



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE ECONOMÍA**

**FRACTALES: UNA APLICACIÓN EMPÍRICA AL  
MERCADO ACCIONARIO MEXICANO PARA EL  
RECONOCIMIENTO DE PATRONES Y  
PRONÓSTICOS**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADA EN ECONOMÍA  
PRESENTA :**

**MARIEL ELOISE ARÉVALO HERNÁNDEZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
MTRO. GABRIEL RODRÍGUEZ GARCÍA**

**CIUDAD DE MÉXICO, 2022**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis abuelos, quienes me han enseñado que los sueños se hacen realidad cuando tenemos la valentía de perseguirlos.*

# Agradecimientos

A mi madre, por todo tu esfuerzo y por apoyar mis sueños sin duda alguna de que voy a lograr conseguirlos.

A mi padre, por enseñarme que el trabajo duro te lleva tan lejos como quieras llegar.

A mis abuelos, -mis otros 3 padres -por cuidarme y apoyarme siempre, buscando mi bienestar en todo momento y enseñándome lo preciosa que es la vida.

A Virginia, sin la cual no hubiera sido posible esta tesis. Gracias infinitas por tus enseñanzas y por siempre ir más allá de lo que dicta tu trabajo.

A Cris, Charly, Víctor, Paola y Ángel, por ser grandes ejemplos de hermanos mayores y siempre preocuparse por mi bienestar.

A mis hermanos, y a Saúl, Maya, Sasha y Aurora, por existir y por hacerme querer ser mejor cada día.

A Karen y Anahí, por ser personas tan importantes en mi vida e inspirarme diario a ser el mejor ejemplo que puedan tener.

Al resto de mi familia, quienes me han impulsado a seguir mis sueños y me han demostrado su amor incondicional siempre.

A Mildred, por estar ahí para mí, siempre dispuesta a escucharme, y por tantos momentos que hemos compartido y que siempre voy a llevar en mi corazón. Estoy segura de que haremos grandes cosas juntas.

A James, quien siempre sabe qué decir en el momento correcto. Gracias infinitas por ser mi mejor amigo, por cuidar nuestra amistad en todo momento y por todas tus palabras de motivación. De verdad no sé qué haría sin ti y espero sepas lo importante que eres en mi vida.

A Roberta, por escucharme (y aguantarme) siempre y por confiar en mí. Espero siempre seas parte de mi vida y podamos compartir muchos más momentos juntas, tortuga.

A Abril, por tantos momentos increíbles juntas y por siempre permitirme ser yo misma. Gracias por tu paciencia para explicarme mate y micro, por todas las noches de desvelo y por tantas risas; no sé qué hubiera hecho sin ti, lechón.

A Mich, por siempre decirme las cosas como son, preocuparte por mi bienestar y hacerme sentir orgullosa de mí. Gracias por tanto.

A Jean, por hacerme reír siempre y lo más importante: por creer en mí y motivarme para alcanzar mis sueños. Gracias por ser una parte tan importante en mi vida y por permitirme estar en la tuya; espero siempre sea así.

A Amaya, por tantas pláticas y momentos juntos y por siempre estar ahí para mí sin importar lo que la vida nos ponga en medio. Estoy muy feliz de que nos hayamos reencontrado.

A Ale, por seguir en mi vida a pesar de todos los cambios que han sucedido en nuestras vidas. Por siempre darme consejos, escucharme y por nuestras pláticas de horas sobre cualquier tema. Siempre voy a estar para ti.

A Moy, por tus palabras de aliento y motivación que siempre me impulsan a superarme y a dar lo mejor de mí. Gracias por escucharme y por estar ahí para mí; espero siempre estés en mi vida.

A Adrián y mis amigos de Ciencias, por su apoyo y amistad incondicional, por tantas risas y momentos juntos y por cuidarme como si yo fuera la menor.

A todos mis amigos y profesores de la Facultad de Economía, por todo lo que me enseñaron y por otorgarme momentos tan gratos durante la carrera.

A todas las personas con las que me he cruzado profesionalmente que me han enseñado muchísimo y gracias a las cuales he encontrado mi camino.

# Contenido

Introducción.....	6
Hipótesis .....	8
Objetivo General.....	8
Objetivos Particulares.....	8
CAPÍTULO 1: De Bachelier al mundo de los Quants en los mercados financieros .....	9
1.1 Teoría de la especulación y el enfoque de la caminata aleatoria.....	10
1.1.1 Aplicaciones del movimiento browniano en las finanzas .....	14
1.2 Las aportaciones de Fama .....	15
1.2.1 Hipótesis de los mercados eficientes (HME) .....	16
1.2.2 Pruebas empíricas de la HME .....	20
1.3 Modelos tradicionales: Riesgo y rendimiento.....	24
1.3.1 Capital Asset Pricing Model (CAPM).....	25
1.3.3 Modelo Fama-French .....	28
1.3.2 Arbitrage Pricing Theory (APT).....	33
1.4 Los mercados adaptativos (HMA).....	37
1.5 Behavioral Finance (Finanzas Conductuales).....	41
1.6 Análisis técnico .....	44
CAPÍTULO 2. Una visión fractal del mercado financiero .....	47
2.1 Fractales .....	47
2.1.1 Geometría fractal .....	48
2.1.2 Fractales lineales.....	49
2.1.3 Fractales no lineales.....	53
2.5 Identificación de fractales en el mercado accionario.....	54
CAPÍTULO 3: Análisis fractal.....	59
3.1 Análisis estadístico de series financieras.....	59
3.2 Hipótesis del mercado fractal.....	64
CAPÍTULO 4: Modelos fractales aplicados .....	67
4.1 Modelos fractales a lo largo del tiempo.....	69
4.2 Análisis fractal aplicado al mercado mexicano .....	77
Resultados.....	82
Conclusiones.....	114
Bibliografía: .....	118

# Introducción

Los activos financieros son títulos valores negociables de renta fija o variable, los cuales otorgan al comprador el derecho a recibir un ingreso futuro procedente del vendedor. Estos pueden ser emitidos por entidades económicas como empresas o gobiernos y no tienen un activo físico como colateral o valor intrínseco.

Desde 1900, el comportamiento del precio de los activos financieros ha sido analizado para explicar su dinámica y para intentar predecir el precio de dichos activos. Dicho análisis ha estado basado en los supuestos de que el mercado sigue una distribución normal y que los inversionistas se comportan de manera racional. Bajo estos supuestos se han creado diversas hipótesis que siguen siendo consideradas como válidas actualmente, como son la Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME), el modelo *Capital Asset Pricing* (CAPM), la Hipótesis de los Mercados Adaptativos (HMA) y la teoría *Arbitrage Pricing* (APT). A pesar de la popularidad de dichas hipótesis basadas por completo en distribuciones normales, Nassim Taleb, en 2007, explica que el mercado financiero no sigue una distribución normal, sino que se comporta como un “Cisne Negro”, es decir, que los eventos anormales suelen suceder más seguido de lo que se piensa, por lo que el comportamiento del precio de los activos financieros sigue una distribución con “*fat tails*” (colas anchas). Desde 1997, Mandelbrot comienza a estudiar el mercado financiero y al comportamiento de sus activos desde una perspectiva fractal y encuentra que la dinámica de los precios, en ocasiones, sí presenta características fractales y no sigue una distribución normal.

Dado lo anterior, dentro de este trabajo, presento distintas pruebas empíricas que respaldan o rechazan las hipótesis previamente

mencionadas, con la intención de explicar el comportamiento del precio de los activos financieros y de discutir cuál de estas propuestas se acerca más a explicar la realidad.

Este tema es de interés debido a que, usualmente, en los mercados de capitales, deuda y derivados, se estudian y observan los activos financieros desde la perspectiva de que este sigue una distribución normal y que los inversionistas son racionales, sin poner en duda la veracidad de las hipótesis que siguen estos supuestos, ni su capacidad de explicar el comportamiento de los precios en la vida real. Cabe mencionar que, es importante conocer dichas propuestas ya que, como se mencionó anteriormente, siguen siendo las más populares y aceptadas dentro del espectro financiero, sin embargo, esto no quiere decir que sean las que mejor explican la dinámica del precio de los activos financieros. Con relación a lo anterior, en esta tesis, pretendo explicar brevemente en qué consisten las propuestas ampliamente aceptadas, así como las propuestas más recientes, pero que, con base en las pruebas empíricas presentadas en este trabajo, explican de mejor manera el comportamiento del precio de los activos financieros, específicamente desde una perspectiva fractal.

Para demostrar lo anterior, en este trabajo presento un modelo en el que se obtiene el coeficiente de Hurst, el cual nos permite conocer la dimensión fractal de una serie de tiempo, es decir, nos dice si dicha serie presenta características fractales (memoria a largo plazo) o no. Este modelo lo aplico a distintas acciones del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) para observar si en el mercado accionario mexicano, la dinámica de los precios de dichos activos se puede estudiar desde una perspectiva fractal.

## **Hipótesis**

Al aplicar un modelo basado en la teoría fractal se podría explicar y predecir la dinámica y el comportamiento de los precios de acciones del mercado mexicano, es decir, demostrar que cuentan con memoria a largo plazo y, por lo tanto, con un componente fractal.

## **Objetivo General**

Aplicar un modelo basado en la teoría fractal a un conjunto de series accionarias del mercado mexicano a fin de destacar su validez sobre las demás teorías que presumen explicar la dinámica de los precios de los activos financieros.

## **Objetivos Particulares**

1. Presentar el avance teórico en el campo de la economía financiera respecto a la dinámica de precios de los activos financieros desde las ideas de Bachelier hasta la conceptualización conductual.
2. Presentar el concepto de los fractales, su relación y alcance en el mercado financiero.
3. Presentar la hipótesis de mercado fractal y un recuento de las distintas pruebas empíricas que avalen su asertividad.
4. Modelar el análisis fractal al conjunto de activos seleccionados del mercado accionario mexicano, por medio de un análisis de rango reescalado en donde se obtenga el exponente de Hurst.

# **CAPÍTULO 1: De Bachelier al mundo de los Quants en los mercados financieros**

***“Nothing in life is to be feared. It is only to be understood”***

***Marie Curie***

A lo largo del tiempo, distintos economistas, matemáticos y financieros, han intentado explicar el comportamiento del precio de los activos financieros. Las teorías que han surgido al respecto, proponen distintos métodos estadísticos y matemáticos para poder predecir y explicar dicho comportamiento, siendo la más famosa, la Teoría de los Mercados Eficientes (HME) propuesta por E. Fama en 1970 y de la cual, años más tarde nace el *Capital Asset Pricing Theory (CAPM)* propuesto por Sharpe, Lintner y Mossin y la Hipótesis de los Mercados Adaptativos (HMA) propuesta por Andrew Lo. Posteriormente y contrario a los supuestos de estas teorías surge la Hipótesis del Mercado Fractal, que procederemos a ver en próximos capítulos.

Sin embargo, cabe destacar que estas teorías surgen de ideas emergidas desde 1900, y es hasta los noventas que se empiezan a analizar las series de tiempo de los precios de activos financieros desde una perspectiva fractal, por lo que la Hipótesis de los Mercados Eficientes sigue siendo, para distintos jugadores dentro del mercado, la teoría más acertada al explicar el comportamiento de los precios de los activos financieros y es un referente en la construcción teórica de las finanzas modernas. Es por esto que dentro de este capítulo se realizará un recuento histórico de las teorías previas a la Hipótesis del Mercado Fractal, las cuales sentaron las bases para su creación y nos dan un primer acercamiento a intentar explicar el comportamiento de los precios de los activos financieros.

## 1.1 Teoría de la especulación y el enfoque de la caminata aleatoria

En 1827, el médico y botánico escocés Robert Brown (1773-1858), mientras examinaba partículas de polen en el microscopio, observó que cuando éstas se encontraban suspendidas en agua y en otros líquidos, se movían sin cesar en forma errática.

Posteriormente, este fenómeno se asoció no sólo con partículas de polen, sino también con partículas de materia inorgánica como es el polvo fino de algunos materiales (vidrio, carbón, roca, etc.). Su investigación "*A Brief account on the particles contained in the pollen of plants and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*" fue publicada en Edimburgo en 1828 y sentó las bases de lo que más tarde se denotaría como movimiento Browniano.

*"El movimiento Browniano es el proceso estocástico más importante (...) Como una creación de matemáticas puras, es una entidad de belleza poco común. Esta refleja una perfección que se ve más cercana a una ley de la naturaleza que a una invención humana"* (Steele, J., 2000, p. 29)

Un proceso estocástico en tiempo continuo  $\{B_t: 0 \leq t < T\}$  es llamado un movimiento browniano estándar sobre  $[0, T]$  si satisface las siguientes cuatro propiedades:

- i.  $B_0 = 0$ , el movimiento Browniano inicia en  $t = 0$
- ii. Los incrementos de  $B_t$  son independientes, es decir, para cualquier conjunto finito de tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ , las variables aleatorias  $B_{t_2} - B_{t_1}$ ,  $B_{t_3} - B_{t_2}$ , ...,  $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  son independientes.

- iii. Para cualquier  $0 \leq s \leq t < T$ , los incrementos  $B_t - B_s$  se distribuyen normalmente con media = 0 y varianza  $(t - s)$ .
- iv. Para toda  $w$ , en un conjunto de probabilidad 1,  $B_t(w)$  es una función continua de  $t$ , es decir, las trayectorias  $t \rightarrow B_t$  son continuas.

Retomando las ideas de Brown, Louis Bachelier (1870-1946), matemático graduado en 1895 de la Universidad Sorbonne en París, publica en 1900 su tesis doctoral, en la cual propuso las bases para el desarrollo del movimiento browniano y su aplicación en el campo de las finanzas. Bachelier, tomó una serie de datos de los precios de las acciones, argumentando que “las fluctuaciones de los precios durante un periodo corto de tiempo deben ser independientes del valor actual de la acción analizada” (p. 70), es decir, que el precio actual de una acción no debería estar determinado por el comportamiento pasado en el precio de esta. Adicionalmente, a partir de dichas aseveraciones y del teorema del límite central<sup>1</sup>, concluyó que las variaciones en el precio de las acciones siguen una distribución normal y son independientes (Davis, M. et al., 2006).

Con la publicación de su tesis, Louis Bachelier fue el primero en describir el precio de las acciones financieras mediante el movimiento browniano con deriva (tendencia), asignando el precio a algunos activos financieros de la Bolsa de París, específicamente a opciones financieras, y estableció comparaciones con el mercado real (Margalef, J. et al, 2000).

El modelo que desarrolló supone que existe un activo sin riesgo  $B = (B_t)$  tal que  $t \leq T$ , que cumple  $B_t \equiv 1$ , y un activo con riesgo (una acción de precio  $S_t$ ), que cumple  $S_t = (S_0 + \mu t + \sigma W_t)$  tal que  $t \leq T$ , donde  $W_t$  es un

---

<sup>1</sup> El teorema del límite central nos dice que si una muestra es lo bastante grande (mín. 30 observaciones), sea cual sea la distribución de la media muestral, seguirá una distribución normal.

movimiento Browniano estándar en un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ <sup>2</sup> y  $T$  es la fecha de vencimiento de la opción, mientras que  $\mu, \sigma$  son constantes reales que representan a la deriva (media) y a la volatilidad, respectivamente (Margalef, J. et al, 2000).

En el modelo propuesto, naturalmente  $S_t$  puede ser negativo, lo cual no refleja el acotamiento en el precio de los activos financieros. Este modelo permite replicarse con distintas opciones financieras, sin embargo, no admite arbitrajes (Margalef, J. et al, 2000).

La principal hipótesis de Bachelier señala que, al precio actual, debe existir el mismo número de compradores que crean que el precio va a subir que de vendedores que crean que el precio va a caer, por lo que el rendimiento o ganancia esperada debe ser cero y el mercado es “justo” (Rubinstein, 2006).

Cabe destacar que la tesis de Bachelier fungió como base en el desarrollo de la ecuación de Chapman-Kolmogorov<sup>3</sup>, ya que propuso que las variaciones de los precios de las acciones no tienen memoria a largo plazo, lo cual es llamado después “Cadenas de Markov”, refiriéndose a esta propiedad antes mencionada y al estudio de las conexiones entre variables aleatorias (Davis, M. et al., 2006).

---

<sup>2</sup> El concepto de espacio de probabilidad fue introducido en la teoría de la probabilidad, por Andréi Kolmogórov en 1933. En teoría de probabilidades, un espacio probabilístico o espacio de probabilidad es un concepto matemático que sirve para modelar un cierto experimento aleatorio.

Un espacio de probabilidad es la terna  $(\Omega, F, P)$ , donde el conjunto  $\Omega$  es llamado espacio muestral y es el conjunto de los posibles resultados del experimento,  $F$  es una  $\sigma$ -Algebra de subconjuntos de  $\Omega$  que satisface:

1.  $\Omega \in F$
2. Si  $A \in F$ , entonces  $A^c \in F$
3. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  entonces  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in F$

<sup>3</sup> La ecuación de Chapman-Kolmogorov permite obtener la probabilidad de transición entre dos estados en un intervalo de tiempo dado al calcular la probabilidad de transición de los posibles estados intermedios.

Adicional al trabajo de los matemáticos Sydney Chapman y Andréi Kolmogorov, en 1905, los físicos Albert Einstein<sup>4</sup> y Marian Smoluchowski<sup>5</sup> usaron el movimiento Browniano como un modelo aplicado al movimiento de partículas microscópicas suspendidas en un fluido (unidimensional), bajo la influencia de colisiones moleculares (Margalef, J. et al, 2000).

Otra de las aportaciones importantes que usa las ideas de la investigación de Robert Brown, sucedió en 1920, cuando el matemático estadounidense Norbert Wiener (1894-1964) realizó importantes avances en la axiomática del movimiento browniano en términos de filtraciones. Específicamente, Wiener desarrolló la primera construcción rigurosa matemática del movimiento browniano y es por ello que en su honor, este proceso es muy a menudo llamado el proceso de Wiener, el cual es denotado por  $W_t$  (Margalef, J. et al, 2000).

Otras construcciones del Movimiento Browniano fueron aplicadas por los matemáticos Raymond Paley y Paul Pierre Lévy, entre otros.

Dentro de las aportaciones más relevantes a las matemáticas a partir de la investigación de Brown, se encuentra la de 1944, en donde el matemático japonés Kiyoshi Itô se inspiró en el trabajo de Bachelier para introducir el cálculo no determinístico, es decir el cálculo estocástico y el movimiento geométrico browniano  $S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$ . Desde entonces, este planteamiento del movimiento geométrico browniano se reveló muy importante para modelar los precios de activos financieros, asignando a  $S_t$  como la trayectoria del precio de un activo indizada al tiempo (Margalef, J. et al, 2000).

---

<sup>4</sup> Einstein, A. (1905) *“Investigations on the theory of Brownian movement”* Dover Publications.

<sup>5</sup> Smoluchowski, M. (1906) *“Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen”* Annalen der Physik.

A partir del estudio de Itô, Paul A. Samuelson desarrolló en 1965, el estudio del movimiento geométrico browniano en conexión con la economía y recibió en 1970 el premio Nobel de economía por estas aportaciones. El movimiento geométrico browniano es la solución única de la ecuación diferencial estocástica  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ , con condición inicial  $S_0$ , lo cual se puede demostrar aplicando la fórmula de Itô (Margalef, J. et al, 2000).

Por último, y siendo una de las aportaciones más importantes, en 1973, Fisher Black, Myron Scholes y Robert C. Merton, utilizaron el movimiento geométrico Browniano para asignar precios a ciertos instrumentos derivados conocidos como opciones financieras (Margalef, J. et al, 2000).

### **1.1.1 Aplicaciones del movimiento browniano en las finanzas**

El movimiento browniano se ha convertido en uno de los pilares fundamentales de la construcción moderna de las finanzas cuantitativas. De hecho, el modelo básico de tiempo continuo de precios de activos financieros supone que los rendimientos de un activo financiero siguen un movimiento browniano.

Cuando se usa el movimiento browniano estándar para modelar los precios accionarios, es necesario validar el cumplimiento de los 4 siguientes supuestos en los que este se basa:

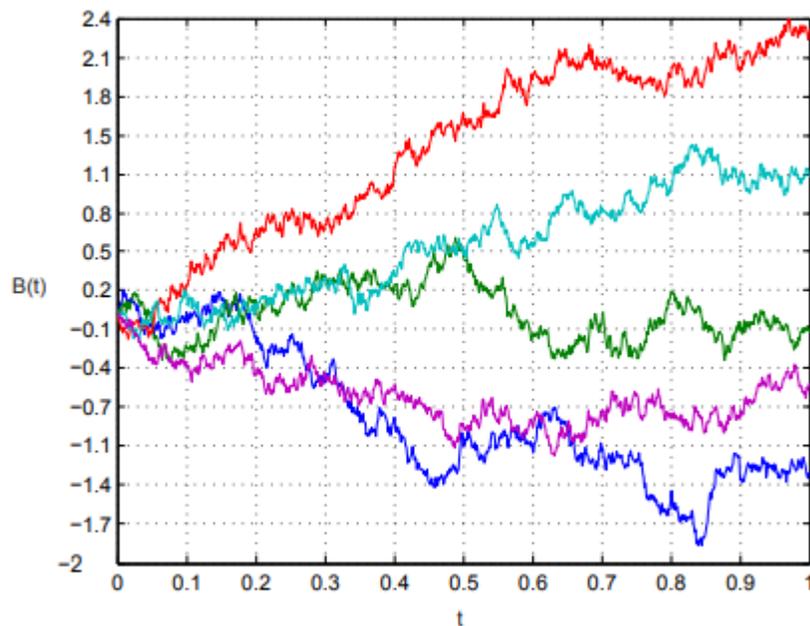
- 1) El supuesto de la distribución normal de los cambios en los precios de las acciones.
- 2) El supuesto de que los incrementos diarios en los precios de los activos son independientes.
- 3) El supuesto de continuidad, ya que las acciones son negociadas segundo a segundo, minuto a minuto, etc. y por ende los precios cambian continuamente.

4) Es la solución única de la ecuación mencionada previamente:  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

Específicamente si  $W_t$  es un movimiento browniano estándar,  $\mu$  es una constante (tendencia),  $\sigma$  es la volatilidad y  $S_0$  es el precio inicial conocido, entonces el proceso:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

es llamado el movimiento geométrico Browniano, que frecuentemente es usado para describir los cambios porcentuales en los precios de los activos.



**Figura 1.** Representación de 5 *brownianos*.

Fuente: Morters, P., Peres, Y., 2008

## 1.2 Las aportaciones de Fama

Eugene Fama, en 1970, dio a conocer una nueva teoría sobre cómo es que los precios de los activos financieros reflejan toda la información disponible en el mercado. Dicha teoría se titula “Hipótesis de los mercados

eficientes” (HME) y es, hasta ahora, de las teorías más aceptadas dentro de las finanzas modernas.

La propuesta de Fama, consiste en que los precios de los activos financieros fluctuarán dependiendo de las noticias o información relevante que afecte a cada activo, por lo que no existirá oportunidad de obtener beneficio económico alguno al operar dichos activos financieros ya que todos los inversionistas tendrán acceso a dicha información.

Esta hipótesis ha sido discutida y puesta a prueba por economistas, matemáticos y financieros, obteniendo así, resultados inconclusos, ya que algunos argumentan que el mercado solamente es eficiente bajo ciertas condiciones o que incluso no es eficiente en lo absoluto.

Dentro de este apartado, se discute la teoría propuesta por Fama, sus antecedentes, propuestas y pruebas empíricas disponibles en la actualidad sobre esta hipótesis.

### **1.2.1 Hipótesis de los mercados eficientes (HME)**

Uno de los antecedentes de la hipótesis de los mercados eficientes es el estudio de Maurice Kendall<sup>6</sup>, quien, en 1953, descubrió que no existían patrones observables en los precios de las acciones, lo cual, a pesar de resultar sorprendente al principio, más tarde se convirtió en un indicador de que el mercado se comporta de manera eficiente (Bodie, Z. et al., 2010).

Al observar el comportamiento de una acción o activo financiero, nos podemos dar cuenta de que, si se pronostica un aumento en su precio, automáticamente va a aumentar el precio de dicho activo en el presente,

---

<sup>6</sup> Kendall M. (1953) “*The Analysis of Economic Time Series, Part 1: Prices*”, Journal of the Royal Statistical Society 96.

reflejando la información que se tiene disponible, en éste caso, el pronóstico sería favorable, ya que todos los participantes del mercado van a intentar entrar antes de que el precio suba. Esto refleja lo complicado que puede llegar a ser encontrar patrones en el movimiento del precio de un activo, tal como lo intentó Maurice Kendall. Dicho lo anterior, se infiere con que toda la información disponible para “predecir” el precio de una acción, se refleja inmediatamente en los precios actuales, es decir, se cumple la hipótesis de los mercados eficientes (*EMH*, por sus siglas en inglés) (Bodie, Z. et al., 2010).

De acuerdo con Eugene Fama, existen tres versiones de la hipótesis de los mercados eficientes: la débil, semi-fuerte y fuerte, las cuales dependen de la información disponible que se tenga (Fama, E., 1970).

La forma débil se refiere a que la información pasada, es decir, los precios históricos de dicha acción, no tienen función alguna en poder predecir su desempeño futuro, ya que ésta información está disponible para todos los inversionistas sin costo o restricción alguna, por lo que, aunque ésta información contuviera señales que permitieran predecir el futuro, ésta ya estaría descontada en el precio (Fama, E., 1970).

Por otro lado, la forma semi-fuerte de la EMH espera que la información financiera de las empresas ya esté reflejada en el precio de las acciones, debido a que dicha información es también de dominio público (Fama, E., 1970).

Y por último, la forma fuerte se refiere a que en el precio de las acciones se encuentra reflejada toda la información, incluida la disponible únicamente a las personas que trabajan en dichas empresas (Fama, E., 1970).

Sin embargo, la información nueva no se puede pronosticar, por lo que los precios de las acciones se mueven de manera impredecible, lo cual demuestra que siguen una caminata aleatoria (o *random walk*). Por otro

lado, si el movimiento de los precios se pudiera pronosticar, se tendría evidencia de la ineficiencia del mercado, ya que esto indicaría que la información disponible no está reflejada por completo (Bodie, Z. et al., 2010).

Los mercados pueden volverse un tanto “ineficientes” cuando el costo por obtener información nueva es alto, o cuando los mercados o las acciones no son tan estudiadas o analizadas, como puede ser en los mercados en desarrollo o en las acciones “pequeñas”, por lo cual sería correcto decir que el nivel de “eficiencia” puede llegar a variar de un mercado a otro (Bodie, Z. et al., 2010).

En cuanto al manejo de portafolios, la EMH discute que el manejo activo de un portafolio no funciona, mientras que una estrategia pasiva (*buy-and-hold*) es la mejor opción ya que no pretende superar al mercado, sino establecer un portafolio diversificado, sin basarse en acciones subvaluadas o sobrevaluadas (Bodie, Z. et al., 2010), a la luz de la evidencia empírica estas aseveraciones teóricas pueden quedar en entredicho.

“Si los mercados fueran ineficientes y los instrumentos tuvieran precios incorrectos, entonces los recursos estarían mal asignados” (p. 352). Esto sucede cuando surgen señales o noticias de que cierto activo o sector va a crecer bastante, por lo que la demanda de dichos activos empieza a subir de tal forma que puede llegar a crearse una burbuja, ya que el precio no está representando el valor que alcanzaría el activo en caso de crecer al nivel que se tenía pronosticado, sino que el precio ya es muchísimo mayor y por lo tanto, al darse cuenta de esto, todos intentan vender y el precio cae estrepitosamente, como fue el caso de la burbuja “Dotcom” entre 1997 y 2001 (Bodie, Z. et al., 2010).

En línea con lo explicado anteriormente, dado que “los precios de los activos reflejan toda la información disponible, entonces los cambios en

los precios deben reflejar nueva información” (p. 353), es decir, los precios de los activos van cambiando, dependiendo de las noticias que surjan relacionadas a dichos activos y de la importancia de éstas (Bodie, Z. et al., 2010).

“Un evento de estudio describe una técnica de investigación financiera empírica que permite al observador medir el impacto de un evento particular en el precio de una acción” (p. 353). Esto resulta un tanto complicado debido a que no sólo son las noticias sobre dicha empresa o sector las que afectan el precio de una acción, sino que también puede ser que todo el mercado esté cayendo cierto día debido a noticias sobre desempleo, PIB, política, o incluso pandemias, como fue el caso de la caída en el mercado financiero en marzo de 2020. Dado lo anterior, es complicado calcular solamente el efecto que cada una de las noticias sobre la empresa o el sector analizado tienen sobre el precio de las acciones, aparte de que también hay que considerar las *betas* (qué tanto se mueve el precio de una acción con respecto a un *benchmark*, o índice de mercado) de cada acción (Bodie, Z. et al., 2010).

Sin embargo, para poder aislar el efecto que tiene cierta noticia o evento en una acción en particular, primero se estima un *proxy* del rendimiento de la acción sin el evento, para posteriormente obtener los rendimientos “anormales” comparando el rendimiento de la acción con el rendimiento de un índice o de otra acción del mismo sector que cuente con una beta parecida a la acción analizada o que haya tenido un rendimiento similar recientemente. Otra forma de obtener los rendimientos anormales es por medio del CAPM o del modelo de tres factores de Fama-French, los cuales se explicarán más adelante (Bodie, Z. et al., 2010).

## 1.2.2 Pruebas empíricas de la HME

La mayoría de las pruebas aplicadas a la EMH se han enfocado en el desempeño de las estrategias activas; y dichas pruebas se dividen en dos: las enfocadas en las estrategias que aparentemente proveen mejores rendimientos por unidad de riesgo (basadas en *momentum* o valor intrínseco), y las enfocadas en los resultados de inversiones hechas por *traders* (operadores) en el mercado accionario; sin embargo, ninguna de éstas dos pruebas ha arrojado resultados concretos (Bodie, Z. et al., 2010).

El debate sobre si los mercados son eficientes o no, sigue siendo parte de la discusión actual, y “existen tres factores que implican que el debate continuará: el factor de la magnitud, el factor del sesgo de selección y el factor del *lucky event*” (Bodie, Z. et al., 2010, p. 356).

