



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE QUÍMICA

TESIS

**MODELO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE EXTRUSIÓN
MONOHUSILLO PARA HARINA DE ARROZ. UN ENFOQUE DIRIGIDO
HACIA EL FORTALECIMIENTO DE LAS ASIGNATURAS
EXPERIMENTALES DE LA CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA.**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

PRESENTA

OSWALDO ARIEL HERNANDEZ MORALES



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

PRESIDENTE: **Profesor: RIVERA TOLEDO MARTIN**
VOCAL: **Profesor: VALLE ARIZMENDI LETICIA**
SECRETARIO: **Profesor: HERNANDEZ MELENDEZ OSCAR**
1er. SUPLENTE: **Profesor: MANRIQUEZ TOLSA URSULA**
2° SUPLENTE: **Profesor: MEDINA TORRES LUIS**

SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:

**LABORATORIO DE INGENIERÍA QUÍMICA, FACULTAD DE QUÍMICA, CIUDAD
UNIVERSITARIA, UNAM.**

ASESOR DEL TEMA:

MTRO. HERNANDEZ MELENDEZ OSCAR

SUSTENTANTE (S):

OSWALDO ARIEL HERNANDEZ MORALES

AGRADECIMIENTOS.

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Ingeniería Química, de la Facultad de Química, con el apoyo económico del proyecto PAPIME PE203419: "El proceso de extrusión como una herramienta didáctica para diseñar alimentos novedosos para humanos y mascotas".

Índice de Contenido

Índice de figuras.....	6
Índice de tablas.....	7
1. Justificación.....	8
2. Objetivos.....	9
2.1 Objetivo general.....	9
2.2 Objetivos particulares.....	9
3. Antecedentes.....	9
3.1 Proceso de extrusión.....	9
3.2 Componentes del extrusor.....	10
3.2.1. Tornillo de extrusión.....	11
3.2.2. Camisa cilíndrica o barril.....	13
3.2.3. Tolva.....	13
3.2.4. Garganta de alimentación.....	13
3.2.5. Plato rompedor y filtros.....	13
3.2.6. Cabezal y boquilla.....	14
3.3 Extrusión de alimentos.....	14
3.3.1. Materia prima para extruir.....	15
3.3.2. Comportamiento reológico de la harina de arroz.....	16
4. Desarrollo de modelado matemático.....	17
4.1 Balance de momentum en el extrusor.....	19
4.2 Caso newtoniano.....	21
4.3 Estimación del punto eficiente de operación.....	25
4.3.1. Curva característica del husillo.....	25
4.3.2. Curva característica de la boquilla.....	27

4.3.3.	Punto eficiente de operación del extrusor.....	28
4.3.4.	Condiciones límite.	28
4.4	Caso no newtoniano.....	29
4.4.1.	Adimensionalización de ecuaciones de balance.....	29
4.4.2.	Limitaciones del modelamiento con la ley de la potencia:	30
4.5	Balance de energía en el extrusor.....	32
4.6	Potencia total.	33
4.7	Cálculo de la Disipación Viscosa.	34
5.	Simulación del modelo.....	35
5.1	Parámetros geométricos del husillo y de la boquilla.	35
5.2	Propiedades físicas de la materia prima.	36
5.3	Construcción del código.....	39
5.3.1.	Caso newtoniano	39
5.3.2.	Caso no newtoniano.....	41
6.	Resultados de la simulación.....	42
7.	Análisis de sensibilidad paramétrica	48
7.1	Variación de parámetros.	52
8.	Conclusiones.....	56
9.	Proyecciones a futuro.....	56
10.	Bibliografía.....	57
	APENDICE I.....	60
	APENDICE II.....	70

Índice de figuras.

Figura 1. Esquema de un extrusor de tornillo simple. (Beltrán & Marcilla)	11
<i>Figura 2. Zonas del proceso de extrusión en el tornillo</i> (Beltrán & Marcilla).....	12
Figura 3. Parámetros geométricos del tornillo. (Beltrán & Marcilla).....	12
Figura 4. Comportamiento reológico de la harina de arroz. (Reyes, 2009)	17
Figura 5. Sistema de coordenadas en el canal del extrusor (Reproducción de la literatura). (Middleman, 1977)	18
Figura 6. Perfiles de velocidades reproducidos de la literatura.	19
Figura 7. Campo de vectores del flujo transversal (Kaufman, 2003).....	23
Figura 8. Canal del husillo desenrollado reproducido de la literatura.	26
Figura 9. Posibles casos para el modelamiento utilizando la ley de la potencia (caso no newtoniano)	31
Figura 10. Fotografía del husillo.	35
Figura 11. Perfil de velocidades adimensional dirección axial (a. newtoniano, b. no newtoniano) con N = 300 rpm.	43
Figura 12. Perfil de velocidades adimensional a. Dirección axial b. Dirección transversal con N = 500 rpm.	43
Figura 13. Perfil de velocidades adimensional dirección transversal (a. 300 rpm, b. 500 rpm.).....	45
Figura 14. Perfil de velocidades adimensional en la boquilla (a. 300 rpm, b. 500 rpm.).....	46
Figura 15. Punto eficiente de operación del extrusor (a. newtoniano, b. no newtoniano) con N = 300 rpm	47
Figura 16. a. Punto eficiente de operación del extrusor (a. newtoniano, b. no newtoniano) con N = 500 rpm	47
Figura 17. Resultados del análisis de sensibilidad paramétrica (a. Perfiles de Velocidad eficientes, b. Efecto de la viscosidad sobre los perfiles de velocidad, c. Efecto de la caída de presión sobre los perfiles de velocidad, d. Efecto de la frecuencia de rotación sobre los perfiles de velocidad).....	50
Figura 18. Resultados del análisis de sensibilidad paramétrica (a. Efecto de la ángulo del husillo sobre los perfiles de velocidad, b. Efecto de la profundidad del	

álabe sobre los perfiles de velocidad, c. Efecto de la longitud de cuerda sobre los perfiles de velocidad, d. Efecto del diámetro del husillo sobre los perfiles de velocidad).....	52
Figura 19. Perfil de velocidades adimensional en la dirección axial variando la caída de presión y la profundidad del álabe.....	53
Figura 20. Influencia de la variación de la caída de presión sobre el flujo y la potencia requerida.....	54
Figura 21. Influencia de la variación de la profundidad del álabe sobre el flujo y la potencia requerida.....	54
Figura 22. Influencia de la variación del radio de la boquilla sobre el punto óptimo de operación (a. N= 300 rpm, b. N= 500 rpm).....	55

Índice de tablas.

Tabla 1. Composición de las principales materias primas en extrusión de alimentos.....	16
Tabla 2. Parámetros geométricos del husillo.....	35
Tabla 3. Parámetros geométricos de la boquilla	36
Tabla 4. Composición de harina de arroz de la variante Agonibora.....	36
Tabla 5. Parámetros experimentales del modelo de la ley de la potencia.....	37
Tabla 6. Ecuaciones de propiedades térmicas para componentes alimenticios ($-40^{\circ}\text{C} \leq t \leq 150^{\circ}\text{C}$).....	37
Tabla 7. Propiedades de la harina de arroz.....	38
Tabla 8. Variables de entrada de proceso.....	38
Tabla 9. Variables de salida de proceso N= 300 rpm.....	42
Tabla 10. Variables de salida de proceso N= 500 rpm.....	44
Tabla 11. Valores del máximo caso no newtoniano.....	44

1. Justificación.

La extrusión se ha convertido en una técnica de procesamiento importante en una variedad creciente de procesos de alimentos. La tecnología de cocción por extrusión se usa en el procesamiento de granos básicos y proteínas, en los sectores de producción de alimentos para consumo humano, para mascotas y otros sectores.

El uso de la cocción por extrusión otorga al proceso ciertas ventajas como la versatilidad para producir diversos productos con un solo sistema de extrusión, alta capacidad de producción respecto a otros sistemas de cocción/formación, diversas formas y alta calidad en los productos finales, bajos costos en cuanto a los requisitos de mano de obra y espacio, no producen efluentes ni materiales peligrosos y debido a que se pueden modificar proteínas vegetales, almidones y otros materiales alimenticios se pueden generar nuevos y novedosos productos (Harper, 2009).

En este contexto, el proceso de extrusión de alimentos permitirá, sin duda, extender las fronteras de la ingeniería química enfocada a la química de alimentos para crear productos de alto valor comercial (Barranco, 2015).

Para poder obtener los beneficios que otorga la técnica de extrusión para el procesamiento de alimentos, es menester conocer y estudiar los procesos físicos y químicos que están involucrados en el proceso. Mediante el planteamiento y resolución de los balances de materia, energía y movimiento es posible hallar un modelo matemático que describa de forma aproximada comportamiento real del extrusor.

Se pretende que dicho modelo pueda ser utilizado en un extrusor de tipo monohusillo marca Meelko, adquirido por el Laboratorio de Ingeniería Química de la Facultad de Química, y realizar un estudio de los parámetros operativos del mismo, junto con un análisis de sensibilidad paramétrica de las variables de operación, con fin de hallar perfiles de comportamiento de los parámetros operativos del sistema y con ello poder predecir aproximaciones al comportamiento real.

2. Objetivos.

2.1 Objetivo general.

Desarrollar un modelo matemático que permita estudiar los parámetros operativos en la zona de dosificación de un extrusor de monohusillo, donde se simule la extrusión de una harina de arroz y sea de utilidad para generar alimentos expandidos novedosos para consumo humano.

2.2 Objetivos particulares.

- Investigar y analizar el comportamiento reológico de la harina de arroz.
- Encontrar la solución de los balances de momentum y energía en el extrusor para el caso newtoniano y no newtoniano.
- Realizar un análisis de sensibilidad paramétrica de las variables operativas del proceso de extrusión.

3. Antecedentes.

3.1 Proceso de extrusión.

El proceso de extrusión se ha vuelto una técnica popular para el procesamiento de diversos materiales. Hoy en día con el desarrollo de versiones mejoradas y modificadas de las maquinas extrusoras han permitido el desarrollo de una amplia variedad de productos que incluyen: almidones precocinados y modificados, cereales, bocadillos, sustitutos del empanizado, alimentos para mascotas suaves y húmedos y harina de soya entera (Harper, 2009).

El extrusor tiene como objetivo producir una masa homogénea fundida del material alimentado donde se especifica una velocidad de flujo, una presión y temperatura adecuada para un proceso en particular o para la siguiente operación en una línea de proceso (Middleman, 1977).

En el caso del procesamiento de alimentos por la técnica de extrusión se encuentran diversas modalidades: en frío, caliente y expansión inducida por vapor.

- **Extrusión en frío.**

Usada para realizar mezclas suaves y moldear pasta, sin utilizar calor directo ni procesos de cocción dentro de la extrusora. En lo relativo al procesamiento de alimentos, se usa principalmente para la producción de pasta y masa. Estos productos pueden ser procesados de manera consecutiva: secados, cocidos, envasados al vacío, congelados.

- **Extrusión en caliente.**

Consiste en la transformación termomecánica de materias primas en lapsos de tiempo acotados, a altas temperaturas, y aplicando presión. En lo relativo al procesamiento de alimentos, se usa principalmente para la cocción de materias primas a base de biopolímeros, y para producir alimentos texturizados y productos alimentarios, tales como: cereales para el desayuno listos para ser saboreados, aperitivos (salados y dulces), alimento para mascotas, aperitivos, pellets.

- **Expansión inducida por vapor.**

Implica que la expansión se da mediante fusión cuando el producto sale del molde mediante la evaporización del agua, lo que da como resultado productos altamente expandidos. El procesamiento continuo determina los atributos de textura de los productos extrudidos, tales como la crocantez, el tostado y la dureza. Este proceso es usado para producir cereales para el desayuno directamente expandidos, aperitivos y panes crujientes (Clextral, 2020).

3.2 Componentes del extrusor.

Un extrusor consiste en un tornillo de Arquímedes aleteado que gira en un cilindro acoplado, el cual está adaptado generalmente con resistencias eléctricas. El tornillo normalmente tiene álabes poco profundos que al girar provocan una compresión en el material alimentado y promueven el arrastre del material desde la tolva de alimentación hasta ser descargado a través de una boquilla (Harper, 2009).

La obtención de la masa fundida del material alimentado recae en la cantidad de energía producida mediante la disipación viscosa del material, consecuencia del esfuerzo impuesto por el tornillo sobre el material al momento de girar.

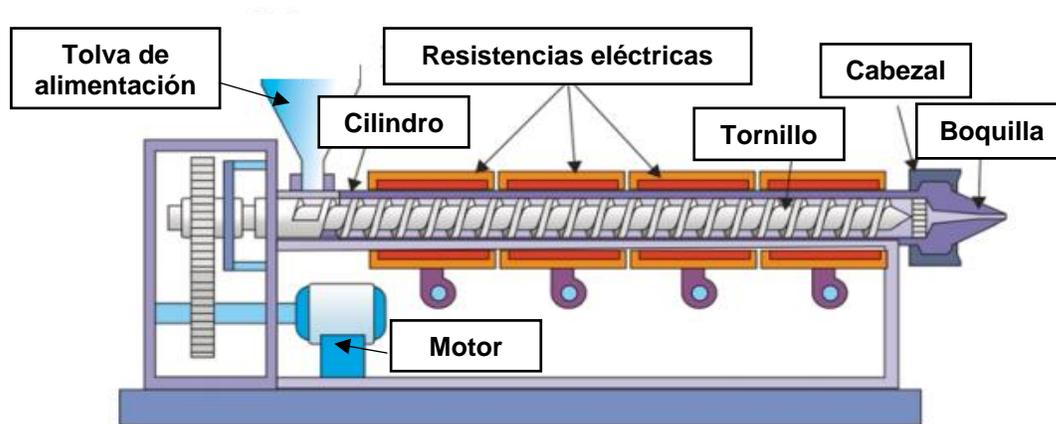


Figura 1. Esquema de un extrusor de tornillo simple. (Beltrán & Marcilla)

La Figura 1 presenta un esquema general de un extrusor típico de un solo husillo, donde es posible apreciar las partes básicas que la conforman.

3.2.1. **Tornillo de extrusión.**

Puede tener una o dos “cuerdas” en espiral a lo largo de su eje que configuran un canal helicoidal de anchura constante. El diámetro medido hasta la parte externa del hilo es el mismo en toda la longitud para permitir un ajuste preciso en la camisa cilíndrica, con una distancia entre ellas apenas suficiente para dejarlo rotar. En la literatura se describen tres zonas diferenciadas a lo largo del tornillo, las cuales cumplen con una misión en particular: alimentar, comprimir y dosificar (Figura 2).

La zona de alimentación es la más cercana a la tolva, en la cual la profundidad del canal del tornillo es máxima. Esta zona tiene como objetivo compactar el material alimentado en una forma sólida y densa para transportarlo hacia la siguiente zona.

En la zona de transición o compresión tiene lugar la fusión del material. Conforme el material se va compactando la presión va aumentando (Figura 2), obligando al aire atrapado escapar vía la tolva de alimentación.

Finalmente, la zona de dosificado generalmente posee una profundidad de canal constante y de menor altura, en esta zona el material ya completamente fundido es homogenizado y presurizado para forzarlo a atravesar la boquilla que le dará forma (Verdú, 2016).

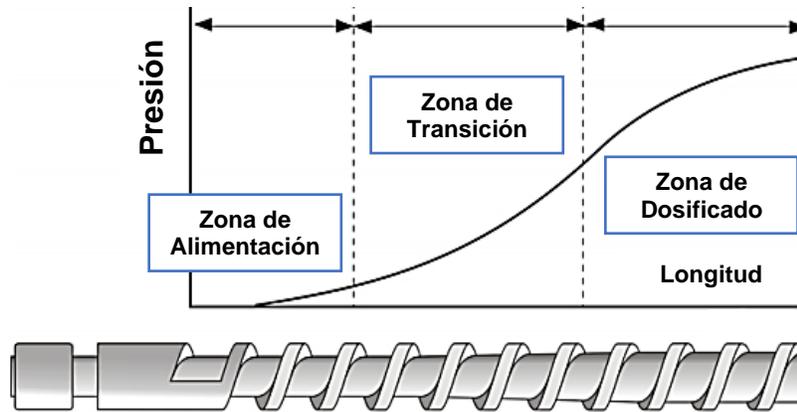


Figura 2. Zonas del proceso de extrusión en el tornillo (Beltrán & Marcilla)

Cabe señalar que la versatilidad del proceso de extrusión es debido precisamente al tornillo de la extrusora, pues el diseño de éste estará basado en la función que quiera proveer al material (fundir, homogenizar, remover algún solvente volátil) y el tipo de material que será procesado. La Figura 3 esquematiza los parámetros geométricos del tornillo que son clave para su diseño.

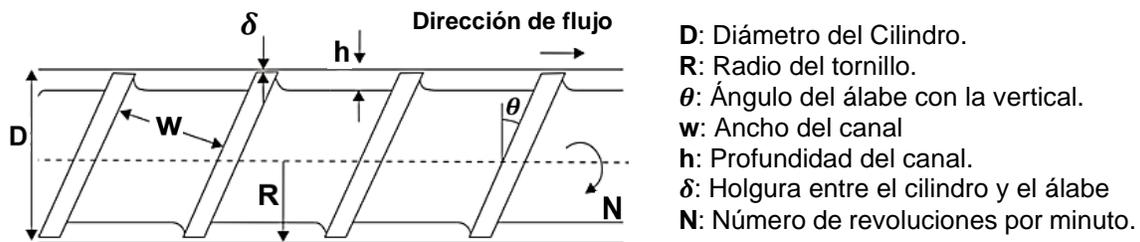


Figura 3. Parámetros geométricos del tornillo. (Beltrán & Marcilla)

Los tornillos pueden variar tanto en el espesor del eje como en la altura de los álabes a lo largo del mismo, esto con el fin de tener un tornillo que cumpla con los requerimientos de procesamiento del material.

Existen otros tipos de extrusores que poseen más de un tornillo dentro de la camisa cilíndrica, donde las variantes dependen del giro de los tornillos (contrario o paralelamente). Los extrusores de doble tornillo tienen la ventaja de obtener un mezclado y desgasificado de mejor calidad y un mejor control en el tiempo de residencia del material dentro del extrusor, sin embargo, estos suelen tener un costo más elevado respecto a los de un solo tornillo (Beltrán & Marcilla).

3.2.2. Camisa cilíndrica o barril.

Es aquella que contiene al tornillo de extrusión, la superficie del cilindro debe ser muy rugosa con el fin de aumentar la fricción del material compactado en su trayectoria por el extrusor. El cilindro suele construirse de aceros muy resistentes para evitar el desgaste y corrosión que pueda presentarse. Por lo general el cilindro posee sistemas de transferencia de calor, como el caso de resistencias eléctricas circulares, localizadas a lo largo del cilindro, del mismo modo también es posible utilizarse sistemas de radiación o enchaquetados con fluidos refrigerantes y calefactores (Beltrán & Marcilla).

