



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

**ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD CONVECTIVA DE UN FLUIDO
VISCOELÁSTICO DE MAXWELL CONFINADO ENTRE DOS PAREDES
GRUESAS CON FLUJO DE CALOR DE CATTANEO-CHRISTOV**

TESIS

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES**

PRESENTA:

JOSE ANTONIO RUIZ DÍAZ

TUTOR PRINCIPAL

**DR. LUIS ANTONIO DÁVALOS OROZCO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES**

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

**DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**

**DR. CARLOS IGNACIO MENDOZA RUIZ
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES**

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tabla de contenidos

Agradecimientos	III
Resumen	IV
1. Antecedentes	1
1.1. Aproximación de Boussinesq	6
1.2. Método de Galerkin	6
2. Formulación matemática del problema	8
2.1. Ecuación de continuidad	8
2.2. Ecuación constitutiva de la densidad	9
2.3. Ecuación de balance de momento	9
2.4. Ecuación constitutiva de Maxwell	10
2.5. Ecuación de balance de energía	12
2.6. Ecuación constitutiva de Cattaneo-Christov	12
2.7. Ecuaciones del estado base	14
2.8. Soluciones analíticas para el campo de temperatura en el estado base	14
2.9. Ecuaciones lineales de la perturbación y condiciones de frontera	18
3. Soluciones analíticas y numéricas	23
3.1. Convección estacionaria	23
3.2. Convección oscilatoria de un fluido de Cattaneo-Christov	26
4. Conclusiones	59
Bibliografía	63

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar al CONACYT y su programa de becas MIIC por el apoyo económico otorgado para continuar mis estudios de posgrado.

Expreso mi gratitud al Instituto de Investigaciones en Materiales, a su Director Dr. José Israel Betancourt Reyes por otorgarme la oportunidad de realizar mis estudios de Maestría.

Mi más sincero agradecimiento a mi tutor y director de tesis Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco por su intachable compromiso y dedicación para sacar adelante éste trabajo de investigación; su interés y su valiosa asesoría fueron fundamentales para la realización de esta tesis.

Un agradecimiento especial a los miembros de mi comité tutor, Dr. Gerardo Ruiz Chavarría de la Facultad de Ciencias y Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz del Instituto de Investigaciones en Materiales por el apoyo brindado en el desarrollo de este trabajo.

Un especial reconocimiento a José Francisco Lojero Hernández por incontables horas de su valiosa asesoría en la redacción y formalización de este documento.

Finalmente, agradezco a mi familia por su apoyo y comprensión. A mis padres Ana Gabriela Díaz Hernández y Cutberto Ruiz Serrano, por el invaluable apoyo moral que me brindaron a lo largo de mis estudios de Maestría y la realización de la tesis. A mi hermano José Arturo Ruiz Díaz, por las largas charlas estimulantes que me motivaron a seguir estudiando y creciendo como estudiante de posgrado. A mi pareja Tania Hernández Romero, que ha estado a mi lado compartiendo mis alegrías y angustias, con el estímulo y motivación para superarme día con día y el apoyo incondicional. En todos ellos encontré la fuerza necesaria para llegar hasta el final de mi trabajo.

Resumen

En este trabajo, se presentan resultados de la estabilidad convectiva lineal de una capa de fluido viscoelástico cuyo flujo de calor satisface la ecuación constitutiva de Cattaneo-Christov y que está confinada entre dos paredes gruesas de conductividades térmicas finitas. Se supone que el fluido viscoelástico satisface la ecuación constitutiva de Maxwell. Las dos paredes gruesas permiten plantear condiciones de frontera más realistas y presentar los resultados de la estabilidad en función de las conductividades térmicas de las paredes y sus espesores. Este estudio de estabilidad convectiva se caracteriza por la introducción de un tiempo de relajamiento térmico debido al modelo constitutivo de Cattaneo-Christov. Se presentan resultados numéricos de los números críticos de Rayleigh R_c , del número de onda k_c y de la frecuencia de oscilación ω_c para una variedad de valores del número de Prandtl Pr , del tiempo de relajamiento viscoelástico F y del tiempo de relajamiento térmico de Cattaneo-Christov ε_t . Se encontraron resultados nuevos e importantes sobre el impacto en la convección natural de la introducción del tiempo de relajamiento de Cattaneo-Christov en comparación con estudios previos que se encuentran en la literatura y que utilizan la ecuación constitutiva clásica de Fourier.

Capítulo 1

Antecedentes

En el año 1900 el científico francés Henri Claude Bénard, realizó observaciones experimentales de una capa de fluido delgada (spermaceti) que se calentaba uniformemente por debajo. Notó que se formaban celdas hexagonales en el fluido, especulando que los movimientos convectivos se organizaban en patrones celulares semi-regulares. Años más tarde en 1916 el científico inglés John William Strutt, mejor conocido como Lord Rayleigh, fue el primero en describir matemáticamente este fenómeno [1]. En su trabajo Rayleigh asume condiciones de frontera para la velocidad vertical y la perturbación de la temperatura en las paredes: son iguales a cero en las fronteras superior e inferior. Los resultados que obtuvo estaban en desacuerdo con las observaciones que realizó Bénard.

Las observaciones de Bénard, fueron replicadas experimentalmente por Block [2] en 1956. No fue sino hasta dos años más tarde, en 1958, que Pearson [3] explicó las discrepancias de la teoría de Rayleigh con las observaciones de Bénard. Pearson reformuló el problema tomando en cuenta sólo los efectos de la tensión superficial, concluyendo que las observaciones de Bénard corresponden a fenómenos relacionados a la tensión superficial, y no al gradiente de temperaturas como se creía. La teoría lineal de Pearson demuestra que los movimientos convectivos son explícitamente causados por gradientes en la tensión superficial sin la contribución de fuerzas de flotación (la aceleración gravitacional se hizo igual a cero). Este flujo impulsado por gradientes en la tensión superficial, es conocido como convección de Bénard-Marangoni [4].

El fenómeno que ocurre únicamente por efectos de gradientes de temperatura y fuerzas de flotación (en ausencia de tensión superficial), es conocido como convección de Rayleigh-Bénard. Éste ocurre en procesos naturales e industriales debido a la presencia de gradientes de temperatura que pueden aparecer en cualquier dirección respecto a la vertical, que se determina por la dirección de la gravedad. El movimiento del fluido ocurre por la competencia entre las fuerzas de flotación por gravedad y las fuerzas viscosas.

Surge el interés de estudiar la estabilidad de sistemas convectivos: determinar las características que debe tener el sistema para que la convección se presente. La estabilidad hidrodinámica en este tipo de sistemas se realiza a través del número de Rayleigh (R); éste es un número adimensional asociado a flujos impulsados por flotación que representa el cociente de las fuerzas de flotación sobre las fuerzas viscosas, y se define como:

$$R = \frac{\alpha g \Delta T d^4}{\nu \kappa} \quad (1.1)$$

donde α es el coeficiente de expansión térmica, g es la aceleración debida a la gravedad, ν es la viscosidad cinemática, κ es la difusividad térmica, ΔT es una diferencia de temperaturas característica del sistema y d es el espesor de la capa de fluido. Como bien mencionó Rayleigh en su trabajo, existe

un valor crítico del número de Rayleigh en el que la convección se presenta; este valor crítico corresponde al mínimo del lugar geométrico que representa a los estados de estabilidad marginal en el espacio de parámetros del sistema (véase la Figura 3.1). Si el sistema está por debajo de ese valor crítico, se dice que es estable. En el caso en que el valor del número de Rayleigh del sistema es igual al valor crítico, se conoce como estado marginal, en el que el sistema tiene una estabilidad neutra. Sin embargo, cuando el valor del número de Rayleigh es superior al valor crítico, el sistema es inestable. Cuando el sistema es estable, en el caso de la convección natural se tiene un estado hidrostático y termostático que corresponde a una solución conductiva para el campo de temperatura. Sin embargo, cuando el sistema es inestable, existen movimientos en las partículas de fluido que obligan a obtener una solución convectiva. Se puede pasar de la estabilidad a la inestabilidad a través del estado marginal de dos formas: estacionaria y oscilatoria. La categoría en la que ocurre la transición depende de la forma en la que se comportan las perturbaciones en el sistema. Cuando las perturbaciones crecen o disminuyen de forma aperiódica se dice que el sistema pasa de la estabilidad a la inestabilidad a través de un estado marginal que presenta un patrón estacionario de movimientos, y por ende, se presenta la convección de forma estacionaria. Por otra parte, si en el inicio de la inestabilidad predominan movimientos oscilatorios, se dice que el sistema es sobreestable y la transición a través del estado marginal es de carácter oscilatorio, consecuentemente, la convección se presenta de forma oscilatoria. En cualquiera de los dos casos (estacionario y oscilatorio), el comportamiento de las perturbaciones depende fuertemente de las condiciones de frontera [5, 6].

El trabajo de Rayleigh [1] sentó las bases para el estudio de la convección de Rayleigh-Bénard: el flujo impulsado por flotación de un fluido confinado entre dos paredes horizontales y conductoras. Los estudios de la convección de Rayleigh-Bénard han sido objeto de investigación por décadas. Trabajos detallados sobre este fenómeno se pueden encontrar en la monografía de Chandrasekhar [5], el trabajo de Drazin [6] y los libros de Charru [7] y de Getling [8]; que abordan a gran profundidad el fenómeno de convección lineal para fluidos newtonianos. Trabajos más recientes como el de Smyth y Carpenter [9] contienen información sobre los efectos no lineales y subrutinas programadas en el software especializado MATLAB para obtener resultados numéricos; además presentan un gran número de imágenes de fenómenos reales que complementan la teoría que se aborda. En todos los casos anteriores, se estudió el fenómeno para fluidos newtonianos.

En el presente trabajo se analizará la estabilidad del fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard para un fluido viscoelástico de Maxwell. La idea de abandonar el dominio de los fluidos newtonianos para introducirse en el dominio de los fluidos viscoelásticos requiere cambiar las ecuaciones constitutivas del tensor de esfuerzos. Estos modelos que se utilizan para modelar fluidos viscoelásticos son discutidos ampliamente en el trabajo de Bird et. al. [10], en el que se mencionan las ecuaciones constitutivas no lineales de los fluidos viscoelásticos de Maxwell y Jeffreys. En específico, se utiliza un caso particular del modelo de Oldroyd tipo B, que es una extensión del modelo de Maxwell con derivada convectiva superior.

La importancia de estudiar la estabilidad de sistemas convectivos para fluidos viscoelásticos surge de la necesidad de optimizar procesos industriales en las áreas química-farmacéutica, alimenticia, biotecnología, impresiones, y de polímeros; pues son industrias que generan millones de dólares al año [11].

Una aplicación común en donde se puede encontrar el fenómeno de convección natural para fluidos viscoelásticos es en el proceso de secado en frío, también llamado “freeze-drying”. Este método es ampliamente utilizado en la industria alimenticia y se encuentra en menor medida en la industria

farmacéutica. en la industria farmacéutica es el proceso de secado en frío, también llamado “freeze-drying”. Por ejemplo, en el área de la biotecnología, los modelos teóricos son utilizados para modelar y optimizar procesos de replicación de ADN y flujos biológicos. Las suspensiones que se realizan de ADN con solventes acuosos tienen un comportamiento viscoelástico. La convección natural está directamente relacionada con este proceso, pues la replicación de ADN requiere un gradiente de temperatura y una enzima para llevarse a cabo, dando lugar a fenómenos convectivos. El proceso de replicación de ADN es una práctica común entre genetistas y biotecnólogos, y es una herramienta muy útil en el desarrollo de la medicina y la biología molecular [11].

Otro ejemplo de la estabilidad de sistemas convectivos para fluidos viscoelásticos es la impresión en aplicaciones ópticas y electrónicas, pues al aplicar una suspensión polimérica sobre la superficie de impresión caliente, los efectos convectivos se vuelven relevantes, afectando directamente los patrones de impresión debido a la evaporación del solvente [12].

Los científicos Vest y Arpaci [13] estudiaron, de acuerdo a lo anterior, la estabilidad de un sistema con una capa horizontal de fluido viscoelástico de Maxwell en presencia de paredes rígidas y deformables. Por medio del número de Rayleigh, determinaron que la introducción de los efectos viscoelásticos desestabilizan al fluido, y la presencia de paredes rígidas tienden a estabilizarlo.

Sokolov y Tanner [14] realizaron un trabajo similar, encontraron, que la formación de las celdas de Bénard es teóricamente posible, sin embargo, se necesitarían gradientes de temperatura o campos gravitacionales muy grandes para que sea posible observarlas en una solución polimérica común con viscosidad moderada. En ambos trabajos estudiaron el fenómeno de convección lineal para un fluido de Maxwell que parte de la hidrostática y no presenta flujo básico, por lo que la derivada convectiva del modelo constitutivo se reduce a una simple derivada temporal. Este modelo mencionado permite que se presenten esfuerzos viscoelásticos como consecuencia de la deformación, que se caracteriza por un tiempo de relajamiento viscoelástico [15].

Takashima [16], expandiendo los estudios mencionados, analizó la estabilidad de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd confinado entre dos paredes rígidas y deformables, generalizando el trabajo de Vest y Arpaci para un sistema en el que el fluido viscoelástico es controlado por dos constantes (un parámetro elástico y otro parámetro como el cociente del tiempo de retardo de la deformación y el tiempo de relajamiento). Obtuvo resultados para un amplio espectro del número de Prandtl. Concluyó que existe un valor crítico para la constante elástica del modelo, una vez superado ese valor crítico, la convección siempre se presenta de forma oscilatoria. Es decir: el número de Rayleigh crítico disminuye con el crecimiento del parámetro elástico.

Rosenblat [17], con un enfoque diferente al de Takashima, abordó la teoría lineal del fenómeno con una derivada corrotacional de Jaumann en el modelo generalizado de Oldroyd. En su trabajo, concluyó que el inicio de la convección para una capa de fluido viscoelástico depende fuertemente del tiempo de relajamiento y de la relación constitutiva que se ocupa para el modelo de Oldroyd. Demostró que la convección es estacionaria en un cierto rango de los parámetros, y la convección es oscilatoria en otro rango. En ambos casos, la solución convectiva puede resultar supercrítica o subcrítica.

Trabajos de la segunda década del año 2000 como el de Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18, 19] analizaron el problema de la estabilidad lineal para una capa de fluido de Maxwell y Jeffrey y consideraron la presencia de paredes gruesas. Esto permitió plantear condiciones de frontera más realistas y presentaron resultados como función de las conductividades térmicas y espesor de las paredes para fluidos

viscoelásticos de Maxwell y Jeffrey, respectivamente. En este trabajo científico, al introducir paredes gruesas, se permite resolver para un amplio espectro de números de Biot: eliminando la necesidad de limitar las condiciones de frontera a temperatura fija o flujo de calor fijo, obteniendo resultados más cercanos a la realidad.

En todos los trabajos anteriormente mencionados, se utilizó la ley de Fourier como ecuación constitutiva para el vector de flujo de calor. En este trabajo de investigación se sustituye la ecuación constitutiva de Fourier por la ecuación constitutiva de Cattaneo-Christov para el vector de flujo de calor. Se presentan resultados interesantes e importantes en la estabilidad convectiva para un fluido viscoelástico de Maxwell. El contraste de los resultados respecto a los del trabajo de Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18], se discuten en la sección de Conclusiones del presente trabajo.

Con referencia a la ley de Fourier, se define como una ecuación constitutiva para el vector de flujo de calor, nombrada así en honor al físico y matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier y su trabajo «*Théorie Analytique de la chaleur*» publicado en 1822 [20]. Al sustituir la ecuación constitutiva propuesta por Fourier en el término difusivo de la ecuación de la energía, se obtiene una ecuación diferencial parabólica que puede resolverse para el campo de temperaturas, por ejemplo, para un fluido en el que se desprecian los efectos de calentamiento debidos a la viscosidad, se tiene:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = K \nabla^2 T$$

Esta es la ecuación de balance de energía acoplada con el modelo constitutivo de Fourier. La forma de la ecuación implica que cualquier perturbación inicial se propaga de forma instantánea en todo el medio de estudio. Este comportamiento contradice el principio de causalidad [26]. Haciendo una analogía a la teoría de elasticidad en medios continuos, sería equivalente a decir que las ondas de calor tienen una velocidad infinita en el medio donde se propagan. Ésto motivó a la comunidad científica a buscar un modelo constitutivo para el vector de flujo de calor que permitiera la propagación de ondas de calor con velocidad finita [21]. No fue sino hasta 1958 que Cattaneo [22], propuso una ecuación constitutiva para el vector de flujo de calor:

$$\mathbf{q} + \lambda_{CC} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -K \nabla T$$

Este modelo tiene la característica de permitir que el calor se propague en forma de ondas al tomar en cuenta un tiempo de relajamiento térmico λ_{CC} , que representa el tiempo de retardo requerido para establecer conducción de calor constante en un elemento material de volumen una vez que se establece un gradiente de temperatura en él [24]. Además, la ecuación resultante de la ecuación de balance de energía con el modelo de Cattaneo, resulta en una ecuación diferencial hiperbólica, que es amortiguada por el término de la derivada temporal en la ecuación de Cattaneo. Respecto al modelo de Cattaneo, los investigadores Joseph y Preziosi [25] discutieron ampliamente el significado físico de los nuevos términos que aparecen en el modelo constitutivo para el vector de flujo de calor y describieron el proceso mental para obtener la ecuación de Cattaneo como «la forma más obvia de generalizar la ley de Fourier para obtener velocidades finitas de propagación».

Christov y Jordan en el año 2005 demostraron que la ecuación de Cattaneo (sin términos convectivos) producía un problema al representar una evolución paradójica de las ondas térmicas [26, 27], cuando se analizaba desde un marco de referencia en movimiento, anulando la invarianza y validez del modelo. Para solucionar este problema, Christov y Jordan propusieron un modelo que sustituye la derivada temporal de la ecuación de Cattaneo por una derivada invariante (una derivada convectiva superior,

derivada convectiva inferior o derivada corrotacional de Jaumann), enfatizando el carácter tensorial del modelo. La ecuación constitutiva para el vector de flujo de calor propuesta por Christov y Jordan es conocida como la ecuación de Cattaneo-Christov.

Cassol y Dubljevic [28] realizaron un estudio comparativo del modelo parabólico y el modelo hiperbólico de la ecuación de la energía, contrastando los efectos de la introducción de la ecuación de Cattaneo-Christov con la ecuación de Fourier. Observaron que los resultados eran muy similares, sin embargo, afirmaron que la velocidad de fase finita es más acertada y se prefiere sobre la ecuación de Fourier para representar la dinámica de un sistema físico.

McTaggart y Lindsay [29] analizaron los efectos de modelos hiperbólicos de calor en el problema de Bénard, encontraron que existe una gran diferencia en los resultados al compararlos con la teoría clásica, atribuyen los efectos a la constante de relajamiento térmico.

Ahora bien, retomando el fenómeno de convección natural para un fluido newtoniano con flujo de calor de Cattaneo-Christov fue estudiado por Straughan en 2010 [30], quién encontró que la influencia del tiempo de relajamiento térmico es considerable cuando el número de Cattaneo es lo suficientemente grande, y el mecanismo en que se presenta la convección pasa de ser estacionaria a oscilatoria.

En el año 2015, Pranesh y Kiran [31] encontraron que la ecuación de Fourier predice valores superiores a la realidad para el número de Rayleigh crítico, en comparación, con el modelo de Cattaneo-Christov para un sistema en el que se tiene una capa horizontal de un fluido que es conductor eléctrico con temperatura fija en las paredes. También afirmaron que la sobreestabilidad es la forma preferida del sistema y que se presenta la convección de forma oscilatoria.

En el mismo año, Bissell [32] se dio a la tarea de encontrar los valores numéricos exactos del número de Cattaneo en el que la convección cambiaba de ser estacionaria a oscilatoria. Y obtuvo resultados como función del número de Prandtl que corresponden al punto de codimensión dos del sistema: aquellos valores del número de Cattaneo y Prandtl en el que la convección estacionaria y oscilatoria compiten por ser el modo más inestable.

En este trabajo, el **objetivo** es analizar la influencia del número de Cattaneo-Christov ε_t en la estabilidad convectiva de un fluido viscoelástico de Maxwell confinado entre dos paredes gruesas, esto se logrará encontrando los valores críticos para el número de Rayleigh R_c , el número de onda k_c y la frecuencia de oscilación ω_c . Los resultados serán comparados con análisis realizados con la teoría clásica de calor de Fourier. Se plantea encontrar resultados como función de parámetros adimensionales que relacionan las propiedades de las paredes y del fluido, éstos son: la conductividad térmica X , la difusividad térmica XY y los efectos viscoelásticos F . Los valores críticos serán determinados numéricamente para diferentes valores del número de Prandtl Pr .

La **hipótesis** es que la introducción de la ecuación constitutiva de Cattaneo-Christov tiene un impacto relevante en la estabilidad del sistema al compararse con el caso clásico con la ecuación constitutiva de Fourier. El comportamiento de los valores críticos dependerá fuertemente de los parámetros ε_t , Pr y F ; así mismo, la variación de la difusividad térmica XY tendrá consecuencias en la estabilidad del sistema cuando las paredes y el fluido tengan conductividades térmicas similares.

1.1. Aproximación de Boussinesq

La aproximación de Boussinesq, llamada así en honor al matemático y físico Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929), se utiliza en los campos de flujo impulsados por la flotabilidad [33].

Existen muchas situaciones en la práctica en las que las ecuaciones básicas se pueden simplificar considerablemente. Esto ocurre cuando la variación en la densidad y los diferentes coeficientes, se debe a variaciones de temperatura moderadas.

Chandrasekhar [5] sustentó que la aproximación de Boussinesq ignora las diferencias de densidad en todos aquellos términos que no están multiplicados por la aceleración debida a la gravedad; el origen de las simplificaciones es la pequeñez del coeficiente de expansión volumétrica, específicamente, los términos que se simplifican tienen un coeficiente de expansión volumétrica α del orden de 10^{-3} a 10^{-4} , las variaciones pequeñas en la temperatura (dígase 10°), provocan que las variaciones en la densidad sean (cuando mucho) del 1 %. Matemáticamente, la ecuación de estado que se obtiene de integrar el coeficiente de expansión térmica se puede aproximar por serie de Taylor a primer orden, asumiendo que los gradientes de temperatura son pequeños. La esencia de la aproximación de Boussinesq reside en que la diferencia de inercia es insignificante porque es de segundo orden, pero la gravedad es lo suficientemente fuerte como para hacer que el peso específico sea apreciablemente diferente.

El argumento de plausibilidad dado a conocer por Chandrasekhar le dio a la aproximación de Boussinesq el rigor físico que necesitaba, además, Mihaljan [34] presentó en 1962 una forma analítica y matemáticamente rigurosa para obtener las ecuaciones de Boussinesq mediante una expansión de parámetros que fue generalizada por Malkus [35] en 1969, y por Gray y Giorgini [36] en 1976, incluso para gases en los que se permite la variación de todas las propiedades físicas como función de la presión y la temperatura.

Es evidente, que la aproximación de Boussinesq no es válida cuando se tienen gradientes de temperatura elevados, que provocan cambios considerables en las propiedades físicas del fluido; tales como la viscosidad y el calor específico. En el presente trabajo se desarrolla el estudio de la estabilidad convectiva lineal dentro del marco de la aproximación de Boussinesq.

1.2. Método de Galerkin

El sistema de ecuaciones que describe el fenómeno de convección natural para un fluido viscoelástico de Maxwell confinado entre dos paredes gruesas y rígidas con flujo de calor de Cattaneo-Christov será perturbado de acuerdo a la teoría lineal de perturbación (véase [5]). Una vez perturbado, linealizado, y realizando la adimensionalización correspondiente, se hará una expansión de las variables del sistema en modos normales como un producto de funciones donde la amplitud está determinada por una función desconocida en la dirección preferencial del flujo. Se asume que en las direcciones horizontales (x, y) existe una oscilación sinusoidal con la misma frecuencia y una relación de fases fija. En general, los movimientos del fluido pueden ser descritos como la superposición de sus modos normales.

El sistema de ecuaciones obtenido de los procedimientos anteriores, puede ser resuelto al expresar una

de las variables como la suma de una serie infinita de términos de un conjunto completo de funciones ortonormales [37]. De acuerdo con el método de Galerkin, el conjunto de ecuaciones diferenciales puede ser transformado en un conjunto de ecuaciones algebraicas al ser multiplicado por las expansiones propuestas e integrando las funciones en el dominio de estudio [38]. Por supuesto, la propuesta de expresar una variable como una suma infinita de términos es el caso ideal, por lo que se permite establecer un límite de términos n para la suma; es de esperarse que a mayor número de términos, se obtenga una mejor aproximación del resultado real. El número de términos corresponde al orden de la aproximación que se obtiene para el problema de valor propio, es decir, una aproximación de orden n corresponde a una matriz de $n \times n$, cuyo determinante se resuelve para el número de Rayleigh.

Es posible demostrar, que el problema de valores característicos que se obtiene, puede ser expresado en términos de principios variacionales; es decir, que el valor mínimo del número de Rayleigh que se obtiene al resolver el problema de valor propio es, en efecto, el mínimo valor característico (cf. capítulo II de [5]).

donde \mathbf{u}_0 es el vector de velocidad en el estado base y \mathbf{u}' el vector de la perturbación de la velocidad. Entonces, la ecuación de continuidad perturbada es:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') = 0$$

de aquí que cada término debe ser igual a cero por separado por la propiedad distributiva del operador divergencia.

La ecuación de continuidad en el estado base es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.1)$$

La ecuación de continuidad en el estado base se resta de la ecuación de continuidad perturbada y se obtiene la ecuación lineal de continuidad para la perturbación:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2.2)$$

2.2. Ecuación constitutiva de la densidad

Se asume que la densidad es función de la temperatura y sigue la relación lineal:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$$

donde ρ_0 es la densidad del fluido en un estado de referencia (a temperatura $T = T_0$).

Como consecuencia de una perturbación de la temperatura, $T = T_0 + T'$, la densidad cambia como:

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

Así,

$$\rho_0 + \rho' = \rho_0 [1 - \alpha(T_0 + T' - T_0)]$$

De aquí, la perturbación de la densidad es:

$$\rho' = -\rho_0 \alpha T' \quad (2.3)$$

La perturbación de la densidad depende linealmente de la perturbación en el campo de temperatura.

2.3. Ecuación de balance de momento

Los fluidos cuyo comportamiento estudiaremos, satisfacen la siguiente ecuación de balance de momento:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{b}$$

donde ρ es la densidad del fluido, p es la presión, $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos de corte [39], y \mathbf{b} es el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen que actúan sobre los elementos del fluido; en el presente caso, el vector \mathbf{b} es el campo de aceleración gravitacional $\mathbf{b} = -g\hat{\mathbf{k}}$ donde $\hat{\mathbf{k}}$ es el vector unitario en la dirección z .

Con esas consideraciones, la ecuación de balance de momento se puede reescribir como:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho g \hat{\mathbf{k}}$$

De la ecuación anterior, se perturban la densidad, el vector de velocidad, la presión y el tensor de esfuerzos de corte de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \quad p = p_0 + p', \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}'$$

donde las primas representan la perturbación y el subíndice 0 representa la variable en el estado base.

Dentro del marco de la aproximación de Boussinesq (sección: 1.1), la ecuación no lineal de balance de momento perturbada es:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \right) = -\nabla (p_0 + p') + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}') - (\rho_0 + \rho') g \hat{\mathbf{k}}$$

La ecuación de balance en el estado base es:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \right) = -\nabla p_0 + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_0 - \rho_0 g \hat{\mathbf{k}} \quad (2.4)$$

La ecuación anterior se resta de la ecuación no lineal de balance de momento perturbada, que resulta en la ecuación no lineal de balance de momento en la perturbación:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \right) + \rho_0 (\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}') = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' - \rho' g \hat{\mathbf{k}}$$

Finalmente, la ecuación anterior se linealiza para obtener la ecuación lineal de balance de momento en la perturbación:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \right) = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' - \rho' g \hat{\mathbf{k}} \quad (2.5)$$

2.4. Ecuación constitutiva de Maxwell

La ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos de corte de un fluido viscoelástico de Maxwell es:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_T \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\tau}}{\mathcal{D}t} = 2\mu \mathbf{e}$$

donde λ_T es el coeficiente viscoelástico ($\lambda_T = \mu/G$, donde G es el módulo elástico de un sólido hookeano) [10], μ es la viscosidad dinámica y \mathbf{e} es el tensor de rapidez de corte:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

Es importante mencionar que $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ es un operador no lineal que puede ser la derivada temporal convectiva superior, derivada temporal convectiva inferior o derivada temporal corrotacional de Jaumann, dependiendo del modelo viscoelástico escogido. Nótese que cuando el estado básico hidrostático se

perturba, todas las derivadas temporales de las ecuaciones lineales son iguales que el operador lineal $\mathcal{D}/\mathcal{D}t = d/dt = \partial/\partial t$ [18]. La ecuación constitutiva se puede reescribir como:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_T \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\tau}}{\mathcal{D}t} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

Si el operador $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ es una derivada temporal convectiva superior, ésta se define para el tensor de esfuerzos de corte como [10]:

$$\frac{\mathcal{D}\boldsymbol{\tau}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - [(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})]$$

sustituyendo se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_T \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - [(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})] \right\} = \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

De la ecuación anterior, se perturba el tensor de esfuerzos de corte y la velocidad de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$$

que resulta en la ecuación no lineal constitutiva de Maxwell perturbada:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}') + \lambda_T \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}') + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}') - [(\nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'))^T \cdot (\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}') \right. \\ \left. + (\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}') \cdot (\nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'))] \right\} = \mu (\nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') + (\nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'))^T) \end{aligned}$$

La ecuación en el estado base es:

$$\boldsymbol{\tau}_0 + \lambda_T \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}_0 - [(\nabla \mathbf{u}_0)^T \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \cdot (\nabla \mathbf{u}_0)] \right\} = \mu (\nabla \mathbf{u}_0 + (\nabla \mathbf{u}_0)^T) \quad (2.6)$$

La ecuación anterior se resta de la ecuación no lineal constitutiva de Maxwell perturbada, que resulta en la ecuación no lineal constitutiva de Maxwell para la perturbación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' + \lambda_T \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla \boldsymbol{\tau}') + \mathbf{u}' \cdot (\nabla \boldsymbol{\tau}_0) \right. \\ \left. - [(\nabla \mathbf{u}_0)^T \cdot \boldsymbol{\tau}' + (\nabla \mathbf{u}')^T \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \cdot (\nabla \mathbf{u}') + \boldsymbol{\tau}' \cdot (\nabla \mathbf{u}_0)] \right\} \\ + \lambda_T \left\{ \mathbf{u}' \cdot (\nabla \boldsymbol{\tau}') - [(\nabla \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\tau}' \cdot (\nabla \mathbf{u}')^T)] \right\} = \mu [(\nabla \mathbf{u}' + (\nabla \mathbf{u}')^T)] \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación anterior se linealiza para obtener la ecuación lineal constitutiva de Maxwell para la perturbación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' + \lambda_T \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla \boldsymbol{\tau}') + \mathbf{u}' \cdot (\nabla \boldsymbol{\tau}_0) \right. \\ \left. - [(\nabla \mathbf{u}_0)^T \cdot \boldsymbol{\tau}' + (\nabla \mathbf{u}')^T \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \cdot (\nabla \mathbf{u}') + \boldsymbol{\tau}' \cdot (\nabla \mathbf{u}_0)] \right\} \\ = \mu [(\nabla \mathbf{u}') + (\nabla \mathbf{u}')^T] \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.5. Ecuación de balance de energía

La ecuación de balance de energía es:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

donde ρ es la densidad, T la temperatura, c_p es el calor específico y \mathbf{q} es el vector de flujo de calor.

