\omega$  o fuera de  $\bar{\Omega}$ , entonces el sistema es uniformemente controlable a cero, ver la Propiedad 2 en [2] para conocer la formulación precisa. Estos resultados requieren que  $T$  sea suficientemente grande.

En particular, en el caso unidimensional en [2] se prueba que (1.1) es uniformemente controlable a cero cuando  $M > 0$  siempre que  $T > 4.3L/M$ , y cuando  $M < 0$  siempre que  $T > 57.2L/|M|$ . Es conocido que la ecuación de transporte ( $\varepsilon = 0$ ) es controlable si  $T \geq L/|M|$  (esto último siendo óptimo), así que cabe esperar que en ambos casos la controlabilidad uniforme se cumpla para cualquier tiempo  $T > L/|M|$ .

Un resultado muy sorprendente en [2] es que cuando  $M < 0$  el control puede explotar exponencialmente para cualquier  $T < 2L/|M|$ , mientras que esto ocurre sólo para tiempos  $T < L/M$  cuando  $M > 0$ , lo cual es más intuitivo.

En [11], Glass mejoró las estimaciones antes mencionadas de Coron & Guerrero y obtuvo los tiempos  $T > 4.2L/M$  y  $T > 6.1L/|M|$ , respectivamente. Coron & Guerrero usaron estimaciones de Carleman para probar la desigualdad de observabilidad del sistema adjunto. Bajo esta técnica mostraron que la naturaleza explosiva de la constante que viene de su estimación de Carleman cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , puede ser compensada por la constante de una estimación que considera la disipación, lo anterior funciona siempre que  $T$  es suficientemente grande. En el caso unidimensional la solución de (1.1) o su ecuación

adjunta decrece exponencialmente en  $-1/\varepsilon$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , siempre que  $T > 1/|M|$ .

El método usado por Glass es más cercano al enfoque de Russell que utiliza herramientas del análisis armónico para resolver problemas de controlabilidad (ver por ejemplo [5] y [13]). Es conocido que el problema de controlabilidad a cero de EDP's lineales es equivalente a probar la llamada desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto, ver Teorema 20.

En nuestro contexto, la demostración de la desigualdad de observabilidad para nuestro sistema adjunto está conectada a una cuestión relativa a la suma de exponenciales. Su demostración requiere la construcción de una familia biortogonal a la familia de exponenciales que resuelven la ecuación adjunta. La construcción, en su primera parte, utiliza el teorema de Paley–Wiener. La novedad en la técnica de Glass es la construcción del llamado “multiplicador complejo”, técnica introducida por Beurling y Malliavin en el análisis complejo y armónico. Tal técnica tuvo el propósito inicial de encontrar condiciones para que una familia de exponenciales sea completa en un espacio de Lebesgue  $L^2(\mu)$ .

La teoría de Beurling-Malliavian se relaciona de manera natural con otros campos campos del análisis clásico, tales como la teoría de predicciones y procesos gaussianos estacionarios, problemas espectrales para operadores diferenciales, teoría de aproximación, procesamiento de imágenes, etc.

Volviendo a nuestro tema, Glass obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.** *Dados  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $T > 0$ , el sistema (1.1) es uniformemente controlable a cero en el sentido que existen constantes  $\kappa, C > 0$  tal que para cualesquiera  $u_0 \in L^2(0, L)$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe un control  $v \in L^2(0, T)$  tal que la solución  $u$  del sistema (1.1) satisface (1.2), y además*

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq C \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \|u_0\|_{L^2(0,L)}$$

siempre que

$$T > 4.2 \frac{L}{M} \quad \text{si } M > 0, \quad \text{y} \quad T > 6.1 \frac{L}{|M|} \quad \text{si } M < 0.$$

## 1.1. Planteamiento del problema

En este trabajo proponemos realizar un análisis similar al hecho por Glass. Aquí consideramos la misma ecuación parabólica pero con condiciones de frontera tipo Robin. En concreto tenemos lo siguiente.

Sea  $\varepsilon > 0$ , y  $Q_T = (0, T) \times (0, L)$ , consideramos el sistema

$$\begin{cases} y_t + My_x - \varepsilon y_{xx} = 0, & (t, x) \in Q_T \\ By(t, 0) = u(t), \quad By(t, L) = 0, & t \in (0, T) \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (1.3)$$

donde

$$By := -2\varepsilon y_x + My.$$

En la Sección 2.6 justificamos la elección del operador de frontera  $B$ . Nuestro primer objetivo es mostrar que el sistema anterior es controlable a cero, es decir, encontrar  $u$  tal que  $y(T) = 0$ . Es bien conocido que la controlabilidad a cero de un sistema lineal de evolución es equivalente a mostrar la validez de la llamada desigualdad de observabilidad del sistema adjunto (ver Teorema 20). En el proceso de probar la desigualdad de observabilidad asociada a nuestro problema, hallaremos estimaciones de la constante de costo óptimo de la controlabilidad a cero. Tal constante depende de  $\varepsilon$  y queremos establecer estimaciones precisas sobre su comportamiento asintótico cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Notamos que el sistema adjunto al sistema original (1.3) está dado por

$$\begin{cases} \varphi_t + M\varphi_x + \varepsilon\varphi_{xx} = g, & (t, x) \in Q_T \\ B^*\varphi(t, 0) = B^*\varphi(t, L) = 0, & t \in (0, T) \\ \varphi(T, x) = \varphi_0(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (1.4)$$

donde

$$B^*\varphi = 2\varepsilon\varphi_x + M\varphi.$$

Si hacemos el cambio de variable  $t \rightarrow T - t$  en (1.4), obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} -\varphi_t + M\varphi_x + \varepsilon\varphi_{xx} = g, & (t, x) \in Q_T \\ B^*\varphi(t, 0) = B^*\varphi(t, L) = 0, & t \in (0, T) \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (1.5)$$

con  $g = 0$ .

En las Secciones 2.1-2.2 del Capítulo 2 nos enfocamos en probar un resultado de existencia y unicidad de soluciones para el sistema (1.5), y en consecuencia, del sistema (1.4). Durante el análisis de tales cuestiones hallaremos la interpretación de la función  $\varphi$  como solución del sistema (1.5). Además mostraremos la continuidad de las soluciones del sistema (1.5) con respecto al dato inicial.

En la Sección 2.3 definimos la solución por transposición  $y(t, x)$  del sistema (1.4), que resulta ser una solución en un sentido bastante débil. Cuando imponemos datos con mayor regularidad, en la Sección 2.4 mostramos que  $y(t, x)$  es una solución fuerte para el sistema (1.4), i.e., en el sentido de  $L^2(0, L)$ .

## 1.2. Resultados obtenidos

En los siguientes enunciados se debe entender la controlabilidad a cero en el sentido siguiente:

**Definición 2.** Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Decimos que el sistema (1.3) es controlable a cero en  $L^2(0, L)$  al tiempo  $T$  si para cada  $y_0 \in L^2(0, L)$  existe un control  $u \in L^2(0, T)$  tal que la correspondiente solución  $y(t, x)$  satisface

$$\int_0^L y_0(x)\varphi(0, x)dx = -\frac{1}{2} \int_0^T u(t)\varphi(t, 0)dt \quad (1.6)$$

para cada  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ , donde  $\varphi$  es la solución del sistema adjunto (1.4) con  $g \equiv 0$ .

**Proposición 3.** Dados  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $L, T > 0$ , el sistema (1.3) es controlable a cero al tiempo  $T > 0$ .

De hecho, el resultado anterior es clásico y fue resuelto por Fattorini & Russell. Aquí damos otra demostración siguiendo el método desarrollado por Glass. También usamos tal método para hacer estimaciones más finas y obtener la controlabilidad uniforme a cero.

**Teorema 4.** Dados  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $L > 0$ , el sistema (1.3) es uniformemente controlable a cero, es decir, existen constantes  $\kappa, C > 0$  tal que para cualesquiera  $y_0 \in L^2(0, L)$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe un control  $u \in L^2(0, T)$  tal que la solución  $y$  del sistema (1.3) satisface (1.6), y además

$$\|u\|_{L^2(0, T)} \leq C \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \|y_0\|_{L^2(0, L)}$$

siempre que

$$T > 4.2 \frac{L}{M} \quad \text{si } M > 0, \quad \text{y} \quad T > 6.1 \frac{L}{|M|} \quad \text{si } M < 0.$$

Notamos que en nuestro resultado se obtienen exactamente los mismos valores que Glass, esto es debido a que la descomposición espectral del operador diferencial en la ecuación adjunta en el sistema (1.4), tiene un sólo valor propio adicional comparado al espectro obtenido por Glass. Ambas sucesiones de valores propios tienen el mismo comportamiento asintótico y la técnica empleada no permite mejorar las constantes 4.2 y 6.1 que aparecen arriba.

Utilizando resultados del análisis complejo y armónico, incluidos en el Apéndice, obtenemos estimaciones por abajo de la constante de control óptimo nulo  $K(\varepsilon, T, L, M) = \|\mathcal{U}^T\|$  donde  $\mathcal{U}^T$  es el mapeo lineal de control óptimo nulo definido en la Sección 2.5. En concreto, obtenemos lo siguiente.

**Teorema 5.** Existe una constante  $C_0 > 0$  tal que para cualesquiera  $T, L, \varepsilon > 0$  tenemos que para toda  $M > 0$  se cumple

$$K(\varepsilon, T, L, M) \geq C_0 \left(\frac{M}{T\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{2L}{1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2}} \exp\left(\frac{LM}{2\varepsilon}(\sqrt{2} - 1) - \frac{M^2 T}{4\varepsilon}\right), \quad (1.7)$$

y para toda  $M < 0$  se cumple

$$K(\varepsilon, T, L, M) \geq C_0 \left(\frac{|M|}{T\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{2L}{1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2}} \exp\left(\frac{L|M|}{\sqrt{2}\varepsilon} - \frac{M^2 T}{4\varepsilon}\right), \quad (1.8)$$

donde  $K(\varepsilon, T, L, M)$  es la constante de control óptimo nulo.

En particular, para  $M > 0$ ,  $T < 2(\sqrt{2}-1)L/M$ , tenemos que  $K(\varepsilon, T, L, M) \rightarrow \infty$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Además para  $M < 0$ ,  $T < \sqrt{2}L/|M|$ , también se cumple que  $K(\varepsilon, T, L, M) \rightarrow \infty$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Una vez comprendido el método introducido por Glass, en el capítulo final analizamos también la controlabilidad uniforme a cero del siguiente sistema

$$\begin{cases} y_t + My_x - \varepsilon y_{xx} = 0, & (t, x) \in Q_T, \\ By(t, 0) = u(t), \quad y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (1.9)$$

donde consideramos una condición de frontera tipo Robin en el extremo izquierdo y una condición de Dirichlet homogénea en el extremo derecho.

**Teorema 6.** *Dados  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $L > 0$ , el sistema (1.9) es uniformemente controlable a cero, es decir, existen constantes  $\kappa, C > 0$  tal que para cualesquiera  $y_0 \in L^2(0, L)$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe un control  $u \in L^2(0, T)$  tal que la solución  $y$  del sistema (1.9) satisface (5.12), y además*

$$\|u\|_{L^2(0, T)} \leq C \exp\left(-\frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \|y_0\|_{L^2(0, L)}$$

siempre que

$$T > 4.2 \frac{L}{M} \quad \text{si } M > 0, \quad \text{y} \quad T > 6.1 \frac{L}{|M|} \quad \text{si } M < 0.$$

En la construcción del “multiplicador complejo” para hallar la sucesión biortogonal asociada a la desigualdad de observabilidad del sistema (1.9), aparece una función diferente a la utilizada por Glass. Así que este es un aporte original que permitirá la construcción de otras familias biortogonales basadas en el método introducido por Glass.

A pesar de que los valores propios  $\tilde{\lambda}_k$  del operador diferencial asociado al sistema de evolución (1.9) son ligeramente diferentes a los de Glass, y que el “multiplicador complejo” es distinto al de Glass, las condiciones a priori y la estimación superior del costo de control óptimo nulo de este sistema son similares a las del sistema (1.3).

Adicionalmente, también obtuvimos que la estimación por abajo del costo de control óptimo tiene un comportamiento asintótico, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , similar al del Teorema 5.

**Teorema 7.** *Existe una constante  $C_0 > 0$  tal que para cualesquiera  $T, L, \varepsilon > 0$  tenemos que para toda  $M > 0$  se cumple*

$$K(\varepsilon, T, L, M) \geq \frac{\sqrt{2}LM^{1/2}}{T^{1/2}\varepsilon^{1/2} \left(1 + \frac{L^2M^2}{4\pi^2\varepsilon^2}\right)^{3/2}} \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{LM}{\sqrt{2}\varepsilon} - \frac{TM^2}{4\varepsilon} - \frac{T\varepsilon\pi^2}{4L^2}\right), \quad (1.10)$$

y para toda  $M < 0$  se cumple

$$K(\varepsilon, T, L, M) \geq \frac{\sqrt{2}L|M|^{1/2}}{T^{1/2}\varepsilon^{1/2} \left(1 + \frac{L^2M^2}{4\pi^2\varepsilon^2}\right)^{3/2}} \exp\left(\frac{L|M|}{\sqrt{2}\varepsilon} - \frac{TM^2}{4\varepsilon} - \frac{T\varepsilon\pi^2}{4L^2}\right), \quad (1.11)$$

donde  $K(\varepsilon, T, L, M)$  es la constante de control óptimo nulo del sistema (1.9).

# Capítulo 2

## El sistema adjunto

### 2.1. Existencia y unicidad de soluciones Método I

El propósito de esta sección es analizar la existencia y unicidad de soluciones para el sistema adjunto (1.5), así como estudiar la continuidad de sus soluciones respecto al dato inicial. Primero estudiamos la resolución de la ecuación del calor con datos de frontera tipo Neumann, para luego establecer una conexión con nuestro sistema adjunto (1.5).

En [3, pág. 91] se muestra que el operador  $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  con dominio

$$D(A) = \{u \in H^2(0, L) : u_x \in H_0^1(0, L)\} \subset L^2(0, L) \quad (2.1)$$

es un operador diagonalizable. Esto es,  $A$  es un operador no-acotado con espectro discreto

$$\mu_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad k \geq 0$$

y correspondientes funciones propias

$$w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}; \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \geq 1. \quad (2.2)$$

Ahí mismo se muestra que la familia  $\{w_k\}$  forma una base hilbertiana de  $L^2(0, L)$ .

A fin de no recargar la escritura, en esta sección denotamos por  $(\cdot, \cdot)$  al producto interno en  $L^2(0, L)$  y denotamos con  $|\cdot|$  la norma correspondiente.

De lo anterior se sigue que para cada  $\varepsilon > 0$  fijo, el operador

$$\varepsilon A + \frac{M^2}{4\varepsilon} \text{Id},$$

con dominio  $D(A)$ , también es diagonalizable con valores propios

$$\lambda_k = \varepsilon \frac{k^2\pi^2}{L^2} + \frac{M^2}{4\varepsilon}, \quad k \geq 0, \quad (2.3)$$

y funciones propias  $w_k(x)$ ,  $k \geq 0$ .

Dada una función  $g \in L^2(Q_T)$  queremos resolver el problema de Cauchy-Neumann siguiente:

$$\begin{cases} \eta_t - \varepsilon \eta_{xx} + \frac{M^2}{4\varepsilon} \eta = g, & (t, x) \in Q_T \\ \eta_x(t, 0) = \eta_x(t, L) = 0, & t \in (0, T) \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), & x \in L^2(0, L). \end{cases} \quad (2.4)$$

Para cada  $t \in (0, T)$  escribimos a  $g(t) \in L^2(0, L)$  en términos de la base  $\{w_k\}$ , es decir,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(t) w_k, \quad \gamma_k(t) = (g(t), w_k), \quad k \geq 0$$

así que la identidad de Parseval implica

$$|g(t)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k(t)|^2 \quad y \quad \|g\|_{L^2(Q_T)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T |\gamma_k(t)|^2 dt < \infty.$$

Es natural buscar una solución  $\eta(t) \in L^2(0, T)$  del sistema (2.4) de la forma

$$\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) w_k, \quad a_k(t) = (\eta(t), w_k), \quad k \geq 0. \quad (2.5)$$

Sustituyendo formalmente la expresión anterior en (2.4) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{da_k}{dt} + \lambda_k a_k \right) w_k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(t) w_k.$$

Por la unicidad de la representación de funciones en  $L^2(0, L)$ , en términos de la base  $\{w_k\}$ , se debe cumplir

$$\frac{da_k}{dt} + \lambda_k a_k = \gamma_k(t), \quad k \geq 0. \quad (2.6)$$

Dado que  $\eta_0 \in L^2(0, L)$ , escribimos

$$\eta_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} w_k, \quad a_{0k} = (\eta_0, w_k) \quad \text{con} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 < \infty.$$

Así que la condición inicial en (2.4) es equivalente a

$$a_k(0) = a_{0k}, \quad k \geq 0.$$

De lo anterior se sigue que la solución de (2.6) está dada por

$$a_k(t) = a_{0k} e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\sigma)} \gamma_k(\sigma) d\sigma, \quad k \geq 0. \quad (2.7)$$

Hasta el momento los cálculos han sido formales y debemos justificar la convergencia de la serie en (2.5), así como establecer en que sentido  $\eta(t)$  es solución del sistema (2.4).