Acoplar sistemas de intercambio de calor tiene como objetivo obtener un gradiente de temperatura razonable entre la zona de alimentación y de dosificado.

3.2.3. Tolva.

La tolva es el contenedor que se utiliza para introducir el material a procesar al cilindro de la extrusora de manera continua, debe de estar bien ensamblada con la garganta de alimentación para proporcionar un flujo constante de material. Esto puede conseguirse fácilmente con tolvas de sección circular, aunque son más caras y difíciles de construir que las de sección rectangular. Comúnmente, se diseñan con un volumen que permita albergar material para 2 horas de trabajo (Beltrán & Marcilla).

3.2.4. Garganta de alimentación.

Se sitúa en la primera sección del cilindro y se encuentra conectada a la tolva mediante una boquilla, comúnmente posee un sistema de refrigeración con la finalidad de que las partículas de granza no se adhieran a las partes internas de la extrusora (Beltrán & Marcilla).

3.2.5. Plato rompedor y filtros.

El plato rompedor es un disco delgado de metal lleno de orificios y se encuentra al final del cilindro, el propósito del plato es servir de soporte a un paquete de filtros alineados cuyo fin es evitar que salgan los posibles contaminantes que contenga el producto extruido. El paquete de filtros mejora el mezclado y homogenizan el

producto fundido. Es necesario contar con un diseño de extrusor que permita la limpieza recurrente de estos filtros para evitar una caída de presión excesiva y disminuya la producción (Beltrán & Marcilla).

3.2.6. Cabezal y boquilla.

El cabezal es la pieza situada al final del cilindro, se encuentra sujetando la boquilla y por lo general manteniendo el plato rompedor. Generalmente va atornillado al cilindro. El perfil interno del cabezal debe facilitar lo más posible el flujo del material hacia la boquilla.

Por otro lado, la función de la boquilla es la de moldear el material extruido. Las boquillas se pueden clasificar de acuerdo con la forma del producto, teniendo así diferentes geometrías, tales como cilindros, laminas y de tipo circular. (Beltrán & Marcilla)

3.3 Extrusión de alimentos.

En la industria de alimentos extruidos, se utilizan como base los mismos ingredientes de otras industrias de alimentos, aunque con una función diferente para la formación aportando cualidades y propiedades físicas, químicas y nutricionales específicas.

La línea de producción de alimentos extruidos comienza con la molienda de la materia prima (granos de maíz, arroz, trigo, etc.), este proceso tiene como finalidad garantizar un adecuado tamaño de partícula y una buena distribución del tamaño de partícula, lo cual genera algunos beneficios:

- Mejora de la apariencia del producto y una textura más suave.
- Mejora la absorción de agua facilitando la cocción (gelatinización del almidón).
- Disminuye la densidad del producto.
- Aumenta la dureza de la partícula. (pellet, snack, croqueta, etc.)
- Disminuye la frecuencia de taponamientos, atasques en el sistema de extrusión.
- Disminuye el desgaste de los componentes del extrusor (R.Guy, 2001).

Una vez obtenido el tamaño de partícula ideal, la harina se conduce a silos de almacenamiento adicionados con sensores de carga para monitorear el peso y, posteriormente, cargar la tolva de alimentación.

En algunos casos, existen pre-acondicionadores, cuya función es adicionar humedad (vapor, agua y aditivos de base acuosa) y energía térmica para generar la hidratación de las harinas. El tiempo de residencia en estos equipos es un parámetro que definirá el grado de gelatinización que se dará en esta etapa previa a la extrusión.

Posteriormente, el material es llevado a la tolva del extrusor para transformar la harina en un fluido altamente viscoso donde terminará de ser cocido antes de pasar por la boquilla y obtenga la forma deseada. Finalmente se encuentra un sistema de cuchillas que determina el largo de cada partícula saliente.

La extrusión garantiza que la gelatinización se complete, obteniendo una masa de material fundido con residuos sólidos despreciables. Cuando la viscosidad de la masa es muy baja, la fricción se reduce provocando que el producto no quede cocido completamente, provocando efectos negativos en la textura del producto (masa tipo barro, alta porosidad, baja densidad, exceso de expansión, producto quebrado). Cuando la viscosidad es demasiado alta, el producto puede quemarse, desnaturalizando las proteínas más de lo necesario, lo que ocasiona un producto no apto para consumo debido a que genera un mayor trabajo para poder digerirlo y aprovechar su contenido nutricional (Reyes, 2009).

3.3.1. *Materia prima para extruir.*

Dentro de la extrusión de alimentos existe una gran variedad de ingredientes como el maíz, arroz, soya y trigo, que son utilizados para elaborar un sinfín de productos extruidos.

El arroz posee una excelente fuente de almidón que ayuda a la expansión y aglutinación de la masa cuando es procesada en el extrusor, requiere menos vapor en el pre-acondicionador y más agua para evitar una alta variación en el flujo dentro del extrusor.

Los alimentos tienen propiedades reológicas complejas y de difícil determinación, la mayoría de sus propiedades deben estar asociadas a las condiciones en las que se miden y varía según el instrumento que se utilice. Los resultados normalmente no son un parámetro reológico exacto, sino una relación que muestra cómo varían las propiedades de los ingredientes involucrados en un sistema de fuerzas aplicadas (Reyes, 2009).

Se presenta en la Tabla 1 la composición general de las materias primas utilizadas en la extrusión de alimentos (Reyes, 2009).

Tabla 1. Composición de las principales materias primas en extrusión de alimentos.

Componente	Maíz	Arroz	Trigo
Agua	12.5%	13.1%	13.2%
Proteína	8.5%	7.2%	11.7%
Grasa	3.8%	2.2%	2.0%
Carbohidratos	64.7%	73.4%	61.0%
Fibra	9.2%	2.9%	10.3%
Sales	1.3%	1.2%	1.8%

3.3.2. Comportamiento reológico de la harina de arroz.

Para determinar el comportamiento reológico de un material se construye el gráfico de viscosidad aparente en función de la velocidad de corte. Una vez conociendo el comportamiento reológico, se evalúa la influencia y el impacto que tendrá en las diferentes condiciones del proceso de extrusión.

La Figura 4 permite observar tres zonas que revelan el comportamiento reológico de la harina de arroz. La primer y tercer zona, a valores altos y bajos de rapidez de corte respectivamente, donde es posible formar una recta de pendiente cero, se observa que la viscosidad no cambia con la rapidez de corte y que el fluido adopta un comportamiento reológico tipo newtoniano.

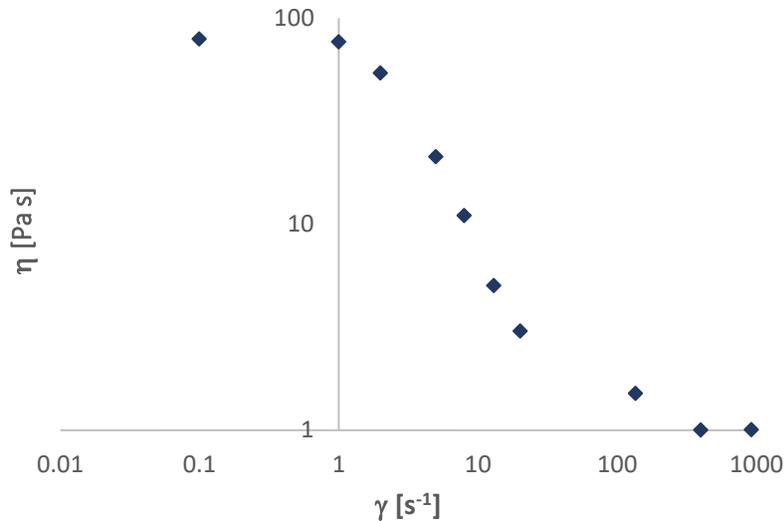


Figura 4. Comportamiento reológico de la harina de arroz. (Reyes, 2009)

Por otra parte, la segunda zona en el rango intermedio de la rapidez de corte presenta una curva con pendiente diferente de cero, se observa que la viscosidad disminuye conforme aumenta la rapidez de corte, lo cual hace referencia a un comportamiento reológico tipo pseudoplástico.

Para extrusores que trabajan a velocidades de rotación lo suficientemente bajas o altas resulta una buena aproximación modelar el sistema adecuando la ecuación de la viscosidad de Newton, luego utilizar una ecuación constitutiva que refleje el comportamiento global de la masa fundida, como la ley de la potencia.

4. Desarrollo de modelado matemático.

La zona de dosificado suele modelarse como una primera aproximación para conocer la operación del extrusor, donde la masa de harina se encuentra completamente fundida y las pequeñas cantidades de sólido por fundirse pueden considerarse despreciables.

Basado en esto último, esta zona es modelada como una bomba, en la que el movimiento del material fundido se produce como resultado del giro del tornillo y de la configuración helicoidal del mismo (Middleman, 1977).

Con el fin de asociar un sistema de coordenadas cartesianas se supondrá que el tornillo se encuentra totalmente desenrollado, generando así un canal de sección rectangular, donde el cilindro será supuesto como un plano que se mueve uniformemente al canal a una velocidad “ U ” con un ángulo θ con respecto a la dirección “ z ” positiva. (Figura 5)

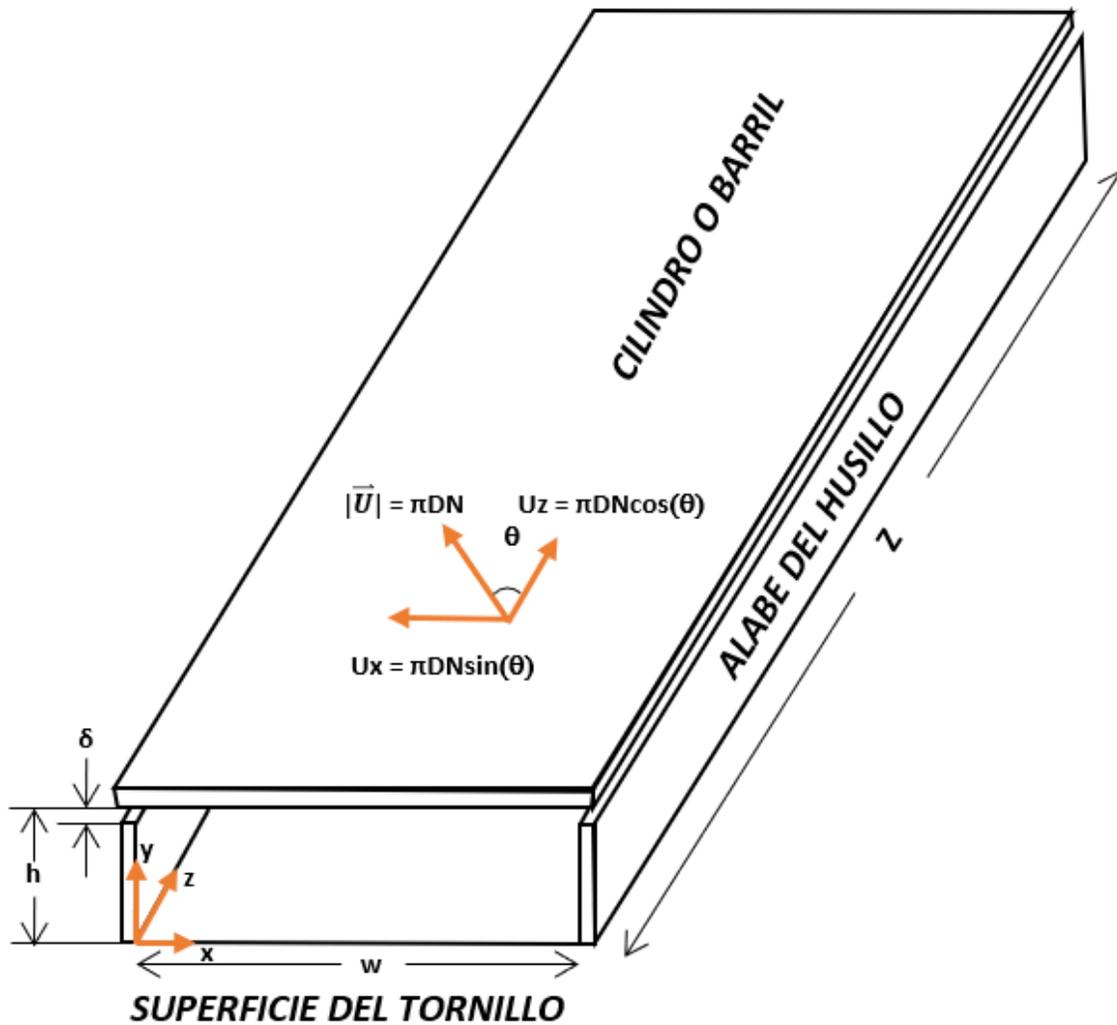


Figura 5. Sistema de coordenadas en el canal del extrusor (Reproducción de la literatura). (Middleman, 1977)

Además, se considera que la altura de los álabes “ h ” es constante y la holgura que existe entre el álabe y el cilindro es despreciable ya que $h \gg \delta$.

4.1 Balance de momentum en el extrusor.

La masa de fundido es considerada como un fluido incompresible en estado estacionario e isotérmico, que se mueve bajo la suposición de un flujo completamente desarrollado (sin cambios en el espacio). El fluido extruido se mueve como consecuencia de dos mecanismos de transferencia de momentum: por difusión y presión. (Figura 6)

La transferencia de momentum por difusión se debe al arrastre de la masa fundida por el movimiento del plano que conforma al cilindro, esto sucede mediante el contacto íntimo de las capas de material fundido. Este movimiento promueve la llegada del material de la alimentación hasta la boquilla del extrusor.

Por otra parte, la transferencia de momentum por presión es generada por la diferencia de presión que se origina entre la alimentación y el cabezal del extrusor, debido a que la existencia de la boquilla y el plato rompedor impiden la salida del material fundido, en este caso, el movimiento por presión retrasa la salida del material del extrusor.

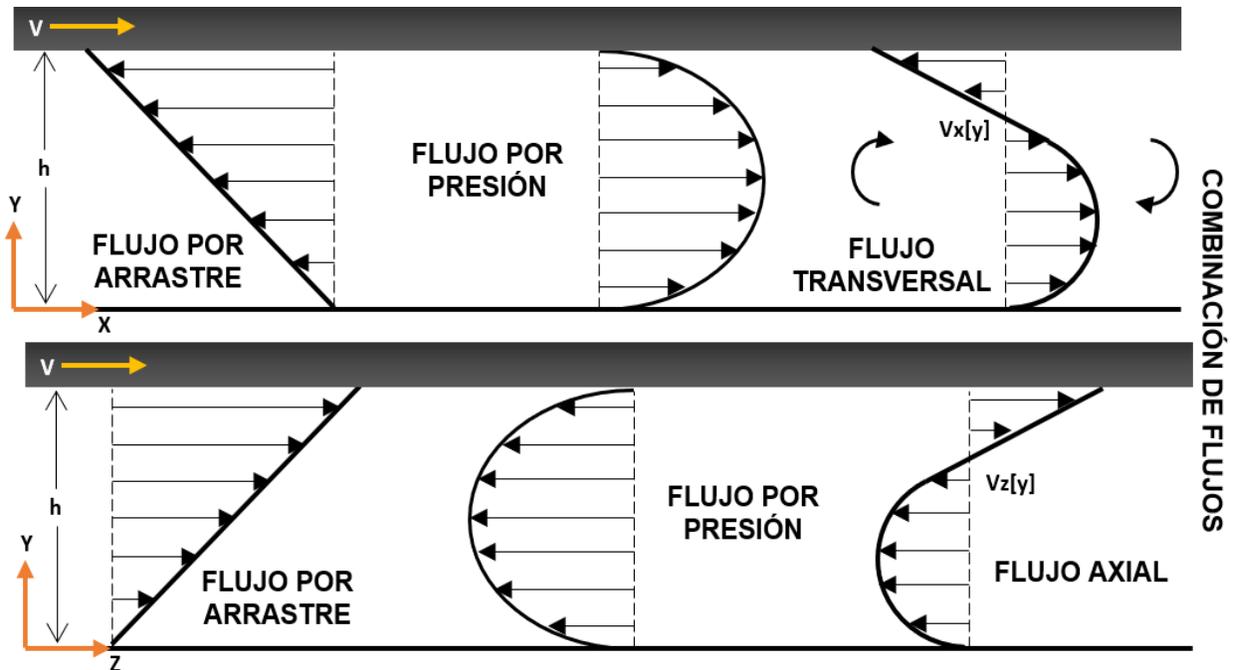


Figura 6. Perfiles de velocidades reproducidos de la literatura.

Se recurre a la ecuación de continuidad para el sistema bajo estudio para comenzar el desarrollo del modelo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0 \quad (4-1)$$

Aplicando a la ecuación (4-1) la suposición de estado estacionario y que el fluido es incompresible se obtiene:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (4-2)$$

Ahora bien, se analiza la ecuación de balance de momentum en estado isotérmico.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v v = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \quad (4-3)$$

Como consecuencia de considerar que no existen cambios en las propiedades del material fundido, que se mueve por causa del movimiento de arrastre y presión y que las fuerzas inerciales y gravitacionales son despreciables, la ecuación del balance de momentum resulta:

$$0 = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] \quad (4-4)$$

Dado el sistema de referencia planteado en la Figura 5, el vector de velocidad se simplifica a: $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = (V_x(y), 0, V_z(y))$, donde se considera que las componentes “x” y “z” son causantes del flujo transversal y axial del fluido, respectivamente. De esta manera, se presenta la ecuación de balance de momentum para la coordenada: transversal y axial.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{d}{dy}(\tau_{xy}) \quad (4-5)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{d}{dy}(\tau_{zy}) \quad (4-6)$$

Las componentes del vector de velocidad que causan el movimiento pueden ser expresadas en términos de la velocidad angular ($|\vec{U}| = \pi DN$) como sigue:

$$U_x = |\vec{U}| \sin \theta = \pi DN \sin(\theta) \quad (4-7)$$

$$U_z = |\vec{U}| \cos \theta = \pi DN \cos(\theta) \quad (4-8)$$

Se asume un gradiente de presión uniforme dentro del canal en la dirección “z”, el cual representa el gradiente de presión generado debido a la acumulación de material fundido en el extrusor.

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\Delta P}{Z} \quad (4-9)$$

Donde ΔP es la diferencia de presión en el extrusor y Z la longitud de la cuerda helicoidal del husillo.