De la ecuación anterior, se perturban la densidad, temperatura, velocidad y vector de flujo de calor:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}'$$

Dentro del marco de la aproximación de Boussinesq, la ecuación de balance de energía perturbada es:

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial}{\partial t} (T_0 + T') + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \cdot (\nabla (T_0 + T')) \right] = -\nabla \cdot (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}')$$

La ecuación de balance de energía en el estado base es:

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0 \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_0 \quad (2.8)$$

Se sustrae la ecuación anterior de la ecuación de balance de energía perturbada, que resulta en la ecuación no lineal de balance de energía en la perturbación:

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla T') + \mathbf{u}' \cdot (\nabla T_0) \right] + \rho_0 c_p [\mathbf{u}' \cdot (\nabla T')] = -\nabla \cdot \mathbf{q}'$$

Finalmente, se linealiza la ecuación anterior para obtener la ecuación lineal de balance de energía para la perturbación:

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla T') + \mathbf{u}' \cdot (\nabla T_0) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q}' \quad (2.9)$$

2.6. Ecuación constitutiva de Cattaneo-Christov

En la teoría clásica de conducción de Fourier, \mathbf{q} está definido como:

$$\mathbf{q} = -K \nabla T$$

donde K es la conductividad térmica del material en donde se difunde el calor. Lo anterior supone que la velocidad de propagación es infinita, es decir, que cualquier pulso de calor generado se percibe (cambios de temperatura) instantáneamente en cualquier punto del espacio, independientemente de la distancia. Es por eso, que Cattaneo [22] propone la ecuación:

$$\mathbf{q} + \lambda_{CC} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -K \nabla T$$

Donde λ_{CC} es un tiempo característico de relajamiento térmico. La diferencia con respecto a la ecuación constitutiva de Fourier es que ahora las ondas de calor tienen una velocidad de fase finita.

Christov y Jordan [26] demostraron que la ecuación anterior (sin términos convectivos) resulta en una evolución paradójica de las ondas térmicas cuando se analiza desde un marco de referencia en movimiento. Esto significa que la forma de mejorar el modelo es usar derivadas invariantes. Se usa el mismo operador que en la ecuación constitutiva de Maxwell para fluidos viscoelásticos, reemplazando la simple derivada temporal por el operador $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$, que resulta en el modelo:

$$\mathbf{q} + \lambda_{CC} \frac{\mathcal{D}\mathbf{q}}{\mathcal{D}t} = -K\nabla T$$

Nuevamente, se utiliza la derivada convectiva superior, definida para el vector de calor [26] como:

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{q}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla\mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot (\nabla\mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{q}$$

Lo anterior, resulta en la ecuación constitutiva no lineal:

$$\mathbf{q} + \lambda_{CC} \left[\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla\mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot (\nabla\mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{q} \right] = -K\nabla T$$

De la ecuación anterior, se perturban el vector de flujo de calor, el vector de velocidad y la temperatura:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}', \quad T = T_0 + T'$$

Lo que resulta en la ecuación no lineal constitutiva de Cattaneo-Christov perturbada:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}' + \lambda_{CC} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}') + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}') \cdot (\nabla (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}')) - \right. \\ \left. (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}') \cdot (\nabla (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}')) + (\nabla \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}')) (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}') \right] = -K\nabla (T_0 + T') \end{aligned}$$

La ecuación constitutiva de Cattaneo-Christov en el estado base es:

$$\mathbf{q}_0 + \lambda_{CC} \left[\frac{\partial\mathbf{q}_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla\mathbf{q}_0) - \mathbf{q}_0 \cdot (\nabla\mathbf{u}_0) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{q}_0 \right] = -K\nabla T_0 \quad (2.10)$$

La ecuación anterior se resta de la ecuación no lineal constitutiva de Cattaneo-Christov perturbada, que resulta en la ecuación no lineal constitutiva de Cattaneo-Christov para la perturbación:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' + \lambda_{CC} \left[\frac{\partial\mathbf{q}'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla\mathbf{q}') + \mathbf{u}' \cdot (\nabla\mathbf{q}_0) - \mathbf{q}_0 \cdot (\nabla\mathbf{u}') - \mathbf{q}' \cdot (\nabla\mathbf{u}_0) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{q}' + (\nabla \cdot \mathbf{u}') \mathbf{q}_0 \right] \\ + \lambda_{CC} [\mathbf{u}' \cdot (\nabla\mathbf{q}') + \mathbf{q}' \cdot (\nabla\mathbf{u}') + (\nabla \cdot \mathbf{u}') \mathbf{q}'] = -K\nabla T' \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación anterior se linealiza para obtener la ecuación lineal constitutiva de Cattaneo-Christov para la perturbación:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' + \lambda_{CC} \left[\frac{\partial\mathbf{q}'}{\partial t} + \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla\mathbf{q}') + \mathbf{u}' \cdot (\nabla\mathbf{q}_0) - \mathbf{q}_0 \cdot (\nabla\mathbf{u}') - \mathbf{q}' \cdot (\nabla\mathbf{u}_0) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{q}' + (\nabla \cdot \mathbf{u}') \mathbf{q}_0 \right] \\ = -K\nabla T' \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.7. Ecuaciones del estado base

Hasta ahora, se han planteado las ecuaciones necesarias en el estado base de forma general. Las ecuaciones (2.1), (2.4), (2.6), (2.8) y (2.10) gobiernan al fenómeno en el estado base. Es posible simplificarlas enormemente con la consideración siguiente: El estado base es hidrostático, termostático y estacionario, como es el caso de convección natural de un fluido incompresible, es decir:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Hay que recordar que en el estado hidrostático, el tensor de esfuerzos se reduce únicamente al tensor de esfuerzos esféricos, que es representado sólo por la presión termodinámica del sistema en los elementos de la diagonal principal, pues todos son esfuerzos normales a la superficie de cada partícula material en la capa de fluido. Al no existir movimiento, el tensor de esfuerzos cortantes es idéntico a cero:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{0}$$

La ecuación de continuidad del estado base (2.1) se puede eliminar del sistema, pues representa una identidad.

Con las consideraciones anteriores, el sistema que gobierna al fenómeno en el estado base hidrostático y termostático es:

$$\nabla p_0 = -\rho_0 g \hat{\mathbf{k}} \quad (2.12a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_0 = 0 \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{q}_0 = -K \nabla T_0 \quad (2.12c)$$

2.8. Soluciones analíticas para el campo de temperatura en el estado base

Es posible encontrar soluciones analíticas en el estado hidrostático para la temperatura. Al aplicar el operador divergencia a la ecuación lineal constitutiva de Cattaneo-Christov en el estado base (2.12c) se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_0 = -K \nabla^2 T_0$$

Por la igualdad de términos con la ecuación lineal de balance de energía en el estado base:

$$K \nabla^2 T_0 = 0$$

En el estado base, la temperatura depende únicamente de z , por lo que el perfil de temperatura se puede encontrar analíticamente al resolver la ecuación lineal estacionaria de difusión:

$$\frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0$$

Donde T_0 es la temperatura en el estado base y es reemplazada por T_{LW} para la pared inferior, T_F para el fluido y T_{UW} para la pared superior. Las soluciones dimensionales de estas ecuaciones deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera: la temperatura es constante en las superficies exteriores de las dos paredes, es decir, $T_{LW} = T_L$ en $z = -d_L$ y $T_{UW} = T_U$ en $z = d_F + d_U$. Se satisface la continuidad del campo de temperatura en las interfaces: $T_{LW} = T_F$ en $z = 0$ y $T_{UW} = T_F$ en $z = d_F$. También se satisface la continuidad del flujo de calor: $K_L dT_{LW}/dz = K_F dT_F/dz$ y

$$K_F dT_F/z = K_U dT_{UW}/dz.$$

Las tres ecuaciones que se obtienen al integrar dos veces respecto a z la ecuación lineal estacionaria de difusión son:

$$\frac{d^2 T_{LW}}{dz^2} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{LW} = A_L z + B_L$$

$$\frac{d^2 T_F}{dz^2} = 0 \quad \rightarrow \quad T_F = A_F z + B_F$$

$$\frac{d^2 T_{UW}}{dz^2} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{UW} = A_U z + B_U$$

Las condiciones de frontera en las superficies exteriores de las paredes son:

$$T_{LW} = T_L \quad \text{en} \quad z = -d_L$$

$$T_{UW} = T_U \quad \text{en} \quad z = d_F + d_U$$

La continuidad en el campo de temperatura para las entrecaras de las paredes y el fluido se tienen las siguientes condiciones:

$$T_{LW} = T_F \quad \text{en} \quad z = 0$$

$$T_F = T_{UW} \quad \text{en} \quad z = d_F$$

La continuidad en el flujo de calor arroja las siguientes dos condiciones:

$$K_L \frac{dT_{LW}}{dz} = K_F \frac{dT_F}{dz}$$

$$K_F \frac{dT_F}{dz} = K_U \frac{dT_U}{dz}$$

Ahora se tienen seis condiciones para encontrar las seis constantes del sistema de ecuaciones, al sustituir las condiciones de frontera en el sistema, se obtiene un sistema de seis ecuaciones lineales:

$$-d_L A_L + B_L = T_L$$

$$(d_F + d_U) A_U + B_U = T_U$$

$$B_L - B_F = 0$$

$$d_F A_F + B_F - d_F A_U - B_U = 0$$

$$A_L - \frac{K_F}{K_L} A_F = 0$$

$$A_U - \frac{K_F}{K_U} A_F = 0$$

El sistema anterior se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -d_L & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_U + d_F & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_F & 1 & -d_F & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{K_F}{K_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_F}{K_U} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_L \\ B_L \\ A_F \\ B_F \\ A_U \\ B_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_L \\ T_U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por medio de la matriz inversa, se obtienen las siguientes soluciones:

$$\begin{bmatrix} A_L \\ B_L \\ A_F \\ B_F \\ A_U \\ B_U \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -K_F K_U (T_L - T_U) \\ d_U K_F K_L T_L + d_F K_L K_U T_L + d_L K_F K_U T_U \\ -K_L K_U (T_L - T_U) \\ d_U K_F K_L T_L + d_F K_L K_U T_L + d_F K_L K_U T_U \\ K_F K_L (T_U - T_L) \\ d_F K_L K_U T_U + d_F d_U K_F K_L^2 T_L + d_F d_L K_F K_L K_U T_U + d_F K_L K_F (T_L - T_U) \end{bmatrix}$$

dónde:

$$h = d_U K_F K_L + d_L K_F K_U + d_F K_L K_U$$

El término h se puede reescribir convenientemente como:

$$h = d_F K_L K_U (1 + D_L X_L + D_U X_U)$$

dónde:

$$D_L = \frac{d_L}{d_F} \quad (2.13)$$

es el cociente del espesor de la pared inferior y espesor de la capa de fluido,

$$D_U = \frac{d_U}{d_F} \quad (2.14)$$

es el cociente del espesor de la pared superior y el espesor de la capa de fluido,

$$X_L = \frac{K_F}{K_L} \quad (2.15)$$

es el cociente de la conductividad térmica de la capa de fluido y la conductividad térmica de la pared inferior, y

$$X_U = \frac{K_F}{K_U} \quad (2.16)$$

es el cociente de la conductividad térmica de la capa de fluido y la conductividad térmica de la pared superior.

Con esas consideraciones, se pueden sustituir las constantes A_L , B_L , A_F , B_F , A_U y B_U para encontrar los perfiles de temperatura en las paredes y en la capa de fluido para el estado base:

$$T_F = -\frac{(T_L - T_U)}{d_F (1 + D_L X_L + D_U X_U)} z + T_L - \frac{(T_L - T_U) D_L X_L}{(1 + D_L X_L + D_U X_U)} \quad (2.17)$$

$$T_{LW} = -\frac{(T_L - T_U) X_L}{d_F (1 + D_L X_L + D_U X_U)} z + T_L - \frac{(T_L - T_U) D_L X_L}{(1 + D_L X_L + D_U X_U)} \quad (2.18)$$

$$T_{UW} = -\frac{(T_L - T_U) X_U}{d_F (1 + D_L X_L + D_U X_U)} z + T_L - \frac{(T_L - T_U) (1 + D_L X_L - X_U)}{(1 + D_L X_L + D_U X_U)} \quad (2.19)$$

Dónde T_F , T_{LW} y T_{UW} son las soluciones dimensionales del campo de temperatura para la capa de fluido, la pared inferior y la pared superior, respectivamente.

Es evidente que las soluciones del campo de temperatura en el estado base (2.17), (2.18) y (2.19) fueron manipuladas algebraicamente para que existan similitudes en los términos. El objetivo de lo

anterior es simplificar la adimensionalización de las soluciones.

La forma algebraica de las soluciones para la temperatura en el estado base permite definir el incremento de temperatura característico del fenómeno como:

$$\Delta T_{\text{car}} = \frac{(T_L - T_U)}{(1 + D_L X_L + D_U X_U)} \quad (2.20)$$

en donde el denominador es adimensional y la diferencia de temperaturas en el numerador es dimensionalmente consistente.

Para que la adimensionalización sea posible, es necesario expresar todas las variables del sistema en su forma adimensional; de acuerdo a la Figura 2.1, la longitud característica del problema es d_F , por lo que cualquier variable de longitud (x, y, z) puede ser representada de forma adimensional como:

$$\bar{x} = \frac{x}{d_F} \quad (2.21)$$

$$\bar{y} = \frac{y}{d_F} \quad (2.22)$$

$$\bar{z} = \frac{z}{d_F} \quad (2.23)$$

Una vez definido el incremento de temperatura característico (2.20), y con la definición (2.23), es posible obtener la forma adimensional de las soluciones para el campo de temperatura en el estado base.

$$\bar{T}_F = -\bar{z} + 1 + D_U X_U \quad (2.24)$$

$$\bar{T}_{LW} = -X_L \bar{z} + 1 + D_U X_U \quad (2.25)$$

$$\bar{T}_{UW} = X_U (-\bar{z} + 1 + D_U) \quad (2.26)$$

Para todas las soluciones, el campo de temperatura es únicamente dependiente de z (o \bar{z} en su forma adimensional) y siguen una relación lineal, lo anterior significa que la derivada respecto a la dirección vertical de cualquier solución, será una constante que llamaremos β . Al generalizar la derivada con el operador gradiente y al ser las soluciones únicamente dependientes de la dirección perpendicular al plano horizontal, el gradiente del campo de temperatura en la capa de fluido para el estado base se puede escribir como:

$$\nabla T_F = -\beta \hat{\mathbf{k}}$$

dónde T_F es el perfil de temperatura para el fluido en el estado base y $\beta > 0$ es el gradiente dimensional de temperatura, definido como:

$$\beta = \frac{\Delta T_{\text{car}}}{d_F}$$

Entonces, el flujo básico de calor, de la ecuación (2.12c) es:

$$\mathbf{q}_0 = K \beta \hat{\mathbf{k}}$$

dónde K y β son constantes; por lo tanto, la divergencia del flujo de calor en el estado base es igual a cero; y el sistema (2.12) que representa el balance de momento y el vector de flujo de calor en el estado base se puede simplificar a:

$$\nabla p_0 = -\rho_0 g \hat{\mathbf{k}} \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{q}_0 = K \beta \hat{\mathbf{k}} \quad (2.27b)$$

2.9. Ecuaciones lineales de la perturbación y condiciones de frontera

Las ecuaciones lineales para la perturbación se pueden reescribir utilizando los resultados obtenidos en la sección anterior.

Las ecuaciones (2.2), (2.3), (2.5), (2.7), (2.9) y (2.11) gobiernan al fenómeno después de la perturbación. Después de sustituir el estado base y tomando en cuenta los resultados obtenidos de la sección anterior, el sistema de ecuaciones en el estado perturbado es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (2.28a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' + \rho_0 \alpha g T' \hat{\mathbf{k}} \quad (2.28b)$$

$$\left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \boldsymbol{\tau}' = \mu \left[(\nabla \mathbf{u}') + (\nabla \mathbf{u}')^T \right] \quad (2.28c)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta w' \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}' \quad (2.28d)$$

$$\left(1 + \lambda_{CC} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{q}' = \lambda_{CC} K \beta \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial z} - K \nabla T' \quad (2.28e)$$

dónde w' es el componente en dirección z del vector de velocidad \mathbf{u}' .

Los operadores $\left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right)$ y $\left(1 + \lambda_{CC} \frac{\partial}{\partial t}\right)$ se aplican a la ecuación lineal de conservación de momento (2.28b) y la ecuación lineal de conservación de energía (2.28d), respectivamente. Se sustituyen las ecuaciones (2.28c) y (2.28e):

$$\rho_0 \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \mu \nabla \cdot \left[(\nabla \mathbf{u}') + (\nabla \mathbf{u}')^T \right] + \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\nabla p' + \rho_0 \alpha g T' \hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\rho_0 c_p \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta w' \right) = \left[-\nabla \cdot \left(\lambda_{CC} K \beta \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial z} - K \nabla T' \right) \right]$$

En la ecuación de conservación de momento: al aplicar el operador divergencia al gradiente transpuesto del vector de velocidad en la perturbación resulta un término nulo, pues es posible expresarlo en términos de la divergencia del vector de velocidad en la perturbación que es igual a cero por la ecuación (2.28a). En la ecuación de conservación de energía: el término que contiene la derivada respecto a z de la velocidad en la perturbación es igual a cero, entonces:

$$\rho_0 \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}' + \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-\nabla p' + \rho_0 \alpha g T' \hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\rho_0 c_p \left(1 + \lambda_{CC} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta w' \right) = K \nabla^2 T'$$

Para el procedimiento siguiente, es conveniente expresar la ecuación de conservación de momento en notación indicial:

$$\rho_0 \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_i}{\partial t} \hat{\mathbf{e}}_i = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m^2} \hat{\mathbf{e}}_i + \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i + \rho_0 \alpha g T' \hat{\mathbf{e}}_3 \right)$$

dónde u_i denota el componente i -ésimo del vector de velocidad para la perturbación y los términos \hat{e}_i se refieren al componente i -ésimo de la base natural del sistema.

Se aplica el operador rotacional a la ecuación anterior, definido como:

$$\nabla \times = \hat{e}_k \times \frac{\partial}{\partial x_k}$$

que resulta en:

$$\rho_0 \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}_{nmo} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \hat{e}_o = \mu \mathcal{E}_{nmo} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \hat{e}_o + \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho_0 \alpha g \mathcal{E}_{k3o} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) \hat{e}_o \quad (2.29)$$

dónde \mathcal{E}_{mno} es el tensor de permutación de Levi-Civita. El término de la presión desaparece pues el rotacional del gradiente de un campo escalar es igual a cero. La ecuación anterior se puede escribir en términos del vector de vorticidad, cuyas componentes están definidas como:

$$\omega_o = \mathcal{E}_{nmo} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \quad (2.30)$$

de la forma:

$$\rho_0 \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \omega_o}{\partial t} \hat{e}_o = \mu \frac{\partial^2 \omega_o}{\partial x_k^2} \hat{e}_o + \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho_0 \alpha g \mathcal{E}_{k3o} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) \hat{e}_o$$

Se realiza el producto punto de la ecuación anterior con el vector base \hat{e}_3 :

$$\rho_0 \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_k^2}$$

dónde ζ es el componente en z del vector de vorticidad $\boldsymbol{\omega}$. La expresión anterior en notación tensorial es:

$$\left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (2.31)$$

Se aplica nuevamente el operador rotacional a la ecuación (2.29) y se realiza el producto punto con el vector base \hat{e}_3 , se hace uso de la identidad:

$$\mathcal{E}_{olj} \mathcal{E}_{onm} = \delta_{ln} \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{jn}$$

Se escribe:

$$\rho_0 \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w'}{\partial x_k^2} = \mu \frac{\partial^4 w'}{\partial x_k^2 \partial x_m^2} + \left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\rho_0 \alpha g \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x_m^2} - \frac{\partial^2 T'}{\partial x_3^2} \right) \right]$$

dónde w' es el término en dirección z del vector \mathbf{u}' . Reacomodando términos en notación tensorial:

$$\left(1 + \lambda_T \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w' - \alpha g \nabla_{\perp}^2 T' \right) = \nu \nabla^4 w' \quad (2.32)$$

dónde ν es la viscosidad cinemática y el operador ∇_{\perp}^2 se define como:

$$\nabla_{\perp}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Finalmente, la ecuación de conservación de energía se escribe:

$$\left(1 + \lambda_{CC} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta w'\right) = \kappa \nabla^2 T' \quad (2.33)$$

dónde κ es la difusividad térmica.

Las igualdades (2.31), (2.32) y (2.33) son las ecuaciones requeridas para encontrar las soluciones de las perturbaciones. Es importante resaltar que de las tres ecuaciones mencionadas, sólo están acopladas la ecuación resultante de la componente vertical del doble rotacional de la ecuación de balance de momento (2.32) y la ecuación de conservación de la energía (2.33), pues en ambas aparecen los términos w' y T' .

La ecuación de vorticidad (2.31) que se obtuvo al aplicar el operador rotacional a la ecuación de balance de momento es independiente de las otras dos ecuaciones mencionadas y sólo será importante en el caso de que se requieran resolver los componentes horizontales del campo de velocidad. La ecuación de vorticidad toma importancia cuando se encuentran casos de convección natural con rotación y campo magnético (cf. [5]), pues esta ecuación se acopla con las dos restantes para describir al problema en su totalidad.

Entonces, las ecuaciones (2.32) y (2.33) conforman un sistema que se puede expresar en su forma adimensional de la siguiente manera:

$$\left(1 + F \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\nabla}^2 w - R \bar{\nabla}_\perp^2 \theta\right) = \bar{\nabla}^4 w \quad (2.34a)$$

$$\left(1 + \varepsilon_t \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} - w\right) = \bar{\nabla}^2 \theta \quad (2.34b)$$

donde w es la velocidad adimensional del fluido en dirección z y θ es la perturbación de temperatura adimensional. Los parámetros adimensionales que aparecen son $F = \lambda_T \kappa / d_F^2$ el tiempo de relajamiento viscoelástico, $Pr = \nu / \kappa$ el número de Prandtl, $R = \alpha g d_F^3 (T_L - T_U) / [\nu \kappa (1 + D_L X_L + D_U X_U)]$ el número de Rayleigh y $\varepsilon_t = \lambda_{CC} \kappa / d_F^2$ el tiempo de relajamiento térmico de Cattaneo-Christov. Las variables adimensionales se obtienen usando las siguientes escalas: d_F para longitud, d_F^2 / κ para tiempo, $(T_L - T_U) / (1 + D_L X_L + D_U X_U)$ para temperatura y κ / d_F para velocidad.

El número de Prandtl relaciona la velocidad de difusión de cantidad de movimiento y la velocidad de difusión de calor. Para fluidos como el mercurio en el que la conducción de calor es muy efectiva comparada con su capacidad de transmitir momento, el número de Prandtl es muy bajo (igual que el resto de metales líquidos); sin embargo, para fluidos como el aceite de motor en el que la convección es más eficiente que la conducción, el número de Prandtl es elevado. El estudio realizado por Koca, Osztop y Varol [40] demuestra que la formación de celdas convectivas es función del número de Prandtl. A mayor valor del Prandtl, mayor será el espesor de la capa límite térmica, y cuando el Prandtl es pequeño, se permite la formación de diversas celdas. Además, la transferencia de calor se incrementa con el número de Prandtl en cualquier caso, los campos de flujo y temperatura se ven directamente afectados al modificar el número de Prandtl.

El número de Rayleigh está asociado a flujos impulsados por fuerzas de flotación. Este compara las fuerzas de flotación y las fuerzas viscosas. Por debajo del valor crítico R_c no existe movimiento en el fluido y la transferencia de calor ocurre únicamente por conducción [41, 42].

Para las ecuaciones anteriores, se realiza una separación de variables como modos normales de la forma:

$$[w, \theta] = [W(\bar{z}), \Theta(\bar{z})] \exp[i(k_x \bar{x} + k_y \bar{y}) + \sigma \bar{t}]$$

donde k_x y k_y son los componentes en \bar{x} y \bar{y} del vector de número de onda con magnitud $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. El parámetro σ es complejo y se compone de una parte real σ_R que es la tasa de crecimiento, y una parte imaginaria ω que es la frecuencia de oscilación.

Al sustituir esta separación en las ecuaciones del sistema (2.34) se obtiene:

$$\left[\frac{\sigma}{Pr} (1 + F\sigma) \left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - k^2 \right) - \left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - k^2 \right)^2 \right] W = - (1 + F\sigma) Rk^2 \Theta \quad (2.35a)$$

$$\left[(1 + \varepsilon_t \sigma) \sigma - \left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - k^2 \right) \right] \Theta = (1 + \varepsilon_t \sigma) W \quad (2.35b)$$

Para encontrar las soluciones del sistema anterior, es necesario plantear las condiciones de frontera. Con el planteamiento en modos normales, las amplitudes de las perturbaciones son: W y Θ para la velocidad vertical y temperatura, respectivamente. La magnitud de la perturbación de la velocidad y su derivada en la entrecara del fluido con las paredes son idénticas a cero por la condición de impenetrabilidad y de no deslizamiento, es decir:

$$W = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dW}{d\bar{z}} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{z} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{z} = 1 \quad (2.36)$$

El campo de temperatura en la pared inferior está descrito por la ecuación de balance de energía, utilizando la ecuación constitutiva de Fourier para el vector de flujo de calor en la perturbación, en su forma dimensional:

$$\rho_L c_{pL} \frac{\partial T'_{LW}}{\partial t} = K_L \nabla^2 T'_{LW}$$

La ecuación anterior se expresa en su forma adimensional, usando los mismos parámetros de adimensionalización que se utilizaron en el sistema (2.34):

$$\left(\frac{\rho_L c_{pL}}{\rho_0 c_p} X_L \frac{\partial}{\partial \bar{t}} - \bar{\nabla}^2 \right) \theta_{LW} = 0$$

Para la perturbación de la temperatura adimensional en la pared θ_{LW} se propone una expansión en modos normales de la forma $\theta_{LW} = \Theta_{LW}(\bar{z}) \exp[i(k_x \bar{x} + k_y \bar{y}) + \sigma \bar{t}]$ que resulta en la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - q_L^2 \right) \Theta_{LW} = 0$$

dónde

$$q_L^2 = k^2 + X_L Y_L \sigma \quad (2.37)$$

y considerando:

$$Y_L = \frac{\rho_L c_{pL}}{\rho_0 c_p} \quad (2.38)$$

siendo $X_L Y_L$ el cociente de difusividades térmicas del fluido y de la pared inferior.

Análogamente, se sigue el procedimiento realizado para la pared superior, con lo que se obtiene:

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - q_U^2 \right) \Theta_{UW} = 0$$

dónde

$$q_U^2 = k^2 + X_U Y_U \sigma \quad (2.39)$$

y considerando:

$$Y_U = \frac{\rho_U c_{pU}}{\rho_0 c_p} \quad (2.40)$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales se obtienen las soluciones para la perturbación de la temperatura en las paredes:

$$\Theta_{LW} = A_L \cosh q_L \bar{z} + B_L \sinh q_L \bar{z}$$

$$\Theta_{UW} = A_U \cosh q_U \bar{z} + B_U \sinh q_U \bar{z}$$

La temperatura es fija en la superficie inferior de la pared inferior y en la superficie superior de la pared superior. Ello se traduce en que las amplitudes de las respectivas temperaturas deben ser:

$$\Theta_{LW} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{z} = -D_L \quad \text{y} \quad \Theta_{UW} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{z} = 1 + D_U$$

Lo que permite expresar las soluciones en términos de las constantes B_L y B_U :

$$\Theta_{LW} = B_L [\tanh q_L D_L \cosh q_L \bar{z} + \sinh q_L \bar{z}]$$

$$\Theta_{UW} = B_U [-\tanh q_U (1 + D_U) \cosh q_U \bar{z} + \sinh q_U \bar{z}]$$

En las entrecaras debe satisfacerse la continuidad del campo de temperatura y de flujo de calor, entonces:

$$\Theta = \Theta_{LW} \quad \text{y} \quad K_F \frac{d\Theta}{d\bar{z}} = K_L \frac{d\Theta_{LW}}{d\bar{z}} \quad \text{en} \quad \bar{z} = 0$$

$$\Theta = \Theta_{UW} \quad \text{y} \quad K_F \frac{d\Theta}{d\bar{z}} = K_U \frac{d\Theta_{UW}}{d\bar{z}} \quad \text{en} \quad \bar{z} = 1$$

Se asume que las paredes tienen el mismo espesor $D_L = D_U = D$, lo que finalmente permite expresar las condiciones de frontera:

$$\left(\frac{d}{d\bar{z}} - \frac{q_L}{X_L \tanh q_L D} \right) \Theta = 0 \quad \text{en} \quad \bar{z} = 0 \quad (2.41)$$

$$\left(\frac{d}{d\bar{z}} + \frac{q_U}{X_U \tanh q_U D} \right) \Theta = 0 \quad \text{en} \quad \bar{z} = 1$$

Si las propiedades de las paredes fueran idénticas, entonces $Y_L = Y_U = Y$, $q_L^2 = q_U^2 = q^2$ y $X_L = X_U = X$. Definidos como:

$$Y = \frac{\rho_W c_{pW}}{\rho_0 c_p} \quad (2.42)$$

$$X = \frac{K_F}{K_W} \quad (2.43)$$

y

$$q^2 = k^2 + XY\sigma \quad (2.44)$$

dónde el subíndice W corresponde a la propiedad en cualquiera de las dos paredes.

Capítulo 3

Soluciones analíticas y numéricas

En el capítulo anterior se planteó el problema de convección que describen las ecuaciones (2.35) con las condiciones de frontera (2.36) y (2.41). Las condiciones para el inicio de la convección se determinan por el método analítico de Galerkin para resolver el problema en cuestión. Es un método aproximado, pero tiene una alta precisión cuando se incrementa el orden de las aproximaciones polinomiales de las funciones que se sustituyen en las ecuaciones diferenciales. Con los coeficientes de las aproximaciones se forma un problema de valor propio mediante una condición de solvabilidad que permite obtener el valor del número de Rayleigh R .

A partir de este punto, se considera que las paredes tienen las mismas propiedades y espesores, esto implica que supondremos: $q_L = q_U = q$, $Y_L = Y_U = Y$ y $D_L = D_U = D$.

3.1. Convección estacionaria

El primer caso para continuar el análisis es cuando la inestabilidad se presenta de forma estacionaria. Supondremos que el sistema se encuentra en condiciones de marginalidad y no hay crecimiento ni decrecimiento. En ese caso la parte real de σ debe ser cero. Como el flujo es estacionario, entonces la parte imaginaria de σ también es cero. Es decir, $\sigma = 0$. De la ecuación (2.35b):

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - k^2 \right) \Theta = -W \quad (3.1)$$

Se propone la solución para W de la forma:

$$W = \bar{z}^2(1 - \bar{z})^2(a_1 + a_2\bar{z}(1 - \bar{z}) + \dots + a_n\bar{z}^n(1 - \bar{z})^n) \quad (3.2)$$

Los términos $\bar{z}^2(1 - \bar{z})^2$ garantizan que se cumplan las condiciones de frontera (2.36). La cantidad de términos en $a_1 + a_2\bar{z}(1 - \bar{z}) + \dots + a_n\bar{z}^n(1 - \bar{z})^n$ determina el orden de la aproximación, es de esperarse que, a mayor número de términos, se obtenga un mejor resultado para los valores críticos. Sustituyendo esa solución de W en la ecuación (3.1) se obtiene una ecuación diferencial que se puede resolver para Θ .