Primero estudiamos el comportamiento de las funciones  $a_k(t)$ ,  $k \geq 0$ . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} |a_k(t)|^2 &\leq 2|a_{0k}|^2 e^{-2\lambda_k t} + 2 \left( \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-\sigma)} d\sigma \right) \int_0^t |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma \\ &\leq 2|a_{0k}|^2 e^{-2\lambda_k t} + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma, \quad t \in (0, T], \end{aligned} \quad (2.8)$$

dado que

$$\int_0^t e^{-2\lambda_k(t-\sigma)} d\sigma = \frac{1}{2\lambda_k} (1 - e^{-2\lambda_k t}) \leq \frac{1}{2\lambda_k}, \quad k \geq 0.$$

Para cada  $m \geq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m |a_k(t)|^2 &\leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 + \frac{4\varepsilon}{M^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T |\gamma_k(t)|^2 dt \\ &= 2|\eta_0|^2 + \frac{4\varepsilon}{M^2} \|g\|_{L^2(Q_T)}, \quad \text{para todo } t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Así que la función  $\eta(t)$  dada en (2.4) está bien definida en  $[0, T]$ .

Ahora mostraremos que la sucesión de sumas parciales

$$\eta_m(t) = \sum_{k=0}^m a_k(t) w_k \quad (2.10)$$

converge en el espacio de Banach  $C^0([0, T]; L^2(0, L))$  con la norma

$$\|u\|_{\infty} := \sup_{t \in [0, T]} |u(t)|.$$

Como antes, tenemos la estimación

$$|\eta_{n+p}(t) - \eta_n(t)|^2 \leq 2 \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{0k}|^2 + \frac{4\varepsilon}{M^2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_0^T |a_k(\sigma)|^2 d\sigma$$

para todo  $t \in [0, T]$  y cualesquiera enteros positivos  $n, p$ .

Sea  $\rho > 0$  dado. Como  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}|^2 < \infty$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T |a_k(\sigma)|^2 d\sigma < \infty$ , existe  $N_0 > 0$  tal que

$$\sup_{t \in [0, T]} \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(t)|^2 \right)^{1/2} < \rho$$



para todo  $n > N_0$ ,  $p > 0$ . Entonces

$$\|\eta_{m+p} - \eta_m\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(t)|^2 \right)^{1/2} < \rho.$$

Así que  $(\eta_m)$  es una sucesión de Cauchy en  $C^0([0, T]; L^2(0, L))$  y por lo tanto  $\eta \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ .

De (2.7), y procediendo como obtuvimos (2.8), tenemos que

$$|a_k(t) - a_{0k}|^2 \leq 2|a_{0k}|^2(1 - e^{-\lambda_k t})^2 + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma, \quad 0 < t \leq T.$$

Para cualquier entero positivo  $m$  tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(t) - a_{0k}|^2 \leq 2(1 - e^{-\lambda_m t})^2 \sum_{k=0}^m |a_{0k}|^2 + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{0k}|^2 + \frac{4\varepsilon}{M^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Elegimos  $m$  suficientemente grande de tal manera que  $\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{0k}|^2$  sea tan pequeño como queramos. Fijada tal  $m$ , notamos por el Teorema de Convergencia Dominada que el primer y tercer término del lado derecho tienden a cero cuando  $t \rightarrow 0^+$ , por lo tanto

$$\eta(0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \eta(t) = \eta_0 \quad \text{en } L^2(0, L).$$

En particular

$$\eta(0) = \eta_0 \quad \text{casi dondequiera en } (0, L). \quad (2.11)$$

De la teoría espectral sabemos que  $H^1(0, L) = D(A^{1/2})$ . Así que dada una función  $v = \sum (v, w_k) w_k \in L^2(0, L)$ , entonces

$$v \in H^1(0, L) \text{ si y sólo si } \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |(v, w_k)|^2 < \infty. \quad (2.12)$$

Además podemos dotar a  $H^1(0, L)$  con la norma

$$\|v\|_{H^1(0, L)} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |(v, w_k)|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Afirmamos que  $\eta \in L^2(0, T; H^1(0, L))$ . Por (2.13) es suficiente mostrar que

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |a_k(t)|^2 dt < \infty.$$

Usando (2.8) e integrando en  $(0, T)$  obtenemos

$$\int_0^T |a_k(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\lambda_k} |a_{0k}|^2 + \frac{T}{\lambda_k} \int_0^T |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma,$$

de donde se sigue

$$\int_0^T \sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |a_k(t)|^2 dt \leq \sum_{k=m}^{m+p} \left( |a_{0k}|^2 + T \int_0^T |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma \right) \quad (2.14)$$

para cualesquiera enteros  $m, p > 0$ .

Para  $\rho > 0$  dado, existe  $m(\rho) > 0$  tal que el lado derecho es menor que  $\rho$  para todo  $m \geq m(\rho)$ , de donde se sigue el resultado.

Ahora definimos  $\eta'_m = \frac{d\eta_m}{dt}$ . Entonces

$$\eta'_m = \sum_{k=0}^m \frac{da_k}{dt} w_k \quad \text{donde} \quad \frac{da_k}{dt} = -\lambda_k a_k + \gamma_k.$$

Consideramos la forma bilineal

$$a(u, v) = \varepsilon \int_0^L u_x v_x dx + \frac{M^2}{4\varepsilon} \int_0^L uv dx, \quad u, v \in H^1(0, L).$$

entonces (2.6) se reescribe como sigue,

$$(\eta'_m(t), w_k) + a(\eta_m(t), w_k) = (g_m(t), w_k), \quad 0 \leq k \leq m. \quad (2.15)$$

donde

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^m \gamma_k(t) w_k.$$

Fijamos  $k < m$  y consideramos  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ , donde  $\mathcal{D}$  es el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en el conjunto en cuestión. Multiplicamos (2.15) por  $\phi$  e integramos de 0 a  $T$ , luego integramos por partes para obtener

$$-\int_0^T (\eta_m(t), w_k) \phi'(t) dt + \int_0^T a(\eta_m(t), w_k) \phi(t) dt = \int_0^T (g_m(t), w_k) \phi(t) dt.$$

Dado que  $\eta_m \rightarrow \eta$  en  $C^0([0, T]; L^2(0, L))$  tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (\eta_m(t), w_k) \phi'(t) dt = \int_0^T (\eta(t), w_k) \phi'(t) dt.$$

Como  $\eta \in L^2(0, T; H^1(0, L))$  obtenemos

$$\left| \int_0^T a(\eta_m(t) - \eta(t), w_k) \phi(t) dt \right| \leq C_{\varepsilon, \phi, k} \int_0^T \|\eta_m(t) - \eta(t)\|_{H^1(0, L)} dt.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T a(\eta_m(t), w_k) \phi(t) dt = \int_0^T a(\eta(t), w_k) \phi(t) dt.$$

Claramente  $g_m \rightarrow g$  en  $L^2(0, L)$ , usando el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (g_m(t), w_k) \phi(t) dt = \int_0^T (g(t), w_k) \phi(t) dt.$$

Juntando lo anterior, tenemos que  $\eta$  satisface

$$- \int_0^T (\eta(t), w_k) \phi'(t) dt + \int_0^T a(\eta(t), w_k) \phi(t) dt = \int_0^T (g(t), w_k) \phi(t) dt$$

para todo  $k \geq 0$ .

La igualdad anterior es válida cuando reemplazamos a  $w_k$  por combinaciones lineales de  $w_k$ 's. Como la familia  $\{w_k\}$  genera un subespacio denso en  $H^1(0, L)$  obtenemos finalmente

$$- \int_0^T (\eta(t), v) \phi'(t) dt + \int_0^T a(\eta(t), v) \phi(t) dt = \int_0^T (g(t), v) \phi(t) dt \quad (2.16)$$

para todo  $v \in H^1(0, L)$ ,  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ .

Lo anterior implica que  $\eta$  satisface la ecuación diferencial en (2.4) en un sentido débil:

$$\frac{d}{dt}(\eta(\cdot), v) + a(\eta(\cdot), v) = (g(\cdot), v) \quad (2.17)$$

para todo  $v \in H^1(0, L)$  en el sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

En resumen, de la exposición previa se tiene el siguiente resultado,

**Teorema 8.** Sean  $\eta_0 \in L^2(0, L)$ ,  $g \in L^2(Q_T)$  y  $\eta$  la función definida en (2.5). Entonces  $\eta \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ . Además  $\eta$  cumple la condición inicial en (2.4) con la interpretación dada en (2.11), satisface

$$- \int_0^T (\eta(t), v) \phi'(t) dt + \int_0^T a(\eta(t), v) \phi(t) dt = \int_0^T (g(t), v) \phi(t) dt,$$

la cual contiene formalmente la condición de frontera en (2.4).

**Observación 9. Continuidad respecto a los datos.** Las desigualdades en (2.9) y (2.14) implican que el mapeo

$$(\eta_0, g) \mapsto \eta(t)$$

es continuo de  $L^2(0, L) \times L^2(Q_T)$  en  $C^0([0, T]; L^2(0, L))$  (resp. en  $L^2(0, T; H^1(0, L))$ ).

**Proposición 10.** Si  $\eta_0 \in H^1(0, L)$  y  $g \in L^2(Q_T)$ , entonces  $\eta \in C^0([0, T]; H^1(0, L))$ .

*Demostración.* Como  $\eta_0 \in H^1(0, L)$ , por (2.12) tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |a_{0k}|^2 < \infty.$$

Usando (2.8) deducimos que

$$\sum_{k=0}^m \lambda_k |a_k(t)|^2 \leq \sum_{k=0}^m \left( 2\lambda_k |a_{0k}|^2 + \int_0^t |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma \right),$$

además tenemos

$$\sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |a_k(t)|^2 \leq \sum_{k=m}^{m+p} \left( 2\lambda_k |a_{0k}|^2 + \int_0^t |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma \right), \quad t \in (0, T].$$

Por lo tanto

$$\sup_{t \in [0, T]} \sum_{k=m}^{m+p} \lambda_k |a_k(t)|^2 \leq 2 \sum_{k=m}^{m+p} \left[ \lambda_k |a_{0k}|^2 + \int_0^T |\gamma_k(\sigma)|^2 d\sigma \right].$$

Dado que  $g \in L^2(Q_T)$  y  $\eta_0 \in H^1(0, L)$  se sigue que  $\eta_m$  converge en  $C^0([0, T]; H^1(0, L))$  y por lo tanto  $\eta \in C^0([0, T]; H^1(0, L))$ .  $\square$

Cuando la condición inicial  $\eta_0$  está en  $D(A)$  el siguiente resultado muestra que la función  $\eta(t)$  es una solución fuerte del sistema (2.4).

**Corolario 11.** *Sea  $\eta_0 \in D(A)$  y  $\eta$  la función dada en (2.5). Entonces  $\eta \in C^0([0, T]; H^1(0, L)) \cap C^1(0, T; L^2(0, L))$ .*

*Demostración.* Como  $\mathcal{D}(0, L)$  está contenido en  $H^1(0, L)$ , podemos elegir  $v \in \mathcal{D}(0, L)$ . Integrando por partes, podemos ver que (2.17) es equivalente a

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T} \eta(t, x) v(x) \phi'(t) dt dx - \varepsilon \int_{Q_T} \eta(t, x) v''(x) \phi(t) dt dx + \frac{M^2}{4\varepsilon} \int_{Q_T} \eta(t, x) \phi(t) v(x) dt dx \\ = \int_{Q_T} g(t, x) v(x) \phi(t) dt dx. \end{aligned}$$

Por tanto, si ponemos  $\psi(t, x) = v(x) \phi(t)$ , tenemos que  $\psi \in \mathcal{D}(Q_T)$  y la igualdad anterior se escribe como

$$- \int_{Q_T} \eta \frac{\partial \psi}{\partial t} dt dx - \varepsilon \int_{Q_T} \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dt dx + \frac{M^2}{4\varepsilon} \int_{Q_T} \eta \psi dt dx = \int_{Q_T} g \psi dt dx, \quad (2.18)$$

para todo  $\psi \in \mathcal{D}(Q_T)$  de la forma  $\psi = v \otimes \phi$ , con  $v \in (0, L)$ ,  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ .

Como el conjunto de combinaciones lineales de la forma  $v \otimes \phi$  con  $v \in (0, L)$ ,  $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ , es denso en  $\mathcal{D}(Q_T)$ , tenemos que (2.18) se cumple para todo  $\psi \in \mathcal{D}(Q_T)$ , es decir,

$$\left\langle \frac{\partial \eta}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{M^2}{4\varepsilon} \eta, \psi \right\rangle = \langle g, \psi \rangle \quad \text{para todo } \psi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{M^2}{4\varepsilon} \eta = g \quad (2.19)$$

en el sentido de distribuciones en  $Q_T$ .

Ahora mostraremos que  $\eta$  es una solución fuerte del sistema (2.4). Si multiplicamos (2.15) por  $\frac{da_k}{dt}$ , integramos sobre  $(0, t)$  y sumamos sobre  $k$  de 0 a  $m$ , obtenemos

$$\int_0^t |\eta'_m(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2} a(\eta_m(t), \eta_m(t)) = \frac{1}{2} a(\eta_m(0), \eta_m(0)) + \int_0^t (g_m(\sigma), \eta'_m(\sigma)) d\sigma.$$

Entonces

$$\int_0^t |\eta'_m(\sigma)|^2 d\sigma \leq C_0 + \frac{1}{2} \int_0^t |g(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t |\eta'_m(\sigma)|^2 d\sigma,$$

es decir que  $\int_0^t |\eta'_m(\sigma)|^2 d\sigma \leq C$  donde  $C$  es independiente de  $m$ .

Por tanto, si  $\eta_0 = 0$  ó si  $\eta_0 \in H^1(0, L)$ , entonces  $\frac{\partial \eta}{\partial t} \in L^2(Q_T)$  y por (2.19) tenemos que  $\varepsilon A\eta + \frac{M^2}{4\varepsilon}\eta \in L^2(0, L)$  para casi toda  $t$ . Así que  $\eta$  satisface  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon A\eta + \frac{M^2}{4\varepsilon}\eta = g$  en  $L^2(Q_T)$ , entonces  $\eta$  es una solución fuerte del sistema (2.4).  $\square$

Finalmente estamos en posición de resolver el sistema (1.5). Primero procedemos de manera heurística. Sea  $\eta$  una solución de la EDP en el sistema (2.4). Ponemos  $\varphi(t, x) = e^{-\frac{M}{2\varepsilon}x}\eta(t, x)$ , entonces

$$g = \eta_t - \varepsilon \eta_{xx} + \frac{M^2}{4\varepsilon} \eta = e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}} (\varphi_t - M\varphi_x - \varepsilon\varphi_{xx}).$$

Así que  $\varphi$  es solución de la EDP en el sistema (1.5) con  $e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}}g(x, t)$  en vez de la función  $g \in L^2(Q_T)$ .

Ahora procedemos a formalizar. Primero notamos que el mapeo

$$\psi \mapsto e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}}\psi(x)$$

es un isomorfismo de  $L^2(0, L)$  (resp.  $H^1(0, L)$ ) sobre  $L^2(0, L)$  (resp.  $H^1(0, L)$ ), i.e existe una constante  $C = C_{M,L,\varepsilon} > 0$  tal que

$$C^{-1}\|\psi\|_H \leq \|e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}}\psi\|_H \leq C\|\psi\|_H,$$

donde  $H = L^2(0, L)$  o  $H^1(0, L)$ . Claramente el mapeo anterior también es un isomorfismo de  $L^2(Q_T)$  sobre sí mismo.

Sean  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$  y  $g \in L^2(Q_T)$  dados. Sea  $\eta$  la función obtenida en el Teorema 8 con los datos  $\eta_0(x) := e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}}\varphi_0(x)$  y con  $e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}}g(x, t)$  en vez de  $g$ .

Ponemos

$$\varphi(t, x) := e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}}\eta(t, x), \quad (t, x) \in Q_T. \quad (2.20)$$

De (2.11) se sigue que

$$\varphi(0, \cdot) = \varphi_0 \quad \text{casi dondequiera en } (0, L). \quad (2.21)$$

Además, dado que  $\eta \in L^2(0, T; H^1(0, L))$  se sigue que  $\eta(t) \in H^1(0, L)$  (en consecuencia  $\varphi(t)$ ) para casi todo  $t \in (0, T)$ . Usando (2.16) con  $e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}}v$  en vez de  $v$ ,  $v \in H^1(0, L)$ , tenemos

$$-\int_0^T (\varphi(t), v)\phi'(t)dt + \int_0^T [\varepsilon(\varphi_x(t), v_x) + \frac{M}{2}(\varphi(t), v_x) - \frac{M}{2}(\varphi_x(t), v)]\phi(t)dt = \int_0^T (g(t), v)\phi(t)dt \quad (2.22)$$

para todo  $v \in H^1(0, L)$ .

