



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LOS GRUPOS  
ORTOCÉNTRICOS DE PUNTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

ZAYRA EUGENIA CRUZ COLÍN

TUTOR

DR. JORGE ALONSO SANTOS MELLADO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2022





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Preliminares</b>  | <b>11</b> |
| 1.1. Puntos y rectas notables de un triángulo . . . . .         | 11        |
| 1.2. Circunferencias . . . . .                                  | 19        |
| 1.3. Circunferencia de los 9 puntos . . . . .                   | 20        |
| 1.4. Cuadriláteros cíclicos . . . . .                           | 24        |
| 1.5. Propiedades de los ortocentros . . . . .                   | 26        |
| <b>2. Transformaciones en el plano</b>                          | <b>33</b> |
| 2.1. Transformaciones rígidas . . . . .                         | 33        |
| 2.2. Homotecia . . . . .  | 35        |
| 2.3. Inversión . . . . .  | 36        |
| <b>3. Grupos Ortocéntricos</b>                                  | <b>49</b> |
| 3.1. Propiedades . . . . .                                      | 49        |
| 3.2. Nuevos grupos ortocéntricos a partir de uno dado . . . . . | 55        |
| 3.3. Transformaciones de los grupos ortocéntricos . . . . .     | 64        |
| 3.4. Inversión de un grupo ortocéntrico . . . . .               | 65        |
| <b>4. Grupos Ortocéntricos en el espacio</b>                    | <b>71</b> |
| 4.1. Triedros y tetraedros . . . . .                            | 71        |
| 4.2. Grupos Ortocéntricos en los triedros . . . . .             | 71        |
| 4.3. Rectas y puntos notables de un tetraedro . . . . .         | 77        |
| 4.4. Tetraedro ortocéntrico asociado a un triángulo . . . . .   | 80        |
| <b>Índice alfabético</b>  | <b>89</b> |



# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Lema 1.1.1 . . . . .   | 12 |
| 1.2. Gravicentro. . . . .   | 13 |
| 1.3. Incentro. . . . .  | 14 |
| 1.4. Excentro. . . . .  | 15 |
| 1.5. Circuncentro. . . . .  | 16 |
| 1.6. Ortocentro. . . . .  | 18 |
| 1.7. Propiedad óptica de la elipse. . . . .                                       | 19 |
| 1.8. Ángulo entre dos circunferencias. . . . .                                    | 20 |
| 1.9. Circunferencia de los nueve puntos. . . . .                                  | 21 |
| 1.10. Circunferencias ortogonales . . . . .                                       | 22 |
| 1.11. Proposición 1.3.4. . . . .  | 22 |
| 1.12. Línea de Euler. . . . .   | 23 |
| 1.13. Cuadrilátero convexo cíclico. . . . .                                       | 24 |
| 1.14. Cuadrilátero completo. . . . .  | 25 |
| 1.15. Líneas de ortocentros paralelas en triángulos inscritos. . . . .            | 27 |
| 1.16. Proposición 1.5.2 . . . . .   | 27 |
| 1.17. Teorema 1.5.4 . . . . .   | 29 |
|   |    |
| 2.1. Traslación. . . . .  | 34 |
| 2.2. Rotación. . . . .  | 34 |
| 2.3. Reflexión. . . . .   | 34 |
| 2.4. Circunferencias homotéticas. . . . .   | 35 |
| 2.5. Potencia de un punto. . . . .  | 36 |
| 2.6. Construcción de un punto inverso. . . . .                                    | 37 |
| 2.7. Inverso de una recta que no pasa por el centro de inversión . . . . .        | 40 |
| 2.8. Circunferencia que pasa por dos puntos inversos. . . . .                     | 41 |
| 2.9. Proposición 2.3.20 . . . . .   | 43 |
| 2.10. Circunferencia de antisimilitud de dos circunferencias ajenas. . . . .      | 44 |
| 2.11. Circunferencia de antisimilitud de dos circunferencias no ajenas. . . . .   | 44 |
| 2.12. Tres circunferencias con sus seis circunferencias de antisimilitud. . . . . | 46 |
| 2.13. Polo y polar. . . . .   | 47 |
|   |    |
| 3.1. Ortocentro fuera del triángulo. . . . .                                      | 50 |
| 3.2. Grupo Ortocéntrico. . . . .  | 50 |

|   |    |
|---|----|
| 3.3. Grupo Ortocéntrico con circuncírculos. . . . .                       | 51 |
| 3.4. Teorema 3.1.7 . . . . .  | 53 |
| 3.5. Triángulo órtico de un grupo ortocéntrico. . . . .                   | 54 |
| 3.6. Circunferencia de los nueve puntos de un grupo ortocéntrico. . . . . | 55 |
| 3.7. Grupo ortocéntrico de circuncentros. . . . .                         | 56 |
| 3.8. Proposición 3.2.4 . . . . .  | 57 |
| 3.9. Grupo ortocéntrico de centroides. . . . .                            | 58 |
| 3.10. Proposición 3.2.9 Caso 1 . . . . .                                  | 60 |
| 3.11. Proposición 3.2.9 Caso 2 . . . . .                                  | 61 |
| 3.12. Grupo ortocéntrico de $A, U, V$ y $W$ . . . . .                     | 63 |
| 3.13. Puntos no concíclicos. . . . .                                      | 66 |
| 3.14. Lema 3.4.2 . . . . .  | 67 |
| 3.15. Grupo Ortocéntrico resultante de la inversión por $H$ . . . . .     | 68 |
| 3.16. Triángulo autopolar. . . . .  | 69 |
| 4.1. Ángulo diedro . . . . .  | 72 |
| 4.2. Ángulo triedro. . . . .  | 74 |
| 4.3. Ángulo triedro determinado por un grupo ortocéntrico. . . . .        | 75 |
| 4.4. Bimedias de un tetraedro. . . . .                                    | 79 |
| 4.5. Alturas de un tetraedro . . . . .                                    | 80 |
| 4.6. Tetraedro ortocéntrico. . . . .                                      | 81 |
| 4.7. Tetraedro inscrito en paralelepípedo. . . . .                        | 82 |
| 4.8. Paralelepípedo circunscrito. . . . .                                 | 84 |
| 4.9. Ortocentro proyectado de un tetraedro. . . . .                       | 87 |

*Las matemáticas no solamente poseen la verdad, sino la suprema belleza  
-una belleza fría y austera, como la de la escultura,  
sin atractivo para la parte más débil de nuestra naturaleza...  
capaz de decidida perfección y hasta lo sublime pura  
como sólo el arte más grande puede mostrar.*

**Bertrand Russel**



# Agradecimientos

Quiero agradecer a Mónica de Nova por ser mi modelo a seguir, siempre brindarme su apoyo incondicional desde que yo era su alumna hasta el día de hoy. Por darme la oportunidad de ser su ayudante durante estos años.

Moni eres una profesora como pocas, y una persona excepcional. Muchas gracias por toda la ayuda, por escucharme, por los consejos, por creer en mí. Estoy segura de que seguirás inspirando a muchas más personas y que seguirás dejando una huella en el corazón de todas las personas que hemos tenido la fortuna de tomar una clase tuya.



# Introducción

La geometría es una de las ramas básicas de las matemáticas y cuando uno piensa en ella es imposible no pensar en Euclides, después de todo es llamado *El padre de la geometría*.

A lo largo de este texto se desarrollará el tema de grupos ortocéntricos, el cual se aborda desde el punto de vista de la geometría euclidiana y que si bien es un tema de Geometría Moderna, pocas veces se ve desarrollado en las clases debido a la falta de tiempo. Es por ello que elegí este concepto como punto central de mi tesis la cual está compuesta por cuatro capítulos y que tiene como objetivo ser un texto complementario para los estudiantes en sus primeros semestres.

En el primer capítulo se establecerán los conceptos básicos que vamos a necesitar, como lo son los puntos y las rectas notables de los triángulos, junto con sus propiedades. En particular vamos a analizar las del ortocentro, ya que este será el protagonista de este trabajo, para terminar el capítulo se discuten también las características de las circunferencias y de los cuadriláteros.

En el segundo capítulo vamos a recordar las transformaciones del plano: traslación, rotación, reflexión, homotecia e inversión. Se hará de manera breve, debido a que es meramente un recordatorio para trabajar con estas mas adelante.

En el tercer capítulo se va a desmenuzar el concepto principal, enunciando su definición, y probando algunas de sus propiedades, así como las características para que exista un grupo ortocéntrico. Además se prueba bajo qué transformaciones se preserva. Así también se verá la construcción de un grupo ortocéntrico dados cuatro puntos no concíclicos arbitrarios mediante una inversión, y daremos un ejemplo en donde se encuentran grupos ortocéntricos dado un triángulo rectángulo.

El último capítulo nos va a llevar al espacio euclidiano, es decir vamos a subir la dimensión de los objetos, ya no vamos a tratar con triángulos, sino con triedros y tetraedros. Analizaremos si es posible tener un análogo a los grupos ortocéntricos en ambas figuras.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo nuestro objetivo es el definir conceptos y probar teoremas y proposiciones de figuras en el plano euclidiano que formarán la base para el desarrollo de nuestro texto.

Antes de comenzar es importante aclarar que para la comprensión de este texto el lector debe tener conocimientos previos de geometría, por ejemplo: postulados (y sus equivalencias), junto con nociones comunes de Euclides, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, ley del paralelogramo, razones entre segmentos, nociones de distancia. Los cuales no demostraremos en este texto, sin embargo se pueden consultar en [3] o [5].

Así mismo es importante mencionar que cuando se hace referencia a la semejanza o congruencia de dos triángulos (o en general cualquier polígono) las razones estarán dadas de la siguiente forma: si  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$  son semejantes (o congruentes) nos estaremos refiriendo a que sus lados correspondientes cumplen que  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

También es importante tener en cuenta que cuando se escriba  $\overrightarrow{AB}$  estamos considerando segmentos dirigidos, es decir, el segmento comienza en  $A$  y termina en  $B$ , así tenemos que  $\overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{AB})$ .

### 1.1. Puntos y rectas notables de un triángulo

Si pensamos en las figuras más simples que hay en el plano euclidiano, más allá de solamente puntos y rectas, seguramente las primeras que se nos ocurrirían son triángulos. En esta sección veremos algunas propiedades de los puntos y rectas que podemos definir en ellos. Estos conceptos y teoremas son la base de este texto. El libro de los *Elementos* de Euclides es de los primeros en donde se encuentra un estudio axiomático de figuras planas, por lo cual será mencionado a lo largo de los capítulos.

Dado un triángulo  $\triangle ABC$ , podemos dibujar el segmento de un vértice al punto medio del lado opuesto, a este lo llamamos *mediana* del triángulo. A

continuación probaremos un lema que nos ayudará a demostrar un teorema relacionado con las medianas de un triángulo.

**Lema 1.1.1.** *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al lado restante y su longitud es igual a la mitad de dicho lado.*

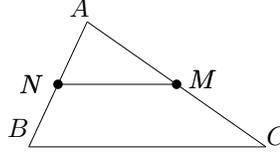


Figura 1.1: Lema 1.1.1

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  un triángulo,  $N$  y  $M$  los puntos medios de los lados  $AB$  y  $AC$ , como se muestra en la Figura 1.1. Tenemos que  $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$ , y por el recíproco del teorema de Tales tenemos que  $BC$  es paralelo a  $NM$ . También tenemos que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle ANM$  son semejantes con razón  $2 : 1$ , entonces  $2NM = BC$ . ■

**Teorema 1.1.2.** *Las medianas de un triángulo concurren.*

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  un triángulo,  $M$ ,  $N$  y  $L$  los puntos medios de los lados  $AC$ ,  $AB$  y  $BC$ , respectivamente y llamémosle  $G$  al punto de intersección de  $CN$  y  $BM$  (el cual existe ya que al ser  $NM$  paralelo a  $BC$  se tiene que  $\pi = \angle NMC + \angle MCB > \angle BMC + \angle MCN$ . Entonces por el quinto postulado  $BM$  y  $CN$  se intersecan).

Por el lema anterior tenemos que  $NM$  es paralelo a  $BC$ , así  $\triangle BCG$  y  $\triangle MNG$  son semejantes con razón  $2 : 1$ , entonces las medianas  $CN$  y  $BM$  se intersecan en  $G$  que es el único punto que divide a estos segmentos en la razón dada. Sea  $G'$  el punto de intersección de  $AL$  y  $BM$  (el cual existe por un argumento análogo al dado para  $G$ ), fijémonos en los triángulos  $\triangle ABG'$  y  $\triangle LMG'$ , nuevamente por el lema anterior tenemos que  $ML$  es paralelo a  $AB$ , por lo cual  $\triangle ABG'$  y  $\triangle LMG'$  son semejantes con razón  $2 : 1$ , así  $G'$  divide a  $BM$  en  $2 : 1$ . Recordando que dado un segmento y una razón existe un único punto sobre la recta que lo divide en dicha razón concluimos que  $G = G'$ . Por lo tanto, las medianas se intersecan en un solo punto. ■

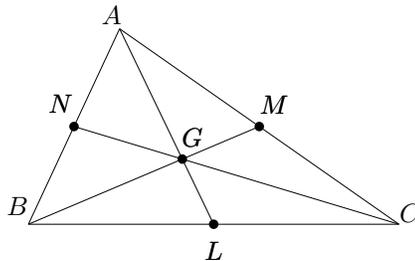


Figura 1.2: Gravicentro.

**Definición 1.1.3.** Al punto de intersección de las medianas se le llama **gravicentro**, **baricentro** o **centroide** y usualmente es denotado por una  $G$ .

Dadas dos rectas que se intersecan en un punto, estas delimitan cuatro ángulos (dos iguales entre sí al ser opuestos por el vértice). En general, al hablar del ángulo entre dos rectas solo consideraremos el que sea de menor magnitud. Si nos fijamos en un ángulo podemos trazar rectas que lo dividan en dos ángulos iguales, a dichas rectas las llamaremos **bisectrices**.

Si nos fijamos en los ángulos internos de un triángulo, a la recta que divide a uno de ellos en dos ángulos iguales la llamamos **bisectriz interna**, de la misma manera podemos dividir a los ángulos externos (ángulo suplementario del interno), en este caso, la recta es llamada **bisectriz externa**.

**Proposición 1.1.4.** Sean  $a$  y  $b$  dos rectas que inician en un punto  $M$ , la bisectriz del ángulo formado por  $a$  y  $b$  es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas rectas.

*Demostración.* Sean  $a$  y  $b$  dos rectas distintas cuya intersección es  $O$  y sea  $l$  una bisectriz. Elegimos un punto  $P$  sobre  $l$ . Desde  $P$  trazamos perpendiculares hacia  $a$  y  $b$ , a los pies de estas las llamamos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Ahora nos fijamos en los triángulos  $\triangle OAP$  y  $\triangle OBP$ , nótese que son congruentes ya que como  $l$  es bisectriz entonces  $\angle AOP = \angle POB$  y ambos tienen un segundo ángulo que es rectos en  $A$  y  $B$ , respectivamente, y por la suma interna de los ángulos de un triángulo tenemos que  $\angle APO = \angle OPB$ . Además  $OP$  es lado común. Así por el criterio ángulo-lado-ángulo, los triángulos son congruentes y por lo tanto  $PA = PB$ .

Sea  $P'$  un punto en el lugar geométrico, entonces  $d(P', a) = d(P', b)$ , nombremos  $A'$  y  $B'$  a los pies de las perpendiculares de  $P'$  a  $a$  y  $b$ . Nos fijamos en los triángulos  $\triangle OA'P'$  y  $\triangle OB'P'$ , ambos son triángulos rectángulos,  $P'A' = P'B'$  y  $OP'$  es un lado común, por el teorema de Pitágoras llegamos a que  $OA' = OB'$ . Entonces, por el criterio lado-lado-lado se tiene que los triángulos son congruentes y así  $\angle A'OP' = \angle P'OB'$ . Es decir,  $P'$  está en la bisectriz del ángulo comprendido por las rectas  $a$  y  $b$ . ■

Ahora que ya vimos a la bisectriz como lugar geométrico, podemos demostrar que efectivamente estas se intersecan dentro de un triángulo.

**Teorema 1.1.5.** *Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.*

*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  un triángulo. Como ya vimos, la bisectriz es el lugar geométrico de puntos que equidistan de los lados de un ángulo. Sean  $P$  y  $Q$  las intersecciones de las bisectrices por  $A$  y  $B$  con  $BC$  y  $CA$  respectivamente. Llamémosle  $I$  al punto de intersección de estas bisectrices (el cual existe ya que  $\pi = \angle ABC + \angle CAB + \angle ACB > \angle ABC + \angle BAC > \angle QBA + \angle BAP$ . Tenemos que, por el quinto postulado  $AP$  y  $BQ$  se intersecan).

Sean  $Z$ ,  $Y$  y  $X$  los pies de altura desde  $I$  sobre  $AB$ ,  $CA$  y  $BC$ , respectivamente. Como  $I$  está en  $AP$  y  $BQ$ , entonces  $d(I, Z) = d(I, Y) = d(I, X)$ , entonces  $I$  también está sobre la bisectriz del ángulo  $\angle ACB$ . Por lo tanto las bisectrices se intersectan en el punto  $I$ . ■

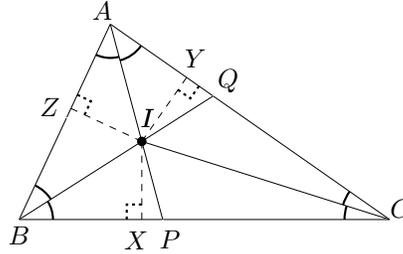


Figura 1.3: Incentro.

**Teorema 1.1.6.** *Las bisectrices externas y la bisectriz interna del ángulo restante concurren.*

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  un triángulo e  $I'$  la intersección de las bisectrices externas de los ángulos con vértice en  $B$  y  $C$ . Sean  $X'$ ,  $Y'$  y  $Z'$  los pies de las perpendiculares desde  $I'$  hacia los lados  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$  entonces  $d(I', Z') = d(I', X') = d(I', Y')$ , así  $I'$  también está en la bisectriz de  $\angle BAC$ , por lo tanto  $I'$  es la intersección de las dos bisectrices externas y una interna. ■

**Definición 1.1.7.** Al punto de intersección de las bisectrices internas se le llama *incentro* y es denotado por una  $I$ , y llamamos *excentro* a la intersección de dos bisectrices externas y una interna. El incentro es el centro de una circunferencia inscrita al triángulo, llamada *incírculo*. Los excentros son los centros de circunferencias tangentes a un lado y a la prolongación de los otros y son llamadas *excírculos*.

Ya definimos las medianas del triángulo, pero ahora en lugar de unir el punto medio  $M$  con el vértice opuesto, nos gustaría trazar una recta perpendicular al lado del triángulo que pase por dicho  $M$ , a esta recta le llamamos *mediatriz*. Esta recta se puede dibujar con cualquier segmento, no necesitamos tener un triángulo para definirla, y al igual que las bisectrices, las mediatrices también son descritas como un lugar geométrico.

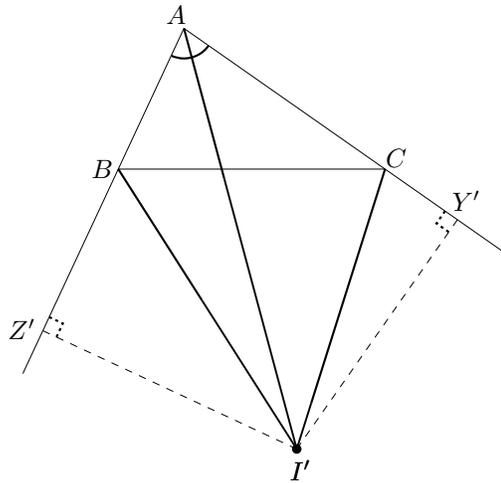


Figura 1.4: Excentro.

**Proposición 1.1.8.** *La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de puntos que equidistan de los extremos de este.*

*Demostración.* Sea  $AB$  un segmento y  $M$  su punto medio. Construimos la recta  $m$  perpendicular a  $AB$  por  $M$ , y elegimos  $P$  un punto sobre  $m$ , entonces nos fijamos en los triángulos  $\triangle PAM$  y  $\triangle PBM$ , los cuales son congruentes ya que  $AM = MB$ , ambos triángulos tienen un ángulo recto en  $M$  y comparten el lado  $MP$ , así el criterio de lado-ángulo-lado garantiza que dichos triángulos son congruentes. En particular tenemos que  $PA = PB$ .

Sea  $P'$  un punto en el lugar geométrico dado, entonces  $P'A = P'B$ . Si  $P'$  está sobre  $AB$  entonces  $P'$  es el punto medio y por lo tanto pertenece a la mediatriz, de lo contrario, tracemos una perpendicular a  $AB$  desde  $P'$ , llamémosle  $M'$  al pie de dicha perpendicular, y ahora fijémonos en los triángulos  $\triangle P'AM'$  y  $\triangle P'BM'$ : ambos tienen ángulos rectos, un lado común  $P'M'$  y como  $P'A = P'B$ , por el teorema de Pitágoras tenemos que el lado restante es igual, es decir  $AM' = M'B$ . Entonces  $M'$  es punto medio y como  $P'M'$  es perpendicular a  $AB$  concluimos que  $P'$  está en la mediatriz del segmento  $AB$ . ■

Ya que vimos a las mediatrices como lugar geométrico, es fácil demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.9.** *Las mediatrices de un triángulo son concurrentes.*

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  un triángulo,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  los puntos medios de los segmentos  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$  respectivamente y sea  $O$  la intersección de las perpendiculares  $\ell$  y  $\ell'$  por  $L$  y  $M$ , respectivamente (la cual existe ya que  $\pi = \angle ZMA + \angle RNA > \angle ZMN + \angle RNM$  donde  $Z$  y  $R$  son puntos en  $\ell$  y  $\ell'$ . Así, por el quinto postulado  $\ell$  y  $\ell'$  se intersecan).

Como  $O$  está en las mediatrices de los segmentos  $BC$  y  $AC$ , entonces  $d(O, B) = d(O, C) = d(O, A)$ , por lo tanto  $O$  también está en la mediatriz del segmento  $AB$ , así, las mediatrices de un triángulo se intersecan. ■

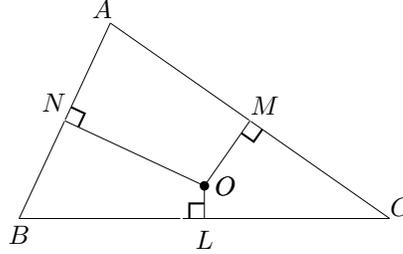


Figura 1.5: Circuncentro.

**Definición 1.1.10.** Al punto de intersección de las mediatrices se le llama *circuncentro* y es denotado por la letra  $O$ . Este punto es el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo, la cual se llama *circuncírculo*.

Para nuestra última definición, desde un vértice del triángulo trazamos una perpendicular hacia el lado opuesto. A esta recta la nombramos *altura*, y al igual que las rectas que ya hemos mencionado, estas también son concurrentes. Antes de realizar la prueba, enunciemos un lema que caracteriza a las alturas de un triángulo como un lugar geométrico.

**Lema 1.1.11.** Si  $\triangle ABC$  es un triángulo y  $AD$  es perpendicular a  $BC$ , donde  $D$  es el pie de esta, entonces la altura por  $A$  es el lugar geométrico de los puntos  $P$  tales que  $(AB)^2 - (AC)^2 = (PB)^2 - (PC)^2$ .

*Demostración.* Veamos que  $D$  pertenece al lugar geométrico. Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos  $\triangle ABD$  y  $\triangle ADC$  tenemos que

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (AD)^2 + (DB)^2, \\ (AC)^2 &= (AD)^2 + (DC)^2\end{aligned}$$

Consideramos  $(AD)^2$  de ambas ecuaciones y tenemos que

$$(AB)^2 - (AC)^2 = (DB)^2 - (DC)^2$$

Por lo tanto  $D$  pertenece al lugar geométrico.

Recíprocamente, sea  $P$  un punto en el lugar geométrico, entonces

$$(AB)^2 - (AC)^2 = (PB)^2 - (PC)^2$$

Al ser  $AD$  la altura del triángulo, entonces podemos usar el Teorema de Pitágoras en los triángulos  $\triangle ABD$  y  $\triangle ADC$

$$\begin{aligned}(AB)^2 - (AC)^2 &= (DB)^2 - (DC)^2, \\ (PB)^2 - (PC)^2 &= (AB)^2 - (AC)^2\end{aligned}$$

Así,

$$(PB)^2 - (PC)^2 = (DB)^2 - (DC)^2 \quad (1.1)$$

Vamos a considerar  $H$  el pie de altura desde  $P$  hacia  $BC$ . Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned}(PH)^2 + (HC)^2 &= (PC)^2, \\ (PH)^2 + (HB)^2 &= (PB)^2\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.1) obtenemos

$$(PH)^2 + (HB)^2 - (PH)^2 - (HC)^2 = (PB)^2 - (PC)^2 = (DB)^2 - (DC)^2$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(HB)^2 - (HC)^2 &= (DB)^2 - (DC)^2 \\ &= (DH + HB)^2 - (DH + HC)^2 \\ &= (DH)^2 + 2(DH * HB) + (HB)^2 - (DH)^2 - 2(DH * HC) - (HC)^2 \\ &= 2(DH * HB) + (HB)^2 - 2(DH * HC) - (HC)^2\end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned}(HB)^2 - (HC)^2 &= 2(DH * HB) + (HB)^2 - 2(DH * HC) - (HC)^2, \\ 0 &= 2(DH * HB) - 2(DH * HC), \\ 0 &= 2DH(HB - HC)\end{aligned}$$

Tenemos dos casos,  $2DH = 0$  ó  $HB - HC = 0$ . Veamos que pasa en el segundo, si  $HB - HC = 0$ , entonces  $HB = HC$ , lo cual nos dice que  $H$  es punto medio, pero al ser  $PH$  perpendicular a  $BC$  tenemos que el triángulo  $\triangle PCB$  es isósceles (o equilátero), entonces  $PH$  es también altura. En el primer caso  $H$  y  $D$  coinciden, es decir,  $P$  está sobre la altura  $AD$  del triángulo  $\triangle ABC$ . ■

**Teorema 1.1.12.** *Las alturas de un triángulo son concurrentes.*

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  un triángulo,  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  sus alturas, y  $H$  el punto de intersección de  $AD$  y  $BE$  (el cual existe ya que  $\pi = \angle BEA + \angle ADC > \angle BAP + \angle DAB$ ). Así, por el quinto postulado  $AD$  y  $BE$  se intersecan).

