



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

**CAMPOS ACÚSTICOS Y FUERZAS DE RADIACIÓN
ULTRASÓNICAS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JORDAN ESTRADA MORALES

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. KAREN PATRICIA VOLKE SEPÚLVEDA
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL:
DR. GERARDO RUÍZ CHAVARRÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

DR. PEDRO QUINTO SU
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, 8 DE DICIEMBRE DE 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Campos acústicos y fuerzas de radiación ultrasónicas

Estrada Morales Jordan

8 de diciembre de 2021

Universidad Nacional Autónoma de México

– *Agradecimientos*

Reconocer a todos aquellos con quienes tengo una deuda de gratitud desde que comencé a escribir este trabajo, limitado a un espacio tan corto me parece una tarea aún más difícil que el trabajo en sí mismo.

Algunas personas pensamos en la oportunidad de vivir algún momento histórico, sin embargo, olvidamos que estos acontecimientos no siempre son momentos que conlleven algo bueno. Estos últimos años, cuando se desató la situación sanitaria a nivel mundial, y llevó al mundo entero al encierro y a la incertidumbre, nos hizo recordar el valor incalculable de aquellos seres queridos que nos rodean. Cuando me encontraba en el transcurso de la investigación y redacción de este trabajo, aquellas personas hicieron de este proceso el más llevadero posible. De entre todas ellas, agradezco especialmente a Karen. Todas las pláticas discutiendo avances, todos los consejos, toda la ayuda desde que nos tomó por sorpresa la pandemia fuera de México; como investigadora, como amiga y como tutora es una de las mejores personas que he tenido la fortuna de conocer. Agradezco a Jhon, quien impulso de gran manera este trabajo, por nuestras pláticas desde Colombia y aún a distancia, gracias por hacer de lo complejo y desconocido algo emocionante y disfrutable. A Rubén, al profesor Joao, y en general a todo el equipo del LaVA en Colombia, quienes hicieron que aun siendo extranjero me sintiera como en casa, algún día nos volveremos a encontrar. A todos mis compañeros a lo largo de estos años de posgrado, compartiendo historias y planes para el futuro.

Agradezco a mis padres, Isabel y Gregorio, quienes a pesar de estar pasando por situaciones tan difíciles nunca dejaron de mostrarme su apoyo. A mis hermanos, Emanuel, con quien siempre podía discutir ideas y explicarnos temas mutuamente, aunque nunca nos terminaríamos de entender bien en que cosas trabajaba cada quien, Abigail, con quien siempre podemos simplemente reírnos de cualquier cosa o sentarnos en el sillón y despejar la mente cuando ambos lo necesitamos. También a alguien especial, quien me acompaña en cada desvelada y prácticamente en cada momento desde que me sentaba frente a la computadora, y venía a acostarse sobre el teclado. Esa pequeña gatita llamada Chapita, sin cuya presencia quizás me habría rendido hace mucho. Quiero agradecer además al sistema de becas de posgrado del CONACyT, al programa de apoyo a proyectos de investigación DGAPA-UNAM Proyecto PAPIIT IN113419, y al Instituto de Física por los apoyos económicos y materiales brindados.

Índice general

Índice general	vii
1 Introducción	3
2 El campo acústico y las vibraciones mecánicas	7
2.1 Ecuaciones de gobierno	9
Ecuación de continuidad	9
Ecuación de Euler	10
Ecuación de estado	12
2.2 Vibraciones en una esfera	13
Vibraciones de Lamb	13
Presión a segundo orden. El enfoque de Langevin	17
3 La fuerza de radiación acústica	20
3.1 Analogía entre la presión de radiación óptica y acústica	20
Presión de radiación óptica	20
Presión de radiación acústica	22
3.2 Componentes tridimensionales de la fuerza	24
3.3 Posicionamiento arbitrario del dispersor	28
Operadores de traslación y rotación	29
4 Efecto de tamaño en campos periódicos	32
4.1 Fuerzas y simulación del campo acústico	32
4.2 Efecto de tamaño no resonante en ondas estacionarias	35
4.3 Efecto de tamaño resonante	45
5 Conclusiones	47
5.1 Perspectivas a futuro	48
Bibliografía	50

Índice de figuras

2.1	Representación de los sistemas coordenados usuales en mecánica de fluidos. En el sistema euleriano el volumen de control esta fijo en el espacio, y alguna propiedad α cambia en el. Por otro lado en el sistema lagrangiano la propiedad α cambia conforme una porción de masa fluye.	8
2.2	Volumen arbitrario V en el cual fluye una cantidad α a través de su superficie S	10
3.1	Componentes cartesianas del tensor de esfuerzos $\bar{\sigma}$	22
3.2	Sistema de referencia centrado en la esfera para un campo incidente en z	24
3.3	Traslación entre los sistemas E y E'	29
3.4	Localización de un punto arbitrario. a) Sistema original y posición objetivo. b) Rotación colineal R1 con el vector \mathbf{d} , traslación T a una distancia d , rotación R2 a la base original.	31
4.1	Esquema de un transductor cóncavo esférico con ángulo de apertura α_0 . Se considera el origen del sistema coordenado en el foco del transductor y el potencial ϕ_i se calcula en un punto P	33
4.2	Representación de los campos de presión total rms $P_T = P_i + P_{sc}$ y esparcido P_{sc} para una esfera de poliestireno expandido ($\rho = 22 \text{ kg/m}^3$) de radio $a = 0.25\lambda$. En todos los casos la esfera se encuentra sobre el eje en el punto $z = 0.1\lambda$. a) Campo P_T estacionario generado por ondas planas contrapropagantes, b) Campo esparcido P_{sc} del mismo sistema. c) Campo P_T generado por un haz enfocado con apertura $a_0 = 3.2 \text{ cm}$ y distancia focal $r_0 = 6.0 \text{ cm}$, d) Campo esparcido P_{sc} para este sistema.	34
4.3	Campo con componentes periódicas generado por interferencia de ondas planas. En este esquema se dibujan las direcciones de las ondas usadas para generar el campo incidente: a) Ondas estacionarias en z , b) Ondas oblicuas con ángulo de incidencia $\theta = \pi/4$	34
4.4	Fuerza de radiación axial para una onda estacionaria plana. Se ha calculado la fuerza para esferas de poliestireno	35
4.5	Fuerzas en un campo estacionario. a) Comportamiento axial de la fuerza para dos esferas de radio $a_1 = 0.20\lambda$ (línea azul) y $a_2 = 0.38\lambda$ (línea morada), con el campo de presión rms de fondo. b) Perfil de fuerza en función del tamaño de partícula para dos posiciones fijas dentro del campo, $z_1 = 0.12\lambda$ (línea punteada verde) y $z_2 = -0.12\lambda$ (línea punteada naranja). c) Mapa de fuerzas $F(a, z)$, los valores de posición z y tamaño a se encuentran en términos de la longitud de onda: $\lambda = 8.57 \text{ mm}$	37
4.6	a) Dependencia de la fuerza axial con el tamaño de partícula, se observan valores para los cuales $F_z = 0$. b) Mapa de fuerzas en la zona no resonante. Se incluye la dirección de la fuerza para los dos tamaños de partícula mencionados anteriormente	37
4.7	Formas posibles del potencial \mathcal{E} . Fuera del punto de equilibrio, la esfera sentirá fuerzas que tenderán a regresarla al punto de equilibrio (esquema izquierdo) o alejarse de él (esquema derecho).	38

4.8	<i>a</i>). Campo de presión esparcida P_{sc} . En esta posición fija las zonas de presión positiva y negativa que se muestran varían de manera armónica en el tiempo.	
	<i>b</i>). Módulo del campo de presión total $ P_T $. En esta figura, el mapa de colores representa valores positivos únicamente y tanto los nodos como antinodos son observables.	
	<i>c</i>) Campo vectorial de velocidades en conjunto con $ P_T $. Al igual que la presión, la magnitud de la velocidad de partícula es mucho mayor en la periferia de la esfera. Debido a que la magnitud se representa con la longitud de los vectores, su reducido tamaño en la región lejana a la esfera produce un efecto de "sombra".	39
4.9	Perfiles de fuerza en un pequeño intervalo de tamaños. Cada línea representa el comportamiento de la fuerza axial F_z para un radio de esfera a_i	39
4.10	Representación de la distribución de los campos P_{sc} , v , y G_a para una partícula que se atrapa en los nodos del campo de presión. En la primera columna observamos nuevamente el campo esparcido P_{sc} en un instante determinado. La segunda columna muestra el campo de velocidad de partícula en conjunto con el campo esparcido. Por último la tercera columna muestra el campo vectorial del pseudo momento acústico G_a	42
4.11	Representación de la distribución de los campos P_{sc} , v , y G_a para una partícula que se atrapa en los antinodos del campo de presión. En la primera columna observamos nuevamente el campo esparcido P_{sc} en un instante determinado. La segunda columna muestra el campo de velocidad de partícula en conjunto con el campo esparcido. Por último la tercera columna muestra el campo vectorial del pseudo momento acústico G_a	43
4.12	Representación de la distribución de los campos P_{sc} , v , y G_a para una partícula que experimenta una fuerza nula a lo largo del eje z . En la primera columna observamos nuevamente el campo esparcido P_{sc} en un instante determinado. La segunda columna muestra el campo de velocidad de partícula en conjunto con el campo esparcido. Por último la tercera columna muestra el campo vectorial del pseudo momento acústico G_a	44
4.13	Comparación del comportamiento de la fuerza axial en dos campos. Se aprecian las resonancias en el campo progresivo y su correspondencia con el estacionario. La magnitud de la fuerza se encuentra en unidades arbitrarias	45
4.14	Perfil de la fuerza axial considerando el peso de las partículas esféricas para dos posiciones en el campo z_1 y z_2 . Se observa el descenso gradual en la magnitud de la fuerza hasta el punto en que no es posible mantener suspendidas partículas de un radio mayor $a=1.16\lambda$	46

Índice de cuadros

2.1	Relación entre diferentes parámetros que caracterizan el comportamiento elástico de un material. Estas pueden considerarse como fórmulas de conversión para determinar un parámetro a partir de un par distinto.	16
4.1	Frecuencias en kHz de los primeros cuatro modos esferoidales l , para los radios de esfera correspondientes a las resonancias de la Figura 4.13.	45

Resumen

De entre los distintos métodos que existen actualmente para manipular objetos sin contacto, la levitación acústica ha tenido un interés creciente en años recientes, debido al desarrollo en la tecnología para producir ondas sonoras en el rango del ultrasonido de manera más controlada, y a la flexibilidad que presentan las ondas de sonido para interactuar con una amplia cantidad de materiales. La determinación de las fuerzas para efectuar la levitación, conocidas como fuerzas de radiación acústica, forma una parte necesaria para aplicaciones en manipulación. Para su estudio, y para explorar posibles aplicaciones, se ha recurrido a modelos como el de Gor'kov, donde los cuerpos tienen tamaños pequeños comparados con la longitud de onda, o el uso de rayos cuando el tamaño es mucho más grande. Pero el uso de estas aproximaciones tiene el inconveniente de dejar inexplorada una variedad de posibles efectos. El objetivo de esta tesis consiste en realizar un estudio de las fuerzas de radiación acústicas para la levitación en aire, sin considerar aproximaciones respecto al tamaño de las partículas mediante el uso de la teoría generalizada de Lorenz-Mie. Para esto, el problema se aborda llevando a cabo la simulación de un campo estacionario generado por ondas planas contrapropagantes, con una frecuencia de 40 kHz en aire, y calculando numéricamente la fuerza a lo largo del eje principal de propagación para partículas esféricas de poliestireno expandido con radios desde 0 hasta 1.5λ . En este trabajo se devela un aspecto que pareciera contraintuitivo: en un campo estacionario las posiciones de atrapamiento de una partícula no recaen exclusivamente en las zonas de baja presión promedio. Se identifican tres situaciones especiales: esferas de cierto tamaño cuyos puntos de equilibrio estable se ubican en los nodos de presión del campo, esferas de tamaño mayor con puntos de equilibrio estable en antinodos, y esferas con tamaños específicos que sentirán una fuerza nula. Además, conforme las partículas son cada vez más grandes aparecen resonancias mecánicas observadas como cambios abruptos en la magnitud y el signo de la fuerza. Con el fin de estudiar el origen físico de los efectos no resonantes, se utiliza el pseudo momento acústico para observar la tendencia de movimiento de la esfera por acción de los campos acústicos, corroborando así los resultados del cálculo numérico de las fuerzas. Por otro lado, las resonancias son identificadas con valores concretos del radio en los cuales se excitan los modos vibratorios $l = 1, 2, 3, 4$ de la esfera libre, y posteriormente se agrega el peso como una fuerza negativa adicional a las fuerzas de radiación acústicas, identificando así un tamaño máximo para el cual la fuerza total es positiva, y para el cual se tendría una condición de levitación.

Abstract

Among the different methods that currently exist to manipulate objects without contact, acoustic levitation has been of increasing interest in recent years, due to the development of technology to produce ultrasonic sound waves in a more controlled manner, and the flexibility of sound waves to interact with a wide range of materials. Determination of the forces to perform levitation, known as acoustic radiation forces, forms a necessary part of applications in manipulation. To explore possible applications, models such as Gor'kov's equation, where bodies have small sizes compared to the wavelength, or the use of rays when the size is much larger have been used. But the use of these approaches has the drawback of leaving a variety of possible effects unexplored. The goal of this thesis is to study the acoustic radiation forces for levitation in air without considering particle size approximations using the generalized Lorenz-Mie theory. To achieve this, the problem is approached by carrying out the simulation of a stationary field generated by counterpropagating plane waves, with a frequency of 40 kHz in air, and numerically calculating the force along the main propagation axis for spherical particles made of expanded polystyrene with radii from 0 to 1.5λ . This work reveals an aspect that seems counter-intuitive: in a stationary field the trapping positions of a particle do not fall solely in low average pressure areas. Three special situations are identified: spheres of certain size whose stable equilibrium points are located at pressure nodes, spheres of a larger size with stable equilibrium points at antinodes, and spheres with specific sizes that will experience a null force. In addition, as the particles become larger, mechanical resonances appear, which are seen as abrupt changes in magnitude and sign of the force. In order to study the physical origin of the non-resonant effects, acoustic pseudo momentum is used to observe the tendency of the sphere to move due to the action of acoustic fields, thus corroborating the results of the numerical calculation of the forces. On the other hand, resonances are identified with specific values of the radius at which vibrational modes, $l = 1, 2, 3, 4$, of the sphere are excited. The weight is then added as an additional negative force to the acoustic radiation forces, thus identifying a maximum size for which the total force is positive, and pointing a levitation condition.

La idea de mover un objeto sin contacto físico es bastante antigua y es común que se encuentre en el imaginario público. Tener la capacidad de manipular objetos a distancia o sin alguna herramienta intermedia se muestra como una habilidad muy útil además de vistosa, por lo que es comúnmente mostrada como una tecnología innovadora en la narrativa fantástica de medios cinematográficos o literarios. Pero fuera del terreno de la ciencia ficción, la manipulación sin contacto es una realidad, y quizás la forma más simple de realizarlo es la levitación. Conseguir métodos para levantar cuerpos en aire ha sido el objeto de múltiples investigaciones científicas. Por mencionar algunas áreas generales donde se han explorado técnicas de manipulación sin contacto, se encuentran la levitación por campos eléctricos [1] o magnéticos alternantes [2], la levitación por métodos aerodinámicos [3], levitación por radio frecuencia [1], el uso de superconductores [2], o la manipulación óptica [4] y acústica [5]. En estas técnicas de levitación se consigue mantener suspendidos en el aire materiales sólidos o líquidos mediante campos eléctricos y magnéticos, flujos intensos de algún fluido, haces láser u ondas de sonido.

Concretamente para la levitación acústica en aire, la primera observación experimental de atrapamiento de partículas data de 1866 con el experimento conocido como el tubo de Kundt [6], donde August Kundt generaba una onda acústica estacionaria por medio de una barra resonante colocada en un extremo de un tubo horizontal transparente, y partículas de polvo se aglomeraban en los nodos de presión. Posteriormente, el primer uso de ondas acústicas para levantar gotas líquidas ocurrió en 1933 de la mano de Bücks y Müller [7], cuando reportaron un experimento en el cual mantuvieron suspendidas gotas de alcohol en los nodos de presión de un campo estacionario generado por una barra vibrante de cuarzo y un reflector colocado en la parte superior. En los décadas de 1970 y 1980 hubo un interés en el desarrollo de formas para mantener suspendidos cuerpos por campos estacionarios, para realizar estudios en condiciones de microgravedad y experimentos que se llevaron a cabo bajo contratos de la NASA [5]. Aunque mucha de la investigación concerniente a la levitación acústica tiene cerca de 50 años, no es hasta años recientes que ha sido desarrollada con enorme entusiasmo, debido principalmente al desarrollo de nuevos dispositivos para generar ondas de sonido, como los transductores Langevin de alta potencia, o los arreglos de transductores ultrasonicos con control de fase, y a la enorme ventaja que presenta para realizar tareas en disciplinas tales como la biología [8-11], química [12, 13], desarrollo de fármacos [14], aplicaciones en la industria que requieran de transporte sin contacto (Pick-and-Place) [15], o el análisis de muestras sin la presencia de contenedores adicionales (Espectroscopia de plasma inducido por láser, LIBS) [16]. Además, es posible trabajar con partículas cuyos tamaños vayan del orden de cientos de micrómetros hasta varios milímetros [5, 17], característica bastante útil en la tendencia actual de la miniaturización de dispositivos, lo cual lo vuelve una herramienta prometedora. Si bien varias de estas características pueden estar dis-

ponibles con los otros métodos de levitación, la manipulación acústica tiene la capacidad de interactuar con una mayor variedad de materiales y tamaños, incluyendo algunos seres vivos [18], lo que ha dado lugar a potenciales aplicaciones como los displays volumetricos en 3D [19], formados a partir de los llamados voxels: grupos uniformes de partículas en movimiento rápido con persistencia de la visión [20]. Sin embargo, a pesar de los avances y de ser una herramienta tan versátil, mucha de la física detrás de la levitación acústica se encuentra aún en desarrollo [5, 21].

La base de la manipulación acústica recae en el uso de las fuerzas de radiación, originadas por el intercambio en el flujo de momento entre el campo y un objeto [22]. Uno de los primeros en realizar un tratamiento más sistemático sobre la presión ejercida por el sonido fue Lord Rayleigh. Extrayendo una cita de su artículo *On the Pressure of Vibrations* [23]: “It seemed to me that it would be of interest to inquire whether other kinds of vibration exercise a pressure . . . ”, Rayleigh reflexiona sobre la presión de radiación ejercida por la luz, deducida por primera vez por Maxwell dentro de la teoría electromagnética, y se pregunta sobre la posibilidad de que ondas como el sonido exhiban un comportamiento similar. Posteriormente L.V. King [24] y Yosioka y Kawasima [25] llevaron a cabo un cálculo de la magnitud de las fuerzas de radiación acústicas en un fluido ideal para una esfera compresible. Sin embargo, fue hasta 1962 cuando L.P. Gor’kov [26] reuniera esta información y condensara la noción de fuerza de una manera elegante a través del cálculo por medio de un potencial U , para partículas compresibles esféricas cuyo tamaño es pequeño comparado con la longitud de onda.

En este modelo la fuerza es producida por dos factores: una componente debida al gradiente del promedio temporal de la presión cuadrática y otra debida al gradiente del promedio temporal del modulo cuadrado de la velocidad de las partículas del medio. La interpretación de la fuerza deriva en un resultado intuitivo: una esfera dentro de un campo se moverá hacia las regiones de menor presión, y por otro lado tendrá la tendencia a dirigirse hacia regiones con altas velocidades de partícula (estas regiones corresponden a zonas con presión negativa de Bernoulli) [27]. Con algunas excepciones, como modelos que recurren al uso de rayos cuando el tamaño de los objetos es grande comparado con la longitud de onda (acústica geométrica) [22], gran parte de los avances realizados en el estudio y aplicaciones de fuerzas acústicas recurren a la ecuación de Gor’kov para simular la fuerza ejercida en partículas levitadas acústicamente. Como ejemplos en el uso de esta base teórica, se encuentran los experimentos realizados por Asier Marzo [28, 29], donde, mediante arreglos multifase han conseguido la manipulación de múltiples partículas de distintos materiales atrapándolas en los nodos de presión de distintas configuraciones de campos estacionarios. Es común observar que la configuración elegida cuando se busca la estabilidad en la levitación, es la de un campo de tipo estacionario producido por un emisor y un reflector, o dos emisores puestos frente a frente para generar una cavidad resonante, debido a que en la configuración de onda estacionaria plana los nodos de presión coinciden con los antinodos de la velocidad de partícula, además de la posibilidad de modificar el campo para producir los nodos en los lugares deseados, ajustando la frecuencia o la fase relativa entre los emisores, atrapando partículas en ellos. El comportamiento de atrapar partículas en las regiones de mínima

presión promedio se ha convertido en todo un paradigma. Naturalmente, si las predicciones nos resultan intuitivas y lógicas, además de estar respaldadas por evidencia experimental es normal que genere confianza. Pero quedan aún varias interrogantes que no suelen considerarse en estos estudios, por ejemplo ¿qué ocurre cuando el tamaño de los objetos es del orden de la longitud de onda y su volumen mayor al de la zona de baja presión?, o ¿qué pasa con los objetos cuando, por su forma o tamaño, exhiben resonancias mecánicas?. Este tipo de preguntas marcan un hecho, y es que existe aún una riqueza de efectos físicos sin explorar en la manipulación acústica.