Todo lo antes expuesto se resume en el siguiente resultado sobre la existencia de soluciones del sistema adjunto (1.5).

**Teorema 12.** Sean  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ ,  $g \in L^2(Q_T)$  y  $\varphi$  la función definida en (2.20). Entonces  $\varphi \in C^0([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$ . Además  $\varphi$  satisface la condición inicial en (1.5), en el sentido dado en (2.21), y satisface la EDP con la interpretación dada en (2.22), la cual contiene formalmente la condición de frontera en (1.5).

Además, de (2.9) y (2.14) se sigue que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|_{L^2(0, L)} \leq C(\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}), \quad (2.23)$$

$$\left( \int_0^T \|\varphi(t)\|_{H^1(0, L)}^2 dt \right)^{1/2} \leq C(\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}). \quad (2.24)$$

Cuando la condición inicial  $\varphi_0$  tiene mayor regularidad, el Corolario 11 implica que  $\varphi$  es una solución fuerte (en  $L^2(0, L)$ ) de la EDP en (1.5).

**Corolario 13.** Sean  $g \in L^2(Q_T)$  y  $\varphi_0 \in H^2(0, L)$  tal que  $B^*\varphi_0 \in H_0^1(0, L)$ . Entonces  $\varphi \in C^0([0, T]; H^1(0, L)) \cap C^1(0, T; L^2(0, L))$  y  $\varphi$  es una solución fuerte del sistema (1.5).

**Observación 14.** i) De (2.19) y (2.20) se sigue que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - M \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = g \quad \text{en } \mathcal{D}'(Q_T).$$

ii) Dado que  $(w_k)_{k \geq 0}$  es una base hilbertiana en  $L^2(0, L)$ , ver (2.2), se sigue que

$$\phi_k(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \geq 0$$

es una base de Riesz para  $L^2(0, L)$ . Además  $B^*\phi_k(0) = B^*\phi_k(L) = 0$ ,  $k \geq 0$ .

## 2.2. Existencia y unicidad de soluciones Método II

A continuación presentamos otro método para obtener el resultado de existencia y unicidad de soluciones del sistema (1.5), así como para obtener la continuidad de las soluciones respecto a los datos.

En este caso aplicamos el método variacional desarrollado en el Capítulo XVIII del texto [3], así que en esta sección adoptamos la notación del referido texto. Ponemos  $H = L^2(0, L)$  y  $V = H^1(0, L)$  con sus respectivas normas, i.e

$$|\varphi|_H := \left( \int_0^L |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad |\varphi|_V := \left( \int_0^L |\varphi(x)|^2 dx + \int_0^L |\varphi_x(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Es conocido que  $V$  está encajado de manera densa y continua en  $H$ .

Para  $\varepsilon > 0$  y  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos, consideramos la forma bilineal  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$a(\varphi, \phi) := M \int_0^L \varphi(x) \phi_x(x) dx + \varepsilon \int_0^L \varphi_x(x) \phi_x(x) dx - \frac{M}{2} \varphi \phi|_0^L. \quad (2.25)$$

Dado que el operador de traza  $T : V \rightarrow L^2(\partial(0, L))$  es continuo, es decir, se cumple

$$|\varphi(0)|^2 + |\varphi(L)|^2 \leq |\varphi|_V^2 \quad \text{para todo } \varphi \in V,$$

obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} |a(\varphi, \phi)| &\leq |M\varphi + \varepsilon\varphi_x|_H |\phi_x|_H + \frac{|M|}{2} |\varphi|_V |\phi|_V \\ &\leq C_{\varepsilon, M} |\varphi|_V |\phi|_V \quad \text{para todo } \varphi, \phi \in V. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior implica que la forma bilineal  $a$  es continua en su dominio.

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) &= \frac{M}{2} \int_0^L \frac{d}{dx} |\varphi(x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(x)|^2 dx - \frac{M}{2} |\varphi|^2|_0^L \\ &= \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a(\varphi, \varphi) + \varepsilon |\varphi|_H^2 \geq \varepsilon |\varphi|_V^2 \quad \text{para todo } \varphi \in V,$$

de donde se sigue que la forma bilineal  $a$  es coerciva sobre  $V$  con respecto a  $H$ .

Ahora consideramos el operador no-acotado  $A : D(A) \subset V \rightarrow V$  donde

$$D(A) = \{\varphi \in V : \phi \mapsto a(\varphi, \phi) \text{ es continuo sobre } V \text{ respecto la topología de } H\}.$$

Afirmamos que

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(0, L) : B^*\varphi(0) = B^*\varphi(L) = 0\}.$$

Efectivamente,  $\varphi \in D(A)$  si y sólo si  $\varphi \in V$  y existe  $A\varphi \in L^2(0, L)$  tal que

$$\int_0^L [M\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)]\phi_x(x)dx - \frac{M}{2}\varphi\phi|_0^L = \int_0^L A\varphi\phi dx \quad (2.26)$$

para todo  $\phi \in V$ .

En particular, si  $\varphi \in D(A)$  entonces

$$\int_0^L [M\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)]\phi_x(x)dx = \int_0^L A\varphi\phi dx \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(0, L),$$

por lo tanto  $M\varphi + \varepsilon\varphi_x \in H^1(0, L)$ . Así que  $\varphi \in H^2(0, L)$ ,  $A\varphi = -M\varphi_x - \varepsilon\varphi_{xx}$  y usando integración por partes en (2.26) se obtiene que  $\phi B^*\varphi|_0^L = 0$  para todo  $\phi \in V$ , así que  $B^*\varphi(0) = B^*\varphi(L) = 0$  y por tanto  $D(A) \subseteq \{\varphi \in H^2(0, L) : B^*\varphi(0) = B^*\varphi(L) = 0\}$ .

Sea  $\varphi \in H^2(0, L)$  tal que  $B^*\varphi(0) = B^*\varphi(L) = 0$ . En particular  $\varphi \in V$ , además

$$\begin{aligned} \int_0^L [M\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)]\phi_x(x)dx - \frac{M}{2}\varphi\phi|_0^L &= \left[\frac{M}{2}\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)\right]\phi(x)|_0^L \\ &\quad - \int_0^L [M\varphi_x(x) + \varepsilon\varphi_{xx}(x)]\phi(x)dx \\ &= - \int_0^L [M\varphi_x(x) + \varepsilon\varphi_{xx}(x)]\phi(x)dx, \end{aligned}$$

como  $\varphi \in H^2(0, L)$  entonces  $M\varphi_x + \varepsilon\varphi_{xx} \in L^2(0, L)$ , así que  $\{\varphi \in H^2(0, L) : B^*\varphi(0) = B^*\varphi(L) = 0\} \subseteq D(A)$ .

Ahora obtenemos las llamadas *estimaciones a priori*. Para poder aplicar el método de Galerkin, usamos el hecho que  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0} \subset D(A)$  es una base de Riesz de  $L^2(0, L)$ . Primero suponemos que tenemos datos regulares, i.e  $\varphi_0 \in D(A)$  y  $g \in L^2(Q_T)$ .

Multiplicamos la ecuación del sistema (1.5) por  $\varphi$  e integramos respecto a  $x \in (0, L)$  para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^L g(t, x)\varphi(t, x)dx &= - \int_0^L \varphi(t, x)\varphi_t(t, x)dx + M \int_0^L \varphi(t, x)\varphi_x(t, x)dx + \varepsilon \int_0^L \varphi(t, x)\varphi_{xx}(t, x)dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx - \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \\ &\quad + \frac{M}{2} |\varphi(t, x)|^2 \Big|_{x=0}^{x=L} + \varepsilon \varphi(t, x)\varphi_x(t, x) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx - \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \varphi(t, x) B^*\varphi(t, x) \Big|_{x=0}^{x=L} \end{aligned}$$



Así que para  $t \in (0, T)$  tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx = - \int_0^L g(t, x) \varphi(t, x) dx, \quad (2.27)$$

por lo tanto, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{d}{ds} \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx \leq \int_0^L |g(s, x)|^2 dx + \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx, \quad s \in (0, T).$$

Integramos en  $s \in [0, t]$ , con  $0 \leq t \leq T$ , para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^L [|\varphi(t, x)|^2 - |\varphi(0, x)|^2] dx &\leq \int_0^t \int_0^L |g(s, x)|^2 dx ds + \int_0^t \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx ds \\ &\leq \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx ds, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx \leq \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx ds.$$

La desigualdad de Gronwall implica que

$$\int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx \leq e^T \left( \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt \right). \quad (2.28)$$

Por otro lado, si integramos (2.27) respecto a  $t \in (0, T)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L |\varphi(T, x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\varphi(0, x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt \end{aligned}$$

entonces,

$$2\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx dt \leq \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt.$$

Usamos (2.28) en el último sumando del lado derecho para obtener

$$\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \leq (1 + Te^T) \left( \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt \right). \quad (2.29)$$

Dado que  $D(A)$  es denso en  $L^2(0, L)$ , se sigue que las estimaciones anteriores son válidas para  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ . Lo antes expuesto lo resumimos en el siguiente resultado.

**Teorema 15.** Sean  $\varepsilon, T > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Para cada  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$  y  $g \in L^2(Q_T)$  existe una única solución  $\varphi \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^1(0, L))$  del sistema (1.5), en el sentido que

$$-\int_0^T \int_0^L \varphi(t, x)v(x)dx\psi'(t)dt + \int_0^T a(\varphi(t, \cdot), v)\psi(t)dt = \int_0^T \int_0^L g(t, x)v(x)dx\psi(t)dt$$

para toda  $v \in H^1(0, L)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ , donde la forma bilineal  $a$  es definida en (2.25). Además tenemos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} &\leq e^T(\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}), \\ \sqrt{\varepsilon}\|\varphi\|_{L^2(0, T; H^1(0, L))} &\leq (1 + Te^T)^{1/2}(\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ ,  $g \in L^2(Q_T)$ .

Como consecuencia de lo anterior, y usando la continuidad del operador de traza de  $H^1(0, L)$  en  $L^2(\{0, L\})$ , obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 16.** Sean  $\varepsilon, T > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\sqrt{\varepsilon}\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0, T)} \leq C(1 + Te^T)^{1/2}(\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}), \quad (2.31)$$

para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ ,  $g \in L^2(Q_T)$ , donde  $\varphi$  es solución del sistema (1.5).

## 2.3. Solución por transposición del sistema original

Una vez establecida la existencia y unicidad de soluciones del sistema adjunto (1.4), estamos en condición de proponer la definición de solución por transposición del sistema original (1.3).

**Definición 17.** Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Dados  $y_0 \in L^2(0, L)$  y  $u \in L^2(0, T)$  decimos que  $y = y(t, x)$  es una solución por transposición del sistema (1.3) si para cada  $t \in [0, T]$  la función  $y(t, \cdot) \in L^2(0, L)$  satisface

$$\int_0^L \varphi_0(x)y(t, x)dx = \int_0^L y_0(x)\varphi(0, x)dx + \frac{1}{2} \int_0^t u(s)\varphi(s, 0)ds \quad (2.32)$$

para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ , donde  $\varphi$  es la solución del sistema (1.4) planteado en  $(0, t) \times (0, L)$  con  $\varphi(t, \cdot) = \varphi_0$  y  $g \equiv 0$ .

Ahora presentamos el correspondiente resultado sobre la existencia y unicidad de soluciones del sistema (1.3), y que además proporciona la continuidad de las soluciones con respecto a los datos.

**Proposición 18.** Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Para cada  $y_0 \in L^2(0, L)$  y  $u \in L^2(0, T)$  existe una única solución en el sentido de transposición  $y \in C([0, T]; L^2(0, L))$  del sistema (1.3). Además, existe una constante  $C_T > 0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que

$$\max_{t \in [0, T]} \|y(t, \cdot)\|_{L^2(0, L)} \leq C_T \left( \|y_0\|_{L^2(0, L)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u\|_{L^2(0, T)} \right). \quad (2.33)$$

*Demostración.* Tomamos  $y_0 \in L^2(0, L)$  y  $u \in L^2(0, T)$ . Para cada  $t \in [0, T]$  consideramos el sistema (1.4) en  $(0, t) \times (0, L)$  con  $\varphi(t, \cdot) = \varphi_0$  y  $g \equiv 0$ . Por el Teorema 15 existe una única función  $\varphi \in C([0, t]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, t; H^1(0, L))$  que satisface una estimación como en (2.30), con  $t$  en lugar de  $T$ .

Usando (2.31) obtenemos que el funcional lineal

$$\varphi_0 \in L^2(0, L) \mapsto \int_0^L y_0(x)\varphi(0, x)dx + \frac{1}{2} \int_0^t u(s)\varphi(s, 0)ds$$

es continuo, ya que

$$\int_0^L y_0(x)\varphi(0, x)dx + \frac{1}{2} \int_0^t u(s)\varphi(s, 0)ds \leq C_T(\|y_0\|_{L^2(0, L)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|u\|_{L^2(0, T)})\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)}.$$

Por el Teorema de representación de Riesz existe una única función  $y(t, \cdot) \in L^2(0, L)$  tal que satisface la igualdad en (2.32).

Usando (2.30) y (2.31) obtenemos

$$\left| \int_0^L \varphi_0(x)y(t, x)dx \right| \leq C_T \left( \|y_0\|_{L^2(0, L)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|u\|_{L^2(0, T)} \right) \|\varphi_0\|_{L^2(0, L)},$$

de donde se sigue la validez de (2.33).

Por otro lado, para  $t, \tau \in [0, T]$  usamos (2.32) para obtener

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L \varphi_0(x)[y(t, x) - y(\tau, x)]dx \right| &\leq \frac{1}{2} \left| \int_\tau^t |u(s)| |\varphi(s, 0)| ds \right| \\ &\leq \frac{C_T}{2\sqrt{\varepsilon}} \left| \int_\tau^t |u(s)|^2 ds \right|^{1/2} \|\varphi_0\|_{L^2(0, L)}, \end{aligned}$$

lo que implica la continuidad de la función  $t \mapsto y(t, \cdot) \in L^2(0, L)$  ya que

$$\|y(t, \cdot) - y(\tau, \cdot)\|_{L^2(0, L)} \leq \frac{C_T}{2\sqrt{\varepsilon}} \left| \int_\tau^t |u(s)|^2 ds \right|^{1/2},$$

y resta aplicar el teorema de la convergencia dominada. □

**Observación 19.** En particular, si  $y$  es la solución del sistema (1.3) con control  $u$  y condición inicial  $y_0$ , del principio de Duhamel obtenemos que

$$\int_0^T \int_0^L g(t, x)\varphi(t, x) + \int_0^L y(T, x)\varphi_0(x)dx = \int_0^L y_0(x)\varphi(0, x)dx + \frac{1}{2} \int_0^T u(t)\varphi(t, 0)dt$$

para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ ,  $g \in L^2(Q_T)$  donde  $\varphi$  es la solución del sistema adjunto (1.4).

## 2.4. Solución fuerte del sistema original

En la Definición 17 dimos la noción de solución por transposición del sistema (1.3) con datos  $y_0 \in L^2(0, L)$ ,  $u \in L^2(0, T)$ . En este caso resulta que la correspondiente función  $y(t, x)$  es una solución muy débil para el sistema (1.3). ¿Qué podemos decir en el caso que  $y_0$  y  $u$  tienen mayor regularidad? En este caso usamos el método llamado de levantamiento (lifting) del dato de frontera  $u$  al lado derecho de la ecuación diferencial en el sistema (1.3).

Fijamos  $y_0 \in H^2(0, L)$  con  $By_0 \in H_0^1(0, L)$  y  $u \in H^1(0, T)$  con  $u(0) = 0$ . Ponemos

$$y^u(t, x) := \frac{L}{LM + 4\varepsilon} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 u(t), \quad (t, x) \in Q_T.$$

Un cálculo sencillo muestra que  $By^u(t, 0) = u(t)$  y  $By^u(t, L) = 0$  para  $t \in (0, T)$ . Además notamos que

$$g^u(t, x) := \frac{2\varepsilon + ML - Mx}{L(LM + 4\varepsilon)} u(t) - \frac{L}{LM + 4\varepsilon} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 u'(t) \in L^2(Q_T).$$

Aplicamos el Corolario 13, con  $-M$  en vez de  $M$  y  $g = g^u$ , para obtener una única solución fuerte  $\tilde{y} \in C^0([0, T]; H^1(0, L)) \cap C^1(0, T; L^2(0, L))$  del siguiente sistema

$$\begin{cases} \tilde{y}_t + M\tilde{y}_x - \varepsilon\tilde{y}_{xx} = g^u, & (t, x) \in Q_T, \\ B\tilde{y}(t, 0) = 0, \quad B\tilde{y}(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ \tilde{y}(0, x) = \tilde{y}_0(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Finalmente, definimos  $y := \tilde{y} + y^u$ . Es fácil ver que  $y$  es una solución fuerte del sistema (1.3).

