



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)
FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO DE SUPERCONDUCCIÓN HOLOGRÁFICO EN
3+1 DIMENSIONES.

T E S I S

QUE PARA OBTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A:

MARTÍN EDWIN REYES SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG
FACULTAD DE CIENCIAS

COMITÉ TUTOR:

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX, MARZO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Reyes

Sánchez

Martín Edwin

5566737047

Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias (Física)

310308041

2. Datos del Sinodal 1

Dr.

Mariano

Chernicoff

Minsberg

3. Datos del Sinodal 2

Dr.

José Antonio Rafael

García

Zenteno

4. Datos del Sinodal 3

Dr.

Erick Leonardo

Patiño

Jáidar

5. Datos del Sinodal 4

Dr.

José David

Vergara

Oliver

6. Datos del Sinodal 5

Dr.

Héctor Hugo

García

Compean

7. Datos del trabajo escrito

Un modelo de superconducción

holográfico en 3+1 dimensiones

p. 139

2022

*Mamá,
Papá,
gracias por todo.*

*To see a World in a Grain of Sand
And a Heaven in a Wild Flower,
Hold Infinity in the palm of your Hand
And Eternity in an Hour [...]*
W. Blake

Agradecimientos

Me gustaría empezar agradeciendo a mí tutor, el Dr. Mariano Chernicoff, por su inigualable compañía a lo largo de todo este trayecto, aprecio todas las enseñanzas y todo el tiempo dedicado. Por todo el apoyo dentro y fuera de la academia; gracias por ser un ejemplo de buen científico y, por sobre todo, de ser humano.

Aprecio toda la ayuda brindada por mi comité tutor; Dr. Hernando y Dr. Alberto les agradezco el tiempo, su conocimiento y toda la comprensión que me brindaron para ser capaz de llegar a este punto y seguir construyendo este sendero.

Le doy las gracias con igual intensidad al Dr. Leonardo Patiño por arroparnos dentro de este proyecto, por su gran disposición a compartir sus conocimientos y guiarnos en todo momento. Gracias por hacerme sentir tan cómodo en un patio que hace unos ayeres sentía tan ajeno. Toda mi gratitud también al M. en C., y futuro doctor, César Díaz que también me estrechó la mano en esta investigación, por siempre estar dispuesto a resolver cada una de mis dudas y ayudarme sin ningún reparo. A ambos gracias por hacer nuestro este que en gran medida es su trabajo.

A cada uno de mis sinodales: Dr. Antonio, Dr. Leonardo, Dr. David y Dr. Hugo, acepten toda mi gratitud por formar parte en mi proceso de titulación. Nunca olvidaré el apoyo que de ustedes recibí para ser capaz de proseguir mi camino como científico, gracias por las observaciones y correcciones hechas a este trabajo, por su tiempo y por permitirme compartirles los resultados del mismo.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado.

—

Amigos míos, ni el tiempo ni la distancia. Que gusto saber que hasta en un situación tan anormal como la de los últimos años hay lazos que no se rompen; muchas gracias por nuestro ritual virtual de los domingos y por ser alivio cómico: algún día desarrollarán un movimiento normal en los pulgares y dejaré de ser el único que contribuya al equipo. Les deseo el mayor de los éxitos, se lo merecen.

Por último, a las personas más importantes de mí vida; mamá, papá, que suyo sea cada pequeño logro pues son el motor de mi cuerpo y de mi alma. Gracias por dotar de peso a mi existencia con cada uno de sus motivos, acciones y palabras; gracias por ser mi mayor alegría y más grande tesoro. Gracias por ser mi infinito y mi eternidad. Los amo.

Resumen

La superconducción es un fenómeno fascinante que se observa en ciertos materiales donde su resistencia eléctrica desaparece y las líneas de campo magnético son expulsadas del mismo. A diferencia de los conductores ordinarios, los superconductores exhiben este comportamiento cuando se les enfría por debajo de cierta temperatura finita no cero, a dicho valor de temperatura se le conoce como temperatura crítica. El mercurio fue el primer material observado capaz de volverse un superconductor por debajo de los 4 K, sin embargo, no fue hasta casi ocho décadas más tarde que las investigaciones condujeron al descubrimiento de materiales cerámicos capaces de entrar en su fase de superconducción con una temperatura crítica muy superiores y que ronda los 30 K.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos aplicada a sistemas de materia condensada, los materiales superconductores de alta temperatura resultan ser sistemas fuertemente acoplados donde es complicado obtener información con las técnicas perturbativas usuales. Es por esto último que se busca hacer uso de la llamada correspondencia holográfica, una poderosa herramienta obtenida en el contexto de la teoría de cuerdas, para estudiar a los superconductores de alta temperatura pues en los últimos años se ha mostrado como un útil diccionario capaz de obtener información de sistemas fuertemente acoplados.

El presente trabajo busca presentar los conceptos e ideas básicos en el lenguaje de la relatividad y la teoría cuántica de campos que permitan discurrir en los elementos de la correspondencia holográfica. Haremos uso de la correspondencia para estudiar un dual gravitacional de un superconductor holográfico en $3+1$ dimensiones en presencia de un campo magnético intenso. El fondo gravitacional retroacciona con un campo electromagnético externo, éste último acoplado mínimamente a un campo escalar complejo. Centramos nuestra atención en un estudio perturbativo del campo escalar y, mediante métodos numéricos, mostramos que el sistema exhibe la formación de un condensado, relacionado con el fenómeno de superconducción, por debajo de cierta temperatura crítica.

Índice general

1. Introducción	1
2. Aspectos generales de gravedad de Einstein	4
2.1. Relatividad Especial y General	4
2.2. Espaciotiempo de Sitter y Anti-de Sitter	9
2.3. Agujeros Negros	12
2.3.1. Métrica de Schwarzschild-AdS	12
2.3.2. Temperatura de Hawking	14
2.3.3. Métrica de Reissner-Nordström-AdS	16
3. Aspectos generales de la teoría cuántica de campos	18
3.1. Cuantización del campo escalar en un espaciotiempo plano	19
3.2. El campo fermiónico	26
3.3. Electrodinámica clásica y el campo vectorial	37
3.3.1. Ecuaciones de Maxwell	39
3.3.2. Cuantización del campo vectorial no masivo	40
3.4. Teoría de Yang-Mills	42
3.5. Teoría cuántica de campo conforme en $d > 2$	46
3.6. Supersimetría	48
3.7. SYM $\mathcal{N} = 4$	54
4. Superconductividad	57
4.1. Teorías de Ginzburg-Landau y BCS.	58
4.2. Superconductores de alta temperatura	63

4.2.1. El modelo de Espín-Fermión	64
5. La correspondencia holográfica	66
5.1. Aspectos generales de teoría de cuerdas	66
5.1.1. Teoría de Supercuerdas	79
5.1.2. D-branas en supercuerdas	93
5.2. La correspondencia AdS/CFT	98
5.3. Aspectos generales de la correspondencia holográfica	100
5.3.1. Simetrías	104
5.3.2. Correspondencia campo-operador	104
5.3.3. Modos normalizables y no normalizables	105
6. Superconductividad holográfica	109
6.1. Ingredientes mínimos de superconducción holográfica	110
6.2. Cálculo de cantidades físicas	122
6.3. Fase de superconducción	125
6.4. Trabajo futuro	129
7. Conclusiones	130
Bibliografía	132

Capítulo 1

Introducción

En el universo existen muchos fenómenos que han cautivado la actividad intelectual a lo largo de la historia de la humanidad. Cuando el método para estudiar estos fenómenos naturales se estructuró desde la observación sistemática hasta el planteamiento teórico y predictivo, la ciencia se convirtió en un elemento central en el desarrollo de la sociedad. La finalidad de esta rama del conocimiento es ambiciosa: busca dar explicación al mundo que nos rodea, predecir su comportamiento y ser capaz de modificarlo, pero también pesa sobre ella el largo camino que se vislumbra por delante para percibir estos objetivos como más cercanos. Pero la belleza que ofrece nuestra finitud humana es ser capaces de contribuir con nuestra curiosidad al saber mediante pequeños bloques que ensamblan el grueso intelectual que hoy día poseemos y que, por ende, agrandamos.

De los fenómenos que más ha atraído a la mente humana y, en igual o superior medida, ha acentuado el avance tecnológico de los últimos siglos es la electricidad y el magnetismo. Las aplicaciones del electromagnetismo al entorno tecnológico contemplan desde las microondas, antenas, máquinas eléctricas, comunicaciones por satélite hasta dispositivos como radios, televisores, teléfonos, motores eléctricos y láseres. Hoy día entendemos a la naturaleza como conformada por pequeños bloques, partículas, con distintas propiedades que las caracterizan como su masa o su carga eléctrica; es justamente el electromagnetismo el encargado de describir la interacción de partículas cargadas con campos eléctricos y magnéticos, y de dar sustento teórico a las aplicaciones antes comentadas.

Cuando una serie de partículas libres cargadas se someten a la presencia de un campo eléctrico, éstas tienden a moverse, dependiendo de su carga lo harán en la dirección ó dirección opuesta del campo; este conjunto de partículas moviéndose al unísono formará una corriente eléctrica. Cuando este fenómeno se replica para partículas en un material no siempre se sucederá la generación de una corriente en presencia de un campo electromagnético, aquellos materiales donde esto no ocurre son conocidos como aislantes frente a su contrapartida, los materiales conductores.

Entre los materiales conductores se ubican los metales. Al paso de una corriente eléctrica, los metales ofrecen una resistencia propia del material que dificulta el paso de

las partículas cargadas. Esta resistencia genera una pérdida de energía en el sistema que se transforma en calor y que es fundamento de aparatos como calentadores de agua o tostadores. Sin embargo, existen sistemas en los que esta pérdida de energía busca disminuirse por cuestiones de eficiencia.

La resistencia eléctrica de la mayoría de materiales varía en función de la temperatura: a menor temperatura menor resistencia. La conjetura inicial de este comportamiento consistía en pensar que la resistencia de los materiales se volvería cero solo cuando se sometiese al material a la mínima temperatura posible, es decir a los 0 K. Esta postura tuvo que relegarse a principios del siglo veinte cuando se observó por primera vez que existen materiales que no presentan resistencia al paso de una corriente eléctrica aunque no se les enfríe hasta los 0 K, si bien sí es necesaria una temperatura pequeña ~ 4 K. A estos materiales se les conoció como superconductores. Este hecho atrajo la atención de la comunidad científica y se buscaron modelos que describiesen lo que ocurría. Estas investigaciones se extendieron por toda la primera mitad del siglo y tuvieron éxito, todos los materiales estudiados hasta ese momento parecen encajar bien dentro de una de las teorías más populares de la física, la teoría BCS. Pero la segunda mitad del siglo traería consigo el descubrimiento de materiales que eran capaces de volverse superconductores a temperaturas mucho mayores a las observadas hasta ese momento, ~ 30 K. Estos materiales, superconductores de alta temperatura, ya no pudieron acomodarse dentro de la teoría BCS y se reinició la búsqueda de un modelo que diese explicación a la existencia de estos materiales.

Con el transcurrir del tiempo no solo este estudio de los superconductores progresó, la física en general fue robusteciéndose y generando conocimiento. Con los últimos desarrollos de la teoría cuántica de campos, una de las teorías más poderosas en la descripción de nuestra realidad, se buscó la respuesta a la última cuestión planteada por los superconductores de alta temperatura, no obstante, los modelos propuestos cayeron en una descripción complicada en cuanto a la obtención de información que en ellos podía hacerse. Fue necesario esperar al fin de siglo para que la construcción de un diccionario ayudara a mejorar el entendimiento los modelos encontrados y diese cuenta de estos cálculos complicados en términos de una teoría computacionalmente manejable. Este diccionario, a grandes rasgos, establece una equivalencia entre una teoría de campo y una teoría de gravedad y es conocido como correspondencia holográfica.

La correspondencia holográfica se ha colocado en estos últimos veinte años como una de las teorías más importantes de la física teórica y ha motivado multitud de estudios alrededor de ella. Este trabajo pretende utilizar esta poderosa herramienta para plantear un modelo gravitacional que, al ser traducido por el diccionario de la correspondencia holográfica, sea equivalente a una teoría de campo que describa un superconductor en $3+1$ dimensiones en presencia de un campo magnético externo.

Daremos cuenta a lo largo del trabajo de las ideas y conceptos aquí planteados. Comenzaremos con dos capítulos, 2 y 3, que introduzcan los elementos mínimos de la relatividad y de la teoría cuántica de campos que consideramos necesarios para la comprensión posterior del texto. Continuaremos con un capítulo dedicado a descri-

bir el fenómeno de superconducción desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos y las dificultades que enfrenta este enfoque. En el capítulo 5 desarrollaremos la construcción de la correspondencia holográfica y las entradas del diccionario que nos serán de utilidad para construir un modelo de superconducción holográfica. Terminaremos el texto con el capítulo 6, correspondiente a la construcción del modelo, a su estudio y análisis numérico; presentando los resultados hasta el momento obtenidos.

Capítulo 2

Aspectos generales de gravedad de Einstein

En este capítulo realizaremos un breve recorrido por los conceptos e ideas generales dentro de la relatividad general que servirán como preámbulo para el desarrollo de la presente tesis y que será fundamental en la construcción de la llamada correspondencia holográfica, donde ciertos agujeros negros y su termodinámica, así como la geometría anti-de Sitter, tomarán especial ímpetu.

2.1. Relatividad Especial y General

Aunque el bagaje intelectual que rodea a la teoría de la relatividad especial fue fabricándose de a poco, representó una irrupción abrupta en la escena científica el artículo publicado en 1905 por Albert Einstein para marcar el ritmo y difusión de las ideas involucradas [35]. Los elementos de dicha teoría parten de dos postulados: *el principio de relatividad* nos dice que los resultados de cualquier experimento realizado por un observador no dependen de su velocidad relativa respecto a cualquier otro observador que no participa en el experimento; mientras que *la invariabilidad de la velocidad de la luz* postula, como su nombre indica, que un haz luminoso se desplaza a la misma velocidad, $c \sim 3 \times 10^6$ km, para dos observadores moviéndose, sin aceleración relativa entre sí, que pretendan medirla. Además de hacer patente la necesidad de la homogeneidad e isotropía del espaciotiempo. En función de practicidad asignaremos el valor $c = 1$ de ahora en adelante como lo hecho en el sistema de unidades naturales.

Entre las consecuencias de estos dos postulados se encuentran la contracción del espacio o la dilatación del tiempo. Comentemos aquí la invariancia del *intervalo o elemento de línea*. Dado un evento, un punto en el espaciotiempo, para la posición (x, y, z) y el tiempo t , que podemos agrupar como $x^\mu = (t, x, y, z) \equiv (x^0, x^i)$ $i \in \{1, 2, 3\}$; el intervalo entre dos eventos se define como

$$\Delta s^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \equiv (\Delta t)^2 - (\Delta x^i)^2, \quad (2.1)$$

donde es importante recalcar que nos encontramos en un espaciotiempo plano y que se ha hecho uso de la convención $(+, -, -, -)$ que continuaremos usando durante el resto del trabajo. En el contexto de la relatividad especial, dada la invariabilidad de la velocidad de la luz, este intervalo de línea debe permanecer constante para dos sistemas inerciales con un origen coincidente, i.e. $x^i = x'^i$ cuando $t = t' = 0$:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - (\Delta x^i)^2 = \Delta t'^2 - (\Delta x'^i)^2 = \Delta s'^2. \quad (2.2)$$

Es por esto que hace sentido pensar en la relatividad especial como una teoría del espaciotiempo conocido como *espaciotiempo de Minkowski*, generalización del usual espacio plano euclideo. Como veremos, las transformaciones de coordenadas son capaces de, en cierto sentido, rotar el espacio y el tiempo, de modo que se carece de la noción de eventos simultáneos.

Al introducir la matriz diagonal $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ podemos reescribir al elemento de línea de forma más compacta: $\Delta s^2 = \Delta x^\top \eta \Delta x \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$. A esta matriz se le conoce como *métrica de Minkowski*. Esta identificación entre el cuadrado del elemento de línea y la *métrica* puede generalizarse a un espaciotiempo de dimensión d y tensor métrico $g_{ij} = g_{ji}$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^d g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.3)$$

Ya hemos mencionado el interés que tenemos en cambios de coordenadas del espaciotiempo, pero dentro de todas estas transformaciones nos interesan especialmente aquellas que dejan invariante al elemento de línea. A las transformaciones lineales de coordenadas que siguen manteniendo este elemento sin cambios se les conoce como *transformaciones de Lorentz*, y usualmente se les denota con $M^{\mu\nu}$. El conjunto de estas transformaciones forma un grupo bajo el producto usual que en resonancia toma el nombre de *grupo de Lorentz*, y que se denota como $\mathcal{O}(1, 3)$ [18]. Dentro de este conjunto de elementos existe un subconjunto definido por el signo del determinante de la matriz asociada; observar que según lo que hemos expuesto $M^{\mu\nu}$ es tal que $x^\top \eta x = \Delta s^2 = \Delta s'^2 = (Mx)^\top \eta (Mx) = x^\top M^\top \eta M x \Rightarrow -1 = \det(\eta) = \det(M^\top \eta M) = -\det(M)^2 \therefore \det(M) = \pm 1$. El subconjunto de transformaciones de Lorentz cuyo determinante es $+1$ forma un subgrupo denotado por $\mathcal{SO}(1, 3)$ [75].

A su vez, podemos tomar una segunda clasificación de las transformaciones de Lorentz al considerar la relación que hemos deducido en el párrafo previo, $\eta = M^\top \eta M \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} M_\mu^\rho M_\nu^\sigma$, que para $\mu = \nu = 0$ se tiene que $(M_0^0)^2 - (M_0^1)^2 - (M_0^2)^2 - (M_0^3)^2 = 1$, luego $(M_0^0)^2 \leq -1$ ó $(M_0^0)^2 \geq +1$. El conjunto de transformaciones de Lorentz que satisfagan la segunda condición formará igualmente un subgrupo denotado por $\mathcal{O}^+(1, 3)$. En última instancia, podemos intersecar ambos subgrupos, $\mathcal{SO}(1, 3)$ y $\mathcal{O}^+(3, 1)$, y obtener el subgrupo más reconocido de transformaciones de Lorentz, el *grupo de Lorentz restringido* $\mathcal{SO}^+(3, 1)$ [75]. Dentro de este subgrupo de transformaciones tenemos a las 3 rotaciones usuales del plano euclideo, además de las transformaciones que involucran a la variable temporal, a éstas

transformaciones de Lorentz se les conoce como *boosts* y son de la forma:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (2.4)$$

teniendo igualmente 3 de este tipo de transformaciones. Todas las transformaciones de Lorentz en el subgrupo $\mathcal{SO}^+(3, 1)$ van a poder ser expresadas como producto de estos seis tipos de transformaciones [17].

Habiendo estudiado las transformaciones lineales que dejan invariante el intervalo de línea cabría preguntarse que otro tipo de transformaciones cumplen el mismo requisito fuera de la linealidad. La respuesta es fácilmente hallada al observar que podemos sumar cualquier constante a^μ a x^μ y al registrar la diferencia Δx para dos eventos ésta se ve inalterada. Con lo cual trasladarnos en el espaciotiempo, $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, constituye de igual forma una transformación que preserva el intervalo. Dicho esto, tanto trasladarnos como rotar en el espaciotiempo conforman una colección de transformaciones que preservan el elemento de línea y de las que tendremos un gran interés de estudio. Como cabría imaginar, al conjunto de transformaciones restringidas de Lorentz, $\mathcal{SO}^+(1, 3)$, junto con las traslaciones espaciotemporales, a^μ , se les puede otorgar una estructura de grupo con el producto $(M, a) \cdot (M', a') = (MM', a + Ma')$, tal que, $(M, a)x^\mu = M_\nu^\mu x^\nu + a^\mu$. A este grupo se le conoce como *grupo de Poincarè* [17].

Dadas la repercusiones de la relatividad especial en la física, muchos conceptos de los que se partía para elaborar el grueso del conocimiento tuvieron que ser reformulados, uno de ellos fue el *principio de equivalencia de Galileo*, en el cual los efectos de encontrarse inmerso en un campo gravitatorio homogéneo son indistinguibles de aquellos que se suceden en un medio que se desplace con aceleración uniforme. El elemento destacado en este principio es la masa de la partícula ubicada en ambos escenarios, sin embargo, para la relatividad especial el concepto carece de universalidad al tratarse de una manifestación más de la energía, de aquí que se busque entonces replantear la indistinguibilidad de los fenómenos físicos en un campo gravitatorio y con movimiento acelerado prescindiendo del concepto clásico. Nace entonces el *principio de equivalencia de Einstein* [34], para el cual, al considerar regiones infinitesimales en el espaciotiempo, las leyes de la física se reducen a aquellas descritas por la relatividad especial donde nos encontramos en un espaciotiempo plano. Incorporar los efectos gravitacionales que observamos corre a cargo, entonces, de la geometría no local del espaciotiempo.

Enfocándonos en una descripción Lagrangiana de la teoría, la cantidad fundamental que hace presencia es la acción [49]

$$S = \kappa \int d^4x \mathcal{L}, \quad (2.5)$$

una intergral sobre todo el espaciotiempo de la densidad Lagrangiana \mathcal{L} . Esta densidad Lagrangiana se pide sea una densidad tensorial de rango $(0, 0)$, escalar y dependiente de componentes tensoriales junto con sus derivadas covariantes.

Haremos aquí una breve distinción que nos permite la teoría pues dividiremos nuestra acción en dos términos independientes

$$S = \frac{1}{8\pi G} S_V + S_M, \quad (2.6)$$

tal que S_V sea construida a partir de ignorar la contribución de materia, misma que acuñaremos al término S_M , permitiendo tomar una descripción únicamente geométrica dependiente de la métrica y sus primeras derivadas. Observar que la introducción de la constante $(8\pi G)^{-1}$ se coloca conociendo de antemano la convergencia al límite Newtoniano [18, 106].

Dado el requisito de construir una cantidad escalar proveniente de derivadas de la métrica tal que, al trabajar con una métrica compatible, la dependencia de primeras derivadas queda descartada, el paso en complejidad a considerar es una dependencia de segundas derivadas de la métrica. Conviene aquí mencionar entonces los recursos que nos otorga el estudio matemático de las estructuras como el espaciotiempo que estamos estudiando y que forma parte de un conjunto más grande llamado *variedades pseudo-Riemannianas* [78]. Dentro de estas variedades la forma más común de expresar la *curvatura* es mediante el uso del *tensor de Riemann*, mismo que cuantifica la diferencia entre el espaciotiempo con el que se esté trabajando y un espaciotiempo plano. Este tensor es:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (2.7)$$

donde a

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (2.8)$$

se les conocen como *símbolos de Christoffel*. El *escalar de Ricci*, R , se alza como buen prospecto respaldado por el hecho de ser el invariante de curvatura más simple que se puede formar a partir del tensor de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

siendo $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$, el *tensor de Ricci*.

De esta manera se postula como escalar acompañante en S_V al escalar de Ricci, de forma que

$$S_V = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.10)$$

con $g = \det(g_{\mu\nu})$. Aunque, el buscar la cancelación de términos provenientes de la variación de esta acción viene de la mano con solicitar que tanto $\delta g_{\mu\nu}$ como $\delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu})$ se hagan cero en la frontera de la variedad, restricción que si bien puede hacerse, condiciona en demasía la variedad en la que se está trabajando. Por esta razón es que se construye una modificación a la acción como lo propuesto por Gibbons-Hawking-York [43, 115], tal que cancele las contribuciones ligadas a $\delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu})$ y pueda solo pedirse que $\delta g_{\mu\nu} = 0$ en la frontera de la variedad. La acción sería entonces

$$S'_V = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3\vec{x} \epsilon \sqrt{h} K, \quad (2.11)$$

donde $\epsilon = 1$ o $\epsilon = -1$ según si la frontera es una superficie tipo tiempo o tipo espacio, respectivamente. $h_{\alpha\beta}$ es la métrica inducida por $g_{\mu\nu}$ sobre la frontera, $h = \det(h_{\alpha\beta})$, y K es la traza de la segunda forma fundamental [63]. Un análisis propio de esta modificación puede revisarse en [33].

La variación de S'_V es simplemente

$$\delta S'_V = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Uno de los últimos pasos es hacer la identificación de un tensor de energía-momento simétrico con la variación de S_M respecto a la métrica de forma que:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Esta identificación no es única dado que existen formas independientes de definir un tensor covariantemente conservado, sin embargo la definición tomada aquí posee ciertas virtudes que hacen considerarlo en primera instancia, como su simetría manifiesta y su invariancia de norma [17].

Tomando en conjunto las expresiones (2.12) y (2.13), y obteniendo la variación de la acción respecto a la métrica igualada a cero, se sigue que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

Estas ecuaciones llevan el nombre de *ecuaciones de campo de la relatividad general* o *ecuaciones de campo de Einstein*, y en $3 + 1$ dimensiones conforman un abanico de dieciséis ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para la métrica, donde por ser esta última un tensor simétrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, son diez las ecuaciones independientes.

La modificación que pueden sufrir estas ecuaciones bajo la introducción de términos adicionales en la acción está en constante estudio, caso en el que puede incluirse a la famosa constante cosmológica, Λ ,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

En breve veremos que para nuestros propósitos este es el escenario, con $\Lambda < 0$, al que prestaremos nuestra atención. Pero antes, debido a la utilidad que representará más adelante, permitase introducir en este momento el concepto de *diagrama de Penrose* [31].

Un diagrama de Penrose es un método gráfico para visualizar la estructura global y causal de un espaciotiempo en una extensión finita. Para poder dibujar el diagrama este debe representar al espaciotiempo de interés en dos dimensiones, una de ellas la temporal, debido a ello el escenario debe ser lo suficientemente simétrico para poder suprimir las dimensiones adicionales. La idea detrás del proceso es encontrar

una transformación conforme¹ de coordenadas tal que las divergencias del sistema original se encuentren a una distancia coordenada finita y que las líneas de luz, nulas, estén siempre a $\pm 45^\circ$.

Ilustremos lo dicho mostrando el diagrama de Penrose del espaciotiempo descrito por la métrica de Minkowski, Fig. (2.1):

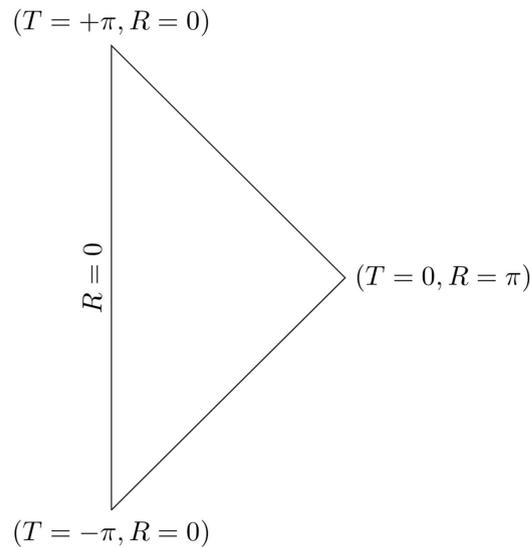


Figura 2.1: Diagrama de Penrose para el espaciotiempo de Minkowski. R y T son coordenadas dependientes de t y r . Imagen tomada de [17]

2.2. Espaciotiempo de Sitter y Anti-de Sitter

Los espacios de (Anti-) de Sitter son las soluciones más sencillas a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica positiva (negativa), jugando el papel análogo a la solución de Minkowski para $\Lambda = 0$, siempre que se considere la simetría esférica y $T_{\mu\nu} = 0$. Estos espacios son variedades Lorentzianas de curvatura constante contrapartes de la esfera o el hiperboloide, tal como el espacio de Minkowski lo es del espacio euclideo.

W. de Sitter desarrolló este modelo en 1917 como una solución *maximalmente simétrica*, esto es, con el número máximo de simetrías a las ecuaciones de campo de Einstein, en este caso también en el vacío. Como ya se había establecido, las ecuaciones de la relatividad general con constante cosmológica y en vacío se ven de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

¹Seremos más explícitos en la definición de transformación conforme en el capítulo siguiente, entiéndase por el momento a un cambio conforme como la multiplicación de toda la expresión por una función arbitraria.

Consideremos aquí que generalizamos las ecuaciones de campo a un número d de dimensiones espaciotemporales, de forma que al tomar la traza en la ecuación anterior obtenemos

$$R - \frac{d}{2}R + d \cdot \Lambda = 0 \Rightarrow R = \frac{2d}{d-2}\Lambda, \quad (2.17)$$

lo que muestra que el considerar una constante cosmológica positiva o negativa conduce a un espaciotiempo con curvatura constante positiva o negativa, respectivamente.

Sustituyendo la expresión (2.17) en (2.16) permite escribir las ecuaciones de campo de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{2}{d-2}\right)\Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Tal como habíamos expuesto, debido al rumbo que queremos tomar en capítulos posteriores centraremos nuestra atención en el caso de una constante cosmológica negativa, y en consecuencia, en el espacio Anti-de Sitter, o comúnmente abreviado, AdS.

El espacio d dimensional de AdS puede representarse por el hiperboloide

$$X_0^2 + X_d^2 - \sum_{i=1}^{d-1} X_i^2 = L^2, \quad (2.19)$$

con $L = cte$ el radio del hiperboloide, encajado en el espacio plano con $(d+1)$ dimensiones y con métrica

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_d^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dX_i^2. \quad (2.20)$$

Por construcción, este espacio es invariante ante el grupo de isometrías $SO(2, d-1)$, además de ser homogéneo e isotrópico [14].

La ecuación (2.19) puede resolverse para una cierta elección de coordenadas al considerar:

$$\begin{aligned} X_0 &= L \cosh \rho \cos \tau, & X_d &= L \cosh \rho \sin \tau, \\ X_i &= L \sinh \rho \Omega_i & (i \in \{1, \dots, d-1\} : \sum_i \Omega_i^2 &= 1). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sustituyendo en (2.19), se obtiene la métrica para AdS dada por

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2). \quad (2.22)$$

Al tomar $0 \leq \rho$ y $0 \leq \tau < 2\pi$, la solución cubre enteramente el hiperboloide una única vez. Por esta razón a las coordenadas (τ, ρ, Ω_i) se les conoce como *coordenadas globales*. Además, debido a que la métrica se comporta cerca de $\rho = 0$ como $ds^2 \sim L^2(-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$, el hiperboloide tiene la topología $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$, con S^1 representando las curvas cerradas tipo tiempo en la dirección τ . Para evitar estas

curvas cerradas y obtener un espaciotiempo causal se deberá “desdoblar” el círculo y permitir a τ tomar valores en el espectro $-\infty < \tau < \infty$.

Para estudiar la estructura causal de AdS conviene tomar el siguiente cambio coordenado $\tan \theta = \sinh \rho$, ($0 \leq \theta < \pi/2$), tal que la métrica (2.22) tome la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \theta} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega^2). \quad (2.23)$$

Dado que la estructura causal no cambia por una transformación conforme podemos multiplicar la ecuación anterior por $\cos^2 \theta/L^2$, encontrando

$$ds'^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega^2. \quad (2.24)$$

Cuando $0 \leq \theta < \pi$, a esta métrica se le llama *universo estático de Einstein* [46]. Como en nuestro análisis θ solo toma valores en $[0, \pi/2)$, concluimos que AdS puede mapearse de forma conforme a la mitad del universo estático de Einstein. La utilidad práctica de este cambio coordenado es que permite construir un diagrama de Penrose de AdS, Fig.(2.2):

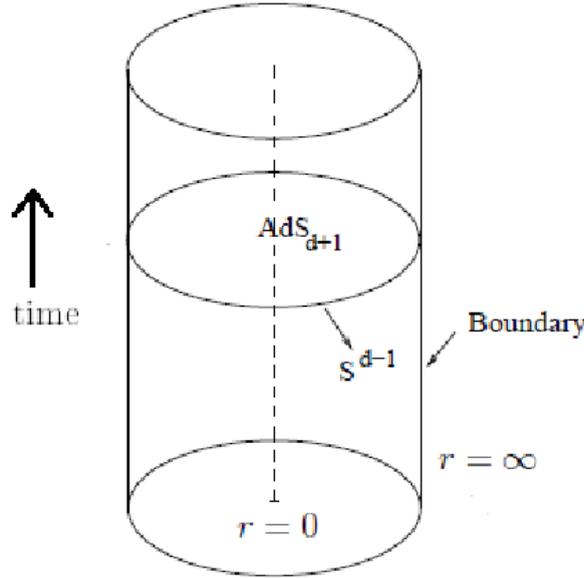


Figura 2.2: El diagrama de Penrose para el espaciotiempo AdS_{d+1} puede representarse como un cilindro sólido con la línea vertical como eje temporal. Imagen tomada de [91]

Una observación que nos permite realizar el diagrama es que el infinito espacial y nulo es una superficie tipo tiempo lo que requiere de unas condiciones de frontera en la $\mathbb{R} \times S^p$ en $\theta = \pi/2$ para tornar a las ecuaciones de movimiento como bien definidas.

En adición con la parametrización que hemos dado, AdS también puede quedar expresado en otro set de coordenadas de mucho interés, definidas como

$$X_0 = \frac{1}{2u}(1 + u^2(L^2 + \vec{x}^2 - t^2)), \quad X_d = Lut,$$

$$X^i = Lux^i \quad (i \in \{1, \dots, d-2\}), \quad X^{d-1} = \frac{1}{2u}(1 - u^2(L^2 - \vec{x}^2 + t^2)). \quad (2.25)$$

donde $0 < u, \vec{x} \in \mathbb{R}^{d-2}$, y permiten obtener la métrica

$$ds^2 = L^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2(-dt^2 + d\vec{x}^2) \right). \quad (2.26)$$

Estas coordenadas solo cubren la mitad del hiperboloide, y se les conoce como *coordenadas de Poincarè*. Al tomar otro pequeño cambio coordenado, $u = 1/z$, ahora la métrica es

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2). \quad (2.27)$$

Mediante esta expresión será fácil ver que a la luz le toma un tiempo coordenado finito en llegar a la frontera $z \rightarrow 0$, a pesar de que ésta se ubica a una distancia propia infinita. En efecto, si consideramos aun otro cambio, $z/L = e^{-y}$, obtenemos

$$ds^2 = e^{2y} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + L^2 dy^2. \quad (2.28)$$

Al enviar un haz de luz al infinito, $z \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \infty$, tendremos que $ds^2 = 0$ y podemos considerar en el cálculo que \vec{x} es constante, finalmente

$$t = \int dt = L \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y} < \infty, \quad (2.29)$$

lo que nos dice que le toma un tiempo coordenado finito al haz de luz el alcanzar la frontera $z \rightarrow 0$, permitiéndole reflejarse y volver.

En la correspondencia este sistema coordenado será de vital importancia pues conformará el escenario sobre el que se construirá la conjetura.

2.3. Agujeros Negros

En la sección presente se llevará a cabo el estudio de dos soluciones a las ecuaciones de movimiento de la relatividad general. La primera de ellas está basada en la métrica presentada por Schwarzschild en 1915 [88, 106], y la segunda construida a partir de la dada por H. Reissner, H. Weyl, G. Nordström y George B. Jeffery como solución a las ecuaciones acopladas de Einstein-Maxwell [106]. Centraremos nuestra atención en estas dos debido al uso explícito que haremos de la segunda, la construida a partir de la solución de Reissner-Nordström, en el contexto del modelo de superconductividad holográfica que buscamos describir, misma que trataremos de estudiar a partir de la precursora solución de Schwarzschild.

2.3.1. Métrica de Schwarzschild-AdS

La complejidad que involucran las ecuaciones de campo de la relatividad general llevaron a pensar en la ausencia de soluciones exactas más allá de la ya mencionada

métrica de Minkowski. Mas la sentencia se vio pronto refutada a poco tiempo de hacerse pública la teoría de la relatividad general por el físico alemán Schwarzschild en una carta dirigida a Einstein en 1915 [88]. La solución propuesta adaptada a nuestros requisitos corresponde a la descripción de un espaciotiempo estático con simetría espacial esférica fuera de un cuerpo en el vacío con la consideración de una constante cosmológica negativa de la forma $-(d-1)(d-2)/2L^2$, de esto último se rescata el que las ecuaciones de campo adopten la estructura $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{(d-1)(d-2)}{L^2}g_{\mu\nu} = 0$.

Por la compacidad del tratado presentaremos la métrica que cumple con los requisitos previos y es solución de las ecuaciones de campo, sin dejar, en cambio, de mencionar que en [93] podrá reconocerse una deducción apropiada de lo ya dicho.

El actor principal al que se ha aludido es la métrica de Schwarzschild-AdS en d dimensiones:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r^{d-2}} + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r^{d-2}} + \frac{r^2}{L^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}, \quad (2.30)$$

haciéndose explícita la simetría esférica con el manejo de las coordenadas $(t, r, \theta_1, \theta_2, \dots)$ y el elemento de volumen $d\Omega_n = \sin^{n-2}(\theta_1) \dots \sin(\theta_{n-2}) d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$. El aspecto estático se manifiesta en la ausencia de una dependencia temporal, mientras m representa la masa del objeto central.

La métrica Schwarzschild cobra especial relevancia por ser una solución que aproxima de buena manera los escenarios de interés científico, como el comportamiento alrededor de una estrella o, recientemente, la actividad cerca de un agujero negro, pues aunque no sea un escenario circundado por un vacío material, a las cercanías los resultados son verosímiles [72]. Más aún, la solución propuesta es la única posible para un sistema estático en cuatro dimensiones espaciotemporales con simetría esférica entorno a un cuerpo ubicado en el vacío, este hecho fue mostrado por primera vez en 1923 [16], y toma el nombre de *teorema de Birkhoff*.

Esta métrica ha sido objeto de estudio durante un largo tiempo y sus consecuencias, que de la mano se conducen con la teoría de la relatividad, han impulsado importantes avances en la física. Por ello haremos uso del universo descrito por estas condiciones cuya simplicidad permitirá exponer los resultados buscados respecto a la métrica de Reissner-Nordström con mayor claridad. Sin embargo será importante tomar un breve espacio al análisis que de la métrica pueda hacerse y conducir el estudio al objetivo de interés.

Comencemos con visualizar las posibles particularidades que del sistema coordenado en la ecuación (2.30) se deducen. Las coordenadas angulares son las de estudio común y de dominio usual, mientras que t , coordenada temporal de Schwarzschild-AdS, es símil de la coordenada temporal de AdS en la aproximación $r \rightarrow \infty$.

Para la coordenada r tenemos un par de situaciones de interés pues en $r = 0$ se presenta una *singularidad espaciotemporal*, es decir, donde los escalares, y por tanto invariantes de coordenadas, construidos a partir del tensor de curvatura $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ divergen. Pero sumada a esta situación inevitable ante el cambio de cualquier sistema

coordenado nos vemos en presencia de las raíces del término

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r^{d-2}} + \frac{r^2}{L^2}, \quad (2.31)$$

o, equivalentemente

$$r^d + L^2 r^{d-2} - 2mL^2 = 0. \quad (2.32)$$

que conllevan a una singularidad coordenada que puede removerse al realizarse un cambio coordenado adecuado.

Observar que $f(r) \rightarrow -\infty$ si $r \rightarrow 0$, y que $f(r) \rightarrow +\infty$ cuando $r \rightarrow \infty$. Verifiquemos además que $f(r)$ no posee puntos donde su derivada sea cero, debido a que

$$f'(r) = (d-2)\frac{2m}{r^{d-1}} + \frac{2r}{L^2} = 0 \Rightarrow r^d = -(d-2)mL^2 < 0. \quad (2.33)$$

y solo posee un punto de inflexión

$$f''(r) = -(d-1)(d-2)\frac{2m}{r^d} + \frac{2}{L^2} = 0 \Rightarrow r = ((d-1)(d-2)mL^2)^{1/d}. \quad (2.34)$$

De modo que $f(r)$ tiene únicamente una raíz real y sus $d-1$ raíces restantes son complejas y carecen de significado físico. La métrica de Schwarzschild-AdS solo posee, en consecuencia, un *horizonte de eventos* en r_h , con $f(r_h) = 0$. Un horizonte de eventos hace referencia a una región del espaciotiempo que separa al universo en regiones donde un observador ubicado en al menos una de ellas no puede afectar a un observador situado en la otra región.

2.3.2. Temperatura de Hawking

El primer indicio de que los agujeros negros poseen propiedades termodinámicas se obtuvo al postularse el teorema de área del agujero negro [52], en el que se establece que el área total A del horizonte de eventos tiene que incrementar en todo proceso físico razonable. Esta aseveración es producto de considerar únicamente a la teoría general de la relatividad con suposiciones razonables sobre el comportamiento del medio material. Dada la analogía que esto suponía con la segunda ley de la termodinámica, Bekenstein discutió esta conexión en 1972 [13], y fue secundada en 1974 por el descubrimiento de Hawking referente a la emisión de partículas con un espectro térmico [53]. De modo que una temperatura y un entropía pueden ser asignadas al agujero negro, en este contexto se establecieron las leyes termodinámicas para agujeros negros [7].

La *ley cero de la mecánica de agujeros negros* nos dice que si $T_{\mu\nu}$ obedece la condición dominante para la energía entonces la gravedad superficial κ es constante a lo largo del horizonte de eventos. La gravedad superficial de un agujero negro es la aceleración necesaria, medida desde el infinito, para mantener un objeto gravitando el horizonte de eventos. Toma κ aquí el papel de la temperatura en la termodinámica clásica, misma que permanece constante en un sistema térmico en equilibrio [90].

A finales de la década de los 60's e incios de los 70's se formuló una conjetura respecto a la caracterización de los agujeros negros y de las cantidades físicas a las que un observador externo puede tener acceso. Esta serie de estudios fue condensado en el *teorema de no pelo* y establece que las soluciones de agujero negro a las ecuaciones de Einstein-Maxwell, que escribiremos en breve, puede ser completamente caracterizadas por tres parámetros observables: masa, carga y momento angular [72]. En consonancia la *primera ley* para agujeros negros cargados y en rotación establece que

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (2.35)$$

siendo Ω es la velocidad angular y Φ es el potencial el eléctrico del horizonte. Esta ecuación ya establece una relación entre la variación del área del horizonte y la variación de la entropía, si κ se mantiene jugando el rol de la temperatura en las leyes de la termodinámica. Tal enlace se hace patente en la *segunda ley*, que lleva igualmente el nombre del *teorema de área de Hawking*, estableciéndose que el área del horizonte de eventos nunca puede disminuir si se asume la *hipótesis de censura cósmica*² y la condición de energía positiva [24].

Bekenstein propuso [12] que la expresión para la entropía del horizonte de eventos es proporcional a $A/\hbar G$, en la que la entropía total del sistema agujero negro entorno es nunca decreciente:

$$\delta(S_{entorno} + S_{BH}) \geq 0, \quad S_{BH} \propto \frac{A}{\hbar G}. \quad (2.36)$$

Y como mencionamos antes, Hawking descubrió que la radiación emitida por los agujeros negros tenía un espectro térmico y vino a hacer las ideas de Bekenstein consistentes, dado que el valor de temperatura hallado es $T = \kappa/(2\pi)$, otorgando la famosa ecuación de Bekenstein-Hawking para la entropía de un agujero negro [54]:

$$S_{BH} = \frac{A}{4\hbar G}. \quad (2.37)$$

Después de este breve paréntesis nos encontramos con que la tercera ley de la termodinámica también tiene su homólogo en la *tercera ley*, estableciendo que la gravedad superficial de un agujero negro no puede llegar a ser cero en un proceso físico finito.

El siguiente elemento a analizar es la relevancia del espectro de radiación que descubrimos es emitido por un agujero negro con una temperatura de Hawking. La radiación de Hawking aporta otro interesante elemento al estudio, pues la emisión material disminuye la masa del agujero negro y, consiguientemente, el área del horizonte de eventos [80]. Dicha emisión puede entenderse a partir de la creación de partículas virtuales donde una de las partes puede escapar del horizonte de eventos, la masa del agujero debe disminuir pues la partícula que alcanza la singularidad nunca dejó de ser virtual. De ahí que se tenga necesidad de generalizar la segunda ley en la que la entropía S_{BH} puede disminuir aunque no así la entropía total. De

²La hipótesis de censura cósmica débil afirma que las singularidades desnudas, aquellas que no son circundadas por un horizonte de eventos, no existen en nuestro universo [104].

forma interesante la disminución del área del horizonte de eventos no viola la ley del área de Hawking pues el campo cuántico lleva energía negativa al agujero negro, situación que compromete la hipótesis de la condición de energía positiva [55].

Finalmente, observemos que para el caso del agujero negro de Schwarzschild-AdS que hemos estudiado encontramos que la gravedad superficial κ está dada por

$$\kappa = \frac{f'(r_h)}{2}, \quad (2.38)$$

con lo cual podemos calcular la temperatura de Hawking

$$T_{Sch-AdS} = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{f'(r_h)}{4\pi} = \frac{2mL^2(d-2) + r_h^d}{4\pi r_h^{d-1} L^2}. \quad (2.39)$$

O bien, dado que $f(r_h) = 0 \Rightarrow 2m = r_h^{d-2}(1 + r_h^2/L^2)$, podemos expresarla de la siguiente forma [113]:

$$T_{Sch-AdS} = \frac{(d-2)L^2 + dr_h^2}{4\pi r_h L^2}. \quad (2.40)$$

2.3.3. Métrica de Reissner-Nordström-AdS

La métrica de Reissner-Nordström-AdS es una solución a las ecuaciones acopladas de Einstein-Maxwell con constante cosmológica negativa obtenidas de variar la acción

$$S_{EM} = \int d^d x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{(d-1)(d-2)}{L^2} \right), \quad (2.41)$$

con $g = \det\{g\}_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ el tensor de Faraday, mismo que estudiaremos en detalle en el siguiente capítulo. Esta métrica describe el exterior de un objeto esféricamente simétrico de masa m y cargado eléctricamente, con carga q . La forma de la métrica en las coordenadas $\{t, r, \theta_i\}$, $i \in \{1, \dots, d-2\}$ es la siguiente

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2m}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2d-4}}. \quad (2.42)$$

Observemos que para que el polinomio $f(r)$ tenga por lo menos una raíz real debe ocurrir que el valor r^* donde alcanza su mínimo debe ser tal que $f(r^*) \leq 0$, dado que $f(r)$ tiende a infinito tanto en $r \rightarrow 0$ como cuando $r \rightarrow \infty$. Es decir, dado

$$f'(r^*) = 0 \Rightarrow \frac{2r^{*2}}{L^2} - \frac{2(d-2)m}{r^{*(d-2)}} + \frac{(2d-4)q^2}{r^{*2(2-d)}} = 0, \quad (2.43)$$

se debe tener

$$f(r^*) \leq 0 \Rightarrow r^{*2(d-2)}L^2 + \frac{d}{d-2}r^{*2(d-1)} \leq L^2q^2. \quad (2.44)$$

Esta situación puede traducirse en términos de las raíces de $f(r)$; de existir soluciones reales en la relación $f(r_h) = 0$, la mayor de estas soluciones debe cumplir con

$$r_+^{2(d-2)}L^2 + \frac{d}{d-2}r_+^{2(d-1)} \geq L^2q^2. \quad (2.45)$$

Cuando esta relación no puede cumplirse, y en consecuencia $f(r)$ no posee raíces reales, se dice que el agujero negro posee una singularidad desnuda [17]. Esto último implica que la singularidad en $r = 0$ es tipo tiempo y no está protegida por ningún horizonte de eventos. En este tipo de situaciones un observador podría ir y volver de la singularidad, con lo que los eventos que sucedan en la misma pueden influenciar el futuro en la variedad aun cuando la teoría es inconsistente en $r = 0$, perdiendo todo poder de predicción.