Para hacer un cálculo de las fuerzas de radiación, modelos como el de Gor'kov hacen uso de el esparcimiento de las ondas de sonido para encontrar los campos que dan origen a la acustoforesis (movimiento de partículas resultado de las fuerzas acústicas). Pero, para ampliar el modelo de Gor'kov y superar las aproximaciones consideradas, investigaciones se han llevado a cabo con el fin de adaptar un modelo ya conocido en electromagnetismo. El modelo de Lorenz-Mie fue concebido como solución de las ecuaciones de Maxwell para estudiar el esparcimiento de la luz para una onda plana sobre una partícula esférica [30]. Posteriormente este modelo fue ampliado para considerar campos de forma arbitraria, lo que se conoce como la teoría generalizada de Lorenz-Mie [30-32]. Recientemente D. Baresch [33], y M.A. Pessoa [34] han adaptado exitosamente este modelo en el campo acústico, permitiendo el cálculo de fuerzas de radiación. Particularmente, el trabajo realizado por D. Baresch tiene la ventaja de incluir un método eficaz que incluye el cálculo cuando la posición del objeto dispersor es arbitraria, haciendo uso de matrices de rotación y traslación [33, 35-37].

El objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar estas fuerzas de radiación acústica sin tener en cuenta aproximaciones en el tamaño del objeto a levitar. En particular, se estudia un sistema de levitación de campo estacionario ultrasónico construido por ondas planas contrapropagantes, generando así un patrón periódico. Para este estudio se usa como punto de partida el modelo desarrollado por D. Baresch modificando aspectos y parámetros del mismo para su aplicación en el sistema de interés. Se muestra aquí un aspecto interesante y que pareciera contradictorio: cuando se tiene un campo estacionario de ondas planas los sitios de atrapamiento varían en función del tamaño de la partícula, siendo posible a las esferas colocarse también de manera estable dentro de regiones de alta presión promedio, e incluso es posible optimizar la fuerza ejercida sobre los objetos escogiendo adecuadamente su tamaño.

La naturaleza mecánica de las ondas de sonido hace necesaria la introducción previa de conceptos básicos sobre mecánica de fluidos y vibraciones elásticas. Estos conceptos se presentan en el capítulo 2, donde se hace una revisión de las ecuaciones básicas y su relación con el fenómeno acústico.

En el capítulo 3 se desarrollan los métodos para el cálculo de la fuerza a través de la teoría generalizada de Lorenz-Mie, mostrando ciertas analogías presentes con su contraparte óptica. La piedra angular en este desarrollo de la fuerza se encuentra en la conservación del momento

lineal transportado por los campos, por lo que se comienza con una expresión para calcular el cambio en este flujo de momento debido a la presencia de un objeto, continuando con una expansión en ondas esféricas de los campos involucrados. Los resultados de este modelo constituyen la base para las simulaciones numéricas presentadas en el capítulo posterior.

En el capítulo 4 se muestran los resultados de los cálculos numéricos para la fuerza, hechos para una partícula esférica de poliestireno expandido colocada en distintas posiciones dentro del patrón periódico. Aquí se presentan un par de efectos no estudiados hasta el momento, y que mantienen similitudes con las trampas ópticas periódicas [38], producto del análisis para partículas cuyo tamaño no suele encontrarse en los límites de las aproximaciones antes mencionadas. Asimismo, se discute la naturaleza de estos efectos y se presenta una explicación física para estos dos fenómenos.

Finalmente en el capítulo 5 se hace un repaso de las conclusiones obtenidas en este trabajo de tesis.

El campo acústico y las vibraciones mecánicas

2

Cuando se habla sobre la propagación de las ondas se suele hacer una distinción entre dos tipos. La primera, aquellas que requieren de un medio para propagarse, como las olas en un estanque, sonidos musicales, ondas sísmicas producidas por un terremoto etc, son ejemplos de un tipo llamado ondas mecánicas. El segundo tipo, aquellas que también pueden viajar a través de algún medio material, pero no necesitan de él para la propagación, incluye a ondas como las electromagnéticas o las más recientemente descubiertas ondas gravitacionales.

En particular para el sonido, ya sea en el rango audible o en los umbrales como el ultrasónido e infrasónido, es común que el medio de propagación sea un fluido. Este es un tipo de onda mecánica, que se define como fluctuaciones de la presión en equilibrio del medio, p_0 . Estas fluctuaciones involucran cambios en la densidad en equilibrio, ρ_0 , dando lugar a los llamados efectos de compresión y rarefacción [39].

Las ecuaciones de conservación resultan útiles ya que involucran propiedades en equilibrio del medio, como p_0 y ρ_0 , y propiedades generadas por las perturbaciones, como la densidad ρ y presión p instantáneas, o la velocidad de partícula v a la que se desplaza un elemento de fluido. Al hacer la distinción entre las propiedades en equilibrio e instantáneas en el medio vale la pena definir variables como la presión acústica $P = p - p_0$ (también llamada presión sonora) y la condensación $s = (\rho - \rho_0)/\rho_0$. Pero antes de discutir estas ecuaciones de gobierno es necesario examinar primero el enfoque, las variables, y los marcos de referencia que suelen emplearse.

En principio existen dos formas de definir y tratar el medio, el método de la mecánica estadística y el método del medio continuo [40]. En el enfoque microscópico de la mecánica estadística, el medio consiste de moléculas individuales cuyo movimiento es determinado por las leyes de la dinámica. Ya que aquí las magnitudes macroscópicas son obtenidas en términos de cantidades moleculares resulta en una forma elegante para determinar las propiedades del fluido. Desafortunadamente, a pesar de que esta teoría esta plenamente desarrollada para fluidos como gases ligeros, se encuentra incompleta en cuanto a líquidos se refiere [40]. El método del medio continuo por su parte, toma en cuenta que una partícula del fluido es lo suficientemente grande como para contener un gran numero de moléculas, pero suficientemente pequeña como para poder establecer un único valor a variables como la presión y densidad [39]. Una condición para la aproximación al medio continuo suele ser tal que

$$\frac{1}{n} \ll V \ll L^3, \quad (2.1)$$

donde n es el numero de moléculas por unidad de volumen, L la longitud física más pequeña que se tenga en el campo del fluido (como cualquier

2.1 Ecuaciones de gobierno	9
Ecuación de continuidad	9
Ecuación de Euler	10
Ecuación de estado	12
2.2 Vibraciones en una esfera	13
Vibraciones de Lamb	13
Presión a segundo orden. El enfoque de Langevin	17

cuerpo alrededor del cual el fluido pudiera moverse), y V es un volumen lo suficientemente pequeño tal que $V^{1/3}$ es pequeño comparado con L [40]. Sin embargo, el enfoque del medio continuo da lugar a que no exista distinción entre un líquido, un gas ligero o un gas denso [41], tratando a los fluidos por igual. Tomando en cuenta los distintos aspectos entre ambos métodos, el enfoque del medio continuo resulta más práctico en cuanto al tema tratado en esta tesis y es el que se abordará.

Una vez establecido nuestro enfoque, al trabajar en mecánica de fluidos, el siguiente punto a enfrentar consiste en decidir el marco de referencia sobre el cual se derivarán las ecuaciones. Los dos sistemas básicos con los que se suelen tratar son el sistema de referencia euleriano y el sistema lagrangiano [42].

En el sistema euleriano, las variables x , y , z y t son independientes y representan la posición de un volumen de control a través del cual fluyen partículas (partículas en el sentido del medio continuo) al tiempo t [40]. No se pone atención en partículas en específico y es el sistema espacial usual (Figura 2.1).

Por otra parte, en el sistema lagrangiano se pone atención sobre una masa particular del fluido y se va siguiendo conforme fluye. Esta porción del fluido puede cambiar de forma pero siempre se consideran las mismas partículas por lo que se suele llamar sistema coordenado material [22]. Aquí las variables x , y , z y t ya no son independientes y se consideran como variables base x_0 , y_0 , z_0 y t_0 , las cuales especifican el elemento del fluido en su posición inicial de equilibrio al tiempo t_0 . Los cambios en las coordenadas, y su relación con el sistema euleriano, se obtienen a partir de las componentes de la velocidad v a la que se mueve esta masa particular (Figura 2.1).

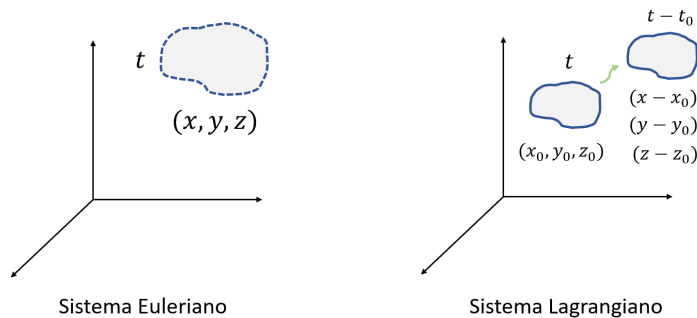


Figura 2.1: Representación de los sistemas coordenados usuales en mecánica de fluidos. En el sistema euleriano el volumen de control está fijo en el espacio, y alguna propiedad α cambia en él. Por otro lado en el sistema lagrangiano la propiedad α cambia conforme una porción de masa fluye.

El uso de un sistema u otro depende del problema a abordar. Quizás el ejemplo más inmediato y que relaciona ambos sistemas es la llamada derivada material [40]. Sea α una variable del campo (densidad, temperatura, etc.). En el sistema euleriano α es una función de la posición (x, y, z) del volumen de control.

Mientras tanto, si en el sistema lagrangiano observamos por un corto periodo de tiempo δt como fluye cierta porción de un elemento del fluido, su posición tendrá un cambio δx , δy , δz , lo cual trae consigo un cambio $\delta \alpha$.

Durante este intervalo de tiempo $\delta \alpha$ es calculado como una variación,

$$\delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial t}\delta t + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\delta z. \quad (2.2)$$

Tras dividir por δt y hacer $\delta t \rightarrow 0$ esta variación es:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u\frac{\partial\alpha}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha}{\partial y} + w\frac{\partial\alpha}{\partial z}. \quad (2.3)$$

donde $\delta x/\delta t = u$, $\delta y/\delta t = v$ y $\delta z/\delta t = w$, son las componentes de la velocidad \mathbf{v} cuando $\delta t \rightarrow 0$. Esta es la definición de *derivada material*, en la cual $D\alpha/Dt$ representa el cambio total en la variable α , es decir, es la tasa de cambio temporal en el sistema lagrangiano, mientras el lado derecho es su equivalencia en el sistema euleriano [40]. Reescrito de manera vectorial la derivada material tiene la forma

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha. \quad (2.4)$$

En ciertas ocasiones la derivación de las ecuaciones de conservación se suele realizar en coordenadas lagrangianas ya que es más sencillo plantear las variaciones en una porción del fluido utilizando la derivada material, aunque para tener expresiones más manejables para su solución en este sistema se suelen requerir acciones adicionales en comparación a su contraparte. Es por esto que las ecuaciones suelen resolverse en coordenadas eulerianas. Si se desea cambiar entre un sistema u otro, se hace uso de la definición de la derivada material. Para este trabajo se hará uso del sistema euleriano debido a lo práctico de su representación.

2.1. Ecuaciones de gobierno

Una vez establecidos el marco de referencia con el cual trabajar estamos en condiciones de presentar un conjunto de ecuaciones con las cuales establecer la propagación de una perturbación y sus relaciones existentes.

Ecuación de continuidad

Es común derivar la ecuación de continuidad mediante primeros principios utilizando un volumen rectangular de lados Δx , Δy , Δz y calculando la masa neta que fluye a través de él [39]. Sin embargo resulta más práctico derivar la ecuación de continuidad calculando la tasa de cambio en la masa dentro de un volumen arbitrario V por acción del flujo que atraviesa la superficie S del volumen (Figura 2.2).

En este caso la tasa de cambio en la masa es $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$, mientras que el flujo que atraviesa un elemento de superficie, dS , es $-\rho\mathbf{v} \cdot dS$ [22]. De este modo, poniendo en términos algebraicos el enunciado de continuidad tenemos que

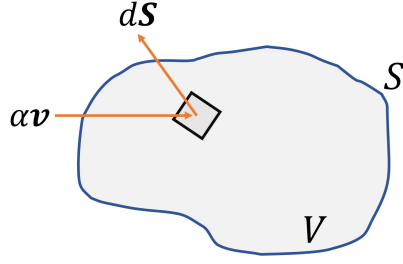


Figura 2.2: Volumen arbitrario V en el cual fluye una cantidad α a través de su superficie S .

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.5)$$

Al utilizar el teorema de la divergencia en la integral de superficie es posible ordenar en una sola integral de volumen

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0, \quad (2.6)$$

y debido a que este volumen es escogido de manera arbitraria y no varía con el tiempo esto resulta en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.7)$$

Esta es la ecuación de continuidad exacta [22]. Si expandimos el segundo término en la ecuación anterior y hacemos uso de la derivada material podemos reescribir la ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.8)$$

Ecuación de Euler

De igual manera, en este caso es necesario derivar una ecuación para la segunda ley de Newton, lo cual conduce a la conservación del momento. En un fluido real, la existencia de viscosidad y el hecho de que los procesos acústicos no son perfectamente adiabáticos introduce términos disipativos que influyen al hacer un balance de la fuerza [22]. Tales casos no son tratados aquí, ya que si bien a ciertas escalas pueden influir de manera significativa esta no es la situación. De nuevo, consideremos un volumen arbitrario V fijo. La cantidad de momento transportada por un elemento de fluido que pasa a través de la superficie $d\mathbf{S}$ es $(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot (-d\mathbf{S})$ [22]. En este caso, de acuerdo con la segunda ley de Newton, el flujo total de momento $\partial/\partial t \left(\int_V \rho \mathbf{v} dV \right)$, es igual a la suma de las fuerzas exteriores más el momento neto que fluye a través de S [39]. Dentro del término que involucra las fuerzas exteriores, normalmente se consideran dos tipos, fuerzas superficiales F_s , como la presión, y fuerzas que afectan al cuerpo en sí, representadas mediante $\int_V \mathbf{B} \rho dV$, donde \mathbf{B} es cualquier fuerza que afecte al volumen, como la gravedad [22].

Si en las fuerzas superficiales se considera únicamente la presión sonora, esto es $F_s = - \int_S P d\mathbf{S}$, la ecuación para el momento es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v dV = \int_V \mathbf{B} \rho dV - \int_S P dS - \int_S (\rho v) v \cdot dS. \quad (2.9)$$

Se procede entonces de manera análoga a la ecuación de continuidad, haciendo uso del teorema de la divergencia para convertir las dos integrales de superficie a integrales de volumen y reordenando los términos,

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} - \rho \mathbf{B} + \nabla P + \nabla \cdot [(\rho v) v] \right) dV = 0. \quad (2.10)$$

Nuevamente, ya que el volumen es arbitrario el integrando debe ser cero. Sin embargo, si expandimos la derivada temporal y la divergencia obtenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial t} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} v + [\nabla \cdot (\rho v)] v + (\rho v \cdot \nabla) v + \nabla P - \rho \mathbf{B} = 0. \quad (2.11)$$

En virtud de la ecuación de continuidad, el segundo y tercer término son cero, por lo que finalmente resulta

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) + \nabla P = \rho \mathbf{B}. \quad (2.12)$$

Esta ecuación no lineal para fluidos no viscosos es la ecuación de Euler [39]. En su forma más típica la fuerza \mathbf{B} suele ser la fuerza de gravedad $\mathbf{g} = -g \hat{z}$.

Al considerar procesos acústicos de baja amplitud se asume que $|(v \cdot \nabla) v| \ll |\partial v / \partial t|$ y $(\rho \rightarrow \rho_0)$, con lo cual,

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{g} \right) + \nabla P = 0. \quad (2.13)$$

Además, aunque la fuerza gravitacional es tomada en cuenta en situaciones como la estratificación del medio donde $\partial \rho_0 / \partial z = -\rho g$, este término es frecuentemente despreciado en acústica, esto es $|\rho_0 \mathbf{g}| \ll |\nabla P|$. Bajo estas suposiciones la ecuación se simplifica como

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla P. \quad (2.14)$$

Esta se conoce como la ecuación lineal de Euler [22].

Las suposiciones tomadas anteriormente proporcionan además la particularidad de considerar que el fluido no contiene vorticidades inherentes. Para corroborar esta afirmación, tomamos el rotacional de la ecuación 2.12. Debido a que $\nabla \times \nabla P = 0$, y ya que ρ_0 no varía con la posición se tiene que $\nabla \times v = 0$.

Esto implica que la excitación acústica bajo las consideraciones tomadas para llegar a la ecuación 2.12 es irrotacional [40]. Esta característica trae consigo la posibilidad de definir una función ϕ , conocida como *potencial de velocidades*

$$v = \nabla \phi. \quad (2.15)$$

Si sustituimos este potencial en la ecuación 2.12 es posible reordenarla,

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + P \right) = 0. \quad (2.16)$$

Ya que la cantidad entre paréntesis debe ser cero, obtenemos una relación para el potencial y la presión acústica

$$P = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Ecuación de estado

Hasta el momento contamos con un par de ecuaciones, la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler, que involucran tres variables del campo, P , v y ρ . Para tener un conjunto cerrado es necesaria una tercera ecuación [22]. La ecuación de estado resulta ser útil en acústica ya que relaciona las variables físicas que describen el comportamiento termodinámico del fluido como la presión, densidad y entropía. Cuando se considera que la conductividad térmica del fluido y los gradientes de temperatura de la perturbación son pequeños, como es común en acústica, la entropía permanece constante [39], es decir tenemos un proceso isentrópico en el cual la relación entre la presión y la densidad pasa a ser simplemente $p = p(\rho)$. Para esta situación el medio puede describirse a través de la adiabata [40]

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.18)$$

donde γ es la razón de capacidades caloríficas. En el caso de fluidos, esta relación sencilla entre p y ρ no es válida, pero debido a que el proceso isentrópico se mantiene, es posible determinar esta relación de manera experimental, con lo cual una expansión en serie de Taylor es lo más conveniente [22]

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (2.19)$$

Con las fluctuaciones pequeñas que se están considerando, solo los términos de orden bajo se mantienen y existe una relación lineal entre las variables de presión y densidad tal que

$$P \approx \mathcal{B} s, \quad (2.20)$$

donde $\mathcal{B} = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$ es el módulo de bulto adiabático y s es la condensación $s = (\rho - \rho_0)/\rho_0$.

Contamos ahora con un conjunto completo de tres ecuaciones, incluidas las versiones lineales de la ecuación de momento y de estado. Si linealizamos la ecuación de continuidad es posible combinarlas para obtener una sola ecuación diferencial lineal [39]. Para esto, escribimos ρ

con ayuda de la condensación $\rho = \rho_0(1 + s)$ y sustituimos en la ecuación 2.7. Asumiendo que s es pequeña y que ρ_0 no varía con el tiempo de manera significativa

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0 \quad (2.21)$$

se vuelve la ecuación lineal de continuidad. A continuación tomamos la divergencia de 2.14

$$\nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 P. \quad (2.22)$$

Podemos eliminar la divergencia al tomar la derivada temporal de 2.21, y considerando que las variables espacial y temporal son independientes:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.23)$$

De manera que

$$\rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \nabla^2 P = 0. \quad (2.24)$$

Siendo más útil tener únicamente términos de la variable P , se realiza el cambio por medio de la ecuación de estado 2.20. Si se define la velocidad termodinámica del sonido como

$$c^2 = \frac{\mathcal{B}}{\rho_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}, \quad (2.25)$$

la ecuación se vuelve

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \quad (2.26)$$

Esta es la ecuación lineal de onda sin pérdidas para la propagación del sonido [22]. De manera similar al combinar las ecuaciones 2.21, 2.15, 2.17 y 2.20 se obtiene que el potencial de velocidades ϕ satisface la ecuación de onda bajo las mismas condiciones que P

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.27)$$

2.2. Vibraciones en una esfera

Vibraciones de Lamb

Debemos recordar que, después de todo, el sonido son perturbaciones en forma de vibraciones. Cuando una onda de sonido impacta sobre un objeto, si este no es perfectamente rígido, puede ponerse a vibrar [39].