Por el lema anterior sabemos que

$$\begin{aligned}(HB)^2 - (HC)^2 &= (AB)^2 - (AC)^2 \\ (HC)^2 - (AH)^2 &= (CB)^2 - (AB)^2\end{aligned}$$

Sumando ambas igualdades llegamos a que

$$(BH)^2 - (AH)^2 = (CB)^2 - (AC)^2$$

Entonces  $H$  está en  $CF$  y por lo tanto las alturas se intersecan en un solo punto. ■

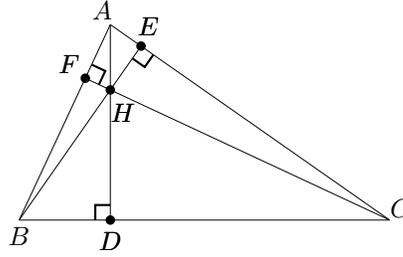


Figura 1.6: Ortocentro.

**Definición 1.1.13.** Al punto de intersección de las alturas de un triángulo se le llama **ortocentro** y se le denota con una  $H$ .

Esta última definición es la más importante para nosotros, ya que los grupos ortocéntricos van a estar definidos mediante el ortocentro de un triángulo. Por esta razón, en la siguiente sección estudiamos algunos resultados importantes que involucran a las alturas y a su intersección.

Del primer postulado de Euclides podemos deducir que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta que los une. ¿Qué pasaría si no pudiesemos unir los puntos directamente? en ese caso, se puede enunciar la siguiente proposición:

**Proposición 1.1.14 (Propiedad óptica de la elipse).** *Si dos puntos están en un mismo semiplano respecto a una línea, entonces el camino más corto entre ellos, y que además interseque a la línea dada en un punto, son dos semirayos que se intersecan con la línea dada y que forman ángulos iguales .*

*Demostración.* Sean  $A, B$  los puntos dados y  $\ell$  la línea dada. Trazamos una perpendicular desde  $A$  hacia  $\ell$  y le llamamos  $D$  al pie de altura, trazamos una circunferencia con centro en  $D$  y radio  $AD$ , al punto diametralmente opuesto a  $A$  le nombramos  $A'$ . Unimos  $A'$  con  $B$  y a la intersección de este segmento con  $\ell$  le llamamos  $C$ . Unimos  $A$  con  $C$ . Nótese que los triángulos  $\triangle ADC$  y  $\triangle A'DC$  son congruentes por criterio lado-ángulo-lado, pues comparten un lado,  $AD = A'D$  y el ángulo  $\angle ADC = \angle A'DC = \frac{\pi}{2}$ . Afirmamos que  $C$  hace el camino más corto, para ello supongamos que no. Elegimos un punto  $M$  sobre  $\ell$ , supongamos que  $M$  hace el camino más corto entre  $A$  y  $B$  tocando a  $\ell$ , unimos  $BM$  y  $MA'$ ,

se forma un triángulo  $\triangle A'BM$ , pero sabemos que la suma de dos lados de un triángulo es mayor al restante, así

$$AM + MB = A'M + BM > A'B = A'C + CB = AC + CB$$

Por lo tanto  $C$  es el punto en  $\ell$  que hace el camino más corto. ■

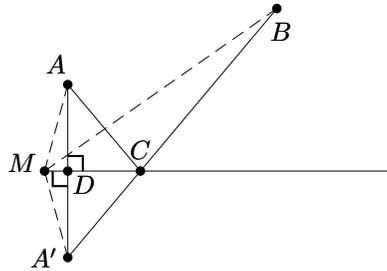


Figura 1.7: Propiedad óptica de la elipse.

## 1.2. Circunferencias

Euclides nos dice en su tercer postulado lo siguiente: "*Dado un punto y una distancia se puede trazar una circunferencia*"; en esta sección estudiamos algunas propiedades de las circunferencias, que serán útiles para el desarrollo principal del texto. Para facilitar la notación, dada una circunferencia  $\mathcal{C}$  con centro en  $O$  y radio  $r$  escribiremos  $\mathcal{C}(O, r)$ .

Es importante hacer notar que cuando decimos que un ángulo abre un arco de circunferencia nos referimos al arco que resulta de la intersección de la circunferencia con los lados del ángulo.

**Definición 1.2.1.** En una circunferencia  $\mathcal{C}$ , decimos que un ángulo es *inscrita* si está formado por dos cuerdas que tienen un extremo común sobre la circunferencia.

**Definición 1.2.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia, decimos que un ángulo es *central* si está formado por dos radios de la circunferencia.

Las demostraciones de las siguientes proposiciones se pueden encontrar en [4].

**Proposición 1.2.3.** *Un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

**Proposición 1.2.4.** *Dos ángulos inscritos en una circunferencia que abren el mismo arco son iguales.*

Si nos dan dos rectas que se intersecan es posible medir el ángulo entre ellas. En las circunferencias, también podemos medir ángulos entre ellas, para ello es necesario tener dos circunferencias que tengan al menos un punto en común. Trazamos tangentes a las circunferencias por uno de los puntos de intersección, el ángulo entre ellas es el ángulo determinado por los rayos que no intersecan a la circunferencia.

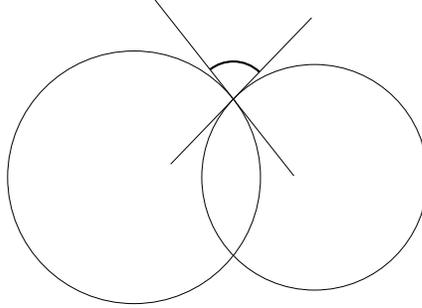


Figura 1.8: Ángulo entre dos circunferencias.

Al igual que en las rectas podemos tener rectas perpendiculares, en las circunferencias vamos a tener algo similar, para ello vamos a necesitar la siguiente definición:

**Definición 1.2.5.** Decimos que dos circunferencias  $\mathcal{C}(O, r)$  y  $\mathcal{C}(O_1, r_1)$  son ortogonales si  $(OO_1)^2 = r^2 + r_1^2$ .

El siguiente teorema no se probará, pero su demostración se puede encontrar en [1].

**Teorema 1.2.6.** Dadas dos circunferencias que se intersecan, si el radio de una circunferencia que pasa por un punto de intersección es tangente a la otra, las dos circunferencias son ortogonales.

### 1.3. Circunferencia de los 9 puntos

Se puede ver que para determinar una única circunferencia es necesario tener al menos tres puntos dados no colineales. En efecto, se puede trazar un triángulo para después fijarse en el circuncentro, sin embargo, a lo largo de la historia varios matemáticos se dieron a la tarea de buscar circunferencias que estuvieran definidas con más puntos o que tuvieran propiedades especiales. Karl Wilhem Feuerbach (1800-1834), fue uno de los que tuvo éxito en su búsqueda, él descubrió una circunferencia que pasaba por seis puntos: los puntos medios y los pies de alturas de un triángulo y Olry Terquem (1782-1862) fue quien notó que esta circunferencia también pasaba por los puntos medios entre el ortocentro y los vértices del triángulo. Terquem fue la primera persona en usar el término

*circunferencia de los nueve puntos.* Dicha circunferencia tiene propiedades muy interesantes, sin embargo en este texto solo mencionaremos las que vamos a ocupar. Las demostraciones de los siguientes teoremas no se escribirá, pero se pueden encontrar en [5].

**Teorema 1.3.1.** *En un triángulo  $ABC$ , los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los vértices al ortocentro son cíclicos.*

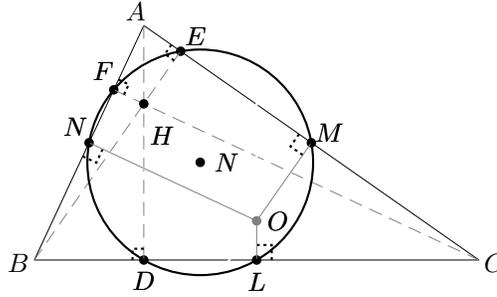


Figura 1.9: Circunferencia de los nueve puntos.

**Teorema 1.3.2.** *El centro de la circunferencia de los nueve puntos queda a la mitad del segmento definido por el ortocentro y el circuncentro.*

**Teorema 1.3.3.** *Dado un triángulo y su ortocentro, las circunferencias que tienen a un lado y al segmento del ortocentro al vértice restante como diámetros son ortogonales. Más aún, los pies de las otras dos alturas son los puntos comunes de dichas circunferencias.*

*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  un triángulo y  $H$  su ortocentro. Vamos a considerar a las circunferencias con diámetros  $BC$  y  $AH$ , y las denotaremos como  $\mathcal{C}_1(L, r)$  y  $\mathcal{C}_2(S, r')$ , respectivamente (figura 1.10). Tracemos la circunferencia  $\mathcal{C}$  que tiene por diámetro  $LS$ . Sean  $D, E, F$  los pies de las alturas que pasan por  $A, B$  y  $C$ , respectivamente. Veamos que  $D$  pertenece a  $\mathcal{C}$  ya que el ángulo  $\angle LDS$  es recto pues  $AD$  es altura, como  $\mathcal{C}$  pasa por un punto medio, un pie de altura y un punto medio entre el ortocentro y un vértice, tenemos que  $\mathcal{C}$  es la circunferencia de los 9 puntos del triángulo  $\triangle ABC$ . Nótese que  $E$  y  $F$  pertenecen a  $\mathcal{C}_1$  puesto que los ángulos  $\angle BEC$  y  $\angle BFC$  son ángulos rectos que subtenden un diámetro, lo cual los obliga a estar sobre la circunferencia  $\mathcal{C}_1$ . También tenemos que  $E$  y  $F$  pertenecen a  $\mathcal{C}$ , y como  $\angle SEL = \frac{\pi}{2}$  entonces  $\mathcal{C}_1(L, r)$  y  $\mathcal{C}_2(S, r')$  son ortogonales por el Teorema 1.2.6. ■

Así como una circunferencia queda definida por tres puntos, una línea queda definida por dos, pero al igual que la circunferencia de los nueve puntos,

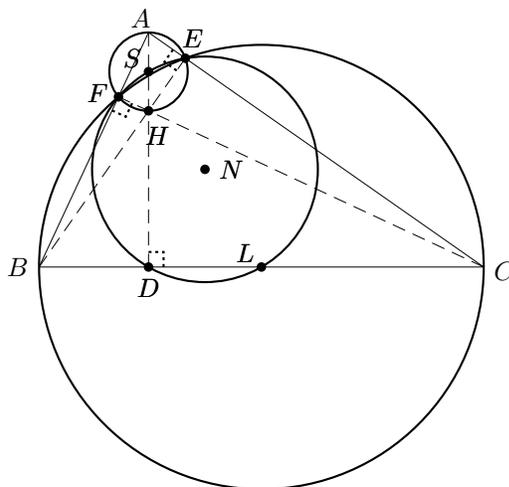


Figura 1.10: Circunferencias ortogonales

se pueden encontrar rectas especiales que pasen por más de dos puntos notables. Leonhard Euler demostró en 1765 que el circuncentro, el gravicentro y el ortocentro son colineales, en su honor a esta línea se le nombró *línea de Euler*.

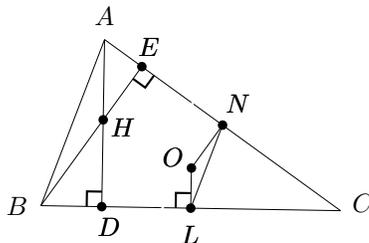


Figura 1.11: Proposición 1.3.4.

**Proposición 1.3.4.** *En un triángulo  $\triangle ABC$ , dado  $H$  su ortocentro,  $O$  el circuncentro y  $L$  el punto medio del lado  $BC$ , entonces la longitud del segmento  $AH$  es el doble de la distancia del punto medio al circuncentro.*

*Demostración.* Tracemos las alturas por  $A$  y  $B$ , y sean  $D$  y  $E$  los pies de éstas. Ahora tracemos las mediatrices de los lados  $BC$  y  $AC$ , con  $L$  y  $N$  los puntos medios de dichos lados. Fijémonos en los triángulos  $\triangle ABH$  y  $\triangle LNO$ , estos son semejantes ya que tienen lados respectivamente paralelos, así, los ángulos formados por lados correspondientes son iguales y se cumple el criterio de se-

menjanza ángulo-ángulo, de esto podemos obtener que la razón de semejanza es  $\frac{AB}{NL} = 2$ , y por lo tanto  $AH = 2OL$ . ■

**Teorema 1.3.5 (Línea de Euler).** *Dado un triángulo se tiene que el circuncentro, el ortocentro y gravicentro son colineales.*

*Demostración.* Por la proposición anterior sabemos que  $AH = 2OL$  y como  $G$  es gravicentro sabemos que  $AG = 2GL$ , donde  $L$  es el punto medio de  $BC$ . Al ser  $AH$  y  $OL$  perpendiculares a  $BC$ , se tiene que son paralelas entre sí, entonces  $\angle HAG = \angle OLG$  y  $\angle AGH = \angle OGL$ , por lo cual los triángulos  $\triangle HAG$  y  $\triangle OLG$  son semejantes por criterio ángulo-ángulo. En particular,  $\angle HGA = \angle OGL$ , así  $H, G$  y  $O$  son colineales. ■

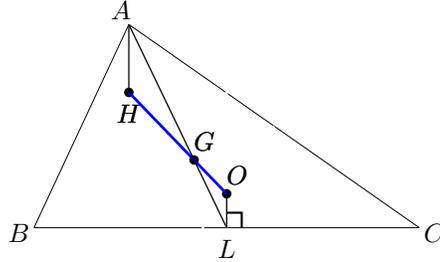


Figura 1.12: Línea de Euler.

**Corolario 1.3.6.** *Dados un triángulo  $\triangle ABC$ ,  $H$ ,  $G$  y  $O$  su ortocentro, gravicentro y circuncentro, respectivamente. Se cumple que  $\frac{GO}{GH} = \frac{1}{2}$ .*

*Demostración.* Los triángulos  $\triangle HAG$  y  $\triangle OAG$  son semejantes y su razón es  $2 : 1$ , entonces  $HG = 2GO$ , por lo tanto  $\frac{GO}{HG} = \frac{1}{2}$ . ■

Esta línea no solo tiene la propiedad de contener a estos tres puntos, sino que también contiene al centro de la circunferencia de los nueve puntos.

Dada una circunferencia, uno siempre puede encontrar otra que sea tangente a la ya dada (con una construcción), incluso dadas dos circunferencias se puede encontrar una tercera que sea tangente a las dos anteriores, sin embargo aumentando el número de circunferencias es más difícil encontrar una que sea tangente al mismo tiempo a todas.

El problema de Apolonio justamente nos habla sobre esto, nos da una construcción para que dadas tres circunferencias, se pueda encontrar una cuarta que sea tangente a las tres circunferencias dadas. La circunferencia de los nueve puntos tiene esta cualidad de ser tangente a 4 circunferencias, la prueba de este teorema esta se puede consultar en [1].

**Teorema 1.3.7. Teorema de Feuerbach.** *La circunferencia de los 9 puntos es tangente a las circunferencias tangentes a los lados de un triángulo  $ABC$ , es decir a la inscrita y a las 3 excritas.*

Con este teorema concluimos esta sección. La circunferencia de los nueve puntos va a ser muy relevante para las propiedades del tema central del texto.

## 1.4. Cuadriláteros cíclicos

Las intersecciones de rectas nos dibujan figuras, por ejemplo, en la primera sección vimos que el área delimitada por la intersección en pares de tres rectas nos dibuja un triángulo. En esta sección estudiamos un poco sobre cuadriláteros que, como los triángulos, se pueden ver como el área determinada por pares de cuatro rectas no concurrentes por tercias. Sabemos que por tres puntos siempre pasa una única circunferencia, sin embargo si tenemos cuatro, puede que no exista circunferencia en la cual todos los puntos estén contenidos. Por ello surge la siguiente definición:

**Definición 1.4.1.** *Decimos que  $n$  puntos son cíclicos si están sobre una misma circunferencia.*

Otra observación importante es que los ángulos opuestos, es decir aquellos que están formados por lados distintos de un cuadrilátero cíclico convexo suman  $\pi$ , esto lo probaremos en la proposición siguiente. Ya sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $\pi$ , así que la suma interna de los ángulos internos de un cuadrilátero será  $2\pi$  y en general la suma de los ángulos internos de un polígono regular será  $\pi(n-2)$  con  $n \in \mathbb{N}$ , esto nos va a servir mas adelante para demostrar una proposición que nos será útil.

**Proposición 1.4.2.** *Un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos suman  $\pi$ .*

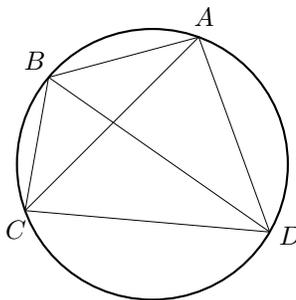


Figura 1.13: Cuadrilátero convexo cíclico.

*Demostración.* Sea  $\square ABCD$  un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia, sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman  $\pi$ , entonces tenemos que

$$\angle DBA + \angle BAD + \angle ADB = \pi \quad (1.2)$$

Nótese que los ángulos  $\angle DCA = \angle DBA$ ,  $\angle ACB = \angle ADB$  ya que ambos abren el mismo arco de circunferencia, respectivamente. Entonces sustituyendo en (1.2) llegamos a que

$$\angle ACD + \angle BAD + \angle ACB = \pi$$

Además,

$$\angle ACD + \angle ACB = \angle DCB$$

Entonces,

$$\angle DCB + \angle BAD = \pi$$

Sea  $\square ABCD$  un cuadrilátero cuya suma de ángulos internos opuestos suman  $\pi$ . Consideremos la circunferencia  $\mathcal{C}$  que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Los puntos  $P$  que están el arco  $AC$  opuesto al vértice  $B$  cumplen que los ángulos  $\angle APC$  son suplementarios con el ángulo  $\angle CBA$ .

Sabemos que si dos puntos fijos  $P$  y  $P'$  están sobre una circunferencia entonces para cualesquiera dos puntos  $Q$  y  $Q'$  de la circunferencia se cumple que  $\angle PQQ' = \angle PQ'P'$  o  $\angle PQQ'$  y  $\angle PQ'P'$  son suplementarios (esto se puede deducir con ayuda de la Proposición 1.2.3). Por hipótesis  $\angle ADC + \angle CBA = \pi$  por lo tanto  $D$  pertenece  $\mathcal{C}$  y  $\square ABCD$  es un cuadrilátero cíclico. ■

Un **cuadrilátero completo** consiste en tomar dos pares de rectas que se intersecan y los 6 puntos de intersección. Sus puntos diagonales son las intersecciones de tomar lados opuestos como se muestra en la figura 1.14, donde los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son los puntos diagonales del cuadrilátero  $PQRS$ . Al triángulo formado por los puntos diagonales se le llama **triángulo diagonal**. También es posible considerar cuatro puntos no colineales por tercias y todas las rectas que los unen, a esta figura la llamamos **cuadrángulo completo**.

## 1.5. Propiedades de los ortocentros

Ya que hemos definido al ortocentro, podríamos preguntarnos lo siguiente: dados tres puntos no colineales, ¿es posible construir un triángulo cuyo uno de sus lados sea el segmento definido por dos de los puntos y el punto restante sea su ortocentro?

La respuesta es afirmativa. A continuación vemos cómo se construye dicho triángulo.

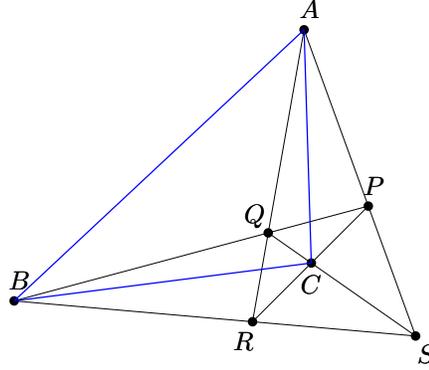


Figura 1.14: Cuadrilátero completo.

**Construcción:**

Sean  $A$ ,  $B$  y  $H$  los puntos dados, unimos  $A$  con  $B$  y desde  $H$  trazamos la perpendicular hacia  $AB$ . Unimos  $HB$  y  $AH$  y desde  $A$  trazamos la recta perpendicular hacia el lado  $HB$ , ahora desde  $B$  trazamos una recta perpendicular hacia el lado  $AH$ . Se afirma que la intersección de dichas perpendiculares es el punto buscado  $C$ . Por construcción,  $CB$  es perpendicular a  $AH$  y  $AC$  es perpendicular a  $HB$ . Así  $H$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle ABC$ . Pero más aún,  $C$  también es el ortocentro del triángulo  $\triangle ABH$ .

Como observación, la construcción que acabamos de dar no es única.

Los ortocentros van a jugar un papel fundamental, así que a lo largo de esta sección vemos sus propiedades y características.

**Proposición 1.5.1.** *Si dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'BC$  están inscritos en una misma circunferencia y tienen base común, entonces el segmento que une sus ortocentros es paralelo y de la misma longitud al segmento que une los vértices  $A$  y  $A'$ ; es decir,  $HH' = AA'$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia y  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A'BC$  dos triángulos inscritos en ella, con  $H$  y  $H'$  sus ortocentros. Denotamos por  $O$  al centro de  $\mathcal{C}$  y por  $L$  al punto medio de  $BC$ . Como  $O$  es el circuncentro de ambos triángulos, entonces por la Proposición 1.3.4 sabemos que  $AH = 2OL = A'H'$ . Observemos que  $AH$  es paralelo a  $A'H'$  pues ambos son perpendiculares a  $BC$ , así  $AA'HH'$  es un paralelogramo, por lo tanto  $AA'$  es paralela a  $HH'$  y sus longitudes son iguales. ■

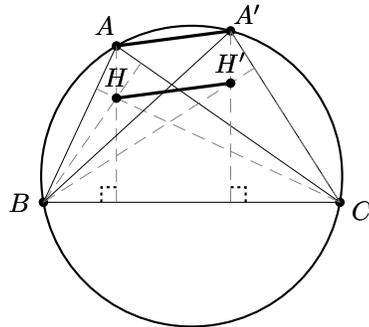


Figura 1.15: Líneas de ortocentros paralelas en triángulos inscritos.

De esta última proposición es muy fácil deducir el siguiente resultado:

**Proposición 1.5.2.** *Si cuatro puntos sobre una circunferencia forman cuatro triángulos, entonces los cuatro ortocentros de estos triángulos dibujan una figura congruente a la formada por los puntos dados. Más aún, las líneas de dichas figuras son respectivamente paralelas.*

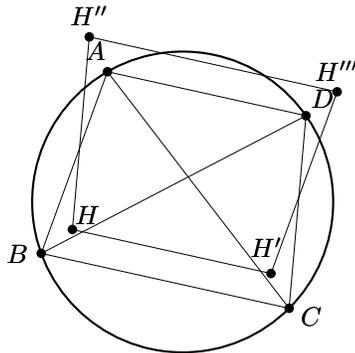


Figura 1.16: Proposición 1.5.2

*Demostración.* Sean  $A, B, C$  y  $D$  cuatro puntos sobre una circunferencia, de tal manera que  $\triangle ABC, \triangle DCB, \triangle ADB, \triangle ACD$  son los triángulos que se forman y  $H, H', H''$  y  $H'''$  sus respectivos ortocentros (figura 1.16). Por la proposición anterior sabemos que  $HH'$  y  $AD$  son paralelas, pero este resultado lo podemos aplicar en cualquier par de triángulos que tengan una base en común. Así tenemos que los pares de rectas paralelas  $H'H'''$  y  $AB, H''H'''$  y  $BC, HH''$  y  $CD$  y más aún  $HH' = AD, H'H''' = AB, H''H''' = BC, HH'' = CD$ . Por lo tanto  $ABCD$  es congruente a  $HH'H'''H''$ . ■

Ahora que nos fijamos en longitudes de segmentos, ¿será que las alturas cumplen algo en particular? ¿qué hay del ortocentro? ¿habrá alguna relación entre

las alturas y los lados de un triángulo? A continuación enunciaremos algunas relaciones.

**Teorema 1.5.3.** *En un triángulo  $\triangle ABC$  dado, los tres productos de los segmentos en los cuales el ortocentro divide a las alturas son iguales  $HD * HA = HB * HE = HF * HC$ , donde  $D$ ,  $E$  y  $F$  son los pies de alturas.*

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  el triángulo dado,  $H$  su ortocentro,  $D$ ,  $E$  y  $F$  los pies de las alturas desde  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente. Nótese que los triángulos  $\triangle CHD$ ,  $\triangle AHF$ ;  $\triangle EAH$ ,  $\triangle DBH$ ;  $\triangle CHE$ ,  $\triangle BHF$ , son semejantes por pares respectivamente, ya que todos tienen un ángulo recto y un ángulo opuesto por el vértice en  $H$ . De esta manera, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\frac{HD}{HF} &= \frac{HC}{HA}, \\ \frac{HB}{HA} &= \frac{HD}{HE}, \\ \frac{HE}{HF} &= \frac{HC}{HB}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}HD * HA &= HC * HF, \\ HA * HD &= HB * HE, \\ HE * HB &= HF * HC\end{aligned}$$

Por transitividad obtenemos lo que queríamos demostrar. Es decir,

$$HD * HA = HB * HE = HF * HC$$

■

**Teorema 1.5.4.** *El segmento determinado por el ortocentro y el punto de intersección que resulta de extender a una altura hasta que corte al circuncírculo es bisectado por el lado opuesto al vértice de la altura.*

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  un triángulo,  $H$  su ortocentro, y  $\mathcal{C}$  su circuncírculo. Nos fijamos en  $AD$  altura del  $\triangle ABC$ , la extendemos hasta que corte a  $\mathcal{C}$  y a esta intersección la nombramos  $K$  (figura 1.17). Observemos que los ángulos  $\angle KAC$  y  $\angle KBC$  son iguales, ya que ambos subtienden el mismo arco. Entonces los triángulos  $\triangle AEH$  y  $\triangle BDK$  son semejantes, pues ambos tienen también un ángulo recto en los vértices  $E$  y  $D$  respectivamente. Así, el ángulo  $\angle AHE$  es igual a  $\angle BKD$ , pero  $\angle AHE = \angle BHD$  al ser opuestos por el vértice. Entonces los triángulos  $\triangle BDH$  y  $\triangle BDK$  tienen un lado común y dos ángulos correspondientes iguales, por lo que son congruentes. En particular  $HD = DK$ . ■

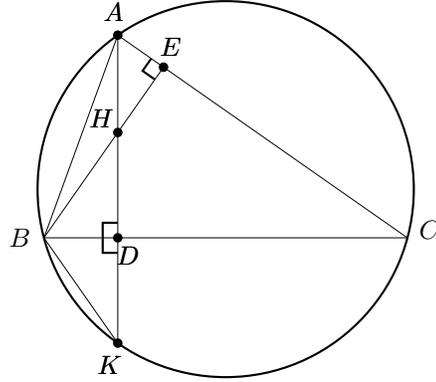


Figura 1.17: Teorema 1.5.4

De este teorema podemos deducir dos corolarios. El primero relaciona al circuncírculo de un triángulo con el circuncírculo del triángulo formado por dos vértices y el ortocentro. El segundo es una relación entre los lados y las alturas.

