



Universidad Nacional Autónoma de México
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
DOCTORADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN

Desarrollo de un sistema de evaluación para superficies con forma libre

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:

M. I. Oliver Huerta Carranza

TUTORES PRINCIPALES:

Dr. Maximino Avendaño alejo, ICAT-UNAM

Dr. José Rufino Díaz Uribe, ICAT-UNAM

COMITE TUTORAL:

Dr. Manuel Campos García, ICAT-UNAM

Dr. Alberto Cordero Dávila, FCFM-BUAP

Ciudad de México, 2021

Diciembre



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Naser Qureshi
Secretario: Dr. Rafael Izazaga Pérez
1^{er}. Vocal: Dr. Maximino Avendaño Alejo
2^{do}. Vocal: Dr. José Rufino Díaz Uribe
3^{er}. Vocal: Dr. Manuel Campos García

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología
ICAT. UNAM

TUTOR DE TESIS

TUTOR DE TESIS

Dr. Maximino Avendaño Alejo

Dr. José Rufino Díaz Uribe

FIRMA

FIRMA

Agradecimientos

A mis padres Antonia Carranza Meza y Felipe Huerta Calixto, que han sido mi apoyo a lo largo de cada etapa de mi vida.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, por abrirme sus puertas para utilizar sus instalaciones para llevar a cabo mi proyecto doctoral.

A los Doctores Manuel Campos García y Maximino Avendaño Alejo que siempre me brindaron su respaldo, principalmente en los momentos ríspidos que se presentaron a lo largo del doctorado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), con CVU: 710606, por apoyarme con la beca para dedicarme de tiempo completo al proyecto doctoral.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo recibido a través de los proyectos A1-S-44220, No. 293411 y No. 299028.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) con número de proyecto IT101218, IT102520 y IN116420.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) con número de proyecto TA100521 por otorgarme la beca para obtención de grado.

Resumen

En este trabajo proponemos dos arreglos para evaluar sistemas ópticos que utilizan superficies con forma libre, las cuales son difíciles de medir debido a su geometría. El primer sistema utiliza el método de pantallas nulas para diseñar y construir un conjunto de objetos sobre una pantalla **LCD** para generar por reflexión una distribución uniforme de círculos en el plano de observación de una cámara **CCD**. Para llevar a cabo la evaluación de la superficie con forma libre con una sola imagen, proponemos colocar la cámara fuera de eje; es decir, que el vector normal al plano en el que se encuentra la pantalla nula y el vector que define el eje óptico de la cámara no sean paralelos entre sí. Desarrollamos un algoritmo numérico para calcular la posición y orientación de la cámara y de la pantalla nula. Una vez hecha la calibración del sistema de medición, hicimos la deducción de las expresiones del trazo exacto de rayos para calcular cada objeto que compone a la pantalla nula.

Para mejorar la evaluación de la superficie bajo prueba, desarrollamos un algoritmo numérico determinista. En esencia el funcionamiento del algoritmo combina las reconstrucciones zonal y modal, para encontrar la nube de puntos que describe a la superficie bajo estudio. La reconstrucción se realiza a lo largo del rayo reflejado. El algoritmo calcula de forma aproximada el vector normal a las superficies reflectoras y a través de cada iteración el cálculo de la normal se va mejorando. Mediante simulaciones numéricas mostramos la factibilidad del algoritmo para reconstruir superficies con forma libre. Además, aplicamos el algoritmo a un caso experimental. La superficie que evaluamos es la cara convexa de una lente progresiva y mostramos cómo calcular los mapas de potencia esférica y cilíndrica.

El segundo arreglo de medición evalúa al sistema óptico como formador de imagen; es decir, reconstruye el frente de onda refractado por el sistema bajo estudio. En lugar de reconstruir las aberraciones del frente de onda, proponemos medir las deformaciones del frente de onda respecto a una referencia no esférica. Lo anterior, nos llevó a deducir una ecuación vectorial que relaciona las direcciones de los rayos reales y de referencia con las deformaciones asociadas al frente de onda bajo estudio. Debido a la versatilidad de la ecuación, decidimos utilizarla en un algoritmo iterativo, en cada iteración proponemos un frente de onda de referencia cada vez más cercano al frente de onda bajo estudio. Al final del proceso iterativo, el frente de onda de referencia puede ser considerado como el frente de onda bajo estudio. Para validar el algoritmo utilizamos una serie de simulaciones numéricas en las que reconstruimos frentes de onda conocidos. En la práctica, aplicamos el algoritmo para recuperar el frente de onda refractado por una lente progresiva. Con la expresión analítica del frente de onda reconstruido podemos calcular la potencia esférica, la potencia cilíndrica y las aberraciones.

Lista de Contenidos

Agradecimientos	III
Resumen	IV
1. Superficies con forma libre	1
1.1. Introducción	1
1.2. Superficies con forma libre	1
1.3. Manufactura de superficies con forma libre	3
1.3.1. Pulido tradicional	3
1.3.2. Producción de superficies usando máquinas de control numérico	4
1.3.3. Moldeado	5
1.4. Pruebas ópticas	6
1.4.1. Pruebas interferométricas	6
1.4.2. Pruebas geométricas	8
1.4.2.1. Las pruebas de Hartmann y de Ronchi	8
1.4.2.2. Sensor Shack-Hartmann	10
1.4.2.3. El método de pantallas nulas	11
2. Evaluación por reflexión	14
2.1. Construcción de la pantalla nula	14
2.2. Calibración del sistema de medición	17
2.2.1. Calibración de la distorsión	17
2.2.2. Posición y orientación de la LCD y del CCD	21
2.2.2.1. Valores para θ , ϕ y \vec{h}	25
2.3. Reconstrucción de la superficie bajo prueba	26
2.3.1. Primera reconstrucción $l = 0$	26
2.3.2. Proceso iterativo $l \geq 0$	29
2.3.3. Proceso iterativo utilizando superficies auxiliares posicionadas a diferentes alturas t_k	30
3. Resultados de la evaluación por reflexión	32
3.1. Cálculo de los patrones imagen	32
3.2. Simulación de los patrones imagen	33
3.3. Resultados experimentales	37
3.3.1. Reconstrucción de la superficie bajo estudio	39

3.3.2. Potencias esférica y cilíndrica	40
4. Evaluación del frente de onda generado por superficies con forma libre	42
4.1. Ecuaciones de Rayces	42
4.2. Errores asociados al uso de las ecuaciones aproximadas de Rayces	44
4.3. Ecuaciones para la deformación del frente de onda	46
5. Cálculo de las deformaciones del frente de onda	50
5.1. Simulación de patrones sobre el plano de observación	50
5.1.1. Cálculo del patrón de manchas brillantes	51
5.1.2. Reconstrucción de las deformaciones Ω	54
5.1.2.1. Primera reconstrucción de Ω ($l = 0$)	55
5.1.2.2. Método iterativo para reconstruir Ω ($l > 0$)	56
5.2. Resultados correspondientes a las simulaciones	57
5.3. Resultados experimentales	60
5.4. Reconstrucción experimental de las deformaciones Ω	63
5.4.1. Distribución de potencia refractiva	64
5.5. Cálculo de las aberraciones del frente de onda	66
Conclusiones	68
Publicaciones indizadas realizadas a lo largo del doctorado	69
Publicaciones no indizadas realizadas a lo largo del doctorado	81
Bibliografía	89

Capítulo 1

Superficies con forma libre

1.1. Introducción

En los últimos años, con el desarrollo tecnológico e industrial, el diseño y la construcción de superficies ópticas mediante máquinas de control numérico ha tenido un repunte importante, como una consecuencia de poder construir casi cualquier sistema óptico se ha comenzado a fabricar superficies con geometrías “exóticas” las cuales no tienen una representación analítica en términos de superficies tradicionales como esferas y cónicas. Estas nuevas superficies son conocidas como superficies con forma libre y sus aplicaciones se han incrementado en los sistemas ópticos formadores de imagen principalmente en la corrección de las aberraciones ópticas asociadas al frente de onda. Mientras que en los sistemas no formadores de imagen las aplicaciones radican en la construcción de sistemas de iluminación y en coleccionar la irradiancia solar para su aprovechamiento.

Una superficie con forma libre puede sustituir la función que desempeñan varias superficies tradicionales en un sistema óptico. Lo anterior implica que el peso y el tamaño del sistema óptico disminuyen; además, la calidad de la imagen producida se mantiene igual o puede incrementarse. Las superficies con forma libre en general no cuentan con simetría de traslación o revolución [1]; por lo tanto, es esencial buscar una adecuada representación analítica de estas superficies para llevar a cabo su diseño y construcción en máquinas de control numérico [2]. Sin embargo, una vez que un sistema óptico ha sido construido, el siguiente paso es verificar que la calidad en la manufactura coincida con el diseño previamente definido. Lo anterior nos lleva al siguiente reto, el cual consiste en diseñar métodos de medición de alta precisión y exactitud para recuperar la forma geométrica de las superficies que componen a cada elemento óptico bajo estudio. En otros casos el objetivo es medir las aberraciones ópticas asociadas al frente de onda generado, por reflexión o transmisión, por el sistema óptico bajo estudio.

1.2. Superficies con forma libre

Una definición para una superficie con forma libre es: “Superficie sin simetría de revolución o traslación”. La definición anterior considera a las superficies toroidales, bicónicas y las secciones cónicas fuera de eje. Sin embargo, para obtener una definición más completa, recientemente se ha optado por considerar el proceso de pulido y desbaste que lleva a cabo una máquina de control numérico para generar una superficie con forma libre [3]. Dicha

definición para una superficie con forma libre es la siguiente: “Superficie sin simetría de revolución o traslación que requiere de tres o más ejes independientes para ser construida”. Un propuesta para representar a una superficie, reflectora o refractora con forma libre es mediante una superficie base más deformaciones. La superficie base puede ser una esfera o una cónica con simetría de revolución. Estas superficies fueron las más utilizadas durante mucho tiempo en los sistemas ópticos ya que son las más fáciles de construir. Las deformaciones se modelan como una combinación lineal de algún conjunto de polinomios $\{\mathcal{F}_i(x, y)\}$. Considerando lo expuesto anteriormente, la expresión analítica para la superficie con forma libre es la siguiente

$$\Phi(x, y) = \underbrace{\frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (k_o + 1)c^2\rho^2}}}_{\text{Superficie base}} + \underbrace{\sum_{i=0}^N C_i \mathcal{F}_i(x, y)}_{\text{Deformaciones}}. \quad (1.1)$$

En la ecuación (1.1), k_o es la constante de conicidad, $r = 1/c$ es el radio de curvatura paraxial; C_i son los coeficientes o la contribución del polinomio \mathcal{F}_i , este último puede pertenecer a algún conjunto de los polinomios como Zernike, Chebyshev, Taylor, Forbes, entre otros [4]. Alternativamente, otra representación para las superficies con forma libre la obtenemos al ignorar el primer término la expresión (1.1); es decir, la representación está, exclusivamente, en términos de algún conjunto de polinomios $\{\mathcal{G}_i\}$ como se muestra a continuación

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^N B_i \mathcal{G}_i(x, y). \quad (1.2)$$

En la expresión (1.2) B_i es el coeficiente o la contribución del polinomio \mathcal{G}_i . Ejemplos de superficies con forma libre están en las lentes progresivas, las cuales han sido utilizadas como una mejor solución para la presbicia que las lentes bifocales corrigen comúnmente. Las primeras lentes permiten observar objetos que están localizados sobre un amplio rango de distancias, las segundas son poco estéticas presentan discontinuidades entre cada zona de visión esto lleva a que resulte incómodo utilizarlas.

En el diseño tradicional de una lente progresiva la cara cóncava es esférica y la cara convexa es una superficie con forma libre. Esta última puede ser representada a través de la expresión (1.2). Que consiste básicamente de cuatro regiones, como se muestra en la figura 1.1(a). Las regiones A y B se utilizan para observar objetos lejanos y cercanos, respectivamente. La región C cuenta con valores pequeños de astigmatismo y conecta a los regiones A y B. Finalmente, la región D está fuertemente afectada por astigmatismo y no se utiliza [5–7]. En la figura 1.1(b) se muestra cómo se deforma un patrón de ajedrez cuando se observa a través de una lente progresiva; es evidente que la amplificación y/o la potencia varía a lo largo de la pupila. Una de las maneras de fabricar a las lentes progresivas es mediante el uso de moldes, los cuales se construyen con máquinas CNC. Otros métodos para manufacturar sistemas ópticos se abordarán en la siguiente sección.

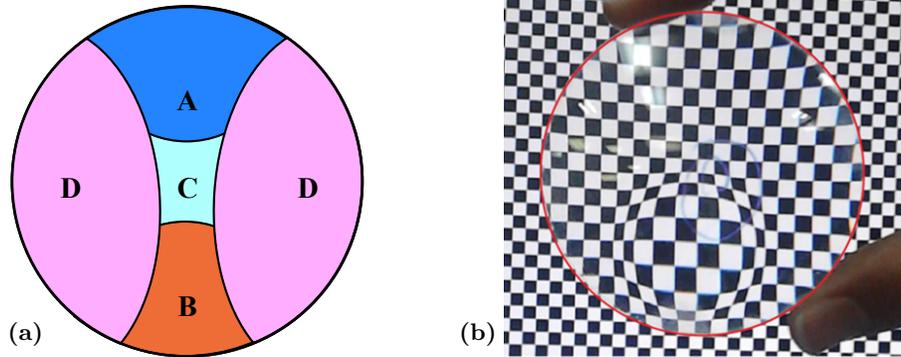


Figura 1.1: (a) Zonas que componen a una lente progresiva. (b) Patrón de ajedrez visto a través de una lente progresiva.

1.3. Manufactura de superficies con forma libre

Los elementos ópticos que funcionan por refracción o reflexión, tradicionalmente, están hechos de vidrio, plástico o materiales cristalinos transparentes. En el caso de los elementos reflectores una de las superficies es recubierta por un material metálico, con la capacidad de reflejar la luz en un cierto rango espectral de longitudes de onda. Uno de los parámetros que modifica la dirección de propagación de la luz, es la forma geométrica de las superficies que componen al sistema óptico refractor o reflector. Por lo tanto, es necesario hacer una revisión breve de los procesos que se llevan a cabo durante la manufactura de superficies ópticas. Algunos de los métodos más utilizados están basados en moldeado, desbaste y pulido de materiales para uso óptico. En las siguientes secciones se abordarán brevemente.

1.3.1. Pulido tradicional

A continuación se describe brevemente el proceso para generar superficies ópticas esféricas y no esféricas. Una parte importante para diseñar un componente óptico es la elección del material. Lo anterior implica conocer de antemano ciertas características como: índices de refracción (número de Abbe, dispersión y trasmisión), densidad, propiedades térmicas, propiedades químicas entre otras [8]. Estas características deberían ser proporcionadas por los compañías que producen materiales ópticos, algunas de estas compañías son Ohara, Schott y Hoya.

Los bloques de material óptico que proporcionan las compañías son como los que se muestran en la figura 1.2(a). Antes de comenzar el proceso de pulido, el bloque se debe cortar y desbastar hasta obtener una geometría (grosor, apertura y forma) cercana a la previamente definida en el diseño [9, 10]. El bloque se fija a un soporte usando cera o con algún otro tipo de pegamento. El soporte se coloca en un eje giratorio al que identificaremos como el eje de rotación de la superficie (ERS), el ángulo de giro es β_2 . En otro eje giratorio se coloca la herramienta de desbaste o pulido, a este eje lo denominaremos como el eje de rotación de la

herramienta (ERH), el ángulo de giro es β_1 .

Mientras está rotando la herramienta de pulido o desbaste, el ángulo α_1 que forma el ERH con el ERS varía tal como se observa en la figura 1.2(b). La forma de la herramienta debe ser opuesta a la superficie que se desea generar, en la figura 1.2(c) la superficie es convexa y la herramienta es cóncava. Durante el proceso de pulido se agrega una serie de abrasivos o algún otro líquido para materiales higroscópicos entre la herramienta y la superficie, como se muestra en la figura 1.2(d). Además, el tamaño de las partículas del abrasivo se disminuye paulatinamente con el objetivo de reducir las rugosidades en la superficie.

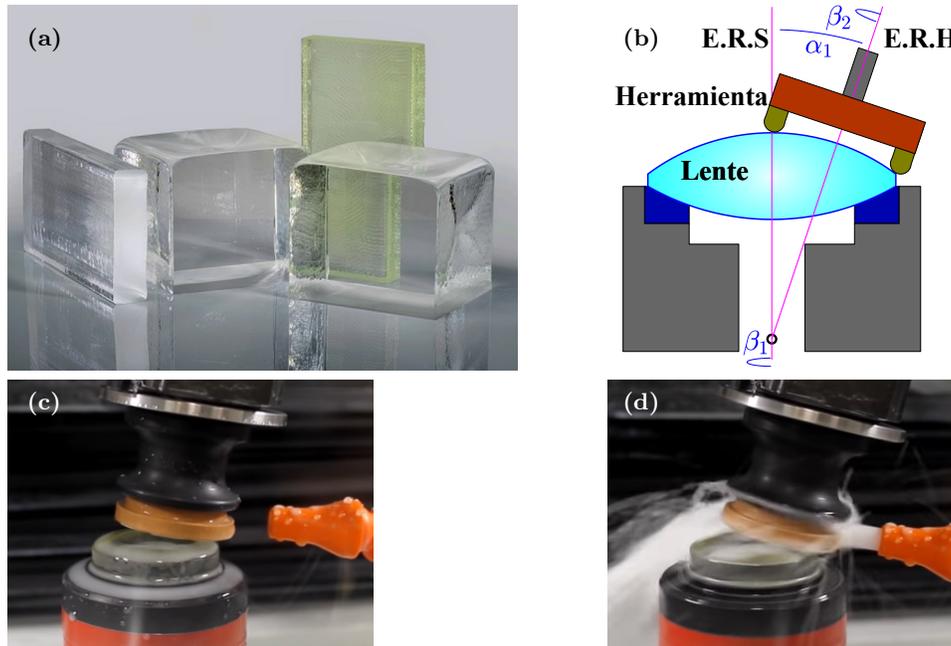


Figura 1.2: (a) Vidrios ópticos [11]. (b) Desbaste tradicional de dos ejes. (c)-(d) Pulido tradicional de una superficie convexa con una máquina de control numérico ePX 200 de la compañía OPTIPRO [12].

1.3.2. Producción de superficies usando máquinas de control numérico

Actualmente las máquinas de control numérico son ampliamente utilizadas para la producción de superficies ópticas. Esto se debe a que los soportes de la herramienta y de la superficie tienen un mayor número de grados de libertad para realizar su movimiento [13]. En el pulido tradicional el número de grados de libertad es 3, como se observa en la figura 1.2(b). En las máquinas de control numérico, el número de grados de libertad pueden llegar a ser 7. Los cuales son: 3 desplazamientos a lo largo de los ejes X, Y y Z, las rotaciones de la herramienta y de la superficie. Además, dos inclinaciones representadas por los ángulos α_2 (rotación alrededor del eje Z como se observa en la figura 1.3(b)) y α_1 (rotación alrededor del eje X como se ilustra en la figura 1.3(c)).

Para comenzar el proceso de construcción de la superficie, previamente, se debe definir

la trayectoria que seguirá la herramienta a lo largo del proceso de desbaste y pulido. La trayectoria puede ser espiral o rectangular. Existe una amplia diversidad de herramientas para realizar el pulido usando máquinas de control numérico. Algunos ejemplos son las herramientas con punta de diamante, banda móvil enrollada en una rueda giratoria, bases cóncavas y convexas de granito entre otras [13, 14].

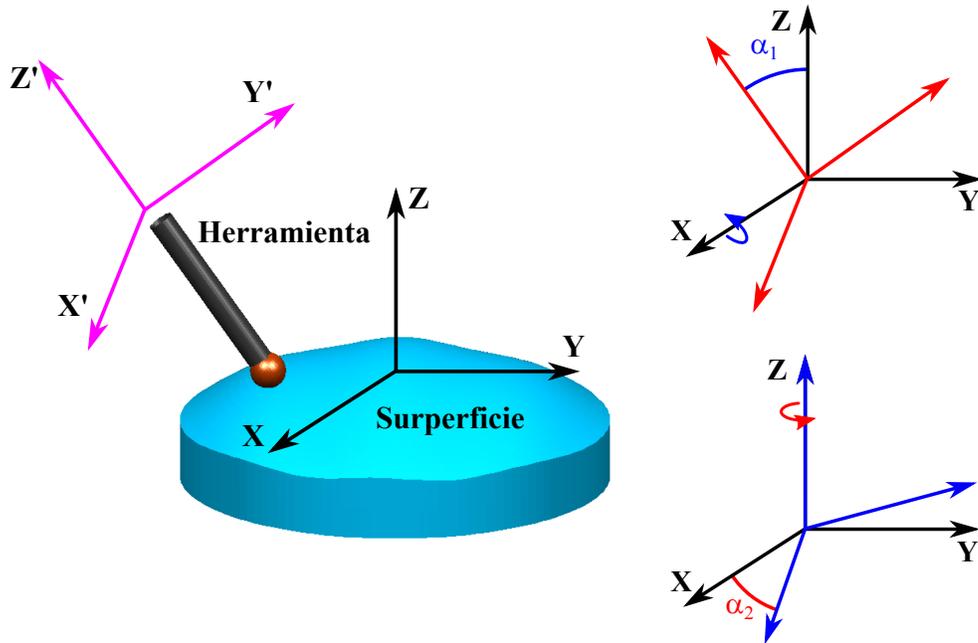


Figura 1.3: Grados de libertad en una máquina de control numérico.

1.3.3. Moldeado

El moldeado es un proceso para generar superficies ópticas, con alta precisión, sin la necesidad de desbastar y pulir el vidrio óptico. La ventaja principal que tiene la generación de superficies ópticas por medio de moldeado es su bajo costo. Además, el tiempo que toma producir una superficie pasa de horas a minutos.

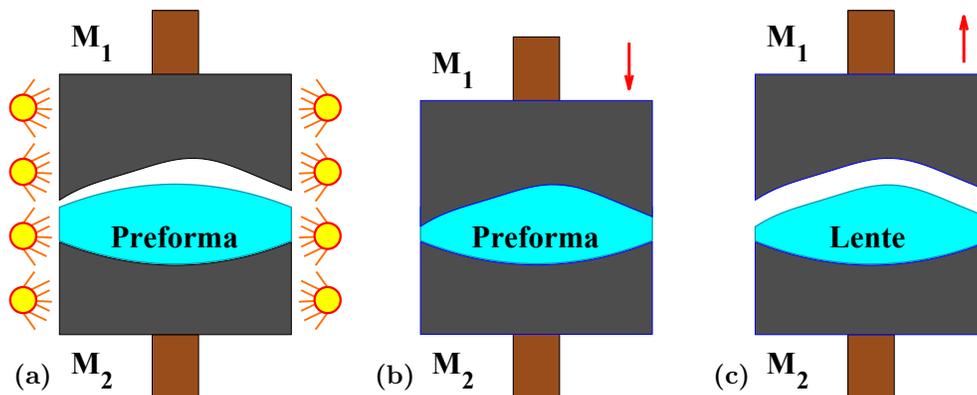


Figura 1.4: (a)-(c) Moldeado de una lente.

El sistema de producción por moldeo consiste de dos moldes, generados con máquinas de control numérico, y una preforma la cual es la forma primaria del diseño de la lente o espejo que se desea obtener [15]. El proceso de moldeo inicia calentando los moldes inferior M_1 y superior M_2 . La preforma de vidrio se coloca en uno de los moldes y se comienza a calentar usando lámparas que emiten en el rango del ultravioleta, como se muestra en la figura (1.4)(a). La temperatura se incrementa hasta que la preforma llega a un estado plástico, en este estado la preforma mantiene su homogeneidad y puede ser fácilmente moldeable. En ese momento los moldes se desplazan hacia la preforma hasta generar la presión suficiente para que la preforma adquiera la forma de los moldes, como se observa en la figura (1.4)(b). Los moldes y la preforma son enfriados lentamente para evitar causarles daño cuando se separan los moldes, como se observa en la figura (1.4)(c).

1.4. Pruebas ópticas

Una vez que se diseña al sistema óptico se procede a construirlo utilizando algunos de los métodos descritos en la sección anterior. Sin embargo, una vez que el sistema óptico ha sido construido es necesario medir en cuánto se desvía del diseño. En las siguientes secciones mostraremos una breve revisión del tipo de pruebas ópticas que existen para evaluar la calidad en la manufactura de sistemas ópticos, dichas pruebas se clasifican en interferométricas y geométricas. Discutiremos las ventajas y limitaciones que hay entre ellas.

1.4.1. Pruebas interferométricas

Las pruebas interferométricas son reconocidas por reconstruir con una alta precisión al frente de onda generado por un sistema óptico. El proceso para evaluar a un sistema óptico consiste en hacer interferir al frente de onda bajo estudio con un frente de onda de referencia conocido, generalmente frentes de onda esféricos y planos. El patrón de interferencia generado se acostumbra capturar con un sensor **CCD** o **CMOS**. Para obtener resultados satisfactorios en la evaluaciones, las discrepancias entre el frente de onda bajo estudio con el de referencia deben ser de algunas longitudes de onda. Cuando se cumple lo anterior el patrón de interferencia está compuesto por un conjunto de franjas cuyo ancho en el sensor debe satisfacer el principio de Nyquist; es decir, el ancho mínimo de las franjas debe ser mayor al doble del tamaño del píxel [16]. Para ilustrar lo anterior se mostrará dos patrones de franjas uno de estos cumple con el principio de Nyquist y el otro patrón que no lo cumple.

Los patrones de franjas se calculan tomando en cuenta que la expresión general para calcular la distribución de irradiancia de dos ondas que interfieren es la siguiente

$$I = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\mathcal{K} \cdot DCO)}_{\text{Término de interferencia}}, \quad (1.3)$$

donde I_1 y I_2 son las irradiancias asociadas a los dos haces que interfieren, \mathcal{K} es el número de onda y $DCCO$ es la diferencia de camino óptico entre los dos frentes de onda que interfieren.

Kingslake [17] propuso una expresión analítica para DCO en términos de las aberraciones primarias o de tercer orden, la cual se escribe de la siguiente manera

$$DCO(x, y) = A + Bx + Cy + D(x^2 + y^2) + E(x^2 + 3y^2) + Fy(x^2 + y^2) + G(x^2 + y^2)^2. \quad (1.4)$$

Los coeficientes que acompañan a cada término en la ecuación (1.4) son la contribución de cada aberración óptica y tienen el siguiente significado:

$$\begin{array}{llll} A = \text{Pistón} & B = \text{Tilt en } x & C = \text{Tilt en } y & D = \text{Defoco} \\ E = \text{Astigmatismo} & F = \text{Coma} & G = \text{Esférica} & \end{array}$$

En la figura 1.5(a) se muestra un patrón de franjas de interferencia que corresponde a un frente de onda afectado por Tilt en x y defoco, la contribución de cada aberración es: $B = 5 \times 10^{-3}$ y $D = 1 \times 10^{-3}$. Mientras que para la figura 1.5(b) el frente de onda está afectado por Tilt en x , Astigmatismo, Coma y Esférica, los valores para los coeficientes son: $B = 0.5 \times 10^{-3}$, $E = -10 \times 10^{-3}$, $F = 2.5 \times 10^{-3}$ y $G = 2.5 \times 10^{-3}$.

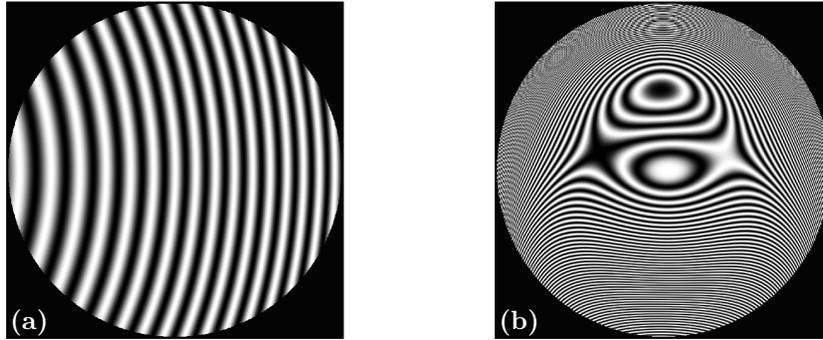


Figura 1.5: Patrones de franjas cuando: (a) la diferencia de camino óptico es pequeño y (b) la diferencia de camino óptico es mucho grande que la longitud de onda.

En el patrón de franjas que se muestra en la figura 1.5(a), son evidentes los puntos en donde comienza y termina cada franja. Sin embargo, en el caso de las franjas que se muestran en la figura 1.5(b) hay regiones cerca de la periferia en las que es complicado identificar a cada franja. Como las franjas no cumplen con el principio de Nyquist, en la figura 1.5(b) se observan patrones de interferencia espurios, este efecto es conocido como aliasing. Lo anterior se puede evitar utilizando a un sistema óptico auxiliar (refractor o reflector) que compense las deformaciones del frente de onda bajo estudio y así obtener un patrón de franjas que cumpla con el principio de Nyquist. El sistema óptico antes mencionado se conoce como compensador, su principal desventaja es que se debe diseñar y fabricar uno para cada sistema bajo estudio, esto puede resultar muy costoso. Además, antes de utilizar los compensadores se debe evaluar su calidad óptica, esto nos lleva al problema inicial. Por lo tanto, las pruebas interferométricas pueden no ser la mejor opción para evaluar la calidad óptica de sistemas ópticos que generan frentes de onda que se desvían fuertemente de la geometría esférica y plana.

1.4.2. Pruebas geométricas

Las pruebas geométricas se basan en medir la dirección de los rayos reflejados o transmitidos para reconstruir la forma del frente de onda o las aberraciones ópticas que deforman al frente de onda. Otro resultado que se puede obtener a partir de las pruebas ópticas geométricas, es la reconstrucción de superficies reflectoras. En este caso se miden las normales a la superficie tomando en cuenta las direcciones de cierto número de rayos reflejados e incidentes y, a través de una integración numérica o un ajuste polinomial, se obtiene la forma de la superficie.

1.4.2.1. Las pruebas de Hartmann y de Ronchi

Las principales pruebas geométricas han sido utilizadas tradicionalmente son las de Hartmann y Ronchi [18–20]. Las deformaciones asociadas a la superficie bajo estudio que es posible medir con estos métodos, pueden llegar a ser desde fracciones de micras hasta algunos centímetros. En la figura 1.6 se muestra una superficie esférica reflectora cóncava, el radio de curvatura paraxial es $r = 420mm$ y el diámetro del espejo es $D = 160mm$. Una fuente puntual, denotada por FP, se coloca cerca del centro de curvatura con un desplazamiento lateral respecto al eje óptico de la superficie S_1 .

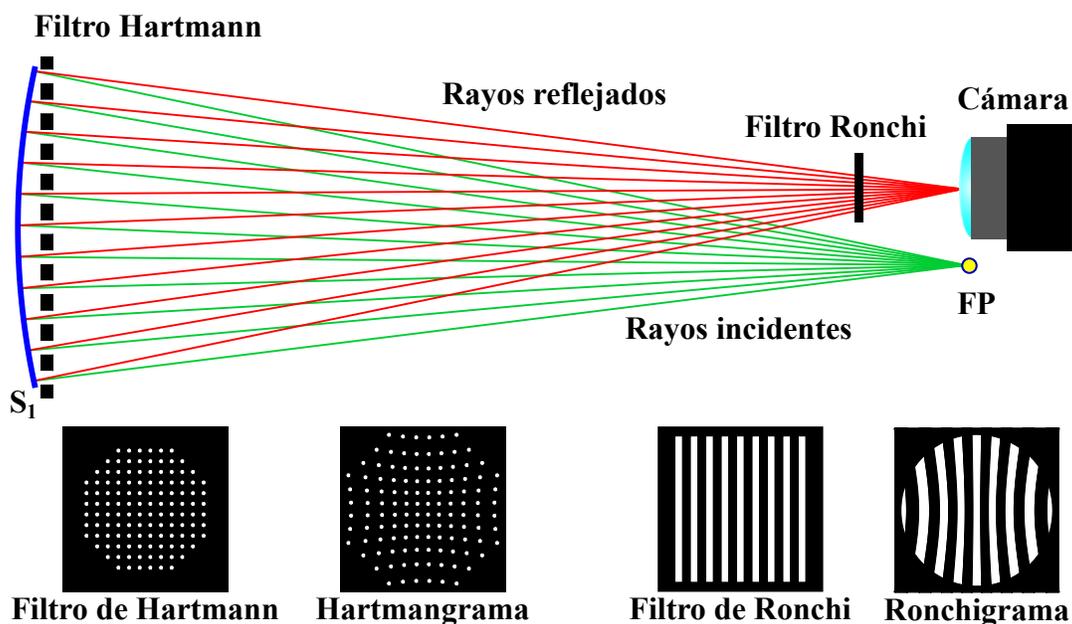


Figura 1.6: Descripción esquemática del funcionamiento de las pruebas de Hartmann y Ronchi.

En la prueba de Hartmann se utiliza un filtro o una pantalla con agujeros y se coloca frente a la superficie, el filtro debe cubrir toda la abertura de la superficie. El rayo incidente y su correspondiente rayo reflejado entran y salen por el mismo agujero. Los rayos reflejados son capturados por una cámara y forman el Hartmangrama, el cual está cerca del punto imagen de la fuente puntual. En la prueba de Ronchi el filtro consiste de una serie de franjas claras y oscuras, la cámara debe enfocar a la superficie del espejo. El filtro se coloca cerca del centro de curvatura como se muestra en la figura 1.6. Los rayos reflejados pasan a través de las

franjas claras y son colectados por la cámara para formar la imagen del Ronchigrama. En la práctica, para realizar la evaluación de la superficie se debe utilizar solo uno de los filtros antes mencionados. En esencia, en la prueba de Hartmann se utiliza la aberración transversal de rayo o las discrepancias entre el Hartmangrama ideal con el Hartmangrama experimental para reconstruir al frente de onda. Las coordenadas del Hartmangrama ideal son (x_i, y_i) y las coordenadas del Hartmangrama deformado son (x_d, y_d) ; entonces, la aberración transversal de rayo está definida como $\vec{T} = (T_x, T_y) = (x_d - x_i, y_d - y_i)$ [19]. En cambio en la prueba de Ronchi, la aberración transversal de rayo se mide sobre el filtro de Ronchi y está dada como $T_x = nd$, donde n es un número entero que se asocia a cada línea en el filtro, y d es el ancho de una de las franjas. En este caso se miden los puntos (x, y) sobre el espejo que tienen asociados esos valores de aberración transversal de rayo [20].