El factor de la magnitud habla de que no es lo mismo obtener el 1% de rendimiento anual de un portafolio de miles de pesos a un rendimiento del 1% anual de un portafolio de millones de pesos, por lo que los únicos que pueden obtener una mayor ganancia de estos pequeños movimientos son los operadores de portafolios muy grandes (Bodie, Z. et al., 2010).

El siguiente factor, es el del sesgo de la selección, en el cual, se explica que los inversionistas que descubren formas de ganar mucho dinero en ciertos activos no van a publicar acerca de esto, por lo que las técnicas que sí funcionan simplemente no son reportadas al público. Y, por último, el factor del *lucky event* quiere decir que no necesariamente todos los inversionistas que tengan un gran rendimiento en sus portafolios son excelentes, sino que varios de ellos simplemente tienen suerte (Bodie, Z. et al., 2010, p. 356).

Para poder distinguir las tendencias en los precios de las acciones, es posible usar la correlación serial de los rendimientos del mercado, lo cual se refiere a los rendimientos actuales ligados a los rendimientos pasados, por lo que una correlación positiva significaría que después de obtener un rendimiento positivo, se tienen rendimientos positivos menores, mientras que una correlación negativa significaría que después de los rendimientos positivos se tendrían rendimientos negativos (Bodie, Z. et al., 2010).

En 1988, Fama y French demostraron que lo más común en el mercado financiero son las correlaciones seriales negativas, lo cual quiere decir que ya que normalmente se sobre-reacciona a los eventos o noticias que afectan de manera positiva el precio de determinada acción, después se corrige el precio a la baja (Bodie, Z. et al., 2010).

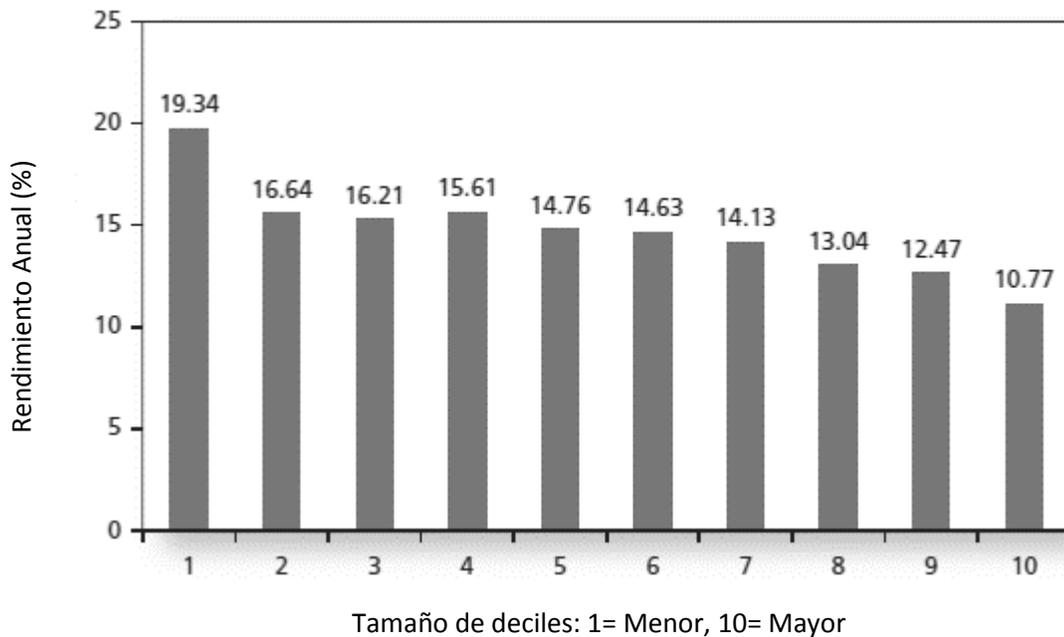
Otro de los estudios que demuestra que existe una sobre-reacción en el precio de las acciones a las noticias o eventos es el de DeBondt y Thaler en 1985<sup>7</sup>, el cual compara dos portafolios por 5 años- uno con mayor rendimiento que el otro- y demuestran que el portafolio que había tenido menor rendimiento tiene un mayor rendimiento que el portafolio “ganador” en los tres años siguientes (Bodie, Z. et al., 2010).

Otra parte importante dentro de la hipótesis de los mercados eficientes, son las anomalías de los mercados eficientes (*efficient market anomalies*), las cuales se refieren a cuando los ratios de las acciones u otras estadísticas públicas predicen rendimientos anormales ajustados al riesgo (Bodie, Z. et al., 2010).

---

<sup>7</sup> De Bondt, W., Thaler, R. (1985) “Does the stock market overreact?” The Journal of Finance Vol. 40, No. 3, Wiley.

Rolf Banz, en 1981<sup>8</sup>, muestra el “*small-firm effect*”, el cual demuestra que las empresas más pequeñas –y por lo tanto, más riesgosas –suelen tener un mayor rendimiento (Bodie, Z., et al., 2010).



**Figura 2.** Rendimiento promedio anual para 10 portafolios de distintos tamaños (1926-2008)

Fuente: Bodie, Z. et al., (2010) “*Investments*” p. 361.

Sin embargo, en otro estudio de 1983, Arbel y Strebel<sup>9</sup> proponen que este efecto (al que Arbel llama “*neglected-firm effect*” en estudios posteriores) es consecuencia de que las empresas más pequeñas suelen tener menor información disponible, debido principalmente a que no hay tanto interés en invertir en éstas y por lo tanto, hay menor demanda y monitoreo de la

<sup>8</sup> Banz, R. (1981) “The relationship between return and market value of common stocks” *Journal of Financial Economics*, Volume 9, Issue 1.

<sup>9</sup> Arbel A., Strebel P. (1983) “*Pay Attention to Neglected Firms*”, *Journal of Portfolio Management*.

información de dichas empresas, lo cual lleva a mayores rendimientos en éstas acciones (Bodie, Z. et al., 2010).

Adicionalmente, Merton<sup>10</sup>, en 1987 muestra que dichas empresas tienen un mayor rendimiento en sus acciones como forma de compensación por la falta de información pública disponible. Por otro lado, Amihud y Mendelson<sup>11</sup> explican dichos rendimientos anormales por la falta de liquidez que existe al operar dichas acciones, ya que al ser menos líquidas que las acciones de empresas grandes, los inversionistas esperan una mayor compensación al tomar dicho riesgo (Bodie, Z. et al., 2010).

Entrando más en el tema de los ratios, Fama y French<sup>12</sup>, en 1992, mostraron que las empresas con mayores ratios *book-to-market*<sup>13</sup> son las empresas de mayor rendimiento anual, lo que sugiere que dichas empresas están subvaluadas o que dicho ratio “sirve como un *proxy* para el factor de riesgo que afecta los rendimientos esperados” (Bodie, Z. et al., 2010).

Otro punto importante que hay que observar en el efecto que tiene la información en los precios de los activos es qué tan rápido responde el mercado a dichas noticias o eventos (Bodie, et al., 2010).

En un estudio de 1982, Rendleman, Jones y Latané<sup>14</sup> analizan la rapidez en que el mercado asimila los resultados trimestrales de las empresas, y por lo tanto la rapidez con la que se mueven los precios. Sus resultados muestran que el día que las empresas anuncian sus ganancias, hay un

---

<sup>10</sup> Merton R. (1987) “A Simple Model of Capital Market Equilibrium with Incomplete Information”, *Journal of Finance*, pp. 483-510.

<sup>11</sup> Amihud Y., Mendelson H., (1991) “Liquidity, Assets Prices, and Financial Policy”, *Financial Analysts Journal* 47, pp. 56-66.

<sup>12</sup> Fama E., French K. (1992) “The Cross Section of Expected Stock Returns”, *Journal of Finance* 47, pp. (427-465).

<sup>13</sup> Ratio Book-to-market: ratio que permite comparar el valor en libros de una empresa versus su valor a mercado.

<sup>14</sup> Rendleman R., Jones C., Latané H. (1982) “Empirical Anomalies Based on Unexpected Earnings and the Importance of Risk Adjustments” *Journal of Financial Economics* 10, pp. 269-287.

rendimiento anormal (ya sea positivo o negativo). Sin embargo, las empresas con resultados favorables siguen subiendo aún después del anuncio de sus resultados trimestrales, mientras que las acciones de las empresas con resultados negativos siguen bajando después del evento, por lo que se podría comprar una acción con resultados favorables después del anuncio y aun así se tendrían ganancias (Bodie, Z. et al., 2010).

Existen distintas opiniones sobre los efectos y anomalías mencionadas anteriormente. Por ejemplo, Fama y French argumentan que dichos fenómenos “son consistentes con la hipótesis de los mercados eficientes siempre y cuando los rendimientos esperados sean consistentes con el riesgo” (p. 366). Otra de las opiniones sobre dichos efectos es la de Lakonishok, Shleifer y Vishney, quienes argumentan que estos fenómenos son prueba de que los mercados son ineficientes, y que existen empresas con acciones sobrevaluadas y subvaluadas debido a errores en las proyecciones y pronósticos (Bodie, Z. et al., 2010).

De la idea anterior se infiere que existen suficientes anomalías para encontrar acciones que se encuentran subvaluadas o sobrevaluadas sobre las que los inversionistas pueden obtener ganancias, sin embargo, el mercado sí refleja la información disponible en los precios de los activos, por lo que se podría decir que los mercados sí se comportan de forma eficiente.

### **1.3 Modelos tradicionales: Riesgo y rendimiento**

El riesgo, en términos financieros, se refiere a la incertidumbre de los sucesos futuros, o, dicho de otra forma, a que algún activo o portafolio financiero obtenga un resultado no favorable en el futuro.

Para poder explicar el comportamiento del precio de los activos financieros, Sharpe y Lintner, y posteriormente Fama y French, crearon

modelos que explican dicho comportamiento tomando en cuenta el riesgo y el rendimiento de los activos financieros. Estos modelos, presentados a continuación, están basados en la Hipótesis de los Mercados Eficientes, ya que también aceptan que los precios de los activos financieros siguen una caminata aleatoria, reflejan toda la información disponible en el mercado y que los inversionistas se comportan de forma racional. Sin embargo, las propuestas de Sharpe, Lintner y Fama y French, permiten evaluar los portafolios financieros basándose en la Teoría de Portafolios de Harry Markowitz, quien propone la existencia de un portafolio óptimo dado por una relación entre el riesgo y el rendimiento de éste y un axioma de preferencia.

### **1.3.1 Capital Asset Pricing Model (CAPM)**

El modelo CAPM, creado por William F. Sharpe en 1964, surge como un intento por construir un modelo que explique el equilibrio entre los precios de los activos considerando el riesgo.

El modelo de Sharpe asume que los inversionistas –aversos al riesgo – toman decisiones con base en el valor esperado (en este caso el rendimiento) y la desviación estándar, representando la utilidad de la siguiente forma: (Sharpe W., 1964, p. 428)

$$U = f(E_W, \sigma_W)$$

En donde  $E_W$  indica el rendimiento esperado y  $\sigma_W$  la desviación estándar del rendimiento esperado, buscando de esta forma un rendimiento esperado alto, es decir, que dado  $E_W$ , entonces  $\left(\frac{dU}{dE_W} > 0\right)$  (Sharpe W., 1964, pág 482).

Asumiendo que el individuo invierte una cantidad  $W_i$ , que su rendimiento final es  $W_t$  y  $R$  su tasa de rendimiento, entonces: (Sharpe W., 1964, p. 428)

$$R = \frac{W_t - W_i}{W_i}$$

Tenemos

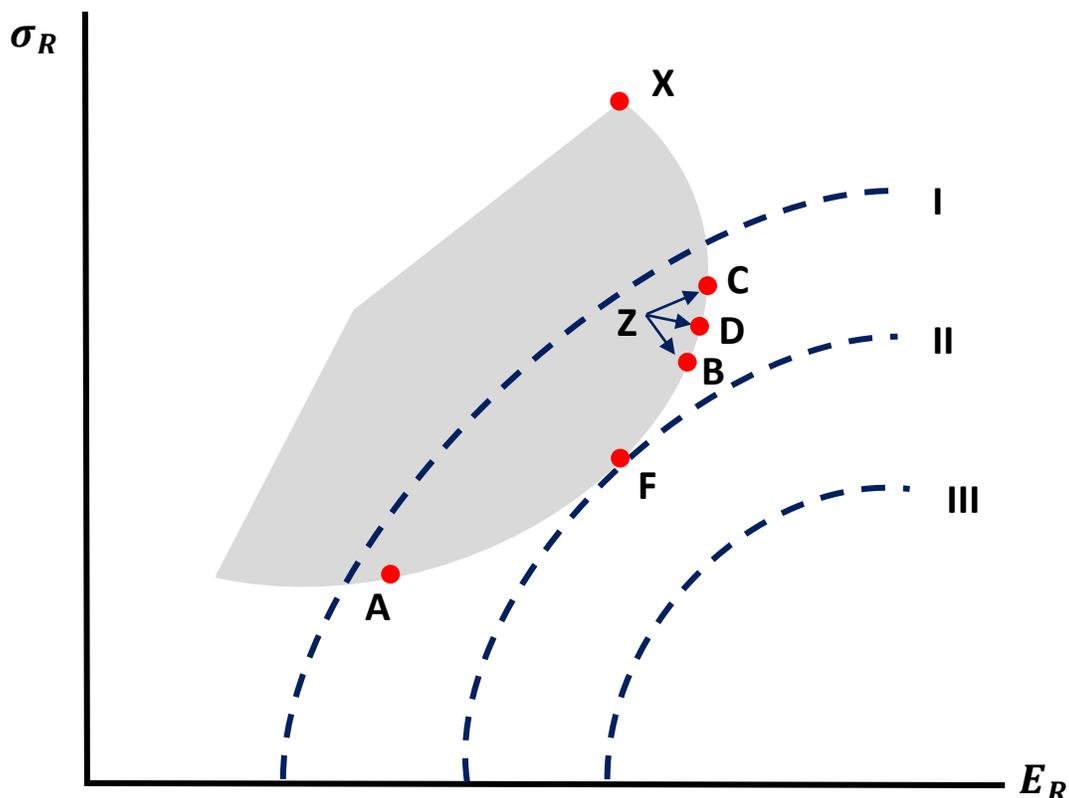
$$W_t = RW_i + W_i$$

Por lo que la utilidad en términos de R queda como:

$$U = g(E_R, \sigma_R)$$

(Sharpe W., 1964, p. 428)

Eligiendo una serie de inversiones que le permita maximizar su utilidad, es decir " $E_R$  dentro del plano  $\sigma_R$ , prefiriendo el "plan" que se encuentre en una curva de indiferencia y que represente el mayor nivel de utilidad" (punto F en Figura 3) (Sharpe W., 1964). Sin embargo, los planes que se pueden escoger se encuentran dentro de la "curva de oportunidad de inversión", es decir, entre los puntos AFBDCX (Sharpe W., 1964, p. 429).



**Figura 3.** Preferencias del inversionista con respecto a las curvas de indiferencia. La curva III es la que representa un menor nivel de utilidad, mientras que la I y la II, por encontrarse más hacia la izquierda y hacia arriba, representan un mayor nivel de utilidad.

Fuente: Elaboración propia con base en Sharpe W., 1964, p. 429.

Si tenemos dos planes de inversión (A y B) y una proporción de la riqueza del inversionista ( $\alpha$ ) se encuentra en A, y el resto ( $1-\alpha$ ) se encuentra en B, entonces la tasa esperada de retorno se encontrará entre el plan A y el plan B, definida como (Sharpe W., 1964):

$$E_{RC} = \alpha E_{Ra} + (1 - \alpha) E_{Rb}$$

Teniendo la siguiente desviación estándar del rendimiento:

$$\sigma_{Rc} = \sqrt{\alpha^2 \sigma_{Ra}^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_{Rb}^2 + 2r_{ab}\alpha(1 - \alpha)\sigma_{Ra}\sigma_{Rb}}$$

En donde  $r_{ab}$ , que es el coeficiente de correlación entre la tasa esperada de retorno de los planes A y B, va a tomar valores entre 0 y +1, en donde 0 va a indicar que son independientes y +1 que hay una correlación positiva entre ellos. Dado lo anterior, es correcto afirmar que el efecto que tiene un activo dentro de la curva de oportunidad de inversión depende tanto de la tasa de retorno como del riesgo y la correlación que exista entre dicho bien y los demás bienes. Otro de los supuestos importantes de este modelo, comprende la existencia de préstamos a la tasa libre de riesgo independientemente del monto que se preste o quiera prestar (Sharpe W., 1964).

Para poder obtener el equilibrio en el mercado de capitales, hay que recordar los supuestos mencionados en el párrafo anterior, sin embargo, también es importante recordar que dentro del modelo de Sharpe, se toma en cuenta la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo sistemático, es decir, las betas ( $\beta$ ) de los activos, ya que los inversionistas esperan un menor rendimiento de los activos con betas lejanas a 1 y mayores rendimientos de activos con betas cercanas a 1, aunque Sharpe no exhibe aún el nombre de  $\beta$  para explicar qué tanto se mueven los activos cuando hay cambios en el mercado, sino que simplemente llama a dichos activos *defensivos* y *agresivos*, respectivamente (Sharpe W., 1964).

### **1.3.3 Modelo Fama-French**

El surgimiento de los modelos de valoración de activos financieros inicia con el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) de William Sharpe en 1964 y Lintner en 1965, el cual tiene como finalidad estimar el costo de capital de las empresas y evaluar el rendimiento de los portafolios financieros al

medir el riesgo y la relación entre rendimiento esperado y riesgo (Fama, E., French, K. 2004).

Sin embargo, dicho modelo ha probado tener algunas fallas en la práctica, probablemente debido a los supuestos lejanos a la realidad o a lo difícil que resulta hacer pruebas empíricas con este modelo. (Fama, E., French, K. 2004)

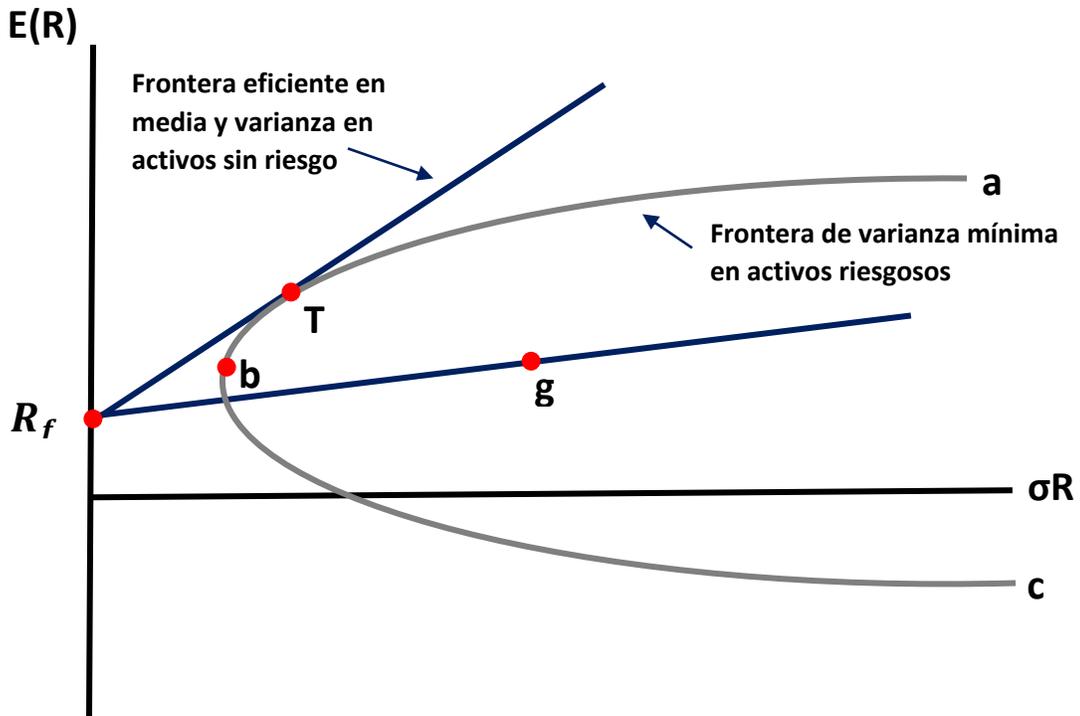
La teoría de portafolios de Markowitz (1959), asume que los inversionistas son aversos al riesgo y que, para elegir entre un portafolio u otro, simplemente se fijan en la media y en la varianza, por lo que eligen portafolios eficientes en estas dos variables, es decir, eligen portafolios que “minimicen la varianza del rendimiento (dado el riesgo esperado) y que maximicen el rendimiento (dada la varianza)” (Fama, E., French, K. 2004, p. 26).

Dada la teoría de portafolios de Markowitz; Sharpe y Lintner, aparte de aceptar y tomar dichos supuestos para su modelo, agregan que “dados los precios en  $t-1$ , los inversionistas concuerdan en la distribución de activos de  $t-1$  a  $t$ ” (p. 26) y también que existen préstamos a la tasa libre de riesgo, sin importar el monto, lo cual es un supuesto lejano a la realidad (Fama, E., French, K. 2004).

Los supuestos anteriores, llevan a que el rendimiento esperado de un activo sea la tasa libre de riesgo  $R_f$  más una prima de riesgo, en este caso, la beta  $\beta_{iM}$  que multiplica a su vez a la prima por cada unidad de riesgo beta,  $E(R_M) - (R_f)$  (Fama, E., French, K. 2004).

En 1972, Black realizó ajustes al modelo original de Sharpe y Lintner, quitando los préstamos a la tasa libre de riesgo, mostrando que “el portafolio con varianza eficiente se puede obtener al permitir que existan ventas en corto no restringidas de activos con alto riesgo”, es decir, que los

inversionistas van a elegir portafolios que se encuentren en la curva *a* a *b* mostrada en la figura siguiente (Fama, E., French, K. 2004):



**Figura 4.** Oportunidades de inversión.

Fuente: Elaboración propia con base en Fama, E., French, K. 2004, p.29.

La diferencia entre el modelo de Black y el de Sharpe-Lintner es que en el modelo de Black, el rendimiento esperado no relacionado con el mercado ( $E(R_{ZM})$ ) es menor que el rendimiento esperado del mercado, es decir, que tiene una beta positiva; al contrario del modelo de Sharpe-Lintner, el cual argumenta que debe ser igual a la tasa de interés libre de riesgo (Fama, E., French, K. 2004).

Sin embargo, la suposición de Black acerca de las ventas en corto no restringidas de activos de alto riesgo se vuelve igual de irreal que el supuesto del modelo CAPM original sobre los préstamos a la tasa libre de

riesgo, por lo que la eficiencia del portafolio se base en supuestos lejanos a la realidad tanto en el modelo de Black como en el de Sharpe-Lintner (Fama, E., French, K. 2004).

Al realizar pruebas empíricas sobre el modelo CAPM, basado en que los rendimientos esperados están ligados a las betas y en que dicho rendimiento es mayor que el rendimiento esperado de los activos que tienen betas menores, se cumple que:

$$\textit{Prima de la beta} = \textit{Retorno esperado} - \textit{Tasa Libre de Riesgo}$$

(Fama, E., French, K. 2004)

Los dos modelos presentados anteriormente indican que lo único que determina el rendimiento de un portafolio eficiente en la varianza y la media es la beta. Sin embargo, desde 1970 empiezan a surgir varias pruebas empíricas que desafían dicho enunciado. Varios autores descubren que los ratios (precio-beneficio, nivel de capitalización, deuda/capital) afectan directamente a los rendimientos de los activos financieros, los cuales pueden llegar a tener rendimientos superiores a los que indica su  $\beta$ , ya que “el precio de una acción depende no solamente de los flujos de efectivo futuros, sino también de los retornos esperados que descuentan el flujo de efectivo esperado en el presente” (Fama, E., French, K. 2004, p. 36).

Otro de los modelos que surge a partir de las fallas presentadas por el CAPM tanto de Black como de Sharpe-Lintner, es el modelo de Merton llamado ICAPM (*Intertemporal Capital Asset Pricing Model*), en el cual los inversionistas eligen un portafolio en  $t-1$  que considera su ingreso, precios de bienes de consumo oportunidades para invertir en  $t$ , y cómo estas variables van a afectar su riqueza, por lo que eligen portafolios que sean eficientes en todas las variables antes mencionadas, y no solamente eficientes en la media y la varianza (Fama, E., French, K. 2004).

Fama y French en 1993, argumentan que los rendimientos de acciones de empresas pequeñas tienen un mayor riesgo no diversificable (covarianza) entre ellas que las acciones de empresas grandes, y que los rendimientos de acciones con ratios B/M<sup>15</sup> altos (*value stocks*) tienen una mayor covarianza entre ellas que las acciones con ratios B/M bajos (Fama, E., French, K. 2004).

Dado lo anterior, Fama y French propusieron el siguiente modelo de tres factores para los rendimientos esperados:

$$E(R_{it}) - R_{ft} = \beta_{iM}[E(R_{Mt}) - R_{ft}] + \beta_{iS}(SMB_t) + \beta_{iH}E(HML_t)$$

(Fama, E., French, K. 2004)

En donde  $SMB_t$  (pequeña menos grande o *small minus big*) es la diferencia entre el rendimiento de portafolios con acciones de empresas pequeñas y grandes, y  $HML_t$  (alto menos bajo o *high minus low*) es la diferencia entre el rendimiento de acciones de empresas con un alto y bajo B/M, mientras que las betas son la pendiente de la regresión múltiple  $R_{it} - R_{ft}$  en  $R_{Mt} - R_{ft}$ , en  $SMB_t$  y  $HML_t$ , lo cual intenta capturar el efecto del ratio B/M y del tamaño de las empresas en el rendimiento, factor que el modelo CAPM no explicaba anteriormente (Fama, E., French, K. 2004).

Sin embargo, uno de los efectos que no logra explicar el modelo de tres factores (ni el CAPM y sus variantes) es el efecto del *momentum* que plantean Jegadeesh y Titman, el cual muestra que las acciones que han tenido ganancias en los últimos tres a doce meses, han seguido ganando los meses posteriores y que las acciones que han perdido durante ese mismo periodo han seguido perdiendo en los meses posteriores (Fama, E., French, K. 2004).

---

<sup>15</sup> Book to Market Equity Ratio: la relación entre el valor en libros de una acción y su valor a mercado.

### 1.3.2 Arbitrage Pricing Theory (APT)

El arbitraje surge cuando un inversionista hace una venta en corto y con el dinero de dicha venta, compra otras acciones o activos dentro de un portafolio, a lo cual se conoce como “portafolio cero”, ya que el inversionista no está corriendo ningún riesgo, debido a que la inversión inicial es cero.

Uno de los ejemplos más comunes en donde se puede arbitrar es cuando existen dos mercados y se viola la ley del precio único<sup>16</sup> dentro de éstos, por lo que, el mismo activo tiene un precio mayor en uno de los dos mercados y, de esta forma, el inversionista procede a adquirir el bien en el mercado con el precio menor para posteriormente, venderlo en el mercado donde el precio de dicho bien es mayor, lo cual es muy común que suceda en los distintos mercados de divisas en el mundo.

Otro ejemplo más complicado del arbitraje, surge cuando se tiene un portafolio con 4 acciones no correlacionadas entre sí y 3 de ellas tienen el mismo peso dentro del portafolio, en donde las tres acciones juntas superan –en cualquier escenario –el rendimiento de la cuarta acción, por lo que, lo más razonable sería vender en corto la cuarta acción y con el dinero obtenido, comprar las otras 3. Sin embargo, dado que es una oportunidad en donde se obtiene una ganancia importante y libre de riesgo, entonces muchos inversionistas –o pocos con mucho dinero disponible –van a querer entrar en esa posición, por lo que las fuerzas de oferta y demanda van a hacer que la cuarta acción caiga y el precio de las otras 3 aumente, por lo que la oportunidad de arbitraje será eliminada (Bodie, Z. et al, 2001).

---

<sup>16</sup> La ley del precio único indica que en un mismo bien o servicio deberá tener el mismo precio en todos los países.

El concepto fundamental dentro de las teorías de los mercados de capitales es justo lo mencionado anteriormente: que los precios de los activos se mueven de tal forma que no permiten el arbitraje.

Como una alternativa al modelo CAPM revisado previamente, Stephen Ross, en 1976, desarrolló la teoría del arbitraje de precios (APT, por sus siglas en inglés), la cual toma en cuenta el riesgo sistemático –o no diversificable –para modelar los retornos esperados. Es por esto que se dice que el APT nos da un *benchmark* o índice para los rendimientos, que puede ser usado en distintas valuaciones o análisis dentro del mercado. El APT depende del equilibrio del mercado de capitales, ya que gracias a dicho equilibrio no existen las oportunidades de arbitraje.

Esta teoría está basada en 3 ideas principales:

1. Los mercados de capitales son perfectamente competitivos.
2. Los inversionistas siempre prefieren mayor rendimiento (aunque este implique un mayor riesgo) a menor rendimiento y menor riesgo.
3. El riesgo no sistemático es diversificable y el rendimiento está representado por un modelo de factores K de la siguiente forma:

$$R_i = E(R_i) + b_{i1}\delta_1 + b_{i2}\delta_2 + \dots + b_{ik}\delta_k + \varepsilon_i \text{ para } i = \text{de } 1 \text{ a } n$$

En donde:

$R_i$  = el rendimiento esperado del activo  $i$  en un periodo de tiempo  
( $i=1,2,3,\dots,n$ )

$E(R_i)$  = el rendimiento esperado del activo  $i$  cuando no hay cambios en los factores de riesgo

$b_{ij}$  = sensibilidad en el rendimiento del activo  $i$  cuando el factor de riesgo  $j$  sufre algún cambio

$\delta_k$  = factores o índices con media cero que influyen en el rendimiento de todos los activos, i.e. la inflación, el PIB, la tasa de desempleo, problemas políticos o sociales, etc.

$\varepsilon_i$  = algún factor que afecte el rendimiento del activo  $i$

$n$  = el número total de activos

(Reilly, F., et al., 2011)

El modelo anterior, quiere decir que el rendimiento de un activo  $i$ , depende del rendimiento esperado de dicho activo, de la sensibilidad a los cambios en el riesgo sistemático y al no sistemático, así como a cualquier otro factor adicional que se considere que puede afectar dicho rendimiento.