## 2.5. Controlabilidad a cero

Finalmente, en este contexto, podemos introducir la noción de controlabilidad a cero del sistema (1.3) al tiempo  $T > 0$  dada en la Definición 2.

Efectivamente, (1.6) junto con la Definición 17 implican que  $\int_0^L \varphi_0(x)y(T, x)dx = 0$  para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ , por lo tanto  $y(T, \cdot) \equiv 0$ .

En la teoría de control de EDP's lineales es conocido el hecho de que la controlabilidad a cero es equivalente a probar una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto. Así que desarrollaremos el material necesario para mostrar tal hecho en el sistema que nos ocupa. En esta sección reproducimos parte del texto [1] y adoptamos su notación.

Consideramos  $U, H$  espacios de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$  con respectivos productos escalares  $(\cdot, \cdot)_U$  y  $(\cdot, \cdot)_H$ .

Sea  $A$  el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  continuos en  $H$ . Es conocido que el operador adjunto  $A^*$  de  $A$  es el generador infinitesimal del semigrupo  $\{S(t)^*\}_{t \geq 0}$ , donde  $S(t)^*$  es el operador transpuesto de  $S(t)$ .

El dominio  $D(A^*)$  está equipado con la norma de la gráfica del operador  $A^*$ , es decir,

$$\|z\|_{D(A^*)} = \|z\|_H + \|A^*z\|_H, \quad z \in D(A^*).$$

De hecho esta norma está asociada con el producto escalar

$$(z_1, z_2)_{D(A^*)} := (z_1, z_2)_H + (A^*z_1, A^*z_2)_H, \quad z_1, z_2 \in A^*.$$

Con este producto escalar  $D(A^*)$  es un espacio de Hilbert. Sea  $D(A^*)'$  el espacio dual de  $D(A^*)$  con  $H$  como espacio pivote, en particular,

$$D(A^*) \subset H \subset D(A^*)'.$$

Consideramos un operador de control

$$\mathcal{B} \in \mathcal{L}(U, D(A^*)'),$$

donde  $\mathcal{L}(X, Y)$  denota el espacio de operadores acotados de  $X$  en  $Y$ .

Se asume la validez de la llamada condición de admisibilidad (también llamada propiedad de regularidad): existe  $T > 0$  y una constante  $C_T$  tal que

$$\int_0^T \|\mathcal{B}^* S^*(t)z\|_U^2 dt \leq C_T \|z\|_H^2, \quad \text{para todo } z \in D(A^*).$$

En adelante  $\mathcal{B}^* \in \mathcal{L}(D(A^*); U)$  es el adjunto de  $\mathcal{B}$ .

Sean  $T > 0$ ,  $y_0 \in H$  y  $u \in L^2((0, T); U)$ . Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + \mathcal{B}u, \quad t \in (0, T), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Decimos que una función  $y \in C([0, T], H)$  es una solución del problema de Cauchy anterior si

$$(y(t), z^t)_H - (y(0), S(t)^*z^t)_H = \int_0^t (u(s), \mathcal{B}^* S(t-s)^*z^t)_U ds, \quad \text{para todo } t \in [0, T], z^t \in H.$$

En [1, pág. 53, Teorema 2.37] se prueba que para cada  $T > 0$ ,  $y_0 \in H$ ,  $u \in L^2(0, T; U)$  existe una única solución del problema de Cauchy (2.34).

Decimos que el sistema de control

$$\dot{y} = Ay + \mathcal{B}u. \tag{2.35}$$

es controlable a cero al tiempo  $T > 0$  fijo, si para cada  $u \in L^2(0, T; U)$  la correspondiente solución  $y$  del problema de Cauchy (2.34) satisface  $y(T) = 0$ .

Ahora introducimos un “mapeo de control óptimo”. Sea  $T > 0$  fijo. Para cada  $y_0 \in H$  consideramos el conjunto

$$U_T(y_0) := \{u \in L^2(0, T; U) : \text{la correspondiente solución } y \text{ de (2.34) cumple } y(T) = 0\}.$$

Se sabe que  $U_T(y_0)$  es un subespacio afín cerrado de  $L^2(0, T; U)$ , así que tiene un elemento de norma mínima en  $L^2(0, T; U)$  y lo denotamos por  $\mathcal{U}^T(y_0)$ .

Además es conocido que el mapeo  $\mathcal{U}^T : H \rightarrow L^2(0, T; U)$  es lineal y que el teorema de la gráfica cerrada implica que es continuo. A  $\|\mathcal{U}^T\|$  le llamaremos constante de control óptimo nulo.

A continuación reproducimos el resultado que muestra la equivalencia entre la controlabilidad a cero de un sistema y la correspondiente desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto, y que además proporciona una forma de calcular la norma del mapeo lineal de control óptimo  $\mathcal{U}^T$ .

**Teorema 20.** *Sea  $T > 0$  fijo. El sistema de control (2.35) es controlable al tiempo  $T$  si y sólo si existe una constante  $c > 0$  tal que*

$$\|S(T)^*z\|_H^2 \leq c \int_0^T \|\mathcal{B}^*S(t)^*z\|_U^2, \quad \text{para todo } z \in D(A^*). \quad (2.36)$$

Además si existe tal constante  $c > 0$  y si  $c_T$  es la mínima constante tal que se satisface (2.36) entonces

$$\|\mathcal{U}^T\|_{\mathcal{L}(H; L^2(0, T; U))} = \sqrt{c_T}.$$

Ahora aplicamos el resultado anterior a nuestro sistema.

**Proposición 21.** *Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. El sistema (1.3) es controlable a cero en  $L^2(0, L)$  al tiempo  $T$  si y sólo si existe una constante  $C = C_{\varepsilon, T, L, M} > 0$  tal que*

$$\int_0^L |\varphi(0, x)|^2 dx \leq C \int_0^T |\varphi(t, 0)|^2 dt \quad (2.37)$$

para cada  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ , donde  $\varphi$  es la solución del sistema adjunto (1.4) con  $g \equiv 0$ .

*Demostración.* En este caso tenemos  $H = L^2(0, L)$  y  $U = \mathbb{R}$ . Es bien conocido que el operador  $\tilde{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$  con dominio  $D(\tilde{A}) = \{u \in H^2(0, L) : u_x \in H_0^1(0, L)\}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo de transformaciones lineales acotadas. Por lo tanto para cada  $\varepsilon > 0$  el operador

$$-\varepsilon\tilde{A} - \frac{M^2}{4\varepsilon}I,$$

con dominio  $D(\tilde{A})$ , es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales  $\{\tilde{S}(t)\}_{t \geq 0}$  acotados en  $H$ .

Es fácil verificar que si  $\tilde{u}(t) = \tilde{S}(t)u_0$ , entonces  $u(t) = e^{\frac{M}{2\varepsilon}x}\tilde{u}(t)$  resuelve la ecuación

$$\frac{du}{dt} = Au(t),$$

donde

$$A = -M \frac{d}{dx} + \varepsilon \frac{d^2}{dx^2},$$

con  $D(A) = \{y \in H^2(0, L) : By(0) = By(L) = 0\}$ .

En nuestro caso el operador de control  $\mathcal{B} : \mathbb{R} \rightarrow D(A^*)'$  está dado por

$$(\mathcal{B}\lambda)z := \lambda z(0), \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}, z \in D(A^*),$$

donde  $D(A^*) = \{\varphi \in H^2(0, L) : B^*\varphi(0) = B^*\varphi(L) = 0\}$ . Notamos que  $\mathcal{B}^* : D(A^*) \rightarrow \mathbb{R}$  está dado por  $\mathcal{B}^*z = z(0)$ , para todo  $z \in D(A^*)$ .

Se verifica el principio de admisibilidad por la segunda desigualdad en (2.30), así que el resultado se sigue del teorema anterior.  $\square$

A la desigualdad (2.37) se le suele llamar desigualdad de observabilidad u observación en  $x = 0$  al tiempo  $T$ .

## 2.6. Motivación del operador de frontera $B$

Una pregunta bastante natural sobre el sistema que estudiamos en este trabajo es ¿cuál es la razón de definir así al operador de frontera  $B$ ?

Como se mencionó en la introducción del Capítulo 2, la sucesión  $c_k(x) := \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ ,  $k \geq 0$ , es un sistema ortogonal de funciones propias del laplaciano unidimensional con condición de frontera tipo Neumann. Así que nos proponemos expresar que el operador diferencial de segundo orden

$$P = -M\partial_x - \varepsilon\partial_{xx},$$

asociado al sistema de evolución (1.5), tenga funciones propias de la forma  $e^{\omega x} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ , para una cierta constante real  $\omega$ .

Ponemos  $s_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$  y  $\varphi_k(x) := e^{\omega x}c_k(x)$ ,  $k \geq 0$ , entonces

$$\varphi'_k(x) = e^{\omega x} \left( -\frac{k\pi}{L}s_k(x) + \omega c_k(x) \right), \quad y$$

$$\varphi''_k(x) = e^{\omega x} \left( -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 c_k(x) - 2\omega \frac{k\pi}{L}s_k(x) + \omega^2 c_k(x) \right).$$

Tenemos que

$$P\varphi_k(x) = e^{\omega x} \left[ M \frac{k\pi}{L} s_k(x) - M\omega c_k(x) + \varepsilon \left( \frac{k\pi}{L} \right)^2 c_k(x) + 2\varepsilon\omega \frac{k\pi}{L} s_k(x) - \varepsilon\omega^2 c_k(x) \right],$$

lo que nos obliga a hacer la elección  $\omega = -M/(2\varepsilon)$ , de donde se sigue que

$$P\varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x), \quad k \geq 0,$$

con  $\lambda_k$  definida en (2.3).

Ahora bien, valuando la derivada de las funciones  $\varphi_k$  en los extremos  $x = 0, x = L$ , obtenemos que cada  $\varphi_k$  satisface condiciones de frontera de tipo Robin,

$$2\varepsilon\varphi_k'(0) + M\varphi_k(0) = 2\varepsilon \left( -\frac{k\pi}{L} \sin 0 + \omega \cos 0 \right) + M \cos 0 = 0, \quad y$$

$$2\varepsilon\varphi_k'(L) + M\varphi_k(L) = 2\varepsilon e^{\omega L} \left( -\frac{k\pi}{L} \sin(k\pi) + \omega \cos(k\pi) \right) + M e^{\omega L} \cos(k\pi) = 0,$$

así que  $B^*\varphi = 2\varepsilon\varphi_x + M\varphi$  será el operador de frontera asociado a  $P$ .

En resumen, el operador  $P$  es diagonalizable en  $L^2(0, L)$  con funciones propias

$$e_k(x) = \exp\left(-\frac{Mx}{2\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k \geq 0, \quad (2.38)$$

y correspondientes valores propios dados en (2.3). La familia  $\{\sqrt{2/L}e_k : k \geq 0\}$  es una base de Hilbert de  $L^2((0, L), e^{Mx/\varepsilon})$  con respecto al producto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_0^L \exp\left(\frac{Mx}{\varepsilon}\right) u(x)v(x) dx.$$

Como en la Observación 14, volvemos a obtener que  $\{e_k\}_{k \geq 0}$  es una base de Riesz para  $L^2(0, L)$ .

Claramente, existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|e_k\|_{L^2(0, L)} \leq C, \quad M > 0; \quad \|e_k\|_{L^2(0, L)} \leq C \exp\left(\frac{|M|L}{2\varepsilon}\right), \quad M < 0 \quad (2.39)$$

para todo  $k \geq 0$ , donde  $\|\cdot\|_{L^2(0, L)}$  denota la norma usual en  $L^2(0, L)$ .





# Capítulo 3

## Estimación superior del costo del control a cero

El objetivo de este capítulo es probar la desigualdad de observabilidad (2.37) para el sistema adjunto al tiempo  $T > 0$ . La prueba de tal desigualdad está relacionada a una cuestión sobre la suma de exponenciales. La demostración requiere la construcción de una familia biortogonal a la familia de exponenciales que resuelven la ecuación adjunta. La construcción, en su primera parte, utiliza el teorema de Paley–Wiener en  $L^2(\mathbb{R})$ . La novedad en la técnica de Glass es la construcción del llamado “multiplicador complejo”, técnica introducida por Beurling y Malliavin en el análisis complejo y con otros propósitos.

### 3.1. Construcción del multiplicador complejo

En esta sección usamos una técnica introducida por Fattorini & Russell para el estudio de la controlabilidad de la ecuación del calor unidimensional, el llamado método de los momentos.

La idea es construir una familia biortogonal  $\{\psi_k\}_{k \geq 0} \subset L^2(0, T)$  a la familia de funciones exponenciales  $\{\exp(-\lambda_k(T - t))\}_{k \geq 0}$ , donde  $\lambda_k$  son los valores propios de nuestro sistema principal definidos en (2.3) y luego obtener estimaciones de  $\|\psi_k\|_{L^2(0, T)}$ .

Decimos que una función entera  $h$  es de tipo exponencial  $a > 0$  si existe una constante  $C > 0$  tal que  $|h(z)| \leq C \exp(a|z|)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Si además la restricción de  $h$  sobre el eje real es una función cuadrado integrable, entonces la versión  $L^2$  del teorema de Paley–Wiener (ver [12, Teorema 19.3, página 370]) implica que existe una función integrable  $g$  con soporte en  $(-a, a)$  tal que  $h$  es la extensión analítica de la transformada de Fourier de  $g$ .

Para construir la mencionada familia biortogonal es suficiente exhibir una familia de funciones enteras  $J_k^\varepsilon$  de tipo exponencial  $T/2$ , es decir, existe una constante  $C_{k, \varepsilon} > 0$  tal

que  $|J_k^\varepsilon(z)| \leq C_{k,\varepsilon} \exp(T|z|/2)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , que también satisface  $J_k^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$  y

$$J_k^\varepsilon(-i\lambda_j) = \delta_{j,k} \quad \text{para todo } j, k \geq 0. \quad (3.1)$$

En efecto, asumiendo la existencia de tal familia de funciones enteras, la versión  $L^2$  del teorema de Paley-Wiener implica que existe una función  $\xi_k \in L^2(\mathbb{R})$  con soporte en  $[-T/2, T/2]$  tal que

$$J_k^\varepsilon(z) = \int_{-T/2}^{T/2} \xi_k(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}, k \geq 0.$$

Definimos las funciones

$$\psi_k(t) := \frac{\xi_k(T/2 - t)}{\exp(-T\lambda_k/2)}, \quad k \geq 0.$$

Entonces

$$\int_0^T \psi_k(t) \exp(-\lambda_j(T - t)) dt = \delta_{j,k}, \quad j, k \geq 0. \quad (3.2)$$

Por otro lado, el teorema de Plancherel implica que

$$\sqrt{2\pi} \|\psi_k\|_{L^2(0,T)} = \exp(T\lambda_k/2) \|J_k^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.3)$$

Así que el objetivo ahora es encontrar la familia  $\{J_k^\varepsilon\}_{k \geq 0}$  que satisfaga las condiciones mencionadas.

Consideramos el producto infinito de Weierstrass

$$\Pi(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2}\right),$$

que es una función entera con ceros simples en  $k^2$ ,  $k \geq 1$ . Por otro lado tenemos la identidad

$$\Pi(z) = \frac{\sin(\pi\sqrt{z})}{\pi\sqrt{z}}.$$

A pesar de la raíz cuadrada, la expresión de la derecha es una función entera ya que  $\Pi$  es su extensión analítica en  $\mathbb{C}$ .

Introducimos la función

$$\Phi_\varepsilon(z) = -i \frac{\sqrt{\varepsilon}}{L} \sqrt{iz - \frac{M^2}{4\varepsilon}} \sin\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{iz - \frac{M^2}{4\varepsilon}}\right),$$

que es una función entera con ceros simples en  $\{-i\lambda_k\}_{k \geq 0}$ . Por tanto, las funciones

$$\frac{\Phi_\varepsilon(z)}{\Phi'_\varepsilon(-i\lambda_k)(z + i\lambda_k)}, \quad k \geq 0,$$

satisfacen la condición (3.1).