Las soluciones de Θ y W se sustituyen en la ecuación (2.35a) con $\sigma = 0$:

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - k^2 \right)^2 W = Rk^2\Theta \quad (3.3)$$

Esta ecuación se multiplica por W y se integra en el intervalo $\bar{z} = 0$ a $\bar{z} = 1$, con lo que se obtiene el problema de valor propio por medio del determinante:

$$\left| \int_0^1 \left\{ \left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - k^2 \right)^2 W - Rk^2\Theta \right\} \bar{z}^{n+1}(1 - \bar{z})^{n+1} d\bar{z} \right| = 0 \quad (3.4)$$

Donde n es un número entero que adopta valores desde 1 hasta el orden de la aproximación utilizada para W . Al resolver este determinante se obtiene una solución analítica para el número de Rayleigh. Es importante mencionar que esta solución es independiente de los parámetros Pr , F y ε_t , puesto que $\sigma = 0$.

Las condiciones de frontera (2.41) se asemejan a aquellas que contienen el número de Biot, que en este caso particular de convección estacionaria: $Bi = k/X \tanh kD$. Existen dos límites ampliamente estudiados:

- 1) La condición de frontera con temperatura fija en las paredes que equivale a $Bi \rightarrow \infty$, que implica $X \rightarrow 0$.
- 2) La condición de frontera con flujo de calor fijo que equivale a $Bi \rightarrow 0$, que implica $X \rightarrow \infty$.

Ambos límites fueron calculados y coinciden con aquellos reportados por la literatura, con valores críticos de:

$$R_c = 1707.76 \quad k_c = 3.116 \quad \text{cuando} \quad Bi \rightarrow \infty$$

y

$$R_c = 720 = 6! \quad k_c = 0 \quad \text{cuando} \quad Bi \rightarrow 0$$

El comportamiento del número de Rayleigh como función del número de onda coincide con aquellos reportados por Chandrasekhar [5] y Drazin [6], que se muestra en la Figura 3.1. Los límites en los que las condiciones de frontera equivalen a temperatura fija en las paredes ($X \rightarrow 0$) y flujo de calor fijo en las paredes ($X \rightarrow \infty$) fueron calculados analíticamente con ayuda del software MAPLE. Los valores críticos del número de Rayleigh R_c y números de onda críticos k_c como función del parámetro X se determinaron numéricamente con el método de la secante para un intervalo de valores de $X \in [10^{-7}, 10^7]$. Los resultados coinciden con aquellos reportados por Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18, 19] y se muestran en la Figura 3.2.

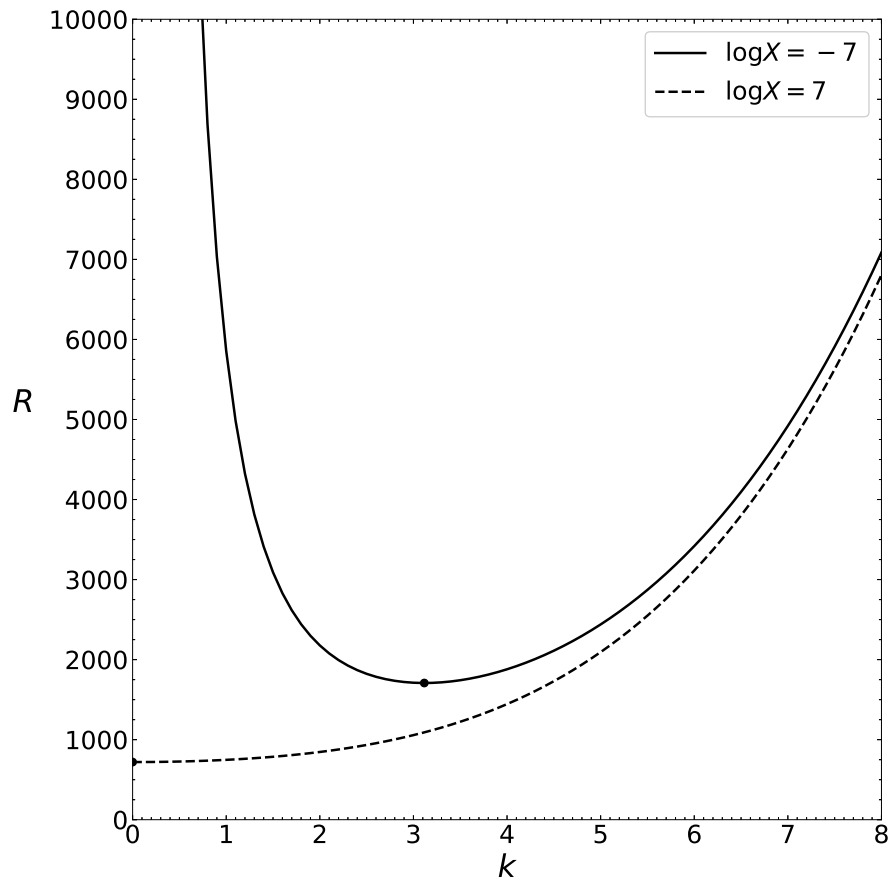


Figura 3.1: Curva de R como función de k en el caso estacionario para $\log X = -7$ y $\log X = 7$. Los valores críticos están indicados con un \bullet .

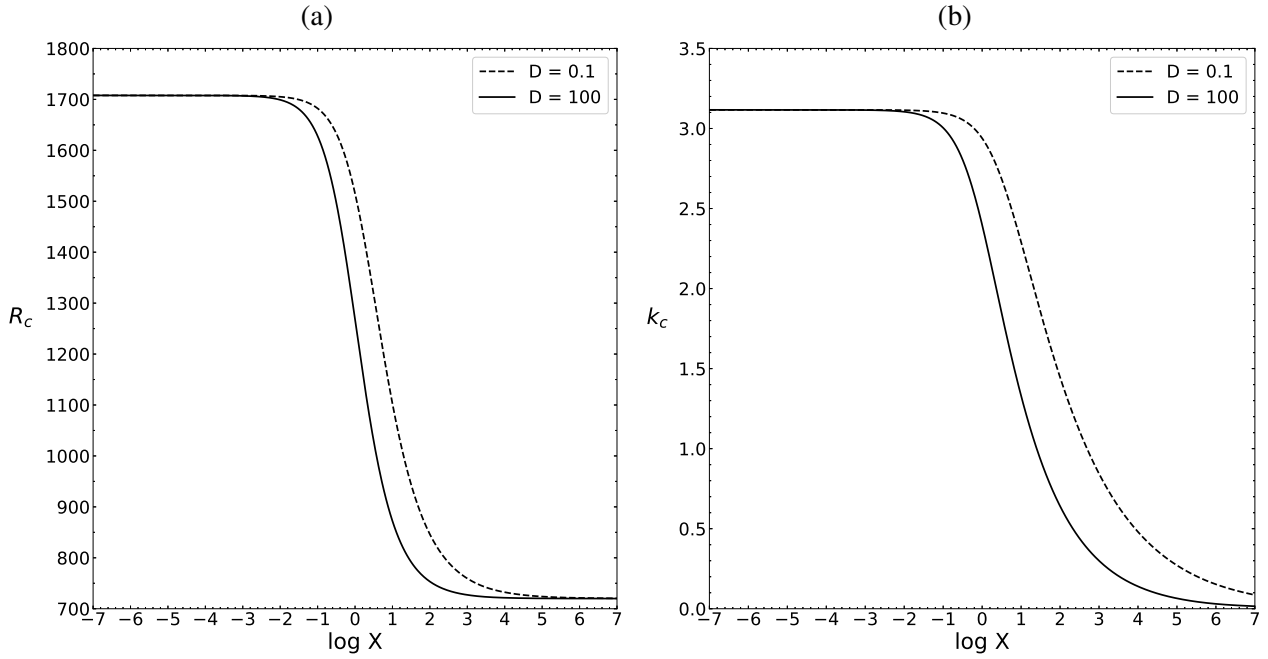


Figura 3.2: Curvas de R_c y k_c como función de X en el caso estacionario.

3.2. Convección oscilatoria de un fluido de Cattaneo-Christov

En contraste con la sección anterior, se debe considerar el comienzo de la inestabilidad a través de un modo oscilatorio. Para soluciones oscilatorias se asume que σ es imaginario puro en el caso marginal.

Se resuelve la ecuación (2.35b), con las condiciones de frontera (2.41):

$$\left(\frac{d^2}{d\bar{z}^2} - q_0 \right) \Theta = -q_1 W \quad (3.5)$$

dónde $q_0 = k^2(1 + \varepsilon_t \sigma)\sigma$, $q_1 = 1 + \varepsilon_t \sigma$ y la velocidad W como está definida en la ecuación (3.2). De nuevo, para el modo oscilatorio se utiliza la aproximación de Galerkin.

Se resuelve la ecuación anterior para Θ y ambas soluciones se sustituyen en la ecuación (2.35b):

$$\left(\frac{d^4}{d\bar{z}^4} - q_2 \frac{d^2}{d\bar{z}^2} + q_3 \right) W = q_4 R \Theta \quad (3.6)$$

donde $q_2 = 2k^2 + \sigma(1 + F\sigma)/Pr$, $q_3 = k^4 + \sigma(1 + F\sigma)k^2/Pr$ y $q_4 = (1 + F\sigma)k^2$.

La ecuación (3.6) se multiplica por W y se integra en el intervalo $\bar{z} = 0$ a $\bar{z} = 1$, con lo que se obtiene el problema de valor propio por medio del determinante:

$$\left| \int_0^1 \left\{ \left(\frac{d^4}{d\bar{z}^4} - q_2 \frac{d^2}{d\bar{z}^2} + q_3 \right) W - q_4 R \Theta \right\} \bar{z}^{n+1} (1 - \bar{z})^{n+1} d\bar{z} \right| = 0 \quad (3.7)$$

Como se mencionó anteriormente, en el estado marginal, σ es imaginario puro y la frecuencia de oscilación es ω . Esto es:

$$\sigma = i\omega$$

Resolver para los valores críticos en el caso oscilatorio es más laborioso, la ecuación que se obtiene del determinante (3.7) para el número de Rayleigh es de naturaleza compleja, por lo que es necesario obtener los valores marginales de la frecuencia ω_m que hacen la parte imaginaria igual a cero ($\Im(R) = 0$). La parte imaginaria del número de Rayleigh puede tener un número infinito de raíces, y es imposible determinar una solución analítica puesto que es una ecuación trascendental, por lo que los valores de la frecuencia marginal fueron determinados mediante métodos numéricos.

El problema se reduce a encontrar una raíz ω de la parte imaginaria del número de Rayleigh que se obtiene del determinante 3.7. Esta raíz se sustituye en la parte real para obtener el número de Rayleigh marginal. Al variar el número de onda se obtiene otra ω que nos da otro Rayleigh marginal. Este proceso se repite hasta encontrar el valor mínimo del número de Rayleigh. A este número de Rayleigh, número de onda y frecuencia se les llama valores críticos y se escriben como R_c , k_c y ω_c , respectivamente.

Una vez obtenidos los valores críticos, se debe analizar cuál de los números de Rayleigh críticos es el menor (estacionario u oscilatorio). Pueden existir puntos de codimensión dos, en los que la inestabilidad estacionaria y oscilatoria compiten por ser el más inestable.

En el trabajo de Bissell [32], puede encontrarse una tabla de casos similares, en los que presenta los valores del número de Cattaneo, el número de onda y la frecuencia críticos que equivalen a un punto de codimensión dos en el caso $Bi \rightarrow \infty$ (temperatura constante en las paredes) para un fluido newtoniano. Otros casos similares pueden encontrarse en los trabajos de Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18, 19], en los que aparecen puntos de codimensión dos para un fluido viscoelástico de Maxwell y un fluido viscoelástico de Jeffrey para valores específicos del cociente de conductividades térmicas X .

La influencia que tiene el número de Prandtl en la estabilidad del sistema es mayúscula. Ha sido estudiada en numerosas ocasiones y se puede afirmar que cuando se incrementa el valor del Prandtl el sistema tiende a desestabilizarse en el contexto del estudio lineal de la estabilidad para el modo oscilatorio. Al comparar los resultados de trabajos como el de Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18, 19], Koca, Oztop y Varol [40], Clever y Busse [43] y Kraichnan [44] se encuentran relaciones monótonas que ligan el número de Prandtl directamente con el número de Rayleigh.

El punto de codimensión dos para el caso viscoelástico $F = 0.1$ en el trabajo de Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18] se encuentra únicamente en el caso $Pr = 1$; al incrementar el valor del número de Prandtl, la magnitud del número de Rayleigh crítico disminuye considerablemente, predominando siempre el inicio de la inestabilidad de forma oscilatoria. El caso $Pr = 1$ es únicamente un punto de referencia especulativo para el presente trabajo, pues es un valor del número de Prandtl común en gases que se encuentran al rango entre 0.7 y 1. Para este trabajo se consideran líquidos viscoelásticos, con valores del número de Prandtl de 5 en adelante. Por ejemplo, el agua a 31°C tiene un número de Prandtl cercano a 5, que son temperaturas comunes en las que se realiza el proceso de replicación de ADN con las biomoléculas disueltas en agua. También es un valor común en disoluciones poliméricas.

Cuando se incrementa el peso de los efectos viscoelásticos del fluido, el sistema se desestabiliza aún más respecto al caso newtoniano, como se puede deducir de los trabajos de Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18, 19] y como mencionan Vest y Arpaci [13] y Sokolov y Tanner [14], reduciendo considerablemente el valor del número de Rayleigh crítico.

Un número de Prandtl elevado es consecuencia de una viscosidad dinámica considerablemente grande o de una difusividad térmica muy pequeña. En estos casos, las partículas de fluido oscilan alrededor de su posición inicial sin realizar el recorrido completo de la celda convectiva; esto ocurre porque las fuerzas viscosas que se oponen al movimiento permiten que el fluido se enfríe de forma anticipada. Con los tres párrafos anteriores, es evidente que al trabajar fluidos viscoelásticos con valores del número de Prandtl superiores a 5, la convección siempre se presenta de forma oscilatoria, dejando a un lado la convección estacionaria en cualquiera de los casos.

Para valores fijos de $Pr = 5$, $F = 0.1$, $D = 0.1, 100$ y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$, las curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X se presentan en la Figura 3.3 para $Y = 0.1$, la Figura 3.4 para $Y = 1$ y la Figura 3.5 para $Y = 10$, respectivamente. El valor de $\varepsilon_t = 0.04524$ corresponde al punto de codimensión dos en el caso de un fluido newtoniano con temperatura fija en las paredes [32]. En el límite de temperatura fija en las paredes ($X \ll 1$), el caso más estable corresponde a la curva $\varepsilon_t = 0$ donde se encontraron los valores críticos $R_c = 310.445$, $k_c = 6.37$ y $\omega_c = 47.83$, el sistema alcanza la mínima estabilidad cuando $\varepsilon_t = 0.03$ con valores críticos de $R_c = 136.3137$, $k_c = 9.58$ y $\omega_c = 65.64$. En el límite de flujo de calor fijo en las paredes ($X \gg 1$) el sistema es más estable cuando $\varepsilon_t = 0$ con valores críticos de $R_c = 323.2547$, $k_c = 6.8$ y $\omega_c = 50.13$ y alcanza la mínima estabilidad cuando $\varepsilon_t = 0.03$ donde se encontraron los valores críticos de $R_c = 137.7104$, $k_c = 10.1$ y $\omega_c = 69.37$. Nótese que para los casos $\varepsilon_t = 0$ y $\varepsilon_t = 0.03$, el sistema es más estable en el límite de flujo de calor fijo respecto al de temperatura fija en las paredes; sin embargo, para $\varepsilon_t = 0.04524$ y $\varepsilon_t = 0.07$ el sistema es más estable cuando se establece temperatura fija en las paredes. Además, cuando $\varepsilon_t = 0.03$ $\varepsilon_t = 0.04524$ y $\varepsilon_t = 0.07$, se presentan máximos de R_c en la zona cercana a $\log X = 0$. Nótese que al incrementar Y decrece la estabilización abrupta que ocurre en la región alrededor de $\log X = 0$, cuando $Y = 10$ el máximo de R_c únicamente aparece cuando $\varepsilon_t = 0.07$ con $D = 100$ y el cambio ya no es tan súbito. Esto se traduce en que el incremento del cociente de difusividades térmicas XY desestabiliza en la cercanía de $\log X = 0$. El parámetro $\varepsilon_t > 0$ desestabiliza el sistema respecto al caso de Fourier $\varepsilon_t = 0$, pero estabiliza al sistema al incrementar su valor. Los valores de k_c como función de X y un valor fijo de ε_t siempre son mayores en $X \gg 1$ que en $X \ll 1$, además se presentan máximos que corresponden a los máximos en R_c , para k_c también se suaviza el crecimiento abrupto en la zona cercana a $\log X = 0$ cuando se incrementa el valor de Y . De aquí se puede concluir que la magnitud de los rollos convectivos siempre será menor con flujo de calor fijo en las paredes que con temperatura fija en las paredes, sin embargo, los verdaderos mínimos de magnitud de los rollos convectivos se presentan en la zona cercana a $\log X = 0$ e incrementan su magnitud conforme Y incrementa. Para este caso, los valores de ω_c con ε_t fijo, siempre son mayores en $X \gg 1$ que en $X \ll 1$, además, también existen valores máximos de ω_c en la zona cercana a $\log X = 0$ que disminuyen con el incremento de Y . De aquí se puede concluir que la convección oscilatoria siempre tendrá mayor frecuencia cuando en el sistema se establezcan condiciones de frontera con flujo de calor fijo en las paredes respecto a la condición de temperatura fija en las paredes, sin embargo, la frecuencia máxima de oscilación se presenta en la zona cercana a $\log X = 0$ y valores pequeños de Y , que es cuando la difusividad térmica del fluido es menor que la difusividad térmica en las paredes. Hay que resaltar, que las frecuencias de oscilación más grandes en todo el dominio de X corresponden al caso más inestable $\varepsilon_t = 0.03$. Curvas de R_c como función de ε_t para $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se encuentran en la Figura 3.15, en la que se observa que existe un valor de mínima estabilidad en $\varepsilon_t = 0.02$ con valores de $R_c = 103.7544$, $k_c = 18.98$ y $\omega_c = 134.72$ para $\log X = -3.5$; y $R_c = 105.5153$, $k_c = 19.02$ y $\omega_c = 134.68$ para $\log X = 3.5$, respectivamente. En congruencia con las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5, en la Figura 3.15 se observa que para el intervalo $\varepsilon_t \in [0.03, 0.07]$ el valor de R_c es creciente, además en este intervalo los valores de R_c son menores que el caso de Fourier $\varepsilon_t = 0$.

En el caso con valores fijos de $Pr = 10$, $F = 0.1$, $D = 0.1, 100$ y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$,

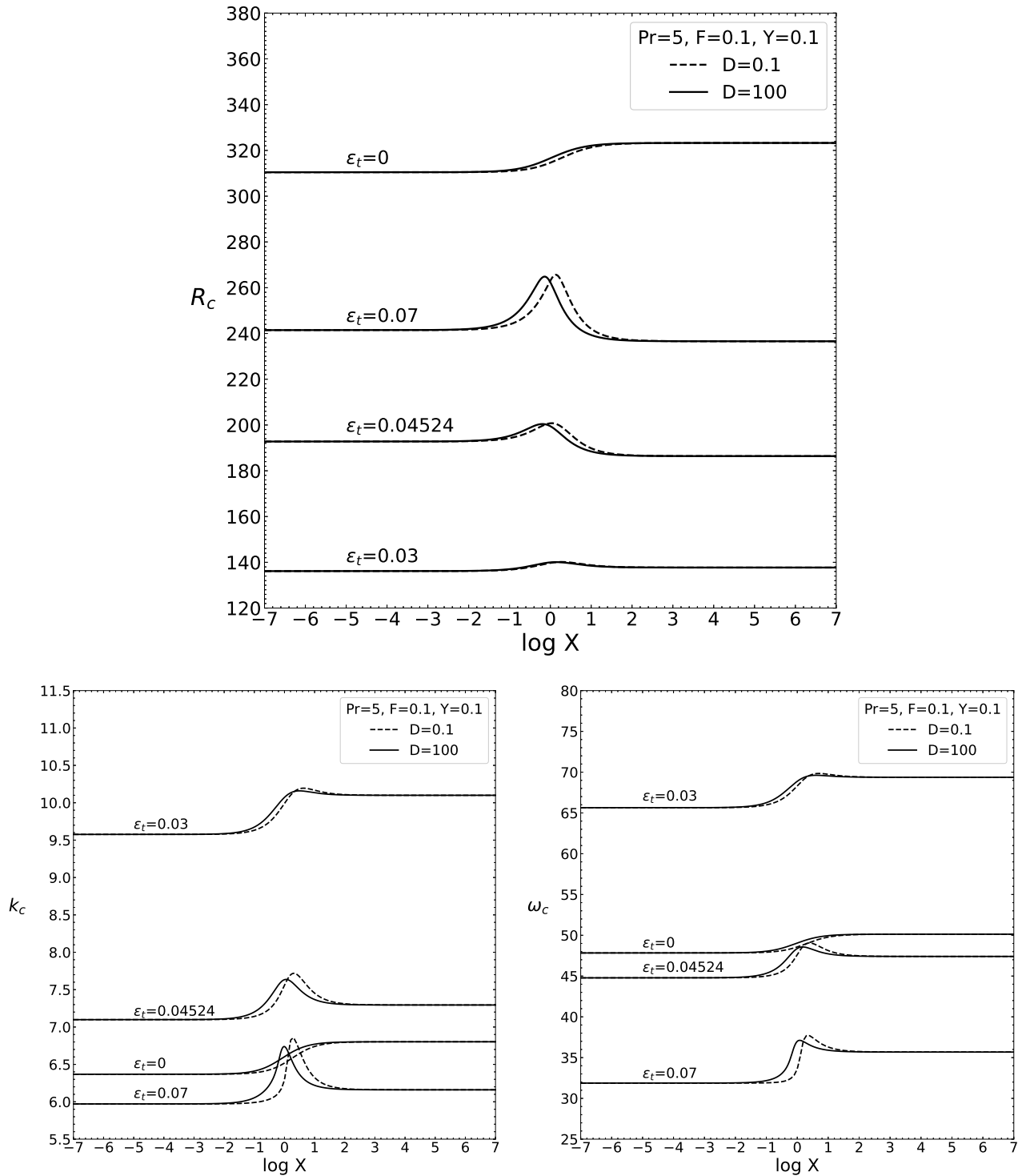


Figura 3.3: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 5$, $F = 0.1$, $Y = 0.1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

curvas de R_c , k_c , ω_c como función de X se presentan en la Figura 3.6 para $Y = 0.1$, la Figura 3.7 para $Y = 1$ y la Figura 3.8 para $Y = 10$, respectivamente. El valor de $\varepsilon_t = 0.04298$ corresponde al punto de codimensión dos en el caso de un fluido newtoniano con temperatura fija en las paredes [32]. En el límite de temperatura fija en las paredes, la máxima estabilidad del sistema se encuentra en $\varepsilon_t = 0.07$ con los siguientes valores críticos: $R_c = 316.3905$, $k_c = 5.32$ y $\omega_c = 31.18$; mientras

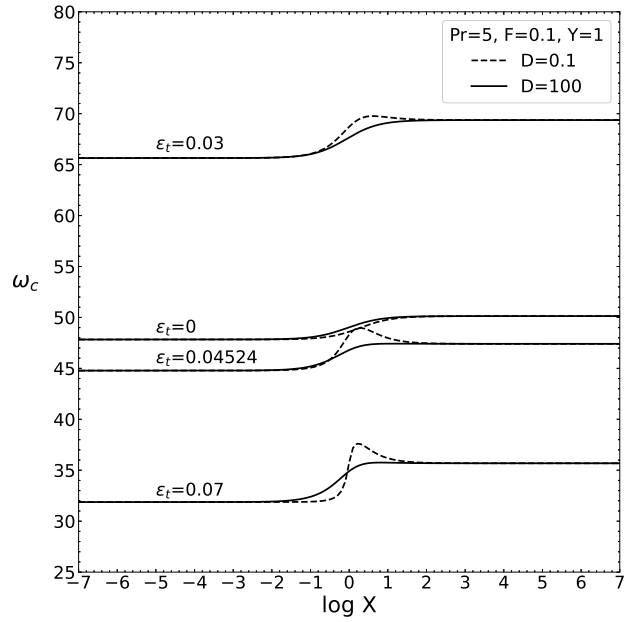
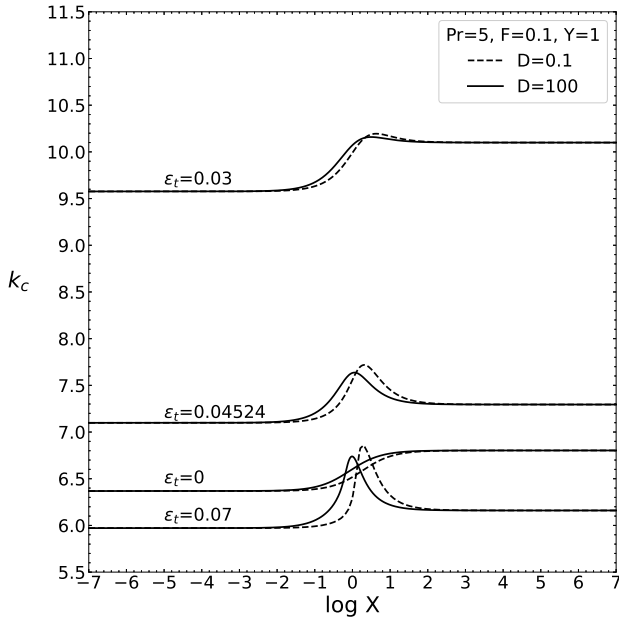
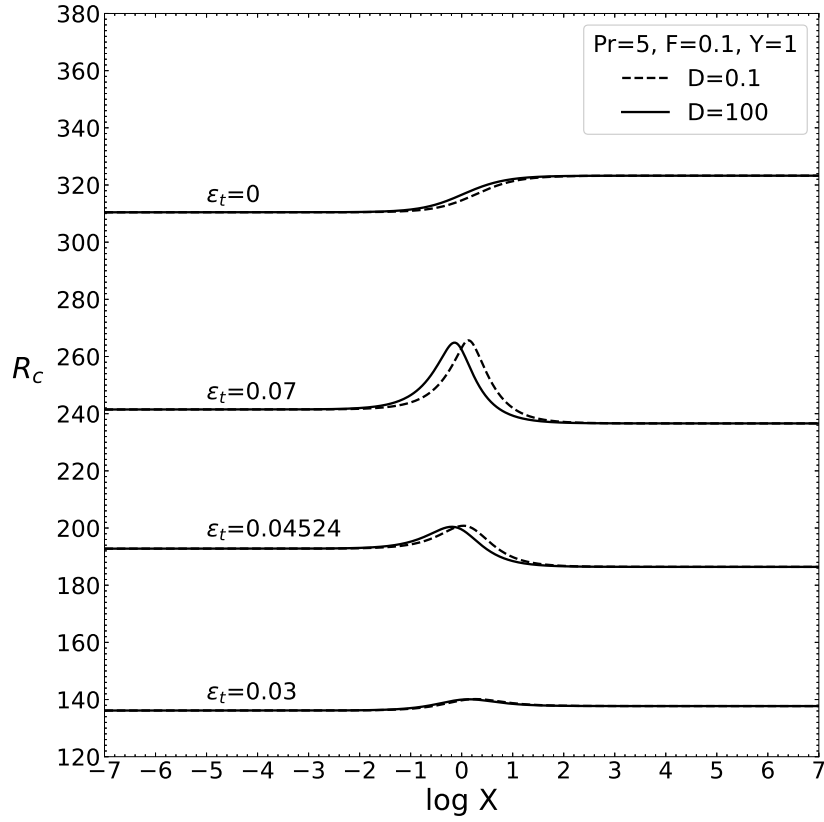


Figura 3.4: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 5$, $F = 0.1$, $Y = 1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

que el sistema es más inestable cuando $\varepsilon_t = 0$ con valores críticos de $R_c = 226.715$, $k_c = 7.26$ y $\omega_c = 76.21$. En el límite de flujo de calor fijo en las paredes se encontró que el sistema es más estable cuando $\varepsilon_t = 0.07$ con valores críticos de $R_c = 316.4185$, $k_c = 5.47$ y $\omega_c = 36.06$; y el sistema es más inestable cuando cuando $\varepsilon_t = 0.03$ con valores críticos de $R_c = 220.108$, $k_c = 6.47$ y $\omega_c = 59.31$. Cuando $X \ll 1$, el incremento de $\varepsilon_t \in [0.03, 0.07]$ estabiliza al sistema, mientras que cuando $X \gg 1$ la introducción de $\varepsilon_t = 0.03$ desestabiliza al sistema respecto al caso $\varepsilon_t = 0$ pero se estabiliza cuando