4.2 Caso newtoniano

Como primera aproximación se sustituirá el modelo newtoniano en el balance diferencial de momentum, basado en que el extrusor operará a velocidades de rotación relativamente bajas. La ecuación constitutiva del modelo newtoniano es la ley de la viscosidad de Newton:

$$\tau_{ij} = -\mu \frac{dv_i}{dx_j} \quad (4-10)$$

La ecuación (4-10) es la proposición más simple que puede hacerse para relacionar el esfuerzo y el gradiente de velocidad, representando así, que la relación entre ambas cantidades es una constante conocida como viscosidad, y describe que la transferencia por difusión está dada por un gradiente de velocidades. Ahora bien, sustituyendo la ecuación constitutiva en los balances de momentum se obtienen:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{d}{dy} \left(-\mu \frac{dv_x}{dy} \right) \quad (4-11)$$

$$\frac{\Delta P}{Z} = -\frac{d}{dy} \left(-\mu \frac{dv_z}{dy} \right) \quad (4-12)$$

La solución analítica de ambos balances es similar, por lo que se obvia una de ellas. De esta manera, resolviendo la ecuación (4-12) por el método de variables separables obtenemos la solución general.

$$v_z = \frac{1}{\mu} * \frac{\Delta P}{Z} * \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad (4-13)$$

Para particularizar la ecuación (4-13) se proponen las siguientes condiciones a la frontera.

$$C.F.1 : y = 0 ; v_z = 0$$

$$C.F.2 : y = h ; v_z = U_z$$

La *C.F.1* explica que en la superficie del canal del tornillo la magnitud de la velocidad es nula, ya que se supone que el husillo se mantiene fijo, mientras que la *C.F.2* explica que el fluido adopta la magnitud de la velocidad en la componente “z” en la pared del cilindro.

- Aplicando la *C.F.1*:

$$v_z(y = 0) = 0 = \frac{1}{\mu} * \frac{\Delta P}{Z} * \frac{(0)^2}{2} + C_1(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

- Aplicando la *C.F.2*:

$$v_z(y = h) = U_z = \frac{1}{\mu} * \frac{\Delta P}{Z} * \frac{h^2}{2} + C_1(h) + 0$$

$$C_1 = \frac{U_z}{h} - \frac{h}{2\mu} * \frac{\Delta P}{Z}$$

Por consiguiente, se obtiene la solución particular para el balance de momentum en la dirección axial, lo que representa el perfil de velocidades para la dirección axial dentro del canal.

$$v_z(y) = \frac{y U_z}{h} - \frac{\Delta P}{2\mu Z} * y(h - y) \quad (4-14)$$

Utilizando las siguientes variables es posible adimensionalizar el perfil de velocidades:

$$\varphi = \frac{v_z}{U_z} ; \eta = \frac{y}{h}$$

$$\varphi(\eta) = \eta - \frac{h^2 \Delta P}{2\mu Z U_z} * \eta(1 - \eta) \quad (4-15)$$

En la ecuación (4-15) el primer término refleja un perfil de velocidad lineal debido al movimiento por arrastre, mientras que el segundo término refleja un perfil de velocidad parabólico debido al gradiente de presión.

Por otra parte, la ecuación (4-11) contempla que el gradiente de presiones es independiente de la coordenada “y”, por lo cual se asume que la velocidad es paralela a las superficies del husillo y del cilindro. Esto último no puede ser posible debido a la existencia de los álabes del husillo, puesto que al estar cerca de ellos el

material fundido choca y se regresa, generando la existencia de un flujo recirculante (Middleman, 1977).

La consideración de flujo paralelo resulta una buena aproximación si la relación de aspecto entre la altura y el ancho del canal es relativamente grande, obteniendo un perfil de velocidad transversal como el mostrado en la Figura 6. De acuerdo con lo reportado en la literatura, existe una desviación considerable en el cálculo del perfil de velocidad transversal hasta una distancia $h/2$ de los alabes, en donde la velocidad comienza a tener dependencia de la coordenada “y”.

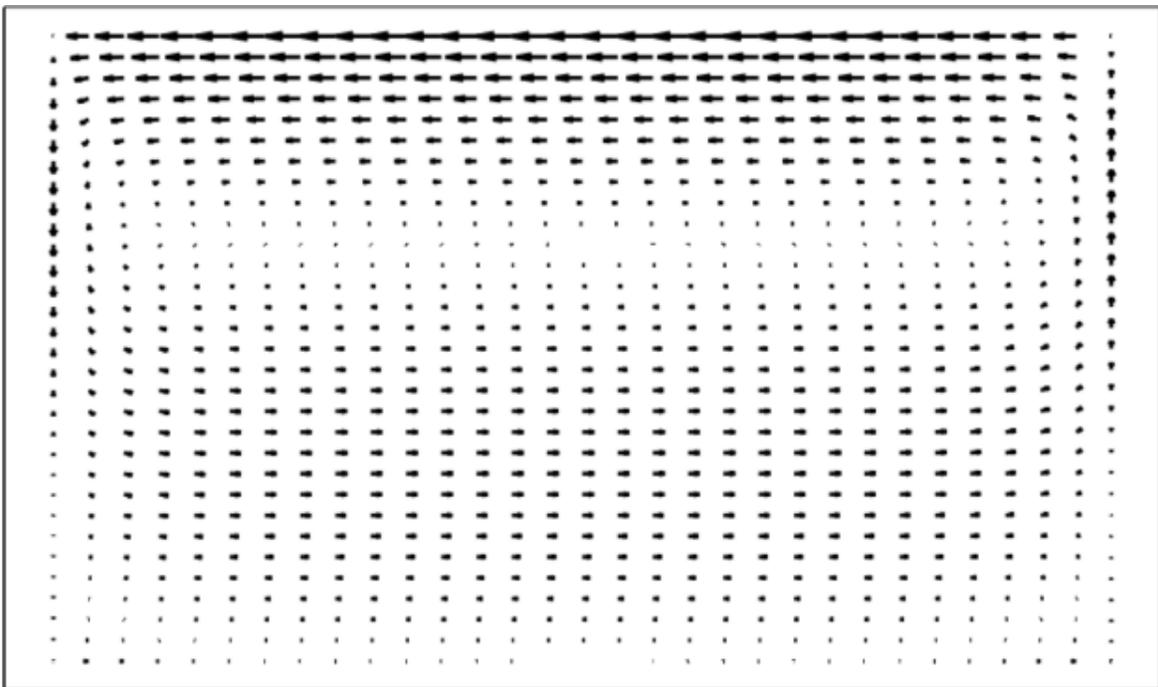


Figura 7. Campo de vectores del flujo transversal (Kaufman, 2003)

Según la literatura, para una relación de aspecto de 5, se encontró el siguiente campo de vectores del flujo transversal para un fluido no newtoniano, incompresible, en estado isotérmico y estacionario (Figura 7), es posible visualizar una zona de estancamiento entre la superficie del husillo y las 2/3 partes de la altura del álabe y las regiones de desviación por efecto de las paredes de los álabes a una distancia aproximada de $h/2$ (Tadmor & Gogos, 2006).

Por tanto, se deduce que, a menor relación de aspecto, la longitud de la región donde la desviación es considerable aumenta, lo cual implica considerar los efectos de borde en la resolución del sistema en cuestión, sin embargo, para el ejemplo anterior con una relación de aspecto de 5, la zona donde la aproximación de flujo paralelo es válida, es considerablemente mayor respecto a las zonas donde existe desviación, en consecuencia, mientras más grande sea la relación de aspecto la desviación tenderá a ser menor y por lo tanto, la resolución del perfil de velocidades transversal podrá desprestigiar los efectos de borde.

Por consiguiente, la solución de la ecuación (4-11) resulta equivalente a lo desarrollado para la ecuación (4-12), sin embargo, las condiciones para particularizar la ecuación cambian ligeramente.

$$C.F.3 : y = 0 ; v_x = 0$$

$$C.F.4 : y = h ; v_x = -U_x$$

Aplicando las condiciones de frontera resulta:

$$v_x(y) = -\frac{y U_x}{h} - \frac{1}{2\mu} * \frac{dP}{dx} * y(h - y) \quad (4-16)$$

Una vez encontrados los perfiles de velocidad para cada componente es posible encontrar la expresión del flujo volumétrico partiendo de la siguiente expresión:

$$Q = \int_0^w \int_0^h v \, dy \, dx \quad (4-17)$$

Esta expresión permite visualizar como se contabiliza el flujo volumétrico de material fundido que atraviesa el área transversal del canal, mediante el uso de la doble integral.

Debido a la existencia de los álabes del husillo se deduce que no es posible que haya flujo de material fundido en la dirección "x". Igualando la ecuación (4-17) a cero:

$$Q = \int_0^h w * \left[-\frac{y U_x}{h} + \frac{1}{2\mu} * \frac{dP}{dx} * y(y - h) \right] dy = 0$$

Es posible hallar el gradiente de presiones (dP/dx) despejándolo de la expresión anterior.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{6\mu U_x}{h^2} \quad (4-18)$$

Ahora bien, es posible sustituir la expresión del gradiente de presiones constante en el perfil de velocidades transversal y adimensionalizar como en el caso del perfil de velocidades axial.

$$v_x = U_x \frac{y}{h} \left(2 - \frac{3y}{h} \right) \quad (4-19)$$

$$\phi = \eta(2 - 3\eta) \quad (4-20)$$

Donde $\phi = v_x/U_x$ y $\eta = y/h$ son las variables adimensionales.

4.3 Estimación del punto eficiente de operación.

4.3.1. Curva característica del husillo.

De acuerdo con lo anterior, se deduce que el flujo total de la masa fundida tendrá lugar en la dirección axial. Resolviendo la doble integral de la ecuación (4-17) y sustituyendo perfil de velocidades en “z” hallamos la expresión de flujo volumétrico.

$$Q = \frac{whU_z}{2} - \frac{wh^3}{12\mu} * \frac{\Delta P}{Z} \quad (4-21)$$

Claramente es posible observar que en la ecuación (4-21), el primer término representa la contribución al flujo debida al arrastre de material, mientras que el segundo término representa la contribución negativa de flujo debida al gradiente de presión en el cilindro.

Tal como se muestra en la Figura 8, es posible expresar el ancho del canal en función del diámetro del tornillo, esto se logra tomando como referencia el triángulo rectángulo amarillo.

$$w = \pi D \sin(\theta) \quad (4-22)$$

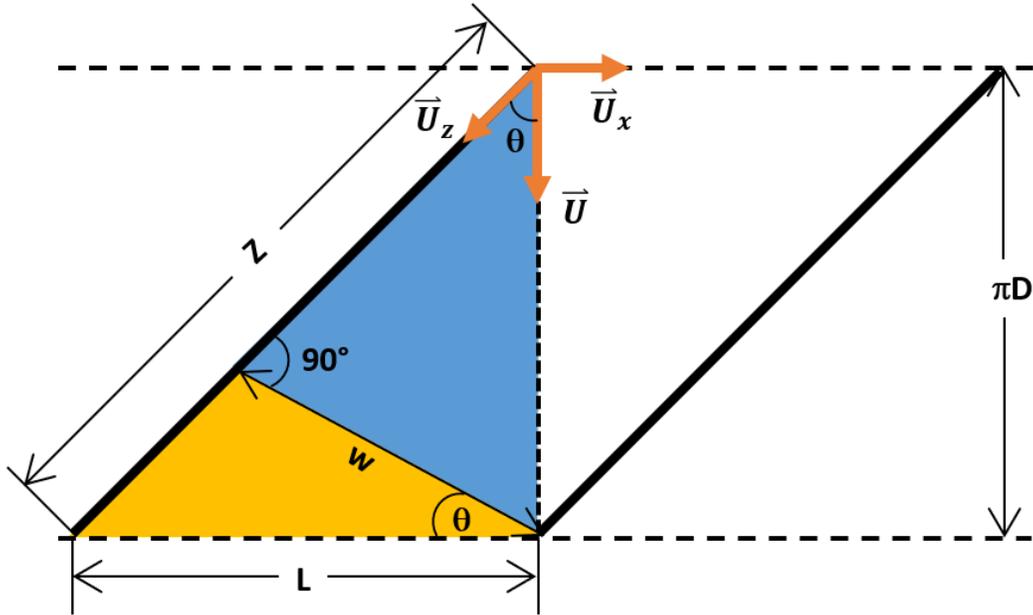


Figura 8. Canal del husillo desenrollado reproducido de la literatura.

Además, observando el triángulo rectángulo que forman los triángulos: azul y amarillo, se puede expresar el largo del canal en términos de L y el seno del ángulo helicoidal, donde L es la suma del ancho del canal y el espesor del álabe.

$$Z = \frac{L}{\sin(\theta)} \quad (4-23)$$

Por consiguiente, el flujo volumétrico puede expresarse en términos de sus parámetros geométricos, sustituyendo las ecuaciones (4-8), (4-22) y (4-23) en la (4-21).

$$Q = AN - B \frac{\Delta P}{\mu} \quad (4-24)$$

$$\text{Donde } A = \frac{1}{2} h \pi^2 D^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \quad \text{y} \quad B = \frac{\pi D \sin^2(\theta) h^3}{12L}$$

La ecuación (4-24) representa la ecuación característica del husillo, mostrando la relación entre flujo volumétrico y la diferencia de presión, la cual esta expresada en términos de las variables geométricas del extrusor.

4.3.2. Curva característica de la boquilla.

Una vez que el producto alimenticio atraviesa el husillo de extrusión, la acumulación de presión en la punta hace que la masa viscosa fluya a través del troquel o boquilla, cuyas secciones transversales más comunes son círculos, hendiduras o un anillo.

Como consecuencia de que el fluido pase a través de la boquilla en una dirección y considerando una boquilla con sección transversal circular, el perfil que se desarrolla dentro de la boquilla puede ser aproximado al perfil parabólico de un tubo circular con la condición de flujo totalmente desarrollado (4-25) (Harper, 2009).

$$\frac{d}{dr}(r * \tau_{rz}) = -\frac{\Delta P}{L_b} r \quad (4-25)$$

Ahora bien, considerando la suposición de fluido newtoniano:

$$\frac{d}{dr}\left(r * \mu \frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{\Delta P}{L_b} r \quad (4-26)$$

Resolviendo esta ecuación con las siguientes condiciones a la frontera obtenemos el perfil de velocidades parabólico en la dirección axial.

$$C.F. 5 : r = R_b ; v_z = 0$$

$$C.F. 6 : r = 0 ; \frac{dv_z}{dr} = 0$$

$$v_z(r) = \frac{\Delta P}{L_b} * \frac{R_b^2}{4\mu} * \left[1 - \left(\frac{r}{R_b}\right)^2\right] \quad (4-27)$$

Utilizando la expresión de flujo volumétrico en coordenadas cilíndricas (ecuación (4-17)) es posible hallar la expresión de flujo volumétrico en la boquilla, conocida como la ecuación de Hagen-Poiseuille.

$$Q_z = k * \frac{\Delta P}{\mu} \quad \text{tal que: } k = \frac{\pi R_b^4}{8L_b} \quad (4-28)$$

La ecuación (4-28) representa la ecuación característica de la boquilla del extrusor, mostrando la relación entre el flujo volumétrico y la diferencia de presión en el extrusor, en donde k contiene las variables geométricas de la boquilla: R_b y L_b , las cuales expresan el radio y longitud del canal de la boquilla respectivamente.

4.3.3. Punto eficiente de operación del extrusor.

Si la única salida del extrusor es a través de la boquilla, el flujo Q y el incremento de presión ΔP de la ecuación (4-28) deben ser idénticos a los de la ecuación característica del husillo ecuación (4-24), de esta manera cuando se grafiquen simultáneamente las ecuaciones características de la boquilla y del husillo, es de esperarse que la intersección de ambas curvas arroje el punto eficiente de operación, devolviendo los valores de operación eficiente para Q y ΔP .

Por lo tanto, resulta fácil encontrar la intersección de ambas curvas, puesto que las expresiones de las ecuaciones (4-24) y (4-28) son algebraicas, basta con resolver un sistema de ecuaciones y encontrar la intersección. Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta:

$$Q = \frac{Ak}{(B+k)} * N \quad (4-29)$$

$$\Delta P = \frac{\mu A}{(B+k)} * N \quad (4-30)$$

4.3.4. Condiciones límite.

Observando las ecuaciones (4-29) y (4-30) es posible visualizar dos condiciones límites que proveen medidas útiles para conocer el comportamiento del extrusor. Suponiendo que la descarga al final del cilindro es totalmente abierta, es decir, que no existe boquilla alguna que presente resistencia al paso de material fundido (@ $k \rightarrow \infty$), se obtiene el flujo máximo posible (Middleman, 1977). Aplicando el límite cuando $k \rightarrow \infty$ a la ecuación (4-29) resulta:

$$Q_{max} = AN \quad (4-31)$$

Ahora bien, suponiendo el caso contrario, donde la descarga al final del cilindro fuera nula, lo que significaría que la resistencia al paso de material impuesta por la boquilla sea muy grande que no permita salir (@ $k \rightarrow 0$), obtendremos la mayor diferencia de presión dentro del extrusor (Middleman, 1977). Aplicando el límite cuando $k \rightarrow 0$ a la ecuación (4-30) resulta:

$$\Delta P_{max} = \frac{\mu A}{B} N \quad (4-32)$$

4.4 Caso no newtoniano.

Recordando que la masa de material fundido no posee un comportamiento newtoniano, como primera aproximación se sustituirá el modelo de Ostwald-de Waele en el balance diferencial de momentum descrito en secciones anteriores. La ecuación constitutiva del modelo no newtoniano es bien conocida como la Ley de la Potencia:

$$\tau_{ij} = - \left[m \left| \frac{dv_i}{dx_j} \right|^{n-1} \right] \frac{dv_i}{dx_j} \quad (4-33)$$

Donde n es el índice de la ley de la potencia y m es un parámetro conocido como consistencia del fluido, la cual tiene unidades que dependen de n . El parámetro n es una medida del grado de comportamiento no newtoniano del fluido. En las regiones en que m disminuye al aumentar la velocidad de corte, el comportamiento del fluido se denomina pseudoplástico y donde m aumenta al aumentar la velocidad de corte, el comportamiento del fluido se denomina dilatante (Bello, y otros, 2014).

También es posible notar que cuando $n = 1$ la ecuación (4-33) se reduce a la expresión de la Ley de viscosidad de Newton, mientras que para $n < 1$ el fluido adopta el comportamiento pseudoplástico y para $n > 1$ el fluido adopta el comportamiento dilatante. En este caso, las harinas de cereales por lo general adoptan un comportamiento pseudoplástico (Harper, 2009).