Por fortuna Penrose propuso en 1969 [82] lo que hoy día conocemos como *la conjetura de censura cósmica*; en términos generales establece que un universo generado por colapso de una configuración realista de materia no puede dar lugar a una singularidad desnuda. El resultado no ha dejado de ser una conjetura aunque se han aportado resultados parciales y evidencia circunstancial en favor de la misma [105].

Cuando la igualdad de la ecuación (2.45) se cumple tendremos una única raíz de $f(r)$ y consecuentemente solo un horizonte de eventos. A esta situación se le conoce como *caso extremal*. De satisfacer la desigualdad estricta nos veremos en presencia de dos horizontes para el agujero negro de Reissner-Nordström.

Finalmente nos vemos en la posibilidad de calcular la temperatura de Hawking para este agujero negro de Reissner-Nordström-AdS con la misma expresión que utilizamos para el agujero negro de Schwarzschild-AdS:

$$T_{RN-AdS} = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{2r_+}{4\pi L^2} - \frac{2(d-2)m}{4\pi r_+^{(d-1)}} + \frac{(2d-4)q^2}{4\pi r_+^{2d-3}}. \quad (2.46)$$

Los elementos hasta aquí revisados constituyen el espectro básico de ideas concernientes a la relatividad general con el que nos permitiremos seguir adelante. En el siguiente capítulo haremos lo propio con los conceptos de la teoría cuántica de campos que creemos necesarios para el correcto entendimiento de la correspondencia holográfica y la consecuente construcción del modelo de superconducción holográfica.

Capítulo 3

Aspectos generales de la teoría cuántica de campos

Nos resultará conveniente empezar el estudio de la teoría cuántica de campos a través de un análisis clásico. Llamamos campo a una función definida en cada punto del espaciotiempo, $\varphi(t, \vec{x})$. Es fácil observar que dicho campo posee un número infinito y no numerable de grados de libertad, pues a cada punto del espacio se le asocia al menos un grado. Ejemplos de dichos campos son las funciones que describen la temperatura o la presión del aire.

Al igual que en el estudio de la relatividad general, donde la información física era obtenida mediante la acción de Einstein-Hilbert, un enfoque de estudio para la teoría de campo recae en una descripción donde la acción vuelve a hacer acto de presencia. La acción pone su dependencia en el campo $\varphi(t, \vec{x})$ a partir de la densidad Lagrangiana con la siguiente estructura

$$S \propto \int d^n x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi). \quad (3.1)$$

Si el número de derivaciones es nulo la evolución del campo sería independiente para cada punto, encontrándose una teoría en extremo local. El siguiente paso en complejidad es considerar una derivación del campo, el caso más común, pues conduce a ecuaciones de movimiento con segundas derivadas. Con lo que la acción queda dada por

$$S \propto \int d^n x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (3.2)$$

En idéntica forma a como se deducen las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico, las ecuaciones de movimiento para el campo se obtienen a partir del principio de mínima acción. Es decir, al pedir que $\delta S = 0$ y un seguimiento análogo encontramos que

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \partial_\mu \frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu \varphi)}, \quad (3.3)$$

conocidas bajo el nombre de *ecuaciones de Euler-Lagrange* para φ .

Recordemos que, dado un sistema discreto con variables canónicas $q_i(t)$, $p_i(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, y un Hamiltoniano $H(q_i, p_i)$ se tienen las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.4)$$

Podemos calcular la derivada total de cualquier función en el espacio fase, $f(t, q_i(t), p_i(t))$, en términos del Hamiltoniano, donde

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (3.5)$$

Definimos la operación de los *paréntesis de Poisson* sobre dos funciones del espacio fase como

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right), \quad (3.6)$$

es entonces que nuestra expresión (3.5) se reduce a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (3.7)$$

Una de las razones para la introducción de los paréntesis de Poisson radica en el hecho de que el procedimiento seguido para la cuantización canónica de un sistema consiste en reemplazar estos paréntesis entre variables clásicas por el conmutador de operadores cuánticos correspondientes:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{A, B\}, \quad (3.8)$$

donde se postula la relación básica $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ y los demás conmutadores se deducen a partir de este hecho.

3.1. Cuantización del campo escalar en un espacio-tiempo plano

Como se había mencionado, en mecánica cuántica, el proceso de cuantización canónica toma como punto de partida el formalismo Hamiltoniano de la dinámica clásica y lo adapta a los requisitos de una teoría cuántica. En la teoría de campos la idea se adecua para el campo $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi(x)$ y su momento conjugado $\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)}$, al promoverlos a operadores mediante las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\varphi(t, \vec{x}), \varphi(t, \vec{x}')] &= 0 = [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] \\ [\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (3.9)$$

considerando que $\hbar = 1$. Empezaremos realizando nuestro estudio relativo a la cuantización canónica del sistema de campos mediante la exposición del campo más sencillo; un campo escalar, real y libre, $\varphi(x)$, que a cada punto del espaciotiempo asocia un valor real.

El proceso de cuantización comienza con la construcción del Lagrangiano con los requisitos ya estipulados en la sección anterior. Recordamos que para un espaciotiempo plano la métrica que describe la variedad de estudio es la métrica de Minkowski que hemos denotado por $\eta_{\mu\nu}$. Permitiendo partir con la descripción de la densidad Lagrangiana, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, cuya construcción cuadrática más general que se puede hacer es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (3.10)$$

conocido como el *lagrangiano de Klein-Gordon* para un campo escalar φ de masa m . Mismo que conduce a las ecuaciones de movimiento que acuñan el mismo nombre:

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0. \quad (3.11)$$

Para $m = 0$, esta ecuación se reduce a una ecuación de onda con velocidad de propagación igual a 1 en unidades naturales. Cuando $m \neq 0$ (3.11) describe similarmente la propagación de ondas planas y para visualizar este hecho es conveniente trabajar en el espacio de momentos. Mediante una transformada de Fourier obtendremos lo siguiente: $\varphi(t, \vec{p}) = \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\varphi(t, \vec{x}) \Leftrightarrow \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\varphi(t, \vec{p})$. Mediante esta transformación la ecuación de Klein-Gordon toma la forma

$$0 = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\varphi(t, \vec{x}) = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\varphi(t, \vec{p}) \quad (3.12)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2)\varphi(t, \vec{p}) \Rightarrow (\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2)\varphi(t, \vec{p}) = 0. \quad (3.13)$$

La ecuación de movimiento en el espacio de momentos es ahora

$$\partial_t^2\varphi(t, \vec{p}) = -E_p^2\varphi(t, \vec{p}). \quad (3.14)$$

donde $E_p = m^2 + \vec{p}^2$, y la ecuación es la de un oscilador armónico de frecuencia $\omega = E_p$.

Se tiene entonces que los modos de Fourier $\varphi(t, p)$ son los modos normales del campo en el espacio de posiciones, es decir, se poseen patrones colectivos de movimiento sin conexión entre sí, pues cada uno tiene solamente una dependencia temporal del oscilador, y donde el campo puede ser expresado como una superposición de modos normales. Un campo libre se compone de una infinidad de osciladores armónicos independientes. El momento conjugado canónico en este caso es

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi)} = \partial_t\varphi(x). \quad (3.15)$$

Y la densidad Hamiltoniana se obtiene mediante la relación

$$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\partial_t\varphi(x) - \mathcal{L}(x), \quad (3.16)$$

donde al sustituir la expresión (3.10) encontramos

$$H(\varphi(t), \pi(t)) = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left(\pi^2 + \vec{\nabla}^2\varphi + m^2\varphi^2 \right), \quad (3.17)$$

con $\vec{\nabla}^2 = \sum_1^3 \partial_i^2$.

Para realizar el proceso de cuantización canónica, la postulación esencial son las relaciones de conmutación (3.1), además de considerar la ecuación de Heisenberg para el caso continuo, es decir,

$$i[\hat{H}, \hat{O}] = \partial_t \hat{O}(t). \quad (3.18)$$

donde \hat{O} es operador cuántico asociado a la observable O que en el cuadro de Heisenberg es dependiente del tiempo. Dicha expresión implica en particular que

$$\partial_t \hat{\varphi}(x) = \hat{\pi}(x), \quad \partial_t \hat{\pi}(x) = \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi}(x) - m^2 \hat{\varphi}(x), \quad (3.19)$$

recobrando entre ambas expresiones la ecuación de Klein-Gordon que teníamos en el caso clásico

$$(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2) \hat{\varphi}(x) = 0, \quad (3.20)$$

y en consecuencia sabemos que

$$\hat{\varphi}(t, \vec{p}) = \int d^3 \vec{x} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \quad (3.21)$$

describe a un oscilador armónico.

Al igual a como sucede con el oscilador armónico en mecánica cuántica es conveniente poner al operador de campo, junto con su operador conjugado en función de operadores de creación y aniquilación, esto es,

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right), \quad (3.22)$$

$$\hat{\pi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right). \quad (3.23)$$

donde el factor $\sqrt{2E_{\vec{p}}}$ es producto de la normalización relativista [83]. Al hacer uso de los conmutadores básicos (3.1) se puede observar la siguiente relación para los operadores de creación y aniquilación [11]

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger]. \quad (3.24)$$

Aunado a poder expresar el Hamiltoniano del sistema con base en dichos operadores y encontrar que

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \right) \quad (3.25)$$

$$= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right). \quad (3.26)$$

Comparte cierta similitud con su homólogo, el oscilador armónico cuántico, pero a diferencia de este observamos una función $\delta(x - x')$ asociada a una divergencia al integrar sobre el momento espacial \vec{p} . El manejo de este aparente problema se liga a

la interpretación que pretendamos hacer con el operador \hat{H} . Definimos al vacío $|0\rangle$ como aquel estado tal que para cualquier $\hat{a}_{\vec{p}}$ se cumple

$$\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}. \quad (3.27)$$

Con esta definición es posible obtener la energía del estado base E_0 , eigenvalor de \hat{H} :

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle \equiv E_0|0\rangle &= \left[\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2}(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right) \right] |0\rangle \\ &= \left[\frac{1}{2} \int d^3\vec{p} E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(0) \right] |0\rangle \rightarrow \infty |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Una de las formas prácticas de lidiar con este infinito es considerar que no hay forma de medir E_0 directamente de modo que podemos redefinir al Hamiltoniano como $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - E_{vacio}$, es decir, medir energías con respecto a la energía del vacío [95]. Así que podemos reescribir al Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}, \quad (3.29)$$

con lo cual $\hat{H}|0\rangle = 0$.

Otra manera de tratar con este problema es definir una nueva acción sobre los operadores, que será de utilidad en un futuro. Definimos como *orden normal* de un operador \mathcal{O} , $:\mathcal{O}:$, al reacomodo que sufre dicho operador al colocar todos sus operadores de aniquilación a la derecha de cada término [109]. El orden normal del Hamiltoniano encontrado en la expresión (3.25) es entonces:

$$:\hat{H}: = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}. \quad (3.30)$$

Una vez definido el estado de mínima energía $|0\rangle$ podemos estudiar los estados excitados. En similar proceso al caso del oscilador armónico cuántico, encontramos que las relaciones de conmutación entre el Hamiltoniano y los operadores de creación y aniquilación son [108]

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} [\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \\ [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}] &= \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} [\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Entonces podemos hacer actuar a los operadores de creación sobre el estado base, $|0\rangle$, y obtener los eigenestados de energía tal que

$$|\vec{p}\rangle = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (3.32)$$

Que efectivamente es eigenestado del Hamiltoniano, pues

$$\hat{H}|\vec{p}\rangle = \hat{H}\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle = (E_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger\hat{H})|0\rangle = E_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle = E_{\vec{p}}|\vec{p}\rangle. \quad (3.33)$$

Interpretamos a este estado, $|\vec{p}\rangle$, como el eigenestado de momento \vec{p} para una partícula de masa m . Esta aseveración encuentra su verificación mediante la promoción a operador del momento lineal [108]

$$: \hat{P} := \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}. \quad (3.34)$$

El hacer actuar este operador en el estado \vec{p} , con auxilio de las relaciones de conmutación ya halladas, permite comprobar el estatus de eigenvalor de \vec{p} :

$$\hat{P} |\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \vec{p}' \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle) = \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \vec{p} |\vec{p}\rangle. \quad (3.35)$$

Nuestros desarrollos al momento nos permiten avanzar hasta la generación de estados multipartículas, pues al hacer actuar los operadores de creación sobre el estado base consecutivamente y para distintos momentos estaremos creando [108]

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle. \quad (3.36)$$

Observemos que los operadores de creación, $\hat{a}_{\vec{p}_i}^\dagger$, conmutan entre sí, es decir, el estado es simétrico bajo el intercambio de dos partículas

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = |\vec{p}_2, \vec{p}_1\rangle. \quad (3.37)$$

Este comportamiento es conocido y constituye una estadística para el grupo conformado por *bosones*. El espacio de interés está compuesto por una superposición de *espacios de Hilbert*, donde un espacio de Hilbert es un espacio vectorial completo dotado de un producto interior cuya relevancia en la teoría cuántica recae en que los posibles estados puros del sistema son representados por elementos dentro de dicho espacio. Cada espacio de Hilbert es generado por cada estado multipartícula, así que el espacio de estudio es la suma directa de todas las superposiciones posibles

$$\mathcal{H} \equiv \{|0\rangle\} \oplus \{|\vec{p}\rangle\} \oplus \{|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle\} \oplus \dots \quad (3.38)$$

Este espacio es conocido como *espacio de Fock* [37].

Una definición útil es un operador capaz de contar el número de partículas para un determinado estado en el espacio de Fock, a dicho operador se le conoce como operador de número y está dado por

$$: \hat{N} := \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}, \quad (3.39)$$

que cumple con $\hat{N} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = n |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle$. Cuestión de importancia es la relación de conmutación entre este operador y el Hamiltoniano, $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$. Asegurando con ello que el número de partículas, para nuestra configuración sin interacciones, se conserva en el tiempo [109].

Para que nuestra teoría sea causal se requiere que para todo intervalo tipo espacio los operadores que representan las observables del sistema conmuten,

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(x')] = 0 \quad \forall (x - x')^2 < 0, \quad (3.40)$$

de esta forma se asegura que las mediciones hechas en x no puedan afectar a las mediciones en x' cuando x y x' no están causalmente conectados. Ahora bien, centraremos nuestro interés en otra perspectiva del estudio de la estructura causal de la teoría. Dada una base $\{|\varphi_n\rangle\}$, donde para el espacio de Hilbert \mathcal{H} , la evolución de cualquier estado $|\varphi\rangle$ se puede determinar a partir del *propagador*

$$D(x - x') \equiv \langle 0 | \varphi(\vec{x}, t) \varphi(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x - x')}. \quad (3.41)$$

Dicho propagador representa la amplitud de probabilidad de que el sistema se encuentre en \vec{x}' al tiempo t' y pase a estar en \vec{x} al tiempo t . La importancia de estudiar dicho objeto radica en el hecho de que incluye la información de todas las soluciones en una expresión de forma codificada [108, 109].

Al tomar una partícula propagándose en un intervalo tipo espacio, tal que $t - t' = 0$, y $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{r}$, se encuentra que

$$D(x - x') \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{m}{r(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} e^{-mr}. \quad (3.42)$$

cálculo que se puede revisar en [83]. Entonces, fuera del cono de luz la amplitud de propagación decrece de forma exponencial pero nunca es cero. El campo parece escabullirse fuera del cono de luz. Una forma de dar solución a esta aparente contradicción es considerar la construcción de una de las cantidades más importantes en la teoría cuántica de campos, el *propagador de Feynman*:

$$G_F(x - x') = \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} | 0 \rangle = \begin{cases} D(x - x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ D(x' - x) & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases} \quad (3.43)$$

donde T ordena la aparición de los campos respecto al tiempo de evaluación, es decir

$$T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} = \begin{cases} \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \hat{\varphi}(x') \hat{\varphi}(x) & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases}. \quad (3.44)$$

Veamos que es posible reescribir este propagador de una forma conveniente en términos de una integral sobre d^4p . Es decir, el propagador de Feynman para el campo escalar, G_F , es [108]

$$G_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x')} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x - x')}}{(p^0 - E_{\vec{p}})(p^0 + E_{\vec{p}})}. \quad (3.45)$$

Notar que al realizar esta acción la condición con la que se venía trabajando, $p^0 = E_{\vec{p}}$, no se tiene más, sino que se extiende a todo el intervalo sobre p^0 . Sin embargo hay que observar que dicha integral no se encuentra bien definida en todo el espacio, pues para cada valor de \vec{p} , el denominador $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$ produce un polo cuando $p^0 = \pm E_{\vec{p}} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Para sortear dicha dificultad es necesario considerar el siguiente contorno de integración

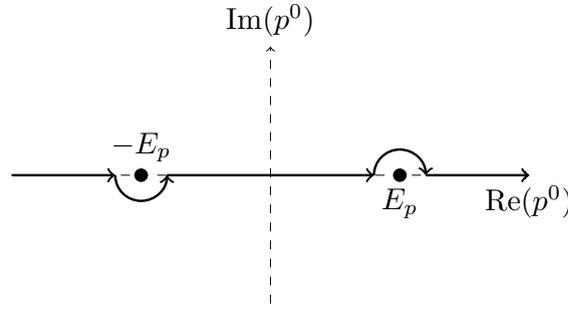


Figura 3.1: Contorno que sortea los polos del propagador de Feynman para el campo escalar.

y estudiar los casos cuando $x^0 > x'^0$ y $x^0 < x'^0$, tal que podemos cerrar el contorno de integración por debajo y por arriba, respectivamente. Con esta acción podrá verse que la expresión propuesta es adecuada y el propagador de Feynman (3.45) puede reescribirse en términos de una integral sobre d^4p . De hecho es conveniente el no especificar el contorno de integración y escribir el propagador como

$$G_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x-x')}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.46)$$

donde $\epsilon > 0$ es infinitesimal.

Como último comentario del tema se hace mención del caso complejo que puede analizarse de forma completamente análoga. La cuantización iniciará su trayecto al introducir un Lagrangiano que contemple el campo conjugado φ^* ,

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, \varphi^*, \partial_\mu \varphi^*) = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (3.47)$$

La promoción a operadores y su consecuente proceso para verificar que tanto $\hat{\varphi}$ como $\hat{\varphi}^*$ cumplen con la ecuación de Klein-Gordon, permiten obtener

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right], \\ \hat{\varphi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} + \hat{c}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Incluyendo estas expresiones en las relaciones de conmutación se encuentran la correlación a satisfacer por \hat{b} y \hat{c}

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = [\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger] \\ [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger] &= [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}'}]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Se observa que estos operadores cumplen, a pares, las reglas de conmutación seguidas por los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , es decir, se obtienen dos operadores de creación y aniquilación respectivamente.

Con base en este hecho tenemos que un campo escalar complejo describe de forma simultánea a dos tipos de partículas con la misma masa, situación adicional de gran interés se presenta al promover a un operador la carga de Noether; apoyados de esta herramienta y a su consecutiva aplicación sobre los estados generados a partir de \hat{b}^\dagger y \hat{c}^\dagger , dichos elementos del espacio de Fock resultan en posición de una carga conservada y opuesta. Los estados respectivos se corresponden a partículas de igual masa pero con carga contraria [108].

Con esto concluimos el estudio del campo escalar libre previsto. Se ha visto que al cuantizarlo se obtiene una relación de partículas relativistas y no interactuantes entre sí. Para realizar tal estudio se inició tomando un campo clásico cuyo significado estaba claro antes de realizar un proceso de cuantización, hecho lo cual se logró comprender que las partículas son los modos del campo, que se corresponden con pequeñas fluctuaciones por encima del valor de energía mínimo, es decir, las partículas se obtienen a partir de pequeñas excitaciones del vacío $|0\rangle$.

3.2. El campo fermiónico

Hasta ahora se ha realizado un estudio enfocado a campos escalares tales que, por definición, bajo una transformación de Lorentz estos no se ven afectados. Tras la cuantización de estos campos se ha obtenido una descripción de partículas de espín cero por el campo escalar. Por otro lado, la mayoría de las partículas en la naturaleza poseen momento angular intrínseco. Con esta premisa en mente, es natural buscar extender la teoría a la descripción de campos que no transformen de manera trivial bajo el grupo de Poincaré:

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi'_{i'}(\Lambda x + a) = \sum_{i=1}^L M_{i'i}(\Lambda) \varphi_i(x), \quad i, i' \in \{1, \dots, L\}. \quad (3.50)$$

Donde las M_{ij} son matrices de $L \times L$ que forman una representación de $SO^+(3, 1)$. Esta representación es necesariamente no unitaria si $L < \infty$. Además, estamos interesados en representaciones irreducibles [23], pues de otra manera las componentes de $\varphi_i(x)$ pueden separarse por conjuntos que no interactúan entre sí bajo Lorentz.

¿Cómo encontrar estas representaciones? Es común comenzar la búsqueda tomando una transformación infinitesimal del grupo de Lorentz y estudiar el *álgebra de Lie* resultante [23]. Recordar que dicha transformación infinitesimal esta dada por

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (3.51)$$

con δ la delta de Kronecker y para ω una matriz infinitesimal. Observar que al exigirse $\Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\sigma\rho} = \eta^{\mu\nu}$, se hace necesario tener un ω antisimétrico, i.e.,

$$\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0. \quad (3.52)$$

Una matriz antisimétrica de 4×4 tiene 6 componentes independientes, en concordancia con las 6 transformaciones del grupo de Lorentz (3 rotaciones espaciales y

3 boosts). Dada la estructura de grupo, es conveniente definir 6 matrices independientes y antisimétricas de 4×4 , $(J^{\rho\sigma})^{\mu\nu}$, $\mu, \nu, \rho, \sigma \in \{1, 2, 3, 4\}$, que serán los generadores del álgebra de Lie del grupo $SO^+(3, 1)$. Considerando su comportamiento antisimétrico es posible escribir a tales matrices como:

$$i(J^{\rho\sigma})^{\mu\nu} = -\eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu} + \eta^{\sigma\mu}\eta^{\rho\nu}, \quad (3.53)$$

y las relaciones del álgebra están dadas por [75]

$$[J^{\rho\sigma}, J^{\tau\nu}] = i(\eta^{\sigma\tau}J^{\rho\nu} - \eta^{\rho\tau}J^{\sigma\nu} + \eta^{\rho\nu}J^{\sigma\tau} - \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\tau}). \quad (3.54)$$

Una transformación de Lorentz finita puede ser expresada entonces por

$$\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right). \quad (3.55)$$

Retomando nuestra búsqueda de representaciones irreducibles de $SO^+(3, 1)$ nos encontraremos con la *representación espinorial*. Para lo cual se comienza con la definición de las matrices de Dirac, γ^μ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$), y el álgebra asociada, esto es, la llamada *álgebra de Clifford*

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}. \quad (3.56)$$

donde se ha definido la relación de anticonmutación $\{a, b\} = ab + ba$. Del álgebra se deduce que las matrices γ^μ obedecen:

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \quad \forall \mu \neq \nu. \quad (3.57)$$

Dirac encontró que mediante el uso de estas matrices y su álgebra asociada es posible construir una representación del grupo de Lorentz dada por

$$M(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right), \quad (3.58)$$

con generadores dados por

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (3.59)$$

análogo a $J^{\mu\nu}$. Es decir, si se encuentra una representación del álgebra de Clifford, entonces se tendrá una representación del álgebra (y por tanto del grupo) de Lorentz.

Se procede entonces a construir una representación del álgebra espinorial, o de Dirac, para lo cual es conveniente fabricar cuatro nuevos objetos en términos de las γ^i 's

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2}(\gamma^0 + \gamma^1), & \Gamma_1^* &= \frac{1}{2}(\gamma^0 - \gamma^1) \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{2}(\gamma^2 + \gamma^3), & \Gamma_2^* &= \frac{1}{2}(i\gamma^2 - \gamma^3), \end{aligned} \quad (3.60)$$

para los cuales es fácil verificar que cumplen

$$\{\Gamma_1, \Gamma_1^*\} = 1 = \{\Gamma_2, \Gamma_2^*\}. \quad (3.61)$$

y se cancelan en cualquier otro caso. Se observa que estos cuatro objetos se comportan como dos pares independientes de operadores de creación y aniquilación, pero obedeciendo relaciones de anticonmutación.

Para dichos operadores se generaría un espacio de Fock de dimensión finita con un estado base, $|0, 0\rangle$, asociado. Con los objetos Γ ocurre algo similar, comenzando con un vector N -dimensional $V_{(0,0)} \neq 0$ que es “aniquilado” por Γ_1 y Γ_2 ($\Gamma_i V_{(0,0)} = 0$), y donde se pueden definir los vectores $V_{1,0} = \Gamma_1^* V_{(0,0)}$, $V_{0,1} = \Gamma_2^* V_{(0,0)}$ y $V_{1,1} = \Gamma_2^* \Gamma_1^* V_{(0,0)}$. Es posible verificar que estos cuatro vectores son linealmente independientes y, además, no es posible generar otro vector a partir de combinaciones de Γ que no se pueda expresar como combinación lineal de los ya descritos. Se tiene que la representación irreducible del álgebra de Clifford conduce a un espacio de $N = 2^2 = 4$ dimensiones espaciotemporales, con lo cual las matrices interactuantes Γ , y por tanto γ , serán matrices de 4×4 .

Existe gran variedad de matrices de 4×4 que satisfacen el álgebra de Clifford, tomemos por ejemplo a las matrices

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

donde cada entrada es una matriz de 2×2 , y las σ^i son las llamadas *matrices de Pauli* [21]:

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

que por sí mismas satisfacen $\{\sigma^i, \sigma^j\} = \delta^{ij} \mathbb{1} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k$, ϵ^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita [72]. Al conjunto se le conoce como *base de Weyl*, o base quiral.

Otro ejemplo a considerar es la base de Dirac, donde

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

De hecho, se puede construir cualquier otra representación del álgebra de Clifford al usar cualquiera de estos ejemplos y tomar $V\gamma V^{-1}$ para cualquier matriz invertible V .

En la base de Weyl, los generadores de Lorentz toman la siguiente forma

$$S^{ij} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4} \begin{bmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{bmatrix} = \epsilon^{ijk} \begin{bmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

para rotaciones y

$$S^{0i} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4} \begin{bmatrix} -\sigma^i - \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i + \sigma^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^i/2 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

para boosts [108].

Notemos que las matrices S^{ij} son hermitianas, mientras que las S^{0i} son antihermitianas. Observar además que la representación espinorial es, en términos del grupo de Lorentz $SO^+(3, 1)$, una representación reducible, es decir, los generadores $S^{\mu\nu}$ son diagonales por bloques, aún cuando las matrices γ^μ sí forman una representación irreducible del álgebra de Clifford.

Definimos como espinor de Dirac, ψ , a un vector que transforma bajo Lorentz en la representación espinorial que se ha construido, es decir, dado un arreglo de cuatro componentes complejas se tiene que

$$\psi \equiv \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}} \psi' \equiv \begin{bmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{bmatrix} = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \psi. \quad (3.67)$$

Y como se había comentado, la representación otorgada por $S^{\mu\nu}$, que conduce a elementos $M(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)$, es reducible, de donde, en la base de Weyl, se puede descomponer al espinor de Dirac, ψ , en dos espinores

$$\psi_I = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad \psi_D = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

donde ψ_1 y ψ_2 no se mezclan con ψ_3 y ψ_4 . Estos objetos son conocidos como espinores de Weyl. Con tal definición encontramos que

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

que transforma por separado bajo Lorentz con los generadores construidos en similitud

$$\begin{aligned} S_I^{ij} &= \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}, & S_I^{0i} &= -i \frac{\sigma^i}{2} \\ S_D^{ij} &= \epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}, & S_D^{0i} &= +i \frac{\sigma^i}{2}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Estas matrices, $S_I^{\mu\nu}$ y $S_D^{\mu\nu}$, forman, I y D por separado, un conjunto generador del grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{C})$, pero más aún, no son representaciones equivalentes en el sentido de poder conectarse vía un cambio de base. Con esta información se contruye una representación irreducible de $SL(2, \mathbb{C})$ donde transforman los campos ψ_I y ψ_D , mientras que los espinores de Dirac transforman en una representación reducible del mismo grupo.

Hasta hemos encontrado un campo ψ entorno al cual continuar nuestro estudio. Nos gustaría construir una ecuación de movimiento invariante bajo Lorentz y mediante la cual realizar el proceso de cuantización. Para cumplir tal objetivo es necesario construir una densidad Lagrangiana, por tanto se requiere formar escalares a partir de los espinores de Dirac y las matrices γ^μ .

Observemos primeramente como transforma el campo adjunto bajo Lorentz:

$$\psi^\dagger = (\psi^*)^T \rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger M^\dagger(\Lambda) = \psi^\dagger \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right), \quad (3.71)$$

y notemos que al ser una representación no unitaria $(S^{\mu\nu})^\dagger \neq S^{\mu\nu}$, con lo cual

$$\psi^\dagger \psi \rightarrow \psi'^\dagger \psi' = \psi^\dagger \exp\left[\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}((S^{\mu\nu})^\dagger - S^{\mu\nu})\right] \psi, \quad (3.72)$$

no transforma de forma trivial bajo Lorentz.

Por otro lado se debe considerar que $(S^{\mu\nu})^\dagger$ también debe satisfacer el álgebra de Lorentz pues $(\gamma^\mu)^\dagger$ cumple con el álgebra de Clifford, por lo dicho deben estar conectadas con $S^{\mu\nu}$ mediante una transformación. Al considerar que $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 = (\gamma^0)^{-1}$ y $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$, entonces para todo $\mu = 0, 1, 2, 3$ se tiene que

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (3.73)$$

con lo cual

$$(S^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{i}{4}[(\gamma^\nu)^\dagger, (\gamma^\mu)^\dagger] = \gamma^0 S^{\mu\nu} \gamma^0, \quad (3.74)$$

es decir $(S^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{\mu\nu}$. De la última ecuación se desprende que

$$M^\dagger(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger\right) = \gamma^0 \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) \gamma^0 = \gamma^0 M^{-1}(\Lambda) \gamma^0. \quad (3.75)$$

Es natural entonces definir el *adjunto de Dirac* como [109]

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (3.76)$$

Cuya transformación bajo Lorentz está dada por

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = (\psi')^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger M^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 M^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi} M^{-1}(\Lambda). \quad (3.77)$$

Así, para cualesquiera dos espinores de Dirac, ψ y χ , la combinación $\bar{\psi}\chi$ es un escalar:

$$\bar{\psi}\chi \rightarrow \bar{\psi}'\chi' = \bar{\psi} M^{-1}(\Lambda) M(\Lambda) \chi = \bar{\psi}\chi, \quad (3.78)$$

y en particular $\bar{\psi}\psi$ también lo es.

La afirmación ahora es que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ transforma como un vector bajo Lorentz. Observemos primeramente que

$$[\gamma^\mu, S^{\lambda\rho}] = i(\eta^{\mu\lambda}\gamma^\rho - \eta^{\rho\mu}\gamma^\lambda) = (J^{\lambda\rho})^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (3.79)$$

encontrando con ello

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi} M^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu M(\Lambda) \psi = \bar{\psi} \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho}\right) \gamma^\mu \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\sigma\pi}S^{\sigma\pi}\right) \psi$$

$$= \bar{\psi} \left(\exp \left(\frac{i}{2} \omega_{\lambda\rho} J^{\lambda\rho} \right) \right)_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu} \psi = \Lambda^{\mu}_{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\nu} \psi, \quad (3.80)$$

demostración de que en efecto $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$ transforma como vector. De esta manera se puede tratar a cada $\mu = 0, 1, 2, 3$ índice de las matrices γ^{μ} como verdaderos índices vectoriales. En particular se pueden formar escalares de Lorentz al contraer estos índices.

Más aún, tomando el producto de de las matrices γ^{μ} se pueden formar tensores. Recordando que $\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = -2i S^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}$ basta considerar las las combinaciones impares al generar dichos productos:

$$\gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{n!} (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n} - \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} - \dots), \quad (3.81)$$

que es distinta de cero solamente cuando ningún índice se repite. Con los cuatro índices con los que estamos trabajando encontramos dieciséis matrices independientes, mismo número de índices que una matriz de 4×4 entradas, encontrando entonces una base para este espacio matricial:

$$\mathbb{1}, \quad \gamma^{\mu}, \quad \gamma^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\nu\lambda}, \quad \gamma^{\mu\nu\lambda\rho}. \quad (3.82)$$

Haciendo un breve paréntesis, es conveniente definir ahora a la matriz γ^5 , conocida como matriz de *quiralidad*:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad (3.83)$$

que satisface las siguientes propiedades:

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma^5, \gamma^{\mu}\} = 0 \quad \forall \mu. \quad (3.84)$$

De esta última sentencia es posible deducir que

$$[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = \frac{i}{4} [\gamma^5, \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}] = 0. \quad (3.85)$$

En la base de Weyl esta matriz adopta la siguiente forma

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

En general, restando importancia a la base que se elija, para cualquier espinor de Dirac se puede definir

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \psi_I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi, \quad \begin{bmatrix} \psi_D \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi, \quad (3.87)$$

donde la descomposición para ψ toma entonces la siguiente forma

$$\gamma^5 \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\gamma^5 - \mathbb{1}) \psi = - \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_I \end{bmatrix}$$

$$\gamma^5 \begin{bmatrix} \psi_D \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\gamma^5 + \mathbb{1})\psi = + \begin{bmatrix} \psi_D \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Observamos que la matriz γ^5 hace una clara distinción para los espinores de Weyl en cuanto al signo.

La definición de esta matriz es de utilidad aquí porque con ella se está en la posibilidad de reescribir la base hallada para el conjunto de matrices de 4×4 , pues al tener que

$$\gamma^{\mu\nu\lambda\rho} = -i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^5. \quad (3.89)$$

Donde además,

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu\lambda}\gamma_\rho\gamma^\rho = -\frac{1}{4}\gamma_\rho\gamma^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_\rho\gamma^5. \quad (3.90)$$

Así la base puede reescribirse como

$$\mathbb{1}, \quad \gamma^\mu, \quad S^{\mu\nu}, \quad \gamma^\mu\gamma^5, \quad \gamma^5. \quad (3.91)$$

De aquí que los tensores independientes que se pueden formar son [83]

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}S^{\mu\nu}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (3.92)$$

Una vez estudiados los elementos que se pueden formar bajo este esquema esponsorial nos encontramos en la facultad de poder construir un Lagrangiano para el campo de Dirac, $\psi(t, \vec{x})$. Se trata de un campo complejo que asigna un espinor de Dirac a cada punto del espaciotiempo; donde las estructuras que pretendemos utilizar se restringen a $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$. Buscamos entonces una función $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu\bar{\psi})$ que sea escalar y real. Como primera propuesta se puede considerar al Lagrangiano análogo al utilizado para el campo escalar

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\psi - m^2\bar{\psi}\psi, \quad (3.93)$$

el Lagrangiano de Klein-Gordon para el campo de Dirac. Este Lagrangiano es invariante bajo Lorentz, y además es real; cumple con todos los requisitos que habíamos impuesto pero no es la función mas simple que se puede formar.

Dirac mostró que es posible encontrar un Lagrangiano escalar y real que sólo dependa a primer orden de las primeras derivadas del campo:

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (3.94)$$

Donde ya se ha visto que el segundo sumando es un término escalar y real. Así también podemos ver que, bajo una transformación $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$

$$i\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x') = i\bar{\psi}(x)M^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu(M(\Lambda)\psi(x)) = i\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\partial_\nu\psi(x), \quad (3.95)$$

es decir, también el primer término de nuestro Lagrangiano es escalar, así mismo al utilizar un contorno de integración adecuado puede observarse que

$$0 = \int d^4x \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \int d^4x [(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi)], \quad (3.96)$$

de donde

$$(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^* = -i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (3.97)$$

Se comprueba de esta forma que el Lagrangiano de Dirac es una función escalar y real.

La ecuación de movimiento para este Lagrangiano al variar respecto a $\bar{\psi}$ conduce a

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.98)$$

ecuación de Dirac.

Una importante observación entorno a la ecuación de Dirac; haciendo actuar el operador diferencial $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$ sobre la expresión anterior nos encontramos con que

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi \\ &= (\eta^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Se trata de la ecuación de Klein-Gordon para cada componente de ψ . Se concluye entonces que el campo de Dirac satisface la ecuación de Klein-Gordon; con esta información y lo aprendido con el campo escalar, sabemos que las soluciones, $\psi(x)$, a la ecuación de Dirac deben poder escribirse como una superposición de ondas planas, es decir, $e^{(\pm ip \cdot x)}$.

Las soluciones a la ecuación de Dirac se diferencian en sus modos de frecuencia positiva y negativa. Los primeros son espinores con la siguiente forma:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, p^0 > 0 \quad (3.100)$$

donde $u(p)$ es un espinor de cuatro componentes complejas para el que puede mostrarse debe tomar la siguiente expresión para satisfacer la ecuación (3.98)

$$u^i(p) = \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)}{\sqrt{2(m + p^0)}} \begin{bmatrix} \xi^i \\ \xi^i \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (3.101)$$

con ξ^i espinores de Weyl [39].

De forma análoga, las soluciones con frecuencia negativa son

$$\psi(x) = v(p)e^{+ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, p^0 > 0, \quad (3.102)$$

donde

$$v^i(p) = \frac{m - \gamma^\mu p_\mu}{\sqrt{2(p^0 + m)}} \begin{bmatrix} \xi^i \\ -\xi^i \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.103)$$

Dado que el campo de Dirac obedece la ecuación de Klein-Gordon, y recordando que la misma conduce a una descripción que hace factible el principio de superposición, la solución más general a la ecuación de Dirac tiene la forma

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_p^k u^k(p) e^{-ip \cdot x} + b_p^{j*} v^j(p) e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \\ \Leftrightarrow \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (a_p^{k*} \bar{u}^k(p) e^{ip \cdot x} + b_p^j \bar{v}^j(p) e^{-ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}},\end{aligned}\quad (3.104)$$

Una vez encontrado el Lagrangiano de Dirac y las soluciones a la ecuación de movimiento clásica es posible empezar con el proceso de cuantización, pero a diferencia del caso del campo escalar, si se busca efectuar el proceso de cuantización canónica del campo espinorial mediante conmutadores el proceso conllevará a la obtención de un Hamiltoniano que predecirá la obtención de un sistema con energía no acotada inferiormente. Es por esta razón que el proceso de cuantización debe realizarse de forma distinta y el teorema de espín-estadística sugiere que la cuantización se efectue mediante anticonmutadores para lograr la descripción de partículas *fermiónicas* [109].

Imponemos las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\begin{aligned}\{\hat{\psi}_a(t, \vec{x}), \hat{\psi}_b(t, \vec{x}')\} &= 0 = \{\hat{\psi}_a^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(t, \vec{x}')\} \\ \{\hat{\psi}_a(t, \vec{x}), \hat{\psi}_b^\dagger(t, \vec{x}')\} &= \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').\end{aligned}\quad (3.105)$$

donde $\hbar = 1$ al igual que en el campo escalar. Se define al anticonmutador de dos operadores lineales \hat{A} y \hat{B} como

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}.\quad (3.106)$$

La promoción a operadores de los campos es idéntica respecto a lo hecho para el campo escalar, es decir,

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_p^k u^k(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_p^{j\dagger} v^j(p) e^{ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \\ \Leftrightarrow \hat{\bar{\psi}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_p^{i\dagger} \bar{u}^i(p) e^{ip \cdot x} + \hat{b}_p^j \bar{v}^j(p) e^{-ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}},\end{aligned}\quad (3.107)$$

pero al introducirlas en las nuevas relaciones de anticonmutación se sigue que

$$\{\hat{a}_{\vec{p}}^r, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s\dagger}\} = 2\pi^3 \delta^{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = \{\hat{b}_{\vec{p}}^r, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s\dagger}\}\quad (3.108)$$

donde todos los demás anticonmutadores son cero.

Con estos resultados podemos rehacer nuestra construcción del Hamiltoniano

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^s - \hat{b}_{\vec{p}}^s \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^s + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{b}_{\vec{p}}^s - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right).\quad (3.109)$$

Al igual que el caso bosónico, definimos al vacío del espacio de Fock como el estado $|0\rangle$ que cumple con

$$\hat{a}_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0 = \hat{b}_{\vec{p}}^s |0\rangle . \quad (3.110)$$

Y la relación de normalización

$$\langle 0|0\rangle = 1 . \quad (3.111)$$

Con las relaciones de anticonmutación impuestas para el campo y reflejadas en los operadores de creación y aniquilación, se obtienen relaciones de conmutación con el Hamiltoniano que permiten generar eigenestados, es decir

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^s] &= -E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^s, & [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger}] &= E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^s \\ [\hat{H}, \hat{b}_{\vec{p}}^s] &= -E_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^s, & [\hat{H}, \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger}] &= E_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^s . \end{aligned} \quad (3.112)$$

Con lo cual se hace posible contruir los eigenestados de energía al hacer actuar los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{b}^\dagger sobre el vacío y así generar partículas y *antipartículas*, similar al caso bosónico.

Los estados de una partícula son

$$|\vec{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle . \quad (3.113)$$

Donde podemos promover un operador de momento angular para comprobar una de nuestras afirmaciones [108],

$$: \hat{J}^{ij} : = - \int d^3x : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\psi}} (iS^{ij}) \hat{\psi} : = \int d^3x : \hat{\psi}^\dagger S^{ij} \hat{\psi} : . \quad (3.114)$$

En particular

$$: \hat{J}^3 : \equiv : \hat{J}^{12} : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left(u_{\vec{p}}^{s\dagger} \begin{bmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{bmatrix} u_{\vec{p}}^r \hat{a}_{\vec{p}}^{s\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^r - v_{\vec{p}}^{s\dagger} \begin{bmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{bmatrix} v_{\vec{p}}^r \hat{b}_{\vec{p}}^{r\dagger} \hat{b}_{\vec{p}}^s \right) . \quad (3.115)$$

Que al actuar sobre un estado en reposo se tiene:

$$\hat{J}^3 |\vec{0}, s\rangle = \sqrt{2E_0} \hat{J}^3 \hat{a}_0^{s\dagger} |0\rangle = \pm \frac{1}{2} |\vec{0}, \lambda\rangle \quad (3.116)$$

siempre que $\lambda = \pm \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - s$, $s \in \{1, 2\}$ [108].

Confirmamos de esta manera que una partícula en reposo $|\vec{0}, \lambda\rangle$ posee un momento angular intrínseco de 1/2.

Pero, ¿qué ocurre con los estados generados a partir de \hat{b} ? Llamaremos estados de una antipartícula al hacer actuar dichos operadores sobre el vacío

$$|\vec{p}, \bar{\lambda}\rangle_- = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (3.117)$$

y se ha acuñado este nombre pues, calculando de forma análoga la proyección de espín obtenemos

$$\hat{J}^3 \left| \vec{0}, \bar{\lambda} \right\rangle_- = \mp \frac{1}{2} \left| \vec{0}, \bar{\lambda} \right\rangle_- \quad (3.118)$$

donde $\bar{\lambda} = \mp \frac{1}{2} = s - \frac{3}{2}$, la proyección opuesta respecto a los estados generados por \hat{a}^\dagger .

Los estados multipartículas quedan determinados por la acción de ambos pares de operadores de creación, teniéndose

$$\left| p_1 \lambda_1 n; \dots; p_N \lambda_N n; \bar{p}_1 \bar{\lambda}_1 \bar{n}; \dots; \bar{p}_N \bar{\lambda}_N \bar{n} \right\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_N}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^{s_1 \dagger} \dots \hat{b}_{\vec{p}_N}^{\bar{s}_N \dagger} |0\rangle. \quad (3.119)$$

Donde observamos que

$$\begin{aligned} |p_1 \lambda_1; p_2 \lambda_2\rangle &= \hat{a}_{\vec{p}_1}^{s_1 \dagger} \hat{a}_{\vec{p}_2}^{s_2 \dagger} |0\rangle = - |p_2 \lambda_2; p_1 \lambda_1\rangle \\ |\bar{p}_1 \bar{\lambda}_1; \bar{p}_2 \bar{\lambda}_2\rangle &= \hat{b}_{\vec{p}_1}^{s_1 \dagger} \hat{b}_{\vec{p}_2}^{s_2 \dagger} |0\rangle = - |\bar{p}_2 \bar{\lambda}_2; \bar{p}_1 \bar{\lambda}_1\rangle \end{aligned} \quad (3.120)$$

es decir, tanto partículas como antipartículas obedecen la estadística de Fermi-Dirac [98].

Habiendo estudiado el campo de Dirac hasta este punto nos encontramos en posibilidad de calcular la amplitud de propagación de una partícula (antipartícula) tal como se hizo en caso escalar.