**Corolario 1.5.5.** *El circuncírculo del triángulo formado por dos vértices y el ortocentro de un triángulo dado es congruente al circuncírculo del triángulo dado.*

*Demostración.* Sean  $\triangle ABC$  el triángulo dado y  $H$  su ortocentro. En el teorema anterior, vimos que los triángulos  $\triangle BKD$  y  $\triangle BHD$  son congruentes, pero el circuncírculo del triángulo  $\triangle BCK$  es congruente con el del triángulo  $\triangle ABC$ . Así tenemos que los circuncírculos de los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle BCK$  son congruentes. ■

**Corolario 1.5.6.** *El producto de las longitudes de los segmentos en los cuales un pie de altura divide al lado de un triángulo, es igual a la longitud de la altura multiplicada por la distancia del ortocentro a dicho lado.*

*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  el triángulo dado y vamos a trabajar con la notación de la figura 1.17. Los triángulos  $\triangle KBD$  y  $\triangle ACD$  son semejantes ya que  $\angle KDB = \angle CDA$  al ser opuestos por el vértice y  $\angle ACD = \angle BKD$  ya que subtenden el mismo arco, entonces

$$DB * DC = DA * DK$$

Como  $DH = DK$  se tiene que

$$DB * DC = DA * DH$$

Que es lo que se quería demostrar. ■

El circuncírculo ha tenido hasta el momento una fuerte relación con el triángulo y su ortocentro. Siguiendo este mismo camino, podemos llegar a la siguiente relación, donde aparece el diámetro, una altura y los lados del triángulo.

**Teorema 1.5.7.** *El producto de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual al producto de la longitud de la altura del tercer lado con el diámetro del circuncírculo del triángulo.*

*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  el triángulo,  $AK$  el circundiámetro y  $D$  el pie de altura desde  $A$ . Observemos que  $\angle ABD = \angle AKC$  ya que abren el mismo arco de circunferencia, y los ángulos en  $C$  y  $D$  son rectos, por lo cual los triángulos  $\triangle ABD$  y  $\triangle AKC$  son semejantes por el criterio ángulo-ángulo. De esta semejanza tenemos la siguientes igualdad

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AC}$$

Lo cual implica que

$$AB * AC = AK * AD$$

■

Una altura y una mediatriz son rectas perpendiculares, con la diferencia de que una lo es através de un punto que se encuentra fuera de una recta y la otra lo es mediante un punto contenido en la recta, ¿podrá ser que para algún triángulo formado con los puntos de uno ya dado el ortocentro se convierta en algún punto notable para ese nuevo triángulo? Dado un triángulo podemos construir al menos dos más, estos son el *triángulo órtico* o *triángulo pedal*, el cual es formado por los pies de alturas y el *triángulo medial*, formado por los puntos medios. En el triángulo medial de un triángulo dado existe una relación ya que el circuncentro del dado resulta ser el ortocentro del medial.

**Proposición 1.5.8.** *El circuncentro de un triángulo dado es el ortocentro de su triángulo medial.*

*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  el triángulo dado,  $L$ ,  $M$  y  $N$  los puntos medios de los segmentos  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente y  $O$  el circuncentro del triángulo  $\triangle ABC$ . Sabemos que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle LMN$  están en razón  $\frac{1}{2}$  y sus lados son respectivamente paralelos. Sean  $\ell_L$ ,  $\ell_M$ ,  $\ell_N$  las mediatrices del triángulo dado, como son perpendiculares a  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  respectivamente, entonces  $\ell_L$ ,  $\ell_M$ ,  $\ell_N$  también son perpendiculares a  $MN$ ,  $LN$  y  $LM$  (ya que  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  son paralelas a  $MN$ ,  $LN$  y  $LM$  respectivamente). Como pasan por los vértices, entonces  $\ell_L$ ,  $\ell_M$ ,  $\ell_N$  son alturas del triángulo  $\triangle LMN$ , así  $O$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle LMN$ . ■

Al principio de esta sección vimos la construcción de un triángulo cuyo ortocentro y un lado ya están dados. Uno podría preguntarse si de manera similar es posible lograr la construcción de un triángulo donde los segmentos de sus alturas ya estén dados. La respuesta es que afirmativa.

Antes de ver la construcción recordemos que:

Dados tres segmentos,  $h_A$ ,  $h_B$  y  $h_C$ , existe una relación entre las alturas y los

lados de un triángulo.

$$a(h_A) = b(h_B) = c(h_C) = 2(ABC)$$

Donde  $(ABC)$  denota el área del triángulo  $\triangle ABC$  y  $a$ ,  $b$  y  $c$  denotan los lados opuestos de los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente.

Dividiendo entre  $h_A h_b$  obtenemos

$$\frac{a}{h_B} = \frac{b}{h_A} = \frac{c(h_C)}{h_A h_B}$$

**Construcción:**

Vamos a considerar al triángulo  $\triangle DEF$  donde  $EF = h_B$ ,  $DF = h_A$  y  $DE = \frac{h_C}{h_A h_B}$ . Tracemos la altura desde  $D$  y llamémosle  $K$  al pie de altura, elegimos  $L$  un punto sobre  $DK$  (o su prolongación) de tal forma que  $DL = h_A$ . Dibujamos  $\ell$  una paralela a  $EF$  por  $L$ . Nos fijamos en las intersecciones de  $\ell$  con  $DE$  y  $DF$  (o sus prolongaciones) y las llamamos  $B$  y  $C$ . Renombrando  $D$  por  $A$ , afirmamos que el triángulo  $\triangle ABC$  es el buscado.

Es importante hacer la observación que para poder hacer esta construcción se debe tener que

$$h_A + h_B > \frac{h_C}{h_A h_B} > h_A - h_B$$

Ya que esto nos garantiza la construcción del triángulo  $\triangle DEF$ .



## Capítulo 2

# Transformaciones en el plano

En el plano euclidiano existen varias maneras mediante las cuales se pueden transformar los elementos del plano o figuras dadas. En este capítulo recordamos las definiciones de transformaciones rígidas y sus características. Posteriormente veremos invariantes bajo algunas de estas transformaciones.

### 2.1. Transformaciones rígidas

Una transformación puede verse como la acción de cambiar algo y convertirlo en algo nuevo. Sin embargo cuando aplicamos determinadas transformaciones se pueden perder propiedades del objeto inicial. Aquí nuestros objetos, es decir, los triángulos y las figuras 2-dimensionales, está compuestos por segmentos y ángulos, también podemos considerar su orientación. Nos gustaría que al aplicar alguna transformación se preserven la mayor cantidad de estas propiedades. Nuestras primeras transformaciones van a ser las que dejan invariantes las longitudes de los segmentos y los ángulos entre ellos, éstas son llamadas *transformaciones rígidas*. La traslación, la rotación y la reflexión son ejemplos de este tipo. A continuación definimos cada una de ellas para el caso particular del plano euclidiano.

**Definición 2.1.1.** Las transformaciones geométricas que conservan las distancias se llaman *isometrías*. Es decir,  $f$  es una isometría si para cualesquiera par de puntos  $A$  y  $B$ , sus imágenes  $A' = f(A)$  y  $B' = f(B)$  cumplen que  $d(A, B) = d(A', B')$ .

**Definición 2.1.2.** Sea  $f$  una isometría. Decimos que  $f$  es una *traslación* si existe un punto  $C$  en el plano tal que para todo punto  $A$  en el plano se cumple que  $f(A) = A + C$ .



Figura 2.1: Traslación.

**Definición 2.1.3.** Decimos que un isometría  $f$  es una *rotación* si existe un punto  $O$  en el plano y  $\alpha$  un ángulo tal que para todo punto  $A$  en el plano se cumple que  $f(A) = A'$  y  $\angle AOA' = \alpha$ .

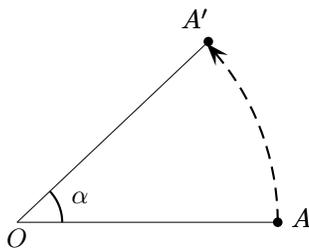


Figura 2.2: Rotación.

**Definición 2.1.4.** Sea  $f$  una isometría. Decimos que  $f$  es una *reflexión* si existe una recta  $\ell$  tal que para todo punto en el plano  $A$  se cumple que  $f(A) = A'$  y  $\ell$  es mediatriz del segmento  $AA'$ , donde los puntos de  $\ell$  se quedan fijos.

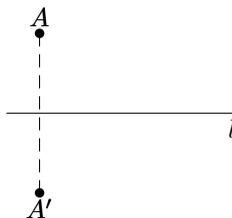


Figura 2.3: Reflexión.

Respecto a estas transformaciones existen varias observaciones, la más relevante es que toda transformación rígida es la composición de a lo más tres reflexiones. Esto no lo vamos a demostrar pero la prueba se puede consultar en [4]. Por ejemplo, una traslación es equivalente a aplicar dos reflexiones (utilizando ejes de reflexión paralelos).

Sin embargo, no todas las transformaciones que pueden realizarse en un plano son rígidas, este es el caso de la homotecia y la inversión, que veremos en las siguientes secciones.

## 2.2. Homotecia

Rotar, reflejar y trasladar, ¿qué más se le puede realizar a una figura? Cambiar sus dimensiones, por ejemplo, hacer que su tamaño sea más pequeño o más grande. Al hacer esto estamos perdiendo la propiedad de preservar longitudes, más no la conservación de ángulos entre rectas.

**Definición 2.2.1.** Dos figuras  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}'$  son homotéticas si existen un punto  $O$  y una constante  $k \neq 0$  tales que, para todo  $F$  en  $\mathcal{F}$  existe  $F'$  en  $\mathcal{F}'$  que cumple lo siguiente:

1.  $O, F, F'$  son colineales.
2.  $\frac{OF}{OF'} = k$
3. La función  $f$  tal que  $f(F) = F'$  es una biyección.

Al punto  $O$  lo llamaremos *centro de homotecia* y a la constante  $k$  la *razón de homotecia*.

Las demostraciones del siguiente teorema no se darán en este texto, pero se encuentran en [1].

**Teorema 2.2.2.** *Das circunferencias dadas,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_1$  de centros y radios distintos, son figuras homotéticas de formas distintas con dos centros y con dos razones de homotecia. Donde cada tangente común a  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_1$  pasa por un centro de homotecia.*

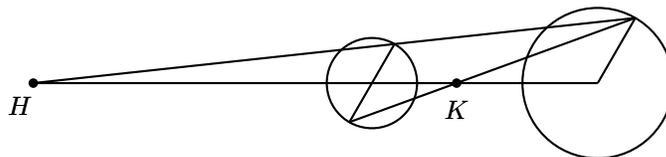


Figura 2.4: Circunferencias homotéticas.

Por lo anterior tenemos que dos circunferencias tienen dos centros de homotecia. Al que se encuentra dentro del segmento determinado por los centros de estas se le llama *centro de homotecia interno* y al restante se le llama *centro de homotecia externo*, que denotaremos por  $K$  y  $H$ , respectivamente.

Como observación, si las circunferencias son concéntricas o de radios iguales solo tienen un centro de homotecia.

La homotecia, a diferencia de las transformaciones pasadas, no respeta la longitud de los segmentos, ya que al aplicarles la transformación, los segmentos se expanden o se contraen dependiendo de la razón de homotecia. Sin embargo sí va a respetar los ángulos (para verlo podemos trazar paralelas y después usar el Teorema de Tales).

### 2.3. Inversión

Para la última transformación que estudiaremos en este capítulo ocuparemos las siguientes proposiciones, cuyas demostraciones se pueden encontrar en [4].

**Definición 2.3.1.**  $P$  está en el interior de  $\mathcal{C}$  si  $\overline{OP} < r$ ,  $P$  está sobre  $\mathcal{C}$  si  $\overline{OP} = r$  y  $P$  está en el exterior de  $\mathcal{C}$  si  $\overline{OP} > r$ .

**Proposición 2.3.2.** Si dos cuerdas  $AB$  y  $CD$  de una circunferencia se intersecan en un punto  $P$ , entonces  $PA * PB = PC * PD$ .

**Proposición 2.3.3.** Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son puntos sobre una circunferencia  $\mathcal{C}$  y si la tangente a  $\mathcal{C}$  en  $C$ , interseca en un punto  $P$  a la prolongación de la cuerda  $AB$ , entonces  $(PC)^2 = PA * PB$ .

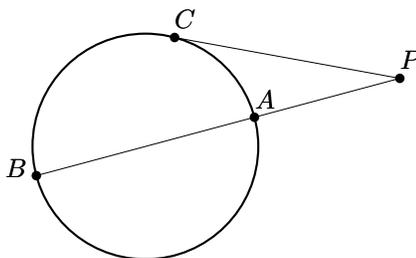


Figura 2.5: Potencia de un punto.

Por los resultados anteriores, dado un punto  $P$  y una circunferencia  $\mathcal{C}$ , trazamos cualquier recta desde  $P$  que interseque a  $\mathcal{C}$  en puntos  $A$  y  $B$  (donde  $A$  puede coincidir con  $B$ ), tenemos que  $PA * PB$  es una constante.

**Definición 2.3.4.** La constante  $PA * PB$  se conoce como **potencia del punto**  $P$  respecto a  $\mathcal{C}$ .

La potencia es muy útil en diversos temas, nosotros la usaremos para estudiar la transformación restante. Como observación extra vamos a recordar que al lugar geométrico de todos los puntos cuyas potencias son iguales a dos circunferencias no concéntricas es una línea llamada *eje coaxial* o *eje radical*. Este resultado y la demostración de la siguiente proposición se pueden encontrar en [9].

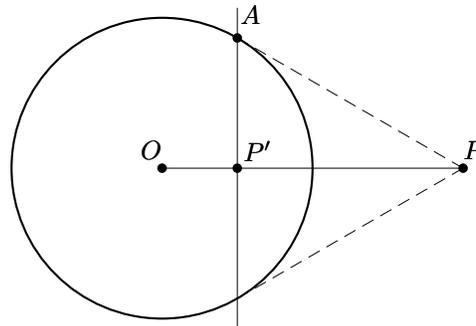


Figura 2.6: Construcción de un punto inverso.

**Proposición 2.3.5.** *Los ejes radicales de tres circunferencias (con centros no colineales) tomados por pares son concurrentes.*

Al punto de concurrencia de la proposición anterior se le llama *centro coaxial* o *centro radical*. Las circunferencias que comparten un mismo eje radical se les conoce como *familia de circunferencias coaxiales*.

Para definir inversión vamos a necesitar una circunferencia dada, a la cual llamaremos *circunferencia de inversión*.

**Definición 2.3.6.** Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia con centro  $O$ , radio  $r$  y  $f$  la función definida de la siguiente forma:  $f(P) = P'$  si  $\overline{P'O} * \overline{PO} = r^2$ , donde  $P$ ,  $P'$  y  $O$  son colineales. En este caso diremos que  $f$  es una ***inversión***.  $O$  se llamará centro de inversión y a  $r$  se le conoce como radio de inversión.

Dado un punto  $P$  en el plano, se puede seguir la siguiente construcción para obtener su inverso:

**Construcción:**

Si  $P$  está fuera de  $\mathcal{C}$ , unimos  $P$  con el centro de inversión  $O$ . Desde  $P$  se traza una recta tangente a la circunferencia, llamémosle  $A$  al punto de tangencia. Desde  $A$  trazamos una recta perpendicular hacia  $OP$ , llamémosle  $P'$  a la intersección, afirmamos que  $P'$  es el inverso del punto dado.

Si  $P$  está dentro de  $\mathcal{C}$ , lo unimos con el centro de inversión  $O$ , luego trazamos una perpendicular a  $OP$  en  $P$ , nos fijamos en alguna de las intersecciones de esta con la circunferencia, llamémosle  $A$ , después trazamos la recta tangente a  $\mathcal{C}$  por  $A$ , prolongamos hasta intersectar a  $OP$  y se afirma que esta intersección es el inverso buscado.

Para ver que la construcción dada es correcta basta con ver que los triángulos  $\triangle OAP$  y  $\triangle OP'A$  son semejantes. En el caso cuando  $P$  está sobre  $\mathcal{C}$  al aplicar la definición se concluye que es su propio inverso.

La relación de ser inversos es simétrica, es decir, si  $P'$  es el inverso de  $P$ , entonces  $P$  es el inverso de  $P'$ . A continuación vamos a ver algunas propiedades de la inversión.

**Proposición 2.3.7.** *El inverso de un punto en el interior de la circunferencia de inversión es un punto exterior a ella.*

*Demostración.* Sea  $P$  un punto en el interior de la circunferencia con centro en  $O$  y radio  $r$ . Nótese que su inverso  $P'$  puede estar en tres lugares, en el interior, en el exterior o sobre la circunferencia; veamos que el único caso posible es que esté fuera de la circunferencia. Supongamos que su inverso está sobre la circunferencia, entonces por definición tendríamos que  $\overline{OP} * \overline{OP'} = r^2$ , como  $P'$  está sobre la circunferencia entonces  $r = \overline{OP'}$ , así

$$\overline{OP} * \overline{OP'} = OP'^2 = \overline{OP'} * \overline{OP'}$$

Por lo cual, llegamos a lo siguiente:  $\overline{OP} = \overline{OP'}$ , lo cual implicaría que  $\overline{OP}$  es radio de la circunferencia. Por lo cual  $P$  estaría sobre la circunferencia. Sin embargo  $P$  estaba en el interior, entonces  $P'$  no puede estar sobre la circunferencia. Veamos ahora que pasa si  $P'$  está también en el interior de  $P$ , como ambos están en el interior tenemos que

$$0 < \overline{OP} < r \text{ y } 0 < \overline{OP'} < r$$

Entonces  $\overline{OP} * \overline{OP'} < r^2$ . Así  $P'$  no puede ser el inverso de  $P$  ya que no cumple con la definición, por lo cual el único caso posible es que  $P'$  esté fuera de la circunferencia. ■

**Corolario 2.3.8.** *El inverso de un punto sobre la circunferencia, es el mismo punto.*

**Corolario 2.3.9.** *Todo punto en el plano, excepto el centro de inversión, tiene un inverso y éste es único.*

*Demostración.* Con la Proposición 2.3.7 y el Corolario 2.3.8 se estableció que todo punto tiene inverso, por lo cual solo nos queda demostrar la unicidad. Supongamos que no, es decir que existe un  $P''$  tal que  $P''$  también es inverso de  $P$ . Entonces por la definición tenemos que

$$\overline{OP} * \overline{OP'} = r^2 = \overline{OP} * \overline{OP''}$$

Entonces,

$$\overline{OP} * \overline{OP'} = \overline{OP} * \overline{OP''}$$

Y así concluimos que  $\overline{OP'} = \overline{OP''}$ . Como sabemos que  $O$ ,  $P$  y su inverso deben ser colineales, entonces  $P'$  es igual a  $P''$ . ■

La inversión, al igual que todas las demás transformaciones que hemos visto, es una función biyectiva exceptuando por el centro de inversión ya que va a ser el único punto en el plano el cual no tiene inverso; en una geometría extendida, se puede decir que el centro de inversión se invierte en un punto al infinito. Dicho esto, decimos que esta transformación va a mandar puntos en puntos, sin embargo, no conserva todas las figuras.

**Proposición 2.3.10.** *La imagen inversa de una circunferencia concéntrica a la circunferencia de inversión es otra circunferencia concéntrica a ella.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}'$  una circunferencia tal que es concéntrica con la circunferencia de inversión. Sea  $P$  un punto en  $\mathcal{C}'$ . Sabemos que el inverso  $P'$  de  $P$  debe de cumplir que  $\overline{PO} * \overline{P'O} = r^2$ , nótese que  $\overline{PO}$  siempre va a ser una constante pues será el radio  $r'$  de la circunferencia  $\mathcal{C}'$ , entonces tenemos que

$$\overline{PO} * \overline{P'O} = r' * \overline{P'O} = r^2$$

Así llegamos a que  $\overline{P'O} = \frac{r^2}{r'}$  entonces  $\overline{P'O}$  es una constante sin importar el punto que tomemos. Concluimos que el lugar geométrico de los inversos de  $\mathcal{C}'$  son los puntos tales que distan  $\frac{r^2}{r'}$  de  $O$ . Es decir, el inverso de  $\mathcal{C}'$  es una circunferencia cuyo radio es  $\frac{r^2}{r'}$ , y su centro es  $O$ . ■

**Proposición 2.3.11.** *La imagen inversa de una recta que pasa por el centro de inversión, sin este, es la misma recta pero con un orden distinto en sus puntos.*

*Demostración.* Sea  $\ell$  una recta que pase por  $O$  el centro de la circunferencia de inversión. Observemos que las intersecciones de  $\ell$  con la circunferencia son fijas, ya que sus inversos son ellas mismas, lo cual nos dice que entonces nuestra imagen va a tener dos puntos invariantes. También ya hemos visto que un punto en el interior de la circunferencia tiene como inverso a un punto exterior, entonces todos los puntos que se quedan en el segmento de la recta que está contenido en el interior de la circunferencia van a tener inversos en los segmentos de la recta que se quedan en el exterior de la misma. Como un punto y su inverso deben ser colineales con el centro  $O$ , entonces los puntos se van a quedar en la misma recta. Es decir, la recta, como objeto va a quedar invariante, pero los puntos que eran interiores ahora serán exteriores y viceversa. Esto es, el inverso de la recta es la misma recta pero con los puntos en un orden diferente. ■

**Proposición 2.3.12.** *La imagen inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por el centro de inversión.*

*Demostración.* Sea  $\ell$  una recta que no pasa por el centro de inversión y  $\mathcal{C}(O, r)$  la circunferencia de inversión (figura 2.7). Tracemos la perpendicular de  $O$  hacia  $\ell$  y llamémosle  $A$  al pie de ésta. Sea  $B$  en  $\ell$ , encontramos  $A'$  y  $B'$  sus inversos con respecto a  $\mathcal{C}$ . Nótese que los triángulos  $\triangle AOB$  y  $\triangle A'OB'$  son semejantes, ya que ambos tienen un ángulo en común y dos lados proporcionales ya que

$$\overline{OA} * \overline{OA'} = r^2 = \overline{OB} * \overline{OB'}$$

Si nos fijamos en la circunferencia que pasa por  $O$ ,  $A'$  y  $B'$ , al ser  $OA$  perpendicular a  $\ell$  entonces el ángulo  $\angle A'B'O$  es recto, por lo cual  $OA'$  es el diámetro del cincuncírculo del triángulo  $\triangle OA'B'$ . Como  $B$  fue un punto arbitrario entonces para cualquier punto  $P$  en  $\ell$ , su inverso  $P'$  estará en la circunferencia de diámetro  $OA'$ , con lo cual podemos concluir que el inverso de la recta  $\ell$  es la circunferencia que tiene como diámetro al segmento  $OA$ .

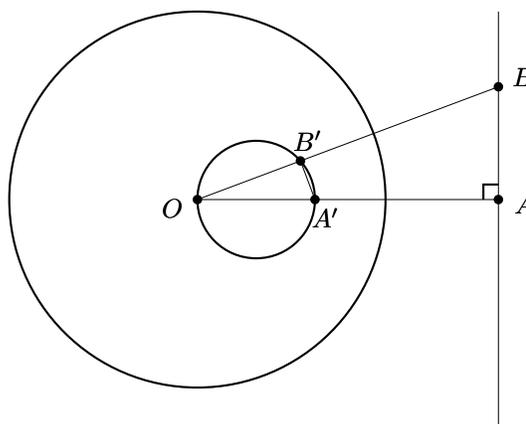


Figura 2.7: Inverso de una recta que no pasa por el centro de inversión

**Proposición 2.3.13.** *La imagen inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por el centro de inversión.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia que pasa por el centro de inversión  $O$ . Sea  $P$  en  $\mathcal{C}$  el punto diametralmente opuesto a  $O$ , encontramos  $P'$  el inverso de  $P$  con respecto a la circunferencia de inversión. Trazamos  $\ell$  una recta perpendicular a  $OP$  por  $P'$ , sea  $Q$  un punto en  $\mathcal{C}$ , y sea  $Q'$  la intersección de  $\ell$  con  $OQ$ , veamos que  $Q'$  es el inverso de  $Q$ , es decir,  $QO * Q'O = r^2$ .

Fijémonos en los triángulos  $\triangle OPQ$  y  $\triangle OP'Q'$ , ambos tienen ángulos rectos en  $\angle OPQ$  y  $\angle OP'Q'$ , comparten un ángulo y como  $PO * P'O = r^2$ , entonces  $\triangle OPQ$  y  $\triangle OP'Q'$  son semejantes, así  $QO * Q'O = r^2$ , por lo tanto  $Q'$  es el inverso de  $Q$ , y como  $Q$  fue un punto arbitrario, entonces  $\ell$  es la imagen inversa de  $\mathcal{C}$

**Corolario 2.3.14.** *La imagen inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión y corta a la circunferencia de inversión es la recta que pasa por dichos puntos.*

**Corolario 2.3.15.** *La imagen inversa de una circunferencia que es tangente a la circunferencia de inversión y pasa por su centro es la recta tangente que pasa por el punto de tangencia.*

**Proposición 2.3.16.** *La imagen inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión, es otra circunferencia que no pasa por el centro de inversión.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$  una circunferencia que no pasa por  $O$ . Sea  $P$  un punto sobre  $\mathcal{C}_1$ , y  $P'$  su inverso con respecto a  $\mathcal{C}(O, r)$ . Tracemos la recta  $OP$  y llamémosle  $Q$  a la intersección de  $OP$  con  $\mathcal{C}_1$ . Dibujamos  $\ell$  una paralela a  $QO_1$  por  $P'$  y sea  $B$  punto de intersección de  $\ell$  con  $OO_1$ . Como  $P$  y  $P'$  son inversos entonces  $PO * P'O = r^2$ . Veamos que

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OB}{OO_1} = \frac{BP'}{O_1Q}$$

Ya que los triángulos  $\triangle OP'B$  y  $\triangle OQO_1$  son semejantes. Así  $BP'$  es constante para cualquier  $P'$  y  $B$  es punto fijo, por lo cual podemos concluir que el lugar geométrico de puntos  $P'$  es una circunferencia que no pasa por el centro de inversión (la demostración del lugar geométrico se puede revisar en [4]). ■

**Proposición 2.3.17.** *Una circunferencia que pasa por dos puntos inversos es ortogonal a la circunferencia de inversión.*

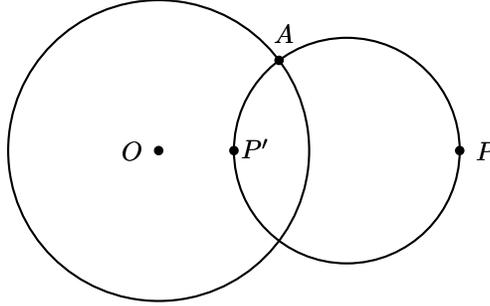


Figura 2.8: Circunferencia que pasa por dos puntos inversos.