Ahora bien, sustituyendo la ley de la potencia en el balance de momentum dentro del extrusor (4-6).

$$\frac{d^2 v_z}{dy^2} \left| \frac{dv_z}{dy} \right|^{n-1} = \frac{\Delta P}{nmZ} \quad (4-34)$$

4.4.1. Adimensionalización de ecuaciones de balance.

Con el fin de amenizar el trabajo al programador, se decidió adimensionalizar tanto los balances diferenciales de momentum a resolver tanto para el extrusor como para la boquilla. Utilizando las siguientes variables adimensionales:

$$\varphi = \alpha \frac{v_z}{U_z} ; \quad \eta = \frac{y}{h} ; \quad \alpha = \frac{U_z}{h} \left(\frac{mZ}{h\Delta P} \right)^{\frac{1}{n}}$$

De esta manera, el balance diferencial adimensional de momentum en el extrusor resulta:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\left| \frac{d\varphi}{d\eta} \right|^{n-1} \frac{d\varphi}{d\eta} \right] - 1 = 0 \quad (4-35)$$

Cuyas condiciones a la frontera se escriben como sigue:

$$CF1. \varphi(0) = 0 \quad ; \quad CF2. \varphi(1) = \alpha$$

El modelamiento de la boquilla continuará siendo con fluido newtoniano, pues es una buena aproximación debido a la suposición de una boquilla de tipo tubular.

4.4.2. Limitaciones del modelamiento con la ley de la potencia:

Dado que la expresión del modelo de la ley de la potencia tiene contenida a la velocidad de corte o gradiente de velocidades dentro de un signo de valor absoluto, se debe tener precaución al momento de utilizar dicho modelo. Se presentan a continuación dos casos que pueden visualizarse en la Figura 9.

Si se tiene una resistencia en la boquilla lo suficientemente pequeña para que el flujo por presión sea mínimo y en consecuencia se tiene una distribución de velocidades con pendiente positiva, es posible descartar el signo del valor absoluto en el balance de momentum en la dirección axial:

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^n = 1 \quad (4-36)$$

En caso contrario, si la resistencia de la boquilla es considerable, el flujo por presión se presentará con mayor intensidad, apareciendo en la distribución de velocidades como un máximo, en este punto el gradiente de velocidades es cero, por lo cual es necesario definir una ecuación diferencial para la región antes y después del máximo por separado, considerando el signo que tendrá el gradiente de velocidades quitando el signo de valor absoluto del modelo de la ley de la potencia.

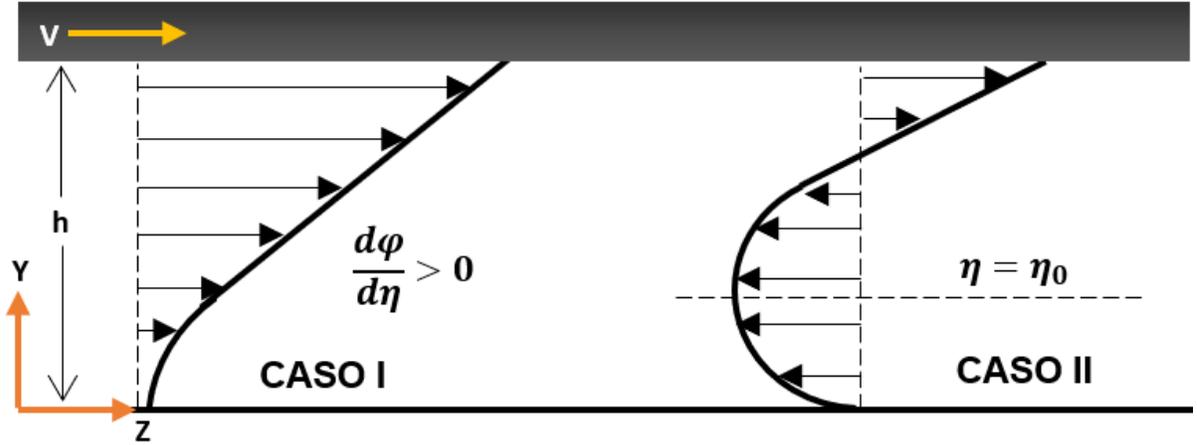


Figura 9. Posibles casos para el modelamiento utilizando la ley de la potencia (caso no newtoniano)

Como resultado de esta consideración, Kroesser y Middleman proponen las siguientes expresiones como las soluciones del perfil de velocidad para las regiones descritas anteriormente (Kroesser & Middleman, 1965).

$$\varphi_L = \frac{(\eta_0 - \eta)^\beta - (\eta_0)^\beta}{\beta} \quad \text{para } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (4-37)$$

$$\varphi_U = \frac{(\eta - \eta_0)^\beta - (1 - \eta_0)^\beta}{\beta} + \alpha \quad \text{para } \eta_0 \leq \eta \leq 1 \quad (4-38)$$

Donde $\beta = (1 + n)/n$ y η_0 es el máximo de la distribución de velocidades y puede encontrarse con la siguiente expresión, basado en la evaluación de las condiciones a la frontera:

$$\beta\alpha = (1 - \eta_0)^\beta - (\eta_0)^\beta \quad (4-39)$$

Finalmente, también proponen una expresión para obtener el valor del flujo volumétrico adimensional.

$$\frac{Q}{whZ} = \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right) * \left[\frac{(\eta_0)^{1+\beta} + (1-\eta_0)^{1+\beta}}{1+\beta} - (\eta_0)^\beta \right] \quad (4-40)$$

Sin embargo, menciona que para que sea válida la solución se debe cumplir que $\alpha \leq 1/\beta$.

4.5 Balance de energía en el extrusor.

Se recurre a la ecuación de energía térmica para poder establecer el balance de energía para el extrusor. En este caso, se presenta la ecuación de energía excluyendo el término de compresión reversible:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) + (-\tau : \nabla v) \quad (4-41)$$

La cual establece que el cambio de temperatura de un elemento fluido en un sistema de flujo es la suma de la ganancia (o pérdida) de calor por conducción y la contribución por disipación viscosa en el elemento.

Dado que las viscosidades del polímero son altas y las conductividades térmicas son bajas, se debe asegurar una transferencia de calor eficiente para controlar el sistema a la temperatura deseada (Tadmor & Gogos, 2006).

Al integrar el término de disipación viscosa sobre el volumen del sistema, resulta la contribución total de conversión de energía mecánica en calor.

$$E_v = \int_V (-\tau : \nabla v) dV \quad (4-42)$$

De este modo, para el sistema que se modela, resulta sencillo reescribir el balance de energía en términos de la entalpia por unidad de masa:

$$\Delta \hat{h} = \hat{q} + \hat{P}_w \quad \text{tal que: } \hat{q} = q/G \text{ y } \hat{P}_w = P_w/G \quad (4-43)$$

Donde es q el flux de calor, P_w la potencia total y G el flujo másico. Ahora bien, expresando la entalpia en términos de presión y temperatura:

$$\Delta \hat{h} = \int_{T_1}^T C_p dT + \frac{\Delta P}{\rho} \quad (4-44)$$

Igualando las ecuaciones (4-43) y (4-44) resulta:

$$\Delta T = \frac{1}{c_p} \left(\hat{q} + \hat{P}_w - \frac{\Delta P}{\rho} \right) \quad (4-45)$$

El balance macroscópico de energía se reduce a:

$$\hat{P}_w = \hat{E}_v + \frac{\Delta P}{\rho} \quad (4-46)$$

Dividiendo entre el flujo másico, obtenemos:

$$P_w = E_v + (\Delta P)Q \quad (4-47)$$

De esta manera, es posible visualizar que la potencia total que entra es utilizada para incrementar la presión y el resto es para disiparse en forma de calor. Despejando el término E_v de la ecuación (4-46) es posible notar que la cantidad de energía que se está disipando en forma de calor es igual a la potencia total que entra a través del eje que conecta al motor con el husillo menos el producto del flujo volumétrico por el incremento de presión.

Sustituyendo la ecuación (4-46) en la (4-45) es posible obtener el cambio de temperatura en términos del calor que entra y la disipación viscosa.

$$\Delta T = \frac{1}{c_p} (\hat{q} + \hat{E}_v) \quad (4-48)$$

4.6 Potencia total.

El cálculo de la entrada de potencia de eje viene dado del producto entre el esfuerzo cortante en cualquier punto sobre la superficie del cilindro y la velocidad del cilindro, integrando sobre la superficie completa del cilindro.

Es posible expresar lo anterior en forma tensorial:

$$P_w = \int_S (-[\hat{n} \cdot \tau] \cdot U) dS \quad (4-49)$$

Donde S es la superficie del cilindro, \hat{n} es el vector unitario normal exterior, τ el tensor de esfuerzo en la superficie del barril y U es la velocidad del cilindro. Para el sistema que se modela, donde las componentes de la velocidad y del esfuerzo se discutieron en las secciones anteriores, la ecuación (4-49) resulta:

$$P_w = -[\tau_{yz}|_{y=h} U_z + \tau_{yx}|_{y=h} U_x] * wZ \quad (4-50)$$

Siguiendo el procedimiento de Tadmor y Gogos (Tadmor & Gogos, 2006), de la (4-21) se define la contribución por arrastre y por presión:

$$Q_z = Q_d + Q_p = \frac{whU_z}{2} - \frac{wh^3}{12\mu} * \frac{\Delta P}{Z} \quad (4-51)$$

Donde es Q_d el flujo por arrastre y Q_p es el flujo por presión. Realizando el cociente de estas dos cantidades, es posible sustituirlo en el perfil adimensional de velocidades axial.

$$\frac{Q_p}{Q_d} = \frac{-h^2 \Delta P}{6\mu Z U_z} \quad (4-52)$$

$$\varphi = \eta + 3 \frac{Q_p}{Q_d} * \eta(1 - \eta) \quad (4-53)$$

Por lo tanto, resulta fácil hallar la derivada del perfil de velocidad o en su caso el valor de la rapidez de corte:

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{dV_z}{dy} = \frac{U_z}{h} \frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{U_z}{h} \left[1 + 3 \frac{Q_p}{Q_d} (1 - 2\eta) \right] \quad (4-54)$$

Sustituyendo la derivada en la ecuación (4-10) y evaluando en la superficie del cilindro y sabiendo que $\frac{Q_p}{Q_d} = \frac{Q - Q_d}{Q_d} = \frac{Q}{Q_d} - 1$

$$\tau_{yz}|_{\eta=1} = -\mu \frac{U_z}{h} \left[1 - 3 \left(\frac{Q}{Q_d} - 1 \right) \right] \quad (4-55)$$

Para el caso de la componente en "x" como el flujo es considerado como nulo $Q = 0$

$$\tau_{yx}|_{\eta=1} = -4\mu \frac{U_x}{h} \quad (4-56)$$

Sustituyendo (4-55) y (4-56) en la (4-50):

$$P_w = \left[\mu \frac{U_z^2}{h} \left[1 - 3 \left(\frac{Q}{Q_d} - 1 \right) \right] + 4\mu \frac{U_x^2}{h} \right] * wZ \quad (4-57)$$

Sustituyendo las expresiones de velocidad angular ecuaciones (4-7) y (4-8):

$$P_w = \left[\mu \frac{\pi^2 D^2 N^2}{h} (4(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - 3 \cos^2(\theta) \frac{Q}{Q_d}) \right] * wZ \quad (4-58)$$

Sabiendo que la identidad $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, la potencia total resulta:

$$P_w = \mu \frac{\pi^2 D^2 N^2 wL}{h \sin(\theta)} \left(4 - 3 \cos^2(\theta) \frac{Q}{Q_d} \right) \quad (4-59)$$

4.7 Cálculo de la Disipación Viscosa.

Sustituyendo la expresión de la potencia total en la ecuación (4-47) y despejando el término de la disipación viscosa:

$$E_v = \mu \frac{\pi^2 D^2 N^2 wL}{h \sin(\theta)} \left[4 - 6 \cos^2(\theta) \frac{Q}{Q_d} + 3 \cos^2(\theta) \left(\frac{Q}{Q_d} \right)^2 \right] \quad (4-60)$$

Con fin de encontrar un aproximado del incremento de temperatura para el caso de operación adiabática, despreciando el término de conducción de calor, la ecuación (4-48) se reduce a:

$$\Delta T = \frac{1}{c_p} * \frac{\dot{E}_v}{\rho Q} \quad (4-61)$$

5. Simulación del modelo.

Para llevar a cabo la simulación del modelo matemático del proceso de extrusión de harina de arroz fue necesario utilizar una plataforma de programación, donde se eligió a Matlab por su versatilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales. Para poder simular el proceso fue necesario realizar una recopilación de parámetros geométricos del husillo y las propiedades fisicoquímicas de la harina de arroz.

5.1 Parámetros geométricos del husillo y de la boquilla.

Con la ayuda del asesor de proyecto, fue posible obtener una refacción del husillo con el que trabaja el equipo de extrusión Meelko dentro del Laboratorio de Ingeniería Química de la Facultad de Química. La Tabla 2 presenta la información recabada de la geometría de la refacción del husillo (Figura 10).

Tabla 2. Parámetros geométricos del husillo

D [m]	e [m]	h [m]	w [m]	θ [°]	L [m]	No Espiras
0.038	0.004	0.0075	0.013	8.10	0.017	13



Figura 10. Fotografía del husillo.

Para encontrar el ángulo del álabe se utilizó la ecuación (5-1) (Gutiérrez Morales & Bornacelli Castillo, Julio 2008):

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{w+e}{\pi D} \right) \quad (5-1)$$

Por otra parte, la boquilla propuesta para el desarrollo de este modelo será una de tipo tubular, por lo que las características geométricas de ésta se resumen a la longitud y diámetro de la boquilla, las cuales se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. Parámetros geométricos de la boquilla

D_b [m]	L_b [m]
0.002	0.005

5.2 Propiedades físicas de la materia prima.

Para trabajar el modelo planteado en la sección anterior se decidió que la materia prima que pasaría por el proceso de extrusión sería una harina elaborada a partir de arroz. Con el fin de obtener un buen modelado, se tomaron de la literatura datos experimentales reales de un experimento de extrusión de harina de arroz en un extrusor de doble husillo (Guha & Ali, 2011). A continuación, se presenta en la Tabla 4 los datos tomados de la literatura.

Tabla 4. Composición de harina de arroz de la variante Agonibora.

Componente	Composición
Humedad	12.1%
Proteína	7.8%
Lípidos	0.9%
Carbohidratos	75.9%
Fibra	2.9%
Sales	0.4%

También fue posible obtener los parámetros de la ley de la potencia de la literatura (Tabla 5): índice de la ley de la potencia y el parámetro de consistencia del fluido, los cuales fueron considerados como constantes bajo la suposición de estado isotérmico. Sin embargo, es necesario mencionar que para el caso no isotérmico estos parámetros dependen de la temperatura y no pueden considerarse constantes.

Tabla 5. Parámetros experimentales del modelo de la ley de la potencia

Parámetro	Valor a T=120°C	Unidades
n	0.855	adimensional
m	0.211	Pa · s ⁿ

Conociendo la composición de la harina, es posible calcular la capacidad calorífica, la conductividad térmica y la densidad de la materia prima, utilizando ecuaciones de cada propiedad que describen la contribución de cada componente en función de la temperatura, las cuales se presentan en la Tabla 6 (B.R. Becker, 2003).

Tabla 6. Ecuaciones de propiedades térmicas para componentes alimenticios (-40°C ≤ t ≤ 150°C)

Propiedad térmica	Modelo de la propiedad térmica por su componente
Capacidad calorífica J · kg ⁻¹ · K ⁻¹	Humedad $Cp_w = 4.1762 \times 10^3 - 9.0864 \times 10^{-2}t + 5.4731 \times 10^{-3}t^2$
	Proteína $Cp = 2.0082 \times 10^3 + 1.2089t - 1.3129 \times 10^{-3}t^2$
	Lípidos $Cp = 1.9842 \times 10^3 + 1.4733t - 4.8008 \times 10^{-3}t^2$
	CH $Cp = 1.5488 \times 10^3 + 1.9625t - 5.9399 \times 10^{-3}t^2$
	Fibra $Cp = 1.8459 \times 10^3 + 1.8306t - 4.6509 \times 10^{-3}t^2$
	Sales $Cp = 1.0926 \times 10^3 + 1.8896t - 3.6817 \times 10^{-3}t^2$
Conductividad térmica W · m ⁻¹ · K ⁻¹	Humedad $k_w = 5.7109 \times 10^{-1} + 1.7625 \times 10^{-3}t - 6.7036 \times 10^{-6}t^2$
	Proteína $k = 1.7881 \times 10^{-1} + 1.1958 \times 10^{-3}t - 2.7178 \times 10^{-6}t^2$
	Lípidos $k = 1.8071 \times 10^{-1} - 2.7604 \times 10^{-3}t - 1.7749 \times 10^{-7}t^2$
	CH $k = 2.0141 \times 10^{-1} + 1.3874 \times 10^{-3}t - 4.3312 \times 10^{-6}t^2$
	Fibra $k = 1.8331 \times 10^{-1} + 1.2497 \times 10^{-3}t - 3.1683 \times 10^{-6}t^2$
	Sales $k = 3.2962 \times 10^{-1} + 1.4011 \times 10^{-3}t - 2.9069 \times 10^{-6}t^2$
Densidad kg · m ⁻³	Humedad $\rho_w = 9.9718 \times 10^2 + 3.1439 \times 10^{-3}t - 3.7574 \times 10^{-3}t^2$
	Proteína $\rho = 1.3299 \times 10^3 - 5.1840 \times 10^{-1}t$
	Lípidos $\rho = 9.2559 \times 10^2 - 4.1757 \times 10^{-1}t$
	CH $\rho = 1.5991 \times 10^3 - 3.1046 \times 10^{-1}t$
	Fibra $\rho = 1.3115 \times 10^3 - 3.6589 \times 10^{-1}t$
	Sales $\rho = 2.4238 \times 10^3 - 2.8063 \times 10^{-1}t$

Introduciendo las ecuaciones de la Tabla 6, las composiciones de la Tabla 4 y las ecuaciones (5-2), (5-3) y (5-4) en Matlab, se obtuvo un estimado de las propiedades térmicas para la harina presentadas en la Tabla 7.

$$Cp = \sum_{i=1}^{nC} Cp_i * X_i \quad (5-2)$$

$$k = \sum_{i=1}^{nC} k_i * X_i \quad (5-3)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{nC} \rho_i * X_i \quad (5-4)$$

La viscosidad aparente para ciertas rapidezces de corte se determinó con ayuda de los parámetros obtenidos de la literatura para el modelo de la ley de la potencia, para el modelamiento del caso newtoniano. (Guha & Ali, 2011)

Tabla 7. Propiedades de la harina de arroz.

Capacidad calorífica	Cp	1907.7	J · kg ⁻¹ · K ⁻¹
Conductividad térmica	k	0.0997	W · m ⁻¹ · K ⁻¹
Densidad	ρ	1318.3	kg · m ⁻³
Viscosidad Aparente	η	0.211	Pa · s

Para reproducir los perfiles de operación fue necesario suponer algunas variables de proceso, las cuales se enlistan en la Tabla 8.

Tabla 8. Variables de entrada de proceso.

Frecuencia de rotación*	N₃₀₀	5.00	s ⁻¹
Frecuencia de rotación**	N₅₀₀	8.33	s ⁻¹
Temperatura de la masa fundida	T_h	120	°C

* Tomada de (Guha & Ali, 2011).