La amplitud de propagación de una partícula a \vec{x}' al tiempo t' desde el punto \vec{x} al tiempo t , esta dada por

$$\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(x') \hat{\psi}_\beta(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot (x' - x)}}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} + m)_{\alpha\beta}. \quad (3.121)$$

donde hemos definido a $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

De forma análoga se puede calcular la amplitud de propagación de una antipartícula de x' a x

$$\langle 0 | \hat{\psi}_\beta(x) \hat{\psi}_\alpha(x') | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ip \cdot (x' - x)}}{2E_{\vec{p}}} (\not{p} - m)_{\alpha\beta}. \quad (3.122)$$

Definimos el propagador de Feynman, $\mathcal{D}_F(x - x')$, bajo orden temporal considerando ambas amplitudes y formando una matriz de 4×4 :

$$\mathcal{D}_F(x - x') = \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \langle 0 | -\hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x) | 0 \rangle & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases}. \quad (3.123)$$

El signo menos que aparece esta relacionado con la invariancia de Lorentz; cuando $(x - x')^2 < 0$ no existe forma invariante de determinar si $x^0 > x'^0$ o $x'^0 > x^0$, para

este caso el signo menos es necesario para hacer coincidir ambas definiciones pues $\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\} = 0$ fuera del cono de luz.

Así también somos capaces de reescribir este propagador en términos de una integral sobre d^4p integrando sobre el mismo contorno que usamos en el propagador de Feynman para el campo de Klein-Gordon

$$\mathcal{D}_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - x')} . \quad (3.124)$$

3.3. Electrodinámica clásica y el campo vectorial

En este capítulo dedicaremos nuestra atención a estudiar los conceptos relevantes en electromagnetismo y procederemos a mencionar los elementos esenciales del proceso de cuantización del campo vectorial.

En la sección anterior, al realizar nuestra construcción del campo de Dirac encontramos que este es invariante ante la simetría global

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{iq\theta} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-iq\theta} \bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (3.125)$$

pues en el Lagrangiano se tiene que [98]

$$\mathcal{L}'(\psi'_l, \partial_\mu \psi'_l) = (e^{-iq\theta} \bar{\psi}(x)) (i\not{\partial} - m) (e^{iq\theta} \psi(x)) = \bar{\psi}(x) (i\not{\partial} - m) \psi(x) = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) . \quad (3.126)$$

Lo que implica que la fase global del campo no tiene un significado físico ante nuestra descripción pero, ¿qué pasaría si buscamos extender esta simetría global a una simetría local donde la fase dependa del punto en el espaciotiempo en el que nos encontremos? Al promover la simetría global a una dependencia local pedimos que

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta(x)} \psi(x). \quad (3.127)$$

El campo sería entonces invariante ante un grupo de transformaciones conocido como $U(1)$ que depende de x , análogamente a la simetría global, esta simetría implicaría que la fase local carece de implicaciones físicas pues pueden ser modificadas arbitrariamente. De este modo un campo que satisfaga esta simetría verá reducidos sus grados de libertad físicos en 1 respecto a los que hubiese tenido si obedeciese una teoría únicamente global.

Para un Lagrangiano que involucre derivadas se tendrán términos extra con los que trabajar, esta diferencia se debe a que, por definición, una derivada es una función cuyos argumentos son dos puntos distintos del espaciotiempo, entonces si queremos tener una invariancia bajo esta simetría local tenemos que encontrar una forma

distinta de comparar nuestro campo en dos puntos infinitesimalmente cercanos. Es en ese contexto que toma forma la derivada covariante [83, 98]:

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + iqA_\mu(x)\psi(x), \quad (3.128)$$

donde A_μ es un campo vectorial y obedece la siguiente regla de transformación

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x). \quad (3.129)$$

Dicha transformación es consistente con la transformación del campo, pues

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi'(x) &= [\partial_\mu + iq(A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x))] e^{iq\theta(x)} \psi(x) \\ &= e^{iq\theta(x)} [\partial_\mu + iqA_\mu(x)] \psi(x) = e^{iq\theta(x)} D_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (3.130)$$

Una observación importante es que la obtención de un campo vectorial es consecuencia de buscar promover una simetría global, como la del campo de Dirac, a una simetría local donde se hace necesario desarrollar el concepto de derivada covariante y, por tanto, introducir un campo vectorial [98]. Esta consideración es aplicada en general; todo posible Lagrangiano que sea invariante bajo una simetría local es aquel donde sus derivadas usuales han sido reemplazadas por derivadas covariantes del campo, para lo cual es necesario introducir un campo vectorial o de *norma* $A_\mu(x)$ que transforme como en la ecuación (3.129). Cuando se presenta dicha situación se dice que el campo $\psi(x)$ y $A_\mu(x)$ se encuentran *acoplados mínimamente*.

Para concluir con nuestra construcción de un Lagrangiano invariante ante simetrías locales, necesitamos encontrar un término cinético de $A_\mu(x)$ que constituya parte de la dinámica que se busca describir. Para que este término de energía cinética sea invariante local debe depender de los términos del campo $A_\mu(x)$ y sus derivadas.

Una forma de encontrar dicho término es observar la transformación del conmutador de derivadas covariantes actuando sobre $\psi(x)$

$$[D_\mu, D_\nu] \psi(x) \rightarrow D'_\mu \psi'(x) - D'_\nu \psi'(x) = e^{iq\theta(x)} [D_\mu, D_\nu] \psi(x). \quad (3.131)$$

transforma como el campo pero no involucra derivadas del mismo:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \psi \quad (3.132)$$

Se define entonces la intensidad de campo

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.133)$$

localmente invariante bajo la transformación de norma (3.129). El objeto $F_{\mu\nu}$ se define como el tensor de campo electromagnético que estudiaremos en la siguiente sección.

El término cinético de A_μ en nuestro Lagrangiano será aquella combinación general de $F_{\mu\nu}$ escalar y real:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.134)$$

conocido como *Lagrangiano de Maxwell*.

3.3.1. Ecuaciones de Maxwell

Recordemos las familiares ecuaciones del electromagnetismo

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j},\end{aligned}\tag{3.135}$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{B} es el campo magnético, ρ es la densidad de carga del medio, ϵ_0 es la permitividad del vacío, \vec{j} es la densidad de corriente y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

Para realizar nuestra conexión del tensor $F_{\mu\nu}$ con las ecuaciones de Maxwell definimos el cuadri-potencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, donde los campos eléctrico, \vec{E} , y magnético, \vec{B} , quedan determinados por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.\tag{3.136}$$

Por lo que una representación matricial del tensor electromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, queda dado por

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.\tag{3.137}$$

Para recuperar las ecuaciones de Maxwell se hace uso de la densidad Lagrangiana del electromagnetismo

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu\tag{3.138}$$

siendo $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. Las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$j^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu}\tag{3.139}$$

que se corresponden con las dos ecuaciones de Maxwell con fuentes

$$j^0 = \partial_\nu F^{0\nu} \Rightarrow \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \quad j^i = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{B}.\tag{3.140}$$

Las ecuaciones restantes se encuentran codificadas en la identidad que obedece el tensor electromagnético conocida como *identidad de Bianchi* [61] :

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0\tag{3.141}$$

donde

$$\lambda = 1, \mu = 2, \nu = 3 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{y} \quad \lambda = 0, \mu = i, \nu = j \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (3.142)$$

que son las ecuaciones de Maxwell sin fuentes.

Es importante mencionar que en la ecuación (3.138) se tiene un término que no aparece en el Lagrangiano de Maxwell que habíamos construido, ¿Cómo se comporta este bajo nuestra transformación de norma?

La acción asociada a \mathcal{L}_{EM} es

$$S_{EM} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right] \quad (3.143)$$

si pedimos su invarianza bajo la transformación local,

$$\int d^4x A_\mu j^\mu \rightarrow \int d^4x [A_\mu j^\mu - \partial_\mu \theta j^\mu] \quad (3.144)$$

requerimos que

$$0 = \int d^4x [j^\mu \partial_\mu \theta] = - \int d^4x [\theta \partial_\mu j^\mu]. \quad (3.145)$$

Es decir, se pide que j^μ sea una corriente conservada, $\partial_\mu j^\mu = 0$.

3.3.2. Cuantización del campo vectorial no masivo

Al igual que en los casos anteriores, el siguiente paso una vez analizado el campo clásico es promoverlo a operadores mediante la imposición de reglas de conmutación o anticonmutación.

Pero antes de mencionar los resultados importantes en el proceso mencionado conviene que discutamos brevemente la consecuencia de involucrar una transformación local en el proceso de cuantización. Una partícula no masiva con espín j tiene a lo más dos estados, mientras que una partícula con masa posee $2j+1$ estados, donde hemos pedido que sea el campo vectorial A_μ el que describa a estas partículas. Al extender nuestra invariancia global a una local se construye una redundancia en la teoría pues dicha transformación no debe representar un elemento de la realidad que se quiere describir, y más aún, dado que se trata de una simetría local tenemos la libertad de modificar el valor del campo de forma independiente en cada punto del espaciotiempo. Dependiendo de la elección que tomemos de $\theta(x)$ es posible modificar e incluso anular algunas componentes de $A_\mu(x)$. En conclusión, al describir partículas no masivas de espín 1 mediante el campo vectorial $A_\mu(x)$ la teoría es redundante, se tienen más variables que grados de libertad [98].

Otra forma de ver esta redundancia es observar que dos estados conectados mediante una simetría de norma son en realidad el mismo. Recordar que esta situación es un

hecho particular del potencial electromagnético; las ecuaciones de Maxwell aniquilan cualquier sumando de la forma $\partial_\mu \theta$ que se añada al potencial. Esto quiere decir que dada cualquier información inicial del sistema, no existe una forma única de determinar A_μ en un tiempo posterior pues no se puede distinguir entre A_μ y $A_\mu + \partial_\mu \theta$.

Existen dos caminos en el proceso de cuantización canónica, el primero de ellos es eliminar esta redundancia y cuantizar únicamente los grados de libertad físicos; esta acción se consigue mediante la imposición de condiciones que determinen a A_μ de forma única. Es decir, dada una foliación de las orbitas de norma se escoge un representante de cada una, sin importar el representante siempre que pertenezca a las órbitas. A este procedimiento se le conoce como *fixar la norma*.

Una de las normas más usuales es la norma de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, o bien la norma de Lorentz, $\partial^\mu A_\mu = 0$ [100].

La idea detrás del segundo método, conocido como *método de Gupta-Bleuler*, es fijar la norma no a nivel de operadores sino directamente en el espacio de Hilbert, es decir, buscar implementar la norma como una restricción de los estados físicos; dado que el espacio de Hilbert construido hasta ese momento contiene estados sin sentido físico. Este formalismo permitirá distinguir los estados que nos interesan, $|fis\rangle$, como un subespacio \mathcal{H}_{fis} del espacio de Hilbert total, \mathcal{H} [98, 108].

Ejemplificando este segundo camino; pensemos que buscamos implementar la norma de Lorentz después de cuantizar, es conveniente cambiar la teoría y tomar el Lagrangiano

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu), \quad (3.146)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Los momentos canónicos conjugados serán en este caso

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = -\partial_\mu A^\mu, \quad \pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (3.147)$$

Al implementar las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{A}_\nu(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\pi}^\mu(t, \vec{x}), \hat{\pi}^\nu(t, \vec{x}')] \\ [\hat{A}_\mu(t, \vec{x}), \hat{\pi}_\nu(t, \vec{x}')] &= i\eta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (3.148)$$

Podemos realizar en este momento nuestra expansión habitual en términos de operadores de creación y aniquilación y los vectores de polarización $(\varepsilon_\mu)^\lambda$, con $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\lambda e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \\ \hat{\pi}^\mu(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (+i) \sum_{\lambda=0}^3 (\varepsilon^\mu)^\lambda(\vec{p}) \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\lambda e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\lambda\dagger} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.149)$$

Con lo cual definimos a un estado físico como aquel que satisface la norma de Lorentz a nivel de elementos de matriz:

$$\langle fis' | \partial \cdot \hat{A} | fis \rangle = 0 \quad (3.150)$$

el espacio de Hilbert físico, \mathcal{H}_{fis} , será entonces aquel conjunto que contenga a todos estos estados.

Para completar esta sección realicemos el cálculo del propagador de Feynman del campo vectorial en la norma de Lorentz

$$\mathcal{M}_F^{\mu\nu}(x-x') = \langle 0|T\{\hat{A}^\mu(x)\hat{A}^\nu(x')\}|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\hat{A}^\mu(x)\hat{A}^\nu(x')|0\rangle & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \langle 0|\hat{A}^\nu(x')\hat{A}^\mu(x)|0\rangle & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases} \quad (3.151)$$

Donde

$$\langle 0|\hat{A}^\mu(x)\hat{A}^\nu(x')|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-x')} \eta^{\mu\nu}, \quad (3.152)$$

y

$$\langle 0|\hat{A}^\nu(x')\hat{A}^\mu(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{2E_p} e^{ip\cdot(x-x')} \eta^{\nu\mu}. \quad (3.153)$$

Expresiones muy similares a las halladas en el caso escalar y para el campo de Dirac, de hecho, al igual que esos casos somos capaces de reescribir al propagador de Feynman como una integral sobre d^4p , que sería

$$\mathcal{M}_F^{\mu\nu}(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-x')} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}, \quad (3.154)$$

donde $\alpha = 1$ en la norma de Feynman [83].

Agradablemente es un elemento que preserva la covarianza de Lorentz. Si se hubiese trabajado la cuantización del campo vectorial en la norma de Coulomb y calculado el propagador de Feynman en esa norma se hallaría que la ecuación (3.154) es solamente un elemento del tal propagador. La diferencia es debida justamente al trabajo con elementos sin sentido físico en la norma de Lorentz que permiten conservar covarianza mientras que la cuantización en la norma de Coulomb restringe los grados de libertad en un principio cuantizando solo los grados de libertad físicos.

3.4. Teoría de Yang-Mills

En esta sección queremos introducir algunos conceptos básicos de la llamada teoría de Yang-Mills que jugará un papel importante en la descripción de la correspondencia holográfica y lo haremos basándonos en [100]. Acabamos de estudiar la teoría electromagnética como una teoría de campos de espín 1 libre, lo que nos lleva a cuestionarnos si es posible generalizar a una teoría interactuante para campos de espín 1; la respuesta es que en efecto es posible y dicha teoría se conoce como *teoría de Yang-Mills*.

La teoría de Yang-Mills es una teoría fascinante y basa su construcción en el estudio de las estructuras matemáticas llamadas grupos de Lie [61]. Su relevancia es tal

que forma parte de la estructura del Modelo Estándar de partículas, describiendo la fuerza débil y fuerte.

Un grupo de Lie compacto G tiene un álgebra asociada cuyos generadores T^a satisfacen

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (3.155)$$

donde $a \in \{1, 2, \dots, \dim G\}$ y f^{abc} son las constantes de estructura completamente antisimétricas. La imposición del número imaginario i asegura que los generadores sean hermitianos $(T^a)^\dagger = T^a$ [23].

Para los grupos de Lie compactos se tiene una clasificación finita que facilita su estudio. Como posibles opciones para el grupo G , junto con su dimensión $\dim G$ y la de su representación fundamental F se tienen:

G	dim G	dim F
SU(N)	$N^2 - 1$	N
SO(N)	$\frac{1}{2}N(N - 1)$	N
Sp(N)	$N(2N + 1)$	2N
E_6	78	27
E_7	133	56
E_8	248	248
F_4	52	6
G_2	14	7

Dada la necesidad de normalizar los generadores del álgebra de Lie se requiere que los generadores en la representación fundamental F [23, 100], satisfagan la siguiente ecuación

$$\text{tr } T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad a, b \in \{1, \dots, \dim G\}. \quad (3.156)$$

Por cada elemento en el álgebra introducimos un campo de norma A_μ^a . Estos campos quedan empaquetados en el potencial

$$A_\mu = A_\mu^a T^a. \quad (3.157)$$

Este objeto toma valores en el álgebra de Lie y, por ejemplo, para el grupo $SU(N)$ conviene pensar a estos objetos directamente como una matriz $N \times N$ sin traza. A partir de este objeto se construye [100]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (3.158)$$

Los campos de materia, como el campo espinorial ψ , se encuentran en una representación R del grupo de norma G , esto significa que a estos campos se les asocia un vector φ de dimensión $\dim R$. Volviendo a tomar como ejemplo a $SU(N)$, los campos de materia en su representación fundamental son vectores complejos N dimensionales. Como lo vimos al inicio de la sección anterior, los campos de materia se acoplan al campo de norma vía la derivada covariante

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - iA_\mu \psi. \quad (3.159)$$

Sin embargo, debido a la gran cantidad de representaciones R del álgebra se tendrán generadores $T^a(R)$ que pueden pensarse como matrices de dimensión $\dim R$. Bajo esta concepción tendremos la siguiente notación matricial [23, 100]

$$T^a(R)^i_j \quad i, j \in \{1, \dots, \dim R\}; \quad a \in \{1, \dots, \dim G\}. \quad (3.160)$$

Para cada una de estas representaciones tendremos un objeto que empaqueta los campos de norma $A_\mu^a T^a(R)^i_j$. De modo que se podemos acoplar al campo de materia en la representación R al generalizar la derivada covariante según

$$D_\mu \psi^i = \partial_\mu \psi^i - i A_\mu^a T^a(R)^i_j \psi^j \quad i, j \in \{1, \dots, \dim R\}. \quad (3.161)$$

Para el caso de $SU(N)$, y tomando a los generadores T^a en la representación fundamental, el potencial A_μ es simplemente una matriz hermítica $N \times N$.

Otra de las representaciones comunes es *la representación adjunta* \bar{R} [42, 61], $\dim \bar{R} = \dim G$. En ella resulta conveniente pensar a los campos de materia formando los usuales vectores ϕ^a , $a \in \{1, \dots, \dim G\}$, pero entonces empaquetarlos en el objeto del álgebra de Lie, $\phi = \phi^a T^a$. En este lenguaje la derivada covariante se escribe [100]

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i[A_\mu, \phi]. \quad (3.162)$$

El campo $F_{\mu\nu}$ se construye a partir del conmutador de las derivadas covariantes

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = -i F_{\mu\nu} \psi, \quad (3.163)$$

y si se pensó al campo en su representación adjunta, el campo viene dado por

$$[D_\mu, D_\nu] \phi = -i[F_{\mu\nu}, \phi]. \quad (3.164)$$

La dinámica de la teoría queda dada por la acción

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.165)$$

donde g^2 es la constante de acoplamiento de Yang-Mills. Las ecuaciones de movimiento se derivan de la extremización de la acción (3.165) con respecto a cada campo de norma A_μ^a , de donde

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.166)$$

debido a que $F_{\mu\nu}$ es un elemento del álgebra de Lie, la derivada covariante a usar es (3.162). También existe una identidad de Bianchi asociada, misma que queda mejor expresada una vez se define el dual del campo $F_{\mu\nu}$

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (3.167)$$

y vemos que cumple con

$$D_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.168)$$

Las ecuaciones y son las generalizaciones no abelianas de las ecuaciones de Maxwell; y aunque solo difieren en los sumandos con conmutadores, ocultos en D_μ y en $F_{\mu\nu}$,

incluso a nivel clásico conducen a ecuaciones de movimiento no lineales. Lo que implica que los campos de Yang-Mills interactúan entre sí.

La acción (3.165) posee un amplio grupo de simetría proveniente de las funciones espaciotemporales del grupo de Lie G

$$\Omega(x) \in G. \quad (3.169)$$

A este grupo de simetría se le llama *grupo de norma*. Sobre el campo de norma estas funciones actúan de la siguiente forma

$$A_\mu \rightarrow \Omega(x)A_\mu\Omega^{-1}(x) + i\Omega(x)\partial_\mu\Omega^{-1}(x), \quad (3.170)$$

situación que induce al campo $F_{\mu\nu}$ a transformar según

$$F_{\mu\nu}\Omega(x)F_{\mu\nu}\Omega^{-1}(x). \quad (3.171)$$

La acción de Yang-Mills resulta invariante bajo transformaciones de norma dado el comportamiento de la traza en la misma.

Recordar que en la teoría electromagnética lo que teníamos eran funciones del espaciotiempo tales que $\Omega = e^{i\omega(x)}$, y la transformación del campo de norma transformaba como $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta(x)$. Al igual que en esta teoría del electromagnetismo, la simetría de norma constituye una redundancia del sistema que se mantendrá en la teoría de Yang-Mills. La diferencia será ahora que tanto el “campo eléctrico” $E_i = F_{0i}$ como el “campo magnético”, $B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$, no son ya invariantes de norma, objetos físicos de la teoría. Los invariantes de la teoría serán elementos construidos por las trazas como $\text{tr} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$, o por *los lazos de Wilson* [111]. Discutiremos en breve aspectos básicos de estos últimos.

En analogía a lo que ocurre en la relatividad general donde los coeficientes de Christoffel, o conexiones de Levi-Civita en general, dictan el comportamiento del transporte de vectores por el espaciotiempo; para la teoría de Yang-Mills el potencial A_μ jugará un papel de conexión para una carga adecuada.

Esto es, pensando en un entorno con campos de Yang-Mills $A_\mu(x)$ de fondo, colocamos una partícula de prueba que podemos mover a voluntad. La partícula posee un grado de libertad interno, su carga, cuyo comportamiento lo dictan los campos de Yang-Mills de fondo. La carga debe ubicarse en alguna representación R del grupo de Lie G . Por tomar un ejemplo, pensemos que la partícula toma un vector complejo, ω , de norma fija

$$\omega_i \quad i \in \{1, \dots, \dim R\}, \quad (3.172)$$

tal que $\omega^\dagger\omega = cte$. En la cromodinámica cuántica este ω_i será la carga de color.

Mientras la partícula se mueve, la conexión A_μ le indica a ω como rotar. En efecto, para una partícula con trayectoria $x^\mu(\tau)$, la rotación del vector ω está determinada por la ecuación de transporte paralelo [100]

$$i\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau}A_\mu(x)\omega, \quad (3.173)$$

donde la forma garantiza que el vector ω tenga norma constante. Pensando que la partícula se mueve sobre una curva C con inicio en $x_i^\mu = x^\mu(\tau_i)$ y termina en $x_f^\mu = x^\mu(\tau_f)$. Entonces la rotación del vector interno queda en función de los puntos inicial y final, así como de la curva, esto es

$$\omega(\tau_f) = U[x_i, x_f; C]\omega(\tau_i), \quad (3.174)$$

donde

$$U[x_i, x_f; C] = T \exp \left[i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{x^\mu}{d\tau} A_\mu(x(\tau)) \right] = T \exp \left[i \int_{x_i}^{x_f} A \right], \quad (3.175)$$

tomando el orden temporal T tal que las matrices $A_\mu(x(\tau))$ con tiempos menores se ubiquen a la izquierda. Al objeto $U[x_i, x_f; C]$ se le llama *línea de Wilson*. Ante una transformación de norma se obtiene

$$U[x_i, x_f; C] \rightarrow \Omega(x_i)U[x_i, x_f; C]\Omega^\dagger(x_f). \quad (3.176)$$

Si la partícula sigue una trayectoria cerrada C , U indica como ω cambia respecto a su valor inicial, en este caso podremos formar un objeto invariante de norma conocido como *lazo de Wilson*,

$$W[C] = \text{tr} T \exp \left[i \oint A \right]. \quad (3.177)$$

El lazo de Wilson $W[C]$ depende de la representación R del campo de norma, y de la trayectoria C [67].

3.5. Teoría cuántica de campo conforme en $d > 2$

Ya hemos visto que en el entendimiento de la teoría cuántica de campos las simetrías juegan un papel fundamental. Recordando que empezamos preguntandonos que transformaciones lineales dejaban invariante a la métrica de Minkowski lo que nos condujo a la invariancia bajo Lorentz y como la misma pregunta, salvo linealidad, nos permitió generalizar a la invariancia bajo Poincaré es razonable cuestionarse ahora, entonces, si existe un grupo que generalice al grupo de Poincaré y que juegue un papel importante en el ámbito físico. Una de estas generalizaciones viene de considerar la incorporación de simetrías bajo el cambio de escala. Muchas teorías de campo con esta propiedad son de interés. Pero incluso aunque una teoría de campo no sea invariante bajo esta transformación, se ha estudiado en tiempos recientes que por media general, en concreto cuando la teoría de campo está bien definida, estas teorías exhiben un comportamiento invariante de escala al estudiarlas a niveles energéticos arbitrariamente grandes lo cual resulta plausible si consideramos que las masas o cualquier otra escala intrínseca queda oculta, arbitrariamente pequeña, en esta región de estudio. Por lo que el análisis de teorías invariantes de escala resulta interesante en varios escenarios, un estudio general puede encontrarse en ??.

El grupo conforme es el grupo de transformaciones que preserva la forma de la métrica salvo por un factor de escala arbitrario:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (3.178)$$

El grupo conforme del espacio de Minkowski es el más pequeño en contener tanto al grupo de Poincaré como a las inversiones $x^{\mu\nu} \rightarrow x^\mu/x^2$ [38]

Este grupo es generado por las transformaciones de Poincaré, que incluyen a las transformaciones de Lorentz $M_{\mu\nu}$ y a las traslaciones P_μ . Por las transformaciones de escala D

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu, \quad (3.179)$$

y por las transformaciones especiales K_μ

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2x^\nu + a^2 x^2}. \quad (3.180)$$

En otras palabras, los generadores del grupo conforme en espacio de Minkowski bajo representación espacial [44]

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu; & M_{\mu\nu} &= i(x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu); \\ D &= -ix^\mu\partial_\mu; & K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu). \end{aligned} \quad (3.181)$$

El vacío de la teoría conforme será aniquilado por todos estos generadores, donde además se obedecen las siguientes expresiones, que forman un álgebra*

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu); & [M_{\mu\nu}, K_\rho] &= -i(\eta_{\mu\rho}K_\nu - \eta_{\nu\rho}K_\mu); \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} \pm \text{permutaciones}; & [M_{\mu\nu}, D] &= 0; & [D, K_\mu] &= iK_\mu; \\ [D, P_\mu] &= -iP_\mu; & [P_\mu, K_\nu] &= 2iM_{\mu\nu} - 2i\eta_{\mu\nu}D, \end{aligned} \quad (3.182)$$

donde todos los otros conmutadores son cero. Una vez dotado al grupo de esta estructura de producto obtenemos un álgebra que es isomorfa al álgebra de $SO(d,2)$, misma que es generada por J_{ab} , $a, b \in \{0, 1, \dots, d+1\}$ al definir

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}; \quad J_{\mu d} = \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu); \quad J_{\mu(d+1)} = \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu); \quad J_{(d+1)d} = D. \quad (3.183)$$

Los estados, o campos, en los que vamos a tener especial atención son aquellos eigenfunciones del operador de reescalamiento D , con eigenvalor $-i\Delta$, donde a Δ se le llama dimensión conforme y la dimensión de un campo queda dada por la relación $\phi(\lambda x) = \lambda^{-\Delta}\phi(x)$. Esto es, interés particular en campos tales que $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \lambda^\Delta\phi(\lambda x)$. Debido a las relaciones de conmutación podemos observar lo siguiente

$$P'_\mu\phi'(x) = -i\lambda^{-1}\partial_\mu(\lambda^\Delta\phi(x)) = \lambda^{-\Delta-1}P_\mu\phi(x), \quad (3.184)$$

esto indica que el operador P_μ incrementa la dimensión conforme del campo en uno. Hecho contrario a K_μ

$$K'_\mu\phi'(x) = -i(2\lambda x_\mu x^\nu\partial_\nu(\lambda^\Delta\phi(x)) - \lambda x^2\partial_\mu(\lambda^\Delta\phi(x))) = \lambda^{-\Delta+1}K_\mu\phi(x), \quad (3.185)$$

que baja la dimensión del campo en una unidad [38].

Para teorías de campo unitarias existe una cota inferior en la dimensión de los campos, por ejemplo para un campo escalar se tiene que $\Delta \geq (d-2)/2$, con esto se

deduce que para toda representación del grupo conforme debe existir un campo con la menor dimensión posible que sea aniquilado por K_μ , en $x = 0$. A los operadores que cumplen esta cuestión se les conoce como *operadores primarios* [66]. Bajo los generadores del grupo, estos campos se comportan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [P_\mu, \phi(x)] &= i\partial_\mu\phi(x), \\ [M_{\mu\nu}, \phi(x)] &= (i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \Lambda_{\mu\nu})\phi(x), \\ [D, \phi(x)] &= i(-\Delta + x^\mu\partial_\mu)\phi(x) \\ [K^\mu, \phi(x)] &= (i(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu + 2x_\mu\Delta) - 2x^\nu\Lambda_{\mu\nu})\phi(x). \end{aligned} \quad (3.186)$$

Conviene como parte final de este capítulo estudiar el comportamiento de las funciones de correlación en la teoría de campo conforme. Debido a que el grupo conforme es más grande que el grupo de Poincaré, se tiene una restricción en la forma de las funciones de correlación debido a que tienen que ser invariantes de escala. Veamos que

$$\langle\phi(x)\rangle \rightarrow \lambda^\Delta\langle\phi(\lambda x)\rangle = \lambda^\Delta\langle\phi(x)\rangle \quad (3.187)$$

de modo que la invariancia se mantiene solo cuando $\Delta = 0$, o bien $\lambda^\Delta\langle\phi(\lambda x)\rangle = 0$. Para el correlador de dos puntos tendremos que, por invariancia bajo Poincaré $\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle$ solo puede depender de $(x - y)^2$, es decir,

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = f(|x_1 - x_2|), \quad (3.188)$$

mientras que la invariancia bajo dilataciones nos dice

$$f(|x_1 - x_2|) = \langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2}\langle\phi_1(\lambda x_1)\phi_2(\lambda x_2)\rangle = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2}f(\lambda|x_1 - x_2|), \quad (3.189)$$

lo cual implica que

$$f(|x_1 - x_2|) \propto \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}. \quad (3.190)$$

Un estudio similar del comportamiento bajo transformaciones especiales terminará otorgando finalmente que el correlador de dos puntos queda dado por [79]

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\rangle \propto \delta_{\Delta_1\Delta_2} \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}}. \quad (3.191)$$

Un análisis similar nos permite mostrar una expresión acorde para el correlador de tres puntos [79]

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\rangle \propto \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|x_1 - x_3|^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}|x_2 - x_3|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}}. \quad (3.192)$$

3.6. Supersimetría

Usualmente se sitúa el punto inicial del estudio de la supersimetría en la década de los 70's con los trabajos de Wess y Zumino en teorías de campo supersimétricas [110]. En

este espacio daremos un breve repaso sobre los conceptos básicos de supersimetría desde la teoría de campo y presentaremos una de las teorías fundamentales en el entendimiento de la correspondencia holográfica.

La idea consiste en extender el álgebra de Poincaré de forma no trivial, para ello debe sortearse el teorema de Coleman-Mandula, mismo que establece que para 3+1 dimensiones esto no es posible, y la única forma de mezclar el álgebra de Poincaré con simetrías internas y preservar amplitudes de dispersión no cero, es mediante el producto directo

$$\text{Poincaré} \times \text{Simetría Interna.} \quad (3.193)$$

La razón de contravenir este teorema es que en él se consideran únicamente *generadores bosónicos*, que definiremos en breve, dejando la posibilidad de introducir *generadores fermiónicos* tales que sean capaces de actuar de la siguiente forma

$$Q|\text{bosón}\rangle \propto |\text{fermión}\rangle, \quad Q|\text{fermión}\rangle \propto |\text{bosón}\rangle. \quad (3.194)$$

donde Q es dicho generador fermiónico. Para ello es necesario obtener una generalización entre las relaciones de los operadores, que ya hemos dilucidado al usar anticonmutadores en la cuantización del campo fermiónico. Si O_a es operador en un álgebra, pedimos que

$$O_a O_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} O_b O_a = i C_{ab}^c O_c, \quad (3.195)$$

donde $\eta_a = 0$ si O_a es un generador bosónico, y $\eta_a = 1$ si O_a es un generador fermiónico. En supersimetría, los generadores bosónicos son los generadores de Poincaré espaciotemporales P^μ , $M^{\mu\nu}$ y los generadores fermiónicos son Q_α^A , \bar{Q}_β^A , donde $A \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. En el caso $\mathcal{N} = 1$ hablamos de una supersimetría simple, el caso $\mathcal{N} > 1$ se trata de una supersimetría extendida.

Sabemos que las relaciones de conmutación $[P^\mu, P^\nu]$, $[P^\mu, M^{\rho\sigma}]$ y $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]$ forman el álgebra de Poincaré, así que bajo la operación (3.195) resta presentar las siguientes relaciones [4]:

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, M^{\mu\nu}] &= (\sigma)_{\alpha}^{\beta} Q_{\beta}, & [\bar{Q}^{\alpha}, M^{\mu\nu}] &= (\bar{\sigma})^{\alpha}_{\beta} \bar{Q}^{\beta}, \\ [Q_\alpha, P^\mu] &= [\bar{Q}^{\alpha}, P^{\mu\nu}] = 0 \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0 \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu. \end{aligned} \quad (3.196)$$

tal que $\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \sigma^{[\mu} \bar{\sigma}^{\nu]}$, teniendo presente que $\sigma^\mu = (\mathbb{I}, \vec{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}, -\vec{\sigma})$. Observar que el efecto conjunto de la operación $Q_\alpha \bar{Q}_\beta$ tiene el efecto de una traslación: sea $|B\rangle$ un estado bosónico y $|F\rangle$ un estado fermiónico, entonces

$$Q_\alpha |F\rangle = |B\rangle, \quad \bar{Q}_\beta |B\rangle = |F\rangle \Rightarrow Q\bar{Q} : |B\rangle \rightarrow |B \text{ trasladado}\rangle \quad (3.197)$$

Para el caso de simetrías internas T_i , el conmutador $[Q_\alpha, T_i]$ es usualmente cero vía el teorema de Coleman-Mandula, salvo por los automorfismos $U(1)$ del álgebra supersimétrica conocidos como simetría R. El álgebra resulta invariante ante el cambio simultáneo

$$Q_\alpha \rightarrow \exp(i\lambda) Q_\alpha, \quad \bar{Q}_\alpha \rightarrow \exp(-i\lambda) \bar{Q}_\alpha. \quad (3.198)$$

Si R es un generador global de $U(1)$, dado que $Q_\alpha \rightarrow e^{-iR\lambda}Q_\alpha e^{iR\lambda}$, entonces

$$[Q_\alpha, R] = Q_\alpha, \quad [\bar{Q}_\alpha, R] = -\bar{Q}_\alpha. \quad (3.199)$$

Como estamos cambiando el grupo de Poincaré, debemos observar si los Casimir del grupo se han modificado, pues recordemos que ellos son usados para etiquetar las observables físicas. Recordemos, por ejemplo, que el grupo de rotaciones $\{J_i, i = 1, 2, 3\}$ satisface

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (3.200)$$

El Casimir

$$J^2 = \sum_{i=1}^3 J_i^2, \quad (3.201)$$

conmuta con todos los J_i y etiqueta las representaciones irreducibles con los eigenvalores $j(j+1)$ de J^2 . En estas representaciones irreducibles, los valores propios de J_a , $j_a = -j, -j+1, \dots, j-1, j$, distingue a cada estado como $|j, j_a\rangle$.

De forma análoga, el grupo de Poincaré en $3+1$ dimensiones posee dos Casimir, uno de ellos escrito en términos del vector de Pauli-Ljubanski W_μ :

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}. \quad (3.202)$$

Los Casimir de Poincaré son

$$C_1 = P^\mu P_\mu, \quad C_2 = W^\mu W_\mu, \quad (3.203)$$

dado que C_i conmuta con todos los generadores.

Los multipletes de Poincaré están etiquetados por $|m, \omega\rangle$, donde m^2 es el eigenvalor de C_1 y ω lo es de C_2 . Estados en estas representaciones irreducibles portan el valor propio p^μ de P^μ como etiqueta. Observar que a este nivel el vector de Pauli-Ljubanski solo provee de una forma compacta de expresar al Casimir de Poincaré. Aunque W_μ posee relaciones usuales de conmutación con los generadores del grupo $M_{\mu\nu}$, pues transforma como vector bajo las transformaciones de Lorentz; y conmuta con P_μ , implicando que es invariante ante traslaciones. Sin embargo, el conmutador $[W_\mu, W_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma$ implica que las W 's no son generadores de un álgebra cerrada. De modo que para encontrar otras etiquetas para los estados es necesario tomar a P^μ y encontrar a todos los elementos del grupo de Lorentz que conmuten con él. Esto define dos clases de subgrupos: el de las partículas masivas, $p^\mu = (m, 0, \dots, 0)$, invariantes ante rotaciones espaciales de modo que por la definición (3.202), W_μ está dado por

$$W_0 = 0, \quad W_i = -mJ_i. \quad (3.204)$$

Así que, $C_1 = P^2$ con eigenvalor m^2 y $C_2 = -P^2 J^2$ con eigenvalor $-m^2 j(j+1)$ son los Casimir del grupo; por ello una partícula masiva es una representación irreducible del grupo de Poincaré con etiquetas $|m, j; p^\mu, j_a\rangle$.

Las partículas con masa cero tienen $p^\mu = (|\vec{p}|, \vec{p})$ y W^μ con eigenvalor λp^μ , donde $\lambda = \vec{j} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$ es la helicidad. Los estados quedan etiquetados por $|0, 0; p^\mu, \lambda\rangle \equiv |p^\mu, \lambda\rangle$, y resulta que λ debe tomar valores enteros o semienteros, $\lambda \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$.

Para la supersimetría $\mathcal{N} = 1$, $C_1 = P^\mu P_\mu$ continúa siendo un buen Casimir, pero $C_2 = W^\mu W_\mu$ deja de serlo. Ocurre que se pueden tener partículas con distinto espín en un mismo multiplete. Para obtener un nuevo Casimir se define

$$\begin{aligned} B_\mu &\equiv W_\mu - \frac{1}{4} \bar{Q}_\alpha (\bar{\sigma}_\mu)^{\alpha\beta} Q_\beta, & C_{\mu\nu} &\equiv B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu, \\ \tilde{C}_2 &\equiv C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.205)$$

Antes de presentar el arreglo de supermultipletes, conviene revisar otra propiedad importante de la teoría supersimétrica y esta es la igualdad entre el número de bosones y fermiones. Para ver ello definimos el operador de número fermiónico $(-1)^F$, tal que

$$(-1)^F |B\rangle = |B\rangle, \quad (-1)^F |F\rangle = -|F\rangle. \quad (3.206)$$

Este nuevo operador anticonmuta con Q_α :

$$(-1)^F Q_\alpha |F\rangle = (-1)^F |B\rangle = |B\rangle = Q_\alpha |F\rangle = -Q_\alpha (-1)^F |F\rangle \Rightarrow \{(-1)^F, Q_\alpha\} = 0. \quad (3.207)$$

El siguiente aspecto es considerar la traza

$$\text{Tr}((-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\}) = \text{Tr} \left(\underbrace{(-1)^F Q_\alpha \bar{Q}_\beta}_{\text{anticonmutan}} + \underbrace{(-1)^F \bar{Q}_\beta Q_\alpha}_{\text{perm. cíclica}} \right) = 0. \quad (3.208)$$

Ahora, haciendo uso de la relación $\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu$, encontramos que

$$\text{Tr}((-1)^F \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\}) = \text{Tr}((-1)^F 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu) = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} p_\mu \text{Tr}((-1)^F), \quad (3.209)$$

donde P^μ ha sido reemplazado con los eigenvalores de un estado específico. La conclusión es que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}((-1)^F) = \sum_{\text{bosones}} \langle B|(-1)^F|B\rangle + \sum_{\text{fermiones}} \langle F|(-1)^F|F\rangle \\ &= \sum_{\text{bosones}} \langle B|B\rangle - \sum_{\text{fermiones}} \langle F|F\rangle = n_B - n_F, \end{aligned} \quad (3.210)$$

mostrando que el número de bosones, n_B , y el número de fermiones, n_F , es el mismo.

Pasemos a visualizar el arreglo en supermultipletes de la teoría. Puede tomarse un sistema coordinado en el que los estados de partículas sin masa posean valores propios $p^\mu = (E, 0, 0, E)$. Para estos estados los casimir $C_1 = P^\mu P_\mu$ y $\tilde{C}_2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}$ son cero. Consideremos el álgebra actuando en el estado $|p^\mu, \lambda\rangle$

$$\{Q_\alpha, \hat{Q}_\beta\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu = 2E(\sigma^0 + \sigma^3)_{\alpha\beta} = 4E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\alpha\beta}, \quad (3.211)$$

lo que implica que Q_2 es cero en la representación

$$\langle p^\mu, \lambda | \{Q_2, \bar{Q}_2\} = 0 \Rightarrow \bar{Q}_2 |p^\mu, \lambda\rangle = Q_2 |p^\mu, \lambda\rangle = 0. \quad (3.212)$$

De la misma forma puede encontrarse un elemento $|p^\mu, \lambda\rangle$ tal que $Q_1 |p^\mu, \lambda\rangle = 0$. De las relaciones de conmutación vistas, (3.196), encontramos que

$$[W_\mu, \bar{Q}^\alpha] = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu[M^{\rho\sigma}, \bar{Q}^\alpha] = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu(\bar{\sigma}^{\rho\sigma})^\alpha_\beta\bar{Q}^\beta, \quad (3.213)$$

y con la definición de W_μ , en esta representación

$$[W_0, \bar{Q}^\alpha] |p^\mu, \lambda\rangle = -\frac{i}{8}\epsilon_{03jk}P^3([\bar{\sigma}^j, \sigma^k]\bar{Q})^\alpha |p^\mu, \lambda\rangle = -\frac{1}{2}p^3(\sigma^3\bar{Q})^\alpha |p^\mu, \lambda\rangle, \quad (3.214)$$

con lo que, recordando que $p^3 = -p_0$ y para representaciones sin masa $W_0 |p^\mu, \lambda\rangle = \lambda p_0 |p^\mu, \lambda\rangle$,

$$W_0\bar{Q}^2 |p^\mu, \lambda\rangle ([W_0, \bar{Q}^2] + \bar{Q}^2\lambda p_0) |p^\mu, \lambda\rangle = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)p_0\bar{Q}^2 |p^\mu, \lambda\rangle. \quad (3.215)$$

Así que $\bar{Q}^2 = -\bar{Q}_1$ reduce la helicidad en $1/2$. El estado normalizado es entonces

$$\left|p^\mu, \lambda - \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{\bar{Q}_1}{\sqrt{4E}} |p^\mu, \lambda\rangle, \quad (3.216)$$

y no existen otros estados, pues esta expresión implica que $\bar{Q}_1 |p^\mu, \lambda - 1/2\rangle = 0$ y

$$Q_1 \left|p^\mu, \lambda - \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4E}}Q_1\bar{Q}_1 |p^\mu, \lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{4E}}(Q_1, \bar{Q}_1 - \bar{Q}_1Q_1) |p^\mu, \lambda\rangle = \sqrt{4E} |p^\mu, \lambda\rangle. \quad (3.217)$$

Así que tenemos dos estados en el multiplete, un bosón y un fermión, más conjugados:

$$|p^\mu, \pm\lambda\rangle, \quad |p^\mu, \pm(\lambda - 1/2)\rangle. \quad (3.218)$$

Existen, por ejemplo, multipletes quirales con $\lambda = 0, 1/2$, y multipletes vectoriales $\lambda = 1/2, 1$ [4, 86]:

$\lambda = 0$ escalar	$\lambda = \frac{1}{2}$ fermión	$\lambda = \frac{1}{2}$ fermión	$\lambda = 1$ bosón
squark	quark	fotino	fotón
sleptón	leptón	gluino	gluón
Higgs	Higgsino	Wino, Zino	W, Z

al igual que el graviton y su superpareja

$\lambda = \frac{3}{2}$ fermión	$\lambda = 2$ bosón
gravitino	graviton

En el caso de $m \neq 0$, en el sistema de centro de masa tenemos que $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ y los Casimir toman los valores

$$C_1 = P^\mu P_\mu = m^2, \quad \tilde{C}_2 = C_{\mu\nu}C^{\mu\nu} = 2m^4Y^iY_i, \quad (3.219)$$

donde Y_i denota el *superespín* [4]

$$Y_i = J_i - \frac{1}{4m} \bar{Q} \bar{\sigma}_i Q, \quad [Y_i, Y_j] = i\epsilon_{ijk} Y_k. \quad (3.220)$$

Los eigenvalores de $Y = Y^i Y_i$ son $y(y+1)$, así que se etiquetan las representaciones irreducibles con $|m, y\rangle$. De nuevo, las relaciones de anticonmutación para Q y \bar{Q} resultan fundamentales en el estudio:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\beta} P_\mu = 2m(\sigma^0)_{\alpha\beta} = 2m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\alpha\beta}. \quad (3.221)$$

Sea $|\Omega\rangle$ un estado aniquilado por $Q_{1,2}$, entonces

$$Y_i |\Omega\rangle = J_i |\Omega\rangle - \frac{1}{4m} \bar{Q} \bar{\sigma}_i Q |\Omega\rangle = J_i |\Omega\rangle, \quad (3.222)$$

es decir, para $|\Omega\rangle$, el espín y el superespín coinciden. Luego para m y y dados

$$|\Omega\rangle = |m, j = y; p^\mu, j_3\rangle. \quad (3.223)$$

Podemos obtener el resto del multiplete supersimétrico mediante las siguientes relaciones de conmutación

$$[Q_\alpha, J_i] = \frac{1}{2} (\sigma_i)_\alpha^\beta Q_\beta, \quad [J_i, \bar{Q}^\alpha] = -\frac{1}{2} (\sigma_i)^\alpha_\beta \bar{Q}^\beta. \quad (3.224)$$

Con las cuales deducimos los operadores para aumentar o decrecer en j_a :

$$a_1^\dagger |j_3\rangle \equiv \frac{\bar{Q}^1}{\sqrt{2m}} |j_3\rangle = |j_3 - 1/2\rangle, \quad a_2^\dagger |j_3\rangle \equiv \frac{\bar{Q}^2}{\sqrt{2m}} |j_3\rangle = |j_3 + 1/2\rangle. \quad (3.225)$$

Además podemos derivar las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} [J^2, \bar{Q}^\alpha] &= \frac{3}{4} \bar{Q}^\alpha - (\sigma_i)^\alpha_\beta \bar{Q}^\beta J_i, \\ [J_3, a_1^\dagger a_2^\dagger] &= [J^2, a_1^\dagger a_2^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.226)$$

Para estudiar el caso $y = 0$ definamos los operadores $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, que incrementa/decrece la proyección del espín en z en 1 unidad mientras deja el espín total inalterado. Usando las ecuaciones previas y el estado $|\Omega\rangle = |m, j = 0; j_a = 0\rangle$ observamos que

$$J^2 a_1^\dagger |\Omega\rangle = \frac{3}{4} a_1^\dagger |\Omega\rangle - a_2^\dagger J_- |\Omega\rangle - a_1^\dagger J_3 |\Omega\rangle \equiv j(j+1) \bar{a}_1^\dagger |\Omega\rangle. \quad (3.227)$$

Luego a_1^\dagger tiene $j = 1/2$ y puede verse que tiene $j_3 = -1/2$. Igualmente, $a_2^\dagger |\Omega\rangle = |m, 1/2; 1/2\rangle$.