*Demostración.* Sean  $P$  y  $P'$  dos puntos inversos respecto a una circunferencia  $\mathcal{C}$ . Nos fijamos en una circunferencia que contenga a dichos puntos, llamémosla  $\mathcal{C}'$ . Sea  $A$  uno de los puntos de intersección de esta circunferencia con  $\mathcal{C}$  (los cuales existen ya que recordemos que si un punto es exterior entonces su inverso es interior). Nótese que la potencia de  $P$  con respecto a  $\mathcal{C}$  es  $OP * OP'$  pero como  $P$  y  $P'$  son inversos se tiene que  $OP * OP' = r^2 = OA^2$ , así  $OA$  es tangente a  $\mathcal{C}'$  (considerando la potencia de  $O$  con respecto a  $\mathcal{C}'$ ), por lo tanto  $\mathcal{C}$  es ortogonal a  $\mathcal{C}'$  (por el Teorema 1.2.6). ■

**Corolario 2.3.18.** *El inverso de una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión es ella misma.*

Es importante resaltar que esta última transformación no va a conservar distancias, ya que si los puntos  $A$  y  $B$  definían una distancia  $d$ , la distancia de  $A'$  y  $B'$ , sus inversos, va a estar definida por lo siguiente:

$$A'B' = A'O + OB' = \frac{r^2}{AO} + \frac{r^2}{OB} = \frac{r^2(OB + AO)}{AO * OB} = \frac{r^2 d}{AO * OB}$$

Donde  $r$  es el radio de inversión. Sin embargo, la inversión si preserva ángulos, lo cual veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.19.** *Sea  $\mathcal{C} = C(O, r)$  una circunferencia de inversión. Si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son dos circunferencias con el punto  $P$  en común, entonces el ángulo entre sus respectivas inversas  $\mathcal{C}'_1$  y  $\mathcal{C}'_2$  en  $P'$  coincide con el ángulo entre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  en  $P$ . Es decir, la inversión preserva ángulos.*

*Demostración.* Vamos a considerar la circunferencia  $\mathcal{C}_A$  tangente a  $\mathcal{C}_1$  y que pasa por  $P$  y  $P'$ . Análogamente, la circunferencia  $\mathcal{C}_B$  tangente a  $\mathcal{C}_2$  y que pasa por  $P$  y  $P'$ .

Como  $\mathcal{C}_A$  y  $\mathcal{C}_B$  tienen las mismas tangentes que  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  en el punto  $P$  respectivamente, entonces el ángulo entre  $\mathcal{C}_A$  y  $\mathcal{C}_B$  coincide con el ángulo entre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ . Además, el ángulo entre  $\mathcal{C}_A$  y  $\mathcal{C}_B$  en  $P$  es igual a su ángulo en  $P'$ .

Como  $P$  y  $P'$  son inversos, entonces  $\mathcal{C}_A$  y  $\mathcal{C}_B$  son ortogonales a  $\mathcal{C}$ , esto implica que sus inversas con respecto a  $\mathcal{C}$  son ellas mismas.

Por otro lado, notemos que la tangente  $\ell_1$  a  $\mathcal{C}_A$  la corta unicamente en el punto  $P$ , esto quiere decir que la inversa  $\ell'_1$  de  $\ell_1$  corta a la inversa de  $\mathcal{C}_A$  unicamente en  $P'$ . Pero la inversa de  $\mathcal{C}_A$  es ella misma, entonces  $\ell'_1$  y  $\mathcal{C}_A$  tienen únicamente a  $P'$  en común, por lo cual son tangentes en  $P'$ . Análogamente, la inversa  $\ell'_2$  de  $\ell_2$  (tangente de  $\mathcal{C}_B$ ) y  $\mathcal{C}_B$  son tangentes en  $P'$ . Esto quiere decir que el ángulo entre  $\ell'_1$  y  $\ell'_2$  es igual al ángulo entre  $\mathcal{C}_A$  y  $\mathcal{C}_B$  pero este ángulo es igual al ángulo entre  $\ell_1$  y  $\ell_2$ . Por lo tanto, la inversión preserva ángulos entre circunferencias. ■

A continuación enunciamos proposiciones que serán útiles más adelante.

**Proposición 2.3.20.** *Dada una circunferencia  $\mathcal{C}$  y dos puntos inversos  $P, P'$  con respecto a ella. Sea  $A$  es un punto sobre la circunferencia, si consideramos a  $\mathcal{C}(A, r)$  como circunferencia de inversión, entonces la imagen de  $\mathcal{C}$ ,  $P$  y  $P'$  es una recta y dos puntos simétricos con respecto a  $\mathcal{C}(A, r)$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}$  la circunferencia dada,  $P, P'$  puntos inversos con respecto a ella y  $A$  sobre  $\mathcal{C}$  como en la figura 2.9. Sea  $\mathcal{C}_A$  una circunferencia con centro  $A$ . Observemos que el inverso de  $\mathcal{C}$  con respecto a  $\mathcal{C}_A$  es una recta  $\ell$  que pasa por los puntos de intersección de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_A$ . Nombremos  $Q$  y  $Q'$  los inversos de  $P$  y  $P'$  con respecto a  $\mathcal{C}_A$ , respectivamente. Fijémonos en el inverso de la recta  $PP'$ , la cual es una circunferencia ortogonal a  $\ell$  (ya que la inversión preserva ángulos y  $\mathcal{C}$  es ortogonal a cualquier circunferencia que pase por  $P$  y  $P'$ ), llamémosla  $\mathcal{C}_P$ . Así mismo, el inverso de la circunferencia que tiene como diámetro a  $PP'$  es una circunferencia ortogonal a  $\mathcal{C}$ , entonces  $QQ'$  es ortogonal a  $\ell$  pero más

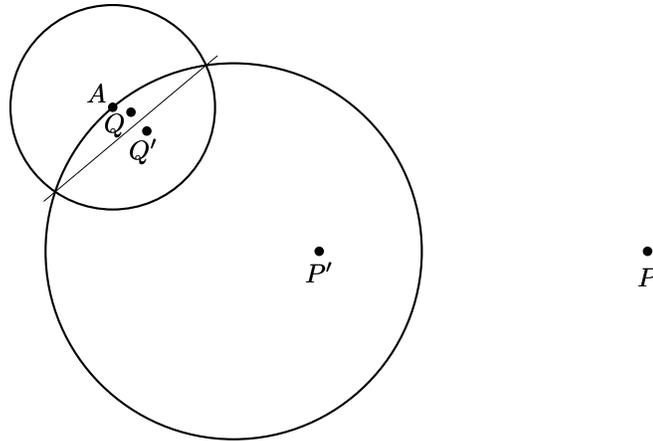


Figura 2.9: Proposición 2.3.20

aún, nótese que el centro  $O'$  de la inversa de  $\mathcal{C}_P$  debe estar en  $\ell$  (pues esta es ortogonal a la circunferencia), entonces  $QO' = O'Q'$  que era lo que se quería probar. ■

Dadas dos circunferencias es posible tener una tercera de tal forma que las dos dadas sean inversas una de la otra con respecto a la tercera. A esta circunferencia se le conoce como *circunferencia de antisimilitud*, la cual tendrá como centro a uno de los puntos de homotecia. Para conocer más sobre esta circunferencia se puede consultar [1].

Si las circunferencias son ajenas es importante hacer la observación de que sólo se puede tomar como centro de la circunferencia de antisimilitud al centro de homotecia externo  $H$ , ya que recordemos que dos puntos inversos y el centro de inversión deben ser colineales, y además deben estar en el mismo rayo respecto al centro de inversión. Si las circunferencias son tangentes el caso es el mismo, ya que solo tendrán una circunferencia de antisimilitud. Esto se puede resumir en el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [6].

**Teorema 2.3.21.** *Dos circunferencias, con radios distintos, que se intersecan tienen dos circunferencias de antisimilitud, que pasan por los puntos de intersección y son mutuamente ortogonales, cuyos centros son los centros de homotecia de las circunferencias dadas. Dos circunferencias que no se intersecan o que son tangentes, tienen una circunferencia de antisimilitud, la cual es coaxial con ellas y cuyo centro es el externo o interno de homotecia, dependiendo si las circunferencias son mutuamente externas o uno está contenida dentro de la otra.*

Como se menciona en el teorema anterior, cuando tenemos dos circunferencias que se cortan en más de un punto, vamos a tener dos circunferencias de antisimilitud. Como las circunferencias se intersecan en dos puntos, éstos deberán quedar invariantes al momento de aplicar la inversión, es por ello que

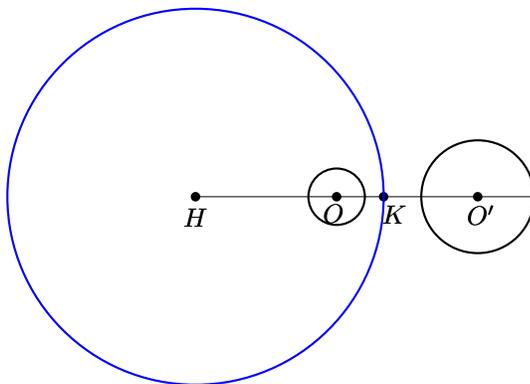


Figura 2.10: Circunferencia de antisimilitud de dos circunferencias ajenas.

la circunferencia de antisimilitud debe de pasar por estos puntos. En este caso las circunferencias van a ser aquellas que tengan por centros a los centros de homotecia y como radio la distancia entre los centro y los puntos de intersección de las circunferencias, como se muestra en la figura 2.11.

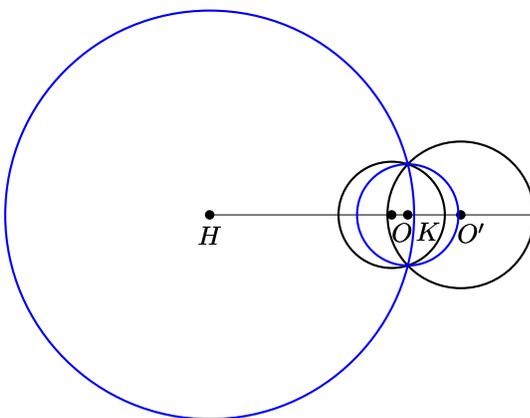


Figura 2.11: Circunferencia de antisimilitud de dos circunferencias no ajenas.

**Proposición 2.3.22.** *Dos circunferencias no concéntricas se pueden invertir en dos circunferencias que tengan el mismo radio.*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  dos circunferencias no concéntricas. Sabemos que al menos existe una circunferencia de antisimilitud por el Teorema 2.3.21. Fijémonos en una de sus circunferencias de antisimilitud  $\mathcal{C}_S$  y sean  $P$  y  $P'$  sobre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , respectivamente, donde  $P'$  es inverso de  $P$  respecto a  $\mathcal{C}_S$ . Tomamos

un punto  $A$  sobre  $\mathcal{C}_S$ , y trazamos la circunferencia  $\mathcal{C}(A, r)$ . Por la Proposición 2.3.20 si invertimos  $P$ ,  $P'$  y  $\mathcal{C}_S$  respecto a  $\mathcal{C}(A, r)$  obtenemos una recta  $\ell$ ,  $Q$  y  $Q'$  puntos simétricos con respecto a  $\ell$ . Sabemos que la imagen inversa de  $\mathcal{C}_1$  respecto a  $\mathcal{C}(A, r)$  es una circunferencia, entonces el lugar geométrico de los puntos  $Q$  y  $Q'$  son dos circunferencias simétricas con respecto a  $\ell$ . ■

A continuación veremos que en el caso que se tienen dos circunferencias de antisimilitud éstas serán ortogonales, pero para ello vamos a necesitar la noción de circunferencia de similitud y algunos resultados que no se demostrarán en este texto pero que pueden consultarse en [1].

**Definición 2.3.23.** A la circunferencia que tiene como diámetro el segmento entre los centros de homotecia  $H$  y  $K$ , se le nombra *circunferencia de similitud*.

**Proposición 2.3.24.** La circunferencia de similitud de dos circunferencias dadas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  está en la familia coaxial determinada por  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$ .

**Proposición 2.3.25.** Las circunferencias de antisimilitud, en el caso en el que se tengan ambas, son ortogonales entre sí.

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  dos circunferencias que se intersecan en dos puntos,  $\mathcal{C}_H(H, r_H), \mathcal{C}_K(K, r_K)$  sus circunferencias de antisimilitud y sea  $P$  uno de los puntos de intersección de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ . Como  $H$  y  $K$  son centro de homotecia, consideremos a  $\mathcal{C}_S$  la circunferencia de similitud de  $\mathcal{C}_1(O_1, r_1), \mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ , la cual pasa por  $P$  ya que pertenecen a la misma familia coaxial. Así, el ángulo  $\angle HPK$  es recto, y por lo tanto  $\mathcal{C}_H, \mathcal{C}_K$  son ortogonales (por el Teorema 1.2.6). ■

**Observación 2.3.26.** Dadas dos circunferencias  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_A$  su circunferencia de antisimilitud, el ángulo entre  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_A$  es igual al ángulo entre  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_A$ .

**Proposición 2.3.27.** Sea  $A$  un punto y tres circunferencias que pasen por  $A$ . Si las circunferencias se cortan por pares en otro punto distinto de  $A$ , entonces sus seis circunferencias de antisimilitud se invierten en las bisectrices del triángulo formado por las inversas de las circunferencias.

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  las tres circunferencias dadas y sean  $B = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2, C = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$  y  $D = \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_1$ . El centro de inversión será el punto  $A$ . Nótese que como  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  pasan por el centro de inversión, entonces sus inversos son rectas que no pasan por dicho punto y además estas rectas se intersectaran por pares, en  $B', C'$  y  $D'$  los inversos de  $B, C$  y  $D$ .

Vamos a demostrar que los inversos de las circunferencias de antisimilitud son las bisectrices del triángulo  $\triangle B'C'D'$ . Sabemos que dos circunferencias de antisimilitud son ortogonales entre sí, además por la observación 2.3.26 y como la inversión preserva ángulos, concluimos que los inversos de las circunferencias de antisimilitud son las bisectrices del triángulo  $\triangle B'C'D'$  que es lo que se quería demostrar. ■

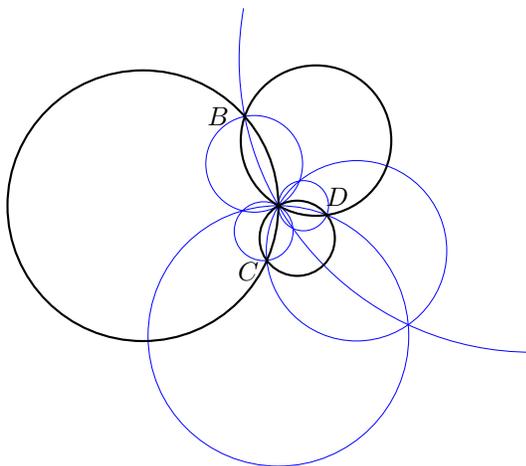


Figura 2.12: Tres circunferencias con sus seis circunferencias de antisimilitud.

**Corolario 2.3.28.** *Si tres circunferencias concurren en un punto y se intersecan por pares, entonces sus seis circunferencias de antisimilitud se intersecan por tercias en cuatro puntos.*

*Demostración.* Por lo Proposición 2.3.27 sabemos que las circunferencias de antisimilitud se pueden invertir en bisectrices de un triángulo. Sabemos que las bisectrices se intersecan en cuatro puntos por tercias: incentro y 3 excentros, y además los puntos de intersección son los inversos del incentro y los excentros, por lo cual queda demostrado. ■

**Proposición 2.3.29.** *Si tres circunferencias se intersecan entre sí por pares y con un punto en común, entonces se pueden invertir en tres circunferencias del mismo radio.*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  las tres circunferencias dadas. Por la Proposición 2.3.22 basta con invertir respecto a cualquiera de los puntos de intersección de las circunferencias de antisimilitud ya que al hacer esto con las tres circunferencias por pares, por transitividad tendríamos que las tres tienen el mismo radio. ■

Para cerrar este capítulo, vemos algunos resultados de polos y polares que ocupamos más adelante. Vamos a fijarnos en dos puntos inversos  $P$  y  $P'$  con respecto de una circunferencia  $\mathcal{C}$ , con ellos vamos a construir nuestras definiciones como en la figura 2.13.

**Definición 2.3.30.** La línea  $p$  que es perpendicular a  $PP'$  y que pasa por  $P'$  es la *línea polar* de  $P$  y  $P$  es llamado el *polo* de  $p$ .

Como primera observación podemos decir que si el polo está dentro de la circunferencia entonces su polar estará afuera, si el polo se encuentra afuera entonces la polar intersectaría a la circunferencia, y por último si se encuentra sobre  $\mathcal{C}$  la polar será la recta tangente que pase por el polo.

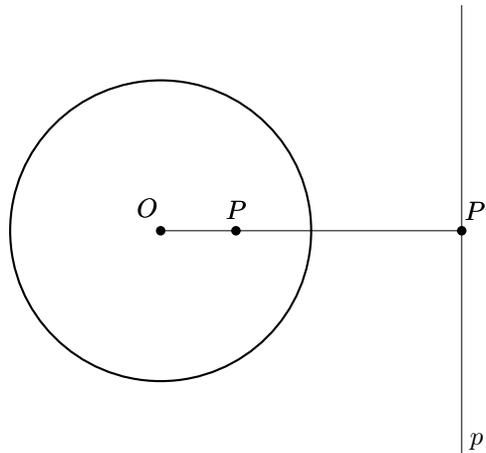


Figura 2.13: Polo y polar.

**Teorema 2.3.31** (Fundamental de polos y polares). *Si con respecto a una circunferencia dada la polar de  $P$  pasa por  $Q$ , entonces la polar de  $Q$  pasa por  $P$ .*

La demostración de este último teorema se encuentra en [9]. Y podemos decir que dos puntos son *conjugados polares* si la polar de uno pasa por el otro punto. De manera análoga decimos que dos rectas son *conjugadas polares* cuando el polo de una se encuentra en la otra.

Sea un triángulo  $\triangle ABC$ , ¿será posible encontrar una circunferencia de tal forma que cada lado sea la polar del vértice opuesto? La respuesta es afirmativa. A este tipo de triángulo se le llamará **triángulo autopolar**, y a la circunferencia, **circunferencia polar**.

Veamos que los triángulos autopolares tienen que ser obtusángulos. Recordemos que la recta que pasa por el polo debe de ser perpendicular a la polar por definición, aplicando esto para cada lado del triángulo concluimos que el punto de intersección de estas rectas es el ortocentro del triángulo, por lo cual este debe ser el centro de la circunferencia polar.

Analicemos cada caso.

#### 1. Triángulo rectángulo.

El ortocentro de un triángulo rectángulo coincide con el vértice donde se encuentra el ángulo recto. Pero entonces dicho vértice no tendría inverso, por lo cual no existiría circunferencia para la cual el triángulo sea autopolar.

## 2. Triángulo acutángulo.

En ese caso el ortocentro se encuentra dentro del triángulo. Recordemos que un punto y su inverso deben de tener el mismo sentido con respecto al centro de inversión, pero un vértice y su pie de altura están en semirayos opuestos de la recta que pasa por ellos con respecto al ortocentro. Por lo cual no existiría circunferencia para la cual el triángulo sea autopolar.

## 3. Triángulo obtusángulo.

En este último caso el ortocentro se encuentra fuera del triángulo. Los vértices y sus respectivos pies de altura siempre quedan en el mismo semirayo que pasa por ellos con respecto al ortocentro. Veamos que solamente uno de los vértices del triángulo puede estar dentro de la circunferencia. Para ello vamos a analizar que pasaría si dos vértices, digamos  $A$  y  $B$ , estuvieran dentro de  $\mathcal{C}_P$ . Consideremos  $a$  la polar de  $A$  y  $b$  la polar de  $B$ , sabemos que  $a$  y  $b$  están contenidas en el exterior de  $\mathcal{C}_P$ , como  $a$  y  $b$  son lados del triángulo  $\triangle ABC$  entonces su intersección  $C$  tiene que estar en el exterior o ser un punto sobre  $\mathcal{C}_P$ . Por otro lado, si  $c$  está en el exterior de  $\mathcal{C}_P$  entonces  $c$  es secante a  $\mathcal{C}_P$ , como  $A$  y  $B$  están en el interior de  $\mathcal{C}_P$  entonces  $CA$  y  $CB$  son secantes a  $\mathcal{C}_P$ , lo cual es una contradicción pues ya habíamos dicho que  $b$  y  $a$  estaban en el exterior de  $\mathcal{C}_P$ .

Así concluimos que para que un triángulo sea autopolar este tiene que ser obtusángulo.

En el siguiente capítulo tratamos con más detalle los triángulos polares ya que están estrechamente relacionados con los grupos ortocéntricos.

## Capítulo 3

# Grupos Ortocéntricos

### 3.1. Propiedades

Teniendo en cuenta los conceptos de los capítulos pasados, ahora sí podemos tratar un nuevo concepto, el cual es el desarrollo principal de este texto. Veremos con detalle las propiedades de un grupo ortocéntrico de puntos el cual definimos de la siguiente manera:

**Definición 3.1.1.** Un conjunto de cuatro puntos, digamos  $A, B, C$  y  $H$ , tal que al tomar tres puntos, el cuarto resulta ser el ortocentro del triángulo formado por los primeros tres, es llamado **grupo ortocéntrico de puntos**.

Al conjunto de los cuatro triángulos formados por  $A, B, C$  y  $H$  los llamaremos **grupo ortocéntrico de triángulos**.

**Observación 3.1.2.** Si  $\triangle ABC$  es un triángulo y  $H$  su ortocentro, entonces  $A, B, C$  y  $H$  es un grupo ortocéntrico de puntos. (Ver figura 3.1)

Al considerar cuatro puntos, no colineales por tercias, se generan cuatro triángulos distintos. La pregunta natural es: ¿cualquier conjunto de cuatro puntos (no colineales por tercias), o de cuatro triángulos, pueden formar un grupo ortocéntrico? En la siguiente proposición vemos una condición necesaria para que cuatro triángulos formen un grupo ortocéntrico.

**Proposición 3.1.3.** Si cuatro puntos forman un grupo ortocéntrico, entonces tres de los triángulos formados son obtusángulos y el restante es acutángulo.

*Demostración.* Sea  $A, B, C$  y  $H$  los puntos del grupo ortocéntrico Sean  $D, E$  y  $F$  los pies de altura correspondientes a  $A, B$  y  $C$  respectivamente.

Supongamos que en el triángulo  $\triangle ABC$  se tiene que  $\angle BAC > \frac{\pi}{2}$ , en consecuencia su ortocentro está fuera del triángulo, ya que dos pies de altura se encuentran en las prolongaciones de los lados (ver figura 3.1). Sean  $D, E$  y  $F$  los pies de altura correspondientes a  $A, B$  y  $C$ , respectivamente, entonces los ángulos  $\angle HFA, \angle HEA$  son rectos. Así el cuadrilátero  $\square HFAE$  es cíclico, por lo cual tenemos que la suma de los ángulos  $\angle BHC$  y  $\angle EAF$  es igual a dos rectos.

Como el triángulo  $\triangle ABC$  es obtusángulo, entonces el ángulo  $\angle BAC$  es mayor a uno recto, pero además  $\angle BAC$  es igual a  $\angle EAF$  al ser opuestos por el vértice. De aquí concluimos que el ángulo  $\angle BHC$  es menor a uno recto, y además los ángulos  $\angle ACB$  también es menor a uno recto, ya que  $\angle ADB = \angle ACB + \angle DAC$ , análogamente se puede ver que  $\angle ABC$  es menor que un ángulo recto. Por lo tanto el triángulo  $\triangle HBC$  es acutángulo. Falta ver que los triángulos  $\triangle BAH$  y  $\triangle HAC$  son obtusángulos también, pero esto se puede ver con lo ya visto en la demostración cuando el triángulo  $\triangle ABC$  es acutángulo.

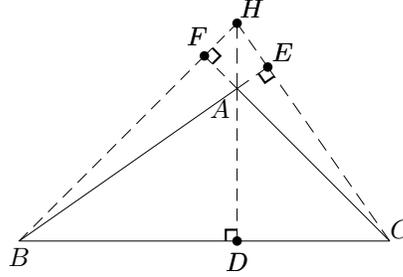


Figura 3.1: Ortocentro fuera del triángulo.

Ahora supongamos que el triángulo  $\triangle ABC$  es acutángulo, entonces su ortocentro  $H$  está dentro del triángulo ya que los pies de las alturas van a estar dentro de los lados del triángulo (ver figura 3.2). Tenemos que los ángulos  $\angle AFH$  y  $\angle AEH$  son rectos, así el cuadrilátero  $\square AFHE$  es cíclico, por lo cual los ángulos  $\angle FAE$  y  $\angle EHF$  suman dos ángulos rectos. Como el triángulo  $\triangle ABC$  es acutángulo, entonces el ángulo  $\angle BAC$  es menor a uno recto, por lo que el ángulo  $\angle EHF$  es mayor a uno recto. Como los ángulos  $\angle EHF$  y  $\angle BHC$  son iguales al ser opuestos por el vértice  $H$ , entonces el ángulo  $\angle BHC$  es mayor a un ángulo recto, por lo tanto el triángulo  $\triangle BCH$  es obtusángulo. De manera similar los triángulos  $\triangle AHB$  y  $\triangle AHC$  son obtusángulos.

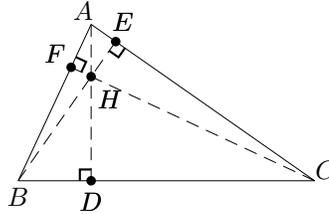


Figura 3.2: Grupo Ortocéntrico.