Si tuviéramos una cámara con la suficiente calidad y la lente adecuada, podríamos captar las vibraciones. En el fondo, estas vibraciones participan en la generación del llamado fenómeno de esparcimiento [43].

A diferencia de un sólido rígido donde las distancias entre sus partículas se encuentran fijas, un cuerpo elástico, tras sufrir una deformación por alguna fuerza externa, tiende a regresar a su estado original [44]. Si la fuerza está dentro de los límites mecánicos, fuerzas de tracción aparecen debido a las interacciones moleculares y tienden a regresar al sólido a su estado de equilibrio [45]. Ciertamente la geometría más simple en que podemos pensar para un cuerpo elástico es la esfera.

El problema para las vibraciones libres en una esfera elástica homogénea fue resuelto por Horace Lamb en 1882 [46]. A partir de ese momento, otros autores han calculado diferentes variaciones de este problema, considerando modelos de esfera con capas o cuerpos anisotrópicos. Estudios posteriores hechos de 1935 a 1953 por los autores Sezawa (1935, 1936), Sezawa y Kanai (1937), Inove (1936, 1937) y Vanek (1953) fueron realizados para tratar de dar luz al origen de los terremotos terrestres tomando como punto de partida la teoría de la elasticidad en esferas.

Dentro de esta teoría, concretamente en el régimen lineal, dos conceptos centrales son el esfuerzo y la deformación [44] (popularmente conocidos como Stress and Strain en inglés). El esfuerzo surge como resultado de las fuerzas de tracción que sufre el cuerpo. Un enfoque adecuado consiste en considerar que estas fuerzas actúan a través de superficies dentro del sólido [45]. Bajo este concepto se introducen el vector de tracción mecánica \mathbf{T} , como la fuerza por unidad de área $d\mathbf{F}/ds$ y $\hat{\mathbf{n}}$ como el vector normal exterior a la superficie ds , de manera que

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{F}}{ds}. \quad (2.28)$$

La relación entre las componentes del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ con el vector de tracción ocurre a través del llamado tensor de esfuerzos, o tensor de esfuerzos de Cauchy T_{ij} [45]:

$$T_i = T_{ij}n_j \quad (2.29)$$

siendo T_{ij} la i -ésima componente de la fuerza actuando por unidad de área en una superficie perpendicular a la dirección n_j .

La condición para las vibraciones de una esfera elástica utiliza las componentes de este tensor de esfuerzos, al considerar que la superficie $r = a$, esta libre de tracciones [46], y por lo tanto

$$T_{rr} = T_{r\theta} = T_{r\varphi} = 0. \quad (2.30)$$

Estos esfuerzos traen consigo un grado de deformación en el sólido elástico, caracterizado por el desplazamiento \mathbf{u} de sus partículas [44]. Las componentes para las posiciones fuera de equilibrio u'_i , debidas a estos desplazamientos $d\mathbf{u}$ son calculadas mediante la siguiente ecuación [45]:

$$u'_i(x_j + dx_j) = u_i(x_j) + S_{ij}dx_j + \Omega_{ij}dx_j \quad (2.31)$$

en donde

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.32)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.33)$$

son el tensor de deformación simétrico y antisimétrico respectivamente. Si el esfuerzo y la deformación son pequeños estas cantidades son proporcionales [45]. Para encontrar una relación entre ellas cuando ocurren estas pequeñas deformaciones se realiza una serie de Taylor

$$T_{ij}(S_{kl}) = T_{ij}(0) + \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0} S_{kl} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{\substack{S_{kl}=0 \\ S_{mn}=0}} S_{kl} S_{mn} + \dots, \quad (2.34)$$

y se mantienen únicamente valores a primer orden. Ya que por condición de equilibrio $T_{ij}(0) = 0$, se consigue la relación de proporcionalidad

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}. \quad (2.35)$$

Esta es la forma más general de la ley de Hooke para sólidos elásticos [45], donde $c_{ijkl} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_{S_{kl}=0}$ es el tensor de rigidez y contiene las propiedades elásticas del material [44].

En el caso de un sólido isotrópico, el tensor elástico c_{ijkl} debe ser invariante para cualquier cambio de ejes, rotación o simetría alrededor de un punto o un plano [45]. Las únicas cantidades que no son afectadas por estas transformaciones ortogonales son un escalar y el tensor unitario δ_{ij} .

Debido a que el tensor unitario es simétrico solo hay tres combinaciones posibles que contienen los cuatro índices, $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{jl}$, $\delta_{il}\delta_{jk}$, por lo que es posible escribir el tensor de rigidez de la forma

$$c_{ijkl} = \lambda_p \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik}\delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il}\delta_{jk}, \quad (2.36)$$

donde λ_p , μ_1 , μ_2 son constantes. De la definición 2.32 de S_{ij} , c_{ijkl} es simétrico respecto a los primeros dos índices, $c_{ijkl} = c_{jikl}$, por lo que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_p$ y el tensor es escrito como

$$c_{ijkl} = \lambda_p \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_p (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2.37)$$

Por lo tanto, en un sólido isotrópico las propiedades elásticas pueden ser especificadas por las constantes λ_p , μ_p , conocidas como coeficientes de

Lamé [46]. Con esta versión del tensor de rigidez, la ley de Hooke puede reescribirse como [45]:

$$T_{ij} = \lambda_p S_{ii} \delta_{ij} + 2\mu_p S_{ij} \quad (2.38)$$

donde $S = S_{ii}$ es la traza del tensor de deformaciones. Los coeficientes de Lamé pueden ser calculados mediante otras constantes mecánicas del material como el modulo de Young E , o el coeficiente de Poisson ν_p .

	E, ν_p	E, μ	λ, μ
λ	$\frac{E\nu_p}{(1+\nu_p)(1-2\nu_p)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	λ
μ	$\frac{E}{2(1+\nu_p)}$	μ	μ
E	E	E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$
ν_p	ν_p	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

Cuadro 2.1: Relación entre diferentes parámetros que caracterizan el comportamiento elástico de un material. Estas pueden considerarse como fórmulas de conversión para determinar un parámetro a partir de un par distinto.

En ciertos casos sencillos, donde no sea necesario calcular todas las componentes de los esfuerzos o deformaciones, estos pueden ser encontrados de manera experimental, pero si se quieren conocer completamente los tensores de esfuerzo o deformación es necesario determinar el vector de desplazamiento \mathbf{u} . Si es posible calcular la divergencia y el rotacional de la función \mathbf{u} en todos los puntos de una región finita entonces el campo puede determinarse utilizando la descomposición de Helmholtz [32], mediante los potenciales escalar y vectorial Φ y \mathbf{A} :

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.39)$$

En este caso, Φ representa desplazamientos longitudinales mientras que \mathbf{A} representa desplazamientos ortogonales [44]. Si se toma la condición de Gauge, $\nabla \cdot \mathbf{A}$, tanto \mathbf{A} como Φ satisfacen la ecuación de Helmholtz [35]

$$(\nabla^2 + k_l^2)\Phi = 0 \quad (2.40)$$

$$(\nabla^2 + k_t^2)\mathbf{A} = 0 \quad (2.41)$$

en donde k_l, k_t son el numero de onda longitudinal y transversal respectivamente. A su vez, si \mathbf{A} se encuentra en la base de coordenadas esféricas, este puede descomponerse mediante un par de potenciales escalares (ψ, χ) conocidos como potenciales de Debye [35]:

$$\mathbf{A} = \nabla \times (r\hat{\mathbf{e}}_r\psi) + q\nabla \times \nabla \times (r\hat{\mathbf{e}}_r\chi). \quad (2.42)$$

Aquí q es una constante para tener una equivalencia correcta en las unidades. Estos potenciales de Debye satisfacen la ecuación de Helmholtz $(\nabla^2 + k_t^2)(\psi, \chi) = 0$ [35]. Si se introducen las funciones

$$\mathbf{L} = \nabla\Phi \quad (2.43)$$

$$\mathbf{M} = \nabla \times (r\hat{\mathbf{e}}_r\psi) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{N} = q\nabla \times \nabla \times (r\hat{\mathbf{e}}_r\chi) \quad (2.45)$$

el vector de desplazamiento es escrito de forma compacta $\mathbf{u} = \mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N}$, y queda en términos de tres potenciales escalares. El objetivo consiste en encontrar expresiones para los potenciales que satisfagan la ecuación de Helmholtz. Si se utiliza la base esférica para realizar una expansión en armónicos, estos potenciales son [30]

$$\Phi = \mathcal{A} j_n(k_l r) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (2.46)$$

$$\psi = \mathcal{B} j_n(k_t r) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (2.47)$$

$$\chi = \mathcal{C} j_n(k_l r) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (2.48)$$

Con estos potenciales, el vector de desplazamiento \mathbf{u} tiene una forma determinada, con la cual es posible calcular los elementos del tensor T_{ij} por sustituciones sucesivas en las ecuaciones 2.32 y 2.38.

Retomamos ahora la condición de frontera para una esfera elástica. Para resolver el problema se sustituyen las componentes necesarias del tensor T_{ij} dentro de la ecuación 2.30. Si las constantes \mathcal{A} , \mathcal{B} Y \mathcal{C} son distintas de cero, se llega al siguiente sistema de ecuaciones [44]:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(k_l a)^2 \left(2n^2 - n - 1 - \frac{1}{2}k_t^2 a^2 \right) j_n(k_l a) j_n(k_l a) + \dots \\ & + (n^3 + 2n^2 - n - 2 - k_t^2 a^2) k_l a j_{n+1}(k_l a) j_n(k_l a) + \dots \\ & + \left(n^3 + n^2 - 2n - \frac{1}{2}k_t^2 a^2 \right) k_t a j_n(k_l a) j_{n+1}(k_l a) + \dots \\ & + (2 - n^2 - n)(k_l a)(k_t a) j_{n+1}(k_l a) j_{n+1}(k_t a) = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$(n-1)j_n(k_t a) - k_t a j_{n+1}(k_t a) = 0 \quad (2.50)$$

Las raíces de la ecuación 2.49 proporcionan las frecuencias de los llamados *modos esferoidales*, mientras las raíces de la ecuación 2.50 son las frecuencias de los *modos torsionales* [44]. Estas ecuaciones han sido resueltas por Sato y Usami (1962), definiendo las frecuencias reducidas adimensionales $\xi = ak_l$ y $\eta = ak_t$, y se encuentran tabuladas para la l -ésima raíz del n -ésimo armónico en [44].

Presión a segundo orden. El enfoque de Langevin

Existen dos tipos de variables a segundo orden que son características. Las primeras son obtenidas directamente de las ecuaciones diferenciales no lineales y son consideradas como soluciones exactas. Las segundas

son cantidades del campo a primer orden que contienen productos y potencias a orden superior [42]. Como ejemplo de este segundo tipo tenemos las densidades de energía acústica.

La densidad de energía cinética en la aproximación de acústica lineal es

$$T = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.51)$$

mientras que la densidad de energía potencial es

$$\mathcal{E} = \frac{P^2}{2\rho_0 c_0^2}. \quad (2.52)$$

El objetivo principal de este trabajo consiste en el cálculo de fuerzas acústicas cuando una onda incide sobre un objetivo. En términos generales, la fuerza en un fluido es la integral del tensor de esfuerzos $\bar{\bar{T}}$ [40]

$$\mathbf{F} = \int_S \bar{\bar{T}} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.53)$$

en la superficie del objeto. Este tensor $\bar{\bar{T}}$ fue discutido con un poco más de detalle en la sección 2.2. Cuando en el fluido no existen pérdidas este tensor puede escribirse como $\bar{\bar{T}} = -P\bar{\bar{\delta}}$, con $\bar{\bar{\delta}}$ la matriz unitaria cuyos elementos se escriben mediante la delta de Kronecker δ_{ij} [41]. Esta relación es útil ya que permite conectar la ecuación de conservación del momento lineal 2.12 (despreciando la fuerza de gravedad) con la forma alternativa [42]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{T}}. \quad (2.54)$$

La conexión entre las ecuaciones 2.12 y la anterior ocurre al utilizar la identidad $\nabla \cdot (a\bar{\bar{A}}) = a\nabla \cdot \bar{\bar{A}} + (\nabla a) \cdot \bar{\bar{A}}$, donde a es un escalar y $\bar{\bar{A}}$ un tensor cartesiano, de manera que $\nabla \cdot (P\bar{\bar{\delta}}) = \nabla P$.

Para la construcción de una ecuación más adecuada para la conservación del momento, la cual será de vital importancia en el desarrollo de la fuerza de radiación, escribimos una ecuación tensorial recurriendo a la siguiente identidad: $\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{a}$, en la cual \mathbf{a} es un vector cualquiera de tres dimensiones y $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ es el producto de Kronecker definido para dos vectores como

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \otimes (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

de manera que tras sustituir $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}$ en 2.54, y en conjunto con la ecuación de continuidad 2.7 se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (P \bar{\delta} + \rho v \otimes v) = 0. \quad (2.56)$$

Se define ahora el tensor de flujo de momento \bar{B} [42], mediante sus componentes

$$B_{ij} = P \delta_{ij} + \rho v_i v_j, \quad (2.57)$$

y finalmente la ecuación de conservación del momento obtiene la forma

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{B} = 0. \quad (2.58)$$

En la ecuación 2.58, se tienen las variables de campo ρ y v como cantidades a segundo orden por productos entre ellas, pero no se ha hecho mención sobre la presión P . Ciertamente es necesario tener una relación para la presión a segundo orden. De las múltiples expansiones a segundo orden que existen para la presión, el enfoque de Langevin es el más adecuado ya que resulta en una teoría más general para la fuerza de radiación en combinación con el enfoque de Brillouin [42]. La llamada segunda relación de Langevin es:

$$P = p - p_0 = T - \mathcal{E} + \text{cons.} \quad (2.59)$$

Esta relación hace uso de las densidades de energía, cantidades que involucran productos de variables a primer orden. La constante es usada para conectar las distintas expansiones de la presión, pero no tiene contribución a la integral de superficie cerrada de la fuerza [42], por lo que no se considera en este caso.

Así la presión a segundo orden P_2 es:

$$P_2 = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} P_1^2 - \frac{\rho_0}{2} |v_1|^2. \quad (2.60)$$

y queda determinada por medio de variables a primer orden P_1, v_1 .

Enfoque de Brillouin

De acuerdo con Brillouin, la fuerza de radiación en coordenadas Eulerianas se entiende como el negativo del promedio temporal de la densidad de flujo de momento, y define el tensor de flujo como $\bar{S} = -\langle \bar{M} \rangle + p_0 \bar{\delta}$, pero la adición del término $p_0 \bar{\delta}$ no cambia el resultado de la integral de la fuerza [42].

La fuerza de radiación acústica

Desde que se conoce la naturaleza ondulatoria del sonido y la luz ha existido una inherente comparación entre ambos debido a efectos compartidos como la interferencia o difracción, fenómenos que son propios de campos ondulatorios.

3.1. Analogía entre la presión de radiación óptica y acústica

Por un lado, la presión de radiación debida a la luz tiene sus antecedentes en la época de Johanness Kepler en 1619 al observar la forma de la cola de los cometas, siempre apuntando en dirección contraria al sol. Kepler señaló este fenómeno en su libro *De Cometis Libelli Tres* donde presentó su hipótesis adjudicándole este efecto a una fuerza externa ejercida por la luz solar. Siglos más tarde James Clerk Maxwell en 1862 formularía la teoría electromagnética clásica dentro de la cual se ratificó de manera teórica la predicción de esta fuerza de radiación como consecuencia de la ley de conservación del momento lineal transportado por los campos eléctrico E y magnético B [30].

Presión de radiación óptica

Al establecer una ecuación para la conservación del momento lineal, un punto de partida es considerar la relación entre la segunda ley de Newton $F = dp_m/dt$ y la fuerza de Lorentz, $F = Q(E + \mathbf{v} \times B)$, para una carga $Q = \rho_e V$ que se mueve a velocidad \mathbf{v} , en donde ρ_e es la densidad de carga eléctrica en un volumen V . De esta manera la relación es la siguiente [30]:

$$\frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = \int \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV. \quad (3.1)$$

A través de las ecuaciones de Maxwell es posible eliminar la dependencia de las fuentes, ρ y $\rho\mathbf{v}$, dejando una expresión que involucre únicamente a los campos [30]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_m}{dt} + \frac{d}{dt} \int \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \epsilon_0 \int [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + c^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + \dots \\ + c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] dV. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si reacomodamos el lado izquierdo de esta ecuación es posible identificar y dar un significado físico a la primera integral

3.1 Analogía entre la presión de radiación óptica y acústica	20
Presión de radiación óptica	20
Presión de radiación acústica	22
3.2 Componentes tridimensionales de la fuerza	24
3.3 Posicionamiento arbitrario del dispersor	28
Operadores de traslación y rotación	29

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_m + \int \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \right) = \epsilon_0 \int [\dots] dV.$$

El segundo término del lado izquierdo es identificado como un momento lineal pero debido enteramente a los campos. Este es el *momento electromagnético*:

$$\mathbf{p}_f = \int \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV. \quad (3.3)$$

Por otra parte, el lado derecho de la ecuación 3.2 es bastante engorroso y visto de ese modo es difícil obtener información útil de él. Ya que el objetivo es buscar una ecuación del tipo continuidad para la conservación del momento, se cambia la integral de volumen por una de superficie usando el teorema de la divergencia. Así es posible identificar un *flujo de momento*.

A través del desarrollo explícito de las componentes de las divergencias y rotacionales de la ecuación 3.2, se introducen los elementos del tensor de Maxwell [30]:

$$M_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + c^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{ij} \right], \quad (3.4)$$

con el cual es posible escribir la componente *i-esima* de la ecuación 3.2 como

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_f)_i = \sum_j \int \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} dV,$$

o visto como una divergencia:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_f) = \int \nabla \cdot \vec{\bar{M}} dV. \quad (3.5)$$

Utilizando nuevamente el teorema de la divergencia se tiene finalmente una ecuación de la cual se puede obtener información más fácilmente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_f) &= \oint \vec{\bar{M}} \cdot d\mathbf{S} \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= \oint \vec{\bar{M}} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.6)$$

por lo que interpretamos a M_{ij} como el *flujo de momento por unidad de área*. En otras palabras, es la fuerza por unidad de área transmitida a través de la superficie S .

Así, la *presión de radiación sobre una partícula se identifica como el promedio del esfuerzo aplicado sobre la superficie de este objeto*.

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \int_S \langle \bar{\mathbf{M}} \rangle \cdot d\mathbf{S} \quad (3.7)$$

Presión de radiación acústica

El análisis de partículas incompresibles en campos acústicos data desde los trabajos hechos por King en 1934, pasando por el modelo para las fuerzas en partículas compresibles hechos por Yosioka y Yakisawa en 1955 hasta el famoso artículo de Gor'kov en 1962 donde generaliza y resume estos resultados [26]. La naturaleza de la fuerza de radiación es análoga al caso óptico: la conservación del momento transportado por los campos de presión acústica p y de velocidad de partícula v , sin embargo, a diferencia del electromagnetismo, en acústica tenemos un campo escalar y uno vectorial; esto marca un cambio importante en sus respectivos modelos, aún así es posible obtener y reescribir ecuaciones de tal manera que se pueda tener una comparación entre ambas situaciones [47].

Retomando lo mencionado en la sección 2.2, en el marco de la acústica la fuerza en un objeto inmerso en un fluido es la integral del tensor de esfuerzos en la superficie de dicho objeto $\mathbf{F} = \int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{S}$.

Al considerar componentes cartesianas del tensor de esfuerzos T_{ij} nos referimos a la Figura 3.1 en el cual en cada cara hay una fuerza por unidad de área $\vec{\tau}$, la cual a su vez se puede descomponer en sus tres componentes x, y, z . Así por ejemplo, para la cara perpendicular al eje z habrá una fuerza por unidad de área con componentes $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}$, y lo mismo para el resto de las caras.