Este modelo no considera los siguientes supuestos del CAPM:

1. Los inversionistas tienen funciones de utilidad cuadráticas.
2. Los rendimientos de los activos financieros siguen una distribución normal.
3. Los portafolios de mercado que contienen activos financieros con cierto nivel de riesgo, son eficientes en la varianza.

(Reilly, F., et al., 2011)

Dado lo anterior, al compararlo con el CAPM, el APT propone que no existan las restricciones de éste, pero no garantiza la relación entre las betas y el rendimiento en todos los activos. En conclusión, a pesar de que ambas teorías toman en cuenta el riesgo sistemático y que a mayor rendimiento existe un riesgo mayor, la diferencia principal entre el modelo CAPM y el APT radica en que, el CAPM toma en cuenta un riesgo sistemático igual para todos los activos pertenecientes al mercado financiero; mientras que el APT, toma en cuenta distintos factores de riesgo sistemático para cada activo financiero (Reilly, F., et al., 2011).

A pesar de que la teoría de APT es más reciente que el CAPM, se pueden encontrar distintas pruebas empíricas que se han realizado para comprobar su asertividad.

En 1980, Roll y Ross<sup>17</sup> realizaron una prueba empírica del APT al obtener el rendimiento esperado y sus factores en 42 portafolios de 30 acciones cada uno, para poder observar si el rendimiento de dichos activos es consistente con los factores de cada uno. Los autores obtuvieron como resultado un rendimiento similar para cada uno de los distintos portafolios, así como la existencia de entre 3 y 4 factores con significancia por portafolio, por lo que dicha prueba soporta la teoría del APT.

De igual forma, en 1984, Cho, Elton y Gruber<sup>18</sup>, examinaron el número de factores que afectan el rendimiento de ciertos activos financieros, obteniendo así, que es necesaria la existencia de dos a tres factores para poder explicar dicho rendimiento, lo cual también sustenta la teoría del APT.

Adicionalmente, en 1987, Gultekin y Gultekin<sup>19</sup>, realizaron pruebas para observar si el APT es capaz de considerar el *January Effect* o efecto de enero, el cual se refiere a que los rendimientos en el mercado financiero son superiores durante el mes de enero con respecto a los demás meses del año. Como resultado, estos autores obtuvieron que al estimar por separado cada mes con el APT, este no es superior al CAPM en explicar los efectos del mes de enero, ya que solamente permite explicar la relación riesgo-rendimiento en enero, pero no arroja mayores resultados.

---

<sup>17</sup> Roll, R., Ross, S. (1980) "An empirical investigation of the Arbitrage Pricing Theory" The Journal of Finance, Volume 35, Issue 5.

<sup>18</sup> Cho, D., Elton, E., Gruber, M. (1984) "On the robustness of the Roll and Ross Arbitrage Pricing Theory", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 19, Issue 1.

<sup>19</sup> Gultekin, M., Gultekin, B., (1987) "Stock return anomalies and the tests of the APT", The Journal of Finance, Volume 42, Issue 5.

## 1.4 Los mercados adaptativos (HMA)

Andrew W. Lo, en su artículo titulado “*The Adaptive Market Hypothesis*”, hace una revisión de la Hipótesis de los Mercados Eficientes de Eugene Fama, para posteriormente presentar una adecuación a dicha teoría basada en la teoría de la evolución de Darwin y en la neurociencia, a la cual llama Hipótesis de los Mercados Adaptativos (HMA).

Lo, intenta explicar la eficiencia de los mercados y el comportamiento de las instituciones y de los instrumentos financieros por medio de “la competencia, mutación, reproducción y selección natural” de la teoría evolutiva (Lo, A., 2004, p. 16).

La hipótesis de los mercados eficientes –como fue mencionado anteriormente –argumenta que los precios de los activos financieros reflejan toda la información disponible. Sin embargo, esto quiere decir que los precios fluctúan arbitrariamente y que un mercado eficiente es aquel que en el que es imposible predecir el comportamiento de los precios, por lo que nunca habría oportunidad de obtener ganancias. La HMA también considera que “los inversionistas tienen expectativas racionales, los mercados integran la información de manera eficiente y los precios de equilibrio incorporan toda la información disponible”, formando de esta forma las 3 “P’s” de la gestión de inversiones: “precios, probabilidades y preferencias (Lo, 1999)<sup>20</sup>, basadas en el principio de oferta y demanda<sup>21</sup>” (Lo, A., 2004, p. 16).

A pesar de que se han hecho distintas pruebas para demostrar si los mercados en verdad reflejan toda la información disponible, las pruebas

---

<sup>20</sup> Lo, A. (1999) “The Three P’s of Total Risk Management” *Financial Analysts Journal*, 55 p. 87-129.

<sup>21</sup> El principio de oferta y demanda se refiere a que existe un equilibrio de cantidad y precio entre las curvas de oferta y de demanda, el cual es la intersección entre el punto en el que los compradores están dispuestos a comprar cierta cantidad a cierto precio y el punto en el que los vendedores están dispuestos a vender cierta cantidad a cierto precio.

más importantes sobre la gestión de inversiones se han concentrado en el comportamiento de los agentes, en donde psicólogos y economistas experimentales han documentado comportamientos tales como: exceso de confianza, sobrerreacción, arrepentimiento y cálculos de probabilidad incorrectos, entre otros. Esto demuestra que “los inversionistas no siempre son racionales, exhiben comportamientos predecibles y suelen arruinar sus inversiones” (Lo, A., 2004, p. 17).

Uno de los ejemplos que proporciona Lo es que “los individuos son aversos al riesgo en el caso de las ganancias y son tolerantes al riesgo en el caso de las pérdidas, lo cual los puede llevar a tomar decisiones incorrectas” (Lo, A., 2004, p. 17).

Dado lo anterior, es posible concluir que modelar el comportamiento de un individuo es complicado, por lo que es aún más difícil modelar el comportamiento de un conjunto de individuos (Lo, A., 2004, p. 21).

Es por esto que Farmer y Lo (1999)<sup>22</sup> y Farmer (2002)<sup>23</sup> propusieron “aplicar los principios evolutivos a los mercados financieros” como son la selección natural, la competencia y la reproducción, que, a su vez, ofrecen explicaciones para distintos comportamientos de los individuos, lo cual es llamado “sociobiología” (Wilson, E., 1975)<sup>24</sup> y a partir de ahí, Lo obtiene su nueva Hipótesis de los Mercados Adaptativos (Lo, A., 2004, p. 21).

En 1955, Simon<sup>25</sup> explicó cómo en la teoría del consumidor, los individuos llegan a un punto de satisfacción, el cual no necesariamente es un punto óptimo, y Lo argumenta que dicho punto de satisfacción está

---

<sup>22</sup> Farmer, D. y Lo, A. (1999) “Frontiers of Finance: Evolution and Efficient Markets” Proceedings of the National Academy of Sciences, 96, pp. 9991-9992.

<sup>23</sup> Farmer, D. (2002) “Market Force, Ecology and Evolution” Industrial and Corporate Change, 11, pp. 895-953.

<sup>24</sup> Wilson, E. (1975) “Sociobiology: The New Synthesis” Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.

<sup>25</sup> Simon, H. (1955) “A Behavioral Model of Rational Choice” Quarterly Journal of Economics, 69, pp. 99-118.

determinado por las experiencias pasadas de los individuos y los resultados positivos o negativos de dichas experiencias (Lo, A., 2004, p. 22).

Sin embargo, otro de los factores que influyen en los resultados es el cambio del ecosistema, es decir, que a pesar de que un individuo esté tomando decisiones óptimas en cierto “ecosistema”, puede ser que al tomar la misma decisión en otro, el resultado sea distinto debido a que las condiciones no son las mismas en distintos ecosistemas (Lo, A., 2004).

En este mismo sentido evolutivo, Lo llama “especies” a los distintos participantes del mercado, y argumenta que “si varias especies están compitiendo por recursos escasos en un mismo mercado, ese mercado es más eficiente porque la información relevante se incorpora a los precios de manera inmediata” (p. 23). Por otra parte, “si pocas especies están compitiendo por recursos abundantes, ese mercado es menos eficiente” (Lo, A., 2004).

Como parte de la teoría psicológica sobre la que se basa su hipótesis, Lo menciona la paradoja de Ellsberg, la cual nos muestra que las personas no tienen problema con tomar riesgos día a día, sin embargo, no se comportan racionalmente cuando hay incertidumbre sobre estos riesgos. A esto se suman los experimentos de los psicólogos Kahneman y Tversky, quienes estudiaron el comportamiento de los individuos al tomar decisiones, y descubrieron que los individuos se comportan de forma irracional al tener incertidumbre en el riesgo que están dispuestos a asumir.

Dentro de los supuestos de la HMA se encuentra que existen distintas tendencias de comportamiento y que las estrategias de inversión pasan por ciclos de pérdidas y ganancias dependiendo de las condiciones del mercado y del número de competidores y de oportunidades de ganancia disponibles (Lo, A., 2004).

Lo y Repin (2002)<sup>26</sup> explican que “las variables psicológicas asociadas con el sistema nervioso están correlacionadas con eventos del mercado – incluso para operadores con amplia experiencia” por lo que la capacidad de controlar las emociones es una cualidad importante en los *traders* exitosos (Lo, A., 2004, p. 23).

A pesar de que la HMA se encuentra todavía en desarrollo, Lo explica ciertas implicaciones que trae esta teoría:

1. A pesar de existir una relación entre riesgo y rendimiento, esta relación puede cambiar, ya que dicha relación está determinada por las preferencias de los agentes del mercado y por “factores institucionales como pueden ser las regulaciones y las leyes de impuestos”, por lo que la prima de riesgo cambia en el tiempo (p. 24).
2. Contrario a la HME, en esta teoría sí existen oportunidades de arbitraje. La explicación de Lo para esto consiste en la existencia de activos con liquidez, ya que a pesar de que cuando surgen oportunidades de obtener ganancias, estas son explotadas, continúan surgiendo nuevas oportunidades, por lo que la HMA considera un mercado más dinámico.
3. Las estrategias de inversión pueden resultar favorables en ciertos “ecosistemas” y en otros no, dependiendo de las condiciones de mercado que existan en ese momento.
4. La única forma de obtener ganancias constantes –y aunado a las 3 implicaciones anteriores –es adaptarse a las condiciones del mercado.

---

<sup>26</sup> Lo, A. y Repin, D. (2002) “The Psychophysiology of Real-Time Financial Risk Processing” *Journal of Cognitive Neuroscience*, 14, pp. 323-339.

5. Lo único que importa en la “ecología del mercado” es la supervivencia.

(Lo, A., 2004).

## **1.5 Behavioral Finance (Finanzas Conductuales)**

La principal premisa de las finanzas conductuales es que las teorías convencionales ignoran que las personas son las responsables de las decisiones que provocan grandes diferencias en el mercado. De igual manera, es importante recalcar que las teorías convencionales suponen que los inversionistas son racionales, mientras que las finanzas conductuales centran su teoría en que éstos pueden no serlo.

Las distintas “irracionalidades” documentadas a lo largo del tiempo, se dividen en dos categorías: primero, que los inversionistas “no siempre procesan la información correctamente y por lo tanto, infieren en distribuciones de probabilidad incorrectas sobre tasas de rendimiento futuras”; y la segunda, que aunque “la distribución de probabilidad de los rendimientos esté dada, los inversionistas suelen tomar decisiones inconsistentes o sistemáticamente sub-óptimas” (Bodie, Z., et al., 2010, p. 382).

El hecho de que existan inversionistas irracionales no es necesariamente una demostración de que los mercados sean ineficientes, ya que, por medio del arbitraje, los precios regresan a su nivel justo. Sin embargo, si es verdad lo que argumentan esta escuela (finanzas conductuales), entonces las acciones limitadas de los arbitrajistas no permiten esto último, por lo que “la ausencia de oportunidades para obtener ganancias no implica que los mercados sean eficientes” (Bodie, Z., et al., 2010, p. 382).

Los errores que pueden cometer los inversionistas al procesar la información, pueden provocar que se estime de forma errónea la

probabilidad de que ocurran ciertos eventos asociados con los rendimientos de los activos (Bodie, Z., et al., 2010).

Dichos errores pueden ser de la siguiente forma:

1. Errores en el pronóstico: Suceden cuando los inversionistas le dan mucho peso a las experiencias recientes y tienden a hacer pronósticos erróneos.
2. Confianza excesiva: Los inversionistas tienden a sobrestimar la precisión de sus creencias y habilidades, creando estimaciones incorrectas.
3. Conservadurismo: Sucede cuando los inversionistas no cambian de opinión sobre sus creencias previas, aunque haya evidencia de que están en lo incorrecto.
4. Ignorar el tamaño y representatividad de la muestra: Los inversionistas no suelen tomar en cuenta el tamaño de la muestra, y actúan de la misma forma cuando tienen una muestra pequeña o grande de la población, por lo cual estiman que existen ciertos patrones basándose en muestras pequeñas o extrapolan tendencias a largo plazo (Bodie, Z., et al., 2010).

A pesar de que el procesamiento de la información sea correcto, los individuos tienden a tomar decisiones irracionales usando dicha información. Dentro de estas decisiones irracionales, los individuos suelen ser aversos al riesgo cuando se buscan ganancias, pero son tomadores de riesgo cuando se trata de pérdidas; o también, puede ser que tomen mucho riesgo con ciertas cuentas de inversión, pero con otras sean más conservadores respecto a sus decisiones de inversión sin razón alguna. Aunado a esto, es más común que los inversionistas se deshagan de las posiciones en las que tienen ganancias a que deshagan las que tienen pérdidas. También, los individuos suelen arrepentirse más de las

decisiones que resultan mal cuando no son decisiones comunes (como invertir en acciones de empresas de pequeña capitalización o start-ups); y, por último, los inversionistas toman posiciones de mayor riesgo cuando un día u horas antes incurrieron en pérdidas (Bodie, Z., et al., 2010).

Dentro de la corriente financiera conductual, también se argumenta que existen diversos factores que limitan las ganancias en cuando los precios no se encuentran en su valor justo, lo cual se explica a continuación:

1. Riesgo fundamental: Cuando una acción está subvaluada, se espera que el precio regrese a su valor intrínseco, sin embargo, esto puede suceder mucho después del horizonte de inversión del operador, es decir, los inversionistas pueden mantener su solvencia por menos tiempo del que los mercados pueden comportarse de manera irracional.
2. Costos de implementación: Obtener ganancias de una acción sobrevaluada puede llegar a ser complicado, debido a que para hacer esto se debe abrir una posición en corto de dicha acción, lo cual implica costos (por el préstamo de valores), o incluso se pueden enfrentar a políticas que limiten el préstamo de valores, por lo cual llega a ser más difícil que una acción sobrevaluada regrese a su valor intrínseco.
3. Riesgos del modelo: Puede ser que el operador esté usando un modelo no adecuado para la valuación de dicho instrumento financiero.

(Bodie, Z., et al., 2010).

Las explicaciones que nos proporciona la corriente conductual sobre las anomalías presentes en los mercados eficientes no tienen intención alguna de mostrar formas de explotar dichas irracionalidades, por lo que varios economistas dudan de la habilidad de dicha corriente para poder

refutar la hipótesis de los mercados eficientes, sin embargo, debemos tomar en cuenta que es una corriente relativamente nueva, por lo que, al menos hasta ahora, se aceptan sus críticas a la irracionalidad de los inversionistas al tomar decisiones, pero se pone en duda su capacidad para explicar qué tanto afectan a los precios de los activos financieros (Bodie, Z., et al., 2010).

## **1.6 Análisis técnico**

Otro de los instrumentos importantes con los cuales se pretende pronosticar el comportamiento del precio de los activos financieros, es el análisis técnico, el cual consiste en la observación de patrones en gráficas de precios de activos financieros.

El análisis técnico es la búsqueda de patrones en las gráficas de precios históricos de las acciones, en donde se observan niveles de resistencia (nivel de precios difícil de sobrepasar hacia arriba) y de soporte (nivel de precios difícil de sobrepasar hacia abajo), los cuales son niveles determinados psicológicamente, es decir, no hay una razón fundamental que justifique la formación de dichas figuras chartistas. Cabe mencionar que esta estrategia funciona solamente cuando los precios de las acciones responden retardadamente a la llegada de nueva información, lo cual contradice directamente a la hipótesis de los mercados eficientes. Sin embargo, la HME argumenta que el descubrimiento de dichos patrones es inválido una vez que varios *traders* intentan explotarlos, por lo que el análisis técnico “no debería funcionar” (Bodie, Z., et al., 2010).

El análisis técnico nace de la teoría del Dow y fue creado por Charles Dow, el cual plantea tres “fuerzas” que afectan los precios de los activos simultáneamente:

1. La tendencia primaria es la tendencia de largo plazo del movimiento de los precios, y puede durar de varios meses a varios años.
2. La tendencia secundaria o intermedia es provocada por las desviaciones a corto plazo de la línea de tendencia de los precios. Dichas desviaciones son eliminadas con “correcciones” que hacen que el precio vuelva a colocarse en la línea de tendencia primaria.
3. La tendencia terciaria o menor se refiere a las fluctuaciones diarias y de poca importancia

(Bodie, Z., et al., 2010)

La teoría de Dow se basa en la recurrencia de los patrones de precios predecibles; sin embargo, la hipótesis de los mercados eficientes argumenta que, si algún patrón es aprovechable, entonces muchos inversionistas buscarían beneficiarse de dicho movimiento, lo cual movería a su vez el precio del activo y provocaría que la estrategia no funcionara (Bodie, Z., et al., 2010).

Algunas variaciones recientes sobre la teoría de Dow son las ondas de Elliot y la teoría de Kondratieff. La primera, explica que los precios de las acciones son parecidos a patrones de ondas, en donde los ciclos de onda de largo y corto plazo son sobrepuestos y dan como resultado un patrón más complicado sobre el movimiento de los precios para poder predecir movimientos más generales al interpretar dichos ciclos. Por otro lado, la teoría de Kondratieff argumenta que el mercado (y la macroeconomía) se mueven en ondas que duran entre 48 y 60 años, siendo así, análogas a la tendencia primaria de Dow descrita anteriormente, a pesar de que éstas son de mayor duración; sin embargo, esta teoría es difícil de demostrar

empíricamente por la falta de datos para ponerla a prueba (Bodie, Z., et al., 2010).

Por otro lado, se tiene el análisis fundamental, el cual está basado en el análisis financiero de las empresas, como puede ser, en sus ganancias, pago de dividendos, futuras fusiones o adquisiciones, o ratios financieros que ayudan a determinar el precio en el cual debería estar una acción, para así poder compararlo con el precio actual y decidir si vale la pena vender, comprar o mantener dicho activo, es decir, nos permite reflexionar si una acción se encuentra subvaluada o sobrevaluada (Bodie, Z., et al., 2010).

Para poder realizar el análisis fundamental de una empresa, primero se observan las ganancias trimestrales pasadas, después los estados financieros de la empresa, así como análisis económico del sector o industria al que pertenece dicha empresa, y el país en el que se encuentra para que, de esta forma, se obtenga una idea del desempeño futuro que tendrá la acción (Bodie, Z., et al., 2010).

Es importante aclarar que el análisis técnico no descarta el análisis fundamental, pero sí afirma que los precios llegan al valor intrínseco gradualmente, es decir, que los operadores pueden aprovechar el tiempo que tarda el activo en llevar el precio hasta el valor intrínseco (Bodie, Z., et al., 2010).

La hipótesis de los mercados eficientes argumenta que el análisis fundamental tampoco es del todo certero, ya que la información con la que se realiza este análisis es pública, por lo que estaría ya reflejada en el precio y todos los analistas obtendrían los mismos resultados sobre dicha empresa (Bodie, Z., et al., 2010).

# CAPÍTULO 2. Una visión fractal del mercado financiero

***“Roughness is the uncontrolled element in life”***

***Benoit Mandelbrot***

Dentro de las distintas teorías matemáticas más importantes que han surgido recientemente, se encuentra el descubrimiento de la existencia de los fractales en la naturaleza y la aplicación de la geometría fractal para explicar fenómenos dentro de la biología, geofísica, música, sociología y economía, entre otras.

## **2.1 Fractales**

La geometría euclidiana (de Euclides, matemático griego) está basada en figuras o elementos perfectos -sin turbulencia o irregularidades -por lo que es incapaz de explicar las formas existentes en la naturaleza o incluso de la economía. Las figuras geométricas que conocemos, tales como triángulos cuadrados o círculos, son usualmente observadas y empleadas por diseñadores, arquitectos, y profesores. Sin embargo, estas figuras no son semejantes a lo que observamos en la vida real (Taleb, N., 2007).

El término fractal fue definido por Mandelbrot, y viene del adjetivo latín *fractus* y del verbo *frangere*, que significa romper o quebrar algo (Mandelbrot, B., 1967).

A pesar de no existir una definición de “fractal”, podemos explicarlo como una figura simétrica entre las partes y su todo, es decir, que dicha forma o elemento puede ser dividido en partes pequeñas y cada una de las partes

va a ser similar al todo. Uno de los ejemplos más comunes es el del brócoli, el cual, al ser partido en varias partes, sigue teniendo la misma estructura inicial (Mandelbrot, B., 2007).

### **2.1.1 Geometría fractal**

La geometría fractal, según Mandelbrot (2007) “es una herramienta de análisis y síntesis”, (p.119) la cual nos permite identificar y usar ciertos patrones observables a distintas escalas.

La construcción de un fractal empieza con un *iniciador* -que puede ser cualquier figura geométrica -y después un *generador*, el cual normalmente es un patrón geométrico. Posteriormente, en el proceso de construcción viene la *regla de recursión*, que es básicamente el cómo se van a emplear el iniciador y generador antes mencionados (Mandelbrot, B., 2007).

La simetría, en matemáticas, se refiere a que es un objeto o proceso no cambia ante una transformación. Los fractales cuentan con simetría a cualquier escala, es decir que si cambiamos la escala de un fractal su estructura va a seguir siendo la misma (*self-similarity*). Al observar una figura geométrica euclidiana, cada vez que nos acercamos más a una parte de esta figura, como puede ser un círculo, triángulo o cuadrado, se observa una estructura diferente a la observada inicialmente. En cambio, con un fractal al acercarnos cada vez más se observa la misma figura que vimos inicialmente. Por otro lado, están los fractales en los que se observa el mismo patrón a diferentes escalas en diferentes direcciones -como puede ser en x y en y, a lo cual Mandelbrot llama auto-afín (*self-affine*) (Mandelbrot, B., 2007).

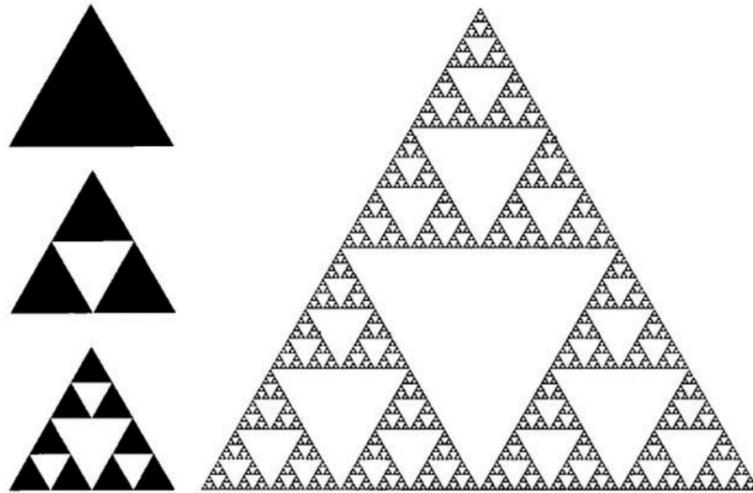
El origen de los fractales data entre 1875 y 1925, sin embargo, en esta época, aún no tenían nombre alguno y tampoco una definición matemática, sino

que simplemente eran vistos como *turbulencia* o *irregularidades*. Actualmente, cientos de fractales han sido identificados, esto debido principalmente a que son una figura presente en la naturaleza y también en construcciones hechas por el hombre (Mandelbrot, B., 2004).

### **2.1.2 Fractales lineales**

Los fractales lineales son aquellos que describen un sistema dinámico lineal, es decir, que a partir de figuras geométricas euclidianas se obtienen tanto el *iniciador* como el *generador* y, por medio de una regla de recursión, mencionada previamente, se obtiene el fractal.

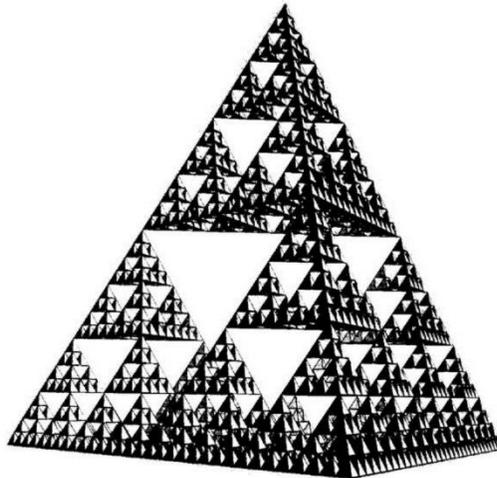
Una de las figuras fractales lineales más famosas es el triángulo (*gasket*, en inglés) de Sierpinski, construido por el matemático polaco Wlaclaw Sierpinski, y llamado así por Benoit Mandelbrot. En el caso de esta figura, el *iniciador* es un triángulo negro, mientras que el *generador* es el triángulo reducido de tamaño y clonado tres veces para caber dentro del triángulo negro original -o *iniciador* -de tal forma que, al seguir repitiendo este proceso, se forma la figura completa (Mandelbrot, B., 2004).



**Figura 5.** Triángulo de Sierpinsky.

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward.

Por otro lado, podemos trasladar el triángulo de Sierpinski a la tercera dimensión, es decir, a una pirámide, observada en la siguiente imagen.

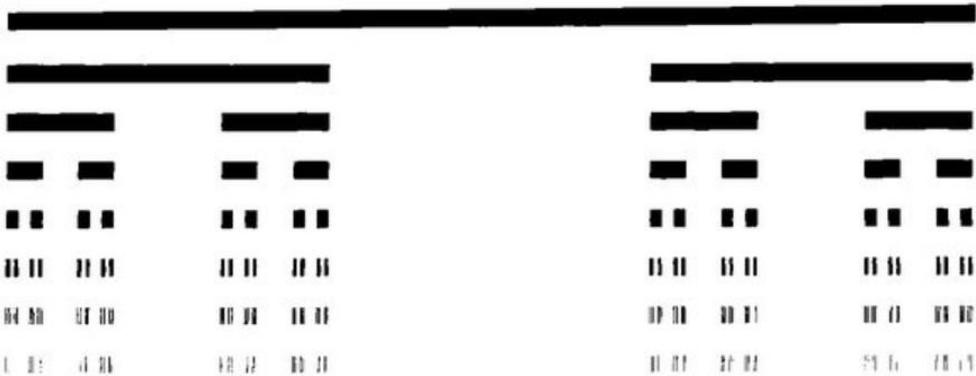


**Figura 6.** Triángulo de Sierpinsky en tercera dimensión.

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward.

Las dos figuras anteriores presentan “autosimilitud”, ya que a cualquier escala que sean observadas, el patrón que se forma es el mismo. Sin embargo, en finanzas, aparte de necesitar fractales autosimilares, también necesitamos fractales auto-afines (Mandelbrot, B., 2004).

Otro de los fractales lineales más famosos, es el de Cantor (*Cantor dust*), llamado así por el matemático ruso-alemán Georg Cantor, en el siglo XIX, mostrado a continuación.

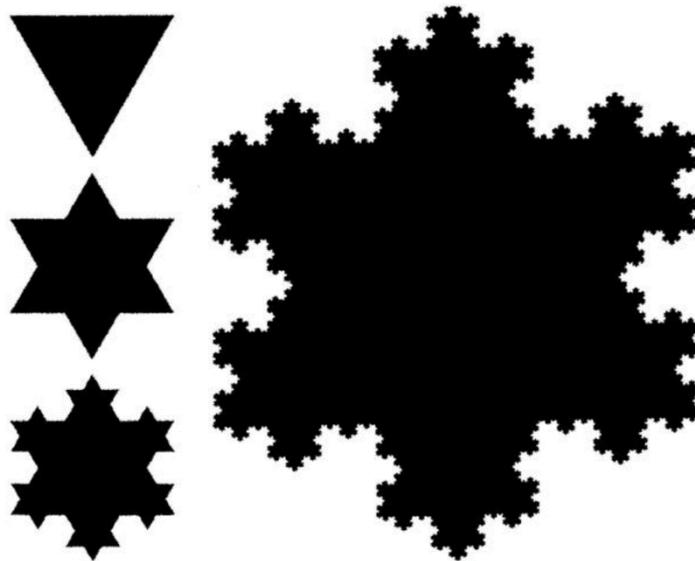


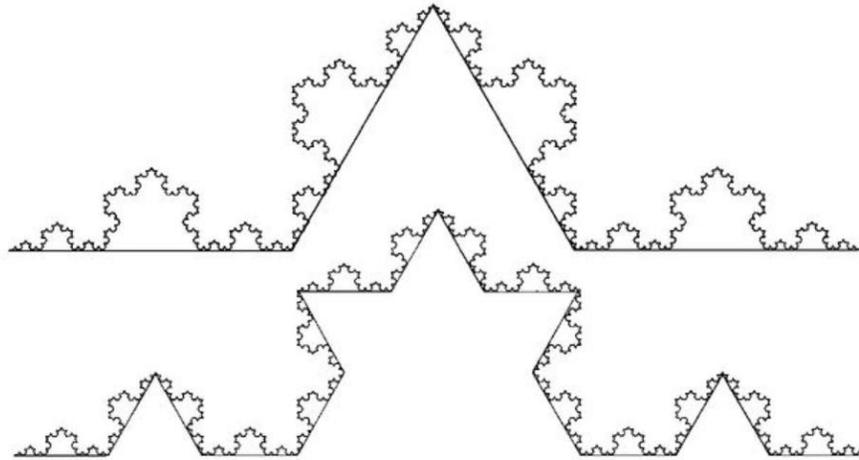
**Figura 7.** Cantor dust.