Ponemos  $r(z) := \sqrt{iz - M^2/4\varepsilon}$  entonces  $r(-i\lambda_k) = \sqrt{\varepsilon}k\pi/L$ ,  $k \geq 0$ . Observamos además que

$$\begin{aligned}
\Phi'_\varepsilon(-i\lambda_k) &= -ir(-i\lambda_k) \cos\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}r(-i\lambda_k)\right) r'(-i\lambda_k) - i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{L}r'(-i\lambda_k) \sin\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}r(-i\lambda_k)\right) \\
&= -ir(-i\lambda_k) \cos\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}r(-i\lambda_k)\right) \frac{i}{2r(-i\lambda_k)} - i\frac{\sqrt{\varepsilon}}{L} \frac{i}{2r(-i\lambda_k)} \sin\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}r(-i\lambda_k)\right) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}r(-i\lambda_k)\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}r(-i\lambda_k)\right)}{2k\pi} \\
&= \frac{\cos(k\pi)}{2} + \frac{\sin(k\pi)}{2k\pi} = \frac{(-1)^k}{2}, \quad k \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\Phi'_\varepsilon(-i\lambda_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(-i\lambda_0 + h) - \Phi(-i\lambda_0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(-i\lambda_0 + h + i\frac{M^2}{4\varepsilon}\right) \frac{\sin\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{i(-i\lambda_0+h) - \frac{M^2}{4\varepsilon}}\right)}{\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{i(-i\lambda_0+h) - \frac{M^2}{4\varepsilon}}}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{ih}\right)}{\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{ih}} = 1
\end{aligned}$$

Ahora usamos la desigualdad

$$|\sin z^{1/2}| \leq \exp\left(\frac{|z|^{1/2}}{\sqrt{2}}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

para obtener que existe una constante  $C = C(M, \varepsilon) > 0$  tal que

$$|\Phi_\varepsilon(z)| \leq C|z| \exp\left(\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}}|z|^{1/2}\right) \tag{3.5}$$

cuando  $|z| \rightarrow \infty$ .

Sin embargo, notamos que esta función puede no estar acotada en el eje real, y por ello no puede ser usada directamente para construir la familia  $\psi_k$ . Por lo tanto, el siguiente paso es obtener una función entera  $f(z)$  (conocida como un “multiplicador”) que satisfaga  $f(-i\lambda_k) \neq 0$  para cada  $k \geq 0$  y tal que

$$J_k^\varepsilon(z) := \frac{\Phi_\varepsilon(z)}{\Phi'_\varepsilon(-i\lambda_k)(z + i\lambda_k)} \frac{f(z)}{f(-i\lambda_k)}, \quad k \geq 0, \tag{3.6}$$

es una función entera de tipo exponencial.

Fijamos

$$a := \frac{T}{2\pi}, \quad \tilde{L} := L + \alpha\varepsilon^{1/2}, \quad \hat{L} := L + 2\alpha\varepsilon^{1/2},$$

con  $\alpha > 0$  independiente de  $\varepsilon$  que será elegida mas adelante.

Introducimos

$$s(t) = at - \frac{\tilde{L}}{\pi\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{t}.$$

Usando que

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt^\gamma = |x|^\gamma \pi \cot(\pi\gamma/2), \quad \text{para } 0 < \gamma < 2,$$

obtenemos que

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t) = -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Notamos que  $ds(t)$  no es una medida positiva sobre  $(0, \infty)$ . La función  $s(t)$  es creciente para

$$t > A := \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\tilde{L}^2}{T^2}$$

y  $s(B) = 0$  para

$$B := 4A = \frac{2\tilde{L}^2}{\varepsilon T^2}.$$

Como es usual, denotamos por  $\Re z$ ,  $\Im z$  a la parte real e imaginaria, respectivamente, de  $z \in \mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$  denotará el semiplano superior, es decir,  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ .

Definimos a la medida  $d\nu(t)$  como la restricción de la medida positiva  $ds(t)$  en  $[B, \infty)$ , e introducimos la función holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  dada por

$$g(z) := \int_0^\infty \log \left( 1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d\nu(t) = \int_B^\infty \log \left( 1 - \frac{z^2}{t^2} \right) ds(t)$$

y para  $\Im z \leq 0$  consideramos

$$U(z) := \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d\nu(t) = \int_B^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| ds(t)$$

que es una función armónica en  $\Im z < 0$  y continua sobre la recta real.

El siguiente paso es “discretizar” la medida  $d\nu(t)$ . La parte entera de  $x \in \mathbb{R}$  la denotamos por  $[x]$ , así que definimos

$$\tilde{U}(z) := \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d[\nu(t)] = \int_B^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| d[s(t)], \quad (3.8)$$

y también consideramos

$$h(z) := \int_B^\infty \log \left( 1 - \frac{z^2}{t^2} \right) d[s(t)], \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.9)$$

Así que

$$U(z) = \Re(g(z)), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \tilde{U}(z) = \Re(h(z)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

Sea  $\{\mu_k\}$  la sucesión que satisface  $s(\mu_k) = k$  para todo  $k \geq 0$ . Como  $d[\nu] = \sum_k \delta_{\mu_k}$  y  $\mu_k = O(k)$ , tenemos que

$$\exp(h(z)) = \prod_{k \in \mathbb{N}} \left( 1 - \frac{z^2}{\mu_k^2} \right), \quad z \in \mathbb{C},$$

es una función entera.

Entonces consideramos el multiplicador dado por

$$f(z) := \exp(h(z - i)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.11)$$

El siguiente lema técnico nos será de mucha ayuda en la prueba de resultados posteriores.

**Lema 22.** *Tenemos las siguientes identidades*

$$\int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{y^2}{t^2} \right| dt = \pi|y|, \quad (3.12)$$

$$\int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{y^2}{t^2} \right| d\sqrt{t} = \pi\sqrt{2|y|}, \quad (3.13)$$

$$\int_0^B \log \left| 1 + \frac{y^2}{t^2} \right| ds(t) = aBG \left( \frac{y}{B} \right). \quad (3.14)$$

*Demostración.* Basta aplicar integración por partes y hacer un cambio de variable. Por ejemplo, para obtener la segunda identidad se resuelve como sigue

$$\int_0^\infty \log \left| 1 + \frac{y^2}{t^2} \right| d\sqrt{t} = 2y^2 \int_0^\infty \frac{t^{-1/2}}{t^2 + y^2} dt = 4\sqrt{|y|} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4} = \pi\sqrt{2|y|}.$$

Para obtener la tercera desigualdad sólo debemos hacer el cambio de variable  $t \rightarrow t/B$ .  $\square$

**Proposición 23.**  $J_k^\xi(z)$  es una función entera de tipo exponencial  $T/2$  para todo  $k \geq 0$ .

*Demostración.* Integrando por partes obtenemos

$$\int_B^\infty \log \left( 1 + \frac{|z|^2}{t^2} \right) d(s(t) - [s(t)]) = \int_B^\infty -\partial_t \left[ \log \left( 1 + \frac{|z|^2}{t^2} \right) \right] (s(t) - [s(t)]) dt \geq 0,$$

por lo tanto las identidades (3.12), (3.13) implican que

$$\tilde{U}(z) \leq \int_B^\infty \log \left( 1 + \frac{|z|^2}{t^2} \right) ds(t) \leq \frac{T}{2}|z| - \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}|z|^{1/2} - \alpha|z|^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Cuando  $|z| > 3$  tenemos que  $|z - i| \geq |z| - 1 \geq 2|z|/3$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(z)\Phi_\varepsilon(z)| &= \exp(\tilde{U}(z - i))|\Phi_\varepsilon(z)| \\ &\leq C_{M,\varepsilon}e^{T/2}|z| \exp \left( \frac{T}{2}|z| + \left( \frac{1}{2^{1/2}} - \frac{3^{1/2}}{2^{1/2}} \right) \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}|z|^{1/2} \right) \\ &\leq C_{T,L,M,\varepsilon} \exp(T|z|/2), \end{aligned}$$

cuando  $|z| \rightarrow \infty$ , donde hemos usado la estimación en (3.5). El resultado se sigue de la definición de  $J_k^\varepsilon(z)$ .  $\square$

De (3.6) y (3.10) se sigue que para estimar  $\|J_k^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})}$  debemos analizar la función  $\tilde{U}(x - i)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Procedemos en varios pasos: en el siguiente lema mostramos que  $U(x)$  tiene una integral logarítmica finita en  $\mathbb{R}$ . Luego usamos este hecho para probar en el Lema 25 que  $U(z)$ , en  $\Im(z) < 0$ , es esencialmente la integral de Poisson de sus valores en la frontera. Este último resultado y el Lema 41 (ver Apéndice A) nos ayudaran a establecer una conexión entre  $U(x - i)$  y  $\tilde{U}(x - i)$  en la demostración del Lema 27.

**Lema 24.**  $U(x)$  es una función continua par en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\log^+(\exp(U(x)))}{1+x^2} dx < \infty, \quad (3.15)$$

donde  $\log^+ := \max\{\log, 0\}$  y existe una constante  $C_1 > 0$  tal que

$$U(x) \leq -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|x|} + C_1 aB, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

De hecho,

$$C_1 := -\min_{x \in \mathbb{R}} \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}) \approx 2.34 < 2.35. \quad (3.17)$$

*Demostración.* Usando (3.7) obtenemos que

$$U(x) = -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|x|} - \int_0^B \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t),$$

entonces haciendo el cambio de variable  $t \rightarrow t/B$  vemos que

$$\int_0^B \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| ds(t) = aB \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{B^2 t^2} \right| d(t - \sqrt{t}).$$

Para  $x > 0$  introducimos la función

$$I(x) := \int_0^1 \log \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}).$$

Si realizamos explícitamente la integral obtenemos

$$I(x) = -\pi\sqrt{x} + x \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \sqrt{x} \log \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| + 2\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x}) \quad (3.18)$$

cuya gráfica se representa en la Figura 3.1.



Figura 3.1:  $I(x)$

Claramente  $I(x)$  es continua en  $\mathbb{R}^+$ , además  $\lim_{x \rightarrow 0^+} I(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = -2$  y  $\lim_{x \rightarrow 1} I(x) = -\frac{\pi}{2} - \log(2)$ . Estas propiedades implican la existencia de  $C_1$  y por (3.18) tenemos que la constante  $C_1$  es finita. Dado que  $U(x) = -\frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|x|} - aBI\left(\frac{x}{B}\right)$ , obtenemos (3.16) y luego (3.15) usando que  $\log^+ := \max\{\log, 0\}$ .  $\square$

**Lema 25.** *La función  $U(z)$  es continua en  $\Im z \leq 0$ . Además, tenemos*

$$U(z) = -\pi a \Im z - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z U(t)}{|z-t|^2} dt. \quad (3.19)$$

*Demostración.* Ponemos  $F(z) = \exp(g(-z))$  para  $z \in \mathbb{H}$ . Claramente  $F$  es una función holomorfa en  $\mathbb{H}$ , continua en  $\overline{\mathbb{H}}$  y que no tiene ceros en  $\mathbb{H}$ . Además, las identidades (3.12) y (3.13) implican que

$$\log |F(z)| = U(-z) \leq \int_B^{\infty} \log \left( 1 + \frac{|z|^2}{t^2} \right) ds(t) \leq \frac{T}{2}|z|, \quad z \in \mathbb{H}.$$

La condición (3.15) implica que podemos considerar la transformada de Poisson  $V(z)$ ,  $z \in \mathbb{H}$ , de la función  $\log^+(\exp(U(x)))$ , ver [8, Capítulo III, §F].



Integrando por partes  $U(-iy)$  y usando el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |F(iy)|}{y} = \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{U(-iy)}{y} = 2 \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{B/y}^{\infty} \frac{1}{1 + \theta^2} \frac{s(y\theta)}{y\theta} d\theta = \pi a. \quad (3.20)$$

Por el Teorema 38 tenemos que

$$v(z) := U(-z) - \pi a \Im z - V(z) \leq 0, \quad z \in \mathbb{H}.$$

El Teorema 39 implica que existe una constante  $\alpha \geq 0$  y una medida positiva  $\mu(t)$ , con  $\int_{-\infty}^{\infty} d\mu(t)/(1+t^2) < \infty$ , tal que

$$-v(z) = \alpha \Im z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{H}.$$

Aquí el punto clave es que  $U(z)$  es continua en  $\Im z \leq 0$ , así que la medida  $d\mu(t)$  satisfice

$$\log^+(\exp(U(t))) - d\mu(t) = U(t)dt.$$

Por lo tanto,

$$U(-z) = (\pi a - \alpha) \Im z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z U(t)}{|z-t|^2} dt, \quad z \in \mathbb{H}.$$

Usamos la igualdad anterior para calcular  $\limsup_{y \rightarrow \infty} U(-iy)/y$ , entonces (3.20) implica que  $\alpha = 0$ .  $\square$

**Lema 26.** Para  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$U(x-i) \leq \pi a + C_1 a B - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|}. \quad (3.21)$$

*Demostración.* Primero aplicamos (3.19) con  $z = x - i$  y luego usamos la estimación (3.16). Claramente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x-i-t|^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|x-t|^2} dt = \pi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resta calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|t|}}{1+|x-t|^2} dt.$$

Descomponemos el término anterior en la suma de dos integrales y luego hacemos los respectivos cambios de variable  $u = \sqrt{t}$  y  $u = \sqrt{-t}$  para obtener

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+(x-t)^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{1+x^2}-2x}},$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{-t}}{1+(x-t)^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{1+x^2}+2x}}.$$

Por simetría, basta considerar  $x > 0$ , entonces

$$\sqrt{2\sqrt{1+x^2}+2x} + \sqrt{2\sqrt{1+x^2}-2x} \geq 2\sqrt{|x|},$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Lema 27.** Para  $x \in \mathbb{R}$  tenemos

$$\tilde{U}(x-i) \leq \log^+(|x|) + \pi a + aBC_1 - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|}. \quad (3.22)$$

*Demostración.* Usando el resultado anterior y el Lema 41 obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x-i) &= \int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{(x-i)^2}{t^2} \right| d([\nu(t)] - \nu(t)) + U(x-i) \\ &\leq \log^+(|x|) + \pi a + aBC_1 - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{2\varepsilon}} \sqrt{|x|}. \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente resultado será de mucha ayuda para estimar posteriormente  $|f(-i\lambda_k)|$ .

**Lema 28.** Consideramos la función

$$G(y) := \int_0^1 \log \left| 1 + \frac{y^2}{t^2} \right| d(t - \sqrt{t}), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Entonces,

$$\tilde{U}(iy) \geq \pi a|y| - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|y|} - \log \left( 1 + \frac{y^2}{B^2} \right) - aBG \left( \frac{y}{B} \right). \quad (3.24)$$

*Demostración.* La función  $\partial_t[\log(1+y^2/t^2)]$  es negativa, así que integrando por partes y usando que  $s(B) = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int_B^\infty \log \left( 1 + \frac{y^2}{t^2} \right) d(s(t) - [s(t)]) &= \int_B^\infty -\partial_t \left[ \log \left( 1 + \frac{y^2}{t^2} \right) \right] (s(t) - [s(t)]) dt \\ &\leq \int_B^\infty -\partial_t \left[ \log \left( 1 + \frac{y^2}{t^2} \right) \right] dt \\ &= \log \left( 1 + \frac{y^2}{B^2} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

lo cual implica que

$$\tilde{U}(iy) \geq U(iy) - \log \left( 1 + \frac{y^2}{B^2} \right).$$

El resultado se sigue de las identidades (3.12), (3.13) y (3.14).  $\square$

### 3.2. Prueba de la desigualdad de observabilidad

En esta sección reunimos todos los elementos necesarios para demostrar la desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto. Antes, probamos el siguiente resultado preliminar.