En las pruebas de Hartmann y Ronchi, las derivadas de la aberración del frente de onda están relacionadas con la aberración transversal de rayo mediante las ecuaciones de Rayces, las cuales se escriben de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = \frac{-T_x}{r_e - \mathcal{W}}; \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} = \frac{-T_y}{r_e - \mathcal{W}}, \quad (1.5)$$

donde \mathcal{W} es la aberración del frente de onda y r_e es el radio de la esfera de referencia. La aberración \mathcal{W} se define como la diferencia entre el frente de onda bajo estudio y el frente de onda de referencia a lo largo del rayo real. Para facilitar el cálculo de \mathcal{W} se hace la suposición de que el frente de onda o la superficie bajo estudio son muy parecidos a la esfera de radio r_e . Entonces, se puede hacer la aproximación $\mathcal{W} \ll r_e$, en este caso las ecuaciones de Rayces (ver ecuación (1.5)) adoptan la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = \frac{-T_x}{r_e}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} = \frac{-T_y}{r_e}. \quad (1.6)$$

Las ecuaciones (1.6) resultan en una buena aproximación cuando los frentes de onda bajo estudio se desvían ligeramente de la esfera de referencia de radio r_e ; es decir, cuando la aberración \mathcal{W} es pequeña. Lo anterior se cumple cuando los sistemas ópticos bajo estudio tienen $F/\# > 1$, esta última cantidad, llamada número- F , se define de la siguiente manera

$$\text{Número } F \text{ o } F/\# = \frac{f}{D}, \quad (1.7)$$

donde f es la distancia focal y D es el diámetro de la apertura del sistema óptico. Cuando el frente de onda bajo estudio tiene discrepancias respecto a la geometría esférica pero tiene simetría de revolución; por ejemplo, cuando tiene la geometría de una superficie cónica con coeficientes de deformación, las ecuaciones (1.6) se desvían de los valores correctos en la periferia ya que la aproximación $\mathcal{W} \ll r_e$ no se satisface. Lo anterior es peor cuando el frente de onda no tiene simetría de revolución; por ejemplo, un frente de onda toroidal.

A partir de lo discutido anteriormente, podemos afirmar que las pruebas de Hartmann y Ronchi, en su forma tradicional, solo pueden medir superficies que se desvían ligeramente de

un plano o de una esfera en la zona paraxial. Cuando las superficies bajo estudio cumplen que $F/\# < 1$ y además tienen deformaciones apreciables, los rayos reflejados no se concentran en una región pequeña, esto dificulta coleccionar los rayos para su análisis y la ecuación (1.6) ya no es una buena aproximación, por lo que debe usarse la ecuación (1.5), que sigue siendo exacta. Esto conduce a la dificultad de obtener \mathcal{W} integrando la ecuación (1.5). En la figura 1.7(a) se muestra una fuente puntual FP, de la cual emergen los rayos que inciden sobre una superficie cóncava. Es evidente que los reflejados no logran concentrarse en una región pequeña, la divergencia de los rayos es aún mayor cuando la superficie es convexa como se puede apreciar en la figura 1.7(b). En ambos casos $F/0.576$. Un comportamiento similar se presenta en los rayos refractados o transmitidos que emergen de sistemas ópticos con $F/\# < 1$.

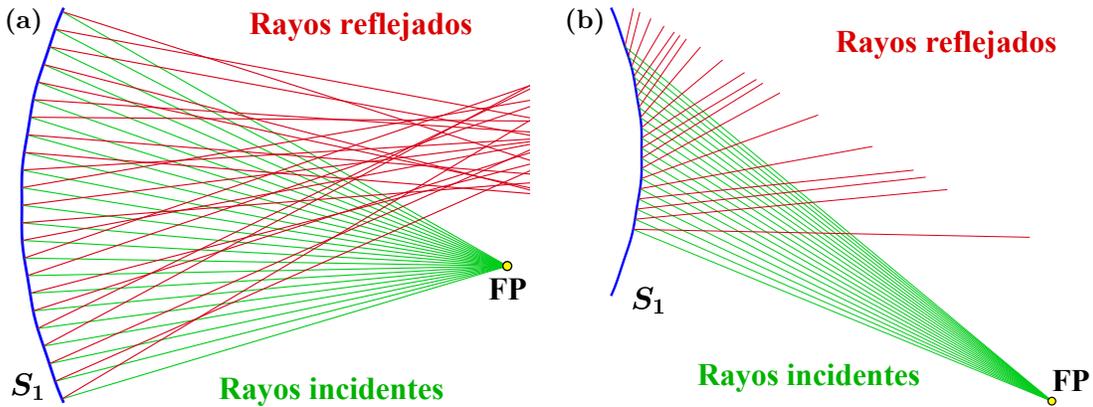


Figura 1.7: (a) Tamaño de la zona focal de un superficie cóncava cuando $F/\# < 1$. (b) Divergencia de los rayos para superficies convexas con $F/\# < 1$.

1.4.2.2. Sensor Shack-Hartmann

Existe una variante de la prueba de Hartmann utilizada para evaluar las aberraciones ópticas asociadas al frente de onda y fue desarrollada por Ben C. Platt y Roland Shack en 1971 [21, 22]. Esta variante consiste en sustituir el conjunto agujeros de la pantalla de Hartmann por un arreglo lentes con una distancia focal conocida f_m . En la figura 1.8(a) se muestra un frente de onda que se desvía de la geometría plana, el frente de onda incide sobre un arreglo de microlentes, la luz que colecta cada microlente converge en un plano a una distancia f_m . En la figura 1.8(b) se muestra el patrón ideal que se forma cuando el frente de onda bajo estudio es un plano y el patrón deformado que genera un frente de onda que se desvía de un plano. La discrepancia entre las coordenadas de los patrones ideal y deformado es la aberración transversal de rayo y se denota por $\vec{T} = (T_x, T_y)$. La reconstrucción del frente de onda mediante el sensor Shack-Hartmann, al igual que en las pruebas de Hartmann y Ronchi, se basa en las ecuaciones de Rayces aproximadas (ver expresiones (1.6)) las cuales adoptan la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = \frac{-T_x}{f_m}, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} = \frac{-T_y}{f_m}. \quad (1.8)$$

Cuando el frente de onda bajo estudio se desvía fuertemente de un plano, las manchas que

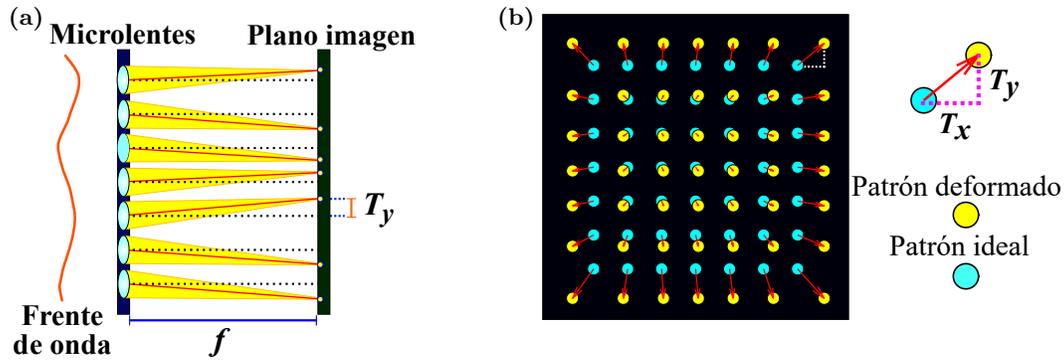


Figura 1.8: (a) Esquema del arreglo de microlentes en un sensor Shack-Hartmann. (b) Patrón de manchas brillantes para un frente de onda plano y un frente de onda deformado.

se forman en el plano imagen pueden traslaparse y se dificulta hacer la correspondencia entre cada mancha brillante y su correspondiente microlente. Una limitante del sensor Shack-Hartmann son las dimensiones del arreglo de microlentes. El tamaño del arreglo de microlentes es del orden de un centímetro; es decir, el sensor Shack-Hartmann no puede evaluar, con una sola medición, a todo el frente de onda generado por sistemas ópticos con aperturas de varios centímetros. Sin embargo, en los últimos años se ha propuesto reconstruir al frente de onda por segmentos y al final se une cada segmento reconstruido para obtener a todo el frente de onda [23, 24].

1.4.2.3. El método de pantallas nulas

A principios de este siglo Rufino Díaz-Urbe y Manuel Campos-García [25], propusieron una técnica que consiste en diseñar un conjunto de líneas y puntos sobre una superficie cilíndrica para que la imagen que forma el sistema óptico bajo estudio sea regular. La técnica es conocida como el método de pantallas nulas. Para diseñar los objetos sobre la superficie cilíndrica se utiliza un trazo inverso de rayos; es decir, los rayos inician su propagación en el plano de observación (sensor CCD o CMOS) en los puntos \vec{P}_c , como se aprecia en la figura 1.9(a). Todos los rayos pasan a través del pinhole de la cámara denotado por \vec{h} , los rayos inciden y se reflejan en los puntos \vec{P} sobre una superficie convexa, la cual en general se denota como superficie de referencia o de diseño. Los rayos reflejados se propagan hasta intersectar a la superficie cilíndrica en los puntos \vec{Q} , como se observa en la figura 1.9(a). A la superficie cilíndrica y a los objetos diseñados se le conoce como pantalla nula, un ejemplo de pantalla nula cilíndrica se muestra en la figura 1.9(b). Cada punto sobre la pantalla nula puede considerarse como una fuente puntual de luz. Un ejemplo del tipo de imágenes que se obtienen experimentalmente sobre el plano de observación, se muestra en la figura 1.9(c). Cualquier desviación de la imagen experimental respecto a la imagen de diseño es un indicativo de defectos de las superficies o de desalineaciones. Posteriormente, en el 2006, Avendaño-Alejo aplicó esta misma idea para probar una sección fuera de eje de un paraboloide [26]; más recientemente, él fue capaz de diseñar pantallas nulas para probar lentes esféricas por transmisión usando la cáustica [27]. Recientemente, Campos-García

utilizó una pantalla nula sobre un cono truncado para diseñar un topógrafo corneal [28, 29]. Además, Aguirre-Aguirre mostró la factibilidad de usar una pantalla nula cilíndrica para medir una superficie con forma libre [30].

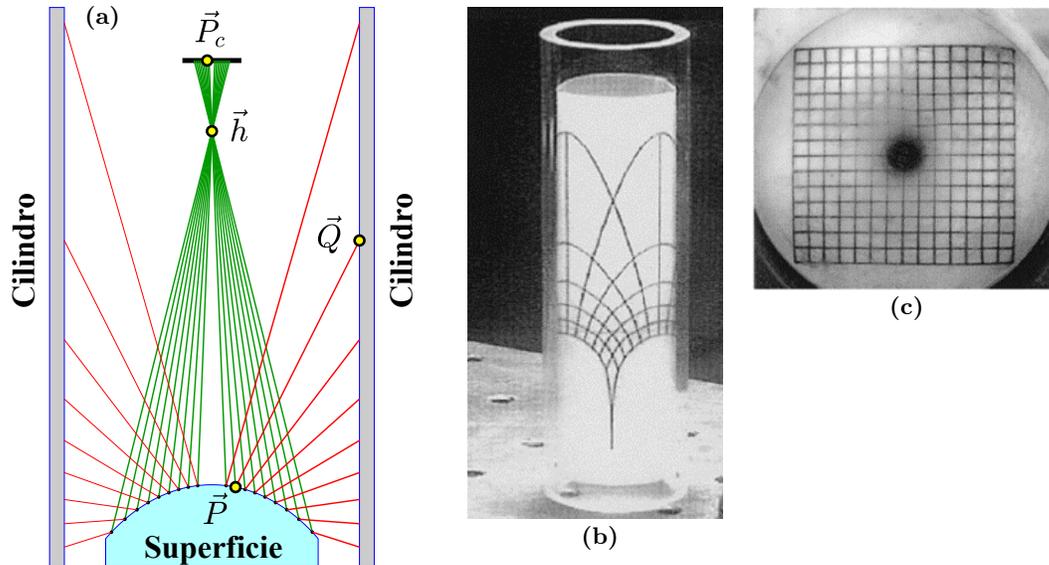


Figura 1.9: (a) Trazo de rayos para generar un pantalla nula cilíndrica. (b) Pantalla nula cilíndrica. (c) Imagen que genera la superficie bajo estudio [25].

En los casos anteriores la pantalla nula era impresa en papel o en acetato. Sin embargo, en los últimos años se ha extendido el uso de pantallas LCDs para desplegar la pantalla nula, lo anterior ha permitido construcción de diferentes patrones para la pantalla nula; además, se ha optimizado el proceso de diseño y se ha incrementado el número de puntos de evaluación. Lo anterior ha permitido implementar el método de pantallas nulas para medir forma de superficies esféricas rápidas ($F/\# < 1$) [31], la superficie anterior de la córnea [32], concentradores solares planos [33, 34] y parabólicos [35], superficies con forma libre [36–39].

La ventaja de una utilizar una pantalla LCD en el método de pantallas nulas es que podemos realizar el diseño de la pantalla nula en forma dinámica, lo anterior evita que ocurran traslapes en la imagen. Además, usar como imagen ideal a un conjunto de círculos en un arreglo cuadrado o radial evita que aparezca el error del rayo oblicuo [40]. Es decir, podemos identificar a qué región de la pantalla nula corresponde cada mancha brillante en la imagen. Lo anterior, ha contribuido a que el método de pantallas nulas sea una opción factible para medir a las superficies con forma libre.

En la primera parte de este trabajo proponemos utilizar el método de pantallas nulas para evaluar por reflexión la forma de una superficie con forma libre. En esta propuesta hemos considerando que el sistema de captura está fuera de eje. Además, para poder muestrear adecuadamente a la superficie con forma libre proponemos desplegar la pantalla nula en una pantalla LCD, ésta última está inclinada respecto al eje Z . La ventaja de utilizar este arreglo

radica en que toda la superficie bajo estudio puede ser evaluada o reconstruida utilizando una sola imagen.

En la segunda parte, proponemos un método para evaluar una lente progresiva como formador de imagen. Es decir, en este caso evaluamos al frente de onda refractado que genera una lente progresiva. Proponemos utilizar una ecuación vectorial para medir las deformaciones del frente de onda respecto a cualquier frente de onda de referencia. Esto evita el error intrínseco que implica el uso de las ecuaciones de Rayces aproximadas (1.6).

Capítulo 2

Evaluación por reflexión

2.1. Construcción de la pantalla nula

En la figura 2.1 se muestra el esquema que describe el funcionamiento del sistema de medición que hemos propuesto para evaluar una superficie con forma libre, un ejemplo de este tipo de superficies es la cara convexa de las lentes progresivas. El sistema de medición cuenta con una cámara **CCD** que colecta los rayos para su análisis. La cámara está fuera de eje y la pantalla nula se despliega en una pantalla **LCD**, la cual está inclinada para garantizar que con una sola imagen se pueda evaluar completamente la forma de la superficie progresiva. En la figura 2.1 se muestra a dos sistemas de ejes XYZ y $X'Y'Z'$ para facilitar el diseño de la pantalla nula. El primero es el sistema de referencia principal su origen O coincide con el vértice de la superficie que se utiliza para diseñar la pantalla nula. El segundo sistema de referencia está sobre el plano del sensor **CCD**; es decir, el plano de detección o imagen coincide con el plano $X'Y'$. Los rayos que logran llegar al **CCD** son aquellos que pasan a través del pinhole cuya posición está dada por $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$; sin embargo, para colectar una mayor cantidad de luz reflejada se utiliza una lente, con distancia focal f_l , que cuenta con un diafragma cuyo diámetro se cierra al mínimo para reducir las aberraciones y la degradación de la imagen. Para simplificar el análisis vamos a modelar a lente de la cámara como una lente delgada.

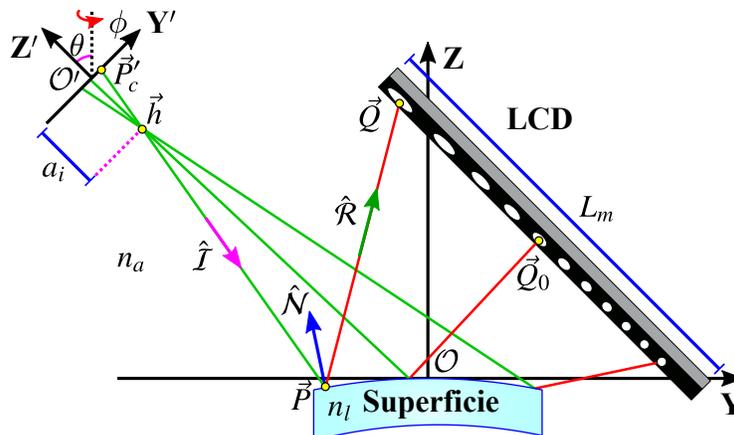


Figura 2.1: Esquema del sistema de medición.

Para diseñar la pantalla nula utilizamos un trazo exacto de rayos. A continuación, resumimos el procedimiento para diseñar la pantalla nula en los siguientes pasos:

1. Elegir el patrón de puntos, líneas u objetos geométricos que se desea obtener en el plano de detección ubicado en el plano $X'Y'$.

2. Seleccionar la expresión analítica $F(x, y, z)$ que describe a la superficie reflectora de diseño o referencia.
3. Construir las direcciones $\hat{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_z)$ de los rayos incidentes utilizando la posición \vec{P}'_c de los puntos imagen y la posición del pinhole $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$. La prolongación del rayo $\hat{\mathcal{I}}$ se interseca con la superficie de diseño. Los puntos de intersección se denotan como $\vec{P} = (x, y, z)$.
4. Calcular la dirección $\hat{\mathcal{N}}$ de la normal a la superficie. Aplicar la ley de la reflexión en el punto \vec{P} para obtener el rayo reflejado $\hat{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z)$ e intersecar su prolongación con el plano que contiene a la pantalla **LCD** para encontrar la distribución de los puntos $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ que componen a la pantalla nula.

Para el diseño de la pantalla nula, lo ideal sería utilizar como superficie de diseño a la superficie bajo prueba; sin embargo, no la conocemos. Por lo tanto, proponemos utilizar una superficie cónica de revolución como superficie de diseño. La imagen que esperamos observar es un arreglo cuadrado de círculos de radio $r_c = 52\mu\text{m}$, utilizamos el centro del círculo como punto de partida de los rayos reflejados $\hat{\mathcal{I}}$. A lo largo de esta sección obtendremos las ecuaciones exactas para realizar el trazo inverso de rayos para diseñar la pantalla nula. La superficie cónica de diseño puede ser escrita de manera implícita como

$$F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2r(z - z_0) + Q(z - z_0)^2 = 0, \quad (2.1)$$

donde (x_0, y_0, z_0) es la posición del vértice, Q se define como $1+k_o$, la constante de conicidad es k_o y r es el radio de curvatura paraxial. El rayo incidente interseca a la superficie en el punto $\vec{P} = (x, y, z)$ y su prolongación está descrita por la siguiente recta

$$\mathcal{L}_P = \left\{ \vec{h} + \xi \hat{\mathcal{I}} \mid \xi \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.2)$$

dónde ξ es la distancia entre la posición del pinhole \vec{h} y el punto de incidencia \vec{P} . Al escribir la recta (2.2) por componentes tenemos que

$$x = h_x + \xi \mathcal{I}_x, \quad (2.3a)$$

$$y = h_y + \xi \mathcal{I}_y, \quad (2.3b)$$

$$z = h_z + \xi \mathcal{I}_z. \quad (2.3c)$$

sustituyendo las expresiones (2.3a), (2.3b) y (2.3c) en la ecuación de la superficie de referencia (2.2), se obtiene una ecuación de segundo grado para ξ que tiene la siguiente estructura

$$A\xi^2 + B\xi + C = 0, \quad (2.4)$$

donde ξ es la incógnita y los coeficientes pueden ser escritos en términos de los parámetros de la superficie de diseño y las componentes de $\hat{\mathcal{I}}$, de la siguiente manera

$$A = Q\mathcal{I}_z^2 + \mathcal{I}_x^2 + \mathcal{I}_y^2, \quad (2.5a)$$

$$B = 2\mathcal{I}_x(h_x - x_0) + 2\mathcal{I}_y(h_y - y_0) + 2\mathcal{I}_z(Qh_z - Qz_0 - r), \quad (2.5b)$$

$$C = h_x^2 + h_y^2 - 2(h_x x_0 - h_y y_0) + Q(h_z^2 - 2h_z z_0 + z_0^2) + x_0^2 + y_0^2 + 2r(z_0 - h_z). \quad (2.5c)$$

El parámetro ξ puede ser calculado mediante la siguiente expresión

$$\xi = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (2.6)$$

Al calcular el parámetro ξ , mediante la ecuación (2.6), y al sustituirlo en las expresiones (2.3a), (2.3b) y (2.3c), obtenemos las coordenadas del punto de intersección \vec{P} , en ese punto aplicamos la ley de reflexión vectorial. Previamente debemos calcular al vector normal a la superficie de referencia $F(x, y, z)$, descrita por la ecuación (2.1). La dirección del vector normal se denota por el vector unitario $\hat{\mathcal{N}} = (\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y, \mathcal{N}_z)$, y puede ser calculado a través de la siguiente expresión

$$\hat{\mathcal{N}} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(x - x_0, y - y_0, Q(z - z_0) - r)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [Q(z - z_0) - r]^2}}. \quad (2.7)$$

Una vez conocidos los vectores unitarios $\hat{\mathcal{I}}$ y $\hat{\mathcal{N}}$, aplicamos la ley de reflexión vectorial

$$\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{I}} - 2(\hat{\mathcal{I}} \cdot \hat{\mathcal{N}})\hat{\mathcal{N}}. \quad (2.8)$$

Para construir los objetos que forman parte de la pantalla nula debemos calcular la intersección de la prolongación del rayo $\hat{\mathcal{R}}$ con el plano en el que se encuentra la **LCD**. La línea recta que representa la prolongación del rayo incidente es

$$\mathcal{L}_Q = \left\{ \vec{P} + \zeta \hat{\mathcal{R}} \mid \zeta \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.9)$$

Escribiendo la recta (2.9) por componentes tenemos que

$$Q_x = x + \zeta \mathcal{R}_x, \quad (2.10a)$$

$$Q_y = y + \zeta \mathcal{R}_y, \quad (2.10b)$$

$$Q_z = z + \zeta \mathcal{R}_z. \quad (2.10c)$$

La ecuación del plano en el que se encuentra la pantalla **LCD** puede ser escrita de la siguiente manera

$$\hat{V}_n \cdot (\vec{Q} - \vec{Q}_0) = 0, \quad (2.11)$$

donde \hat{V}_n es la dirección de la normal al plano de la **LCD**, \vec{Q}_0 es la posición del punto central de la pantalla **LCD**. Al sustituir $\vec{P} + \zeta \hat{\mathcal{I}}$ por \vec{Q} en la expresión (2.11), se obtiene lo siguiente

$$\zeta \vec{V}_n \cdot \hat{\mathcal{I}} + \vec{V}_n \cdot (\vec{P} - \vec{Q}_0) = 0. \quad (2.12)$$

Despejando el parámetro ζ de la expresión (2.12), se obtiene que

$$\zeta = \frac{\vec{V}_n \cdot (\vec{Q}_0 - \vec{P})}{\vec{V}_n \cdot \hat{\mathcal{I}}}. \quad (2.13)$$

Al sustituir la ecuación (2.13) en las expresiones (2.10a), (2.10b) y (2.10c), obtenemos una ecuación vectorial para calcular la posición de los puntos $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ que componen a la pantalla nula, dicha ecuación se escribe como

$$\vec{Q} = \vec{P} + \left[\frac{\hat{V}_n \cdot (\vec{Q}_0 - \vec{P})}{\hat{V}_n \cdot \hat{\mathcal{I}}} \right] \hat{\mathcal{I}}. \quad (2.14)$$

En la expresión (2.14) está implícito que conocemos la orientación y posición de la pantalla **LCD** y del sensor **CCD**. En un trabajo previo mostramos que cuando hay errores en el posicionamiento y en la orientación de la pantalla nula, la reconstrucción de la superficie bajo estudio se desvía de los resultados correctos [41]. Para evitar errores en la reconstrucción es necesario hacer una calibración del sistema de medición. En la siguiente sección proponemos un método de calibración para obtener la posición y orientación de cada elemento que compone al sistema de medición descrito esquemáticamente en la figura 2.1.

2.2. Calibración del sistema de medición

La calibración del sistema de medición se realiza utilizando un plano óptico, su apertura es circular con un diámetro de $D=4$ pulgadas, la cara pulida del plano tiene una calidad óptica de $\lambda/10$. La cara pulida funciona como una superficie reflectora y define al plano **X-Y** correspondiente al sistema de referencia principal; además, proponemos que el origen de coordenadas \mathcal{O} coincida con el centro del espejo, como se muestra en la figura 2.2(a). Una primera calibración que debemos hacer es la corrección por distorsión de las imágenes capturadas por la cámara. Por esa razón, en la pantalla **LCD** desplegamos un patrón compuesto por círculos de radio $r_m=1.05mm$ en un arreglo cuadrado, la separación vertical y horizontalmente es de $d_m=3.42mm$, este patrón de círculos funciona como un objeto plano para el espejo circular, como se aprecia en la figura 2.2(b). Como resultado se forma una imagen virtual plana que tiene las mismas características que el objeto desplegado en la **LCD**, como se puede apreciar en la figura 2.2(a). En las siguientes secciones describimos el proceso de calibración del sistema de medición y obtendremos los primeros resultados que serán utilizados para el diseño de la pantalla nula.

2.2.1. Calibración de la distorsión

La imagen virtual funciona como objeto para la lente de la cámara. En la práctica, la cámara **CCD** se orienta hasta obtener una imagen enfocada compuesta de círculos en un arreglo cuadrado. Con lo anterior, buscamos que el plano del **CCD** sea aproximadamente paralelo a la imagen virtual de la **LCD**, como se muestra en la figura 2.2(a). A partir de la ecuación para las lentes delgadas podemos escribir la separación (distancia imagen) entre el punto principal y el centro del **CCD** de la siguiente manera

$$a_i = f_l (1 + M_T), \quad (2.15)$$

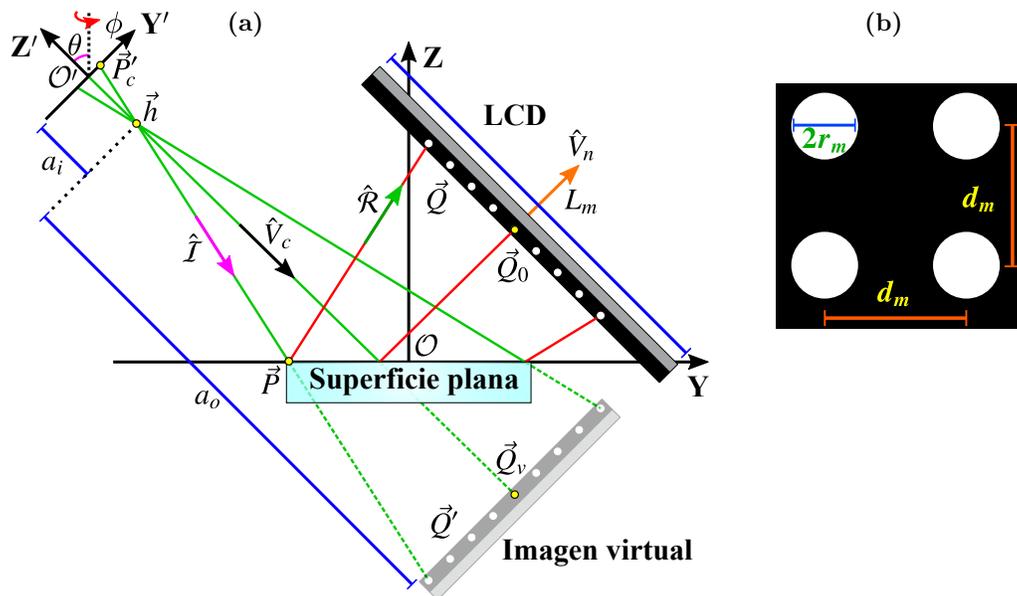


Figura 2.2: (a) Esquema que se utiliza para calibrar la distorsión de la cámara además de la posición y orientación de cada elemento que compone al sistema de medición. (b) La imagen desplegada en la LCD consiste de un conjunto de círculos de radio r_m .

donde f_l es la distancia focal de la lente de la cámara y M_T es la amplificación transversal, el valor de M_T será obtenido más adelante a partir de la corrección de la distorsión de la lente de la cámara. En la figura 2.2(a), el parámetro a_o es la distancia a la que se encuentra la imagen virtual (objeto para la cámara) respecto al punto principal y puede ser calculado como

$$a_o = f_l (1 + M_T^{-1}). \quad (2.16)$$

Con las expresiones (2.15) y (2.16) podemos calcular la posición de los puntos que componen la imagen virtual respecto al plano del CCD. En el sistema de referencia $X'Y'Z'$ las coordenadas de la imagen son $(x'_c, y'_c, 0)$; por lo tanto, los puntos sobre la imagen virtual son $Q' = (x'_c/M_T, y'_c/M_T, a_i + a_o)$. Nosotros asumimos que el eje Z' coincide con el eje óptico de la lente de la cámara de acuerdo al diseño del fabricante. En la figura 2.3(a) se muestra una parte del arreglo de círculos desplegados en la LCD.

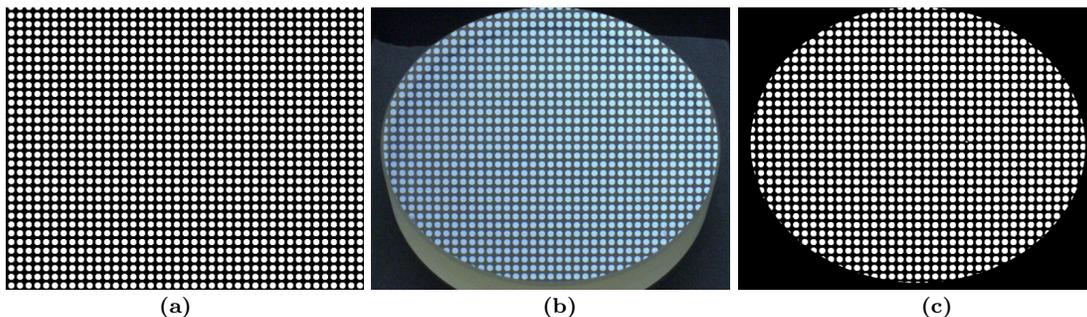


Figura 2.3: (a) Imagen desplegada en la LCD. (b) Imagen experimental capturada por la cámara. (c) Imagen experimental binarizada.

La cámara **CCD** que se utilizó es del distribuidor Thorlabs con modelo DCU224C. La lente tiene una distancia focal efectiva de $f_l=16mm$ y fue fabricada por Thorlabs con modelo MVL16L. En la práctica, el sensor **CCD** registra imágenes como la que se muestran en la figura 2.3(b). Esta imagen la convertimos a una escala de grises y utilizamos un valor umbral para binarizarla; por lo tanto, la imagen se cambia a blanco y negro, como se muestra en la figura 2.3(c). El centroide ponderado es considerado como la posición de cada mancha brillante y se denota por (p'_x, p'_y) . El proceso que seguimos para calcular la posición de cada mancha brillante utiliza la imagen que resulta del producto de las matrices que describen a las imágenes 2.3(b) y 2.3(c). Después, a todos los píxeles que componen a cada mancha brillante se les encierra en un rectángulo de ancho M_a píxeles y alto N_a píxeles. La expresión para calcular el centroide ponderado, en cada rectángulo, es la siguiente [42]

$$(p'_x, p'_y) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{M_a} \sum_{j=1}^{N_a} I_{ij} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{M_a} \sum_{j=1}^{N_a} I_{ij}}, \frac{\sum_{i=1}^{M_a} \sum_{j=1}^{N_a} I_{ij} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{M_a} \sum_{j=1}^{N_a} I_{ij}} \right), \quad (2.17)$$

donde (x_{ij}, y_{ij}) son las coordenadas del píxel, I_{ij} es la intensidad del nivel de gris que tiene el píxel. Al considerar que el origen de coordenadas \mathcal{O}' está en el centro del **CCD**, las coordenadas de los centroides, en milímetros, pueden ser calculados como

$$(x'_d, y'_d) = \sqrt{\frac{\mathcal{L}_{M_2}^2 + \mathcal{L}_{M_1}^2}{M_1^2 + M_2^2}} \left(p'_x - \frac{M_1}{2}, \frac{M_2}{2} - p'_y \right), \quad (2.18)$$

donde (M_1, M_2) y $(\mathcal{L}_{M_1}, \mathcal{L}_{M_2})$ son las dimensiones del **CCD** en píxeles y milímetros, respectivamente. En la tabla 2.1 están listados los parámetros de la cámara utilizada para capturar las imágenes.

Parámetro	Valores
Distancia focal f_l	16mm
Dimensiones (M_1, M_2)	(1280 píxeles, 1024 píxeles)
Dimensiones $(\mathcal{L}_{M_1}, \mathcal{L}_{M_2})$	(5.95mm, 4.76mm)

Tabla 2.1: Parámetros de la Cámara **CCD** y de la lente proporcionados por el fabricante Thorlabs.