Para $y = 0$ tenemos los estados

$$|\Omega\rangle = |m, j = 0; p^\mu, j_3 = 0\rangle,$$

$$\begin{aligned} a_{1,2}^\dagger |\Omega\rangle &= |m, j = 1/2; p^\mu, j_3 = \pm 1/2\rangle, \\ a_2^\dagger a_1^\dagger |\Omega\rangle &= -a_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle = |m, j = 0; p^\mu, j_3 = 0\rangle. \end{aligned} \quad (3.228)$$

Por otro lado, consideremos que $y \neq 0$. En este caso el doblete $(a_1^\dagger, a_2^\dagger)$ actuando en $|\Omega\rangle$ se comporta como una combinación de dos espines, $1/2$ y j . Esto otorga una combinación lineal de dos posibles espines totales $j + 1/2$ y $j - 1/2$ con coeficientes de Glebsch-Gordan k_i

$$\begin{aligned} a_2^\dagger |\Omega\rangle &= k_1 |m, j = y + 1/2; p^\mu, j_3 + 1/2\rangle + k_2 |m, j = y - 1/2; p^\mu, j_3 + 1/2\rangle, \\ a_1^\dagger |\Omega\rangle &= k_3 |m, j = y + 1/2; p^\mu, j_3 - 1/2\rangle + k_4 |m, j = y - 1/2; p^\mu, j_3 - 1/2\rangle. \end{aligned} \quad (3.229)$$

y donde seguimos conservando las relaciones $a_1^\dagger |j_3\rangle = |j_3 - 1/2\rangle$ y $a_2^\dagger |j_3\rangle = |j_3 + 1/2\rangle$. En total, tenemos

$$\underbrace{2 \cdot |m, j = y; p^\mu, j_3\rangle}_{(4y+2) \text{ estados}}, \quad \underbrace{1 \cdot |m, j = y + 1/2; p^\mu, j_3\rangle}_{(2y+2) \text{ estados}}, \quad \underbrace{1 \cdot |m, j = y - 1/2; p^\mu, j_3\rangle}_{(2y) \text{ estados}}, \quad (3.230)$$

en el multiplete $|m, y\rangle$, que verifica la misma cantidad de estados fermiónicos y bosónicos. Observar que en el multiplete los valores de m y y están fijos mientras son los valores de j los que cambian y definen el estado, de aquí el comentario que hemos hecho referente a que en una teoría supersimétrica estados de diferente espín pueden pertenecer a un mismo multiplete.

3.7. SYM $\mathcal{N} = 4$

Con el conocimiento adquirido en este capítulo nos vemos en la posibilidad de elaborar sobre una de las teorías más relevantes para la física y en particular para el estudio de la correspondencia holográfica. Esta es la llamada teoría de norma supersimétrica de Yang-Mills con grupo de norma $SU(N)$. Los ingredientes a considerar son un campo de Yang-Mills $(A_\mu(x))_{a\bar{a}}$, $a \in \{1, \dots, N\}$, seis campos escalares reales sin masa en la representación adjunta de $SU(N)$, $(\Phi^i(x))_{a\bar{a}}$ con $i \in \{1, \dots, 6\}$ y cuatro espinores de Weyl sin masa en la representación adjunta de $SU(N)$, $(\Psi^f(x))_{a\bar{a}}$, $f \in \{1, \dots, 4\}$. Los campos escalares se mezclan entre sí bajo el grupo de rotaciones $SO(6)$, mientras que los campos espinoriales lo hacen bajo el grupo $SU(4)$, dado que estos grupos resultan isomorfos podemos considerar solo una copia de $SO(6) \approx SU(4)$ como simetría interna global.

Para implementar el grupo de simetría $SU(N)$ se hace uso de la ya reconocida derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$:

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi^i &= \partial_\mu \Phi^i + i[A_\mu, \Phi^i], \\ D_\mu \Psi^f &= \partial_\mu \Psi^f + i[A_\mu, \Psi^f]. \end{aligned} \quad (3.231)$$

El lagrangiano de la teoría esta dado por la siguiente expresión [62]

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left(-\frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_{YM}}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_i D_\mu \Phi^i D^\mu \Phi^i - \sum_f i \bar{\Psi} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \Psi^f \\
& + \sum_{i,f,f'} g_{YM} C_{ff'}^i \Psi^f [\Phi^i, \Psi^{f'}] + \sum_{i,f,f'} g_{YM} \bar{C}_{ff'}^i \bar{\Psi}^f [\Phi^i, \bar{\Psi}^{f'}] + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{i,i'} [\Phi^i, \Phi^{i'}]^2 \Big),
\end{aligned} \tag{3.232}$$

donde g_{YM} es el acoplamiento de Yang-Mills, y θ es el ángulo de instantones, que multiplica una derivada total y solo se vuelve relevante en topologías no triviales [32]. Los $C_{ff'}^i$, $\bar{C}_{ff'}^i$ son coeficientes de Gledsch-Gordan relacionados con las matrices de Dirac para $SU(4)$.

La supersimetría, por otro lado, viene dada por cuatro supercargas Q_α^f , $f = 1, 2, 3, 4$ de ahí la denominación $\mathcal{N} = 4$ en el nombre de la teoría. Estas supercargas, según lo revisado en la sección anterior, cambian los estados bosónicos por fermiónicos, y viceversa; en esta ocasión la mezcla de los campos está dada por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\delta \Phi^i(x) &= \bar{\epsilon}^f C_{ff'}^i \Psi^{f'}(x) \equiv \bar{\epsilon}^f [Q^f, \Phi^i(x)], \\
\delta \Psi^f(x) &= \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}) \sigma^{\mu\nu} \epsilon^f + [\Phi^i(x), \Phi^{i'}(x)] i \sigma^2 C_{ff'}^{ii'} \epsilon^{f'} \equiv \{Q^{f'}, \Psi^f\} \epsilon^{f'}, \\
\delta \bar{\Psi}^f(x) &= \bar{\epsilon}^{f'} C_{f'f}^i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \Phi^i(x) \equiv \bar{\epsilon}^{f'} \{Q^{f'}, \bar{\Psi}^f\}, \\
\delta A_\mu(x) &= \epsilon^f \sigma_\mu \bar{\Psi}^f(x) \equiv \epsilon^f [Q^f, A_\mu(x)].
\end{aligned} \tag{3.233}$$

Observemos que todos los campos en la teoría quedan emparentados entre sí por la supersimetría y forman un solo multiplete vectorial $\mathcal{N} = 4$. A diferencia de la supersimetría $\mathcal{N} = 1$ vista anteriormente, esta supersimetría extendida $\mathcal{N} > 1$ permite a los campos tener más de una superpareja según que supercarga se esté considerando.

Puede mostrarse que la constante de acoplamiento g_{YM} no corre con la energía, otorgando una teoría invariante bajo reescalamientos a nivel cuántico y clásico, [62]. SYM $\mathcal{N} = 4$ es entonces invariante bajo el grupo conforme.

Pero, además, debemos poseer invariancia bajo las transformaciones generadas por las cuatro supercargas Q^f y sus conjugados complejos \bar{Q}^f con los generadores bosónicos, bajo las relaciones de conmutación y anticonmutación que ya conocemos [62]:

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha^f, \bar{Q}_{\beta f'}\} &= 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \delta_{f'}^f \\
\{Q_\alpha^f, Q_\beta^{f'}\} &= 0 = \{\bar{Q}_\alpha^f, \bar{Q}_\beta^{f'}\}, \quad [P^\mu, Q_\alpha^f] = 0 = [P^\mu, \bar{Q}_\alpha^f], \\
[M^{\mu\nu}, Q_\alpha^f] &= (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^f.
\end{aligned} \tag{3.234}$$

Al incorporar los generadores de dilataciones, D , y de transformaciones especiales K_μ , al superálgebra, se requieren nuevos generadores fermiónicos con la finalidad de cerrar el álgebra. Éstos son S_α^f y \bar{S}_β^f , conocidos como *supercargas conformes*. Además, figuran los generadores bosónicos R_A , $A \in \{1, \dots, 15\}$ en el álgebra de $SU(4) \approx SO(6)$, que se conocen como cargas R y rotan a la supercargas entre sí.

Los conmutadores no nulos de este superálgebra conforme son

$$\begin{aligned}
[D, Q_\alpha^f] &= -\frac{i}{2}Q_\alpha^f, & [K^\mu, Q_\alpha^f] &= (\sigma^\mu)_\alpha^\beta \bar{S}_\beta^f \\
[D, S_\alpha^f] &= \frac{i}{2}S_\alpha^f, & \{S_\alpha^f, \bar{S}_\beta^{f'}\} &= 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu K_\mu \delta_{f'}^f \\
[P^\mu, S_\alpha^f] &= -(\sigma^\mu)_\alpha^\beta \bar{Q}_{\beta f}, & \{S_\alpha^f, S_\beta^{f'}\} &= 0 = \{Q_\alpha^f, \bar{S}_\beta^{f'}\} \\
\{Q_\alpha^f, S_\beta^{f'}\} &= \epsilon_{\alpha\beta} \left(\delta_{f'}^f D + \sum_A (R_A)_{f'}^f \right) + \frac{1}{2} \delta_{f'}^f M_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}, & [R_A, R_B] &= i f_{ABC} R_C \\
[R_A, Q^f] &= R_A^{f'} Q^{f'}, & [R_A, \bar{S}^f] &= R_A^{f'} \bar{S}^{f'}
\end{aligned} \tag{3.235}$$

más sus relaciones conjugadas. Esta estructura se conoce como *álgebra superconforme* $\mathcal{N} = 4$ en $3 + 1$ dimensiones y se denota por $SU(2,2|4)$.

El subgrupo $SU(4)_R \sim SO(6)_R$ se conoce como simetría R, y se caracteriza por ser un grupo de simetría global interna que rota las supercargas y supercargas conformes entre sí.

Los elementos hasta aquí revisados constituyen el espectro básico de ideas concernientes a la relatividad general con el que nos permitiremos seguir adelante. En el siguiente capítulo haremos lo propio con los conceptos de la teoría cuántica de campos que creemos necesarios para el correcto entendimiento de la correspondencia holográfica y la consecuente construcción del modelo de superconducción holográfica.

Para concluir con este capítulo discutamos de forma breve las similitudes y diferencias entre la teoría supersimétrica que hemos presentado, SYM $\mathcal{N} = 4$, y la cromodinámica cuántica, esto con la finalidad de motivar un estudio mucho más profundo de esta teoría supersimétrica y que esta situación contribuya a obtener información de una teoría fuertemente acoplada, como la cromodinámica cuántica, inaccesibles por métodos perturbativos.

Por un lado tenemos que la cromodinámica cuántica es una teoría asintóticamente libre, confinada a bajas energías, con partículas masivas y quarks, siendo una teoría no supersimétrica. En cambio, SYM $\mathcal{N} = 4$ es una teoría conforme, desconfiada, sin escala de masa y sin quarks. Ambas poseen un grupo de norma $SU(N)$, siempre que N sea el número de colores. Igualmente ambas teorías poseen una simetría interna global, pero en el caso de la cromodinámica esta simetría es $U(1)_{\text{bariónico}}$ y para SYM $\mathcal{N} = 4$ es $SU(4) \sim SO(6)$.

Este compendio de diferencias se reduce notablemente cuando consideramos a ambas teorías con una temperatura finita $T > \Lambda_{QCD}$. En concreto, ambas teorías pasan a estar desconfiadas, en SYM $\mathcal{N} = 4$ la simetría conforme se rompe, al igual que la supersimetría.

Como desarrollaremos en breve, la correspondencia holográfica nos otorgará una forma de entender a la teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ en función de una teoría de gravedad, de modo que obtendremos una herramienta para rescatar información de esta teoría supersimétrica y que en última instancia puede utilizarse para ganar intuición en problemas vigentes de la cromodinámica.

Capítulo 4

Superconductividad

En 1911, al estudiar las propiedades de materiales sometidos a una baja temperatura, $T < 10K$, el físico Kamerlingh Onnes y su grupo de trabajo descubrieron que la resistencia eléctrica del mercurio tendía a cero por debajo de los 4,2 K. Esta fue la primera observación del fenómeno de superconductividad [102].

Siendo más específicos, los materiales superconductores son aquellos que por debajo de cierta temperatura, llamada *temperatura crítica*, transitan a un estado de superconducción caracterizado por dos propiedades esenciales: primero, no ofrecen resistencia al paso de corriente eléctrica. Cuando la resistencia se vuelve cero, la corriente puede conducirse dentro del material sin disipación energética. Segundo, el material superconductor introducido en un campo magnético externo verá que las líneas de campo no pueden penetrar el material. Esta expulsión del campo magnético es conocido como efecto Meissner.

La superconducción acarrea un interés tanto teórico como práctico, sin embargo, no es raro encontrar que mucha investigación entorno a este tema se encuentra disperso en varias clases de materiales que no siempre comparten elementos metodológicos [56]. Por ello se hace necesario estudiar las similitudes entre los distintos materiales para que sus aplicaciones particulares, que si bien extremadamente importantes, conlleven a una comprensión general del fenómeno. Veremos que esencialmente los materiales superconductores se dividen en aquellos convencionales y no convencionales, donde en la segunda categoría se encuentran los superconductores de alta temperatura en los que tenemos especial interés.

Desarrollemos las ideas hasta aquí planteadas dentro de este capítulo y veamos cuales son los conceptos necesarios dentro del fenómeno de superconducción que deberán ser traducidos en el modelos de superconducción holográfica.

4.1. Teorías de Ginzburg-Landau y BCS.

Como comentábamos antes, los superconductores son materiales con la capacidad de entrar en un estado de superconducción al disminuir la temperatura por debajo de un valor específico, T_c , que llamaremos *temperatura crítica* [102]. Este estado de superconducción se caracteriza esencialmente por dos hechos experimentales; el primero de ellos, y al que debe su nombre, es la ausencia de resistividad, y en consecuencia su infinita conductividad, mientras que el segundo se liga al comportamiento bajo un campo magnético externo cuyas líneas de campo son incapaces de introducirse en el material cuando este se encuentra en su estado de superconducción [71]. Este efecto es conocido como de Meissner-Ochsenfeld y establece la importancia de examinar al sistema bajo un campo magnético y relacionar a las distintas variables con la magnitud del mismo. En breve veremos que al igual que la temperatura, el campo magnético condiciona el estado superconductor por debajo de un valor crítico, y más aún, caracteriza a los propios superconductores según su orden bajo este cambio de fase.

La visión fenomenológica otorgada por la teoría de Ginzburg-Landau [45] describe de forma macroscópica los materiales superconductores cerca del valor crítico de temperatura haciendo uso de pocos grados de libertad. Inspiró su construcción en la teoría desarrollada por los hermanos London [64], en la que consideraron un material en el que cohabitaban dos clases de portadores de carga, una densidad n_n de electrones normales y una n_s de superportadores, con velocidades v_n y v_s respectivamente. Se postuló que dichas densidades satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\frac{d\vec{J}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}, \quad \vec{J}_s = -en_s v_s, \quad (4.1)$$

$$\vec{J}_n = \sigma_n \vec{E}, \quad \vec{J}_n = -en_n v_n. \quad (4.2)$$

La primera de estas ecuaciones, “primera ecuación de London”, no es más que la consecuencia de aplicar la segunda ley de Newton a un conjunto de partículas libres con carga $-e$. La segunda y más conocida ecuación de London involucra al campo magnético externo y establece que

$$\nabla \times \vec{J}_s = -\frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}. \quad (4.3)$$

Observar que en cada caso se supone a la densidad de portadores y superportadores como constante, restringiendo el estudio para un campo magnético a su vez invariable. Acotemos en este momento la relevancia de considerar un campo magnético arbitrario, y hagámoslo trayendo a cuenta la clasificación de superconductores que se puede establecer. Decimos que un superconductor es de tipo I si el material en su fase superconductora transita a su fase normal en un cambio de fase de primer orden según se incrementa el valor de campo magnético circundante por encima de un valor crítico B_c [97]. En cambio, un superconductor de tipo II estará en presencia de dos valores críticos en el espectro de magnitud del campo magnético [1]. La fase superconductora de esta clase de superconductores existirá por debajo de un primer

valor B_{c1} , al incrementar el campo apenas por encima de este primer valor peculiar se empezará a formar en el sistema una red de vórtices donde los superportadores danzan alrededor de un núcleo de portadores normales, a estos vórtices se los conoce como de Abrikosov. En esta región el diamagnetismo perfecto del material se pierde y la resistividad hace lo propio por encima de un segundo valor crítico B_{c2} , tornando el sistema a la fase de completa normalidad, y estableciendo un cambio de fase de segundo orden en función del campo magnético. En cualquier caso se observa experimentalmente que la magnitud de los valores críticos en la región de temperatura crítica tiene una dependencia de la forma:

$$B_c \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right). \quad (4.4)$$

La extensión que otorga la teoría de Ginzburg-Landau es la capacidad de tomar en cuenta una densidad de superportadores variable e introduce un parámetro de orden

$$\Psi(\vec{r}) = \sqrt{n_s(\vec{r})}e^{i\varphi(\vec{r})}, \quad (4.5)$$

tal que

$$|\Psi|^2 = n_s, \quad (4.6)$$

donde $\varphi(\vec{r})$ es una fase global que ignoraremos en adelante. Con base en la teoría de Landau respecto a las transiciones de fase de segundo orden, la teoría de Ginzburg-Landau propone que la diferencia de densidad de energía libre entre la fase de superconducción y la fase normal obedece la siguiente ecuación

$$\Delta f = \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\Psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m} \left| \left(\Delta - \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (4.7)$$

con $\Delta f = f_{sc} - f_n$ como la diferencia entre la densidad de energía libre entre fases, y α y β funciones arbitrarias dependientes de la temperatura.

Mediante la restricción a un campo magnético y gradientes despreciables encontramos que

$$\Delta f = \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4. \quad (4.8)$$

Expresión que encuentra su mínimo en

$$|\Psi_{min}| = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (4.9)$$

y que obliga a la diferencia de energía a situarse siempre por encima de un valor específico, $\Delta f_{min} = -\alpha^2/2\beta$ [27]. A dicho valor particular lo podemos vincular con un valor de campo magnético específico, B_c , que será el valor crítico buscado pues por encima de tal valor le resulta más rentable al sistema entrar en su fase normal.

Manipulaciones adicionales a la ecuación maestra (4.7) permite recuperar la segunda ecuación de London, además, mediante el estudio del comportamiento de las funciones α y β respecto a la temperatura se obtiene la dependencia del parámetro de orden:

$$\Psi \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}, \quad T < T_c, \quad (4.10)$$

resultado confirmado experimentalmente y secundado por la visión microscópica de la teoría BCS [8].

Entre lo ya visto y solo como último comentario a la teoría de Ginzburg-Landau, se rescata su capacidad para distinguir entre los superconductores de tipo I y tipo II según el ajuste de los grados de libertad que hemos establecido.

Previo a la sutil imagen que se pretende dar de la teoría BCS, tomaremos un breve espacio para introducir el concepto de líquido de Fermi. Como hemos hecho notar, la superconductividad es un fenómeno íntimamente ligado al comportamiento de los electrones en el material de estudio. La teoría del mar de Fermi es propiamente una concepción microscópica de las interacción de muchos electrones en un metal cuando se le somete a bajas temperaturas. Este es un problema de muchos cuerpos enfocado al caso fermiónico primeramente estudiado por Landau en 1957, propuesto especialmente para estudiar ${}^3\text{He}$, y rápidamente adaptado a otros sistemas similares y cuyos fundamentos ayudan en el entendimiento moderno de la superconductividad [56].

Tomando el hamiltoniano genérico

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{p},\sigma} \varepsilon_{\vec{p}} c_{\vec{p},\sigma}^\dagger c_{\vec{p},\sigma} + \mathcal{H}_{int}, \quad (4.11)$$

donde $c_{\vec{p},\sigma}^\dagger$ y $c_{\vec{p},\sigma}$ son operadores de aniquilación y creación fermiónicos, respectivamente, de una partícula con momento \vec{p} y espín σ . En sintonía, $\varepsilon_{\vec{p}} = E_{\vec{p}} - \mu$, con la energía cinética dada por $E_{\vec{p}} = p^2/(2m)$ y μ el potencial químico del material.

El término de interacción puede darse en función de aspectos sumamente generales, pero al igual que el desarrollo presentado por Landau y Lifshitz conviene pensar en un potencial de interacción débil, la forma del mismo es irrelevante para nuestra discusión. Algo que sí conviene poner en tinta es la consecuencia que acarrea tomar el principio de exclusión de Pauli para este sistema a baja temperatura; el estado base se obtiene llenando los niveles de energía hasta μ . Esto define una esfera en el espacio de momentos de radio $p_F = \sqrt{2m\mu}$, denominada esfera de Fermi o superficie de Fermi del sistema. Considerando una esfera de Fermi llena y un electrón adicional de momento \vec{p} , con $p > p_F$, encontramos un estado excitado con

$$E_p - E_F = \frac{p^2}{2m} - E_F \approx \frac{p_F}{m}(p - p_F), \quad (4.12)$$

según el valor de p no se aleje demasiado de la superficie de Fermi, $p - p_F \ll p_F$. El efecto de considerar un término de interacción débil es corregir la ecuación anterior a la forma

$$E_p - E_F = \frac{p_F}{m^*}(p - p_F), \quad (4.13)$$

conservando la linealidad con respecto a $p - p_F$ y donde m^* es la masa efectiva. Con esta relación de dispersión se obtiene una densidad de estados

$$g(E_F) = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3}. \quad (4.14)$$

Cantidad que es determinada por la masa efectiva y que es capaz de explicar la diferencia experimental del coeficiente del calor específico cuando se considera un gas ideal [36].

Landau asumió que incluso para interacciones fuertes el espectro continúa siendo según lo dictado por (4.13). A estas excitaciones se les llama cuasipartículas debido a su extrapolación desde partículas a la correlación de movimiento del líquido entero cuando la interacción aumenta. Dicho de otra forma, al encender de forma paulatina los acoplamiento entre partículas del sistema, los estados de la teoría libre transitan suavemente a estados de la teoría interactuante, en el proceso los números cuánticos de los estados libres permanecen constantes. A estos estados son a los que hemos denominado cuasipartículas. La implicación trascendente de este recurso es tener la capacidad de definir la esfera de Fermi en la teoría interactuante de forma estable, esto garantiza que las cuasipartículas están bien definidas y que la física de bajas energías del sistema puede determinarse por la excitación de éstas cerca de la superficie de Fermi [2].

La estructura teórica más exitosa para describir la naturaleza superconductor en los materiales fue publicada en 1957 por los físicos estadounidenses John Bardeen, Leon Cooper y Robert Schrieffer [8]. Partiendo de una concepción microscópica de primeros principios lograron encajonar la mayoría de hechos experimentales que muestra la fase superconductor y que ya hemos mencionado, como la existencia de una temperatura crítica para el cambio de fase y el efecto Meissner-Ochsenfeld. Además, es capaz de incluir en la descripción al efecto isotópico siendo de hecho parte fundamental en la construcción de la teoría, dicho efecto produce una variación en las cantidades que caracterizan la transición de fase de un material superconductor, tales como la temperatura crítica o el campo magnético crítico, en función de la masa de los isótopos en el metal [70]:

$$T_c \propto M^{-1/2}, \quad (4.15)$$

con M la masa de la red cristalina de iones. Entre más pesada dicha red, más difícil entrar en la fase superconductor, poniendo en relevancia la influencia propia del material en la interacción entre electrones. En efecto, la visión pictórica dada por Fröhlich establece que los electrones de conducción al pasar por la configuración iónica del metal, atraerá a los iones positivos en su vecindad formando un entorno de carga positiva que atraerá un segundo electrón, estableciendo una interacción implícita para esto dos electrones. Una imagen análoga es pensar que la deformación de la red por parte del electrón crea un fonón que media entre los electrones. El Hamiltoniano que describe esta interacción entre electrones y fonones es [41]

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{p}, \sigma} \varepsilon_{\vec{p}} c_{\vec{p}, \sigma}^\dagger c_{\vec{p}, \sigma} + \sum_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}} \left(A_{\vec{p}}^\dagger A_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}, \sigma, \sigma'} V_{\vec{p}, \vec{q}} c_{\vec{p}' - \vec{q}, \sigma}^\dagger c_{\vec{p} + \vec{q}, \sigma}^\dagger c_{\vec{p}, \sigma} c_{\vec{p}', \sigma} + \dots, \quad (4.16)$$

el primer término representa el comportamiento de los cuasielectrones libres, el segundo el de los fonones libres, mientras que el tercero muestra como es la interacción entre ellos. Aquí, $\varepsilon_{\vec{p}}$ es la energía de los cuasielectrones, $\omega_{\vec{p}}$ es la frecuencia de los fonones y $V_{\vec{p}, \vec{q}}$ es su interacción.

Una de las suposiciones del modelo, tomada de la teoría del líquido de Fermi, es que los cuasielectrones más importantes para llevar al material a su fase superconductor son aquellos con energías acotadas apenas por encima de la superficie de Fermi,

$$|\varepsilon_{\vec{p}}| < \omega_D, \quad (4.17)$$

con ω_D la frecuencia típica de los fonones. Con esta suposición el efecto neto del término de interacción en (4.16) es que las cuasipartículas se atraen entre sí [27]

Un segundo elemento importante de la teoría es la observación hecha por Cooper en 1956 al mostrar que dos electrones fuera de la esfera de Fermi sujetos a una interacción atractiva entre ellos formará un estado ligado sin considerar que tan débil puede ser la interacción. En otras palabras, siempre que se pueda establecer una interacción atractiva arbitraria entre un electrón con momento \vec{p} y espín \uparrow , y otro con $|\!-\vec{p}, \downarrow\rangle$, estos formarán un estado ligado conocido como par de Cooper [22].

Este comportamiento de emparejamiento puede generalizarse a una gran cantidad de electrones y tomar en consecuencia solo interacciones efectivas entre los pares de Cooper, es decir,

$$\mathcal{H}_{par} = \sum_{\vec{p}, \sigma} \varepsilon_{\vec{p}} c_{\vec{p}, \sigma}^\dagger c_{\vec{p}, \sigma} + \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} V_{\vec{p}, \vec{p}'} c_{\vec{p}, \uparrow}^\dagger c_{-\vec{p}, \downarrow}^\dagger c_{-\vec{p}', \downarrow} c_{\vec{p}', \uparrow}. \quad (4.18)$$

El trabajar con este Hamiltoniano, de la mano de simplificaciones adecuadas y de la restricción a cuasipartículas cerca de la superficie de Fermi, conduce a los famosos resultados de la teoría tales como el valor de la temperatura crítica [27]

$$T_c \approx 0,56\Delta(0), \quad (4.19)$$

donde $\Delta(T = 0)$ es la brecha energética entre el estado base y el primer estado excitado a temperatura cero. Adicionalmente se obtiene el comportamiento de este parámetro de orden cerca de la temperatura crítica

$$\Delta(T \sim T_c) \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}, \quad (4.20)$$

resultado acorde con la dependencia establecida por la teoría de Ginzburg-Landau [56].

La teoría BCS consigue dar una explicación abrumadoramente exitosa al comportamiento de los superconductores convencionales, sin embargo deja fuera del marco a los superconductores hechos con base de aleaciones, cerámicas o fullerenos, y por supuesto, a los superconductores con una temperatura crítica superior a la de los metales comunes donde $T_c \sim 1 - 10K$ [56], que a partir de $T_c \sim 30K$ denominaremos superconductores de alta temperatura y que fueron primeramente observados en [92].

4.2. Superconductores de alta temperatura

Durante el año de 1986, los físicos J. Bednorz y K. Müller descubrieron que la temperatura crítica para entrar en la fase de superconducción de algunos materiales cerámicos rondaba los $35K$ [10], muy superior a la observada en años previos con otros materiales superconductores. El material cerámico que se utilizó en primera instancia fue el óxido de cobre con estructura de perovskita, i.e. un tipo de cuprato. De hecho, la mayoría de los superconductores de alta temperatura pertenece a esta clase de materiales, de modo que su estudio resulta conveniente para establecer generalidades en esta categoría de superconducción.

Los cupratos superconductores son materiales cuya constitución microscópica la establecen planos de óxido de cobre intercalados con de otro constituyente como el bario, estroncio o lantano. La superconductividad toma forma en las láminas de CuO_2 , mientras que las láminas adyacentes funcionan como proveedores de portadores de carga que sean requeridos. Uno hecho crucial determinado experimentalmente es que la relación entre la distancia entre las estructuras dos dimensionales del material y la temperatura crítica es inversa; otra característica del cuprato que influye en los parámetros de superconducción es el dopaje p del mismo. Un dopaje consiste en la anexión de impurezas al material, que en el caso de la denominación p , forman huecos de carga positiva. En el caso de los superconductores comunes la temperatura crítica varía de forma lineal con el parámetro p que caracteriza el dopaje, $T_c(p) \sim p$, en cambio, en los superconductores de alta temperatura la dependencia es cuadrática [73].

Esta dependencia de la temperatura crítica describe una campana como se muestra en la Fig.(4.1), donde observamos un valor para p donde el dopaje es óptimo, es decir, el superconductor alcanza una temperatura crítica máxima. En la figura también hemos añadido la conducta de otras fases del material, a un bajo dopaje el sistema se ubica en una fase antiferromagnética, que da paso a la fase superconductora al incrementar el dopaje, con la forma que ya hemos mencionado y que usualmente se denomina domo superconductor. En altos valores de dopaje, el material se comporta como líquido de Fermi y finalmente por encima del domo(*) superconductor encontramos la fase normal [73].

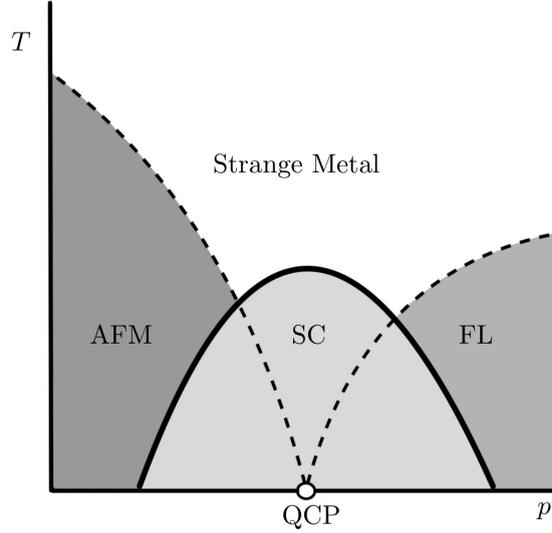


Figura 4.1: Diagrama de fase de un superconductor de alta temperatura. Se muestran las regiones correspondientes a la fase antiferromagnética, superconductora, de líquido de Fermi y de metal extraño. Imagen tomada de [27]

Uno de los modelos propuestos para dar explicación teórica a los cupratos superconductores es el *modelo espín-fermión*, una teoría cuántica de campos. Lo usaremos con la finalidad de mostrar las dificultades que acarrea la aplicación de física estándar en el problema, motivando la búsqueda de alternativas para dar respuesta al fenómeno. Donde una de esas alternativas es la correspondencia holográfica.

4.2.1. El modelo de Espín-Fermión

El modelo de espín-fermión es una teoría que pretende dar una descripción de la transición de fase entre el estado de líquido de Fermi y las fases antiferromagnéticas, en este sentido, la ambición de la teoría abarca la exposición de los superconductores de alta temperatura. La teoría considera como base los grados de libertad fermiónicos $c_{\vec{p}}$ de los electrones cerca de la superficie de Fermi, pero también introduce grados de libertad espinoriales, dado que se vuelven relevantes en la proximidad de la región de fase antiferromagnética. Estas fluctuaciones se consideran en la densidad $S_{\vec{p}}$ y son modos bosónicos en conjunto. El rol de estos modos resulta análogo al de los fonones en la teoría BCS.

El hamiltoniano de la teoría es

$$\mathcal{H}_{EF} = \sum_{\vec{p}, \alpha} G_0(\vec{p}, E) c_{\vec{p}, \sigma}^\dagger c_{\vec{p}, \alpha} + \sum_{\vec{p}} \chi_0^{-1}(\vec{p}, E) \vec{S}_{\vec{p}} \vec{S}_{-\vec{p}} + g \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \alpha, \alpha'} c_{\vec{p}+\vec{p}', \alpha}^\dagger \sigma_{\alpha\alpha'} c_{\vec{p}, \alpha'} \cdot \vec{S}_{-\vec{p}}, \quad (4.21)$$

donde $G_0(\vec{p}, E)$ es el propagador fermiónico libre, $\chi_0(\vec{k}, E)$ es el propagador libre espinorial y σ_i son las matrices de Pauli con α, α' como índices espinoriales. El primer término en 4.21 de la expresión hace referencia a los fermiones libres, el segundo a

los grados de libertad espinoriales libres y el tercero a la interacción espín-fermión. Uno de los principales reveses de la teoría es su predicción de un sistema fuertemente acoplado, esto puede observarse en la construcción del parámetro efectivo de interacción $\bar{g} = g^2\chi_0$, así mismo es posible construir el término energético v_F/ξ , donde ξ es la longitud de correlación entre espines que se obtiene de la función de correlación de dos puntos. De estas dos cantidades se obtiene la constante adimensional:

$$\lambda = \frac{3\bar{g}}{4\pi v_F \xi^{-1}}, \quad (4.22)$$

dicha cantidad es la constante de acomplamiento que reluce en los cálculos de valores de expectación. Para el caso de los cupratos, los hechos experimentales muestran que $\lambda \sim 2$ cerca del dopaje optimo, haciendo a la teoría fuertemente acoplada e imposibilitando aplicar métodos perturbativos.

Otra de las cuestiones que el modelo es incapaz de incorporar son a las cuasiparticulas, pues estas no se encuentran bien definidas en algunos puntos de la superficie de Fermi. Estos problemas invitan a completar el modelo o incluso tomar una segunda opinión fuera de los supuestos físicos usuales y es ahí donde la correspondencia holográfica entra en escena.

Capítulo 5

La correspondencia holográfica

La correspondencia holográfica se ha establecido como una de las teorías más prolíficas desde finales del siglo pasado. Fue publicada por el físico Juan Maldacena en el ocaño de 1997 y, desde entonces, a cosechado multitud de artículos y líneas de investigación entorno a ella.

Comenzaremos la discusión de la correspondencia holográfica presentando una imagen general de la teoría de cuerdas, en donde tiene su concepción, con particular interés en establecer una discusión entorno a la naturaleza de unos objetos propios e importantes de la teoría conocidos como D-branas, cuya naturaleza nos conducirá al enunciado principal de la correspondencia holográfica.

5.1. Aspector generales de teoría de cuerdas

Revisaremos a continuación los elementos de teoría de cuerdas que creemos suficientes para abordar la descripción de la correspondencia holográfica. Para esta empresa nos apoyaremos en el camino sugerido por [114].

Recordemos que una partícula relativista moviéndose en un espaciotiempo d dimensional, el movimiento queda determinado por las geodésicas de ese espaciotiempo. La acción relativista está dada por la integral del elemento de línea diferencial, ds , de la trayectoria seguida por la partícula, esto es:

$$S_0 = -\alpha \int ds, \tag{5.1}$$

con α una constante y considerando unidades naturales. Con la finalidad de que S_0 sea adimensional α debe ser una constante con unidades de *longitud*⁻¹, que en unidades naturales resulta proporcional a la masa de la partícula, sin pérdida de generalidad consideramos que la razón de proporcionalidad es la unidad. Además, consideremos que parametrizamos la trayectoria de la partícula de forma que el elemento está dado por

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu, \tag{5.2}$$

con $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ la métrica del espaciotiempo de fondo. Las funciones X^μ describen la trayectoria seguida por la partícula, un segmento unidimensional, de modo que puede quedar descrito por un parámetro real τ , resultando en la acción

$$S_0 = -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}, \quad (5.3)$$

donde $\dot{X}^\mu = \frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau}$. Esta acción es invariante ante reparametrizaciones, consecuencia de que el elemento de línea lo es también.

Dado que la acción involucra una raíz que podría complicar los cálculos que se pretendan obtener de ella, además de parecer incompatible con partículas de masa cero, resulta conveniente buscar otra acción que resulte equivalente a (5.3). Al involucrar un campo auxiliar $e(\tau)$ podemos obtener una acción más simple:

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{2} \int d\tau \left(e(\tau)^{-1} g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - m^2 e(\tau) \right). \quad (5.4)$$

Esta acción ya no incluye una raíz cuadrada y además deja de ser cero para el caso de $m = 0$. Resulta equivalente a la acción (5.3) al observar que la ecuación de movimiento para el campo $e(\tau)$ es [114]

$$e = \sqrt{\frac{-\dot{X}^2}{m^2}}. \quad (5.5)$$

que al sustituir en (5.4) permite recuperar justamente la expresión que tenemos en S_0 . Esta acción resulta invariante ante reparametrizaciones de τ [114], hecho que permite tomar $e(\tau) = 1$ como simplificación de la acción, pero no debe olvidarse la ecuación de movimiento para evitar la pérdida de información. La acción (5.4) pasa a ser

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{2} \int \left(g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - m^2 \right). \quad (5.6)$$

El momento canónico conjugado al campo $X^\mu(\tau)$ es

$$P^\mu(\tau) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} = \dot{X}^\mu(\tau), \quad (5.7)$$

en términos del Lagrangiano dado en \bar{S}_0 . Con esto observamos que la ecuación (5.5), considerando que $e(\tau) = 1$, no es más que la condición de capa de masa para una partícula de masa m :

$$P^\mu P_\mu + m^2 = 0. \quad (5.8)$$

Finalmente, para obtener geodésicas debemos de variar la acción (5.4) con respecto al campo X^μ e igualar a cero, con lo que obtenemos la siguiente ecuación [85]

$$-2\ddot{X}^\nu g_{\mu\nu}(X) - 2\partial_k g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^k \dot{X}^\nu + \partial_\mu g_{k\nu}(X) \dot{X}^k \dot{X}^\nu = 0 \quad (5.9)$$

expresión que podemos condensar en

$$\ddot{X}^\mu + \Gamma_{kl}^\mu \dot{X}^k \dot{X}^l = 0, \quad (5.10)$$

donde Γ_{kl}^μ son los símbolos de Christoffel. Estas son las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula libre moviéndose en un espaciotiempo arbitrario. Observar que el movimiento queda determinado por los símbolos de Christoffel, equivalentemente, por la geometría del espaciotiempo de fondo en concordancia con lo que sabemos de la teoría general de la relatividad.

A diferencia de la partícula relativista y de la teoría de campos que hemos abordado hasta ahora, la teoría de cuerdas es una teoría cuántica interactuante de objetos unidimensionales. Por ello buscamos generalizar lo que hemos aprendido sobre la acción de una partícula a un objeto extendido. La generalización de la acción $S_0 = -m \int ds$ para un objeto extendido en una dimensión sería

$$S_1 = -T_c \int d\mu, \quad (5.11)$$

con T_c la tensión de la cuerda, que tiene dimensión *masa/volumen*, y $d\mu$ el elemento diferencial de volumen dado por

$$d\mu = d^2\sigma \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta}(X))} \quad (5.12)$$

con $G_{\alpha\beta}$ la métrica inducida sobre la superficie que describe la cuerda al propagarse sobre el espaciotiempo de fondo, llamada *hoja de mundo*, descrita por

$$G_{\alpha\beta}(X) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} g_{\mu\nu}(X), \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (5.13)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espaciotiempo donde la cuerda se propaga.

Parametricemos la hoja de mundo, que es un objeto extendido en dos dimensiones, con las coordenadas $\sigma^0 = \tau$ y $\sigma^1 = \sigma$. El encaje de la cuerda en un espaciotiempo d dimensional está dado por los campos $X^\mu(\tau, \sigma)$. Si asumimos que σ es periódico entonces el encaje otorgará una cuerda cerrada en el espaciotiempo, en otro caso no veremos en presencia de una cuerda abierta.

Observemos que los campos $X^\mu(\tau, \sigma)$ describen la propagación y oscilaciones de la cuerda en el espaciotiempo de fondo y que esta propagación forma la hoja de mundo de la cuerda, tal como los campos $X^\mu(\tau)$ describían la propagación de una partícula misma que definía la línea de mundo.

Si asumimos que el espaciotiempo de fondo es un espacio de Minkowski, tendremos que [116]

$$G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu \eta_{\mu\nu} & \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu \eta_{\mu\nu} \\ \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu \eta_{\mu\nu} & \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu \eta_{\mu\nu} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

de modo que la acción (5.11) pasa a ser

$$S_{NG} = -T_c \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X}^2)(X'^2)}, \quad (5.15)$$

a esta acción se le conoce como la *acción de Nambu-Goto*. Usualmente se interpreta a esta acción como la medida del área de la hoja de mundo que construye la cuerda

propagándose, debido que las ecuaciones de movimiento se obtienen de minimizar esta acción podemos pensarlas como las ecuaciones que minimizan el área de la hoja de mundo de la cuerda.

Al igual que en el caso de la partícula relativista, podemos construir una acción equivalente (5.15) a nivel clásico al introducir un campo auxiliar, $h_{\alpha\beta}$:

$$S_P = -\frac{T_c}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}, \quad (5.16)$$

donde $h \equiv \det(h_{\alpha\beta})$. Esta acción se conoce como *acción de Polyakov*. Puede mostrarse la equivalencia a nivel clásico de esta acción con la acción de Nambu-Goto [114].

Si de nuevo consideramos que el espaciotiempo de fondo sea un espacio de Minkowski esperamos que la hoja de mundo conserve las simetrías del fondo, en particular la invariancia bajo Poincaré, i.e.

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = a_\nu^\mu X^\nu(\tau, \sigma) + b^\mu, \quad \delta h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = 0, \quad (5.17)$$

donde $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$, y b^μ es un desplazamiento constante. Esta es, en efecto, una simetría global vista desde la hoja de mundo pues las transformaciones no dependen de los parámetros τ ni σ . Pero además, la acción de Polyakov resulta invariante ante estas transformaciones [85].

En cuanto a simetrías locales, aquellas dependientes de las coordenadas de la hoja de mundo, la acción de Polyakov resulta invariante ante reparametrizaciones

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X'^\mu(\tau', \sigma'), \quad h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial f^\delta}{\partial \sigma^\beta} h'_{\gamma\delta}(\tau', \sigma'), \quad (5.18)$$

y ante transformaciones de Weyl [9]:

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X'^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma) \quad h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow h'_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = e^{2\phi(\sigma)} h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma). \quad (5.19)$$

Una de las consecuencias de tener invariancia bajo transformaciones de Weyl es que el tensor de energía-momento asociado, $T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T_c} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_P}{\delta h_{\alpha\beta}}$, tiene traza cero, $h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$.

Debido a que la hoja de mundo posee simetrías locales sabemos que la teoría tiene redundancia en sus grados de libertad, misma que debe sobrellevarse al fijar la norma. Lo primero que debemos notar es que como consecuencia de que la teoría es invariante ante reparametrizaciones y transformaciones de Weyl podemos fijar una norma en la que el campo auxiliar que hemos introducido en (5.16) sea Minkowski en dos dimensiones [9]. Debido a que las simetrías involucradas son locales, esta capacidad de tomar $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ es solo válida a nivel local y por lo general no puede extenderse a toda la hoja de mundo. Solo si la topología de la hoja de mundo carece de *huecos* [74] puede tomarse $h_{\alpha\beta}$ como globalmente plana en toda la hoja de mundo [85].