Para especificar el estado de los esfuerzos en el objeto se necesitan los valores de las 9 componentes que conforman el tensor

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Este tensor de esfuerzos puede descomponerse como la suma de un tensor de esfuerzos normales de compresión (componentes de la diagonal) y un tensor de esfuerzos viscosos o cortantes (componentes fuera de la diagonal) [41]. Además se contempla la siguiente convención: una componente del esfuerzo es positiva cuando la normal exterior a la superficie como la tensión tienen direcciones paralelas.[40]

Si el objeto de estudio son ondas acústicas en un fluido no viscoso, las componentes del tensor de esfuerzos son cero a excepción de la diagonal, la cual se corresponde con la presión $-P\delta_{ij}$ [41]. El signo negativo representa el esfuerzo normal de compresión que soporta debido al fluido circundante [40]. Antes de proceder con la ecuación de la fuerza se debe tener en cuenta otra de diferencia importante respecto a su contraparte óptica. Una onda acústica hace vibrar la superficie del objeto provocando que esta varíe con el tiempo $S = S(t)$ [47], mientras que las

Sobre la fuerza \mathbf{F}

El tensor de esfuerzos $\bar{\mathbf{T}}$ no es el análogo al tensor de Maxwell $\bar{\mathbf{M}}$. El tensor de Maxwell representa el flujo de momento por unidad de área transportado por los campos, mientras que el tensor de esfuerzos representa una generalización de las presiones sobre la superficie de un objeto debida al fluido circundante.

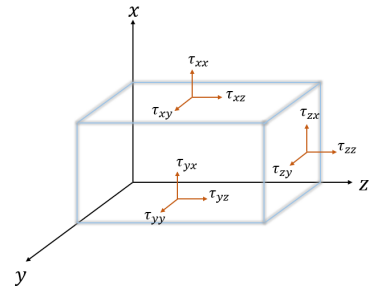


Figura 3.1: Componentes cartesianas del tensor de esfuerzos $\bar{\mathbf{T}}$.

ondas electromagnéticas dejan constante la superficie del objeto S . Por lo tanto la fuerza acústica es

$$\mathbf{F} = - \int_{S(t)} P d\mathbf{S}. \quad (3.8)$$

La fuerza de radiación se calcula al tomar el promedio temporal

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = - \left\langle \int_{S(t)} P d\mathbf{S} \right\rangle. \quad (3.9)$$

El hecho de que la superficie S varíe con el tiempo representa una dificultad (además esta ecuación aún no es comparable con el caso óptico). Para tener una ecuación más tratable y análoga al caso óptico se utiliza la ecuación de continuidad del momento lineal acústico [22]:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{B}}} = 0, \quad (3.10)$$

donde

$$B_{ij} = \rho v_i v_j + P \delta_{ij} \quad (3.11)$$

son las componentes del *tensor de flujo de momento acústico* o *tensor de Brillouin* vistas en la sección 2.2, ρ es la densidad acústica y v es la velocidad de partícula. En analogía con el caso óptico, la ecuación 3.10 es integrada sobre un volumen, el cual está acotado por un lado por la superficie vibrante de la partícula $S(t)$ y por el otro por una superficie fija en el fluido S_R [35].

Utilizando el teorema de la divergencia es posible cambiar el término $\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{B}}}$ de la ecuación 3.10:

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho v}{\partial t} dV - \int_{S(t)} \bar{\bar{\mathbf{B}}} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_R} \bar{\bar{\mathbf{B}}} \cdot d\mathbf{S}_R = 0. \quad (3.12)$$

Mediante el teorema de transporte de Reynolds podemos intercambiar la integral de volumen y la derivada temporal [40], haciendo que la ecuación de continuidad 3.10 adopte la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho v dV - \int_{S(t)} P d\mathbf{S} + \int_{S_R} \bar{\bar{\mathbf{B}}} \cdot d\mathbf{S}_R = 0,$$

Al tomar el promedio temporal y usar el hecho de que la media de una derivada temporal se cancela, la ecuación anterior se reduce a dos términos

$$- \left\langle \int_{S(t)} P d\mathbf{S} \right\rangle + \left\langle \int_{S_R} \bar{\bar{\mathbf{B}}} \cdot d\mathbf{S}_R \right\rangle = 0.$$

Teorema de transporte de Reynolds

Es común que al derivar las ecuaciones de continuidad en mecánica de fluidos se use un volumen de control, con alguna propiedad escalar de interés α , en un marco de referencia Lagrangiano. Es necesario transformar tales términos en expresiones equivalentes que involucren integrales de volumen en coordenadas Eulerianas. El teorema que permite realizar tal transformación es el llamado *Teorema de transporte de Reynolds*: $\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \int_V \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot (\alpha \mathbf{u}) dV$ donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie que envuelve al volumen V . [40]

Así tenemos una ecuación para la fuerza de radiación que no incluye la superficie vibrante de la partícula y que además es comparable con el caso óptico:

$$\mathbf{F} = - \left\langle \int_{S(t)} P d\mathbf{S} \right\rangle = - \int_{S_R} \langle \bar{\bar{\mathbf{B}}} \rangle \cdot d\mathbf{S}_R. \quad (3.13)$$

El objetivo ahora es el cálculo de la integral 3.13, la cual depende de las componentes del tensor de flujo de momento $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$, que es la cantidad física relevante para la fuerza de radiación.

3.2. Componentes tridimensionales de la fuerza

El cálculo de la fuerza de radiación requiere conocer las distribuciones de presión y velocidad resultantes en el medio por la presencia de un objeto, lo cual determina un problema de esparcimiento de los campos. Uno de los métodos más completos y que tiene la ventaja de derivar expresiones válidas para objetos esféricos de tamaño arbitrario y campos incidentes de forma arbitraria es la llamada teoría generalizada de Lorenz-Mie (GLMT por sus siglas en inglés). Esta teoría (también conocida como difusión de Mie) fue originalmente concebida como una solución a las ecuaciones de Maxwell para el problema del esparcimiento por una esfera dieléctrica realizando una expansión en ondas esféricas de los campos. Esto tiene una característica, y es que mientras más se desvíe el campo de una onda esférica, más términos serán necesarios para caracterizarlo correctamente, pero resulta conveniente para el sistema que aquí se estudia.

De manera análoga al caso óptico, la presión de radiación se calcula con suficiente precisión utilizando términos de orden 2 en expansión perturbativa del campo ultrasónico, por lo tanto es necesario expresar la presión P involucrada dentro de las componentes del tensor de flujo de momento como una cantidad de segundo orden. Para esto se utiliza la relación de Langevin para la presión 2.2,

$$\langle p_2 \rangle = \frac{1}{2\rho_0 c^2} \langle p_1^2 \rangle - \frac{\rho_0}{2} \langle |\mathbf{v}^{(1)}|^2 \rangle. \quad (3.14)$$

Esta forma de la presión a orden 2 es aquella que será requerida dentro de la ecuación 3.11 para tener de manera explícita los elementos del tensor de flujo de momento,

$$B_{ij} = \rho_0 v_i^{(1)} v_j^{(1)} + \left(\frac{1}{2\rho_0 c^2} \langle p_1^2 \rangle - \frac{\rho_0}{2} \langle |\mathbf{v}^{(1)}|^2 \rangle \right) \delta_{ij}. \quad (3.15)$$

El modelo que se usará en esta tesis se enfoca en la resolución de la integral 3.13 a través del potencial de velocidad $\phi_T = \phi_i + \phi_s$ (el cual es derivado en el capítulo 2) usando como marco de referencia aquel mostrado en la Figura 3.2.

Este potencial satisface la ecuación de onda [17]

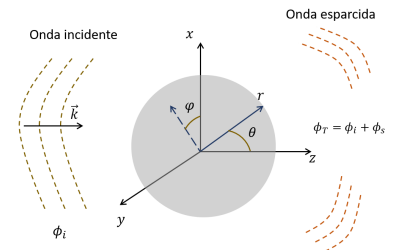


Figura 3.2: Sistema de referencia centrado en la esfera para un campo incidente en z

$$\nabla^2 \phi_T - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi_T}{\partial t^2} = 0. \quad (3.16)$$

Si consideramos que después de la extinción de los fenómenos transitorios del sistema la perturbación es armónica podemos adoptar la convención de la parte temporal $e^{-i\omega t}$, separando así las partes espacial y temporal en la ecuación de onda [30]. Esto nos conduce a la ecuación de Helmholtz en las variables espaciales. Debido al tipo de sistema que se está analizando (partícula esférica) resulta conveniente realizar una expansión en ondas esféricas para aplicar de manera más simple las condiciones de frontera:

$$\phi_i = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.17)$$

donde ϕ_0 es una amplitud real constante, A_n^m son constantes conocidas como coeficientes de forma y Y_n^m son los armónicos esféricos. Ya que el campo debe ser finito en el origen, la dependencia radial se expresa mediante las funciones esféricas de Bessel $j_n(kr)$. Por otro lado, el potencial esparcido es una onda divergente, por lo que puede ser expresado de manera similar a ϕ_i utilizando las funciones esféricas de Hankel de primera especie $h_n^{(1)}$:

$$\phi_s = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m R_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.18)$$

donde los coeficientes R_n^m son conocidos como coeficientes de esparcimiento, éstos son determinados mediante las condiciones de frontera.

Al desarrollar el integrando de la ecuación 3.13, la componente i -ésima de la fuerza viene dada por: $F_i = - \int_{S_R} \sum_j \langle B_{ij} \rangle dS_j$. Sin embargo, el elemento diferencial de superficie únicamente contiene una componente radial $dS_R = dS_R \hat{r} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$, por lo que los únicos elementos posibles en el desarrollo para las componentes F_i de acuerdo a la ecuación 3.15 son:

$$F_r \longrightarrow \langle B_{rr} \rangle = \langle p_2 + \rho_0 v_r^2 \rangle, \quad (3.19)$$

$$F_\theta \longrightarrow \langle B_{r\theta} \rangle = \langle \rho_0 v_r v_\theta \rangle, \quad (3.20)$$

$$F_\varphi \longrightarrow \langle B_{r\varphi} \rangle = \langle \rho_0 v_r v_\varphi \rangle. \quad (3.21)$$

Como se ha mencionado anteriormente, para el cálculo de tales componentes de la fuerza son necesarias la presión a segundo orden y la velocidad de partícula a primer orden; no obstante, una revisión de las ecuaciones 3.15 y 3.14 muestra que estas cantidades físicas relevantes pueden ser obtenidas del potencial total $\phi_T = \phi$ por medio de las ecuaciones de gobierno,

$$\mathbf{v}^{(1)} = \nabla \phi, \quad p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.22)$$

La presión a segundo orden es calculada entonces mediante 3.14,

Sobre las componentes B_{ij}

Si bien, a primera vista las componentes en 3.19-3.21 estarían invertidas en sus índices, al revisar 3.11 se observa que el tensor \vec{B} es simétrico: $B_{ij} = B_{ji}$ eliminando este detalle.

$$\langle p_2 \rangle = \frac{\rho_0}{2} \left\langle \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right\rangle, \quad (3.23)$$

de tal manera que los elementos del tensor de flujo de momento quedan determinados por una única variable:

$$\langle B_{rr} \rangle = \rho_0 \left\langle \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \right\rangle, \quad (3.24)$$

$$\langle B_{r\theta} \rangle = \rho_0 \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\rangle, \quad (3.25)$$

$$\langle B_{r\varphi} \rangle = \rho_0 \left\langle \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle. \quad (3.26)$$

Las componentes cartesianas de la fuerza son obtenidas a partir del cambio entre coordenadas esféricas. Ya que el cambio se obtiene al multiplicar por la matriz de transformación, y dada la relación entre las componentes de la fuerza observada en 3.19 - 1.21 es posible obtener directamente estas componentes cartesianas si introducimos esta matriz de transformación en el integrando, $F_{\text{rad}} = - \int_{S_R} \vec{f} dS_R$ [33], donde \vec{f} está dado por:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle B_{rr} \rangle \\ \langle B_{r\theta} \rangle \\ \langle B_{r\varphi} \rangle \end{pmatrix}$$

Así por ejemplo, la componente axial de la fuerza F_z es escrita como:

$$F_z = \int_{S_R} \langle B_{r\theta} \rangle \sin \theta dS_R - \int_{S_R} \langle B_{rr} \rangle \cos \theta dS_R \quad (3.27)$$

Lo que resta ahora es integrar estos factores para cada componente de la presión de radiación F_{rad} .

Ya que la superficie esférica S_R es arbitraria, realizar una aproximación en campo lejano, $kr \gg 1$, resulta conveniente además de ser un método común en problemas de radiación [35].

En esta aproximación, consideremos la relación existente entre las funciones esféricas de Bessel y las funciones esféricas de Hankel de primera especie,

$$j_n(kr) = \frac{h_n^{(1)}(kr) + h_n^{*(1)}(kr)}{2}, \quad (3.28)$$

por lo que la aproximación de campo lejano se aplica únicamente sobre las funciones esféricas de Hankel:

$$h_n^{(1)}(kr) \simeq (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr}. \quad (3.29)$$

Con el objetivo de tener expresiones manipulables más sencillas de los campos incidente y esparcido se introducen las funciones adimensionales F_s , $F_i^{(1)}$ y $F_i^{(2)}$ [33], definidas de la siguiente manera:

$$F_s(\theta, \varphi) = \frac{-i}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^{-n} A_n^m R_n^m Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.30)$$

$$F_i^{(1)}(\theta, \varphi) = \frac{-i}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^{-n} A_n^m Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.31)$$

$$F_i^{(2)}(\theta, \varphi) = \frac{i}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n A_n^m Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.32)$$

donde a es el radio de la esfera en la Figura 3.2. De esta forma los campos ϕ_i y ϕ_s dados por las ecuaciones 3.17, 3.18 son reescritos,

$$\phi_i = a\phi_0 \left(\frac{e^{ikr}}{2r} F_i^{(1)}(\theta, \varphi) + \frac{e^{-ikr}}{2r} F_i^{(2)}(\theta, \varphi) \right), \quad (3.33)$$

$$\phi_s = a\phi_0 \frac{e^{ikr}}{r} F_s(\theta, \varphi). \quad (3.34)$$

Tras introducir esta forma de los campos incidentes en los elementos del tensor $\bar{\bar{B}}$, se integran términos que contienen las funciones adimensionales de manera cuadrática: $|F_s|^2$, $F_s F_i^{(1)}$, $F_s F_i^{(2)}$. Las integraciones requieren del uso de las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre y de las funciones exponenciales. Este desarrollo puede observarse con detalle en [33]. Finalmente las expresiones buscadas para las componentes cartesianas de la fuerza son:

$$F_x = -\frac{\pi\rho_0\phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} Q_n^m \left[(V_n^m \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} - \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^1 \dots \right. \\ \left. - (V_n^m \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} - \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^2 \right], \quad (3.35)$$

$$F_y = -\frac{\pi\rho_0\phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} Q_n^m \left[- (V_n^m \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} + \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^1 \dots \right. \\ \left. - (V_n^m \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} + \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^2 \right], \quad (3.36)$$

$$F_z = -\frac{\pi\rho_0\phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m|<n} 2(n+m+1) Q_n^m \left[\Re\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\} D_n^2 - \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\} D_n^1 \right]. \quad (3.37)$$

donde

$$D_n^1 = \alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n \alpha_{n+1} + \beta_n \beta_{n+1}), \quad D_n^2 = \beta_{n+1} - \beta_n + 2(\beta_{n+1} \alpha_n - \alpha_{n+1} \beta_n) \quad (3.38)$$

y

$$Q_n^m = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(2n+3)(n-m)!}, \quad V_n^m = (n+m+1)(n+m+2). \quad (3.39)$$

Los α_n y β_n son la parte real $\Re\{R_n\} = \alpha_n$ e imaginaria $\Im\{R_n\} = \beta_n$ de los coeficientes de esparcimiento de la teoría de Lorenz-Mie [31, 33]. Las ecuaciones 3.35 - 3.37 completan el cálculo general de la presión de radiación acústica para una esfera en un medio homogéneo no viscoso [33].

3.3. Posicionamiento arbitrario del dispersor

Regresemos por un momento a las componentes (F_x, F_y, F_z) de la fuerza. El resultado de estas ecuaciones proviene de un análisis basado en el sistema de referencia de la Figura 3.2. Aquí se ha considerado un haz incidente, definido por sus coeficientes A_n^m a través de tal referencia. La manera para calcular estos coeficientes no es única [31], y depende del problema a tratar el escoger un método u otro; tal es el caso visto en [48], donde se recurre al uso de cuadraturas para su evaluación. Sin embargo, el uso de cuadraturas sumado al resto de los cálculos necesarios para conocer F_{rad} implica un costo elevado de computo cuando se modifica la posición de la esfera a un punto arbitrario del espacio.

Si se realiza un trabajo analítico extra sobre los coeficientes A_n^m es posible reducir este costo de manera significativa utilizando las propiedades de ortogonalidad de los armónicos esféricos para obtener operadores de traslación y rotación de la base. El uso de transformaciones de base para calcular expansiones en armónicos esféricos es un tema de investigación en sí mismo que tiene aplicaciones en áreas tales como la química cuántica, donde estas expansiones aparecen como factores de orbitales atómicos [49], en el desarrollo multipolar de campos electromagnéticos [30], así como problemas con condiciones a la frontera cuya resolución utilice el método de la matriz T [49].

Hasta el momento no se ha mencionado de manera explícita, pero en este estudio se ha considerado el caso de una respuesta lineal por parte de la partícula dispersora, es decir la relación entre el campo incidente y el esparcido debe ser lineal,

$$p_j = \sum_i^{\infty} T_{ij} a_i, \quad (3.40)$$

donde a_i son los coeficientes de expansión del campo incidente y p_j los coeficientes de expansión del campo esparcido, lo cual permite hacer uso del método de la matriz T, cuyos elementos son T_{ij} .

El hecho de que estos elementos T_{ij} dependan únicamente de las propiedades de la esfera y la velocidad del campo dentro de ésta (c_l y c_t), permite conocer la fuerza calculando una única vez la matriz T para una partícula en específico, y reutilizarla para los cálculos posteriores en distintas posiciones [49]. Esta ventaja es aprovechada en el desarrollo de un algoritmo para el computo numérico de la fuerza [35], ya que es posible acoplarlo con métodos recursivos que permitan la determinación de los operadores de traslación y rotación.

Operadores de traslación y rotación

Las funciones esféricas de Bessel $j_n(kr)$ para el campo incidente, además de ser regulares en el origen, cumplen la condición de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial j_n}{\partial r} - ikj_n \right) = 0, \tag{3.41}$$

por lo que, es posible calcular una expansión en serie centrada en diferentes localizaciones [36]. Si queremos conocer la forma de estas expansiones de manera local los coeficientes deben ser trasladados y evaluados.

De las ecuaciones 3.17 y 3.18 nos centramos en las soluciones elementales a la ecuación de Helmholtz, llamadas soluciones regulares \mathcal{R} y singulares \mathcal{S} :

$$\mathcal{R}_n^m(\mathbf{r}) = j_n(kr)Y_n^m(\theta, \varphi) \tag{3.42}$$

$$\mathcal{S}_n^m(\mathbf{r}) = h_n^{(1)}(kr)Y_n^m(\theta, \varphi) \tag{3.43}$$

Para obtener los operadores deseados, se realiza un desarrollo en conjunto con los armónicos esféricos, mediante el teorema de adición [36], centrados en el punto P dado por la relación $\mathbf{d} = \mathbf{d}' + \mathbf{d}''$ (ver Figura 3.3).