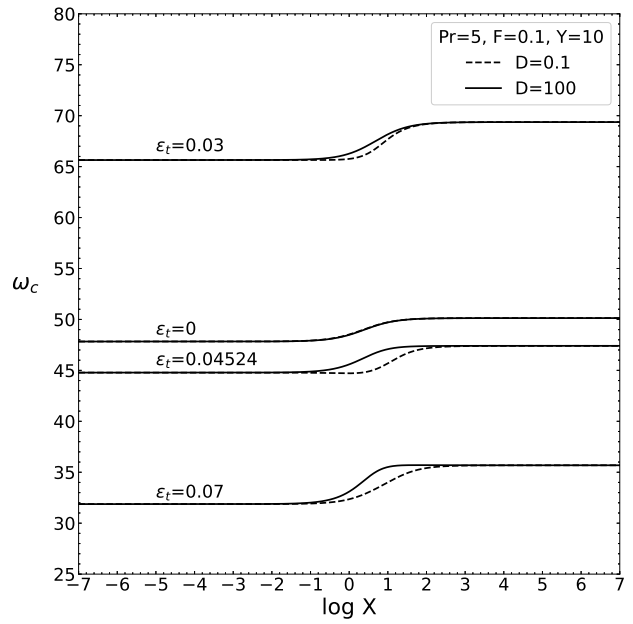
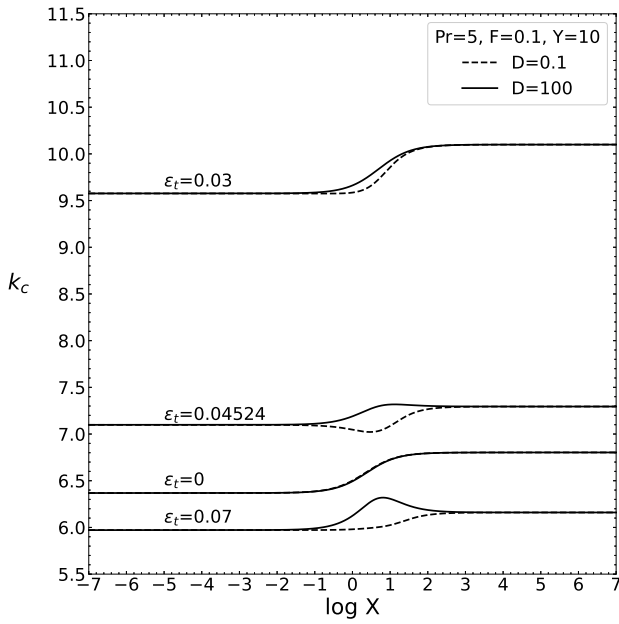
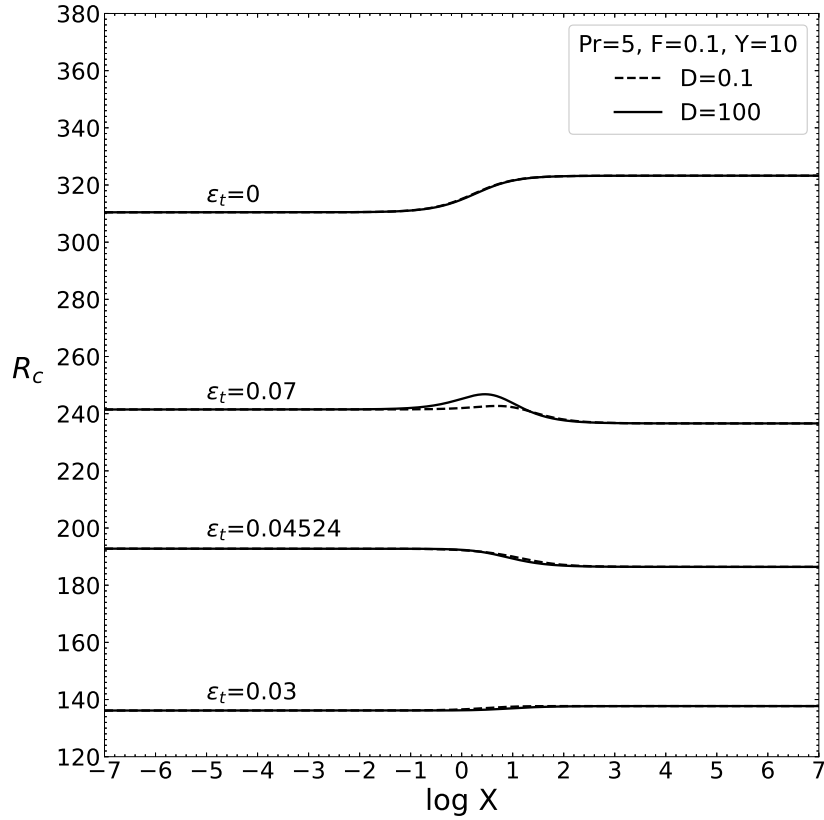


Figura 3.5: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 5$, $F = 0.1$, $Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

el valor de ε_t incrementa. En el caso $\varepsilon_t = 0$, el sistema es más estable cuando $X \gg 1$ respecto a $X \ll 1$, cuando $\varepsilon_t = 0.03$ y $\varepsilon_t = 0.04298$ el sistema es más estable cuando $X \ll 1$ respecto a $X \gg 1$; el caso $\varepsilon_t = 0.07$ tiene valores de R_c similares en ambos extremos del dominio de X , y nuevamente el sistema es más estable en $X \gg 1$ respecto a $X \ll 1$. Se observa que las curvas $\varepsilon_t = 0$ y $\varepsilon_t = 0.03$ se intersectan en cercanía de $\log X = 0$. Nuevamente se encuentra una destabilización con el incremento del cociente de difusividades XY en cercanía de $\log X = 0$. La comparación entre

estos resultados cuando $\varepsilon_t = 0$ y los presentados por Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18] es muy buena en los extremos de X . Los valores de k_c como función de X y un valor fijo de $\varepsilon_t = 0$ son mayores en $X \gg 1$ que en $X \ll 1$ y la diferencia que existe en las curvas $D = 0.1$ y $D = 100$ es muy cercana a cero cuando $Y = 10$, lo anterior se traduce en que la magnitud de los rollos convectivos en el caso de Fourier siempre es menor cuando en las paredes del sistema se establecen condiciones de frontera de flujo de calor fijo respecto a los rollos convectivos que se forman con temperatura fija en las paredes; además, el espesor de las paredes se vuelve irrelevante en la magnitud de los rollos convectivos cuando el fluido tiene una difusividad térmica mayor a la de las paredes. Cabe destacar, que el caso de Fourier es el único que no presenta valores máximos de k_c en cercanía de $\log X = 0$. Para valores fijos de $\varepsilon_t = 0.03$ y $\varepsilon_t = 0.04298$, el valor de k_c cuando $X \ll 1$ es mayor que cuando $X \gg 1$, y ambos presentan un valor máximo en cercanía de $\log X = 0$, estos valores máximos disminuyen considerablemente al incrementar el parámetro Y . Cuando $\varepsilon_t = 0.07$, los valores de k_c son mayores en $X \gg 1$ respecto a $X \ll 1$, es decir, la magnitud de los rollos convectivos es mayor cuando se fija la temperatura en las paredes. Nuevamente, al fijar el tiempo de relajamiento térmico $\varepsilon \neq 0$ la mínima magnitud de los rollos convectivos se encuentra en cercanía de $\log X = 0$. Para este caso, los valores de ω_c con ε_t fijo, son mayores en $X \gg 1$ respecto a ω_c en $X \ll 1$, esto se traduce en que la frecuencia de oscilación es mayor cuando se establece flujo de calor fijo en las paredes. Aquí, la frecuencia máxima de oscilación se encuentra en el caso de Fourier en todo el dominio de X . Cabe destacar, que para ε_t fijo, los parámetros Y y D no tienen relevancia en los valores de R_c , k_c y ω_c en ambos extremos del dominio de X , esto es porque la difusividad térmica de las paredes y el espesor de éstas no tienen efecto en el sistema cuando se fija la temperatura o el flujo de calor en la entrecara de la capa de fluido con las paredes. Las curvas de R_c como función de ε_t para $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se presentan en la Figura 3.15, donde existe un mínimo de estabilidad en $\varepsilon_t = 0.01$ con valores críticos de $R_c = 103.7325$, $k_c = 19.04$ y $\omega_c = 190.56$ para $\log X = -3.5$ y $R_c = 104.6573$, $k_c = 19.03$ y $\omega_c = 190.56$ para $\log X = 3.5$, respectivamente. En este caso, se observa de la Figura 3.15 que para $\log X = -3.5$ la magnitud de R_c cuando $\varepsilon_t = 0.03$ supera al caso de Fourier $\varepsilon_t = 0$, sin embargo, cuando $\log X = 3.5$ la magnitud de R_c con $\varepsilon_t = 0.03$ es menor al caso de Fourier; lo que coincide con los casos de mínima estabilidad de las Figuras 3.6, 3.7 y 3.8 en ambos extremos de X .

Al incrementar el valor del número de Prandtl $Pr = 25$ y con valores fijos de $F = 0.1$, $D = 0.1$, 100 y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ las curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X se presentan en la Figura 3.9 para $Y = 0.1$, la Figura 3.10 para $Y = 1$ y la Figura 3.11 para $Y = 10$, respectivamente. El valor de $\varepsilon_t = 0.04164$ corresponde al punto de codimensión dos en el caso de un fluido newtoniano con temperatura fija en las paredes [32]. Cuando las condiciones de frontera se establecen en la forma de temperatura fija en las paredes, la máxima estabilidad del sistema se encuentra en $\varepsilon_t = 0.04164$ con valores críticos $R_c = 396.094$, $k_c = 5.31$ y $\omega_c = 47.91$ y la mínima estabilidad se encuentra en $\varepsilon_t = 0$ con valores críticos de $R_c = 167.4379$, $k_c = 8.69$ y $\omega_c = 141.93$. En el límite donde las condiciones de frontera tienden al caso de flujo de calor fijo en las paredes, el sistema es más estable cuando $\varepsilon_t = 0.07$ con valores críticos de $R_c = 387.8659$, $k_c = 5.2$ y $\omega_c = 36.91$, aquí, el caso de mínima estabilidad también corresponde a $\varepsilon_t = 0$ con valores críticos de $R_c = 169.964$, $k_c = 8.91$ y $\omega_c = 144.99$. Para los valores fijos $\varepsilon_t = 0$ y $\varepsilon_t = 0.07$, el sistema es más estable cuando $X \gg 1$ respecto a $X \ll 1$, se presenta una estabilización abrupta para $\varepsilon_t = 0.07$ en cercanía de $\log X = 0$ que disminuye con el incremento de Y . Para los valores fijos $\varepsilon_t = 0.03$ y $\varepsilon_t = 0.04164$, el sistema es más estable cuando $X \ll 1$ respecto a $X \gg 1$; para estos tiempos de relajamiento térmico, no existe la estabilización abrupta en cercanía de $\log X = 0$, y el efecto del incremento de Y minimiza la diferencia de estabilidades que provoca el espesor de las paredes D . Las curvas $\varepsilon_t = 0.07$ y $\varepsilon_t = 0.04164$ se intersectan en la zona cercana a $\log X = 0$, en $X \ll 1$ el caso más estable es $\varepsilon_t = 0.04164$, mientras

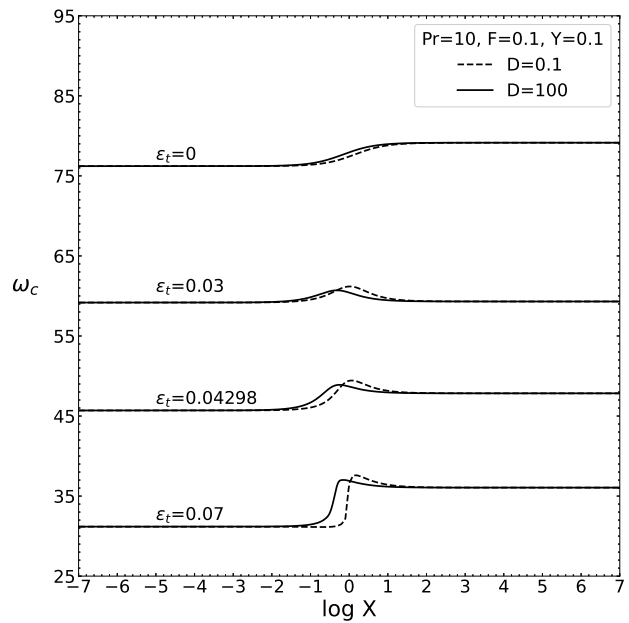
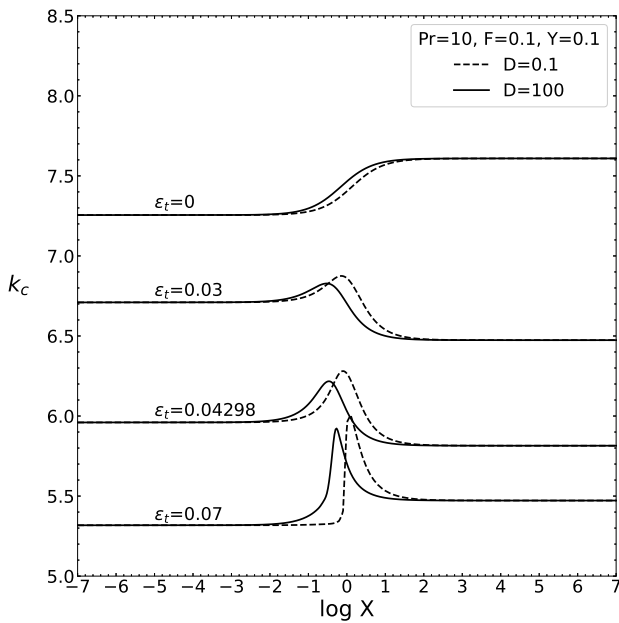
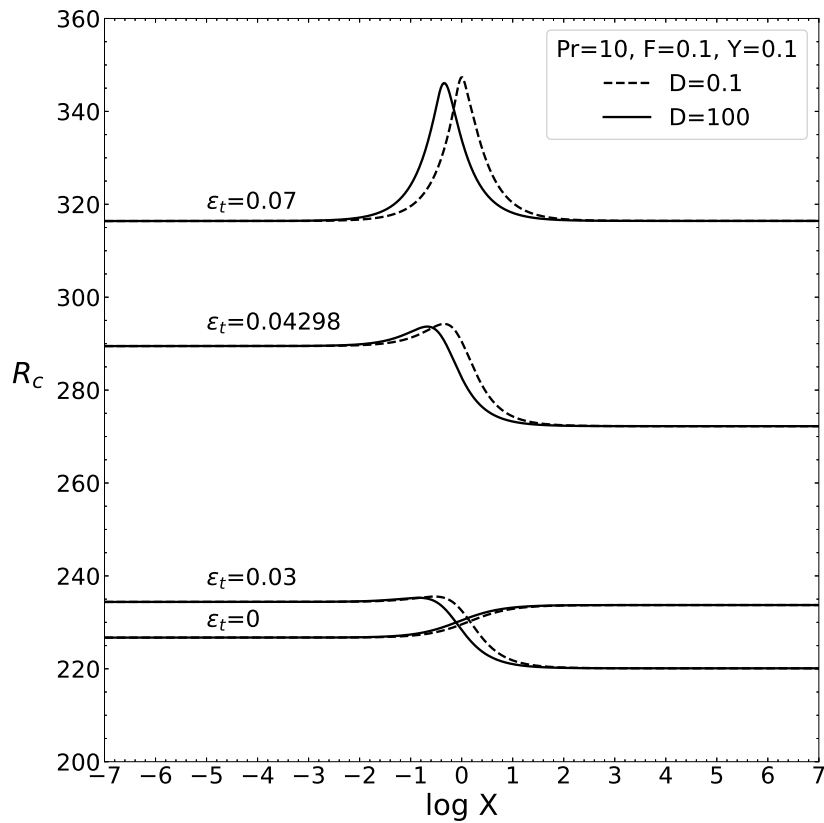


Figura 3.6: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 10, F = 0.1, Y = 0.1, \varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

que en $X \gg 1$ el caso más estable corresponde a $\varepsilon_t = 0.07$; el valor de intersección en X incrementa conforme el parámetro Y incrementa, pues la estabilización abrupta de $\varepsilon_t = 0.07$ disminuye también con el incremento de Y . Los valores de k_c como función de X tienen el mismo comportamiento que sus respectivos R_c respecto a X , en este caso, el número de onda es máximo en el caso de Fourier para todo el dominio de X . Lo anterior se traduce en que la magnitud de los rollos convectivos para el caso de Fourier siempre será menor respecto a la magnitud de los rollos convectivos al introducir

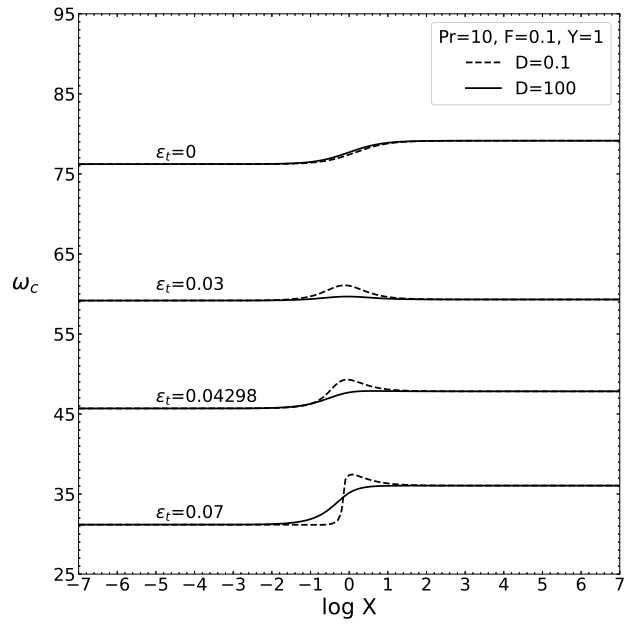
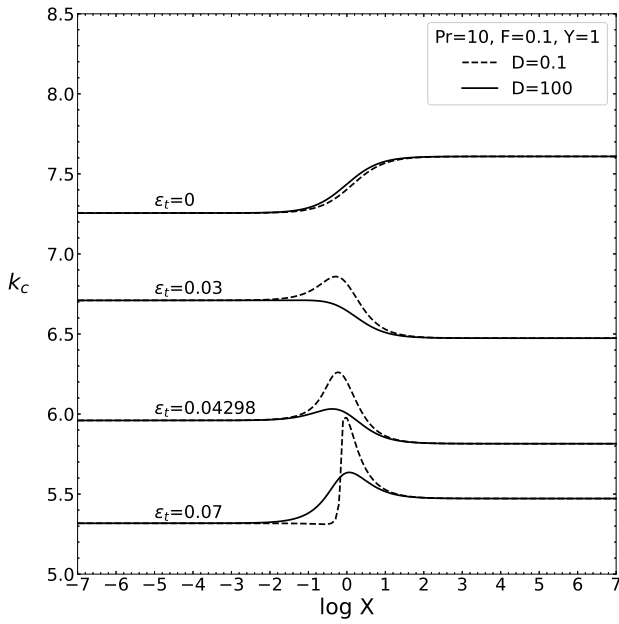
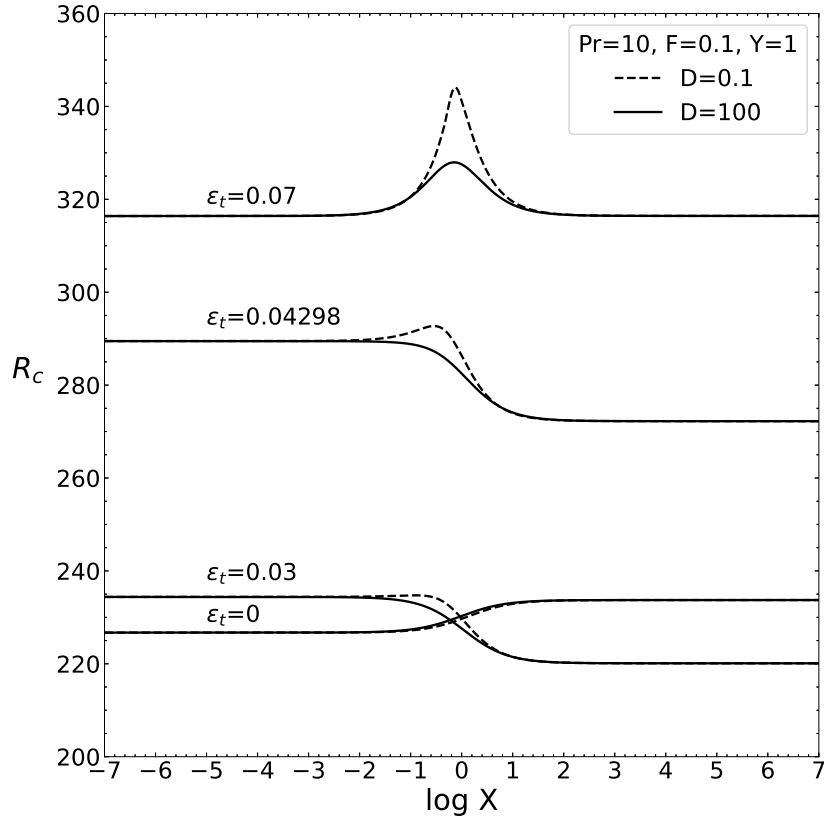


Figura 3.7: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 10$, $F = 0.1$, $Y = 1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

un tiempo de relajamiento térmico. En este caso, cuando $\varepsilon_t = 0.07$, se presentan máximos de k_c en cercanía de $\log X = 0$, este máximo también disminuye conforme Y incrementa, indicando que el decrecimiento abrupto en la magnitud de los rollos convectivos se suaviza. Aún cuando $Y = 10$, en el caso $\varepsilon_t = 0.07$, el máximo de k_c sigue estando cercano a la zona $\log X = 0$ y decrece monótonamente respecto a X . El comportamiento de ω_c como función de X es monótono y creciente en todos los casos, excepto cuando $\varepsilon_t = 0.07$ y $Y = 0.1, 1$, en donde se presentan valores máximos de ω_c en cer-

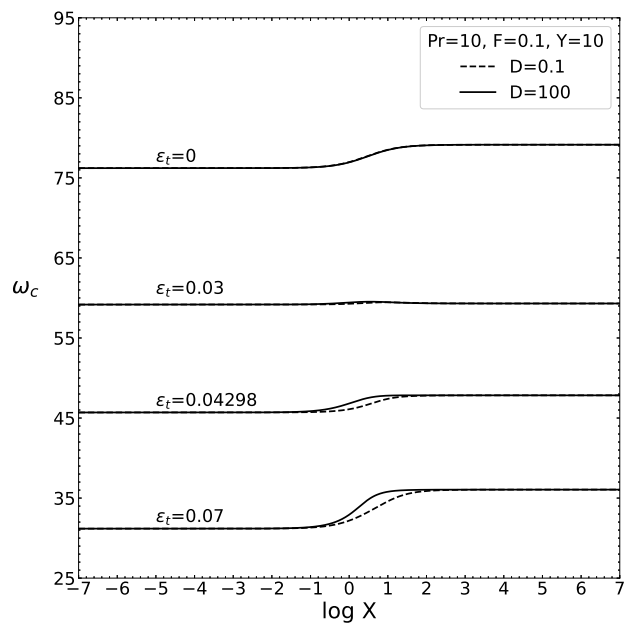
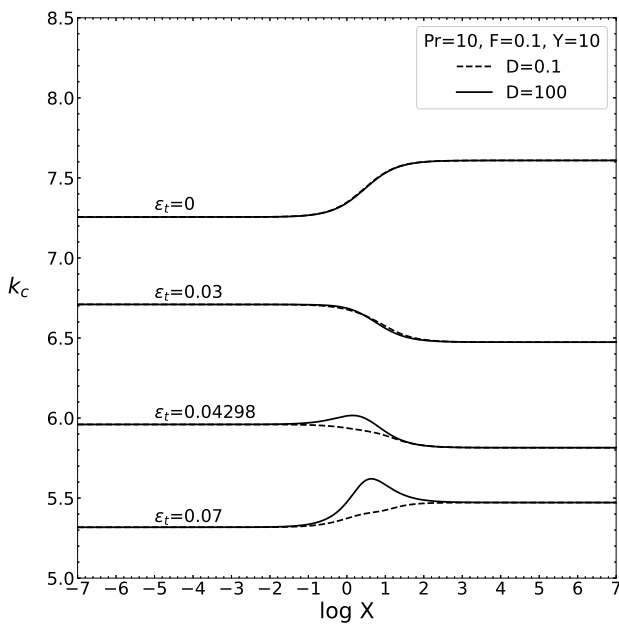
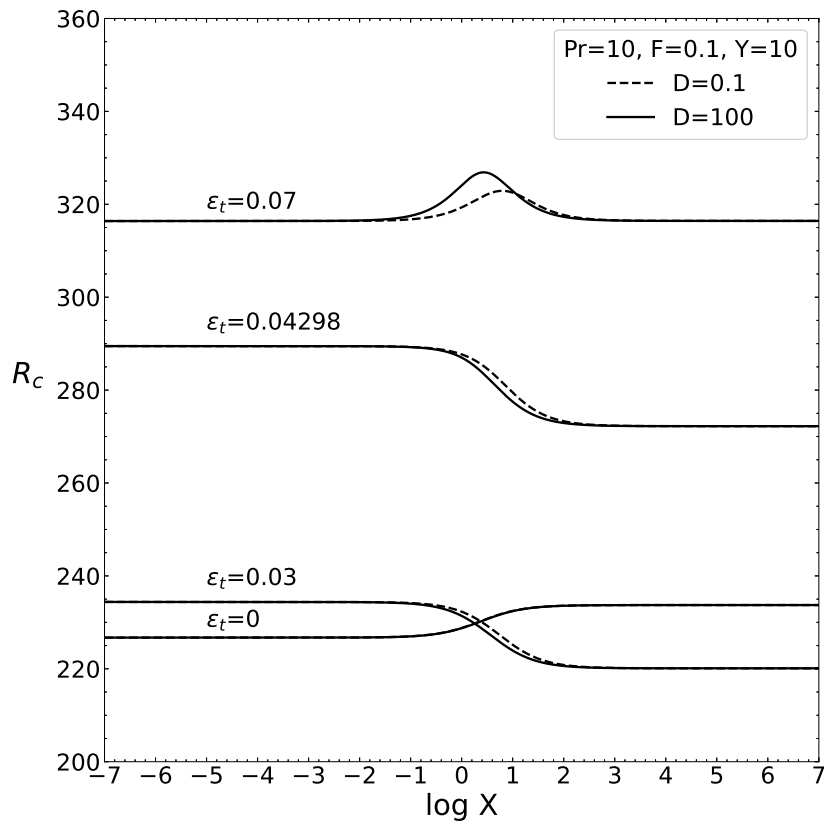


Figura 3.8: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 10, F = 0.1, Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

canía de $\log X = 0$ que desaparecen cuando $Y = 10$, la frecuencia de oscilación es mayor en $X \gg 1$ respecto a $X \ll 1$, por lo tanto, la convección tendrá mayor frecuencia de oscilación cuando se fije el flujo de calor en las paredes. Aquí, la frecuencia de oscilación máxima siempre corresponde al caso de Fourier y disminuye su valor cuando ε_t incrementa, esto significa que al incrementar el tiempo de relajamiento térmico, la frecuencia de oscilación cuando se presenta la convección disminuye. Cabe destacar, que para $Pr = 25$ y $F = 0.1$, la diferencia de ω_c es muy pequeña cuando se varía el pará-

metro D , excepto en el caso $\varepsilon_t = 0.07$, esto significa que el espesor de las paredes no tiene influencia en la frecuencia de oscilación para valores del tiempo de relajamiento térmico pequeños, únicamente existirá diferencia cuando la conductividad térmica del fluido y las paredes sea similar. De lo anterior se puede concluir que el caso de Fourier es siempre el más inestable para cualquier valor de X , en el que se presentan los rollos convectivos de menor magnitud y las frecuencias de oscilación más altas comparadas a aquellos casos donde $\varepsilon_t \neq 0$. El comportamiento de R_c como función de ε_t se observa en la Figura 3.15 para valores fijos de $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$, aquí se encuentran mínimos de estabilidad con valores de $R_c = 109.8054$, $k_c = 16.28$ y $\omega_c = 257.26$ para $\log X = -3.5$ y de $R_c = 109.9334$, $k_c = 16.44$ y $\omega_c = 259.71$ para $\log X = 3.5$, respectivamente; ambos localizados en un valor de $\varepsilon_t = 0.0048$. También se observa de la Figura 3.15 en el intervalo $\varepsilon_t \in [0.03, 0.07]$ que todas las magnitudes de R_c superan al caso de Fourier.

Finalmente, se fijan los valores $Pr = 50$, $F = 0.1$, $D = 0.1, 100$ y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$ para representar las curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X en la Figura 3.12 para $Y = 0.1$, la Figura 3.13 para $Y = 1$ y la Figura 3.14 para $Y = 10$, respectivamente. El valor de $\varepsilon_t = 0.0412$ corresponde al punto de codimensión dos en el caso de un fluido newtoniano con temperatura fija en las paredes [32]. En este caso, el valor $\varepsilon_t = 0.0412$ representa el máximo de estabilidad para ambos límites de X con valores de $R_c = 447.6759$, $k_c = 5.07$ y $\omega_c = 48.98$ cuando se fija la temperatura en las paredes y $R_c = 441.2882$, $k_c = 5.08$ y $\omega_c = 52.78$ cuando se fija el flujo de calor en las paredes, respectivamente. Los mínimos de estabilidad en ambos extremos de X corresponden al caso $\varepsilon_t = 0$, con valores críticos de $R_c = 142.9516$, $k_c = 10.01$ y $\omega_c = 228.81$ con temperatura fija en las paredes y $R_c = 143.9798$, $k_c = 10.14$ y $\omega_c = 231.5$ con flujo de calor fijo en las paredes, respectivamente. En el caso $\varepsilon_t = 0$, el sistema es más estable cuando $X \gg 1$ en comparación con $X \ll 1$. Para $\varepsilon_t = 0.03$ y $\varepsilon_t = 0.0412$, la estabilidad es mayor para $X \ll 1$ en comparación con $X \gg 1$, esto significa que para valores del tiempo de relajamiento térmico moderado, el sistema es más estable cuando se fija la temperatura en las paredes. Cuando $\varepsilon_t = 0.07$ se regresa al caso en que el sistema es más estable cuando $X \ll 1$ en comparación con $X \gg 1$, sin embargo, la máxima de estabilidad del sistema se encuentra en la zona cercana a $\log X = 0$, donde ocurre una estabilización abrupta, misma que disminuye conforme Y incrementa. Igual que en el caso anterior, la estabilización abrupta en la zona cercana a $\log X = 0$ sólo ocurre cuando $\varepsilon_t = 0.07$, es decir, la influencia del cociente de difusividades XY sólo es relevante cuando existen tiempos de relajamiento térmico elevados. La influencia de D es mucho más importante cuando Y es pequeño, esto para cualquier valor de ε_t , al incrementar el valor de Y , la diferencia entre $D = 0.1$ y $D = 100$ disminuye, esto significa que el espesor de las paredes tiene más relevancia cuando la difusividad térmica del fluido es menor que la de las paredes. Anteriormente, se comentó que el incremento del número de Prandtl desestabiliza al sistema en el caso de Fourier, sin embargo, es evidente que en el intervalo $\varepsilon_t \in [0.03, 0.07]$ el efecto es contrario a esto, pues los valores $\varepsilon_t \neq 0$ se encuentran cada vez más alejados de $\varepsilon_t = 0$, estabilizando al sistema para valores de $Pr = 10$ y superiores. Esto permite ver que la ley de Fourier predice valores inferiores a la realidad cuando el número de Prandtl y el tiempo de relajamiento térmico son considerablemente grandes. El comportamiento de k_c como función de X es el mismo que su respectivo R_c como función de X . Aquí, el número de onda máximo corresponde a $\varepsilon_t = 0$ para todo el dominio de X . Los valores ω_c son monótonos y crecientes respecto a X para cualquier valor fijo de ε_t , excepto cuando $\varepsilon_t = 0.07$ y $Y = 0.1, 1$, en donde existen máximos en cercanía de $\log X = 0$, que disminuyen su valor con el incremento de Y . Las frecuencias de oscilación siempre son mayores en $X \gg 1$ en comparación con $X \ll 1$. Aquí, la frecuencia de oscilación máxima corresponde al caso de Fourier en todo el dominio de X . De lo anterior se concluye que para este caso, el caso de Fourier es siempre el más inestable, en el que la magnitud de los rollos convectivos es mínima y la frecuencia de oscilación es máxima para cualquier valor de X . Las curvas de R_c como función de ε_t