Utilizando la norma plana, i.e. $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, la acción de Polyakov puede escribirse como

$$S_P = \frac{T_c}{2} \int d\tau d\sigma \left[(\dot{X})^2 - (X')^2 \right]. \quad (5.20)$$

Supongamos que la topología de la hoja de mundo permite tomar una métrica intrínseca globalmente plana. Las ecuaciones de movimiento para los campos $X^\mu(\tau, \sigma)$ obtenidas de extremizar la acción (5.20) conducen a la siguiente relación [114]

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2)X^\mu - \left[T_c \int d\tau X' \delta X^\mu|_{\sigma=\pi} - T_c \int d\tau X' \delta X^\mu|_{\sigma=0} \right], \quad (5.21)$$

donde se ha considerado que la variación de $X^\mu(\tau, \sigma)$ sea cero en la frontera de τ , es decir, $\delta X^\mu|_{\partial\tau} = 0$. Los términos en la frontera de σ distinguen entre cuerdas cerradas o abiertas. Para cuerdas cerradas identificamos

$$X^\mu(\tau, \sigma + n\pi) = X^\mu(\tau, \sigma), \quad (5.22)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que en (5.21) los sumandos en la integral se anulen pues $\delta X(\tau, \sigma = 0) = \delta X(\tau, \sigma = \pi)$. Entonces tenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2)X^\mu(\tau, \sigma) = 0, \quad (5.23)$$

con las condiciones de frontera

$$X^\mu(\tau, \sigma + n\pi) = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (5.24)$$

Para cuerdas abiertas con condiciones de frontera de Neumann, es decir, $\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = 0$, tendremos que los sumandos en la integral de (5.21) nuevamente se anulan. Reencontramos que las ecuaciones de movimiento son

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2)X^\mu(\tau, \sigma) = 0, \quad (5.25)$$

con condiciones de frontera

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = 0. \quad (5.26)$$

Observar que estas condiciones son invariantes ante Poincaré pues

$$\partial_\sigma(X'^\mu)|_{\sigma=0,\pi} = \partial_\sigma(a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu)|_{\sigma=0,\pi} = a_\nu^\mu \partial_\sigma X^\nu|_{\sigma=0,\pi} = 0. \quad (5.27)$$

Finalmente, para cuerdas abiertas con condiciones de Dirichlet X^μ permanece constante en la frontera, esto es, $X^\mu(\tau, \sigma = 0) = X_0^\mu$ y $X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = X_\pi^\mu$. Esta igualdad vuelve a anular los sumandos en la integral de (5.21), de modo que las ecuaciones de movimiento vuelven a ser

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2)X^\mu(\tau, \sigma) = 0, \quad (5.28)$$

con condiciones de fronteras

$$X^\mu(\tau, \sigma = 0) = X_0^\mu, \quad X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = X_\pi^\mu. \quad (5.29)$$

Sin embargo, a diferencia de las condiciones de Neumann, estas condiciones de Dirichlet no preservan la invariancia bajo Poincaré:

$$(X'^\mu)|_{\sigma=0,\pi} = (a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu)|_{\sigma=0,\pi} = a_\nu^\mu X_{0,\pi}^\nu + b^\mu \neq X_{0,\pi}^\mu. \quad (5.30)$$

Notemos que podemos combinar las condiciones de Neumann y Dirichlet para una misma cuerda abierta, esto es, si tomamos las condiciones de frontera de Neumann para $p+1$ dimensiones en el espaciotiempo de fondo y condiciones de Dirichlet para las restantes $d-p+1$ conseguiremos satisfacer que los sumandos en (5.21) se anulen para toda $\mu \in \{0, \dots, d\}$ pero además notamos que los extremos de la cuerda viven en un objeto p dimensional del espaciotiempo, en el contexto de teoría de cuerdas decimos que viven en una D_p -brana.

Hemos visto que bajo las tres distintas condiciones de frontera las ecuaciones de movimiento son las mismas. Para obtener las ecuaciones de movimiento de la métrica intrínseca tomemos la variación de la acción (5.16), previo a fijar la norma plana, e igualemos a cero, lo que conduce a [9]

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\partial_\gamma X \cdot \partial_\delta + \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X = 0, \quad (5.31)$$

y fijando la norma de métrica intrínseca plana se obtienen las siguientes constricciones

$$0 = T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2), \quad 0 = T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X'. \quad (5.32)$$

Para resolver las ecuaciones de movimiento conviene introducir las coordenadas de cono de luz para la hoja de mundo

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma, \quad (5.33)$$

que implican

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-). \quad (5.34)$$

Las derivadas en este sistema coordenado se vuelven

$$\partial_+ \equiv \partial_{\sigma^+} = \frac{1}{2}(\partial_\tau + \partial_\sigma), \quad \partial_- \equiv \partial_{\sigma^-} = \frac{1}{2}(\partial_\tau - \partial_\sigma), \quad (5.35)$$

y la métrica pasa a ser

$$\eta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento $(\partial_\tau - \partial_\sigma^2)X^\mu = 0$ en las coordenadas del cono de luz son

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0, \quad (5.37)$$

mientras que las constricciones toman la forma

$$T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = 0, \quad T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0. \quad (5.38)$$

Estas son las tres ecuaciones de movimiento que se tienen que resolver.

La solución más general para los campos $X^\mu(\sigma^+, \sigma^-)$ está dada por una combinación lineal de dos funciones que dependen solamente de una coordenada en el cono de luz, $X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = X_D^\mu(\sigma^-) + X_I^\mu(\sigma^+)$, que en términos de nuestras coordenadas originales

pueden pensarse como ondas derechas e izquierdas propagándose, y mediante las que tendríamos

$$X^\mu = X_D^\mu(\tau - \sigma) + X_I^\mu(\tau + \sigma). \quad (5.39)$$

El siguiente paso es considerar las distintas condiciones de frontera que tenemos y expandir en modos. Para la cuerda cerrada, la condición $X^\mu(\tau, \sigma + \pi) = X^\mu(\tau, \sigma)$ otorga la siguiente expansión en modos

$$\begin{aligned} X_D^\mu &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{1}{2}l_c^2(\tau - \sigma)p^\mu + \frac{i}{2}l_c \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in\pi(\tau - \sigma)}, & n \in \mathbb{Z}, \\ X_I^\mu &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{1}{2}l_c^2(\tau + \sigma)p^\mu + \frac{i}{2}l_c \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-2in\pi(\tau + \sigma)}, & n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

con x_0^μ una constante que corresponde al centro de masa de la cuerda, p^μ otra constante que en este caso corresponde al momento total de la cuerda. α_n y $\bar{\alpha}_n$, son los modos constantes de la cuerda para cada $n \neq 0$, $l_c = cte$ es la longitud de la cuerda tal que $T = 1/(2\pi\alpha')$ con $\alpha' = l_c^2/2$.

Como X^μ debe ser real, i.e. $(X^\mu)^* = X^\mu$, tenemos que x^μ y p^μ deben ser reales, además de tener

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*, \quad \bar{\alpha}_{-n}^\mu = (\bar{\alpha}_n^\mu)^*. \quad (5.41)$$

La cuerda abierta con condiciones de frontera de Neumann implica que la derivada con respecto a σ del campo evaluada en $\sigma = 0, \pi$ sea cero, $\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma)|_{\partial\sigma} = 0$. La solución más general conduce a la siguiente expresión

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l_c \tau p^\mu + il_c \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \cos(m\sigma), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.42)$$

Para concluir, la cuerda abierta con condiciones de frontera de Dirichlet asume que los valores en la $\sigma = 0, \pi$ son constantes, $X^\mu(\tau, \sigma = 0) = X_0^\mu$ y $X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = X_\pi^\mu$, de modo que el campo queda dado por

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \frac{\sigma}{\pi}(x_\pi^\mu - x_0^\mu) + il_c \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \sin(m\sigma), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.43)$$

El Hamiltoniano está dado por

$$H = \int_{\sigma=0}^{\pi} d\sigma \left(\dot{X}_\mu P^\mu - \mathcal{L} \right), \quad (5.44)$$

donde P^μ es el momento canónico conjugado, $P^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = T_c \dot{X}^\mu$, considerando que el Lagrangiano está dado por la acción de Polyakov con norma de métrica intrínseca plana. Con esto la expresión del Hamiltoniano es

$$H = T_c \int_{\sigma=0}^{\pi} d\sigma \left(\dot{X}^2 - \frac{1}{2}(\dot{X}^2 - X'^2) \right) = \frac{T_c}{2} \int_{\sigma=0}^{\pi} d\sigma \left(\dot{X}^2 + X'^2 \right). \quad (5.45)$$

La expresión para el Hamiltoniano es válida para cuerdas abiertas y cerradas. Para expresar al Hamiltoniano en términos de una cuerda abierta o cerrada deberemos volcar las expresiones en expansión de modos que hemos encontrado. Así, por ejemplo, para la cuerda cerrada tendremos que

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n) \quad (5.46)$$

donde hemos definido $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = l_c p^\mu / 2$ y $\alpha \cdot \beta = \alpha_\mu \beta^\mu$.

Para la cuerda abierta la expresión del Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n, \quad (5.47)$$

tal que $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = l_c p^\mu$.

Ahora pasemos a explorar el tensor de energía momento en términos de la expansión en modos de la cuerda cerrada, pudiendo construirse el de cuerda abierta de forma análoga. Los componentes del tensor de energía-momento están dados por

$$\begin{aligned} T_{--} &= (\partial_- X_R^\mu)^2, & T_{++} &= (\partial_+ X_L^\mu)^2, \\ T_{-+} &= T_{+-} = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Introduciendo la expansión en modos en estas ecuaciones obtenemos que [114]

$$\begin{aligned} T_{--} &= 2l_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-2\pi i m(\tau-\sigma)}, \\ T_{++} &= 2l_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{L}_m e^{-2\pi i m(\tau-\sigma)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \\ \bar{L}_m &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{m-n} \cdot \bar{\alpha}_n. \end{aligned} \quad (5.50)$$

La promoción de estos elementos a operadores resultarán de mucha importancia en la obtención de estados físicos, situación que estudiaremos en breve. Con estas relaciones es posible expresar al Hamiltoniano en función de L_m y \bar{L}_m ; para la cuerda cerrada encontramos que

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n) = 2(L_0 + \bar{L}_0), \quad (5.51)$$

mientras que para cuerdas abiertas

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = L_0. \quad (5.52)$$

Haciendo uso de las constricciones (5.32), $T_{\alpha\beta} = 0$, corresponde a que $L_m = 0 = \bar{L}_m$.

Antes de pasar al proceso de cuantización es conveniente observar las relaciones clásicas que se obtienen del estudio de los parentés de Poisson y que serán el ingrediente esencial en la promoción a operadores. Los paréntesis de Poisson para el campo $X^\mu(\tau, \sigma)$ y su momento canónico conjugado obedecen

$$\begin{aligned} \{P^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')\} &= 0 = \{X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')\}, \\ \{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')\} &= \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Mismos que, en términos de la expansión en modos, conducen a [99]

$$\begin{aligned} \{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} &= \{\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu\} = im\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \\ \{\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu\} &= 0, \quad \{x^\mu, p^\nu\} = i\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Una de las consecuencias de estas relaciones es que permiten que el conjunto $\{L_m\}$, $m \in \mathbb{Z}$, forme un álgebra bajo el producto

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}, \quad (5.55)$$

dado por los paréntesis de Poisson. A esta álgebra se la conoce como el *álgebra de Witt o álgebra clásica de Virasoro* [89].

El proceso de cuantización canónico para la cuerda, al igual que el descrito con anterioridad para los campos, implica la promoción del campo $X^\mu(\tau, \sigma)$ y de su momento canónico conjugado, $P^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{1}{\pi l_s^2} \dot{X}^\mu$, a operadores mediante el cambio de sus paréntesis de Poisson por relaciones de conmutación, mismas que se pueden presentar en términos de x^μ , p^μ , α_m^μ y $\bar{\alpha}_m^\mu$ de la siguiente forma [99]:

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= m\eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n}, & [\hat{\bar{\alpha}}_m^\mu, \hat{\bar{\alpha}}_n^\nu] &= m\eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n} \\ [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\bar{\alpha}}_n^\nu] &= 0, & [x^\mu, p^\nu] &= \eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

tomando unidades naturales.

Al definir los operadores $\hat{a}_m^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \hat{\alpha}_m^\mu$ y $\hat{a}_m^{\mu\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \hat{\bar{\alpha}}_{-m}^{\mu\dagger}$ para $m > 0$ entonces se satisfacen

$$[\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^{\nu\dagger}] = [\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^\nu] = \eta^{\mu\nu} \delta_{m,n}, \quad m, n > 0. \quad (5.57)$$

Ésta es la misma estructura de operadores de creación y aniquilación que ya hemos estudiado, salvo por el caso $\mu = \nu = 0$ en el que obtenemos un signo negativo, debido a η^{00} en la métrica

$$[\hat{a}_m^0, \hat{a}_n^{0\dagger}] = -\delta_{m,n}, \quad (5.58)$$

veremos que esta expresión conlleva a la obtención de estados con norma negativa en nuestra teoría.

El siguiente paso es definir el estado base $|0\rangle$ como aquel que es aniquilado por todos los operadores \hat{a}_m^μ , esto es,

$$\hat{a}_m^\mu |0 = 0\rangle, \quad m > 0, \quad (5.59)$$

y todos los estados del espacio de Hilbert se obtienen al hacer actuar los operadores $\hat{a}_m^{\mu\dagger}$ sobre el estado base

$$|\phi\rangle = \hat{a}_{m_1}^{\mu_1\dagger} \dots \hat{a}_{m_n}^{\mu_n\dagger} |0; k^\mu\rangle \quad (5.60)$$

que son eigenestados del operador de momento \bar{p}^μ : $\hat{p}^\mu |\phi\rangle = k^\mu |\phi\rangle$.

Como comentábamos, en nuestra teoría existen estados con norma negativa, por ejemplo, si $|\psi\rangle = \hat{a}_m^{0\dagger} |0; k^\mu\rangle$, para $m > 0$, entonces

$$|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = \langle 0 | \hat{a}_m^0 \hat{a}_m^{0\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_m^0 \hat{a}_m^{0\dagger}] | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle. \quad (5.61)$$

Donde por definición se toma $\langle 0 | 0 \rangle$ como positivo. Estos estados de norma negativa son un problema pues no son físicos y debemos encontrar una manera de identificarlos. Para lograrlo debemos imponer condiciones a nivel cuántico y es lo que vamos a mostrar a continuación.

Dado que los modos α se han vuelto operadores a raíz de nuestro proceso de cuantización, también debe ocurrir así con los L_m . Sin embargo, no basta con tomar la expresión clásica que hemos dado en (5.50) sino que debe incorporarse el orden normal¹ de los operadores, esto es

$$\hat{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \hat{\alpha}_{m-n} \cdot \hat{\alpha}_n :. \quad (5.63)$$

En virtud de las relaciones de conmutación que tenemos para los operadores $\hat{\alpha}$, obtenemos las relaciones de conmutación para operadores \hat{L}_m dadas por

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n)\hat{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n}, \quad (5.64)$$

donde c se conoce como la carga central [103]. Para el caso de la teoría de cuerdas bosónica c es igual a la dimensión del espaciotiempo de fondo [114]. Observemos además que para $m \in \{-1, 0, 1\}$ se forma un subálgebra de $SL(2, \mathbb{R})$, es decir, el conjunto $\{\hat{L}_{-1}, \hat{L}_0, \hat{L}_1\}$ es un álgebra donde las relaciones de conmutación dejan de lado el sumando que involucra a c :

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n)\hat{L}_{m+n}. \quad (5.65)$$

Clásicamente hemos visto que $L_0 = 0$ debido a que al solicitar que el tensor de energía-momento sea cero debe ocurrir que $L_m = 0$ para toda m , sin embargo, al cuantizar la teoría perdemos la capacidad de extrapolar la idea a \hat{L}_0 , o equivalentemente a $\hat{L}_0 |\phi\rangle = 0$, para todos los estados físicos, pues hemos impuesto un orden

1

Definimos orden normal $::$ como $: \hat{\alpha}_i \cdot \hat{\alpha}_j : = \begin{cases} \hat{\alpha}_i \cdot \hat{\alpha}_j & \text{cuando } i \leq j \\ \hat{\alpha}_j \cdot \hat{\alpha}_i & \text{cuando } i > j \end{cases} \quad (5.62)$

normal a estos operadores. Entonces, después de cuantizar lo mejor que podemos decir es que la condición pasa a ser

$$(\hat{L}_0 - a) |\phi\rangle = 0. \quad (5.66)$$

con a una constante. A esta condición se le conoce como condición de capa de masa para la cuerda abierta. Mientras que para la cuerda cerrada tendríamos

$$(\hat{L}_0 - a) |\psi\rangle = 0, \quad (\bar{L}_0 - a) |\phi\rangle = 0, \quad (5.67)$$

con \hat{L} el operador correspondiente al generador clásico \bar{L} .

Clásicamente hemos dicho que $L_m = 0$ para toda m , y que la situación deja de ser válida para \hat{L}_0 . Veamos que sucede con \hat{L}_m si $m \neq 0$. Si pedimos que $\hat{L}_m |\phi\rangle = 0$ para $m \neq 0$ debe ocurrir que

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] |\phi\rangle = 0, \quad (5.68)$$

usando las relaciones de conmutación se sigue que

$$(m - n) \hat{L}_{m+n} |\phi\rangle + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m,-n} |\phi\rangle = 0 \Rightarrow \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m,-n} |\phi\rangle = 0. \quad (5.69)$$

De modo que si $c \neq 0$ debe ocurrir que $m \in \{-1, 0, 1\}$, es decir, si queremos que $\hat{L}_m |\phi\rangle = 0$ entonces debemos restringirnos al subálgebra $\{\hat{L}_{-1}, \hat{L}_0, \hat{L}_1\}$. En vez de pedir esta restricción impondremos que los estados físicos queden caracterizados por

$$\hat{L}_{m>0} |\phi\rangle = 0 = \langle \phi | \hat{L}_{m>0}^\dagger, \quad (5.70)$$

y que cumpla la condición de capa de masa

$$(\hat{L}_0 - a) |\phi\rangle = 0. \quad (5.71)$$

Tenemos que el espacio de Fock está generado por los estados dados en (5.60). A dicho espacio debemos imponer las constricciones (5.70) y (5.71).

Sin embargo, dentro de este subconjunto de estados todavía quedan algunos con norma negativa, mismos que no queremos sean físicos pero que podemos remover al imponer constricciones sobre el valor de a , en la ecuación (5.71), y también sobre la carga central c del álgebra de Virasoro. Con esta finalidad debemos estudiar los estados de norma cero que satisfacen las constricciones anteriores.

Decimos que un estado $|\psi\rangle$ es espurio si satisface la condición de capa de masa

$$(\hat{L}_0 - a) |\psi\rangle = 0, \quad (5.72)$$

y es ortogonal a todos los otros estados físicos

$$\langle \phi | \psi \rangle = 0, \quad \forall \text{ estado físico } |\phi\rangle. \quad (5.73)$$

En general, los estados espurios pueden ser escritos como [114]:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} |\xi_n\rangle, \quad (5.74)$$

con $|\xi_n\rangle$ algún estado que satisface la siguiente expresión

$$(\hat{L}_0 - a + n) |\xi_n\rangle = 0. \quad (5.75)$$

Ahora, debido a que \hat{L}_{-n} , para $n \geq 1$, puede escribirse como combinación de \hat{L}_{-1} y \hat{L}_{-2} , la expresión general para los estados espurios pasa a ser

$$|\psi\rangle = \hat{L}_{-1} |\xi_1\rangle + \hat{L}_{-2} |\xi_2\rangle. \quad (5.76)$$

Debido a que un estado espurio es ortogonal a todo estado físico, si pedimos que dicho estado sea a su vez físico debe ocurrir que sea ortogonal consigo mismo, es decir, $|\psi\rangle$ tiene norma cero

$$\langle\psi|\psi\rangle = 0. \quad (5.77)$$

Ahora consideremos un estado espurio de la forma

$$|\psi\rangle = \hat{L}_{-1} |\xi_1\rangle \quad (5.78)$$

con $(\hat{L}_0 - a + 1) |\xi_1\rangle = 0$ y $\hat{L}_{m>0} |\xi_1\rangle = 0$, donde la segunda condición se añade al considerar que $|\psi\rangle$ es físico. Además, de esta consideración, sabemos que $|\psi\rangle$ satisface las relaciones (5.70) y (5.71) de modo que, si $\hat{L}_{m>0} |\psi\rangle = 0$, en particular $\hat{L}_1 |\psi\rangle = 0$, lo que implica que

$$0 = \hat{L}_1(\hat{L}_{-1} |\xi_1\rangle) = [\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] |\xi_1\rangle = 2\hat{L}_0 |\xi_1\rangle = 2(a - 1) |\xi_1\rangle, \quad (5.79)$$

de modo que $a = 1$. Es decir, si queremos que $|\psi\rangle$ sea un estado espurio y físico necesitamos que $a = 1$.

Para determinar el valor de c tomemos el siguiente estado espurio

$$|\psi\rangle = (\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}) |\xi_2\rangle, \quad (5.80)$$

con γ una constante, que fijaremos al solicitar que el estado sea físico. Y donde $|\xi_2\rangle$ obedece las siguientes relaciones

$$(\hat{L}_0 - a + 2) |\xi_2\rangle = 0, \quad \hat{L}_{m>0} |\xi_2\rangle = 0. \quad (5.81)$$

Al pedir que $|\psi\rangle$ sea un estado físico, debe tener norma cero, entonces debe satisfacer que $\hat{L}_{m>0} |\psi\rangle = 0$ y, en particular, $\hat{L}_1 |\psi\rangle = 0$. Esto implica que [114],

$$0 = \hat{L}_1(\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}) |\xi_2\rangle = (3 - 2\gamma) \hat{L}_{-1} |\xi_2\rangle \Rightarrow \gamma = \frac{3}{2}. \quad (5.82)$$

Finalmente, como tiene que ocurrir que $\hat{L}_2 |\psi\rangle = 0$ entonces,

$$0 = \hat{L}_2(\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}) |\xi_2\rangle = \left(\frac{c}{2} - 13\right) |\xi_2\rangle \Rightarrow c = 26. \quad (5.83)$$

Según lo visto, para evitar considerar a los estados de norma negativa en nuestro espacio de Fock, debemos tomar las constantes según $a = 1$, $\gamma = 3/2$ y $c = 26$. Recordando que la carga central c coincide con la dimensión del espaciotiempo de

fondo, los resultados hallados implican que nuestra teoría debe situarse en un espaciotiempo de 26 dimensiones.

Analicemos el espectro de masa de los estados físicos y comencemos con la cuerda abierta. La fórmula de masa en este caso es la siguiente [85]

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n : - a = \hat{N} - a \quad (5.84)$$

donde \hat{N} es el operador de número definido por

$$\hat{N} = \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n : = \sum_{n=1}^{\infty} n : \hat{a}_n^\dagger \cdot \hat{a}_n : \quad (5.85)$$

Este operador nos permite obtener el espectro de masa respecto al valor de n : para $n = 0$ tenemos un estado $|0; k^\mu\rangle$ cuya masa está dada por $\alpha' M^2 = -1$, un taquión. Para $n = 1$ nos encontramos un estado vectorial bosónico, bajo $SO(24)$, $\alpha_{-1}^i |0; k^\mu\rangle$ que es no-masivo. Finalmente, para $n = 1$ tenemos el primer estado con masa positiva, en concreto los estados son $\alpha_{-2}^i |0; k^\mu\rangle$ y $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0; k^\mu\rangle$ con $\alpha' M^2 = 1$. En total son 324 estados, igual a la dimensión de la representación tensorial simétrica sin traza de $SO(25)$, en este sentido tenemos un estado masivo de espín 2.

Para la cuerda cerrada uno debe considerar que tenemos modos derechos e izquierdos. La fórmula de masa es

$$\frac{4}{\alpha'} M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n : - a = \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n : - a \Rightarrow \hat{N} - a = \hat{N} - a \quad (5.86)$$

El estado base $|0; k^\mu\rangle$ tiene masa $\alpha' M^2 = -4$ y se trata nuevamente de un taquión. Para $n = 1$ existen $24^2 = 576$ estados de la forma

$$|\Omega^{ij}\rangle = \hat{\alpha}_{-1}^i \hat{\alpha}_{-1}^j |0; k^\mu\rangle, \quad (5.87)$$

correspondientes al producto tensorial de dos vectores no-masivos. La parte de $|\Omega^{ij}\rangle$ que es simétrica y sin traza transforma con i, j bajo $SO(24)$ como una partícula no masiva de espín 2, un gravitón. El término de traza $\delta_{ij} |\Omega^{ij}\rangle$ es un escalar no masivo y que se conoce como *dilatón*, por último el término antisimétrico $|\Omega^{ij}\rangle = -|\Omega^{ji}\rangle$ transforma bajo $SO(24)$ como un tensor antisimétrico.

Observar que todos los estados de cuerda abierta y de cuerda cerrada son multipletes de $SO(24)$ o de $SO(25)$ dependiendo de si son estados no-masivos o masivos, respectivamente. Esto es debido a que un estado masivo podemos transformarlo bajo Lorentz a un marco de referencia donde tome la forma

$$|E, \underbrace{0, \dots, 0}_{25 \text{ veces}}\rangle. \quad (5.88)$$

El grupo de transformaciones que dejan este estado invariante es el grupo de rotaciones en 25 dimensiones, es decir, el grupo que no cambia la velocidad del estado

está dado por $SO(25)$, de modo que el estado masivo corresponde a alguna representación del grupo de rotaciones $SO(25)$. En cambio los estados no-masivos podemos llevarlos, en el caso más sencillo, bajo Lorentz, a la forma

$$|E, E, \underbrace{0, \dots, 0}_{24 \text{ veces}}\rangle. \quad (5.89)$$

de modo que el grupo que lo deja invariante está dado por $SO(24)$. De aquí que los estados no-masivos correspondan a una representación de $SO(24)$.

5.1.1. Teoría de Supercuerdas

La teoría de cuerda bosónica que hemos revisado hasta ahora es insatisfactoria en, al menos, dos situaciones. La primera de ellas es que incluye estados que representan un campo escalar de masa al cuadrado negativa, taquiones, según observamos al final de la sección anterior. La segunda cuestión es que el espectro de cuerda abierta y cerrada no incluye fermiones, mismos que son esenciales en la descripción de la naturaleza y donde se incluyen los quarks y leptones del modelo estándar.

De la sección 3.6 sabemos que al considerar supersimetría en el espaciotiempo logramos incorporar grados de libertad fermiónicos en la teoría. Para incorporar supersimetría a la teoría de cuerdas existen básicamente dos formas: la primera de ellas y la que dedicaremos nuestra atención posterior, es el llamado formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS), que introduce la supersimetría a nivel de la hoja de mundo. El segundo, el formalismo de Green-Schwarz (GS), considera la supersimetría a nivel de un espacio de Minkowski 10 dimensional y puede generalizarse a otras geometrías.

En el formalismo RNS deben adicionarse a la teoría de cuerdas en d dimensiones espaciotemporales d campos fermiónicos libres Ψ_a^μ . Los campos $\Psi_a^\mu(\tau, \sigma)$ son campos espinoriales de dos componentes

$$\Psi_a^\mu(\tau, \sigma) = \begin{bmatrix} \psi_-^\mu(\tau, \sigma) \\ \psi_+^\mu(\tau, \sigma) \end{bmatrix}, \quad a \in \{+, -\}, \quad (5.90)$$

donde llamamos a $\psi_+^\mu(\tau, \sigma)$ la componente quiral positiva del espinor $\Psi_a^\mu(\tau, \sigma)$, mientras que $\psi_-^\mu(\tau, \sigma)$ es la componente quiral negativa. Veremos que estos espinores describen fermiones viviendo en la hoja de mundo. Observemos que los campos $\psi_a^\mu(\tau, \sigma)$ transforman como vectores bajo las transformaciones de Lorentz en el espaciotiempo de Minkowski d dimensional.

Ahora, un requisito de la supersimetría es tener el mismo número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos, en nuestra teoría esto se traduce en tener el mismo número de campos Ψ_a^μ que de campos X^μ .

Incorporemos estos nuevos campos a nivel de la acción; añadimos a la acción de Polyakov los términos correspondientes a la acción de Dirac para los d campos espinoriales ψ_a^μ libres [114]:

$$S = S_B + S_F = -\frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma \bar{\Psi}_a^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha (\Psi_a)_\mu, \quad (5.91)$$

donde ρ^α , $\alpha \in \{0, 1\}$, son representaciones 2 dimensionales de las matrices de Dirac y que asumiremos en la base de Dirac:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

Notemos que cuando las matrices de Dirac tienen componentes reales, como aquí, llamamos a esta representación como *representación de Majorana* para las matrices de Dirac [81]. Además, en la representación de Majorana puede imponerse esta condición de componentes reales para los espinores [114],

$$(\Psi^\mu)^T C = (\Psi^\mu)^\dagger i\rho^0, \quad (5.93)$$

donde C es una matriz de 2×2 conocida como de conjugación de carga. Encontramos entonces que los espinores añadidos son de Majorana:

$$(\psi_\pm^\mu)^* = \psi_\pm^\mu. \quad (5.94)$$

Clásicamente, los espinores de Majorana son funciones con dominio en la hoja de mundo cuyo codominio debe obedecer las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{\Psi^\mu, \Psi^\nu\} = 0. \quad (5.95)$$

La acción (5.91) tiene una simetría global que relaciona los campos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon} \Psi^\mu, \\ \delta \Psi^\mu &= \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon, \end{aligned} \quad (5.96)$$

con ϵ un espinor de Majorana constante e infinitesimal:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_- \\ \epsilon_+ \end{bmatrix}, \quad (5.97)$$

con ϵ_- y ϵ_+ números reales e infinitesimales. De modo que $\bar{\epsilon}$ está definido como $\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger i\rho^0$.

La simetría dada en (5.96) mezcla los campos escalares y espinoriales de la hoja de mundo, y como éstos resultan en los grados de libertad bosónicos y fermiónicos, es en este sentido, una supersimetría. La acción (5.91) resulta, entonces, una teoría supersimétrica llamada *teoría de supercuerda RNS*. Observar también que las transformaciones supersimétricas, susy^2 , son globales pues ϵ no es dependiente de las coordenadas de la hoja de mundo.

Sustituyendo en la acción (5.91) las expresiones que hemos encontrado en términos de coordenadas en el cono de luz de la hoja de mundo tenemos [114]

$$S = \frac{1}{\pi} \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_+ X^\mu(\sigma^-, \sigma^+) \partial_- X_\mu(\sigma^-, \sigma^+)$$

²Por sus siglas en inglés.

$$+ \frac{i}{2\pi} \int d\sigma^+ d\sigma^- (\psi_-^\mu(\sigma^-, \sigma^+) \partial_+ (\psi_-)_\mu(\sigma^-, \sigma^+) + \psi_+^\mu(\sigma^-, \sigma^+) \partial_- (\psi_+)_\mu(\sigma^-, \sigma^+)) \quad (5.98)$$

Dado el término correspondiente a los fermiones observamos que las ecuaciones de movimiento en las coordenadas del cono de luz son

$$\partial_+ \psi_-^\mu = 0, \quad \partial_- \psi_+^\mu = 0, \quad (5.99)$$

describiendo ondas moviéndose a izquierda y derecha, respectivamente.

Debido a que la supersimetría es una simetría global de la hoja de mundo, por el teorema de Noether [77, 99], tiene asociada una corriente conservada, llamada *supercorriente de la hoja de mundo*. Para obtener la expresión de esta supercorriente procedemos a variar la acción en términos de las coordenadas del cono de luz, omitiendo los índices de Lorentz:

$$\delta S = \frac{1}{\pi} \int d\sigma^+ d\sigma^- (2\partial_+ (\delta X) \partial_- X + i(\delta\psi_-) \partial_+ \psi_- + i\psi_- \partial_+ (\delta\psi_-) + (+ \leftrightarrow -)) \quad (5.100)$$

al introducir la transformación supersimétrica ϵ_- tenemos que el integrando pasa a ser [114]:

$$2\partial_+ (i\epsilon_- \psi_+) \partial_- X + 2\partial_+ X \partial_- (-i\epsilon_- \psi_+) + i(2\partial_+ X \epsilon_-) \partial_- \psi_+ + i\psi_+ \partial_- (2\partial_+ X \epsilon_-) \quad (5.101)$$

ignorando derivadas totales encontramos que es igual a

$$2i\epsilon_- \partial_- (\psi_+ \partial_+ X). \quad (5.102)$$

Sustituyendo en la expresión (5.100)

$$\delta S = \frac{4i}{\pi} \int d\sigma^+ d\sigma^- \epsilon_- \partial_- (\psi_+ \partial_+ X), \quad (5.103)$$

que al integral por partes

$$\delta S = \frac{4i}{\pi} \int d\sigma^+ d\sigma^- (\partial_- \epsilon_-) (\psi_+ \partial_+ X). \quad (5.104)$$

De modo que la supercorriente asociada a la transformación ϵ_- es

$$j_+ = \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu, \quad (5.105)$$

de forma análoga la supercorriente asociada a la transformación ϵ_+ es

$$j_- = \psi_-^\mu \partial_- X_\mu. \quad (5.106)$$

La siguiente corriente conservada de la teoría RNS es la correspondiente simetría bajo traslaciones, es decir, el tensor de energía-momento, cuya expresión es [114]

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{4} \bar{\Psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \Psi_\mu + \frac{1}{4} \bar{\Psi}^\mu \rho_\beta \partial_\alpha \Psi_\mu - \text{traza}, \quad (5.107)$$

que en términos de las coordenadas del cono de luz adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned} T_{++} &= \partial_+ X_\mu \partial_+ X^\mu + \frac{i}{2} \psi_+^\mu \partial_+ (\psi_+)_\mu, & T_{--} &= \partial_- X_\mu \partial_- X^\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \partial_- (\psi_-)_\mu, \\ T_{-+} &= 0 = T_{+-}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Anteriormente, habíamos visto que las constricciones de Virasoro estaban dadas por

$$T_{++} = 0 = T_{--}, \quad (5.109)$$

construyendo todas las componentes del tensor de energía-momento a ser cero. Este resultado a su vez implicaba que, clásicamente, todos los generadores de Virasoro, L_m , sean cero, en particular $L_0 = 0$. Sin embargo, en el proceso de cuantización observamos que, para la cuerda abierta, lo mejor que puede decirse es que $(L_0 - a) |\phi\rangle$, con a dado por el orden normal. Esta es la condición de capa de masa y para evitar la aparición de estados con norma negativa debimos tomar $a = 1$ y la carga central del álgebra de Virasoro, c , igual a la dimensión del espaciotiempo de fondo como $c = d = 26$. En la teoría RNS tenemos las constricciones de Virasoro análogas, dadas por

$$T_{++} = 0 = T_{--}, \quad j_+ = 0 = j_-. \quad (5.110)$$

Veremos que estas constricciones, al igual que en la teoría de cuerda bosónica, conducen a la eliminación de estados con norma negativa.

Procedamos ahora a cuantizar la teoría RNS, y comencemos por obtener las condiciones de frontera para los campos fermiónicos y su correspondiente expansión en modos. Escribamos primero la acción de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\pi} \int d\tau d\sigma \partial_+ X^\mu(\sigma^-, \sigma^+) \partial_- X_\mu(\sigma^-, \sigma^+) \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \int d\tau d\sigma (\psi_-^\mu(\sigma^-, \sigma^+) \partial_+ (\psi_-)_\mu(\sigma^-, \sigma^+) + \psi_+^\mu(\sigma^-, \sigma^+) \partial_- (\psi_+)_\mu(\sigma^-, \sigma^+)) \end{aligned} \quad (5.111)$$

y centremonos en estudiar la parte correspondiente a los campos fermiónicos

$$S_F \sim \int d\tau d\sigma (\psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+). \quad (5.112)$$

La variación de la acción otorga la siguiente relación

$$\delta S_F \sim \int d\tau (\psi_- \delta \psi_- - \psi_+ \delta \psi_+) |_{\sigma=\pi} - \int d\tau (\psi_- \delta \psi_- - \psi_+ \delta \psi_+) |_{\sigma=0}. \quad (5.113)$$

Y al igual que antes, queremos que los sumandos de términos a la frontera sean cero. Estudiamos primero que sucede con las cuerdas RNS abiertas. Para este caso, los dos términos de frontera de la expresión anterior deben ser cero de forma independiente y esto se consigue al pedir que

$$\psi_+^\mu = \pm \psi_-^\mu, \quad \sigma = 0, \pi. \quad (5.114)$$

La elección de qué signo considerar en $\sigma = 0$ es por convención

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=0} = \psi_-^\mu|_{\sigma=0}. \quad (5.115)$$

Pero dicha decisión pone en relevancia la elección de que signo tomar en $\sigma = \pi$. Las dos posibles opciones, que llamaremos sectores, son las siguientes: en caso de considerar que en la frontera $\sigma = \pi$ se tome el signo positivo, es decir,

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=\pi} = \psi_-^\mu|_{\sigma=\pi}. \quad (5.116)$$

diremos, en este caso, que los campos fermiónicos se encuentran en el *sector de Ramond*. Recordar que los campos ψ^μ obedecen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\partial_- \psi_+^\mu = 0, \quad \partial_+ \psi_-^\mu = 0, \quad (5.117)$$

que implican que $\psi_- = \psi_-(\sigma^-)$ y $\psi_+ = \psi_+(\sigma^+)$. Al imponer la condición de frontera de Ramond, (5.116), obtenemos la siguiente expansión en modos [114]

$$\begin{aligned} \psi_-^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \end{aligned} \quad (5.118)$$

donde, debido a que el espinor Ψ es de Majorana, implica que $d_{-n}^\mu = (d_n^\mu)^\dagger$.

La segunda posibilidad para satisfacer la expresión (5.114) es tomar

$$\psi_+^\mu|_{\sigma=\pi} = -\psi_-^\mu|_{\sigma=\pi}. \quad (5.119)$$

A este sector se le conoce como de Neveu-Schwarz y conduce a la siguiente expansión en modos [114]

$$\begin{aligned} \psi_-^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Una vez analizado el caso de la cuerda abierta en RNS pasemos a estudiar el caso de una cuerda cerrada. Las condiciones de frontera para la cuerda cerrada otorgarán, como antes, dos conjuntos de modos llamados izquierdos y derechos. Una vez más hay dos posibles condiciones de periodicidad que pueden cumplirse

$$\psi_\pm^\mu(\tau, \sigma) = \pm \psi_\pm^\mu(\tau, \sigma + \pi). \quad (5.121)$$

El signo positivo describe las condiciones de frontera periódicas, también llamadas de Ramond o condiciones de frontera R. Mientras que el signo negativo describe las condiciones de frontera antiperiódicas, de Neveu-Schwarz o condiciones de frontera NS [114]. Observar que estas condiciones se pueden imponer a los modos derechos

e izquierdos de forma independiente. Esto conduce a dos elecciones en la expansión en modos para los campos izquierdos:

$$\psi_+^\mu(\tau, \sigma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad \psi_+^\mu(\tau, \sigma) \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \bar{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau+\sigma)}, \quad (5.122)$$

donde la primera expansión corresponde al sector R y la segunda al NS. Análogamente, para los campos derechos

$$\psi_-^\mu(\tau, \sigma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)}, \quad \psi_-^\mu(\tau, \sigma) \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)}. \quad (5.123)$$

Prosiguiendo, al igual que en la cuerda bosónica, la solución de cuerda cerrada es la suma de las contribuciones del modo derecho y el izquierdo. Como en este caso tenemos dos opciones para cada uno de ellos resultará que la contribución espinorial de cuerda cerrada conforma cuatro sectores, el sector R-R, el sector R-NS, el NS-R y, finalmente, el sector NS-NS.

Con lo que hemos visto estamos en posición de comenzar el proceso de cuantización. Para ello promovemos los modos α y $\bar{\alpha}$, provenientes de los campos bosónicos X^μ , y los modos b , \bar{b} , d y \bar{d} , que hemos encontrado en la expansión de los campos ψ_a^μ , a operadores con las siguientes relaciones de conmutación o anticonmutación

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= [\hat{\bar{\alpha}}_m^\mu, \hat{\bar{\alpha}}_n^\nu] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}, \\ \{\hat{b}_r^\mu, \hat{b}_s^\nu\} &= \{\hat{\bar{b}}_r^\mu, \hat{\bar{b}}_s^\nu\} = \delta_{r,-s}\eta^{\mu\nu} \\ \{\hat{d}_m^\mu, \hat{d}_n^\nu\} &= \{\hat{\bar{d}}_m^\mu, \hat{\bar{d}}_n^\nu\} = \delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

con todas las demás relaciones, por ejemplo $[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{b}_r^\nu]$, siendo cero. Notemos que debido a la aparición de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ en las relaciones algebraicas anteriores, las componentes temporales de las oscilaciones bosónicas y fermiónicas dan lugar a estados con norma negativa. Veamos como usar las constricciones de Virasoro para remover estos estados de forma explícita en el caso de la cuerda abierta.

El siguiente paso es definir el estado base de cuerda abierta en la teoría RNS; debido a que tenemos dos sectores de cuerda abierta tendremos que definir dos estados base [114], uno para el sector de Ramond, $|0\rangle_R$, definido por

$$\hat{\alpha}_m^\mu |0\rangle_R = \hat{d}_m^\mu |0\rangle_R = 0 \quad m > 0, \quad (5.125)$$

y otro para el sector de Neveu-Schwarz, $|0\rangle_{NS}$, donde

$$\hat{\alpha}_m^\mu |0\rangle_{NS} = \hat{b}_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad m, r > 0. \quad (5.126)$$

Los estados excitados se encuentran mediante la acción de los operadores de modos negativos y que constituirán los operadores de creación de la teoría.

Los dos estados base que hemos definido tienen algunas diferencias. Para el sector NS, el estado base es único y corresponde a un estado de espín 0, un bosón, en el espaciotiempo de fondo. Debido a que los modos α_n^μ y b_r^μ transforman bajo una

transformación de Lorentz como vectores [9], los estados excitados en el sector NS corresponden a bosones en el espaciotiempo de fondo. Y como hemos visto en la cuerda bosónica, el actuar con operadores de creación aumenta la masa del estado.

Para el sector R el estado base es degenerado [114]. Veamos que el operador \hat{d}_0^μ puede actuar sin cambiar la masa del estado pues conmuta con el operador de número definido por [9]

$$\hat{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_n + \sum_{r=1/2}^{\infty} r \hat{b}_{-r} \cdot \hat{b}_r, \quad (5.127)$$

y cuyo eigenvalor determina el valor de M^2 del estado. Además, el modo d_0 satisface el álgebra de Clifford salvo por un factor de 2:

$$\{\hat{d}_0^\mu, \hat{d}_0^\nu\} = \delta_{0,0} \eta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}, \quad (5.128)$$

y como el álgebra de Dirac es isomorfa al álgebra de Clifford [101], implica que el conjunto de estados degenerados del estado base en el sector R debe conformar una representación del álgebra de Dirac. Con ello, el conjunto de estados degenerados $|a\rangle$, con a un índice espinorial, cumple con

$$\hat{d}_0^\mu |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{ba}^\mu |b\rangle, \quad a, b \in \{1, \dots, t\}, \quad (5.129)$$

con t el número de degeneración del estado base y donde Γ^μ es una matriz de Dirac. Esta ecuación define cómo el modo actúa sobre los espinores, es decir, otorga una representación de d_0^μ en espacio de espinores. A modo de ejemplo tomemos por caso el que solo tengamos dos valores de a , digamos, $+$ y $-$, entonces Γ^μ es una matriz de Dirac de 2×2 , y la expresión en (5.129) pasa a ser

$$\hat{d}_0^\mu \begin{bmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{++}^\mu & \Gamma_{+-}^\mu \\ \Gamma_{-+}^\mu & \Gamma_{--}^\mu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{bmatrix}. \quad (5.130)$$

Como los modos α_n^μ y d_n^μ transforman como vectores bajo Lorentz, los estados excitados resultantes en el sector R son fermiones espaciotemporales.

Los supergeneradores de Virasoro están dados por los modos del tensor de energía-momento, $T_{\alpha\beta}$ y por los de las supercorrientes J^α . Cada generador está conformado por la contribución de la parte bosónica y la parte fermiónica de la siguiente forma

$$\hat{L}_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \hat{T}_{++} = \hat{L}_m^{(b)} + \hat{L}_m^{(f)}, \quad (5.131)$$

con la contribución bosónica dada como antes por

$$\hat{L}_m^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{\alpha}_{m+n} : \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.132)$$

Por otro lado, la contribución fermiónica debe separarse en los dos sectores que tenemos en la teoría. En el sector NS la contribución está dada por

$$\hat{L}_m^{(f)} = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \left(r + \frac{m}{2} \right) : \hat{b}_{-r} \cdot \hat{b}_{m+r} : \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (5.133)$$

mientras que los modos de la supercorriente son

$$\hat{G}_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\sigma} j_+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{b}_{r+n} \quad (5.134)$$

con $r \in \mathbb{Z} + 1/2$.

Observar que el operador \hat{L}_0 puede escribirse como

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^2 + \hat{N} \quad (5.135)$$

donde \hat{N} es el operador de número (5.127).

Para el sector R la contribución fermiónica a los supergeneradores de Virasoro son

$$\hat{L}_m^{(f)} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(n + \frac{m}{2} \right) : \hat{d}_{-n} \cdot \hat{d}_{m+n} : \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (5.136)$$

y los modos de la supercorriente tienen la siguiente forma

$$\hat{F}_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\sigma} j_+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-n} \cdot \hat{d}_{m+n} \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.137)$$

El superálgebra de Virasoro de la teoría RNS incluye a los generadores $\{\hat{L}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ y a los modos de las supercorrientes. Consecuencia de tener expresiones distintas según que sector se esté trabajando, tendremos a su vez dos superálgebras de Virasoro:

La superálgebra de Virasoro en el sector NS consiste en los elementos $\{L_m, G_r\}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $r \in \mathbb{Z} + 1/2$, con las siguientes relaciones [9]

$$\begin{aligned} [\hat{L}_m, \hat{L}_n] &= (m - n) \hat{L}_{m+n} + \frac{C}{8} m(m^2 - 1) \delta_{m,-n} \\ [\hat{L}_m, \hat{G}_r] &= \left(\frac{m}{2} - r \right) \hat{G}_{m+r} \\ \{\hat{G}_r, \hat{G}_s\} &= 2\hat{L}_{r+s} + \frac{C}{2} \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r,-s}, \end{aligned} \quad (5.138)$$

denotando a la carga central de esta superálgebra por C y que, como en la cuerda bosónica, coincide con la dimensión del espaciotiempo [114].

En cambio, la superálgebra de Virasoro en el sector R está formada por $\{L_m, F_n\}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} [\hat{L}_m, \hat{L}_n] &= (m - n) \hat{L}_{m+n} + \frac{C}{8} m^3 \delta_{m,-n} \\ [\hat{L}_m, \hat{F}_n] &= \left(\frac{m}{2} - n \right) \hat{F}_{m+n} \\ \{\hat{F}_m, \hat{F}_n\} &= 2\hat{L}_{m+n} + \frac{C}{2} (m^2) \delta_{m,-n}, \end{aligned} \quad (5.139)$$

En la teoría RNS, como en el caso de cuerda bosónica, lo mejor que podemos pedir para los supergeneradores de Virasoro es que aniquilen los estados físicos cuando $m > 0$, y consentir que en el caso $m = 0$ encontremos una condición de capa de masa. Las condiciones para estados físicos en el sector NS son las siguientes

$$\begin{aligned}\hat{L}_m |\phi\rangle &= 0 & m > 0 \\ \hat{G}_r |\phi\rangle &= 0 & r > 0 \\ (\hat{L}_0 - a_{NS}) |\phi\rangle &= 0,\end{aligned}\tag{5.140}$$

para $|\phi\rangle$ un estado físico viviendo en el sector NS, y con a_{NS} una constante. Puede mostrarse que la condición de capa de masa de RNS implica que $\alpha' M = n - a_{NS}$, donde M es la masa del estado $|\phi\rangle$ y n es el eigenvalor del operador de número.