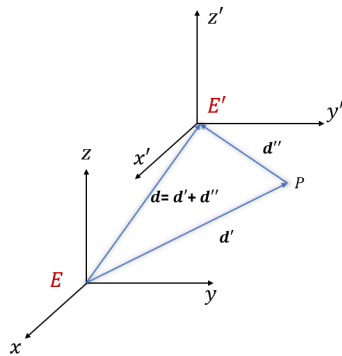


Figura 3.3: Traslación entre los sistemas E y E'

Los pasos para realizar esta reexpansión de los armónicos esféricos han sido desarrollados en [36], y consisten en llevar a cabo productos escalares apropiados de los valores locales en el origen con aquellos localizados en puntos a una distancia d . La expresión resultante de tales productos es la siguiente:

$$\mathcal{R}_n^m(\mathbf{r}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{l=-n'}^n (\mathcal{R}|\mathcal{R})_{n,n'}^{m,l} j_{n'}(kr') Y_{n'}^l(\theta', \varphi'), \quad (3.44)$$

donde el símbolo $(\mathcal{R}|\mathcal{R})$, denota los productos en los cuales las soluciones elementales regulares \mathcal{R} son re-expandidas en términos de soluciones regulares o singulares en los sistemas E' (ver Figura 3.3), cuyos coeficientes son $(\mathcal{R}|\mathcal{R})_{n,n'}^{m,l}$. Estos coeficientes, que renombramos como $C_{n,n'}^{m,l}$, son los operadores buscados y dependen de la distancia de traslación $|\mathbf{d}| = d$. Dado que estos coeficientes pueden considerarse como matrices de transformación ([49], [36]), en general una traslación arbitraria consistirá del operador con sus elementos completos (distintos de cero). En este punto resulta conveniente realizar una traslación a lo largo del eje z , ya que los operadores para este tipo de transformación contienen muchos ceros en sus elementos [49]. En el caso de una traslación de este estilo se tiene una simetría axial y se elimina la dependencia de l en los coeficientes: $C_{n,n'}^{m,l} = C_{n,n'}^m$ [35],

$$\mathcal{R}_n^m(\mathbf{r}) = \sum_{n'=0}^{\infty} C_{n,n'}^m j_{n'}(kr') Y_{n'}^l(\theta', \varphi') \quad (3.45)$$

De la ecuación 3.17 es posible inferir entonces que los coeficientes de forma del haz A_n^m para una nueva posición axial en un sistema E' son [35]:

$$\tilde{A}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} C_{n',n}^m A_{n'}^m \quad (3.46)$$

Con esto tenemos la información del haz para una nueva posición de la esfera en una base local centrada en el origen.

La situación es análoga con las rotaciones, existen maneras de conocer una expansión en serie en un sistema rotado cuyo origen coincida con el sistema original mediante el uso de los símbolos de Wigner o los coeficientes de Clebsch-Gordan, pero estos métodos son relativamente costosos de calcular [50]. De acuerdo con [36] una transformación de los armónicos esféricos debido a una rotación entre sistemas que comparten el origen de coordenadas viene dada por

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-n}^n D_n^{m,m'}(\mathbf{Q}) Y_n^{m'}(\theta', \varphi'). \quad (3.47)$$

Los coeficientes $D_n^{m,m'}(\mathbf{Q})$ dependen de la matriz \mathbf{Q} de rotación general definida por las matrices de rotación cartesiana:

$$\mathbf{Q} = Q_x(\alpha) Q_y(\beta) Q_z(\gamma) \quad (3.48)$$

donde α , β y γ son los ángulos de Euler.

A diferencia de una traslación, la magnitud de un vector no cambia por transformaciones de rotación, por lo que podemos expresar los A_n^m en una base rotada de manera más directa,

$$\tilde{A}_n^m = \sum_{m'=-n}^n D_n^{m,m'}(\mathbf{Q}) A_n^{m'}. \quad (3.49)$$

Hasta ahora nos hemos limitado a traslaciones sobre el eje z y rotaciones en sistemas que comparten el mismo origen, sin embargo, es posible obtener expresiones para una posición arbitraria de la esfera únicamente a partir de dos rotaciones y una traslación axial.

El proceso parte de rotar el sistema de referencia original E de tal manera que su eje z sea colineal con el vector que une los sistemas E y E' (el vector d en la Figura 3.3).

Posteriormente, se realiza una traslación axial hasta la posición deseada, y por último una segunda rotación para volver a los ejes colineales con la base original E . (Ver Figura 3.4)

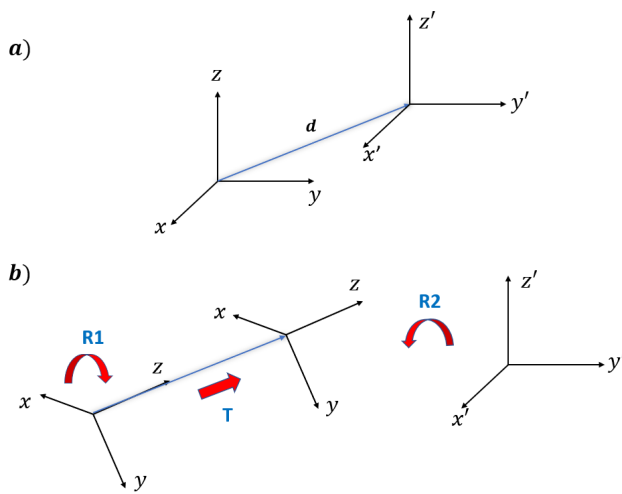


Figura 3.4: Localización de un punto arbitrario. a) Sistema original y posición objetivo. b) Rotación colineal R1 con el vector d , traslación T a una distancia d , rotación R2 a la base original.

Efecto de tamaño en campos periódicos

4

4.1. Fuerzas y simulación del campo acústico

Numerosas investigaciones se han realizado en el campo de la levitación acústica con propósitos en diversas áreas. Los modelos teóricos utilizados en tales estudios suelen considerar distintas aproximaciones respecto al tamaño de la partícula, siendo las más comunes la aproximación de Gor'kov para partículas esféricas cuyo radio a es menor a la longitud de onda, $a \ll \lambda$, o acústica de rayos en donde $a \gg \lambda$. A pesar de que estas aproximaciones son adecuadas para un buen número de aplicaciones y suelen resultar en expresiones simples de manejar, existe una riqueza inexplorada en los efectos existentes en las fuerzas de radiación acústica justamente por estas aproximaciones, debido principalmente a que el tamaño de ciertos objetos de interés no suele encontrarse en los límites de las aproximaciones mencionadas. Es por esta razón que la Teoría Generalizada de Lorenz-Mie se ha elegido para la descripción de los campos incidente y esparcido y por lo tanto, para la caracterización teórica de las fuerzas.

En la adaptación de la GLMT usada en este trabajo hemos utilizado como criterio para la convergencia de la serie de ondas esféricas aquel discutido en la referencia [35], en el cual $N = ka + 3(ka)^{1/3}$, tomando $[N]$, para el truncamiento mínimo de términos en la representación de los A_n^m y R_n^m introducidos en el capítulo anterior.

Como un ejemplo del uso de este modelo, aquí se realiza la simulación numérica de dos tipos de campos: un campo estacionario generado por ondas planas contra-propagantes y un campo enfocado. Al usar una representación armónica, resulta conveniente utilizar como variable principal el potencial ϕ , y de esta manera la presión sonora puede obtenerse mediante la ecuación 2.17. En la Figura 4.2 se muestran tanto el campo total $P_T = P_i + P_{sc}$ como el campo esparcido P_{sc} de las simulaciones utilizando una frecuencia $\nu = 40$ KHz. Considerando como medio de propagación aire a 20°C se ha tomado la velocidad del sonido como $c = 343$ m/s, con lo cual la longitud de onda en este medio es $\lambda = 8.60$ mm. Esta representación es hecha a partir de las ecuaciones 3.17, 3.18 en las cuales se requiere conocer la expansión en ondas esféricas para los A_n^m . Para una onda plana, estas expansiones son bien conocidas y pueden encontrarse en textos como [43], [31], [32]. Cuando este campo se propaga en el eje z la expansión tiene la forma

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n + 1) P_n(\cos \theta), \quad (4.1)$$

4.1 Fuerzas y simulación del campo acústico	32
4.2 Efecto de tamaño no resonante en ondas estacionarias	35
4.3 Efecto de tamaño resonante	45

por lo que al comparar con la ecuación 3.17 los coeficientes de forma resultan

$$A_n^m = A_n = i^n(2n + 1). \quad (4.2)$$

Mientras tanto, la expansión para un haz enfocado ha sido tratada en [37] para un transductor esférico con distancia focal r_0 y apertura a_0 (Figura 4.1). Aquí el potencial ϕ_i es calculado a partir de la integral de Rayleigh

$$\phi_i(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_T} u \frac{e^{ikR}}{R} dS_0, \quad (4.3)$$

donde la integral es calculada sobre la superficie esférica del transductor, $dS_0 = r_0^2 \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0$, u corresponde a la velocidad de vibración de la superficie del transductor y R la distancia entre el punto de observación y un punto sobre tal superficie. El integrando puede ser expandido utilizando la identidad derivada en el texto [51]:

$$\frac{e^{ikr}}{ikr} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) h_n^{(1)}(kr_0) j_n(kr) P_n(\cos \gamma), \quad (4.4)$$

con $\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0$. En el caso a tratar, donde la esfera se encuentra sobre el eje de incidencia del haz, u puede ser definida como la función de la pupila $u = u_0 e^{im'\varphi_0} f(\theta_0)$. En esta función, $e^{im'\varphi}$ introduce una variación de fase mediante m' (el cual es fijo), mientras que $f(\theta_0)$ es una función normalizada a la unidad que, para el caso de arreglos multielementos, o que incluyan variaciones de fase entre puntos de la fuente, ayuda a adaptar un patrón de interferencia deseado en la zona focal [52]. No se ahondará más en esta función, ya que para la situación particular mostrada aquí de un campo simétrico alrededor del eje z generado por un único sistema de transductor cóncavo $f(\theta_0) = 1$ y $m' = 0$. Casos más generales pueden encontrarse en [37], [52]. De esta manera, tras la resolución de la integral se hace una comparación entre el resultado y el potencial de la ecuación 3.17 para la identificación de los coeficientes de forma,

$$A_n^m = (2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} f_n^m(\alpha_0, r_0), \quad (4.5)$$

en donde $f_n^m(\alpha_0, r_0) = (kr_0)^2 h_n^{(1)}(kr_0) I_n^m$, e I_n^m se corresponden a la integral

$$I_n^m = \int_{\pi - \alpha_0}^{\pi} P_n^m(\cos \theta_0) \sin \theta_0 d\theta_0 \quad (4.6)$$

con un ángulo de apertura $\alpha_0 = \arcsin(a_0/r_0)$.

La base para la simulación de un campo deseado recae en la expansión en ondas esféricas e identificación de los coeficientes de forma. Salvo por casos muy específicos es posible encontrar en la literatura expansiones para los campos mayormente utilizados (ondas planas, esféricas[32], [48]

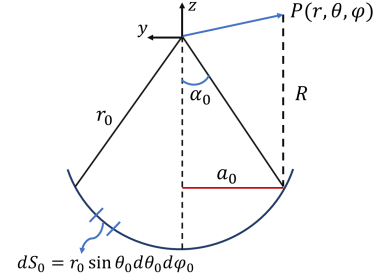


Figura 4.1: Esquema de un transductor cóncavo esférico con ángulo de apertura α_0 . Se considera el origen del sistema coordenado en el foco del transductor y el potencial ϕ_i se calcula en un punto P .

cilíndricas, haces gaussianos, Bessel [48] o pulsos [53] por mencionar algunos).

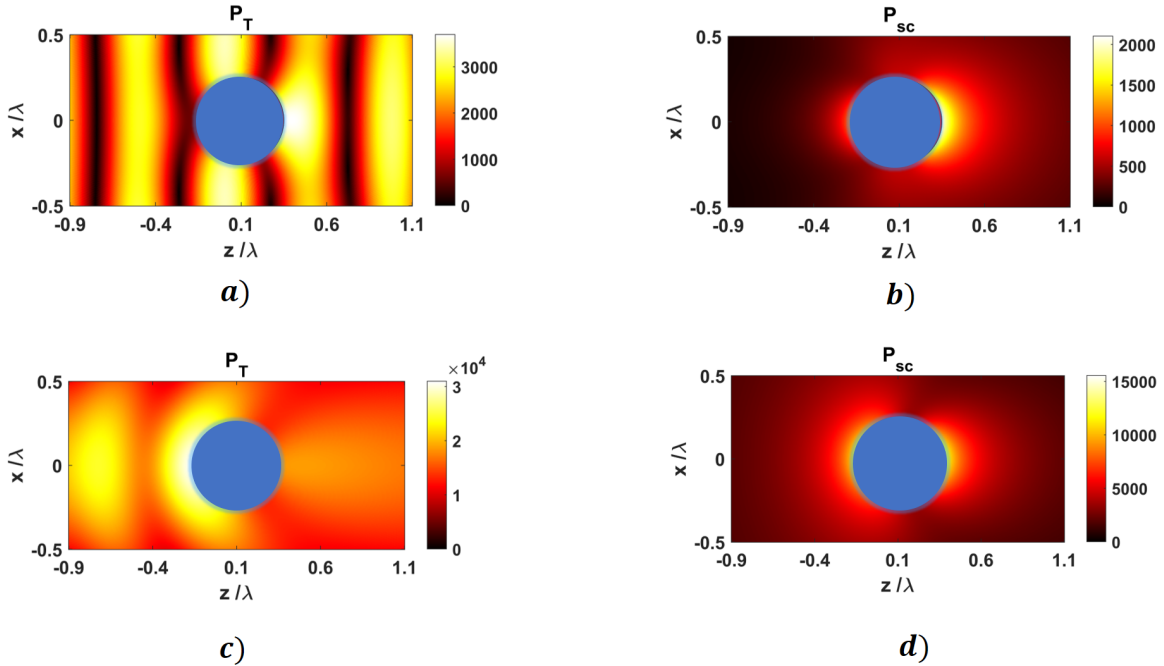


Figura 4.2: Representación de los campos de presión total rms $P_T = P_i + P_{sc}$ y esparcido P_{sc} para una esfera de poliestireno expandido ($\rho = 22 \text{ kg/m}^3$) de radio $a = 0.25\lambda$. En todos los casos la esfera se encuentra sobre el eje en el punto $z = 0.1\lambda$. *a)* Campo P_T estacionario generado por ondas planas contrapropagantes, *b)* Campo esparcido P_{sc} del mismo sistema. *c)* Campo P_T generado por un haz enfocado con apertura $a_0 = 3.2 \text{ cm}$ y distancia focal $r_0 = 6.0 \text{ cm}$, *d)* Campo esparcido P_{sc} para este sistema.

Para la caracterización de las fuerzas se ha optado por un sistema de estudio basado en un campo estacionario generado por interferencia de ondas planas. Esta interferencia se realiza de la manera mostrada en Figura 4.3.

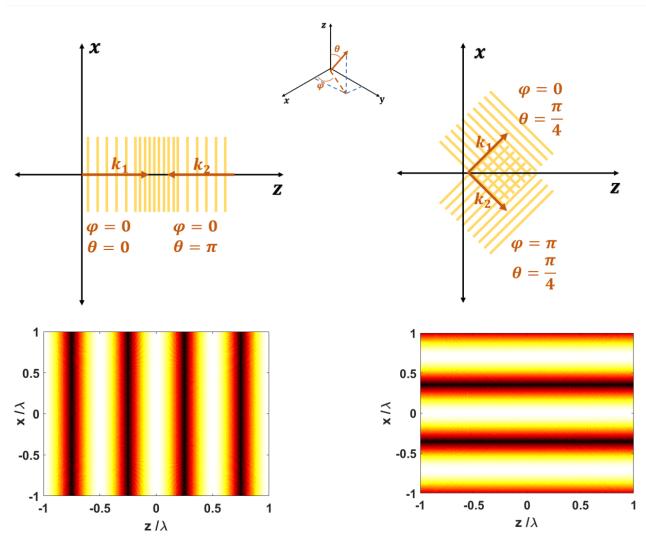


Figura 4.3: Campo con componentes periódicas generado por interferencia de ondas planas. En este esquema se dibujan las direcciones de las ondas usadas para generar el campo incidente: a) Ondas estacionarias en z , b) Ondas oblicuas con ángulo de incidencia $\theta = \pi/4$

Ambos tipos de incidencia se pueden escoger para obtener un gradiente de presión en la dirección z (correspondiente al caso a) y en la dirección x (caso b). Debido a este gradiente de presión, la fuerza en la interferencia del sistema a) exhibe una única componente, $F = F_z \hat{z}$, mientras en el

caso b) existen componentes $F = F_x \hat{x} + F_z \hat{z}$ (siendo x una componente de tipo estacionaria y z correspondiente a una onda progresiva).

En miras de un esquema experimental, si la dirección z se corresponde con un eje vertical, la componente F_z se suma a la fuerza debida a la gravedad que experimentaría una partícula dentro de un campo del tipo a). Bajo esta situación el sistema b) ofrece la posibilidad de soporte lateral mediante la componente F_x .

La fuerza axial F_z en partículas pequeñas ha sido explorado a través del modelo de Gor'kov. Para comparar los resultados de la fuerza entre esta aproximación y con el uso de la GLMT se ha ampliado el rango de tamaños para el cálculo de F_z en una onda para mostrar discrepancias.

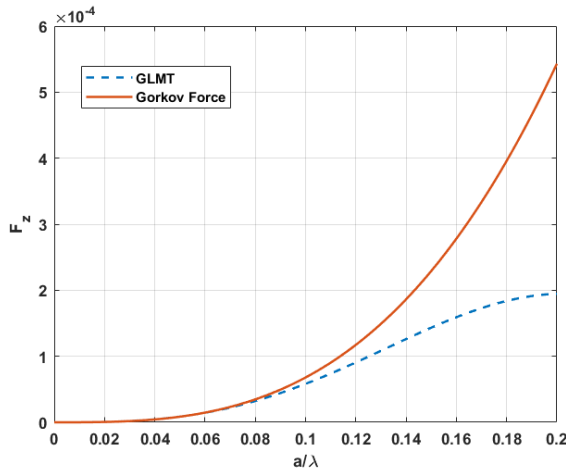


Figura 4.4: Fuerza de radiación axial para una onda estacionaria plana. Se ha calculado la fuerza para esferas de poliestireno

La comparación de las fuerzas entre ambos modelos es razonablemente buena para pequeñas partículas, donde la solución analítica de Gor'kov es válida. Las discrepancias comienzan alrededor de $0.1\lambda = 0.86$ mm donde la aproximación muestra una tendencia a la alta en la fuerza.

4.2. Efecto de tamaño no resonante en ondas estacionarias

A partir de este momento, y a menos que se mencione lo contrario, los parámetros del sistema consistirán de un campo de presión ultrasónico con frecuencia $\nu = 40$ kHz y amplitud inicial $P_0 = 3$ kPa, que se propaga con una velocidad $c_0 = 343$ m/s en aire a temperatura ambiente, con densidad $\rho_0 = 1.20$ kg/m³. Debido a la amplia aplicación y versatilidad que tiene el poliestireno en la levitación acústica se ha escogido este material para el estudio, cuyo valor de densidad es $\rho_p = 22$ kg/m³.

En una trampa acústica, una partícula quedará atrapada en un punto del campo donde las fuerzas converjan. Aprovechando la capacidad de la GLMT para ser usada cuando el tamaño de partícula es arbitrario, se llevó a cabo un cálculo de la fuerza axial F_z para el sistema a) de la Figura 4.3, en un rango de valores del radio a desde 0 a 1.50λ . En la GLMT, la información del campo con respecto al origen de coordenadas, que

de acuerdo a nuestro sistema de referencia coincide con el centro de la partícula esférica, esta determinado por los coeficientes de forma A_n^m . Para calcular la fuerza en una posición fuera del origen se multiplican los coeficientes de forma por las matrices de traslación y rotación, lo cual da como resultado nuevos coeficientes que contienen información respecto a esta nueva posición. Una vez determinada la nueva posición del campo con respecto a la partícula se calculan las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza para una tamaño arbitrario a de la esfera. Al variar solo la posición de de la partícula, sus parámetros como el radio o las propiedades del material no cambian, por lo que es posible cambiar de posición nuevamente y calcular las componentes de la fuerza hasta cubrir una región del espacio deseada. Posteriormente, se escoge un tamaño de partícula a distinto y el proceso general puede repetirse hasta abarcar el rango de tamaños deseado.

En el sistema de ondas planas a utilizar se calcula únicamente la componente F_z en distintas posiciones a lo largo del eje de z de propagación, generando así un mapa de fuerzas $F_z = F(a, z)$ que puede verse en la Figura 4.5c). De este mapa es posible obtener perfiles de la fuerza versus posición (Figura 4.5a)) y fuerza versus radio de partícula (Figura 4.5b)). En la Figura 4.5a) se han escogido dos tamaños de partícula, $a_1 = 0.20\lambda$ y $a_2 = 0.38\lambda$, donde la fuerza tiene un comportamiento periódico a lo largo del eje z pero con signos opuestos. En estos perfiles periódicos las posiciones de atrapamiento pueden encontrarse en los puntos de inflexión de la fuerza, sin embargo solo aquellas posiciones donde la pendiente de la curva sea negativa corresponden a puntos donde la esfera sentirá fuerzas restauradoras que tenderán a regresarla al sitio de fuerza cero, es decir, a puntos de equilibrio estable. En esta gráfica se ha incluido también el campo amplitud de presión rms en el fondo para localizar estos lugares de atrapamiento estable dentro de él.