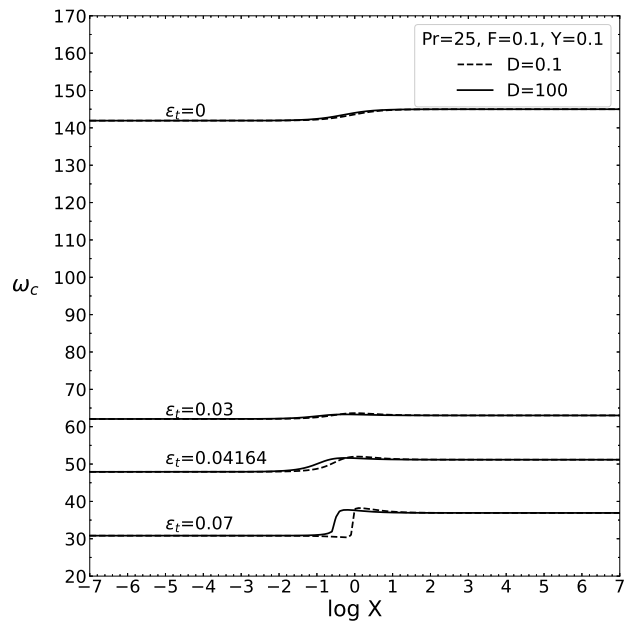
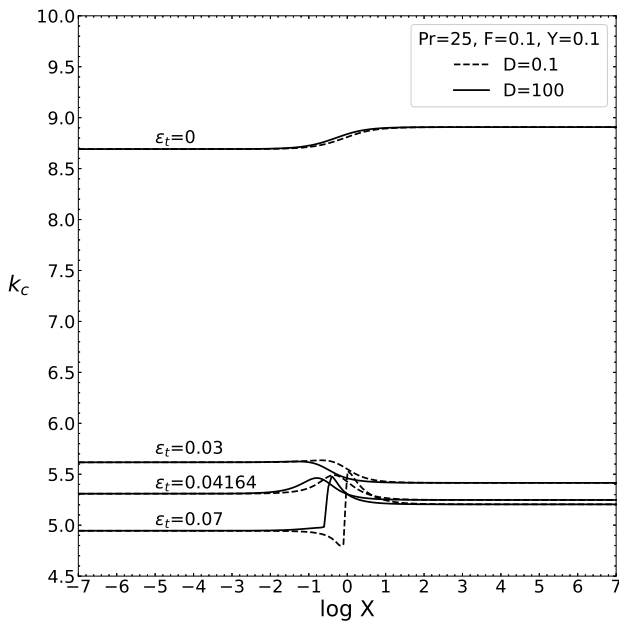
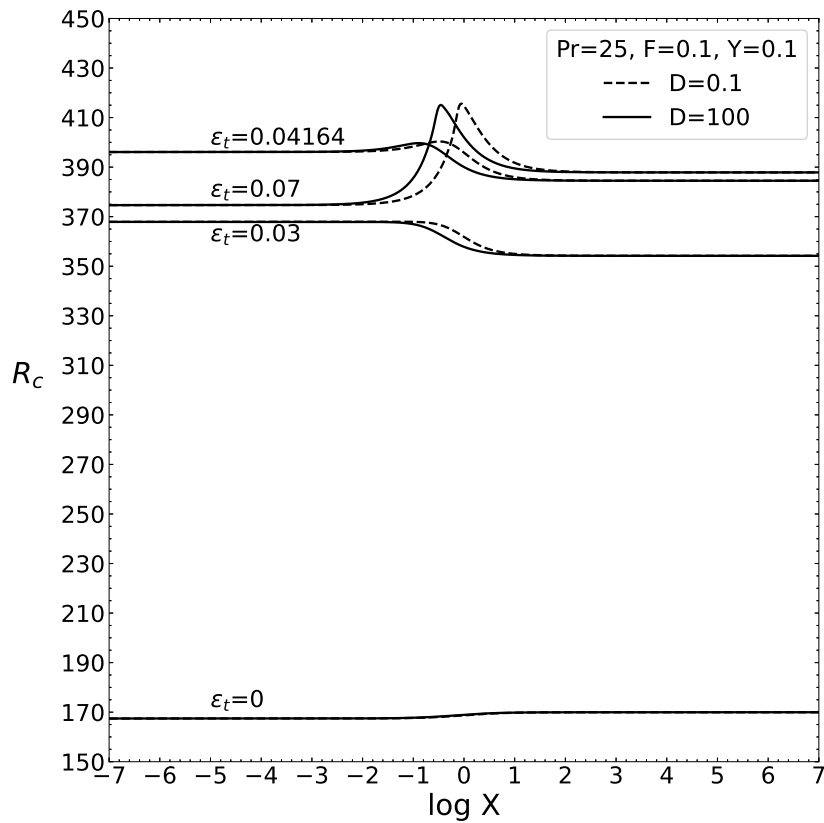


Figura 3.9: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 25$, $F = 0.1$, $Y = 0.1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

se presentan en la Figura 3.15, donde se encuentran valores de mínima estabilidad en $\varepsilon_t = 0.0024$ de $R_c = 107.1604$, $k_c = 18.75$ y $\omega_c = 419.41$ para $\log X = -3.5$ y $R_c = 107.1766$, $k_c = 18.81$ y $\omega_c = 420.72$ para $\log X = 3.5$, respectivamente. También se observa que la magnitud de R_c en el intervalo $\varepsilon_t \in [0.03, 0.07]$ es mayor respecto al caso de Fourier. En las Figuras 3.12, 3.13 y 3.14 el caso de máxima estabilidad corresponde a $\varepsilon_t = 0.0412$ porque ese tiempo de relajamiento térmico se encuentra cercano al máximo de R_c que se presenta en la Figura 3.15.

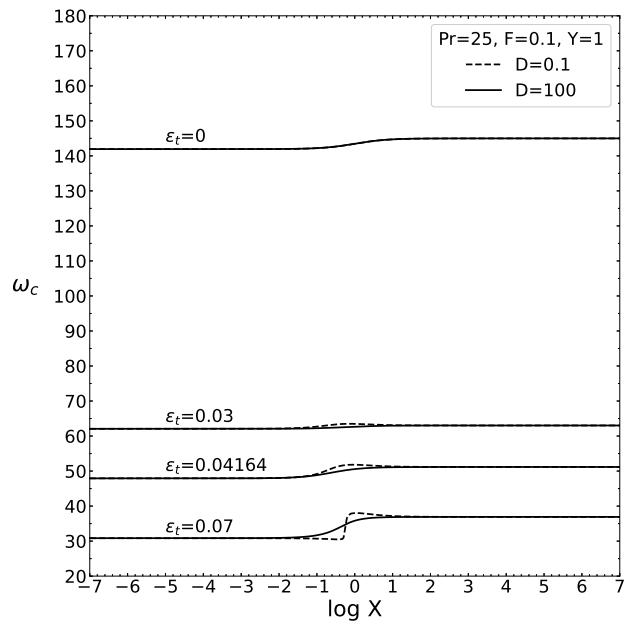
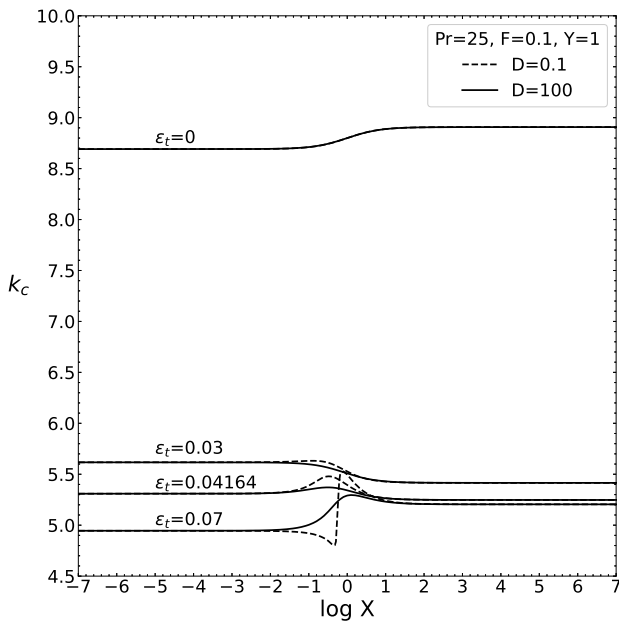
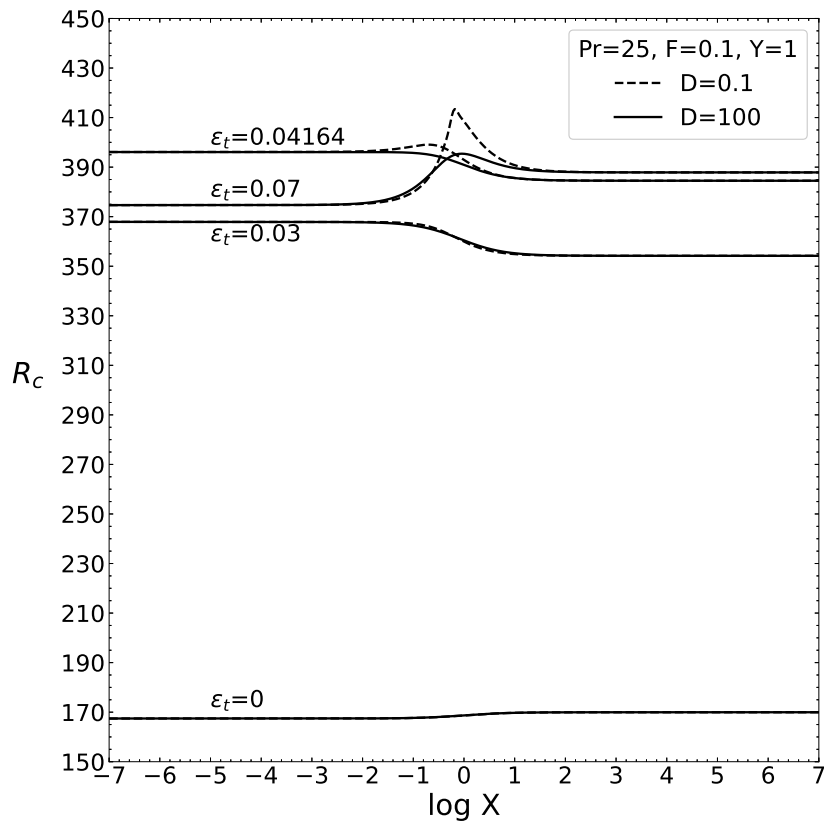


Figura 3.10: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 25$, $F = 0.1$, $Y = 1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

En la Figura 3.15 se observan las curvas de R_c como función de ε_t para $Pr = 5, 10, 25, 50$, $F = 0.1$ y $\log X = -3.5, 3.5$. Los valores de D y Y no son importantes, pues los valores de X escogidos en la figura están fuera de la región cercana a $\log X = 0$. Aquí se confirma que, en el caso de Fourier, la estabilidad del sistema disminuye conforme el número de Prandtl incrementa. Las curvas presentan mínimos de R_c , cuya abscisa se aproxima a $\varepsilon_t = 0$ cuando Pr incrementa. En el intervalo $\varepsilon_t \in [0.03, 0.07]$, los incrementos en el número de Prandtl provocan una estabilización del sistema,

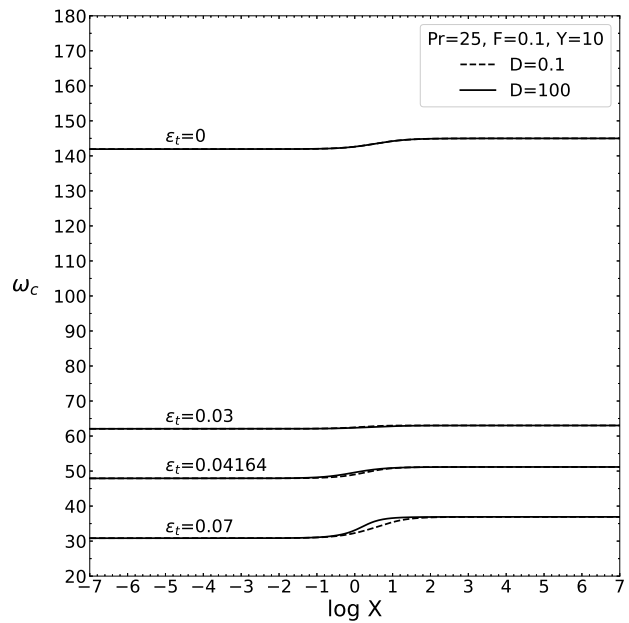
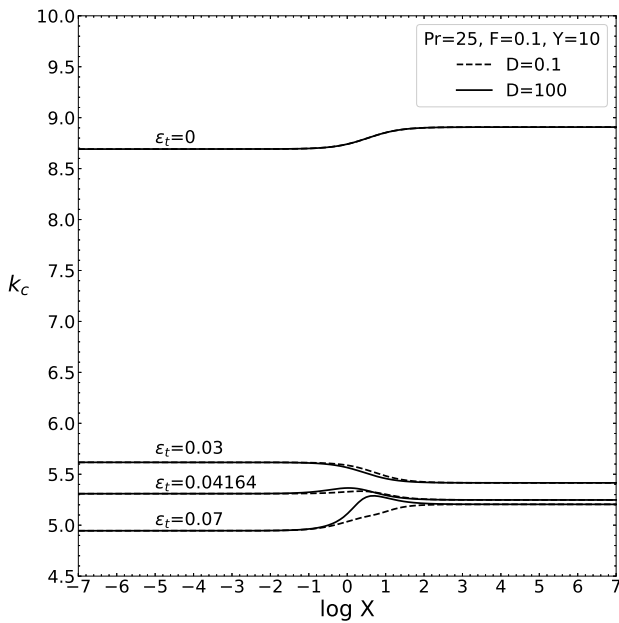
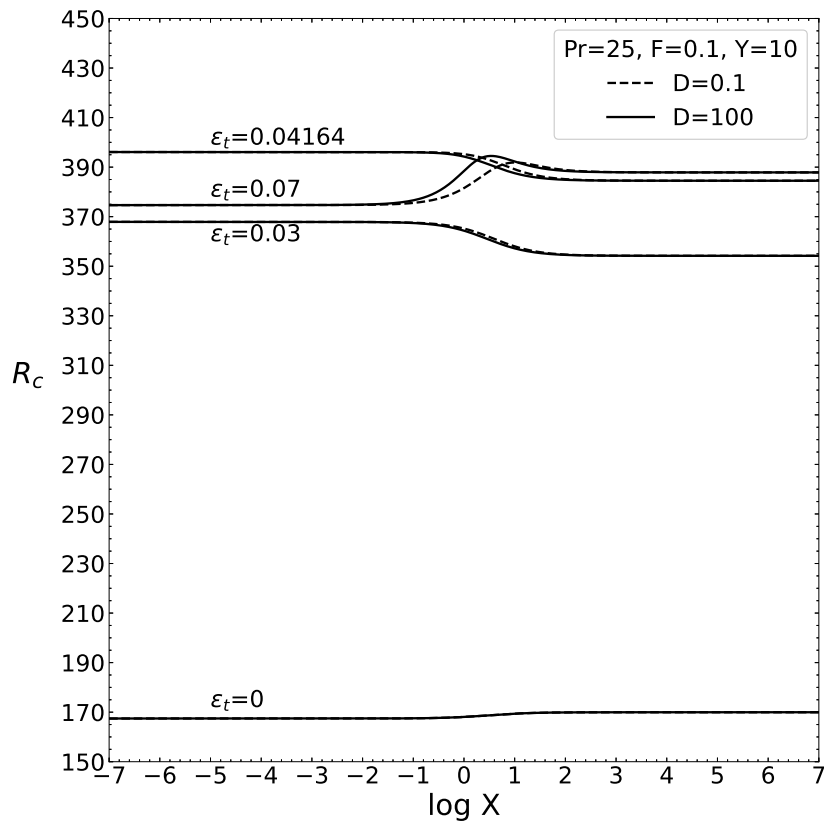


Figura 3.11: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 25$, $F = 0.1$, $Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

contrario a lo que se se observa en el caso de Fourier. Se observa que las curvas presentan valores máximos de R_c , que al igual que los mínimos, disminuyen en la abscisa ε_t conforme el número de Prandtl incrementa. Además, se observa que la diferencia entre $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ antes de alcanzar el mínimo es muy pequeña y en ninguno de los casos se cruzan entre ellas. Sin embargo, cuando rebasan el tiempo de relajamiento en el que se presenta el mínimo, tienen diferencias más importantes.

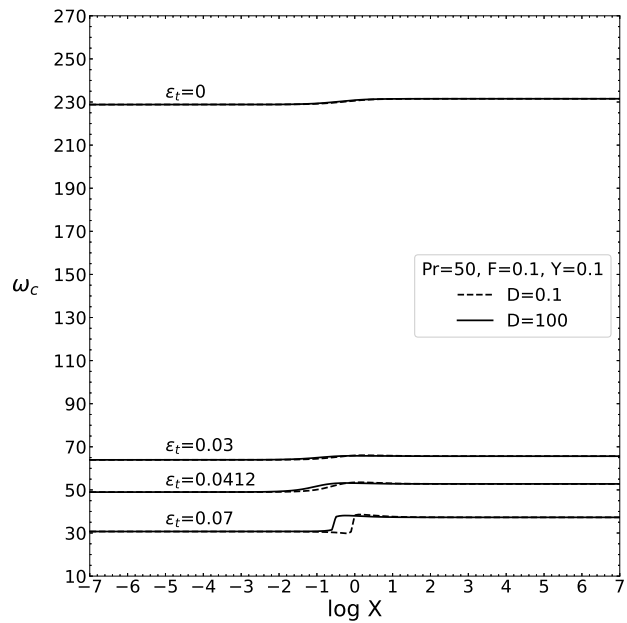
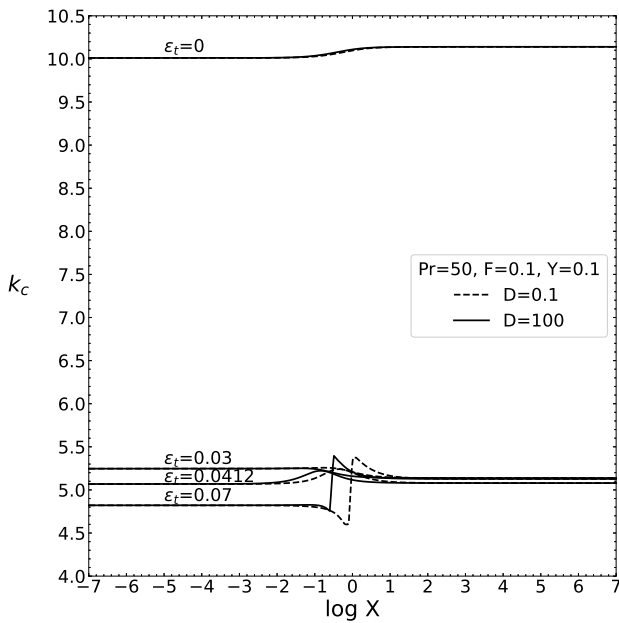
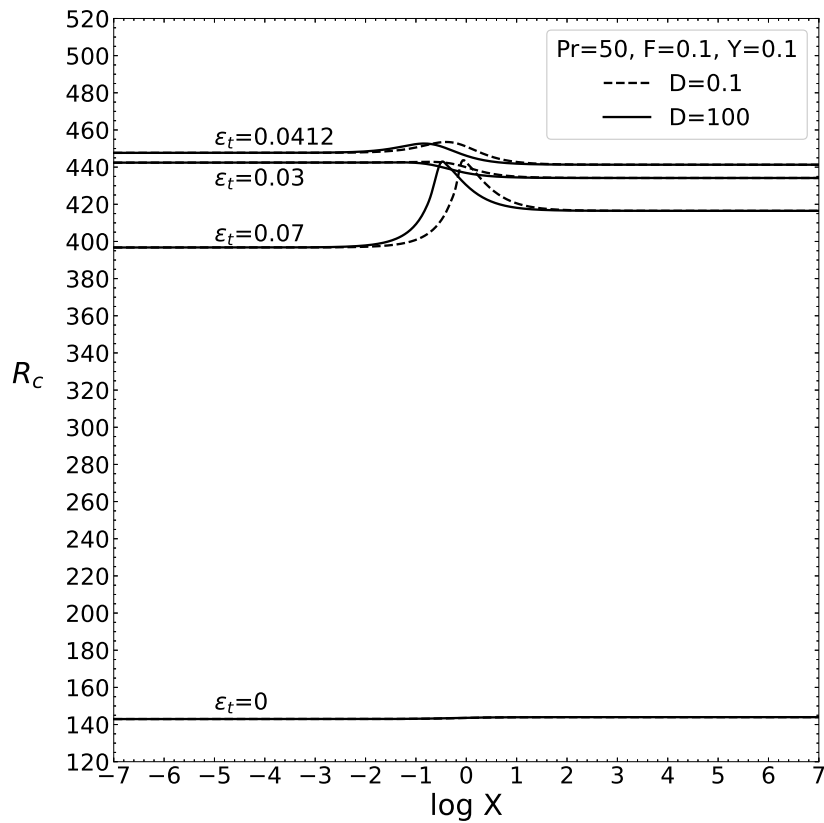


Figura 3.12: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 50$, $F = 0.1$, $Y = 0.1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

Hasta ahora, se han discutido los resultados únicamente para fluidos en los que $F = 0.1$. La influencia del parámetro ε_t comentada hasta ahora, corresponde justamente a efectos viscoelásticos de magnitud pequeña en el sistema, sin embargo, al incrementar el valor de F , los efectos viscoelásticos predominan en el fluido, dando lugar a comportamientos diferentes que se muestran a continuación. Hay que resaltar, que el incremento del parámetro F tiene un efecto importante en la estabilidad del sistema: se desestabiliza porque predominan los efectos viscoelásticos, facilitando que se presente la

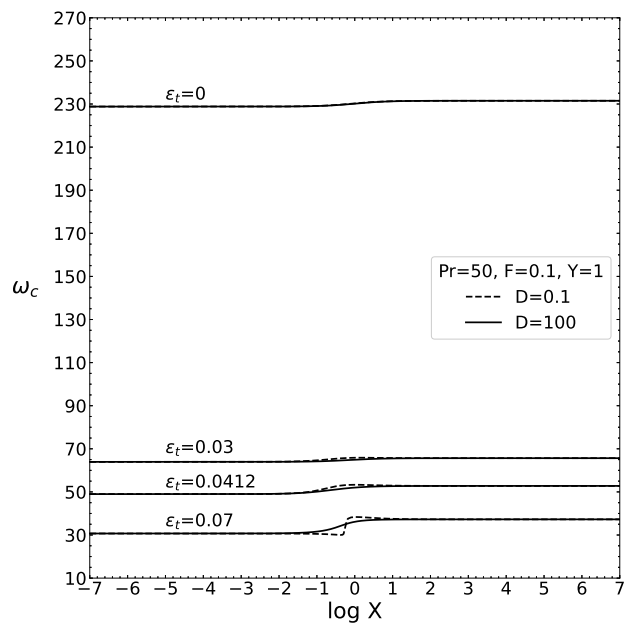
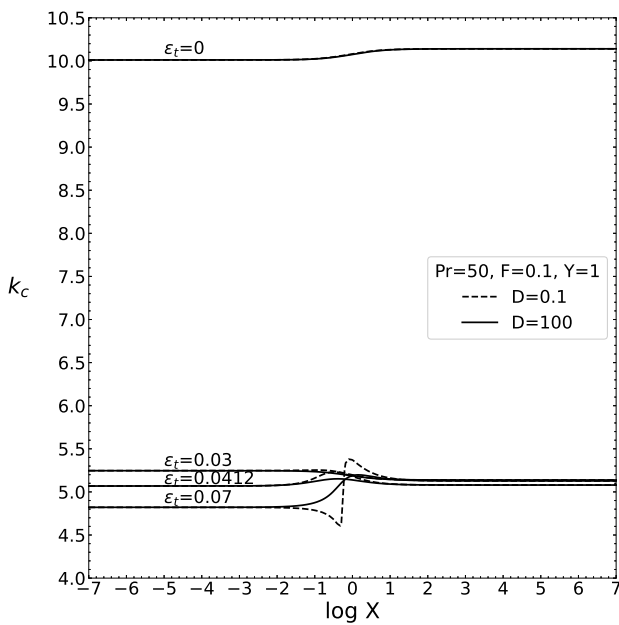
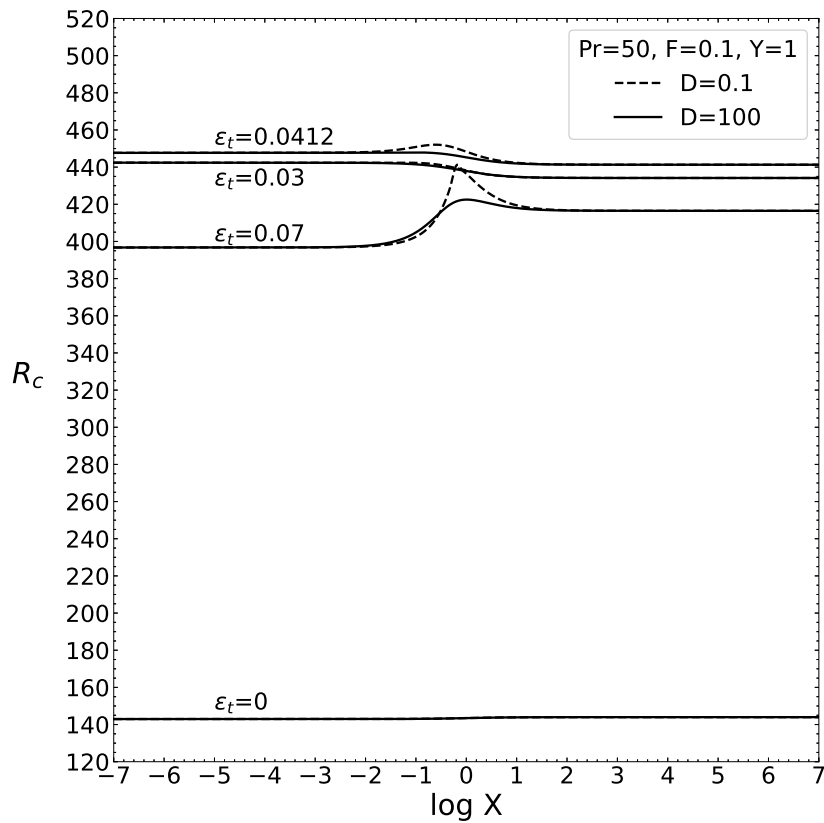


Figura 3.13: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 50$, $F = 0.1$, $Y = 1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

convección de forma oscilatoria.

Cuando se fijan los valores $Pr = 5$, $F = 100$, $D = 0.1, 100$ y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$, el comportamiento de los valores críticos como función de X se presentan en la Figura 3.16 para $Y = 0.1$, 3.17 para $Y = 1$ y 3.18 para $Y = 10$, respectivamente. La estabilidad del sistema es máxima cuando $\varepsilon_t = 0$ en todo el dominio de X , con valores críticos de $R_c = 0.09209$, $k_c = 3.42$ y $\omega_c = 1.3868$

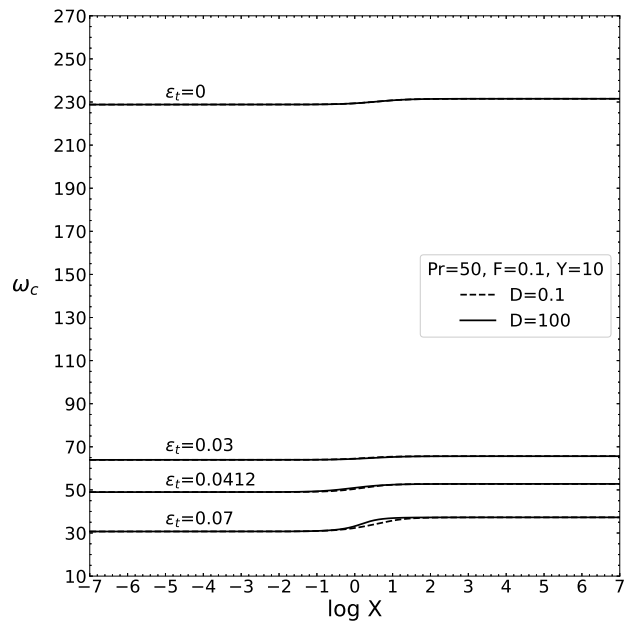
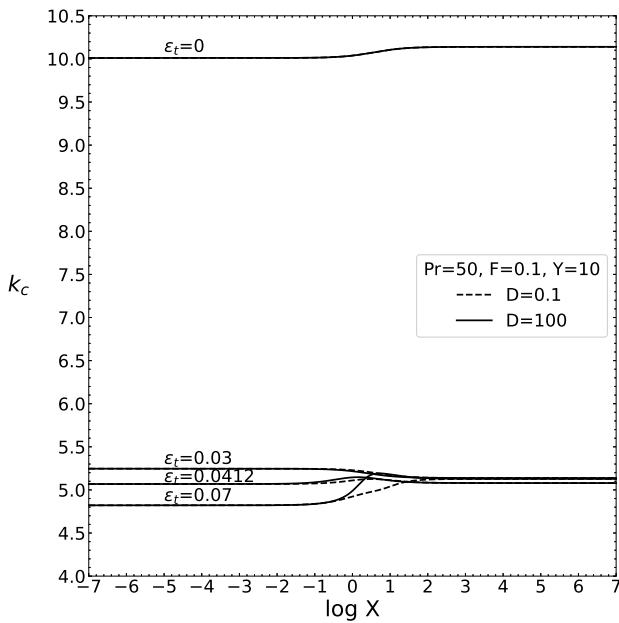
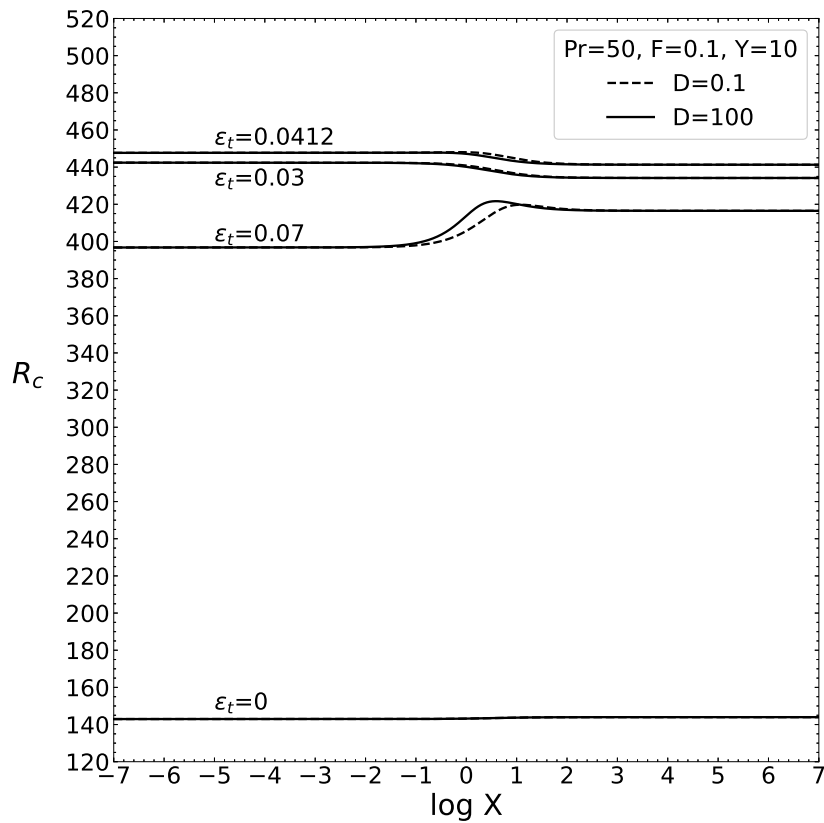