En el sector R, las condiciones para estados físicos son:

$$\begin{aligned}\hat{L}_m |\phi\rangle &= 0 & m > 0 \\ \hat{F}_n |\phi\rangle &= 0 & n \geq 0 \\ (\hat{L}_0 - a_R) |\phi\rangle &= 0,\end{aligned}\tag{5.141}$$

con a_R una constante. Observar que las constantes a_{NS} y a_R aparecen producto de la ambigüedad en el orden normal del operador \hat{L}_0 . Como \hat{L}_0 es diferente según el sector tendremos que en general $a_{NS} \neq a_R$.

Encontremos los valores de a_R , a_{NS} y de la carga central, C , que remueven los estados de norma negativa y procedamos como lo hicimos antes: con un estudio de los estados espurios de norma cero [114]. Comencemos con el sector NS. Para fijar el valor de a_{NS} consideremos un estado en el sector NS de la forma

$$|\phi\rangle = \hat{G}_{-1/2} |\xi\rangle,\tag{5.142}$$

donde $|\xi\rangle$ cumple con las condiciones

$$\hat{L}_{m>0} |\xi\rangle = 0, \quad \left(\hat{L}_0 - a_{NS} + \frac{1}{2} \right) |\xi\rangle = 0 \quad \hat{G}_{1/2} |\xi\rangle = \hat{G}_{3/2} |\xi\rangle = 0.\tag{5.143}$$

Con esto es suficiente con mostrar que $G_{1/2} |\phi\rangle = G_{3/2} |\phi\rangle = 0$ para que el estado $|\phi\rangle$ sea físico. Vemos que

$$\hat{G}_{3/2} |\phi\rangle = \hat{G}_{3/2} \hat{G}_{-1/2} |\xi\rangle = 2\hat{L}_{1/2} |\xi\rangle = 0,\tag{5.144}$$

haciendo uso de las relaciones de anticonmutación dadas en (5.138) y de las condiciones sobre $|\xi\rangle$. Mientras que

$$\hat{G}_{1/2} |\phi\rangle = \hat{G}_{1/2} \hat{G}_{-1/2} |\xi\rangle = 2\hat{L}_0 |\xi\rangle = 2 \left(a_{NS} - \frac{1}{2} \right) |\xi\rangle,\tag{5.145}$$

para que esta expresión sea cero necesitamos que $a_{NS} = 1/2$. Para calcular la carga central consideremos el siguiente estado

$$|\phi\rangle = \left(\hat{G}_{-3/2} + \lambda \hat{G}_{-1/2} \hat{L}_{-1} \right) |\xi\rangle,\tag{5.146}$$

y supongamos que el estado $|\xi\rangle$ cumple lo siguiente

$$\hat{G}_{1/2}|\xi\rangle = 0, \quad \hat{G}_{3/2}|\xi\rangle = 0, \quad (\hat{L}_0 + 1)|\xi\rangle = 0, \quad (5.147)$$

Así que, como antes, necesitamos que $\hat{G}_{1/2}|\phi\rangle = 0$ y que $\hat{G}_{3/2}|\phi\rangle = 0$. Para la primer condición tenemos que

$$\hat{G}_{1/2}|\phi\rangle = \left(\hat{G}_{1/2}\hat{G}_{-3/2} + \lambda\hat{G}_{1/2}\hat{G}_{-1/2}\hat{L}_{-1} \right) |\xi\rangle \quad (5.148)$$

que mediante las relaciones de conmutación del superálgebra de Virasoro en el sector NS obtenemos

$$\hat{G}_{1/2}|\phi\rangle = (2 - \lambda)\hat{L}_{-1}|\xi\rangle. \quad (5.149)$$

De aquí que $\lambda = 2$. Para cumplir la segunda condición necesitamos que la siguiente expresión sea cero

$$\hat{G}_{3/2}|\phi\rangle = (C - 2 - 4\lambda)|\xi\rangle. \quad (5.150)$$

El valor crítico para la dimensión del espaciotiempo de fondo en este caso es $d = C = 10$. Resumiendo, para remover los estados de norma negativa en el sector NS es necesario que $a_{NS} = 1/2$ y que $d = 10$

Para el sector R no es necesario el uso de estados espurios, con la finalidad de obtener el valor de a_R observemos que

$$\{\hat{F}_0, \hat{F}_0\} = 2\hat{L}_0 \Rightarrow \hat{F}_0^2 = \hat{L}_0 \quad (5.151)$$

que la ecuación $\hat{F}_n|\phi\rangle = 0$, $n \geq 0$ y la condición de capa de masa que debe cumplir $|\phi\rangle$ para ser estado físico conduce a

$$(\hat{L}_0 - a_R)|\phi\rangle = 0 \Rightarrow (\hat{F}_0^2 - a_R)|\phi\rangle = 0 \Rightarrow a_R|\phi\rangle = 0, \quad (5.152)$$

implicando que $a_R = 0$. Ahora, para obtener el valor de la carga central tomemos el siguiente estado en el sector R

$$|\phi\rangle = \hat{F}_0\hat{F}_{-1}|\xi\rangle, \quad (5.153)$$

donde $|\xi\rangle$ satisface

$$\hat{F}_1|\xi\rangle = (\hat{L}_0 + 1)|\xi\rangle = 0. \quad (5.154)$$

Como queremos que $|\phi\rangle$ sea un estado físico debe cumplir con que $\hat{F}_0|\phi\rangle = 0$ y con $\hat{L}_1|\phi\rangle = 0$ [114], entonces

$$\hat{L}_1|\phi\rangle = \left(\frac{1}{2}\hat{F}_1 + \hat{F}_0\hat{F}_1 \right) \hat{F}_{-1}|\phi\rangle = \frac{1}{4}(C - 10)|\phi\rangle, \quad (5.155)$$

expresión que es cero solo cuando $C = 10$. Las condiciones para remover los estados de norma negativa en el sector R son fijar $a_R = 0$ y $d = C = 10$.

Estudiemos el espectro de masa para la cuerda abierta en la teoría RNS. En el sector NS la fórmula para la masa es [9]

$$\alpha'M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + \sum_{r=1/2}^{\infty} r \hat{b}_{-r}^i \hat{b}_r^i - \frac{1}{2}, \quad (5.156)$$

sustituyendo el valor de a_{NS} que hemos encontrado. El estado base es aniquilado por los modos

$$\hat{\alpha}_n^i |0; k^\mu\rangle_{NS} = \hat{b}_r^i |0; k^\mu\rangle_{NS} = 0, \quad n, r > 0 \quad (5.157)$$

mientras que

$$\hat{\alpha}_0^\mu |0; k^\mu\rangle_{NS} = \sqrt{2\alpha'} k^\mu |0; k^\mu\rangle_{NS}, \quad (5.158)$$

con $\sqrt{2\alpha'}$ colocado por normalización. Para obtener la masa del estado base del sector NS realizamos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \alpha' M^2 |0; k^\mu\rangle_{NS} &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i |0; k^\mu\rangle_{NS} + \sum_{r=1/2}^{\infty} r \hat{b}_{-r}^i \hat{b}_r^i |0; k^\mu\rangle_{NS} - \frac{1}{2} |0; k^\mu\rangle_{NS} \\ &= -\frac{1}{2} |0; k^\mu\rangle_{NS}, \end{aligned} \quad (5.159)$$

con esto observamos que la masa del estado base está dado por $\alpha' M^2 = -1/2$, se trata de un taquión, situación no agradable pero veremos en breve como lidiar con ello.

Los estados excitados del sector NS se siguen de hacer actuar los operadores $\hat{\alpha}_{-1}^i$ o $\hat{b}_{-1/2}^i$ sobre el estado base. Para obtener el primer estado excitado debemos considerar la acción de $\hat{b}_{-1/2}^i$ pues incrementa el valor de $\alpha' M^2$ en 1/2 mientras que $\hat{\alpha}_{-1}^i$ lo hace en 1, entonces el primer estado excitado es

$$\hat{b}_{-1/2}^i |0; k^\mu\rangle_{NS}. \quad (5.160)$$

Ahora, debido a que el operador es un vector del espaciotiempo actuando en un estado bosónico, escalar del espaciotiempo, el estado resultante es un vector del espaciotiempo [114].

En cambio, para el sector R la fórmula de masa es la siguiente:

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{d}_{-n}^i \hat{d}_n^i, \quad (5.161)$$

mientras que el estado base cumple con

$$\hat{\alpha}_n^i |0; k^\mu\rangle_R = \hat{d}_n^i |0; k^\mu\rangle_R = 0, \quad n > 0 \quad (5.162)$$

y

$$\hat{F}_0 |0; k^\mu\rangle_R = 0, \quad (5.163)$$

lo que conlleva a la siguiente expresión

$$0 = \hat{F}_0 |0; k^\mu\rangle_R = \left(\hat{\alpha}_0^i \hat{d}_0^i \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{-n}^i \hat{d}_n^i + \hat{d}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i) \right) |0; k^\mu\rangle_R = \Gamma_\mu k^\mu |0; k^\mu\rangle_R \equiv \not{k} |0; k^\mu\rangle_R, \quad (5.164)$$

que es la ecuación de Dirac en espacio de momentos. Ya hemos comentado que el estado base del sector R no es único debido a que el estado base satisface un álgebra

d dimensional, con $d = 10$, de Dirac. La operación de actuar con los operadores \hat{d}_0^μ no es más que multiplicar por una matriz de Dirac 10-dimensional, una matriz de 32×32 entradas, lo que conduce a que el estado base es un espinor de 32 componentes. Sin embargo, en 10 dimensiones es posible imponer condiciones de Weyl y de entradas reales lo que reduce el número de componentes independientes a 16. El estado base bajo estas consideraciones es un espinor de 16 componentes independientes llamado de Majorana-Weyl. Este espinor debe cumplir, a su vez, con la ecuación de Dirac, así que realmente posee 8 componentes independientes. Concluimos que el estado base del sector R posee 8 grados de libertad correspondientes a una representación irreducible del grupo $Sp(8)$.

Observemos que el primer estado excitado del sector NS es un estado bosónico con 8 grados de libertad y que el estado base del sector R es un estado fermiónico con el mismo número de grados de libertad, de modo que, si pudiésemos recorrer el espectro del sector R para que el primer estado excitado sea el estado base entonces la teoría RNS tendría 8 bosones no masivos y 8 fermiones no masivos en el espaciotiempo de fondo, de modo que podemos imponer supersimetría a nivel del espaciotiempo, y no solo en la hoja de mundo. Sin embargo para que la supersimetría realmente se generalice al espacio de fondo requerimos que el taquión del sector NS tenga su contraparte en el espectro bosónico, cosa que no ocurre, así que tenemos que dejarlo de lado y esto se consigue haciendo uso de la condición, o la llamada proyección, GSO [85].

Para discutir este proceso definamos un operador capaz de contar el número de oscilaciones generadas por los operadores b en un estado NS, dado por

$$\hat{\mathcal{F}}_{NS} = \sum_{r=1/2}^{\infty} \hat{b}_{-r}^i \hat{b}_r^i, \quad (5.165)$$

e igualmente

$$\hat{\mathcal{F}}_R = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{d}_{-n}^i \hat{d}_n^i, \quad (5.166)$$

para realizar el conteo de oscilaciones \tilde{d} en un estado R. Mediante estos dos operadores podemos construir otro operador conocido como operador de paridad G; para el sector NS está dado por

$$\hat{\mathcal{G}} = (-1)^{\hat{\mathcal{F}}_{NS}+1} = (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} \hat{b}_{-r}^i \hat{b}_r^i + 1}. \quad (5.167)$$

Mientras que en el sector R adopta la forma

$$\hat{\mathcal{G}} = \Gamma^{11} (-1)^{\hat{\mathcal{F}}_R+1} = \Gamma^{11} (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{d}_{-n}^i \hat{d}_n^i + 1}, \quad (5.168)$$

donde Γ^{11} está definida como

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{10}, \quad (5.169)$$

que es el análogo diez dimensional de la matriz de Dirac γ^5 en cuatro dimensiones. Los espinores que satisfacen

$$\Gamma_{11} \Psi^\mu = \Psi^\mu, \quad (5.170)$$

se dice que tienen quiralidad positiva, en cambio, los espinores tales que

$$\Gamma_{11}\Psi^\mu = -\Psi^\mu, \quad (5.171)$$

poseen quiralidad negativa.

El proceso de proyección GSO consiste en, para el sector NS, retener solo los estados con G-paridad positiva, es decir, la proyección GSO contempla en el espectro solo los estados $|\Omega\rangle$ que cumplan la relación

$$\hat{\mathcal{G}}|\Omega\rangle = (-1)^{\hat{\mathcal{F}}_{NS}+1}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (5.172)$$

misma que implica

$$\mathbb{I} = (-1)^{\hat{\mathcal{F}}_{NS}+1}, \quad (5.173)$$

con lo que la única forma de satisfacer la condición GSO es que el estado $|\Omega\rangle$ posea un número impar de oscilaciones b , es decir,

$$\hat{\mathcal{F}}_{NS}|\Omega\rangle = f|\Omega\rangle, \quad f \text{ impar} \quad (5.174)$$

Los estados que quedan fuera del espectro son aquellos con un número par de oscilaciones b , entre ellos el estado base taquiónico del sector NS. Puede mostrarse que, una vez implementada la proyección GSO, tendremos el mismo número de bosones y fermiones para cada nivel de masa [114]. Entonces, mediante la implementación de la proyección GSO, la teoría RNS posee el mismo número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos sugiriendo fuertemente supersimetría en el espaciotiempo de fondo.

En el sector R somos libres de escoger si consideramos en el espectro los estados con un número par o impar de oscilaciones \tilde{d} dependiendo de la quiralidad del estado base. De hecho, el proyectar en el espectro uno u otro conjunto de estados conduce a diferentes teorías de cuerdas con diferentes propiedades, y que discutiremos en breve estudiando el espectro de cuerda cerrada.

Una vez estudiadas las cuerdas abiertas de esta teoría recordemos que las cuerdas cerradas de la teoría RNS poseen modos derechos e izquierdos, y que cada uno de ellos tiene la posibilidad de tener condiciones de frontera de Ramond o de Neveu-Schwarz. Debemos, en consecuencia, estudiar los cuatro sectores resultantes: R-R, R-NS, NS-R y NS-NS. Al igual que en la cuerda abierta, proyectando los estados con G-paridad positiva en el sector NS remueve el estado de taquión. Para el sector R podemos proyectar indistintamente sobre los estados con G-paridad positiva o negativa dependiendo de la quiralidad del estado base sobre el que los estados están contruidos. Dos diferentes teorías resultan de este análisis, las teorías de supercuerda tipo IIA y IIB, según la G-paridad de los modos izquierdos y derechos en el sector R es la misma u opuesta, respectivamente.

En la teoría de tipo IIB los estados base derechos e izquierdos del sector R tienen la misma quiralidad, por definición positiva. Esto es, los dos sectores R tienen la misma G-paridad. Si denotamos a cada estado base por $|+\rangle_R$, entonces los estados no-masivos del espectro de cuerda cerrada en la teoría IIB son

$$|+\rangle_R \otimes |+\rangle_R,$$

$$\begin{aligned}
& \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS} \otimes \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS}, \\
& \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS} \otimes |+\rangle_R \\
& |+\rangle_R \otimes \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS}.
\end{aligned} \tag{5.175}$$

Dado que el estado $|+\rangle_R$ es un espinor con 8 componentes, vemos que cada uno de los cuatro sectores posee $8 \times 8 = 64$ estados.

En la teoría tipo IIA los estados base derechos e izquierdos tienen quiralidades opuestas, que podemos denotar por $|+\rangle_R$ y $|-\rangle_R$. Los estados no-masivos de cuerda cerrada en la teoría tipo IIA son

$$\begin{aligned}
& |-\rangle_R \otimes |+\rangle_R, \\
& \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS} \otimes \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS}, \\
& \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS} \otimes |+\rangle_R \\
& |-\rangle_R \otimes \hat{b}_{-1/2}^i |0\rangle_{NS},
\end{aligned} \tag{5.176}$$

teniendo nuevamente 64 estados por cada sector. Observemos que cada una de las teorías posee en su espectro no masivo dos gravitinos de Majorana-Weyl, con ello forman $\mathcal{N} = 2$ múltipletes de supergravedad [114].

Los distintos tipos de estados no masivos de ambas teorías pueden resumirse de la siguiente forma. Para el sector R-R los estados son bosones obtenidos mediante el producto tensorial de dos espinores de Majorana-Weyl. Para el caso de la teoría IIA, los dos espinores de Majorana-Weyl tienen quiralidad opuesta, por ello se obtiene un campo de norma vectorial, 8 estados, y una 3-forma, 56 estados. En la teoría tipo IIB los dos espinores de Majorana-Weyl tienen la misma quiralidad y conducen a un escalar, 1 estado, a una 2-forma, 28 estados, y a una 4-forma con un campo autodual, 35 estados. En el sector NS-NS tenemos que ambos espectros, el de tipo IIA y el de tipo IIB, coinciden y contienen un escalar llamado dilaton, una 2-forma antisimétrica, 28 estados, llamada de Kalb-Ramond y un tensor sin traza de rango 2, el graviton, 35 estados.

En cambio los sectores NS-R y R-NS contienen, cada uno, un gravitino con espín $3/2$, 56 estados, y un fermión de espín $1/2$, llamado dilatino, 8 estados. En el caso de la teoría IIB, los dos gravitinos tienen la misma quiralidad, y opuesta en la teoría IIA.

Concluyamos el estudio de la teoría RNS realizando un breve resumen. El formalismo RNS parte de la necesidad de incluir en la teoría de cuerdas a los fermiones, para ello se impuso supersimetría a nivel de la hoja de mundo. Al extrapolar las condiciones para estados físicos que utilizamos en la cuerda bosónica obtuvimos que la dimensión crítica del espaciotiempo de fondo es $d = 10$, y finalmente se removieron los estados de taquión mediante la proyección GSO, obteniendo los espectros no masivos que hemos estudiado. En particular hemos introducido los elementos no masivos constituyentes de la teoría de cuerdas cerradas tipo IIB y que es uno de los elementos más importantes de la correspondencia holográfica. Otro de los elementos esencia-

les corre a cargo del estudio de las llamadas D-branas como objetos dinámicos y su incorporación a la teoría de supercuerdas y que discutiremos a continuación.

5.1.2. D-branas en supercuerdas

Hemos presentado a las D-branas al discutir las condiciones de frontera de la cuerda abierta, en específico, al trabajar con las condiciones de Dirichlet. Sin embargo, las hipersuperficies así definidas son más que regiones sobre las que anclamos las cuerdas abiertas y deben, en cambio, pensarse como objetos dinámicos. En otras palabras, una teoría de cuerdas no es solo una teoría de objetos unidimensionales, también contiene objetos, denominados branas, de dimensión superior. Dedicamos este espacio para desarrollar esta idea y mostrar la dinámica de las D-branas para finalmente ver su comportamiento dentro de la teoría de supercuerdas.

Las D-branas son objetos dinámicos con masa y como tales son participes de los efectos de la gravedad. De hecho, debe ser capaz de responder frente a los impulsos de los distintos campos de fondo; recordemos que en el espectro no-masivo de cuerda bosónica abierta se encuentran escalares, correspondientes a las fluctuaciones de la D-brana, y un campo de norma $U(1)$. Debemos encontrar una acción que describa su dinámica.

Si introducimos las coordenadas ξ^a , $a = 0, \dots, p$ para la D-brana, podemos escribir una acción para la dinámica de las D-branas en términos de los campos que viven en el *volumen de mundo* de la brana, región del espaciotiempo que define el movimiento de la brana de igual forma a como se define la hoja de mundo con las cuerdas. Los campos que especifican la posición de la brana son los campos $X^\mu(\xi)$, escalares en el volumen de mundo, y debe tomarse en cuenta la presencia del campo de norma $A_a(\xi)$. Concentrémonos por el momento en los primeros. De forma totalmente análoga a lo hecho en la cuerda bosónica la acción es

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{G} \quad (5.177)$$

donde $G = \det G_{ab}$ y G_{ab} es la métrica inducida en la D-brana y que sabemos se escribe como

$$G_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} G_{\mu\nu}, \quad a, b \in \{0, \dots, p\}. \quad (5.178)$$

T_p es la tensión de la D-brana y la dependencia del dilatón $e^{-\Phi} = g_c^{-1}$ aparece debido a que esta es una acción de cuerda abierta a nivel árbol [60]. De aquí rescatamos que la constante de cuerda no es un parámetro libre, sino que está dado por el valor de expectación del campo del dilatón Φ como $g_c = e^\Phi$ [84]. En consecuencia, g_c varía en el espaciotiempo. Debido a esto, el hablar de una constante de acoplamiento, como en la ecuación anterior, hace referencia al valor del dilatón en el infinito, $g_c = e^{\Phi_\infty}$ [99].

Sin embargo esta no puede ser la acción que describa completamente a la D-brana debido a que debe introducirse una dependencia en el campo $B_{\mu\nu}$ y esto es debido a su mezcla con las componentes de la métrica, además de involucrar al campo de

norma, propio del espectro de cuerda abierta. Para cumplir dicho propósito notemos que existe una restricción en la forma que aparecen los campos B_{ab} y A^a en la acción. La combinación $B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}$ puede entenderse de la siguiente manera: en la acción de Polyakov la incorporación del campo B_{ab} como campo de fondo está dado por un sumando con la siguiente estructura [114]

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} (i\epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu), \quad (5.179)$$

mientras que A^a aparece como un término de frontera de la hoja de mundo

$$\int_{\partial\mathcal{M}} d\tau A_\mu \partial_\tau X^\mu. \quad (5.180)$$

Así los campos aparecen en la combinación [114],

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} B + \int_{\partial\mathcal{M}} A. \quad (5.181)$$

Esta acción es invariante ante transformaciones de norma de la forma $\delta A_a = \partial_a \lambda$. Sin embargo, la transformación de norma $\delta B_{ab} = \partial_a \chi_b - \partial_b \chi_a$ otorga un término de frontera que debe cancelarse con la transformación de A tal que $\delta A_a = -\chi_a/2\pi\alpha'$. Así que la combinación $B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}$, con $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$, es invariante ante ambas simetrías; esta es la combinación de A y B que debe aparecer en la acción con la finalidad de que la invariancia de norma se preserve [9, 114].

Con las consideraciones hechas y asumiendo que ninguno de los campos descritos varía de forma que sus derivadas sean divergentes junto con un espaciotiempo débilmente curvado, encontramos que la acción que describe la dinámica de las Dp-branas es la siguiente [60]

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}. \quad (5.182)$$

Esta es la acción de Dirac-Born-Infeld donde la tensión T_p es la que gobierna el comportamiento de la Dp-brana frente a excitaciones externas.

Volvamos ahora al estudio de la teoría de cuerdas supersimétrica y pongamos especial atención a la teoría tipo IIB. Como sabemos, la teoría tipo IIB vive en 9+1 dimensiones su espectro bosónico no-masivo corresponde a los campos del dilatón, gravitón y del campo de Kalb-Ramond, esto en el sector NS-NS. Para el sector R-R tendremos los campos del axi3n, la 2-forma $C_{ab}(x^\mu)$ y la 4-forma autodual³ $C_{\mu\nu\rho\sigma}^+$. Los campos B_{ab} , C_{ab} y C_{abcd}^+ tienen intensidades de campo asociadas

$$H_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2!} \partial_{[\mu} B_{\nu\sigma]}, \quad G_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2!} \partial_{[\mu} C_{\nu\sigma]}, \quad G_{\mu\nu\sigma\rho\lambda}^+ = \frac{1}{4!} \partial_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma\lambda]}^+, \quad (5.183)$$

³Decimos que un campo $T_{n_1, \dots, n_{d-m}}$ es autodual si $T_{n_1, \dots, n_{d-m}} = \star T_{n_1, \dots, n_{d-m}}$, donde \star denota al dual de Hodge: $\star T_{n_1, \dots, n_{d-m}} = \frac{\sqrt{-g}}{n!} \epsilon_{n_1, \dots, n_{d-m}}^{l_1, \dots, l_m} T_{l_1, \dots, l_m}$ [61]

los paréntesis cuadrados que aparecen indican la antisimetrización de los índices. Los campos resultan invariantes bajo las transformaciones de norma

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\xi_{\nu]}, \quad C_{\mu\nu} \rightarrow C_{\mu\nu} + \partial_{[\mu}\zeta_{\nu]}, \quad C_{\mu\nu\rho\sigma}^+ \rightarrow C_{\mu\nu\rho\sigma}^+ + \partial_{[\mu}\zeta_{\nu\rho\sigma]}. \quad (5.184)$$

Por otro lado, los fermiones no-masivos de la teoría son dos dilatinos λ_s^1 y λ_s^2 , y dos gravitinos ξ_{sl}^1 y ξ_{sl}^2 .

Como ya hemos comentado, todos estos campos están emparentados entre sí por una supersimetría $\mathcal{N} = 2$, con dos supercargas de Majorana-Weyl en 9+1 dimensiones.

Para bajas energías, $E \ll l_c^{-1}$, la acción efectiva de la teoría está dada por

$$S_{IIB} = S_{sugra} + S_{\alpha'}, \quad (5.185)$$

donde el primer sumando, dominante a bajas energías, es la acción de supergravedad tipo IIB en 9+1 dimensiones [85]

$$\begin{aligned} S_{sugra} = & \frac{1}{16\pi G} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\Phi} \left(R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{12}H^{\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\partial_\mu C\partial^\mu C - \frac{1}{12}G^{\mu\nu\rho}G_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{480}G^{+\mu\nu\rho\sigma\lambda}G_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}^+ \right] \\ & - \frac{1}{32\pi G} \int d^{10}x C^+ \wedge H \wedge G + \text{fermiones}. \end{aligned} \quad (5.186)$$

La constante de Newton G en diez dimensiones en supergravedad IIB puede expresarse en términos del acoplamiento de cuerdas y la longitud de cuerdas como [85]:

$$16\pi G = (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8. \quad (5.187)$$

La ecuación (5.186) está escrita en el llamado marco de cuerdas. Mediante la transformación de Weyl en el espaciotiempo

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{\Phi(x)/2} g_{\mu\nu}(x), \quad (5.188)$$

se reescribe la acción (5.186) en el marco de Einstein:

$$S_{sugra} = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}e^{-\Phi}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} \dots \right), \quad (5.189)$$

donde aparece de forma explícita el término de Einstein-Hilbert en 9+1 dimensiones. El segundo sumando de la acción (5.185), $S_{\alpha'}$, contiene una serie de correcciones en potencias de $l_c = \sqrt{\alpha'}$ [114].

Cada solución a las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción (5.185) representa un fondo sobre el cual se pueden propagar las cuerdas. Cuando se considera un estudio de baja energía, la contribución de $S_{\alpha'}$ resulta despreciable y los fondos pueden obtenerse como soluciones a las ecuaciones de movimiento de la acción (5.186).

El espaciotiempo de Minkowski en 9+1 dimensiones es solución de dichas ecuaciones de movimiento y se puede mostrar que este espacio es invariante ante las 32

supersimetrías de la teoría se supercuerdas IIB, decimos que Minkowski es un fondo máximalmente supersimétrico [65].

Para ver como se acoplan las D-branas con los campos de supergravedad es posible estudiar las amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas y cerradas mediante las cuales podamos generalizar la acción de Dirac-Born-Infeld a la siguiente expresión [60]

$$S_{DBI-WZ} = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \\ + T_p \int d^{p+1}\xi (C_{p+1} + C_{p-1} \wedge (B_{ab} + (2\pi l_c^2) F_{ab}) + \dots) + \text{fermiones.} \quad (5.190)$$

Considerando la extensión infinita en las direcciones x^p , la Dp-brana posee una masa infinita. Sin embargo, la masa por unidad de hipervolumen es propiamente la tensión de la brana, es finita y está dada por

$$T_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}. \quad (5.191)$$

Como en toda teoría de gravedad, las formas de materia debe interaccionar gravitacionalmente y las D-branas no son la excepción y su presencia deforma el espaciotiempo alrededor de ella. La métrica asociada a N Dp-branas puede encontrarse explícitamente al resolver las ecuaciones de movimiento de supergravedad [60, 114]. Para nuestro caso de interés, D3-branas en la teoría de supercuerdas IIB, se tiene [19]

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad (5.192)$$

La métrica en el segundo paréntesis es la métrica de un espaciotiempo plano en las direcciones transversas de modo que para una cierta elección de coordenadas $r^2 = y_1^2 + \dots + y_6^2$. La función $H(r)$ está dada por

$$H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4} \quad (5.193)$$

donde

$$L^4 = 4\pi g_c N l_c^4. \quad (5.194)$$

Dado que las D3-branas se extienden a lo largo de tres direcciones espaciales, su efecto gravitacional en las direcciones transversales es el mismo que el de una partícula con masa $M \propto NT_{D3}$. De modo que la métrica (5.192) solo depende de la coordenada radial r en las direcciones transversales. Para $r \gg L$ se tiene que $H \sim 1$ y la métrica se reduce a un espaciotiempo plano. Observamos entonces que el parámetro L puede ser considerado como una longitud de escala característica de los efectos gravitacionales de las N D3-branas. Cuando $r \gg L$, estos efectos se vuelven despreciables, pero son considerables en el límite $r \ll L$. Para este último límite la métrica toma la forma

$$ds^2 = ds_{AdS_5}^2 + L^2 d\Omega_5^2, \quad (5.195)$$

donde reconocemos que

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{L^2}{r^2}dr^2, \quad (5.196)$$

es la métrica de un espaciotiempo de anti-de Sitter cinco dimensional en las llamadas coordenadas del parche de Poincaré. Hemos visto con ello que la región de fuerte atracción gravitacional la métrica se factoriza en $AdS_5 \times S^5$.

Una propiedad de las D-branas que no tiene análogo en la teoría de campos, es la aparición de una teoría de norma no abeliana cuando múltiples D-branas se acercan entre si paralelamente, compartiendo todas las direcciones espaciales [60]. Además de los grados de libertad propios de cada D-brana, ahora hay nuevos sectores correspondientes a cuerdas abiertas que se anclan a diferentes branas. Por ejemplo, al considerar dos branas paralelas separadas por una distancia r , como lo mostrado en la Fig. (5.1), tendremos a las cuerdas cuyos extremos terminan en la misma brana y, como antes, asocian dos campos de norma no masivos, denotados por $(A_\mu)^1_1$ y $(A_\mu)^2_2$, con los índices superiores e inferiores denotando donde inicia y termina la cuerda, respectivamente. Pero se deben considerar también las cuerdas que terminan en D-branas diferentes, añadiendo dos campos de norma $(A_\mu)^1_2$ y $(A_\mu)^2_1$, que poseen una masa dada por la tensión de cuerda y por la distancia entre branas, $m = r/2\pi\alpha$, [[19]]. Se vuelven no masivos cuando las D-branas se superponen, $r = 0$. En esta última situación tendremos cuatro campos de norma no masivos, $(A_\mu)^i_j$, $i, j \in \{1, 2\}$, que son exactamente los campos de norma del grupo de norma $U(2)$. En general, cuando se toman en cuenta N Dp-branas paralelas superpuestas uno encuentra un múltiplete de campos de norma no masivos del grupo de norma $U(N)$ junto a $9 - p$ campos escalares en la representación adjunta del grupo $U(N)$.

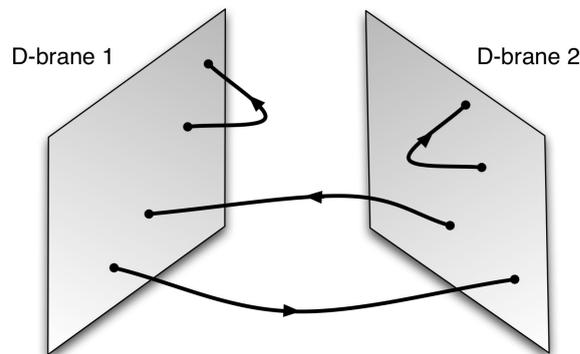


Figura 5.1: Las cuerdas abiertas pueden anclar sus extremos en D-branas distintas. Imagen tomada de [19]

Para N D3-branas en la teoría IIB se tiene un espectro no masivo que consiste de un campo de norma A_μ no abeliano, seis campos escalares ϕ^i , con $i \in \{1, \dots, 6\}$, y cuatro fermiones de Weyl, todos en la representación adjunta de $U(N)$, por lo que podemos expresarlos como matrices cuadradas de $N \times N$. Considerando solo derivadas de segundo orden, la acción efectiva de bajas energías para estos modos

no masivos resulta ser justamente la teoría de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $U(N)$ en $3 + 1$ dimensiones. La parte bosónica de dicho lagrangiano puede escribirse como [19]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^i D^\mu \phi^i + [\phi^i, \phi^i]^2 \right), \quad (5.197)$$

con el acoplamiento de Yang-Mills dado por

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_c. \quad (5.198)$$

La ecuación (5.197) es de hecho la parte bosónica del lagrangiano renormalizable más general consistente con la supersimetría $\mathcal{N} = 4$ [19]. Debido al número de supersimetrías la teoría posee una función beta que se anula [94], en consecuencia, la constante de acoplamiento es invariante de escala y la teoría resulta conforme. El lagrangiano recibe correcciones de derivadas superiores pesadas por $\alpha' E^2$. El sistema completo contiene modos de cuerda cerrada que se propagan en el espaciotiempo 10 dimensional y que son capaces de interactuar con las branas y cuerdas abiertas. La fuerza de las interacciones de los modos de cuerda cerrada con cualquier otro está controlado por la constante de Newton G , de modo que la constante de acoplamiento adimensional es GE^8 . La misma es despreciable a bajas energías y en este límite las cuerdas cerradas se vuelven no interactuantes, que es esencialmente la afirmación de que la gravedad es libre en el infrarrojo. Interacciones entre las cuerdas cerradas y la cuerdas abiertas está determinada por la misma constante debido a que la gravedad se acopla de forma universal a toda forma de materia. De modo que a bajas energías las cuerdas cerradas también se desacoplan de las cuerdas abiertas. Con esto concluimos que a bajas energías el sector interactuante se reduce a una teoría super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $SU(N)$ en espaciotiempo plano en cuatro dimensiones.

5.2. La correspondencia AdS/CFT

Hemos dado en la sección pasada dos descripciones equivalentes del conjunto de N D3-branas. La primera de ella corresponde a una descripción de cuerdas abiertas donde las D-branas corresponden a hiperplanos en un espaciotiempo plano, y sus excitaciones son justamente cuerdas abiertas cuyos extremos terminan en la brana. En esta descripción las cuerdas cerradas se propagan en el espaciotiempo plano fuera de las D3-branas.

En la segunda visión de las D-branas, que en contraste con la primera podemos llamar descripción de cuerda cerrada, se hace patente la ausencia de cuerdas abiertas y las branas corresponden a la propia geometría del espaciotiempo sobre las que se propagan cuerdas cerradas. En este caso, el límite de baja energía consiste en concentrarse en excitaciones arbitrariamente pequeñas, energéticamente hablando, vistas por un observador ubicado en la región asintóticamente plana. Con esto se obtienen dos conjuntos de grados de libertad, aquellos propagándose en la región

asintóticamente plana y los que se propagan en la garganta, Fig.(5.2). En la región de Minkowski solo los modos no masivos del multiplete en 10 dimensiones sobrevive, más aún, estos modos se vuelven no interactuantes pues su interacción es proporcional a GE^8 . Sin embargo, para la región en la garganta toda la torre de modos masivos sobrevive. Esto se debe a que los modos en la garganta deben vencer un potencial gravitacional para arribar a la región asintóticamente plana, en consecuencia, una cuerda cerrada con energía propia arbitrariamente grande es visto por un observador en la región asintóticamente plana con energía arbitrariamente pequeña siempre que la cuerda se encuentre lo suficientemente dentro de la garganta. Al analizar los modos con cada vez menos energía estos se ubicarán cada vez más al interior de la garganta desacoplándose de la región asintóticamente plana. De aquí que hemos concluido que, en la visión de cuerda cerrada, el sector interactuante del sistema a baja energía se reduce a cuerdas cerradas en $AdS_5 \times S^5$.

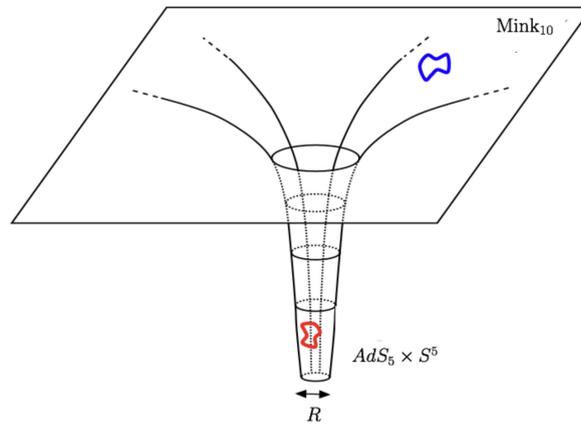


Figura 5.2: Sistema excitado en la descripción de cuerda cerrada. Imagen tomada de [19]

Estas dos concepciones que hemos presentado son estudiadas, en términos de su sencillez, en dos regímenes de parámetros distintos. Para $g_c N \ll 1$, se observa de la ecuación (5.194) que $L \ll l_c$, es decir el radio que caracteriza los efectos gravitacionales de la D-brana se vuelve pequeño medido respecto a la longitud de cuerda, de modo que las cuerdas cerradas sienten un espaciotiempo plano salvo en la cercanía del conjunto de N D3-branas. En este régimen se vuelve útil la descripción de cuerda abierta. En el régimen contrario $g_c N \gg 1$ encontramos que $L \gg l_c$, así que el espaciotiempo está débilmente curvado y la descripción de cuerda cerrada se simplifica y esencialmente se vuelve una teoría de gravedad clásica. La descripción de cuerda abierta en este último límite es difícil de estudiar debido a que $g_c N$ controla la expansión perturbativa de la teoría [3].

En resumen, tenemos dos descripciones de un conjunto de N D3-branas, la primera de ellas corresponde a hiperplanos superpuestos en un espaciotiempo de Minkowski con cuerdas abiertas ancladas a ellos. El límite de baja energía queda descrito por la teoría de Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $SU(N)$. La segunda

descripción corresponde a un espaciotiempo curvo en el que únicamente las cuerdas cerradas pueden propagarse. Su límite de baja energía nos conduce a una teoría de cuerdas cerradas IIB en un espaciotiempo $AdS_5 \times S^5$.

La conjetura natural es que ambas descripciones sean equivalentes, y en particular su descripción de bajas energías, estableciendo que [3, 68]

$$\begin{aligned} & \text{Super Yang-Mills } \mathcal{N} = 4 \text{ con grupo de norma } SU(N) \\ & = \\ & \text{Teoría de cuerdas IIB en un fondo } AdS_5 \times S^5 \end{aligned} \quad (5.199)$$

De las ecuaciones (5.198) y (5.194) encontramos como se relacionan los parámetros de ambas teorías entre sí:

$$g_c = \frac{g_{YM}^2}{4\pi}, \quad \frac{L}{l_c} = (g_{YM}^2 N)^{1/4}. \quad (5.200)$$

También puede darse este par de relaciones en términos de la constante de Newton diez dimensional:

$$\frac{G}{L^8} = \frac{\pi^4}{2N^2}, \quad \frac{L}{l_c} = (g_{YM}^2 N)^{1/4}. \quad (5.201)$$

Hagamos énfasis en una de las propiedades más importantes de la correspondencia holográfica y que podemos rescatar de las dos ecuaciones anteriores. Para el límite planar de la teoría de norma, donde $N \rightarrow \infty$, y con un acoplamiento infinito, $\lambda \equiv g_{YM}^2 N \rightarrow \infty$, encontramos que la correspondencia proporciona una descripción de la teoría de cuerdas libre, $g_c \rightarrow 0$, y que se describe de forma exacta por la acción de supergravedad pues $l_c^2/L^2 \rightarrow 0$; proporcionando una herramienta para explorar la región de acoplamiento fuerte de la teoría de norma. En contraste, la región $\lambda \ll 1$, $N \gg 1$ de la teoría de norma contiene información sobre la teoría de cuerdas en su espectro débilmente interactuante, $g_c \rightarrow 0$, en un fondo altamente curvado, $L^2/l_c^2 \ll 1$.

Toda la discusión precedente relaciona a la teoría de cuerdas con un teoría de norma a temperatura cero, consecuencia de considerar el estado base de las N D3-branas. La generalización a temperatura no cero corre a cargo de tomar en cuenta los grados de libertad excitados de las D3-branas a temperatura finita y lo analizaremos en las secciones siguientes.

5.3. Aspectos generales de la correspondencia holográfica

En la sección anterior dilucidamos el razonamiento que nos llevó a concluir la relación entre una teoría de norma SYM $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $SU(N)$ y la teoría de cuerdas IIB en un fondo $AdS_5 \times S^5$. La teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$ es una teoría de norma supersimétrica maximal en (3+1) dimensiones, cuyo contenido de campos incluye

un campo de Yang-Mills A_μ , seis escalares ϕ^i , $i \in \{1, \dots, 6\}$ y cuatro fermiones de Weyl ψ_a , $a \in \{1, \dots, 4\}$, todos ellos en la representación adjunta del grupo de norma. Por otro lado, la métrica del espaciotiempo $AdS_5 \times S^5$ en una cierta elección de coordenadas es

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 + L^2 d\Omega_5^2, \quad (5.202)$$

con $r \in (0, \infty)$, $x^\mu = (t, \vec{x})$, $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en cuatro dimensiones espaciotemporales y $d\Omega_5^2$ es la métrica de una esfera unitaria cinco dimensional. Los dos sumandos iniciales en la métrica (5.202) correspondientes al espaciotiempo AdS_5 cubre lo que hemos llamado el parche de Poincaré. Resulta en ocasiones conveniente escribir estos sumandos en términos de la coordenada radial $z = L^2/r \in (0, \infty)$

$$ds_{AdS_5} = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (5.203)$$

Cada rebanada $z = cte$ de AdS_5 es isométrica a un espacio de Minkowski cuatro dimensional con x^μ identificadas como las coordenadas de la teoría de norma. Al hacer tender $z \rightarrow 0$ nos aproximamos a la frontera, en el sentido coordenado, de AdS_5 . Mientras que en $z \rightarrow \infty$ nos aproximamos al llamado horizonte de Poincaré, donde el factor L^2/z^2 y el determinante de la métrica tienden a cero.

Debido al factor conforme R^2/z^2 frente a la métrica de Minkowski en (5.203), la energía y las escalas de longitud en las direcciones de x^μ en AdS_5 van a estar relacionadas a las de la teoría de norma vía un reescalamiento dependiente de z [3]. Para plasmar una imagen clara de esta aseveración tomemos un objeto con energía E_{YM} y tamaño d_{YM} en la teoría de norma, estas son cantidades medidas en unidades de las coordenadas t y \vec{x} . De la ecuación (5.203) observamos que la energía propia, E , y la longitud propia, d , del objeto en el bulto son

$$d = \frac{L}{z} d_{YM}, \quad E = \frac{z}{L} E_{YM}, \quad (5.204)$$

donde se hace uso de que la energía es conjugado del tiempo, por lo que tendremos que E escala de forma opuesta a d . Esto implica que los procesos físicos que observamos en el bulto con la misma energía propia pero ocurriendo a distintas posiciones radiales corresponden a fenómenos distintos en la teoría de norma cuya energía escala como $E_{YM} \sim 1/z$. En otras palabras, un proceso en la teoría de norma con energía característica E_{YM} debe asociarse a un proceso en el bulto ubicado en $z \sim 1/E_{YM}$ [57, 68]. En particular, el límite de alta energía (UV), $E_{YM} \rightarrow \infty$, en estas coordenadas corresponde a $z \rightarrow 0$, es decir, a la región cercana a la frontera; mientras que el límite de baja energía (IR), $E_{YM} \rightarrow 0$, corresponde a $z \rightarrow \infty$, la región cercana al horizonte.

La teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$ es una teoría invariante de escala caracterizada por dos parámetros, el acoplamiento de Yang Mills g_{YM} y el número de colores N . La teoría de supercuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ es una teoría de gravedad cuántica en un espaciotiempo maximalmente simétrico caracterizado por la constante de Newton G y la longitud de cuerda l_c en unidades del radio de curvatura L . Las relaciones entre

estos parámetros están dados por la ecuación (5.201). En términos de la longitud de Planck l_p tenemos que $G \sim l_p^8$ y entonces

$$\frac{l_p^8}{L^8} \propto \frac{1}{N^2}, \quad \frac{l_c^2}{L^2} \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (5.205)$$

donde $\lambda = g^2 N$ ya ha aparecido en nuestra discusión y es el llamado acoplamiento de 't Hooft.

La teoría de cuerdas IIB en un fondo $AdS_5 \times S^5$ se desconoce, sin embargo al considerar el límite

$$\frac{l_c^8}{L^8} \ll 1, \quad \frac{l_c^2}{L^2} \ll 1, \quad (5.206)$$

la teoría se simplifica y puede aproximarse de forma efectiva por supergravedad clásica, que es esencialmente la teoría general de la relatividad acoplada a diversos campos de materia. Una consecuencia inmediata de considerar el límite (5.206) en las relaciones (5.205) corresponde a

$$N \gg 1, \quad \lambda \gg 1. \quad (5.207)$$

Estas relaciones permiten considerar en la teoría de norma el límite planar fuertemente acoplado, descrito entonces por supergravedad clásica.