**Proposición 29.** *Existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que*

*i) Para cada  $T > 0$  y  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , existe una constante  $C_T > 0$  tal que*

$$|J_k^\varepsilon(x)| \leq C_T e^{\frac{L|M|}{2\varepsilon} + aBC_1} \frac{\exp\left(-\pi a\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}|\lambda_k|^{1/2} + aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right) + \log^+ |x| - \frac{\alpha|x|^{1/2}}{2^{1/2}}\right)}{L\varepsilon^{-1/2}|x^2 + \frac{M^2}{4\varepsilon}|^{-1/4}|x^2 + \lambda_k^2|^{1/2}}, \quad (3.26)$$

*para todo  $k \geq 0$ .*

*ii) Si  $T > 4L/|M|$ , entonces existe una constante  $C_T > 0$  tal que*

$$|J_k^\varepsilon(x)| \leq C_T e^{\frac{L|M|}{2\varepsilon} + aB(C_1 - C_2)} \frac{\exp\left(-\pi a\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}|\lambda_k|^{1/2} + \log^+ |x| - \frac{\alpha|x|^{1/2}}{2^{1/2}}\right)}{L\varepsilon^{-1/2}|x^2 + \frac{M^2}{4\varepsilon}|^{-1/4}|x^2 + \lambda_k^2|^{1/2}}, \quad (3.27)$$

*para todo  $k \geq 0$ , donde la constante  $C_1$  está definida en (3.17) y*

$$C_2 := -G(2) \approx 1.97 > 1.95. \quad (3.28)$$

*Demostración.* Como en (3.5), vemos que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|\Phi_\varepsilon(x)| \leq C \frac{\sqrt{\varepsilon}}{L} \left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4} \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon} + \frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{|x|}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usando (3.22) tenemos que

$$|\Phi_\varepsilon(x) \exp(\tilde{U}(x - i))| \leq C \frac{\sqrt{\varepsilon}}{L} \left| x^2 + \frac{M^4}{16\varepsilon^2} \right|^{1/4} e^{\frac{L|M|}{2\varepsilon} + aBC_1 + \pi a} \exp\left(\log^+ |x| - \frac{\alpha|x|^{1/2}}{2^{1/2}}\right), \quad (3.29)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Como  $\tilde{U}(iy)$  es una función decreciente en  $\mathbb{R}^-$  y usando (3.24) obtenemos

$$\begin{aligned} |f(-i\lambda_k)| &= \exp(\tilde{U}(-i(1 + \lambda_k))) \geq \exp(\tilde{U}(-i\lambda_k)) \\ &\geq \exp\left(\pi a\lambda_k - \frac{\tilde{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{|\lambda_k|} - \log\left(1 + \frac{\lambda_k^2}{B^2}\right) - aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right)\right). \end{aligned}$$

Ahora elegimos  $\alpha > 0$  tal que

$$\alpha^2 > \frac{2\sqrt{6}}{B}.$$

De la elección anterior y usando que  $\log(1 + y^2/24) \leq \sqrt{|y|}$  obtenemos

$$|f(-i\lambda_k)| \geq \exp\left(\pi a\lambda_k - \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{|\lambda_k|} - aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right)\right).$$

De la estimación anterior y usando (3.4) obtenemos

$$|J_k^\varepsilon(x)| \leq C_T e^{\frac{L|M|}{2\varepsilon} + aBC_1} \frac{\exp\left(-\pi a\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}|\lambda_k|^{1/2} + aBG\left(\frac{\lambda_k}{B}\right) + \log^+ |x| - \frac{\alpha|x|^{1/2}}{2^{1/2}}\right)}{L\varepsilon^{-1/2}|x^2 + \frac{M^2}{4\varepsilon}|^{-1/4}|x^2 + \lambda_k^2|^{1/2}}. \quad (3.30)$$

Por otro lado, asumiendo  $T > 4L/|M|$  y usando (2.3) tenemos que

$$\frac{\lambda_k}{B} \geq \frac{M^2 T^2}{8\tilde{L}^2} \geq 2, \quad k \geq 0$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeña. Como  $G$  es una función decreciente tenemos  $G(\lambda_k/B) \leq G(2)$ , de donde se sigue (3.27).  $\square$

A continuación damos una demostración de la desigualdad de observabilidad (2.37), que es equivalente a la validez de la Proposición 3.

*Prueba de la Proposición 3.* Recordamos que la familia  $\{e_k\}_{k \geq 0}$  dada en (2.38) constituye una base de Riesz para  $L^2(0, L)$ .

Tomamos  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^N b_k e_k(x), \quad b_k \in \mathbb{R}. \quad (3.31)$$

Entonces la correspondiente solución de (1.4) está dada por

$$\varphi(t, x) = \sum_{k=0}^N b_k \exp(-\lambda_k(T-t)) e_k(x).$$

Usando (3.2) obtenemos

$$b_k = \int_0^T \varphi(t, 0) \psi_k(t) dt,$$

por lo tanto

$$|b_k| \leq \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0, T)} \|\psi_k\|_{L^2(0, T)}.$$

Dado que

$$\varphi(0, x) = \sum_{k=0}^N b_k \exp(-\lambda_k T) e_k(x),$$

se sigue que

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \leq \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=0}^N \|\psi_k\|_{L^2(0,T)} \|e_k\|_{L^2(0,L)} \exp(-\lambda_k T). \quad (3.32)$$

Como  $G(\frac{\lambda_k}{B}) \geq G(M^2 T^2 / (8\tilde{L}^2))$ , y usando (3.26) y (3.3), tenemos que existe una constante  $C = C_{T,L,M,\varepsilon} > 0$  (que puede cambiar de línea a línea) tal que

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \|\psi_k\|_{L^2(0,T)} &= \exp(T\lambda_k/2) \|J_k^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \exp\left(\frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|\lambda_k|}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(2 \log^+ |x| - 2^{1/2} \alpha |x|^{1/2}) dx}{|x^2 + \frac{M^2}{4\varepsilon}|^{-1/2} |x^2 + \lambda_k^2|}\right)^{1/2} \\ &\leq C |\lambda_k|^{-1/2} \exp\left(\frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|\lambda_k|}\right), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Cuando  $M > 0$ , usamos (2.3) y (2.39) para obtener

$$\begin{aligned} \|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} &\leq C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=0}^N |\lambda_k|^{-1/2} \exp\left(\frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|\lambda_k|} - T\lambda_k\right) \\ &\leq C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=0}^N |\lambda_k|^{-1/2} \exp(-T\lambda_k/2) \\ &\leq C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)}, \end{aligned}$$

Similarmente, si  $M < 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|\varphi(0, \cdot)\|_{L^2(0,L)} &\leq C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=0}^N |\lambda_k|^{-1/2} \exp\left(\frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|\lambda_k|} - T\lambda_k\right) \exp\left(\frac{|M|L}{2\varepsilon}\right) \\ &\leq C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)}, \end{aligned}$$

□

A fin de probar la controlabilidad a cero uniforme del sistema (1.3) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , necesitamos obtener una estimación más fina de la constante del costo de control  $K$ . El siguiente resultado será de gran utilidad para tal objetivo.

**Proposición 30.** 1.- Sea  $M > 0$ . Existe  $\kappa > 0$  tal que

$$\frac{LM}{2\varepsilon} + \frac{L^2}{T\varepsilon} \frac{C_1 - C_2}{\pi} - T\lambda_k + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} \leq -\kappa\lambda_k, \quad \text{para todo } k \geq 0, \quad (3.33)$$

siempre que

$$T > \frac{L}{M} c_+ \quad \text{con } c_+ := 2 + \sqrt{4 + \frac{4(C_1 - C_2)}{\pi}} < 4.2. \quad (3.34)$$

2.- Sea  $M < 0$ . Existe  $\kappa > 0$  tal que

$$\frac{L|M|}{\varepsilon} + \frac{L^2}{T\varepsilon} \frac{C_1 - C_2}{\pi} - T\lambda_k + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} \leq -\kappa\lambda_k, \quad \text{para todo } k \geq 0, \quad (3.35)$$

siempre que

$$T > \frac{L}{|M|} c_- \quad \text{con } c_- := 3 + \sqrt{9 + \frac{4(C_1 - C_2)}{\pi}} < 6.1. \quad (3.36)$$

*Demostración.* 1.- Primero notamos que la función  $r(x) = -Tx + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{x}$  es decreciente en  $[\frac{L^2}{4\varepsilon T^2}, \infty)$ . Como

$$\lambda_k \geq \frac{M^2}{4\varepsilon} \geq \frac{L^2}{4\varepsilon T^2}, \quad \text{para todo } k \geq 0,$$

entonces  $r(\lambda_k) \leq r(\frac{M^2}{4\varepsilon})$ ,  $k \geq 0$ ; afirmamos que

$$\frac{LM}{2\varepsilon} + \frac{L^2}{T\varepsilon} \frac{C_1 - C_2}{\pi} + r\left(\frac{M^2}{4\varepsilon}\right) \leq 0,$$

que es equivalente a probar que

$$X + \frac{C_1 - C_2}{\pi} - \frac{1}{4}X^2 \leq 0,$$

donde  $X = MT/L$ . Para  $MT > Lc_+$  la última desigualdad se cumple. Se satisface entonces que

$$\frac{LM}{2\varepsilon} + \frac{L^2}{T\varepsilon} \frac{C_1 - C_2}{\pi} - T\lambda_k + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k} \leq 0, \quad k \geq 0.$$

Dado que la condición  $T > \frac{L}{M}c_+$  es abierta, elegimos  $\kappa > 0$  tal que  $T > T - \kappa > \frac{L}{M}c_+$ , por lo que obtenemos una desigualdad como antes pero con  $T - \kappa$  en vez de  $T$ .

2.- Procediendo como antes tenemos

$$\frac{3}{2}X + \frac{C_1 - C_2}{\pi} - \frac{1}{4}X^2 \leq 0,$$

donde  $X = |M|T/L$ . Para  $|M|T > Lc_-$  la última desigualdad se cumple.  $\square$

A continuación probamos el resultado principal de este trabajo.

**Prueba del Teorema 4.** Suponemos que  $M > 0$  y que el dato  $\varphi_0$  se escribe como en (3.31). Retomamos el cálculo en (3.32), usamos (3.27) y usamos la proposición anterior

para obtener una constante  $C_T > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(0, \cdot)\| &\leq \frac{C_T \varepsilon^{1/2}}{L} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^{-1/2} \exp\left(\frac{LM}{2\varepsilon} + \frac{\tilde{L}^2 C_1 - C_2}{T\varepsilon \pi} - T\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k}\right) \\
 &\leq C_{T,L} \varepsilon^{1/2} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\lambda_k}}{|\lambda_k|^{1/2}} \exp\left(\frac{\tilde{L}^2 - L^2 C_1 - C_2}{T\varepsilon \pi} + \frac{\hat{L} - L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k}\right) \\
 &\leq C_{T,L} e^{\frac{(C_1 - C_2)\alpha^2}{T\pi}} \varepsilon^{1/2} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\lambda_k/2}}{|\lambda_k|^{1/2}} \exp\left(-\frac{\kappa\lambda_k}{2} + \frac{2\alpha L(C_1 - C_2)}{\varepsilon^{1/2} T\pi} + 2\alpha \sqrt{\lambda_k}\right) \\
 &\leq C_{T,L} e^{-\frac{M^2}{8\varepsilon} \kappa} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \exp\left(-\frac{\kappa\lambda_k}{2} + 2\alpha \left(\frac{2L(C_1 - C_2)}{T|M|\pi} + 1\right) \sqrt{\lambda_k}\right) \\
 &\leq C_{T,L} e^{-\frac{M^2}{8\varepsilon} \kappa} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\kappa\lambda_k}{3}\right)}{k} \leq C_{T,L} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{M^2}{8\varepsilon} \kappa} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $M < 0$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(0, \cdot)\| &\leq C \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \sum_{k=0}^N |\lambda_k|^{-1/2} \exp\left(\frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{|\lambda_k|} - T\lambda_k\right) \exp\left(\frac{L|M|}{2\varepsilon}\right) \\
 &\leq \frac{C_T \varepsilon^{1/2}}{L} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^{-1/2} \exp\left(\frac{L|M|}{\varepsilon} + \frac{\tilde{L}^2 C_1 - C_2}{T\varepsilon \pi} - T\lambda_k + \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k}\right) \\
 &\leq C_{T,L} \varepsilon^{1/2} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\lambda_k}}{|\lambda_k|^{1/2}} \exp\left(\frac{\tilde{L}^2 - L^2 C_1 - C_2}{T\varepsilon \pi} + \frac{\hat{L} - L}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\lambda_k}\right) \\
 &\leq C_{T,L} e^{-\frac{M^2}{8\varepsilon} \kappa} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\kappa\lambda_k}{3}\right)}{k} \leq C_{T,L} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{M^2}{8\varepsilon} \kappa} \|\varphi(\cdot, 0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3}.
 \end{aligned}$$

El resultado se sigue del Teorema 20. □

# Capítulo 4

## Estimación inferior del costo del control a cero

El objetivo de este capítulo es obtener estimaciones por abajo del costo de la controlabilidad a cero. Como antes, para obtener tales estimaciones usaremos resultados y técnicas del análisis complejo.

### 4.1. Cota inferior para el costo del control a cero

A continuación damos la prueba del segundo resultado principal de este trabajo.

*Prueba del Teorema 5.* Fijamos  $T, L, \varepsilon > 0$ . Para simplificar la notación, vamos a usar  $K$  en lugar de  $K(\varepsilon, T, L, M) := \|\mathcal{U}^T\|$ , donde  $\mathcal{U}^T$  es el mapeo de control óptimo asociado a nuestro problema. Definimos  $y_0 \in L^2(0, L)$  por

$$y_0(x) := \exp\left(\frac{Mx}{2\varepsilon}\right), \quad x \in (0, L). \quad (4.1)$$

y consideramos el control óptimo nulo  $u(t) \in L^2(0, L)$  para  $y_0$ . Por lo tanto,

$$\|u\|_{L^2(0, T)} \leq K \|y_0\|_{L^2(0, L)}. \quad (4.2)$$

Por otro lado tenemos

$$\|y_0\|_{L^2(0, L)}^2 = \frac{\varepsilon}{M} (e^{LM/\varepsilon} - 1). \quad (4.3)$$

Por la definición dada de controlabilidad a cero, se debe cumplir la condición (1.6) para cada solución del sistema adjunto (1.4).

En particular, podemos considerar la solución de (1.4) dada por

$$\varphi(t, x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{Mx}{2\varepsilon}\right) e^{\lambda_k t},$$



para  $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ , por lo que obtenemos

$$\int_0^T u(t)e^{\lambda_k t} dt = -2 \int_0^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad k \geq 0. \quad (4.4)$$

Ahora introducimos la función entera

$$v(s) := \int_{-T/2}^{T/2} u(t + T/2)e^{-ist} dt.$$

Por (4.4) se sigue que

$$v(i\lambda_k) = 0, \quad k \geq 1, \quad \text{y } v(i\lambda_0) = -2Le^{-\lambda_0 T/2}.$$

Además, la desigualdad de Hölder y (4.2) implican

$$\begin{aligned} |v(s)| &\leq \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right) \int_0^T |u(t)| dt \\ &\leq KT^{1/2} \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right) \|y_0\|_{L^2(0,L)} \\ &\leq \begin{cases} KT^{1/2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{M^{1/2}} e^{ML/(2\varepsilon)} \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right), & M > 0 \\ KT^{1/2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{|M|^{1/2}} \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right), & M < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Consideramos la función entera

$$f(s) := v\left(\frac{s}{4\varepsilon}\right). \quad (4.6)$$

Por tanto,

$$f(b_k) = 0, \quad k \geq 1 \quad \text{y} \quad f(b_0) = -2Le^{-\lambda_0 T/2}, \quad (4.7)$$

donde

$$b_k = i \left( M^2 + \frac{4k^2 \pi^2 \varepsilon^2}{L^2} \right), \quad k \geq 0.$$

Por (4.5) tenemos

$$|f(s)| \leq KT^{1/2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{M^{1/2}} e^{ML/(2\varepsilon)} \exp\left(\frac{|\Im(s)|T}{8\varepsilon}\right), \quad M > 0, \quad (4.8)$$

y

$$|f(s)| \leq KT^{1/2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{|M|^{1/2}} \exp\left(\frac{|\Im(s)|T}{8\varepsilon}\right), \quad M < 0. \quad (4.9)$$

Así que  $f(s)$  es una función entera de tipo exponencial  $T\varepsilon^{-1}/8$  en  $\mathbb{H}$ , por lo tanto el Teorema 40 implica que tenemos la representación

$$\ln |f(s)| = \sum_{l=0}^{\infty} \ln \left| \frac{s - a_l}{s - \bar{a}_l} \right| + \sigma \Im(s) + \frac{\Im(s)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\tau)|}{|\tau - s|^2} d\tau, \quad s \in \mathbb{H}, \quad (4.10)$$

donde  $\{a_l\}_l$  es la sucesión de ceros de  $f$  en  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ , cada cero repetido tantas veces como su multiplicidad, y  $\sigma$  es un número real que satisface

$$\sigma \leq \frac{T}{8\varepsilon}.$$

Usando (4.8) y (4.9) tenemos

$$\frac{\Im(b_0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\tau)|}{|\tau - b_0|^2} d\tau \leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{K^2 T \varepsilon}{M} \right) + \frac{LM}{2\varepsilon}, \quad M > 0, \quad (4.11)$$

y

$$\frac{\Im(b_0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\tau)|}{|\tau - b_0|^2} d\tau \leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{K^2 T \varepsilon}{|M|} \right), \quad M < 0, \quad (4.12)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \ln \left| \frac{b_0 - a_l}{b_0 - \bar{a}_l} \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{b_0 - b_k}{b_0 - \bar{b}_k} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{4k^2 \pi^2 \varepsilon^2 / L^2}{2M^2 + 4k^2 \pi^2 \varepsilon^2 / L^2} \right| \\ &\leq \int_1^{\infty} \ln \left( \frac{\pi^2 \varepsilon^2 x^2}{M^2 L^2 / 2 + \pi^2 \varepsilon^2 x^2} \right) dx \\ &= \frac{L|M|}{\sqrt{2}\pi\varepsilon} \int_{\frac{\sqrt{2}\pi\varepsilon}{L|M|}}^{\infty} \ln \left( \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} \right) d\tau \\ &\leq \ln \left( 1 + \frac{L^2 M^2}{2\pi^2 \varepsilon^2} \right) - \frac{L|M|}{\sqrt{2}\varepsilon} + 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Poniendo  $s = b_0$  en (4.10) y usando (4.7), (4.11), (4.12) y (4.13) obtenemos

$$\ln(2L) - \frac{TM^2}{8\varepsilon} \leq \ln \left( 1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2} \right) - \frac{LM}{\sqrt{2}\varepsilon} + \frac{TM^2}{8\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{K^2 T \varepsilon}{M} \right) + \frac{LM}{2\varepsilon} + 1, \quad M > 0,$$

y

$$\ln(2L) - \frac{TM^2}{8\varepsilon} \leq \ln \left( 1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2} \right) - \frac{L|M|}{\sqrt{2}\varepsilon} + \frac{TM^2}{8\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{K^2 T \varepsilon}{|M|} \right) + 1, \quad M < 0.$$

Por ello tenemos que

$$K \geq e^{-1} \left( \frac{M}{T\varepsilon} \right)^{1/2} \frac{2L}{1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2}} \exp \left( \frac{LM}{2\varepsilon} (\sqrt{2} - 1) - \frac{TM^2}{4\varepsilon} \right), \quad M > 0, \text{ y}$$

$$K \geq e^{-1} \left( \frac{|M|}{T\varepsilon} \right)^{1/2} \frac{2L}{1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2}} \exp \left( \frac{L|M|}{\sqrt{2}\varepsilon} - \frac{TM^2}{4\varepsilon} \right), \quad M < 0.$$

□



# Capítulo 5

## Condición de frontera Robin-Dirichlet

En este capítulo analizamos una variante al sistema estudiado anteriormente, a saber, cambiamos las condiciones de frontera; ahora consideramos una condición de Robin en el extremo izquierdo y una condición de Dirichlet en el extremo derecho. Podríamos desarrollar todos los pasos del caso anterior, pero en esta parte final sólo daremos un bosquejo para mencionar los resultados correspondientes.