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward.

Aquí, el *iniciador* es una línea recta, mientras que el *generador* es la misma línea sin el tercio de en medio. Sin embargo, lo que hace especial a esta figura, es que, al seguir con la misma regla de recursión, llega un momento en el que no queda nada de tan delgadas que se van haciendo las líneas, proceso al que Mandelbrot (2004) llama *fractal curdling*, lo cual se podría traducir como “fractal cuajado” (Mandelbrot, B., 2004).

Posteriormente, y previo al famoso fractal de Mandelbrot, Helge von Koch presentó en 1905 la *curva de Koch*, la cual no permite dibujar una línea tangente dentro de su perímetro y se construye casi de la misma forma que el fractal de Cantor: tomando una línea recta, pero en lugar de borrar el tercio de en medio, se construye un triángulo con esta sección, para así formar una figura con un perímetro continuo pero infinito (Mandelbrot, B., 2004).





**Figura 8.** Curva de Koch.

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward.

Otros de los ejemplos de figuras fractales que podemos encontrar en la naturaleza son: los bronquios dentro de los pulmones, los conjuntos de galaxias en el universo y en las nubes.

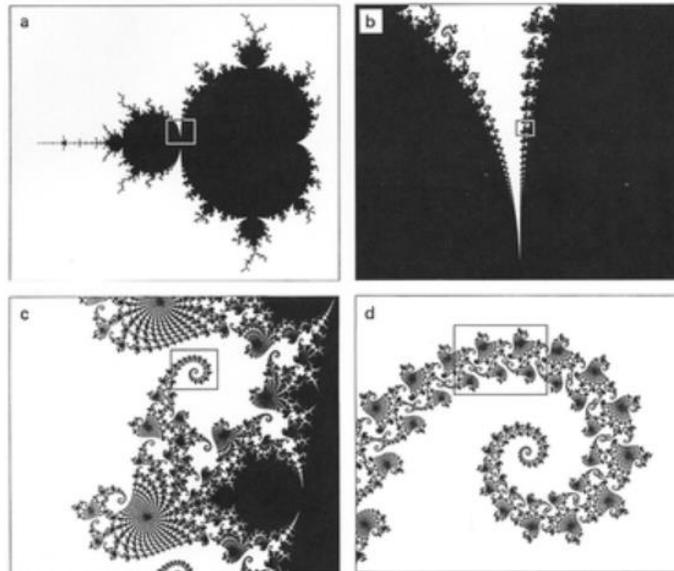
### **2.1.3 Fractales no lineales**

Los fractales no lineales son la representación de sistemas dinámicos no lineales, en donde entra la teoría del caos y los sistemas complejos.

Probablemente, la figura más famosa y nombrada en honor a Mandelbrot es el “Set de Mandelbrot”, el cual ilustra un patrón con la misma complejidad en todas sus escalas, representando así las propiedades fractales y el caos (Mandelbrot, B., 2004).

El Set de Mandelbrot es una de las imágenes más importantes en las matemáticas, volviéndose popular dentro de los seguidores la teoría del caos al observar que, a partir de una regla recursiva simple, la imagen del set se va volviendo más y más compleja, ya que al acercarnos más a alguna

parte esta imagen vamos a continuar viendo distintas partes de la misma figura sin importar la escala (Taleb, N., 2010).



**Figura 9.** Set de Mandelbrot.

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward.

## **2.5 Identificación de fractales en el mercado accionario**

La idea de que las gráficas de precios podían seguir un patrón fractal se le ocurrió a Mandelbrot en 1961 al ver una gráfica de precios de algodón y otra de distribución del ingreso formando el mismo patrón a lo largo de cada una de las gráficas. Posteriormente, Mandelbrot tomó la gráfica de precios del algodón y fue contando la frecuencia con la que se presentaban ciertas características de los precios, pudiendo construir, posteriormente (en 1963), una teoría del comportamiento de los precios financieros.

Lo que Mandelbrot intenta explicar es cómo se presenta el mismo patrón en el comportamiento de los precios sin importar la escala, es decir anual,

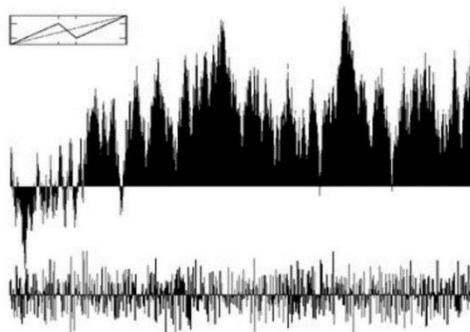
mensual o diariamente, los patrones suelen verse de la misma forma, descartando por completo la teoría de los mercados eficientes y el análisis técnico mencionado en el capítulo anterior.

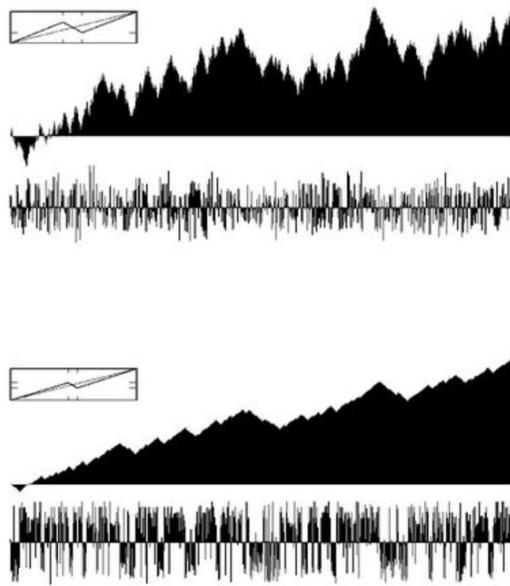
Cuando se observa una gráfica de precios de algún activo financiero, lo que podemos observar no es una distribución normal, sino simplemente turbulencia y tendencias irregulares, sin embargo, al observar la misma gráfica en una escala mayor -con menor tiempo -seguiremos viendo que siguen existiendo dichas tendencias irregulares aparentemente difíciles de reconocer y, por lo tanto, de predecir.

En un multifractal algunas partes del fractal se ven a una escala y otras a diferente escala, es decir, que unas escalan más rápido y otras más lento (Mandelbrot, B., 2007).

Mandelbrot (2007) descubrió que cada una de las partes de una gráfica de precios de activos, afecta directamente a la otra, es decir, que todas están relacionadas entre sí.

El experimento de Mandelbrot comienza con el “generador”, el cual es una línea en zigzag dentro de una caja, y dependiendo de la forma que le dé al generador, se obtiene una gráfica con un patrón fractal distinto.

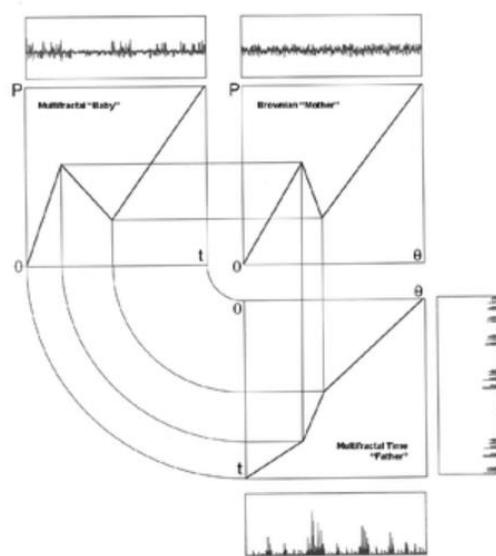




**Figura 10.** Panorama de multifractales financieros.

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). *The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward*, p. 172.

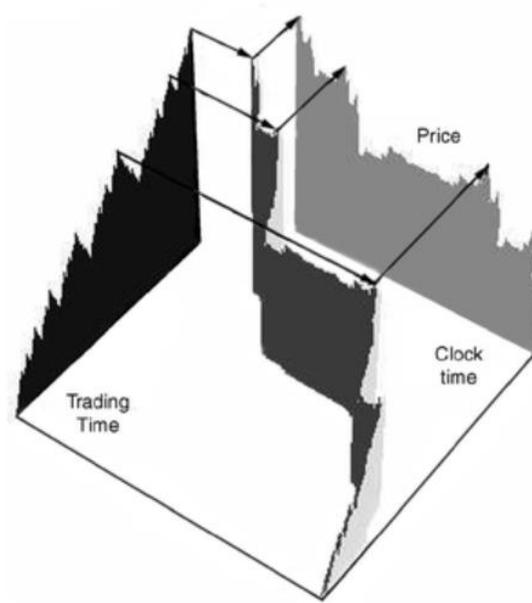
No obstante, también es posible obtener un generador nuevo a partir de la creación de otros dos diferentes entre sí, a lo cual Mandelbrot llama el “Teorema Bebé” (*Baby Theorem*), y se presenta a continuación:



**Figura 11.** *Baby Theorem*

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). *The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward*, p.185.

Esta figura puede aplicarse al mercado financiero y producir el “Cubo de mercado fractal” (*The fractal market cube*), el cual es una combinación de dos generadores: i) una curva artificial del tiempo de operación, basada en movimiento geométrico browniano y ii) un proceso matemático llamado “cascada multiplicativa”, el cual implica tomar el primer generador y realizar un proceso fractal de multiplicaciones y particiones para obtener una segunda distribución representada en la segunda gráfica (mostrada en medio del cubo). Dados los dos generadores antes mencionados, se obtiene una gráfica multifractal de precios (Mandelbrot, B., 2007).



**Figura 12.** “*The fractal market cube*”

Fuente: Mandelbrot, B. (2007). *The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward*, p.186.

A partir de las ideas previamente mencionadas, Mandelbrot, junto con Fisher A. y Calvet L., en 1997<sup>27</sup>, crean el *Modelo multifractal de los rendimientos de los activos*, el cual aplica el movimiento geométrico browniano y aparte redistribuye la curva de tiempo, obteniendo así un fractal que intenta describir el comportamiento de los precios financieros, demostrando que en el corto plazo, los precios suelen mostrar mucha volatilidad, mientras que a largo plazo, los precios muestran mayor estabilidad (Mandelbrot, B., 2007).

---

<sup>27</sup> Mandelbrot B., et al. (1997) “A Multifractal Model of Asset Returns”, Yale University.

# CAPÍTULO 3: Análisis fractal

***“The very heart of finance is a fractal”***

***Benoit Mandelbrot***

La distribución normal ha sido la distribución estadística más importante y popular desde su creación. Esta distribución, a pesar de permitirnos modelar el comportamiento de ciertas variables, no nos permite modelar todas las variables existentes ya que no es capaz de explicar comportamientos que suceden en la realidad. Esta distribución es en la que suelen basarse los modelos creados para poder predecir o explicar el comportamiento del precio de los activos financieros, sin embargo, dado que no explica la realidad, estos modelos podrían considerarse inadecuados.

La razón por la cual la distribución normal es incapaz de explicar el comportamiento de las variables en la realidad es porque no permite la existencia de eventos anormales, los cuales, como veremos en este capítulo, son más comunes de lo que se piensa.

## **3.1 Análisis estadístico de series financieras**

Nassim Taleb, en 2007, nos presenta el concepto de Cisne Negro (o *Black Swan*, en inglés), el cual nos hace referencia a que, normalmente cuando pensamos en un cisne, nos imaginamos que es blanco, sin embargo, encontrar cisnes negros es mucho más probable de lo que estimamos. Un cisne negro, de acuerdo con este autor, es un evento anormal e inesperado, y esta clase de eventos, como se revisará en los siguientes párrafos, no suele pensarse que son comunes o importantes. Taleb, traslada este concepto a la estadística aplicada a las finanzas, para hacer

una crítica a la distribución normal y la estadística Gaussiana, que es la que se emplea más a menudo, a pesar de que sea muy difícil comprobar su veracidad y de que, en muchas ocasiones, no nos sea útil para poder obtener resultados parecidos a la realidad. Las distribuciones de probabilidad que presentan colas anchas (*fat tails*) son vistas como poco reales o equívocas, a pesar de que su representación de los datos sea más certera que la distribución normal, y estas son la clásica representación de un Cisne Negro.

El problema del cisne negro radica en que pensamos que es algo que no va a suceder o que simplemente no existe, lo cual hace más difícil que podamos “predecirlo” o simplemente beneficiarnos de ello. Taleb presenta también el problema de la “falacia narrativa”, la cual se refiere a que los humanos interpretan equívocamente y distorsionan los hechos para darles un significado que piensen “adecuado” o “correcto”, incluso inventando las causas de dichos hechos, y, por lo tanto, alejándose de la realidad. Esto sucede principalmente porque solemos agregar causas a todos los problemas que se nos presentan para darles más sentido al porqué suceden. Sin embargo, esto nos lleva normalmente a equivocarnos y a buscar explicaciones que resultan ser falsas o equívocas (Taleb, N., 2007).

Adicionalmente, hay que tomar en cuenta que todo lo que tenemos registrado del pasado, no es necesariamente todo lo que sucedió, ya que la historia suele ocultar a los cisnes negros y provoca que se dude de su existencia. El hecho de que no veamos o hayamos visto un Cisne Negro, no quiere decir que no existan, por lo que, aunque en el pasado no se haya presentado ninguno, es muy probable que en el futuro sí se presenten (Taleb, N., 2007).

Por otro lado, solemos olvidar la existencia de los cisnes negros una vez que suceden, o pensamos que una vez que suceden, no van a volver a suceder porque fue un evento de “una vez en 100 años” aunque en realidad no sabemos con certeza la probabilidad que tiene de suceder un evento de este tipo (Taleb, N., 2007).

Otro de los errores que llevan a equivocarse dentro de la estimación de probabilidad de un cisne negro, es que solemos tomar las predicciones como algo certero o como la verdad absoluta, además de que las predicciones no suelen contener la existencia de un cisne negro, ya que solamente toman la historia o los datos ya existentes para predecir el comportamiento futuro (Taleb, N., 2007).

La curva Gaussiana -o normal -explica que la mayoría de las observaciones se encuentra cercana a la media y que mientras más se alejen de esta, la frecuencia de las observaciones decrece exponencialmente. (Taleb, N., 2007) La curva normal nos permite plasmar eventos anormales, sin embargo, nos dice que estos son tan raros que no juegan un papel importante dentro de nuestra muestra u observaciones.

Taleb menciona que las relaciones lineales son más fáciles de entender y es por esto que pensamos que son lo más común, sin embargo, las relaciones no lineales son las más comunes en cualquier situación o evento (Taleb, N., 2007).

La idea de que la realidad se comporta de forma “normal”, no se atribuye a Gauss, sino al matemático Adolphe Quételet, quien opinaba que todo en la vida real se podría representar con una curva normal (Taleb, N., 2007).

En la actualidad, sabemos que el lanzar una moneda  $n$  veces y obtener cara o cruz, es un experimento en cual sus resultados se comportan de forma normal, ya que cada lanzamiento es independiente del otro y en la ver tenido un resultado  $x$  en un lanzamiento  $N$  no cambia el resultado de

$N + 1$ . Sin embargo, este tipo de experimentos son únicos y no se parecen a lo que se vive en la vida real, por lo que no podemos asumir que todos los eventos o series de tiempo se comportan de forma normal (Taleb, N., 2007).

De acuerdo con Peters (1994), a lo largo del tiempo, se ha “escondido” el hecho de que la curva de rendimientos en el mercado financiero no sigue una distribución normal; y de acuerdo a su análisis, la probabilidad de que un evento “grande” (*large event*) suceda es “casi cinco veces más que lo que dicta la distribución normal y mientras más grande sea el evento, más grande será la diferencia entre lo que dicta la teoría y la realidad”, mostrando así que las distribuciones en el mercado tienen colas gruesas, lo cual es evidencia de la existencia de procesos estocásticos no lineales (Peters, E., 1994, p.26).

Usualmente, se usa la desviación estándar para medir la volatilidad, y se asume que al multiplicarla por la raíz cuadrada de  $t$  se anualiza dicha desviación, sin embargo, existen varios estudios\* que demuestran que la desviación estándar crece más rápidamente que la raíz cuadrada, lo cual va en contra de la teoría de la caminata aleatoria y de la HME (Peters, E., 1994).

En palabras de Mandelbrot<sup>28</sup>, Zipf describe que la aleatoriedad en las series de activos financieros y la aleatoriedad en la física son muy parecidas a excepción de que las series físicas se pueden explicar por medio de la distribución normal -o Gaussiana- y las series de activos financieros no. Éstas últimas se explican por medio de la distribución de *power-laws*, las cuales tienen “*long tails*” es decir, que tienen poca probabilidad de que

---

<sup>28</sup> Web of Stories (2017) “Benoit Mandelbrot – Power-Law Distribution (32/144)” (video). Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=YnQULsouy9Y&t=142s>

ocurran eventos únicos (*large events*), pero aun así tienen posibilidad de ocurrir, al contrario que en las distribuciones normales.

En una distribución normal sucede que al agregar más datos, la media de la distribución sigue siendo cercana a la misma que antes, mientras que en una distribución *power-law*, al agregar más datos, la distribución cambia completamente al alejarse de la media. Por ejemplo, si tenemos una muestra de la altura de las personas en todo el mundo obtendremos una distribución normal, ya que la mayoría de las personas tienen más o menos el mismo rango de altura y al agregar a una persona más alta, el promedio va a seguir siendo casi el mismo. Sin embargo, si tenemos una muestra del ingreso de las personas en el mundo y agregamos a la muestra a la persona más rica del mundo, esta distribución cambiará completamente ya que la media se verá afectada debido a la diferencia de ingreso percibido de la media poblacional y la persona más rica del mundo.

Al observar una figura euclidiana, si seleccionamos una parte observada a cierta escala, podemos observar que ésta, presenta una estructura o características similares a lo largo de esta selección, por lo que podemos decir que sigue una distribución normal y tiene una media. Sin embargo, al hablar de fractales o estructuras no lineales, como es el caso del set de Mandelbrot, en cada escala se van a observar distintas características o una estructura diferente, por lo que es imposible que estas figuras sigan una distribución normal.

“Al encontrarse con un proceso multifractal de origen desconocido, los científicos suelen elegir procesos independientes –usualmente movimiento browniano –como hipótesis” (p. 18), por lo que el comportamiento de los fluidos y del mercado sigue modelándose de esta forma. Esto aporta a la hipótesis de que la distribución normal no es la

forma de explicar todas las observaciones estadísticas que se nos presenten, pero sigue siendo la distribución más conocida hasta ahora y a pesar de no mostrarse eficiente en explicar ciertos fenómenos observables en la física, economía o finanzas, sigue siendo la teoría más aceptada (Peters, E., 1994).

Los fractales o modelos fractales nos permiten ver posible la existencia de los cisnes negros, es decir, se acercan un poco más a la realidad al permitir la existencia de las colas anchas (*fat tails*) dentro de las distribuciones.

En palabras de Taleb, “los fractales tienen medidas numéricas o estadísticas que se preservan en distintas escalas -contrario a la distribución Gaussiana” (p. 260), lo cual nos puede ayudar a describir la distribución del ingreso, el tamaño de las ciudades, el tamaño de los planetas, o incluso el comportamiento del rendimiento de los activos financieros. Adicionalmente, a pesar de que los fractales no explican del todo la existencia de los cisnes negros ni resuelven los problemas de éste, si permiten que existan eventos anormales dentro de la distribución, específicamente, dentro de la distribución el comportamiento de los precios de los activos financieros (Taleb, N., 2007).

### **3.2 Hipótesis del mercado fractal**

Para comenzar a analizar la hipótesis del mercado fractal, es importante tomar en cuenta que esta es una variación a la HME, no al modelo CAPM. Por otro lado, esta nueva hipótesis permite explicar la existencia de estructuras auto similares y la distribución del riesgo entre los inversionistas (Peters, E., 1994).

Para que un inversionista pueda comprar y vender, necesita que exista liquidez en el mercado, lo cual también permite que el precio sea “justo”, que se pueda operar eficientemente aún con distintos horizontes de

inversión y que la oferta y demanda tengan un balance. Aquí es importante aclarar que la liquidez no es lo mismo al volumen operado, ya que “los *crashes* han ocurrido cuando ha existido baja liquidez y un alto volumen de operación”, por lo que la baja liquidez es síntoma de que existe un desequilibrio en el volumen operado (Peters, E., 1994).

La HME no explica nada sobre la liquidez, argumentando que los precios siempre son “justos” independientemente de esta. Sin embargo, hay que resaltar que “un mercado estable es un mercado con liquidez”, y que en el momento en que esta falte, los inversionistas estarán dispuestos a vender más barato y/o comprar más caro, a pesar de la falta de un precio justo dentro de este escenario (Peters, E., 1994).

Siguiendo con el tema de la liquidez, se puede concluir con que la información no tiene la misma importancia para todos los inversionistas, esto debido principalmente a la diversidad de horizontes de inversión que existen y al nivel de capitalización o apalancamiento de cada inversionista, por lo que se podría decir que cada participante del mercado considera distintos precios como “justos” (Peters, E., 1994).

Dentro del mercado financiero, sabemos que existen inversionistas con distintos horizontes de inversión, por lo que un mercado es estable cuando todos los participantes del mercado pueden operar, enfrentando un mismo nivel de riesgo, ya que la distribución de rendimientos es la misma entre los distintos horizontes de inversión. Dado lo anterior, el mercado se vuelve inestable una vez que todos los inversionistas operan al mismo horizonte de inversión de corto plazo, es decir, cuando la información futura no es confiable por las condiciones de mercado actuales (Peters, E., 1994).

Los inversionistas a largo plazo suelen usar análisis fundamental –lo cual se discute anteriormente –y los que operan a corto plazo suelen usar

análisis técnico. Esto se suma al hecho de que los inversionistas que operan intradía le dan más importancia al precio de entrada y de salida que los inversionistas que operan a largo plazo (Peters, E., 1994).

Como se discutió en capítulos anteriores, la HME y el modelo CAPM funcionan bien en mercados en “equilibrio”, sin embargo, sabemos que el mercado no siempre se comporta de la misma forma y suelen existir distintos altibajos que estas teorías fallan en explicar.

La forma en que los especuladores obtienen rendimientos es “apostando” que el precio de un activo financiero va a disminuir o aumentar en un horizonte de inversión y tomando una posición (compra/venta) a favor de dicha apuesta. Dado lo anterior, se observa que en las teorías previamente presentadas (HME, HMA, etc.) no se toma en cuenta la existencia de los horizontes de inversión ni el beneficio de ser un inversionista a largo plazo (Peters, E., 1994).

Tomando en cuenta los puntos anteriores, la HMF se centra en el papel de la liquidez y del horizonte de inversión de los operadores del mercado, explicando así, por medio del nivel de riesgo (que es igual para los dos inversionistas) el por qué “la frecuencia de la distribución de los rendimientos es igual en diversos horizontes de inversión” (p. 46), lo cual permite concluir con que los mercados tienen una estructura autosimilar (Peters, E., 1994).

Cuando los inversionistas dejan de confiar en el análisis fundamental sobre las empresas por incertidumbre –pandemias, crisis, política -se vuelven inversionistas a corto plazo, por lo que los mercados se vuelven inestables y se rompe dicha estructura autosimilar. Sin embargo, esto también puede suceder cuando la información disponible es importante para todos los inversionistas sin importar su horizonte de inversión (Peters, E., 1994).

## CAPÍTULO 4: Modelos fractales aplicados

***“Assuming no one can predict anything is almost as dangerous as assuming they can predict anything”***

***Morgan Housel***

Al observar un fractal, podemos estar seguros de que es imposible obtener el perímetro de este, ya que, como vimos en el capítulo 2, los fractales suelen tener una longitud infinita, por lo que también nos sería complicado obtener el área de estos, aparte de que no es posible obtener el área de los fractales lineales.

Es por esto que, para poder tener una noción de la “medida” de un fractal o de una imagen o figura que tiene componentes fractales, debemos obtener su dimensión, que en este caso es llamada dimensión fractal.

La dimensión fractal de las series de tiempo explica que un proceso puede encontrarse entre el determinismo (dimensión fractal de 1) y el caos (dimensión fractal de 1.50), lo cual hace que dicha serie de tiempo no se encuentre dentro de una distribución normal, contrario a lo estudiado por otros autores (Peters, E., 1994).

Para encontrar la dimensión fractal de una serie de tiempo, se han planteado distintos métodos, los cuales veremos a continuación:

- i. El *box-counting* es de los métodos más conocidos pero menos eficaces para medir la dimensión fractal. A partir de este método se pretende cuantificar la naturaleza o estructura fractal de las series de tiempo (Pilgrim, I., Taylor, R., 2018)

El primer paso para realizar este método es poner una cuadrícula encima de nuestra serie de tiempo o figura a analizar, con cuadrados de tamaño  $L \times L$ , para después contar el número de cuadrados  $N(L)$  en los que se encuentra dicha figura. Posteriormente, se agregan más cuadrados de menor tamaño dentro de los cuadrados de tamaño  $L$  para poder representar de mejor manera la imagen o figura a analizar. Al tener cuadros más grandes, se tendrán menos cuadros en los que esté la imagen, mientras que, al tener cuadros más pequeños, se tendrán más cuadros donde se encuentre la imagen o figura.

Después, se procede a dividir el logaritmo de la suma de los cuadrados tamaño  $L$  menos el logaritmo de la medida del cuadrado  $L$  entre la resta del logaritmo del recíproco de la suma de los cuadrados con medida  $L-1$  menos el logaritmo del recíproco de la medida de los cuadrados  $L-1$ . Para verlo de manera más clara, la fórmula es la siguiente:

$$D = \frac{\log(\text{número de cuadrados } L) - \log(\text{medida de } L)}{\log\left(\frac{1}{\text{número de cuadrados } L-1} - \log \frac{1}{\text{medida de } L-1}\right)}$$

Sin embargo, la ineficacia de este método radica en la diferencia que existe entre los cuadrados y las figuras irregulares, ya que es común que estas “cajas”, por muy pequeñas que sean, no sean capaces de representar exactamente la figura a analizar.

- ii. Otro de los métodos más usados es obtener el coeficiente de Hurst, el cual, como veremos más adelante, al tomar valores entre 0.5 y 1.0 explica que la variable a examinar sigue un comportamiento aleatorio y presenta auto correlación positiva, lo cual quiere decir que si nuestra variable tiene un valor alto, es más probable que no sea seguida por otro valor alto.

Estos dos métodos antes mencionados han sido los más usados dentro del análisis fractal de las series de tiempo, específicamente para encontrar su dimensión fractal. Sin embargo, como se dijo anteriormente, el método de *box-counting* no es tan aproximado a la realidad ya que su forma euclidiana impide adecuarse a estructuras irregulares. Es por esta razón que en este capítulo nos centraremos en pruebas empíricas realizadas con el coeficiente de Hurst, para posteriormente ponerlo a prueba.

## **4.1 Modelos fractales a lo largo del tiempo**

La hipótesis del mercado fractal intenta explicar el mercado financiero a través de la geometría fractal.

La hipótesis del mercado fractal explica que los mercados financieros son fractales con sistemas dinámicos no lineales en donde lo que pasa en el presente afecta lo que pasa en el futuro. Sin embargo, al suponer que conociendo las condiciones iniciales podemos predecir el comportamiento futuro, al existir alguna diferencia en dichas condiciones iniciales, el futuro puede resultar totalmente incierto (Boeing, G., 2016).

Hurst, basándose en el estudio de Einstein sobre el movimiento browniano de las partículas, probó, en 1965, que “la dinámica de los fenómenos naturales está dada por una ley de cambio aleatorio”. Hurst propone el ratio no-dimensional, dividiendo las series de tiempo entre la desviación estándar y la media, lo cual da como resultado el análisis de rango reescalado ( $R/S$ ), ya que es una redimensión de la escala. Este análisis se introdujo en las finanzas en 1972 por Mandelbrot.

Desde los noventa se empieza estudiar a la serie de tiempo financieras desde una perspectiva fractal ya que presentan la propiedad conocida como auto similaridad.

En 2019, Vladi et al., al estudiar un conjunto de series de tiempo financieras se dan cuenta que estas presentan memoria a largo plazo, es decir que tienen memoria de los datos previos a lo largo del tiempo por lo que es más fácil poder predecir su comportamiento en el futuro. Dentro de este estudio, se usa un análisis R/S, obteniendo el coeficiente de Hurst, el cual si es igual a 0.5 la muestra se comporta de manera aleatoria, entre 0.5 y 1 la muestra tiene memoria a largo plazo es decir “persistencia” -como lo llaman los autores; y entre 0 y 0.5 quiere decir que la muestra se mueve muy rápidamente para ser aleatoria, o que es “no persistente”.

Vladi et al., al estudiar series entre 2007 y 2019 del crudo Brent, del dólar-rublo y de la acción ViaSat, obtienen un coeficiente de Hurst igual a 0.6 en las primeras dos y de 0.5 para la acción, por lo que, aunado a otras pruebas estadísticas, se determinó que las primeras dos mencionadas, demostraban persistencia por lo que fue con las series que se trabajó. De esta forma, se determinó el número de días que presentan por cada ciclo.

Dado que el número de días de cada ciclo en las series persistentes -o con el coeficiente de Hurst más alto -van desde los 36 días hasta más de los 2000, este estudio podría no interesar a los operadores intradía, sin embargo, en otro tipo de muestras o series accionarias se podría aprovechar la memoria a corto plazo que presentan estas para así poder obtener una ganancia en un periodo más corto.

Al desarrollar la hipótesis del mercado fractal, Peters (1989) usa el análisis de rango re-escalado (*rescaled range analysis*), usado para derivar el coeficiente de Hurst, el cual nos ayuda a medir la memoria a largo plazo en las series de tiempo al observar la autocorrelación de dicha serie (Doorasamy, M., 2018).

De acuerdo con Peters (1991), una serie de tiempo con un coeficiente de Hurst alto, denota mayor persistencia y una tendencia más clara que una

con un coeficiente bajo. Esto quiere decir que si una serie de tiempo tiene un coeficiente entre 0.5-1 entonces las leyes tienen una autocorrelación positiva a largo plazo, por lo que es más posible que un valor alto en dicha serie sea seguido por otro valor alto. Un exponente de Hurst entre cero y 0.5, quiere decir que si existe un valor alto en la serie este sea seguido por un valor bajo. Por otro lado, un exponente de Hurst igual a 0.5 quiere decir que la serie no tiene autocorrelación o que esta es cercana a cero (Doorasamy, M., 2018) (Onali, E., Goddard, J., 2011).