** Frecuencia de rotación real a la que opera el extrusor que se pretende modelar.

5.3 Construcción del código.

5.3.1. Caso newtoniano

Una vez recopilados la serie de variables de entrada descritas anteriormente, se asignó una variable para cada dato dentro del código.

El reto para poder reproducir los perfiles del sistema consiste en resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales para los balances de momentum en el extrusor y en la boquilla con sus respectivas condiciones que definen la particularidad del sistema en cuestión. Para ello fue necesario utilizar la función `bvp4c` (boundary value problem – fourth-order method) la cual resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma $y' = f(x, y)$, $x \in [a, b]$, que están sujetas a condiciones límites no necesariamente iniciales. El uso básico de la función `bvp4c` es el siguiente:

$$sol = bvp4c(odefun, bcfun, solinit)$$

Donde `odefun`, `bcfun` y `solinit` son las entradas y `sol` es la salida de la función `bvp4c`, `odefun` contiene el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver, `bcfun` contiene las condiciones límite asociadas al problema, `solinit` es una estructura que contiene las aproximaciones iniciales de la solución y es construida mediante la función `bvpinit`. Finalmente, `sol` representa una estructura que contiene la aproximación numérica calculada, así como algunos datos informativos de la solución. Los campos más importantes de la estructura `sol` son:

- `sol.x` contiene la malla final del intervalo $[a, b]$.
- `sol.y` contiene la aproximación numérica de la solución $y(x)$ en los puntos de `sol.x`

Adicionalmente la función puede ser definida con el argumento `options` el cual es creado usando la función `bvpset`, el cual puede especificar las tolerancias de error para la solución.

Con el fin de trabajar con un rango conocido, se procedió a adimensionalizar las ecuaciones diferenciales a resolver.

Utilizando las variables adimensionales ya mencionadas anteriormente, la forma adimensional de la ecuación (4-12):

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = \frac{h^2\Delta P}{\mu Z U_z} \quad (5-5)$$

Cuyas condiciones a la frontera resultan: $\varphi = 0$ en $\eta = 0$ y $\varphi = 1$ en $\eta = 1$.

Para poder utilizar la función `bvp4c` es necesario realizar un cambio de variable que convierta la ecuación diferencial de orden 2 ecuación (5-5) a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de orden 1. Utilizando el cambio de variable: $\varphi = \varphi_1$ y que $\frac{d\varphi}{d\eta} = \varphi_2$, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \varphi_2 \quad (5-6)$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\eta} = \frac{h^2\Delta P}{\mu Z U_z} \quad (5-7)$$

A continuación, se presenta el desarrollo para construir las entradas de la función `bvp4c` en Matlab.

1. Se define una función anónima que represente el segundo miembro de cada una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones a resolver:

$$f = @(x, y) [y(2), (h^2*\Delta P)/(\mu*Z*U_z)]$$

2. Se define una función anónima que evalúa la función que define las condiciones a la frontera:

$$bc = @(ya, yb) [ya(1); yb(1)-1]$$

3. Se construye la estructura para proporcionar la aproximación inicial.

$$\begin{aligned} xmesh &= linspace(0,1,500) \\ solinit &= bvpinit(xmesh, [0 0]) \end{aligned}$$

4. Se construye el argumento `options` ajustando una tolerancia relativa de 0.001:

$$options = bvpset('RelTol', 1e-3)$$

5. Se utiliza la función `bvp4c` para calcular la solución y posteriormente se traza la solución.

```
sol=bvp4c(f, bc, solint, options)
```

Este procedimiento se llevó a cabo de la misma manera para el caso de la resolución de las ecuaciones diferenciales para el balance de momentum de la componente transversal dentro del extrusor y el balance de momentum en la boquilla.

Para poder hallar el valor del punto eficiente de operación del extrusor, se construyó la gráfica Q vs ΔP , donde se supuso un conjunto de valores de caída de presión en el extrusor basados en el valor máximo que puede tomar, con ayuda de la función `trapz` se obtiene numéricamente el valor del flujo volumétrico para cada caída de presión tanto para el extrusor como para la boquilla en cuestión.

La función `trapz(X,Y)` calcula la integral aproximada de “Y” mediante el método trapezoidal con respecto al espaciado escalar especificado por “X”, donde en este caso “X” son el conjunto de valores de la variable adimensional η y “Y” son el conjunto de valores de la variable adimensional φ .

Las líneas de código se presentan al final del documento en el Anexo 1.

5.3.2. Caso no newtoniano.

Como primer paso fue necesario encontrar numéricamente el valor del máximo de la distribución de velocidad para poder obtener el valor de flujo volumétrico. Se utilizó la función `vpasolve`, la cual funciona alimentando dos entradas: la ecuación que se quiere resolver y la variable en la cual esta expresado y se quiere encontrar. En este caso, la ecuación a resolver es la ecuación (4-39) y la variable a encontrar es el máximo (η_0).

Una vez encontrado el valor del máximo se utilizó la expresión (4-40) para el cálculo de flujo volumétrico.

Para ambos casos, newtoniano y no newtoniano, se estableció un vector que contiene un conjunto de valores de caída de presión basado en fracciones de la caída de presión máxima en el extrusor (4-32), con la finalidad de utilizar dichos

valores para calcular distintos valores de flujo volumétrico y poder encontrar el punto eficiente de operación del extrusor.

Con ayuda de la función *InterX* obtenida de la página de MathWorks realizada por el usuario NS se pudo obtener el valor de la intersección entre la curva del husillo y de la boquilla y así conocer los valores óptimos. (NS, 2021)

Se llevaron a cabo cálculos repetitivos con ayuda de la estructura de un ciclo *for*, con ello es posible evaluar las funciones descritas anteriormente y hallar el punto eficiente de operación, además de que fueron de utilidad para graficar los perfiles de velocidad.

Las líneas de código se presentan al final del documento en el Anexo 1.

6. Resultados de la simulación.

Se realizaron dos series de simulaciones del sistema a distintas frecuencias de rotación del tornillo (300 y 500 rpm) para el caso newtoniano y el no newtoniano. Las variables de salida de la simulación se presentan a continuación.

Tabla 9. Variables de salida de proceso N= 300 rpm

Variables de salida		Caso newtoniano	Caso No newtoniano	Unidades
Flujo volumétrico	Q	6.14×10^{-6}	3.43×10^{-6}	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
Incremento de presión	ΔP	1.65	0.93	MPa
Flujo másico	G	29.14	16.42	kg · h⁻¹
Potencia total	P_w	0.69	0.75	W
Disipación Viscosa	E_v	0.59	0.69	W
Cambio de Temperatura	ΔT	1.40×10^{-12}	9.40×10^{-13}	K
No. Reynolds	Re	35.58	35.56	-
No. Brinkman	Br	5.20×10^{11}	8.01×10^{11}	-
Flujo volumétrico máximo	Q_{max}	2.88×10^{-5}	2.88×10^{-5}	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
Incremento de presión máximo	ΔP_{max}	2.09	2.09	MPa

Como primera observación, los perfiles de velocidad para el caso newtoniano, tanto para el extrusor como para la boquilla se graficaron de manera paralela la solución analítica y la solución numérica descrita en este trabajo, y en todos los casos, empatan de manera correcta ambas soluciones y las condiciones a la frontera impuestas se cumplen, por lo que visualmente se estima un error mínimo entre ambas soluciones.

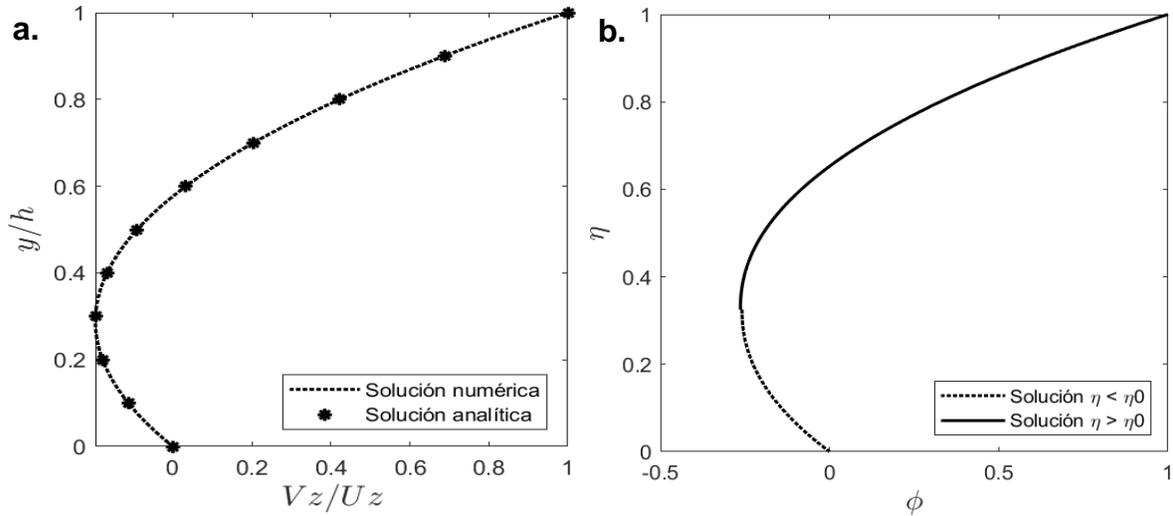


Figura 11. Perfil de velocidades adimensional dirección axial (a. newtoniano, b. no newtoniano) con $N = 300$ rpm.

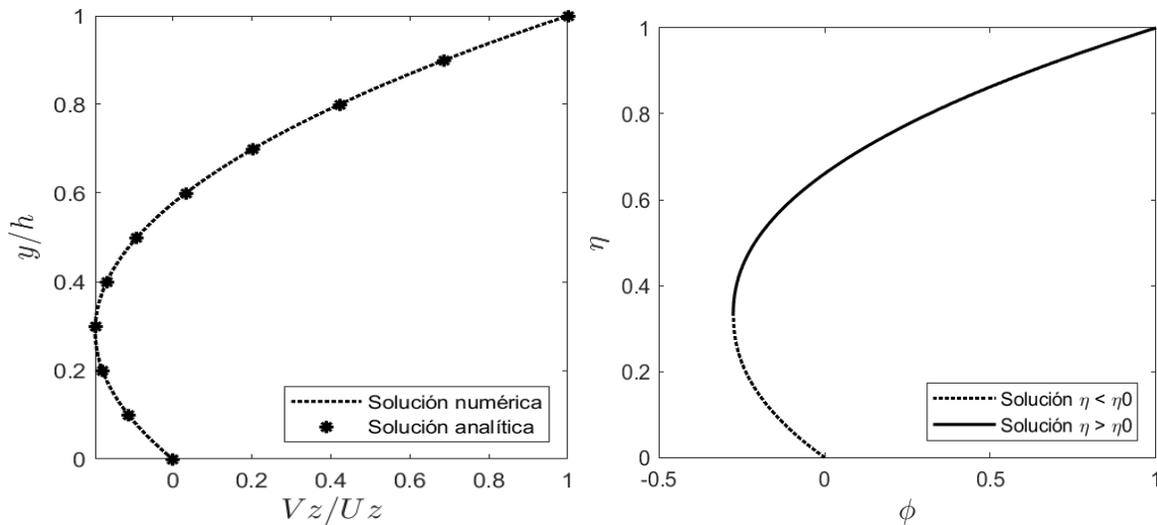


Figura 12. Perfil de velocidades adimensional a. Dirección axial b. Dirección transversal con $N = 500$ rpm.

Tabla 10. Variables de salida de proceso $N= 500$ rpm

Variables de salida		Caso newtoniano	Caso No newtoniano	Unidades
Flujo volumétrico	Q	1.02×10^{-5}	5.24×10^{-6}	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
Incremento de presión	ΔP	2.75	1.41	MPa
Flujo másico	G	48.58	24.88	kg · h⁻¹
Potencia total	P_w	1.93	2.10	W
Disipación Viscosa	E_v	1.65	1.94	W
Cambio de Temperatura	ΔT	6.7×10^{-12}	4.0×10^{-12}	K
No. Reynolds	Re	59.27	59.27	-
No. Brinkman	Br	3.13×10^{11}	5.20×10^{11}	-
Flujo volumétrico máximo	Q_{max}	4.81×10^{-5}	4.81×10^{-5}	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
Incremento de presión máximo	ΔP_{max}	3.49	3.49	MPa

Para el caso no newtoniano, solo se graficó la solución analítica, basada en la resolución numérica de la ecuación (4-39), donde se obtuvo el valor del máximo del perfil de velocidades adimensional.

Los perfiles de velocidad adimensional en la dirección axial en el extrusor muestran la tendencia esperada (Figura 11 y Figura 12), donde se visualiza claramente las contribuciones de velocidad lineal (flujo por arrastre) y la velocidad parabólica (flujo por presión), esto se cumple para el caso newtoniano y el no newtoniano.

Tabla 11. Valores del máximo caso no newtoniano.

Variable de Salida		N₃₀₀	N₅₀₀
Velocidad adimensional (máximo)	ϕ_0	-0.26	-0.66
Altura adimensional (máximo)	η_0	0.32	0.40

Con ayuda de las expresiones (4-37) y (4-38) fue posible hallar el valor de la velocidad adimensional del máximo basado en el cálculo numérico de η_0 , los valores se presentan en la tabla 11. El valor de los máximos arroja la tendencia que a conforme se aumenta la rotación del husillo, el máximo se mueve en dirección positiva de eje de las ordenadas, lo que habla de un incremento en el flujo de

presión, puesto que el aumento de la rotación del husillo conlleva mayor cantidad de material y por ende una caída de presión mayor.

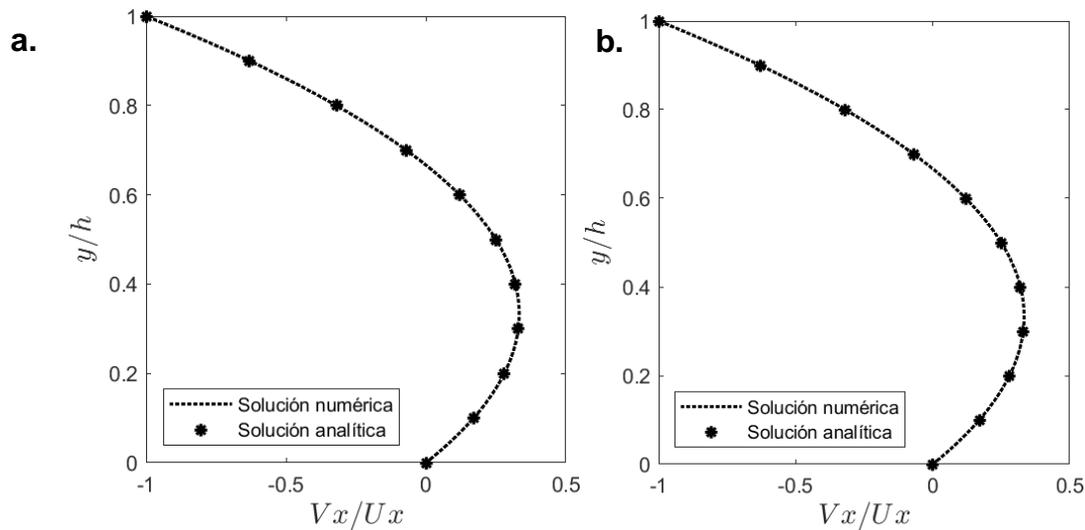


Figura 13. Perfil de velocidades adimensional dirección transversal (a. 300 rpm, b. 500 rpm.)

Por otra parte, también se reprodujo el perfil de velocidades adimensional en la dirección transversal para el caso newtoniano (Figura 13), donde se puede observar que se cumplen las condiciones a la frontera, y se observan de igual manera en el perfil axial, las contribuciones de flujo por arrastre y por presión. Tampoco se observa alguna diferencia considerable entre los perfiles a rotaciones del husillo diferente.

Además, se reprodujo el perfil parabólico de velocidades dentro de la boquilla para el caso newtoniano (Figura 14), donde se adimensionalizó con respecto a la velocidad característica de la dirección axial, con el fin de conocer que tanto aumenta con respecto a ésta.

La construcción del perfil parabólico de la boquilla se llevó a cabo en dos regiones, antes y después del máximo de velocidad (coordenada $r = 0$), debido a que en la solución general del balance de momentum de la boquilla da como resultado una expresión que contiene un término logarítmico y en la coordenada del máximo ($r = 0$) el logaritmo no está definido.

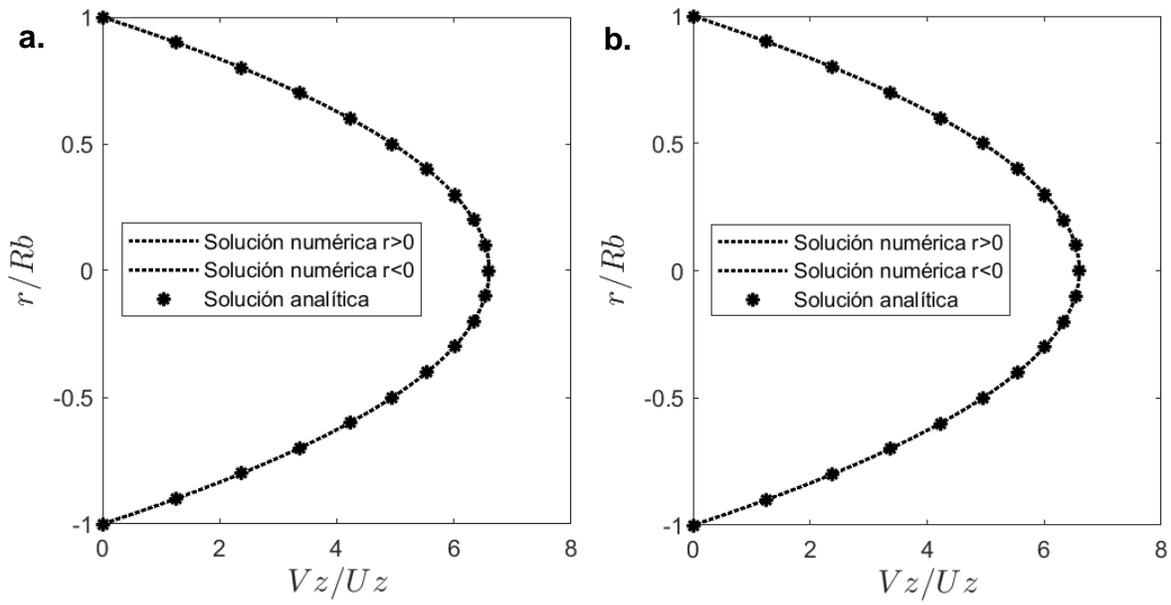


Figura 14. Perfil de velocidades adimensional en la boquilla (a. 300 rpm, b. 500 rpm.)