En la figura 2.4(a) se muestran las coordenadas (x'_d, y'_d) de los centroides ponderados correspondientes a las manchas brillantes mostradas en la figura 2.3(b). La cámara utiliza una lente positiva para proyectar el patrón de manchas brillantes sobre el plano del **CCD**, como se muestra en la figura 2.3(b). La imagen puede estar afectada por la aberración de distorsión [43]. Las coordenadas polares de la imagen afectadas por distorsión pueden ser escritas como

$$\rho'_d = \sqrt{x_d'^2 + y_d'^2}, \quad \alpha'_d = \arctan \left(\frac{y'_d}{x'_d} \right) \quad (2.19)$$

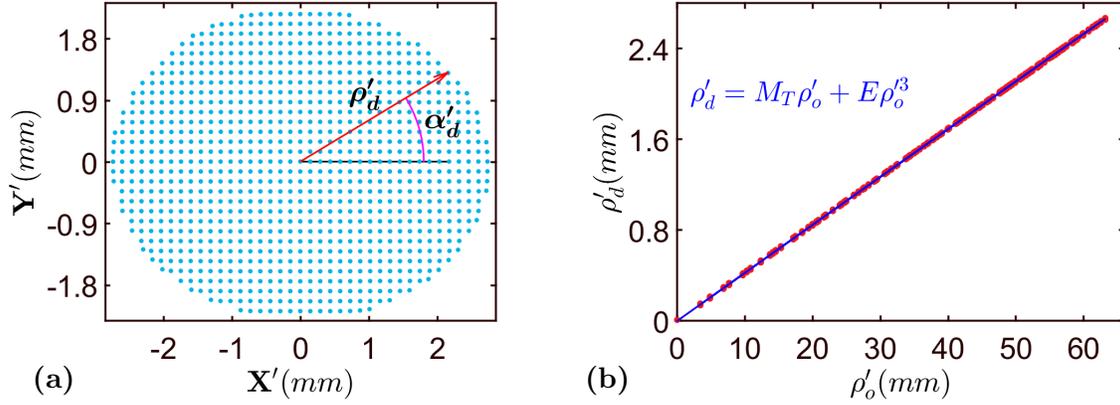


Figura 2.4: (a) Centroides ponderados. (a) Gráfica ρ'_d vs ρ'_o utilizada para obtener los valores del coeficiente de distorsión y de amplificación transversal.

La imagen virtual es una copia exacta del patrón de círculos que se despliega en la LCD, como se muestra en la figura 2.2(a). Como ya lo mencionamos, la imagen virtual funciona como un objeto para lente de la cámara. Las coordenadas polares de la imagen virtual respecto al sistema de referencia $X'Y'Z'$, son las siguientes

$$\rho'_o = \sqrt{Q_x'^2 + Q_y'^2}, \quad \alpha'_o = \arctan\left(\frac{Q_y'}{Q_x'}\right). \quad (2.20)$$

Para corregir los efectos de la distorsión en la imagen, consideraremos que la coordenada radial imagen ρ'_d afectada por distorsión puede ser escrita como un polinomio de tercer orden [43], de la siguiente manera

$$\rho'_d = M_T \rho'_o + E \rho_o^3, \quad (2.21)$$

donde E es el coeficiente de distorsión. En la práctica, el proceso para obtener los valores de la amplificación transversal y del coeficiente de distorsión, se basa en ajustar la ecuación (2.21) a la gráfica ρ'_d vs ρ'_o que se muestra en la figura 2.4(b), mediante el método no lineal de levenberg-Maquardt. Como resultado del ajuste se obtienen los valores $E = -6.601 \times 10^{-8} \pm 8.865 \times 10^{-9}$ y $M_T = -0.042 \pm 2.500 \times 10^{-5}$. La coordenada radial ρ'_c de la imagen una vez que ha sido corregida por distorsión puede ser escrita de la siguiente manera

$$\rho'_c = \rho'_d - E \left(\frac{\rho'_d}{M_T}\right)^3. \quad (2.22)$$

Para obtener la ecuación (2.22) hemos considerado que la amplificación transversal puede escribirse como $M_T = \rho'_d/\rho'_o$ y además hemos aplicado el método de inversión de polinomios a la ecuación (2.21) [44]. Las coordenadas cartesianas correspondientes a los puntos corregidos por distorsión pueden ser escritas como

$$x'_c = \rho'_c \cos(\alpha'_o); \quad y'_c = \rho'_c \sin(\alpha'_o). \quad (2.23)$$

Cualquier imagen que se capture debe ser corregida utilizando las expresiones (2.23) y (2.22). Otro de nuestros intereses es encontrar la posición y orientación de los puntos que componen a la imagen virtual o al objeto desplegado en la **LCD**, respecto al sistema de referencia principal **XYZ**. En la siguiente sección proponemos un método para conocer la orientación y posición de cada elemento que compone al sistema de medición.

2.2.2. Posición y orientación de la LCD y del CCD

Para encontrar la orientación de la cámara utilizaremos el hecho de que el espejo plano tiene una abertura circular. En la **LCD** se despliega una imagen de color blanco. Cada píxel activado en la **LCD** funciona como una fuente puntual de luz, la luz que incide sobre el espejo forma el cono de rayos que se muestra en la figura 2.5(a). Cuando el eje óptico de la cámara coincide con el eje **Z** del sistema de referencia **XYZ** la imagen que se forma en el **CCD** es un círculo. Para cualquier otra orientación de la cámara, la imagen que se observará del espejo plano será en general una elipse inclinada [45], como se muestra en la figura 2.5(b).

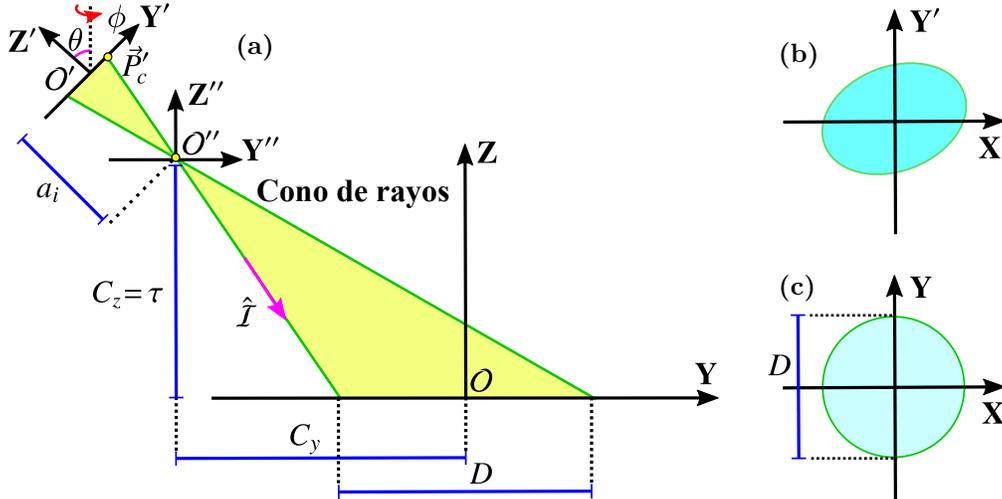


Figura 2.5: (a) Descripción esquemática del proceso que se implementa para encontrar las cantidades ϕ , θ y \vec{h} . (b) Imagen elíptica que se observa en el plano del **CCD**. (c) El contorno circular de la superficie plana.

La orientación del plano de observación $X'-Y'$ se puede modelar aplicando dos de las matrices de rotación de los ángulos de Euler [46,47]. Estas matrices rotan al eje X' un ángulo ϕ respecto al eje X después rotan al eje Z' un ángulo θ respecto al eje Z . La matriz de rotación total es el resultado del producto de dos matrices y puede escribirse como

$$M_R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

A continuación mostraremos el funcionamiento del algoritmo numérico utilizado para encontrar la posición y orientación de la cámara. A partir del contorno de la imagen elíptica sobre el plano $X'-Y'$, que se muestra en la figura 2.5(b), podemos construir un cono de rayos que

comienza en el sensor **CCD** y pasa a través del pinhole \vec{h} y llega hasta el contorno circular de la superficie plana que coincide con el plano **X-Y**.

Proponemos un tercer sistema de referencia **X''Y''Z''** cuyo origen O'' coincida con la posición del pinhole, como se muestra en la figura 2.5(c). Para encontrar la orientación del **CCD** en forma numérica, proponemos variar la orientación del cono de rayos respecto a **X''Y''Z''** hasta que la intersección del cono con un plano paralelo a **X''-Y''** sea un círculo, como se ilustra en las figuras 2.6(a)-(e). En estas últimas, el círculo representa al contorno del espejo plano y la curva punteada corresponde a la intersección del cono de rayos con un plano. Por otra parte, para encontrar la posición del **CCD**, variamos en forma numérica la posición $-\tau$ del plano, a lo largo del eje **Z''**, que interseca al cono de rayos hasta que el diámetro del círculo sea igual al diámetro de la superficie reflectora, como se ilustra en las figuras 2.6(f)-(j). Es decir, el algoritmo numérico consiste básicamente en definir un conjunto de valores para θ , ϕ y τ y buscar las combinaciones que hagan que la intersección sea un contorno circular de diámetro D , como se muestra en la figura 2.6(h).

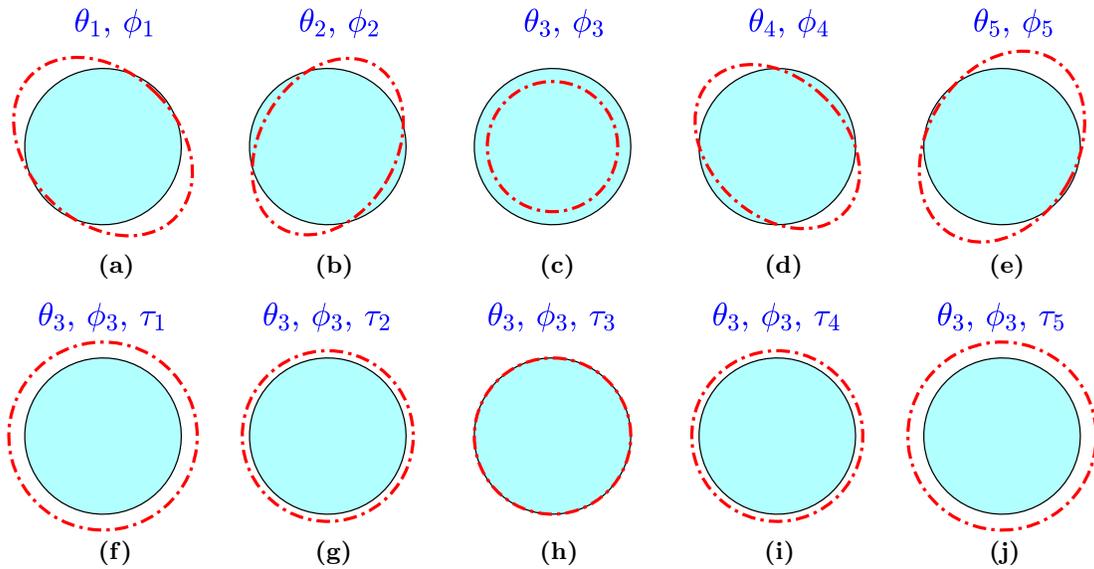


Figura 2.6: Descripción esquemática del cálculo de: (a) los ángulos (θ, ϕ) y (b) la altura τ .

En el sistema de referencia **X'Y'Z'**, las coordenadas del contorno de la elipse son $P'_c = (x'_c, y'_c, 0)$, como se muestra en la figura 2.5(b); por lo tanto, la dirección $\hat{\mathcal{I}}'$ del rayo incidente puede ser escrita como

$$\hat{\mathcal{I}}' = \frac{(-x'_c, -y'_c, -a_i)}{\sqrt{x'^2_c + y'^2_c + a^2}}, \quad (2.25)$$

donde a_i se calcula utilizando la expresión (2.15). Considerando las expresiones (2.24) y (2.25), la representación del vector unitario $\hat{\mathcal{I}}$ respecto a **X''Y''Z''** está dada por

$$\hat{\mathcal{I}} = M_R \cdot \hat{\mathcal{I}}'. \quad (2.26)$$

Cada recta que forma parte del contorno del cono de rayos, que inicia en el pinhole, está descrita por

$$\mathcal{L}_{cono} = \left\{ \vec{h} + \eta \hat{\mathcal{I}} \mid \eta \in \mathbb{R} \right\}, \quad (2.27)$$

donde el parámetro η es la distancia entre el pinhole y un plano posicionado en $-\tau$. La condición que garantiza que ocurra la intersección es que la componente z sea igual a $-\tau$. Considerando lo anterior, la recta (2.27) se escribe en forma paramétrica como

$$C_x = h_x + \eta \mathcal{I}_x, \quad (2.28a)$$

$$C_y = h_y + \eta \mathcal{I}_y, \quad (2.28b)$$

$$C_z = -\tau = h_z + \eta \mathcal{I}_z, \quad (2.28c)$$

donde (C_x, C_y, C_z) son las coordenadas de los puntos en los que el cono de rayos interseca al plano, como se muestra en las figuras 2.6(a)-(j). A partir de la componente z mostrada en la ecuación (2.28c), se despeja al parámetro η para obtener lo siguiente

$$\eta = \frac{-\tau - h_z}{\mathcal{I}_z}. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, las coordenadas (C_x, C_y, C_z) , adoptan la siguiente forma

$$C_x = h_x - \left(\frac{\tau + h_z}{\mathcal{I}_z} \right) \mathcal{I}_x, \quad (2.30a)$$

$$C_y = h_y - \left(\frac{\tau + h_z}{\mathcal{I}_z} \right) \mathcal{I}_y, \quad (2.30b)$$

$$C_z = -\tau. \quad (2.30c)$$

Para cada matriz de rotación M_R y para cada valor de $-\tau$, una manera de cuantificar qué tan parecida es la intersección al contorno circular de la superficie plana (ver figura 2.7(a)), es la siguiente

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \left[\sqrt{(C_{x,s} - \bar{C}_x)^2 + (C_{y,s} - \bar{C}_y)^2} - \left(\frac{D}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N d_c^2, \quad (2.31)$$

donde \bar{C}_x y \bar{C}_y son los valores promedio del conjunto de coordenadas $\{C_x\}$ y $\{C_y\}$, respectivamente. N es el número de puntos que componen al contorno. La cantidad d_c es la discrepancia entre el círculo de radio $D/2$ y la curva generada por la intersección del cono de rayos con un plano posicionado en $-\tau$. En la figura 2.7(a) está ilustrado el significado geométrico de d_c . Cuando el valor Δ calculado a través de la expresión (2.31) resulta ser un mínimo global, en ese momento podemos afirmar que se ha encontrado la orientación y posición de la cámara y de la **LCD**. En la figura 2.7(b), mostramos un diagrama de flujo que describe a grandes rasgos el proceso que se sigue para encontrar los valores de θ , ϕ y τ .

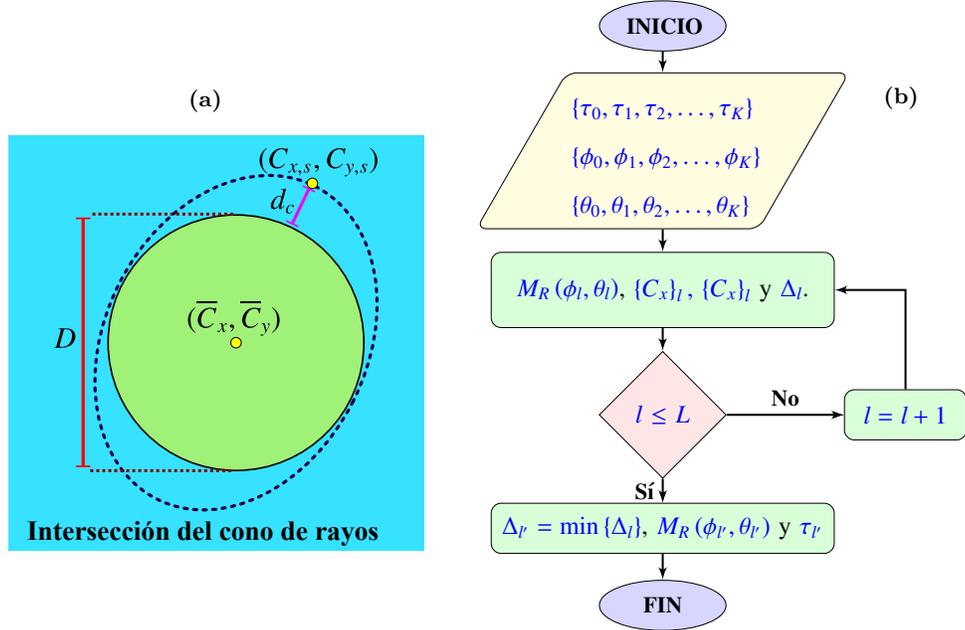


Figura 2.7: (a) Comparación entre el contorno circular de la apertura de la superficie plana y el contorno que es producto de la intersección del cono de rayos con un plano paralelo a \mathbf{X} - \mathbf{Y} . (b) Diagrama de flujo que describe el proceso para encontrar los valores ϕ , θ y \vec{h} .

Como el origen \mathcal{O} del sistema referencia principal \mathbf{XYZ} coincide con el centro del espejo; entonces, la posición del pinhole \vec{h} puede ser escrita como

$$\vec{h} = (h_x, h_y, h_z) = (-\bar{C}_x, -\bar{C}_y, \tau). \quad (2.32)$$

Consideramos a \hat{V}_c como el vector normal unitario al plano de la imagen virtual (ver la figura 2.2). Para calcularlo se debe aplicar la siguiente expresión

$$\hat{V}_c = M_R(\theta, \phi) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi \\ -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

También definimos a \vec{Q}_v como la posición del punto central de la imagen virtual y se calcula de la siguiente manera

$$\vec{Q}_v = \vec{h} + b\vec{V}_c. \quad (2.34)$$

Las coordenadas de la imagen virtual difieren de las coordenadas de la **LCD** en un signo en la componente z ; por lo tanto, el punto central de la pantalla **LCD** resulta ser

$$\vec{Q}_0 = (Q_{xv}, Q_{yv}, -Q_{zv}). \quad (2.35)$$

La matriz de rotación para calcular la orientación de la **LCD** es similar a la matriz (2.24) únicamente cambia el signo del ángulo θ , lo anterior implica que la dirección \hat{V}_n de la normal

al plano de la **LCD** se calcula como

$$\hat{V}_n = M_R(-\theta, \phi) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Una vez que se calcula la matriz de rotación M_R (2.24), la posición del pinhole \vec{h} (2.32), la posición \vec{Q}_0 del punto central de la **LCD** (2.35) y el vector normal \vec{V}_n a la **LCD** (2.9), la construcción de la pantalla nula puede llevarse a cabo utilizando la expresión (2.14).

2.2.2.1. Valores para θ , ϕ y \vec{h}

Cuando en la pantalla **LCD** se despliega una imagen de color blanco (ver figura 2.2(a)), la imagen que captura la cámara se muestra en la figura 2.8(a)

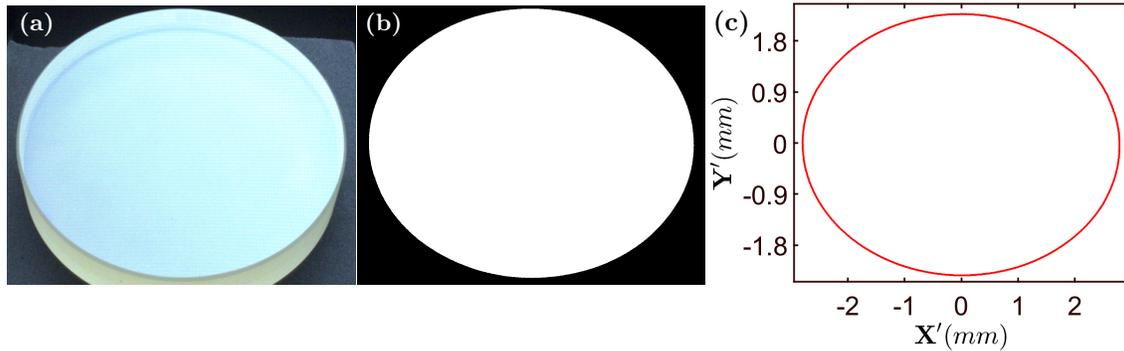


Figura 2.8: (a) Imagen experimental de contorno del espejo plano circular. (b) Imagen binarizada. (c) Contorno de la imagen elíptica.

En la figura 2.8(b) se muestra la imagen experimental binarizada. Finalmente, en la figura 2.8(c) está graficada la elipse que describe al contorno de la región que se muestra en 2.8(b). Cada punto del contorno fue corregido por distorsión. Después de aplicar el proceso descrito en el diagrama de flujo 2.7(b) se obtiene los valores para ϕ , θ y \vec{h} , los cuales están listados en la tabla 2.2. Además, se muestra el tiempo de ejecución de las rutinas computacionales implementadas y el valor mínimo de Δ (ver ecuación 2.31).

Parámetro	Valores
a_i	16.678mm
a_o	393.144mm
Tiempo de ejecución	73.348s
Δ_{min}	5.400 μ m
\vec{h}	(-0.084mm, -172.981mm, 248.645mm)
(ϕ, θ)	(1.077°, 34.214°)

Tabla 2.2: Parámetros para calcular la posición y orientación del **CCD** y de la **LCD**.

2.3. Reconstrucción de la superficie bajo prueba

Para reconstruir la forma de la superficie bajo estudio, proponemos un algoritmo iterativo que reconstruye la superficie a lo largo del rayo \hat{I} , como se ilustra en la figura 2.9(a). El algoritmo propuesto consiste en medir de manera aproximada las normales a la superficie y en cada iteración mejorar su cálculo. Las normales dependen de los puntos de incidencia $\vec{P} = (x, y, z)$, como se muestra en la figura 2.9(a); sin embargo, \vec{P} es desconocido. Para encontrar los puntos de incidencia \vec{P} proponemos una superficie auxiliar posicionada en t_k a lo largo del eje Z . En una primera aproximación, los puntos en los que el rayo incidente interseca a la superficie auxiliar son considerados como los puntos de incidencia.

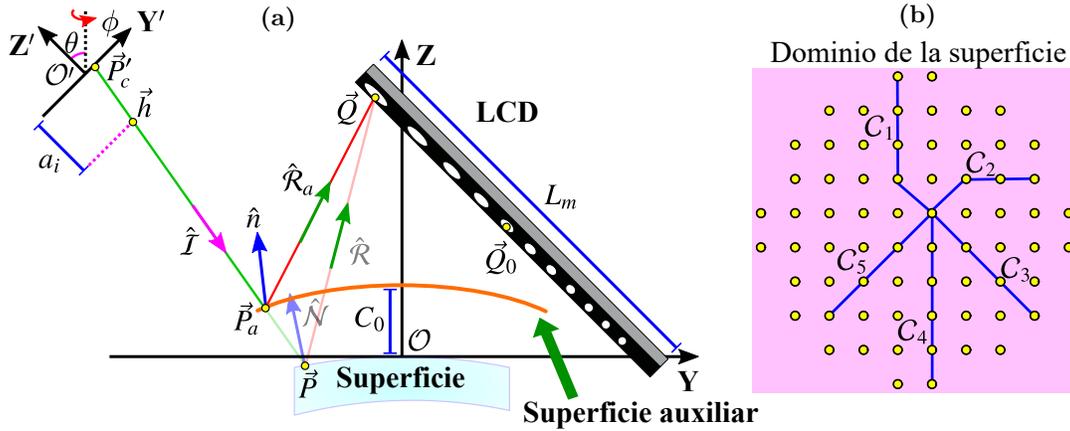


Figura 2.9: (a) Descripción esquemática del cálculo aproximado de las normales a la superficie. (b) Ejemplos de algunas trayectorias de integración C .

2.3.1. Primera reconstrucción $l = 0$

Considerando el proceso de calibración descrito a lo largo de la sección 2.2, podemos concluir que la única dirección que se puede conocer es la del rayo incidente. El vector unitario \hat{I} puede ser calculado a través de las ecuaciones (2.25) y (2.26). El rayo incidente inicia su recorrido en el punto \vec{P}_c y pasa a través del pinhole hasta intersectar a la superficie auxiliar en el punto $\vec{P}_a = (x_a, y_a, z_a)$ como se muestra en la figura 2.9(a). Proponemos aproximar al punto \vec{P} por \vec{P}_a ; por lo tanto, la dirección del rayo reflejado puede ser aproximado por

$$\hat{R}_a = \frac{\vec{Q} - \vec{P}_a}{\|\vec{Q} - \vec{P}_a\|}, \quad (2.37)$$

Al considerar las expresiones (2.26) y (2.37), la dirección del vector normal \hat{N} a la superficie bajo estudio que se muestra en la figura 2.9(a), puede ser aproximada por el siguiente vector unitario

$$\hat{n} = \frac{\hat{I} - \hat{R}_a}{\|\hat{I} - \hat{R}_a\|}. \quad (2.38)$$

A partir de las componentes del vector normal $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$, la sagita de la superficie bajo prueba se obtiene al calcular la siguiente integral

$$z_{int} = t_k + \int_{\mathcal{C}} \left[\left(-\frac{n_x}{n_z} \right) dx + \left(-\frac{n_y}{n_z} \right) dy \right]. \quad (2.39)$$

donde t_k es la posición de la superficie auxiliar a lo largo del eje **Z**. La integral (2.39) se calcula a lo largo de la trayectoria \mathcal{C} definida sobre el plano **X-Y**. En la práctica, el integrando de la ecuación (2.39) es discreto; por lo tanto, se debe utilizar algún método numérico para calcular la integral (2.39), en nuestro caso utilizamos la regla del trapecio para puntos no igualmente espaciados [48]; por lo tanto, la integral se calcula como

$$z_m = t_k - \sum_{i=0}^{m-1} \left[\left(\frac{n_{x_{i+1}}}{n_{z_{i+1}}} + \frac{n_{x_i}}{n_{z_i}} \right) \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) + \left(\frac{n_{y_{i+1}}}{n_{z_{i+1}}} + \frac{n_{y_i}}{n_{z_i}} \right) \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{2} \right) \right]. \quad (2.40)$$

En la expresión (2.40) el subíndice m representa el número de puntos que se necesitan para calcular el valor de z_m , considerando que $m \geq 1$. Algunos ejemplos de la trayectoria \mathcal{C} se muestran en la figura 2.9(b). La construcción de las trayectorias se realiza utilizando el algoritmo de Dijkstra [49]. A partir de la integración numérica, obtenemos una nube de puntos $\{(x_a, y_a, z)\}$ que representa la forma de la superficie bajo prueba. Suponemos que la superficie bajo estudio puede ser expresada como una combinación lineal de los polinomios $\{\mathcal{F}_j\}$; por lo tanto, proponemos que \mathcal{G} represente la superficie bajo estudio de la siguiente manera

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_{j=1}^J C_j \mathcal{F}_j, \quad (2.41)$$

donde los coeficientes C_j son la contribución de los polinomios \mathcal{F}_j en la representación de la superficie. Al calcular las derivadas parciales de la expresión (2.41), obtenemos que

$$\mathcal{G}_x(x, y) = \sum_{j=1}^J C_j \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^J C_j \mathcal{F}_{x,j}, \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{G}_y(x, y) = \sum_{j=1}^J C_j \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial y} = \sum_{j=1}^J C_j \mathcal{F}_{y,j}, \quad (2.42b)$$

En el integrando de la ecuación (2.39), los elementos entre paréntesis corresponden a las derivadas parciales de la superficie reconstruida y pueden ser escritos como

$$\mathcal{S}_x = -\frac{n_x}{n_z}, \quad (2.43a)$$

$$\mathcal{S}_y = -\frac{n_y}{n_z}, \quad (2.43b)$$

donde los sub índices x y y hacen referencia a las derivadas parciales respecto a x y y , respectivamente. Las derivadas parciales calculadas con (2.43a) y (2.43b) deben ser iguales

a las expresiones (2.42a) y (2.42b), respectivamente. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_x(x, y) = \sum_{j=1}^J C_j \mathcal{F}_{x,j}, \quad (2.44a)$$

$$\mathcal{S}_y(x, y) = \sum_{j=1}^J C_j \mathcal{F}_{y,j}. \quad (2.44b)$$

Si la dirección de la normales son medidas en \mathcal{M} puntos sobre la superficie; entonces, la expresión (2.10a) puede ser escrita para cada punto de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x(x_1, y_1) &= C_1 \mathcal{F}_{x,1}(x_1, y_1) + C_2 \mathcal{F}_{x,2}(x_1, y_1) \dots + C_J \mathcal{F}_{x,J}(x_1, y_1), \\ \mathcal{S}_x(x_2, y_2) &= C_1 \mathcal{F}_{x,1}(x_2, y_2) + C_2 \mathcal{F}_{x,2}(x_2, y_2) \dots + C_J \mathcal{F}_{x,J}(x_2, y_2), \\ \mathcal{S}_x(x_3, y_3) &= C_1 \mathcal{F}_{x,1}(x_3, y_3) + C_2 \mathcal{F}_{x,2}(x_3, y_3) \dots + C_J \mathcal{F}_{x,J}(x_3, y_3), \\ &\vdots \\ \mathcal{S}_x(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}) &= C_1 \mathcal{F}_{x,1}(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}) + C_2 \mathcal{F}_{x,2}(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}) \dots + C_J \mathcal{F}_{x,J}(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

El sistema de ecuaciones (2.45) puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_x(x_1, y_1) \\ \mathcal{S}_x(x_2, y_2) \\ \mathcal{S}_x(x_3, y_3) \\ \vdots \\ \mathcal{S}_x(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{x,1}(x_1, y_1) & \mathcal{F}_{x,2}(x_1, y_1) & \dots & \mathcal{F}_{x,J}(x_1, y_1) \\ \mathcal{F}_{x,1}(x_2, y_2) & \mathcal{F}_{x,2}(x_2, y_2) & \dots & \mathcal{F}_{x,J}(x_2, y_2) \\ \mathcal{F}_{x,1}(x_3, y_3) & \mathcal{F}_{x,2}(x_3, y_3) & \dots & \mathcal{F}_{x,J}(x_3, y_3) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_{x,1}(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}) & \mathcal{F}_{x,2}(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}) & \dots & \mathcal{F}_{x,J}(x_{\mathcal{M}}, y_{\mathcal{M}}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_J \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Haciendo un procedimiento análogo para la derivada parcial respecto a y , podemos obtener una ecuación similar a (2.46). Considerando lo anterior, es posible construir el siguiente par de ecuaciones matriciales

$$\mathcal{S}_x = \mathcal{G}_x \mathbf{M}_C, \quad (2.47a)$$

$$\mathcal{S}_y = \mathcal{G}_y \mathbf{M}_C. \quad (2.47b)$$

donde \mathcal{S}_x y \mathcal{S}_y son vectores columna de $\mathcal{M} \times 1$, \mathcal{G}_x y \mathcal{G}_y son matrices de $\mathcal{M} \times J$ y \mathbf{M}_C es un vector columna de $J \times 1$. Las ecuaciones matriciales (2.47a) y (2.47b) se pueden concatenar para obtener el siguiente sistema de ecuaciones matricial

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_x \\ \mathcal{S}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_x \\ \mathcal{G}_y \end{pmatrix} \mathbf{M}_C \quad (2.48)$$

En la práctica, al evaluar la superficie bajo estudio, solo podemos conocer el término del lado izquierdo de la ecuación y el primer factor del lado derecho de la (2.48). La matriz \mathbf{M}_C contiene los coeficientes C_j , que corresponden a la contribución de cada polinomio $\{\mathcal{F}_j\}$ en la representación de la superficie bajo estudio. El conjunto de coeficientes $\{C_j\}$ son las incógnitas, para calcularlos resolvemos la expresión (2.48) usando mínimos cuadrados

o la descomposición en valores singulares [50]. Una vez conocidos los coeficientes $\{C_j\}$ y utilizando las ecuaciones (2.42a) y (2.42b), podemos calcular en forma analítica, la dirección del vector normal a la superficie reconstruida, de la siguiente manera

$$\hat{w} = \frac{(-\mathcal{G}_x(x_a, y_a), -\mathcal{G}_y(x_a, y_a), 1)}{\sqrt{\mathcal{G}_x^2(x_a, y_a) + \mathcal{G}_y^2(x_a, y_a) + 1}}. \quad (2.49)$$

Idealmente, si la superficie reconstruida es muy cercana a la superficie real; entonces, la diferencia entre las direcciones de los vectores normales \hat{n} (ver ecuación (2.38)) y \hat{w} (ver ecuación (2.49)) es muy próxima a cero. En la siguiente sección, proponemos un proceso iterativo para mejorar la reconstrucción de la superficie bajo estudio.

2.3.2. Proceso iterativo $l \geq 0$

En la sección anterior se utilizó un superficie auxiliar posicionada en t_k a lo largo del eje \mathbf{Z} , para calcular de manera aproximada las normales a la superficie con la ecuación (2.4). En esta sección mostraremos un proceso iterativo para encontrar la nube de puntos más cercana a la superficie real, utilizando la siguiente expresión

$$\vec{P}^l = \vec{P}^{l-1} + \beta^{l-1} \hat{\mathcal{I}} \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (2.50)$$

donde l es el número de la iteración, $\vec{P}^l = (x^l, y^l, z^l)$ pertenece a la nube de puntos y β^{l-1} es un valor escalar. El proceso para reconstruir una primera superficie está descrito en la sección 2.3.1. Cuando $l = 1$

$$\vec{P}^0 = (x_a, y_a, z_{int}), \quad \beta^0 = \frac{\mathcal{G}(x_a, y_a) - z_{int}}{\mathcal{I}_z}. \quad (2.51)$$

Para las iteraciones que cumplen que $l \geq 2$

$$\beta^{l-1} = \frac{\mathcal{G}(x^{l-1}, y^{l-1}) - z^{l-1}}{\mathcal{I}_z}. \quad (2.52)$$

Considerando las expresiones (2.51) y (2.52), la expresión (2.50) puede aplicarse de manera iterativa. Además, con las ecuaciones (2.37), (2.38), (2.49) y el punto \vec{P}^l , podemos calcular nuevamente las normales de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{R}}^l = \frac{\vec{Q} - \vec{P}^l}{\|\vec{Q} - \vec{P}^l\|}, \quad (2.53a)$$

$$\hat{n}^l = \frac{\hat{\mathcal{I}} - \hat{\mathcal{R}}^l}{\|\hat{\mathcal{I}} - \hat{\mathcal{R}}^l\|}, \quad (2.53b)$$

$$\hat{w}^l = \frac{(-\mathcal{G}_x(x^l, y^l), -\mathcal{G}_y(x^l, y^l), 1)}{\sqrt{\mathcal{G}_x^2(x^l, y^l) + \mathcal{G}_y^2(x^l, y^l) + 1}}. \quad (2.53c)$$

Para encontrar en qué iteración se reconstruye la superficie más cercana a la superficie real, debemos comparar los vectores normales unitarios de la siguiente manera

$$\{\mu_i = \|\hat{n}_i - \hat{w}_i\|\}_k. \quad (2.54)$$

donde los subíndices i y k hacen referencia al i -ésimo punto que compone a la k -ésima nube de puntos. Una cantidad que nos ayudará a decidir en qué iteración l el proceso debe detenerse, es la siguiente

$$\epsilon_l = \sqrt{\sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \frac{(\mu_i - \bar{\mu})^2}{\mathcal{M} - 1}}, \quad (2.55)$$

donde $\bar{\mu}$ es el valor promedio del conjunto de discrepancias $\{\mu_i\}_k$ correspondientes a la ecuación (2.55). Después de L iteraciones obtenemos un conjunto de valores $\{\epsilon_l\}$. Para determinar la iteración en la que se reconstruye la superficie más próxima a la superficie real se debe calcular el valor mínimo del conjunto $\{\epsilon_l\}$ y se denota como $\delta_k = \min\{\epsilon_l\}$. El proceso descrito a lo largo de esta sección tiene como objetivo mejorar la reconstrucción de la superficie bajo estudio, considerando que la superficie auxiliar está posicionada en t_k a largo del eje \mathbf{Z} . En la siguiente sección mostraremos cómo aproximarnos aún más a la superficie bajo estudio.