Por lo tanto en un grupo de triángulos ortocéntricos, tres triángulos son obtusángulos y uno es acutángulo. ■

Con la proposición anterior afirmamos que no cualesquiera cuatro puntos van a formar un grupo ortocéntrico.

Ya que hemos establecido una condición necesaria para formar grupos ortocéntricos. A continuación vemos propiedades especiales de estos grupos para más adelante estudiar algunos ejemplos.

**Proposición 3.1.4.** *Los cuatro circuncírculos de un grupo ortocéntrico de triángulos son congruentes.*

*Demostración.* Por el Corolario 1.5.5 sabemos que el circuncírculo del triángulo formado por dos vértices y el ortocentro es congruente al circuncírculo del triángulo dado. Aplicando este resultado a cada uno de los triángulos del grupo ortocéntrico llegamos a lo que se quería demostrar. ■

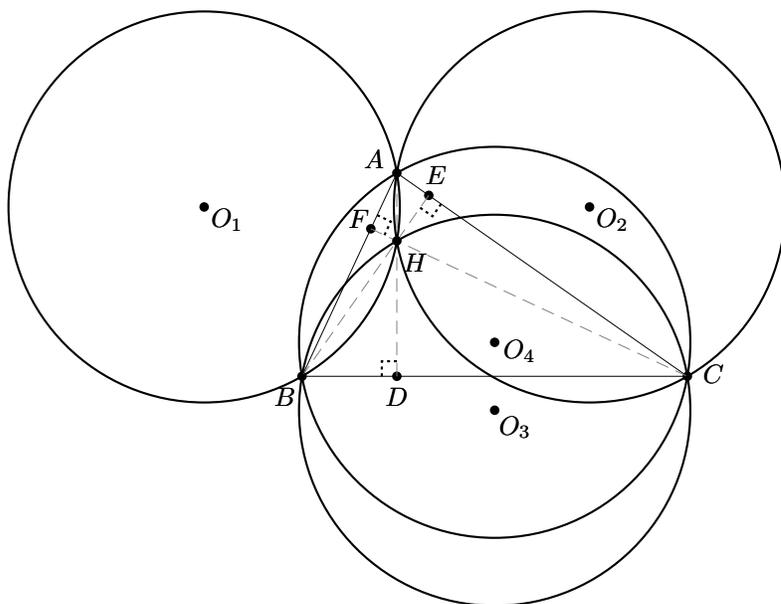


Figura 3.3: Grupo Ortocéntrico con circuncírculos.

La siguiente proposición es el recíproco del resultado anterior.

**Proposición 3.1.5.** *Sean cuatro circunferencias congruentes y cuatro puntos no colineales por tercias. Si cada punto está en tres de las cuatro circunferencias, entonces los cuatro puntos forman un grupo ortocéntrico de puntos.*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{C}_1(O_1, r)$ ,  $\mathcal{C}_2(O_2, r)$ ,  $\mathcal{C}_3(O_3, r)$  y  $\mathcal{C}_4(O_4, r)$ , cuatro circunferencias congruentes,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$ , puntos tales que  $A = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_4$ ,

$B = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$ ,  $C = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_4 \cap \mathcal{C}_3$  y  $H = \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_1$ , como en la figura 3.3. Afirmemos que  $O_1O_2$  es paralelo a  $BC$ . Para ello observemos que  $\angle HBO_3 = \angle O_1HB$  ya que los triángulos  $\triangle O_1HB$  y  $\triangle O_3HB$  son congruentes pues  $BH$  es común y  $BO_3 = HO_3 = O_1B = O_1H$ , por lo cual  $O_1BO_3H$  es paralelogramo. Análogamente  $HO_3CO_2$  es un paralelogramo, y sus cuatro lados miden lo mismo. Así  $O_1B$ ,  $HO_3$  y  $O_2C$  son paralelos, en particular como  $O_1B$  es paralelo a  $O_2C$  y miden lo mismo entonces  $O_1BCO_2$  es un paralelogramo.

Ahora tenemos que  $O_1O_2$  es perpendicular a  $AH$  ya que  $A$  y  $H$  están en la mediatriz del segmento  $O_1O_2$  y al ser paralelo a  $BC$  entonces  $AH$  es perpendicular a  $BC$ . Análogamente se prueba que  $BH$  es perpendicular a  $AC$  y  $CH$  es perpendicular a  $AB$ , por lo tanto,  $H$  es el ortocentro y  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  forman un grupo ortocéntrico. ■

De la prueba de este último resultado, inferimos el siguiente corolario que nos será de utilidad más adelante.

**Corolario 3.1.6.** *Sea  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  un grupo ortocéntrico. Si  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  y  $O_4$  son los circuncentros de los triángulos  $\triangle ABH$ ,  $\triangle ACH$ ,  $\triangle BCH$  y  $\triangle ABC$  respectivamente, entonces los segmentos  $O_1O_2$  y  $BC$ ,  $O_1O_3$  y  $AC$ ,  $O_2O_3$  y  $AB$  son paralelos respectivamente.*

El siguiente teorema es una consecuencia del Teorema 1.3.3.

**Teorema 3.1.7.** *Sea  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  puntos de un grupo ortocéntrico. Si consideramos uno de los triángulos formados, entonces las circunferencias que tienen como diámetros un lado y el segmento entre el vértice restante y el ortocentro son ortogonales. Más aún los pies de las otras dos alturas son los puntos comunes de dichas circunferencias.*

**Teorema 3.1.8.** *Si  $A$ ,  $H$  y  $B$ ,  $C$  son parejas de puntos diametralmente opuestos de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , respectivamente, donde  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $AH$ ,  $BC$  son ortogonales por pares, entonces  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  forman un grupo de puntos ortocéntrico.*

*Demostración.* Sean  $P$  punto medio de  $AH$ ,  $L$  punto medio de  $BC$  y  $F$ ,  $E$  las intersecciones de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  (ver figura 3.4). Como  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son ortogonales, entonces  $\angle LEP = \angle PEL = \frac{\pi}{2}$ . Notemos que los triángulos  $\triangle LFB$  y  $\triangle PAF$  son isósceles, y también que  $\angle LBF = \angle BFL$  y  $\angle PFA = \angle FAP$ , por lo cual,

$$\frac{1}{2}\angle FLB + \angle LBF = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\angle APF + \angle PFA,$$

Nombremos  $K$  a la intersección de  $AH$  con  $LF$  y  $D$  a la intersección de  $AH$  con  $BC$ . Observemos que los triángulos  $\triangle KDL$  y  $\triangle KFP$  son semejantes ya que ambos tienen un ángulo recto en  $D$  y  $F$ , respectivamente y  $\angle DKL = \angle FPK$  por ser opuestos por el vértice. Así  $\angle KLD = \angle FPK$ , pero

$$\angle KLD = \angle FLB = \angle FLB,$$

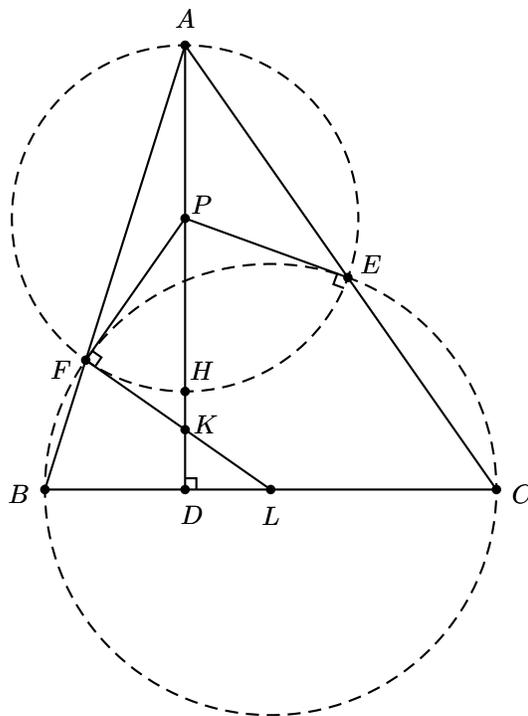


Figura 3.4: Teorema 3.1.7

y

$$\angle FPK = \angle PFA + \angle FAP = 2\angle PFA$$

Entonces,  $\frac{1}{2}\angle FLB = \angle PFA$ .

Tenemos que,

$$\frac{1}{2}\angle FLB + \angle LBF = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle LBF + \angle PFA = \frac{\pi}{2}$$

Pues  $\frac{1}{2}\angle FLB = \angle PFA$ . Por lo tanto,

$$\angle BFA = \angle BFL + \angle LFP + \angle PFA = \pi$$

Así podemos concluir que  $B$ ,  $F$  y  $A$  son colineales. De manera análoga se prueba que  $C$ ,  $E$  y  $A$  son colineales.

Por otra parte, notemos que  $\angle BFC = \angle HFA = \frac{\pi}{2}$  pues  $BC$  y  $AH$  son diámetros de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , respectivamente. Entonces la perpendicular a  $AB$  por  $F$  pasa por  $H$  y por  $C$ , por lo tanto  $F$ ,  $H$  y  $C$  son colineales. Análogamente se demuestra que  $B$ ,  $H$  y  $E$  son colineales.

Nótese que  $AD$  es altura del triángulo  $\triangle ABC$  por hipótesis, y además ya probamos también que  $BE$  y  $CF$  son alturas de este triángulo. Como  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  concurren en  $H$ , entonces este es el ortocentro de  $\triangle ABC$ . Por lo tanto,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  son un grupo ortocéntrico de puntos. ■

Es natural preguntarse qué otras propiedades cumple un grupo ortocéntrico. A continuación veremos que los triángulo órticos de los triángulos que conforman un grupo ortocéntrico tienen una característica especial, la cual definimos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.9.** *Los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico tienen el mismo triángulo órtico.*

*Demostración.* Sea  $A, B, C, H$  un grupo ortocéntrico. Vamos a ver que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle BCH$  tienen el mismo triángulo órtico. Sean  $D, E$  y  $F$  los pies de las alturas del triángulo  $\triangle ABC$ , así  $\triangle DEF$  es su triángulo órtico. Observemos que  $HD, CE$  y  $BF$  son las alturas del triángulo  $\triangle BCH$ , entonces  $\triangle DEF$  es también su triángulo órtico. Análogamente con los demás triángulos. Por lo cual concluimos que el triángulo órtico es el mismo para todos los triángulos del grupo ortocéntrico. ■

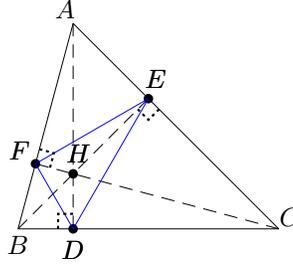


Figura 3.5: Triángulo órtico de un grupo ortocéntrico.

Sin embargo esta característica no se mantiene para el caso del triángulo medial, ya que los puntos medios sí van a variar dependiendo del triángulo del conjunto de puntos que tomemos.

La siguiente propiedad, al igual que la anterior, nos puede parecer trivial, pero conlleva algo muy importante. Los grupos ortocéntricos no solo comparten el mismo triángulo órtico, sino que también comparten la misma circunferencia de los nueve puntos.

**Corolario 3.1.10.** *Los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico de puntos tienen la misma circunferencia de los nueve puntos.*

*Demostración.* Como los triángulos de un grupo ortocéntrico tienen el mismo triángulo pedal, comparten tres pies de alturas. Como una circunferencia queda determinada por tres puntos y los tres pies de alturas están en la circunferencia

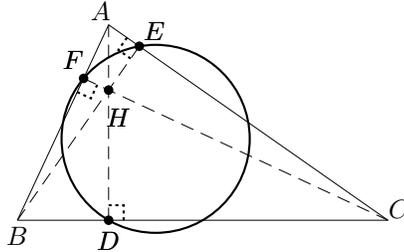


Figura 3.6: Circunferencia de los nueve puntos de un grupo ortocéntrico.

de los nueve puntos, entonces, el grupo ortocéntrico tiene la misma circunferencia de los nueve puntos. ■

### 3.2. Nuevos grupos ortocéntricos a partir de uno dado

Dado un grupo ortocéntrico, es posible formar otros. Por ejemplo, los circuncentros de los cuatro triángulos determinados por un grupo ortocéntrico de puntos van a formar otro grupo ortocéntrico.

**Teorema 3.2.1.** *Los cuatro circuncentros de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico de puntos forman un nuevo grupo ortocéntrico. Además, el nuevo grupo es simétrico al grupo dado, y el centro de simetría es el centro de la circunferencia de los 9 puntos.*

*Demostración.* Sean  $O, O_3, O_1, O_2$  los circuncentros de los triángulos  $\triangle ABC, \triangle BCH, \triangle CHA$  y  $\triangle HBA$ , donde  $H, A, B, C$  forman el grupo ortocéntrico de puntos dado (ver figura 3.7).

Si  $N$  es el centro de la circunferencia de los 9 puntos del triángulo  $\triangle ABC$ , entonces por el Teorema 1.3.5, los puntos  $H, O$  y  $N$  son colineales (línea de Euler). Además  $H$  es simétrico a  $O$  respecto a  $N$  (por el Teorema 1.3.2  $N$  es punto medio del segmento  $HO$ ). Como  $N$  es el centro de la circunferencia de los nueve puntos para cada triángulo del grupo ortocéntrico, podemos repetir el argumento e inferir que  $A$  es simétrico a  $O_3$ , pues  $A$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle HBC$  y  $O_3$  es su circuncentro, de la misma manera tenemos que  $B$  es simétrico a  $O_1$  y  $C$  es simétrico a  $O_2$ , ya que  $B$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle HAC$ ,  $O_1$  es su circuncentro y  $C$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle HBA$  y  $O_2$  es su circuncentro.

Veamos que  $O$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle O_1O_2O_3$  ya que, por el Corolario 3.1.6,  $AB$  es paralelo a  $O_1O_3$ ,  $AC$  a  $O_2O_3$ ,  $BC$  a  $O_1O_2$ , así también  $AH$  es paralela a  $O_3O_1$ ,  $BH$  a  $O_2O_3$  y  $CH$  a  $O_1O_2$ . Como  $AH, CH$  y  $BH$  son alturas del triángulo  $\triangle ABC$ , entonces  $O_3O_1, O_2O_3$  y  $O_1O_2$  son alturas del triángulo  $\triangle O_1O_2O_3$  y  $O$  es su ortocentro.

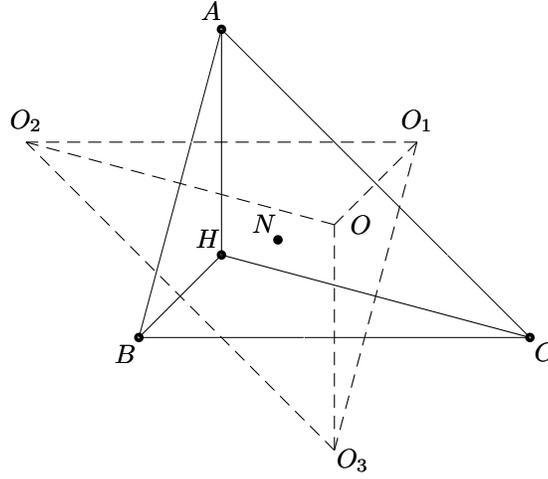


Figura 3.7: Grupo ortocéntrico de circuncentros.

Por lo tanto  $O, O_1, O_2, O_3$  es un grupo ortocéntrico simétrico al grupo ortocéntrico dado. ■

Que cuatro triángulos tengan la misma circunferencia de los nueve puntos es bastante impresionante. Pero, uno podría cuestionarse si es posible que exista algún conjunto con una mayor cantidad de triángulos que pueda seguir cumpliendo dicha propiedad. Antes de contestar esta pregunta, veremos que sí se tiene un conjunto de ocho triángulos que comparten el mismo centro de dicha circunferencia.

**Lema 3.2.2.** *El circuncentro del triángulo  $\triangle O_1O_2O_3$  es  $H$ . Más aún,  $A, B, C$  son circuncentros de los triángulos  $\triangle O_2O_1O, \triangle O_3OO_2$  y  $\triangle OO_1O_3$  respectivamente.*

*Demostración.* Por la Proposición 3.1.4 tenemos que  $O_2H = O_3H = r$ , y como  $O_2O_3$  es paralelo a  $AC$  (por el Corolario 3.1.6), entonces  $BH$  es perpendicular a  $O_2O_3$  (porque  $BH$  es perpendicular a  $AC$ ), así  $H$  está en la mediatriz de  $O_2O_3$ . De manera similar se prueba que  $H$  está en la mediatriz de  $O_1O_2$ , por lo tanto,  $H$  es el circuncentro del  $\triangle O_1O_2O_3$ . De manera análoga se prueba que  $A, B, C$  son circuncentros de  $\triangle O_2O_1O, \triangle O_3OO_2$  y  $\triangle OO_1O_3$  respectivamente. ■

**Proposición 3.2.3.** *Los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico y el grupo ortocéntrico determinado por sus circuncentros tienen el mismo centro de la circunferencia de los 9 puntos.*

*Demostración.* Por el lema anterior tenemos que  $H$  es el circuncentro del triángulo  $\triangle O_1O_2O_3$ . Sabemos que el centro de la circunferencia de los nueve puntos

es el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro. Por lo tanto  $N$ , el punto medio de  $HO$ , es el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo  $\triangle O_1O_2O_3$  y por el Corolario 3.1.10 los triángulos determinados por los puntos  $O, O_1, O_2$  y  $O_3$  tienen la misma circunferencia de los nueve puntos. Así, concluimos que los triángulos determinados por  $A, B, C$  y  $H$  y el grupo ortocéntrico determinado por sus circuncentros tienen el mismo centro de la circunferencia de los 9 puntos. ■

**Proposición 3.2.4.** *El triángulo pedal del grupo ortocéntrico de puntos  $O, O_1, O_2, O_3$  es el triángulo simétrico respecto a  $N$  del triángulo pedal del grupo ortocéntrico de puntos  $A, B, C$  y  $H$ .*

*Demostración.* Sea  $\triangle D'E'F'$  el triángulo pedal del grupo ortocéntrico  $O, O_1, O_2, O_3$  y  $\triangle DEF$  el triángulo pedal del grupo ortocéntrico  $A, B, C, H$  (figura 3.8). Sea  $N$  el centro de la circunferencia de los nueve puntos de los triángulos generados por  $A, B, C$  y  $H$ , sabemos que  $DN = EN = FN$  al ser radios. En la proposición pasada probamos que  $N$  es también el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo  $\triangle O_1O_2O_3$ , así  $D'N = F'N = E'N$  al ser radios. Entonces

$$DN = EN = FN = D'N = F'N = E'N$$

Resta ver que  $N, D$  y  $D'$  son colineales. Fijémonos en el triángulo  $\triangle LDD'$ , al ser  $\angle DLD'$  un ángulo recto tenemos que  $DD'$  es un diámetro, así  $N, D$  y  $D'$  son colineales, análogamente se prueba para los demás vértices. Así los vértices del triángulo  $\triangle D'E'F'$  son simétricos a los del  $\triangle DEF$ . ■

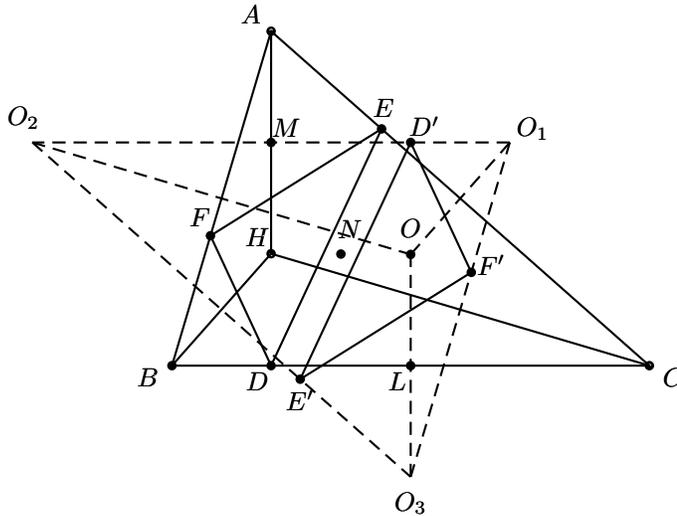


Figura 3.8: Proposición 3.2.4

**Corolario 3.2.5.** *Los puntos  $D', E'$  y  $F'$  también están en la circunferencia de los 9 puntos del triángulo  $\triangle ABC$ .*

Los circuncentros de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico no son los únicos que definen un grupo nuevo, los centroides también forman un nuevo grupo ortocéntrico de puntos.

**Proposición 3.2.6.** *Los cuatro centroides de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico forman otro grupo ortocéntrico cuyos triángulos son semejantes a los del dado. Además, el nuevo grupo es simétrico al grupo dado, y el centro de simetría es el centro de la circunferencia de los 9 puntos.*

*Demostración.* Sea  $A, B, C, H$  el grupo ortocéntrico dado,  $G, O$  y  $N$  el centroide, circuncentro y centro de la circunferencia de los 9 puntos del triángulo  $\triangle ABC$ ,  $G_1, G_2$  y  $G_3$  centroides de los triángulos  $\triangle HBC, \triangle AHC$  y  $\triangle ABH$ , respectivamente. Sabemos que estos puntos son colineales y además  $\frac{GO}{GH} = \frac{1}{2}$ , como  $N$  es punto medio del segmento  $OH$ , tenemos que  $\frac{NG}{NH} = \frac{1}{3}$ .

Observemos que los triángulos  $\triangle G_1GN$  y  $\triangle AHN$  son semejantes por el criterio lado-ángulo-lado, así  $AH$  y  $G_1G$  son paralelos. De la misma manera se puede llegar a que  $G_2G_3$  es paralelo a  $BC$ , entonces  $GG_1$  es perpendicular a  $G_2G_3$ . Siguiendo un razonamiento similar,  $G_3G$  es perpendicular a  $G_1G_2$ , con lo cual demostramos que  $G$  es ortocentro del triángulo  $\triangle G_1G_2G_3$ , por lo tanto  $G, G_1, G_2$  y  $G_3$  forman un grupo ortocéntrico de puntos.

Recordemos que todos los triángulos de un grupo ortocéntrico tienen el mismo centro de la circunferencia de los 9 puntos, entonces vamos a tener la misma razón para los demás triángulos y sus respectivos centroides. Así, los triángulos determinados por los centroides van a estar en razón de semejanza de  $\frac{1}{3}$  con respecto a los triángulos determinados por los puntos del grupo ortocéntrico dado. ■

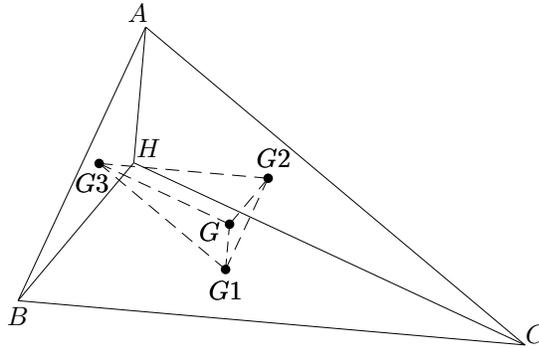


Figura 3.9: Grupo ortocéntrico de centroides.

**Corolario 3.2.7.** *Los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico y el*

grupo ortocéntrico de puntos formado por sus centroides tienen el mismo centro de circunferencia de los nueve puntos.

*Demostración.* Sabemos que el centro de la circunferencia de los nueve puntos es el único punto que divide al segmento  $GH$  en razón  $\frac{1}{3}$ , así  $N$  es el centro de circunferencia de los nueve puntos del triángulo  $G_1G_2G_3$ , y por el Corolario 3.1.10 también lo es de los triángulos determinados por los puntos  $G$ ,  $G_1$ ,  $2$  y  $G_3$ . ■

El problema de Apolonio consiste en encontrar una circunferencia tangente a otras cuatro circunferencias. El descubrimiento de la circunferencia de los nueve puntos resolvió el problema. Los grupos ortocéntricos definen triángulos que comparten la misma circunferencia de los nueve puntos (Corolario 3.1.10) uniendo este resultado con el teorema de Feuerbach, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.8.** *La circunferencia de los 9 puntos de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico es tangente a 16 circunferencias.*

*Demostración.* Como ya mencionamos, la circunferencia de los 9 puntos es tangente a las tres circunferencias excritas y a la inscrita de un triángulo. Como tenemos 4 triángulos para los cuales la circunferencia de los 9 puntos es la misma, entonces va a ser tangente a las 4 circunferencias de cada triángulo. Por lo tanto, la circunferencia de los 9 puntos es tangente a las 16 circunferencias (inscritas y excritas). ■

**Proposición 3.2.9.** *Dado  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  un grupo ortocéntrico vamos a considerar  $\ell$  una línea cualquiera que pase por  $N$  el centro de la circunferencia de los nueve puntos del grupo. Entonces se cumple que  $d(A, \ell) + d(H, \ell) + d(B, \ell) = d(C, \ell)$  o bien  $d(A, \ell) + d(H, \ell) = d(B, \ell) + d(C, \ell)$ .*

*Demostración.* Sea  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $H$  el grupo ortocéntrico dado,  $N$  el centro de la circunferencia de los nueve puntos del grupo y  $\ell$  una recta que pase por  $N$ . Vamos a considerar, dos casos. El primero cuando la recta deja 3 puntos en un semiplano y 1 en el restante, el segundo cuando quedan dos puntos en un semiplano y dos en el otro. El caso cuando la recta pasa por uno de los puntos del grupo ortocéntrico se puede reducir a cualquiera de los casos anteriores ya que la distancia de  $\ell$  a dicho vértice será 0 y las cuentas se siguen de la misma manera.

Sea  $O$  el circuncentro del triángulo  $\triangle ABC$  y  $L$  el punto medio de  $BC$ . Por la Proposición 1.2.1 la distancia de un vértice al ortocentro es igual al doble de la distancia del circuncentro al punto medio del lado opuesto. Realicemos la siguiente construcción:

Trazamos rectas  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $\ell_3$ ,  $\ell_4$ ,  $\ell_5$  y  $\ell_6$  paralelas a  $\ell$  que pasen por  $A$ ,  $H$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $O$  y  $M$  respectivamente, donde  $M$  es el punto medio del segmento  $AC$ .