La razón de una simplificación tan notable en la teoría de cuerdas puede dilucidarse de la siguiente forma; consideremos en primera instancia que $l_c \ll L^2$, esto es equivalente a que $m_c^2 \gg L^*$ o a que $T_c \gg L^*$, donde $L^* = 1/L^2$ es la escala de curvatura característica del espaciotiempo donde se está propagando la cuerda. La condición $m_c^2 \gg L^*$ implica que debe omitirse la contribución de todos los modos masivos de las cuerdas cuando se consideran procesos de baja energía. Esto es, solo los modos no masivos, justamente los modos de supergravedad, son relevantes en este límite. Otra forma de observar este hecho es que en límite $l_c^2 \ll L^2$ la naturaleza extendida de las cuerdas queda oculta y es una buena aproximación el considerarlas como objetos puntuales. La expansión en α' , con $\alpha' = l_c^2$, incorpora justamente los efectos asociados al considerar la longitud finita de cuerda en una serie perturbativa, del lado de la teoría de norma esta expansión corresponde a una en potencias de $1/\sqrt{\lambda}$.

Sin embargo, no siempre es conveniente ignorar la naturaleza de objeto extendido de la cuerda pues para ciertos escenarios, por ejemplo en el contexto de cálculos de lazos de Wilson, la descripción de ciertas cantidades físicas requiere de considerar largas cuerdas típicamente más grandes que L . En este caso es conveniente tomar la relación $T_c \gg L^*$, esta condición nos dice que la tensión de cuerda es muy grande comparada con la escala de curvatura típica del espaciotiempo donde se encuentra la cuerda, que a su vez implica que las fluctuaciones cuánticas alrededor de la forma clásica de la cuerda son despreciables. Estas cuerdas elongadas pueden seguir rompiéndose y reconectándose, pero, entre esos procesos, la dinámica de cuerda está completamente determinada por las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto. En estos casos, la expansión en α' incorpora efectos de cuerda asociados a las fluctuaciones de la misma, suprimidas en el límite $\lambda \rightarrow \infty$ donde la tensión de cuerda es infinita. Con esta

visión, la razón de despreciar los modos masivos corresponde a que las fluctuaciones de cuerda en una cuerda cuasi puntual son nimios.

En resumen, hemos visto que el considerar el límite fuertemente acoplado en la teoría de norma corresponde a suprimir la naturaleza extendida de cuerda en la teoría de cuerdas dual, mientras que el límite de N grande suprime su naturaleza cuántica. Cuando ambos límites son tomados simultáneamente la teoría de cuerdas se reduce a gravedad clásica con un número finito de campos.

Veamos ahora cuál es el papel del espacio S^5 en la factorización espaciotemporal que hemos obtenido. Dado que S^5 es un espacio compacto resulta conveniente expresar a los campos diez dimensionales en términos de una torre de campos en AdS_5 como expansión de armónicos en S^5 [3, 19]. Por ejemplo, para un campo escalar $\phi(x, \Omega)$ se puede establecer la siguiente descomposición:

$$\phi(x, \Omega) = \sum_l \phi_l(x) Y_l(\Omega), \quad (5.208)$$

donde x y Ω denotan las coordenadas de AdS_5 y de S^5 , respectivamente. $Y_l(\Omega)$ son los armónicos esféricos de S^5 . De aquí que para muchos propósitos pueda considerarse la dualidad original (5.2) como una equivalencia entre la teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$ fuertemente acoplada y la teoría de gravedad sobre AdS_5 únicamente.

Después de esta reducción dimensional sobre S^5 , la acción de supergravedad puede escribirse de la siguiente forma

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x (\mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_{mat}), \quad (5.209)$$

donde

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(R + \frac{12}{L^2} \right), \quad (5.210)$$

es el lagrangiano de Einstein-Hilbert con constante cosmológica negativa $\Lambda = -6/L^2$. \mathcal{L}_{mat} es el lagrangiano de los campos de materia, en el caso general deberán incluirse en él las torres infinitas provenientes de la expansión en la S^5 [3].

La relación entre la constante efectiva de Newton cinco dimensional, G_5 , y su homóloga diez dimensional, G , puede obtenerse de estudiar la reducción del término de Einstein-Hilbert:

$$\frac{1}{16\pi G} \int d^5x d^5\Omega \sqrt{-g_{10}} R_{10} = \frac{L^5 \Omega_5}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g_5} R_5 + \dots, \quad (5.211)$$

donde $\Omega_5 = \pi^3$ es el volumen de la S^5 . Esto implica que

$$G_5 = \frac{G}{\pi^3 L^5}, \quad \frac{G_5}{L^3} = \frac{\pi}{2N^2}, \quad (5.212)$$

una vez hecho uso de la ecuación (5.201).

5.3.1. Simetrías

Una primera observación que hay que hacer para ver que esta conjetura de dualidad está bien encaminada es estudiar las simetrías de ambos sistemas y comprobar que son equivalentes. La teoría de norma SYM $\mathcal{N} = 4$ es invariante ante el grupo conforme $SO(2, 4)$ y ante el grupo $SO(6)$ correspondiente a la simetría R de la teoría bajo la cual cada escalar ϕ^I transforma como un vector. Como la teoría es supersimétrica, se tiene, además, invariancia bajo 16 supersimetrías fermiónicas, Q_μ^A con $A, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, y bajo 16 supersimetrías especiales, S_μ^A con $A, \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$, que cierran el supergrupo conforme [3, 76].

Del lado de la teoría de cuerdas, las transformaciones que dejan la forma asintótica de la métrica invariante son precisamente el grupo $SO(2, 4) \times SO(6)$, el primer factor hace referencia al grupo de isometrías de AdS_5 y se corresponde con el grupo conforme de la teoría de norma. El segundo factor es el grupo de isometría de la S^5 , equivalente al grupo de la simetría R. Con esto se ha hecho un empate perfecto con las transformaciones bosónicas en ambos lados de la dualidad.

Para el caso de las transformaciones fermiónicas podemos observar un fenómeno similar. Dado que $AdS_5 \times S^5$ es una solución maximalmente simétrica de la teoría de cuerdas IIB, posee los 32 generadores de las supersimetrías fermiónicas que podemos separar en dos mitades para hacerlas corresponder con aquellas de la teoría de campo.

Con esto hemos observado que las simetrías globales en ambos lados de la dualidad son las mismas y este hecho sirve de soporte para seguir considerando el estudio de la conjetura.

5.3.2. Correspondencia campo-operador

Una vez verificada la igualdad de simetrías tornemos a emparejar parte del espectro de ambas teorías. Motivemos la discusión como lo podemos ver en [?]. Dado que la complejidad e importancia de la sección presente puede encontrarse un mejor estudio del mismo en [3, 57, 69].

Ya hemos visto que la constante de acoplamiento en SYM $\mathcal{N} = 4$, g_{YM}^2 , se identifica con la constante de acoplamiento de la teoría de cuerdas g_c salvo una constante. Habíamos comentado brevemente que esta constante en la teoría de cuerdas esta dada por $g_c = e^{\Phi_\infty}$, con Φ_∞ el valor del dilatón en la frontera de AdS en nuestro caso. Este hecho sugiere que el cambiar la teoría norma al modificar su constante de acoplamiento debe modificar el valor de frontera de un campo en el bulto. Generalizando, podemos pensar en una deformación de la teoría de norma dada por

$$S \rightarrow S + \int d^4x \phi(x)\mathcal{O}(x), \quad (5.213)$$

con $\mathcal{O}(x)$ un operador invariante de norma local, y $\phi(x)$ un posible acoplamiento dependiente de la posición espaciotemporal, es decir, una fuente. El ejemplo dado para g sugiere que para cada posible fuente ϕ para cada operador local invariante

de norma \mathcal{O} debe existir un campo dual en el bulto $\Phi(x, z)$, y viceversa, de forma que su valor en la frontera de AdS se identifica con la fuente según [3]:

$$\phi(x) = \Phi|_{\partial AdS}(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \Phi(x, z). \quad (5.214)$$

Esta expresión solo es válida para campos no masivos, debemos generalizar la expresión para campos masivos y lo haremos en breve.

Este mapeo biyectivo entre campos en el bulto de AdS y los operadores locales invariantes de norma en la teoría de norma se conoce como la *correspondencia campo-operador* [3]. Los campos y operadores así emparentados deben tener los mismos números cuánticos bajo las simetrías globales que hemos discutido, sin embargo no existe una forma general y sistemática de encontrar el campo dual a cada operador. Por fortuna, existe una restricción adicional para un conjunto muy importante de operadores en una teoría de norma, estos son, corrientes conservadas asociadas a simetrías globales. La fuente A_μ acoplada a una corriente conservada J_μ

$$\int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x), \quad (5.215)$$

debe pensarse como un campo externo de fondo, por la relación dada en (5.214) podemos tomarlo como el valor de frontera para el campo dinámico de norma $A_\mu(x, z)$ en AdS [28].

Un conjunto muy importante de corrientes conservadas en cualquier teoría invariante ante traslaciones espaciotemporales son aquellas resumidas en el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. La fuente $g_{\mu\nu}$ acoplada a $T_{\mu\nu}$ como

$$\int d^4x g_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x), \quad (5.216)$$

debe interpretarse como una deformación externa a la métrica. Según lo que hemos discutido, esta deformación esta asociada con el valor de frontera de la métrica del bulto $g_{\mu\nu}(x, z)$. Este hecho nos conduce a una importante conclusión general; el dual a una teoría de norma invariante bajo traslaciones, en donde el tensor de energía-momento es conservado, debe ser una teoría de gravedad [3, 57, 76].

5.3.3. Modos normalizables y no normalizables

Para concluir la discusión de aspectos generales de la correspondencia, y previo a comentar un par de generalizaciones que nos resultarán de particular interés para nuestro trabajo, trataremos con la relación que conlleva la dimensión conforme de los operadores en la teoría de norma con las propiedades de los campos en el bulto. Así también será importante analizar la interpretación de los modos normalizables y no normalizables, que definiremos más adelante, de la teoría en AdS con las propiedades de la teoría de campo.

Comencemos tomando un campo escalar masivo en el bulto Φ , dual a cierto operador escalar \mathcal{O} en la teoría de norma. Aunque hemos hecho énfasis en nuestro interés

en que la teoría de norma sea cuatro dimensional, para esta discusión permítase considerar una teoría de norma d dimensional. Para conllevar esta decisión debemos tomar un espacio AdS_{d+1} . La acción del campo escalar Φ en el bulto puede escribirse como

$$S = -\frac{1}{2} \int dz d^d x \sqrt{-g} (g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi + m^2 \Phi^2) + \dots, \quad (5.217)$$

donde $M, N \in \{1, \dots, d+1\}$ y se ha normalizado el campo Φ . La omisión de los sumandos correspondientes a ordenes superiores al cuadrático están suprimidos por potencias de $1/N$.

Dado que el espaciotiempo del bulto es invariante ante traslaciones en las direcciones x^μ , resulta conveniente tomar una descomposición en modos Fourier sobre estas direcciones, es decir,

$$\Phi(x^\mu, z) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \Phi(k^\mu, z), \quad (5.218)$$

donde $k \cdot x \equiv \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$ y $k^\mu \equiv (\omega, \vec{k})$, con ω y \vec{k} la energía y el momento respectivamente. En términos de esta descomposición, la ecuación de movimiento para Φ , obtenida de variar la acción (5.217), está dada por

$$z^{d+1} \partial_z (z^{1-d} \partial_z \Phi) - k^2 z^2 \Phi - m^2 L^2 \Phi = 0, \quad (5.219)$$

con $k^2 = -\omega^2 + \vec{k}^2$. Cerca de la frontera $z \rightarrow 0$, el segundo sumando puede ignorarse y la ecuación puede resolverse al considerar la forma asintótica

$$\Phi(k, z) \sim A(k) z^{d-\Delta} + B(k) z^\Delta, \quad \text{cuando } z \rightarrow 0 \quad (5.220)$$

donde,

$$\Delta = \frac{d}{2} + \nu, \quad \nu = \sqrt{m^2 L^2 + \frac{d^2}{4}}, \quad (5.221)$$

la razón de que las constantes de integración A y B tengan una dependencia en k es consecuencia de requerir que la solución sea regular al interior de AdS, donde $z > 0$. Al realizar la transformación de Fourier inversa obtenemos la siguiente relación en espacio de posiciones,

$$\Phi(x, z) \sim A(x) z^{d-\Delta} + B(x) z^\Delta, \quad \text{cuando } z \rightarrow 0 \quad (5.222)$$

con los exponentes reales en ambos sumandos dados por la desigualdad [3, 19]

$$m^2 L^2 \geq -\frac{d^2}{4}. \quad (5.223)$$

Puede mostrarse que la teoría es estable para cada m^2 en el rango otorgado por la expresión anterior, aun cuando para $m^2 L^2 < -d^2/4$ existan modos que crezcan exponencialmente en el tiempo [3]. Es decir, para el espacio de AdS un campo con $m^2 < 0$ no conduce a una inestabilidad siempre que cumpla con la cota (5.223), y que lleva el nombre de cota de Breitenlohner-Freedman. Para esta región permitida debe hacerse otra distinción dada por el intervalo acotado $-d^2/4 \leq m^2 L^2 < -d^2/4 +$

1 y el resto del intervalo. Para el intervalo acotado resulta que ambos sumandos en (5.222) son normalizables, otorgan un valor finito, respecto al producto interno

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} dz d\vec{x} \sqrt{-g} g^{tt} (\Phi_1^* \partial_t \Phi_2 - \Phi_2 \partial_t \Phi_1^*), \quad (5.224)$$

donde Σ_t es una rebanada con t constante. Para el resto del intervalo se obtiene que solo el segundo sumando es normalizable, el primer sumando es un modo no normalizable que afecta el comportamiento en la frontera. Dado que este comportamiento en la frontera está dado por $A(x)$, la presencia de este término no normalizable debe corresponder a una deformación en la teoría de norma con

$$S \rightarrow S + \int d^d x A(x) \mathcal{O}_A(x). \quad (5.225)$$

Observamos que el término no normalizable determina el Lagrangiano de la teoría de norma. En particular, para obtener una fuente finita $\phi(x)$, la ecuación (5.214) debe generalizarse para $\Delta \neq d$ a

$$\phi(x) = \Phi|_{\partial AdS}(x) \equiv \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} \Phi(x, z). \quad (5.226)$$

Por otro lado, los modos normalizables son elementos del espacio de Hilbert del bulto. En concreto, en la cuantización canónica uno expande a Φ en términos de una base de soluciones normalizables de la ecuación (5.219), de donde puede construirse el espacio de Fock y calcularse los correladores. La correspondencia entre el bulto y la teoría de norma establece entonces que sus respectivos espacios de Hilbert deben identificarse. En otras palabras, los modos normalizables deben corresponderse con estados de la teoría de norma. Esta relación otorga una herramienta para encontrar el espectro de excitaciones de baja energía de una teoría de norma fuertemente acoplada [3, 58].

Más aún, el coeficiente $B(x)$ del sumando normalizable en (5.222) puede identificarse con el valor de expectación del operador \mathcal{O} en presencia de la fuente $A(x)$ [3, 57]. En efecto,

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\phi = 2\nu B(x), \quad (5.227)$$

en el caso particular de tomar una solución puramente normalizable, $A(x) = 0$, esta ecuación otorga el valor de expectación del operador en la teoría de norma sin deformar [76].

Las ecuaciones (5.222), (5.225) y (5.226) implican que Δ debe identificarse con la dimensión conforme del operador de la teoría de norma \mathcal{O} dual a Φ [3]. Recordemos que una dilatación en la teoría de norma $x \rightarrow \lambda x$ corresponde a la isometría $x \rightarrow \lambda x$, $z \rightarrow \lambda z$ en la teoría de gravedad. Dado que Φ es un campo escalar, es invariante ante este cambio de coordenado, $\Phi'(\lambda x^\mu, \lambda z) = \Phi(x^\mu, z)$, lo que implica que las funciones asintóticas del campo dadas en (5.222) deben transformar como $A'(\lambda x^\mu) = \lambda^{\Delta-d} A(x^\mu)$ y $B'(\lambda x^\mu) = \lambda^{-\Delta} B(x^\mu)$. Obteniendo con estas ecuaciones que $A(x)$ tiene dimensión $d - \Delta$ y la dimensión de $B(x)$ es Δ . Con esto, las ecuaciones (5.225) y (5.226) son consistentes e implican que $\mathcal{O}(x)$ tiene dimensión conforme Δ .

Este estudio que hemos hecho alrededor de un campo escalar puede generalizarse al comportamiento de campos no escalares y en particular puede replicarse para la

métrica cinco dimensional del bulto [19]. En cambio, para una p-forma del bulto, la dimensión del Δ operador dual es la mayor raíz de la siguiente ecuación [87]

$$m^2 L^2 = (\Delta - p)(\Delta + p - d), \quad (5.228)$$

y el comportamiento cerca de la frontera para el campo resulta ser

$$\Phi_{\mu_1 \dots \mu_p} \sim A_{\mu_1 \dots \mu_p} z^{d-p-\Delta} + B_{\mu_1 \dots \mu_p} z^{\Delta-p}, \quad \text{cuando } z \rightarrow 0. \quad (5.229)$$

Con estos análisis obtenemos que la métrica $g_{\mu\nu}$ y un campo de norma A_μ , que corresponde a una 1-forma, tienen operadores duales con dimensión conforme dada por $\Delta = d$ y $\Delta = d - 1$, respectivamente, tal como cabría esperar del tensor de energía-momento y de la corriente vectorial que hemos encontrado como duales [3, 19]

Capítulo 6

Superconductividad holográfica

En la física de materia condensada existen muchos sistemas fuertemente acoplados que resultan de gran interés tanto científico como tecnológico, para los cuales la correspondencia holográfica puede ofrecer conocimiento e intuición. Usar una teoría de gravedad para obtener información sobre la dinámica de estos sistemas produce un entorno computacionalmente manejable y conceptualmente más transparente. Por fortuna, el sentido inverso a la relación planteada también es interesante, pues los sistemas de materia condensada ofrecen el escenario experimental en el que algunos conceptos de la física de alta energía pueden ponerse a prueba [50].

Como hemos hecho mención, la teoría BCS consigue dar una explicación abrumadoramente exitosa al comportamiento de los superconductores convencionales, sin embargo deja fuera del marco a los superconductores hechos con base de aleaciones, cerámicas o fulerenos, y por supuesto, a los superconductores con una temperatura crítica superior a la de los metales comunes donde $T_c \sim 1 - 10K$ [73]. Y también hemos comentado que uno de los modelos propuestos para dar explicación teórica a los cupratos superconductores es el modelo espín-fermión, una teoría dada en el contexto de la teoría cuántica de campos donde uno de los principales reveses de la misma es su predicción de un sistema fuertemente acoplado, imposibilitando la aplicación de métodos perturbativos.

Es aquí donde la correspondencia holográfica se posiciona como una interesante propuesta y que utilizaremos para obtener información de la superconducción de alta temperatura en $3 + 1$ dimensiones con un campo magnético de fondo arbitrario. Dado que el material sale de su fase superconductor cuando el campo magnético de fondo vence un valor crítico $B > B_c$ resulta importante ser capaz de considerar un campo que pueda tomar cualquier valor. Varios artículos que estudian modelos de superconducción holográfica consideran al sistema superconductor, la teoría de campo, en $2 + 1$ dimensiones [15, 107] o bien, inmerso en un campo magnético de fondo, realizan su análisis considerando que dicho campo es perturbativo [26], facilitando el trabajo numérico pero imposibilitando un análisis cerca del valor crítico.

6.1. Ingredientes mínimos de superconducción holográfica

La correspondencia holográfica aplicada a los superconductores de alta temperatura provee de un modelo tratable mediante el estudio del dual gravitacional al sistema superconductor. La existencia de esta clase de modelos, conocidos como superconductores holográficos, fue establecida a fines de la década de los 2000's por Gubser [47] y Hartnoll et. al. [51].

La solución para la métrica de la teoría de gravedad permite deformaciones cuya geometría describa un agujero negro asintóticamente anti-de Sitter. La temperatura asociada al horizonte de eventos [96] otorga una interpretación dual para una teoría de campo a temperatura finita. Sin embargo, una teoría invariante de escala a temperatura finita y en equilibrio no ofrece ninguna otra cantidad con la cual comparar a T , resultando que toda temperatura no cero sea físicamente equivalente. Para los fines de la descripción se hace necesario introducir otras cantidades físicas que permitan obtener un valor singular de temperatura que se corresponda con la temperatura crítica para un superconductor [50].

Resulta que la introducción del campo magnético B y de un potencial químico μ cumple el rol que se busca [51]. Esto se consigue al considerar una estructura adicional comúnmente vinculada con los sistemas de materia condensada, una simetría $U(1)$. En el contexto del electromagnetismo, para muchos sistemas de materia condensada, en particular nuestro sistema de interés, resulta que los fotones dinámicos pueden ser ignorados; existen dos razones por las cuales esta decisión es consistente, la primera de ellas es que se ha observado que el acoplamiento electromagnético es pequeño [40]. Segundo, las interacciones electromagnéticas son apantalladas por un medio cargado. Por supuesto, no estamos diciendo que la interacción electromagnética sea ignorada, después de todo la mayoría de sistemas de materia condensada son producto de interacciones electromagnéticas. El ignorar a los fotones dinámicos hace referencia a que existe una descripción efectiva para la dinámica de los grados de libertad y éste desarrollo efectivo está dado por campos cargados pero no por bosones de la simetría $U(1)$. Con esto se consigue que la simetría del electromagnetismo puede ser considerada una simetría global; al considerar el estudio de una fuente electromagnética basta con considerar un campo electromagnético de fondo. Este es el procedimiento estándar que se sigue en el estudio de materia condensada y del que haremos uso a lo largo de nuestra investigación.

Con este razonamiento surge entonces la cuestión de saber cuál es el dual de una simetría global $U(1)$ de la teoría de campo. Para ello podemos tomar como guía otras simetrías que ya hemos estudiado, por ejemplo en $d = 4$ dimensiones, sabemos que la teoría de norma posee otra simetría global y ésta es la invariancia rotacional $SO(3)$. En el bulto, esta simetría también aparece, pero como simetría de norma. Esto es, aparece como parte de la invariancia bajo difeomorfismos de la relatividad general; podemos actuar en el espacio AdS_5 con una rotación local $SO(3)$ y recuperar el espacio AdS_5 en un sistema coordenado diferente. Esta observación recupera la

relación

$$\begin{array}{ccc} \text{Simetría global en la teoría} & & \text{Simetría de norma en la teoría} \\ \text{de campo en } d \text{ dimensiones} & \sim & \text{de gravedad en } > d \text{ dimensiones} \\ \text{espaciotemporales} & & \text{espaciotemporales} \end{array}$$

Para describir la física de la simetría global U(1) debemos añadir un campo de Maxwell al bulto y en consecuencia la acción con la que trabajaremos es la teoría de Einstein-Maxwell:

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(R + \frac{12}{L^2} \right) - \frac{1}{4g^2} F^2 \right]. \quad (6.1)$$

En equilibrio térmico, podemos ahora introducir dos nuevas escalas de fondo en la teoría de campo de forma que se preserve la simetría rotacional. La primera de ellas es un potencial químico $\mu = A_{(0)t}$, y el otro, que solo preserva la simetría rotacional en $2 + 1$ dimensiones, es un campo magnético de fondo $B = F_{(0)xy}$. Al igual a como sucede con la temperatura, T , estas nuevas escalas deben causar deformaciones de la geometría de AdS mientras nos alejamos de la frontera, es decir, nos dirigimos al interior del bulto en la región infrarroja [3].

Ahora bien, para obtener información del campo de norma de la teoría de campo, $A_{(0)\mu}$, desde el campo de norma de la teoría dual, A_μ , debemos tomar el límite de éste último a la frontera asintóticamente AdS_5 ,

$$A_\mu(r) = A_{(0)\mu} + \dots \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty. \quad (6.2)$$

considerando que $x^\mu \in \{x, y, z\}$ son las coordenadas coincidentes y $r \in (0, \infty)$ es la coordenada radial de la teoría de gravedad. Al igual a lo acontecido en la métrica, esta acción es equivalente a obtener el campo de norma inducido en la frontera de modo que no haya componente A_r [28].

Aunado a las deformaciones de la invariancia de escala de la teoría dadas por la temperatura, potencial químico y el campo magnético de fondo, conocemos en el contexto de la correspondencia holográfica otra forma de deformar la física a bajas energías. Esto se logra mediante la perturbación de la acción efectiva mediante la inserción de operadores.

Retomemos con este lenguaje el análisis que hemos hecho respecto a la métrica en la teoría gravitacional y su dual en la teoría de campo. En este caso el valor de frontera de la métrica del bulto otorga una métrica de fondo no dinámica para la teoría de campo. Una métrica de fondo puede pensarse como una fuente para el tensor de energía-momento de la teoría de campo, $T^{\mu\nu}$, definido según

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g_{(0)\mu\nu}}. \quad (6.3)$$

Supongamos que perturbamos la métrica de modo que su valor en la frontera pasa a ser $g_{(0)} + \delta g_{(0)}$. El cambio en la acción de la teoría de campo es $\delta S = \int d^d x \sqrt{-g_{(0)}} \delta g_{(0)\mu\nu} T^{\mu\nu}$.

Al requerir que la igualdad entre funciones de partición en ambos lados de la correspondencia siga siendo válida con esta perturbación encontramos que [3, 50]

$$Z_{\text{bulto}}[g \rightarrow g_{(0)} + \delta g_{(0)}] = \langle \exp \left(i \int d^d x \sqrt{-g_{(0)}} \delta g_{(0)\mu\nu} T^{\mu\nu} \right) \rangle \quad (6.4)$$

En analogía, el valor de frontera del campo de Maxwell en el bulto otorga el campo no dinámico de fondo para la simetría global $U(1)$ en la teoría de campo. Llame-mos a este campo en la frontera como campo electromagnético $U(1)$. Un campo electromagnético de fondo es una fuente para la corriente J^μ . Como el tensor de energía-momento, la corriente se define por el cambio en la acción debido al campo de fondo

$$J^\mu = \frac{\delta S}{\delta A_{(0)\mu}}. \quad (6.5)$$

Entonces, el cambio en la acción de la teoría de campo dado por un campo de fondo pequeño $\delta A_{(0)}$ es $\delta S = \int d^d x \sqrt{-g_{(0)}} \delta A_{(0)\mu} J^\mu$. De nuevo, al imponer la igualdad entre funciones de partición, encontramos que

$$Z_{\text{bulto}}[A \rightarrow \delta A_{(0)}] = \langle \exp \left(i \int d^d x \sqrt{-g_{(0)}} \delta A_{(0)\mu} J^\mu \right) \rangle. \quad (6.6)$$

De nueva cuenta, esta expresión es simplemente un reescrito de la identificación entre $A_{(0)}$ como un campo de fondo en la teoría de campo.

Este análisis generalizado permite recobrar una entrada de nuestro diccionario en la correspondencia holográfica en la que, según los resultados dados en [3, 48, 112], encontramos la expresión para la deformación de un campo $\phi_{(0)}$

$$Z_{\text{bulto}}[\phi \rightarrow \delta \phi_{(0)}] = \langle \exp \left(i \int d^d x \sqrt{-g_{(0)}} \delta \phi_{(0)\mu\nu} \mathcal{O} \right) \rangle. \quad (6.7)$$

Las herramientas desarrolladas hasta ahora deseamos puedan ser aplicadas a sistemas fuertemente acoplados de materia condensada sujetos a una temperatura finita y en presencia de campos electromagnéticos externos, como lo es un superconductor no convencional. Consideremos un sistema sin fotones dinámicos con la finalidad de introducir un campo electromagnético en la teoría de campo que describa de forma efectiva el sistema de materia condensada. Con esto nos vemos en presencia de una simetría global $U(1)$ que asumimos espontáneamente rota. Esta ruptura conduce a un bosón de Goldstone θ que transforma bajo $U(1)$ mediante $\theta \rightarrow \theta + \Lambda$. La invariancia de norma de la teoría en un campo electromagnético de fondo A implica que la energía libre de Helmholtz puede escribirse como:

$$F = \int d^d x \sqrt{g_{(0)}} \mathcal{F}[A - d\theta], \quad (6.8)$$

para alguna función \mathcal{F} [50]. La estabilidad de la teoría en la ausencia de excitaciones del bosón de Goldstone o del campo electromagnético de fondo implica que \mathcal{F} debe

tener un mínimo en $A = d\theta$. La corriente generada por un campo electromagnético pequeño es entonces

$$J_i = -\left. \frac{\delta F}{\delta A^i} \right|_{A=d\theta+\delta A} = -\mathcal{F}''[0]\delta A_i, \quad (6.9)$$

donde el signo menos es producto de que F es la acción euclídea y difiere con un signo de la acción Lorentziana S . Además, por simplicidad, se ha considerado que $\delta A_t = 0$. La ecuación (6.9) es la segunda ecuación de London que hemos mencionado antes, (4.3). El campo eléctrico en esta norma es simplemente $\delta E_i = i\omega\delta A_i$, en el espacio de frecuencias. Con ello,

$$J_i = \frac{i\mathcal{F}''[\rho]}{\omega}\delta E_i \equiv \sigma(\omega)\delta E_i, \quad (6.10)$$

observamos que la conductividad diverge cuando $\omega \rightarrow 0$. El efecto Meissner se sigue de tomar el producto exterior en (6.8), de modo que

$$-\mathcal{F}''[0]\delta B_i = (\nabla \times J)_i. \quad (6.11)$$

Esta expresión permite observar que la corriente J es diamagnética, esto es, actúa de forma que tiende a repeler el campo magnético δB_i que hemos aplicado. Si se consideran campos estáticos, entonces (6.11) puede combinarse con la ecuación de Maxwell $\nabla \times \delta B = \mu_0 J$ para obtener la siguiente ecuación

$$(\nabla_i^2 - \mu_0\mathcal{F}''[0])\delta B_i = 0, \quad (6.12)$$

misma que hemos mencionado con el nombre de primera ecuación de London y que implica que el fotón dentro del superconductor debe ser masivo y en consecuencia exponencialmente suprimido. El inverso de la masa, $\mu_0\mathcal{F}''[0]$, es la longitud de penetramiento de London. Con esto es importante resaltar que aunque los fotones dinámicos son necesarios para observar la expulsión del campo magnético aplicado, el fenómeno esencial subyacente al efecto Meissner es la generación de corrientes diamagnéticas mismas que pueden ser obtenidas en un teoría sin fotones dinámicos en un campo magnético de fondo.

Más allá de las generalidades que hasta ahora hemos mencionado, es necesaria una teoría microscópica que determine cuando una ruptura de simetría forme un condensado en determinado material. Como hemos mencionado en la sección de superconductividad, la teoría más reconocida en el tratamiento de superconductores es la teoría BCS. Sin embargo, el éxito de esta teoría se restringe al estudio de superconductores convencionales dejando fuera a los superconductores de alta temperatura. Una motivación para construir un superconductor holográfico es obtener una descripción microscópica de la superconductividad carente de cuasipartículas, como las necesarias en la teoría BCS. En cambio, se posee una teoría fuertemente acoplada en la que un operador cargado se condensa por debajo de una temperatura crítica.

Ya hemos visto que para poder discutir el transporte de carga en una teoría de campo es necesario introducir la teoría de Einstein-Maxwell en el bulto, (6.1). La dinámica del operador de corriente J^μ es capturada por la dinámica clásica del campo de norma en el bulto, A_μ . Además, hemos observado que la superconductividad es

producto de la ruptura de simetría de la simetría $U(1)$ del campo electromagnético. Una ruptura espontánea de simetría ocurre cuando un operador cargado adquiere un valor de expectación distinto de cero en el vacío. El diccionario de la correspondencia holográfica nos dice que tal operador cargado debe ser dual de un campo cargado en el bulto. Por ello se hace necesario añadir a la acción de la teoría de Einstein-Maxwell los términos correspondientes a campos escalares cargados.

En una teoría fuertemente acoplada uno debe esperar que la fase de ruptura de simetría tenga condensados de muchos operadores, lo que implicara muchos campos cargados en el bulto [50]. La simplificación que consideraremos en nuestro trabajo será tomar el caso mínimo de un solo campo cargado en el bulto. A la pregunta de qué clase de campo debemos tomar, el operador que se condensa no requiere, en principio, ser de algún tipo especial. Si el condensado posee momento angular uno podría hablar de superconductores de onda p o d , según si el momento es uno o dos respectivamente. Y de igual forma uno puede considerar superconductores de onda s sin momento angular. De nuevo, por razones de simplicidad, consideraremos aquí un superconductor de onda s en el que el campo cargado es un campo escalar complejo.

Según lo reseñado en esta sección, para nuestros fines debemos considerar una teoría de Einstein-Maxwell acompañada de un campo escalar complejo, cuya acción en 4+1 dimensiones es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa^2} \left(R + \frac{12}{L^2} \right) - \frac{1}{4g^2} F^2 - |\nabla\phi - i\xi A\phi|^2 - m^2|\phi|^2. \quad (6.13)$$

con ξ la carga del campo escalar ϕ . Dado que estamos trabajando en 4+1 dimensiones en la teoría gravitacional, la teoría de campo dual resulta ser 3+1 dimensional. En esta situación cobra sentido poder considerar la adición a la acción anterior el término de Chern-Simons [59]

$$S_{CS} = \frac{k}{12\pi G_5} \int A \wedge F \wedge F. \quad (6.14)$$

De modo que nuestra acción de interés pasa a ser la siguiente

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} \left(-R + \frac{12}{L^2} - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - |\nabla\phi - i\xi A\phi|^2 - m^2|\phi|^2 \right) + S_{CS}. \quad (6.15)$$

Las soluciones de agujero negro cargado con pelo a esta acción fueron estudiadas por Gubser [47], y la inestabilidad que permite el rompimiento espontáneo de simetría está relacionado con que el agujero negro cargado contribuye a la masa efectiva del campo escalar según la relación

$$m_{ef}^2 = m^2 + g^{tt}\xi^2 A_t^2, \quad (6.16)$$

de modo que, al ser $g^{tt} < 0$ y divergente en el horizonte, cuando $A_t \neq 0$, m_{ef} pasa a ser negativa cerca del horizonte creando una inestabilidad.

Las ecuaciones de movimiento resultantes de variar la acción (6.15) respecto a la métrica, el campo de norma y el campo escalar son, respectivamente,

$$0 = -R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{6}{L^2}g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}|\nabla - i\xi A\phi|^2 g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2|\phi|^2$$

$$\begin{aligned}
 & -2F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi - i\xi A_{\mu}\phi)(\partial_{\nu}\phi^{*} + i\xi A_{\nu}\phi^{*}) - \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\phi - i\xi A_{\nu}\phi)(\partial_{\mu}\phi^{*} + i\xi A_{\mu}\phi^{*}) \\
 0 & = 4\partial_{\nu}(\sqrt{-g}F^{\nu\mu}) - \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (i\xi [\phi^{*}\partial_{\nu}\phi - \phi\partial_{\nu}\phi^{*}] + 2\xi^2|\phi|^2A_{\nu}) + 2k\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} \\
 0 & = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu} [\sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\partial_{\mu}\phi - i\xi A_{\mu}\phi)] + i\xi g^{\mu\nu}A_{\nu} (\partial_{\mu}\phi - i\xi A_{\mu}\phi) + m^2\phi. \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

Al considerar un campo magnético de fondo apuntando en la dirección z , queremos encontrar una solución a las ecuaciones de movimiento que conserven la simetría rotacional alrededor del eje z . Si, además, pensamos en un campo magnético constante querremos a su vez invariancia traslacional en los ejes x , y y z . Los ansatz consistentes con estas simetrías que satisfacen las ecuaciones de movimiento (6.17) están dadas por el ansatz de D'Hoker y Kraus [30], donde en un sistema coordenado adecuado la métrica adquiere la siguiente forma

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + \frac{1}{U(r)}dr^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)(dz + C(r)dt)^2, \quad (6.18)$$

y el campo de electromagnético es

$$F = E(r)dr \wedge dt + B dx \wedge dy + P(r)dz \wedge dr. \quad (6.19)$$

Con la forma del potencial dado por

$$A = \left(\int E(r)dr \right) dt + (Bx)dy + \left(\int P(r)dr \right) dz. \quad (6.20)$$

El campo magnético, B , resulta necesariamente constante por la identidad de Bianchi y las funciones E , P , U , V , W y C solo dependen de r .

Una propiedad importante de estos ansatz es su invariancia bajo la transformación

$$\begin{aligned}
 z & \rightarrow z - \alpha t, \\
 C(r) & \rightarrow C(r) + \alpha \\
 E(r) & \rightarrow E(r) - \alpha P(r), \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

donde la combinación $\mathcal{E} = E + CP$ resulta igualmente invariante. Esto implica que, al variar las funciones E , C y P de forma que \mathcal{E} permanezca constante, la solución a las ecuaciones de movimiento será la misma. Por ello resultará importante expresar las ecuaciones de movimiento en términos de la función \mathcal{E} .

El primer paso en el estudio de nuestro superconductor holográfico desde el lado gravitacional es encontrar la solución a las ecuaciones de movimiento en ausencia del campo escalar cargado ϕ y que corresponde a la fase normal de la teoría de campo. A esta solución la denominaremos como *solución de fondo*. Las ecuaciones de movimiento (6.17) una vez considerados los ansatz (6.18) y (6.19), junto con $\phi = 0$ son las siguientes:

$$0 = 2kBP + (\mathcal{E}V\sqrt{W})' \quad (6.22)$$

$$0 = \left(\frac{UPV}{\sqrt{W}} \right)' - \mathcal{E}C'V\sqrt{W} + 2kB\mathcal{E} \quad (6.23)$$

$$0 = (C'VW^{3/2})' - 4P\mathcal{E}V\sqrt{W} \quad (6.24)$$

$$0 = 2W^2 [4B^2 + V(U'V' + UV'')] + UV^2W'^2 - VW [2V(UW'' + U'W') + UV'W' + 8P^2UV] - 2W^3V^2C'^2 \quad (6.25)$$

$$0 = V^2[2WW'' - W'^2] - 2W^2[V'^2 - 2VV''] + 8P^2V^2W \quad (6.26)$$

$$0 = W[-8B^2 + 6V^2(U'' - 8) + 6VU'V'] + 3V^2W'U' - 16\mathcal{E}V^2W - 8P^2UV^2 - 6W^2V^2C'^2 \quad (6.27)$$

$$0 = W(4B^2 + 2VU'V' + UV'^2 - 24V^2 + 4\mathcal{E}^2V^2 + WC'^2V^2) + VW'(VU' + 2UV') - 4P^2UV^2 \quad (6.28)$$

donde a partir de este momento ya hemos considerado que $L = 1$. Las dos primeras ecuaciones son las ecuaciones de Maxwell y son de primer orden, en cambio las restantes son el producto de la variación respecto a la métrica y resultan ser de segundo orden. De éstas siete ecuaciones solo seis resultan dinámicas, siendo una de ellas restricción válida para toda r siempre que se encuentre una solución para los valores iniciales [30].

Como buscamos una solución de agujero negro, para el sistema coordinado que hemos seleccionado es necesario imponer que la función métrica $U(r)$ sea cero para algún valor de $r > 0$, donde queda determinada la posición del horizonte de eventos, r_h . La temperatura de Hawking está dada por

$$T = \frac{U'(r_h)}{4\pi}. \quad (6.29)$$

Pasemos a estudiar la solución de estas ecuaciones de movimiento que, como hemos mencionado, otorgarán la descripción del fondo gravitacional dual a la teoría de campo en su fase normal. Para un análisis numérico es importante tomar coordenadas que remuevan la redundancia debido a la libertad de norma, esto puede llevarse a cabo al demandar que la solución tome una forma canónica en el horizonte. Al reescalar x , y , z y combinar la simetría (6.21) con un boost en la dirección z se encuentra que el campo electromagnético y la métrica toman la siguiente forma [30]:

$$F_h = q dr \wedge dt + b dx \wedge dy, \\ ds_h^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (6.30)$$

donde q y b son la densidad de carga y el campo magnético en el horizonte en las coordenadas x , y , z . Esta forma canónica corresponde a las siguientes condiciones iniciales para el horizonte

$$\mathcal{E}(r_h) = q, \quad U(r_h) = C(r_h) = P(r_h) = 0, \quad V(r_h) = W(r_h) = 1 \quad (6.31)$$

Queda por especificar los valores de $V'(r_h)$, $W'(r_h)$ y $C'(r_h)$. Estos valores están conectados entre sí por las ecuaciones (6.23), (6.25) y (6.28) evaluadas en el horizonte, de la siguiente manera

$$q(C'(r_h) - 2kb) = 0, \\ U'(r_h)(2V'(r_h) + W'(r_h)) = -4(-6 + b^2 + q^2) - 4b^2k^2,$$

$$U'(r_h)(-V'(r_h) + W'(r_h)) = 4b^2 - C'(r_h)^2. \quad (6.32)$$

El valor de $C'(r_h)$ queda determinado a $C'(r_h) = 2kb$ cuando $q \neq 0$, pero sigue siendo un parámetro libre cuando $q = 0$. La cantidad $U'(r_h) = 4\pi T$ no es en esencia un dato inicial debido a que en la ecuación de constricción aparece U a primer orden. De ello resulta que distintas soluciones sean especificadas por dos parámetros, por ejemplo q y b en términos de T . Si la temperatura es no cero siempre podemos reescalar $U'(r_h) = 1$, y dejar como parámetros libres a b y q .

Podemos hacer ver ahora que b , q y k tienen valores de interés producto de estudiar las condiciones en que aparece un *horizonte extremal*, esto es en $U(r_h) = U'(r_h) = 0$. Suponiendo que las funciones del ansatz se comportan bien en r_h , encontramos que la expresión (6.32) es válida y podemos restringirnos al caso del horizonte extremal. Notemos que, entonces, no hay valores de b y q distintos de cero consistentes salvo que k sea ± 1 . De lo cual, para obtener un horizonte extremal debemos tomar alguna de las siguientes condiciones: $q = 0$, $b = 0$ o $k = \pm 1$. Cada uno de estos valores conduce a distintas geometrías cerca del horizonte que estudiaremos en breve, pero antes de ello tomemos un espacio para estudiar el comportamiento cerca de la frontera $r \rightarrow \infty$.

Comenzando con las condiciones iniciales (6.31) dadas en el horizonte podemos resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento para r grande y encontrar condiciones con el propósito de hallar soluciones asintóticamente AdS_5 [6, 30],

$$\begin{aligned} U(r \rightarrow \infty) &= r^2 + \frac{u_2}{r^2} + \dots, \\ V(r \rightarrow \infty) &= vr^2 + \frac{v_2}{r^2} + \dots, \\ W(r \rightarrow \infty) &= wr^2 + \frac{w_2}{r^2} + \dots, \\ C(r \rightarrow \infty) &= c_0 + \frac{c_4}{r^4} + \dots, \\ \mathcal{E}(r \rightarrow \infty) &= \frac{e_3}{r^3} + \dots, \\ P(r \rightarrow \infty) &= \frac{p_3}{r^3} + \dots, \end{aligned} \quad (6.33)$$

donde los puntos indican términos de orden superior en $1/r$.

En estas coordenadas la métrica en la frontera está dada por

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2} - r^2 dt^2 + r^2 [v(dx^2 + dy^2) + w(dz + c_0 dt)^2]. \quad (6.34)$$

Para obtener un comportamiento asintóticamente AdS_5 es necesario aplicar la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} x, y &\rightarrow \frac{x}{\sqrt{v}}, \frac{y}{\sqrt{v}} \\ z &\rightarrow \frac{z}{\sqrt{w}} - c_0 t, \end{aligned} \quad (6.35)$$

con ello, la métrica en la frontera adquiere el siguiente comportamiento

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2} + r^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (6.36)$$

que es AdS_5 con radio de curvatura $L = 1$.

Con esta transformación, la métrica en el horizonte también se modifica y pasa a ser

$$ds_h^2 = \frac{1}{v}(dx^2 + dy^2) + \frac{1}{w}(dz - c_0\sqrt{w}dt)^2, \quad (6.37)$$

y de igual forma, el campo electromagnético cambia y adquiere la siguiente forma

$$F = E dr \wedge dt + \frac{b}{v} dx \wedge dy + \frac{P}{\sqrt{w}} (dz - c_0\sqrt{w}dt) \wedge dr. \quad (6.38)$$

Las componentes de la corriente en este sistema coordenado resultan ser

$$\begin{aligned} 4\pi G_5 J^t &\equiv \rho = \gamma(e_3 - c_0 p_3) - \frac{2kb}{3v} A_z(r \rightarrow \infty), \\ J^{1,2} &= 0 \\ 4\pi G_5 J^3 &= \frac{3}{4} \gamma_c \left(\frac{p_3}{\sqrt{w}} - \sqrt{w} c_0 e_3 \right). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Dado que B es el valor del campo magnético al acercarnos a la frontera y, de este modo, es identificado como el valor de campo magnético de la teoría de campo dual, va a estar dado por la expresión

$$B = \frac{b}{v}, \quad (6.40)$$

γ_c es el factor de Lorentz

$$\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1 - w c_0^2}}. \quad (6.41)$$

Otras cantidades importantes medidas en la frontera son la temperatura y el potencial químico, que escritos en los parámetros que hemos utilizado se ven como sigue

$$T = \frac{\gamma_c U'(r_h)}{4\pi}, \quad \mu = \frac{3\gamma_c v}{8kb} \left(\sqrt{w} c_0 e_3 - \frac{p_3}{\sqrt{w}} \right). \quad (6.42)$$

Llegados hasta aquí estamos en posibilidad de discutir las soluciones del sistema de ecuaciones. Es posible argumentar que para asignaciones arbitrarias de los parámetros ρ y B no existen soluciones analíticas en AdS_5 , incluso el caso especial $\rho = 0$ a temperatura cero y $B \neq 0$ no otorga una solución analítica completa [30].

Por fortuna podemos avanzar en un análisis cualitativo y cuantitativo al resolver las ecuaciones de movimiento en la cercanía del horizonte. Para cumplir con este propósito será de vital importancia preguntarnos para que valores de ρ y B existen soluciones extremales, y de las ellas cuáles pueden involucrar un campo eléctrico en el horizonte. Como hemos hecho ver con anterioridad, para el caso en que ρ y B son no cero, cuando $k \neq 1$ no existen soluciones extremales suaves y de entropía finita.