2.3.3. Proceso iterativo utilizando superficies auxiliares posicionadas a diferentes alturas t_k

En la sección 2.3.2, planteamos cómo mejorar la reconstrucción de la superficie cuando la superficie auxiliar está posicionada en t_k a lo largo del eje \mathbf{Z} . El cálculo de los vectores normales dependen del valor t_k . Eso significa que para distintos valores de t_k se obtendrán superficies con distintas geometrías. Para garantizar que la superficie reconstruida es la mejor solución, nosotros proponemos un conjunto de superficies posicionadas a lo largo del eje \mathbf{Z} en el siguiente conjunto de valores

$$\{t_k\} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k\}. \quad (2.56)$$

Los elementos que componen al conjunto (2.56) pueden ser calculados a través de la siguiente expresión

$$t_k = t_{k-1} + \Delta t. \quad \text{Si } k = 1, 2, 3, \dots, K - 1. \quad (2.57)$$

donde $\Delta t = (t_K - t_0)/K$, previamente debemos definir los extremos del conjunto (2.57) y el número de elementos K . Para cada elemento del intervalo (2.57) aplicamos el procedimiento descrito en las secciones 2.3.1 y 2.3.2; es decir, para cada altura t_k se calcula una superficie y la cantidad δ_k . La superficie reconstruida que se aproxima más a la superficie bajo estudio se obtiene cuando el valor de δ_k es un mínimo global, en este caso las normales \hat{w} y \hat{n} son muy cercanas. El funcionamiento de todo el proceso de reconstrucción de la superficie bajo estudio está ilustrado en el diagrama de flujo que se muestra en la figura (2.10). En la siguiente sección, aplicaremos el algoritmo que hemos propuesto en la evaluación de superficies con forma libre.

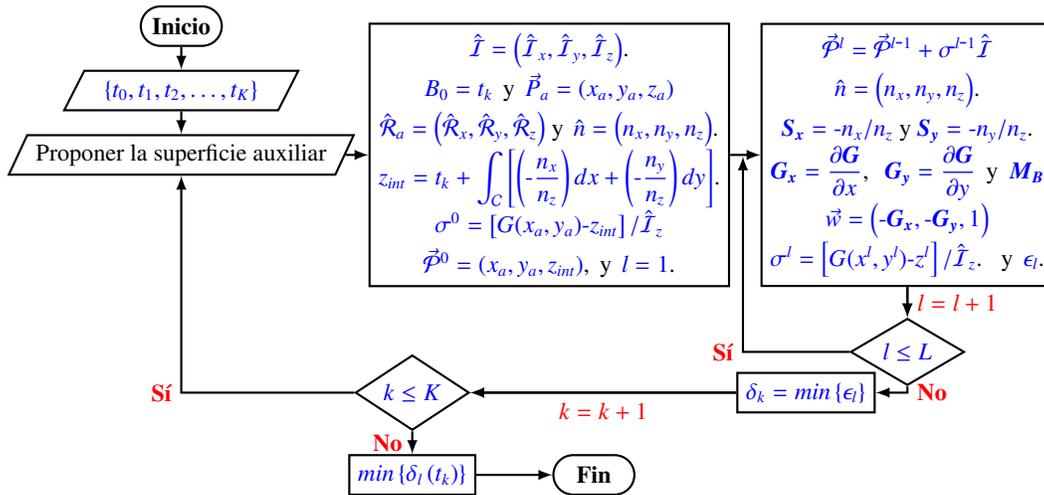


Figura 2.10: Diagrama de flujo que describe el funcionamiento del algoritmo de reconstrucción.

Capítulo 3

Resultados de la evaluación por reflexión

Para mostrar que el procedimiento de reconstrucción es una propuesta factible en la evaluación de la forma de superficies con forma libre, proponemos realizar algunas simulaciones numéricas en las que se aplicará el algoritmo iterativo descrito en la sección 2.3. El objetivo es calcular el patrón de manchas brillantes que producen tres superficies con forma libre a través de un trazo exacto de rayos y utilizar éstas imágenes sintéticas como si hubieran sido obtenidas de manera experimental. Hacemos una comparación entre las superficies reconstruidas y las superficies reales. Además, aplicamos el algoritmo iterativo, a un caso experimental, para evaluar la superficie convexa de una lente progresiva.

3.1. Cálculo de los patrones imagen

Los patrones imagen sobre el plano X' - Y' son calculados para tres diferentes superficies. Cada superficie está representada a través de la función $\Phi(x, y)$, la cual consiste de una superficie cónica de revolución con su vértice en $(0, 0, 0)$ más un conjunto de deformaciones que son descritas por una combinación lineal de algunos polinomios de Zernike [51], consideramos que la expresión analítica puede ser escrita como

$$\Phi(x, y) = \underbrace{\frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - (k_o + 1)c^2(x^2 + y^2)}}}_{\text{Superficie cónica}} + \underbrace{\sum_{i=0}^J C_i \mathcal{Z}_i(x, y)}_{\text{Deformaciones}}, \quad (3.1)$$

donde $r = 1/c$ y k_o son el radio de curvatura paraxial y la constante de conicidad. En la ecuación (3.1) \mathcal{Z}_i y C_i son el i -ésimo polinomio de Zernike y su coeficiente, respectivamente. Las ecuaciones para calcular las imágenes sintéticas pueden ser obtenidas a partir de la expresión para el vector normal $\vec{\mathcal{N}}$ a la superficie en el punto $\vec{P} = (x, y, z)$. La dirección del vector normal puede expresarse de las siguientes dos maneras

$$\hat{\mathcal{N}} = \frac{(\hat{\mathcal{R}} - \hat{\mathcal{I}})}{\|\hat{\mathcal{R}} - \hat{\mathcal{I}}\|}, \quad (3.2a)$$

$$\hat{\mathcal{N}} = \frac{(-\Phi_x, -\Phi_y, 1)}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + 1}}, \quad (3.2b)$$

donde Φ_x y Φ_y son las derivadas parciales de Φ con respecto a x y y , respectivamente. Los vectores unitarios $\hat{\mathcal{I}}$ y $\hat{\mathcal{R}}$ que aparecen en la expresión (3.2a) pueden ser construidos

considerando las cantidades que aparecen en la figura 2.1 de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{I}} = \frac{\vec{P} - \vec{h}}{\|\vec{P} - \vec{h}\|}, \quad (3.3a)$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\vec{Q} - \vec{P}}{\|\vec{Q} - \vec{P}\|}. \quad (3.3b)$$

Para calcular las direcciones $\hat{\mathcal{I}}$ y $\hat{\mathcal{R}}$, en las ecuaciones (3.3a) y (3.3b), nosotros asumimos que las coordenadas del pinhole \vec{h} y de cada punto \vec{Q} que compone a la pantalla nula son conocidas; por lo tanto, las únicas incógnitas son las coordenadas del punto de incidencia $\vec{P} = (x, y, \Phi)$. Al combinar las componentes de las expresiones (3.2a) y (3.2b), obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones no lineales

$$(\mathcal{R}_x - \mathcal{I}_x) + (\mathcal{R}_z - \mathcal{I}_z) \Phi_x = 0, \quad (3.4a)$$

$$(\mathcal{R}_y - \mathcal{I}_y) + (\mathcal{R}_z - \mathcal{I}_z) \Phi_y = 0. \quad (3.4b)$$

Las coordenadas x y y son las incógnitas del sistema de ecuaciones compuesto por (3.4a) y (3.4b). Esto se debe a que Φ es una función que depende de x y y como lo exhibe la ecuación (3.1). Para encontrar el punto de incidencia \vec{P} resolvemos simultáneamente las ecuaciones (3.4a) y (3.4b) en forma numérica para x y y . Una vez que el punto de incidencia $\vec{P} = (x, y, \Phi)$ es conocido, podemos construir los vectores unitarios $\hat{\mathcal{I}}$ utilizando la ecuación (3.3a). La posición de los puntos que componen a las imágenes sintéticas se obtiene cuando trazamos el rayo incidente desde el pinhole hacia el plano $\mathbf{X}'\text{-}\mathbf{Y}'$. Siguiendo un procedimiento similar al que empleamos en la sección (2.1) para obtener la ecuación (2.14), el punto de intersección $\vec{P}_c = (x_c, y_c, z_c)$ entre el rayo y el plano del **CCD** puede ser calculado como

$$\vec{P}_c = \vec{h} + a_i \left(\frac{\hat{\mathcal{I}}}{\hat{V}_c \cdot \hat{\mathcal{I}}} \right), \quad (3.5)$$

nosotros asumimos que $\hat{V}_c \cdot \hat{\mathcal{I}} \neq 0$. Es sencillo demostrar que cada punto $\vec{P}'_c = (x'_c, y'_c, z'_c)$ sobre el plano el plano de detección respecto a $\mathbf{X}'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}'$ está dado por

$$\vec{P}'_c{}^T = a_i \left[\frac{\text{inv}(M_R) \hat{\mathcal{I}}^T}{(\hat{V}_c \cdot \hat{\mathcal{I}})} - \hat{\mathbf{Z}}'^T \right], \quad (3.6)$$

dónde $\text{inv}(M_R)$ es la matriz inversa de la matriz de rotación M_R que corresponde a la ecuación (2.24), $\hat{\mathbf{Z}}'$ es un vector unitario que coincide con la dirección del eje \mathbf{Z}' y el superíndice T indica la transposición de una cantidad vectorial.

3.2. Simulación de los patrones imagen

En esta sección usamos tres superficies con forma libre para generar los patrones imagen sobre el plano del **CCD**. En cada caso, las superficies con forma libre están representadas

por la expresión 3.1; además, en los tres casos, las superficies tienen los mismos valores de radio de curvatura paraxial y la constante de conicidad, los valores son $r = -100mm$ y $k_o = -0.53$, respectivamente. Los valores para el conjunto de coeficientes de Zernike que definen las deformaciones asociadas a cada superficie se muestran en los reglones de la tabla 3.1. La elección de estos coeficientes C_i es simplemente para ilustrar el funcionamiento del algoritmo de reconstrucción que fue descrito en la sección 2.3.

Parámetro (mm)	C_0	C_1	C_2	C_9	C_{13}	C_{17}	C_{19}	C_{22}	C_{27}
Caso 1	-0.4	-0.1	0.23	-	-	-0.20	-	-	-0.14
Caso 2	0.55	0.1	0.22	0.31	-	-	-	-0.35	-
Caso 3	0.8	0.25	-0.1	-	0.18	-	0.22	-	-

Tabla 3.1: Coeficientes de Zernike de las deformaciones asociadas a cada superficie.

Para realizar las simulaciones, consideramos que la posición del pinhole \vec{h} y los ángulos (ϕ, θ) involucrados en la matriz de rotación M_R son los que están listados en la tabla 2.2, los cuales son productos de la calibración del sistema de medición. Para llevar a cabo las simulaciones primeramente debemos diseñar la pantalla nula, para esto elegimos que la superficie de referencia sea una esfera de radio $r_e = 100mm$, en la figura 3.1 se muestra el mapa de alturas de la esfera. La imagen que se desea observar en el plano $X'-Y'$ es un arreglo de puntos igualmente espaciados en las direcciones vertical y horizontal. La separación entre dos puntos adyacentes es de $155\mu m$. El cálculo de los puntos \vec{Q} que componen a la pantalla nula lo realizamos considerando el procedimiento descrito en el capítulo 2, en la sección 2.1. Particularmente, debemos aplicar la ecuación (2.14).

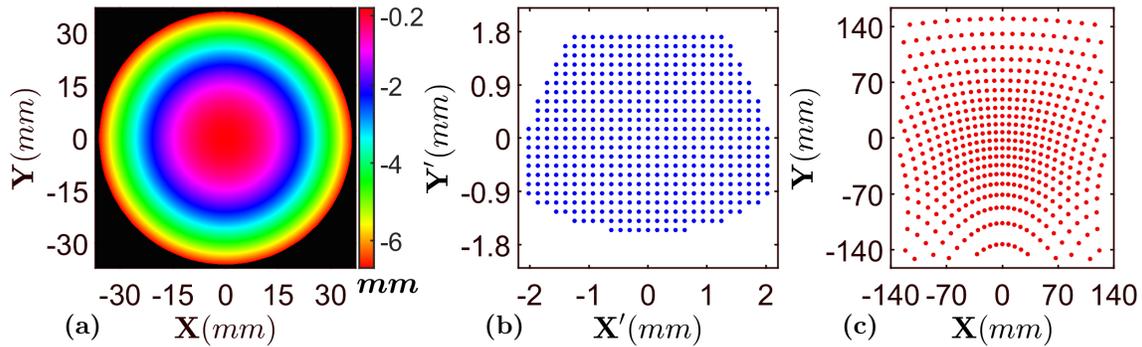


Figura 3.1: (a) Mapa de alturas de la superficie esférica utilizada para aplicar el método de pantalla nulas. (b) Imagen ideal. (c) Puntos que componen a la pantalla nula.

Las imágenes sintéticas sobre el plano $X'-Y'$, las calculamos utilizando el procedimiento descrito a lo largo de la sección 3.1. Para resolver simultáneamente las ecuaciones (3.4a) y (3.4b), implementamos las rutinas computacionales en **Matlab**. Las figuras 3.2(a) y 3.2(d) muestran el mapa de alturas $\Phi(x, y)$ y el conjunto de puntos que componen a la imagen sintética correspondiente al caso 1 que se muestra en la tabla 3.1. Las figuras 3.2(b) y 3.2(e) corresponden al caso 2. Mientras que las figuras 3.2(c) y 3.2(f) corresponden al caso 3. Si las superficies coinciden con una esfera de radio $r_e = 100mm$, la imágenes sintéticas mostradas en las figuras 3.2(d)-(f) deberían ser iguales a la imagen ideal mostrada en la figura 3.1(b). Al

observar, detenidamente, las imágenes sintéticas que se muestran en las figuras 3.2(a)-(c), es claro que en los tres casos las superficies propuestas carecen de simetría de revolución.

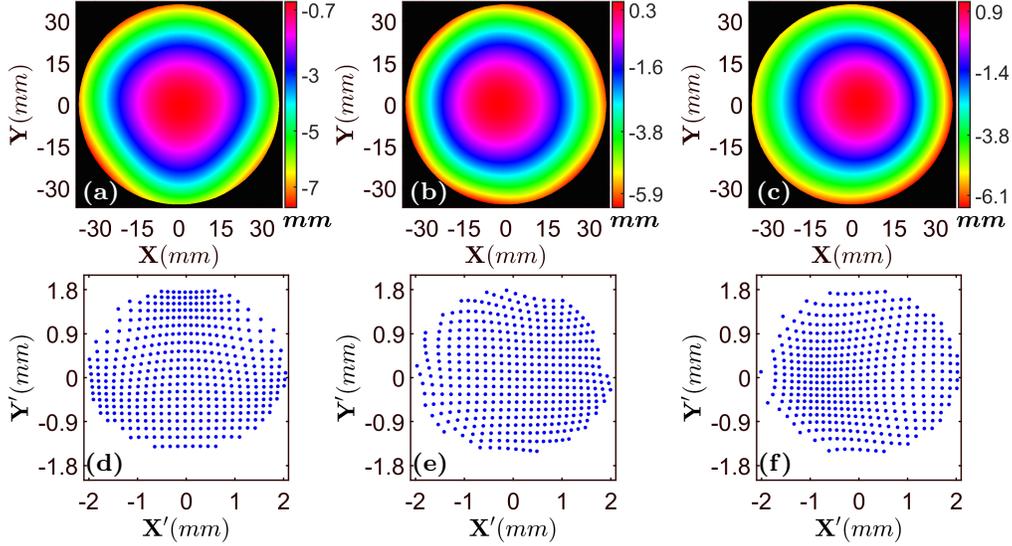


Figura 3.2: Mapas de alturas $\Phi(x, y)$ que corresponden a: (a) caso 1, (b) caso 2 y (c) caso 3. Imágenes sintéticas calculadas considerando las superficies con forma libre descritas por: (d) caso 1, (e) caso 2 y (f) caso 3.

Ahora aplicaremos el algoritmo de reconstrucción asumiendo que se conocen los parámetros del arreglo experimental y los puntos que componen las imágenes sintéticas mostradas en las figuras 3.2(d)-(f). Los polinomios involucrados en la ecuación (2.41) son los polinomios de Taylor, el número de polinomios que se utiliza es $J = 45$ y el orden más alto de los polinomios es 8. Los valores extremos del intervalo (2.56) son $t_0 = -5mm$ y $t_K = 5mm$, y el número de particiones del intervalo es $K = 100$. El número de iteraciones que se realiza en cada valor t_k es $L = 10$. El algoritmo inicia la reconstrucción utilizando un plano posicionado en t_k ortogonal al eje \mathbf{Z} . Como resultado de la aplicación del algoritmo iterativo se obtiene una nube de puntos que se denota por $\{(x, y, z)\}$, utilizando estos datos podemos cuantificar qué tan cercana es la nube de puntos a las superficies ideales que generaron las imágenes sintéticas. En las figuras 3.3(a)-(c) se muestran las diferencias $\Delta\Phi$ entre cada superficie reconstruida y la superficie ideal descrita por la ecuación (3.1).

Parámetro	pv	rms	T_e	t_k	δ_k	Convergencia l
Caso 1	$0.28nm$	$0.05nm$	$27.63s$	$-0.40mm$	8.02×10^{-8}	8
Caso 2	$0.42nm$	$0.07nm$	26.81	$0.55mm$	2.28×10^{-8}	9
Caso 3	$0.53nm$	$0.12nm$	$25.03s$	$1.20mm$	3.30×10^{-7}	8

Tabla 3.2: Coeficientes de Zernike de las deformaciones asociadas a cada superficie.

A partir de las diferencias $\Delta\Phi$, calculamos el error pico-valor pv y el error cuadrático medio rms . En la parte superior de las gráficas 3.3(a)-(c) y en la tabla 3.2 están los valores de los errores pv y rms , los cuales son del orden de algunas fracciones de $1nm$; es decir, la superficie reconstruida es muy parecida a la superficie bajo estudio. Las figuras 3.3(d)-(f)

muestran el comportamiento del error δ_k como función de la posición t_k de la superficie auxiliar a lo largo del eje Z (ver figura 2.9). Después de observar detenidamente este conjunto figuras, es evidente la existencia de un mínimo global en las gráficas δ_k vs t_k . En el valor mínimo el algoritmo reconstruye la nube de puntos más próxima a la superficie real.

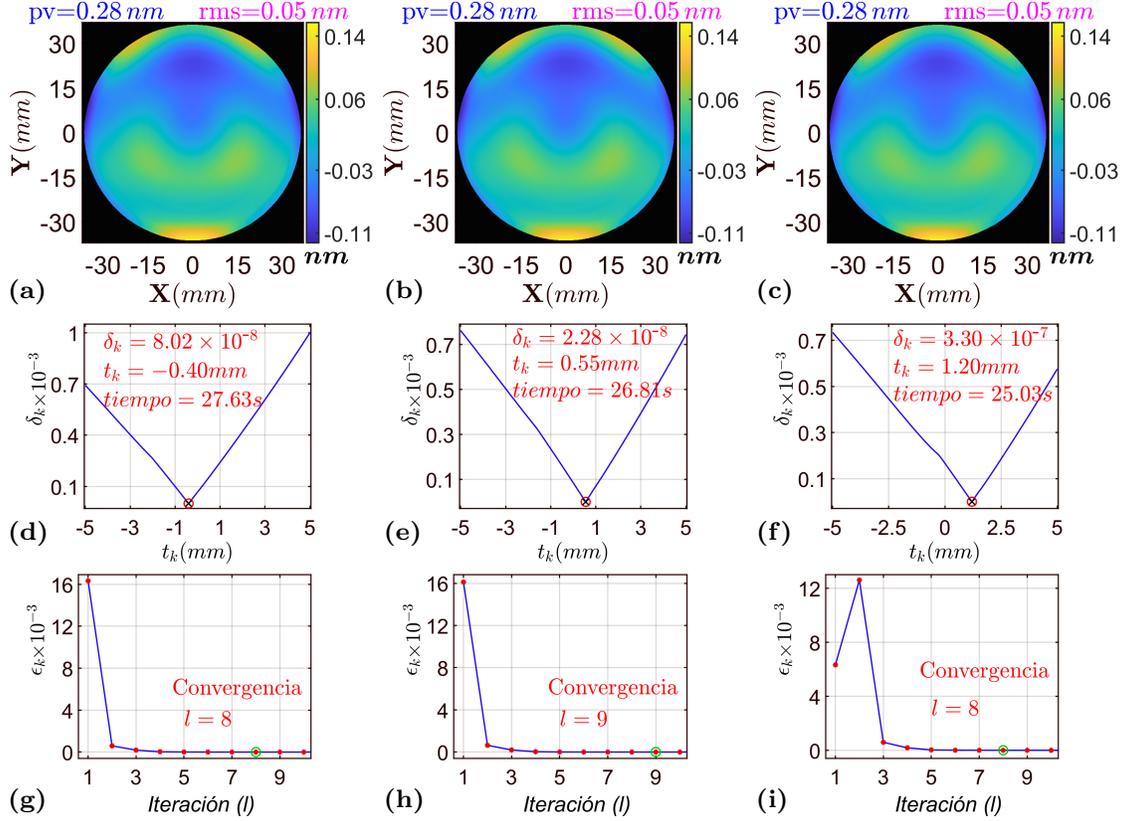


Figura 3.3: Diferencias $\Delta\Phi$ entre la superficie reconstruida y la superficie que genera las imágenes sintéticas: (a) caso (1), (b) caso 2 y (c) caso (3). Gráficas δ_k vs t_k que muestran la posición t_k para la cual el error δ_k es mínimo: (d) caso 1, (e) caso 2 y (f) caso 3. Convergencia del algoritmo: (g) caso 1, (h) caso 2 y (i) caso 3.

En las figuras 3.3(g)-(i) se expone la convergencia del algoritmo iterativo cuando la reconstrucción se realiza en el valor t_k para el cual δ_k es mínimo. Gráficamente, la convergencia del algoritmo es evidente a partir de la iteración $l = 5$. En la tabla 3.2 están listados los valores del tiempo de ejecución (T_e), la posición t_k en la que se reconstruye la superficie más parecida a la superficie real y el número de la iteración en la que ocurre la convergencia del algoritmo de reconstrucción.

Otra manera de convencernos, aún más, de la factibilidad del algoritmo de reconstrucción, es mediante el ajuste de la expresión (3.1) a la nube de puntos que obtenemos al aplicar el algoritmo. Como resultado del ajuste obtuvimos el radio de curvatura r , la constante de conicidad k_o y el conjunto de coeficientes $\{C_i\}$ que están asociados a cada superficie utilizada para generar las imágenes sintéticas mostradas en las figuras 3.2(d)-(f). En la tabla 3.3 se listan el conjunto de parámetros que son resultados del ajuste y que describen a la superficie

que mejor se ajusta a cada nube de puntos. Además, los parámetros recuperados se comparan con los parámetros ideales (ver tabla 3.1) y se calcula el error porcentual. Los valores de los errores porcentuales listados en la tabla 3.3, en general, son menores a $2 \times 10^{-3} \%$, esto significa que el algoritmo propuesto es capaz de recuperar superficies muy cercanas a las utilizadas en las simulaciones presentadas a lo largo de esta sección.

Caso 1			Caso 2			Caso 3		
	Valor	Error(%)		Valor	Error(%)		Valor	Error(%)
k_o	-0.530	5.071×10^{-5}	k_o	-0.530	2.173×10^{-5}	k_o	-0.529	1.728×10^{-3}
r	-99.999	6.053×10^{-6}	r	-99.999	5.314×10^{-6}	r	-100.000	4.851×10^{-5}
C_0	-0.399	1.307×10^{-3}	C_0	0.550	8.795×10^{-4}	C_0	0.800	5.673×10^{-4}
C_1	-0.100	1.559×10^{-3}	C_1	0.099	1.451×10^{-3}	C_1	0.249	7.032×10^{-4}
C_2	0.230	2.224×10^{-6}	C_2	0.220	9.193×10^{-6}	C_2	-0.099	6.306×10^{-6}
C_{17}	-0.199	1.687×10^{-5}	C_9	0.310	4.556×10^{-6}	C_{13}	0.180	2.823×10^{-5}
C_{27}	-0.140	2.272×10^{-5}	C_{22}	-0.349	4.167×10^{-6}	C_{19}	0.219	9.423×10^{-7}

Tabla 3.3: Parámetros resultados del ajuste y sus errores porcentuales asociados.

A partir de los resultados presentados en esta sección podemos concluir que el algoritmo que hemos propuesto puede ser aplicado para la evaluación de superficies ópticas con forma libre. En la siguiente sección mostraremos la evaluación experimental de una superficie convexa con forma libre.

3.3. Resultados experimentales

La superficie bajo estudio que evaluaremos en esta sección es la superficie convexa de una lente progresiva, para la cual solo conocemos el diámetro $D_p=78mm$, el índice de refracción $n_l=1.497$ y la progresión $ADD=2$ Dioptrías. Para construir la pantalla nula, utilizamos una superficie esférica de radio $r_e=100mm$; además, como imagen ideal proponemos a un conjunto de círculos de radio $52\mu m$ igualmente espaciados en las dirección vertical y horizontal. La separación entre dos puntos adyacentes es de $155\mu m$. La imagen ideal se muestra en la figura 3.4(a).

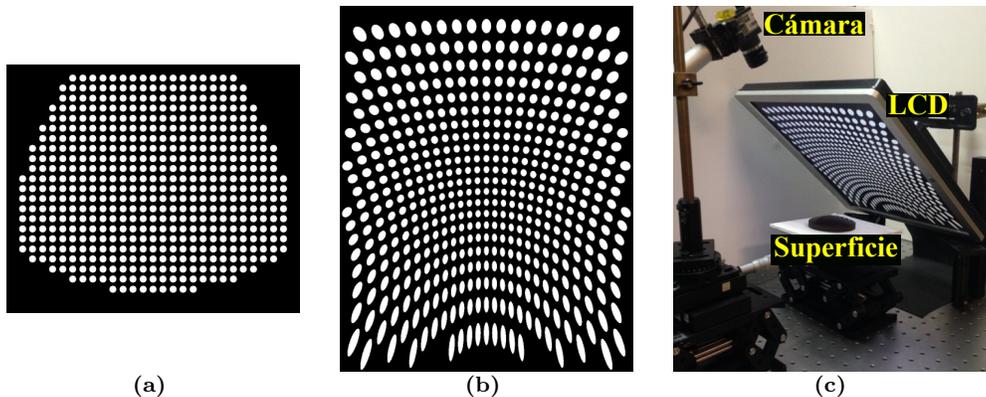


Figura 3.4: (a) Imagen ideal utilizada para diseñar la pantalla nula. (b) Pantalla nula. (c) Arreglo experimental.

Las coordenadas de cada punto \vec{Q} sobre la pantalla nula son calculados mediante la ecuación (2.14). La cámara **CCD** y la lente de la cámara son las mismas que utilizamos en la sección 2.2. Los parámetros necesarios para diseñar la pantalla nula están listados en las Tablas 2.1 y 2.2. Estos parámetros son resultados de la calibración del sistema de medición que se discutió y se implementó en la sección 2.2. La figura 3.4(b) muestra la pantalla nula que resulta de realizar el trazo exacto de rayos que fue descrito en la sección 2.1. La pantalla nula la desplegamos en un monitor **LCD** de la marca HP Compaq con modelo LE1711. Las dimensiones de la **LCD** son 1280×1024 píxeles, cada píxel es un cuadrado cuyos lados tienen una longitud de $0.264mm$. En la figura 3.4(c) se muestra al arreglo experimental que consiste, básicamente, de la cámara, la superficie bajo estudio y la pantalla nula.

Cada píxel sobre la pantalla **LCD** funciona como una fuente puntual. Los rayos inciden sobre la superficie bajo estudio y se reflejan hacia la cámara. Los rayos son colectados por la lente de la cámara y forman un conjunto de manchas brillantes que son registradas por el sensor **CCD**, como se muestra en la figura 3.5(a). Al aplicar un valor umbral a la imagen 3.5(a), generamos una imagen binaria la cual se muestra en la figura 3.5(b). Utilizando la ecuación (2.23), calculamos las coordenadas de los centroides de cada una de las manchas brillantes que componen a la imagen que resulta del producto de las matrices que describen a las imágenes mostradas en las figuras 3.5(a) y 3.5(b). Los centroides de las manchas brillantes se muestran en la figura 3.5(c), estos ya están corregidos por la aberración de distorsión, tal como fue descrito en a sección 2.2.

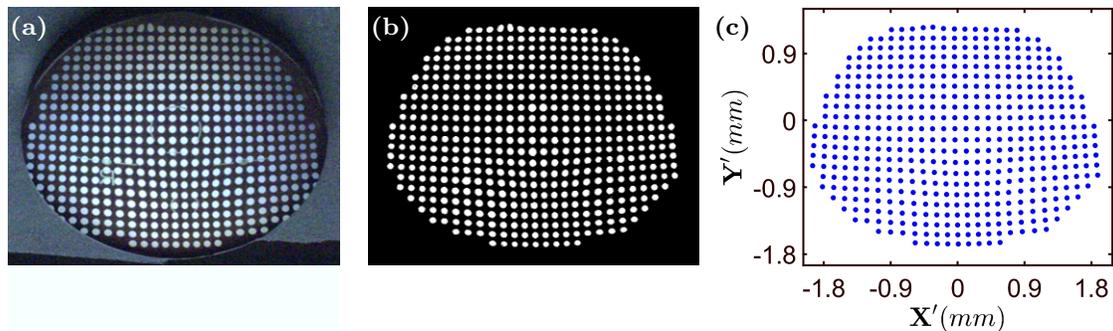


Figura 3.5: Imagen experimental, de las manchas brillantes, correspondiente a la lente progresiva. (b) Imagen umbralizada. (c) Centroides de las manchas brillantes.

Para correlacionar a cada mancha brillante (ver figura 3.5(a)) con su correspondiente objeto en la pantalla nula (ver figura 3.4(b)), desplegamos en la **LCD** un pantalla nula que contiene únicamente al objeto que genera la mancha brillante central de la imagen ideal. Una vez que identificamos la mancha central en la imagen experimental, los centroides experimentales e ideales se superponen coincidiendo en el centroide central. La correspondencia entre los objetos de la pantalla nula y las manchas brillantes experimentales, la realizamos simplemente buscando el centroide ideal más cercano a cada centroide experimental.

3.3.1. Reconstrucción de la superficie bajo estudio

Para aplicar el algoritmo de reconstrucción descrito en la sección 2.3, debemos construir las direcciones $\hat{\mathcal{T}}$ utilizando los centroides experimentales y las ecuaciones (2.25) y (2.26). Consideramos que el parámetro a_i , la posición del pinhole \vec{h} y los ángulos (ϕ, θ) involucrados en la matriz de rotación M_R son los que están listados en la tabla 2.2. El número de polinomios de Taylor que se utiliza es $J = 45$ y el orden más alto de los polinomios es 8. Los valores inicial y final del intervalo (2.56) son $t_0 = -5mm$ y $t_K = 5mm$, respectivamente. El número de particiones del intervalo es $K = 100$. En cada valor t_k se realizan $L = 10$ iteraciones. Una vez que hemos aplicado el algoritmo de reconstrucción, obtenemos la gráfica δ_k vs t_k que se muestra en la figura 3.6(a). En esta gráfica, el valor mínimo de $\delta_k = 1.0 \times 10^{-5}$ se obtiene cuando la superficie auxiliar está posicionada en $t_k = -3.50mm$. La convergencia del procedimiento iterativo se observa en la figura 3.6(b) y ocurre en $l = 9$. El tiempo de ejecución de las rutinas computacionales implementadas es de 28.25s.

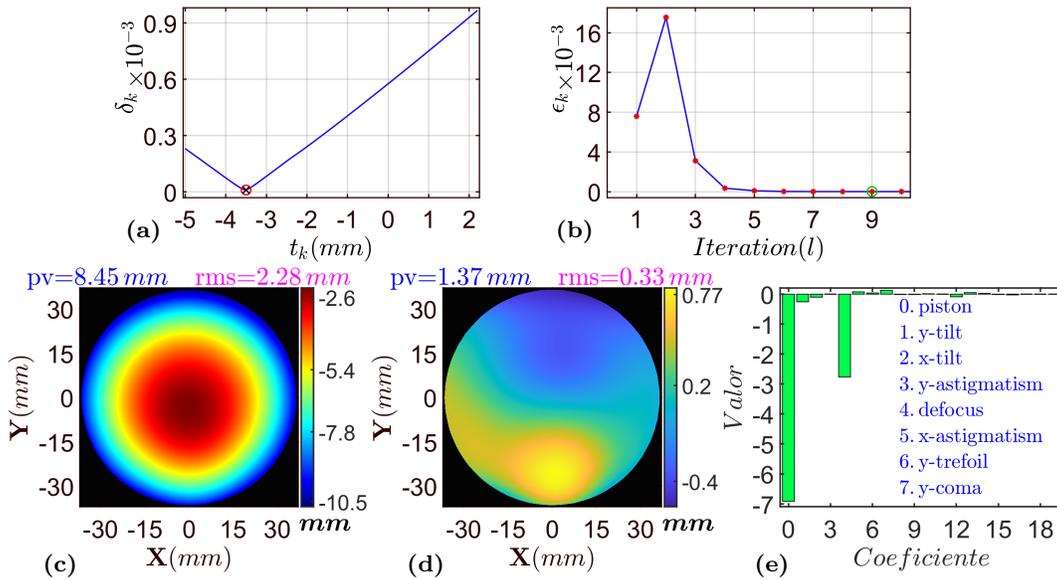


Figura 3.6: (a) Gráfica δ_k vs t_k que muestra la posición t_k para la cual el error δ_k es mínimo. (b) Convergencia del algoritmo. (c) Mapa de alturas de la superficie reconstruida. (d) Mapa correspondiente a las diferencias entre la superficie reconstruida y la cónica que mejor se ajusta a la nube de puntos. (e) Coeficientes de Zernike que resultan del ajuste a los datos $\{(x, y, z)\}$ de la superficie reconstruida.