En 2018, Doorasamy, et al., intentan probar que las series de tiempo financieras con un coeficiente de Hurst alto son persistentes. Para esto, aplican el Markov Switching Model (MSM), el cual está basado en el trabajo de Hamilton (1989) que plantea “cambios periódicos en los parámetros que describen la dinámica y volatilidad de un sistema” (p. 94), explicando cómo de acuerdo a condiciones externas, las series de tiempo pueden llegar a cambiar y por lo tanto, a ser menos predecibles, es decir, cómo la tasa de rendimiento de un activo financiero “puede cambiar abruptamente dependiendo del Estado en el que se encuentre (por ejemplo un mercado bull o bear)” (p. 94). Dentro del estudio se siguen las siguientes hipótesis: Si el coeficiente de Hurst es alto, entonces dicha serie de tiempo va a tener el mismo estado que exhibió previo al MSM, si dicho coeficiente es bajo entonces será más probable que cambie de estado al aplicar el MSM. En caso de que la serie de tiempo tenga un bajo coeficiente de Hurst y una alta probabilidad de cambiar de estado entonces se le considera volátil. El MSM permite aplicar cambios en la varianza o en la media y detectar anomalías en las series de tiempo, por lo que permite explicar fluctuaciones y distintos ciclos económicos, como las recesiones o booms (Doorasamy, M., 2018).

En este estudio, se analizan las series usando el análisis de rango reescalado (R/S), el cual funciona para “estimar la naturaleza fractal de una

serie de tiempo” (Doorasamy, M., 2018, p. 95) y usando el concepto de dimensión fractal, el cual “es una medida estadística que indica cómo es que un fractal puede llenar un espacio al cambiar la escala” (Rangarajan, G. y Sant, D., 2004).

Al empezar el análisis, primero se realizan pruebas para detectar si la serie de tiempo usada dentro del estudio sigue una distribución normal, para lo cual se midió la desviación estándar, curtosis y asimetría, las cuales debían ser iguales a 3 y 0, respectivamente. Adicionalmente se realizan las pruebas Lilliefors y Anderson-Darling para detectar la normalidad en los índices seleccionados, los cuales incluyen el IPC, IBOVESPA, DJIA, JSE y SSE\*. Todas las pruebas anteriores indican que las series no presentan una distribución normal. Sin embargo, se continúa con el análisis R/S, para el cual se obtienen el índice de Hurst y la autocorrelación (CN). Cabe mencionar que el CN “representa el porcentaje de variaciones en una serie de tiempo que puede explicarse con información histórica” (Peters, E., 1994), por lo que un CN igual a cero significa que el comportamiento actual de la serie no puede ser explicado por los datos históricos de dicha serie.

Como resultado de las pruebas de R/S, Doorasamy obtiene que los índices con mayor exponente de Hurst, son el JSE small cap y el Dow Jones, lo cual quiere decir que estas dos series son las que tienen más probabilidad de que si presentan un valor alto (bajo) este sea seguido por otro valor alto (bajo). Sin embargo, los resultados del CN de estas series son cercanos al 20%, lo que indica que este porcentaje es el que estará determinado por los datos históricos a lo largo del tiempo.

El último de los indicadores obtenidos es el FD (dimensión fractal), el cual para estas mismas dos series es  $1.0 < x < 1.5$ , por lo que se puede decir que exhiben la existencia de memoria a largo plazo.

Con esto se concluye que estas series son menos riesgosas ya que presentan menor volatilidad y mayor persistencia a lo largo del tiempo.

En la FMH, como se mencionó anteriormente, aparte de proponer que hay inversionistas con distintos horizontes de inversión, también propone que los inversionistas interpretan la información de diferente manera, lo cual ayuda a la liquidez y funcionamiento del mercado. Adicionalmente, menciona que las crisis financieras surgen como resultado de que muchos inversionistas tengan el mismo horizonte de inversión (normalmente corto plazo dado la incertidumbre). Éste último punto, propuesto por Peters, es puesto a prueba después por Kristoufek<sup>29</sup> en 2013 y Dar et al., en 2017, estudios en los cuales se concluye que, durante las crisis financieras, la mayoría de los inversionistas son de corto plazo (Doorasamy, M., 2018).

El coeficiente de Hurst ha sido utilizado a lo largo del tiempo para detectar puntos de inflexión en el mercado financiero. Por ejemplo, en 2004, Grech y Mazur<sup>30</sup>, estudian el DJIA durante los crashes de 1929, y 1987, y concluyen que el coeficiente de Hurst provee señales previas a estos eventos. Más adelante, Czarnecki<sup>31</sup> et al. (2008) y Grech y Pamula<sup>32</sup> (2008), estudian el índice principal en Polonia (WIG20) y concluyen que el coeficiente de Hurst puede ayudar a detectar *crashes* en el mercado financiero. Morales et al. (2012), usan el coeficiente de Hurst en un portafolio de acciones de Estados Unidos, concluyendo con que dicho coeficiente ayuda a detectar distintas fases dentro del mercado (Doorasamy, M., 2018).

---

<sup>29</sup> Kristoufek, L. (2013) "*Fractal markets hypothesis and the global financial crisis: Wavelet power evidence*" Scientific Reports, 3, 2857.

<sup>30</sup> Grech, D., Mazur, Z. (2004) "*Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?*" Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 336, 133-145.

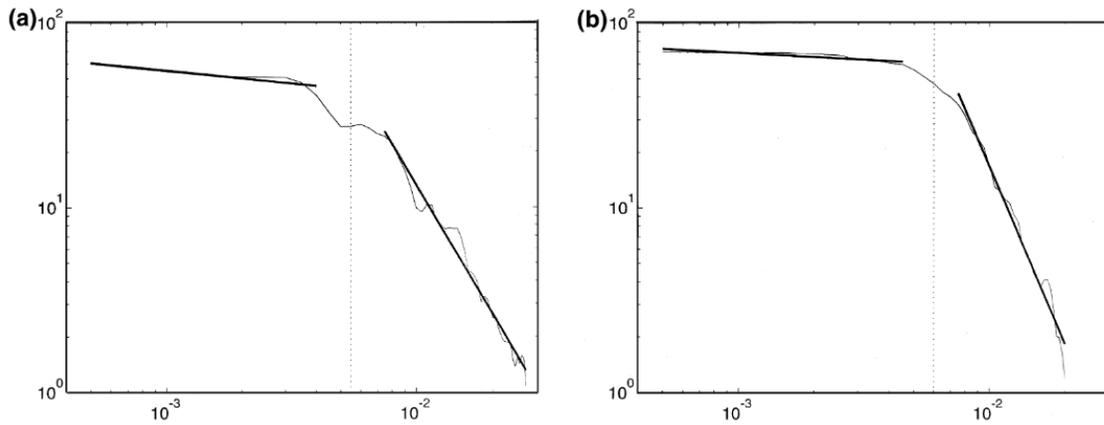
<sup>31</sup> Czarnecki, L., et al. (2008), "*Comparison study of global and local approaches describing critical phenomena on the Polish stock exchange market*". Physica A: Statistical and Mechanics and its Applications, 387, 6801-6811.

<sup>32</sup> Grech, D., Pamula, G. (2008) "*The local Hurst exponent of the financial time series in the vicinity of crashes on the Polish stock market*" Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 387, 4299-4308.

En el 2000, A. Weron y R. Weron, basándose en la hipótesis del mercado fractal de Peters, construyen un modelo que permite describir los rendimientos de los activos financieros, por medio de la aleatoriedad y el determinismo. En este artículo, se explica cómo las teorías existentes sobre los precios de los activos financieros están basadas en “supuestos de distribución”, por lo que no son capaces de explicar lo que sucede en pruebas empíricas, ya que no incluyen explicaciones sobre la volatilidad de los precios ni sobre los supuestos que no están incluidos dentro de la hipótesis de los mercados eficientes, como puede ser el diferente horizonte de inversión de cada individuo.

Dentro de los supuestos de este modelo de dependencia exponencial y condicional (CED) se incluye un número finito de fechas de operación y de inversionistas, los cuales tienen un distinto horizonte de inversión. Adicionalmente, mencionan la importancia de los inversionistas institucionales, ya que juegan un papel muy importante dentro del mercado, además de que, usualmente, éstos consiguen su información de las mismas fuentes y por lo tanto suelen tener las mismas opiniones sobre el comportamiento de los precios de los activos financieros.

A.Weron y R. Weron, por medio de este modelo, analizan distintos índices (S&P500 y Nasdaq) durante un periodo de tiempo, y al obtener gráficas de Zipf (o de doble logaritmo), descubren que estas series siguen una distribución power-law para rendimientos “pequeños” y otra para retornos grandes, respectivamente, obteniendo las siguientes gráficas de Zipf:



**Figura 13.** Gráficas de Zipf.

Fuente: Weron, A., Weron, R. (2000) "Fractal market hypothesis and two power-laws", p. 294.

Demostrando así que, las distribuciones de los rendimientos de los activos financieros se explican de mejor manera por medio de una distribución no-Gaussiana, contrario a lo que dicta la HME.

En otro estudio, Oprean C., utiliza los índices de mercado de 8 países emergentes: BET (Rumania), OMX (Estonia), PX (República Checa), BUX (Hungaria), BOVESPA (Brasil), SENSEX (India), RTSI (Rusia) y Shanghai Composite de China. Estos datos van desde el 2002 hasta el 2014, y obtiene diferentes indicadores, como son la media, mediana, desviación estándar, curtosis, asimetría (skewness), Jarque Bera y su probabilidad.

Dado el análisis anterior, se obtiene que los índices con menor nivel de retorno son los de la India y Brasil, mientras que el más alto es el de Rusia. Adicionalmente, el índice que presenta una desviación estándar mayor, es decir, un mayor riesgo sistemático, es Rusia, mientras que el menor es Estonia.

Por otro lado, dado que la probabilidad es cero para todos los índices, se rechaza la hipótesis nula de la distribución normal, aunado a los resultados de la prueba Jarque Bera, por lo que se puede decir que estos índices en específico se comportan de forma no lineal. Sin embargo, se aplica también una prueba de no linealidad de BDS (Brock, Dechert, Scheinkman y Le Baron), la cual es una prueba propuesta por los autores antes mencionados en 1996. Al aplicar dicha prueba a los índices seleccionados, nos arroja evidencia de no-linealidad en las series.

Posteriormente, Oprean, obtiene el índice de Hurst, el coeficiente de correlación y la dimensión fractal para todas las series, obteniendo así, que todas las series son persistentes, ya que presentan resultados entre 0.5 y 1 en el coeficiente de Hurst. Adicionalmente, se obtiene que las series están correlacionadas positivamente y que siguen un movimiento browniano. Estos resultados demuestran que los datos de los índices seleccionados no siguen un criterio de aleatoriedad, ya que tienen memoria de largo plazo, es decir, que los eventos recientes impactan directamente a las observaciones presentes, pero los eventos pasados siguen teniendo cierta influencia en las observaciones presentes, por lo que estos índices presentan ciertas características de comportamiento fractal.

Dentro de los estudios más recientes sobre la existencia de componentes fractales dentro del mercado financiero aplicando el exponente de Hurst, se encuentra el estudio de Schadner (2021), en el cual demuestra que existe un alto nivel de significancia en las pruebas multifractales que realiza sobre el sentimiento del mercado, tomando en cuenta datos sobre opciones financieras de ciertos activos y de encuestas hacia los inversionistas.

## 4.2 Análisis fractal aplicado al mercado mexicano

Cuando el precio de una acción se comporta de manera alcista o bajista durante un periodo determinado de tiempo, se crea cierta presión sobre los inversionistas para comprar o vender dicho activo, es decir, los cambios en los precios influyen en las decisiones que toman los inversionistas y estas decisiones influyen, a su vez, en los cambios en el precio de los activos financieros.

Al usar ciertas herramientas –tales como el exponente de Hurst –para medir la influencia que tienen los cambios en los precios de los activos dentro de las decisiones de los inversionistas, es posible predecir el comportamiento futuro que tendrán los precios de dichos activos.

La dimensión fractal de una serie de tiempo financiera con tendencia alcista o bajista es cercana a 1, es decir, tiene un exponente de Hurst cercano a 1, dado que:

$$\text{Exponente de Hurst} = 2 - \text{Dimensión Fractal}$$

A su vez, un activo que se comporta de manera totalmente aleatoria, tiene un exponente de Hurst igual a 0.5 y una dimensión fractal de 1.5.

De igual manera, el precio de un activo o un mercado con reversión a la media tendría una dimensión fractal cercana a 2 y un exponente de Hurst cercano a 0.

Los mercados financieros –o los activos financieros –no pueden tener una sola dimensión fractal o un exponente de Hurst que describa toda la serie de tiempo, dado que no son fractales perfectos; es decir, van cambiando de valores dependiendo de la periodicidad con que se observe dicha serie, ya que existen distintas tendencias dependiendo de la escala de tiempo que se esté analizando.

Como se explicó anteriormente, los principales estudios aplicados para demostrar un comportamiento fractal en las series de tiempo de los activos financieros, es obtener el coeficiente de Hurst, el cual, como se mencionó anteriormente, tiene que tomar valores entre 0.5 y 1.0 para ser “persistente” y mostrar un componente fractal.

Dado lo anterior, se aplicará dicho criterio al siguiente análisis de las series de precios de acciones de empresas que se encuentran en el IPC de México. Los precios de las acciones que se analizarán son:

1. América Móvil (AMLX.MX)
2. Arca Continental (AC.MX)
3. Wal-Mart de México (WALMEX.MX)
4. Gruma (GRUMAB.MX)
5. Industrias Peñoles (PE&OLES.MX)
6. Alsea (ALSEA.MX)
7. Grupo Financiero Banorte (GFNORTEO.MX)
8. Promotora y Operadora de Infra (PINFRA.MX)
9. Grupo Aeroportuario del Centro (OMAB.MX)
10. Grupo Bimbo (BIMBOA.MX)
11. Alfa (ALFAA.MX)
12. Grupo México (GMEXICOB.MX)
13. Cemex (CEMEXCPO.MX)
14. Grupo Cementos de Chihuahua (GCC.MX)
15. Kimberly Clark de México (KIMBERA.MX)
16. Grupo Elektra (ELEKTRA.MX)
17. Grupo Televisa (TLEVICPO.MX)
18. Grupo Aeroportuario del Pacífico (GAPB.MX)
19. Grupo Carso (GCARSOA1.MX)
20. Fomento Económico Mexicano (FEMSAUBD.MX)

Para obtener el coeficiente de Hurst de las series de tiempo de cada acción, se tomó como base un modelo<sup>33</sup> para el cual se seleccionó un periodo de tiempo de 1,024 días, específicamente del 30 de octubre de 2015 al 26 de noviembre de 2019. El motivo de elegir dicho número de días recae en que 1,024 es lo mismo que  $2^{10}$  y dicha expresión permite dividir la serie de tiempo de cada acción en 8 muestras de distintos tamaños cada una. La primera muestra corresponde a  $2^1$ , por lo que se divide en dos submuestras, cada una de 512 datos. La segunda muestra corresponde a  $2^2$ , y está dividida en 4 submuestras, cada una de 256 datos. La tercera muestra es igual a  $2^3$ , por lo que se divide en 8 submuestras, cada una con 128 datos. La cuarta muestra corresponde a  $2^4$ , por lo que contiene 16 submuestras, cada una de 64 datos. La quinta muestra es de  $2^5$ , y tiene 32 submuestras, cada una de 32 datos. La sexta muestra corresponde a  $2^6$ , por lo que contiene 64 submuestras, cada una de 16 datos. La séptima muestra es igual a  $2^7$ , y se divide en 128 submuestras, cada una con 8 observaciones; y por último, la octava muestra es de  $2^8$ , por lo que contiene 256 submuestras con 4 observaciones cada una.

A continuación, una tabla que explica el análisis de las muestras previamente mencionado:

**Tabla 1.1**

<i>Muestras <math>2^n</math></i>	$^1$	$^2$	$^3$	$^4$	$^5$	$^6$	$^7$	$^8$
<i>Submuestras</i>	2	4	8	16	32	64	128	256
<i>Datos en cada submuestra (n)</i>	512	256	128	64	32	16	8	4

<sup>33</sup> Souza, C., et al. (2017) “*The Long-Range Memory and the Fractal Dimension: a case Study for Alcantara*” Scielo Brasil, Brasil.

Zhuanxin, D., et al. (1993) “*A long memory property of stock market returns and a new model*” University of California, San Diego, CA, USA.

Posteriormente, se obtuvo el rendimiento diario de cada acción para después, extraer el promedio de dicho rendimiento por cada submuestra; por ejemplo, en la muestra 2<sup>8</sup>, cada 4 datos hay una cifra diferente del promedio del rendimiento, dado que en esa muestra existen 256 submuestras con 4 datos cada una. Después de obtener dicho promedio, se observó cuánto por ciento se alejaba cada dato de rendimiento diario del promedio obtenido por submuestra, es decir, si el rendimiento de la acción ARCA es de 0.38% para el 22 de noviembre de 2019, y el rendimiento promedio en la muestra 2<sup>4</sup> en esa misma fecha es de 0.043% dado que es la primera submuestra, entonces la variación del rendimiento diario con respecto al rendimiento promedio para esa fecha y esa submuestra es de 0.335%.

Más adelante, se realiza la suma de dichas variaciones por cada submuestra, para después obtener la diferencia entre el valor máximo y mínimo de estas sumas por submuestra. A continuación, se obtiene la desviación estándar de los rendimientos diarios para cada acción para después obtener el rango re-escalado (R/S). Este último se consigue al dividir la diferencia entre el valor máximo y el mínimo antes mencionado entre la desviación estándar de los rendimientos diarios.

Una vez que se tiene el análisis R/S, se obtiene el promedio de estos resultados por cada muestra, así como el logaritmo de estos promedios, dando como resultado la siguiente tabla:

**Tabla 1.2**

<i>Muestras</i>	$\wedge^1$	$\wedge^2$	$\wedge^3$	$\wedge^4$	$\wedge^5$	$\wedge^6$	$\wedge^7$	$\wedge^8$
<i>Promedio Análisis R/S</i>	24.96	15.09	12.37	8.546	5.873	3.94	2.46	1.44
<i>Log ( Promedio R/S)</i>	3.217	2.714	2.515	2.145	1.77	1.37	0.9	0.365
<i>Log(n)</i>	6.238	5.545	4.852	4.159	3.466	2.77	2.08	1.386

En la última fila observada en la tabla anterior, se tiene el logaritmo del número de datos que hay por cada submuestra, listado previamente en la tabla 1.1.

Por último, para obtener el coeficiente de Hurst y el error estándar de cada acción, se utiliza una estimación lineal (método de mínimos cuadrados) en donde el logaritmo del promedio del análisis R/S es la variable  $y$ , y el logaritmo del número de datos por submuestra es el conjunto de variables  $x$ .

Dado que es común que el coeficiente de Hurst arroje un valor bastante cercano a 0.5, se realiza una estimación por medio de un  $p$ -value para comprobar que la serie de tiempo no sigue una caminata aleatoria ( $H=0.5$ ), por lo que se obtiene la distribución  $t$  de student de dos colas, tomando en cuenta los siguientes parámetros:

$$\text{Número de muestras} = 8$$

$$\text{Grados de libertad} = \text{Número de muestras} - (\text{Intercepto y pendiente})$$

$$\text{Grados de libertad} = 8 - 2 = 6$$

$$\text{Valor del exponente de Hurst al seguir una caminata aleatoria} = 0.5$$

$$\text{Estadístico } t = \frac{\text{Exponente de Hurst} - 0.5}{\text{Error estándar}}$$

En donde:

*H<sub>0</sub>: la serie de tiempo sigue una caminata aleatoria*

*H<sub>1</sub>: la serie de tiempo no sigue una caminata aleatoria*

Al obtener un  $p$ -value menor a 0.5 o a 5%, se rechaza la hipótesis nula, lo cual quiere decir que la serie de tiempo no sigue una caminata aleatoria y por lo tanto tiene memoria a largo plazo.

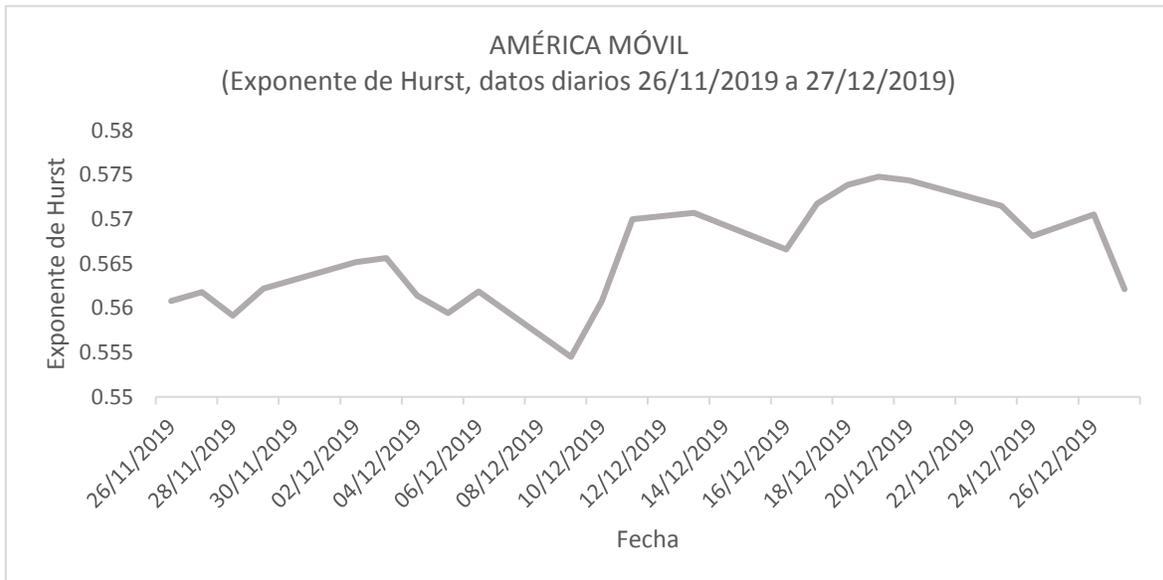
## Resultados

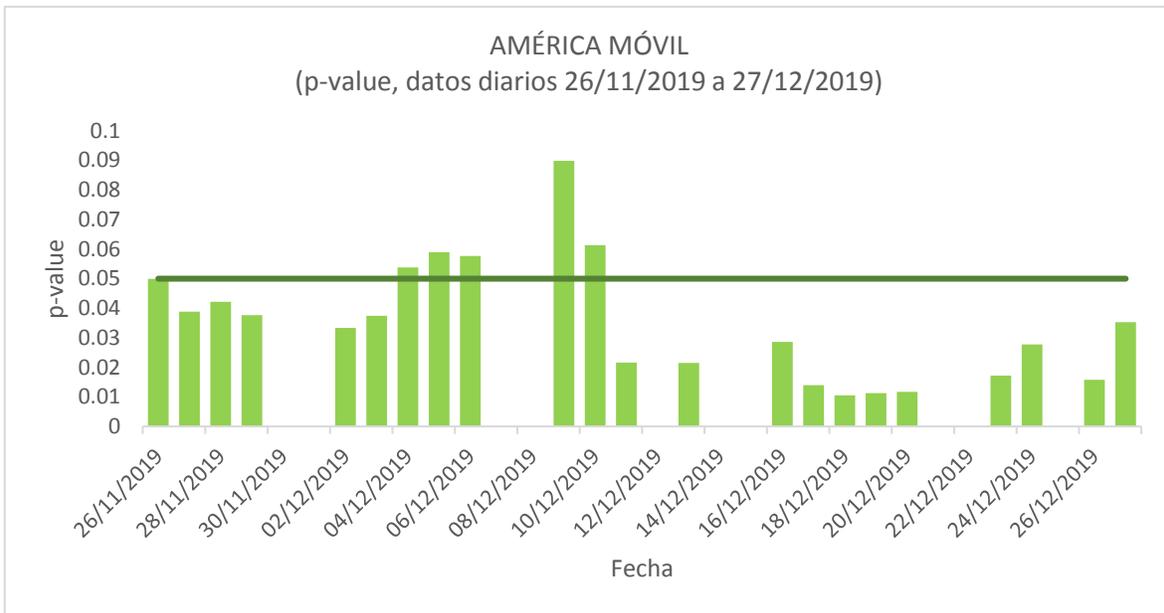
A continuación, se presentan las gráficas de precios de cada una de las acciones, así como una gráfica donde se muestra el exponente de Hurst de 22 muestras (~1 mes) de 1,024 días cada una y en el eje x se muestra la fecha en la que termina cada muestra. Adicionalmente, se presenta una gráfica donde se muestra el p-value de cada coeficiente de Hurst, para saber si la serie de tiempo en cuestión sigue o no una caminata aleatoria.

Las acciones que presentaron en su mayoría o totalidad una memoria a largo plazo y una autocorrelación positiva fueron América Móvil, Arca Continental, Gruma, Industrias Peñoles, Alsea, Promotora y Operadora de Infra, Grupo Aeroportuario del Centro, Grupo México, Cemex, Grupo Cementos de Chihuahua, Grupo Elektra, Grupo Televisa, Grupo Aeroportuario del Pacífico y Grupo Carso.

Por el contrario, las acciones que presentaron un comportamiento aleatorio en su mayoría o totalidad fueron Wal-Mart de México, Grupo Financiero Banorte, Grupo Bimbo, Alfa, Kimberly Clark de México y Fomento Económico Mexicano.

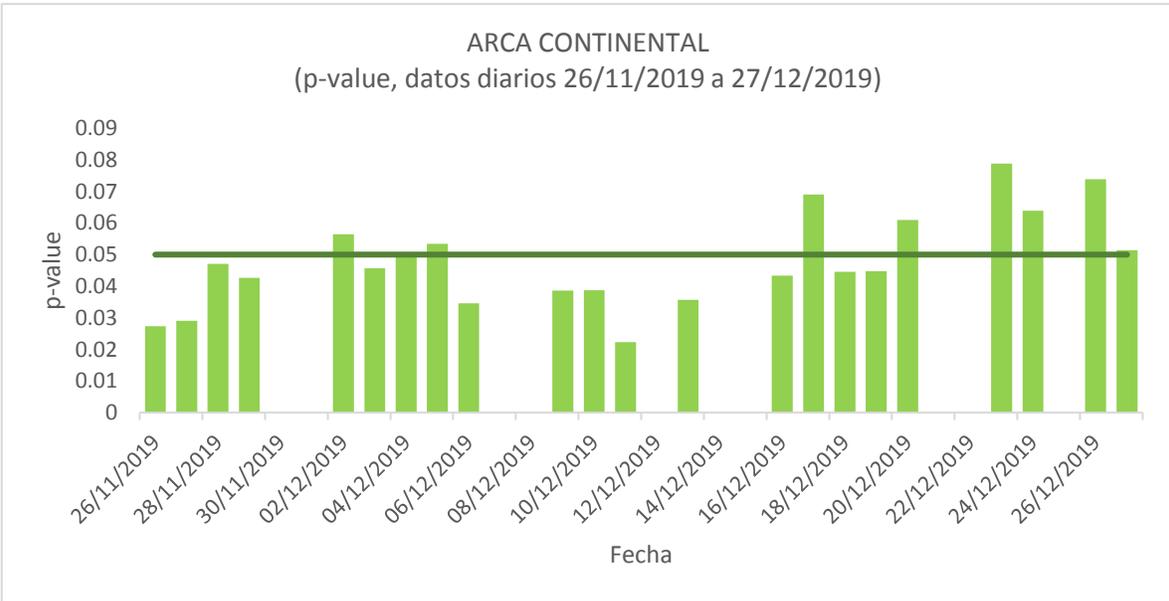
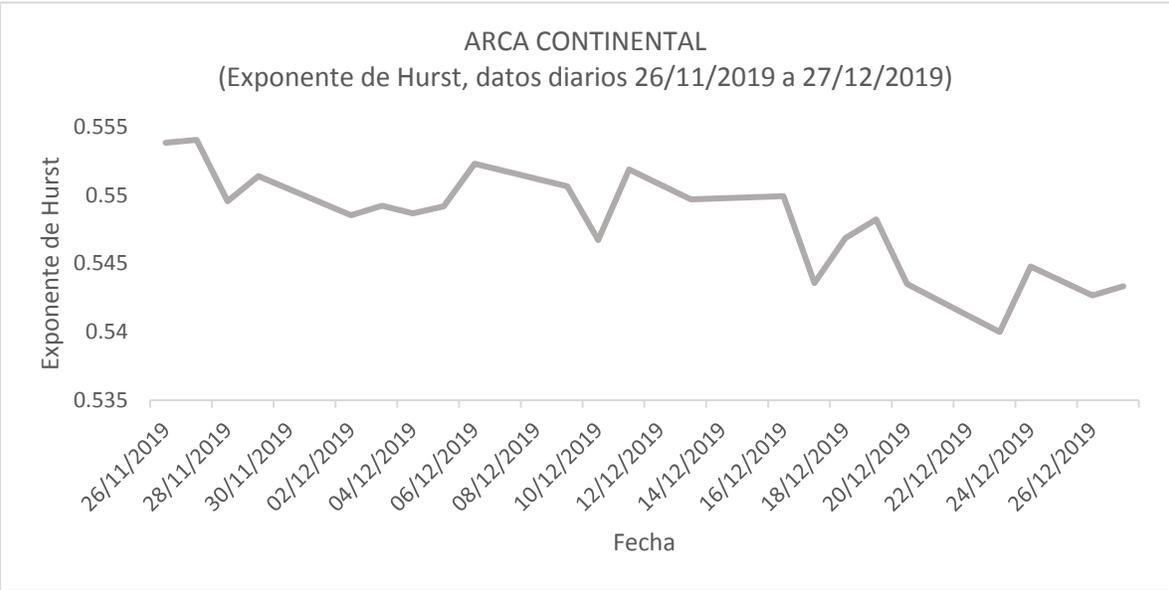
## 1. América Móvil (AMLX.MX)