Observando las Figura 15 y Figura 16, es posible visualizar que no hay cambios apreciables en las curvas del husillo y de la boquilla con respecto a la velocidad de rotación, sin embargo, al tomar en cuenta las variables de proceso de salida mostradas en las Tablas 9 y 10, al incrementar la frecuencia de rotación del husillo, incrementa la cantidad de material fundido que atraviesa el extrusor, aumentando el flujo másico y la potencia total requerida, por consiguiente, la energía generada por disipación viscosa incrementa.

En la Tabla 9 y 10 se presentan los incrementos de temperatura en el extrusor para cada caso, los cuales poseen valores cercanos a cero, lo cual refuerza la suposición de estado isotérmico, indicando que toda la energía que entra al sistema de manera mecánica se transforma en presión para mover al fluido y lo demás se disipa en forma de calor.

Se calculó el número de Reynolds para cada caso, y su valor se encuentra en los rangos de comportamiento laminar e indica que la transferencia de momentum por el mecanismo de difusión es quien domina con respecto a la transferencia de momentum por el mecanismo convectivo.

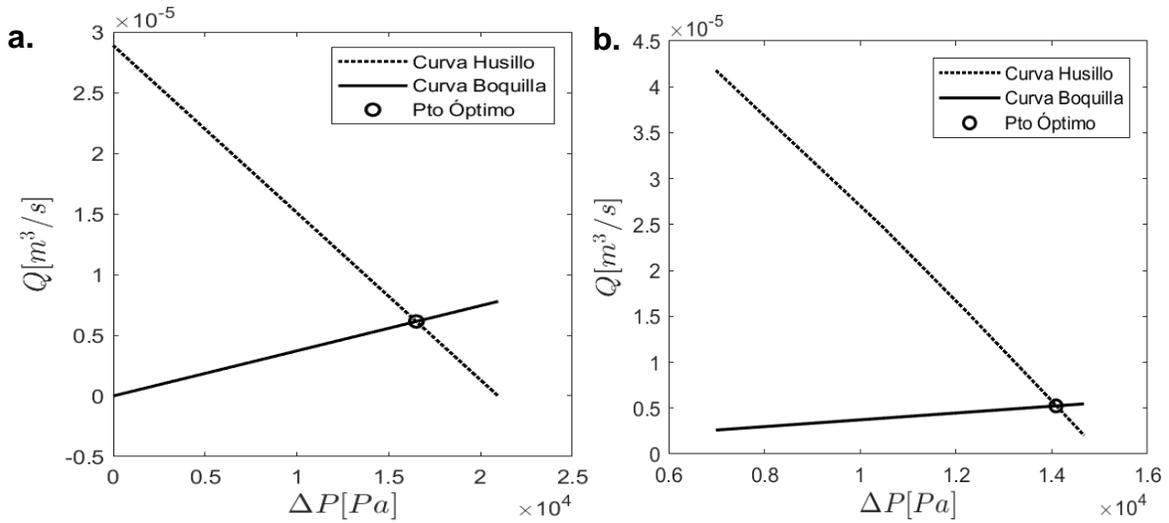


Figura 15. Punto eficiente de operación del extrusor (a. newtoniano, b. no newtoniano) con $N = 300$ rpm

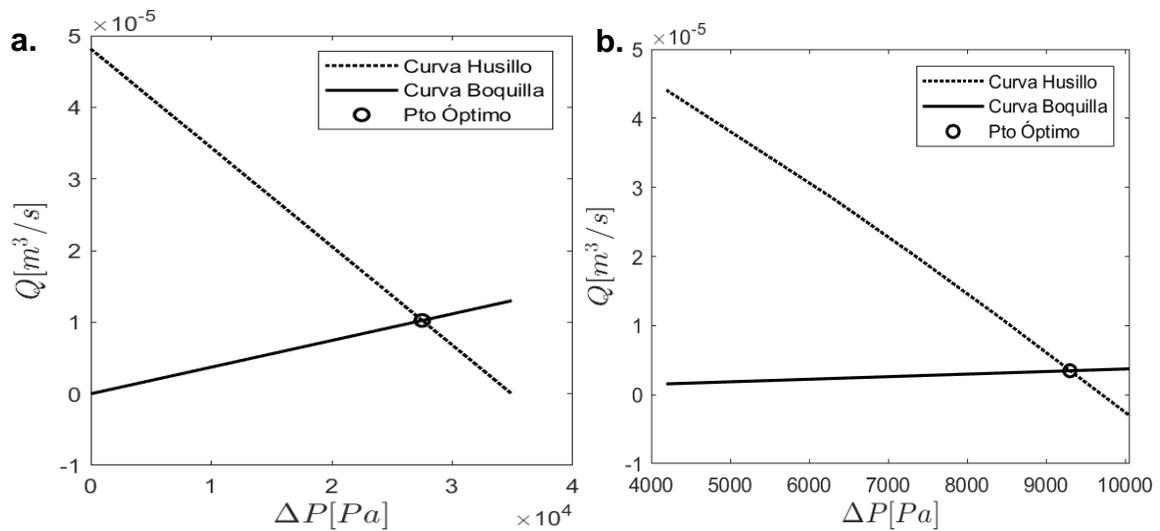


Figura 16. a. Punto eficiente de operación del extrusor (a. newtoniano, b. no newtoniano) con $N = 500$ rpm

Asimismo, se calculó el número de Brinkman, resultando en ambos un valor muy grande, puesto que el gradiente de temperaturas obtenido por las suposiciones descritas anteriormente es casi nulo, por lo que se supone entonces que el mecanismo de transferencia de calor que domina es la disipación viscosa y no la conducción, lo cual refuerza la suposición de considerar un sistema isotérmico.

Al incrementar la frecuencia de rotación del husillo aumenta la velocidad de corte a la cual estará sometida la masa fundida, y al tratar con un fluido pseudoplástico, su viscosidad disminuye, permitiendo un flujo volumétrico mayor de material que pasa a través de la misma boquilla, por ello los flujos volumétricos de las simulaciones de N=300 rpm tienen un valor menor respecto a los valores obtenidos para la simulación de N=500 rpm.

También es posible observar que los puntos eficientes de operación obtenidos reflejan altos incrementos de presión y bajos flujos volumétricos debido que, al tener un diámetro de boquilla pequeño, se presenta una resistencia mayor al paso del flujo, lo cual incrementa la caída de presión dentro del extrusor.

Finalmente, es posible notar que existe una disparidad entre los valores de las variables de salida para el caso newtoniano y el no newtoniano, pero ambos se mantienen en los mismos ordenes de magnitud, la actividad experimental revelará cual modelo representa mejor el sistema real.

7. Análisis de sensibilidad paramétrica

Para el caso del modelado y simulación de equipos de proceso industriales, resulta útil emplear la técnica del análisis de sensibilidad paramétrica para poder analizar el comportamiento de cualquier proceso industrial, a través del monitoreo de la sensibilidad de respuesta que generan los parámetros involucrados en el modelo matemático (Ojeda, GilPavas, Dobrosz-Gómez, & Gómez, 2014)

La sensibilidad paramétrica está definida por qué tan sensible es el comportamiento del sistema de estudio frente a cambios en los valores de los parámetros involucrados en el modelo matemático del mismo (HERNANDEZ-PEDRERA, RIVERA-SOTO, MATOS-DURAN, & PIÑÓ-CUENCA, 2014).

Para entender cómo se utiliza esta técnica, se parte de la suposición de un modelo matemático que describe un comportamiento dinámico como el siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \quad (7-1)$$

Donde p representa el vector de parámetros del sistema. Ahora bien, la siguiente ecuación representa como cambia o depende el comportamiento del sistema con respecto algún parámetro.

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) S + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) \quad (7-2)$$

donde S contiene los coeficientes de sensibilidad dados por el número de parámetros y ecuaciones que describan el sistema.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i1} & \dots & S_{ij} \end{bmatrix} \quad (7-3)$$

Y se define como coeficiente de sensibilidad:

$$S_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \quad (7-4)$$

Esta técnica puede ser aplicada en el sistema en cuestión utilizando las ecuaciones de balance de momentum en el extrusor y el siguiente vector de parámetros.

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{\sin(\theta) \Delta P}{\mu N_e Lc} \left(y - \frac{h}{2}\right) + \frac{\pi DN \cos(\theta)}{h} \quad (7-5)$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\pi DN \sin(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6}{y}\right) \quad (7-6)$$

$$p = [\mu, \Delta P, N, \theta, h, Lc, D] \quad (7-7)$$

Los coeficientes de sensibilidad pueden tener valores positivos o negativos, cuando posee un valor positivo, indica que un aumento en los parámetros de entrada conduce a un incremento en la variable dependiente, mientras que cuando posee un valor negativo ocurre lo contrario.

Es posible evaluar los coeficientes de sensibilidad paramétrica integrando simultáneamente las ecuaciones que representan el sistema dinámico y el grupo de ecuaciones diferenciales lineales que representa a los coeficientes de sensibilidad.

Se implementó una función en Matlab basada en la literatura, la cual puede resolver lo anteriormente explicado, las líneas de código se encuentran en el anexo I y el conjunto de ecuaciones diferenciales a resolver se encuentran en el anexo II de este trabajo. Los resultados se muestran a continuación en la Figura 17 y Figura 18.

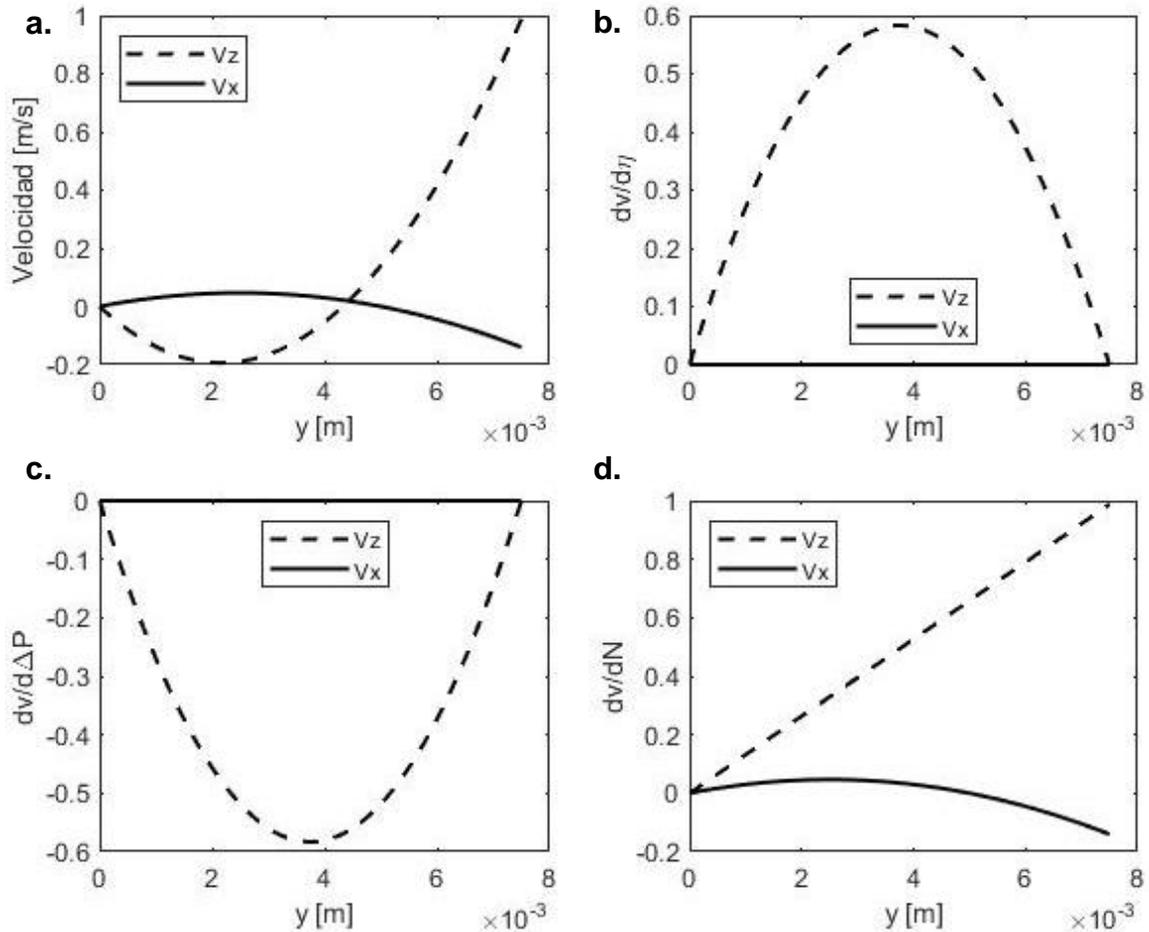


Figura 17. Resultados del análisis de sensibilidad paramétrica (a. Perfiles de Velocidad eficientes, b. Efecto de la viscosidad sobre los perfiles de velocidad, c. Efecto de la caída de presión sobre los perfiles de velocidad, d. Efecto de la frecuencia de rotación sobre los perfiles de velocidad).

Los resultados muestran diferentes tendencias, en el caso de la figura 17 los parámetros analizados son variables de entrada del proceso: viscosidad, caída de presión y frecuencia angular, por otra parte, en la figura 18 se planteó como un caso hipotético la posibilidad de que existan cambios en los parámetros geométricos del husillo: ángulo, profundidad, longitud de cuerda y diámetro, pues en el sistema en cuestión, no son posibles las variaciones de estos parámetros.

Los resultados muestran que los coeficientes de sensibilidad tienen una mayor variación respecto de la velocidad axial que de la velocidad transversal según el modelo matemático propuesto en este trabajo para fluido newtoniano.

En la figura 17b se observa que el parámetro de la viscosidad marca un perfil parabólico con valores positivos, lo cual habla de que todos los incrementos en viscosidad repercutirán en el incremento de velocidad en la dirección axial. Por otra parte, la figura 17c muestra que el parámetro de la diferencia de presión en el extrusor marca un perfil parabólico con valores negativos, por lo que se supone que a todo incremento de este parámetro en el sistema repercutirá en decrementos de la velocidad axial en el rango de la profundidad del husillo. Para el caso de la velocidad transversal no hay efecto alguno por causa de los parámetros: viscosidad y caída de presión, como consecuencia de la aproximación de flujo paralelo explicada anteriormente.

Por último, la figura 17d muestra un perfil de cambios lineal con valores positivos para el parámetro de frecuencia angular sobre la velocidad axial, mientras que para la velocidad transversal muestra un perfil de cambios parabólico con valores negativos, lo que indica que a medida que haya incrementos en este parámetro repercutirá en incrementos en la velocidad axial y decrementos en la velocidad transversal.

La figura 18 presenta la influencia de los parámetros asociados a las variables geométricas del extrusor sobre el sistema. Para el caso de la velocidad axial, el efecto del ángulo de los alabes del husillo muestra una función convexa con valores negativos, el efecto de la longitud de cuerda muestra una función cóncava con valores positivos y tanto el efecto de la profundidad del álabe como el efecto del diámetro del husillo muestra una función lineal con valores positivos. Por otra parte, para el caso de la velocidad transversal, tanto el efecto del ángulo como el del diámetro del husillo presentan una función cóncava con valores negativos, no hay efecto alguno con respecto a la longitud de cuerda y el efecto de la profundidad de los álaves muestra una función parabólica con valores negativos.

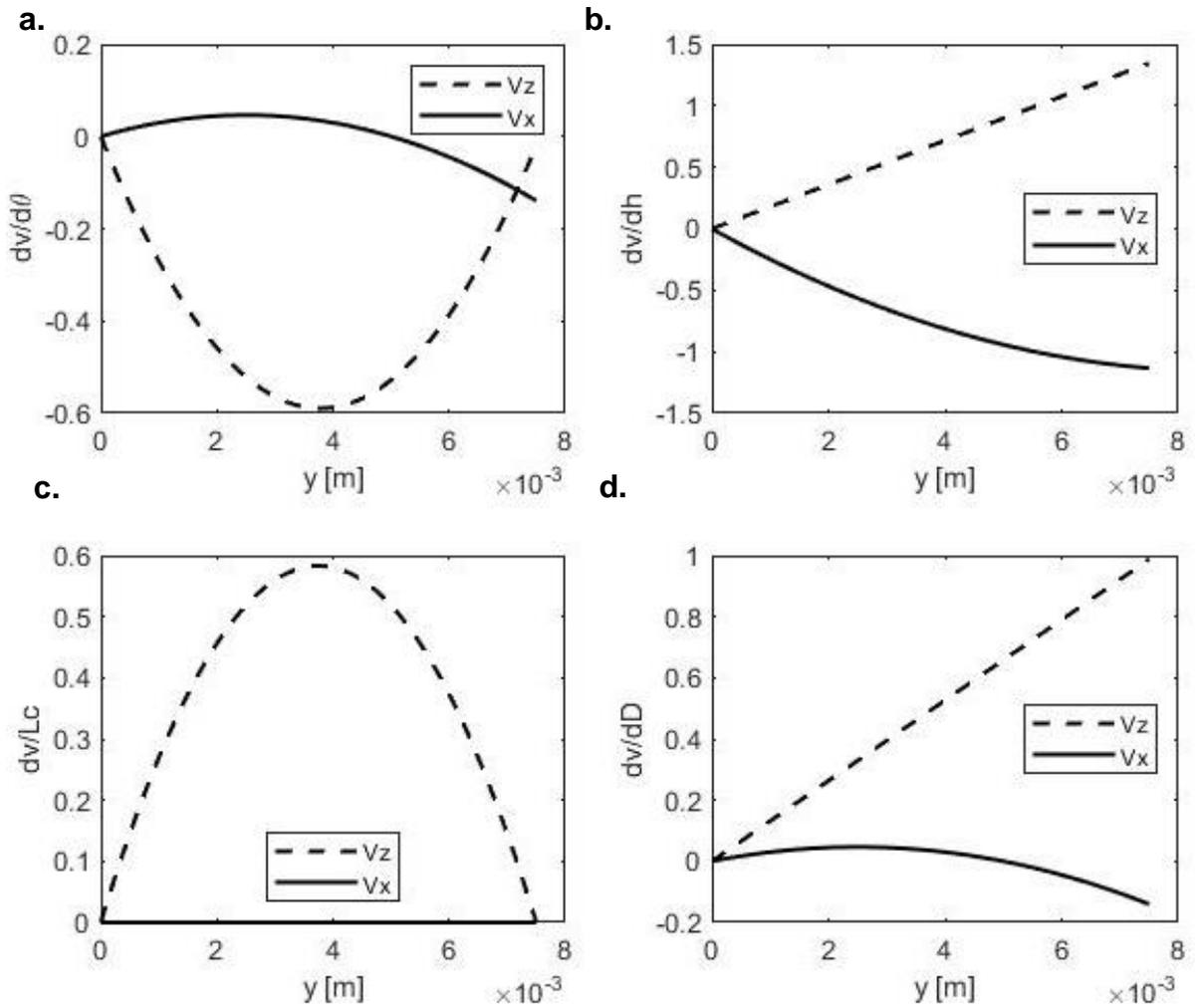


Figura 18. Resultados del análisis de sensibilidad paramétrica (a. Efecto de la ángulo del husillo sobre los perfiles de velocidad, b. Efecto de la profundidad del álabe sobre los perfiles de velocidad, c. Efecto de la longitud de cuerda sobre los perfiles de velocidad, d. Efecto del diámetro del husillo sobre los perfiles de velocidad).