El mapa de alturas que se muestra en la figura 3.6(c) corresponde a la superficie reconstruida. En la figura 3.6(d) se presenta el mapa de las diferencias entre la superficie reconstruida y la superficie cónica que mejor se ajusta a la nube de puntos recuperada. La superficie cónica tiene un radio de curvatura y una constante de conicidad de $r = -90.00mm$ y $k_o = -0.50$, respectivamente. A partir del mapa 3.6(d) podemos concluir que la superficie reconstruida carece de simetría de revolución; por lo tanto, esto confirma que la superficie bajo estudio es una superficie con forma libre. En la figura 3.6(e) se muestra la contribución de los coeficientes de Zernike para describir a la superficie reconstruida.

3.3.2. Potencias esférica y cilíndrica

La potencia esférica y cilíndrica son cantidades que se acostumbra reportar para describir a una lente progresiva, para calcular estas potencias, proponemos representar a la superficie reconstruida en términos de los primeros 45 polinomios de Zernike [51], su expresión analítica está dada como

$$\mathcal{S}(x, y) = \sum_{i=0}^{44} C_i \mathcal{Z}_i(x, y). \quad (3.7)$$

donde C_i es el coeficiente o la contribución del i -ésimo polinomio de Zernike \mathcal{Z}_i . En la figura 3.6(e) graficamos los valores de los primeros 19 polinomios de Zernike. Utilizando la función $\mathcal{S}(x, y)$ podemos calcular la distribución de potencia esférica \mathbf{F}_e y cilíndrica \mathbf{F}_c en términos de las curvaturas principales k_{min} y k_{max} , de la siguiente manera [52]

$$\mathbf{F}_e = (n_l - 1) \left(\frac{k_{min} + k_{max}}{2} \right), \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{F}_c = (n_l - 1) (k_{min} - k_{max}), \quad (3.8b)$$

donde k_{min} y k_{max} están medidas usualmente a lo largo de las direcciones x y y , pero en general, pueden ser definidas a lo largo de dos direcciones ortogonales entre si. Estas curvaturas son función de la curvatura \mathcal{K}_G Gaussiana y la curvatura media \mathcal{H}_m , estas últimas pueden ser calculadas como [53]

$$\mathcal{K}_G = \frac{\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2}{(1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2)^2}, \quad (3.9a)$$

$$\mathcal{H}_m = \frac{(1 + \Phi_x^2)\Phi_{yy} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + (1 + \Phi_y^2)\Phi_{xx}}{2(1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2)^{3/2}}, \quad (3.9b)$$

donde los subíndices x y y denotan la derivación parcial respecto a x y y , respectivamente. Al considerar las expresiones (3.9a) y 3.9b, las curvaturas principales se calculan como

$$k_{min} = \mathcal{H}_m - \sqrt{\mathcal{H}_m^2 - \mathcal{K}_G}, \quad (3.10a)$$

$$k_{max} = \mathcal{H}_m + \sqrt{\mathcal{H}_m^2 - \mathcal{K}_G}, \quad (3.10b)$$

Las unidades de las potencias esférica y cilíndrica son dioptrías (m^{-1}). Los mapas de distribución de potencia esférica y cilíndrica se muestran en las figuras 3.7(a) y 3.7(b), respectivamente. En ambos mapas se muestra a dos círculos etiquetados como **A** y **B**. El círculo **A** indica la zona para observar objetos lejanos mientras que el círculo **B** se utiliza para ver objetos cercanos. En la figura 3.7(b) notamos que existe una región estrecha que une a las regiones circulares **A** y **B**. Esta región es conocida como canal o corredor, su existencia es una muestra de que el astigmatismo está corregido en esta región. En la figura 3.7(c), graficamos los valores de potencia esférica y cilíndrica a lo largo del canal. La curva

punteada indica que los valores de potencia cilíndrica, a lo largo del canal, están contenidos en el intervalo de 0.13 dioptrías a 0.57 dioptrías, esto implica que al recorrer el canal el astigmatismo cambia muy poco y suavemente.

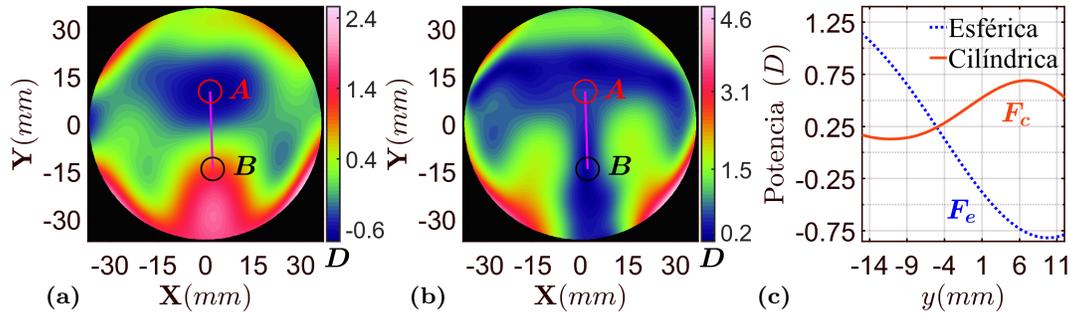


Figura 3.7: (a) Mapa de potencia esférica. (b) Mapa de potencia cilíndrica. (c) Potencia a lo largo del canal de la lente de progresiva.

Nosotros no contamos con la expresión analítica o con la nube de puntos correspondiente al diseño de la superficie convexa de la lente progresiva bajo estudio. Sin embargo, el fabricante sí proporciona el valor del parámetro conocido como progresión o adición, el cual se denota como ADD y está definido como la diferencia de potencia entre las regiones circulares **A** y **B**. El valor para la progresión proporcionado por el fabricante es $ADD_f = 2$ dioptrías. Además, nosotros decidimos medirlo utilizando un lensómetro de la compañía ESSILOR con modelo ALM 700, el resultado fue $ADD_L = 1.97$ dioptrías. También calculamos el valor de la progresión utilizando el mapa de potencia esférica que se muestra en la figura 3.7(a), para este caso el valor de la progresión es $ADD_{exp} = 1.90$ dioptrías. Por lo tanto, los errores porcentuales asociados a ADD_{exp} respecto a $ADD_f = 2$ y $ADD_L = 2$ son 5% y 3.55%, respectivamente. Los valores de los errores porcentuales nos indican que hemos reconstruido una superficie con un comportamiento muy cercano a la superficie real. Sin embargo, para hacer una mejor comparación necesitamos de un método, alternativo al nuestro, para recuperar la forma de la superficie por ejemplo con un perfilómetro.

Por el momento no contamos con otro sistema de medición para realizar la comparación; sin embargo, al observar los mapas de distribución de potencia 3.7(a) y 3.7(b), tenemos certeza de que hemos recuperado las zonas que han sido ampliamente reportadas en otros trabajos que también evalúan las superficies convexas de lentes progresivas. Además, las simulaciones que realizamos respaldan el uso del algoritmo de reconstrucción en la evaluación de superficies con forma libre, bajo condiciones ideales las cuales implican conocer la orientación y posición de cada uno de los elementos que componen al sistema de medición. Por eso hemos desarrollado un método simple de calibración del sistema de medición para disminuir los errores en la reconstrucción de la superficie bajo estudio. Para mejorar la evaluación de la superficie bajo estudio podríamos calcular nuevamente la pantalla nula usando la expresión analítica de la superficie reconstruida e incrementar el número de círculos en la imagen ideal (ver figura 3.4(a)). Pero esto se dejará para un trabajo a futuro.

Capítulo 4

Evaluación del frente de onda generado por superficies con forma libre

4.1. Ecuaciones de Rayces

Para probar la calidad óptica de un sistema como formador de imagen se debe medir el frente de onda que forma el sistema óptico bajo estudio. En particular en este capítulo estamos interesados en reconstruir los frentes de onda que son generados por superficies con forma libre. Estas últimas en general producen (por reflexión o transmisión) frentes de onda cuya geometría se desvía de las geometrías tradicionales (esfera o plano), esto provoca que las mediciones se compliquen al usar las pruebas tradicionales ya sean interferométricas o geométricas. Los resultados que se obtienen con las pruebas interferométricas tienen una alta precisión; sin embargo, tienen problemas para medir frentes de onda altamente aberrados. Una opción para medir los frentes de onda con un mayor grado de aberración son las pruebas geométricas, las más representativas de esta clasificación son las pruebas de Hartmann y Ronchi.

Para llevar a cabo la reconstrucción del frente de onda, las pruebas de Hartmann y Ronchi tienen en común que utilizan la misma teoría matemática [54, 55]. La cual consiste en medir los valores de la aberración transversal de rayo y relacionarlos con las derivadas parciales de la aberración del frente de onda. Juan Rayces fue quien demostró de forma analítica la validez de las siguientes relaciones [56]

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = -\frac{T_x}{r_e - \mathcal{W}}, \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} = -\frac{T_y}{r_e - \mathcal{W}}, \quad (4.1b)$$

donde (T_x, T_y) es la aberración transversal de rayo, \mathcal{W} es la aberración del frente de onda, y r_e es el radio de curvatura del frente de onda esférico de referencia, que puede considerarse como la esfera que mejor se ajusta al frente de onda bajo estudio Φ . En la figura 4.1 se presenta el esquema que utilizó Rayces para encontrar las ecuaciones (4.1a) y (4.1b). La aberración del frente de onda \mathcal{W} fue definida por Rayces como la distancia, a lo largo del rayo de referencia \vec{N} , entre los dos puntos \vec{P}_e y \vec{P} sobre los frentes de onda de referencia y bajo estudio, respectivamente [56].

Todos los rayos de referencia intersecan al plano de observación (**PO**) en su centro denotado por \vec{Q}' . Los rayos reales \vec{n} intersecan al **PO** en los puntos \vec{Q} ; por lo tanto, la aberración transversal se mide respecto a \vec{Q}' como $\vec{T} = \vec{Q} - \vec{Q}'$. El **PO** está localizado en $Z = r_e$, como se aprecia en la figura 4.1. Para recuperar la aberración del frente de onda se deben integrar las ecuaciones (4.1a) y (4.1b), como resultado se obtiene una ecuación integral que puede ser complicada de resolver. Sin embargo, tradicionalmente, para evaluar sistemas ópticos con las pruebas de Hartmann y Ronchi, se acostumbra simplificar las ecuaciones (4.1a) y (4.1b), mediante la suposición de que la aberración del frente de onda es pequeña comparada con el radio de curvatura r_e , es decir $\mathcal{W} \ll r_e$. Lo anterior implica que las ecuaciones de Rayces pueden ser aproximadas por las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} \approx -\frac{T_x}{r_e}, \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} \approx -\frac{T_y}{r_e}, \quad (4.2b)$$

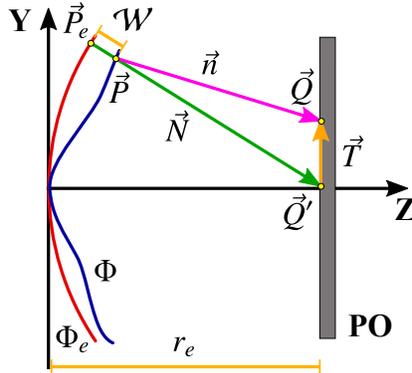


Figura 4.1: Diagrama utilizado para obtener las ecuaciones de Rayces.

En las expresiones (4.2a) y (4.2b) se acostumbra sustituir el símbolo “ \approx ” por “ $=$ ”. Además, estas mismas ecuaciones pueden ser escritas en una sola ecuación vectorial que adopta la siguiente forma

$$\nabla_T \mathcal{W} = -\left(\frac{1}{r_e}\right) (T_x, T_y) \quad (4.3)$$

El cálculo de la aberración del frente de onda \mathcal{W} lo realizamos al integrar la expresión (4.3), a lo largo de una trayectoria \mathcal{C} localizada en el plano **X-Y**, la integral que resulta es la siguiente

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 - \int_{\mathcal{C}} [\nabla_T \mathcal{W} \cdot (dx, dy)] = \mathcal{W}_1 + \left(\frac{1}{r_e}\right) \int_{\mathcal{C}} (T_x dx + T_y dy) \quad (4.4)$$

donde \mathcal{W}_1 y \mathcal{W} son los valores de la aberración del frente de onda en el punto inicial y en el punto final de la trayectoria de integración \mathcal{C} , respectivamente. Usualmente $\mathcal{W}_1 = 0$, pues en ese punto los frentes de onda de referencia y aberrado coinciden. La ecuación (4.4) es la que tradicionalmente se utiliza para reconstruir la aberración del frente de onda en las pruebas de Hartmann y Ronchi. Es evidente que la ecuación (4.4) arroja buenos resultados únicamente

cuando se cumple la condición $\mathcal{W} \ll r_e$. En el año 2012 el profesor Yobani Mejia mostró que la precisión de las ecuaciones de Rayces aproximadas (4.2a) y (4.2b) dependen del número $F/\#$ del sistema óptico bajo estudio [57]. En lo siguiente mostraremos un análisis similar para observar el comportamiento del error asociado a las ecuaciones (4.2a) y (4.2b).

4.2. Errores asociados al uso de las ecuaciones aproximadas de Rayces

En lo siguiente mostraremos un análisis del error porcentual asociado al cálculo de las derivadas parciales de \mathcal{W} cuando se utilizan las ecuaciones (4.2a) y (4.2b). Para realizar el análisis, proponemos que el frente de onda bajo estudio Φ tenga la forma de una cónica de revolución y la expresión analítica es la siguiente

$$F_c = y^2 - 2r_c\phi + (k_o + 1)\phi^2 = 0. \quad (4.5)$$

donde r_c es el radio de curvatura, k_o es la constante de conicidad y $\phi(y)$ es la curva que describe al frente de onda Φ en el plano **Y-Z**. Por el momento, nuestro análisis está restringido al plano **Y-Z**. Los puntos sobre Φ se escriben como

$$y = y_e + \mathcal{W}N_x, \quad (4.6a)$$

$$\phi = \phi_e + \mathcal{W}N_z, \quad (4.6b)$$

donde $P_e = (y_e, \phi_e)$ es un punto sobre el frente de onda esférico y $\hat{N} = (N_x, N_y)$ es la dirección del rayo de referencia o de la normal al frente de onda esférico. Al sustituir las expresiones (4.6a) y (4.6b) en la ecuación (4.5), obtenemos una ecuación de segundo grado para \mathcal{W}

$$\mathcal{W}^2 + 2\mathcal{W}(N_z\phi_e - N_zr_c + N_yy_e) + \phi_e^2 - 2r_c\phi_e + y_e^2 = 0. \quad (4.7)$$

Al resolver la ecuación (4.7), los valores para la aberración \mathcal{W} se calculan como

$$\mathcal{W} = -(N_z\phi_e - N_zr_c + N_yy_e) - \sqrt{(N_z\phi_e - N_zr_c + N_yy_e)^2 - (\phi_e^2 - 2r_c\phi_e + y_e^2)}. \quad (4.8)$$

Consideramos que el frente de onda bajo estudio Φ tiene asociados los siguientes parámetros $k = -0.98$ y $r_c = 80$. El frente de onda de referencia Φ_e es una esfera; por lo tanto, los parámetros que lo definen son $k = 0$ y $r_e = 80$. En los puntos \vec{P}_e sobre el frente de onda de referencia calculamos las normales o rayos de referencia \vec{N} y su intersección con el frente de onda bajo estudio Φ en los puntos \vec{P} mediante la ecuación (4.8). Para calcular el error porcentual E_w asociado a la derivada $\partial\mathcal{W}/\partial y$, que es producto del uso de la expresión

aproximada (4.2b) en lugar de la expresión exacta (4.1b), utilizamos la siguiente ecuación

$$E_w = 100 \% \left[\frac{\underbrace{\left(-\frac{T_y}{r_e - \mathcal{W}} \right)}_{\text{Ecuación exacta}} - \underbrace{\left(-\frac{T_y}{r_e} \right)}_{\text{Ecuación aproximada}}}{\underbrace{\left(-\frac{T_y}{r_e - \mathcal{W}} \right)}_{\text{Ecuación exacta}}} \right] = 100 \% \left(\frac{\mathcal{W}}{r_e} \right). \quad (4.9)$$

Los segmentos de línea localizados entre los perfiles de Φ_e y Φ , que se muestran en la figura 4.2(a), corresponden a los valores de la aberración del frente de onda y se calculan con la ecuación (4.8). Además, en la misma figura se muestra la prolongación de los rayos reales \vec{n} . Al observar la figura (4.2)(a) notamos que en la periferia los valores para \mathcal{W} se incrementan respecto a la zona central; por lo tanto, la aproximación $\mathcal{W} \ll r_e$ no se cumple.

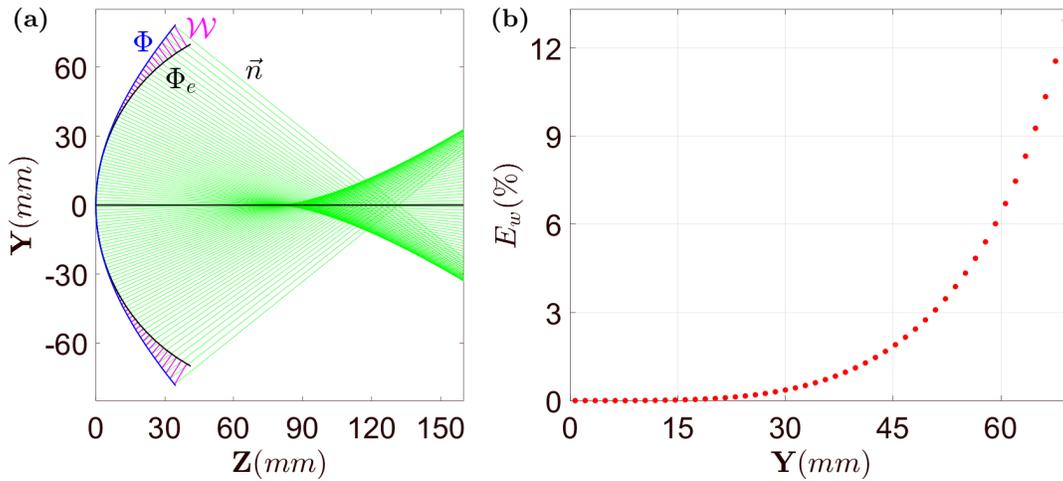


Figura 4.2: (a) Frentes de onda esférico (de referencia) y elíptico (de prueba). (b) Error porcentual E_w como función de la altura a la que comienza a propagarse el rayo desde el frente de onda.

En la figura (4.2)(b) se muestra el comportamiento del error E_w como función de la altura y a partir de la cual el rayo comienza a propagarse. Para valores pequeños de y el error es despreciable; por lo tanto, la expresión (4.2b) se comportará como (4.1b). Sin embargo, para zonas alejadas del eje óptico el error puede alcanzar valores cercanos al 13%. Lo anterior implica que la reconstrucción de la aberración \mathcal{W} utilizando la integral (4.4) estará afectada fuertemente por el error E_w . Para entender la relevancia de la gráfica 4.2(b) utilizaremos el trazo de rayos que se muestra en la figura 4.3(a), en la cual se logra apreciar a un conjunto de rayos paralelos que inciden sobre una lente biconvexa.

El frente de onda Φ que emerge de la lente se desvía, en la zona marginal, del frente de onda esférico Φ_e cuyo centro está en el punto focal posterior que coincide con el plano **PO**. Para evitar que el cálculo de la aberración del frente de onda se vea afectado por el error descrito en la gráfica mostrada en la figura 4.2(b), no deberíamos utilizar los rayos que provienen de las zonas marginales pues allí el error E_w tiene una contribución importante. Lo anterior

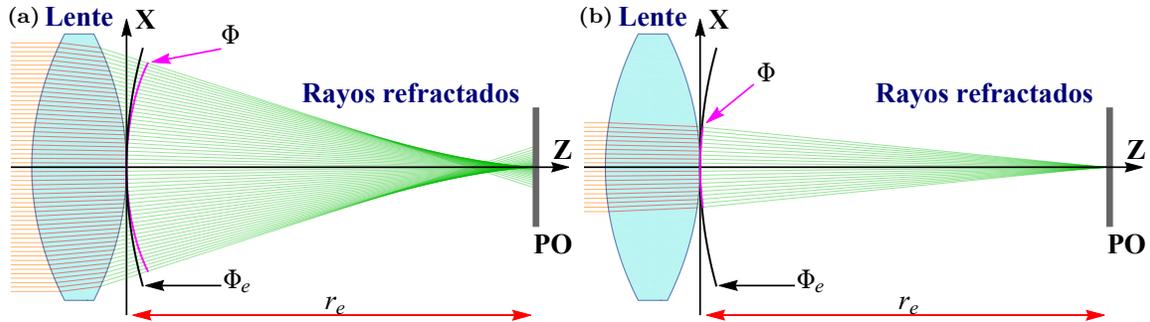


Figura 4.3: (a) Trazo de rayos considerando toda la apertura de la lente. (b) Trazo de rayos que muestra la región en la que se pueden aplicar las ecuaciones de Rayces.

implica que la evaluación del frente de onda debería restringirse a la región central o zona paraxial de la lente, como se muestra en la figura 4.3(b). Esto explica por que las pruebas de Hartmann y Ronchi están limitadas a la evaluación de sistemas ópticos con $F/\# > 1$.

Con el objetivo de realizar la evaluación completa del frente de onda que produce un sistema óptico, en trabajos previos hicimos la propuesta medir las deformaciones del frente de onda respecto a un frente de onda no esférico en lugar de recuperar la aberración del frente de onda [58]. Como resultado, encontramos una ecuación vectorial exacta que permite calcular la deformación del frente de onda, en la siguiente sección se discutirá cómo deducirla.

4.3. Ecuaciones para la deformación del frente de onda

Cuando el frente de onda bajo estudio se desvía considerablemente de la geometría esférica ocurre que los valores que toma \mathcal{W} son comparables con el radio de curvatura r_e ; por lo tanto, despreciar a \mathcal{W} en el denominador de las expresiones (4.1a) y (4.1b) resulta en una mala aproximación. Nuestra propuesta es considerar que el frente de onda de referencia Φ_r tenga una geometría más general y no limitarnos únicamente a una esfera, en este caso los rayos de referencia \vec{N} correspondientes a Φ_r ya no pasan por un punto en común, como se muestra en la figura 4.3 [58]. Por lo tanto, el vector de desviación transversal de rayo \vec{T} ya no se mide a partir del centro del plano de observación; además, la distancia de cada punto \vec{P}_r sobre el frente de onda de referencia al plano de observación ya no es una constante, lo anterior se ilustra en la figura 4.4(a).

Considerando el esquema que se muestra en la figura 4.4(a), utilizaremos dos puntos $\vec{P}_r = (X, Y, Z)$ y $\vec{P} = (x, y, z)$ sobre el frente de onda de referencia y de prueba, respectivamente. Un cambio importante en el esquema que vamos a utilizar respecto al propuesto por Rayces, es que los puntos $\vec{P}_r = (X, Y, Z)$ y $\vec{P} = (x, y, z)$, están unidos por el rayo real \vec{n} correspondiente al frente de onda Φ . Lo anterior se debe a que experimentalmente los únicos rayos que podemos medir son los rayos asociados al frente de onda Φ . Por lo tanto, definimos a la

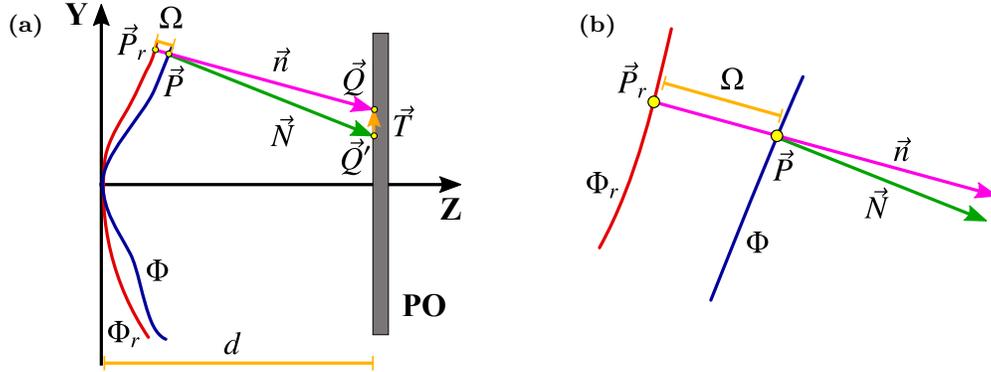


Figura 4.4: (a)-(b) Diagramas utilizados para obtener las ecuaciones que miden la deformación Ω del frente de onda respecto a una referencia no esférica.

deformación Ω del frente de onda como la distancia entre dos puntos, uno de ellos sobre el frente de onda de referencia y el otro sobre el frente de onda de prueba, unidos por el rayo \hat{n} , como se logra apreciar en la figura 4.4(b).

Las coordenadas de los puntos \vec{P} sobre el frente de onda de prueba Φ se pueden escribir en términos de las coordenadas de los puntos \vec{P}_r del frente de onda Φ_r y de la dirección \hat{n} de los rayos reales en la siguiente forma

$$\vec{P} = \vec{P}_r + \Omega \hat{n}. \quad (4.10)$$

donde $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$. La ecuación (4.10) puede ser escrita por componentes de la siguiente manera

$$x = X + n_x \Omega, \quad (4.11a)$$

$$y = Y + n_y \Omega, \quad (4.11b)$$

$$z = Z + n_z \Omega. \quad (4.11c)$$

Utilizando la componente z de \vec{P} , que se muestra en la ecuación (4.11c), la deformación del frente de onda puede ser escrita de la siguiente manera

$$\Omega = \frac{z - Z}{n_z}. \quad (4.12)$$

Suponiendo que $z = z(x, y)$ y $Z = Z(X, Y)$, la derivada parcial de (4.12) respecto a X es la siguiente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{1}{n_z} \left(\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial Z}{\partial X} \right) + (z - Z) \frac{\partial}{\partial X} (n_z^{-1}). \quad (4.13)$$

Aplicando la regla de la cadena a la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial X}$ que aparece en la ecuación (4.13), se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{1}{n_z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} - \frac{\partial Z}{\partial X} \right) - \left(\frac{z - Z}{n_z^2} \right) \frac{\partial n_z}{\partial X}. \quad (4.14)$$

Sustituyendo las expresiones (4.11a) y (4.11b) en (4.14)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{1}{n_z} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \left(1 + n_x \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \Omega \frac{\partial n_x}{\partial X} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(n_y \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \Omega \frac{\partial n_y}{\partial X} \right) - \frac{\partial Z}{\partial X} \right] - \left(\frac{z - Z}{n_z^2} \right) \frac{\partial n_z}{\partial X}. \quad (4.15)$$

Las derivadas parciales involucradas en la expresión (4.15) se pueden escribir en términos de las componentes de la dirección de los rayos \hat{N} y \hat{n} , de la siguiente manera

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{n_x}{n_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{n_y}{n_z}; \quad \frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{N_x}{N_z}; \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = -\frac{N_y}{N_z}. \quad (4.16)$$

Al sustituir a las expresiones (4.16) en (4.15) se obtiene que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{1}{n_z} \left[-\frac{n_x}{n_z} - \frac{n_x^2}{n_z} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{n_x}{n_z} \Omega \frac{\partial n_x}{\partial X} - \frac{n_y^2}{n_z} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{n_y}{n_z} \Omega \frac{\partial n_y}{\partial X} + \frac{N_x}{N_z} \right] - \left(\frac{z - Z}{n_z^2} \right) \frac{\partial n_z}{\partial X}. \quad (4.17)$$

Agrupando a los términos que tengan como factor común a $\frac{\partial \Omega}{\partial X}$ y utilizando la definición de Ω (ver la expresión (4.12)) en el segundo término de lado derecho de la ecuación (4.17), llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} \frac{1}{n_z^2} (n_z^2 + n_x^2 + n_y^2) = \frac{1}{n_z} \left(\frac{N_x}{N_z} - \frac{n_x}{n_z} \right) - \frac{n_x}{n_z^2} \Omega \frac{\partial n_x}{\partial X} - \frac{n_y}{n_z^2} \Omega \frac{\partial n_y}{\partial X} - \left(\frac{\Omega}{n_z} \right) \frac{\partial n_z}{\partial X}. \quad (4.18)$$

Finalmente, utilizando que $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, se obtiene que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = n_z \left(\frac{N_x}{N_z} - \frac{n_x}{n_z} \right) - \Omega \left(n_x \frac{\partial n_x}{\partial X} + n_y \frac{\partial n_y}{\partial X} + n_z \frac{\partial n_z}{\partial X} \right). \quad (4.19)$$

Sacamos el operador $\partial/\partial X$ del paréntesis que se encuentra en el segundo término del lado derecho de la expresión (4.19); entonces, la ecuación (4.19) adopta la siguiente forma

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = n_z \left(\frac{N_x}{N_z} - \frac{n_x}{n_z} \right) - \frac{\Omega}{2} \frac{\partial}{\partial X} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (4.20)$$

Pero como ya lo mencionamos $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$; entonces, el segundo término del lado derecho es cero, esto nos lleva a la siguiente expresión

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = n_z \left(\frac{N_x}{N_z} - \frac{n_x}{n_z} \right). \quad (4.21)$$

Con un desarrollo análogo al que se hizo para obtener la ecuación (4.21), podemos deducir la derivada parcial $\partial \Omega / \partial Y$. Considerando las dos expresiones para las derivadas parciales, se obtiene la siguiente expresión vectorial

$$\nabla_T \Omega = \left[n_z \left(\frac{N_x}{N_z} - \frac{n_x}{n_z} \right), n_z \left(\frac{N_y}{N_z} - \frac{n_y}{n_z} \right) \right]. \quad (4.22)$$

Las expresión (4.22) es exacta, simple y corresponde al gradiente transversal de Ω definido en el plano X-Y [59]. Hay dos diferencias evidentes con las ecuaciones de Rayces, la primera es que el frente de onda de referencia es arbitrario pero puede ser representado mediante una expresión analítica bien definida. La segunda diferencia radica en que la ecuación (4.22) está escrita en términos de las direcciones de los rayos de referencia \vec{N} y los rayos reales \vec{n} , en lugar de la aberración transversal de rayo. A lo largo de la deducción no hay aproximaciones para derivar la ecuación (4.22); sin embargo, su evaluación numérica involucra algunas aproximaciones que serán discutidas en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Cálculo de las deformaciones del frente de onda de onda

En el capítulo 4 hicimos la propuesta de medir las deformaciones del frente de onda en lugar de las aberraciones. Como resultado encontramos una expresión vectorial para calcular las deformaciones del frente de onda. En lo siguiente mostraremos cómo aplicar la ecuación (4.22) para recuperar las deformaciones Ω del frente de onda bajo estudio. Gracias a la versatilidad de la ecuación vectorial (4.22), proponemos implementar un algoritmo iterativo para calcular las deformaciones cambiando al frente de onda de referencia hasta que las diferencias entre los frentes de onda bajo estudio y de referencia sean pequeñas. Para validar el algoritmo, primeramente implementaremos una serie de simulaciones numéricas y posteriormente aplicaremos el algoritmo a un caso experimental. Además, haremos una comparación entre los resultados que produce nuestra propuesta y los resultados que arrojan las ecuaciones de Rayces.

5.1. Simulación de patrones sobre el plano de observación

El esquema del sistema de medición que proponemos para evaluar al frente de onda que genera una lente progresiva, es el que se muestra en la figura 5.1(a). Un haz colimado incide sobre la cara convexa de una lente progresiva, esta cara es una superficie con forma libre. La superficie posterior tiene una geometría esférica. Frente a la superficie posterior de la lente se coloca una pantalla de agujeros que identificaremos como la pantalla de Hartmaan (PH), como se muestra en la figura 5.1(b). A través de cada agujero pasa un haz luminoso cuya dirección se denota por el vector unitario \hat{n} .

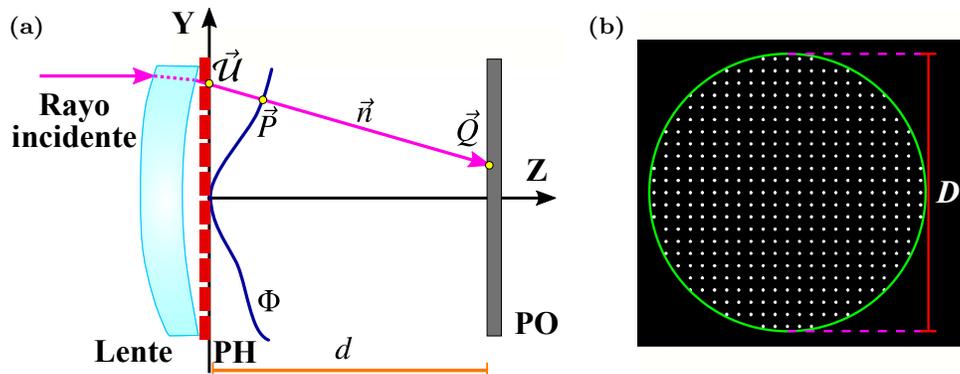


Figura 5.1: (a) Esquema del sistema de medición. (b) Ejemplo de la Pantalla de Hartmann.

El conjunto de haces refractados por la lente progresiva se intersecan con una pantalla opaca

a la que denominamos como el plano de observación (**PO**) sobre el cual se forma un patrón de manchas brillantes, en la práctica, este último puede ser capturado con una cámara que cuenta con un sensor **CMOS**. La separación entre el plano de observación y la pantalla de Hartmann se denota por d .