## 2. Arca Continental (AC.MX)



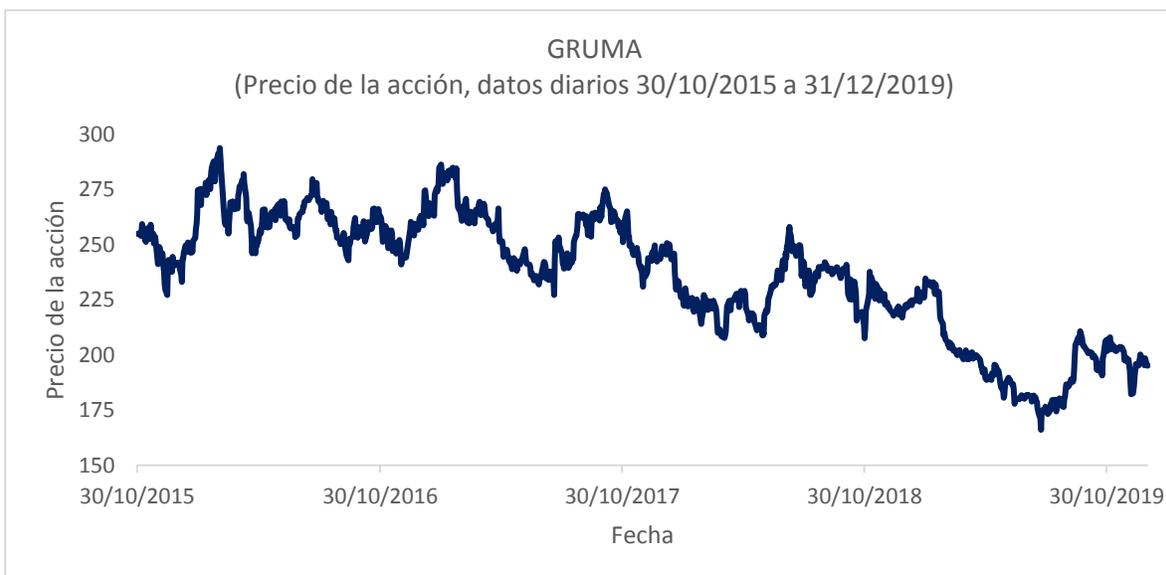


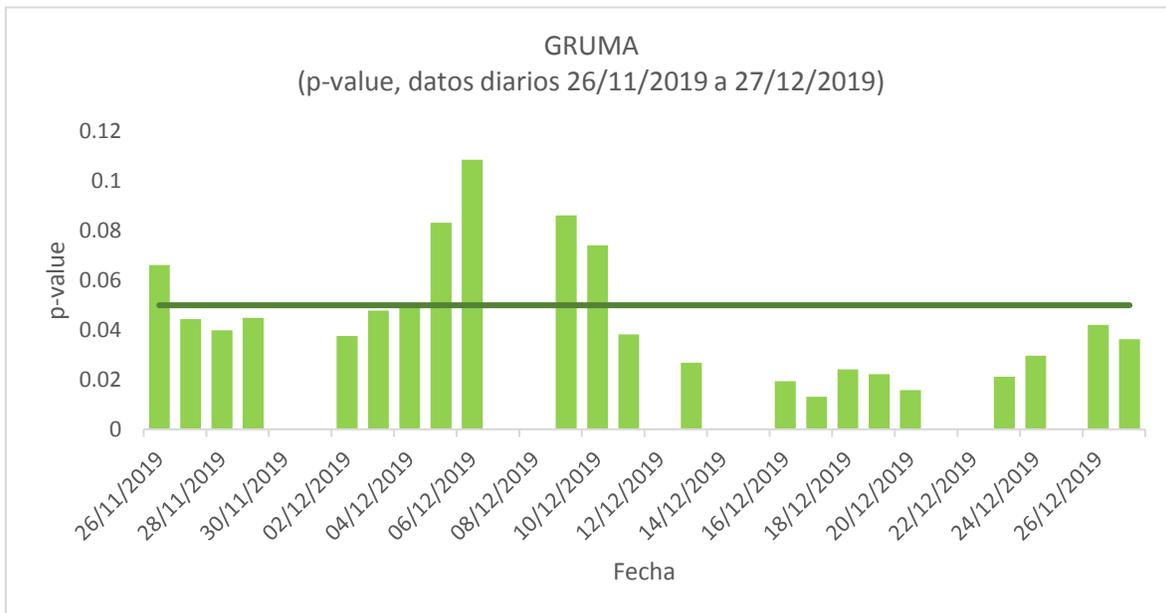
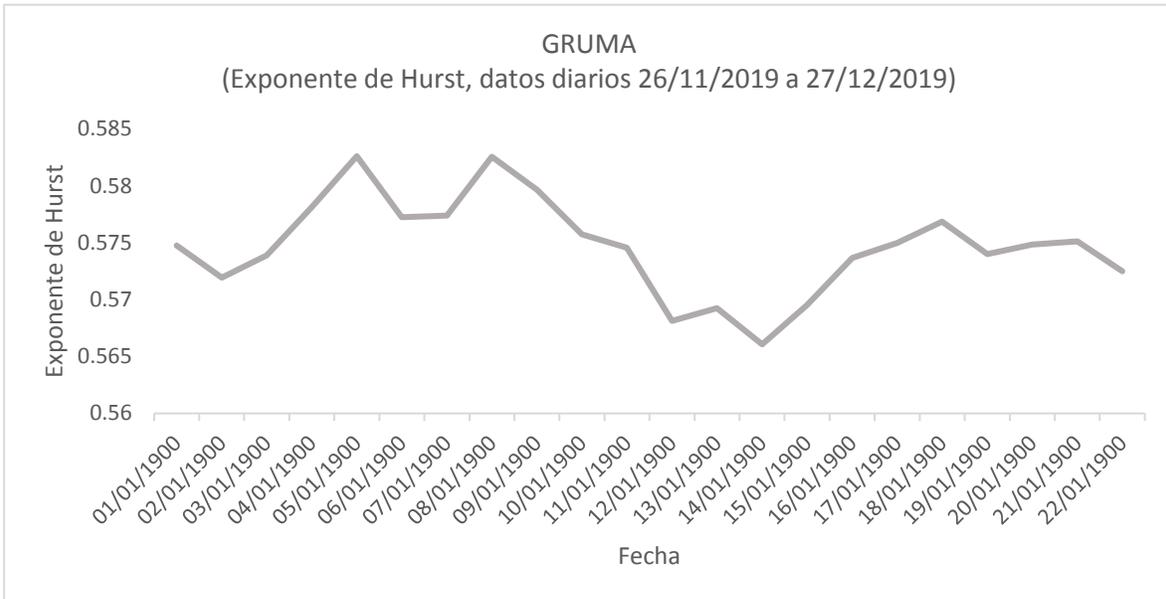
### 3. Wal-Mart de México (WALMEX.MX)



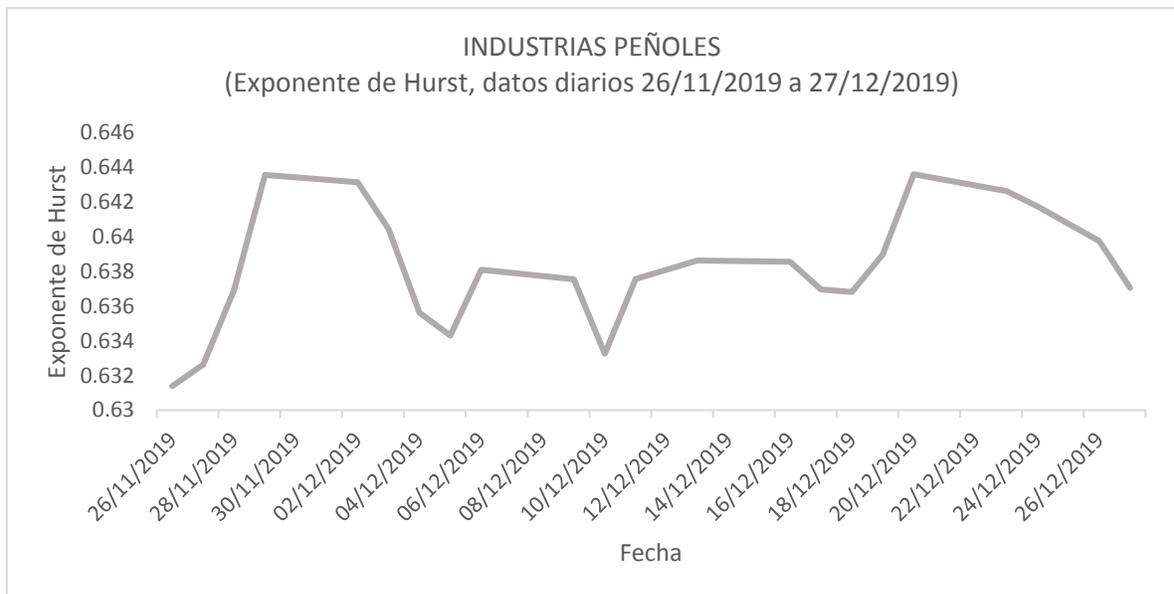


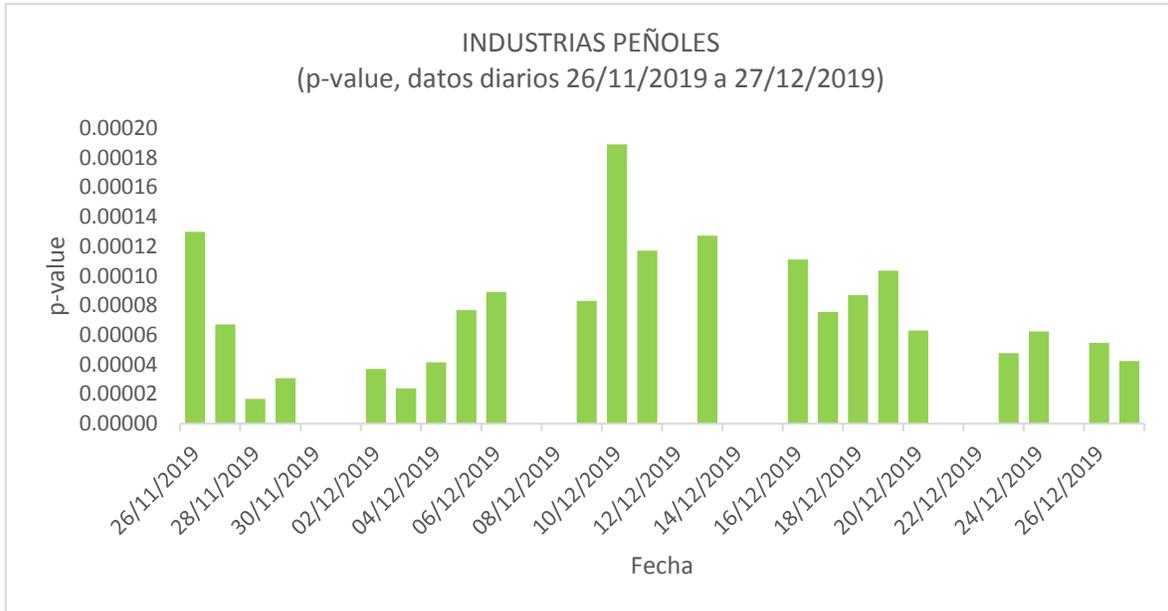
#### 4. Gruma (GRUMAB.MX)





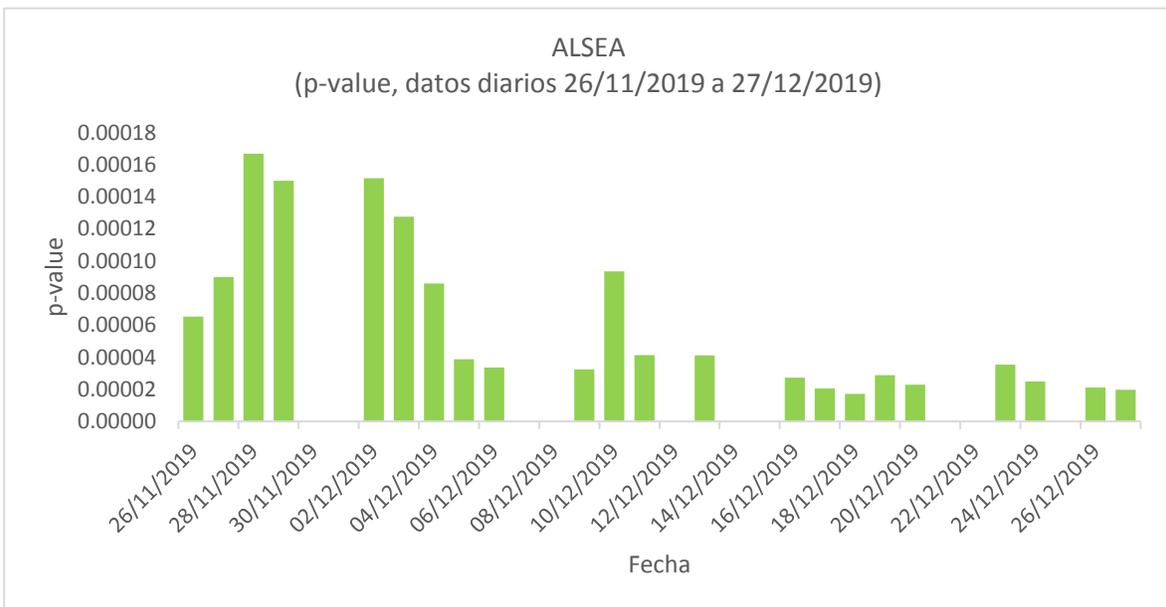
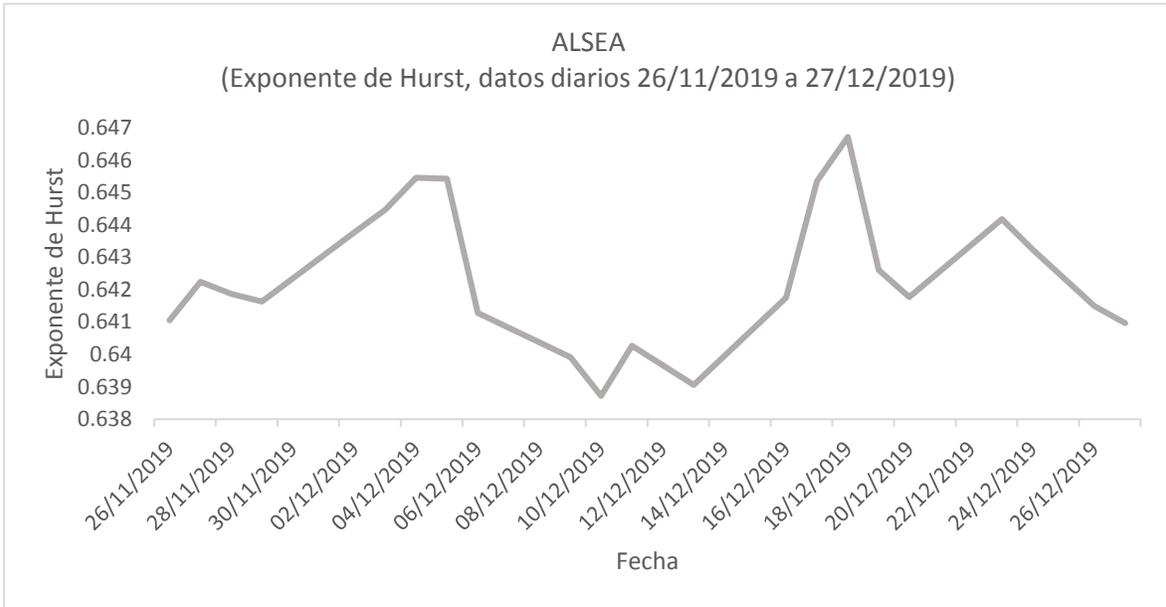
## 5. Industrias Peñoles (PE&OLES.MX)



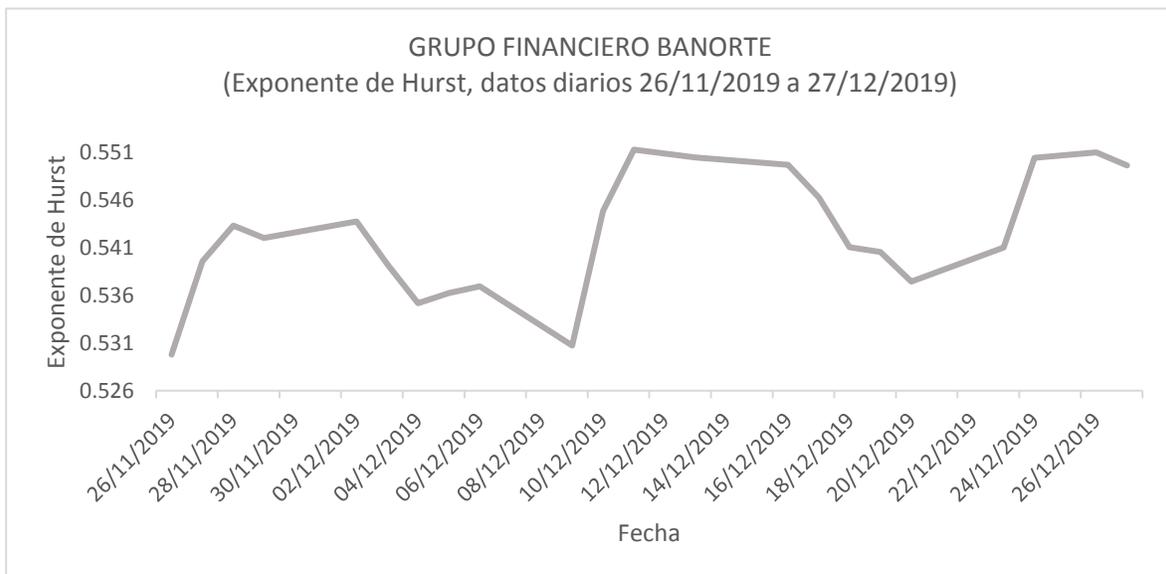


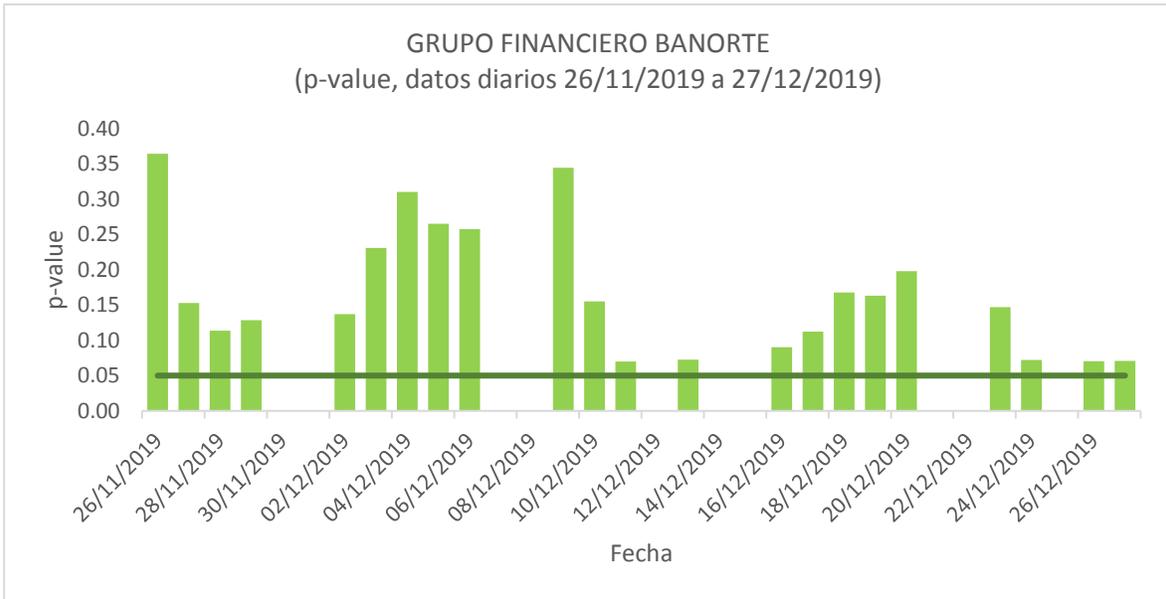
6. Alsea (ALSEA.MX)





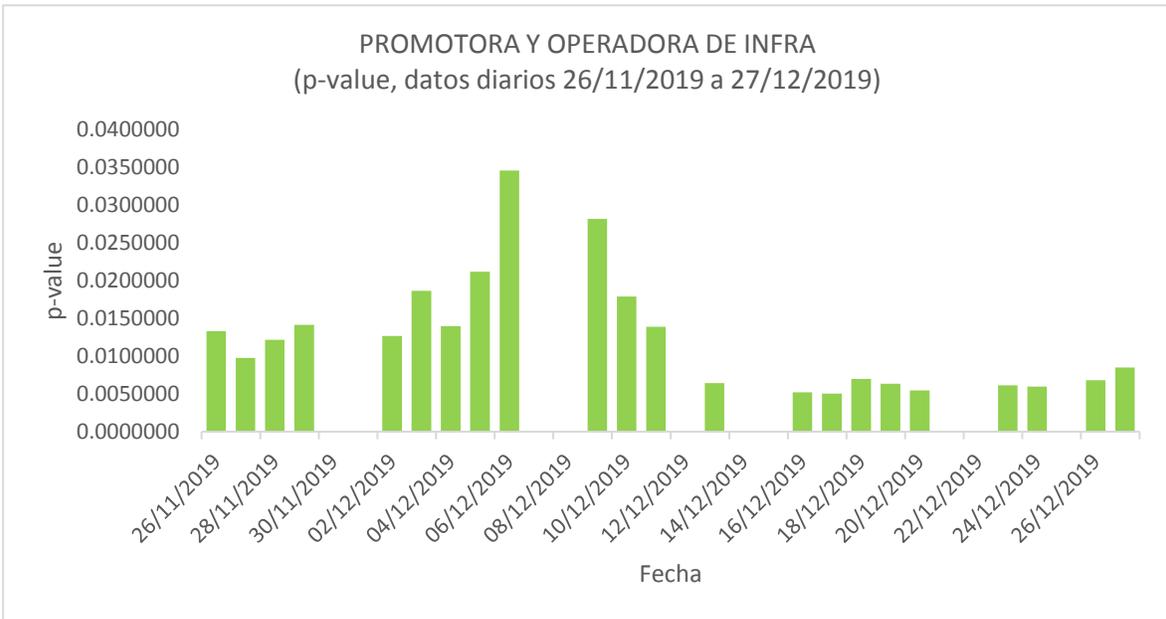
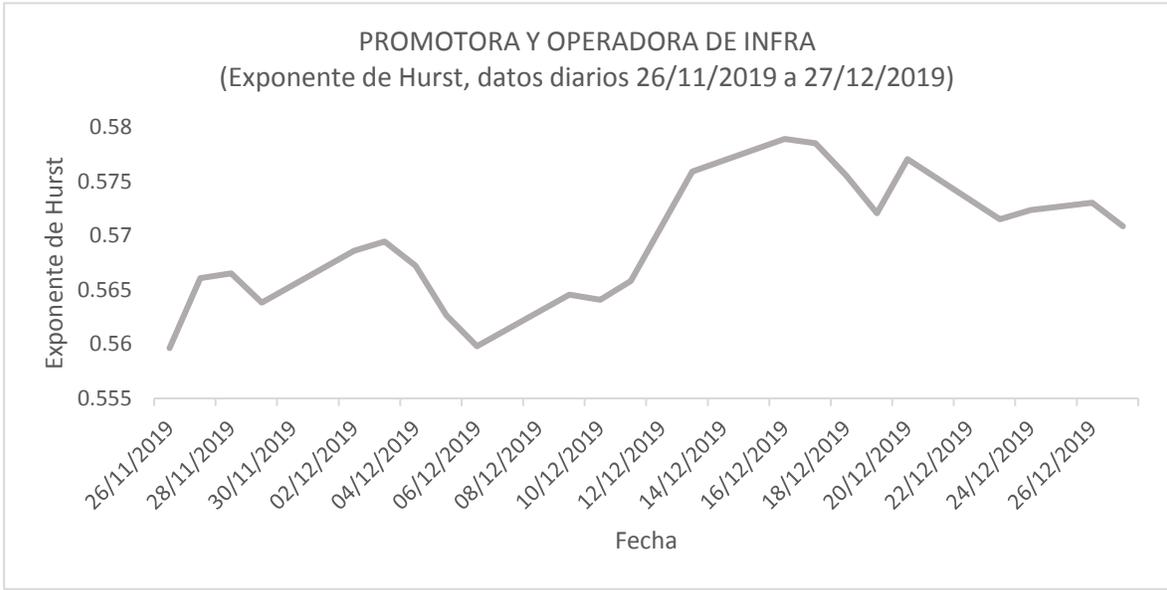
## 7. Grupo Financiero Banorte (GFNORTEO.MX)





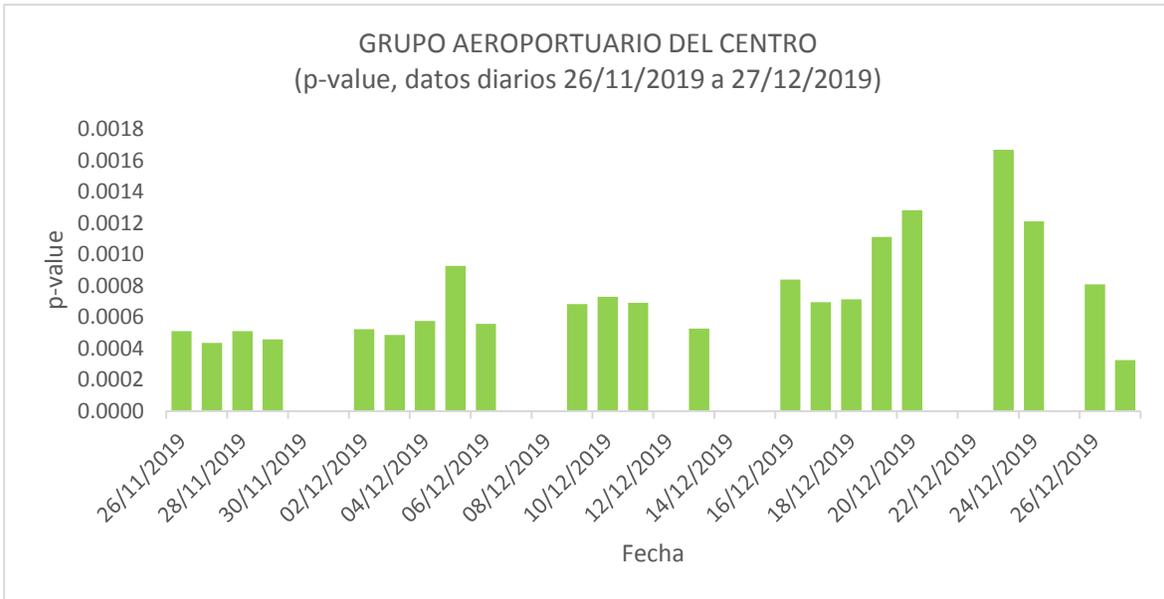
## 8. Promotora y Operadora de Infra (PINFRA.MX)





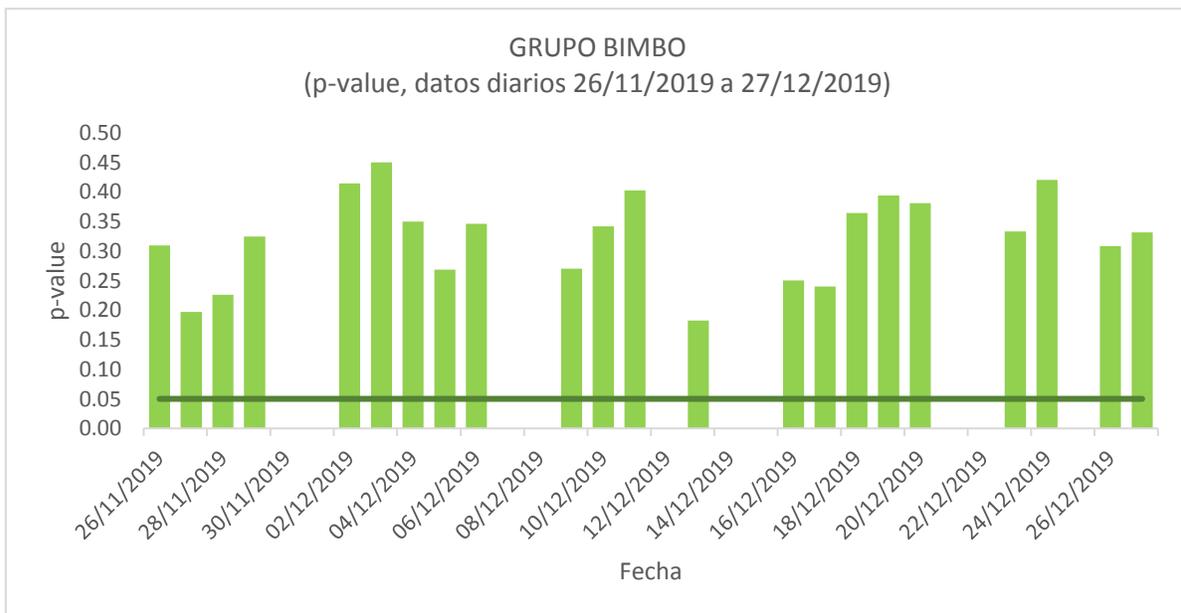
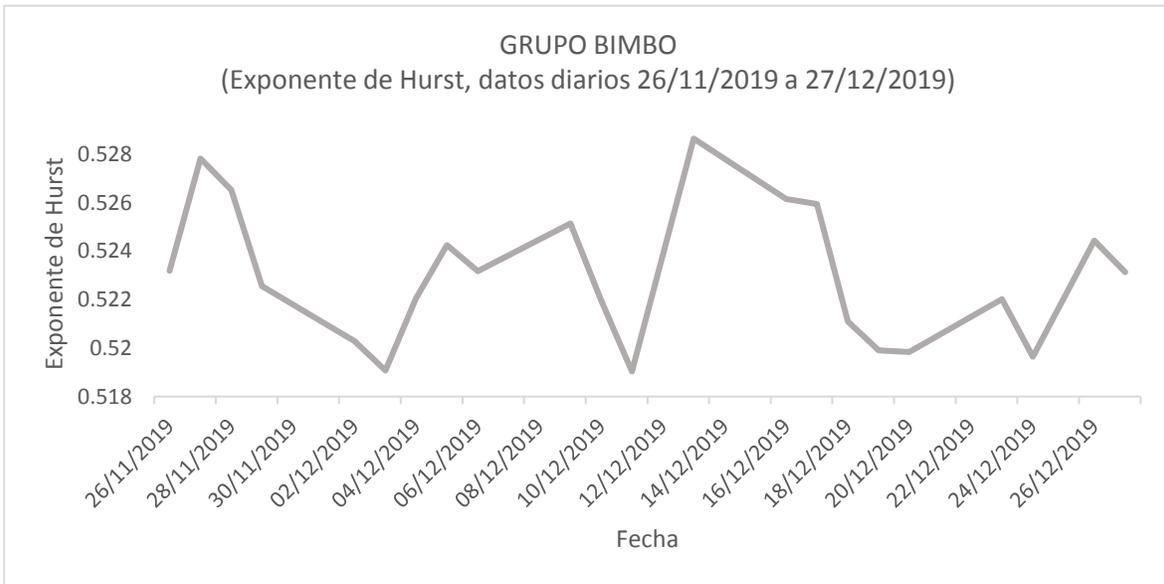
## 9. Grupo Aeroportuario del Centro (OMAB.MX)