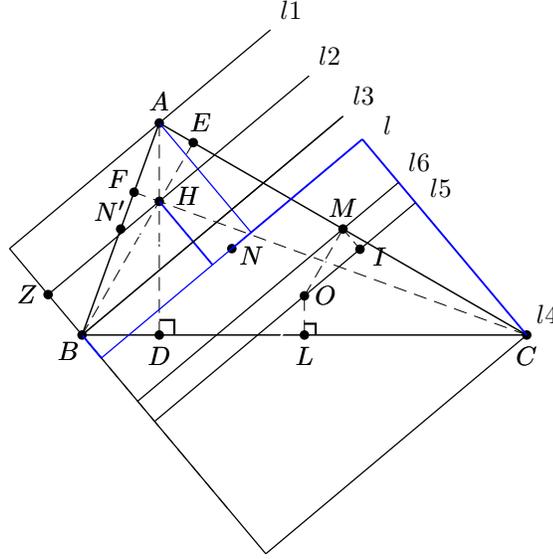


Figura 3.10: Proposición 3.2.9 Caso 1

Notemos que en el primer caso (figura 3.10) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(A, \ell) &= d(A, \ell_2) + d(H, \ell_3) + d(B, \ell), \\ d(C, \ell) &= d(C, \ell_5) + d(O, \ell_6) + d(M, \ell) \end{aligned}$$

Como  $HN = NO$  (notemos que  $H$  y  $O$  siempre van a quedar en lados opuestos de la recta, al ser puntos distintos y colineales con  $N$ ), tenemos que:

$$d(H, \ell_3) + d(B, \ell) = d(O, \ell_6) + d(M, \ell)$$

De manera análoga como  $M$  es punto medio de  $AC$ , entonces

$$d(A, \ell_2) + d(H, \ell_3) + d(B, \ell) + d(M, \ell) = d(O, \ell_6) + d(C, \ell_5)$$

Sea  $Z$  el pie de la perpendicular desde  $B$  a  $\ell_2$ , tenemos que los triángulos  $\triangle HZB$  y  $\triangle OIM$  son semejantes donde  $I$  es el pie de la perpendicular desde  $M$  hacia  $\ell_5$ , ya que tienen lados paralelos. Así  $\frac{BH}{MO} = \frac{ZB}{IM}$  y como  $BH = 2OM$ , entonces  $\frac{BH}{MO} = 2 = \frac{ZB}{IM}$ . Por lo que  $2IM = ZB$ , es decir  $d(B, \ell_2) = 2d(O, \ell_6)$ . Con esto se termina el primer caso ya que,

$$\begin{aligned} 2d(O, \ell_6) &= d(H, \ell_3) \\ d(O, \ell_6) + d(B, \ell) + d(H, \ell_3) + d(O, \ell_6) &= d(M, \ell) + d(H, \ell_3) + d(O, \ell_6) \\ d(A, \ell_2) + d(H, \ell_3) + d(B, \ell) + d(M, \ell) + d(O, \ell_6) + d(B, \ell) &= d(C, \ell_5) + d(O, \ell_6) + d(M, \ell) \\ d(A, \ell_2) + d(H, \ell_3) + d(B, \ell) + d(H, \ell_3) + d(B, \ell) + d(B, \ell) &= d(C, \ell_5) + d(M, \ell) + d(O, \ell_6) \\ d(A, \ell) + d(H, \ell) + d(B, \ell) &= d(C, \ell) \end{aligned}$$

3.2. NUEVOS GRUPOS ORTOCÉNTRICOS A PARTIR DE UNO DADO 61

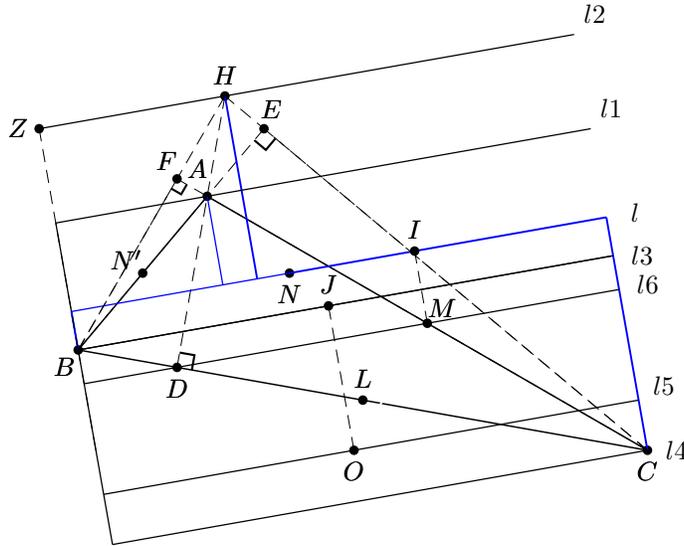


Figura 3.11: Proposición 3.2.9 Caso 2

Ahora veamos que en el segundo caso (figura 3.11) tenemos que:

$$\begin{aligned} d(B, \ell) + d(C, \ell) &= d(O, \ell) - d(O, \ell_3) + d(C, \ell_6) + d(M, \ell), \\ &= d(H, \ell) - d(O, \ell_3) + d(A, \ell_6) + d(M, \ell), \\ &= d(H, \ell) - d(O, \ell_3) + d(A, \ell) + 2d(M, \ell) \end{aligned}$$

Sea  $J$  el pie de la perpendicular desde  $O$  hacia  $\ell_3$ . Notemos que los triángulos  $\triangle BOJ$  y  $\triangle NMI$  son semejantes ya que tienen lados paralelos correspondientes. Así,  $d(O, \ell_3) = 2d(M, \ell)$ . Por lo tanto,

$$d(B, \ell) + d(C, \ell) = d(A, \ell) + d(H, \ell)$$

Que era lo que se quería demostrar. ■

Siguiendo con sumas dentro de los grupos ortocéntricos, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.10.** *La suma de los cuadrados de las longitudes de cualquier par de segmentos no adyacentes de un grupo ortocéntrico de puntos es igual al cuadrado del diámetro del circuncírculo.*

*Demostración.* Sea  $A, B, C$  y  $H$  un grupo ortocéntrico. Recordemos que todos los circuncírculos que se forman tienen el mismo radio. Consideremos los segmentos  $CH$  y  $AB$ , y denotemos por  $A'$  al punto diametralmente opuesto a  $A$ . Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo  $\triangle AA'B$  obtenemos que

$$AA'^2 = AB^2 + BA'^2 \quad (3.1)$$

Como  $A'B = 2OM = CH$  (por la Proposición 1.3.4), donde  $M$  es punto medio del segmento  $AB$  y  $O$  es el circuncentro del triángulo  $\triangle AA'B$ , entonces sustituyendo en la ecuación (3.1) tenemos que

$$AA'^2 = AB^2 + CH^2$$

Es decir la suma de los cuadrados de dos segmentos no adyacentes de un grupo ortocéntrico es igual al cuadrado del diámetro del circuncírculo. ■

Ya establecimos una relación entre la circunferencia de los nueve puntos y los grupos ortocéntricos. A continuación vemos que también existe una relación entre la línea de Euler y los grupos ortocéntricos.

**Proposición 3.2.11.** *Las líneas de Euler de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico de puntos son concurrentes.*

*Demostración.* Sea  $A, B, C$  y  $H$  un grupo ortocéntrico, y sean  $\ell, \ell_1, \ell_2, \ell_3$  las líneas de Euler de los triángulos  $\triangle ABC, \triangle AHB, \triangle AHC$  y  $\triangle CBH$  respectivamente. Como la línea de Euler pasa por el centro de la circunferencia de los nueve puntos, y además un grupo ortocéntrico de triángulos comparte el mismo centro para dicha circunferencia, entonces  $\ell, \ell_1, \ell_2, \ell_3$  son concurrentes en dicho punto. ■

**Lema 3.2.12.** *Sea un triángulo  $\triangle ABC$  con alturas  $AD, BE, CF$  y  $H$  su ortocentro. Si  $X$  pertenece al segmento  $BC$ , entonces la potencia de  $H$  respecto a la circunferencia de diámetro  $AX$  es igual a  $HB * HE = HC * HF = HA * HD$ .*

*Demostración.* Notemos que los triángulos  $\triangle HFB$  y  $\triangle HEC$  son semejantes ya que ambos tienen ángulos rectos en  $F$  y  $E$ , y como  $\angle EHC = \angle BHF$  al ser opuestos por el vértice, tenemos que

$$\frac{HF}{HE} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HC * HF = HB * HE$$

De manera similar tenemos que los triángulos  $\triangle HDB$  y  $\triangle HEA$  son semejantes, así

$$\frac{HD}{HE} = \frac{HB}{HA} \Rightarrow HA * HD = HB * HE$$

Por lo tanto,

$$HA * HD = HB * HE = HC * HF$$

Si tomamos un punto  $X$  sobre  $BC$  y trazamos una circunferencia de diámetro  $AX$ , observemos que  $AD$  es una secante, ya que  $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ , así la potencia de  $H$  respecto a esta circunferencia es  $HA * HD$ . ■

### 3.2. NUEVOS GRUPOS ORTOCÉNTRICOS A PARTIR DE UNO DADO 63

Vamos a ver otro ejemplo de grupo ortocéntrico.

Sea  $\triangle ABC$  un triángulo rectángulo con el ángulo recto en  $\angle CAB$  como se muestra en la figura 3.11.

Tracemos la altura  $AD$ , donde  $D$  es el pie de la misma. Ahora fijémonos en las bisectrices de los ángulos  $\angle BAD$  y  $\angle DAC$  y llamemos  $S$  y  $S'$  a las intersecciones con  $CB$ , respectivamente. También, consideramos las bisectrices de los ángulos  $\angle ABD$  y  $\angle ACD$ . Sean  $U$ ,  $V$  y  $W$  los incentros de los triángulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$  y  $\triangle ACD$  respectivamente. En estas circunstancias tenemos lo siguiente:

**Proposición 3.2.13.** *Los puntos  $A$ ,  $U$ ,  $V$  y  $W$  forman un grupo ortocéntrico.*

*Demostración.* Para ver que es un grupo ortocéntrico basta ver que uno de los puntos es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres.

Sean  $B'$  la intersección de la bisectriz del ángulo  $\angle CBA$  con  $AC$ ,  $X$  la intersección de  $BB'$  con  $AS'$ ,  $C'$  la intersección de la bisectriz del ángulo  $\angle ACB$  con  $AS$ ,  $Y$  la intersección de  $CC'$  con  $AS$ ,  $Z$  la intersección de  $AD$  con  $BB'$ ,  $Q$  la intersección de  $AD$  con  $CC'$ .

Notemos que los triángulos  $\triangle BAB'$  y  $\triangle BDZ$  son semejantes ya que ambos tienen un ángulo recto en  $A$  y  $D$ , además  $\angle ABB' = \angle B'BC$  pues  $BB'$  es bisectriz, así tenemos que  $\angle AB'X = \angle BZD$ . Pero  $\angle BZD = \angle XZA$  al ser opuestos por el vértice, y como  $\angle ZAX = \angle XAB'$  porque  $AS'$  es bisectriz, entonces los triángulos  $\triangle AXZ$  y  $\triangle AXB'$  son semejantes por el criterio ángulo-ángulo. Por lo cual podemos concluir que el triángulo  $\triangle AZB'$  es isósceles y como  $AX$  es bisectriz entonces  $AX$  es altura. Por lo tanto  $AW$  es perpendicular a  $UV$ .

De manera análoga se demuestra que los triángulos  $\triangle CAC'$  y  $\triangle CDQ$  son semejantes y que el triángulo  $\triangle AQC'$  es isósceles, teniendo como resultado que  $CQ$  es altura del triángulo  $\triangle AVW$ , por lo cual  $U$  es su ortocentro. Así concluimos que  $A$ ,  $U$ ,  $V$  y  $W$  forman un grupo ortocéntrico. ■

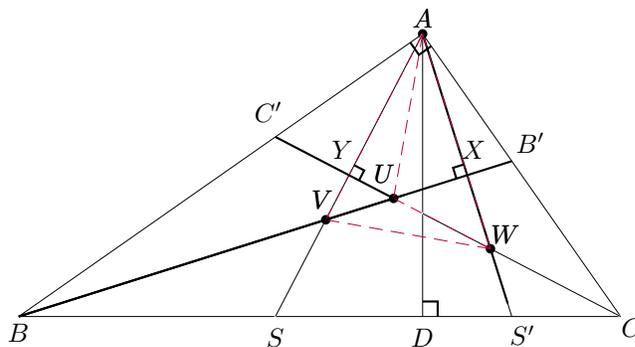


Figura 3.12: Grupo ortocéntrico de  $A$ ,  $U$ ,  $V$  y  $W$

### 3.3. Transformaciones de los grupos ortocéntricos

En la sección anterior probamos que los circuncentros de un grupo ortocéntrico forman, a su vez, otro grupo ortocéntrico. Así el Teorema 3.2.1 es un ejemplo de que los grupos ortocéntricos se preservan bajo una transformación rígida. Pues si  $\triangle ABC$  es un triángulo con  $H$  su ortocentro y  $O, O_1, O_2, O_3$  circuncentros de  $\triangle ABC, \triangle ACH, \triangle ABH$  y  $\triangle BCH$ , respectivamente, entonces el triángulo  $\triangle O_1O_2O_3$  es la rotación del  $\triangle ABC$  con centro en  $N$  (centro de la circunferencia de los 9 puntos) y ángulo  $\alpha = \pi$ . Esto se ve fácilmente gracias al resultado siguiente.

**Proposición 3.3.1.** *Los triángulos  $\triangle O_1O_2O_3$  y  $\triangle ABC$  son congruentes, y además sus lados son respectivamente paralelos. En general los triángulos  $\triangle BCH$  y  $\triangle O_1O_2O_3$ ;  $\triangle HAB$  y  $\triangle OO_3O_1$ ;  $\triangle CHA$  y  $\triangle O_2OO_3$  son congruentes y con lados paralelos.*

*Demostración.* En la demostración de la Proposición 3.1.5 vimos que los cuadriláteros  $\square O_1O_2BC, \square O_2O_3AC$  y  $\square O_1O_3AB$  son paralelogramos, entonces  $O_1O_2 = BC, O_3O_2 = AC$  y  $O_1O_3 = AB$ . Por lo tanto los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle O_3O_2O_1$  son congruentes y con lados son paralelos (ver figura 3.7). De manera similar se prueba para los demás pares de triángulos. ■

**Corolario 3.3.2.** *Las líneas  $BO_2$  y  $CO_1$  son paralelas, así también  $AO_2$  y  $CO_3, AO_1$  y  $BO_3$  son paralelas.*

*Demostración.* Sea  $N$  el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo  $\triangle ABC$ . Fijémonos en los triángulos  $\triangle BNO_2$  y  $\triangle CNO_1$ , estos triángulos son congruentes pues  $CN = NO_2$  y  $NB = NO_1$ , por ser simétricos respecto a  $N$ , y además sus ángulos en el vértice  $N$  son iguales al ser opuestos por el vértice, entonces  $CO_1 = BO_2$  y además son paralelas ya que los ángulos  $\angle NO_2B$  y  $\angle NCO_1$  son iguales. De manera análoga se muestra que los triángulos  $\triangle NBO_3$  y  $\triangle NAO_1$ ;  $\triangle NAO_2$  y  $\triangle CNO_3$  son congruentes y de manera similar se llega a los resultados deseados, es decir,  $AO_2$  y  $CO_3, AO_1$  y  $BO_3$  son paralelas (ver figura 3.7). ■

El grupo ortocéntrico formado por los circuncentros de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico no fue el único que se mencionó en la sección anterior, también se hizo mención al grupo ortocéntrico formado por los centroides de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico. El cual, a diferencia del grupo de los circuncentros, no es el resultado de una rotación únicamente, sino también de una homotecia cuya razón de homotecia es 3:1. Los grupos ortocéntricos son preservados bajo traslación, reflexión, homotecia y rotación, aunque no hemos establecido ninguna demostración, esto se puede deducir a partir de que los grupos ortocéntricos solo necesitan preservar ángulos. Como las transformaciones rígidas respetan ángulos y distancias, se cumple la afirmación. La única que restaría sería la homotecia, ya que esta no conserva las

distancias, pero en los grupos ortocéntricos lo más importante son los ángulos, y la homotecia sí los respeta, es por ello que se van a seguir preservando bajo esta última transformación.

Al igual que las propiedades que teníamos con los grupos ortocéntricos de un triángulo y el grupo determinado por sus circuncentros, aquí también tenemos propiedades similares. Denotaremos por:  $G, G_1, G_2, G_3$  a los centroides de los triángulos  $\triangle ABC, \triangle AHC, \triangle AHB$  y  $\triangle HBC$ , respectivamente, como en la figura 3.9.

**Proposición 3.3.3.** *Las líneas  $AC$  y  $G_3G_1$  son paralelas, así también  $AB$  y  $G_2G_1, BC$  y  $G_2G_3$  son paralelas.*

*Demostración.* Esto se sigue de la Proposición 3.2.6. ■

A manera de resumen de las últimas dos secciones de este trabajo, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.4.** *Los centroides y los circuncentros de los triángulos determinados por un grupo ortocéntrico forman dos grupos ortocéntricos de puntos que comparten el centro de sus respectivas circunferencias de los nueve puntos, este punto es también el centro de semejanza de estos dos nuevos grupos.*

*Demostración.* Sean  $G, G_1, G_2, G_3$  y  $O, O_1, O_2, O_3$  los grupos ortocéntricos dados y  $A, B, C, H$  el grupo ortocéntrico central. Como ya vimos, los tres grupos comparten el centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos y además el grupo  $A, B, C, H$  y  $O, O_1, O_2, O_3$  son simétricos respecto  $N$ . Más aún, sabemos que varios puntos son colineales con el centro de la circunferencia de los 9 puntos, y como ya teníamos una razón entre el grupo  $A, B, C, H$  y  $G, G_1, G_2, G_3$ , de aquí podemos decir que la razón entre los primeros dos grupos será 3:1. ■

### 3.4. Inversión de un grupo ortocéntrico

En esta sección estudiamos los grupos ortocéntricos bajo la inversión. Es importante aclarar que vamos a invertir únicamente puntos y no los segmentos de recta que determinan los lados del triángulo, ya que estos podrían transformarse en circunferencias.

Para la inversión necesitamos una circunferencia, la cual va a ser la clave de todo. Si la inversión deja fijos a los puntos de un grupo ortocéntrico, claramente nuestro grupo se habrá preservado bajo esta transformación. Por otra parte, como los puntos que están sobre la circunferencia de inversión son fijos bajo la inversión, entonces si ocupamos la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle ABC$  como circunferencia de inversión, estos tres puntos serán fijos, y solo restaría ver que ocurre con  $H$ . El punto  $H$  es el circuncentro únicamente cuando  $\triangle ABC$  es un triángulo equilátero, en cuyo caso  $H$  es el centro de inversión y nuestro grupo ortocéntrico se preserva bajo esta inversión. En general,  $H$  no

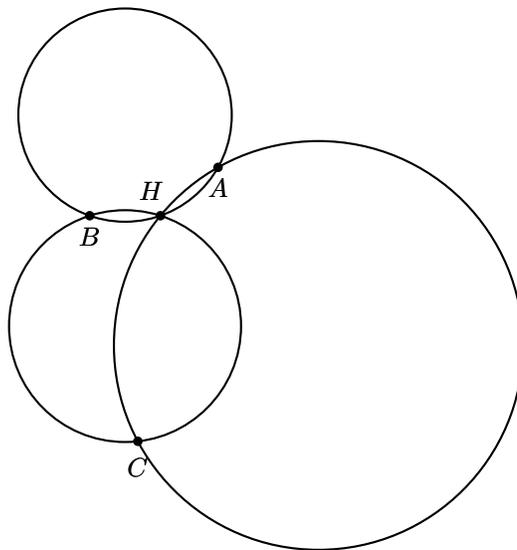


Figura 3.13: Puntos no concíclicos.

será el centro de inversión, pero el ortocentro de un triángulo es único, entonces el inverso de  $H$  no va a ser el ortocentro del triángulo  $\triangle ABC$ . Por lo tanto, si  $\triangle ABC$  no es equilátero, entonces la circunferencia circunscrita no es una buena candidata como circunferencia de inversión

Una observación importante es que no existe una circunferencia donde los cuatro puntos sean concíclicos o bien donde uno sea el centro y los otros tres estén sobre la circunferencia (a excepción del triángulo equilátero). En general no es posible invertir a un grupo ortocéntrico en sí mismo, sin embargo, cualesquiera cuatro puntos no concíclicos se pueden invertir en un grupo ortocéntrico.

**Teorema 3.4.1.** *Dados cuatro puntos no concíclicos, estos pueden ser invertidos en un grupo ortocéntrico de puntos.*

*Demostración.* Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  cuatro puntos no concíclicos, y  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  circuncírculos de los triángulos  $\triangle HAC$ ,  $\triangle BCH$  y  $\triangle HAB$  respectivamente. Por el Corolario 2.3.27 sabemos que por tercias las circunferencias de antisimilitud se intersecan, sin pérdida de generalidad vamos a elegir  $H'$  uno de estos puntos de intersección. Tomando a  $H'$  como centro de inversión, por la Proposición 2.3.28, es posible invertir  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$  en tres circunferencias del mismo radio, digamos  $\mathcal{C}'_1$ ,  $\mathcal{C}'_2$ ,  $\mathcal{C}'_3$ . Por la Proposición 3.1.5, las intersecciones de  $\mathcal{C}'_1$ ,  $\mathcal{C}'_2$ ,  $\mathcal{C}'_3$  forman un grupo ortocéntrico, con lo cual se demuestra el teorema. ■

Esta es una herramienta muy útil ya que con esta construcción seremos capaces de siempre obtener grupos ortocéntricos de puntos de una manera muy sencilla.

Ahora estudiamos un caso más específico.

Consideremos  $\mathcal{C}(S, r)$  y  $\mathcal{C}_1(S', r')$  dos circunferencias que se intersequen en  $A$  y  $H$ . Las prolongaciones de los diámetros  $EH$  y  $FH$  de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_1$  intersecan en  $B$  y  $C$  a  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}$  respectivamente, como se muestra en la figura 3.13, así tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.4.2.** *El eje radical de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_1$  pasa por el centro del circuncírculo del triángulo  $\triangle HBC$ .*

*Demostración.* Vamos a invertir todo con respecto a  $H$ . Nótese que las circunferencias que pasan por  $H$  se van a invertir en rectas que no pasan por este punto. Más aún se invertirán en los lados del triángulo  $\triangle A'B'C'$ , donde  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  son los inversos de  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente. Las rectas  $AH$ ,  $BH$  y  $HC$  se van a invertir en ellas mismas. Nótese que como los diámetros son ortogonales y la inversión preserva ángulos entonces se tiene que  $A'H$ ,  $B'H$  y  $C'H$  son alturas del triángulo  $\triangle A'B'C'$ . Como  $H$  es el ortocentro entonces  $AH$  es ortogonal a  $\mathcal{C}_2$ , entonces el eje radical de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_1$  pasa por el centro del circuncírculo del triángulo  $\triangle HBC$ . ■

**Proposición 3.4.3.** *Los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $H$  forman un grupo ortocéntrico de puntos.*

*Demostración.* En la demostración anterior vimos que  $A'H$ ,  $B'H$  y  $C'H$  son alturas del triángulo  $\triangle A'B'C'$ , es decir,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $H$  forman un grupo ortocéntrico. ■

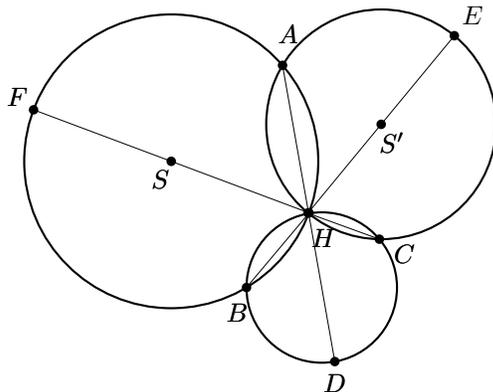


Figura 3.14: Lema 3.4.2

En la sección de inversión del capítulo dos, mencionamos el concepto de triángulo autopolar, el cual debe ser un triángulo obtuso. Como el lado opuesto a un vértice es su polar, entonces la recta que contiene al centro de inversión, al vértice y a su inverso es perpendicular al lado opuesto y así para cada vértice.

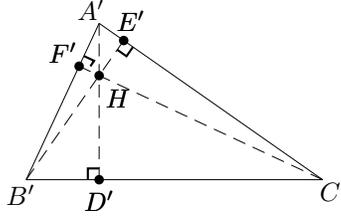


Figura 3.15: Grupo Ortocéntrico resultante de la inversión por H.

Esto nos dice que el centro de inversión es el ortocentro y más aún, como el triángulo es obtusángulo, el ortocentro está afuera del triángulo. De hecho, concluimos que todo grupo ortocéntrico tiene tres triángulos autopolares. Es claro que la circunferencia de inversión no puede tener un radio cualquiera. Para que  $D$  sea el inverso de  $A$  este tiene que cumplir que  $HD * HA = r^2$ , despejando obtenemos que  $r = \sqrt{HD * HA}$  el cual será el radio de nuestra circunferencia polar con centro en  $H$ .

**Teorema 3.4.4.** *Las circunferencias polares de los tres triángulos obtusángulos determinados por los puntos de un grupo ortocéntrico son ortogonales por pares.*

*Demostración.* Sean  $A, B, C$  y  $H$  puntos de un grupo ortocéntrico, y  $\mathcal{C}_1(A, r_1)$ ,  $\mathcal{C}_2(B, r_2)$  y  $\mathcal{C}_3(C, r_3)$  las circunferencias polares de los triángulos  $\triangle BHC$ ,  $\triangle AHC$  y  $\triangle AHB$ , respectivamente. Supongamos que el punto  $H$  es el vértice común donde se encuentra el ángulo obtuso.

Sean  $AD, BE$  y  $CF$  alturas del triángulo  $\triangle ABC$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= AD * AC, \\ r_3^2 &= CD * AC \end{aligned}$$

Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_3^2 &= AD * AC + CD * CA \\ &= (AD + CD)AC \\ &= AC^2 \end{aligned}$$

Lo cual implica que  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  son ortogonales. De manera análoga se demuestra que los otros dos pares de circunferencias son ortogonales. ■





## Capítulo 4

# Grupos Ortocéntricos en el espacio

### 4.1. Triedros y tetraedros

Este último capítulo se dividirá en dos partes, la primera donde analizaremos a los grupos ortocéntricos dentro de un triedro y la segunda, donde se analizarán en un tetraedro. Antes de comenzar es importante aclarar que el lector puede consultar las nociones que requiera del estudio de la geometría euclidiana en el espacio en [2] o [10].