5.1.1. Cálculo del patrón de manchas brillantes

El objetivo de esta sección es mostrar cómo calcular los patrones de manchas brillantes sobre la pantalla opaca, considerando que el frente de onda bajo estudio cumple que $\Phi = \mathcal{G}(x, y)$. En particular utilizaremos la base de los polinomios de Zernike para representar al frente de onda Φ [51]. El problema que debemos resolver consiste en obtener los rayos \vec{n} o vectores normales cuya prolongación hacía la pantalla de Hartmann logran pasar a través de los agujeros, como se muestra en la figura 5.1(a). Lo anterior es equivalente a decir que la dirección \hat{n} del rayo debe satisfacer las siguientes dos condiciones

$$\hat{n} = \frac{\vec{P} - \vec{U}}{\|\vec{P} - \vec{U}\|}, \quad (5.1a)$$

$$\hat{n} = \frac{\left(-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad (5.1b)$$

donde $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ son las coordenadas de los centros de los agujeros que componen a la pantalla de Hartmann y $\vec{P} = (x, y, \mathcal{G}(x, y))$ representa a los puntos sobre el frente de onda Φ . Al manipular algebraicamente las componentes de las expresiones vectoriales que aparecen en (5.1b) y (5.1b), obtenemos lo siguiente

$$(x - U_x) + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\right) (\mathcal{G} - U_z) = 0, \quad (5.2a)$$

$$(y - U_y) + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}\right) (\mathcal{G} - U_z) = 0. \quad (5.2b)$$

Como ya lo mencionamos $\Phi = \mathcal{G}(x, y)$; por lo tanto, las expresiones (5.2a) y (5.2b) forman un conjunto de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas x y y . Al resolverlas simultáneamente de forma numérica obtenemos a los puntos $(x, y, \mathcal{G}(x, y))$ sobre el frente de onda que cumplen con las condiciones que se muestran en las ecuaciones (5.2a) y (5.2b). Para encontrar el patrón de puntos sobre el plano de observación debemos calcular los vectores normales \vec{n} a Φ mediante la expresión (5.1b). Después debemos prolongarlos hasta intersecar al plano de observación posicionado en $\mathbf{Z} = d$. La posición \vec{Q} de cada mancha puede ser escrita como

$$\vec{Q} = \left(x + \frac{n_x}{n_z} (d - \mathcal{G}), y + \frac{n_y}{n_z} (d - \mathcal{G}), d\right) \quad (5.3)$$

Proponemos que el frente de onda bajo estudio sea representado por una expresión analítica, la cual será una combinación lineal de algunos polinomios de Zernike y puede ser escrita de la siguiente manera

$$\mathcal{G}(x, y) = \sum_{i=0}^{30} C_i \mathcal{Z}_i(x, y). \quad (5.4)$$

donde C_i es el coeficiente o la contribución del polinomio de Zernike \mathcal{Z}_i a la representación del frente de onda Φ . Proponemos utilizar tres frentes de onda cuyos coeficientes están listados en la tabla (5.1), para calcular su correspondiente patrón de manchas brillantes sobre el plano de observación. Las unidades de los coeficientes están en milímetros.

Coeficiente	C_0	C_3	C_4	C_7	C_{12}	C_{17}	C_{30}
Φ_1	2.141	-0.180	1.200	0.300	–	0.060	-0.120
Φ_2	5.542	-0.450	3.200	–	–	–	–
Φ_3	4.723	–	2.600	–	-0.100	–	–

Tabla 5.1: Coeficientes de Zernike utilizados para representar a tres frentes de onda Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 .

A la izquierda de la figura 5.2 se muestran los mapas de alturas correspondientes a los polinomios de Zernike $\{\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4, \mathcal{Z}_7, \mathcal{Z}_{17}, \mathcal{Z}_{30}\}$, con los cuales se hace la combinación lineal para representar al frente de onda Φ_1 . Los valores de los coeficientes están en el segundo renglón de la tabla 5.1. El mapa de alturas de Φ_1 se muestra a la derecha de la figura 5.2. Al observar detenidamente el mapa de alturas de Φ_1 es evidente que carece de simetría de revolución.

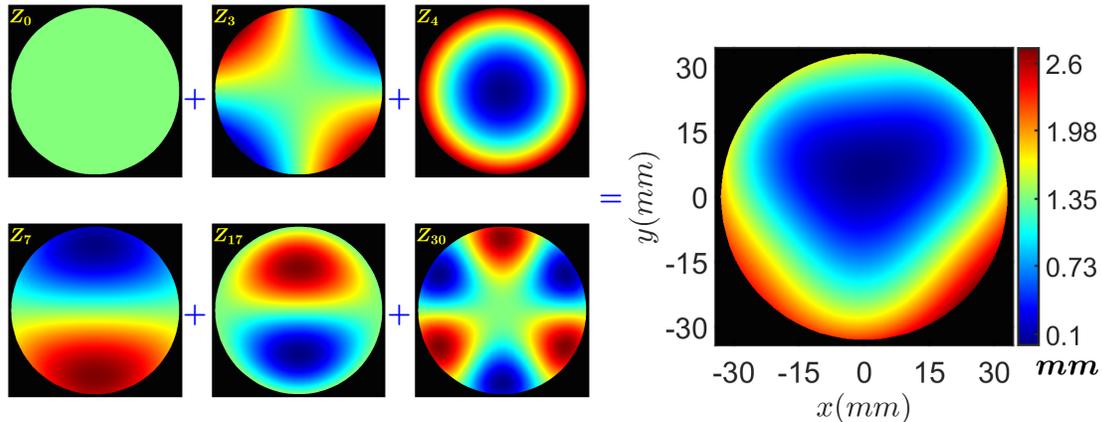


Figura 5.2: Los polinomios de Zernike que componen al frente de onda Φ_1 .

El segundo frente de onda Φ_2 que se utiliza en las simulaciones está compuesto por tres polinomios de Zernike $\{\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4\}$, sus mapas de alturas se muestran a la izquierda de la figura 5.3 y a la derecha se muestra el mapa correspondiente al frente de onda Φ_2 , es evidente que el frente de onda está afectado por astigmatismo. Los valores de los coeficientes están en el tercer renglón de la tabla 5.1.

Finalmente, proponemos un tercer frente de onda Φ_3 el cual está compuesto por tres polinomios de Zernike $\{Z_0, Z_4, Z_{12}\}$ sus mapas de alturas se muestran a la izquierda de la figura 5.4 y a la derecha se muestra el mapa correspondiente al frente de onda Φ_3 . Los valores de los coeficientes están en el cuarto renglón de la tabla 5.1. En este caso notamos que el frente de onda tiene simetría de revolución. Los valores de los coeficientes de Zernike que definen a cada uno de los frentes de onda Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 fueron elegidos simplemente para mostrar que es factible utilizar la ecuación vectorial (4.22) en la evaluación de las deformaciones de los frentes de onda generados por superficies con forma libre.

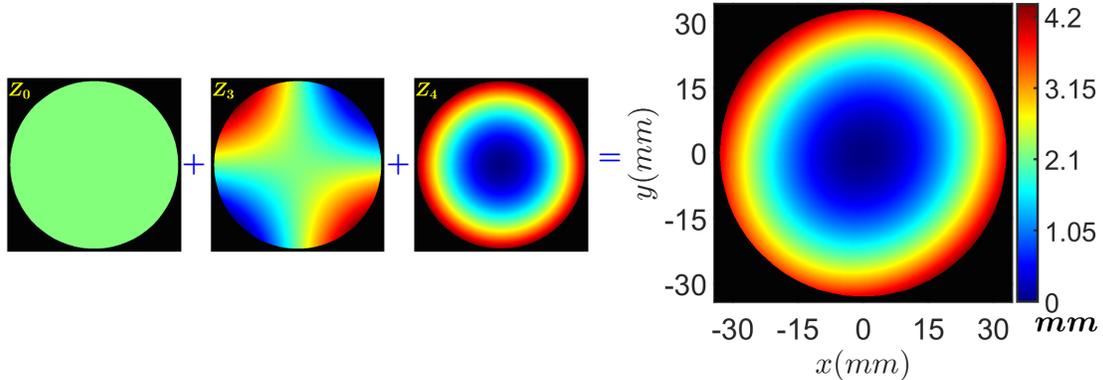


Figura 5.3: Los polinomios de Zernike que componen al frente de onda Φ_2 .

La pantalla de Hartmann está localizada en el plano X - Y . Además, proponemos que está compuesta por un conjunto de agujeros igualmente espaciados en las direcciones x y y . La separación entre dos agujeros adyacentes es de $3mm$. El conjunto de agujeros está contenido en un círculo de diámetro $D = 68$, como se ilustra en la figura 5.1(b). La separación entre el plano de observación y la pantalla de agujeros es $d = 86mm$.

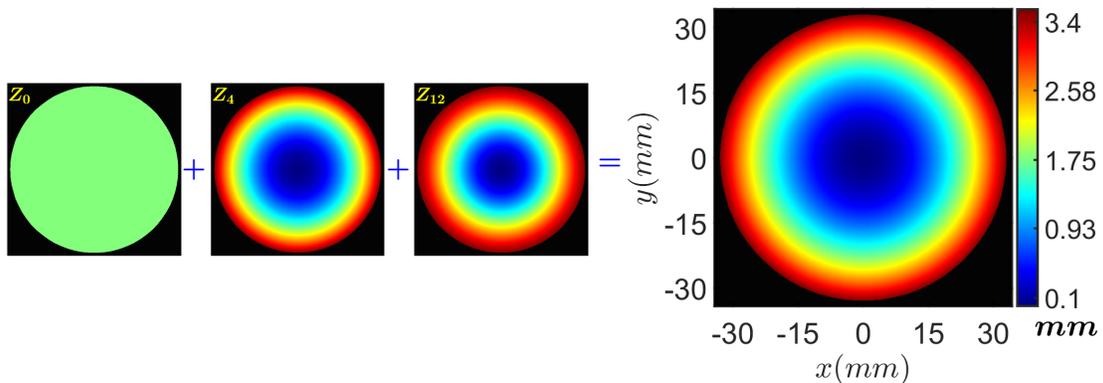


Figura 5.4: Los polinomios de Zernike que componen al frente de onda Φ_3 .

Utilizamos el programa **Matlab** para implementar las rutinas computacionales necesarias para resolver numéricamente las ecuaciones (5.2a) y (5.2b) y así obtener los puntos (x, y, \mathcal{G}) sobre el frente de onda. En estos puntos calculamos la dirección \hat{n} del rayo mediante la ecuación (5.1b). Finalmente, al aplicar la ecuación (5.3) se obtiene el patrón de puntos \vec{Q} sobre el plano de observación. En las figuras 5.5(a)-(c) se muestra los patrones que forman los rayos \vec{n} en el plano de observación. Al observarlos detenidamente, es evidente que la

distribución de los puntos \vec{Q} se desvían fuertemente de la posición \vec{U} de los agujeros en la pantalla Hartmann, la cual se muestra en la figura 5.1(b). Para recuperar los valores de las deformaciones del frente de onda bajo estudio, consideramos a los patrones que se muestran en las figuras 5.5(a)-(c) como si hubieran sido obtenidos experimentalmente. En la siguiente sección mostraremos cómo utilizar la expresión (4.22) en un algoritmo iterativo.

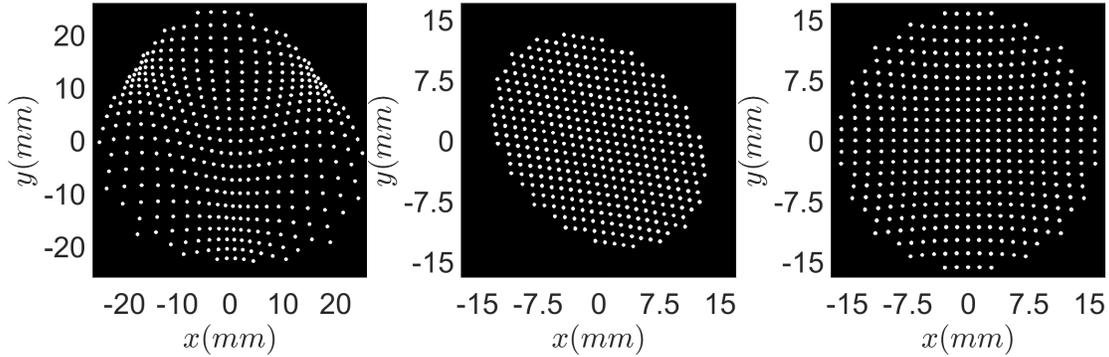


Figura 5.5: Patrones simulados considerando los tres frentes de onda definidos en la tabla 5.1: (a) caso 1, (b) caso 2 y (c) caso 3.

5.1.2. Reconstrucción de las deformaciones Ω

En esta sección haremos una descripción detallada del proceso de reconstrucción de las deformaciones Ω del frente de onda bajo estudio. Aprovechamos la estructura que tiene la ecuación vectorial (4.22), la cual nos permite utilizar cualquier frente de onda como referencia para calcular las deformaciones Ω . Lo anterior nos llevó a proponer un algoritmo iterativo determinista que consiste en seleccionar de forma iterativa un frente de onda de referencia Φ_r cada vez más cercano al frente de onda bajo estudio Φ [59]. Al avanzar las iteraciones, ocurre que las diferencias entre los frentes de onda bajo estudio y de referencia serán muy pequeñas, lo suficientemente como para considerar que el frente de onda Φ puede ser aproximado por el frente de onda de referencia Φ_s . En la figura 5.6(a) se ilustra el funcionamiento del proceso iterativo que proponemos. El frente de onda de referencia en la primera construcción es un plano.

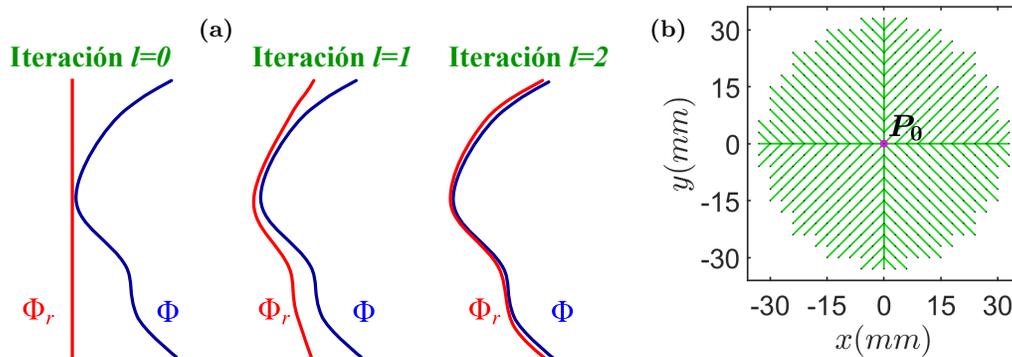


Figura 5.6: Descripción esquemática del funcionamiento del algoritmo iterativo.

5.1.2.1. Primera reconstrucción de Ω ($l = 0$)

La primera reconstrucción ($l = 0$) de las deformaciones Ω del frente de onda Φ se hace mediante una integral de línea cuyo integrando es la ecuación vectorial (4.22), el cálculo se realiza a lo largo de alguna trayectoria \mathcal{C} definida en el plano \mathbf{X} - \mathbf{Y} . La integral que debemos calcular es la siguiente

$$\Omega = \Omega_0 + \int_{\mathcal{C}} \left[n_z \left(\frac{N_x}{N_z} - \frac{n_x}{n_z} \right) dX + n_z \left(\frac{N_y}{N_z} - \frac{n_y}{n_z} \right) dY \right], \quad (5.5)$$

donde Ω_0 es la constante de integración. Para llevar a cabo la reconstrucción, el primer frente de onda de referencia Φ_r será un plano propagándose a largo del eje \mathbf{Z} . Por lo tanto, las normales al frente de onda Φ_r son $\vec{N} = (0, 0, 1)$. El cálculo de la integral (5.5) se realiza mediante el método del trapecio para datos no igualmente espaciados [48], al aplicarlo a la integral (5.5) se obtiene la siguiente expresión

$$\Omega_m = \Omega_0 + \sum_{i=0}^{m-1} \left[(\Omega_{X,i+1} + \Omega_{X,i}) \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2} \right) + (\Omega_{Y,i+1} + \Omega_{Y,i}) \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{2} \right) \right], \quad (5.6)$$

donde Ω_X y Ω_Y son las componentes de la ecuación (4.22). En la expresión (5.6) el subíndice m corresponde al número de puntos que son necesarios para calcular el valor de Ω_m , a lo largo de alguna trayectoria de integración \mathcal{C} . En la figura 5.6(b), se muestran las trayectorias de integración que han sido seleccionadas para aplicar la expresión (5.6), todas las trayectorias inician en el punto $P_0 = (X_0, Y_0, \Omega_0)$. La construcción de las trayectorias se realiza utilizando el algoritmo de Dijkstra [49]. Para la primera reconstrucción de Ω , los puntos (X, Y) corresponden a un dominio discreto que en este caso coincide con la posición de los agujeros sobre la pantalla de Hartmann. Una vez que se ha calculado la deformación del frente de onda, el conjunto de puntos que componen al frente de onda bajo prueba se pueden calcular mediante las ecuaciones paramétricas (4.11a), (4.11b) y (4.11c), de la siguiente manera

$$x^0 = X^0 + n_x \Omega^0, \quad (5.7a)$$

$$y^0 = Y^0 + n_y \Omega^0, \quad (5.7b)$$

$$z^0 = Z^0 + n_z \Omega^0. \quad (5.7c)$$

El superíndice que aparece en las ecuaciones (5.7a), (5.7b) y (5.7c) indica la primera reconstrucción o iteración $l = 0$. Para obtener una representación analítica $\mathcal{S}(x, y)$ del frente de onda bajo estudio, proponemos ajustar a la nube de puntos $\{(x, y, z)\}_0$ la siguiente expresión polinomial

$$\mathcal{S}(x, y) = \sum_{j=1}^J C_j \mathcal{Z}_j, \quad (5.8)$$

donde \mathcal{Z}_j es el j -ésimo polinomio de Zernike y C_j es su coeficiente. El lado derecho de la expresión (5.8) debe ser igual a la coordenada z de cada punto que compone a la nube de puntos. El número de puntos es \mathcal{M} ; entonces, la expresión (5.8) puede ser escrita para cada

punto de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
z_1 &= C_1 \mathcal{Z}_1(x_1, y_1) + C_2 \mathcal{Z}_2(x_1, y_1) \dots + C_J \mathcal{Z}_J(x_1, y_1), \\
z_2 &= C_1 \mathcal{Z}_1(x_2, y_2) + C_2 \mathcal{Z}_2(x_2, y_2) \dots + C_J \mathcal{Z}_J(x_2, y_2), \\
z_3 &= C_1 \mathcal{Z}_1(x_3, y_3) + C_2 \mathcal{Z}_2(x_3, y_3) \dots + C_J \mathcal{Z}_J(x_3, y_3), \\
&\vdots \\
z_M &= C_1 \mathcal{Z}_1(x_M, y_M) + C_2 \mathcal{Z}_2(x_M, y_M) \dots + C_J \mathcal{Z}_J(x_M, y_M).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

El conjunto de ecuaciones que se muestra en (5.9), puede ser escrito en la siguiente forma matricial

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_1(x_1, y_1) & \mathcal{Z}_2(x_1, y_1) & \dots & \mathcal{Z}_{J-1}(x_1, y_1) & \mathcal{Z}_J(x_1, y_1) \\ \mathcal{Z}_1(x_2, y_2) & \mathcal{Z}_2(x_2, y_2) & \dots & \mathcal{Z}_{J-1}(x_2, y_2) & \mathcal{Z}_J(x_2, y_2) \\ \mathcal{Z}_1(x_3, y_3) & \mathcal{Z}_2(x_3, y_3) & \dots & \mathcal{Z}_{J-1}(x_3, y_3) & \mathcal{Z}_J(x_3, y_3) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{Z}_1(x_M, y_M) & \mathcal{Z}_2(x_M, y_M) & \dots & \mathcal{Z}_{J-1}(x_M, y_M) & \mathcal{Z}_J(x_M, y_M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_J \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

En la práctica, en el sistema de ecuaciones matricial (5.10), el conjunto de coeficientes $\{C_j\}_0$ son las incógnitas. Para calcularlos se puede utilizar el método de mínimos cuadrados o la descomposición en valores singulares [50]. Las rutinas computacionales para resolver el sistema matricial (5.10) fueron implementadas en el software **Matlab**. En la siguiente sección proponemos un método iterativo para reconstruir al frente de onda real, con el método propuesto se pretende mejorar la precisión asociada a la reconstrucción de las deformaciones Ω del frente de onda, en lo siguiente el índice l representa al número de la iteración.

5.1.2.2. Método iterativo para reconstruir Ω ($l > 0$)

La ventaja de colocar a la pantalla de agujeros atrás del sistema óptico bajo estudio (ver figura 5.1) es que los rayos reales pueden determinarse directamente considerando la expresión

$$\hat{n} = \frac{\vec{Q} - \vec{U}}{\|\vec{Q} - \vec{U}\|}, \tag{5.11}$$

Para llevar a cabo el proceso iterativo en la l -ésima iteración se propone que $(X^l, Y^l, Z^l) = (x^{l-1}, y^{l-1}, z^{l-1})$, esto significa que los puntos correspondientes al frente de onda bajo estudio Φ^{l-1} , que han sido calculados en una iteración previa, ahora serán considerados como los puntos sobre el nuevo frente de onda de referencia Φ_r^l . Además la expresión analítica del nuevo frente de onda de referencia corresponde a la ecuación (5.8). A partir de la expresión (5.8) calculamos la dirección \hat{N}^l de los nuevos rayos de referencia, a través de la siguiente expresión

$$\hat{N}^l = \frac{(-S_x^l, -S_y^l, 1)}{\sqrt{S_x^{l2} + S_y^{l2} + 1}}, \tag{5.12}$$

donde los subíndices x y y indican la derivada parcial respecto a las direcciones x y y , respectivamente. Al tomar en cuenta la ecuación (5.12), la expresión (4.22) puede ser escrita como función de la l -ésima iteración de la siguiente manera

$$\nabla\Omega^l = \left[n_z \left(\frac{N_x^l}{N_z^l} - \frac{n_x}{n_z} \right), n_z \left(\frac{N_y^l}{N_z^l} - \frac{n_y}{n_z} \right) \right]. \quad (5.13)$$

La expresión (5.13) se calcula mediante la integración numérica, que se muestra en la ecuación (5.6), en la sección 5.1.2.1. Con los valores obtenidos para Ω^l , las coordenadas de los puntos sobre el frente de onda bajo estudio pueden ser escritos de la siguiente manera

$$x^l = X^l + n_x\Omega^l; \quad y^l = Y^l + n_y\Omega^l; \quad z^l = Z^l + n_z\Omega^l. \quad (5.14)$$

cuando $l = 0$, los puntos (X^0, Y^0, Z^0) corresponden a las coordenadas de los agujeros sobre la pantalla de Hartmann, Φ_r^0 es un frente de onda plano propagándose a lo largo del eje \mathbf{Z} ; por lo tanto, la dirección de los rayos de referencia cumplen que $\hat{N}^0 = (0, 0, 1)$. Para definir el número de iteraciones que debe realizar el algoritmo, proponemos comparar la dirección del rayo calculado a través de la ecuación (5.11) con la dirección del rayo calculado como

$$\hat{V}^l = \frac{(x^l - \mathcal{U}_x, y^l - \mathcal{U}_y, z^l - \mathcal{U}_z)}{\|\vec{P}^l - \mathcal{U}\|} \quad (5.15)$$

este vector unitario debe ser normal al frente de onda reconstruido. Además, definimos la cantidad $\mu = \|\hat{n} - \hat{V}^l\|$, la cual es una comparación entre de los vectores unitarios \hat{V} con los rayos reales \vec{n} y finalmente definimos

$$\epsilon^l = \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{(\mu_i - \bar{\mu})^2}{M-1}}. \quad (5.16)$$

La cantidad que aparece en la ecuación (5.16) se utiliza para determinar, en cada iteración, qué tan parecidas son las direcciones \hat{V}^l y \hat{n} . El proceso iterativo continua hasta que para dos iteraciones consecutivas se cumpla la condición $\|\epsilon_l - \epsilon_{l-1}\| < Tol$ donde $Tol = 2 \times 10^{-12}$. Cuando ocurre lo anterior, el frente de onda de referencia Φ_r se puede considerar como el frente de onda bajo estudio Φ . Las ideas generales implementadas en el algoritmo iterativo se exponen en el diagrama de flujo que se muestra en la figura 5.7.

5.2. Resultados correspondientes a las simulaciones

En esta sección presentaremos los resultados correspondientes a las simulaciones numéricas que se han propuesto en la sección 5.1. Mostraremos las ventajas de aplicar la ecuación (4.22) en el algoritmo iterativo que fue descrito a lo largo de la sección 5.1.2. El frente de onda bajo estudio se representa por la expresión analítica (5.8), el número de polinomios de Zernike utilizados en el algoritmo es $J = 45$. La pantalla de Hartmann está compuesta por

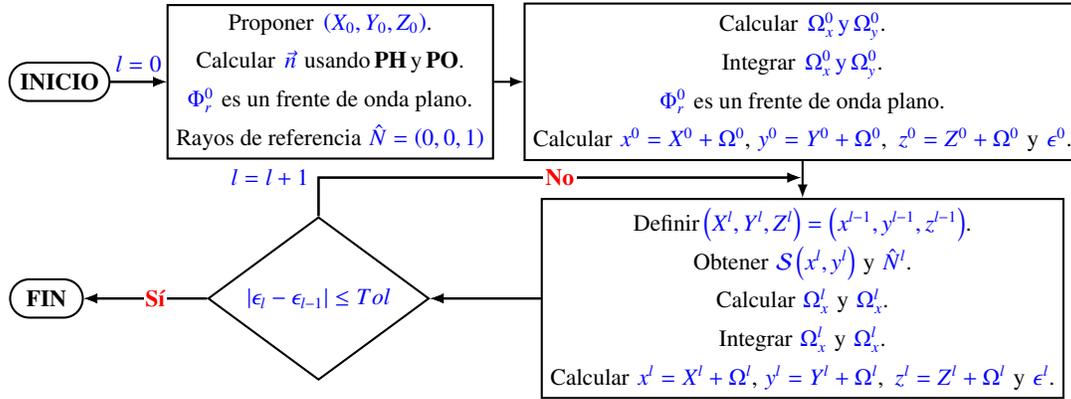


Figura 5.7: Diagrama de flujo que describe el funcionamiento del algoritmo propuesto.

un arreglo cuadrado de agujeros como se muestra en la figura 5.1. Los patrones de puntos simulados que se muestran en las figuras 5.5(a)-(c) los utilizamos como si hubieran sido obtenidos experimentalmente. En los mapas de altura que se muestran en las figuras 5.8(a)-(e) corresponden a la evolución de las deformaciones Ω^l , asociadas al frente de onda Φ_1 , como función de la l -ésima iteración. Los mapas de altura que se muestran en las figuras 5.8(f)-(j) corresponden al frente de onda Φ_2 . Finalmente, los mapas de altura que se muestran en las figuras 5.8(k)-(o) corresponden al frente de onda Φ_3 .

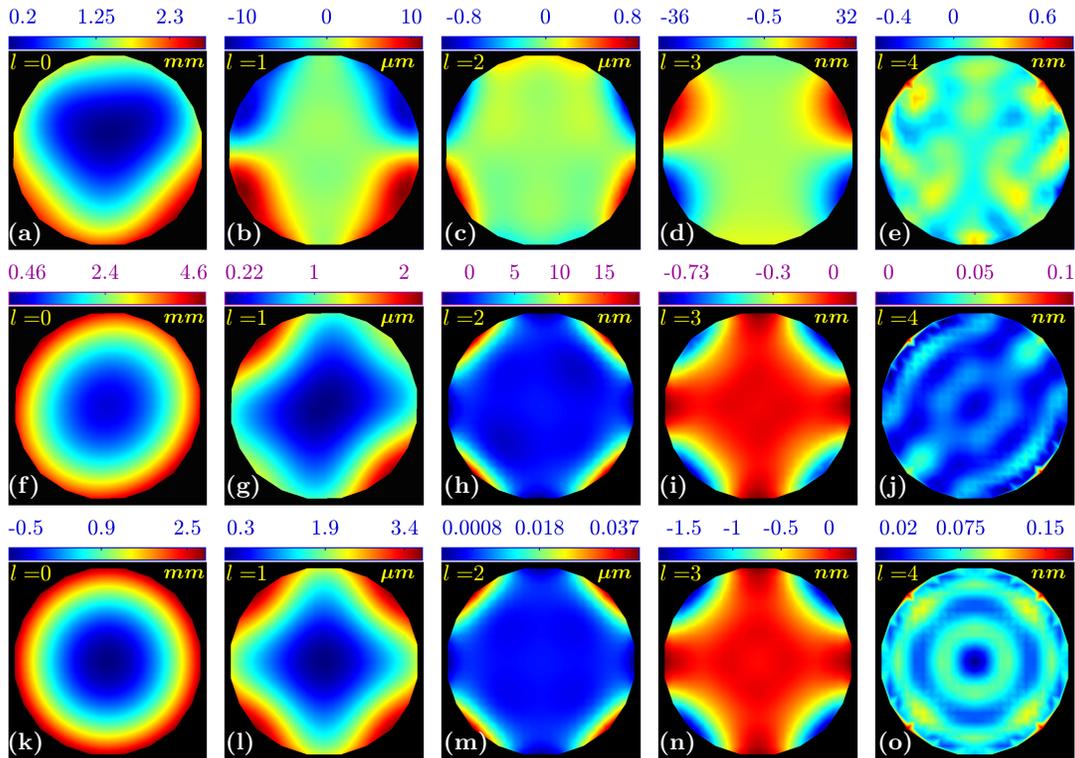


Figura 5.8: Cálculo de las deformaciones Ω^l en cada iteración l del algoritmo iterativo: (a)-(e) caso 1, (f)-(j) caso 2 y (k)-(o) caso 3.

En los tres casos presentados, a medida que avanzan las iteraciones se nota que los valores de Ω^l van decreciendo respecto a la iteración anterior. A partir de la iteración $l = 4$, en los tres casos, los valores de las deformaciones del frente de onda son de algunos cuantos nano-

metros. Las figuras 5.9(a), 5.9(d) y 5.9(g) exhiben el comportamiento de la cantidad ϵ_l para cada iteración, en los tres casos, es evidente que a partir de la 5^o iteración la curva no sufre cambios apreciables. Es decir, se cumple la condición $\|\epsilon_l - \epsilon_{l-1}\| < Tol = 2 \times 10^{-12}$. Lo anterior significa que, entre dos iteraciones consecutivas, los vectores unitarios \hat{V} (ver ecuación (5.15)) son muy cercanos a los vectores unitarios \hat{n} que representan la dirección de los rayos reales; por lo tanto, el frente de onda de referencia utilizado en la 5^o iteración puede ser considerado como el frente de onda bajo estudio. Para mostrar una comparación cuantitativa entre los frentes de onda reales y reconstruidos, en la tabla 5.2 están listados los valores de los errores rms y pv asociados a las deformaciones Ω^l . Cuando examinamos el comportamiento de los valores de rms y pv podemos concluir que disminuyen como función de la iteración l y que en las últimas iteraciones cambian muy poco.

Iteración	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	rms	pv	rms	pv	rms	pv
$l=0$	0.69mm	2.81mm	1.20mm	4.47mm	1.06mm	3.66mm
$l=1$	4.74 μm	22.2 μm	0.47 μm	2.20 μm	0.93 μm	3.74 μm
$l=2$	0.19 μm	1.84 μm	3.68nm	22.01nm	8.45nm	50.42nm
$l=3$	10.40nm	74.63nm	0.19nm	0.98nm	0.42nm	2.04nm
$l=4$	0.13nm	1.28nm	21.92pm	114.91pm	0.02nm	0.17nm
$l=5$	0.11nm	0.82nm	12.59pm	109.71pm	21.47pm	148.33pm
$l=6$	0.11nm	0.80nm	12.59pm	109.55pm	21.47pm	147.87pm

Tabla 5.2: Valores de los errores rms y pv en cada iteración que realiza el algoritmo propuesto.

Los mapas que se muestran en la figuras 5.9(b), 5.9(e) y 5.9(h) exhiben las diferencias $\Phi - \Phi_{Algoritmo}$ entre los frentes de onda reales y los frentes de onda reconstruidos con el algoritmo que hemos propuesto. Mientras que los mapas que se aprecian en las figuras 5.9(c), 5.9(f) y 5.9(i) corresponden a las diferencias $\Phi - \Phi_{Rayces}$ entre el frente de onda real y el frente de onda obtenido al aplicar las ecuaciones de Rayces (ver ecuaciones (4.2a) y (4.2b)). Cuando examinamos detenidamente los mapas de diferencias obtenidos con el algoritmo propuesto y con las ecuaciones de Rayces, es evidente que difieren en tres ordenes de magnitud; por lo tanto, podemos concluir que la reconstrucción del frente de onda bajo estudio con el algoritmo iterativo produce resultados más cercanos a los valores reales. En la tabla 5.3 están listados los valores de los errores rms y pv correspondientes a las diferencias $\Phi - \Phi_{Algoritmo}$ y $\Phi - \Phi_{Rayces}$.

	Diferencias	rms	pv
Caso 1	$\Phi_1 - \Phi_{Algoritmo}$	0.45nm	1.76nm
	$\Phi_1 - \Phi_{Rayces}$	10.82 μm	51.35 μm
Caso 2	$\Phi_2 - \Phi_{Algoritmo}$	0.08nm	0.32nm
	$\Phi_2 - \Phi_{Rayces}$	22.65 μm	89.81 μm
Caso 3	$\Phi_3 - \Phi_{Algoritmo}$	0.31nm	1.13nm
	$\Phi_3 - \Phi_{Rayces}$	14.32 μm	47.14 μm

Tabla 5.3: Valores de los errores rms y pv asociados a las diferencias $\Phi - \Phi_{Algoritmo}$ y $\Phi - \Phi_{Rayces}$.