7.1 Variación de parámetros.

Con ayuda de la plataforma de programación es posible visualizar como una variable de proceso tiene efecto sobre el comportamiento global del sistema. Para esto se eligió una variable de proceso y un parámetro geométrico del husillo para estudiar su influencia en el comportamiento global: Caída de presión y la profundidad de los álaves.

Como primer paso, se revisó la influencia de estas dos variables sobre el perfil de velocidades en la dirección “z”, donde se utilizó el conjunto de datos de caídas de

presión que fueron utilizados para construir la curva Q vs ΔP , y se propuso un conjunto de profundidades de álabe del 25, 50 y 75% del ya propuesto. (Figura 19).

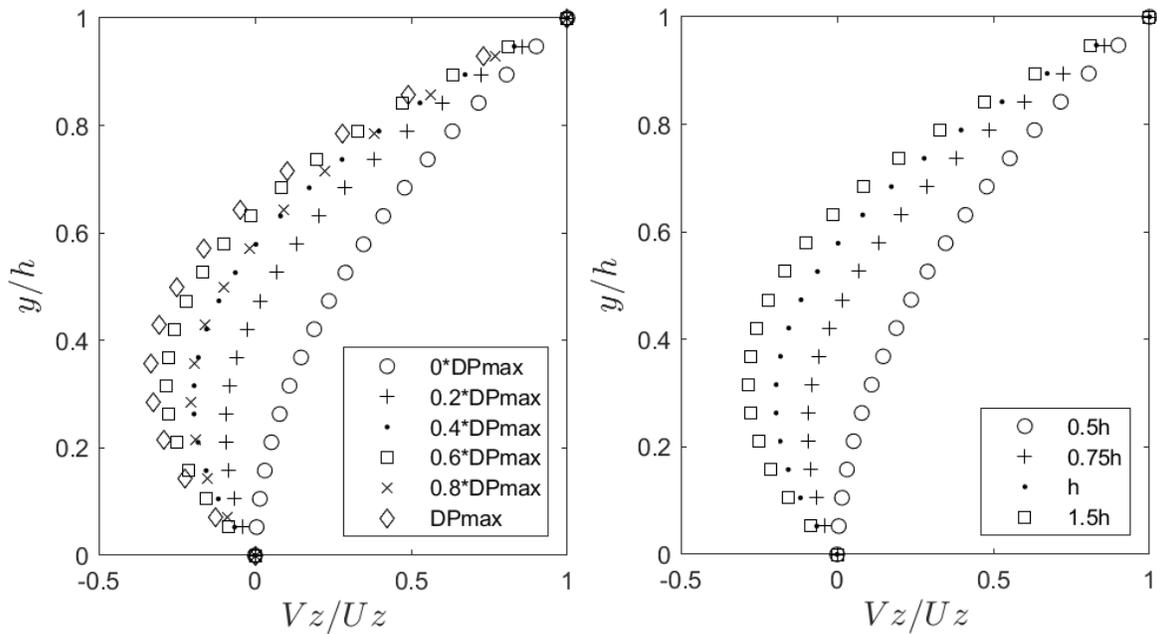


Figura 19. Perfil de velocidades adimensional en la dirección axial variando la caída de presión y la profundidad del álabe.

La variación de ambos parámetros refleja una influencia similar en el comportamiento del perfil de velocidades axial, puesto que al disminuir tanto el incremento de presión como la profundidad del álabe la curvatura de la gráfica se va perdiendo hasta obtener un comportamiento lineal.

Al disminuir el incremento de presión en el extrusor la contribución de flujo por presión va disminuyendo y conforme se acerca al incremento de presión nulo, se cumple la condición límite de flujo total, donde la resistencia a fluir es nula y el fluido se comporta como un fluido entre dos placas paralelas con una de ellas en movimiento, en este caso perdura el movimiento por arrastre.

En el caso de manipular la profundidad del álabe, es posible observar que a medida que la altura del álabe aumenta, el flujo que sale por la boquilla disminuye, puesto que la contribución de flujo negativa (flujo por presión) va aumentando.

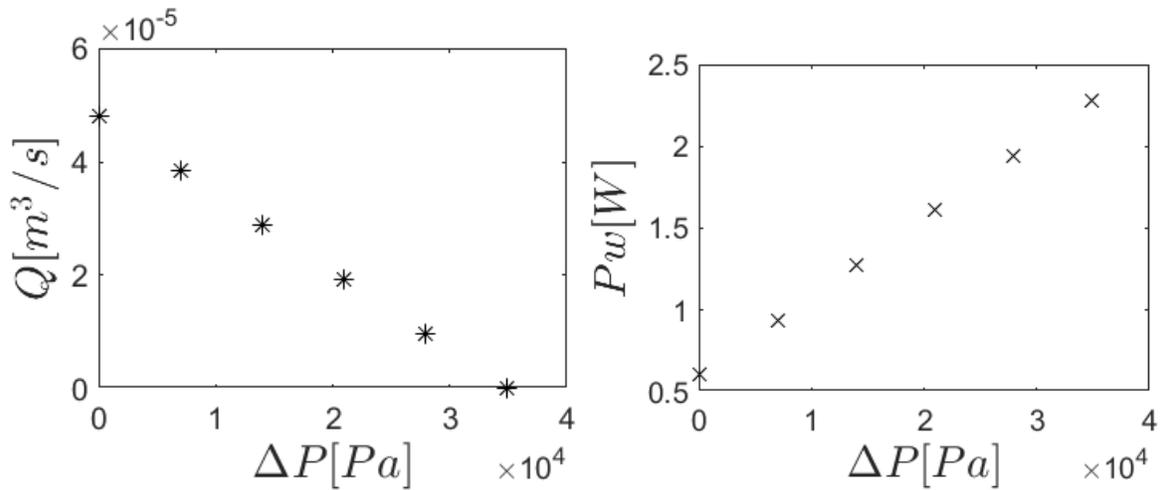


Figura 20. Influencia de la variación de la caída de presión sobre el flujo y la potencia requerida.

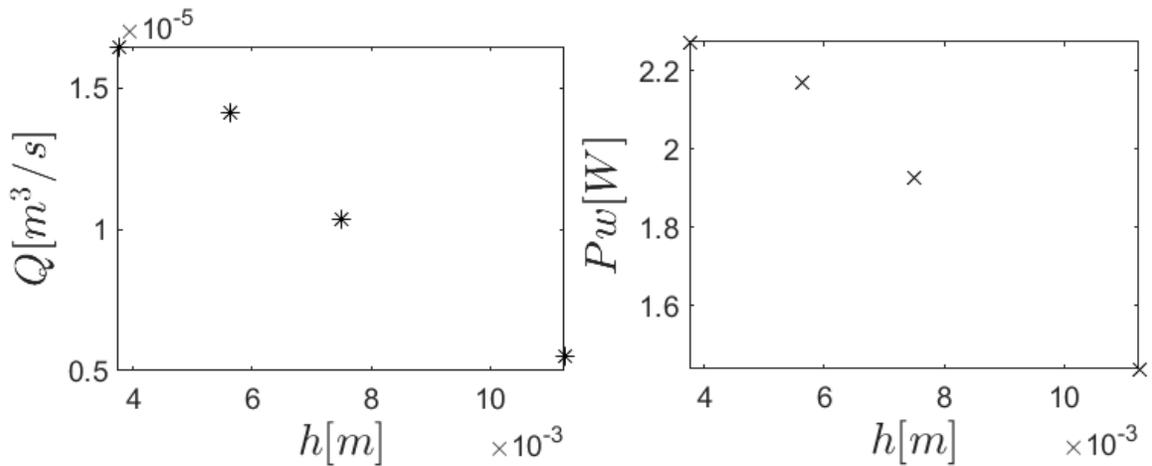


Figura 21. Influencia de la variación de la profundidad del álabe sobre el flujo y la potencia requerida.

Es evidente que, al aumentar el incremento de presión dentro del extrusor, el flujo será menor, pues habrá una contribución de retroceso mayor en el perfil de flujo global, esto se verá reflejado en una disminución de flujo volumétrico y como consecuencia un aumento de potencia requerida (Figura 20). Por otra parte, al disminuir la profundidad de canal, disminuye la zona donde pasará el flujo de material fundido, es por lo que el flujo volumétrico disminuye, y como consecuencia de ello, la potencia requerida disminuirá, pues se necesitará menos energía para mover menos cantidad de fluido. (Figura 21)

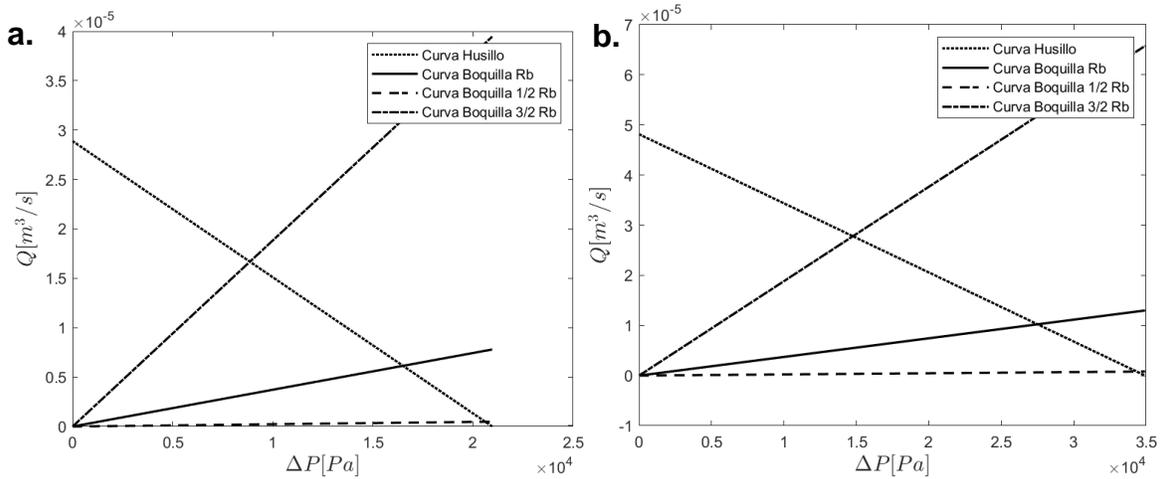


Figura 22. Influencia de la variación del radio de la boquilla sobre el punto óptimo de operación (a. $N = 300 \text{ rpm}$, b. $N = 500 \text{ rpm}$)

Asimismo, es posible modificar las características geométricas de la boquilla, pues esta variable de igual manera influye considerablemente sobre el comportamiento global del sistema, en este caso es más notable sobre el punto eficiente de operación.

Se realizaron cuatro corridas de la simulación para obtener las variables de salida para un conjunto de dos radios ($1/2R_b$ y $3/2R_b$) a las dos frecuencias de rotación trabajadas (300 y 500 rpm).

Los resultados muestran que a medida que el radio de la boquilla disminuye la pendiente de la curva característica de la boquilla disminuye, resultando un punto eficiente con un incremento de presión elevado y un flujo volumétrico bajo, esto se cumple en ambas frecuencias de rotación planteadas.

Por lo que se deduce que, a menor radio de la boquilla, el sistema presentará mayor resistencia a fluir, requiriendo valores de potencia elevados y dando como consecuencia flujos de material pequeños.

8. Conclusiones.

- Se logró un estudio exitoso de los parámetros operativos del equipo de extrusión, ya que el presente trabajo muestra un buen precedente para posteriores modificaciones y adecuaciones del modelo.
- Se analizaron y describieron los fenómenos de transporte involucrados en el proceso de extrusión y se logró encontrar el punto de operación eficiente para el modelo del caso newtoniano y del caso no newtoniano.
- Se reprodujeron los perfiles de velocidades del extrusor y de la boquilla, reflejando la física del problema con sus respectivas consideraciones.
- El análisis de sensibilidad paramétrica muestra la influencia que tienen los parámetros geométricos del tornillo y las variables de proceso sobre las variables de salida de proceso que son claves para el diseño y operación del extrusor.

9. Proyecciones a futuro.

- Optimización del código utilizado para que sea más eficiente respecto al tiempo de resolución y más preciso para los resultados de las variables de salida con el fin de tener una mejor predicción de los parámetros operativos del sistema.
- Realizar una mejora del modelo expuesto en este trabajo considerando la implicación del flujo transversal en el modelo no newtoniano y con la consideración de un sistema no isotérmico.
- Que dicho trabajo sirva como base para la elaboración de un protocolo experimental para la realización de una práctica utilizando el extrusor de monohusillo y extruyendo distintos tipos de harina dentro del Laboratorio de Ingeniería Química de la Facultad de Química de la UNAM.

10. Bibliografía.

- B.R. Becker, B. F. (2003). FREEZING | Principles. In B. F. B.R. Becker, *Encyclopedia of Food Sciences and Nutrition (Second Edition)* (pp. 2706-2711). Academic Press.
- Barranco, E. V. (2015). *Preparación de alimentos expandidos a base de harina de trigo y harina de amaranto, enriquecidos con pigmentos naturales. (Licenciatura)*. México,D.F.: UNAM.
- Bello, J., Balois, R., Sumaya, M., Juárez, P., Rodríguez, A., Sánchez, L., & Jiménez, E. (2014). Extracción y caracterización reológica de almidon y pectina en frutos de platano 'Pera'. *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas*, 1501-7.
- Beltrán, M., & Marcilla, A. (n.d.). Extrusión. In *Tecnología de Polímeros*. (pp. 107-116, 140-147).
- Bird, R. B., Steward, & Warren E. (2006). *Fenomenos De Transporte*. Limusa Noriega.
- Clextral. (2020). *EXTRUSIÓN DE DOBLE TORNILLO: CARACTERÍSTICAS*. Retrieved from <https://www.clextral.com/es/tecnologias-lineas/tecnologias-y-procesos/extrusion-de-doble-tornillo-caracteristicas-y-beneficios/>
- Fenner, R. T. (1976). Developments in the analysis of steady screw extrusion of polymers. *Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science and Technology London SW7*, 19.
- Guha, M., & Ali, S. (2011). Changes in rheological properties of rice flour during extrusion cooking. *Journal of Texture Studies*, 451-458.
- Gutiérrez Morales, P. A., & Bornacelli Castillo, J. F. (Julio 2008). METODOLOGÍA PARA EL DISEÑO DE TORNILLOS DE MÁQUINAS EXTRUSORAS. *Universidad Autónoma de Occidente*, 50-60.

- Harper, J. M. (2009). Food extrusion. *C R C Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, 155-215.
- HERNANDEZ-PEDRERA, C., RIVERA-SOTO, M., MATOS-DURAN, R., & PIÑÓ-CUENCA, Y. (2014). Estudio de sensibilidad paramétrica en reactores continuos con agitación. *RTQ [online]*, 34(1), 59-70.
- Juárez, L. G. (2018). *Proceso novedoso para la extrusión de aceites esenciales de cítricos por extrusión en equipo de doble tornillo*. Ciudad de México, México.: UNAM.
- Kaufman, M. (2003). Advection and Mixing in A Single Screw Extruder-An Analytical Model. *Advection and Mixing in A Single Screw Extruder-An Analytical Model* (pp. 1-15). San Francisco: Physics Faculty Publications.
- Kroesser, F., & Middleman, S. (1965). The Calculation of Screw Characteristics for the Extrusion of non-Newtonian Melts. *POLYMER ENGINEERING AND SCIENCE.*, 230-234.
- Middleman, S. (1977). *Fundamentals of polymer processing*. United States of America: McGraw-Hill.
- NS. (2021, 08 25). *la.mathworks.com*. Retrieved from <https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22441-curve-intersections?focused=5165138&tab=function>
- Ojeda, J. C., GilPavas, E., Dobrosz-Gómez, I., & Gómez, M. Á. (2014). Análisis de la Sensibilidad Paramétrica del Proceso de Producción de Ciclo-Trimetileno-Triamina. *Información Tecnológica*, 25(4), 153-164.
- R.Guy. (2001). *Extrusion Cooking: Technologies and applications*. Cambridge: Woodhead.
- Reyes, M. F. (2009). *Caracterización reológica de tamaño de partícula de harina de maíz, gluten de maíz, trigo, soya y arroz utilizadas en la industria de alimentos extruidos*. Bogota, Colombia: Universidad de los Andes.

S. BRUIN, D. J. (1978). A REVIEW OF FUNDAMENTAL AND ENGINEERING ASPECTS OF EXTRUSION OF BIOPOLYMERS IN A SINGLE-SCREW EXTRUDER. *Agricultural University*, 38.

Tadmor, Z., & Gogos, C. (2006). *Principles of polymer processing*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.

Verdú, G. M. (2016). *Estudio, diseño, simulación y optimización de una matriz de extrusión de plástico*. España: UNIVERSITAT POLITECNICA DE VALENCIA.

ANEXO I.