Figura 3.14: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 50$, $F = 0.1$, $Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

para temperatura fija en las paredes y $R_c = 0.05325$, $k_c = 2.06$ y $\omega_c = 1.3626$ para flujo de calor fijo en las paredes. Aquí, la mínima estabilidad se presenta para $\varepsilon_t = 0.07$ en todo el dominio de X , con $R_c = 0.09091$, $k_c = 3.41$ y $\omega_c = 1.3863$ para temperatura fija en las paredes y $R_c = 0.05036$, $k_c = 1.96$ y $\omega_c = 1.3641$ para flujo de calor fijo en las paredes. El comportamiento de R_c es monótono y decreciente respecto a X para cualquier valor de ε_t . El incremento de Y provoca que la diferencia entre las curvas $D = 0.1$ y $D = 100$ disminuya en la zona cercana a $\log X = 0$, es decir, al

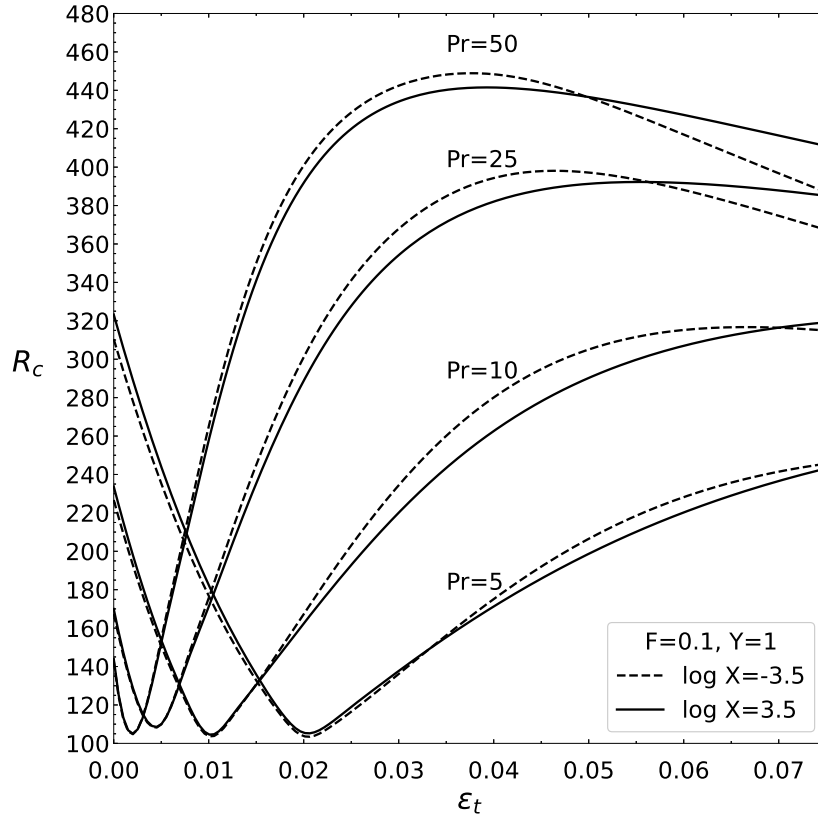


Figura 3.15: Curvas de R_c como función de ε_t para valores fijos de $Pr = 5, 10, 25, 50$, $F = 0.1$, $Y = 1$ y $\log X = -3.5, 3.5$. Los resultados de esta figura son válidos para $D = 0.1$ y $D = 100$.

incrementar el cociente de difusividades térmicas XY el efecto que tiene la variación del espesor de las paredes, disminuye en la región en que las conductividades térmicas de las paredes y el fluido son similares. Los valores de k_c como función de X tienen el mismo comportamiento que sus respectivos R_c , donde k_c es máximo cuando $\varepsilon_t = 0$ y es mínimo cuando $\varepsilon_t = 0.07$ para todo el dominio de X . El incremento de Y ocasiona que las curvas de k_c con $D = 0.1$ y $D = 100$ en la zona cercana a $\log X = 0$ se aproximen, es decir, el incremento de XY disminuye la influencia del espesor de las paredes en la magnitud de los rollos convectivos cuando las conductividades térmicas de las paredes y el fluido son similares. Las curvas de ω_c como función de X conservan el mismo orden en magnitudes que sus respectivos R_c y k_c cuando $X \ll 1$, sin embargo, cuando $X \gg 1$, las frecuencias de oscilación no conservan el mismo ordenamiento, aquí se observa que la frecuencia máxima en $X \gg 1$ corresponde al caso $\varepsilon_t = 0.07$. Además de los mínimos relativos de ω_c en $X \gg 1$, existe un mínimo absoluto en la zona cercana a $\log X = 0$. En el trabajo de Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18], se menciona que estos mínimos de ω_c desaparecen cuando se alcanzan valores de $Pr = 10$, en su trabajo no se consideró la influencia de Y ; en este trabajo se observa que aún con un valor de $Pr = 10$, los mínimos absolutos de ω_c en la zona cercana a $\log X = 0$ existen, y se verificó que estos mínimos sólo desaparecen cuando $Pr = 15$. El incremento en el valor de Y reduce la diferencia en ω_c que existe en los casos $D = 0.1$ y $D = 100$ en la zona cercana a $\log X = 0$. De aquí, se puede concluir que el sistema es siempre más estable en el caso de Fourier, donde la magnitud de los rollos convectivos es mínima en todo el dominio de X respecto a los casos en donde $\varepsilon_t \neq 0$. En el caso $X \ll 1$, la frecuencia de oscilación disminuye conforme ε_t incrementa, contrario a esto, cuando $X \gg 1$ la frecuencia de oscilación incrementa con el parámetro ε_t y los mínimos absolutos de frecuencia se encuentran cerca de $\log X = 0$. En este caso, el efecto de la variación de XY es relevante

únicamente en la región cercana a $\log X = 0$, cuando se incrementa XY , la diferencia que existe al considerar diferentes espesores de la pared se vuelve menor, ésto es válido para R_c , k_c y ω_c . De las ecuaciones 2.42 y 2.43, al incrementar el valor de XY la difusión de calor es más efectiva en el fluido que en las paredes, es por esto que las curvas $D = 0.1$ y $D = 100$ se acercan conforme el valor de Y incrementa. Las curvas de R_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se encuentran en la Figura 3.28 donde se observa R_c es monótono y decreciente respecto a ε_t . Las curvas de ω_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se observan en la Figura 3.29, donde se aprecia que cuando $X \ll 1$, ω_c es monótono y decreciente respecto a ε_t , mientras que cuando $X \gg 1$ ω_c es monótono y creciente. Ésto explica el cambio en el ordenamiento de las frecuencias al cruzar la zona $\log X = 0$.

Para los valores fijos de $Pr = 10$, $F = 100$, $D = 0.1, 100$ y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$, las curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X se muestran en las Figuras 3.19, 3.20 y 3.21 para $Y = 0.1$, $Y = 1$ y $Y = 10$, respectivamente. La situación de máxima estabilidad en todo el dominio de X corresponde al caso de Fourier, con valores de $R_c = 0.04623$, $k_c = 3.44$ y $\omega_c = 1.9622$ con la condición de temperatura fija en las paredes y $R_c = 0.028512$, $k_c = 2.31$ y $\omega_c = 1.9243$ con la condición de flujo de calor fijo en las paredes, respectivamente. La mínima estabilidad se establece para el valor de $\varepsilon_t = 0.07$, ésto para cualquier valor de X , en el caso de temperatura fija en las paredes se encontraron valores de $R_c = 0.04508$, $k_c = 3.4$ y $\omega_c = 1.9604$; en el caso de flujo de calor fijo en las paredes los valores son $R_c = 0.02614$, $k_c = 2.18$ y $\omega_c = 1.9257$. Para cualquier valor fijo de ε_t , las curvas de R_c son monótonas y decrecientes respecto a X , es decir, los casos de flujo de calor fijo en las paredes siempre son más inestables que los casos con temperatura fija en las paredes. El parámetro ε_t desestabiliza al sistema cuando incrementa, ésto para cualquier valor de X , esto significa que el incremento del tiempo de relajamiento térmico desestabiliza al sistema. Aquí, la diferencia de R_c con el parámetro D disminuye considerablemente cuando Y incrementa, es decir, el espesor de las paredes pierde relevancia en la estabilidad del sistema cuando el cociente de difusividades térmicas incrementa. El comportamiento de k_c respecto a X es monótono y decreciente, igual que sus respectivos valores de R_c , entonces, siempre se encontrarán rollos convectivos de mayor magnitud cuando se fija el flujo de calor en las paredes respecto a la magnitud de los rollos convectivos que se forman en el caso con temperatura fija en las paredes para cualquier valor fijo de ε_t . El número de onda crítico también es monótono y decreciente respecto a ε_t , ésto para cualquier valor de X , es decir, el incremento en el tiempo de relajamiento térmico se traduce en un incremento de la magnitud de los rollos convectivos. Al incrementar el valor de Y , las curvas de k_c con $D = 0.1$ y $D = 100$ se aproximan entre ellas en cercanía de $\log X = 0$, es decir, la influencia del espesor de las paredes en la magnitud de los rollos convectivos disminuye al incrementar el coeficiente de difusividades térmicas del fluido y la pared. En general, los valores de ω_c siempre son mayores en $X \ll 1$ al compararse con sus valores en $X \gg 1$ para cualquier ε_t fijo, es decir, la frecuencia de oscilación siempre será mayor cuando se fija la temperatura en las paredes respecto a la frecuencia que se presenta cuando se fija el flujo de calor en las paredes. Las curvas de ω_c respecto a ε_t cuando $X \ll 1$ disminuyen conforme ε_t incrementa, sin embargo, cuando $X \gg 1$, los valores de ω_c incrementan con el incremento de ε_t . Aquí también se presentan mínimos absolutos de ω_c respecto a X en cercanía de $\log X = 0$, contrario a lo que presentaron Pérez-Reyes y Dávalos-Orozco [18]: de aquí la importancia de considerar la variación del cociente de difusividades térmicas en la zona cercana a $\log X = 0$. El efecto de Y en ω_c es disminuir la diferencia que existe en las curvas $D = 0.1$ y $D = 100$ para valores fijos de ε_t , es decir, al incrementar el cociente de difusividades térmicas, la influencia que tiene el espesor de las paredes en la frecuencia de oscilación disminuye considerablemente si las conductividades térmicas del fluido y las paredes son similares. De aquí se concluye que el caso más inestable siempre corresponde a $\varepsilon_t = 0.07$ donde se formarán rollos convectivos de magnitudes mayores a los que se encontrarían en el caso de Fourier.

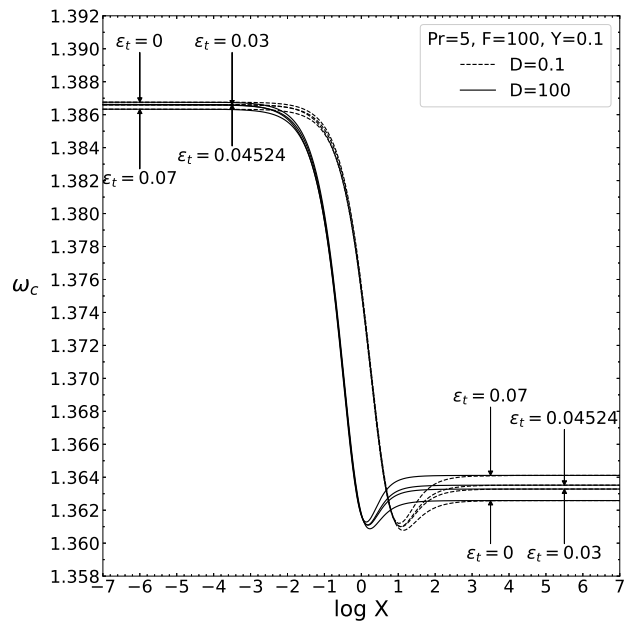
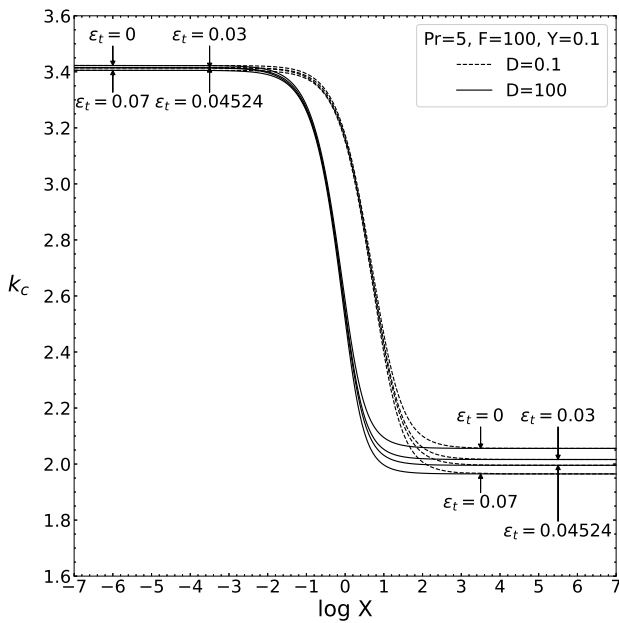
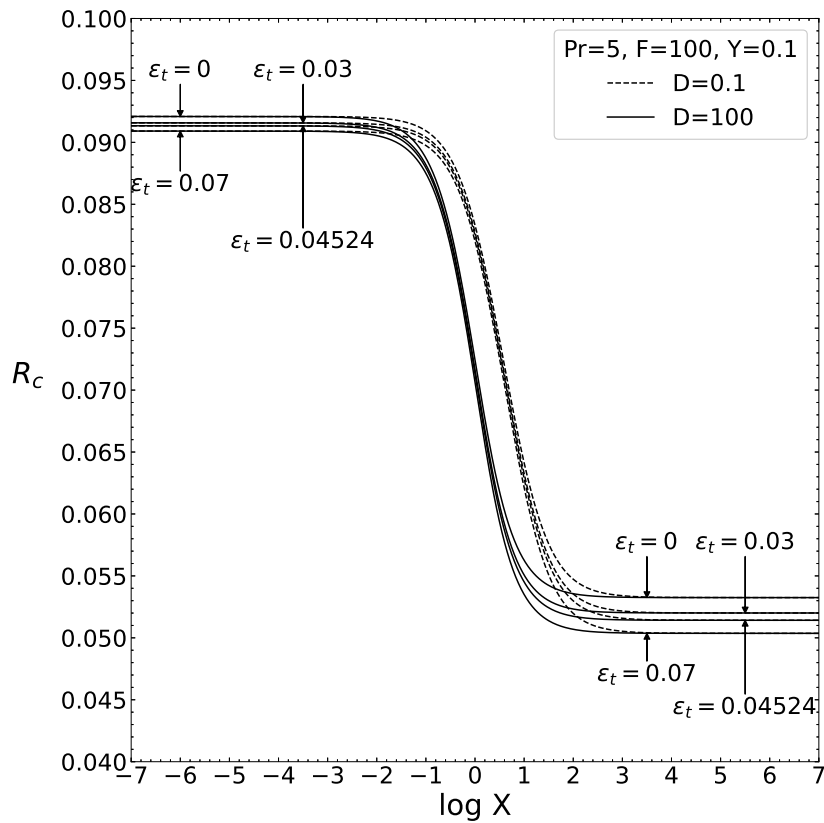


Figura 3.16: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 5$, $F = 100$, $Y = 0.1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

La frecuencia de oscilación cuando se establecen condiciones de temperatura fija en las paredes es menor que la que se encuentra en el caso de Fourier, sin embargo, cuando se establece flujo de calor fijo en las paredes la frecuencia de oscilación que se tiene es mayor que la que se encontraría en el caso de Fourier. Las curvas de R_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se encuentran en la Figura 3.28 donde se observa R_c es monótono y decreciente respecto a ε_t . Las curvas de ω_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$

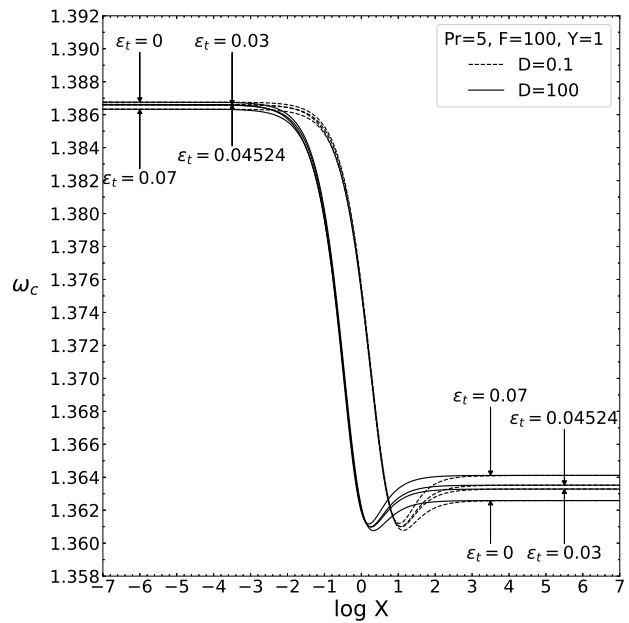
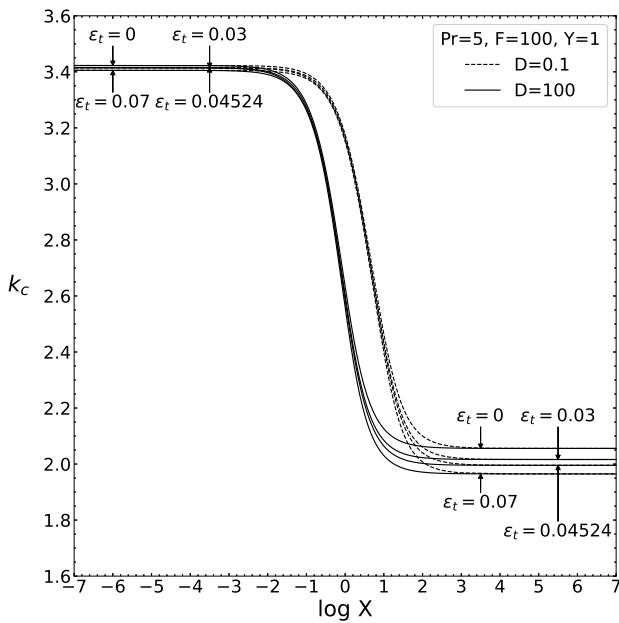
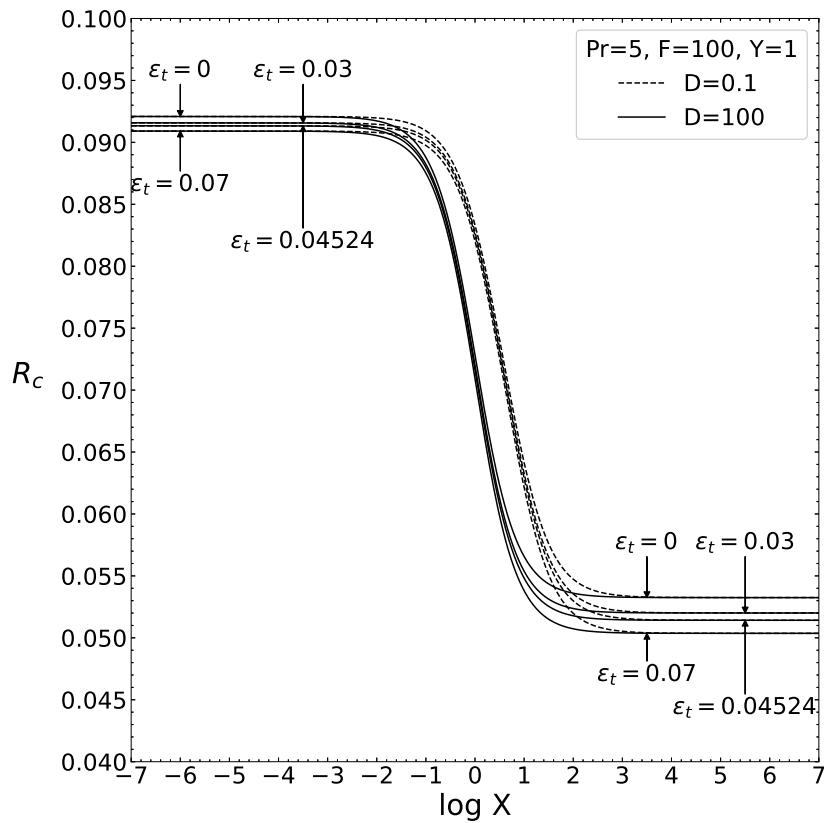


Figura 3.17: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 5$, $F = 100$, $Y = 1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

se observan en la Figura 3.29, donde se aprecia que cuando $X \ll 1$, ω_c es monótono y decreciente respecto a ε_t , mientras que cuando $X \gg 1$ ω_c es monótono y creciente. Ésto explica el cambio en el ordenamiento de las frecuencias al cruzar la zona $X = 0$.

Al incrementar aún más el valor del Prandtl y fijando $Pr = 25$, $F = 100$, $D = 0.1, 100$ y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ se encuentran los comportamientos de R_c , k_c y ω_c en las Figuras 3.22,

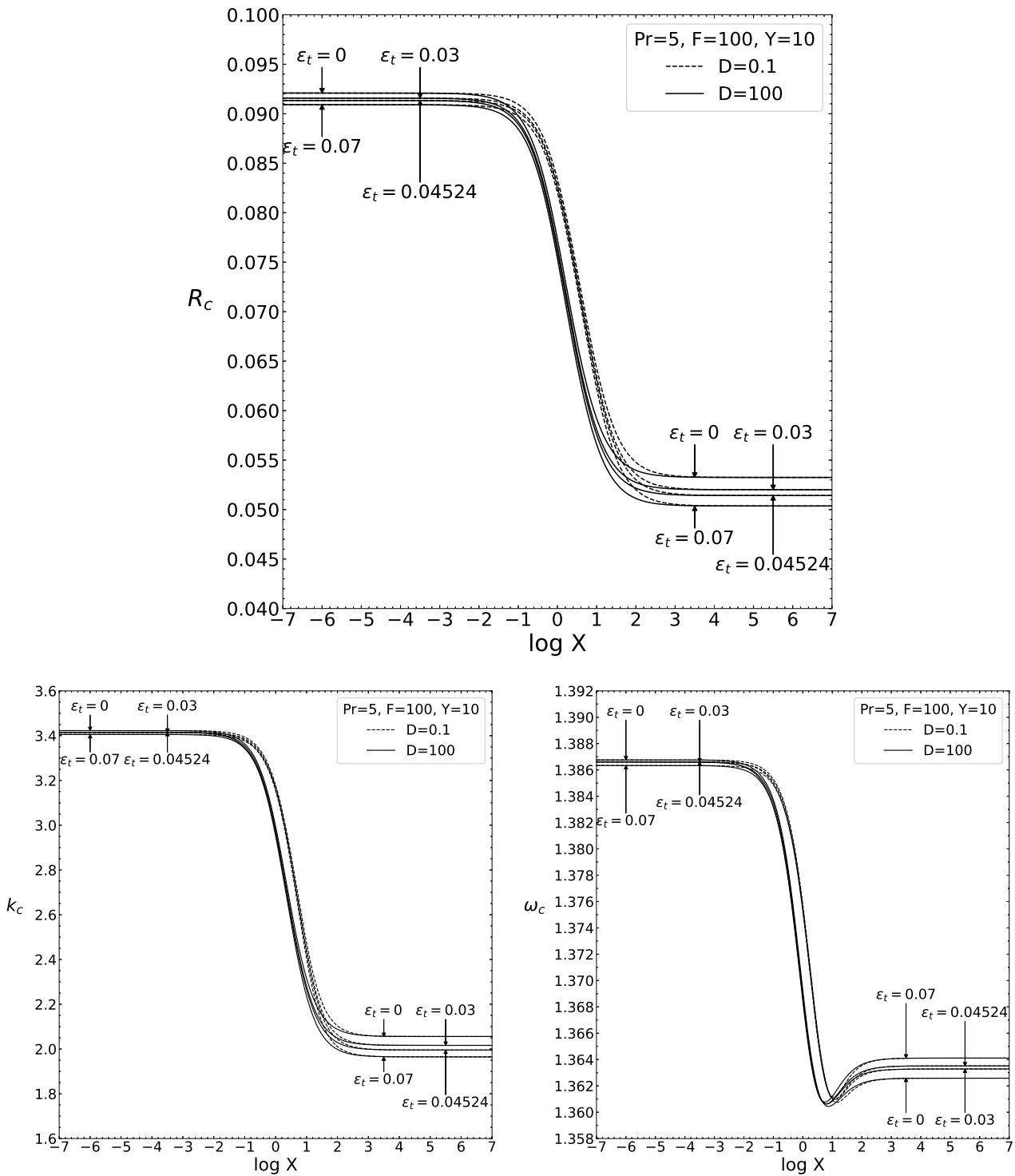


Figura 3.18: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 5$, $F = 100$, $Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04524, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

3.23 y 3.24 para valores fijos de $Y = 0.1$, $Y = 1$ y $Y = 10$, respectivamente. El comportamiento de la estabilidad es idéntico a los casos anteriores para $F = 100$, aquí también se encuentran los máximos de estabilidad en el caso de Fourier, con valores críticos de $R_c = 0.01871$, $k_c = 3.47$ y $\omega_c = 3.107$ para temperatura fija en las paredes y $R_c = 0.01276$, $k_c = 2.7$ y $\omega_c = 3.0473$ para flujo de calor fijo en las paredes. Los mínimos de estabilidad corresponden al valor $\varepsilon_t = 0.07$ para ambos extremos del dominio de X , con valores $R_c = 0.01759$, $k_c = 3.39$ y $\omega_c = 3.0985$ para temperatura fija en las pare-

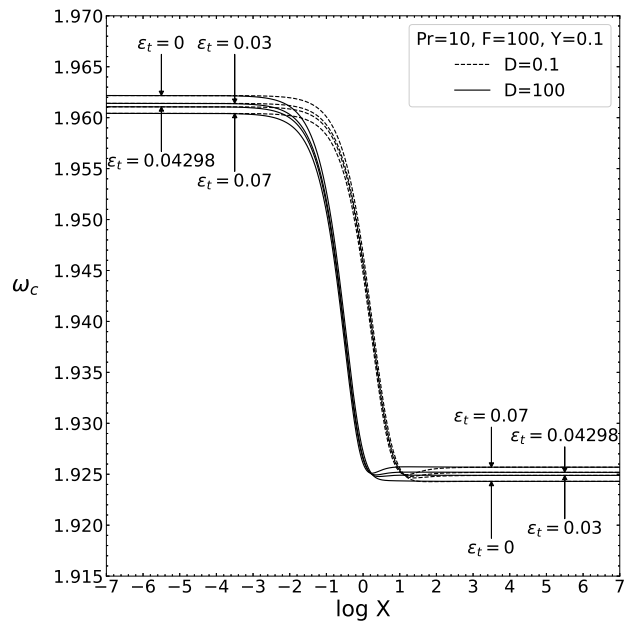
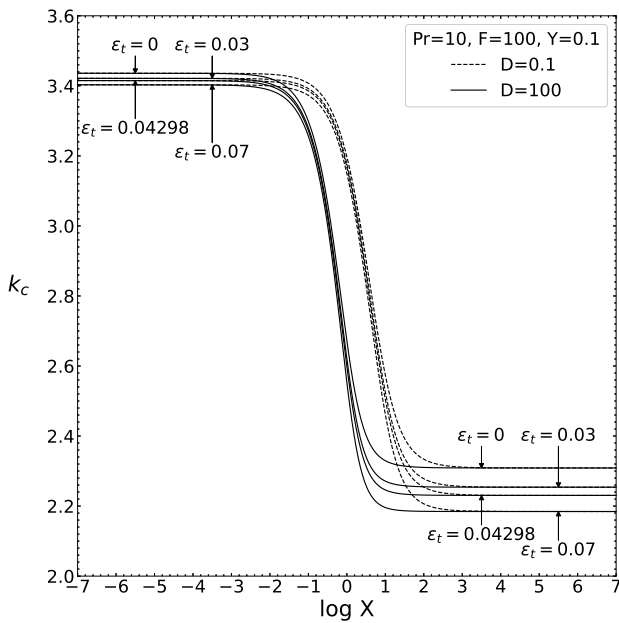
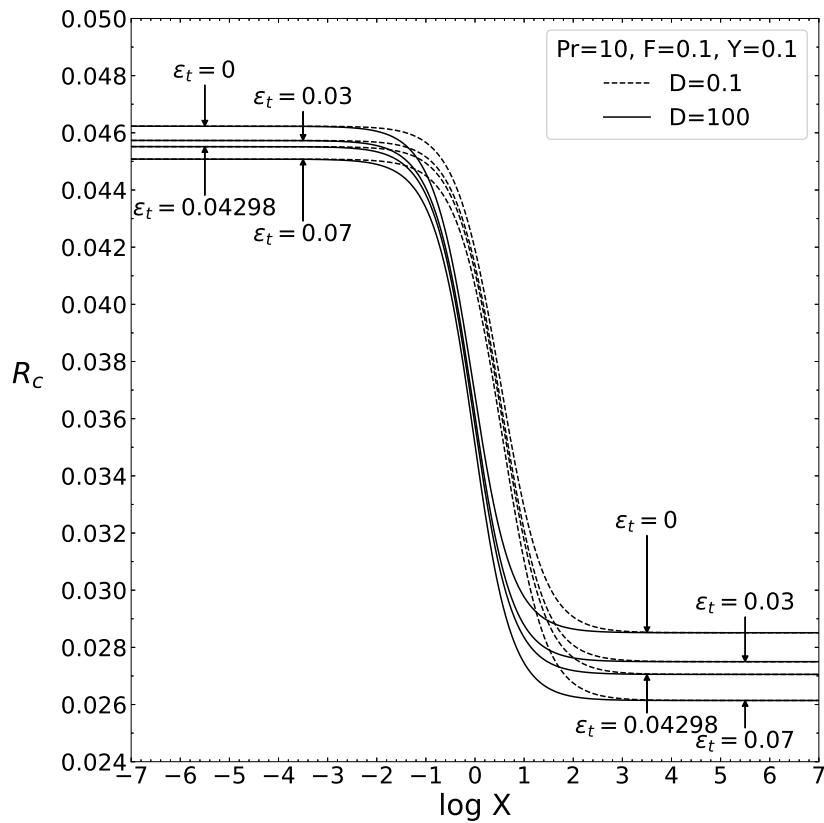


Figura 3.19: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 10$, $F = 100$, $Y = 0.1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

des y $R_c = 0.01093$, $k_c = 2.52$ y $\omega_c = 3.0441$ para flujo de calor fijo en las paredes, respectivamente. El comportamiento de R_c respecto a X es monótono y decreciente para valores fijos de ε_t , es decir, el sistema es más inestable cuando se fija el flujo de calor en las paredes respecto al caso cuando se fija la temperatura en las paredes, ésto para cualquier valor del tiempo de relajamiento térmico. Las curvas de R_c respecto a ε_t disminuyen conforme ε_t incrementa para cualquier valor de X ; lo anterior significa que el incremento en el tiempo de relajamiento térmico desestabiliza al sistema. Aquí se