Lo primero que salta a la vista al comparar los perfiles de fuerza para ambos tamaños de partícula son las distintas posiciones de equilibrio estable que adquieren. Para el caso del radio a_1 , las partículas son atrapadas en los nodos de presión, situación que resulta intuitiva y que además es predicha mediante en aproximaciones, como la de Gor'kov. Con una partícula más grande de radio a_2 , estas posiciones de equilibrio se localizan en los antinodos de presión dando lugar a una situación que no puede ser explicada mediante el modelo de Gor'kov.

Este fenómeno es análogo al llamado *efecto de tamaño* visto en óptica [4], pero el comportamiento de las inversiones de signo mostradas en la gráfica de la Figura 4.5.b tiene una mayor riqueza en los efectos acústicos debido a la aparición de resonancias, las cuales son apreciables como cambios abruptos en la magnitud y signo de la fuerza.

Estas resonancias dependen del tamaño (radio) de la esfera y de la naturaleza mecánica de las ondas, debido a los modos vibracionales que una esfera elástica homogénea puede contener y serán examinadas en la sección 4.3.

Podemos designar como zona no resonante de atrapamiento la comprendida en un intervalo de radio de partícula $a \leq 0.65\lambda$. Además de las posibles posiciones de equilibrio estable, resulta notable la presencia de zonas de fuerza nula, en este caso para valores más específicos.

Dichos tamaños se corresponden a los cruces por ceros en la gráfica de

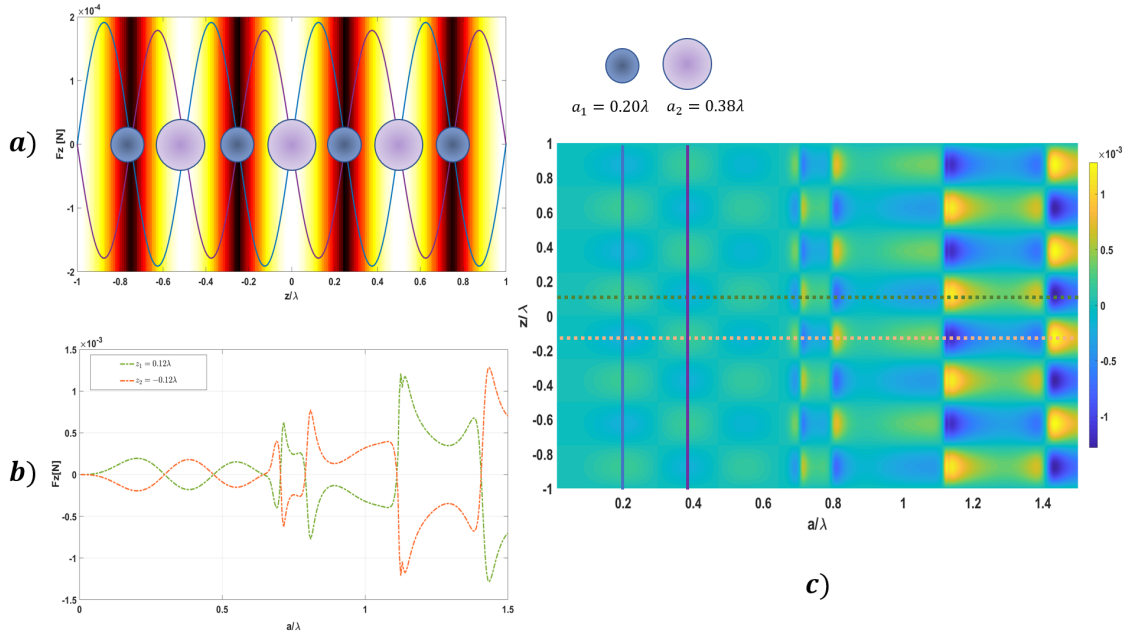


Figura 4.5: Fuerzas en un campo estacionario. *a*) Comportamiento axial de la fuerza para dos esferas de radio $a_1 = 0.20\lambda$ (línea azul) y $a_2 = 0.38\lambda$ (línea morada), con el campo de presión rms de fondo. *b*) Perfil de fuerza en función del tamaño de partícula para dos posiciones fijas dentro del campo, $z_1 = 0.12\lambda$ (línea punteada verde) y $z_2 = -0.12\lambda$ (línea punteada naranja). *c*) Mapa de fuerzas $F(a, z)$, los valores de posición z y tamaño a se encuentran en términos de la longitud de onda: $\lambda = 8.57$ mm

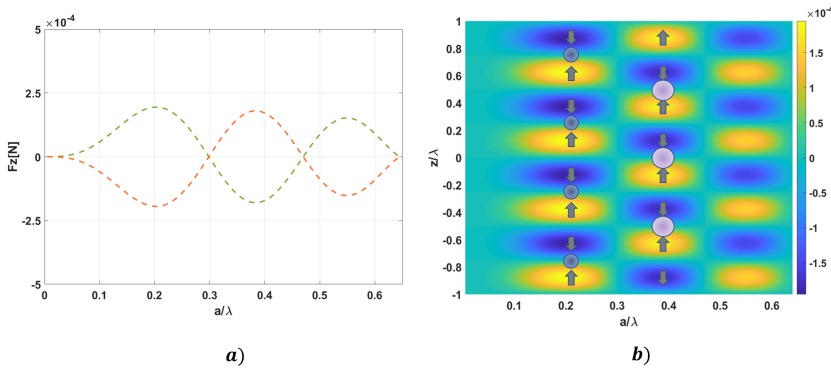


Figura 4.6: *a*) Dependencia de la fuerza axial con el tamaño de partícula, se observan valores para los cuales $F_z = 0$. *b*) Mapa de fuerzas en la zona no resonante. Se incluye la dirección de la fuerza para los dos tamaños de partícula mencionados anteriormente

la Figura 4.5b), que para el caso de la zona no resonante son $a \cong 0.30\lambda$, $a \cong 0.46\lambda$ y $a \cong 0.64\lambda$. Al examinar en conjunto con el mapa de la Figura 4.6, para esferas con tales radios la fuerza axial es nula a lo largo de todo el eje z y por lo tanto no depende de la posición. Si consideramos además que la fuerza transversal (F_x y F_y) es nula debido al uso de onda plana, esferas de tales tamaños no podrán ser atrapadas dentro de un campo estacionario generado por ondas planas contrapropagantes.

Tenemos entonces tres situaciones, esferas de cierto tamaño cuyos puntos de equilibrio estable se encuentran ubicados en los nodos de presión del campo, esferas para cuyo tamaño los puntos de equilibrio se encuentran en antinodos y esferas de tamaños muy específicos que sentirán una fuerza nula en cualquier punto a lo largo del eje principal. Para determinar el origen de estos fenómenos es necesario analizar más detalladamente

la estructura de la presión de radiación en este sistema de campo estacionario.

Cerca de los puntos donde $F(z_0) = 0$, la fuerza de radiación puede ser aproximada por una función que dependa solo de la posición $F(z)$. Si el sistema tiene un solo grado de libertad, como lo es en este caso, la forma del potencial (del cual puede ser derivada la fuerza) cerca de los puntos de equilibrio nos muestra su carácter. Si se tienen más grados de libertad, se toma un criterio considerando los mínimos locales. Al expandir la función $F(z)$ en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio y mantener únicamente los términos a primer orden se tiene la ecuación:

$$F(z) = F(z_0) + \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z_0} (z - z_0), \quad (4.7)$$

y obtenemos una fuerza de tipo ley de Hook, $F(z) = k(z - z_0)$, con $k = \pm (dF/dz)_{z_0}$, es decir, una fuerza cuyo potencial es $\mathcal{E} = k(z - z_0)^2/2$.

Debido a la posibilidad de tener dos situaciones en función del signo de la derivada (Figura 4.7), para caracterizar el punto de equilibrio como estable o inestable es necesario entonces estudiar el origen propio de esta fuerza: los campos de presión P y velocidad de partícula v .



Figura 4.7: Formas posibles del potencial \mathcal{E} . Fuera del punto de equilibrio, la esfera sentirá fuerzas que tenderán a regresarla al punto de equilibrio (esquema izquierdo) o alejarse de él (esquema derecho).

Antes de proceder con el análisis, escogemos una esfera de tamaño arbitrario dentro de la zona no resonante para observar su comportamiento. Ya que el campo incidente lejos de la esfera es perturbado de manera poco significativa comparado con los alrededores (como se puede ver en la Figura 4.2a)), que es donde se esparce el campo, situamos nuestra atención sobre la presión esparcida P_{sc} , el campo de presión total $P_T = P_i + P_{sc}$, y la velocidad de partícula v .

Para una esfera de radio $a = 0.25\lambda$ ubicada en una posición fuera del punto de equilibrio sobre el eje, $z = 0.30\lambda$, la distribución de los campos puede verse en la Figura 4.8.

De acuerdo con la gráfica de la Figura 4.6, una partícula de este tamaño será atrapada en los nodos de presión. Si estas zonas representan posiciones de equilibrio estable, la esfera debe tener la tendencia a desplazarse hacia tal dirección. Para el punto $z = 0.30\lambda$ el nodo más cercano se encuentra a la izquierda, en $z = 0.25\lambda$.

Debido a que en promedio la esfera se alejará de zonas de máxima presión, las gráficas mostradas en la Figura 4.8a) y b) podrían conducir a la noción de que, contrario a lo que se menciona, la tendencia del movimiento de la esfera ocurre hacia la derecha, es decir, al antinodo.

Por otro lado, si las representaciones de P_{sc} y la velocidad de partícula varían de manera armónica con el tiempo en esta posición fija, es notable el signo que ambas van tomando en distintos instantes: observando las imágenes mostradas en la Figura 4.8a) y c), la presión esparcida es positiva a la izquierda de la esfera, mientras tanto, los vectores de la velocidad de partícula apuntan en dirección negativa respecto al eje principal en esta misma zona, lo que genera un desfase en signo a lo largo del tiempo. Esta relación entre ambas cantidades proporciona pistas indicando que la observación individual de P y v no es suficiente.

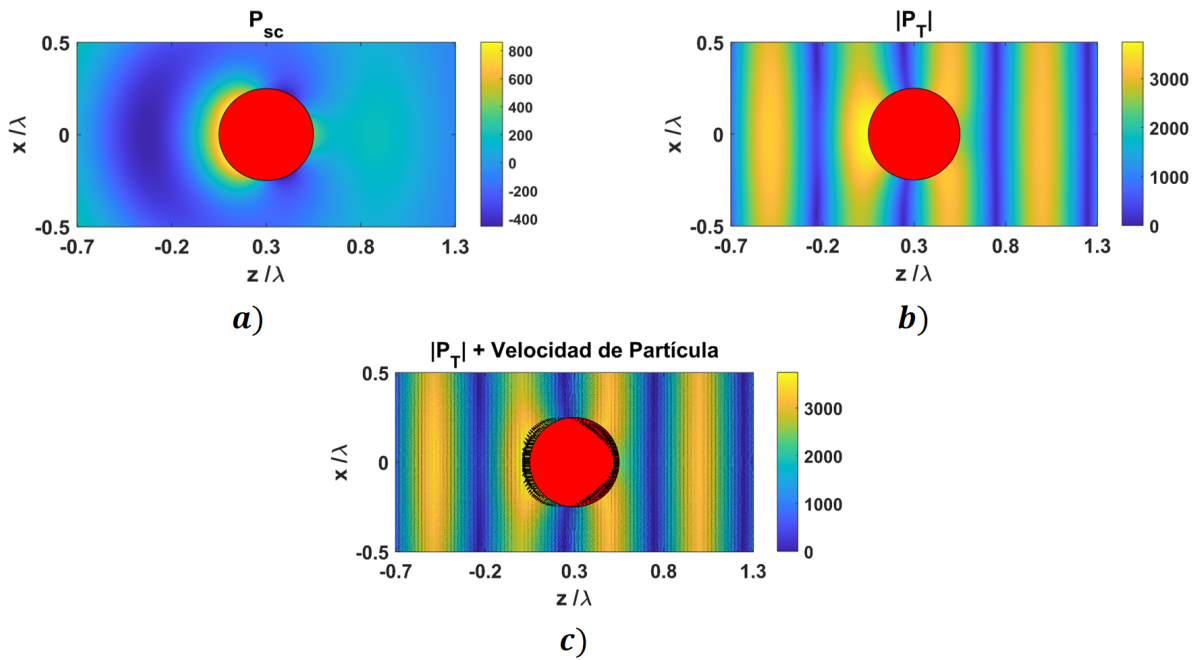


Figura 4.8: *a).* Campo de presión esparcida P_{sc} . En esta posición fija las zonas de presión positiva y negativa que se muestran varían de manera armónica en el tiempo. *b).* Módulo del campo de presión total $|P_T|$. En esta figura, el mapa de colores representa valores positivos únicamente y tanto los nodos como antinodos son observables. *c)* Campo vectorial de velocidades en conjunto con $|P_T|$. Al igual que la presión, la magnitud de la velocidad de partícula es mucho mayor en la periferia de la esfera. Debido a que la magnitud se representa con la longitud de los vectores, su reducido tamaño en la región lejana a la esfera produce un efecto de "sombra".

Mientras tanto, se tiene además la situación de las partículas esféricas que experimentan una fuerza nula. Estas partículas tienen la característica de tener tamaños específicos correspondientes a los ceros de la gráfica en la Figura 4.6. Esto puede verse también como el radio para el cual existe el cambio en el perfil de fuerza, de una partícula que se atrapa en los nodos, a una que se atrapa en los antinodos. A causa a lo específico de este valor del radio, se han revisado los perfiles de fuerza dentro de un intervalo de tamaños que contiene este cambio en el comportamiento de la fuerza, los cuales pueden verse en la Figura 4.9.

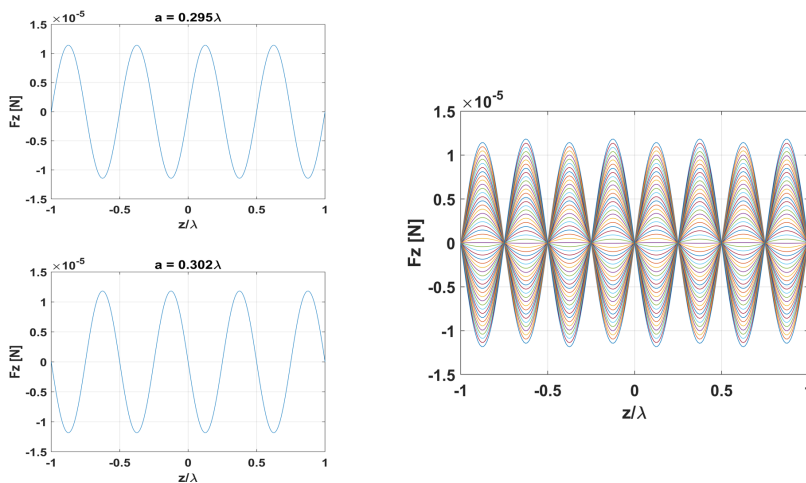


Figura 4.9: Perfiles de fuerza en un pequeño intervalo de tamaños. Cada línea representa el comportamiento de la fuerza axial F_z para un radio de esfera a_i .

En estas gráficas aún se observa el comportamiento senoidal de la fuerza, sin embargo, la magnitud de esta disminuye hasta el punto donde ocurre

el cambio de signo en este perfil de fuerza. Al considerar esta situación, se ha aumentado la precisión en el valor del radio utilizado para estas partículas con el fin de ilustrar la distribución de sus campos.

Observando detalladamente notamos que aún en magnitudes muy pequeñas la fuerza continua mostrando el comportamiento senoidal, pero la magnitud de esta fuerza es tan pequeña que para fines prácticos puede considerarse cero. En vista de esto, la representación de la distribución de los campos en estos tamaños continua presentando comportamientos análogos a los casos vistos anteriormente, ya que tanto la magnitud de los vectores, como la distribución del mapa de colores se encuentran escalados respecto a sus propios valores máximos en una figura.

En la fuerza de radiación acústica, incluso dentro del régimen de partícula pequeña la influencia de los campos de presión y velocidad de partícula combinados determina dicha fuerza, por lo que no es posible separar sus efectos individuales.

Recordemos que, como se menciona en la sección 3.1, la presión de radiación es

$$F_{rad} = - \int_{S_R} \langle \bar{\bar{B}} \rangle \cdot dS_R, \quad (4.8)$$

donde $\bar{\bar{B}}$ es el tensor de flujo de momento, cuyas componentes son $B_{ij} = \rho_0 v_i v_j + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^2 - \rho_0 v_k v_k \right) \delta_{ij}$. Para el caso de ondas planas que se propagan sobre el eje z la velocidad de partícula es simplemente $\mathbf{v} = v \hat{z}$. Sustituyendo en el tensor de flujo de momento se obtiene la siguiente expresión

$$B_{ij} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^2 \delta_{ij} + \rho_0 v^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} P^2 + \rho_0 v^2 \right) \delta_{ij}. \quad (4.9)$$

Ya que en este punto estamos considerando los campos a primer orden, es posible utilizar las ecuaciones de estado a primer orden, $P^1 = (c_0)^2 \rho^1$ y $\rho^1 v^1 = P^1 v^1 / c_0^2$. Así, la componente z del tensor B se simplifica obteniendo

$$\langle \bar{\bar{B}} \rangle \cdot \hat{z} = \left\langle \frac{P^1 v^1}{c_0} \right\rangle = \langle c_0 G_a \rangle, \quad (4.10)$$

siendo esta la única componente que contribuye a la fuerza de radiación. En esta ecuación, $G_a = P^1 v^1 / c_0^2$ es el pseudo momento acústico, análogo al pseudo momento electromagnético mostrado en la sección 3.1. Este puede ser escrito también en términos del vector de Poynting acústico $S_a = P v$. Debido a que la única componente de la fuerza es obtenida a través de la ecuación 4.10, esta puede analizarse mediante el pseudo momento acústico.

Con el pseudo momento G_a como nueva variable, revisamos los tres casos originales (Figura 4.5), $a_1 = 0.20\lambda$, $a_2 = 0.38\lambda$ y $a_3 = 0.30\lambda$. Cabe

destacar que, al representar el pseudo momento como campo vectorial no se muestra directamente la fuerza, ya que tal fuerza resulta de la integración sobre una superficie esférica. A pesar de ello, debido a la simetría azimutal, la envolvente del campo vectorial para G_a ofrece una imagen visual de la dirección resultante, la cual se corresponde con la dirección de la fuerza.

Se ha señalado anteriormente que la determinación en cuanto a la estabilidad del punto de equilibrio, $F(z_0) = 0$, se consigue revisando en las vecindades de z_0 . Con esto en mente, en el conjunto de imágenes de la Figura 4.10 se muestran los campos para varias posiciones z , incluyendo los puntos de equilibrio.

Independientemente de la naturaleza de la posición de equilibrio, en sitios donde la fuerza es cero se observa una simetría de los campos. Esto se muestra para las filas donde $z = 0.15\lambda$ y $z = 0.25\lambda$. Es destacable la distribución del pseudo momento en tales filas de imágenes, donde la simetría da lugar a una resultante nula.

Recordemos que el pseudo momento se construye a partir del producto de los campos P_{sc} y v . Si observamos la fase entre estos campos en el conjunto de figuras, es posible inferir la dirección producida por tal producto, sin embargo cabe destacar que esta dirección corresponde al momento transportado por los campos, mientras que el momento que experimenta la partícula es el negativo de este.

Más aún, si la partícula se encuentra cerca del equilibrio, en las posiciones $z = 0.15\lambda$ y $z = 0.35\lambda$, la envolvente del campo vectorial del pseudo momento muestra una resultante hacia el nodo de presión, es decir, existirá una fuerza de restitución semejante al indicado en la Figura 4.7.

En cambio, la situación es opuesta para la partícula $a = 0.38\lambda$. Aquí en los alrededores de las mismas posiciones del caso anterior la resultante tiende alejarse de los nodos, mientras que es atraída a los antinodos de presión. Este cambio es resultado de la manera en que son esparcidos los campos conforme el tamaño de la esfera aumenta. En contraposición con la partícula pequeña que se atrapa en los nodos, las regiones donde se esparcen con mayor magnitud estos campos cambian al sitio opuesto pero conservado la relación entre fases similar al caso anterior. Esto da lugar a que la fuerza restitutiva cambie de dirección generando que esta partícula se atrape en los antinodos.

Este pseudo momento funciona como una primera herramienta para determinar la tendencia en el desplazamiento de una partícula colocada en cualquier punto dentro de un campo periódico.