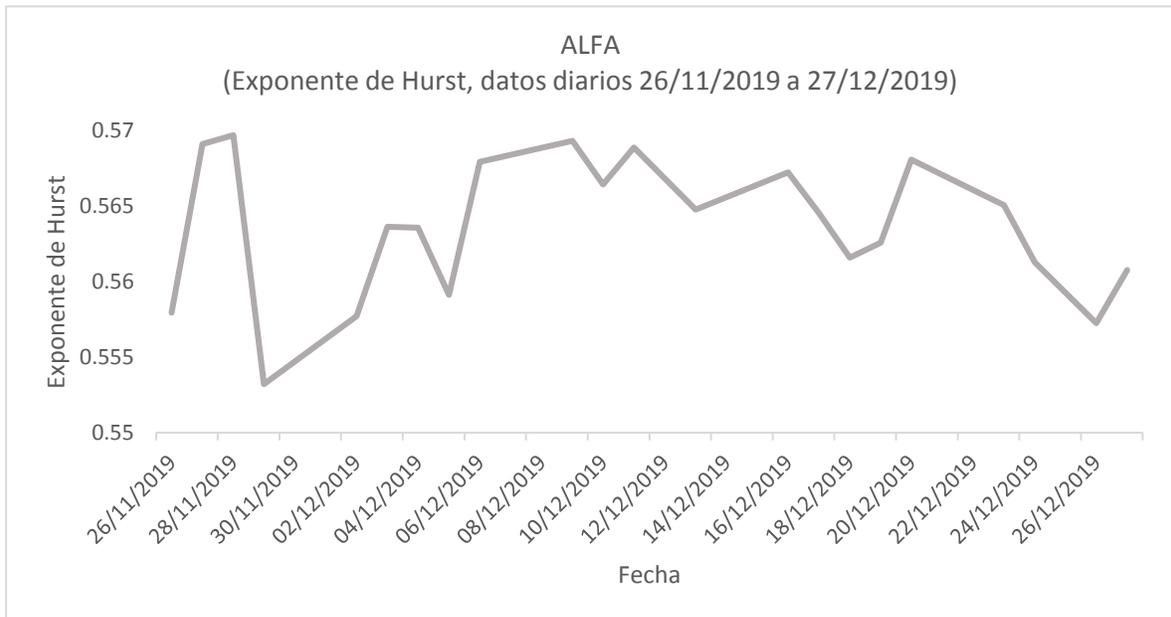


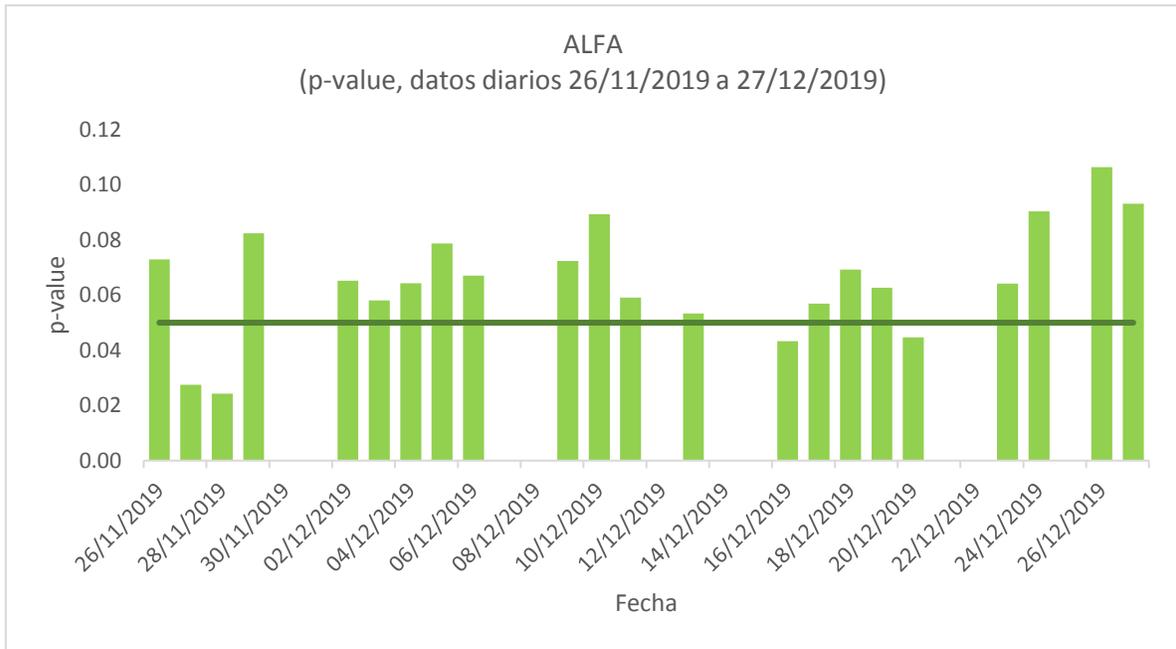
## 10. Grupo Bimbo (BIMBOA.MX)





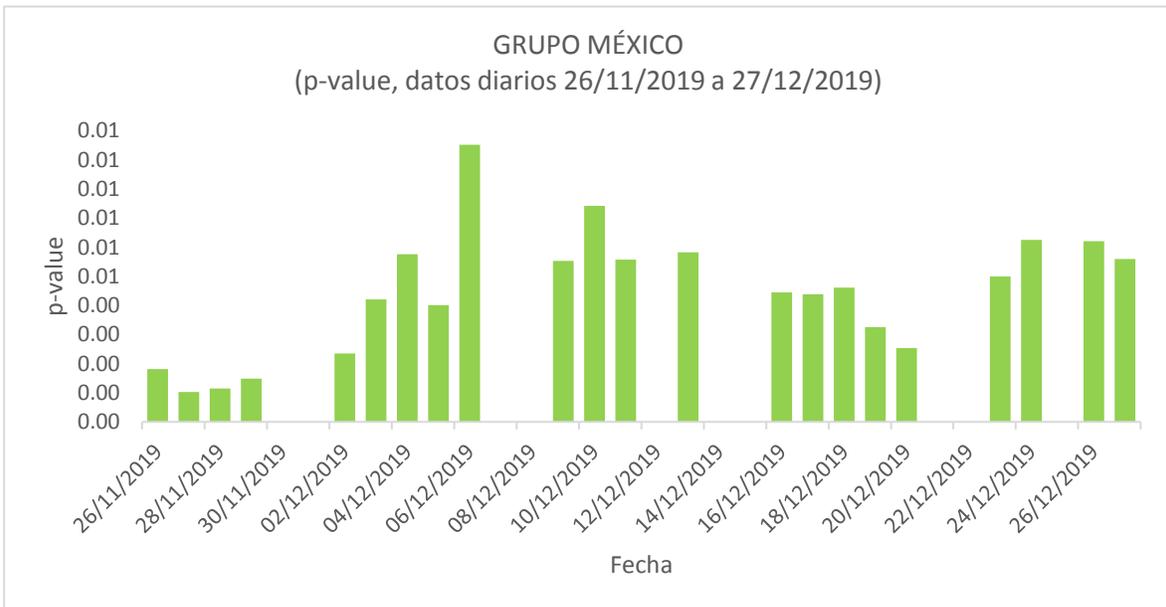
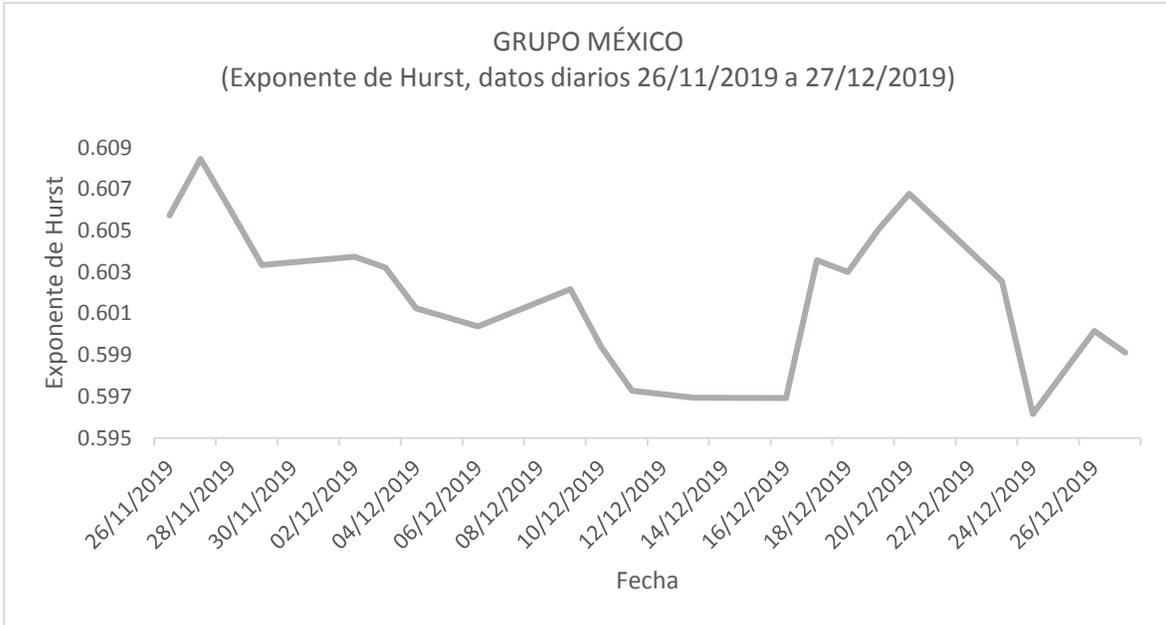
## 11. Alfa (ALFAA.MX)



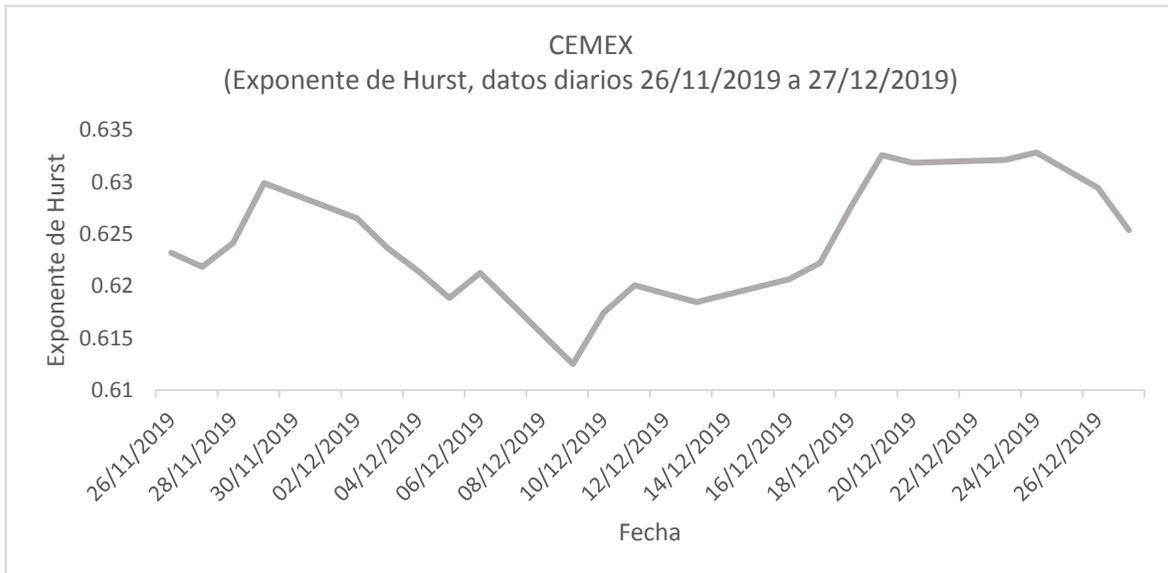
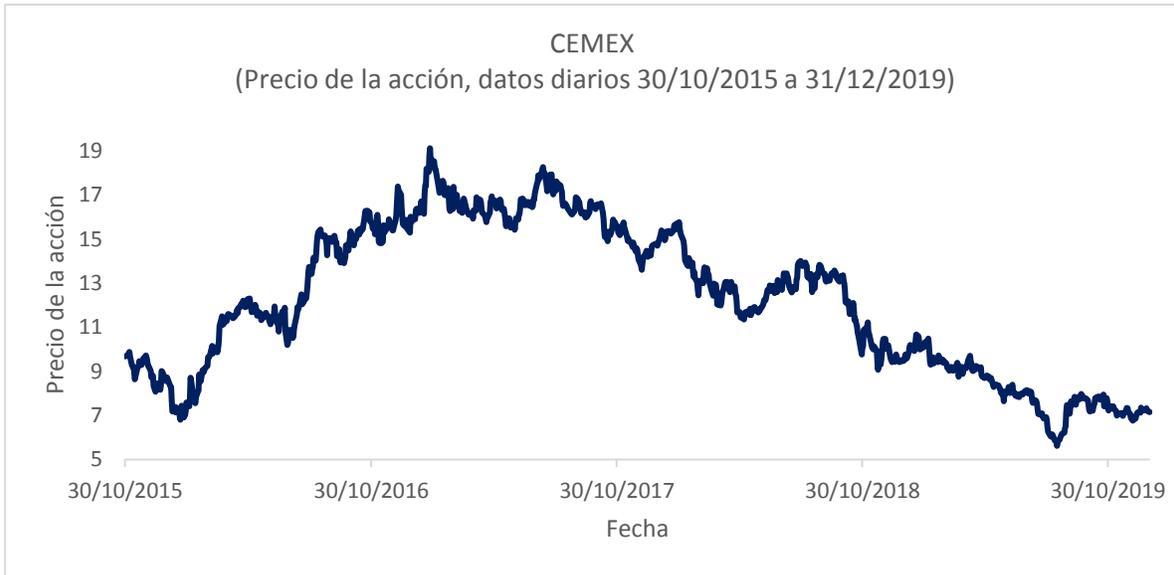


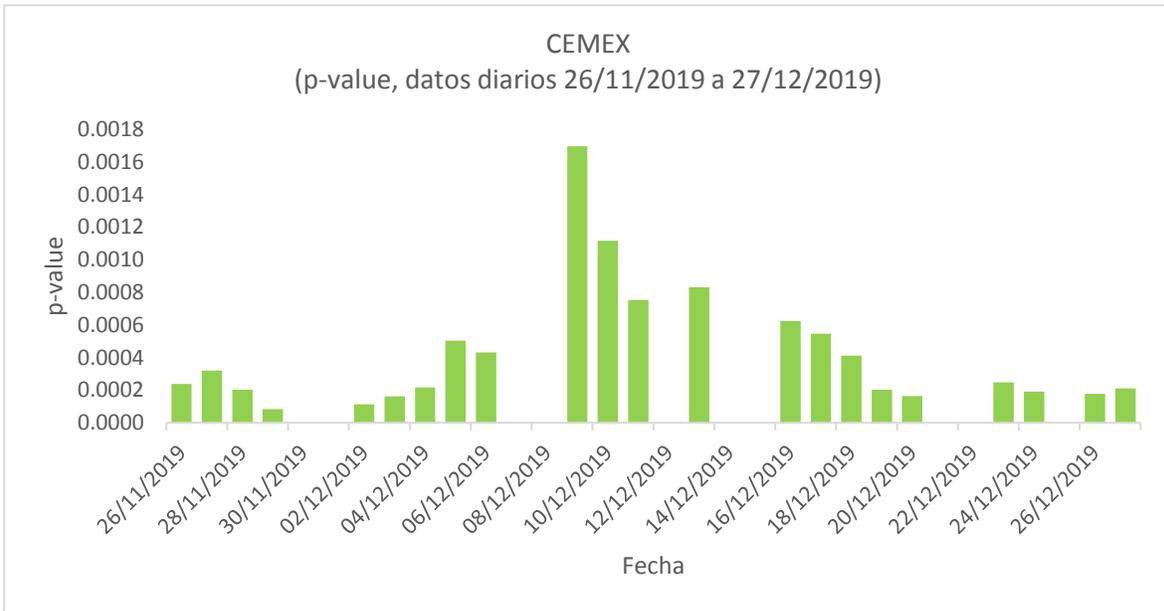
## 12. Grupo México (GMEXICOB.MX)





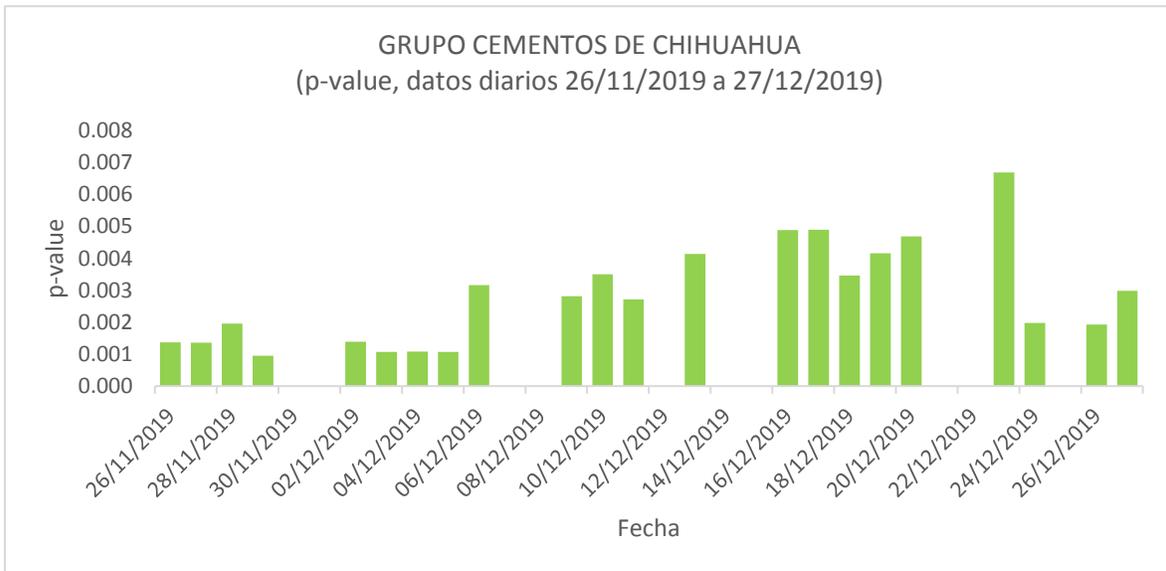
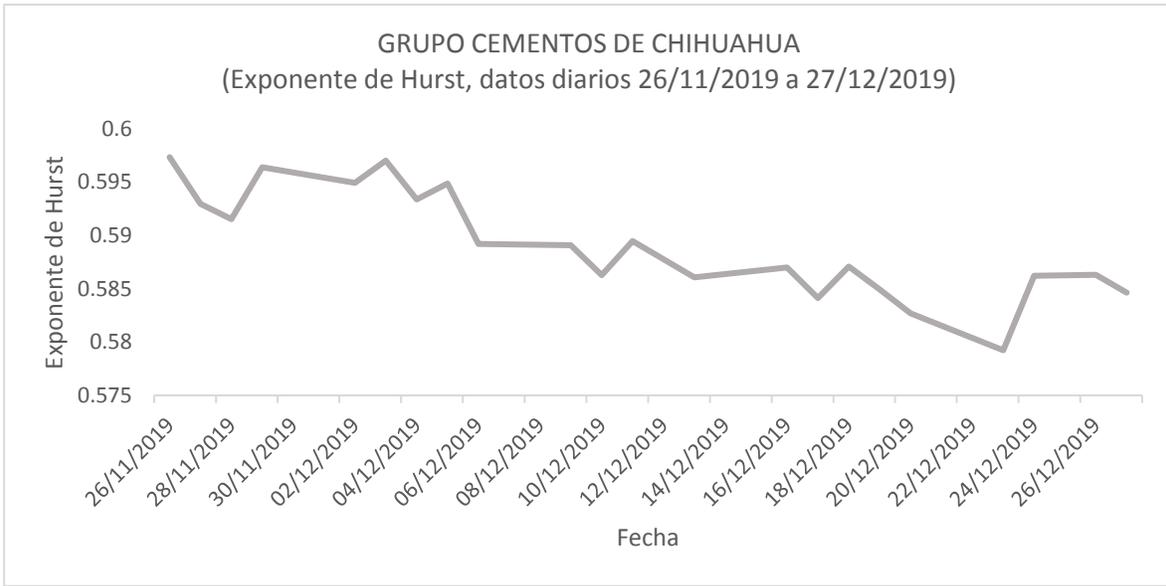
### 13. Cemex (CEMEXCPO.MX)



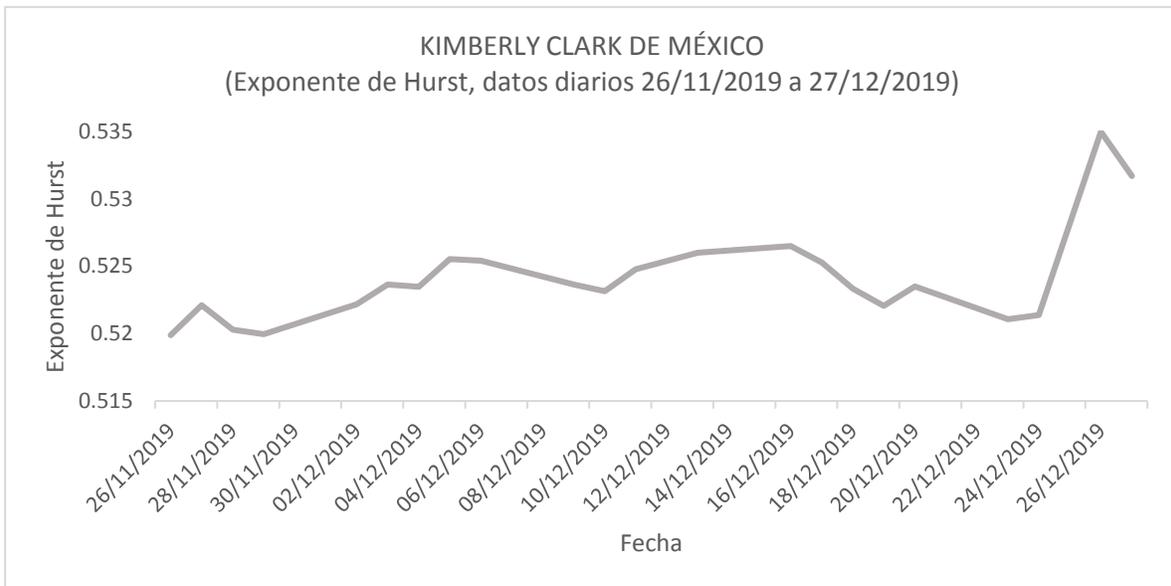


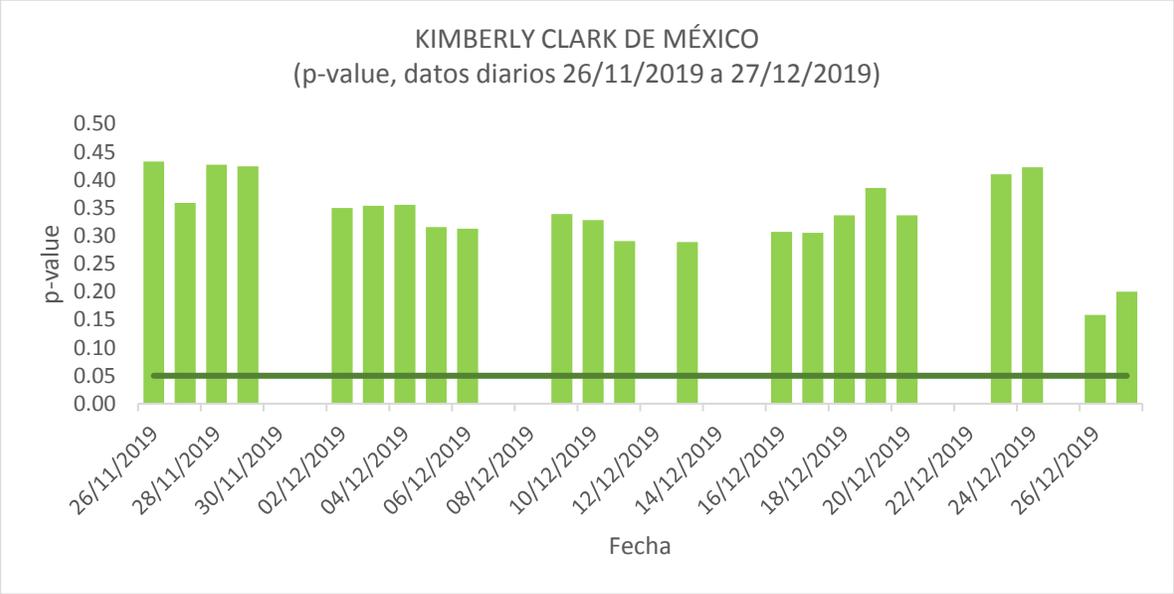
#### 14. Grupo Cementos de Chihuahua (GCC.MX)





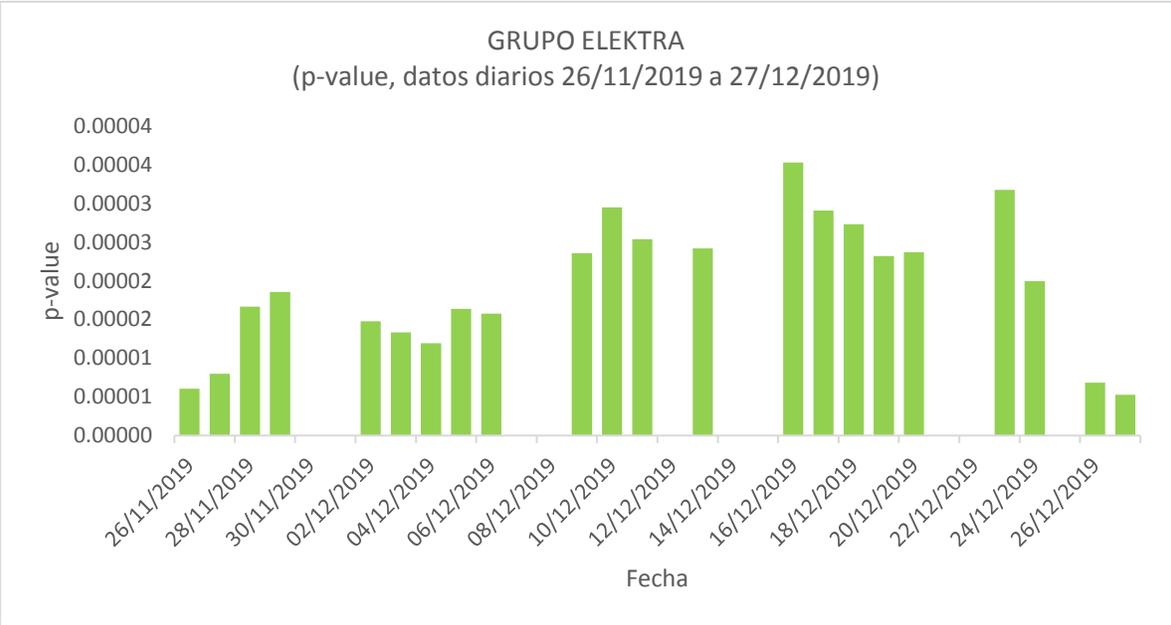
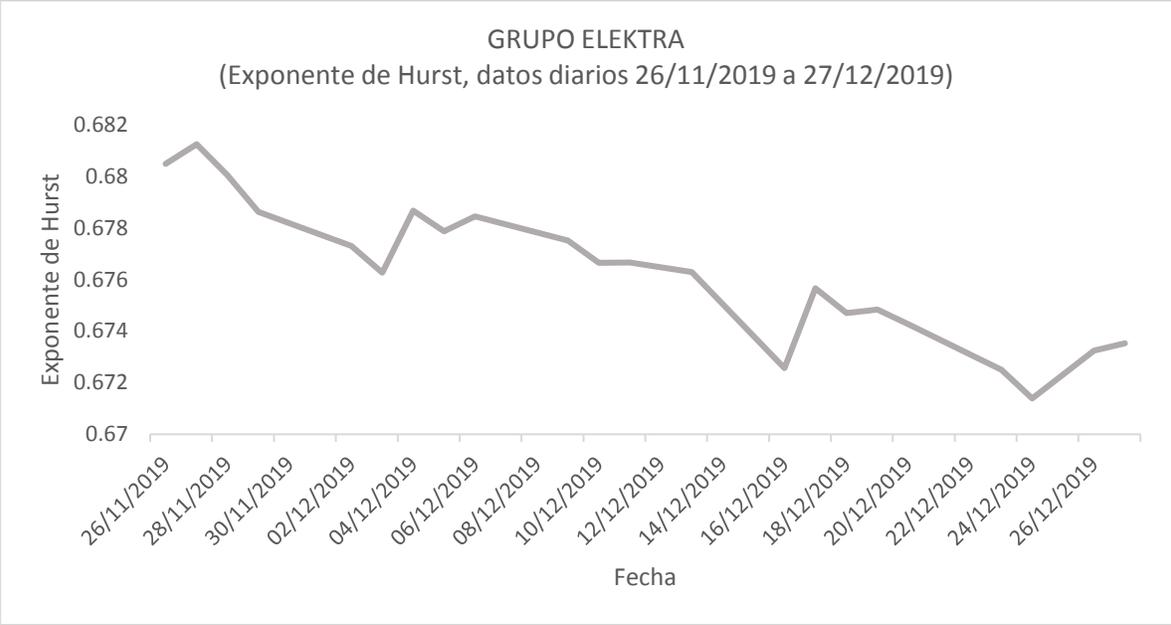
## 15. Kimberly Clark de México (KIMBERA.MX)