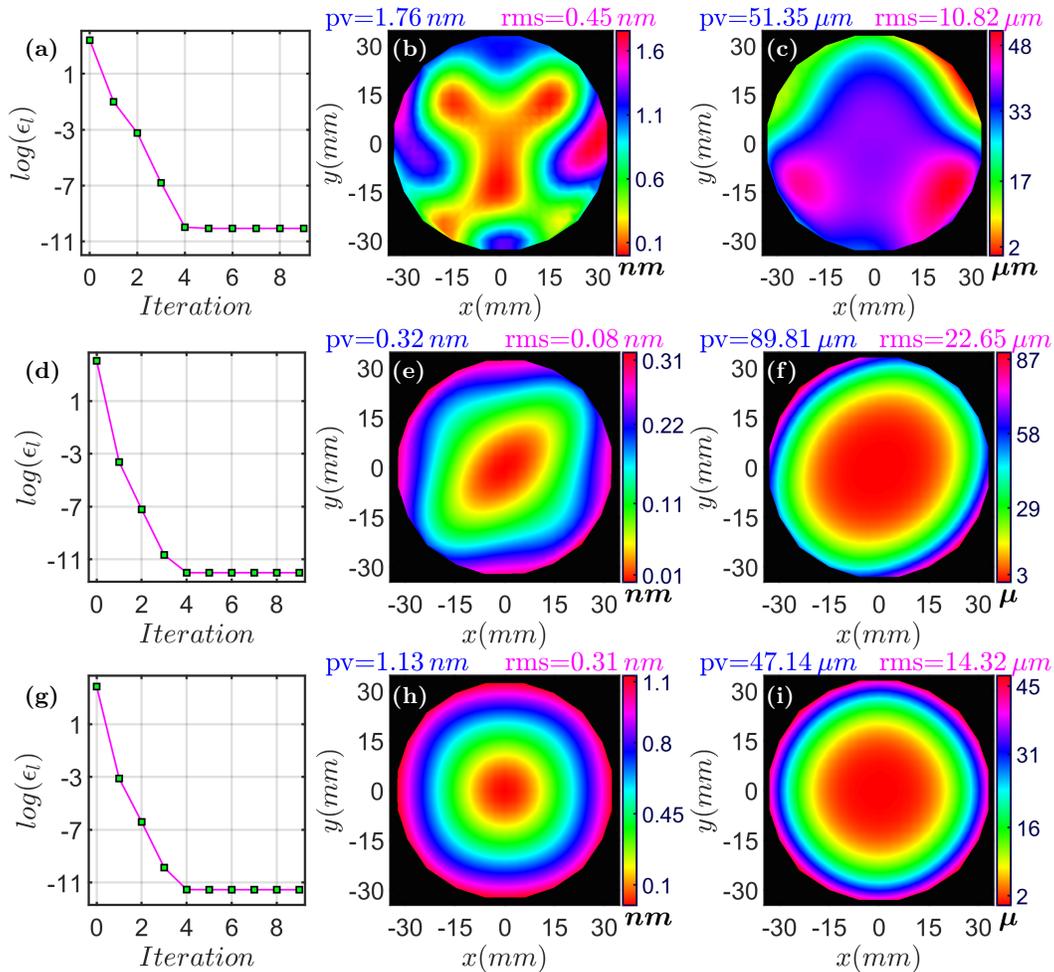


Figura 5.9: Comportamiento de ϵ : (a) caso 1, (d) caso 2 y (g) caso 3. Diferencias entre los frentes de onda reales y los reconstruidos con el algoritmo: (b) caso 1, (e) caso 2 y (h) caso 3. Diferencias entre los frentes de onda reales y los reconstruidos con las ecuaciones de Rayces: (c) caso 1, (f) caso 2 y (i) caso 3.

5.3. Resultados experimentales

En la figura 5.10(a) se muestra un esquema del arreglo experimental que utilizamos para reconstruir al frente de onda refractado que emerge de la lente progresiva. Implementamos un sistema colimador de luz para generar un frente de onda plano que incida sobre la superficie convexa de la lente progresiva. Como fuente puntual se utiliza un LED de luz blanca. La posición del LED se ajusta hasta que coincida con el punto focal de un doblete acromático. Atrás de la superficie cóncava de la lente progresiva se coloca la pantalla de Hartmann la cual consiste de un arreglo cuadrado de agujeros circulares de 1mm de diámetro, la separación horizontal y vertical entre los centros de los agujeros es de 3mm . La manufactura de la pantalla de agujeros fue hecha utilizando una máquina de corte láser. A una distancia $d=86\text{mm}$ colocamos al plano de observación el cual consiste de una hoja de papel traslucida. En la figura 5.10(b) se muestra el arreglo experimental utilizado para evaluar a la lente progresiva. Para capturar el patrón de manchas que se forma sobre el plano

de observación utilizamos una cámara CMOS (EO-18112, Edmund Optics) con una área activa de $6.1mm \times 4.6mm$ (4912×3684 píxeles), el tamaño del píxel en el sensor es de $1.25 \mu m$ y la distancia focal de la lente que se utiliza para formar la imagen en el sensor CMOS es $f = 8mm$.

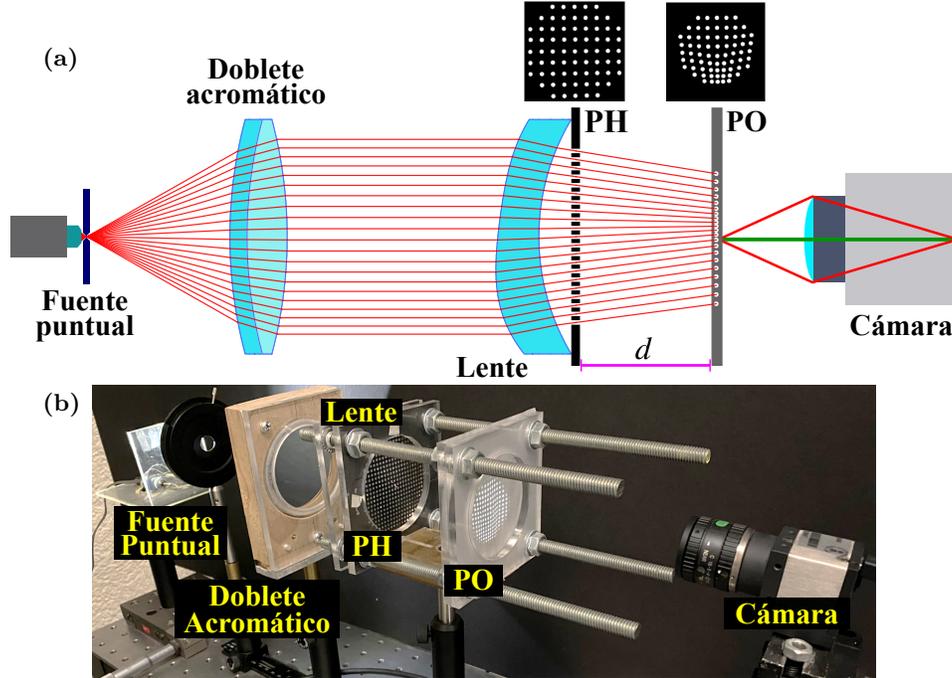


Figura 5.10: (a) Esquema del sistema de medición. (b) Arreglo experimental para evaluar la calidad óptica de superficies con forma libre.

El enfoque de la lente de la cámara lo ajustamos hasta tener enfocado al plano de observación. Cerramos el diafragma de la lente para disminuir la degradación de la imagen debido a las aberraciones ópticas; sin embargo, cuidamos que la iluminación sea la suficiente para poder identificar las manchas brillantes sobre el plano de observación. La única aberración que se mantiene aún cuando utilizamos un diafragma es la aberración de distorsión.

Utilizaremos el procedimiento descrito en la sección 2.2.1 para calibrar la lente de la cámara por la aberración de distorsión. En la posición del plano de observación se coloca un patrón de círculos en un arreglo cuadrado. Los círculos tienen un diámetro de $1mm$ y la separación entre dos círculos adyacentes es de $5mm$. En la figura 5.11(a) se muestra la imagen del patrón de círculos afectada por aberración. La imagen 5.11(a) se convierte a niveles de gris y mediante un procesamiento se obtiene la imagen binarizada que se muestra en la figura 5.11(b). El proceso para calcular centroides lo describimos en la sección 2.2.1. Las coordenadas cartesianas de los centroides de las manchas en la imagen, afectada por distorsión, son (x_d, y_d) , mientras que las coordenadas polares se calculan como

$$\rho_d = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}, \quad (5.17a)$$

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{y_d}{x_d}\right). \quad (5.17b)$$

Las coordenadas cartesianas de los círculos que componen al objeto son (x_o, y_o) , mientras que las coordenadas polares del objeto se calculan como

$$\rho_o = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}, \quad (5.18a)$$

$$\alpha_o = \arctan\left(\frac{y_o}{x_o}\right). \quad (5.18b)$$

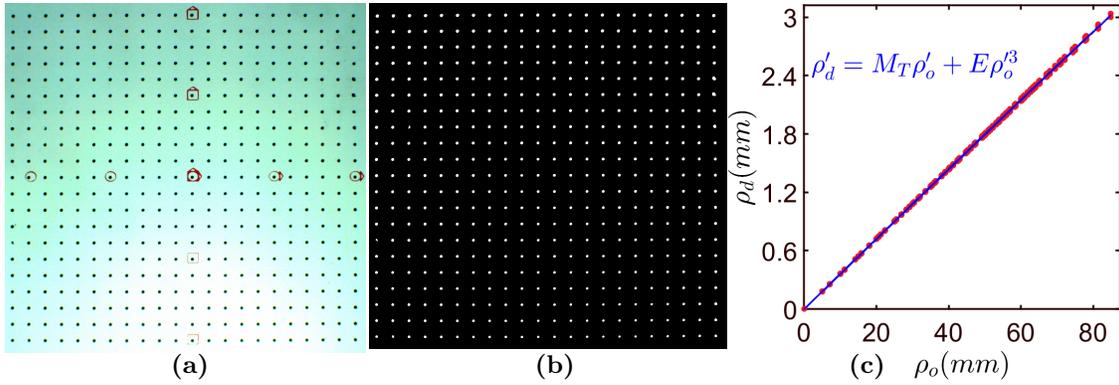


Figura 5.11: (a) Imagen experimental del patrón de círculos. (b) Imagen binarizada. (c) Gráfica ρ_d vs ρ_o para calcular la amplificación transversal y el coeficiente de distorsión.

Hemos aplicado un proceso análogo al descrito en la sección 2.2.1 para obtener el coeficiente de distorsión E y la amplificación transversal M_t . En la figura 5.11(c) se muestra la curva ρ_d vs ρ_o de la cual se extraen los valores $E = -7.045 \times 10^{-8}$ y $M_t = -0.036$ mediante el ajuste de la expresión (2.21) a los datos experimentales ρ_d y ρ_o . Las coordenadas polares de los puntos, que componen a la imagen, corregidos por distorsión pueden ser calculadas como

$$\rho_c = \rho_d - E \left(\frac{\rho_d}{M_T} \right)^3, \quad (5.19a)$$

$$\alpha_c = \alpha_i. \quad (5.19b)$$

Considerando las ecuaciones (5.19a) y (5.19b), las coordenadas cartesianas de los puntos en la imagen corregidos por distorsión son las siguientes

$$x_c = \rho_c \cos(\alpha_c), \quad (5.20a)$$

$$y_c = \rho_c \sin(\alpha_c). \quad (5.20b)$$

Por lo tanto, las coordenadas \vec{Q} del patrón de manchas brillantes que se forma en el plano de observación (ver figura 5.10(a)) pueden ser escritas en términos de las coordenadas imagen (5.20a) y (5.20b), de la siguiente manera

$$\vec{Q} = \left(\frac{x_c}{M_t}, \frac{y_c}{M_t}, d \right). \quad (5.21)$$

En la figura 5.12(a) se aprecia la distribución de agujeros en la pantalla de Hartmann, mientras que en la figura 5.12(b) se muestra el patrón de manchas brillantes producido por los haces refractados que logran pasar a través de los agujeros. En la parte inferior del patrón mostrado en 5.12(b), podemos notar que la separación entre las manchas brillantes disminuye. Esas manchas son producidas por los haces luminosos que se refractan en la región de alta potencia sobre la lente progresiva. El diámetro de la apertura de la lente progresiva es $D = 68mm$, el total de objetos de interés en la imagen es de $\mathcal{M}=343$, algunos agujeros de la periferia no contribuyen a la formación del patrón de manchas brillantes.

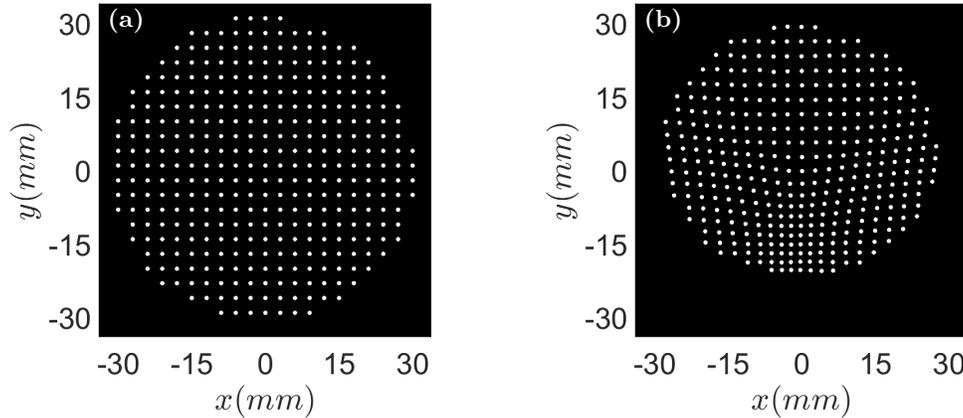


Figura 5.12: (a) Pantalla de Hartmann. (b) Patrón de manchas brillantes obtenidos utilizando el sistema de medición.

5.4. Reconstrucción experimental de las deformaciones Ω

Para reconstruir las deformaciones Ω , asociadas al frente de onda bajo estudio, utilizaremos el proceso iterativo que presentamos en la sección 2.3 y que aplicamos a datos simulados en la sección 5.2. Además, el número de polinomios de Zernike que utiliza el algoritmo en la ecuación (5.8) es $J = 45$. En los mapas de altura que se muestran en las figuras 5.13(a)-(f) se aprecia la evolución del cálculo de las deformaciones Ω , como función de las iteraciones que realiza el algoritmo. Al observar los mapas, notamos que los valores de las deformaciones disminuyen al avanzar el número de iteraciones que se realizan. Por lo tanto, podemos afirmar que después de la 5^o iteración el frente de onda de referencia se aproxima cada vez más al frente de onda bajo estudio.

En la tabla 5.4 aparecen listados los valores de los errores rms y pv correspondientes a las deformaciones Ω^l . Los valores decrecen como función del número de la iteración que realiza el algoritmo de reconstrucción. Además, al observar la gráfica 5.14(a) podemos notar que los valores de la cantidad ϵ_l se estabilizan; a partir, de la iteración $l = 5$. Por lo tanto, a partir de la 5^o iteración, resulta en una buena aproximación considerar al frente de onda de referencia como el frente de onda bajo estudio.

Iteración	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
pv	1.26mm	13.64 μm	2.20 μm	0.12 μm	2.19nm	0.26nm
rms	0.28mm	1.82 μm	0.31 μm	0.02 μm	0.39nm	0.04nm

Tabla 5.4: Errores pv y rms asociados a las deformaciones del frente de onda en cada iteración.

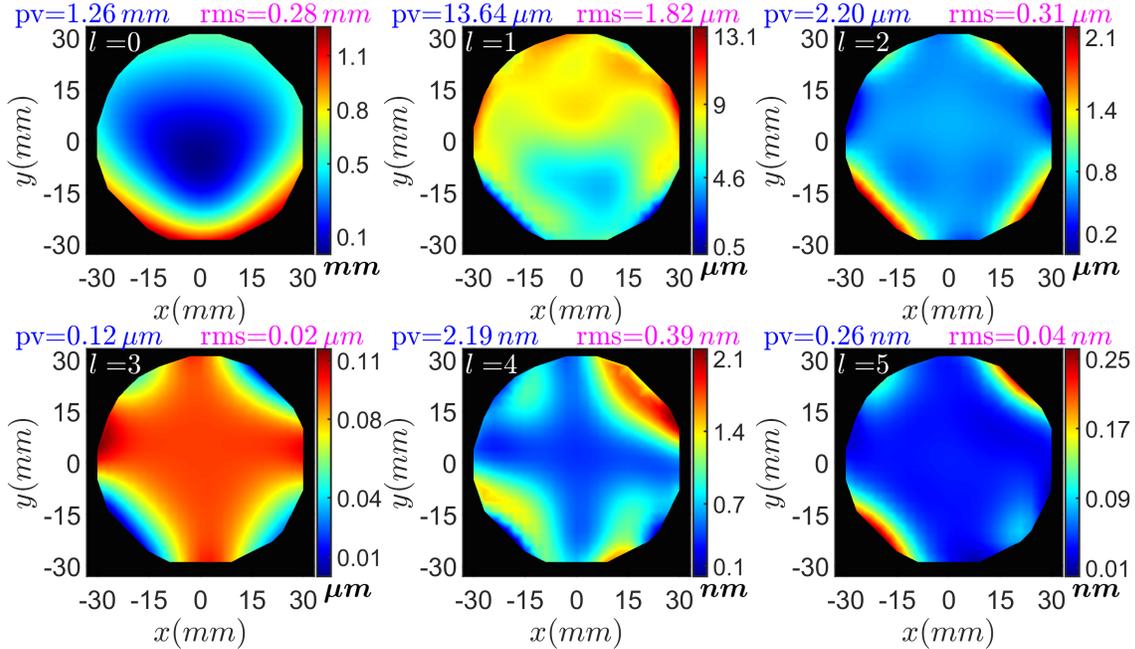


Figura 5.13: Cálculo iterativo de las deformaciones del frente de onda bajo estudio.

El mapa de elevación que se muestra en la figura 5.14(b) corresponde al frente de onda reconstruido. El algoritmo iterativo arroja como resultado la expresión analítica $\mathcal{S}(x, y)$ del frente de onda como una combinación lineal de los polinomios de Zernike. La contribución de los primeros 19 polinomios de Zernike se exhibe en la gráfica de barras que se muestra en la figura 5.14(c), estos polinomios son los que tienen mayor peso en la representación del frente de onda reconstruido. La expresión analítica $\mathcal{S}(x, y)$ será utilizada en la siguiente sección para encontrar la distribución de la potencia dióptrica en la lente progresiva.

5.4.1. Distribución de potencia refractiva

Los parámetros más importantes en una lente progresiva son las distribuciones de potencia esférica y cilíndrica. Para calcular las potencias es necesario conocer los valores de la curvatura en cada punto $(x, y, \mathcal{S}(x, y))$ sobre el frente de onda reconstruido. Las potencias esférica y cilíndricas pueden ser calculadas mediante las siguientes expresiones [52]

$$F_e = \left(\frac{\kappa_{min} + \kappa_{max}}{2} \right), F_c = \kappa_{min} - \kappa_{max}, \quad (5.22)$$

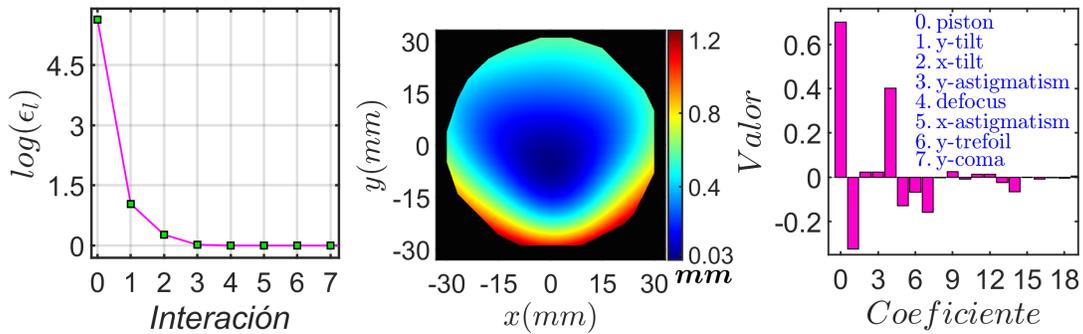


Figura 5.14: (a) Comportamiento de la cantidad ϵ_l como función del número de la iteración. (b) Mapa de altura del frente de onda reconstruido. (c) Coeficiente de Zernike utilizados para representar al frente de onda reconstruido.

donde F_e and F_c se miden en dioptrías (m^{-1}), κ_{max} y κ_{min} son las curvaturas locales en cada punto sobre el frente de onda, las cuales se miden en direcciones ortogonales entre si. Estas curvaturas se calculan como función de las primeras y segundas derivadas del frente de onda Φ . El cálculo explícito de las curvaturas principales κ_{max} y κ_{min} fue discutido en la sección 3.3.

Los mapas que se observan en las figuras 5.15(a) and 5.15(b) corresponden a la distribución de potencia cilíndrica y esférica, respectivamente. Al analizar la figura 5.15(a) se confirma la existencia de un canal o corredor en el que la potencia cilíndrica o el astigmatismo son pequeños, dicho canal une las dos zonas de potencia estable que corresponden a los círculos *A* y *B*, como se ilustra en el mapa de potencia esférica 5.15(b). El círculo *A* corresponde a una región de baja potencia que se utiliza para observar objetos lejanos. El círculo *B* es una región de alta potencia, con la cual se busca que el usuario pueda enfocar objetos en general posicionados a la distancia de su punto cercano.

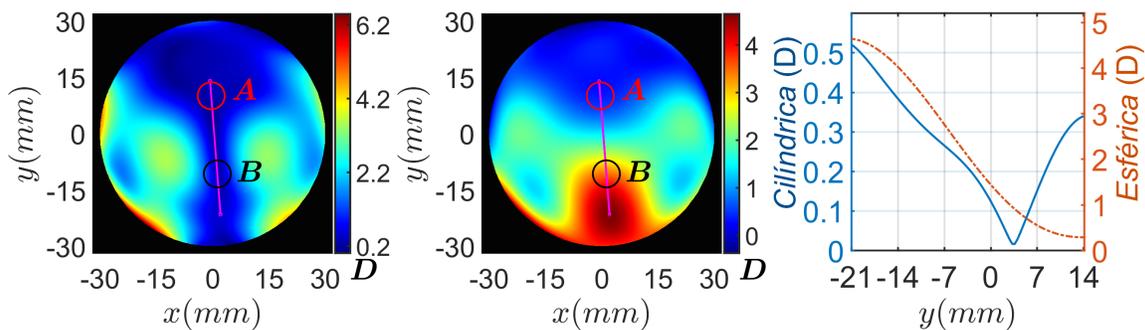


Figura 5.15: (a) Distribución de potencia cilíndrica. (b) Distribución de potencia esférica. (c) Perfiles de potencias cilíndrica y esférica a lo largo del canal.

En la figura 5.15(c) se muestran los perfiles de potencia cilíndrica y esférica a lo largo del canal. La línea punteada representa la potencia esférica y la curva continua ilustra el comportamiento de la potencia cilíndrica. Una manera de verificar que hemos reconstruido un frente de onda cercano al frente de onda real es a través del cálculo de la progresión,

de la lente progresiva, la cual se denota por ADD . A partir del mapa de potencia esférica 5.15(b) calculamos la progresión, la cual se define como la diferencia de potencia dióptrica entre las regiones A y B . Como resultado obtenemos que $ADD_{exp}=3.05$ dioptrías. Además, usamos un lensómetro (ESSILOR ALM 700) como método alternativo para medir la progresión de la lente progresiva, como resultado obtenemos que $ADD_l=3.11$ dioptrías. El fabricante proporciona un valor para la progresión de $ADD_f=3$ dioptrías. Por lo tanto, el valor ADD_{exp} se desvía de ADD_l en un 1.93% y de ADD_f en un 1.66%. Estos valores de error muestran que hemos recuperado un frente de onda con características ópticas muy parecidas al frente de onda real. Además, a partir de los mapas de potencia esférica y cilíndrica, podemos afirmar que hemos obtenido las distribuciones de potencia bien conocidas y reportadas en otros trabajos que diseñan y evalúan la calidad óptica de lentes progresivas [62–65].

5.5. Cálculo de las aberraciones del frente de onda

Todos los sistemas ópticos reales siempre sufren desviaciones respecto al comportamiento ideal definido durante su diseño. Conocer las aberraciones ópticas de una sistema óptico es importante para cuantificar las discrepancias que hay con el frente de onda ideal esférico. Para calcular las aberraciones asociadas al frente de onda bajo estudio, utilizaremos dos puntos \vec{P} y \vec{P}_e sobre el frente de onda reconstruido y el frente de onda de referencia esférico, respectivamente. La aberración \mathcal{W} es la distancia entre los puntos \vec{P} y \vec{P}_e a lo largo de la dirección \hat{n} de los rayos reales [60, 61]. Lo anterior, puede ser escrito de la siguiente manera

$$\vec{P}_e = \vec{P} + \mathcal{W}\hat{n}, \quad (5.23)$$

donde $\vec{P}_e = (x_e, y_e, z_e)$, $\vec{P} = (x, y, \mathcal{S}(x, y))$ y $\mathcal{S}(x, y)$ es la expresión analítica del frente de onda reconstruido (ver ecuación (5.8)) y está escrita en términos de los polinomios de Zernike. La esfera de referencia de radio r_e con vértice en el origen, puede ser escrita como

$$F_e = x_e^2 + y_e^2 - 2r_e z_e + z_e^2 = 0. \quad (5.24)$$

Al sustituir las componentes de la expresión vectorial (5.23) en la ecuación (5.24), se obtiene una ecuación de segundo grado para \mathcal{W}

$$\mathcal{W}^2 + 2\left(\vec{P} \cdot \hat{n} - n_z r_e\right) \mathcal{W} + (\vec{P} \cdot \vec{P} - 2\mathcal{S}r_e) = 0. \quad (5.25)$$

Resolvemos la expresión (5.25) para \mathcal{W} ; por lo tanto, los valores de la aberración \mathcal{W} pueden ser calculados como

$$\mathcal{W} = -\left(\vec{P} \cdot \hat{n} - n_z r_e\right) - \sqrt{\left(\vec{P} \cdot \hat{n} - n_z r_e\right)^2 - \left(\vec{P} \cdot \vec{P} - 2\mathcal{S}r_e\right)}. \quad (5.26)$$

El frente de onda esférico de referencia es la esfera que mejor se ajusta a los datos $(x, y, \mathcal{S}(x, y))$ del frente de onda reconstruido, este último se muestra en el mapa 5.14(b). La esfera que mejor se ajusta a los datos tiene un radio de curvatura de $r_e = 604.67mm$.

Utilizamos la expresión (5.26) para calcular la aberración \mathcal{W} . En la figura 5.16(a) se muestra el mapa de alturas de \mathcal{W} . La gráfica de barras que se muestra en la figura 5.16(b) exhibe la contribución de cada una de las aberraciones ópticas a la función de aberración \mathcal{W} . Por lo tanto, el método propuesto puede medir de manera indirecta las aberraciones ópticas que afectan al frente de onda bajo estudio.

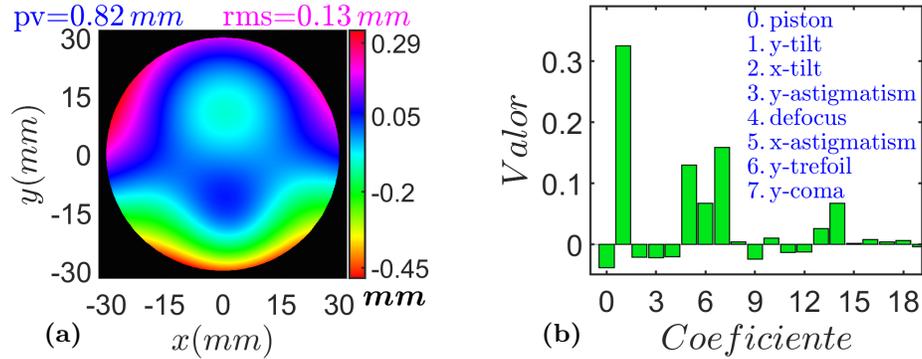


Figura 5.16: (a) Aberración del frente de onda. (b) Contribución de las aberraciones ópticas a la representación de \mathcal{W} .

Conclusiones y comentarios finales

- Desarrollamos un método que combina la prueba de pantallas nulas con la prueba de Hartmann, por reflexión, para obtener la forma de la superficie convexa de una lente progresiva. Hemos propuesto un algoritmo iterativo para reconstruir la forma de superficies con forma libre, cuya validación la llevamos a cabo utilizando simulaciones numéricas.
- Implementamos un método de calibración del sistema de medición para mejorar el diseño de la pantalla nula y la posterior evaluación de la superficie bajo estudio. A partir de la expresión analítica de la superficie reconstruida calculamos los mapas de potencia esférica y cilíndrica, en los cuales identificamos las regiones de potencia estable correspondientes a la visión lejana y cercana. Además, la diferencia de potencia que hay entre las dos zonas difiere en un 3.55% de la progresión medida con un lensómetro comercial; es decir, obtuvimos una superficie con características ópticas muy parecidas a la superficie real.
- Desarrollamos un segundo método para evaluar por transmisión sistemas ópticos que utilizan superficies con forma libre. Se dedujo una ecuación vectorial exacta para calcular las deformaciones del frente de onda bajo estudio respecto a una referencia no esférica. La ecuación fue implementada en un algoritmo iterativo para reconstruir las deformaciones del frente de onda. El funcionamiento del algoritmo se basa en utilizar frentes de onda de referencia cada vez más cercanos al frente de onda bajo estudio, hasta que las diferencias entre los dos frentes de onda sean muy pequeñas.
- Demostramos, mediante simulaciones numéricas, que el algoritmo iterativo propuesto puede recuperar el frente de onda bajo estudio aún cuando tenga deformaciones grandes. Considerando la expresión analítica del frente de onda bajo estudio, se calcularon los mapas de potencia cilíndrica y esférica. La progresión que se recuperó fue de $ADD = 3.05$ dioptrías y difiere en un 1.93% del valor medido con un lensómetro comercial. Además, mostramos cómo calcular las aberraciones ópticas.
- En ambos casos las técnicas que se mostraron son una alternativa de bajo costo para probar la calidad óptica de lentes progresivas, los métodos son no invasivos pues al no entrar en contacto con la superficie bajo estudio no la dañan; además, en los dos métodos se necesita únicamente una imagen para realizar la evaluación, lo cual disminuye el tiempo de medición.
- Como trabajo a futuro planteamos incrementar los puntos de evaluación; además, hacer una comparación de los resultados que arrojan los métodos propuestos con algún sistema comercial de medición como un perfilómetro.

**Publicaciones indizadas realizadas
a lo largo del doctorado**



Null screens to evaluate the shape of freeform surfaces: progressive addition lenses

OLIVER HUERTA-CARRANZA,^{1,*}  MAXIMINO AVENDAÑO-ALEJO,¹ 
AND RUFINO DÍAZ-URIBE¹ 

¹*Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México, C.P. 04510, Apdo. Postal 70-186, Cd. de México., Mexico*

**oliver@ciencias.unam.mx*

Abstract: We propose a method for measuring the shape of freeform surfaces such as Progressive Addition Lenses (PAL). It is based on optical deflectometry by considering a non-uniform pattern of spots computed by using the null-screen method. This pattern is displayed on a flat LCD monitor being reflected on the freeform under test and whose image is recorded on a CCD camera placed at a predefined off-axis position. We use one image to calibrate the experimental setup and another to measure the freeform surface. We develop an iterative algorithm to retrieve the surface under test and calculate the spherical and cylindrical dioptric powers of the frontal freeform of a commercial PAL under test.

© 2021 Optical Society of America under the terms of the [OSA Open Access Publishing Agreement](#)

1. Introduction

The technological advance has allowed to design and fabricate optical surfaces with different shapes, beyond of the traditional surfaces with symmetry of revolution, such as conics and other aspherical surfaces. These new shapes are called freeforms, these are useful to reduce aberrations, dimensions and weight in optical system better than conventional optical systems does, because they have more degrees of freedom, i.e., lacking of axial or translational symmetry; therefore, an adequate representation of these surfaces is essential for designing and fabricating them [1–4]. The freeforms surfaces may be described with a wide variety of mathematical representations; they range from Taylor monomials [5], Fourier Series [6], B-Splines [7], Nurbs [8] and orthogonal polynomials such as Zernike, Chebyshev, Legendre and Forbes, among others. For instance in [9] includes a review of the techniques to represent freeforms. Alternatively, a particular example of these surfaces are present in the Progressive Addition Lenses (PAL). These lenses have been a better solution for presbyopia than bifocal lenses does; the PAL allow the observation of objects located on a wide range of distances [10,11]. With the bifocal lenses, only far and near objects can be seen sharply, because these are composed of two lenses with different refractive powers; this results in some discomfort when trying to focus objects at intermediate distances. Some techniques to manufacture PALs are glass molding [12] and diamond turning [13].

Since the first face of an earlier PAL can simply be considered as a freeform surface without symmetries and very different from the traditional surfaces used in spectacles (spherical and toric surfaces), their design, fabrication and testing have been a challenge for the opticians who had commonly proposed new methods for testing them; the first proposal with a very wide usage are the mechanical methods, mainly through a Coordinate Measuring Machine (CMM); in addition, optical methods are searching to avoid the damage to the surface by the stylus; the most used method are based on either Hartmann or Shack-Hartmann technique [14–16]. These optical methods measure at one time with a single shot the power distribution of the PAL, but no the single freeform surface. As is well known the Hartmann test traditionally uses a screen with a uniform distribution of holes [17], which produces a non-uniform distribution of bright spots at the detection plane either by reflection or refraction, this non-uniformity can be very pronounced, complicating the subsequent analysis. Other methods use an object pattern constituted by black



Measurement and correction of misalignments in corneal topography using the null-screen method

MANUEL CAMPOS-GARCÍA,^{1,*}  DANIEL AGUIRRE-AGUIRRE,¹ 
VICTOR IVAN MORENO-OLIVA,²  OLIVER HUERTA-CARRANZA,¹ 
AND VICTOR DE EMANUEL ARMENGOL-CRUZ¹

¹*Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México, Cd. Universitaria, Apdo. Postal 70-186, C.P. 04510, Cd. Mx., Mexico*

²*Universidad del Istmo, Ciudad Universitaria s/n, C.P. 70760, Tehuantepec, Oax, Mexico*
**manuel.campos@icat.unam.mx*

Abstract: Misalignments are a common problem in corneal topography reconstruction. To determine the topography of the surface using a corneal topographer based on the null-screen method, it is necessary to measure errors caused by mechanical misalignment of the topographer, which could influence the results of this technique but are not related to the quality of the corneal surface. To evaluate the variability in measurements, in this work, we simulate some misalignments in the optical system, for the simulation we design a semi-radial null-screen to test a reference spherical surface to identify the variations in results introduced by misalignment errors of the corneal topographer with respect to the test surface. According to the simulations, the accuracy of the null-screen method ranges from 0.81 μm to 2.84 μm for typical tilt, decentering, and defocusing errors. Experimental results for the testing of a spherical surface are shown. After removing the misalignments, we found that the variations are approximately 3.5 μm *rms* value measured with respect to the best-fitting sphere, and the radius of curvature differs approximately 0.06% from the design value.