Líneas de código de Matlab.

```
clc; clear; close all;
format short
% Modelado de Extrusor de monohusillo del LIQ de la FQ, UNAM, 2021.
% Utilizando como materia prima: Harina de Arroz.
% Definimos parámetros del husillo
D = 0.0381; %m - Diámetro del husillo
theta = 0.1411; %rad - Ángulo helicoidal
h = 0.0075; %m - Altura del Álabo
w = 0.013; %m - Ancho del canal
e = 0.004; %m - Espesor del Álabo
p = 13; % Numero de espiras del husillo
Lc = w+e; %m - Longitud de la cuerda
Z = p*Lc/sin(theta);
% Definimos parametros del fluido
m = 0.211; %Pa*s - Viscosidad
% Definimos parametros de la boquilla
Db = 0.002; %m
Rb = Db/2; %m
Lb = 0.005; %m
% Propiedades del fundido
Cp = 1.9077e3; % J/kg K - Capacidad térmica a P=cte
K = 0.0997; % W/mK - Conductividad termica
ro = 1.3183e3; %kg/m3 - Densidad
% Definimos especificaciones del extrusor
N = 500/60; %1/s - Frecuencia de rotación
Uz = pi*D*N*cos(theta); %m/s
Ux = pi*D*N*sin(theta); %m/s
B = (w*h^3)/(12*Z); %parametro geometrico
A = 0.5*w*h*D*pi*cos(theta); %parametro geometrico
k = (pi*Rb^4)/(8*Lb); %parametro geometrico
%Condiciones Límite
DPmax = (m*A*N)/B; %Caida de presión maxima
Qmax = A*N; %Flujo volumétrico máximo
%% CASO NEWTONIANO
% Punto eficiente de operación analitico
Qopt = (A*k*N)/(B+k); %m3/s
DPopt = ((A*m*N)/(B+k)); %Pa
% Potencia requerida
Qdrag = w*h*Uz/2;
Pw = (m*pi^2*D^2*N^2*w*Z)/(h)*(4-3*(Qopt/Qdrag)*(cos(theta))^2);
% Disipación viscosa
Ev = (m*pi^2*D^2*N^2*w*Z)/(h)*(4-6*(Qopt/Qdrag)*(cos(theta))^2+...
    3*(Qopt/Qdrag)^2*(cos(theta))^2);
% Diferencia de Temperatura.
DT = (1/Cp)*(Ev/ro*Qopt); %K
% Flujo másico
G = Qopt*ro*3600; %kg/h
% Reynolds
Dh = 4*(w*h)/(2*w+2*h); %Diametro hidraulico
Re = (ro*pi*D*N*Dh)/m;
%Brinkman
Br = (m*(pi*D*N)^2)/(K*DT);
```

```

% Balance de momentum dirección "z": Extrusor.

% Ecuación Constitutiva: Ley de viscosidad de Newton. Adimensionalizada.
% edo1 phi'(1)= phi(2) & edo2 phi'(2) = k1
f1 = @(x, y) [y(2); (DPopt*h^2)/(m*Z*Uz)];
% Se establecen las condiciones a la frontera
% phi(eta=0)=0 & phi(eta=1)=1
bc1 = @(ya, yb) [ya(1); yb(1)-1];
% Definimos rango de eta [0 1] y no. de puntos
xmesh1 = linspace(0,1,500);
% Establecemos valores iniciales con la función bvpinit y
% la tolerancia relativa llamando a odeset
solinit1 = bvpinit(xmesh1, [0; 0]);
options1 = odeset('RelTol',1.e-3);
% Llamamos a la función bvp4c y colocamos las entradas:
% vector de sistema de edo's, CF y solucion inicial.
sol1 = bvp4c(f1 , bc1, solinit1, options1);

% Balance de momentum dirección "x": Extrusor.

% Ecuación Constitutiva: Ley de viscosidad de Newton. Adimensionalizada.
% edo1 phi'(1)= phi(2) & edo2 phi'(2) = -6
f2 = @(x, y) [y(2); -6]; %DPx/m
% Se establecen las condiciones a la frontera
% phi(eta=0)=0 & phi(eta=1)=-1
bc2 = @(ya, yb) [ya(1); yb(1)+1];
% Definimos rango de eta [0 1] y no. de puntos
xmesh2 = linspace(0,1,500);
% Establecemos valores iniciales con la función bvpinit y
% la tolerancia relativa llamando a odeset
solinit2 = bvpinit(xmesh2, [0; 0]);
options2 = odeset('RelTol',1.e-6);
% Llamamos a la función bvp4c y colocamos las entradas:
% vector de sistema de edo's, CF y solucion inicial.
sol2 = bvp4c(f2 , bc2, solinit2, options2);

% Balance de momentum: Boquilla.

% Ecuación Constitutiva: Ley de viscosidad de Newton. Adimensionalizada.
% edo1 phi'(1)= phi(2) & edo2 phi'(2) = -((DPopt*Rb^2)/(Lb*m*Uz))-y(2)/x
f3 = @(x, y) [y(2), -((DPopt*Rb^2)/(Lb*m*Uz))-y(2)/x];
% Se establecen las condiciones a la frontera
% phi(ro=1)=0 & phi'(ro=0)=0
bc3 = @(ya,yb) [ya(2); yb(1)];
% Definimos rango de ro y no de puntos para la región antes/después de 0
xmesh3 = linspace(1.e-8, 1,1000);
xmesh4 = linspace(-1.e-8, -1,1000);
% Establecemos valores iniciales con la función bvpinit para la región
% antes y despues de 0 y la tolerancia relativa con a odeset
solinit3 = bvpinit(xmesh3, [1 1]);
solinit4 = bvpinit(xmesh4, [1 1]);
options3 = odeset('RelTol',1.e-3);
% Llamamos a la función bvp4c y colocamos las entradas:
% vector de sistema de edo's, CF y solucion inicial para cada región.
sol3 = bvp4c(f3 , bc3, solinit3, options3);
sol4 = bvp4c(f3 , bc3, solinit4, options3);

```

```

% Punto eficiente de operación.

% Vector de caidas de presión %Pa
DP =[0*DPmax, 0.2*DPmax, 0.4*DPmax, 0.6*DPmax, 0.8*DPmax, 1*DPmax];

% Contrucción de la curva del tornillo del extrusor.
for i=1:6
    f = @(x, y) [y(2); (DP(1,i)*h^2)/(m*Z*Uz)];
    bc = @(ya, yb) [ya(1); yb(1)-1];
    xmesh = linspace(0,1,1000);
    solinit = bvpinit(xmesh, [0; 0]);
    options = odeset('RelTol',1.e-3);
    sol = bvp4c(f , bc, solinit, options);
    Qe = w*trapz((sol.x)*h,sol.y(1,:)*Uz);
    Qext(i) = Qe;
end
% Contrucción de la curva del tornillo de la boquilla.
for i=1:6
    f = @(x, y) [y(2),-((DP(1,i)*Rb^2)/(Lb*m*Uz))-y(2)/x];
    bc = @(ya,yb) [ya(2); yb(1)];
    xmesh = linspace(1.e-8, 1,5000);
    solinit = bvpinit(xmesh, [1 1]);
    options = odeset('RelTol',1.e-8);
    sol = bvp4c(f , bc, solinit, options);
    r =(sol.x)*Rb;
    V = sol.y(1,:).*r;
    Qb = 2*pi*trapz(r,V*Uz);
    Qboq(i) = Qb;
end

%% CASO NO NEWTONIANO.
% Definimos parametros del fluido
n=0.855; %Indice ley de la potencia
betha = (1+n)/n;
% Vector de caidas de Presión
DP =[ 0.2*Dpmax, 0.3*Dpmax, 0.35*Dpmax, 0.4*Dpmax, 0.42*Dpmax];
% Calculo de los maximos
syms x
% Se calcula una alpha para cada DP
for i=1:5
    alpha = (Uz/h)*((m*Z)/(h*DP(1,i)))^(1/n);
    alphav(i) = 62lpha;
end
% Se calcula un valor máximo de eta0 para cada DP
for i=1:5
    S = vpasolve(betha*(alphav(1,i)) + x^betha - (1-x)^betha == 0, x);
    maxeta(i) = S;
end
eta0 = maxeta;
% Se calcula un flujo volumetrico para cada DP
for i=1:5
    Q = h*w*Z*(1/(betha*alphav(1,i)))*(((eta0(1,i))^(1+betha)+...
        (1-eta0(1,i))^(1+betha))/(1+betha))- (eta0(1,i))^(betha));
    Qe(i)= Q;
end

```

```

% Se quitan decimales innecesarios
N1=1e10;
Qextn = vpa(fix(Qe*N1)/N1)
%% Condiciones eficientes
% Con los valores de flujo volumétrico y caídas de presión se ocupa la
% función InterX para encontrar el punto eficiente.
% N=500rpm
Dpopt = 1.4087e4; %Pa
Qopt = 5.24226e-6; %m3/s
% N=300rpm
% Construcción del perfil de velocidades axial en el extrusor.
Alphaopt = (Uz/h)*((m*Z)/(h*Dpopt))^(1/n); %parametro adimensional
%Solver que calcula el valor del máximo
syms x
Sopt = vpasolve(betha*(alphaopt) + x^betha - (1-x)^betha == 0, x)
% Se quitan decimales innecesarios
N4=1000;
max = vpa(fix(Sopt*N4)/N4)
% Valor de velocidad adimensional del máximo con las dos funciones
phiopt1=((max-max)^betha-(max)^betha)*(1/betha)*(1/alphaopt);
phiopt2 =(((max-max)^betha-(1-
max)^betha)*(1/betha)+alphaopt)*(1/alphaopt);
%% Región antes del máximo -----
N2=0.001; %tamaño de paso
eta1 = (0:N2:max); %Vector de puntos de eta
m1 = (max/N2)+1 %Numero de puntos de eta
% Evaluamos la función en la región del máximo
For i=1:m1
    phi=((max-eta1(1,i))^betha-(max)^betha)*(1/betha);
    phi1(i)=phi;
end
% Multiplicamos por el factor 1/alpha para poder comparar los casos
% Newtoniano y no Newtoniano
Phi1 = phi1*(1/alphaopt);
% Region después del máximo -----
eta2 = (max:N2:1); %vector de puntos de eta
m2 = ((1-max)/N2)+1 %numero de puntos eta
% Evaluamos la función en la región después del máximo.
For i=1:m2
    phi =((eta2(1,i)-max)^betha-(1-max)^betha)*(1/betha)+alphaopt;
    phi2(i)=phi;
end
% Multiplicamos por el factor 1/alpha para poder comparar los casos
%Newtoniano y no Newtoniano
Phi2 = phi2*(1/alphaopt);

% Se grafican los resultados.

```

Líneas de código del análisis de sensibilidad paramétrica.

```
function main
clc; clear all; format compact;
% Analisis de Sensibilidad Parametrica del Extrusor de monohusillo
% del LIQ de la FQ, UNAM, 2021.
% Utilizando como materia prima: Harina de Arroz.
% Suposición FLUIDO NEWTONIANO.
% Parametros
global m DP N theta h Lc D p;
% Definimos parámetros del husillo
D = 0.0381; %m - Diámetro del husillo
theta = 0.1411; %rad - Ángulo helicoidad
h = 0.0075; %m - Altura del Álabes
w = 0.013; %m - Ancho del canal
e = 0.004; %m - Espesor del Álabes
p = 13; % Numero de espiras del husillo
Lc = w+e; %m - Longitud de la cuerda
% Definimos parametros del fluido
m = 0.211; %Pa*s
% Definimos especificaciones del extrusor
N = 500/60; %1/s
DP = 2.7501e+04; %Pa
yrango = linspace(0,0.0075);
v0 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

[y,v] = ode15s(@odessa_demo,yrango,v0);

s1 = m*v(:,1);
s2 = m*v(:,2);
s3 = DP*v(:,3);
s4 = DP*v(:,4);
s5 = N*v(:,5);
s6 = N*v(:,6);
s7 = theta*v(:,7);
s8 = theta*v(:,8);
s9 = h*v(:,9);
s10 = h*v(:,10);
s11 = Lc*v(:,11);
s12 = Lc*v(:,12);
s13 = D*v(:,13);
s14 = D*v(:,14);
vz = v(:,15);
vx = v(:,16);
end

function f = odessa_demo(y,v)
global m DP N theta h Lc D p
s1 = v(1);
s2 = v(2);
s3 = v(3);
s4 = v(4);
s5 = v(5);
s6 = v(6);
s7 = v(7);
s8 = v(8);
```

```

s9 = v(9);
s10 = v(10);
s11 = v(11);
s12 = v(12);
s13 = v(13);
s14 = v(14);
vz = v(15);
vx = v(16);
% Estados de sensibilidad
f(1) = (-DP/(m^2*(p*Lc/sin(theta))))*(y-(h/2));
f(2) = 0;
f(3) = (1/(m*(p*Lc/sin(theta))))*(y-(h/2));
f(4) = 0;
f(5) = pi*D*cos(theta)/h;
f(6) = (pi*D*sin(theta)/h)*(2-(y^6/h));
f(7) = (DP*cos(theta)/(m*p*Lc))*(y-(h/2))-pi*D*N*sin(theta)/h;
f(8) = (pi*D*N*cos(theta)/h)*(2-(y^6/h));
f(9) = DP/(2*m*(p*Lc/sin(theta)))-pi*D*N*cos(theta)/h^2;
f(10) = 12*y*pi*D*N*sin(theta)/h^3 - 2*pi*D*N*cos(theta)/h^2;
f(11) = (-DP/(m*(p*Lc^2/sin(theta))))*(y-(h/2));
f(12) = 0;
f(13) = pi*N*cos(theta)/h;
f(14) = ((pi*N*sin(theta))/h)*(2-(y^6/h));
% Ecuaciones del sistema
f(15) = (DP*sin(theta)/(m*p*Lc))*(y-(h/2))+pi*D*N*cos(theta)/h;
f(16) = (pi*D*N*sin(theta)/h)*(2-(y^6/h));
f = f';
end

```

ANEXO II

Cálculo de números adimensionales.

- No. Reynolds.

$$Re = \frac{\rho DV}{\mu}$$

- No. Brinkman.

$$Br = \frac{\rho V^2}{k\Delta T}$$

Adimensionalización de las ecuaciones de balance caso newtoniano.

- Balance de momentum en la dirección “x” en el extrusor.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Variables adimensionales.

$$\phi = \frac{v_x}{U_x}; \quad \eta = \frac{y}{h}$$

Adimensionalización:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{6\mu U_x}{h^2} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(-\mu \frac{\partial v_x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

Tal que $\frac{\partial v_x}{\partial \phi} = U_x$ y que $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{h}$:

$$-\frac{6\mu U_x}{h^2} = \frac{\mu U_x}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

Resulta:

$$-6 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

- Balance de momentum en la dirección “z” en el extrusor.

$$\frac{\Delta P}{Z} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

Variables adimensionales.

$$\varphi = \frac{v_z}{U_z}; \quad \eta = \frac{y}{h}$$

Adimensionalización:

$$\frac{\Delta P}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

Tal que $\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = U_z$ y que $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{h}$:

$$\frac{\Delta P}{Z} = \frac{\mu U_z}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)$$

Resulta:

$$\frac{h^2 \Delta P}{\mu Z U_z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)$$

- Balance de momentum en la dirección "z" en la boquilla.

$$\frac{\Delta P}{L_b} r = \frac{\partial}{\partial r} \left(r * \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{\Delta P}{\mu L_b} r = r \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Variables adimensionales.

$$\varphi = \frac{v_z}{U_z}; \quad \varrho = \frac{r}{R_b}$$

Adimensionalización:

$$\frac{\Delta P R_b}{\mu L_b} \varrho = -R_b \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial r} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial r}$$

Tal que $\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = U_z$ y que $\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{1}{R_b}$:

$$\frac{\Delta P R_b}{\mu L_b} \varrho = -\frac{U_z}{R_b} \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)$$

Resulta:

$$-\frac{\Delta PR_b^2}{\mu L_b U_z} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$$

Análisis de sensibilidad paramétrica.

Para evaluar los coeficientes de sensibilidad se llevaron a cabo los siguientes pasos:

1. Integrar el modelo matemático:

$$\dot{v} = f(v, y, p), v(y_0) = v_0$$

2. Evaluar las derivadas parciales dadas por:

$$\frac{\partial f(v, y, p)}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f(v, y, p)}{\partial p}$$

3. Integrar las ecuaciones de sensibilidad:

$$\dot{s} = \left(\frac{\partial f(v, y, p)}{\partial v} \right) s + \left(\frac{\partial f(v, y, p)}{\partial p} \right)$$

De esta manera, adecuando el sistema en cuestión:

Ecuaciones de balance de momentum:

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{\sin(\theta) \Delta P}{\mu N_e L_c} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{\pi D N \cos(\theta)}{h}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\pi D N \sin(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right)$$

Evaluando el jacobiano:

$$\frac{\partial f(v, y, p)}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Evaluando la matriz de derivadas parciales con respecto al vector de parámetros $p = [\mu, \Delta P, N, \theta, h, L_c, D]^T$:

$$\frac{\partial f(v, y, p)}{\partial p} =$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{\sin(\theta) \Delta P}{\mu^2 N_e L c} \left(y - \frac{h}{2} \right) & \frac{\sin(\theta)}{\mu N_e L c} \left(y - \frac{h}{2} \right) & \frac{\pi D \cos(\theta)}{h} & \frac{\cos(\theta) \Delta P}{\mu N_e L c} \left(y - \frac{h}{2} \right) - \frac{\pi D N \sin(\theta)}{h} \\ 0 & 0 & \frac{\pi D \sin(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right) & \frac{\pi D N \cos(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right) \\ \frac{\sin(\theta) \Delta P}{\mu N_e L c^2} \left(y - \frac{h}{2} \right) & \frac{\pi N \cos(\theta)}{h} & & \\ 0 & \frac{\pi D N \sin(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right) & & \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \frac{\sin(\theta) \Delta P}{2 \mu N_e L c} - \frac{\pi D N \cos(\theta)}{h^2} \\ -\frac{2 \pi D N \sin(\theta)}{h^2} + \frac{12 y \pi D N \sin(\theta)}{h^3} \end{array} \right]$$

De esta manera, el conjunto de ecuaciones a integrar esta dado por:

$$\begin{aligned} \dot{v}_z &= \frac{\sin(\theta) \Delta P}{\mu N_e L c} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{\pi D N \cos(\theta)}{h} ; v_z(0) = 0 \\ \dot{v}_x &= \frac{\pi D N \sin(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right) ; v_x(0) = 0 \\ \dot{S}_{11} &= -\frac{\sin(\theta) \Delta P}{\mu^2 N_e L c} \left(y - \frac{h}{2} \right) ; S_{11}(0) = 0 \\ \dot{S}_{21} &= 0 ; S_{21}(0) = 0 \\ \dot{S}_{12} &= \frac{\sin(\theta)}{\mu N_e L c} \left(y - \frac{h}{2} \right) ; S_{12}(0) = 0 \\ \dot{S}_{22} &= 0 ; S_{22}(0) = 0 \\ \dot{S}_{13} &= \frac{\pi D \cos(\theta)}{h} ; S_{13}(0) = 0 \\ \dot{S}_{23} &= \frac{\pi D \sin(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right) ; S_{23}(0) = 0 \\ \dot{S}_{14} &= \frac{\cos(\theta) \Delta P}{\mu N_e L c} \left(y - \frac{h}{2} \right) - \frac{\pi D N \sin(\theta)}{h} ; S_{14}(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{24} &= \frac{\pi D N \cos(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right) ; S_{24}(0) = 0 \\ \dot{S}_{15} &= \frac{\sin(\theta) \Delta P}{2 \mu N_e L c} - \frac{\pi D N \cos(\theta)}{h^2} ; S_{15}(0) = 0 \\ \dot{S}_{25} &= -\frac{2 \pi D N \sin(\theta)}{h^2} + \frac{12 y \pi D N \sin(\theta)}{h^3} ; S_{25}(0) = 0 \\ \dot{S}_{16} &= -\frac{\sin(\theta) \Delta P}{\mu N_e L c^2} \left(y - \frac{h}{2} \right) ; S_{16}(0) = 0 \\ \dot{S}_{26} &= 0 ; S_{26}(0) = 0 \\ \dot{S}_{17} &= \frac{\pi N \cos(\theta)}{h} ; S_{17}(0) = 0 \\ \dot{S}_{27} &= \frac{\pi N \sin(\theta)}{h} \left(2 - \frac{6y}{h} \right) ; S_{27}(0) = 0 \end{aligned}$$