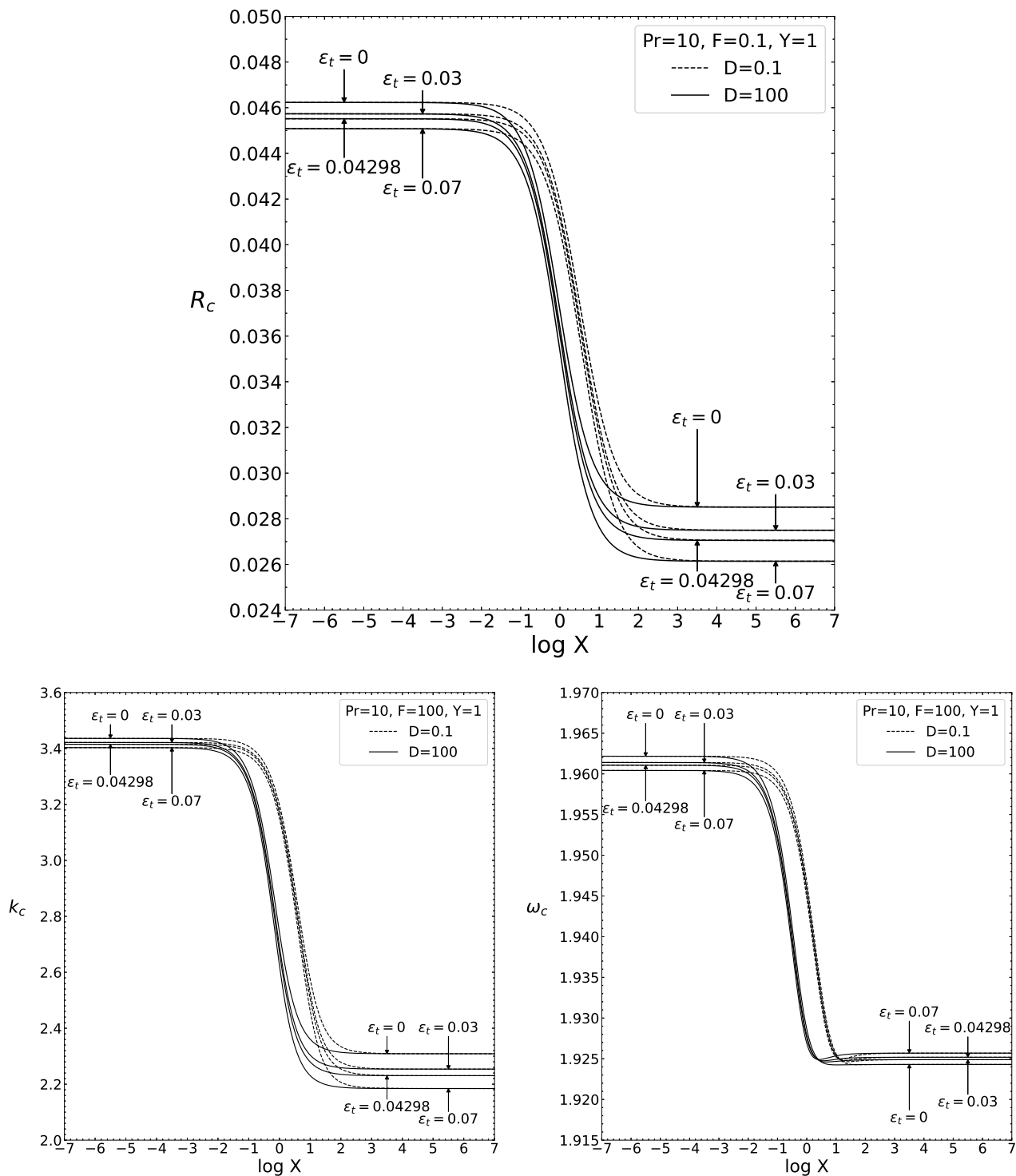


Figura 3.20: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 10$, $F = 100$, $Y = 1$, $\epsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

observa que la diferencia entre las curvas $D = 0.1$ y $D = 100$ con ϵ_t fijo en cercanía de $\log X = 0$ es muy pequeña, y disminuye aún más con el incremento de Y : un incremento en el cociente de difusividades térmicas reduce el impacto en la estabilidad que tiene el espesor de las paredes cuando las conductividades térmicas del fluido y la pared son similares. Las curvas de k_c respecto a X tienen un comportamiento peculiar cuando $Y = 0.1$, se encuentra un mínimo relativo en $X \gg 1$ y un mínimo absoluto en cercanía de $\log X = 0$ cuando $D = 100$, éste mínimo desaparece cuando incrementa el

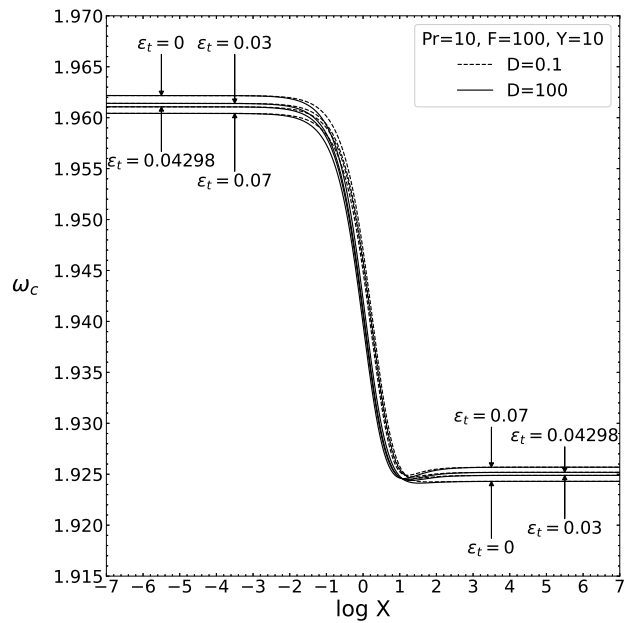
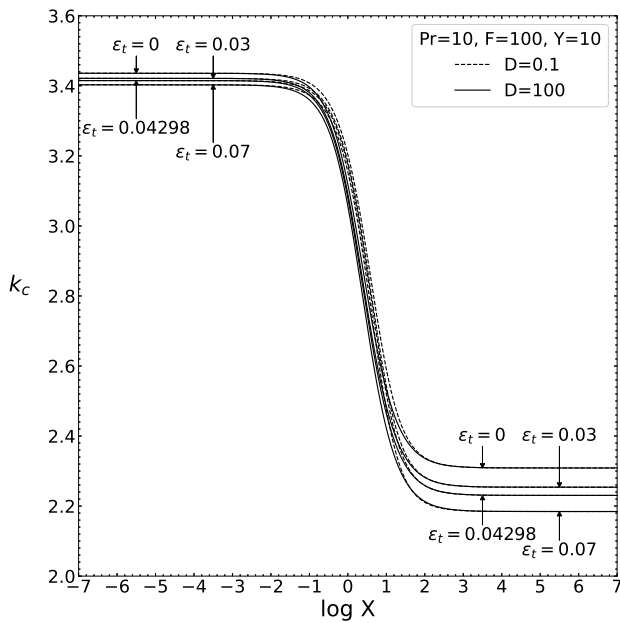
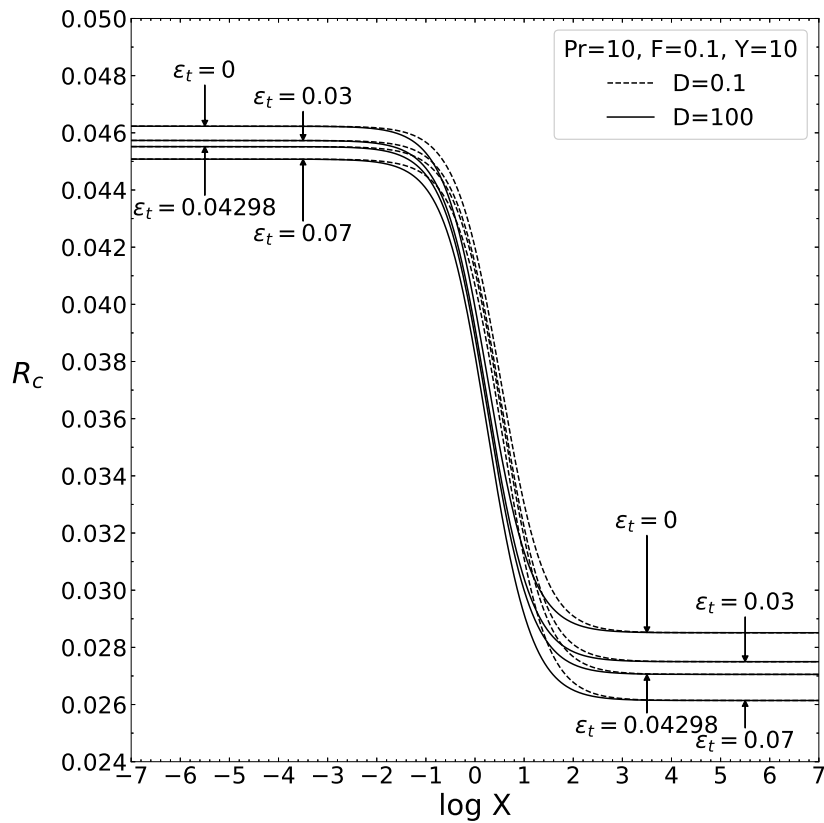


Figura 3.21: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 10$, $F = 100$, $Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04298, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

valor de Y . Las curvas de k_c cuando $Y = 1$ y $Y = 10$ siempre son monótonas y decrecientes para cualquier valor fijo de ε_t , en estos casos no se encuentran mínimos absolutos; entonces se encontrarán rollos convectivos de mayor magnitud cuando se fija el flujo de calor en las paredes respecto a los rollos convectivos que se encuentran en el caso de temperatura fija en las paredes. La influencia de Y en k_c para valores fijos de ε_t es disminuir la relevancia de la variación del espesor de las paredes en la zona cercana a $\log X = 0$, esto significa que se encontrarán rollos convectivos de magnitudes

similares en la zona $\log X = 0$ cuando el cociente de difusividades térmicas sea grande, sin importar el espesor de las paredes. Las curvas de ω_c como función de X son monótonas y decrecientes para cualquier valor fijo de ε_t . El incremento de ε_t para cualquier valor fijo de X disminuye ω_c . Para este número de Prandtl, desaparecen los mínimos absolutos de ω_c que se presentaron cuando el número de Prandtl era menor. Cuando se incrementa el valor de Y , los valores de ω_c cuando $D = 0.1$ y $D = 100$ son casi idénticos, dejando ver que para cocientes de difusividades térmicas grandes, el espesor de las paredes no tiene relevancia en la frecuencia de oscilación cuando se presenta la convección. De aquí se concluye que el sistema siempre es más inestable cuando $\varepsilon_t = 0.07$, en donde se presentan rollos convectivos de mayor magnitud de los que se encontrarían en el caso de Fourier, además, la frecuencia de oscilación es menor que la que se presenta en el caso de Fourier; ésto es válido para todo el dominio de X . Nótese que aquí las curvas de ω_c siguen el mismo orden que R_c y k_c en ambos extremos de X y no sólo para $X \ll 1$ como se observó anteriormente, ésto sugiere que la frecuencia de oscilación cambia su comportamiento respecto a ε_t al incrementar el Prandtl a $Pr = 25$ para $X \gg 1$. Las curvas de R_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se encuentran en la Figura 3.28 donde se observa R_c es monótono y decreciente respecto a ε_t . Las curvas de ω_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se observan en la Figura 3.29, donde se aprecia que ω_c es monótono y decreciente respecto a ε_t para ambos valores de X . Es por esto que las curvas de ω_c como función de X ahora siguen el mismo ordenamiento que sus respectivos R_c y k_c .

Finalmente, se fijan los valores $Pr = 50$, $F = 100$, $D = 0.1, 100$ y $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$, las curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X se presentan en las Figuras 3.25, 3.26 y 3.27 para $Y = 0.1$, $Y = 1$ y $Y = 10$, respectivamente. De la misma forma que en todos los casos anteriores donde se fija el parámetro viscoelástico $F = 100$, los casos de máxima estabilidad corresponden al caso de Fourier, mientras que los casos de mínima estabilidad corresponden a $\varepsilon_t = 0.07$. Los valores críticos de mayor estabilidad en el caso de temperatura fija en las paredes son $R_c = 0.00954$, $k_c = 3.53$ y $\omega_c = 4.4051$; y son $R_c = 0.0071$, $k_c = 3.03$ y $\omega_c = 4.3337$ en el caso de flujo de calor fijo en las paredes, respectivamente. Los valores críticos de estabilidad menor son $R_c = 0.00844$, $k_c = 3.38$ y $\omega_c = 4.3797$ para temperatura fija en las paredes y $R_c = 0.00558$, $k_c = 2.81$ y $\omega_c = 4.3171$ para flujo de calor fijo en las paredes, respectivamente. El comportamiento de R_c como función de X es monótono y decreciente para cualquier valor fijo de ε_t , entonces siempre se encuentra menor estabilidad en el caso en el que se establece flujo de calor fijo en las paredes respecto al caso con temperatura fija en las paredes. El incremento de ε_t desestabiliza al sistema para cualquier valor de X . Al incrementar el valor de Y se encuentra que las curvas $D = 0.1$ y $D = 100$ se acercan, incluso cuando $Y = 10$ se puede observar que el espesor de las paredes no tiene ninguna influencia en la estabilidad del sistema. En general, los valores de k_c son mayores en $X \ll 1$ respecto a sus valores en $X \gg 1$, lo que significa que se encontrarán rollos convectivos de mayor magnitud cuando se establezcan condiciones de frontera con flujo de calor fijo, respecto a las magnitudes de los rollos convectivos que se forman con temperatura fija en las paredes. Cuando $Y = 0.1$ y $D = 0.1$, las curvas de k_c como función de X tienen un mínimo absoluto en la zona cercana a $\log X = 0$, éste mínimo desaparece cuando $Y = 1$ y $Y = 10$. Cuando $Y = 1$ y $Y = 10$, el comportamiento de k_c respecto a X siempre es monótono y decreciente. El incremento en ε_t disminuye los valores de k_c para cualquier valor fijo de X , el incremento en el tiempo de relajamiento térmico hará que se formen rollos convectivos de mayor magnitud. Aquí también se encuentra que el incremento en Y disminuye la diferencia de k_c cuando $D = 0.1$ y $D = 100$. Los valores de ω_c cuando $X \ll 1$ son mayores que los que se encuentran en $X \gg 1$, esto significa que siempre se presentan frecuencias de oscilación mayores cuando se establece temperatura fija en las paredes respecto a la frecuencia que se encuentra en los casos con flujo de calor fijo en las paredes. Las curvas de ω_c como función de X presentan valores mínimos cuando $Y = 0.1$ y $Y = 1$. Cuando

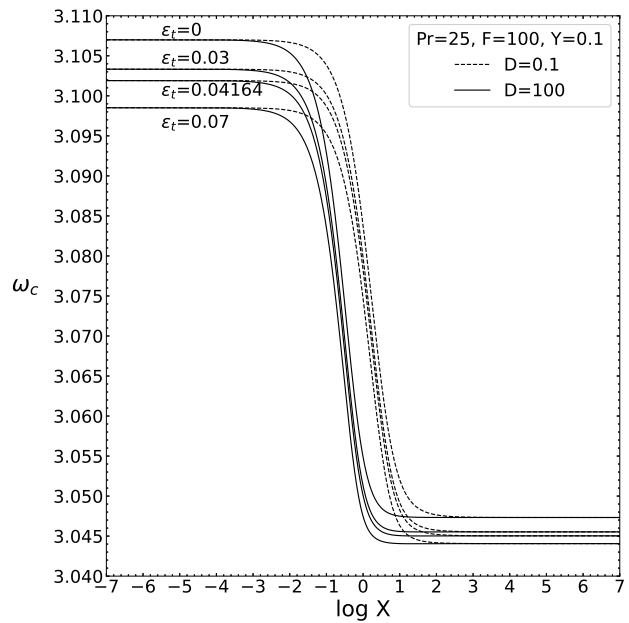
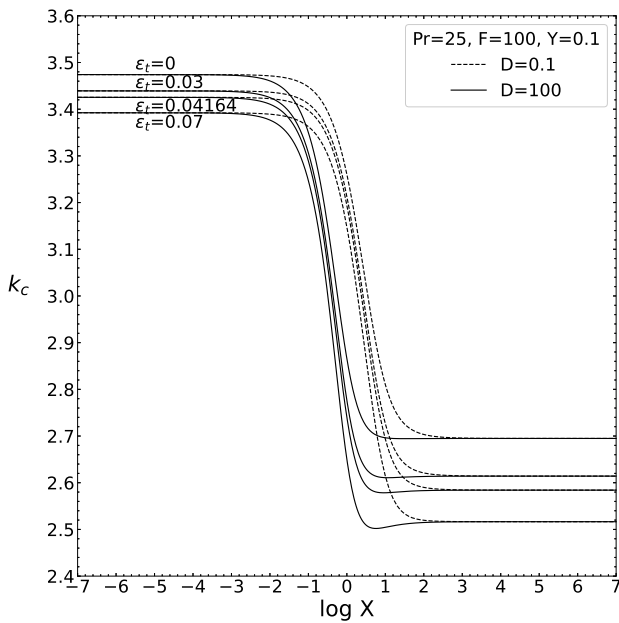
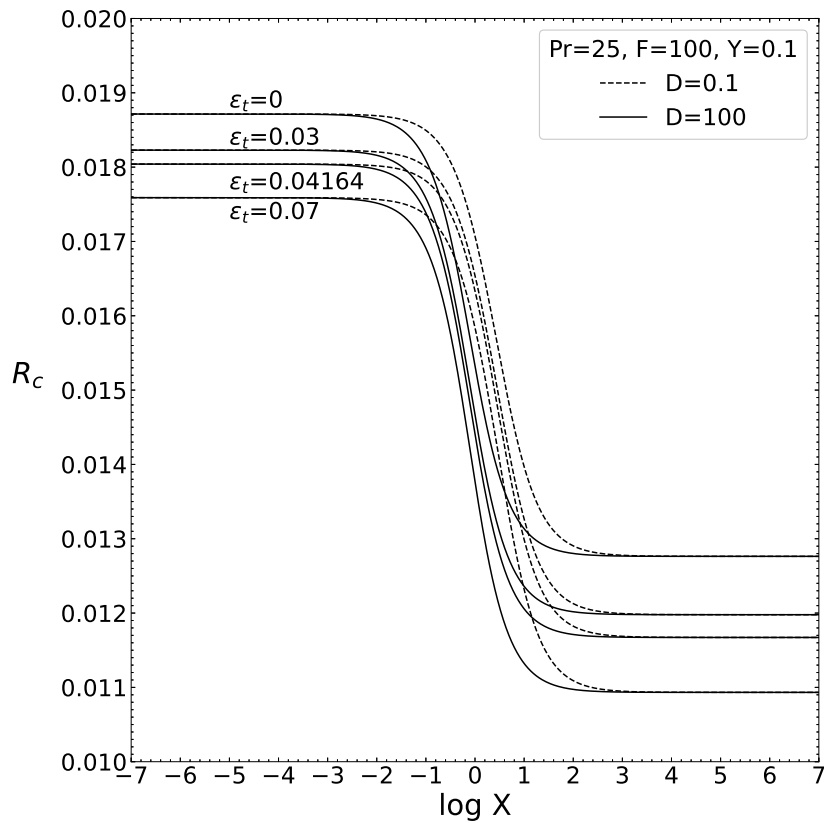


Figura 3.22: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 25$, $F = 100$, $Y = 0.1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

$Y = 10$, las curvas de ω_c siempre son monótonas y decrecientes respecto a X . El incremento de ε_t disminuye los valores de ω_c para cualquier valor fijo de X . De aquí se concluye que el sistema es más inestable cuando $\varepsilon_t = 0.07$ para todo el dominio de X , en los que se presentan rollos convectivos de magnitud mayor a los que se encuentran en el caso de Fourier; además, la frecuencia de oscilación es menor que la que se encontraría en la convección oscilatoria del caso de Fourier. Aquí, las curvas de ω_c siguen el mismo orden que sus respectivos R_c y k_c , lo que sugiere que el cambio en el comporta-

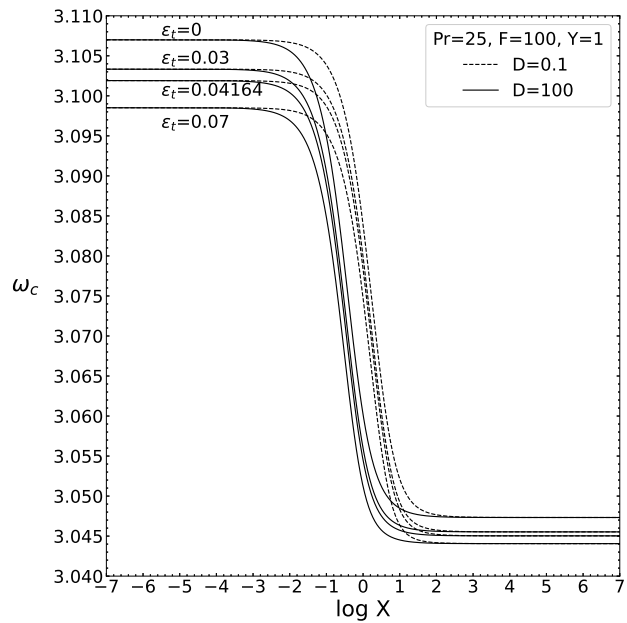
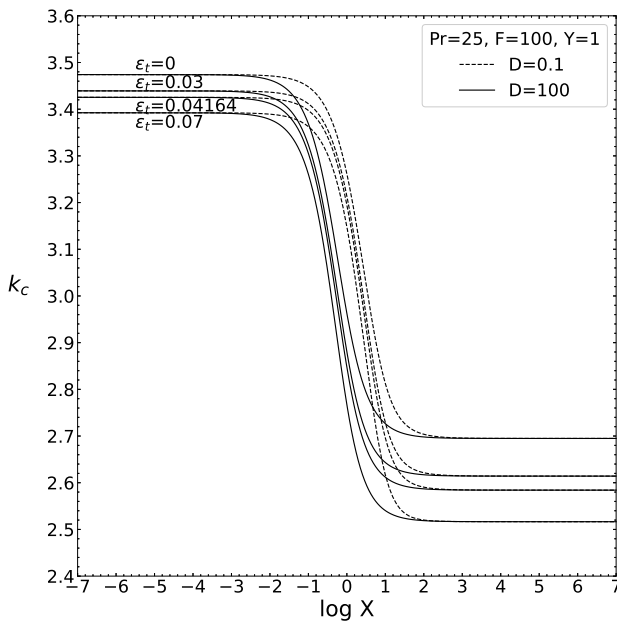
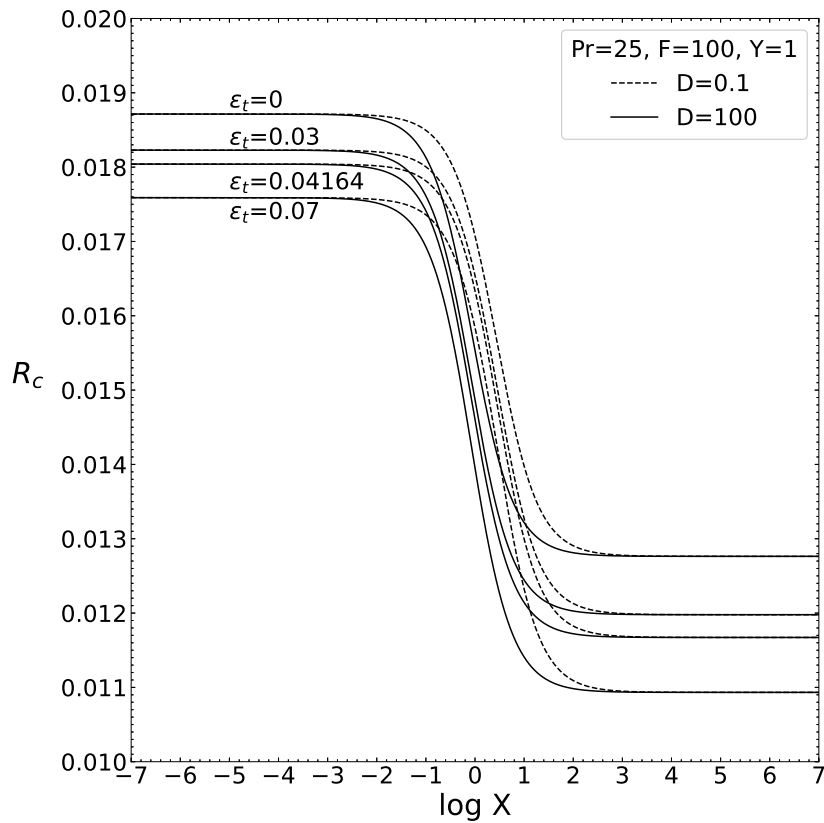


Figura 3.23: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 25$, $F = 100$, $Y = 1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

miento de ω_c respecto a ε_t se mantiene para valores del número de Prandtl superiores a 25. Las curvas de R_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se encuentran en la Figura 3.28 donde se observa R_c es monótono y decreciente respecto a ε_t . Las curvas de ω_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$, $\log X = -3.5$ y $\log X = 3.5$ se observan en la Figura 3.29, donde se aprecia que ω_c es monótono y decreciente respecto a ε_t para ambos valores de X .

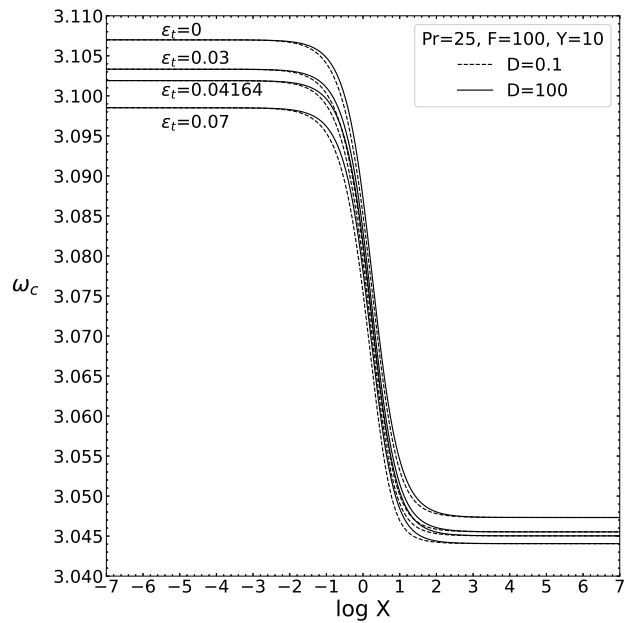
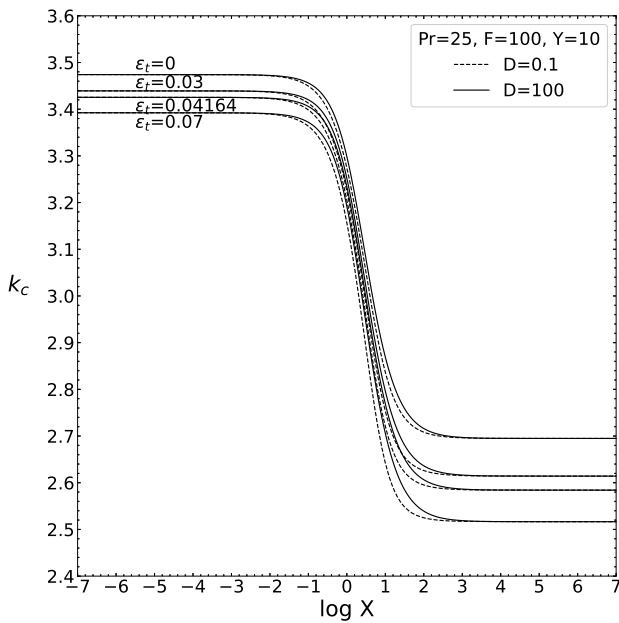
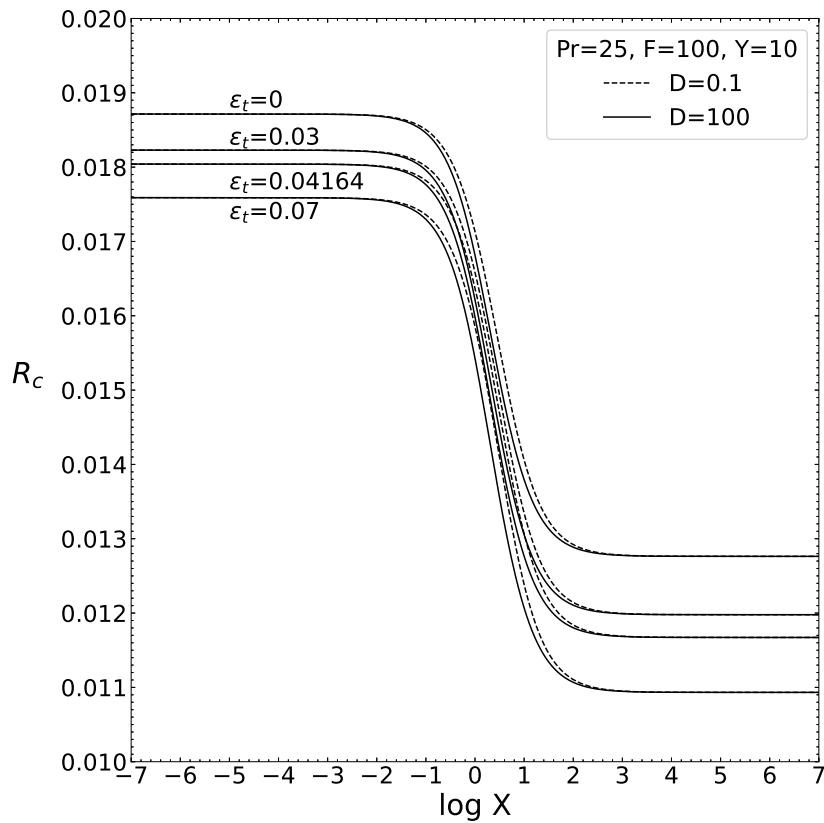


Figura 3.24: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 25$, $F = 100$, $Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.04164, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

Es evidente, que cuando los efectos viscoelásticos son importantes ($F = 100$), la estabilidad del sistema decrece conforme X incrementa, este comportamiento es válido para cualquier número de Prandtl. También se puede concluir que para el caso $F = 100$, se pueden encontrar mínimos relativos y absolutos para k_c y ω_c en cercanía de $\log X = 0$ que dependen de los parámetros Y , D y Pr .