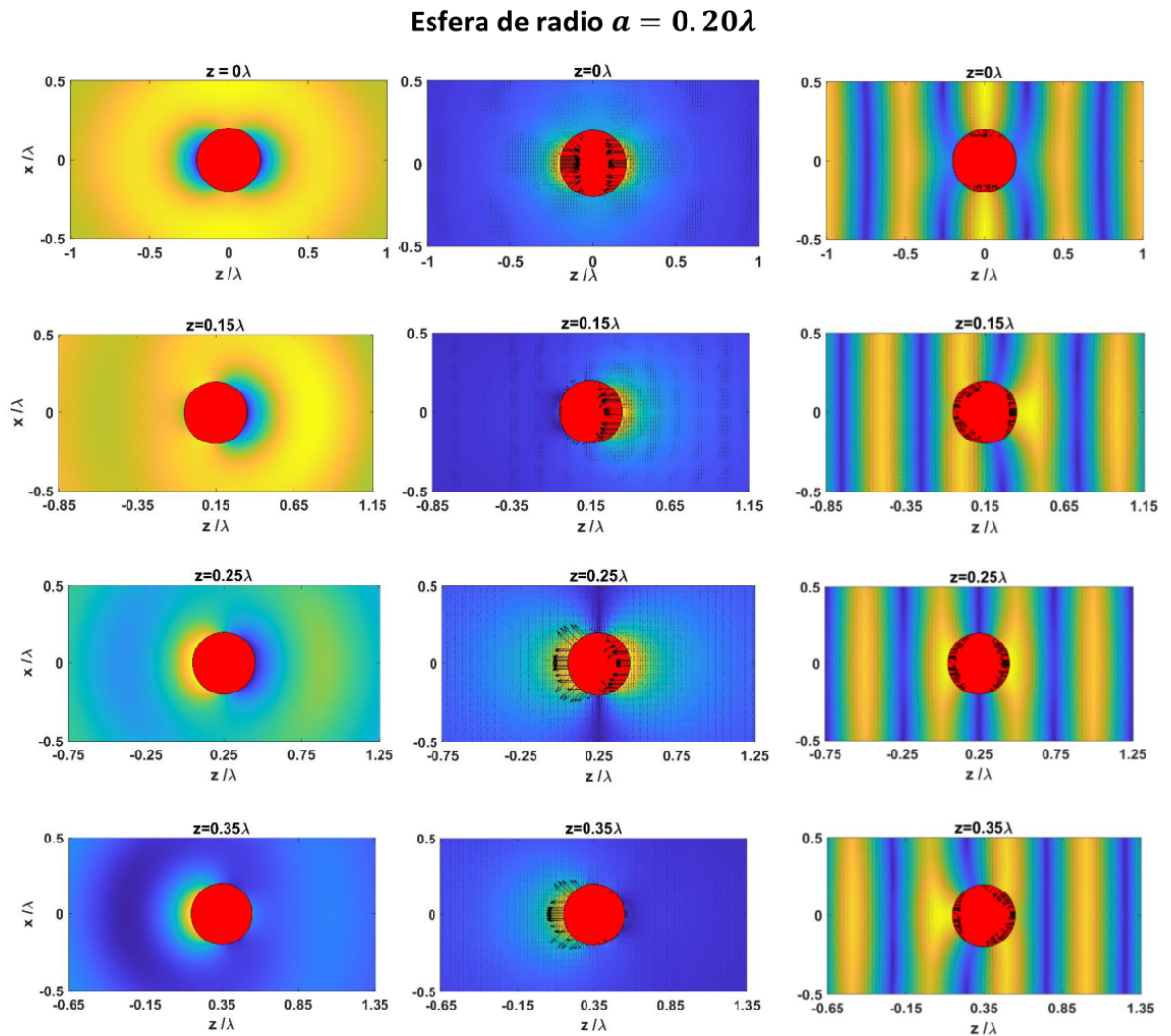


Figura 4.10: Representación de la distribución de los campos P_{sc} , v , y G_a para una partícula que se atrapa en los nodos del campo de presión. En la primera columna observamos nuevamente el campo esparcido P_{sc} en un instante determinado. La segunda columna muestra el campo de velocidad de partícula en conjunto con el campo esparcido. Por último la tercera columna muestra el campo vectorial del pseudo momento acústico G_a .

Esfera de radio $a = 0.38\lambda$

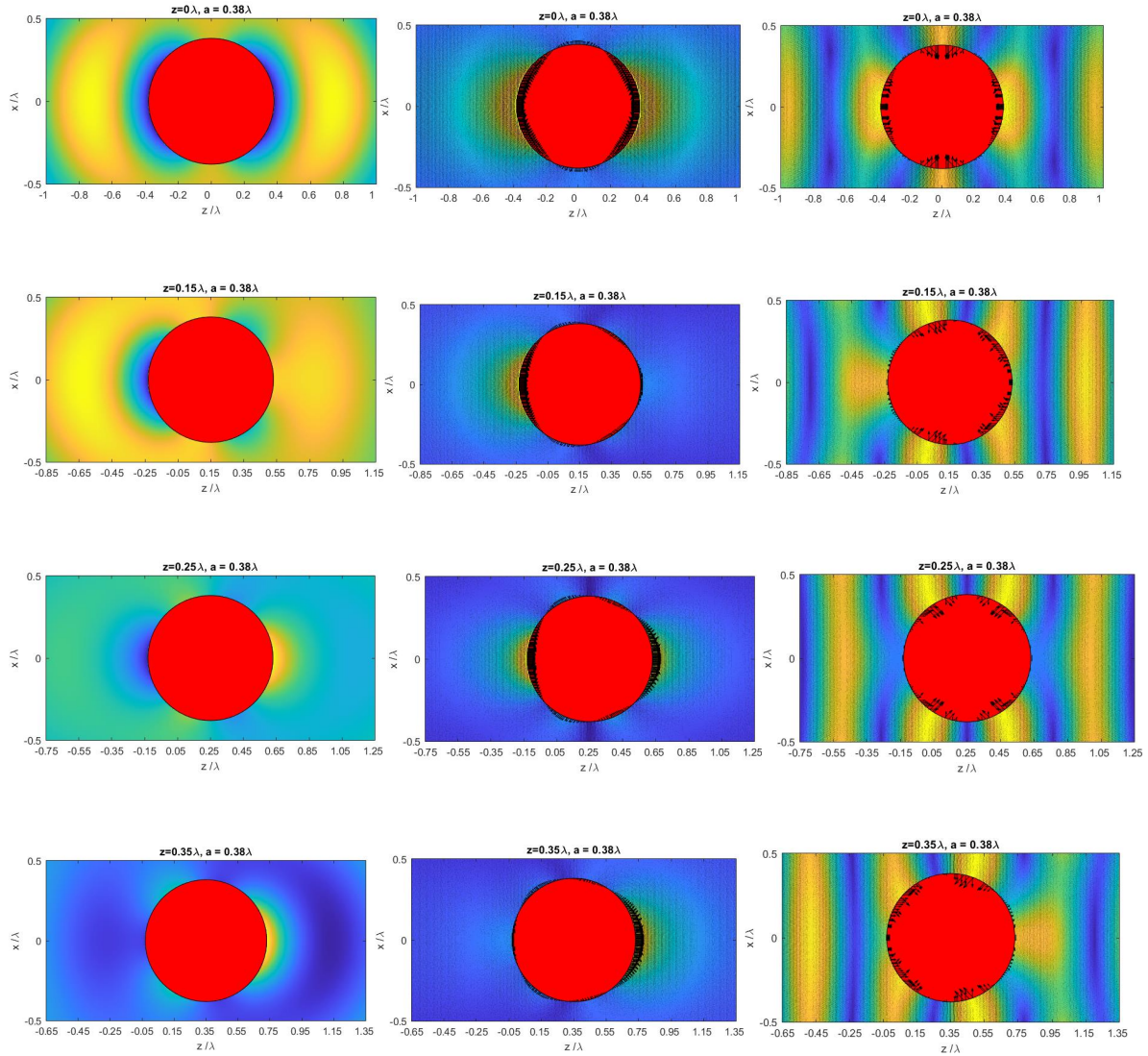


Figura 4.11: Representación de la distribución de los campos P_{sc} , v , y G_a para una partícula que se atrapa en los antinodos del campo de presión. En la primera columna observamos nuevamente el campo esparcido P_{sc} en un instante determinado. La segunda columna muestra el campo de velocidad de partícula en conjunto con el campo esparcido. Por último la tercera columna muestra el campo vectorial del pseudo momento acústico G_a .

Esfera de radio $a = 0.29845\lambda$

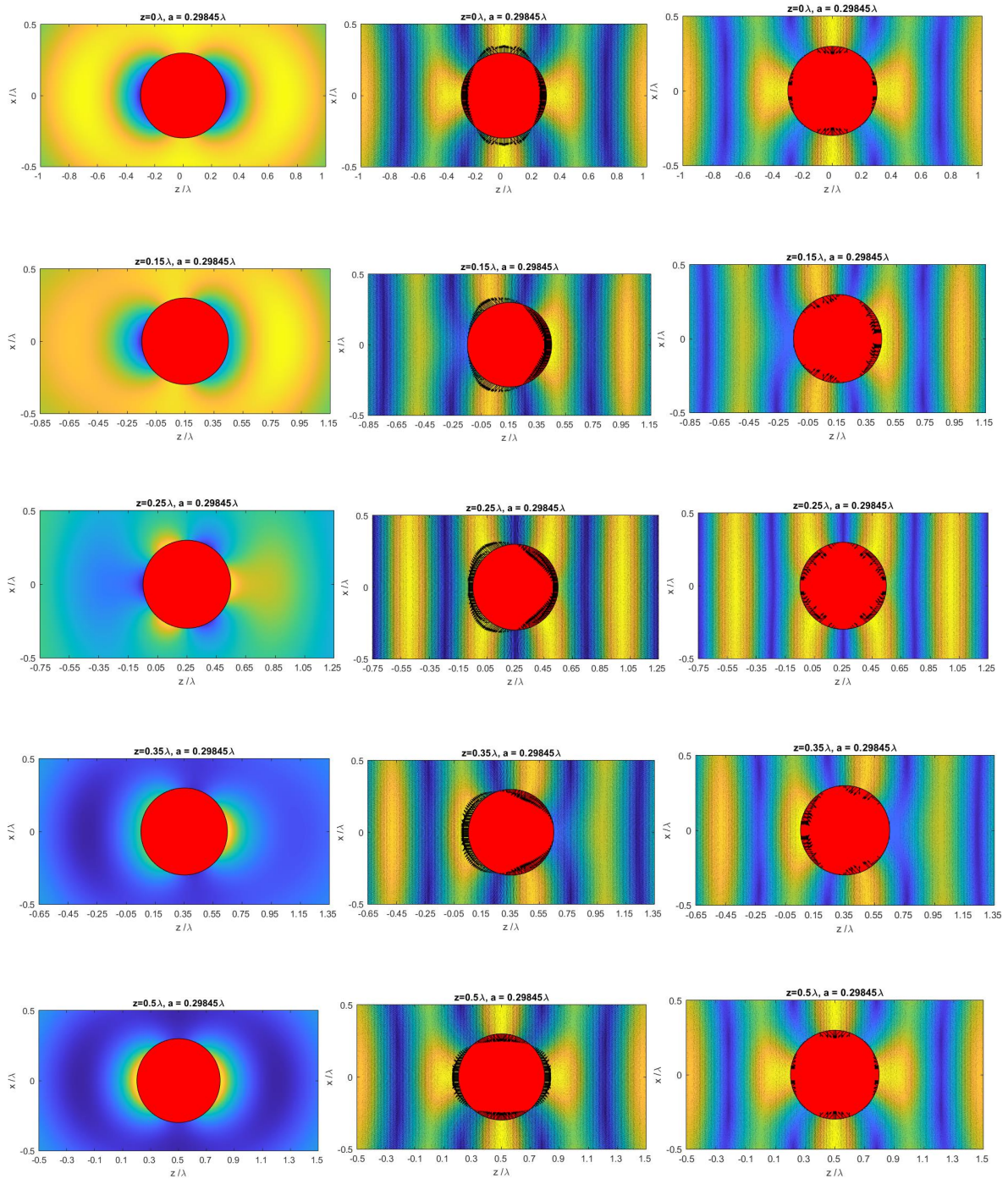


Figura 4.12: Representación de la distribución de los campos P_{sc} , v , y G_a para una partícula que experimenta una fuerza nula a lo largo del eje z . En la primera columna observamos nuevamente el campo esparcido P_{sc} en un instante determinado. La segunda columna muestra el campo de velocidad de partícula en conjunto con el campo esparcido. Por último la tercera columna muestra el campo vectorial del pseudo momento acústico G_a .

4.3. Efecto de tamaño resonante

Cuando una esfera es colocada dentro de una onda de sonido, las perturbaciones de presión y velocidad generan vibraciones mecánicas en el objeto. Si no se consideran otros efectos no radiativos y de transferencia de calor, estas vibraciones son quienes contribuyen al esparcimiento del campo [33]. Cuando el tamaño es pequeño, aparece la dependencia de la fuerza con el radio vista en la sección anterior, pero conforme la partícula esférica alcanza un tamaño lo suficientemente grande los modos vibracionales del cuerpo comienzan a excitarse. En la sección 2.2 del capítulo 2 se hizo una revisión de las frecuencias para estos modos vibracionales, los cuales dependen del radio de la esfera a , y de velocidad del sonido en el material incluido en los números de onda longitudinal y transversal k_l y k_t . Si llegado a un cierto tamaño es posible excitar uno de estos modos, la aparición de una resonancia se hace notar mediante los cambios abruptos en la fuerza. El sistema utilizado consiste de ondas planas contrapropagantes a una frecuencia de $\nu = 40$ kHz, si los cambios abruptos en la fuerza efectivamente representan resonancias mecánicas del objeto, es de esperar que estas deban presentarse si la esfera es colocada dentro una onda plana viajera a la misma frecuencia. En la Figura 4.13 se han comparado los perfiles de fuerza normalizados del sistema estacionario y el de una onda viajera para los mismos tipos de partículas. Lo más notorio es la coincidencia entre los picos de fuerza en la onda viajera, y los cambios abruptos presentes en el campo estacionario. Esta coincidencia hace posible identificar el radio para el cual ocurren estos aumentos en la fuerza.

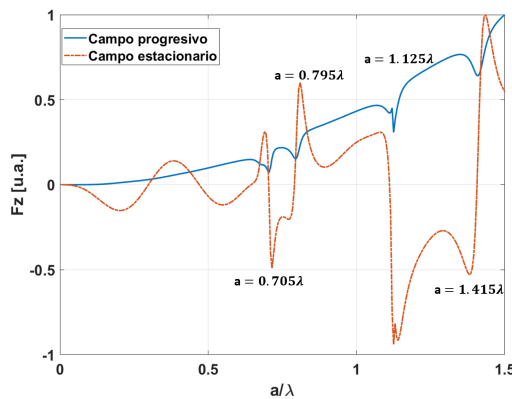


Figura 4.13: Comparación del comportamiento de la fuerza axial en dos campos. Se aprecian las resonancias en el campo progresivo y su correspondencia con el estacionario. La magnitud de la fuerza se encuentra en unidades arbitrarias

Revisando el cálculo de los modos vibracionales en la esfera elástica de Sato y Usami, podemos utilizar las frecuencias reducidas $\xi = ak_l$ y $\eta = ak_t$, para calcular los primeros 5 valores de las frecuencias esféricas en para cada tamaño.

l	$a = 0.705\lambda$	$a = 0.795\lambda$	$a = 1.125\lambda$	$a = 1.41\lambda$
1	40.65	35.87	25.41	20.17
2	45.99	40.58	28.75	22.82
3	64.54	56.94	40.33	32.03
4	81.01	71.47	50.63	40.20

Cuadro 4.1: Frecuencias en kHz de los primeros cuatro modos esféricos l , para los radios de esfera correspondientes a las resonancias de la Figura 4.13.

De acuerdo a la tabla anterior, la frecuencia con la cual se ha trabajado excita los modos sucesivos, $n = 1, l = 1, 2, 3, 4$.

Existe entonces esta correspondencia para los modos de vibración libre en una esfera elástica, sin embargo, existe un inconveniente cuando el tamaño de la partícula esférica comienza a crecer. A pesar de que el poliestireno expandido usado en estas simulaciones tiene una baja densidad, si se desea que las fuerzas de radiación compensen el propio peso de la partícula para tener una condición de levitación, es necesario añadirlo como una fuerza adicional a las fuerzas acústicas. Si la dirección z se toma en el eje vertical el efecto del peso se considera como una fuerza en dirección negativa que se calcula para cada valor del radio a utilizando la densidad del poliestireno ρ_p y la gravedad mediante la ecuación $W = 4(\pi a^3 \rho_p g)/3$, con g la aceleración debida a la gravedad. En la figura Figura 4.14 se muestra esta fuerza considerando el peso de la partícula.

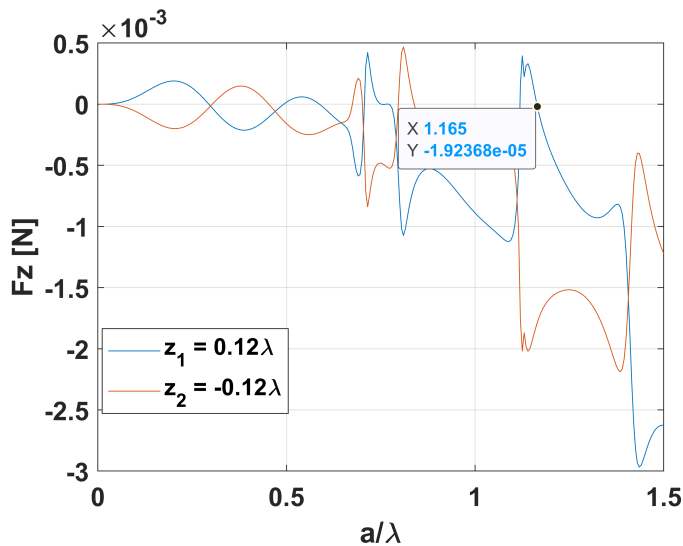


Figura 4.14: Perfil de la fuerza axial considerando el peso de las partículas esféricas para dos posiciones en el campo z_1 y z_2 . Se observa el descenso gradual en la magnitud de la fuerza hasta el punto en que no es posible mantener suspendidas partículas de un radio mayor $a=1.16\lambda$.

En esta gráfica se observa que existe un punto $a = 1.16$ a partir del cual la fuerza total es negativa, y por lo tanto partículas de tamaños mayores a este no podrán mantenerse suspendidas. Esto muestra un gran obstáculo para observar de manera experimental las resonancias. Ya que la fuerza de radiación es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud inicial ϕ_0 (ecuación 3.37), que a su vez es directamente proporcional al cuadrado de la presión inicial P_0 (ecuación 2.17), una manera de compensar el peso las partículas es incrementar esta presión inicial, aunque esto supondría un gasto energético mucho mayor. Otro método consiste en cambiar por un sistema de haces enfocados, ya que se ha demostrado en [28] que el aumento en la densidad de energía implica fuerzas con un orden de magnitud mayor al caso de ondas planas.

A lo largo de este trabajo se ha realizado un estudio sobre levitación producto de las fuerzas de radiación acústicas, que se manifiestan como una fuerza no nula ejercida por los campos sobre las partículas, revelando aspectos no explorados en investigaciones previas sobre el tema. Para llevar a cabo esta tarea, se comenzó examinando la naturaleza mecánica de las ondas acústicas, recapitulando las bases teóricas en cuanto a aspectos de propagación de ondas acústicas en fluidos y vibraciones mecánicas se refiere. Tales conceptos fueron revisados en el capítulo 2, donde la conexión entre las variables físicas involucradas ha llevado a la conservación del momento lineal transportado por las ondas, concepto que forma el núcleo central para un desarrollo de la fuerza de radiación acústica.

Entrando más a detalle con la propia fuerza de radiación, en el capítulo 3 se estableció la ecuación base para su cálculo (ecuación 3.13), y la metodología para resolverla. Una manera de calcular la fuerza de radiación sobre un objeto suele ser resolviendo numéricamente la integral de la fuerza, pero este método presenta el inconveniente de estar restringido para sólidos rígidos cuya superficie no varía con el tiempo. Se introdujo entonces la teoría generalizada de Lorenz-Mie para desarrollar una forma de calcular las componentes cartesianas de la fuerza de radiación acústica, utilizando una expansión en ondas esféricas. Durante la sección 3.3, se revisó además un método desarrollado recientemente para calcular esta fuerza de manera eficaz cuando el objeto dispersor se encuentra fuera del origen de coordenadas, haciendo uso de matrices de rotación y traslación.