### 5.1. Planteamiento del problema

En este capítulo nos proponemos analizar la controlabilidad uniforme a cero del sistema (1.9), el cual tiene como sistema adjunto

$$\begin{cases} \varphi_t + M\varphi_x + \varepsilon\varphi_{xx} = g, & (t, x) \in Q_T \\ B^*\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ \varphi(T, x) = \varphi_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $B$  y  $B^*$  son los operadores definidos en el Capítulo 1.

Como es usual, hacemos el cambio  $t \mapsto T - t$  para obtener el sistema equivalente

$$\begin{cases} -\varphi_t + M\varphi_x + \varepsilon\varphi_{xx} = g, & (t, x) \in Q_T \\ B^*\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (5.2)$$

Así que ahora resolvemos el sistema anterior. El operador diferencial de segundo orden

$$P = -M\partial_x - \varepsilon\partial_{xx},$$

asociado al sistema de evolución (5.2), es diagonalizable con valores propios

$$\tilde{\lambda}_k = \varepsilon \left( k + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{M^2}{4\varepsilon},$$

y con correspondientes funciones propias

$$e_k(x) = \sqrt{2}e^{-\frac{M}{2\varepsilon}x} \cos\left(\frac{\pi}{L}\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right), \quad k \geq 0.$$

La familia  $\{\varphi_k := e_k\}_{k \geq 0}$  es una base de Hilbert de  $L^2((0, L), e^{Mx/\varepsilon})$ , por lo tanto es una base de Riesz para  $L^2(0, T)$ . Además notamos que

$$B^*\varphi_k(x) = -\sqrt{2}(2k+1)\frac{\varepsilon\pi}{L}e^{-\frac{M}{2\varepsilon}x} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2L}x\right),$$

de donde se sigue que

$$B^*\varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k(L) = \sqrt{2} \cos((k+1/2)\pi)e^{-\frac{M}{2\varepsilon}L} = 0, \quad k \geq 0.$$

En este contexto la forma bilineal asociada a este caso es la siguiente,

$$a(\varphi, \phi) := M \int_0^L \varphi(x)\phi_x(x)dx + \varepsilon \int_0^L \varphi_x(x)\phi_x(x)dx + \frac{M}{2}\varphi(0)\phi(0), \quad \phi, \varphi \in V, \quad (5.3)$$

donde  $V = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi(L) = 0\}$ , espacio que hereda el producto interno de  $H^1(0, L)$ .

Usando la continuidad del operador de traza, se sigue que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|\varphi(0)|^2 \leq C|\varphi|_V^2 \quad \text{para todo } \varphi \in V,$$

de donde se sigue la estimación

$$\begin{aligned} |a(\varphi, \phi)| &\leq |M\varphi + \varepsilon\varphi_x|_H |\phi_x|_H + C^2 \frac{|M|}{2} |\varphi|_V |\phi|_V \\ &\leq C_{\varepsilon, M} |\varphi|_V |\phi|_V \quad \text{para todo } \varphi, \phi \in V. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior implica que la forma bilineal  $a$  es continua en su dominio.

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) &= \frac{M}{2} \int_0^L \frac{d}{dx} |\varphi(x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(x)|^2 dx + \frac{M}{2} |\varphi(0)|^2 \\ &= \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a(\varphi, \varphi) + \varepsilon |\varphi|_H^2 \geq \varepsilon |\varphi|_V^2 \quad \text{para todo } \varphi \in V,$$

de donde se sigue que la forma bilineal  $a$  es coerciva sobre  $V$  con respecto a  $H$ .

Ahora consideramos el operador no-acotado  $A : D(A) \subset V \rightarrow V$  donde

$$D(A) = \{\varphi \in V : \phi \mapsto a(\varphi, \phi) \text{ es continuo sobre } V \text{ respecto la topología de } H\}.$$

Afirmamos que

$$D(A) = \{\varphi \in H^2(0, L) : B^*\varphi(0) = 0, \varphi(L) = 0\}.$$

Efectivamente,  $\varphi \in D(A)$  si y sólo si  $\varphi \in V$  y existe  $A\varphi \in L^2(0, L)$  tal que

$$\int_0^L [M\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)]\phi_x(x)dx - \frac{M}{2}\varphi\phi|_0^L = \int_0^L A\varphi\phi dx \quad (5.4)$$

para todo  $\phi \in V$ .

En particular, si  $\varphi \in D(A)$  entonces

$$\int_0^L [M\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)]\phi_x(x)dx = \int_0^L A\varphi\phi dx \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(0, L),$$

por lo tanto  $M\varphi + \varepsilon\varphi_x \in H^1(0, L)$ . Así que  $\varphi \in H^2(0, L) \cap V$ ,  $A\varphi = -M\varphi_x - \varepsilon\varphi_{xx}$  y usando integración por partes en (5.4) se obtiene que  $\phi(0)B^*\varphi(0) = 0$  para todo  $\phi \in V$ , así que  $B^*\varphi(0) = 0$  y por tanto  $D(A) \subseteq \{\varphi \in H^2(0, L) : B^*\varphi(0) = 0, \varphi(L) = 0\}$ .

Sea  $\varphi \in H^2(0, L)$  tal que  $B^*\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(L) = 0$ . En particular  $\varphi \in V$ , además

$$\begin{aligned} \int_0^L [M\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)]\phi_x(x)dx - \frac{M}{2}\varphi\phi|_0^L &= \left[\frac{M}{2}\varphi(x) + \varepsilon\varphi_x(x)\right]\phi(x)|_0^L \\ &\quad - \int_0^L [M\varphi_x(x) + \varepsilon\varphi_{xx}(x)]\phi(x)dx \\ &= - \int_0^L [M\varphi_x(x) + \varepsilon\varphi_{xx}(x)]\phi(x)dx \end{aligned}$$

como  $\varphi \in H^2(0, L)$  entonces  $M\varphi_x + \varepsilon\varphi_{xx} \in L^2(0, L)$ , así que  $\{\varphi \in H^2(0, L) : B^*\varphi(0) = 0, \varphi(L) = 0\} \subseteq D(A)$ .

Para obtener las estimaciones a priori usamos que  $\{\varphi_k\}_{k \geq 0}$  es una base de Riesz para  $L^2(0, L)$ . Procedemos como en la Sección 2.2 para obtener

$$\int_0^L g(t, x)\varphi(t, x)dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx - \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2}\varphi(t, x)B^*\varphi(t, x)|_{x=0}^{x=L},$$

donde  $\varphi$  es una solución del sistema (5.2).

Para  $t \in (0, T)$  usamos las nuevas condiciones de frontera para obtener

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx = - \int_0^L g(t, x)\varphi(t, x)dx, \quad (5.5)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{ds} \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx \leq \int_0^L |g(s, x)|^2 dx + \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx, \quad s \in (0, T).$$

Integramos en  $s \in [0, t]$ , con  $0 \leq t \leq T$ , para obtener

$$\int_0^L [|\varphi(t, x)|^2 - |\varphi(0, x)|^2] dx \leq \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx ds,$$

de donde se sigue que

$$\int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx \leq \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \int_0^t \int_0^L |\varphi(s, x)|^2 dx ds.$$

La desigualdad de Gronwall implica que

$$\int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx \leq e^T \left( \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt \right). \quad (5.6)$$

Por otro lado, si integramos (5.5) respecto a  $t \in (0, T)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L |\varphi(T, x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\varphi(0, x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt \end{aligned}$$

entonces,

$$2\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx dt \leq \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt.$$

Usamos (5.6) en el último sumando del lado derecho para obtener

$$\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi_x(t, x)|^2 dx \leq (1 + Te^T) \left( \int_0^L |\varphi_0(x)|^2 dx + \int_0^T \int_0^L |g(t, x)|^2 dx dt \right). \quad (5.7)$$

Dado que  $D(A)$  es denso en  $L^2(0, L)$ , se sigue que las estimaciones anteriores son válidas para  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ . Lo antes expuesto lo resumimos en el siguiente resultado.

**Teorema 31.** Sean  $\varepsilon, T > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Para cada  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$  y  $g \in L^2(Q_T)$  existe una única solución  $\varphi \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; V)$  del sistema (5.2), en el sentido que

$$- \int_0^T \int_0^L \varphi(t, x) v(x) dx \psi'(t) dt + \int_0^T a(\varphi(t, \cdot), v) \psi(t) dt = \int_0^T \int_0^L g(t, x) v(x) dx \psi(t) dt$$

para toda  $v \in V$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ , donde la forma bilineal  $a$  es definida en (5.3). Además tenemos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} &\leq e^T (\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}), \\ \sqrt{\varepsilon} \|\varphi\|_{L^2(0, T; H^1(0, L))} &\leq (1 + Te^T)^{1/2} (\|\varphi_0\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ ,  $g \in L^2(Q_T)$ .

Y como consecuencia tenemos

**Corolario 32.** Sean  $\varepsilon, T > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Existe una constante  $C_T > 0$  tal que

$$\sqrt{\varepsilon} \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)} \leq C_T (\|\varphi_0\|_{L^2(0,L)} + \|g\|_{L^2(Q_T)}), \quad (5.9)$$

para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ ,  $g \in L^2(Q_T)$ , donde  $\varphi$  es solución del sistema (5.2).

Establecida la existencia y unicidad de soluciones del sistema (5.2), y por ende las soluciones del sistema adjunto (5.1), podemos proponer la definición de solución por transposición del sistema original (1.9). Para esto, vemos que si multiplicamos la EDP del sistema (1.9) por  $\varphi$  que es solución del sistema (5.1) en  $(0, t) \times (0, L)$  con  $g \equiv 0$  e integramos en  $(0, t)$  tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \int_0^t y_s(s, x) \varphi(s, x) ds dx + M \int_0^t \int_0^L y_x(s, x) \varphi(s, x) dx ds \\ &\quad - \varepsilon \int_0^t \int_0^L y_{xx}(s, x) \varphi(s, x) dx ds \\ &= \int_0^L y(t, x) \varphi_0(x) dx - \int_0^L y_0(x) \varphi(0, x) dx - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(s, 0) B y(s, 0) ds. \end{aligned}$$

Lo anterior motiva la noción de solución por transposición del sistema (5.2).

**Definición 33.** Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Dados  $y_0 \in L^2(0, L)$  y  $u \in L^2(0, T)$  decimos que  $y = y(t, x)$  es una solución del sistema (1.9) si para cada  $t \in [0, T]$  la función  $y(t, \cdot) \in L^2(0, L)$  satisface

$$\int_0^L \varphi_0(x) y(t, x) dx = \int_0^L y_0(x) \varphi(0, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^t u(s) \varphi(s, 0) ds \quad (5.10)$$

para todo  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ , donde  $\varphi$  es la solución del sistema (5.1) planteado en  $(0, t) \times (0, L)$  con  $\varphi(t, \cdot) = \varphi_0$  y  $g \equiv 0$ .

Tenemos el correspondiente resultado sobre la existencia y unicidad de soluciones por transposición del sistema (1.9), que además proporciona la continuidad de las soluciones con respecto a los datos. La prueba de este resultado es similar a la de la Proposición 18.

**Proposición 34.** Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Para cada  $y_0 \in L^2(0, L)$  y  $u \in L^2(0, T)$  existe una única solución  $y \in C([0, T]; L^2(0, L))$  del sistema (1.9). Además, existe una constante  $C_T > 0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que

$$\max_{t \in [0, T]} \|y(t, \cdot)\|_{L^2(0, L)} \leq C_T \left( \|y_0\|_{L^2(0, L)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u\|_{L^2(0, T)} \right). \quad (5.11)$$

Finalmente introducimos la noción de controlabilidad a cero del sistema (1.9) al tiempo  $T > 0$ :



**Definición 35.** Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. Decimos que el sistema (1.9) es controlable a cero en  $L^2(0, L)$  al tiempo  $T$  si para cada  $y_0 \in L^2(0, L)$  existe un control  $u \in L^2(0, T)$  tal que la correspondiente solución  $y(t, x)$  satisface

$$\int_0^L y_0(x)\varphi(0, x)dx = -\frac{1}{2} \int_0^T u(t)\varphi(t, 0)dt \quad (5.12)$$

para cada  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ , donde  $\varphi$  es la solución del sistema adjunto (5.1) con  $g \equiv 0$ .

El siguiente resultado es el que nos da la controlabilidad nula del sistema (1.9).

**Proposición 36.** Sean  $\varepsilon, T, L > 0$ ,  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijos. El sistema (1.9) es controlable a cero en  $L^2(0, L)$  al tiempo  $T$  si y sólo si existe una constante  $C = C_{\varepsilon, T, L, M} > 0$  tal que

$$\int_0^L |\varphi(0, x)|^2 dx \leq C \int_0^T |\varphi(t, 0)|^2 dt \quad (5.13)$$

para cada  $\varphi_0 \in L^2(0, L)$ , donde  $\varphi$  es la solución del sistema adjunto (5.1) con  $g \equiv 0$ .

## 5.2. Estimaciones por arriba y por abajo del costo de control nulo

Ahora pasamos a construir el correspondiente multiplicador complejo. Consideramos el producto infinito de Weierstrass

$$\tilde{\Pi}(z) := \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k + 1/2)^2}\right),$$

que es una función entera con ceros simples en  $(k + 1/2)^2$ ,  $k \geq 0$ . Por otro lado tenemos la identidad

$$\tilde{\Pi}(z) = \cos(\pi\sqrt{z}).$$

A pesar de la raíz cuadrada, la expresión de la derecha es una función entera ya que  $\tilde{\Pi}$  es su extensión analítica en  $\mathbb{C}$ .

Introducimos la función

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(z) = \cos\left(\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{iz - \frac{M^2}{4\varepsilon}}\right),$$

que es una función entera con ceros simples en  $\{-i\tilde{\lambda}_k\}_{k \geq 0}$ . Por lo tanto, las funciones

$$\frac{\tilde{\Phi}_\varepsilon(z)}{\tilde{\Phi}'_\varepsilon(-i\tilde{\lambda}_k)(z + i\tilde{\lambda}_k)}, \quad k \geq 0,$$

satisfacen la condición (3.1).