Ahora que ya vimos cómo se comportan los grupos ortocéntricos en el plano, la pregunta natural es: ¿existirán grupos ortocéntricos si subimos una dimensión? La respuesta es afirmativa, si ahora estamos en un espacio de tres dimensiones; en lugar de tener triángulos, tendremos ángulos triedros y tetraedros, que son definidos de la siguiente manera:

**Definición 4.1.1.** Sea  $\Pi$  un plano en el espacio y  $S$  un punto en el, dibujamos tres semirayos  $a$ ,  $b$  y  $c$  desde  $S$ . Las áreas determinadas por cada par de semirayos, las llamaremos caras, a  $S$  vértice y las rectas  $a$ ,  $b$  y  $c$  serán aristas. A esta figura la denotaremos como  $S - abc$  y recibe el nombre de *ángulo triedro* o simplemente triedro.

**Definición 4.1.2.** Al volumen comprendido por la intersección de 4 triedros tomados por tercias lo llamaremos *tetraedro*.

**Definición 4.1.3.** Al paralelepipedo cuyas caras son rombos lo llamamos *romboedro*.

### 4.2. Grupos Ortocéntricos en los triedros

En los triedros se define un concepto similar a la altura de un triángulo, pero en lugar de tener una recta, vamos a tener un plano.

**Definición 4.2.1.** El plano que contiene a una arista de un ángulo triedro tal que es perpendicular a la cara opuesta a la arista, es llamado *plano altura del triedro*.

Dados dos planos que se intersectan en una recta, elegimos un punto  $P$  sobre esta intersección. Vamos a definir al ángulo entre dos planos como el ángulo que se forma entre sus dos vectores normales con origen en  $P$ .

**Definición 4.2.2.** El ángulo formado entre dos planos se llama ángulo diedro.

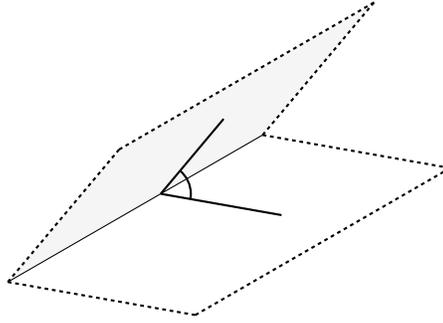


Figura 4.1: Ángulo diedro

A los ángulos diedros los denotaremos de la siguiente manera  $\angle abc$  donde los planos determinados por  $a$  y  $b$  (denotado por  $ab$ );  $b$  y  $c$  (denotado por  $bc$ ) son las caras del ángulo diedro y  $b$  su intersección.

**Lema 4.2.3.** Sea  $\Pi$  un plano y  $\ell$  una recta perpendicular a  $\Pi$ . Si  $\Pi'$  es un plano que contiene a  $\ell$  entonces  $\Pi'$  es perpendicular a  $\Pi$ .

*Demostración.* Sea  $X$  el punto de intersección de  $\ell$  y  $\Pi$  Observemos que el vector normal a  $\Pi$  tiene la misma dirección que la recta  $\ell$ , denotaremos a este vector normal por  $\vec{n}$ . Consideremos  $p$  la recta perpendicular a  $\Pi'$  y que pasa por  $X$ , esta recta debe estar contenida en  $\Pi$  ya que, en particular, es perpendicular a  $\ell$ . Además esta recta tiene la misma dirección del vector normal de  $\Pi'$ , al cual denotaremos como  $\vec{n}'$ .

Como  $\ell$  es perpendicular a  $p$  entonces  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ . Por lo tanto  $\Pi$  y  $\Pi'$  son perpendiculares. ■

**Lema 4.2.4.** Sean  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  dos planos perpendiculares con  $\ell$  su recta de intersección. Si  $a$  es una recta en  $\Pi_1$  y perpendicular a  $\ell$ , entonces  $a$  es perpendicular a  $\Pi_2$ .

*Demostración.* Sea  $A$  el punto de intersección de  $a$  y  $\ell$  denotamos por  $b$  a la recta perpendicular a  $\ell$  en  $\Pi_2$  y que pasa por  $A$ . Por definición de ángulo diedro,  $a$  y  $b$  son perpendiculares. Como  $\ell$  y  $b$  son distintos, entonces  $a$  es perpendicular a cualquier recta en  $\Pi_2$  que pase por  $A$ . Por lo tanto,  $a$  es perpendicular a  $\Pi_2$ . ■

**Teorema 4.2.5.** *Sea  $\angle abc$  un ángulo diedro recto,  $X$  un punto sobre  $b$  y  $\Pi$  un plano que pasa por  $X$  de tal forma que que interseca a  $ab$  en  $p$  y a  $bc$  en  $q$ , donde  $p$  y  $q$  son perpendiculares, entonces  $\Pi$  es perpendicular a una de las caras del diedro.*

*Demostración.* Si  $p$  no es perpendicular al plano  $bc$ , entonces consideramos una recta  $p'$  en  $ab$  tal que  $p'$  es perpendicular a  $b$ . Por el Lema 4.2.4,  $p'$  es perpendicular al plano  $bc$ , es decir, el vector director de  $p'$  tiene la misma dirección que el vector normal  $\vec{n}$  al plano  $bc$ . Como  $p$  y  $p'$  son distintas entonces cualquier recta en el plano  $ab$  que pase por  $X$  tiene como vector de dirección una combinación lineal de los vectores de  $p$  y  $p'$ . Entonces, cualquier recta en  $ab$  que pase por  $X$  es perpendicular a  $q$ , es decir,  $q$  es perpendicular a  $ab$ . Así por el Lema 4.2.3  $\Pi$  es perpendicular a  $ab$ . ■

Existen definiciones en el plano que tienen un concepto similar en tres dimensiones con ciertas diferencias. Por ejemplo, en el plano, tenemos el concepto de rectas concurrentes, en el espacio es posible intersecar dos o más planos, por ello tenemos el siguiente concepto:

**Definición 4.2.6.** Los planos que se intersecan en una línea dada en el espacio forman un **haz de planos**, donde la línea dada es llamada eje. En este caso, los planos del haz se dice que son **coaxiales**.

Como ya vimos, las alturas de un triángulo son concurrentes, por lo cual es natural pensar que los planos altura en un triedro serán coaxiales, esto es lo que demostraremos a continuación:

**Teorema 4.2.7.** *Los tres planos alturas de un triedro son coaxiales.*

*Demostración.* Sea  $S - abc$  un triedro y  $e, f$  las intersecciones de los planos alturas  $\Pi_b, \Pi_c$  en las caras  $ca$  y  $ab$ , respectivamente. Nombramos  $h$  a la intersección de los dos planos alturas. Consideremos un plano  $\Pi$  perpendicular a la recta  $h$  y llamémosle  $H$  a la intersección de estos. Este plano  $\Pi$  corta a  $a, b, c, e, f$  en los puntos  $A, B, C, E$  y  $F$ , respectivamente.

Notemos que  $B, H$  y  $E$  pertenecen a la intersección de  $\Pi_b$  y  $\Pi$ , llamémosle  $\ell_1$  a esta recta. Como  $\Pi_b$  es perpendicular a la cara  $ca$ , en particular  $BE$  es perpendicular a  $AC$  ya que  $E$  se encuentra en la intersección  $\Pi_b$  y  $ca$ , y  $E$  está sobre el segmento  $AC$ . De manera similar, notemos que  $C, H$  y  $F$  pertenecen a la intersección de  $\Pi_c$  y  $\Pi$ , llamémosle  $\ell_2$  a esta recta. Tenemos que  $CF$  es perpendicular a  $AB$  ya que  $\Pi_c$  es perpendicular a la cara  $ab$ , y  $F$  se encuentra en la intersección de  $\Pi_c$  y  $ab$ , y  $F$  está sobre el segmento  $AB$ . Sea  $D$  el pie de la altura por el vértice  $A$  del triángulo  $\triangle ABC$ , como  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son alturas del triángulo  $\triangle ABC$  y ambas se intersecan en  $H$ , es decir  $H$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle ABC$ , entonces  $AD$  pasa por  $H$ , así el plano  $\Pi_a$  que pasa por  $A, H, D$  y  $S$  es perpendicular a la cara  $bc$ , por lo cual  $\Pi_a$  es plano altura del triedro  $S - abc$ . Por lo tanto, los planos altura  $\Pi_b, \Pi_c$  y  $\Pi_a$  son coaxiales y su eje es  $h$ . ■

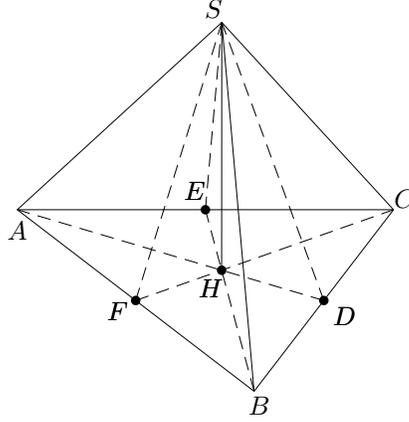


Figura 4.2: Ángulo triédrico.

Esta parte de nuestro estudio es muy análoga a lo que se tenía en el triángulo, por ello al eje coaxial de los planos altura lo vamos a nombrar de la siguiente manera:

**Definición 4.2.8.** El eje común de los tres planos alturas es llamado *línea ortocéntrica* del ángulo triédrico.

**Corolario 4.2.9.** El triángulo determinado por las intersecciones de las aristas de un triédrico y un plano perpendicular a la línea ortocéntrica tiene como ortocentro a la intersección de esta línea con el plano.

De manera parecida a como fuimos escribiendo las propiedades del ortocentro, en este capítulo estudiamos propiedades de la línea ortocéntrica. Las propiedades son muy similares, en la mayoría de los casos basta con cambiar la palabra *punto* por *recta* o *recta* por *plano*. Por ejemplo, recordemos al triángulo órtico, el cual es formado por los tres pies de altura de un triángulo dado, en los triédricos ya definimos planos alturas, lo cual nos lleva a pensar en la posibilidad de un concepto análogo al del triángulo órtico.

**Definición 4.2.10.** Sea  $S-abc$  un triédrico y  $h$  su línea ortocéntrica, sean  $d, e, f$  las intersecciones de los planos alturas con las caras  $bc, ca, ab$  respectivamente. El triédrico  $S-def$  es llamado *triédrico órtico*.

**Teorema 4.2.11.** El triángulo órtico del triángulo determinado por las intersecciones del triédrico dado con un plano perpendicular a su línea ortocéntrica queda determinado por las intersecciones del plano con el triédrico órtico del triédrico dado.

*Demostración.* Sea  $S-abc$  el triédrico dado,  $h$  su línea ortocéntrica,  $\Pi$  un plano perpendicular a  $h$ ,  $S-def$  el triédrico órtico de  $S-abc$  y  $D, E$  y  $F$  las intersecciones de  $\Pi$  con  $d, e$  y  $f$ , respectivamente. Llamemos  $A, B$  y  $C$  a las intersecciones

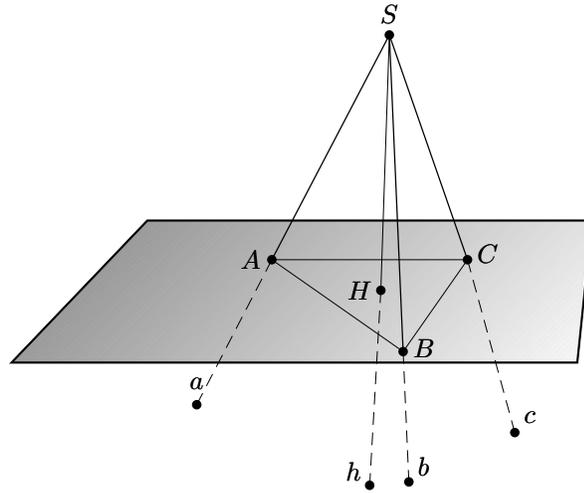


Figura 4.3: Ángulo triedro determinado por un grupo ortocéntrico.

de  $a$ ,  $b$  y  $c$  con  $\Pi$ , respectivamente. Por el Corolario 4.2.6, sabemos que  $H$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle ABC$ , donde  $H$  es la intersección de  $\Pi$  y  $h$ . Así  $D$ ,  $E$  y  $F$  son pies de altura, por lo tanto  $\triangle DEF$  es el triángulo órtico del  $\triangle ABC$ . ■

Ya que hemos definido triedros en el espacio, ahora sí podemos hablar de grupos ortocéntricos.

**Definición 4.2.12.** Dado un conjunto de cuatro líneas, digamos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $h$ , tal que al tomar tres líneas, la cuarta resulta ser la línea ortocéntrica del triedro formado por las líneas tomadas, recibe el nombre de **grupo ortocéntrico de líneas**.

**Observación 4.2.13.** Si  $S-abc$  es un triedro y  $h$  su línea ortocéntrica, entonces  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $h$  forman un grupo ortocéntrico de líneas.

**Proposición 4.2.14.** En un grupo ortocéntrico de líneas, el plano generado por dos de ellas es perpendicular al plano generado por las dos líneas restantes.

*Demostración.* Sea  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $h$  un grupo ortocéntrico de líneas. Consideremos el triedro  $S-abc$  y a los planos  $\Pi$  y  $\Pi_1$  generados por  $a$ ,  $c$  y  $b$ ,  $h$ , respectivamente. Como  $h$  es la línea ortocéntrica del triedro entonces  $\Pi_1$  es plano altura de  $S-abc$ , por lo tanto  $\Pi_1$  es perpendicular a  $\Pi$ , de manera análoga se puede probar para los triedros  $S-bch$ ,  $S-cha$  y  $S-abh$ . ■

**Proposición 4.2.15.** Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $h$  un grupo de líneas ortocéntricas y  $\Pi$  un plano perpendicular a una de las líneas, entonces las intersecciones de  $\Pi$  con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $h$  determinan un grupo ortocéntrico de puntos.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, consideremos el triedro  $S - abc$ , y sean  $A, B, C, H$  las intersecciones de  $\Pi$  con el triedro y  $h$ , entonces por el Corolario 4.2.9 tenemos que  $H$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle ABC$ , por lo tanto  $A, B, C, H$  forman un grupo ortocéntrico de puntos. ■

Recordemos que en el plano los grupos ortocéntricos pueden estar definidos a través de puntos o triángulos. En el espacio ya definimos los grupos ortocéntricos de líneas, a continuación los vamos a definir mediante ángulos triedros.

**Definición 4.2.16.** Las aristas de un ángulo triedro y su línea ortocéntrica determinan cuatro ángulos triedros a los cuales se les nombra **grupo ortocéntrico de ángulos triedros**.

**Teorema 4.2.17.** *Los cuatro triedros de un grupo ortocéntrico tienen el mismo triedro órtico.*

*Demostración.* Sean  $S - abc, S - bch, S - cha$  y  $S - hab$  un grupo ortocéntrico de triedros.

Consideremos a  $S - def$  el triedro órtico de  $S - abc$  y  $h$  su línea ortocéntrica. Fijémonos en el triedro  $S - bch$ , como  $a, b, c$  y  $h$  forman grupo ortocéntrico de líneas, entonces  $a$  es la línea ortocéntrica es  $S - bch$  y los planos altura de las caras  $bc, ch$  y  $hb$  son  $ah, ab, y ac$ , respectivamente. Pero las rectas de intersección son las líneas  $d, e$  y  $f$ . Análogamente se tiene que  $d, e$  y  $f$  son las intersecciones de los triedros  $S - cha$  y  $S - hab$  con sus respectivos planos alturas. Por lo tanto el triedro  $S - def$  es el triedro órtico de cada uno de los cuatro triedros de un grupo ortocéntrico. ■

**Definición 4.2.18.** Al plano que divide a un ángulo diedro en dos ángulos diedros iguales se le llama **plano bisector**.

**Teorema 4.2.19.** *Dado un ángulo triedro  $S - abc, \Pi_a, \Pi_b, \Pi_c$  sus planos altura y  $S - def$  su triedro órtico. Entonces  $\Pi_a, \Pi_b, \Pi_c$  son planos bisectores de los ángulos diedros  $edf, def$  y  $efd$ , respectivamente.*

*Demostración.* Sea  $\Pi$  un plano perpendicular a la línea ortocéntrica del triedro  $S - abc$ , nombremos a  $A, B, C$  y  $H$  las intersecciones de  $\Pi$  con las aristas y la línea ortocéntrica, respectivamente. Por el Corolario 4.2.9, sabemos que  $H$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle ABC$  y sean  $E, F$  y  $D$  las intersecciones de  $\Pi$  con  $e, f$  y  $d$ , respectivamente, entonces su triángulo órtico es el triángulo  $\triangle DEF$ .

Sabemos que  $AD$  es la bisectriz del ángulo  $\angle EDF$  del triángulo  $\triangle DEF$ . Entonces el plano  $\Pi_a$  biseca al ángulo diedro  $edf$ . De manera análoga se prueba para los demás ángulos diedros de  $S - def$ . ■

**Proposición 4.2.20.** *Si un plano corta a cuatro líneas de un grupo ortocéntrico en cuatro puntos que, a su vez, forman un grupo ortocéntrico, dicho plano es perpendicular a una de las cuatro líneas dadas.*

*Demostración.* Sea  $\Pi$  el plano dado,  $a, b, c$  y  $h$  las líneas del grupo ortocéntrico y sean  $A, B, C, H$  los puntos de intersección del plano  $\Pi$  con  $a, b, c$  y  $h$ , respectivamente, donde  $A, B, C, H$  forman un grupo ortocéntrico de puntos.

Como  $a, b, c$  y  $h$  forman un grupo ortocéntrico de líneas entonces, por la Proposición 4.2.14  $bh$  es perpendicular a  $ac$ , y como  $\Pi$  interseca a ambos planos en  $BH$  y  $AC$ , respectivamente, donde  $BH$  y  $AC$  son perpendiculares pues son un grupo ortocéntrico, por el Teorema 4.2.5  $\Pi$  es perpendicular a  $bh$  o a  $ac$ . Supongamos que es perpendicular a  $bh$ , entonces  $\Pi$  es perpendicular a  $b$  o a  $h$ . Si  $\Pi$  es perpendicular a  $ac$ , entonces el plano es perpendicular a  $a$  o a  $c$ . ■

### 4.3. Rectas y puntos notables de un tetraedro

Al igual que en los triángulos, en un tetraedro tenemos rectas y puntos notables, éstos últimos continúan con la misma definición de concurrencia que tenían en el plano euclidiano. Es importante hacer la distinción entre mediana y bimediana en el espacio.

**Definición 4.3.1.** La línea que une dos puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro será llamada *bimediana*.

Los siguientes resultados no lo demostraremos en este texto pero se puede encontrar en [10].

**Teorema 4.3.2.** *Un tetraedro puede ser inscrito en una esfera.*

Al centro de dicha esfera se le conoce por circuncentro.

**Proposición 4.3.3.** *Las rectas perpendiculares por los circuncentros de las caras de un tetraedro al plano que las contienen pasan por el circuncentro de este.*

**Proposición 4.3.4.** *Dadas dos rectas en el espacio no coplanares existe una única recta perpendicular a ambas.*

*Demostración.* Sean  $\ell$  y  $\ell'$  no coplanares. Vamos a considerar un punto  $A$  sobre  $\ell$ , trazamos  $m$  una recta paralela a  $\ell'$  por  $A$ . Consideremos el plano  $\Pi$  determinado por  $\ell$  y  $m$ . Notemos que el plano  $\Pi$  es paralelo a  $\ell'$ . Ahora tracemos un plano perpendicular a  $\Pi$  que contenga a  $\ell'$  y lo nombramos  $\Pi_1$ , sea  $q$  la intersección de  $\Pi$  y  $\Pi_1$  entonces  $q$  es paralela a  $\ell'$ .

Sea  $B$  la intersección de  $\ell$  y  $q$ . Elegimos  $C$  un punto sobre  $\ell'$  y de tal forma que  $CB$  sea perpendicular a  $\Pi$ , entonces  $CB$  es perpendicular a  $\ell$  y  $\ell'$ .

Supongamos que existe una segunda perpendicular a ambas. Llamémosle  $EA$ , entonces  $EA$  es perpendicular a  $m$ , en particular  $EA$  es perpendicular al plano  $\Pi$ . Dibujemos una recta  $EE'$  perpendicular a  $q$ , así  $EE'$  es perpendicular a  $\Pi$ , pero por un punto sólo existe una única perpendicular a un plano, por lo tanto  $CB$  es única. ■

**Definición 4.3.5.** La perpendicular común de dos aristas opuestas de un tetraedro es llamada *bialtura*.

**Definición 4.3.6.** La línea que une un vértice de un tetraedro con el centroide de las cara opuesta es llamada *mediana*.

**Definición 4.3.7.** A cualquier plano que tenga como directriz a la recta perpendicular determinada por dos rectas no coplanares se le llamará *plano director*.

**Observación 4.3.8.** *Cualquier plano director de dos aristas opuestas es perpendicular a su bialtura.*

**Teorema 4.3.9.** *Los puntos medios de dos pares de aristas opuestas de un tetraedro forman un paralelogramo.*

*Demostración.* Sean  $ABCD$  un tetraedro y sean  $C', C'', B'$  y  $B''$  puntos medios de  $AC$ ,  $DB$ ,  $AB$  y  $DC$ , respectivamente. Aplicando el Lema 1.1.1 en los triángulos  $\triangle DCB$  y  $\triangle CBA$  tenemos que  $C''B''$  es paralelo a  $C'B'$ , de manera similar si nos fijamos en los triángulos  $\triangle ACD$  y  $\triangle DBA$  tenemos que  $C'B''$  es paralelo a  $C''B'$ , por lo tanto  $C'B''C''B'$  es un paralelogramo. ■

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [2].

**Teorema 4.3.10.** *Las tres bimedias de un tetraedro son concurrentes.*

Al punto de intersección de las tres bimedias se le llama *centroide* del tetraedro.

**Teorema 4.3.11.** *Sean  $ABCD$  un tetraedro y sean  $C', C'', B'$  y  $B''$  puntos medios de  $AC$ ,  $DB$ ,  $AB$  y  $DC$ , respectivamente. El plano determinado por  $C'C''$  y  $B'B''$  es paralelo al plano determinado por  $CB$  y  $AD$ .*

*Demostración.* Sean  $ABCD$  un tetraedro y sean  $C', C'', B'$  y  $B''$  puntos medios de  $AC$ ,  $DB$ ,  $AB$  y  $DC$ , respectivamente.  $C'C''$  y  $B'B''$  son diagonales del paralelogramo  $C'B''C''B'$ , y como las aristas  $CB$  y  $AD$  son respectivamente paralelas a los lados de este paralelogramo, entonces el plano generado por  $C'C''$  y  $B'B''$  es paralelo a  $CB$  y  $AD$  (ver figura 4.4). ■

**Corolario 4.3.12.** *El plano generado por dos bimedias de un tetraedro es un plano director de las dos aristas restantes de este.*

**Teorema 4.3.13.** *La bialtura de un par de aristas opuestas de un tetraedro es perpendicular a las dos bimedias del par de aristas opuestas restantes*

*Demostración.* Sea  $ABCD$  un tetraedro,  $\ell$  la bialtura de las aristas  $AD$  y  $BC$ ;  $C', C'', B'$  y  $B''$  puntos medios de  $AC$ ,  $DB$ ,  $AB$  y  $DC$ , respectivamente. Como el plano  $C'B''C''$  es plano director de  $AD$  y  $DB$ , entonces  $\ell$  es perpendicular al plano  $C'B''C''$ , pues  $\ell$  es perpendicular a  $AD$  y a  $DB$  al ser bialtura. Así  $\ell$  es perpendicular a cualquier recta contenida en el plano  $C'B''C''$ , en particular  $\ell$  es perpendicular a  $C'C''$  y  $B'B''$ .

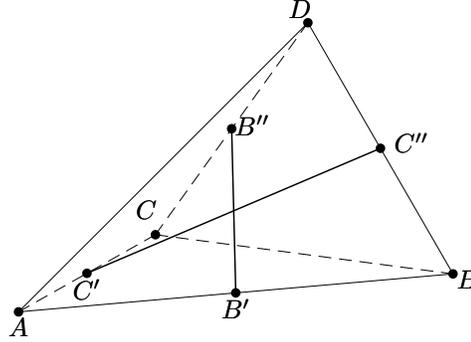


Figura 4.4: Bimedias de un tetraedro.

■

**Corolario 4.3.14.** *La bimedia de un par de aristas opuestas de un tetraedro es perpendicular a las dos bialturas del par restante de aristas opuestas.*

*Demostración.* Sea  $ABCD$  un tetraedro,  $\ell$  la bialtura de las aristas  $AD$  y  $BC$ ,  $\ell_1$  la bialtura de  $AB$  y  $DC$ ;  $C', C'', B', B'', D'$  y  $D''$  puntos medios de  $AC$ ,  $DB$ ,  $AB$ ,  $DC$ ,  $AD$  y  $BC$  respectivamente. Por la proposición anterior  $\ell$  es perpendicular a  $C'C''$  y  $B'B''$ , también  $\ell_1$  es perpendicular a  $C'C''$  y  $D'D''$ , en particular  $C'C''$  es perpendicular a  $\ell$  y  $\ell_1$ , que es lo que se quería demostrar. ■

**Definición 4.3.15.** Dado un tetraedro  $ABCD$ , diremos que dos aristas opuestas  $AC$  y  $DB$  son rectangulares si existe un punto  $P$  en el espacio tal que es posible construir un plano  $DBP$  perpendicular a  $AC$ .

Así como definimos la mediana, también definimos la altura de la siguiente manera:

**Definición 4.3.16.** La *altura de un tetraedro* es la recta perpendicular a una cara y pasa por el vértice opuesto a dicha cara.

Una vez dada esta definición, enunciamos algunas propiedades y características de las alturas de un tetraedro.

**Teorema 4.3.17.** *Sea  $ACBD$  un tetraedro y  $h_C, h_B$  alturas por los vértices  $C$  y  $B$ , respectivamente. Si  $h_C, h_B$  son coplanares, entonces la arista  $CB$  es rectangular a la arista  $DA$ .*

*Demostración.* Sea  $H$  el punto de intersección de  $h_C$  y  $h_B$ . Notemos que el plano  $BCH$  es perpendicular a los planos  $ADC$  y  $ADB$ , en particular, como  $AD$  es la intersección de ambos planos,  $AD$  es perpendicular al plano  $BCH$  en algún punto  $M$ . Así  $AD$  es rectangular a  $BC$  (figura 4.5). ■

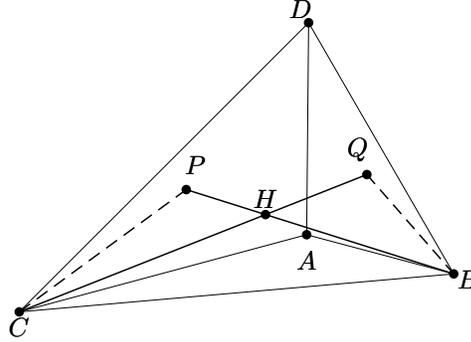


Figura 4.5: Alturas de un tetraedro

A continuación enunciamos el recíproco.