Teniendo las herramientas necesarias para el estudio de la fuerza de radiación acústica, durante el capítulo 4 se realizó el cálculo numérico en un rango de tamaños de partículas esféricas de poliestireno expandido con radios de 0 a 1.5λ , para un campo generado por dos ondas planas contrapropagantes con frecuencia de 40 kHz en aire en dirección del eje z . El comportamiento de la fuerza, sin considerar aproximaciones en el tamaño de la partícula, trajo consigo dos características importantes: una dependencia de la fuerza con el radio de la partícula, e inversiones abruptas en su signo conforme el tamaño crece. El modelo de Gor'kov, y una noción un tanto intuitiva, indican que los lugares de atrapamiento estable se encontrarán en los nodos de presión del campo. Para tamaños de partícula aproximadamente menores a 0.1λ de radio, los resultados del cálculo están de acuerdo con este comportamiento; Sin embargo, conforme el radio de la esfera crece, esta puede atraparse de manera estable en antinodos de presión del campo. Este efecto ha sido omitido en los diversos estudios anteriores, ya que en su gran mayoría el enfoque ha recaído en diseñar campos para atrapar partículas en los nodos. Con el sistema de onda plana, se ha mostrado también que el efecto de tamaño presenta una manera de optimizar la energía utilizada escogiendo el

tamaño adecuado para el cual la fuerza tiene una magnitud mayor. Para dar una interpretación física al origen de este comportamiento, se utilizó el pseudomomento acústico que incluye el efecto combinado de los campos de presión y velocidad de partícula para explicar la tendencia del desplazamiento de la esfera dentro del campo estacionario. Además, debido a que la fuerza experimenta cambios de signo en función del radio de la esfera, existirán ciertos tamaños muy específicos sobre los cuales habrá una fuerza nula a lo largo del eje principal, razón por la cual no es viable atraparlas en un sistema como el utilizado aquí. Para el segundo efecto, fue posible identificar las inversiones abruptas en el signo de la fuerza, con resonancias consecuencia de la naturaleza mecánica de las ondas. Cuando el tamaño de la partícula crece, se inducen los modos vibracionales de la esfera libre por acción del campo incidente. Como estos modos dependen únicamente del radio de la partícula y de la frecuencia del campo, se hizo una comparación entre una onda viajera de la misma frecuencia y el campo estacionario. Tras esto, se identificaron los tamaños en los cuales ocurren tales resonancias, y se calcularon las primeras cinco frecuencias esferoidales para el armónico $n = 1$, observando que los modos excitados a la frecuencia utilizada son $l = 1, 2, 3, 4$. Por otro lado, el aumento en el tamaño para los cuales aparecen las resonancias implican un aumento en el peso de la partícula, haciendo que su papel sea aún más relevante si se busca que las fuerzas de radiación compensen la fuerza de gravedad.

5.1. Perspectivas a futuro

Los efectos encontrados en el análisis de las fuerzas acústicas muestran una enorme riqueza y un amplio panorama de estudio posible. Las aplicaciones y la investigación a futuro en levitación acústica vislumbran una herramienta para formar la tecnología de procesos sin contacto. A pesar de los recientes avances, aún existen múltiples retos por superar. Por ejemplo, la levitación de materiales cada vez más densos hace necesario considerar maneras de optimizar la energía utilizada. Si en lugar de un campo periódico generado por ondas planas, se consigue enfocar el campo, la energía se concentraría en el foco y es posible mejorar la estabilidad del levitador, permitiendo el uso de esferas de mayor tamaño, líquidos como agua o incluso mercurio. Si se opta por un sistema estacionario de este estilo se conserva la forma periódica del campo, pero ahora, nuevos efectos aparecerían por la existencia de gradientes de presión y velocidad de partícula en la dirección transversal, y por la influencia de parámetros como el radio de curvatura o la apertura numérica. En este trabajo el estudio se hizo tomando en cuenta una esfera elástica en un medio no viscoso. Si bien variables como la temperatura no han sido consideradas de manera explícita, con la idea presentada en este trabajo se podrían generar cálculos para examinar el comportamiento de la fuerza de manera paramétrica, variando las propiedades que se afectan con la temperatura como la densidad del medio o la velocidad del sonido (y por tanto el contraste con las impedancia partícula-medio), pero para tener un mayor entendimiento de como afecta a las fuerzas de radiación es necesario una revisión más exhaustiva de las bases teóricas. Junto a esto, la variación en la velocidad del campo acústico afecta a las resonancias, y con la gran sensibilidad que tiene la fuerza alrededor de estas, hace que

el análisis del contraste en las impedancias sea necesario para observar como afecta al posicionamiento de las partículas en nodos o antinodos de presión para las zonas resonantes. Sin duda, la levitación en aire se esta convirtiendo en un instrumento poderoso para la investigación académica, y posiblemente para el desarrollo en la industria en un futuro, presentando temas de investigación en sí mismos y que abren el panorama para avances en el campo de la manipulación acústica.

Bibliografía

- [1] E. H. Brandt. "Levitation in Physics". En: *Science* 243.4889 (ene. de 1989), págs. 349-355. doi: [10.1126/science.243.4889.349](https://doi.org/10.1126/science.243.4889.349) (vid. pág. 3).
- [2] Hyung-Suk y HanDong-Sung Kim. *Magnetic Levitation*. 1.^a ed. Berlin Heidelberg: Springer, Dordrecht, 2016 (vid. pág. 3).
- [3] Louis Hennet y col. "Aerodynamic levitation and laser heating". En: *The European Physical Journal Special Topics* 196.1 (2011), págs. 151-165 (vid. pág. 3).
- [4] Jan Gieseler y col. "Optical tweezers — from calibration to applications: a tutorial". En: *Advances in Optics and Photonics* 13.1 (mar. de 2021), pág. 74. doi: [10.1364/aop.394888](https://doi.org/10.1364/aop.394888) (vid. págs. 3, 36).
- [5] Andrade M.A.B., Pérez N. y Adamowski J.C. "Review of Progress in Acoustic Levitation". En: *Brazilian Journal of Physics*. 48 (2018), págs. 190-213. doi: [10.1007/s13538-017-0552-6](https://doi.org/10.1007/s13538-017-0552-6) (vid. págs. 3, 4).
- [6] August Kundt. "Ueber eine neue Art akustischer Staubfiguren und über die Anwendung derselben zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern und Gasen". En: *Annalen der Physik und Chemie* 203.4 (1866), págs. 497-523. doi: [10.1002/andp.18662030402](https://doi.org/10.1002/andp.18662030402) (vid. pág. 3).
- [7] Bucks K. y Muller H. "Über einige Beobachtungen an schwingenden Piezoquarzen und ihrem Schallfeld". En: *Zeitschrift für Physik* 84 (1933), págs. 75-86. doi: [10.1007/BF01330275](https://doi.org/10.1007/BF01330275) (vid. pág. 3).
- [8] Mohamed A. Ghanem y col. "Noninvasive acoustic manipulation of objects in a living body". En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 117.29 (2020), págs. 16848-16855. doi: [10.1073/pnas.2001779117](https://doi.org/10.1073/pnas.2001779117) (vid. pág. 3).
- [9] Citsabehsan Devendran y col. "Diffraction-based acoustic manipulation in microchannels enables continuous particle and bacteria focusing". En: *Lab on a Chip* 20 (15 2020), págs. 2674-2688. doi: [10.1039/D0LC00397B](https://doi.org/10.1039/D0LC00397B) (vid. pág. 3).
- [10] R.J.K. Weber, C.J. Benmore y S.K. et al. Tumber. "Acoustic levitation: recent developments and emerging opportunities in biomaterials research." En: *Eur Biophys* 41 (15 2012), págs. 397-403. doi: [10.1007/s00249-011-0767-3](https://doi.org/10.1007/s00249-011-0767-3) (vid. pág. 3).
- [11] Thomas Vasileiou y col. "Toward Contactless Biology: Acoustophoretic DNA Transfection". En: *Scientific Reports* 6.1 (2016). doi: [10.1038/srep20023](https://doi.org/10.1038/srep20023) (vid. pág. 3).
- [12] Duyang Zang y col. "Acoustic levitation of liquid drops: Dynamics, manipulation and phase transitions". En: *Advances in Colloid and Interface Science* 243 (mayo de 2017), págs. 77-85. doi: [10.1016/j.cis.2017.03.003](https://doi.org/10.1016/j.cis.2017.03.003) (vid. pág. 3).
- [13] Ayumu Watanabe, Koji Hasegawa y Yutaka Abe. "Contactless Fluid Manipulation in Air: Droplet Coalescence and Active Mixing by Acoustic Levitation". En: *Scientific Reports* 8.1 (2018). doi: [10.1038/s41598-018-28451-5](https://doi.org/10.1038/s41598-018-28451-5) (vid. pág. 3).
- [14] C. J. Benmore y J. K. R. Weber. "Amorphization of Molecular Liquids of Pharmaceutical Drugs by Acoustic Levitation". En: *Physical Review X* 1.1 (2011). doi: [10.1103/physrevx.1.011004](https://doi.org/10.1103/physrevx.1.011004) (vid. pág. 3).
- [15] Marco A. B. Andrade y col. "Contactless pick-and-place of millimetric objects using inverted near-field acoustic levitation". En: *Applied Physics Letters* 116.5 (2020), pág. 054104. doi: [10.1063/1.5138598](https://doi.org/10.1063/1.5138598) (vid. pág. 3).
- [16] Victor Contreras y col. "Chemical elemental analysis of single acoustic-levitated water droplets by laser-induced breakdown spectroscopy". En: *Opt. Lett.* 43.10 (2018), págs. 2260-2263. doi: [10.1364/OL.43.002260](https://doi.org/10.1364/OL.43.002260) (vid. pág. 3).
- [17] Bruus H. "Acoustofluidics 7: The acoustic radiation force on small particles". En: *Lab on a Chip*. 12 (2012), págs. 1014-1021. doi: [10.1039/c2lc21068a](https://doi.org/10.1039/c2lc21068a) (vid. págs. 3, 24).
- [18] Maria Sundvik y col. "Effects of acoustic levitation on the development of zebrafish, *Danio rerio*, embryos". En: *Scientific Reports* 5.1 (sep. de 2015). doi: [10.1038/srep13596](https://doi.org/10.1038/srep13596) (vid. pág. 4).

- [19] Ryuji Hirayama y col. "A volumetric display for visual, tactile and audio presentation using acoustic trapping". En: *Nature* 575.7782 (2019), págs. 320-323. doi: [10.1038/s41586-019-1739-5](https://doi.org/10.1038/s41586-019-1739-5) (vid. pág. 4).
- [20] Tatsuki Fushimi, Bruce W. Drinkwater y Thomas L. Hill. "What is the ultimate capability of acoustophoretic volumetric displays?" En: *Applied Physics Letters* 116.24 (2020), pág. 244101. doi: [10.1063/5.0008351](https://doi.org/10.1063/5.0008351) (vid. pág. 4).
- [21] Marco A. B. Andrade, Asier Marzo y Julio C. Adamowski. "Acoustic levitation in mid-air: Recent advances, challenges, and future perspectives". En: *Applied Physics Letters* 116.25 (jun. de 2020), pág. 250501. doi: [10.1063/5.0012660](https://doi.org/10.1063/5.0012660) (vid. pág. 4).
- [22] Blackstock D.T. *Fundamentals of Physical Acoustics*. 1.^a ed. USA: Wiley-Interscience, 2000 (vid. págs. 4, 8-13, 23).
- [23] Lord Rayleigh F.R.S. "On the pressure of vibrations". En: *Philosophical Magazine Series* 34.6 (1902), págs. 338-346. doi: [/10.1080/14786440209462769](https://doi.org/10.1080/14786440209462769) (vid. pág. 4).
- [24] King L.V. "On the acoustic radiation pressure on spheres". En: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences* 147.861 (1934), págs. 212-240. doi: [10.1098/rspa.1934.0215](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215) (vid. pág. 4).
- [25] K. Yosioka e Y. Kawasima. "On the acoustic radiation pressure on spheres". En: *Acta Acustica United with Acustica* 5 (1955), págs. 167-173. doi: [10.1098/rspa.1934.0215](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215) (vid. pág. 4).
- [26] Gor'kov L.P. "On the Forces Acting on a Small Particle in an Acoustical Field in an Ideal Fluid." En: *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 140.1 (1961), págs. 88-91 (vid. págs. 4, 22).
- [27] E. H. Brandt. "Suspended by sound". En: *Nature* 413.6855 (oct. de 2001), págs. 474-475. doi: [10.1038/35097192](https://doi.org/10.1038/35097192) (vid. pág. 4).
- [28] Asier Marzo, Adrian Barnes y Bruce W. Drinkwater. "TinyLev: A multi-emitter single-axis acoustic levitator". En: *Review of Scientific Instruments* 88.8 (ago. de 2017), pág. 085105. doi: [10.1063/1.4989995](https://doi.org/10.1063/1.4989995) (vid. págs. 4, 46).
- [29] Asier Marzo y col. "Holographic acoustic elements for manipulation of levitated objects". En: *Nature Communications* 6.1 (oct. de 2015). doi: [10.1038/ncomms9661](https://doi.org/10.1038/ncomms9661) (vid. pág. 4).
- [30] Jackson J.D. *Classical Electrodynamics*. 3.^a ed. Berkeley, USA: John Wiley y Sons, 1999 (vid. págs. 5, 17, 20, 21, 25, 28).
- [31] Gouesbet G. y Gréhan G. *Generalized Lorenz-Mie Theories*. 2.^a ed. Berlin Heidelberg: Springer International Publishing, 2017 (vid. págs. 5, 28, 32).
- [32] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. London, U.K.: John Wiley y Sons, 2007 (vid. págs. 5, 16, 32, 33).
- [33] Baresch D., Thomas J-L. y Marchiano R. "Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere." En: *The Journal of the Acoustical Society of America* 133 (2013), págs. 25-36. doi: [10.1121/1.4770256](https://doi.org/10.1121/1.4770256) (vid. págs. 5, 26-28, 45).
- [34] Matheus Azevedo Silva Pessôa y Antonio Alvaro Ranha Neves. "Acoustic scattering and forces on an arbitrarily sized fluid sphere by a general acoustic field". En: *Journal of Sound and Vibration* 479 (ago. de 2020), pág. 115373. doi: [10.1016/j.jsv.2020.115373](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115373) (vid. pág. 5).
- [35] Baresch D. "Pince Acoustique: Piégeage et manipulation d'un objet par pression de radiation d'une onde progressive". Tesis doct. Université Pierre Et Marie Curie, 2014 (vid. págs. 5, 16, 23, 26, 29, 30, 32).
- [36] Gumerov N. y Duraiswami R. "Recursions for the Computation of Multipole Translation and Rotation Coefficients for the 3-D Helmholtz Equation." En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 25 (2004), págs. 1344-1381. doi: [10.1137/S1064827501399705](https://doi.org/10.1137/S1064827501399705) (vid. págs. 5, 29, 30).
- [37] Baresch D., Thomas J-L. y Marchiano R. "Spherical vortex beams of high radial degree for enhanced single-beam tweezers." En: *Journal of Applied Physics*. 113 (2013), pág. 184901. doi: [10.1063/1.4803078](https://doi.org/10.1063/1.4803078) (vid. págs. 5, 33).
- [38] I. Ricárdez-Vargas y col. "Modulated optical sieve for sorting of polydisperse microparticles". En: *Applied Physics Letters* 88.12 (mar. de 2006), pág. 121116. doi: [10.1063/1.2183357](https://doi.org/10.1063/1.2183357) (vid. pág. 6).

- [39] L. E. Kinsler y col. *Fundamentals of Acoustics*. 4.^a ed. New York, USA: John Wiley y Sons, 2000 (vid. págs. 7, 9-13).
- [40] Currie I.G. *Fundamental Mechanics of Fluids*. 4.^a ed. USA: Taylor y Francis Group, LLC, 2013 (vid. págs. 7-9, 11, 12, 18, 22, 23).
- [41] Samano D.A. y Sen M. *Mecánica de fluidos*. 1.^a ed. CDMX, México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2009 (vid. págs. 8, 18, 22).
- [42] K. Beissner. "The acoustic radiation force in lossless fluids in Eulerian and Lagrangian coordinates". En: *The Journal of the Acoustical Society of America* 103.5 (mayo de 1998), págs. 2321-2332. doi: [10.1121/1.422751](https://doi.org/10.1121/1.422751) (vid. págs. 8, 18, 19).
- [43] E. G. Williams. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. 1.^a ed. London, U.K.: Academic Press, 1999 (vid. págs. 14, 32).
- [44] A. C. Eringen y E. S. Suhubi. *Elastodynamics, Vol. 2. Linear Theory by Eringen*. eng. New York, USA: Academic Press, 1975 (vid. págs. 14-17).
- [45] E. Dieulesaint y D. Royer. *Elastic Waves in Solids, by E. Dieulesaint and D. Royer*. eng. Northampton, England: Springer, 1996 (vid. págs. 14-16).
- [46] Horace Lamb. "On the Vibrations of an Elastic Sphere". En: *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-13.1 (nov. de 1882), págs. 189-212. doi: [10.1112/plms/s1-13.1.189](https://doi.org/10.1112/plms/s1-13.1.189) (vid. págs. 14, 16).
- [47] Thomas J-L., Marchiano R. y Baresch D. "Acoustical and optical radiation pressure and the development of single beam acoustical tweezers." En: *J. Quant. Spectrosc. Radiat Transfer*. 195 (2017), págs. 55-65. doi: [10.1016/j.jqsrt.2017.01.012i](https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2017.01.012i) (vid. pág. 22).
- [48] B. Maheu, G. Gouesbet y G. Gréhan. "A concise presentation of the generalized Lorenz-Mie theory for arbitrary location of the scatterer in an arbitrary incident profile." En: *Journal of Optics* 19.2 (1988), págs. 59-67. doi: [10.1088/0150-536x/19/2/002](https://doi.org/10.1088/0150-536x/19/2/002) (vid. págs. 28, 33, 34).
- [49] T.A. Nieminen y col. "Optical tweezers computational toolbox." En: *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 9 (2007), págs. 196-203. doi: [10.1088/1464-4258/9/8/S12](https://doi.org/10.1088/1464-4258/9/8/S12) (vid. págs. 28-30).
- [50] B. U. Felderhof y R.B. Jones. "Addition theorems for spherical wave solutions of the vector Helmholtz equation." En: *Journal of Mathematical Physics* 28 (1987), págs. 836-839. doi: [10.1063/1.527572](https://doi.org/10.1063/1.527572) (vid. pág. 30).
- [51] Gradshteyn I. y Ryzhik I. *Table of Integrals, Series and Products*. Burlington.: Elsevier, 2007 (vid. pág. 33).
- [52] Chen X. y Apfel R-E. "Radiation force on a spherical object in the field of a focused cylindrical transducer." En: *The Journal of the Acoustical Society of America*. 101 (1997), págs. 2443-2447. doi: [10.1121/1.418539](https://doi.org/10.1121/1.418539) (vid. pág. 33).
- [53] Azizoglu S.A. y Buyukdura S.S. *Spherical Wave Expansion of the Time Domain Free-Space Dyadic Green's Function*. In: *Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics*. Boston, MA.: Springer, 2002 (vid. pág. 34).
- [54] Beissner K. "The Acoustic Radiation Force in Lossless Fluids in Eulerian and Lagrangian Coordinates." En: *The Journal of the Acoustical Society of America* 103 (1998), págs. 2321-2332. doi: [10.1121/1.422751](https://doi.org/10.1121/1.422751).
- [55] Crockett A. y W. Rueckner. "Visualizing sound waves with schlieren optics." En: *American Journal of Physics* 86 (2018), págs. 870-876. doi: [10.1119/1.5042245](https://doi.org/10.1119/1.5042245).
- [56] Jungwoo Lee, Changyang Lee y K Kirk Shung. "Calibration of sound forces in acoustic traps". En: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 57.10 (oct. de 2010), págs. 2305-2310. doi: [10.1109/tuffc.2010.1691](https://doi.org/10.1109/tuffc.2010.1691).
- [57] N. Atalla y S. Glegg. "A Geometrical Acoustics Approach for Calculating the Effects of Flow on Acoustics Scattering". En: *Journal of Sound and Vibration* 171.5 (abr. de 1994), págs. 681-694. doi: [10.1006/jsvi.1994.1149](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1149).
- [58] Allen Crockett y Wolfgang Rueckner. "Visualizing sound waves with schlieren optics". En: *American Journal of Physics* 86.11 (nov. de 2018), págs. 870-876. doi: [10.1119/1.5042245](https://doi.org/10.1119/1.5042245).