En el régimen de temperatura baja, las soluciones completas deben verse como interpolaciones entre geometrías asintóticamente AdS_5 y geometrías particulares cerca del horizonte [6, 30].

En un horizonte extremal se tiene que $U(r_h) = U'(r_h) = 0$. Esta clase de soluciones provee de una frontera natural al espacio de parámetros de todas las soluciones y por ello es importante su estudio.

Con las consideraciones hechas hasta ahora las ecuaciones en las que aparecen U y U' , (6.32), producen las siguientes constricciones no triviales

$$q(C'(r_h) - 2kb) = 0, \quad (6.43)$$

$$C'(r_h)^2 - 4b^2 = 0, \quad (6.44)$$

$$6 - q^2 - 2b^2 = 0. \quad (6.45)$$

Eliminando el término $C'(r_h)$ al despejar de (6.44) y sustituir en (6.43), el sistema se reduce a las dos expresiones siguientes

$$\begin{aligned} qb(k \pm 1) &= 0 \\ q^2 + 2b^2 &= 6. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Las soluciones se comportan de la siguiente manera: Primero, si $k \neq \pm 1$, entonces tenemos $qb = 0$, lo que obliga a que $q = 0$ o $b = 0$. El caso $b = 0$ y $q = \pm\sqrt{6}$ corresponde a la solución de brana negra cargada eléctricamente sin campo magnético. La geometría cercana al horizonte es $AdS_2 \times \mathbb{R}^3$ [20]. El caso $q = 0$ y $b = \pm\sqrt{3}$ corresponde a una brana extremal puramente magnética obtenida en [29]. Su geometría cercana al horizonte es $AdS_3 \times \mathbb{R}^2$.

Segundo, si $k = \pm 1$, puede mostrarse que la solución es regular para cada asignación de parámetros que cumplan con $q^2 + 2b^2 = 6$, cuya geometría cercana al horizonte interpola suavemente entre $AdS_2 \times \mathbb{R}^3$ en $b = 0$ y $AdS_3 \times \mathbb{R}^2$ en $q = 0$. Estas soluciones se pueden generalizar para incluir temperatura finita, y corresponden a la familia de agujeros negros descrita en [5].

Estudiamos las geometrías que hemos obtenido. Comencemos con la solución del caso $b \neq 0$ y $q = 0$. Cuando la densidad de carga es cero, el campo electromagnético F se reduce al término de B . Las ecuaciones de Einstein-Maxwell tienen una solución analítica dada por $\mathcal{E} = P = C = 0$, y

$$\begin{aligned} U(r) &= 3(r^2 - r_h^2), \\ V(r) &= \frac{b}{\sqrt{3}}, \\ W(r) &= 3r^2, \end{aligned} \quad (6.47)$$

que representa el producto tensorial de un agujero negro BTZ y \mathbb{R}^2 . Se mostró que existe una familia de soluciones regulares parametrizadas por T/\sqrt{B} , que interpolan entre la solución de agujero negro BTZ de (6.47) en el horizonte y AdS_5 en $r \rightarrow \infty$. La entropía de estas soluciones tiende a cero cuando $T \rightarrow 0$, mientras el campo

magnético B permanece fijo. Dado que tenemos interés en relacionar las tres soluciones al horizonte que hemos obtenido mediante una interpolación, reescribamos las expresiones anteriores como una serie de potencias alrededor del horizonte r_h :

$$\begin{aligned} U(r) &= 6r_h(r - r_h) + 3(r - r_h)^2, \\ V(r) &= \frac{b}{\sqrt{3}}, \\ W(r) &= 3r_h^2 + 6r_h(r - r_h) + 3(r - r_h)^2. \end{aligned} \quad (6.48)$$

En siguiente instancia tenemos el caso de campo magnético cero, y que otorga la conocida solución de brana negra en AdS_5 con carga [20]:

$$\begin{aligned} U(r) &= \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2 + \frac{q^2 \left(\frac{3r_h}{2}\right)^6}{3 \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^4} - \frac{\left(\frac{3r_h}{2}\right)^4 (3 + q^2)}{3 \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2} \\ W(r) = V(r) &= \frac{4}{3} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2, \\ \mathcal{E} &= \frac{qr_h^3}{r^3}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

una vez realizado el cambio coordenado

$$r \rightarrow r + \frac{r_h}{2}, \quad (6.50)$$

respecto a la solución presentada en [30]. Con este cambio es posible volver a escribir la solución en una serie de potencias cerca del horizonte de eventos como

$$\begin{aligned} U(r) &= (6 - q^2)r_h(r - r_h) + \left(\frac{7q^2}{3} - 2\right)(r - r_h)^2 + \mathcal{O}(3), \\ W(r) = V(r) &= 3r_h^2 + 4r_h(r - r_h) + \frac{4}{3}(r - r_h)^2. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Por último debemos considerar el valor especial en el que $b = q = 0$ correspondiente a una brana negra sin carga y que está representada por las funciones métricas

$$\begin{aligned} U(r) &= \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{2}r_h\right)^4}{\left(r + \frac{r_h}{2}\right)^4}\right), \\ V(r) &= \frac{4V_0}{9r_h^2} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2, \\ W(r) &= \frac{4}{3} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2, \end{aligned} \quad (6.52)$$

con las demás funciones iguales a cero.

Volvemos a desarrollar estas funciones cerca del horizonte

$$U(r) = 6r_h(r - r_h) - 2(r - r_h)^2 + \frac{8}{3r_h}(r - r_h)^3 + \mathcal{O}(4),$$

$$\begin{aligned}
 V(r) &= V_0 + \frac{4V_0}{3r_h}(r - r_h) + \frac{4V_0}{9r_h}(r - r_h)^2, \\
 W(r) &= 3r_h^2 + 4r_h(r - r_h) + \frac{4}{3}(r - r_h)^2.
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Con las soluciones expresadas en serie de potencias cerca del horizonte, y con el cambio (6.50) se encuentra una forma compatible entre ellas, como lo comentado en [6]. Dada la siguiente propuesta general

$$\begin{aligned}
 U(r) &= 0 \cdot (r - r_h)^0 + (6 - q^2)r_h(r - r_h) + \sum_{n=2}^{\infty} U_n(r - r_h)^n, \\
 V(r) &= V_0 \cdot (r - r_h)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r - r_h)^n, \\
 W(r) &= 3r_h^2(r - r_h)^0 + \sum_{n=2}^{\infty} U_n(r - r_h)^n, \\
 C(r) &= 0 \cdot (r - r_h)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r - r_h)^n, \\
 P(r) &= 0 \cdot (r - r_h)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(r - r_h)^n, \\
 \mathcal{E}(r) &= q \cdot (r - r_h)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n(r - r_h)^n.
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

Al sustituir esta estructura en las ecuaciones de movimiento obtenemos ecuaciones algebraicas para cada n que podemos resolver en términos de los parámetros q , b , k y W_1 , y que interpola entre las tres soluciones que acabamos de presentar

$$\begin{aligned}
 U(r) &= r_h(6 - q^2)(r - r_h) + \frac{5b^2 + 9b^2k^2 - 6V_0^2 + 7q^2V_0^2}{3V_0^2}(r - r_h)^2 + \dots, \\
 V(r) &= V_0 + \frac{4(2b^2 - 6V_0^2 + q^2V_0^2)}{3r_h(q^2 - 6)V_0}(r - r_h) + \dots, \\
 W(r) &= 3r_h^2 + \frac{4r_h(-b^2 + 3b^2k^2 - 6V_0^2 + q^2V_0^2)}{(q^2 - 6)V_0^2}(r - r_h) + \dots, \\
 C(r) &= \frac{2bk}{\sqrt{3}r_hV_0}(r - r_h) + \dots, \\
 P(r) &= \frac{4\sqrt{3}(-b^3kq + 3b^2k^3q - 6bkqV_0^2 + bkq^3V_0^2)}{3(q^2 - 6)^2V_0^3}(r - r_h) + \dots, \\
 \mathcal{E}(r) &= q - \frac{2q(b^2 + b^2k^2 - 6V_0^2 + q^2V_0^2)}{r_h(q^2 - 6)V_0^2}(r - r_h) + \dots
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

Confirmemos que efectivamente (6.55) es una interpolación entre las soluciones analíticas que tenemos. Al tomar $q = 0 = b$ en (6.55) se recupera la solución (6.53)

correspondiente a la brana negra sin carga. De igual forma, al tomar $q = 0$, junto con las funciones $C = P = 0 \Rightarrow k = 0$ y $V_0 = \frac{b}{\sqrt{3}}$ en (6.55) reencontramos la solución (6.48). Por último, haciendo $b = 0$ y $V_0 = 3r_h^2$ volvemos a la solución (6.51).

Observar que la interpolación (6.55) queda determinada por el valor de V_0 y por los parámetros libres q , b y r_h , aunque no todos los valores están permitidos. Esta aseveración puede confirmarse al poner a la temperatura en dependencia de valores anteriores [30]

$$T = \frac{r_h(6 - q^2)}{4\pi}. \quad (6.56)$$

Dado que la temperatura debe ser positiva, existe una cota para los valores de q , y ocurrirá un símil con los valores de b . En el siguiente capítulo discutiremos en profundidad estos comentarios.

6.2. Cálculo de cantidades físicas

Recordemos que la información sobre cantidades físicas en la teoría de norma queda codificada en información cerca de la frontera. Hasta el momento hemos presentado una solución al horizonte de eventos (6.55) en términos de los parámetros q , b y k y argumentamos que para obtener soluciones asintóticamente AdS_5 las funciones deben comportarse en el límite $r \rightarrow \infty$ como (6.33), donde encontramos que las constantes de interés resultan ser v , w , c_0 , e_3 y p_3 , pues las cantidades en la teoría de campo están dadas por

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma U'(r_h)}{4\pi} & B &= \frac{b}{v} \\ \rho &= \gamma_c(e_3 - c_0 p_3) - \frac{2kb}{3v} A_z(r \rightarrow \infty) & \mu &= \frac{3\gamma_c v}{8kb} \left(\sqrt{w} c_0 e_3 - \frac{p_3}{\sqrt{w}} \right) \end{aligned} \quad (6.57)$$

Para obtener las constantes de frontera en función de los parámetros al horizonte debemos resolver las ecuaciones de movimiento y evaluar en $r \rightarrow \infty$. Por la dificultad evidente se ha optado por la resolución numérica y, más aún, por la utilización de un método que haga uso de la información que poseemos en r_h para construir la solución. Uno de los métodos que cumple lo que solicitamos es un método comúnmente llamado de *shooting*, el procedimiento es capaz de capturar con la mayor precisión posible cómo las condiciones iniciales afectan las soluciones en la frontera. Este método consiste en encontrar una solución a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones a la frontera en términos de un problema con condiciones iniciales. Esto es, dado el sistema con condiciones a la frontera

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1, \quad (6.58)$$

se considera, en cambio, el sistema con condiciones iniciales

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = a, \quad (6.59)$$

y se busca un a tal que, al *disparar* la solución desde t_0 , la solución tome el valor y_1 cuando se evalúa en t_1 .

En nuestro caso, partimos de las condiciones iniciales dictadas por (6.55) en r_h , y mediante este método encontramos los valores de las derivadas en la frontera que interpolen, consistentemente con las ecuaciones de movimiento (6.17), con las condiciones de frontera (6.33). Este procedimiento nos otorga los valores de las constantes de interés v , w , c_0 , e_3 , p_3 en términos de los valores del campo electromagnético en el horizonte, b y q , así como del acoplamiento de Chern-Simons k . Una vez en posesión de estas cantidades podemos calcular las cantidades físicas de la teoría de campo siguiendo (6.57).

Hemos hecho notar que el horizonte parece un buen lugar para situar nuestro lugar de lanzamiento, sin embargo las soluciones resultan singulares para este valor de r en las coordenadas que hemos utilizado, puesto que $U(r_h) = 0$. Para lidiar con esta cuestión técnica se ha optado por obtener una solución numérica al disparar desde $r_\epsilon = r_h + \epsilon$, con $\epsilon \ll 1$. Además, se hará uso de las simetrías propias del sistema con la finalidad de reescalar la coordenada r de forma tal que situemos al horizonte en $r_h = 1$.

Dada la incapacidad computacional que atañe a nuestro problema de explorar la región $r \rightarrow \infty$, se hace necesario situar numéricamente el comportamiento de la frontera a un valor de r finito pero lo suficientemente grande para que las contribuciones de los términos subdominantes puedan ser ignoradas haciendo al análisis físico de las soluciones independientes del valor del corte. La elección para el presente trabajo se corresponde con los siguientes valores para ϵ y para la frontera en r_f

$$\epsilon = 10^{-5}, \quad r_f = 10^7. \quad (6.60)$$

El proceso seguido, así como la construcción de los gráficos que mostraremos en el presente capítulo, si bien reproducidos y analizados personalmente basan fuertemente su construcción en lo descrito en [25].

Para el análisis numérico será importante retomar la discusión de los valores que pueden tomar q y b , mismos que quedan limitados por la ecuación (6.32)

$$\begin{aligned} U'(r_h)V'(r_h) &= 4 - \frac{2}{3}q^2 - \frac{4}{3}b^2, \\ U'(r_h)W'(r_h) &= 4 - \frac{2}{3}(q^2 - b^2) - 2k^2b^2, \end{aligned} \quad (6.61)$$

y por la condición extremal de temperatura cero, $U'(r_h) = 0$,

$$bq(k \pm 1) = 0. \quad (6.62)$$

Al resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento cerca del horizonte encontramos que cuando $U'(r_h)$ es negativa, $U(r)$ tomará valores negativos cerca del horizonte, sin embargo, existe un punto mínimo donde la función volverá a ser creciente y alcanzará el valor cero, Fig. (6.1), punto en el que las ecuaciones de movimiento se vuelven singulares.

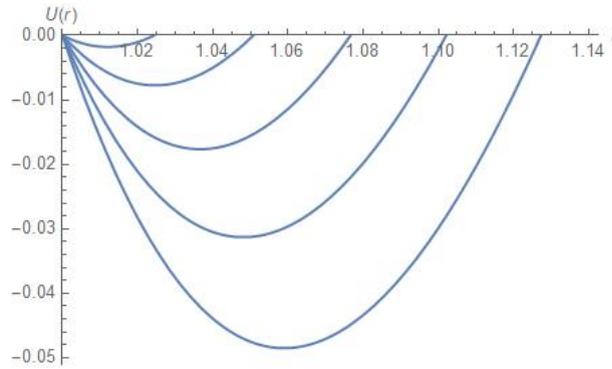


Figura 6.1: Gráficas de $U(r)$ cuando $U'(r_h) < 0$, $b = 0$ y $k = 1$.

Dado que la solución a las ecuaciones de movimiento debe ser asintóticamente AdS_5 , las funciones métricas V y W deben ser crecientes y, en consecuencia, sus derivadas cerca del horizonte son positivas. Con esta información y de la ecuación (6.61) encontramos que $U'(r_h)$ es negativa siempre que

$$\begin{aligned} q^2 + 2b^2 &< 6, \\ q^2 + (3k^2 - 1)b^2 &< 6. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Efectivamente, al tomar $k = 1$ y $b = 0$ encontramos el siguiente gráfico, donde para valores de $q > \sqrt{6}$, $U(r)$ toma valores negativos

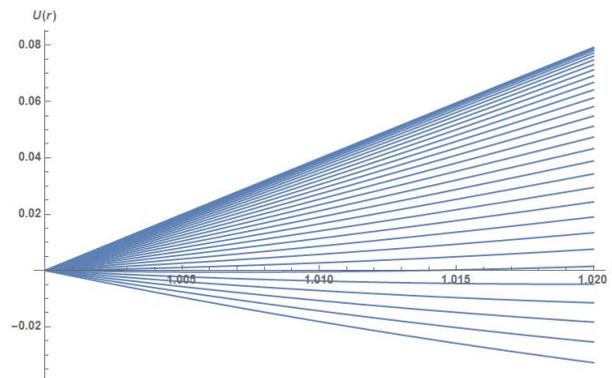


Figura 6.2: Gráficas de $U(r)$ para distintos valores de q , cuando $b = 0$ y $k = 1$.

Cuando b y q no satisfagan la condición impuesta en (6.63) seremos incapaces de encontrar una solución para toda r . Con ello, podemos caracterizar en el espacio de parámetros del plano (b, q) y $k = 1$, las soluciones físicas al fondo, mismas que deberemos buscarlas por debajo de la curva

$$q^2 + 2b^2 = 6. \quad (6.64)$$

Llegados a este punto es importante remarcar que los valores de carga y campo magnético de la teoría de campo no son directamente b y q , sino B y ρ . Y más aún, como podemos observar en la Fig (6.3), aunque b quede limitado a un intervalo acotado B puede tomar cualquier valor positivo.

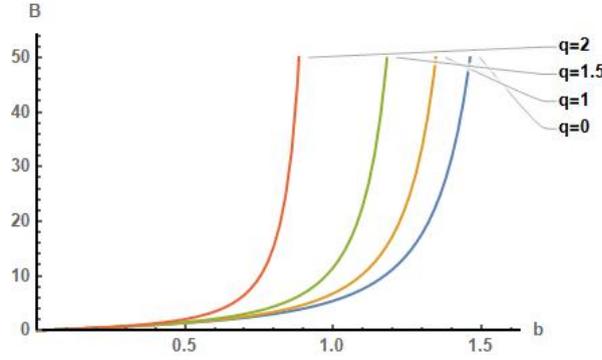


Figura 6.3: Gráficas de B vs b para distintos valores de q .

Esta descripción hace consistente el fondo gravitacional (6.18) en la presencia de un campo electromagnético que retroacciona con la métrica y que, dada la relación otorgada por la correspondencia, permite estudiar la fase no superconductora de la teoría de campo. Para el estudio de la fase de superconducción es necesario considerar la presencia del campo escalar complejo en la teoría y cuya solución a la frontera corresponda con un valor de expectación distinto de cero en el vacío de el operador encargado de describir el condensado.

6.3. Fase de superconducción

El campo escalar que consideraremos en la teoría será un campo escalar complejo y perturbativo $\phi(r, x, y, z) = \lambda\varphi(r, x, y, z)$ donde $\lambda \ll 1$. Dado que no hay una dependencia explícita de las coordenadas y ni z , asumimos que el comportamiento en éstas es armónico; además, para las coordenadas r y x pensaremos que las funciones son reales, es decir, tomaremos el ansatz siguiente para el campo escalar

$$\varphi(r, x, y, z) = R(r)X(x)e^{k_y y + k_z z}. \quad (6.65)$$

Las ecuaciones resultantes de la variación de la métrica y del campo de norma a orden λ no involucran ningún término dependiente del campo escalar, aún cuando se consideren perturbaciones en la métrica o en el campo de norma. Ésta situación permite ignorar por el momento, y relegarlo para un trabajo futuro, el estudio de las perturbaciones de $g_{\mu\nu}$ y A_μ y centrar nuestra atención en la única ecuación de movimiento a primer orden en la perturbación que afecta directamente al condensado:

$$\begin{aligned} & 4\xi^2 A_t(r)A_z(r)C(r)V(r)W(r)R(r)X(x) - 2\xi^2 A_z^2 R(r)V(r)(U(r) - C^2(r)W(r))X(x) \\ & + U(r)X(x) \left(2U(r)W(r)R'(r)V'(r) + V(r)[U(r)R'(r)W'(r) \right. \\ & \quad \left. + 2W(r)(R'(r)U'(r) + U(r)R''(r))] \right) \\ & - 2R(r)W(r) \left(-\xi^2 A_t^2 V(r)X(x) + U(r)[(k_y + Bx\xi)^2 + m^2 V(r)]X(x) - X''(x) \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Esta ecuación es separable en r y x . La ecuación de movimiento resultante para x es la siguiente

$$-X''(x) + X(x)(k_y - Bx\xi)^2 = 2\varepsilon X(x), \quad (6.67)$$

donde 2ε es la constante de separación. Esta es justamente la ecuación de movimiento de un oscilador armónico cuya solución es de la forma

$$X_n(x) = H_n(\sqrt{B\xi}\tilde{x})e^{-\frac{B\xi\tilde{x}^2}{2}}, \quad \varepsilon_n = B\xi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (6.68)$$

tal que $\tilde{x} = x - \frac{k_y}{B\xi}$ y donde $H_n(x)$ son polinomios de Hermite. Procederemos con nuestro estudio tomando el estado base $n = 0$, para el que $\varepsilon_0 = B\xi/2$. Con esto, la ecuación de movimiento para la función radial producto de (6.66) es

$$B\xi RU = e^{2V} [R'(UU' + U^2(2V' + W')) + U^2 R''] - e^{2(V-W)}(k_z - \xi A_z)^2 RU + e^{2V} R [(\xi A_t + (k_z - \xi A_z)C)^2 - m^2 U] \quad (6.69)$$

Por libertad de norma, podemos tomar la transformación

$$A_z(r) \rightarrow A_z(r) + \frac{k_z}{\xi}, \quad (6.70)$$

para eliminar la dependencia explícita de k_z en la ecuación (6.69) y encontrar la siguiente ecuación para $R(r)$

$$4\xi^2 A_t A_z C R V W - 2RW[-\xi^2 A_t^2 V + U(B\xi + m^2 V)] - 2\xi^2 A_z^2 R V(U - C^2 W) + U[2UW R' V' + V(U R' W' + 2W(R' U' + U R''))] = 0. \quad (6.71)$$

Observemos que de las expresiones (6.33) podemos analizar la ecuación (6.71) cerca de la frontera y encontrar que en $r \rightarrow \infty$ se satisface

$$r^2 R''(r) + 5r R'(r) - m^2 R(r) = 0. \quad (6.72)$$

La solución a esta ecuación asintótica es de la forma

$$R(r \rightarrow \infty) = \frac{\varphi_+}{r^{\Delta_+}} + \frac{\varphi_-}{r^{\Delta_-}}, \quad (6.73)$$

donde φ_+ y φ_- son constantes y tenemos que Δ_{\pm} debe satisfacer

$$\Delta_{\pm} = 2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{m^2}{4}} \right). \quad (6.74)$$

Cuando $m^2 < -4$, entonces Δ_{\pm} se vuelve complejo contradiciendo la hipotensis sobre la función radial del campo de norma y otorgando una solución inestable. Este valor de m^2 define para nuestro caso la cota de Breitenlohner-Freedman del campo escalar [?]. Observar que está permitido por la teoría tomar valores negativos por

encima de -4 , teniendo el caso peculiar de $m^2 = -3$, que simplifica los valores de Δ_{\pm} a los enteros 1 y 3. Este valor de m^2 conduce a la siguiente solución de la función $R(r)$ en la frontera

$$R(r \rightarrow \infty) = \frac{\varphi_1}{r} + \frac{\varphi_3}{r^3}. \quad (6.75)$$

Observar que para todo valor de m^2 entre -4 y 0 hace a ambos sumandos en (6.73) normalizables y se espera un comportamiento parecido para cualquier valor en esta región, en particular para el elegido $m^2 = -3$. En cambio, cuando $m^2 > 0$ entonces el sumando $\propto 1/r^{\Delta_-}$ es no normalizable y es explícitamente la fuente del campo dual [3].

En nuestro caso debemos apagar uno de los modos normalizables para que el resultante se corresponda con el valor de expectación del operador en la teoría de campo [3]. Dado que las dos posibilidades que se presentan son cualitativamente análogas seguiremos el estudio cuantitativo buscando las condiciones necesarias para que $\varphi_1 = 0$ y el operador dual tenga valor de expectación

$$\langle \mathcal{O}_3 \rangle = \varphi_3. \quad (6.76)$$

Resta por tanto encontrar las condiciones en los parámetros q y b que permitan obtener soluciones del campo escalar tales que $\varphi_1 = 0$ implicando que $R(r \rightarrow \infty) = \varphi_3/r^3$, cuyo valor permitirá graficar los valores del valor de expectación del campo \mathcal{O}_3 respecto a la temperatura y el campo magnético, y verificar que se corresponda con el de un condensado.

El primer paso en el proceso numérico es encontrar la forma de la función radial $R(r)$ cerca del horizonte de eventos,

$$R(r) = \phi_0 + \frac{m^2 + b\xi}{U_1} \phi_0 (r - r_h) + \sum_{i=2}^{\infty} \phi_i (r - r_h)^i, \quad (6.77)$$

donde las constantes ϕ_i son proporcionales a ϕ_0 . Por la observación hecha con anterioridad de que el campo escalar no aparece en otra ecuación de movimiento y en la expresión anterior la dependencia en ϕ_0 es lineal, podemos tomar el valor genérico $\phi_0 = 1$. Con estos resultados, las condiciones iniciales para la función $R(r)$ en la cercanía del horizonte para implementar el método numérico son

$$R(r_h) = 1, \quad R'(r_h) = \frac{m^2 + b\xi}{r_h(6 - q^2)}. \quad (6.78)$$

Con esta información podemos implementar el método de shooting y resolver la función $R(r)$ en términos de los parámetros al horizonte q y b . Para encontrar las condiciones que permitan obtener soluciones de $\varphi_1 = 0$ debemos fijar un valor de b y ver para que valor de q esta condición se satisface. Por la cota (6.63), para cada valor de b que fijemos debemos considerar valores de $q < \sqrt{6 - 2b^2}$. Grafiquemos el valor de φ_1 respecto a q para distintos valores de b

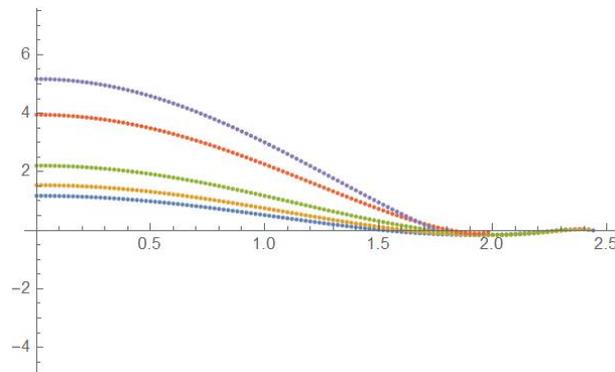


Figura 6.4: Gráficas de φ_1 vs b para distintos valores de q .

Esta información nos permite obtener los valores de b y $q(b)$ compatibles con la petición $\varphi_1 = 0$ y con base en ellos obtener el valor de φ_3 que se corresponde con el valor de expectación del campo dual \mathcal{O}_3 . Además, nos vemos en la capacidad de obtener los valores de frontera que se corresponden a los valores de campo magnético y de corriente de la teoría de campo para finalmente construir el siguiente gráfico de cantidades adimensionales que vincula el valor de condensado con el valor de campo magnético:

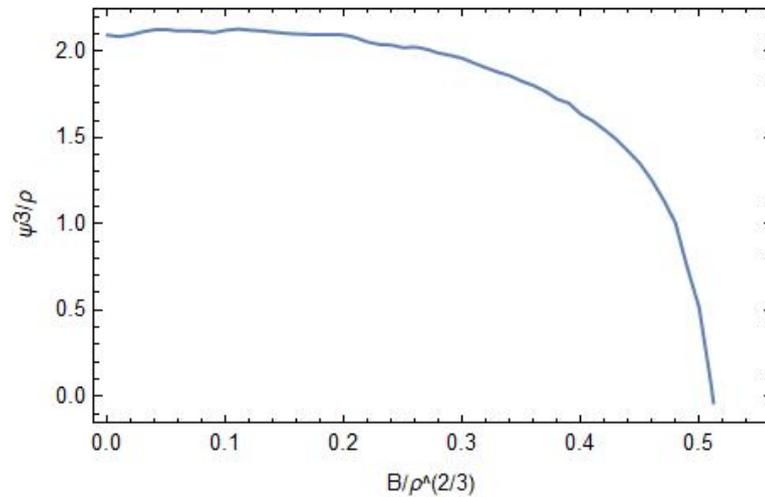


Figura 6.5: Gráficas de $\langle \mathcal{O}_3 \rangle$ vs B .

encontrando la forma característica de un condensado [50], pues para valores superiores a cierto B_c el valor de expectación del operador \mathcal{O}_3 es cero, y consecuentemente el campo escalar se apaga, dejando la solución de fondo que describe, como habíamos adelantado, la fase normal del superconductor holográfico.

6.4. Trabajo futuro

Hemos logrado construir un modelo capaz de reproducir la fase de superconducción de un material en presencia de un campo magnético externo. Sin embargo, debido a la fecha de presentación de esta tesis, aunado con el prospecto de ingreso al doctorado del sustentante, se tiene la necesidad de presentar los resultados elaborados en este texto dejando trabajo pendiente por investigar, desarrollar y publicar. Entre estos puntos se halla el estudio del comportamiento de campo escalar cuando varía la temperatura del horizonte de eventos, traducida en la temperatura de la teoría de campo. Trabajo hecho en esta dirección se encuentra avanzado, pero se ha preferido relegar su presentación a la publicación de este compendio con la finalidad de su análisis a profundidad y confirmación de todo el equipo de trabajo.

A su vez queda por elaborar el desarrollo necesario para el cálculo de conductividad utilizando técnicas de la correspondencia holográfica [3]. Para ello deberán incluirse en la teoría perturbaciones del campo de norma, que irremediablemente, vendrán acompañadas de perturbaciones en la métrica. Será necesario estudiar la componente longitudinal y transversal por separado, requiriendo cada una un sistema consistente de ecuaciones a primer orden de perturbación que permitan obtener una solución para la componente del campo de norma necesario, en cada caso, para obtener el valor de conductividad.

Finalmente, para demostrar que el sistema de ecuaciones es consistente a todo orden de perturbación se tendrá que estudiar el modelo cuando se enciendan perturbaciones de segundo orden en la métrica, el campo de norma y el campo escalar. Habrá de demostrarse matemáticamente que el sistema es integrable teniendo presente que las contribuciones de ordenes inferiores en la perturbación ya están dados por las soluciones encontradas y los requisitos solicitados.

Capítulo 7

Conclusiones

Se ha construido un modelo de superconducción holográfica en 3+1 dimensiones inmerso en un campo magnético externo haciendo uso, vía la correspondencia holográfica, de un fondo gravitacional dual que permitió obtener el cálculo de variables físicas de la teoría de campo. Para conseguir este fin fue necesario hacer una revisión somera de los conceptos que se creyeron necesarios respecto a la relatividad general y a la teoría cuántica de campos, especialmente aquellos íntimamente relacionados con la construcción de la correspondencia holográfica. Una vez hecha esta transición se motivó la construcción del modelo superconductor haciendo uso de la correspondencia y estudiando el fenómeno de superconducción desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos.

Una vez revisada la parte consiguiente a los fundamentos de la correspondencia holográfica y, haciendo uso de ella, se tomó un fondo gravitacional [30] con un campo escalar cargado que cumpliera con los requisitos mínimos que un superconductor holográfico debería tener [50] y se añadió la presencia de un término de Chern-Simons posible en el estudio de una teoría en más de 2+1 dimensiones. Se analizó primeramente el fondo gravitacional, ignorando la presencia del campo escalar, y se encontró una solución al horizonte de eventos capaz de interpolar entre tres escenarios de interés. Con esta solución al horizonte es posible construir una solución numérica que satisfaga las ecuaciones de movimiento para el fondo gravitacional, misma que permite observar que, a pesar de que el campo magnético al horizonte está acotado, el campo magnético de la teoría de norma puede tomar cualquier valor posibilitando el estudio en la presencia de un campo magnético externo arbitrario en la teoría de campo, Fig. (6.3).

Con la revisión del fondo gravitacional hecha, fue posible continuar con el estudio de las implicaciones que tenía considerar un campo escalar complejo y perturbativo colocado en el fondo gravitacional estudiado. Se halló que el valor del campo escalar, cuando uno de sus dos modos normalizables es cero, se corresponde con el valor de expectación de un operador dual que describe un comportamiento de condensado en la presencia de un campo magnético externo, pues, según se observa en la Fig. (6.5), existe un valor de campo magnético crítico, B_c . Esto es, el valor de expectación del operador, $\langle \mathcal{O}_3 \rangle$, encargado de describir al condensado es distinto de cero solo

cuando el campo magnético externo se ubica por debajo de un valor B_c ; cuando el campo magnético excede este valor, $\langle \mathcal{O}_3 \rangle$ se vuelve cero y el material entra en su fase normal. En la teoría de gravedad, esto se traduce en que el campo escalar se vuelve cero en todo punto del espaciotiempo, de modo que recobramos la solución de fondo que identificamos efectivamente con la fase normal del material superconductor.

Bibliografía

- [1] AA Abrikosov. Zh eksp i teor fiz 32,(1957) 1442. *Soviet Phys JETP*, 5:1174, 1957.
- [2] Alekseï Abrikosov. *Methods of quantum field theory in statistical physics*.
- [3] Ofer Aharony, Steven S Gubser, Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz. Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, 323(3-4):183–386, 2000.
- [4] Benjamin C. Allanach and Fernando Quevedo. Prepared for submission to jhep supersymmetry. 2009.
- [5] Dionysios Anninos, Wei Li, Megha Padi, Wei Song, and Andrew Strominger. Warped ads_3 black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2009(03):130, 2009.
- [6] Daniel Areán, Leopoldo A Pando Zayas, Leonardo Patiño, and Mario Villasanté. Velocity statistics in holographic fluids: magnetized quark-gluon plasma and superfluid flow. *Journal of High Energy Physics*, 2016(10):1–32, 2016.
- [7] James M Bardeen, Brandon Carter, and Stephen W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2):161–170, 1973.
- [8] John Bardeen, Leon N Cooper, and John Robert Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical review*, 108(5):1175, 1957.
- [9] Katrin Becker, Melanie Becker, and John H Schwarz. *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge university press, 2006.
- [10] J George Bednorz and K Alex Müller. Possible high T_c superconductivity in the $ba-lu-cu-o$ system. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 64(2):189–193, 1986.
- [11] N Beisert. Quantum field theory i. *ETH Zurich, HS12*, 2012.
- [12] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. In *JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary*, pages 307–320. World Scientific, 2020.
- [13] Jacob D Bekenstein. Black holes and the second law. In *JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary*, pages 303–306. World Scientific, 2020.

- [14] Ingemar Bengtsson. Anti-de sitter space. *Lecture notes*, 118, 1998.
- [15] Neven Bilić and Julio C Fabris. Analog dual to a 2+ 1-dimensional holographic superconductor. *arXiv preprint arXiv:2101.12494*, 2021.
- [16] George David Birkhoff and Rudolph Ernest Langer. *Relativity and modern physics*, volume 1. Harvard University Press Cambridge, 1923.
- [17] Matthias Blau. *Lecture notes on general relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern, 2011.
- [18] Sean M Carroll. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [19] Jorge Casalderrey-Solana, Hong Liu, David Mateos, Krishna Rajagopal, and Urs Achim Wiedemann. *Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions*. Cambridge University Press, 2014.
- [20] Andrew Chamblin, Harvey S Reall, Hisa-aki Shinkai, and Tetsuya Shiromizu. Charged brane-world black holes. *Physical Review D*, 63(6):064015, 2001.
- [21] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. John Wiley & Sons, 2019.
- [22] Leon N Cooper. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Physical Review*, 104(4):1189, 1956.
- [23] John F Cornwell. *Group theory in physics: An introduction*. Academic press, 1997.
- [24] Erik Curiel. A primer on energy conditions. In *Towards a theory of spacetime theories*, pages 43–104. Springer, 2017.
- [25] César Alberto Díaz Hernández. *Un modelo de superconducción holográfica en 3+1 dimensiones en un campo magnético externo*. Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Junio 2017.
- [26] Aldo Dector. Magnetic phenomena in holographic superconductivity with lifshitz scaling. *Nuclear Physics B*, 898:132–156, 2015.
- [27] Aldo Dector Oliver. Ads/cft correspondence and superconductivity: Various approaches and magnetic phenomena. 2015.
- [28] Eric D’Hoker and Daniel Z Freedman. Supersymmetric gauge theories and the ads/cft correspondence. In *Strings, Branes and Extra Dimensions: TASI 2001*, pages 3–159. World Scientific, 2004.
- [29] Eric D’Hoker and Per Kraus. Magnetic brane solutions in ads. *Journal of High Energy Physics*, 2009(10):088, 2009.

- [30] Eric D'Hoker and Per Kraus. Charged magnetic brane solutions in ads 5 and the fate of the third law of thermodynamics. *Journal of High Energy Physics*, 2010(3):1–41, 2010.
- [31] Ray A d'Inverno. Introducing einstein's relativity. *Introducing Einstein's relativity by RA D'Inverno*. New York: Oxford University Press, 1992.
- [32] Nicholas Dorey, Timothy J Hollowood, Valentin V Khoze, Michael P Mattis, and Stefan Vandoren. Multi-instanton calculus and the ads/cft correspondence in $n=4$ superconformal field theory. *Nuclear Physics B*, 552(1-2):88–168, 1999.
- [33] Ethan Dyer and Kurt Hinterbichler. Boundary terms, variational principles and higher derivative modified gravity. *arXiv preprint arXiv:0809.4033*, 2008.
- [34] Albert Einstein. *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*. S. Hirzel, 1908.
- [35] Albert Einstein et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, 17(10):891–921, 1905.
- [36] Alexander L Fetter and John Dirk Walecka. *Quantum theory of many-particle systems*. Courier Corporation, 2012.
- [37] Vladimir Fock. Konfigurationsraum und zweite quantelung. *Zeitschrift für Physik*, 75(9):622–647, 1932.
- [38] Philippe Francesco, Pierre Mathieu, and David Sénéchal. *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [39] Matthew R Francis and Arthur Kosowsky. The construction of spinors in geometric algebra. *Annals of Physics*, 317(2):383–409, 2005.
- [40] Lars Fritz, Jörg Schmalian, Markus Müller, and Subir Sachdev. Quantum critical transport in clean graphene. *Physical Review B*, 78(8):085416, 2008.
- [41] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. i. the ground state at the absolute zero of temperature. *Physical Review*, 79(5):845, 1950.
- [42] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory: a first course*, volume 129. Springer Science & Business Media, 2013.
- [43] GW Gibbons and SW Hawking. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *PHYSICAL REVIEW D*, 15(10), 1977.
- [44] Paul Ginsparg. Applied conformal field theory. *arXiv preprint hep-th/9108028*, 1988.
- [45] Vitaly L Ginzburg and Lev D Landau. On the theory of superconductivity. In *On Superconductivity and Superfluidity*, pages 113–137. Springer, 2009.
- [46] Jerry B Griffiths and Jiří Podolský. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, 2009.

- [47] Steven S Gubser. Breaking an abelian gauge symmetry near a black hole horizon. *Physical Review D*, 78(6):065034, 2008.
- [48] Steven S Gubser, Igor R Klebanov, and Alexander M Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Physics Letters B*, 428(1-2):105–114, 1998.
- [49] Louis N Hand and Janet D Finch. *Analytical mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [50] Sean A Hartnoll. Lectures on holographic methods for condensed matter physics. *Classical and Quantum Gravity*, 26(22):224002, 2009.
- [51] Sean A Hartnoll, Christopher P Herzog, and Gary T Horowitz. Building a holographic superconductor. *Physical Review Letters*, 101(3):031601, 2008.
- [52] Stephen W Hawking. Black holes in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 25(2):152–166, 1972.
- [53] Stephen W Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30–31, 1974.
- [54] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. In *Euclidean quantum gravity*, pages 167–188. World Scientific, 1975.
- [55] Sean A Hayward. General laws of black-hole dynamics. *Physical Review D*, 49(12):6467, 1994.
- [56] JE Hirsch, MB Maple, and F Marsiglio. Superconducting materials classes: Introduction and overview, 2015.
- [57] Gary T Horowitz and Joseph Polchinski. Gauge/gravity duality. *Approaches to quantum gravity*, pages 169–186, 2009.
- [58] Veronika E Hubeny. The ads/cft correspondence. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12):124010, 2015.
- [59] R Jackiw and So-Young Pi. Classical and quantal nonrelativistic chern-simons theory. *Physical Review D*, 42(10):3500, 1990.
- [60] Clifford V Johnson. *D-branes*. Cambridge university press, 2002.
- [61] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry*, volume 1. New York, London, 1963.
- [62] Stefano Kovacs. N= 4 supersymmetric yang-mills theory and the ads/scft correspondence. *arXiv preprint hep-th/9908171*, 1999.
- [63] Jeffrey M Lee, Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, et al. Manifolds and differential geometry. *Topology*, 643:658, 2009.

- [64] Fritz London and Heinz London. The electromagnetic equations of the superconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 149(866):71–88, 1935.
- [65] Jan Louis and Severin Lust. Classification of maximally supersymmetric backgrounds in supergravity theories. *Journal of High Energy Physics*, 2017(2):1–21, 2017.
- [66] G Mack and Abdus Salam. Finite-component field representations of the conformal group. In *Selected Papers Of Abdus Salam: (With Commentary)*, pages 255–283. World Scientific, 1994.
- [67] Yuri Makeenko. A brief introduction to wilson loops and large n. *arXiv preprint arXiv:0906.4487*, 2009.
- [68] Juan Maldacena. The large-n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [69] Juan M Maldacena. Tasi 2003 lectures on ads/cft. *arXiv preprint hep-th/0309246*, 2003.
- [70] Emanuel Maxwell. Isotope effect in the superconductivity of mercury. *Physical Review*, 78(4):477, 1950.
- [71] Walther Meissner and Robert Ochsenfeld. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21(44):787–788, 1933.
- [72] Charles W Misner, Kip S Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [73] Andrei Mourachkine. *High-temperature superconductivity in cuprates: the non-linear mechanism and tunneling measurements*, volume 125. Springer Science & Business Media, 2002.
- [74] James R Munkres. *Topology*, volume 2. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [75] Gregory L Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: An introduction to the mathematics of the special theory of relativity*, volume 92. Springer Science & Business Media, 2012.
- [76] Horatiu Nastase. Introduction to ads-cft. *arXiv preprint arXiv:0712.0689*, 2007.
- [77] Emmy Noether. Invariante variationsprobleme, math-phys. *Klasse, pp235-257*, 1918.
- [78] Barrett O’neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.

- [79] H Osborn and AC1994AnPhy Petkou. Implications of conformal invariance in field theories for general dimensions. *Annals of Physics*, 231(2):311–362, 1994.
- [80] Don N Page. Hawking radiation and black hole thermodynamics. *New Journal of Physics*, 7(1):203, 2005.
- [81] Palash B Pal. Dirac, majorana, and weyl fermions. *American Journal of Physics*, 79(5):485–498, 2011.
- [82] Roger Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1:252, 1969.
- [83] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [84] Joseph Polchinski. Tasi lectures on d-branes. *arXiv preprint hep-th/9611050*, 1996.
- [85] Joseph Polchinski. *String theory*. 2005.
- [86] Fernando Quevedo, Sven Krippendorff, and Oliver Schlotterer. Cambridge lectures on supersymmetry and extra dimensions. *arXiv preprint arXiv:1011.1491*, 2:57, 2010.
- [87] Anton Vladimirovich Ryzhov. *Operators in the $d=4$, $N=4$ SYM and the AdS/CFT correspondence*. University of California, Los Angeles, 2003.
- [88] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 189–196, 1916.
- [89] Geoge B Seligman. *Modular Lie algebras*, volume 40. Springer Science & Business Media, 2012.
- [90] M Scott Shell. *Thermodynamics and statistical mechanics: an integrated approach*. Cambridge University Press, 2015.
- [91] Tycho Sikkenk. *The Black Hole Firewall Paradox*. PhD thesis, Department of Physics, Imperial College London, 2013.
- [92] A Wl Sleight, JL Gillson, and PE Bierstedt. High-temperature superconductivity in the bapb1- xbixo3 system. *Solid State Communications*, 88(11-12):841–842, 1993.
- [93] Miguel Socolovsky. Schwarzschild black hole in anti-de sitter space. *arXiv preprint arXiv:1711.02744*, 2017.
- [94] Martin F Sohnius. Introducing supersymmetry. *Physics reports*, 128(2-3):39–204, 1985.
- [95] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.

- [96] Leonard Susskind and James Lindesay. *Introduction To Black Holes, Information And The String Theory Revolution, An: The Holographic Universe*. World Scientific, 2004.
- [97] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation, 2004.
- [98] David Tong. Lectures on quantum field theory. *Part III Cambridge University Mathematics Tripos, Michaelmas*, 2006.
- [99] David Tong. Lectures on string theory. *arXiv preprint arXiv:0908.0333*, 2009.
- [100] David Tong. Gauge theory, 2018.
- [101] Andrzej Trautman. Clifford algebras and their representations. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, 1:518–530, 2005.
- [102] Dirk Van Delft and Peter Kes. The discovery of superconductivity. *Physics Today*, 63(9):38–43, 2010.
- [103] Miguel Angel Virasoro. Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models. *Physical Review D*, 1(10):2933, 1970.
- [104] Robert M Wald. *Black holes and relativistic stars*. University of Chicago Press, 1998.
- [105] Robert M Wald. Gravitational collapse and cosmic censorship. In *Black holes, gravitational radiation and the universe*, pages 69–86. Springer, 1999.
- [106] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [107] Liancheng Wang and Feng He. holographic superconductor in ads3 spacetime. *arXiv preprint arXiv:2007.05926*, 2020.
- [108] T Weigand. Quantum field theory i+ ii-lecture notes. *and references therein, available at <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/weigand/QFT2-14/SkriptQFT2.pdf> (19th Dec 2017)*, 2014.
- [109] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1995.
- [110] Julius Wess and Bruno Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B*, 70(1):39–50, 1974.
- [111] Kenneth G Wilson. Confinement of quarks. *Physical review D*, 10(8):2445, 1974.
- [112] Edward Witten. Anti de sitter space and holography. *arXiv preprint hep-th/9802150*, 1998.
- [113] Edward Witten. Anti-de sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *arXiv preprint hep-th/9803131*, 1998.

- [114] Kevin Wray. An introduction to string theory. *notes*, 2011.
- [115] James W York Jr. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Physical review letters*, 28(16):1082, 1972.
- [116] Barton Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge university press, 2004.