Por otro lado, un cálculo fácil implica

$$\tilde{\Phi}'_\varepsilon(-i\lambda_k) = \frac{(-1)^{k+1}iL^2}{\varepsilon(2k+1)\pi}, \quad k \geq 0. \quad (5.14)$$

Si  $z = x + iy$  entonces  $|\cos z|^2 = -\sin^2 x + \cosh^2 y \leq \exp^2 |y|$ . Por lo tanto,

$$|\cos z^{1/2}| \leq \exp\left(\frac{|z|^{1/2}}{\sqrt{2}}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5.15)$$

de donde se sigue que existe una constante  $C = C(M, L, \varepsilon) > 0$  tal que

$$|\tilde{\Phi}_\varepsilon(z)| \leq C \exp\left(\frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}}|z|^{1/2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.16)$$

En la Sección 3.1 la construcción del multiplicador complejo  $f$ , dado en (3.11), dependió únicamente de la condición (3.5). Por (5.16) tenemos que la función  $\tilde{\Phi}$  satisface la misma condición, así que consideramos el mismo multiplicador para construir la siguiente sucesión de funciones,

$$\tilde{J}_k^\varepsilon(z) := \frac{\tilde{\Phi}_\varepsilon(z)}{\tilde{\Phi}'_\varepsilon(-i\tilde{\lambda}_k)(z + i\tilde{\lambda}_k)} \frac{f(z)}{f(-i\tilde{\lambda}_k)}, \quad k \geq 0.$$

Tenemos que  $\tilde{J}_k^\varepsilon$  es de tipo exponencial  $T/2$  con  $\tilde{J}_k^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$  para todo  $k \geq 0$ , así que existe una función  $\tilde{\xi}_k \in L^2(\mathbb{R})$  con soporte en  $[-T/2, T/2]$  tal que

$$\tilde{J}_k^\varepsilon(z) = \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{\xi}_k(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}, k \geq 0.$$

Por construcción,  $\tilde{J}_k^\varepsilon$  satisface la condición (3.1), con  $\tilde{\lambda}_j$ . Ahora introducimos las funciones

$$\tilde{\psi}_k(t) := \frac{\tilde{\xi}_k(T/2 - t)}{\exp(-T\tilde{\lambda}_k/2)}, \quad k \geq 0,$$

de lo anterior se sigue que  $\tilde{\psi}_k$ ,  $k \geq 0$ , es una sucesión biortogonal a la familia de exponenciales  $\{e^{-(T-t)\tilde{\lambda}_k}\}_{k \geq 0}$ .

Posterior a la construcción de la sucesión biortogonal  $\psi_k$  a la familia de exponenciales  $\{e^{-(T-t)\lambda_k}\}_{k \geq 0}$  en la Sección 3.1, los resultados subsecuentes se basaron en el hecho que  $\lambda_k \geq M^2/(4\varepsilon)$ , condición que también satisfacen los valores  $\tilde{\lambda}_k$ . Así que la desigualdad de observabilidad (5.13) se prueba como en la demostración del Teorema 4, salvo que en las series respectivas aparecerían expresiones en términos de  $k + 1/2$  en vez de  $k$ .

Así que obtenemos el siguiente resultado y el correspondiente Teorema 6 sobre la controlabilidad uniforme del sistema (1.9).

**Proposición 37.** *Dados  $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $L, T > 0$ , el sistema (1.9) es controlable a cero al tiempo  $T > 0$ .*

Finalmente presentamos la demostración de la estimación inferior de la constante de control óptimo nulo.

**Prueba del Teorema 7.** Fijamos  $T, L, \varepsilon > 0$ . Usamos  $K$  en lugar de  $K(\varepsilon, T, L, M)$ . Definimos  $y_0 \in L^2(0, L)$  por

$$y_0(x) := \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \exp\left(\frac{Mx}{2\varepsilon}\right), \quad x \in (0, L). \quad (5.17)$$

y consideramos el control óptimo nulo  $u(t) \in L^2(0, L)$  para  $y_0$ . Por lo tanto,

$$\|u\|_{L^2(0, T)} \leq K \|y_0\|_{L^2(0, L)}. \quad (5.18)$$

Por otro lado tenemos

$$\|y_0\|_{L^2(0, L)}^2 = \frac{2\varepsilon}{M\left(\frac{\pi^2}{L^2} + 1\right)} \left( \frac{\pi^2}{L^2} e^{LM/\varepsilon} - \frac{\pi^2}{L^2} - 2 \right). \quad (5.19)$$

Por la definición dada de controlabilidad a cero, se debe cumplir la condición (5.12) para cada solución del sistema adjunto (5.1). En particular, consideramos la solución dada por

$$\varphi(t, x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right) \exp\left(-\frac{Mx}{2\varepsilon}\right) e^{\tilde{\lambda}_k t},$$

para  $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ , por lo que obtenemos

$$\int_0^T u(t) e^{\tilde{\lambda}_k t} dt = -4 \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right) dx, \quad k \geq 0. \quad (5.20)$$

Ahora introducimos la función entera

$$v(s) := \int_{-T/2}^{T/2} u(t + T/2) e^{-ist} dt.$$

Por (5.20) se sigue que

$$v(i\tilde{\lambda}_k) = 0, \quad k \geq 1, \quad \text{y } v(i\tilde{\lambda}_0) = -2Le^{-\tilde{\lambda}_0 T/2}.$$

Además, la desigualdad de Hölder y (5.18) implican

$$\begin{aligned} |v(s)| &\leq \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right) \int_0^T |u(t)| dt \\ &\leq KT^{1/2} \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right) \|y_0\|_{L^2(0, L)} \\ &\leq \begin{cases} KT^{1/2} \frac{2^{1/2} \varepsilon^{1/2}}{M^{1/2}} e^{ML/(2\varepsilon)} \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right), & M > 0 \\ KT^{1/2} \frac{2^{1/2} \varepsilon^{1/2}}{|M|^{1/2}} \exp\left(\frac{\Im(s)T}{2}\right), & M < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Consideramos la función entera

$$f(s) := v\left(\frac{s}{4\varepsilon}\right). \quad (5.22)$$

Por lo tanto,

$$f(b_k) = 0, \quad k \geq 1 \quad \text{y} \quad f(b_0) = -2Le^{-\tilde{\lambda}_0 T/2}, \quad (5.23)$$

donde

$$b_k = i \left( M^2 + \frac{4(k+1/2)^2 \pi^2 \varepsilon^2}{L^2} \right), \quad k \geq 0.$$

Por (5.21) tenemos

$$|f(s)| \leq KT^{1/2} \frac{2^{1/2} \varepsilon^{1/2}}{M^{1/2}} e^{ML/(2\varepsilon)} \exp\left(\frac{|\Im(s)|T}{8\varepsilon}\right), \quad M > 0, \quad (5.24)$$

y

$$|f(s)| \leq KT^{1/2} \frac{2^{1/2} \varepsilon^{1/2}}{|M|^{1/2}} \exp\left(\frac{|\Im(s)|T}{8\varepsilon}\right), \quad M < 0. \quad (5.25)$$

Así que  $f(s)$  es una función entera de tipo exponencial  $T\varepsilon^{-1}/8$  en  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ , por lo tanto el Teorema 40 implica que tenemos la representación

$$\ln |f(s)| = \sum_{l=0}^{\infty} \ln \left| \frac{s - a_l}{s - \bar{a}_l} \right| + \sigma \Im(s) + \frac{\Im(s)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\tau)|}{|\tau - s|^2} d\tau, \quad s \in \mathbb{H}, \quad (5.26)$$

donde  $\{a_l\}_l$  es la sucesión de ceros de  $f$  en  $\mathbb{H}$ , cada cero repetido tantas veces como su multiplicidad, y  $\sigma$  es un número real que satisface

$$\sigma \leq \frac{T}{8\varepsilon}.$$

Usando (5.24) y (5.25) tenemos

$$\frac{\Im(b_0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\tau)|}{|\tau - b_0|^2} d\tau \leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2K^2 T \varepsilon}{M} \right) + \frac{LM}{2\varepsilon}, \quad M > 0, \quad (5.27)$$

y

$$\frac{\Im(b_0)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\tau)|}{|\tau - b_0|^2} d\tau \leq \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2K^2 T \varepsilon}{|M|} \right), \quad M < 0, \quad (5.28)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \ln \left| \frac{b_0 - a_l}{b_0 - \bar{a}_l} \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{b_0 - b_k}{b_0 - \bar{b}_k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{(4(k+1/2)^2 - 1)\pi^2 \varepsilon^2 / L^2}{2M^2 + (4(k+1/2)^2 + 1)\pi^2 \varepsilon^2 / L^2} \right| \\ &\leq \int_1^{\infty} \ln \frac{\pi^2 \varepsilon^2 (x^2 + x)}{M^2 L^2 / 2 + \pi^2 \varepsilon^2 (x^2 + x)} dx \leq \int_1^{\infty} \ln \frac{\pi^2 \varepsilon^2 (x + 1/2)^2}{M^2 L^2 / 2 + \pi^2 \varepsilon^2 (x + 1/2)^2} dx \\ &= \int_{3/2}^{\infty} \ln \frac{\pi^2 \varepsilon^2 x^2}{M^2 L^2 / 2 + \pi^2 \varepsilon^2 x^2} dx = \left( \int_1^{\infty} - \int_1^{3/2} \right) \ln \frac{\pi^2 \varepsilon^2 x^2}{M^2 L^2 / 2 + \pi^2 \varepsilon^2 x^2} dx \\ &\leq \frac{3}{2} \ln \left( 1 + \frac{L^2 M^2}{2\pi^2 \varepsilon^2} \right) - \frac{L|M|}{\sqrt{2}\varepsilon} + 1, \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde hemos usado la estimación al final de (4.13).

Poniendo  $s = b_0$  en (5.26) y usando (5.23), (5.27), (5.28) y (5.29) obtenemos

$$\ln(2L) - \frac{\tilde{\lambda}_0 T}{2} \leq \frac{3}{2} \ln \left( 1 + \frac{L^2 M^2}{2\pi^2 \varepsilon^2} \right) - \frac{LM}{\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{TM^2}{8\varepsilon} + \frac{T\varepsilon\pi^2}{8L^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2K^2 T\varepsilon}{M} \right) + \frac{LM}{2\varepsilon}, \quad M > 0,$$

y

$$\ln(2L) - \frac{\tilde{\lambda}_0 T}{2} \leq \frac{3}{2} \ln \left( 1 + \frac{L^2 |M|^2}{2\pi^2 \varepsilon^2} \right) - \frac{L|M|}{\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{T|M|^2}{8\varepsilon} + \frac{T\varepsilon\pi^2}{8L^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2K^2 T\varepsilon}{|M|} \right), \quad M < 0.$$

Por ello tenemos que

$$K \geq \frac{\sqrt{2}LM^{1/2}}{T^{1/2}\varepsilon^{1/2} \left(1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2}\right)^{3/2}} \exp \left( \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{LM}{\sqrt{2\varepsilon}} - \frac{TM^2}{4\varepsilon} - \frac{T\varepsilon\pi^2}{4L^2} \right), \quad M > 0, \text{ y}$$

$$K \geq \frac{\sqrt{2}L|M|^{1/2}}{T^{1/2}\varepsilon^{1/2} \left(1 + \frac{L^2 M^2}{4\pi^2 \varepsilon^2}\right)^{3/2}} \exp \left( -\frac{TM^2}{4\varepsilon} - \frac{T\varepsilon\pi^2}{4L^2} + \frac{L|M|}{\sqrt{2\varepsilon}} \right), \quad M < 0.$$

□

# Capítulo 6

## Conclusiones

En esta tesis analizamos la controlabilidad a cero de una perturbación singular de la ecuación de transporte, i.e. añadimos el término  $-\varepsilon y_{xx}$  a la ecuación de transporte  $y_t + My_x = 0$  sobre el intervalo  $(0, L)$ , obteniendo así una ecuación parabólica.

De hecho, en el artículo [11] Glass estudia el problema de controlabilidad **uniforme** a cero de la familia de ecuaciones parabólicas antes mencionada, cuando el parámetro  $\varepsilon > 0$  toma valores pequeños. En su trabajo considera condiciones de frontera tipo Dirichlet y el control actúa en el extremo izquierdo  $x = 0$ .

En esta tesis extendemos el análisis hecho por Glass y consideramos condiciones de frontera adecuadas tipo Robin en un caso, y en el otro caso consideramos condiciones tipo Robin-Dirichlet; en ambos casos el control actúa en el extremo izquierdo  $x = 0$ . En concreto, el adjunto  $B^*$  del operador de frontera  $By = -2\varepsilon y_x + My$  lo elegimos de tal manera que el operador  $P\varphi = M\varphi_x + \varepsilon\varphi_{xx}$  con condición de frontera tipo Robin  $B^*\varphi(0) = B^*\varphi(L) = 0$  es diagonalizable. En este trabajo damos dos pruebas de la diagonalización de tal operador; una está basada en la diagonalización del laplaciano en el intervalo  $(0, L)$  con datos de frontera tipo Neumann, por lo que las funciones propias de  $P$  involucran funciones coseinodales. Esta es la parte medular del trabajo, ya que permite la aplicación del método de momentos para obtener la desigualdad de observabilidad del sistema adjunto, lo que implica que nuestro sistema original es controlable a cero.

El aporte más destacable de esta tesis es la construcción de un nuevo “multiplicador complejo” que permitió (y permitirá para otros operadores) la construcción de una sucesión biortogonal a cierta familia de exponenciales asociada a los valores propios del operador  $P$ ; todo esto con la finalidad de probar la desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto.

Los resultados obtenidos son originales y muestran que las estimaciones asintóticas (por arriba y por abajo) de la constante de control óptimo cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  son similares a las obtenidas por Glass. La estimación superior de la constante de control óptimo se obtiene directamente de la desigualdad de observabilidad y la estimación inferior de

la constante de control óptimo se obtiene usando herramientas del análisis complejo y armónico, en específico, se usa la representación de cierta clase de funciones analíticas en el semiplano complejo superior en términos de sus ceros.

# Apéndice A

## Herramientas del análisis complejo

Aquí reunimos los resultados del análisis complejo necesarios para probar nuestros resultados. El siguiente resultado se puede hallar en [8, página 38].

**Teorema 38.** Sea  $f \in \text{hol}(\mathbb{H}) \cap C(\overline{\mathbb{H}})$ , donde  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ . Supóngase que  $\log |f(z)| \leq O(|z|)$  para  $|z|$  grande,  $z \in \mathbb{H}$ , que

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(iy)|}{y} = A, \quad y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty,$$

entonces

$$\log |f(z)| \leq A\Im(z) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im(z) \log^+ |f(t)|}{|z-t|^2} dt, \quad z \in \mathbb{H}.$$

El siguiente resultado se encuentra en [8, página 41].

**Teorema 39.** Sea  $v(z)$  una función armónica positiva en  $\mathbb{H}$ . Hay un  $\alpha \geq 0$  y una medida positiva  $\mu$  en  $\mathbb{R}$  con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$$

tal que

$$v(z) = \alpha\Im(z) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im(z)}{|z-t|^2} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{H}.$$

El siguiente resultado se puede hallar en [8, página 56].

**Teorema 40.** Sea  $f$  una función entera de tipo exponencial y supóngase que

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |f(iy)|}{y} = A, \quad y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Sea  $\{\lambda_n\}$  el conjunto de ceros de  $f$  en  $\mathbb{H}$  (repeticiones según la multiplicidad), entonces

$$\log |f(z)| = \Im(z) + \sum \log \frac{|1-z/\lambda_n|}{|1-z/\overline{\lambda}_n|} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im(z) \log |f(t)|}{|z-t|^2} dt, \quad z \in \mathbb{H}$$



El siguiente resultado se encuentra en [7, página 162].

**Lema 41.** *Para cualquier función creciente  $\nu(t)$  con  $\nu(t) = O(t)$  para  $t > 0$ , tenemos*

$$\int_0^\infty \log \left| 1 - \frac{z^2}{t^2} \right| (d[\nu(t)] - d\nu(t)) \leq \log \left( \frac{\max(|x|, |y|)}{2|y|} + \frac{|y|}{2 \max(|x|, |y|)} \right), \quad (\text{A.1})$$

donde  $z = x + iy$ ,  $y \neq 0$ .

# Bibliografía

- [1] J.-M. Coron., Control and nonlinearity, American Mathematical Society, United States of America, 2007.
- [2] J.-M. Coron, S. Guerrero, Singular optimal control: A linear 1-D parabolic–hyperbolic example, *Asymptot. Anal.* 44 (3,4) (2005) 237–257.
- [3] Dautray, Robert; Lions, Jacques-Louis Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5. Evolution problems. I. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xiv+709 pp.
- [4] Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xxii+749
- [5] H.O. Fattorini, D.L. Russell, Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 43 (1971) 272–292.
- [6] A. Fursikov, O.Yu. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes Ser., vol. 34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [7] P. Koosis, The Logarithmic Integral. II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 21, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [8] P. Koosis, The Logarithmic Integral. I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Corrected reprint of the 1988 original.
- [9] S. Guerrero, G. Lebeau, Singular optimal control for a transport-diffusion equation, *Comm. Partial Differential Equations* 32 (10–12) (2007) 1813–1836.
- [10] G. Lebeau, L. Robbiano, Contrôle exact de l'équation de la chaleur, *Comm. Partial Differential Equations* 20 (1995) 335–356.
- [11] Glass, Olivier; A complex-analytic approach to the problem of uniform controllability of a transport equation in the vanishing viscosity limit. *J. Funct. Anal.* 258 (2010), no. 3, 852–868.
- [12] Rudin, Walter; Real and complex analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [13] D.L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, *SIAM Rev.* 20 (1978) 639–739.