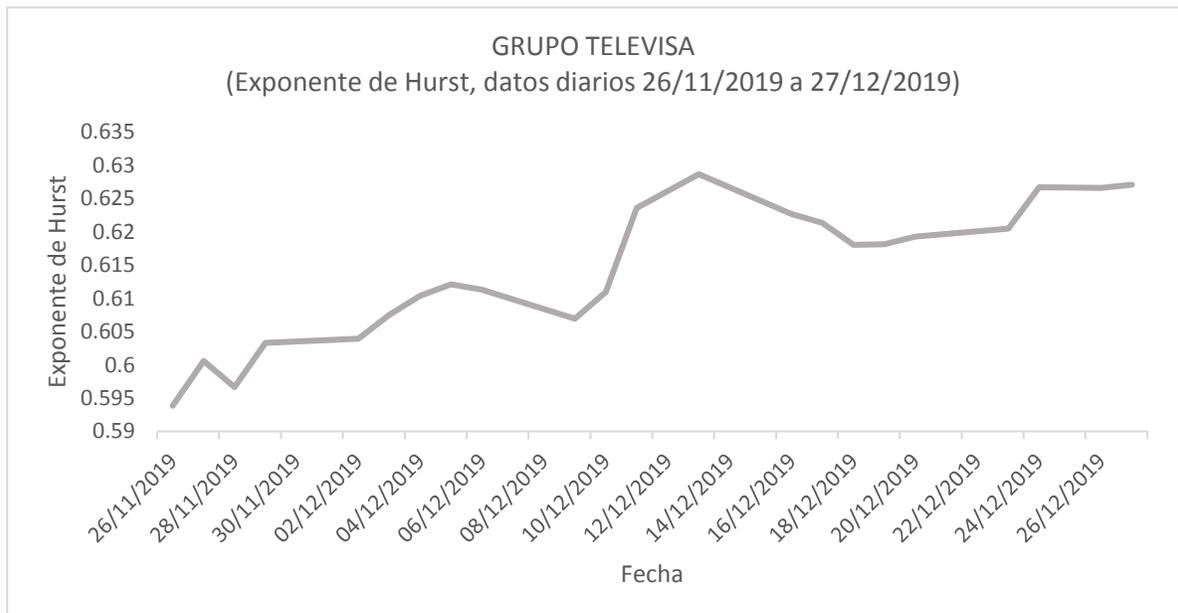


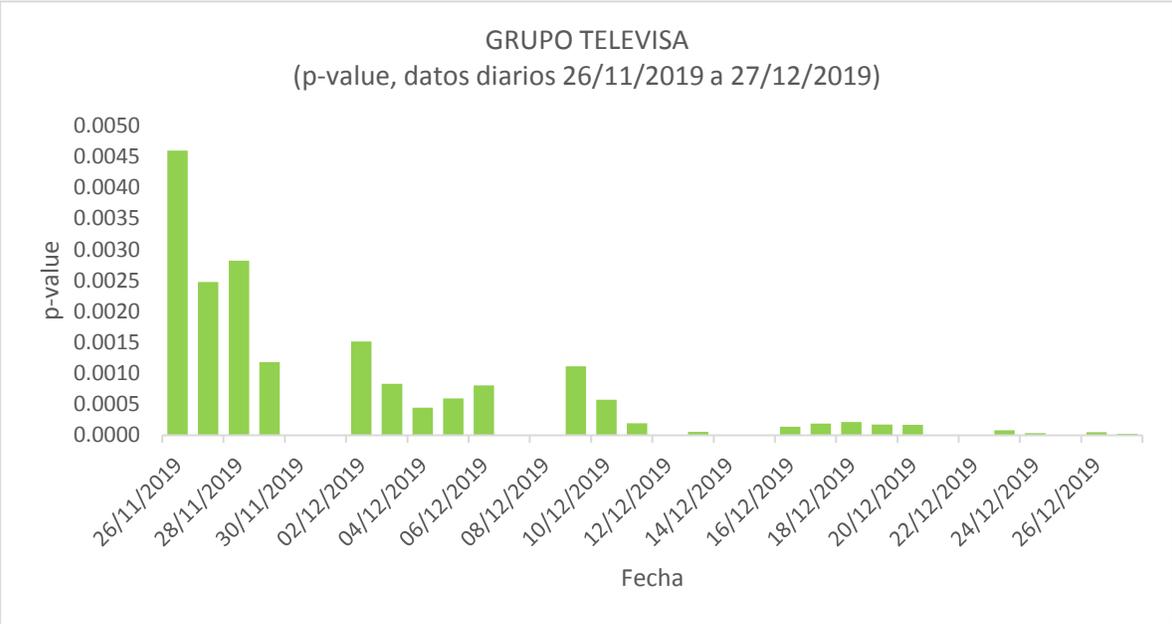
16. Grupo Elektra (ELEKTRA.MX)





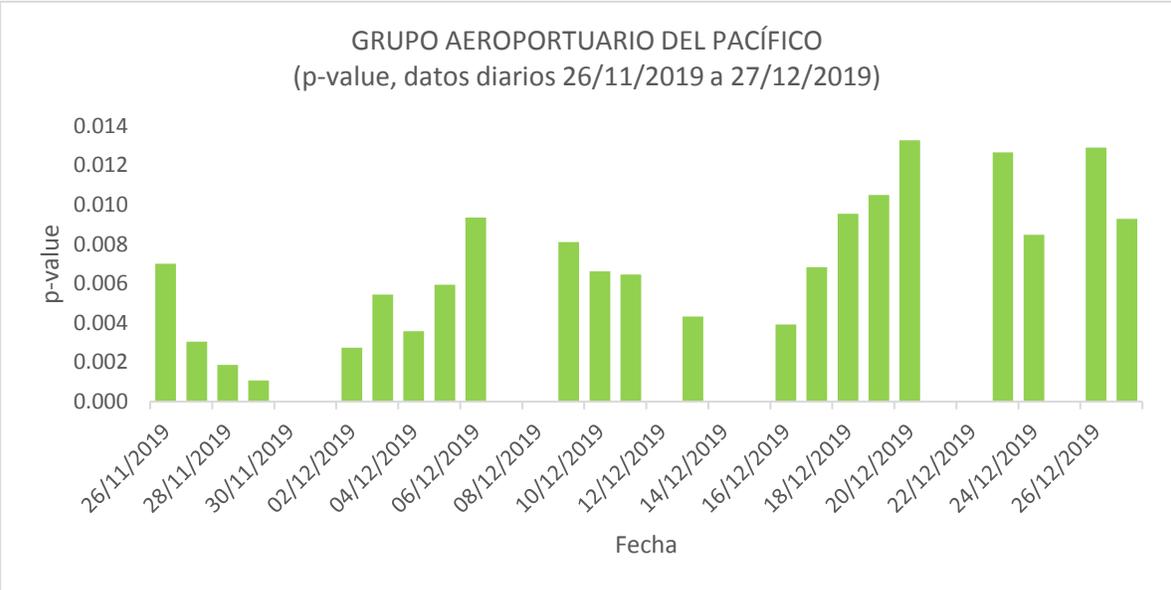
## 17. Grupo Televisa (TLEVISACPO.MX)



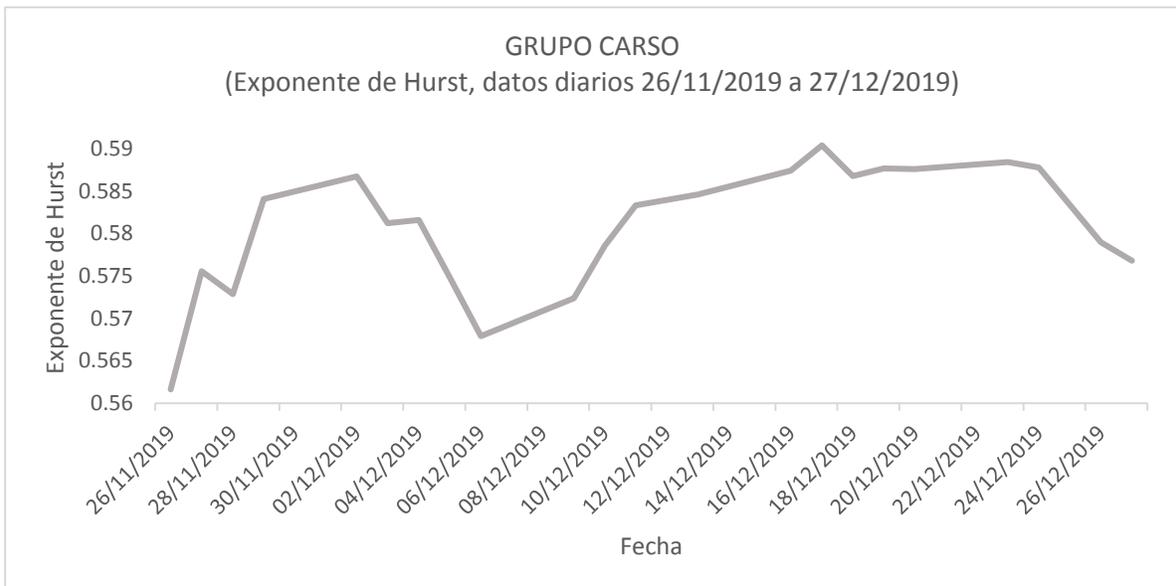


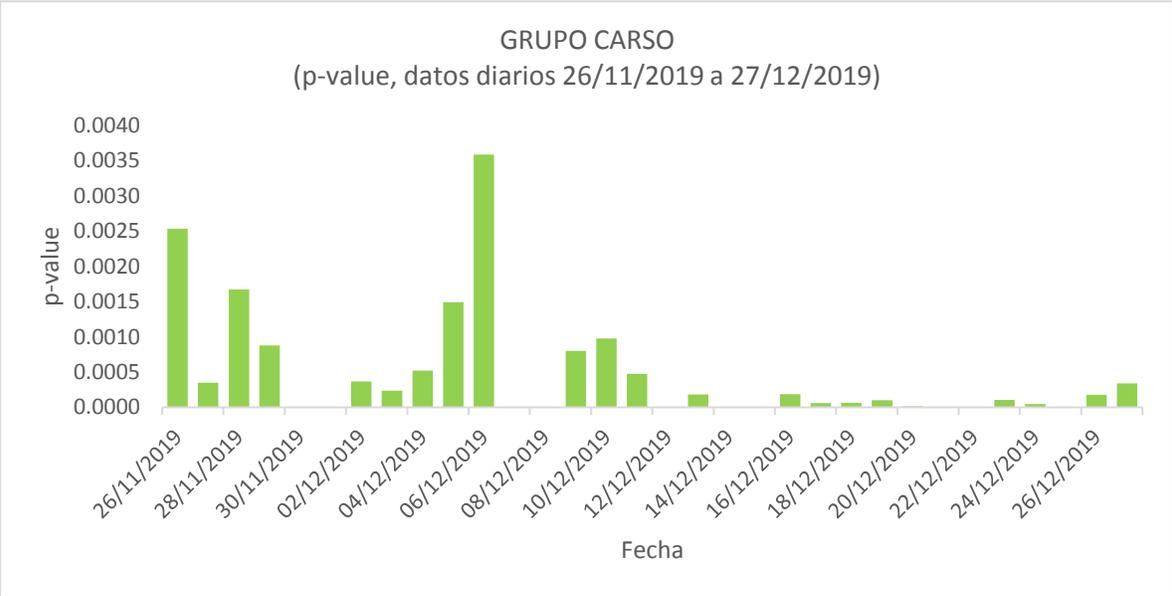
18. Grupo Aeroportuario del Pacífico (GAPB.MX)





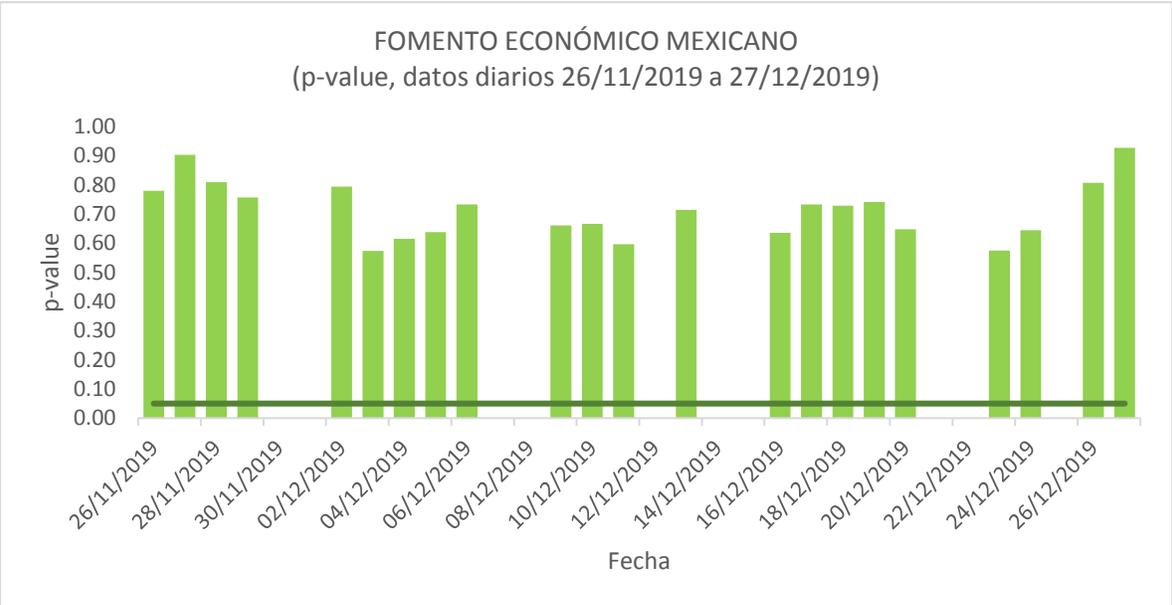
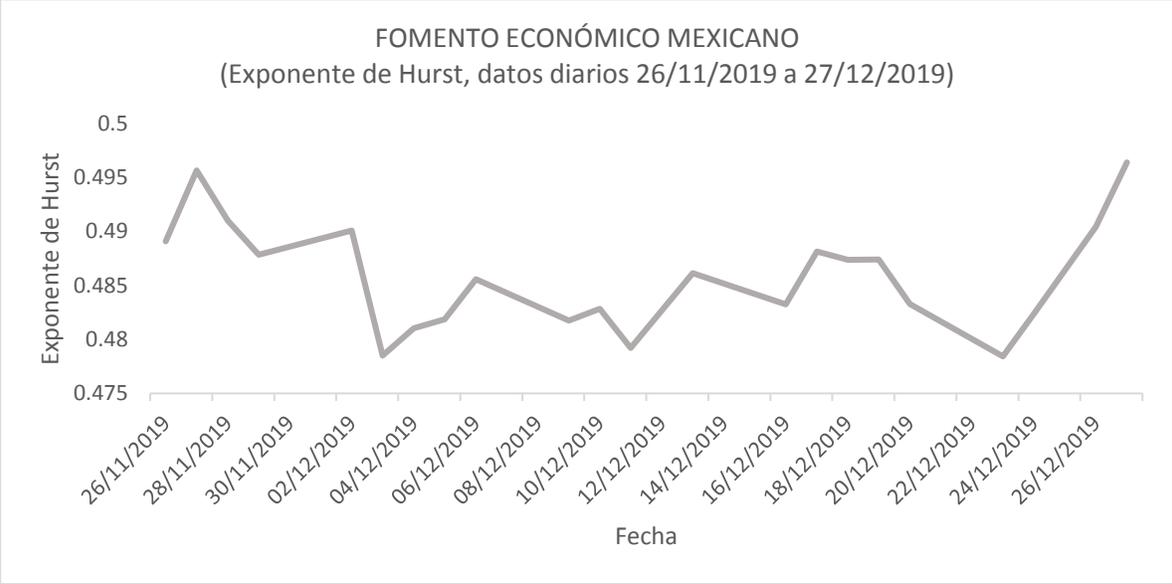
## 19. Grupo Carso (GCARSOA1.MX)





20.Fomento Económico Mexicano (FEMSAUBD.MX)





Al observar los resultados previamente mencionados, se observa que la mayoría de las acciones seleccionadas (70%) tienen memoria a largo plazo y no siguen simplemente una caminata aleatoria, ya que presentan un coeficiente de Hurst mayor a 0.5 al aplicar un análisis de rango reescalado (R/S), por lo que asumo que estas acciones tienen un componente fractal y su comportamiento puede ser explicado por este enfoque.

Dentro de las 20 acciones analizadas, se obtuvo que solamente 6 de ellas tienen un comportamiento que simula una caminata aleatoria, ya que tienen un exponente de Hurst igual a 0.5, mientras que las otras 15 acciones muestran una autocorrelación positiva, es decir, las observaciones en los precios pasados tienen una influencia directa en los precios presentes y los precios presentes tendrán una relación directa con los precios futuros.

## Conclusiones

Uno de los temas de interés más importantes a lo largo de la historia de las finanzas es el poder explicar el comportamiento de los precios de los activos financieros.

Dentro de las distintas teorías que han surgido como propuesta para explicar dicho comportamiento, se encuentra la Hipótesis de los Mercados Eficientes, propuesta por Eugene Fama en 1970, la cual consiste en que los precios de los activos financieros fluctuarán dependiendo de las noticias o información relevante que afecte a cada activo, por lo que no existirá oportunidad de obtener beneficio económico alguno al operar dichos activos financieros ya que todos los inversionistas tendrán acceso a dicha información. Asimismo, esta teoría asume que los cambios en los precios deben reflejar nueva información. Sin embargo, como se revisó en capítulos anteriores, desde su invención se ha llegado a argumentar que el mercado solamente es eficiente bajo ciertas condiciones y que existen suficientes anomalías para encontrar acciones que se encuentran subvaluadas o sobrevaluadas sobre las que los inversionistas pueden obtener ganancias, por lo que sí existen oportunidades de obtener beneficios económicos al operar activos financieros a pesar de que el precio de dichos activos sí refleje la información disponible en el mercado.

Posteriormente, surgen otras teorías y modelos basados en la HME pero que toman en cuenta la relación entre el riesgo y el rendimiento de cada activo financiero o de un portafolio compuesto por distintos activos financieros.

Dentro de estos modelos, se encuentra el modelo CAPM, propuesto por William F. Sharpe asume que los inversionistas toman decisiones con base en el valor esperado y la desviación estándar. Seguido de este modelo, se encuentra el modelo Fama y French, quienes se basan en la misma idea

del CAPM pero argumentan que existe una diferencia en el rendimiento de las acciones de empresas pequeñas y empresas grandes, y mencionan la importancia de la relación entre el valor en libros de una acción y su valor a mercado.

Como alternativa al CAPM, en 1976 surge la teoría del arbitraje de precios, propuesta por Stephen Ross, quien toma en cuenta distintos factores del riesgo sistemático para modelar los retornos esperados y basa su teoría en que los mercados son perfectamente competitivos y que los inversionistas siempre buscan un rendimiento mayor. Sin embargo, como resultado de distintos estudios, se asume que el APT no es superior al CAPM en explicar la relación riesgo-rendimiento de los activos financieros.

Otro de los enfoques que se ha presentado para explicar el comportamiento de los precios, está basado en el estudio del comportamiento de los individuos participantes en el mercado, lo cual aborda Andrew Lo en su Hipótesis de los Mercados Adaptativos y posteriormente otros psicólogos y economistas en las finanzas conductuales.

Sin embargo, ninguna de las teorías antes mencionadas ha logrado explicar por completo el comportamiento del precio de los activos financieros, por lo que Benoit Mandelbrot propone introducir la teoría fractal dentro de las finanzas y asume que las gráficas de precios tienen un comportamiento fractal, es decir, que se presenta el mismo patrón en el comportamiento de los precios sin importar la escala de tiempo de dicha serie de precios.

Aunado a esta idea de Mandelbrot que rechaza por completo el enfoque previo que se le había dado al estudio del comportamiento de los precios de los activos financieros, surge la propuesta de que la curva de rendimientos en el mercado financiero no sigue una distribución normal

ya que las series de activos financieros se explican por medio de la distribución de power-laws, las cuales tienen “fat tails” es decir, que tienen poca probabilidad de que ocurran eventos únicos, pero aun así tienen posibilidad de ocurrir, al contrario que en las distribuciones normales. Esta idea se encuentra en línea con la propuesta de Mandelbrot, ya que los fractales o modelos fractales nos permiten ver posible la existencia de los cisnes negros, es decir, se acercan un poco más a la realidad al permitir la existencia de las colas anchas (*fat tails*) dentro de las distribuciones.

Siguiendo con esta nueva aproximación a las finanzas, Edgar Peters propone una modificación a la HME, y la llama Hipótesis del Mercado Fractal, se centra en el papel de la liquidez y del horizonte de inversión de los operadores del mercado, explicando así, por medio del nivel de riesgo el por qué la frecuencia de la distribución de los rendimientos es igual en diversos horizontes de inversión, lo cual permite concluir con que los mercados tienen una estructura autosimilar, tal como un fractal.

Sin embargo, para poder analizar si un activo financiero cuenta con un componente fractal, en este trabajo decidí usar el exponente de Hurst, el cual ha sido estudiado para diversos activos a lo largo del tiempo, obteniendo resultados conclusos sobre la persistencia y memoria a largo plazo que presentan los activos financieros, es decir, la influencia que pueden llegar a tener las observaciones pasadas en las observaciones presentes y estas, a su vez, en las futuras.

La hipótesis fractal es una de las propuestas que intenta explicar el comportamiento de los precios de los activos financieros. Sin embargo, y con base en los resultados obtenidos en el modelo, a pesar de que demostró ser eficiente para 14 de las acciones seleccionadas, se demostró que las otras 6 acciones restantes siguen una caminata aleatoria, por lo que concluyo con que el análisis fractal no es aplicable a todos los activos

financieros existentes en el mercado. Adicionalmente, es importante tomar en cuenta que, como se observó en los resultados, al cambiar un dato en los precios (tomar una muestra con distintos días), el coeficiente de Hurst toma un valor diferente, por lo que es posible que, aunque haya funcionado para 14 de las acciones seleccionadas, pueda no llegar a ser aplicable a estas mismas acciones en una escala distinta de tiempo o en una muestra diferente.

La hipótesis del mercado fractal y el análisis de rango reescalado, al igual que distintas hipótesis no fractales previamente mencionadas, son solamente aplicables a ciertos activos financieros en ciertos horizontes y escalas de tiempo, es decir, hasta ahora no hay ninguna teoría financiera que explique de manera universal el comportamiento de los precios de los activos financieros. Sin embargo, la hipótesis del mercado fractal y el análisis de rango reescalado son las únicas teorías que explican las irregularidades que suceden en el mercado y que integran la existencia de los eventos poco probables de suceder, descartando por completo que las series de activos financieros sigan una distribución normal. Esto último resulta ser bastante importante y útil para acercarnos a poder explicar el comportamiento de los activos en la vida real, ya que, como lo experimentamos en 2020, los eventos grandes o improbables sí llegan a suceder y hay que tenerlos en consideración al explicar el por qué los precios se comportan de esa manera, y así poder acercarnos a pronosticar de una forma mucho más certera y apegada a la realidad.

## Bibliografía:

1. Amihud Y., Mendelson H., (1991) "*Liquidity, Assets Prices, and Financial Policy*", Financial Analysts Journal 47, pp. (56-66).
2. Anderson N, et al. (2013) "*The Fractal Market Hypothesis and its implications for the stability of financial markets*" Bank of England.
3. Arbel A., Strebel P. (1983) "*Pay Attention to Neglected Firms*", Journal of Portfolio Management.
4. Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A. (2010) "*Investments*" 9th Edition, United States, pp. (343-400).
5. Boeing, G. (2016) "*Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction.*" Systems, 4 (4), 37.
6. Cho, D., Elton, E., Gruber, M. (1984) "*On the robustness of the Roll and Ross Arbitrage Pricing Theory*", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 19, Issue 1.
7. Czarnecki, L., et al. (2008), "*Comparison study of global and local approaches describing critical phenomena on the Polish stock exchange market*". Physica A: Statistical and Mechanics and its Applications, 387, pp. (6801-6811).
8. Doorasamy, M., Sarpong, K. (2018) "*Fractal Market Hypothesis and Markov Regime Switching Model: A possible synthesis and integration*" International Journal of Economics and Financial Issues, University of Kwa-Zulu Natal, South Africa.
9. Falconer, K. (1997) "*Techniques in fractal geometry*" University of St Andrews, John Wiley and Sons, England.
10. Fama, E. (1970) "*Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*" The Journal of Finance.

11. Fama E., French K. (1992) "*The Cross Section of Expected Stock Returns*", *Journal of Finance* 47, pp. (427-465).
12. Farmer, D. y Lo, A. (1999) "*Frontiers of Finance: Evolution and Efficient Markets*" *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 96, pp. (9991-9992).
13. Farmer, D. (2002) "*Market Force, Ecology and Evolution*" *Industrial and Corporate Change*, 11, pp. (895-953).
14. Grech, D., Mazur, Z. (2004) "*Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?*" *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336, pp. (133-145).
15. Grech, D., Pamula, G. (2008) "*The local Hurst exponent of the financial time series in the vicinity of crashes on the Polish stock market*" *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387, pp. (4299-4308).
16. Gultekin, M., Gultekin, B., (1987) "*Stock return anomalies and the tests of the APT*", *The Journal of Finance*, Volume 42, Issue 5.
17. Hurst, H., et al. (1965) "*Long-Term Storage: An Experimental Study*", Constable Publishing House.
18. Kendall M. (1953) "*The Analysis of Economic Time Series, Part 1: Prices*", *Journal of the Royal Statistical Society* 96.
19. Kristoukef, L. (2013) "*Fractal markets hypothesis and the global financial crisis: Wavelet power evidence*" *Scientific Reports*, 3, 2857.
20. Lo, A. (2017) "*Adaptative Markets: Financial Evolution at the Speed of Thought*" Princeton University Press
21. Mandelbrot, B. (1972) "*Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles from Covariance to R/S Analysis*", *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, pp. (259-290).
22. Mandelbrot B. (1982) "*The fractal geometry of nature*" New York, United States.

23. Mandelbrot B., et al. (1997) "*A Multifractal Model of Asset Returns*", Yale University.
24. Mandelbrot, B. (2007) "*The misbehavior of markets: A fractal view of risk, ruin and reward*"
25. Margalef-Roig, J., Miret-Artes, S. (2000) "*Cálculo estocástico aplicado a las finanzas: Precio de las opciones según el modelo Black–Scholes–Merton y algunas generalizaciones*"
26. Merton R. (1987) "*A Simple Model of Capital Market Equilibrium with Incomplete Information*", Journal of Finance, pp. (483-510).
27. Morters, P., Peres, Y. (2008) "*Brownian Motion*" University of Berkeley, United States.
28. Müller, U.A., et al. (1993) "*Ward, Fractals and intrinsic time - A challenge to econometricians*", Research Report UAM. Olsen & Associates, Zürich.
29. Onali, E., Goddard, J., (2011) "*Are European equity markets efficient? New evidence from fractal analysis*", International Review of Financial Analysis, vol. 20, Issue 2, pp. (59-67).
30. Oprean, C. (2015) "*Are the capital markets efficient? A fractal market theory approach*" University Lucian Blaga of Sibiu.
31. Peters, E. (1994) "*Fractal Market Analysis*" John Wiley and Sons, Inc.
32. Peters, E. (1994) "*Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*" Wiley.
33. Rangarajan, G. y Sant, D., (2004), "*Fractal dimensional analysis of Indian climatic dynamics*", Chaos, Solitons and Fractals 19, pp. (285–291).
34. Rendleman R., Jones C., Latané H. (1982) "*Empirical Anomalies Based on Unexpected Earnings and the Importance of Risk Adjustments*" Journal of Financial Economics 10, pp. (269-287).

35. Reilly, F., Brown, K. (2011) *“Investment Analysis and Portfolio Management”* 10<sup>th</sup> Edition, South-Western.
36. Roll, R., Ross, S. (1980) *“An empirical investigation of the Arbitrage Pricing Theory”* The Journal of Finance, Volume 35, Issue 5.
37. Schadner, W. (2021) *“On the persistence of market sentiment: A multifractal fluctuation analysis”* University of St. Gallen, Switzerland.
38. Simon, H. (1955) *“A Behavioral Model of Rational Choice”* Quarterly Journal of Economics, 69, pp. (99-118).
39. Souza, C., et al. (2017) *“The Long-Range Memory and the Fractal Dimension: a case Study for Alcantara”* Scielo Brasil, Brasil.
40. Steele, J. M., (2000) *“Stochastic Calculus and Financial Applications”*, Springer, pp. (29-42).
41. Taleb, N. (2007) *“The Black Swan: The impact of the highly improbable”* Random House, United States.
42. Velásquez, T. (2010) *“Chaos Theory and the Science of Fractals in Finance”* Copenhagen Business School.
43. Vladislavovich, S. et al (2020) *“Application of fractal analysis method for studying stock market”* Russia.
44. Weron, A., Weron R. (2000) *“Fractal Market hypothesis and two power-laws”* Chaos, Solitons and Fractals 11, Polonia.
45. Wilson, E. (1975) *“Sociobiology: The New Synthesis”* Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.
46. Zhuanxin, D., et al. (1993) *“A long memory property of stock market returns and a new model”* University of California, San Diego, CA, USA.