**Teorema 4.3.18.** *Sea  $ACBD$  un tetraedro y  $h_C, h_B$  alturas por los vértices  $C$  y  $B$ , respectivamente. Si la arista  $CB$  es rectangular a la arista opuesta  $DA$ , entonces  $h_C, h_B$  son coplanares.*

*Demostración.* Como  $CB$  y  $DA$  son rectangulares, entonces podemos trazar  $BMC$  un plano perpendicular a  $AD$  en algún punto  $M$ . Nótese que este plano es perpendicular a los planos  $ADB$  y  $ADC$ . Como  $AD$  es la intersección de los planos  $ADB$  y  $ADC$ , entonces  $h_C$  y  $h_B$  están contenidas en el plano  $BCM$ . ■

**Corolario 4.3.19.** *El punto de intersección de dos alturas de un tetraedro yace en una bialtura del tetraedro.*

*Demostración.* Notemos que  $BH$  y  $CH$  son alturas del triángulo  $\triangle BCM$ , por lo cual  $H$  es su ortocentro, así  $HM$  es perpendicular a  $BC$ . Como  $MH$  es también perpendicular a  $AD$  entonces  $MH$  es bialtura de  $BC$  y  $AD$ . ■

Una vez estudiadas las rectas notables de un tetraedro, pasamos a la construcción de nuestro tetraedro ortocéntrico.

#### 4.4. Tetraedro ortocéntrico asociado a un triángulo

En las secciones anteriores mencionamos que los planos alturas de un triedro no se van a intersecar en un solo punto. Incluso puede ocurrir que las bialturas, o alturas, de un tetraedro tampoco se intersequen en un solo punto. Sin embargo es posible dar un modelo de tetraedro que sea similar a un grupo ortocéntrico de triángulos.

**Definición 4.4.1.** *Un tetraedro en el cual cada arista es perpendicular a la arista opuesta es llamado **tetraedro ortocéntrico**.*

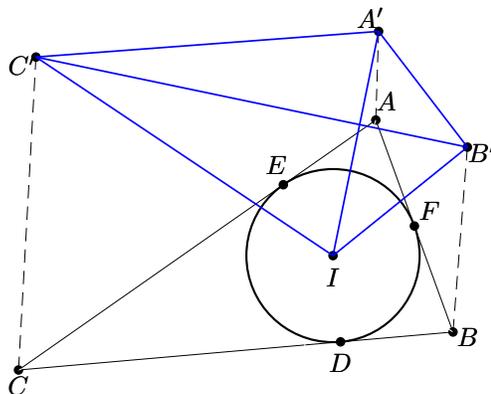


Figura 4.6: Tetraedro ortocéntrico.

Dado un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$ , al cual llamaremos triángulo base, construimos un tetraedro de la siguiente manera, esta construcción se puede consultar en [8].

**Construcción:**

Consideremos el incírculo del triángulo  $\triangle ABC$  con centro en  $I$  y radio  $r$ . Sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  los puntos tangentes en  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$ , respectivamente. Trazamos rectas perpendiculares  $a$ ,  $b$  y  $c$  al plano  $ABC$  que pasen por  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Elegimos puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  sobre  $a$ ,  $b$  y  $c$ , de forma que estén en un mismo semiespacio y tales que  $AA' = AF$ ,  $BB' = BD$ ,  $CC' = CE$ . Así, tenemos al tetraedro cuyos vértices son los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $I$  (figura 4.6).

Vamos a probar que la construcción anterior genera un tetraedro ortocéntrico. Para ello demostraremos un resultado que será de utilidad. Cabe mencionar que esta construcción solo funciona si el triángulo es acutángulo, ya que de lo contrario el ortocentro puede estar fuera o sobre el triángulo y esto nos causaría problemas a la hora de trazar rectas.

**Lema 4.4.2.** *Cualquier tetraedro está inscrito en un paralelepípedo de tal manera que las aristas del tetraedro son diagonales de las caras del paralelepípedo.*

*Demostración.* Sea  $ABCD$  un tetraedro y sea  $P$  el punto medio de la arista  $BC$ . Sea  $E$  un punto que vive en el mismo semiespacio que  $D$  con respecto al plano  $ABC$  tal que  $EP$  es paralelo a  $AD$ , y sea  $H$  un punto sobre  $EP$  tal que  $EH = DA$  y  $EP = PH$ . Unimos  $E$  con  $B$ ,  $D$ ,  $C$ ; tracemos  $\ell_1$  paralela a  $EC$  que pase por  $B$  y  $\ell_2$  paralela a  $BE$  que pase por  $C$  (figura 4.7). Observemos que  $EC$ ,  $BE$ ,  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son coplanares, y además forman un paralelogramo, lo que quiere decir que sus diagonales se cortan en el punto medio, entonces  $\ell_1$  y  $\ell_2$  pasan por  $H$ .

Ahora tracemos  $\ell_3$  y  $\ell_4$  paralelas a  $DE$  que pasen por  $B$  y  $C$ , respectiva-

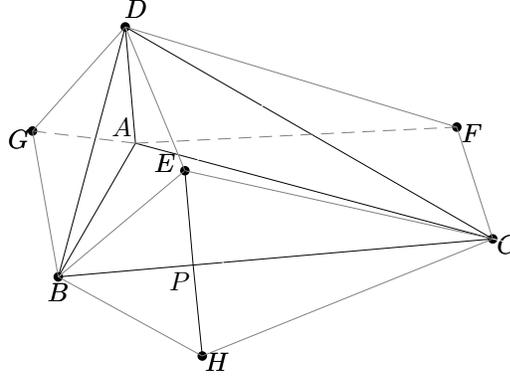


Figura 4.7: Tetraedro inscrito en paralelepípedo.

mente,  $\ell_5$  paralela a  $BE$  por  $D$  y  $\ell_6$  paralela a  $CE$  por  $D$ . Denotemos por  $F$  al punto de intersección de  $\ell_4$  con  $\ell_6$  y por  $G$  al punto de intersección de  $\ell_3$  con  $\ell_6$ .

Finalmente, unimos  $G$ ,  $H$  y  $F$  con  $A$ . Observemos que las caras  $GBED$ ,  $BHCE$  y  $DECF$  son paralelogramos tales que  $GD$ ,  $BE$ ,  $HC$  son paralelas entre sí de la misma magnitud, y  $BH$ ,  $EC$ ,  $DF$  son paralelas entre sí de la misma magnitud. Entonces, los triángulos  $\triangle BEH$  y  $\triangle GDA$  son congruentes, lo cual implica, que  $GA$  es paralela a  $BH$ . Análogamente,  $FA$  es paralela a  $CH$ . Así,  $GDF A$  es un paralelogramo, lo cual implica que  $GBHA$  y  $AHCF$  también son paralelogramos. Por lo tanto, el tetraedro  $ABCD$  está inscrito en un paralelepípedo cuyas diagonales de sus caras coinciden con las aristas de  $ABCD$ . ■

**Lema 4.4.3.** *Si  $ABCD$  es un tetraedro ortocéntrico, entonces las caras del paralelepípedo que lo contiene (como en el lema anterior) son rombos.*

*Demostración.* Consideramos la cara  $BHCE$ . Como  $EH$  es paralela a la arista  $DA$ , entonces  $EH$  es perpendicular a  $BC$ . De esta manera, los triángulos  $\triangle CEP$  y  $\triangle CHP$  son congruentes, entonces  $BHEC$  es un rombo. Análogamente, los triángulos  $\triangle FEC$  y  $\triangle ABH$  son congruentes, entonces  $AB$  es paralela a  $FE$ , lo cual implica que  $FE$  es perpendicular a  $DC$ , por lo que  $FC = FE$ . Así, concluimos que las caras del paralelepípedo son rombos. ■

En demostración del siguiente teorema recurriremos a la geometría analítica, ya que esta nos facilita las cuenta y nos ayuda a ver con más claridad el resultado. Estaremos considerando al tetraedro en un sistema de coordenadas esféricas donde el origen es  $A$ ,  $\theta$  se mide con respecto al semirayo  $AA'$  y  $\phi$  con respecto al semirayo  $AB$  en el plano  $ABC$ .

**Teorema 4.4.4.** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo,  $I$  su incentro. Si  $A'B'C'I$  es el tetraedro construido como al principio de esta sección, entonces  $A'B'C'I$  es ortocéntrico.

*Demostración.* Vamos a ver que efectivamente nuestra construcción nos da un tetraedro ortocéntrico, para ello basta que ver que pares de aristas opuestas son ortogonales entre sí. Para facilitar la prueba usaremos la siguiente notación:  $x = AF$ ,  $y = BF$  y  $z = CE$  donde  $F$  y  $E$  son los puntos tangentes del incírculo con los lados del triángulo  $\triangle ABC$  (figura 4.6).

Tenemos que  $x + y = c$ ;  $y + z = a$ ;  $z + x = b$  donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las longitudes de los lados opuestos a los vértices con la misma letra. Las coordenadas de los puntos cuando  $AA'$  coincide con el eje  $z$  positivo y  $AB$  con el eje  $x$  positivo son:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0) & B &= (c, 0, 0) & C &= (b \cos(A), b \sin(A), 0) \\ A' &= (0, 0, x) & B' &= (c, 0, y) & C' &= (b \cos(A), b \sin(A), z) \\ I &= (x, x \tan(\frac{A}{2}), 0) & E &= (x \cos(A), x \sin(A), 0) \end{aligned}$$

Reescribimos a  $A'I$  de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{A'I} = x \vec{i} + x \tan(\frac{A}{2}) \vec{j} - x \vec{k} \implies \frac{1}{x} \overrightarrow{A'I} = \vec{i} + \tan(\frac{A}{2}) \vec{j} - \vec{k},$$

y así también reescribir a  $B'C'$ :

$$\overrightarrow{B'C'} = (b \cos(A) - c) \vec{i} + b \sin(A) \vec{j} + (z - y) \vec{k}$$

Haciendo su producto vectorial llegamos a que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \overrightarrow{A'I} \cdot \overrightarrow{B'C'} &= b \cos(A) - c + b \sin(A) \tan(\frac{A}{2}) + y - z \\ &= b(2 \cos^2(\frac{A}{2}) - 1) - c + b(2 \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A}{2}) \tan(\frac{A}{2})) + y - z \\ &= b(2 \cos^2(\frac{A}{2}) - 1 + 2 \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A}{2}) \tan(\frac{A}{2})) - c + y - z \\ &= b(2(\cos^2(\frac{A}{2}) - \frac{1}{2} + \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A}{2}) \tan(\frac{A}{2}))) - c + y - z \\ &= b(2(\frac{1}{2}(\cos(A) + 1) - \frac{1}{2} + \sin^2(\frac{A}{2}))) - c + y - z \\ &= b(2(\frac{1}{2}(\cos(A) + 1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \cos A))) - c + y - z \\ &= b - c + y - z \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pero al ser su producto vectorial igual a cero podemos concluir que los vectores son ortogonales. De manera análoga se prueba para cualquier otro par de aristas opuestas, por lo tanto  $A'B'C'I$  es un tetraedro ortocéntrico. ■

**Teorema 4.4.5.** *Las cuatro alturas de un tetraedro ortocéntrico son concurrentes.*

*Demostración.* Sea  $ABCD$  nuestro tetraedro, vamos a inscribirlo en un paralelepípedo cuyas caras sean rombos. Los vértices restantes de este paralelepípedo forman otro tetraedro al cual llamaremos  $EFGH$  (figura 4.8), así las caras correspondientes de éstos serán paralelas (por ejemplo  $ABC$  es paralela a  $EFG$ ).

Fijémonos en la altura desde  $A$ , y la denotamos por  $a_h$ . Nótese que  $a_h$  es perpendicular a  $BCD$  y como  $BCD$  es paralelo a  $FGH$ , entonces  $a_h$  es perpendicular a  $FGH$ . Las aristas  $AF$ ,  $AG$ ,  $AH$  son iguales en longitud por ser aristas del romboedro, entonces  $a_h$  pasa a través del circuncentro del triángulo  $\triangle FGH$ , y por la Proposición 4.3.3 también pasa por el circuncentro del tetraedro  $EFGH$ . Análogamente se hace para las alturas restantes, por lo tanto, las alturas son concurrentes en el circuncentro del tetraedro  $EFGH$ . ■

**Definición 4.4.6.** El *ortocentro* es la intersección de las alturas de un tetraedro.

**Proposición 4.4.7.** *Un tetraedro es ortocéntrico si y sólo su paralelepípedo circunscrito es un romboedro.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) La prueba de esta proposición sale inmediatamente del Lema 4.4.3.

$\Leftarrow$ ) Las diagonales de las caras de un romboedro son perpendiculares entre sí, y por el Lema 4.4.2 las aristas del tetraedro coinciden con sus diagonales, por lo tanto las aristas son perpendiculares entre sí y el tetraedro es ortocéntrico. ■

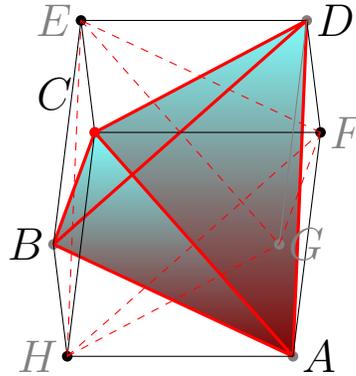


Figura 4.8: Paralelepípedo circunscrito.

**Teorema 4.4.8.** *Las alturas de un tetraedro ortocéntrico pasan a través de los ortocentros de sus respectivas caras del tetraedro.*

*Demostración.* Vamos a fijarnos en los ángulos triedros formados por uno de los vértices del tetraedro y las aristas que concurran en él. La altura es la línea ortocéntrica de dicho triedro y por el Corolario 4.2.9 corta a un plano perpendicular a ésta en el ortocentro del triángulo determinado por las intersecciones del plano con las aristas. De manera análoga se hace para los vértices restantes, entonces las alturas del tetraedro van a pasar por los ortocentros de las caras opuestas. ■

**Teorema 4.4.9.** *En un tetraedro ortocéntrico las bialturas pasan por el ortocentro de éste y determinan en cada cara sus respectivos triángulos órticos.*

*Demostración.* Por el Corolario 4.3.20 la intersección de dos alturas se encuentra en la bialtura de la arista que une los vértices de las alturas y su arista opuesta. Así, el ortocentro  $H'$  se encuentra en las bialturas. Veamos que  $HL$  es altura de la cara  $A'B'C'$ , donde  $H$  es el ortocentro y  $L$  es la intersección de la bialtura correspondiente con  $A'B'$ , por lo tanto  $L$  es pie de altura, análogamente se prueba para los demás. ■

**Proposición 4.4.10.** *Un tetraedro es ortocéntrico si y sólo si la suma de los cuadrados de sus aristas opuestas es la misma para todos los pares.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $ABCD$  es ortocéntrico, entonces está contenido en un romboedro con las aristas del tetraedro como diagonales de las caras del romboedro.

Teniendo en cuenta la notación usada en el Teorema 4.4.4, tenemos que  $AB$  es perpendicular a  $GH$  (en la cara  $GBHA$ ), cuyo punto de intersección es  $P$ . Entonces,

$$\begin{aligned}(GH)^2 + (AB)^2 &= (2GP)^2 + (2AP)^2 \\ &= 4(GP)^2 + 4(AP)^2 \\ &= 4(AG^2 - AP^2) + 4(AP)^2 \\ &= 4(AG)^2\end{aligned}$$

Como  $GH = DC$  entonces,

$$(DC)^2 + (AB)^2 = 4(AG)^2$$

Al tratarse de un romboedro, todas sus aristas son congruentes, digamos  $k$ , así,

$$(DC)^2 + (AB)^2 = 4k^2$$

Esto se puede hacer para cada par de aristas opuestas.

$\Leftarrow$ ) Sea  $ABCD$  un tetraedro tal que la suma de los cuadrados de aristas opuestas es igual a una constante  $k$ .

Construyamos el paralelepípedo que lo contiene como en el Lema 4.4.2, cada cara es un paralelogramo con una arista como diagonal y la otra diagonal es

paralela y de igual magnitud que la arista opuesta. Vamos a fijarnos en las caras  $GBHA$  y  $AHCF$ . Por la ley del paralelogramo tenemos que

$$2(GA^2 + AH^2) = BA^2 * GH^2 = AC^2 * FH^2 = 2(FA^2 + AH^2)$$

Entonces  $GA = FA$ . Si ahora nos fijamos en la cara  $DGAF$  entonces

$$2(GA^2 + AH^2) = BA^2 * GH^2 = DA^2 * GF^2 = 2(GA^2 + FA^2)$$

Así  $AH = FA$ . Por lo tanto el paralelepípedo es un romboedro y por la Proposición 4.4.7 concluimos que  $ABCD$  es ortocéntrico. ■

**Proposición 4.4.11.** *En un tetraedro ortocéntrico las bimedias tienen la misma longitud.*

*Demostración.* Para ver que las bimedias tienen la misma longitud basta con notar que como el tetraedro es ortocéntrico entonces está inscrito en un romboedro, por lo cual sus aristas son congruentes, en particular si nos fijamos en los puntos medios. ■

Para el siguiente teorema necesitamos la definición que sigue:

**Definición 4.4.12.** Dado un triángulo y su incírculo, sean  $X, Y$  y  $Z$  los puntos de tangencia. Las cevianas  $AX, BY$  y  $CZ$  son concurrentes y a este punto se le llama *punto de Gergonne*.

**Teorema 4.4.13.** *Sea  $\triangle ABC$  un triángulo y  $A'B'C'I$  su tetraedro ortocéntrico asociado. Si  $H$  es el ortocentro de  $A'B'C'I$ , entonces la proyección ortogonal de  $H$  al  $\triangle ABC$  es el punto de Gergonne de dicho triángulo.*

*Demostración.* Utilizando la notación del Teorema 4.4.4 veamos que las rectas  $A'D, B'E$  y  $C'F$  son alturas del tetraedro  $A'B'C'I$  ya que  $\vec{B'E} = (x \cos(A) - c) \vec{i} + x \sin(A) \vec{j} - y \vec{k}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \vec{A'I} \cdot \vec{B'E} &= (x \cos(A) - c) + x \sin(A) \tan\left(\frac{A}{2}\right) + y \\ &= x(2 \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1) - c + 2x \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) + y \end{aligned}$$

Entonces  $x - c + y = 0$ . Por lo tanto  $B'E$  y  $A'I$  son perpendiculares (figura 4.9). Análogamente tenemos que  $B'E$  es perpendicular a  $C'I$ , así  $B'E$  es perpendicular al plano  $A'C'I$  y es altura del tetraedro. Como el tetraedro es ortocéntrico, las alturas se intersecan en un punto  $H$ , el cual es el ortocentro del tetraedro. Los planos  $AA'D, BB'E$ , y  $CC'F$  forman un haz de planos, tal que su eje coaxial pasa justamente por la intersección de las cevianas  $AD, BE$  y  $CF$ . Por lo tanto esta intersección  $K$  resulta ser el punto de Gergonne del triángulo  $\triangle ABC$  ■

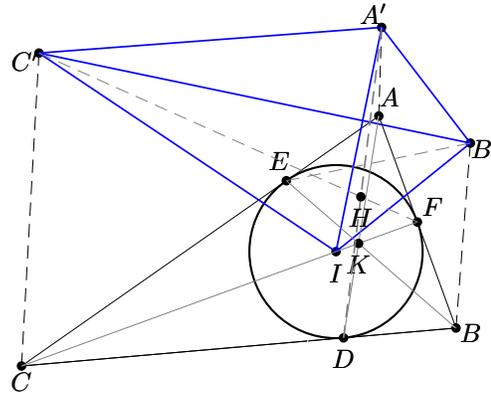


Figura 4.9: Ortocentro proyectado de un tetraedro.

Como ya se mencionó, nos gustaría que al estar en el espacio muchas de las propiedades que teníamos para el grupo de puntos ortocéntricos se sigan conservando en el espacio. Por ejemplo, pensemos en la circunferencia de los nueve puntos, en el espacio euclidiano tenemos un análogo que es la esfera de los 12 puntos, el siguiente teorema nos garantiza la existencia de esta esfera.

**Teorema 4.4.14.** *Cualesquiera tres vértices de un tetraedro ortocéntrico y los ortocentros de las respectivas caras opuestas son puntos que se encuentran en una misma esfera y más aún, las cuatro esferas obtenidas son congruentes.*

*Demostración.* Sea  $ABCD$  un tetraedro ortocéntrico, nombremos  $A_h$  al pie de altura desde  $A$ . Como  $ABCD$  es ortocéntrico, por el Teorema 4.4.8  $A_h$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle BCD$ . Vamos a fijarnos en el romboedro circunscrito de  $ABCD$  y consideremos a  $EFGH$  el tetraedro que se forma con los vértices restantes del romboedro. Notemos que las alturas correspondientes entre los dos tetraedros son iguales en longitud tenemos que estas son bisecadas por las correspondientes caras del tetraedro opuesto. Como  $A'$  es equidistante a los pies de alturas de los vértices restantes de  $ABCD$  y además  $A'B = A'C = A'D$  tenemos que los pares de puntos  $B, B_h; C, C_h; D, D_h$  se encuentran sobre una misma esfera cuyo centro es  $A'$  y radio la longitud de una arista del romboedro. De manera análoga se da a notar que tenemos esferas con centros en  $B', C'$  y  $D'$  y con los mismo radios, con lo cual queda demostrador el teorema. ■

**Definición 4.4.15.** A la intersección de las medianas de un tetraedro se le conoce por **centroide**.

**Teorema 4.4.16.** *En un tetraedro ortocéntrico los puntos medios de las aristas y los pies de las bialturas están en una misma esfera cuyo centro coincide con el centroide del tetraedro.*

*Demostración.* Recordemos que las tres bimedias de un tetraedro ortocéntrico son iguales en longitud, notemos que  $G$ , el centroide del tetraedro es el centro de una esfera que pasa por los extremos de dichas bimedias, es decir pasa por los puntos medios de las aristas, más aún esta esfera es cortada por las caras en circunferencias de nueve puntos respectivamente, así tenemos que los pies de altura de cada cara del tetraedro, ya que recordemos que estos son los ortocentros de las caras correspondientes, están en la esfera también, pero estos puntos son además también los extremos de las bialturas del tetraedro, por lo tanto los puntos medios de las aristas y los pies de las bialtura están sobre una misma esfera. ■

# Conclusiones

A lo largo del texto vimos diferentes resultados relacionados a los grupos ortocéntricos de puntos. A continuación haré mención de los que, a mi parecer, son los más sobresalientes.

El primero de ellos es como a partir de un grupo ortocéntrico de puntos dado podemos generar nuevos grupos ortocéntricos simplemente fijándonos en puntos notables del triángulo. Así también en la conservación de diversas propiedades y la obtención de nuevas.

El segundo sería que ahora somos capaces de generar un grupo ortocéntrico a partir de cualesquiera cuatro puntos que nos den, para ello basta hacer la inversión adecuada.

Y por último, el saber que en el espacio euclidiano de tres dimensiones podemos generalizar este concepto no solo en tetraedros sino también en triedros, lo cual deja la puerta abierta al lector para preguntarse si es posible pensar en grupos ortocéntricos en otras geometrías o en dimensiones más grandes.



# Índice alfabético

- Ángulo
  - central, 19
  - inscrita, 19
  - triedro, 71
- Altura, 16, 79
- Baricentro, 13
- Bialtura, 78
- Bimediana, 77
- Bisectriz, 13
- Centro coaxial, 37
- Centro de inversión, 37
- Centroide, 13, 87
- Circuncírculo, 16
- Circuncentro, 16
- Circunferencia
  - de antisimilitud, 43
  - de los nueve puntos, 21, 54
  - de similitud, 45
  - polar, 47
- Circunferencias ortogonales, 20
- Cuadrángulo completo, 25
- Cuadrilátero completo, 25
- Eje coaxial, 37
- Excírculos, 14
- Excentro, 14
- Gravicentro, 13
- Grupo
  - ortocéntrico
    - de puntos, 49
    - de triángulos, 49
  - ortocéntrico de ángulos triedros, 76
  - ortocéntrico de líneas, 75
- Haz de planos, 73
- Homotecia, 35, 65
- Incírculo, 14
- Incentro, 14
- Inversión, 65
- Línea
  - de Euler, 22, 62
  - ortocéntrica, 74
  - polar, 46
- Mediana, 11, 78
- Mediatriz, 14
- Ortocentro, 18, 84
- Plano
  - altura, 72
  - bisector., 76
  - director, 78
- Polo, 46
- Potencia de un punto, 36
- Punto de Gergonne, 86
- Puntos conjugados, 47
- Radio de inversión, 37
- Rectas conjugadas, 47
- Reflexión, 34
- Romboedro, 71
- Rotación, 34, 64
- Teorema de Feuerbach, 24

Tetraedro, 71  
Tetraedro ortocéntrico, 81  
Traslación, 33  
Triángulo  
    órtico, 30, 54

    autopolar, 47, 67  
    medial, 30  
    pedal, 57  
Triángulo diagonal, 25  
Triedo órtico, 74

# Bibliografía

- [1] Altshiller-Court, N. *College Geometry an Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Dover Publications, Inc. 1952.
- [2] Altshiller-Court, N. *Modern Pure Solid Geometry*. Dover Publications, Inc. 1935.
- [3] Oechslin, W. y Byrne O., *The First Six Books of The Elements of Euclid in which colored diagrams and symbols are used instead of letter for the greater ease of learners*. Taschen. 2017
- [4] Bulajich Manfrino, R. y Gómez Ortega, J. A. *Geometría*. Olimpiada Mexicana de Matemáticas. 2017.
- [5] Cárdenas Rubio, S. *Notas de Geometría*. Prensa de Ciencias. 2013.
- [6] Johnson, R. A. *Advanced Euclidian Geometry*. Dover Publications, Inc. 1960.
- [7] Pavillet, A. *The orthocentric tetrahedron of a triangle, new properties and inverse problem*. In Proceedings of the 15th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG 2012), 147-156. 2012.
- [8] Pavillet, A. *The Orthocentric tetrahedon of a triangle*. Forum Geometricorum. 2012.
- [9] Shively, L. S. *Introducción a la Geometría Moderna*. (trad. A. Palacios Priego). Compañía Editorial Continental, S.A. 1961
- [10] Wentworth, George y Smith, David Eugene. *Solid Geometry*. Wentworth's. 1911