En la Figura 3.28 se encuentran curvas de R_c como función de ε_t para valores fijos de $F = 100$,

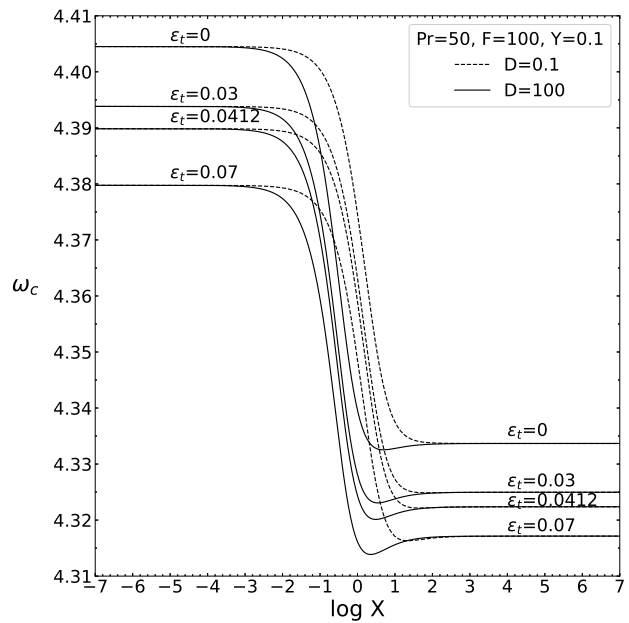
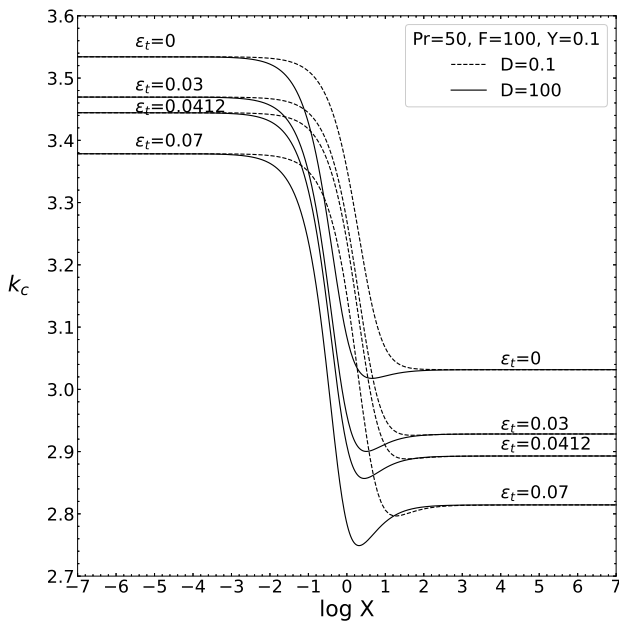
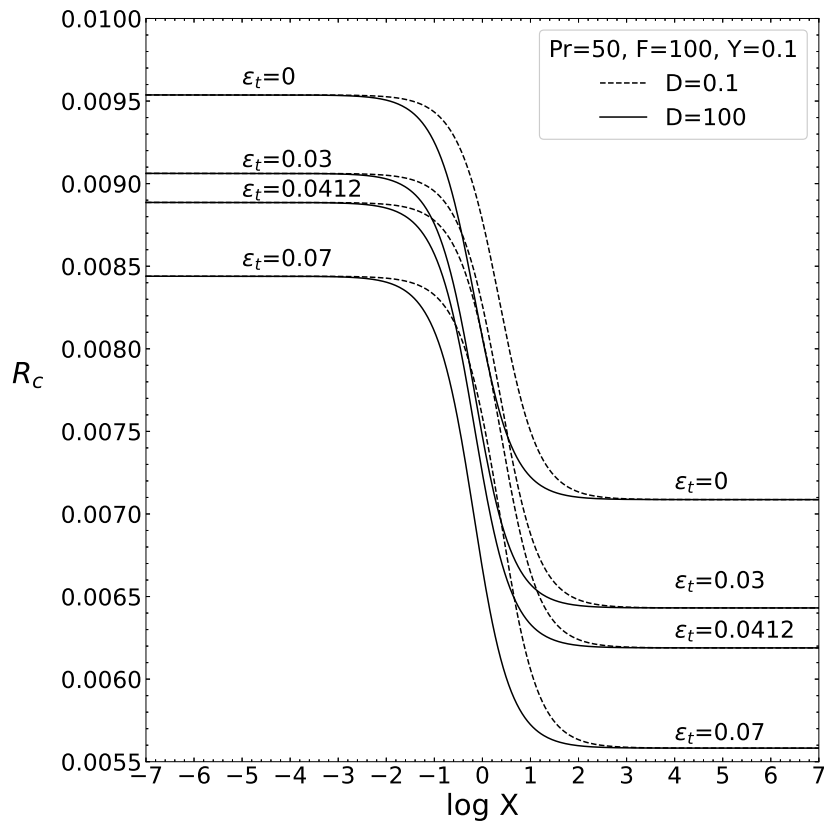


Figura 3.25: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 50$, $F = 100$, $Y = 0.1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

$Pr = 5, 10, 25, 50$, $Y = 1$ y $\log X = -3.5, 3.5$. Se observa un comportamiento monótono y decreciente de R_c respecto a ε_t independientemente del valor de X , esto significa que el incremento en el tiempo de relajamiento térmico desestabiliza al sistema. El incremento en el número de Prandtl también desestabiliza al sistema para cualquier valor de X y ε_t ; contrario a lo que se observó en el caso $F = 0.1$, en donde el incremento en el número de Prandtl estabiliza al sistema cuando el tiempo de relajamiento térmico está en el intervalo $\varepsilon_t \in [0.03, 0.07]$. Esto afirma que en el caso viscoelástico

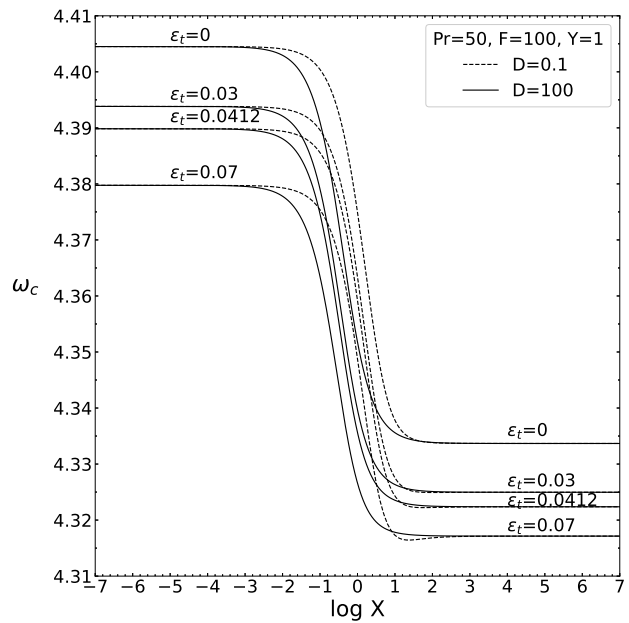
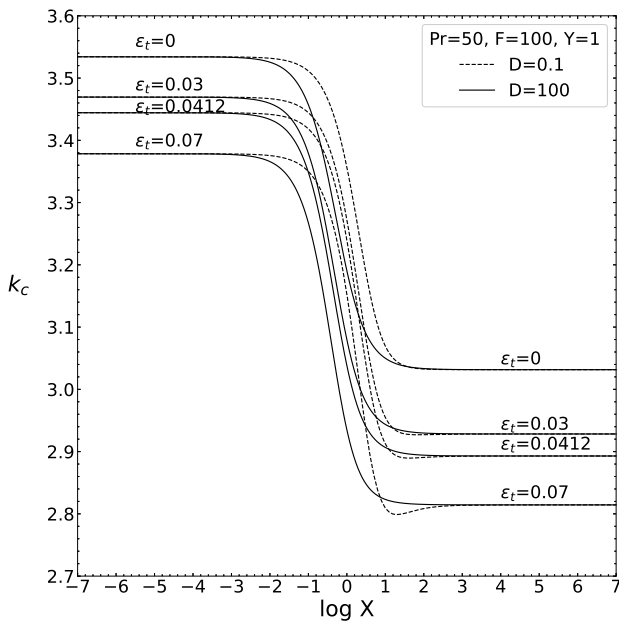
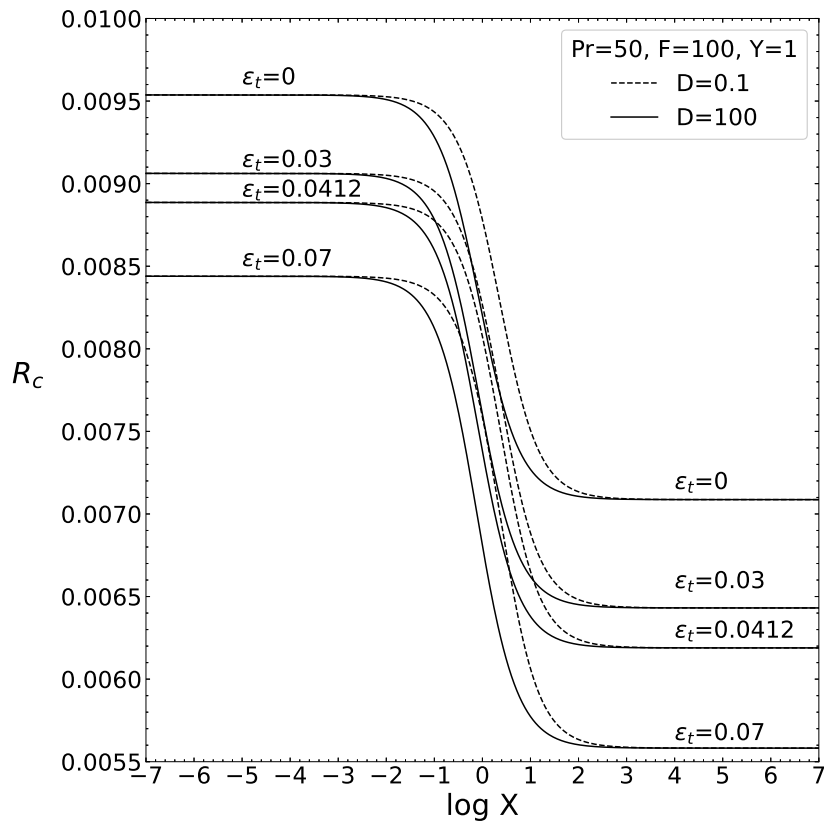


Figura 3.26: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 50$, $F = 100$, $Y = 1$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

$F = 100$, el incremento en cualquiera de los parámetros ε_t , Pr y X desestabilizan al sistema.

La magnitud de ω_c como función de ε_t se presenta en la 3.29 para valores los valores fijos $F = 100$, $Pr = 5, 10, 25, 50$, $Y = 1$ y $\log X = -3.5, 3.5$. En el caso $\log X = -3.5$, el comportamiento de ω_c respecto a ε_t siempre es monótono y decreciente, ésto para cualquier valor del número de Prandtl. Sin embargo, cuando $\log X = 3.5$, ω_c es monótono y creciente para $Pr = 5$ y $Pr = 10$; y ω_c es

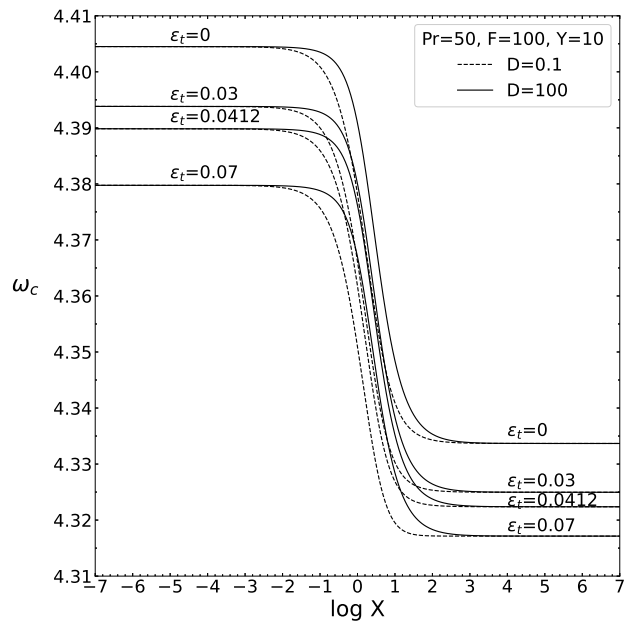
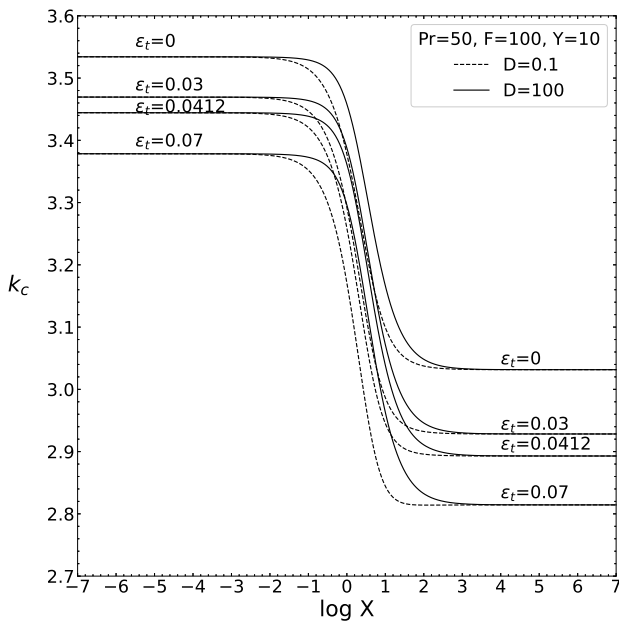
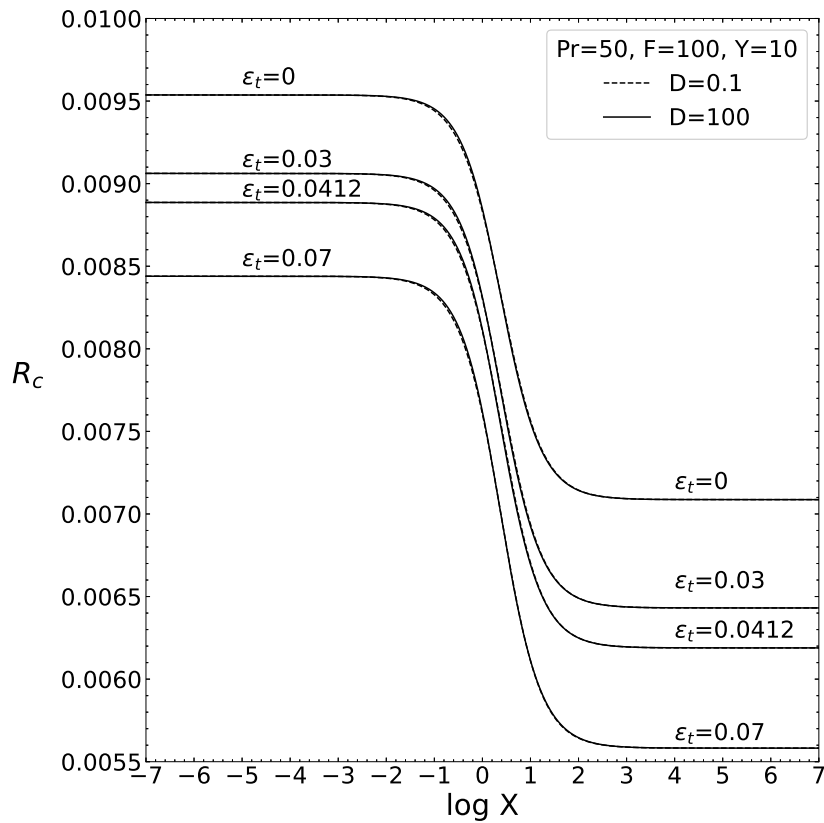


Figura 3.27: Curvas de R_c , k_c y ω_c como función de X para valores fijos de $Pr = 50$, $F = 100$, $Y = 10$, $\varepsilon_t = 0, 0.03, 0.0412, 0.07$ y $D = 0.1, 100$.

monótono y decreciente para $Pr = 25$ y $Pr = 50$. Esto explica el cambio en el ordenamiento de las frecuencias cuando $X \gg 1$ al incrementar el número de Prandtl. Aquí se observa que el incremento en el número de Prandtl incrementa la frecuencia de oscilación, independientemente del valor de ε_t y X . Es importante recordar que los valores de Y y D no tienen importancia en las Figuras 3.28 y 3.29, pues los valores de X escogidos se encuentran lejos de la zona cercana a $\log X = 0$.

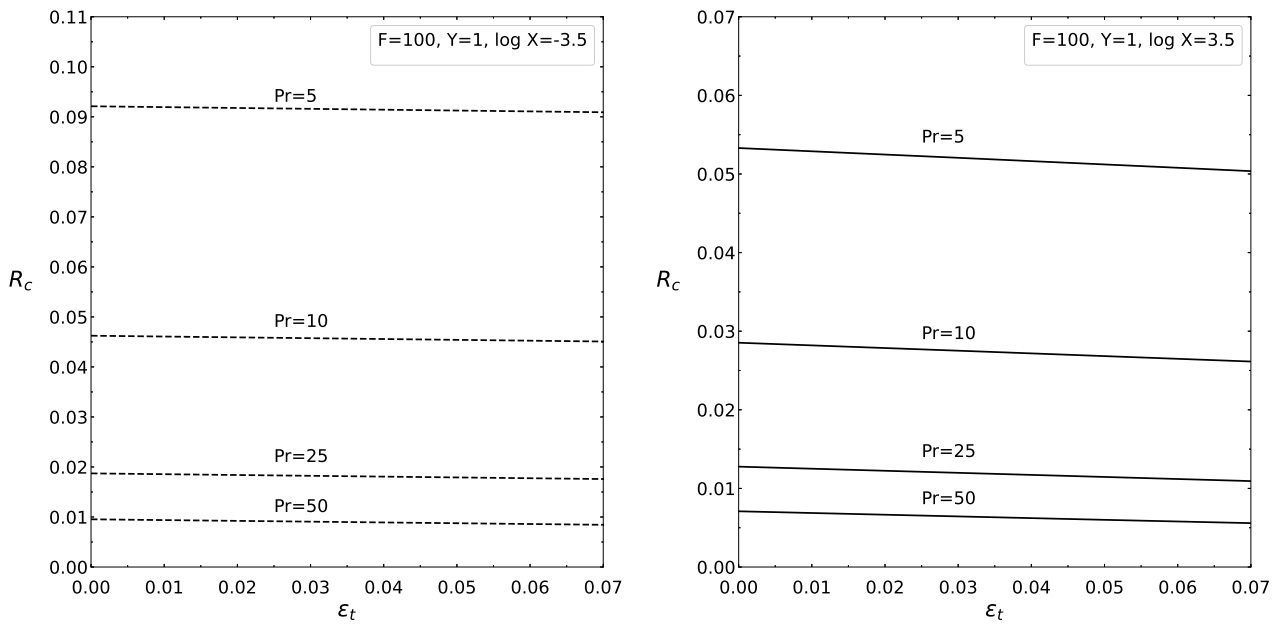


Figura 3.28: Curvas de R_c como función de ε_t para valores fijos de $Pr = 5, 10, 25, 50$, $F = 100$, $Y = 1$ y $\log X = -3.5, 3.5$. Los resultados de esta figura son válidos para $D = 0.1$ y $D = 100$.

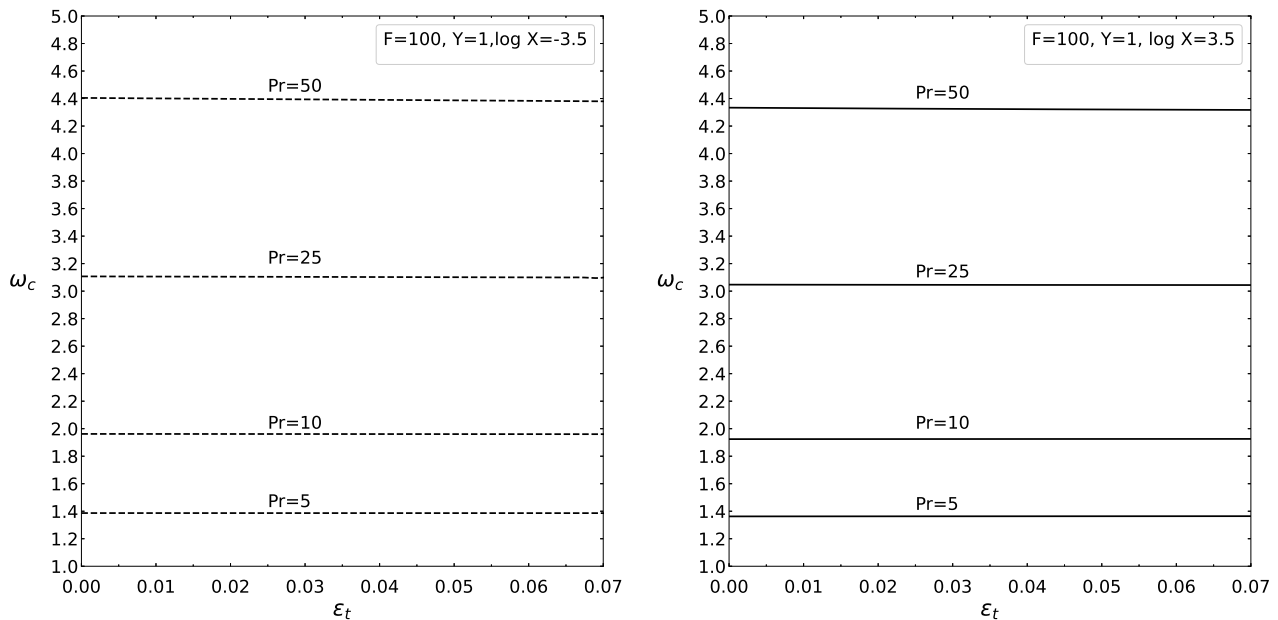


Figura 3.29: Curvas de ω_c como función de ε_t para valores fijos de $Pr = 5, 10, 25, 50$, $F = 100$, $Y = 1$ y $\log X = -3.5, 3.5$. Los resultados de esta figura son válidos para $D = 0.1$ y $D = 100$.

Capítulo 4

Conclusiones

En el presente capítulo, se encontrará una síntesis de los resultados relevantes en el análisis de la estabilidad convectiva lineal de un fluido viscoelástico de Maxwell. Se discuten los efectos de sustituir la ecuación constitutiva de Fourier por la ecuación de Cattaneo-Christov, además de los efectos de la consideración de paredes gruesas con diferentes cocientes de difusividades térmicas (fluido/pared). El caso resuelto considera paredes que tienen las mismas propiedades y geometrías. Los números de Prandtl fueron $Pr = 5, 10, 25, 50$ con dos tiempos de relajamiento viscoelástico $F = 0.1, 100$. Para todos los casos anteriores, se utilizaron diferentes tiempos de relajamiento térmico. En todos los casos, se encontró que la convección se presenta siempre de forma oscilatoria. Se afirma que el incremento en XY reduce la diferencia que existe en los valores críticos para $D = 0.1$ y $D = 100$, este efecto se amplifica aún más conforme el número de Prandtl incrementa. El cociente de calores específicos Y y el espesor de las paredes D se vuelven irrelevantes en los límites que tienden a condiciones de frontera con temperatura fija en las paredes ($X \ll 1$) y flujo de calor fijo en las paredes ($X \gg 1$). Considerar el cociente de difusividades térmicas XY se vuelve extremadamente relevante cuando se analiza la estabilidad del sistema en la región cercana a $\log X = 0$, pues las condiciones de frontera (2.41) no pueden reducirse aproximando a los casos $Bi \rightarrow 0$ o $Bi \rightarrow \infty$.

En el caso viscoelástico $F = 0.1$, el valor del número de Rayleigh crítico disminuye conforme el número de Prandtl incrementa en el caso de Fourier. Contrario a esto, los valores del número de Rayleigh crítico incrementan conforme el número de Prandtl aumenta en el caso $\varepsilon_t > 0.02$. Esto significa que cuando el tiempo de relajamiento térmico es lo suficientemente grande, el sistema es más estable para números de Prandtl pequeños; lo que puede resultar en una sobreestimación de los valores críticos al compararlos con el caso de Fourier. Los casos de mínima estabilidad para el sistema corresponden a un valor del número de Rayleigh crítico en el intervalo $R_c \in [103.73, 109.46]$ para valores del número de Prandtl $Pr \in [5, 50]$: existe un valor crítico del tiempo de relajamiento térmico que hace que el sistema alcance un mínimo de estabilidad. El valor de este tiempo de relajamiento térmico crítico disminuye conforme el número de Prandtl incrementa. Del enunciado anterior se deduce que en el caso $Pr \rightarrow \infty$, el caso más inestable corresponde al tiempo de relajamiento térmico $\varepsilon_t = 0$.

Se encontró que existe un valor del número de Prandtl en el que el máximo del número de Rayleigh cuando $\varepsilon_t > 0$ supera la magnitud del número Rayleigh que se encuentra en el caso de Fourier: para $Pr = 10$ y superiores, la máxima estabilidad corresponde a casos en los que $\varepsilon_t > 0$.

En estos casos, el número de onda crítico y la frecuencia crítica disminuyen conforme el tiempo de relajamiento térmico incrementa. Se puede afirmar que el incremento en el cociente de difusividades térmicas XY desestabiliza al sistema en la región cercana a $\log X = 0$.

En los casos con efectos viscoelásticos $F = 100$, el comportamiento de R_c y k_c es monótono y de-

creciente respecto a ε_t , Pr y X . Esto implica que el modelo de Fourier sobreestima los valores del número de Rayleigh crítico cuando los efectos viscoelásticos son muy relevantes en el sistema. Cuando $F = 100$ y $X \ll 1$, la frecuencia de oscilación crítica es monótona y decreciente respecto a ε_t , esto para cualquier número de Prandtl. Sin embargo, cuando $X \gg 1$, se encontró que la frecuencia crítica es monótona y creciente respecto a ε_t para valores del número de Prandtl $Pr = 5$ y $Pr = 10$, su comportamiento cambia a monótono y decreciente respecto a ε_t en algún valor del intervalo $Pr \in [10, 25]$. En general, el incremento del número de Prandtl, incrementa el valor de la frecuencia de oscilación crítica. De las figuras, se puede observar que pueden existir mínimos absolutos para k_c y ω_c en la región cercana a $\log X = 0$, ésto es válido para cualquier número de Prandtl.

Bibliografía

- [1] Rayleigh, L. (1916). LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 32(192), 529-546.
- [2] Block, M. J. (1956). Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature*, 178(4534), 650-651.
- [3] Pearson, J. R. A. (1958). On convection cells induced by surface tension. *Journal of fluid mechanics*, 4(5), 489-500.
- [4] Koschmieder, E. L. (1993). *Bénard cells and Taylor vortices*. Cambridge University Press.
- [5] Chandrasekhar, S. (2013). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation.
- [6] Drazin, P. G. (2002). *Introduction to hydrodynamic stability (Vol. 32)*. Cambridge university press.
- [7] Charru, F. (2011). *Hydrodynamic instabilities (Vol. 37)*. Cambridge University Press.
- [8] Getling, A. V. (1998). *Rayleigh-Bénard convection: structures and dynamics (Vol. 11)*. World Scientific.
- [9] Smyth, W. D., & Carpenter, J. R. (2019). *Instability in geophysical flows*. Cambridge University Press.
- [10] Bird, R. B., Armstrong, R. C., & Hassager, O. (1987). *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*.
- [11] Armenta, J. L. R., & Salazar-Cruz, B. A. (Eds.). (2018). *Polymer Rheology. BoD-Books on Demand*.
- [12] Pérez-Reyes, I., Vargas-Aguilar, R. O., Pérez-Vega, S. B., & Ortiz-Pérez, A. S. (2018). Applications of Viscoelastic Fluids Involving Hydrodynamic Stability and Heat Transfer. *Polymer Rheology*, 29.
- [13] Vest, C. M., & Arpacı, V. S. (1969). Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below. *Journal of fluid Mechanics*, 36(3), 613-623.
- [14] Sokolov, M., & Tanner, R. I. (1972). Convective stability of a general viscoelastic fluid heated from below. *The Physics of Fluids*, 15(4), 534-539.
- [15] Kolodner, P. (1998). Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 75(2-3), 167-192.

- [16] Takashima, M. (1972). Thermal instability in a viscoelastic fluid layer. I. *Journal of the Physical Society of Japan*, 33(2), 511-518.
- [17] Rosenblat, S. (1986). Thermal convection in a viscoelastic liquid. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 21(2), 201-223.
- [18] Pérez-Reyes, I., & Dávalos-Orozco, L. A. (2011). Effect of thermal conductivity and thickness of the walls in the convection of a viscoelastic Maxwell fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(23-24), 5020-5029.
- [19] Pérez-Reyes, I., & Dávalos-Orozco, L. A. (2018). Effect of thermal conductivity and thickness of the walls on the natural convection in a horizontal viscoelastic Jeffreys fluid layer. *Journal of Heat Transfer*, 140(12).
- [20] Baron Fourier, J. B. J. (1878). *The analytical theory of heat*. The University Press.
- [21] Tibullo, V., & Zampoli, V. (2011). A uniqueness result for the Cattaneo–Christov heat conduction model applied to incompressible fluids. *Mechanics Research Communications*, 38(1), 77-79.
- [22] Cattaneo, C. (1958). Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant la paradoxe d'une propagation instantanée. *Compt. Rendu*, 247, 431-433.
- [23] Chandrasekharaiah, D. (1986). Thermoelasticity with second sound: a review.
- [24] Chandrasekharaiah, D. S. (1998). Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature.
- [25] Joseph, D. D., & Preziosi, L. (1989). Heat waves. *Reviews of Modern Physics*, 61(1), 41.
- [26] Christov, C. I., & Jordan, P. M. (2005). Heat conduction paradox involving second-sound propagation in moving media. *Physical review letters*, 94(15), 154301.
- [27] Ekoue, F., d'Halloy, A. F., Gigon, D., Plantamp, G., & Zajdman, E. (2013). Maxwell-Cattaneo regularization of heat equation. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 7(5), 772-776.
- [28] Cassol, G. O., & Dubljevic, S. (2019). Hyperbolicity of the heat equation. *IFAC-PapersOnLine*, 52(7), 63-67.
- [29] McTaggart, C. L., & Lindsay, K. A. (1985). Nonclassical effects in the Bénard problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 45(1), 70-92.
- [30] Straughan, B. (2010). Thermal convection with the Cattaneo–Christov model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(1-3), 95-98.
- [31] Pranesh, S., & Kiran, R. V. (2015). Rayleigh-Bénard Chandrasekhar convection in an electrically conducting fluid using Maxwell-Cattaneo law with temperature modulation of the boundaries. *International Journal of Engineering Research & Technology*, 4(10), 174.
- [32] Bissell, J. J. (2015). On oscillatory convection with the Cattaneo–Christov hyperbolic heat-flow model. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2175), 20140845.
- [33] Tritton, D. J. (2012). *Physical fluid dynamics*. Springer Science & Business Media.

- [34] Mihaljan, J. M. (1962). A Rigorous Exposition of the Boussinesq Approximations Applicable to a Thin Layer of Fluid. *The Astrophysical Journal*, 136, 1126.
- [35] Malkus, W. V. (1969). A scaling and expansion of equations of motion to yield the Boussinesq equations. *Geophysical Fluid Dynamics at The Woods Hole Oceanographic Institution*.
- [36] Gray, D. D., & Giorgini, A. (1976). The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(5), 545-551.
- [37] Marcuse, D. (1992). Solution of the vector wave equation for general dielectric waveguides by the Galerkin method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28(2), 459-465.
- [38] Kantorovich, L. V. (1958). *Approximate methods of higher analysis*. Interscience.
- [39] Lai, W. M., Rubin, D. H., Rubin, D., & Krempf, E. (2009). *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinemann. 100
- [40] Koca, A., Oztop, H. F., & Varol, Y. (2007). The effects of Prandtl number on natural convection in triangular enclosures with localized heating from below. *International communications in heat and mass transfer*, 34(4), 511-519.
- [41] Cengel, Y. A., & Ghajar, A. J. (2007). *Heat and mass transfer. A practical approach*.
- [42] Bergman, T. L., Incropera, F. P., DeWitt, D. P., & Lavine, A. S. (2011). *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons.
- [43] Clever, R. M., & Busse, F. H. (1981). Low-Prandtl-number convection in a layer heated from below. *Journal of Fluid Mechanics*, 102, 61-74.
- [44] Kraichnan, R. H. (1962). Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number. *The Physics of Fluids*, 5(11), 1374-1389.