© 2021 Optical Society of America under the terms of the [OSA Open Access Publishing Agreement](#)

1. Introduction

The null-screen method has been used to test fast and symmetric surfaces with great success [1–3], but in recent years this method has been applied to obtain the corneal topography [4,5]. The cornea has an essential role in human vision. It has approximately two thirds of the eye's total refractive power. In its normal state, the anterior surface of the cornea has an average radius of curvature of approximately 7.8 mm in the center. An irregular shape of the cornea may produce some refractive errors such as myopia, hyperopia, or astigmatism. It is important, for some clinical and research applications, to obtain a detailed assessment of the cornea with great accuracy.

The current methods for evaluating the corneal surface are mainly based on Placido's disk, a plate with concentric bright and dark rings. These rings are reflected over the surface of the cornea and the virtual image is acquired by a camera. Then, by image processing and numerical evaluation, the algorithms find the intersections of the rings and the meridian. The local radius can be found by calculating the distances of the intersections of neighboring rings, the corneal height can be calculated by a numerical integration along the meridians and, by taking the first and second derivative, the curvature can be obtained. The topographers based on Placido's disk have a tolerance of ± 0.02 mm in the measurement of the curvature radius and the *rms* error of the heights is in the range of 2–6 μm [6–8].

As pointed out, in previous works, we proposed measuring the corneal topography using a conical null-screen and have made the first evaluation of a calibration sphere surface [4] and



Exact equations to measure highly aberrated wavefronts with the Hartmann test

OLIVER HUERTA-CARRANZA,^{*}  RUFINO DÍAZ-URIBE,  AND
MAXIMINO AVENDAÑO-ALEJO 

Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-186, México 04510, Mexico

**oliver@ciencias.unam.mx*

Abstract: An exact vector expression for the deformations of a wavefront from any chosen reference surface, as a function of the directions of the real and reference rays, is deduced. It can be used with slope measuring test methods, such as Hartmann or Ronchi tests, but the need for a spherical reference is removed. We present simulated and experimental results to show the feasibility of this proposal.

© 2020 Optical Society of America under the terms of the [OSA Open Access Publishing Agreement](#)

1. Introduction

As well as surfaces with symmetry of revolution and cylinders, in recent years technological advances have led to the design and fabrication of optical surfaces with more degrees of freedom. These surfaces are known as freeforms [1–4] and are widely used because they can perform tasks which traditional optical surfaces cannot; for instance, the Progressive Addition Lenses (PAL), allow the visual observation of objects located on an ample range of distances; these are a better solution for presbyopia than bifocal lenses [5]. An important challenge, however, is to develop methods for measuring the optical quality or wavefront aberrations with adequate accuracy for the intended application. Even though interferometric tests allow measurement of a wavefront with high accuracy and resolution, the measurement of highly aberrated wavefronts as those resulting during the testing of freeforms, can be very cumbersome, because the number and density of fringes increases beyond the Nyquist limit. Methods to overcome this, involve the design, fabrication and testing of phase compensators, null lenses or computer generated holograms. Furthermore, in many cases, such as the PAL described above, simpler and less accurate methods, are enough for the required precision. Other options, to evaluate the quality of an optical system, are geometric tests in which the range of the wavefront slope sensing is larger than in the interferometric tests. Among the most common geometrical tests to retrieve the aberrated wavefront and quantify the optical aberrations we can consider both Hartmann [6] and Ronchi [7] tests; there are other tests but they can be considered as slight variations of these two [8–13].

Traditionally, the wavefront retrieval for the Hartmann and Ronchi tests is performed by measuring the deviations of the real or aberrated ray in reference to the ideal one on the image or other nearby plane; this is called the transversal aberration \vec{T} , with x and y components (T_x , T_y) and relating them to the wavefront or the aberration wavefront slopes. Rayces found the exact relation between the wavefront aberration \mathcal{W} with the transversal ray aberration \vec{T} , which can be written as [14]

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = -\frac{T_x}{r_s - \mathcal{W}}; \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} = -\frac{T_y}{r_s - \mathcal{W}}, \quad (1)$$

where, r_s is the radius of curvature of the reference sphere; i.e., the best spherical fit to the real wavefront Φ . Rayces defines the wavefront aberration \mathcal{W} as the distance between the aberrated wavefront and the reference sphere (with radius r_s) measured along the reference ray. When the wavefront aberration is small compared to the radius of curvature r_s ($\mathcal{W} \ll r_s$), the Eq. (1) can



Testing the surface quality of a reflective parabolic trough solar collector with two flat null-screens

MANUEL CAMPOS-GARCÍA,^{1,*}  ANDRÉS PEÑA-CONZUELO,¹ OLIVER HUERTA-CARRANZA,¹
JOSÉ RUFINO DÍAZ-URIBE,¹  ULISES EDMUNDO ESPINOZA-NAVA,¹ AND VÍCTOR IVÁN MORENO-OLIVA²

¹Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-186, México 04510, México

²Universidad del Istmo, Ciudad Universitaria s/n, C.P. 70760, Tehuantepec, Oax., México

*Corresponding author: manuel.campos@icat.unam.mx

Received 19 November 2018; revised 14 December 2018; accepted 14 December 2018; posted 17 December 2018 (Doc. ID 352274); published 22 January 2019

In this work, we present a technique for quantitatively assessing the optical quality of a parabolic trough solar collector. The presented method is an adaptation of the null-screen technology, a collection of processes that retrieve information from the reflection of a known object from the surface and then use that information to reconstruct the surface's normal vectors. Via numerical simulations, it is shown that the precision attainable by this method is up to 0.068 mrad, depending on the source of systematical error. In this study we only consider displacements of the physical null-screen as sources of error. © 2019 Optical Society of America

<https://doi.org/10.1364/AO.58.000752>

1. INTRODUCTION

Solar power and in particular solar collection, has been an active field of research for several decades now. Continuous efforts in the field of applied optics have produced significant progress, as shown by the proliferation of solar technology, in particular of solar collectors [1–3]. The performance of these devices is heavily dependent on the shape of the reflective component, thus, in order to guarantee an optimal performance, it is necessary to reliably measure the shape of the surface. A detailed discussion on the applications, efficiency, and testing techniques of collector systems has been published in Refs. [2,3]. These papers contain a detailed discussion on the video scanning Hartmann optical test (VSHOT), photogrammetry, and deflectometry or fringe reflection methods.

Many laboratories have developed techniques to improve the test and evaluation of concentrating devices. For example, Sandia National Laboratories and the National Renewable Energy Laboratory (NREL) [4–7] use VSHOT to characterize the optical performance of both point-focus and line-focus optical concentrators. The VSHOT combines laser ray tracing with video imaging to measure errors in the slope of the test surface. Another technique [8] features an optical profilometer and a laser which is moved along a line (translational configuration), and a screen is placed close to the expected focus to simulate realistic working conditions. In photogrammetry methods [9], several cameras record from different viewpoints, and a number of targets are fastened over the surface to be

measured. Here the surface points are located by triangulation; this technique does not directly provide surface normal information. Recently, a combination of photogrammetric and deflectometric measurements were used to assess the collector quality during construction as well as the geometry of the collector structure [10–15]; this technique can also provide three-dimensional surface characterization of solar concentrators [16,17].

Additionally, there are several geometry-based tests, which offer superior dynamic range and could be applied to the testing of solar collectors. In particular, the null-screens is a method that has been useful for testing fast aspheric surfaces (concave, convex, and off-axis) [18–21] and even a parabolic trough collector surface [22–26], where several configurations of the null-screens have been proposed in order to perform the test of the surface.

In order to maximize the area of the evaluated surface and to avoid the spurious behavior of light rays produced inside the surface's caustic region, in this paper we propose the use of two inclined flat null-screens to perform the test of a parabolic trough solar collector (PTSC). To perform a quantitative test, a set of spots (similar to an ellipses) are drawn on the screen in such a way that the image, which is formed by reflection on the test surface, becomes an exact square array of circular spots if the surface is perfect. Any deviation from this geometry is indicative of defects or misalignments of the surface under test. Throughout the remainder of this work, we shall focus on

Testing Free Forms with Optical Deflectometry

Rufino Díaz-Uribe*, Oliver Huerta-Carranza, M. Isaías Rodríguez-Rodríguez and Maximino Avendaño-Alejo

Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad of Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-186, México City, 104510, México

* rufino.diaz@ccadet.unam.mx

Abstract: A method for testing free forms based on optical deflectometry methods are presented. Preliminary results for progressive addition ophthalmic lenses and some kind of correcting plate, will be shown. The expected accuracy of the method is around few micrometers. © 2018 The Author(s)

OCIS codes: (120.0120) Instrumentation, measurement, and metrology; (120.4800) Optical standards and testing; (120.6650) Surface measurements, figure; (220.4840) Testing; (080.4228) Nonspherical mirror surfaces.

1. Introduction

Free forms are becoming more frequently used in optical instrumentation because design and fabrication methods based on CAD-CAM, are more powerful; testing, however, still represents an important challenge. Traditional high accuracy methods such as interferometry face serious difficulties to be used; the design, fabrication and testing of null lenses or compensators to produce proper wavefronts for observing an adequate number of fringes within the Nyquist limit in today electronic image sensors, is a difficult task [1]. Less accurate geometrical testing classical methods such as Shack-Hartmann or Ronchi, are designed for slow optical systems ($F/\# > 1$), with symmetry of revolution or nearly; these last methods, are part of a particular kind of testing methods called Optical Deflectometry. In particular, there are already some recently developed optical deflectometry methods, for testing some specific kind of free forms [2]. Ronchi, Hartmann and Shack-Hartmann techniques, make use of a regular array of strips, holes or microlenses. Malacara and Cornejo proposed some decades ago the so called Null Ronchi Test, for which the classical Ronchi rulings with equidistant straight stripes were substituted by a deformed stripes in such a way that when the ronchigram was observed a regular set of equal spaced straight fringes appear [3]. Starting this century Díaz-Uribe and Campos-García [4], proposed a similar idea, but the test surfaces where a very fast convex surfaces ($F/\# < 1$); for them, instead of using a plane grating, a cylindrical screen with highly deformed lines, specifically calculated for each surface, were designed. This technique was called Null-Screen Test (NST). Later on, Avendaño-Alejo applied the same idea for testing very fast off-axis concave parabolic surface; more recently, he was able to design null screens for lenses tested in transmission. The design of the NS implied the calculation and use of the caustic of the lens [5]. In this paper we show how to extend these ideas for the testing of free forms so different to conventional surfaces that some new methods must be introduced.

2. Null Screen Design

Having the design parameters of the surface to be tested, the NS are designed in a very straight forward procedure through a reversed ray tracing (rays traveling backwards). Usually, the z -axis is defined by optical axis of the camera; starting at the image plane a regular array of spots or lines are defined as the expected image, a ray passing through the pinhole stop for every spot on the image is traced; the rays striking the screen define the position where a spot must lie to produce the expected image (Fig.1). When the design surface is not known *a priori*, a regular array of spots on the screen is a good start.

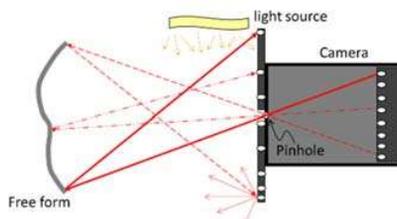


Fig. 1 Screen Design

3. Normals evaluation

For a single reflection surface its normal at every incidence point \mathbf{N} can be computed through

$$\mathbf{N} = \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{I}}, \quad (1)$$

PROCEEDINGS OF SPIE

SPIDigitalLibrary.org/conference-proceedings-of-spie

Measurement of a highly freeform surface using a cylindrical null-screen

Huerta-Carranza, Oliver, Campos-García, Manuel, Aguirre-Aguirre, Daniel, Mendoza-Villalobos, Brenda, Moreno-Oliva, Victor Ivan

Oliver Huerta-Carranza, Manuel Campos-García, Daniel Aguirre-Aguirre, Brenda Mendoza-Villalobos, Victor Ivan Moreno-Oliva, "Measurement of a highly freeform surface using a cylindrical null-screen," Proc. SPIE 11873, Optical Fabrication, Testing, and Metrology VII, 118730C (12 September 2021); doi: 10.1117/12.2592803

SPIE.

Event: SPIE Optical Systems Design, 2021, Online Only

PROCEEDINGS OF SPIE

[SPIDigitalLibrary.org/conference-proceedings-of-spie](https://spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie)

Improvements in the evaluation of parabolic trough solar collector using a dynamic flat null-screen

Huerta-Carranza, Oliver, Campos-García, Manuel, Aguirre-Aguirre, Daniel, Villalobos-Mendoza, Brenda, Moreno-Oliva, Víctor Iván

Oliver Huerta-Carranza, Manuel Campos-García, Daniel Aguirre-Aguirre, Brenda Villalobos-Mendoza, Víctor Iván Moreno-Oliva, "Improvements in the evaluation of parabolic trough solar collector using a dynamic flat null-screen," Proc. SPIE 11873, Optical Fabrication, Testing, and Metrology VII, 118730J (12 September 2021); doi: 10.1117/12.2592804

SPIE.

Event: SPIE Optical Systems Design, 2021, Online Only

PROCEEDINGS OF SPIE

SPIDigitalLibrary.org/conference-proceedings-of-spie

Measurements of corneal topography using a compact null-screen corneal topographer with a mobile device

Campos-García, Manuel, Pantoja-Arredondo, Luis Ángel, Aguirre-Aguirre, Daniel, Moreno-Oliva, Victor Ivan, Huerta-Carranza, Oliver, et al.

Manuel Campos-García, Luis Ángel Pantoja-Arredondo, Daniel Aguirre-Aguirre, Victor Ivan Moreno-Oliva, Oliver Huerta-Carranza, Victor Emanuel Armongol-Cruz, "Measurements of corneal topography using a compact null-screen corneal topographer with a mobile device," Proc. SPIE 11873, Optical Fabrication, Testing, and Metrology VII, 118730F (12 September 2021); doi: 10.1117/12.2592802

SPIE.

Event: SPIE Optical Systems Design, 2021, Online Only

PROCEEDINGS OF SPIE

SPIDigitalLibrary.org/conference-proceedings-of-spie

Design of a compact corneal topographer to characterize the shape of the cornea

Campos-García, Manuel, Aguirre-Aguirre, Daniel, Pérez-Lomelí, Juan Salvador, Peña-Conzuelo, Andrés, Huerta-Carranza, Oliver, et al.

Manuel Campos-García, Daniel Aguirre-Aguirre, Juan Salvador Pérez-Lomelí, Andrés Peña-Conzuelo, Oliver Huerta-Carranza, Christian Camargo-Fierro, "Design of a compact corneal topographer to characterize the shape of the cornea," Proc. SPIE 11352, Optics and Photonics for Advanced Dimensional Metrology, 113521A (1 April 2020); doi: 10.1117/12.2556052

SPIE.

Event: SPIE Photonics Europe, 2020, Online Only

PROCEEDINGS OF SPIE

SPIDigitalLibrary.org/conference-proceedings-of-spie

Analysis of the systematic and random errors in the conical corneal null-screen topographer

Peña-Conzuelo, Andrés, Campos-García, Manuel, Aguirre-Aguirre, Daniel, Huerta-Carranza, Oliver

Andrés Peña-Conzuelo, Manuel Campos-García, Daniel Aguirre-Aguirre, Oliver Huerta-Carranza, "Analysis of the systematic and random errors in the conical corneal null-screen topographer," Proc. SPIE 11352, Optics and Photonics for Advanced Dimensional Metrology, 113521H (1 April 2020); doi: 10.1117/12.2556056

SPIE.

Event: SPIE Photonics Europe, 2020, Online Only

PROCEEDINGS OF SPIE

[SPIDigitalLibrary.org/conference-proceedings-of-spie](https://spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie)

Evaluation of the aberrations of a PDMS lens

Campos-García, Manuel, Martínez-Rodríguez, Ángel Eugenio, Huerta-Carranza, Oliver, Vargas-Alfredo, Celestino, Santiago-Alvarado, Agustín, et al.

Manuel Campos-García, Ángel Eugenio Martínez-Rodríguez, Oliver Huerta-Carranza, Celestino Vargas-Alfredo, Agustín Santiago-Alvarado, Víctor Iván Moreno-Oliva, "Evaluation of the aberrations of a PDMS lens," Proc. SPIE 11057, Modeling Aspects in Optical Metrology VII, 110571N (21 June 2019); doi: 10.1117/12.2526276

SPIE.

Event: SPIE Optical Metrology, 2019, Munich, Germany

**Publicaciones no indizadas realizadas
a lo largo del doctorado**

Design of a compact conical null-screen corneal topographer for the evaluation of the anterior corneal surface

Luis Ángel Pantoja-Arredondo¹, Manuel Campos-García², Juan Salvador Pérez-Lomelí³, José Antonio Lechuga-Núñez⁴, Oliver Huerta-Carranza⁵, Víctor de Emanuel Armengol-Cruz⁶

Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología

Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, 04510, Ciudad de México

langelpa@ciencias.unam.mx¹; manuel.campos@icat.unam.mx²; salvador.perez@icat.unam.mx³; antonilemus1111@gmail.com⁴; oliver@ciencias.unam.mx⁵; armengolcruz@gmail.com⁶

ABSTRACT

We use a compact null-screen conic corneal topographer with a semiradial spot pattern using a mobile device's camera to capture the reflected pattern on a corneal surface to obtain its topography. We discuss the device's design and how it's calibrated by testing a spherical reference surface where we obtain geometrical parameters such as the radius of curvature and the conic constant, as well as the sagittal curve with this method. Then, we show some preliminary measurements obtained of some human corneas. Finally, we measure the mobile device's camera radial lens distortion, and we discuss some features for a future prototype of a compact corneal topographer.

Keywords: Corneal Topography, Null-screen, Optical Metrology, Aspheric Surface

1 INTRODUCTION

The human cornea's shape can be considered as a convex freeform surface, but more precisely and in some practical applications it is considered a prolate ellipsoid with radius of curvature in the range from 7.7 mm to 7.9 mm, and conical constant between -0.18 and -0.26. [1,2] It is very important to measure the shape of the human cornea accurately to detect some known pathologies such as keratoconus, marginal pellucid degeneration, corneal dystrophies, and others that affect its shape, reducing visual acuity. Many methods for measuring the shape of the human cornea are based on Placido rings which can be categorized as either small-cone or large-cone. Devices with small-cone can collect more data and are more accurate, but large-cone devices collection and data manipulation is easier.

The use of mobile devices has increased its applications in ophthalmology due to its powerful processing, portability, and sensor technology. It has become an interesting tool in the development of the design of a compact corneal topographer based on the null-screen method which measures the

NUMERICAL VALIDATION OF EXACT EQUATIONS TO MEASURE HIGHLY ABERRATED WAVEFRONTS

 Oliver Huerta-Carranza¹, Rufino Díaz-Uribe¹ and Maximino Avendaño-Alejo¹

 Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 70-186, México
 04510, México

oliver.huerta@icat.unam.mx

1. Introduction: In recent years, the use of freeform surfaces has increased in optical devices with the aim of reducing their size, weight, improving the quality of the image and furthermore the aberration compensation. A way to measure the optical quality of an optical system is through an approximation to Rayces's equations [1].

$$\frac{\partial W}{\partial x} \approx -\frac{T_x}{r}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} \approx -\frac{T_y}{r}, \quad (1)$$

where (T_x, T_y) are the transversal ray aberration components, W is the wavefront aberration and r is the radius of curvature of the reference sphere; i.e., the best spherical fit to the real wavefront Φ . However, this approach yields good results only when the wavefront is almost spherical; i.e., the aberration is very small [2]. In general, the wavefronts produced by a freeform can give larger departures from a spherical reference. Therefore, when using Rayces's equations there will be significant discrepancies with respect to the correct values of W . In a previous work, we have proposed a expression equivalent to those of Rayces [3] to measure the deformations Ω of the wavefront Φ but with respect to a non-spherical reference wavefront Φ_r , this equation is

$$\Omega = \Omega_0 + \int_C \sum n_z \frac{N_x - n_x}{N_z - n_z} dX + n_z \frac{N_y - n_y}{N_z - n_z} dY \quad (2)$$

where \vec{n} is normal to Φ , \vec{N} is normal to Φ_r and Ω is measured along the ray \vec{n} although in this case Ω is not the wavefront aberration. Eq. (2) is exact [4]. There are no approximations considered for deducing it; however, its numerical evaluation involves approximations, as will be discussed below.

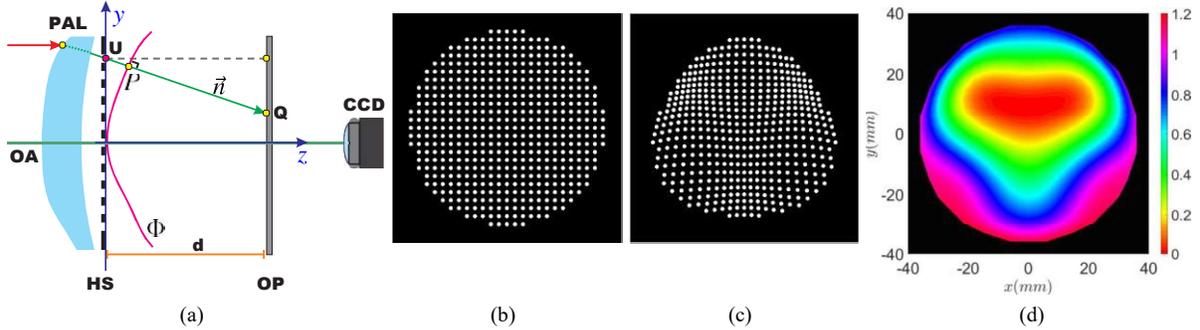


Fig. 1: a) Diagram of the evaluation system. b) Hartmann screen. c) Spots pattern on the plane observation. d) Wavefront under test Φ

2. Methodology : The diagram of the evaluation system is shown in Fig. 1(a). A plane wavefront strikes a Progressive Addition Lens (PAL), behind of the lens a Hartmann Screen HS is placed as is shown in Fig. 1(b); the bundle of rays passing through the holes forms a pattern of spots on observation plane OP (view Fig. 1(c)), and it is recorded by a CMOS camera. The normal vectors \vec{n} are calculated by $\vec{Q} - \vec{U}$ while the reference rays \vec{N} are calculated using the gradient $\nabla \Phi_r$ of any reference wavefront. The wavefront deformation Ω is calculated by numerical integration of Eq. (2), the simplest method for the numerical evaluation of Eq. (2) is the trapezoidal method for nonequally spaced data. Once the deformation Ω has been calculated, the points $P = (x, y, z)$ on the wavefront Φ are given by

$$x = X + n_x \Omega, \quad y = Y + n_y \Omega, \quad z = Z + n_z \Omega, \quad (3)$$

where $P_r = (X, Y, Z)$ are the points on the wavefront Φ_r . A polynomial fitting can be made through a least-squares method on the points (x, y, z) . The result is an analytical expression for the wavefront Φ . If we consider this polynomial fitting as a new reference wavefront, we can calculate again \vec{N} . This iteration procedure continues until we arrive at a predefined tolerance value of the differences for two consecutive iterations of Ω . To show the result of applying this method to a particular surface, we propose to represent the true wavefront under study Φ as the next combination of the Zernike polynomials (view Fig. 1(d)) as follows [5]

$$\Phi(x, y) = C_4 Z_4 + C_7 Z_7 + C_{30} Z_{30}. \quad (4)$$

A method to characterize free forms in Progressive Addition Lenses

Rufino Díaz-Uribe* Oliver Huerta-Carranza and Maximino Avendaño-Alejo
Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, Universidad of Nacional Autónoma de México,
México

*Corresponding author: rufino.diaz@ccadet.unam.mx

A method for measuring the shape of the free form surface of Progressive Addition Lenses is presented. It is based on optical deflectometry by capturing the reflected image of a flat target displayed on a LCD monitor. The accuracy of the method is around 10 μm .

Keywords: progressive addition lenses, metrology, presbyopia

1. Introduction

Progressive Addition Lenses (PAL) have been a better solution for presbyopia than bifocal lenses; the first allow the observation of objects located on an ample range of distances, not only far and near as the second one. Because its first surface of PAL is a free form without symmetries and very different to the usual surfaces used in spectacles (spherical and toric), their design, fabrication and testing have been a challenge for the opticians who had to propose new methods. The mathematical description of such surfaces has been based on splines [1] or nurbs [2]; their fabrication is by replication with molds fabricated with six or more axes CNC machines [3]. For testing them different methods have been proposed, going from mechanical methods using CMM, or optical methods that avoid the damage to the surface by the stylus; they goes from laser scan [4], to the most used method based on the Hartmann or Shack-Hartmann technique [5]. The first optical method allows to measure the free form but the scan is slow and subject to errors of the scan system; the second kind of optical methods measure at one time with a single shot the power distribution of the PAL, but no the single free form. In this paper we propose some combination of reflection Hartmann technique (Ronchi, indeed), but by observing in an oblique direction, to avoid obscuration by the same screen. The reconstruction of the surface is made by integration of the slopes (or the normal components).

2. Method

The experimental setup is shown in fig. 1. A target composed of white spots on a black background is displayed in the LCD monitor which is inclined. The progressive lens is placed on the horizontal plane, and the camera for capturing the image of the reflected spots is in the opposite side of the lens. The Dynamic Point Shifting Method (DyPoS) [6] is used to avoid superposition of the spots maintaining a good number of measuring points distributed all over the surface. Fig. 2 shows a composition of eight different images captured with the same number of targets. The spots on the target are spatially distributed in such a way that (Fig. 2.a), for a spherical surface the reflected image is a regular array of spots along radial lines. Due to the free form the image is different (Fig. 2.b); the centroid position of each image spot on the image plane is obtained and from it the normal to the real surface is obtained. After a numerical trapezoidal integration procedure the shape of the



Evaluación de la Superficie de un Espejo Plano Mediante el Método de Pantallas Nulas.

P. Cebrian-Xochihuila, O. Huerta-Carranza y R. Díaz-Urbe

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET), Depto. de Óptica y Microondas

Dirección Circuito Exterior S/N C.P.04510, CD Universitaria, Ciudad de México, México
pedro.cebrian@ccadet.unam.mx

RESUMEN

En un trabajo previo [1], fue propuesto un método basado en la técnica de Pantallas Nulas para la evaluación de la forma de la superficie de un helióstato, sin embargo, no se analizaba la superficie completa del espejo. Ahora se propone una modificación al método para lograr un análisis de la superficie total de un espejo plano con dimensiones de 900x1300mm. En base al tamaño del espejo de prueba y la posición de pinhole de la CCD utilizada para capturar las imágenes, se hace un trazo de rayos para determinar la Pantalla Nula (Distribución de puntos), que será utilizada para evaluar la superficie del espejo.

Dado que el tamaño del pixel de la CCD es de $6.4\mu\text{m}$, entonces es posible medir deformaciones hasta de 0.2mm, de manera que la precisión del método propuesto es de 1.2 miliradianes en la pendiente [2]. Como resultados previos del método propuesto, se obtienen deformaciones Pico-Valle $PV=20\text{mm}$ aproximadamente, con un $RMS = 0.86\text{mm}$

PALABRAS CLAVE: Pruebas ópticas; Pantalla Nulas; Espejo plano;

1 INTRODUCCIÓN

Existen algunas técnicas para evaluar la forma de la superficie de concentradores solares tales como la Fotogrametría [3], con una precisión del orden de 1:50,000, sin embargo, esta técnica es de contacto y puede generar cambios en las propiedades ópticas de la superficie de prueba, lo cual no es conveniente. Otro método es el SCCAN [4], con una precisión 0.03 miliradianes, en esta técnica, la evaluación geométrica de la superficie de los espejos planos, se hace a través del análisis de la imagen de una estrella por la noche, que es reflejada por dichos espejos, de manera que no es conveniente, ya que la prueba no se realiza en condiciones de operación de los helióstatos donde los factores ambientales, tal como la temperatura y velocidad del viento, son diferentes bajo el sol radiante. Recientemente, fue desarrollado el método (PDM) [5], se basa en el análisis de la distorsión de un patrón de franjas que es

Bibliografía

- [1] S. Wills, “Freeform Optics: Notes from the Revolution”, *Optics & Photonics News* **28**(7), 34-41 (2017).
- [2] F. Z. Fang, X. D. Zhang, A. Weckenmann, G. X. Zhang and C. Evans, “Manufacturing and Measurement of Freeform Optics”, *Ann. Manuf. Technol.*, **62**(2), pp. 823-846 (2013).
- [3] J. P. Rolland, M. A. Davies, T. J. Suleski, C. Evans, A. Bauer, J. C. Lambropoulos, and K. Falaggis, “Freeform optics for imaging,” *Optica* **8**(2), 161-176 (2021).
- [4] J. Ye, L. Chen, X. Li, Q. Yuan, and Z. Gao, “Review of optical freeform surface representation technique and its application,” *Opt. Eng.* **56**(11), 110901 (2017).
- [5] B. Bourdoncle, J. P. Chauveau, and J. L. Mercier, “Traps in displaying optical performances of a progressive-addition lens,” *Appl. Opt.* **31**(19), 3586-3593 (1992).
- [6] G. H. Guilino, “Design philosophy for progressive addition lenses,” *Appl. Opt.* **32**(1), 111-117 (1993).
- [7] L. Qin, L. Qian, and J. Yu, “Simulation method for evaluating progressive addition lenses”, *Appl. Opt.* **52**(18), 4273-4278 (2013).
- [8] P. Hartmann, *OPTICAL GLASS* (SPIE Press, 2014).
- [9] W. Smith, “The Practice of Optical Engineering,” en *Modern optical engineering: The design of optical system*, (McGraw Hill 2008), pp. 599-657.
- [10] J. Schwiegerling, “Optical Surfaces and Their Fabrication,” en *Optical specification, fabrication, and testing*, (McGraw Hill 2014), pp. 119-146.
- [11] SCHOTT. (23 de noviembre de 2021). <https://www.schott.com/shop/advanced-optics/en/Optical-Glass/c/optical-glass>
- [12] OPTIPRO. (23 de noviembre de 2021). <https://www.optipro.com/optical-manufacturing/cnc-polishing/epx-200/>
- [13] R. Williamson, *Field Guide to Optical Fabrication* (SPIE Press, 2011).
- [14] OPTIPRO. (11 de diciembre de 2021). <https://www.optipro.com/>
- [15] M. Hausner, “Methods for Producing Optical Components,” en *Optics inspections and tests : A guide for optics inspectors and designers*, (McGraw Hill, 2014), pp. 69-86.
- [16] D. Malacara, K. Creath, J. Schmit y J. C. Wyant, “Testing of Aspheric Wavefronts and Surfaces,” en *Optical Shop Testing*, (Wiley, 2007), pp. 435-497.
- [17] R. Kingslake, “The Interferometer Patterns Due to the Primary Aberrations”, *Trans. Opt. Soc.*, **27**(94) (1925-1926).
- [18] A. Cordero-Davila, A. Cornejo-Rodriguez, and O. Cardona-Nunez, “Null Hartmann and Ronchi-Hartmann tests,” *Appl. Opt.* **29** (31), 4618-4621 (1990)
- [19] D. Malacara-Doblado y I. Ghozeil, “Hartmann, Hartmann-Shack and Other screen Tests,” en *Optical Shop Testing*, D. Malacara, ed. (Wiley, 2007), pp. 361-397.

-
- [20] A. Cornejo-Rodríguez, "Ronchi Test," en *Optical Shop Testing*, D. Malacara, ed. (Wiley, 2007), pp. 317-360.
- [21] R. Shack, B. Platt "Production and use of a lenticular Hartmann screen," *JOSA* **61**, 656 (1971).
- [22] B. Platt and R. Shack, "History and principles of Shack-Hartmann wavefront sensing," *J. Refract. Surg.* **17**(5), 573-577, (2001).
- [23] C. Zhou, W. Wang, K. Yang, X. Chai, and Q. Ren, "Measurement and comparison of the optical performance of an ophthalmic lens based on a Hartmann-Shack wavefront sensor in real viewing conditions," *Appl. Opt.* **47**(34), 6434-6441 (2008).
- [24] Z. Jia, K. Xu, and F. Fang, "Measurement of spectacle lenses using wavefront aberration in real view condition," *Opt. Express* **25**(18), 22125-22139 (2017).
- [25] R. Díaz-Uribe and M. Campos-García, "Null-screen testing of fast convex aspheric surfaces", *Appl. Opt.* **39**(16), 2670-2677 (2000).
- [26] M. Avendaño-Alejo and R. Díaz-Uribe, "Testing a fast off-axis parabolic mirror by using tilted null screens", *Appl. Opt.* **45**(12), 2607-2614 (2006).
- [27] M. Avendaño-Alejo, D. González-Utrera, N. Qureshi, L. Castañeda, and C. L. Ordóñez-Romero, "Null Ronchi-Hartmann test for a lens", *Opt. Express* **18**(20), 21131-21137 (2010).
- [28] M. Campos-García, A. Estrada-Molina, R. Díaz-Uribe, "New null screen design for corneal topography," *Proc. SPIE* 8011, 801124 (2011).
- [29] M. Campos-García, V. Armengol-Cruz, and A. I. Osorio-Infante, "Evaluating the anterior corneal surface using an improved null-screen system," *OSA Continuum* **2**(3), 736-748 (2019).
- [30] D. Aguirre-Aguirre, B. Villalobos-Mendoza, R. Díaz-Uribe, and M. Campos-García, "Null-screen design for highly freeform surface testing," *Opt. Express* **28**(24), 36706-36722 (2020).
- [31] M. Campos-García, V. I. Moreno-Oliva, R. Díaz-Uribe, F. Granados-Agustín, and A. Santiago-Alvarado, "Improving fast aspheric convex surface tests with dynamic null screens using LCDs," *Appl. Opt.* **50**(9), 3101-3109 (2011).
- [32] M. I. Rodríguez-Rodríguez, A. Jaramillo-Núñez, and R. Díaz-Uribe, "Dynamic point shifting with null screens using three LCDs as targets for corneal topography", *Appl. Opt.* **54**(22), 6698-6710 (2015).
- [33] P. Cebrian-Xochihuila, O. Huerta-Carranza, R. Díaz-Uribe, "Accuracy analysis of the Null-Screen method for the evaluation of flat heliostats," *Proc. SPIE* 9898, 989812 (2016).
- [34] P. Cebrian-Xochihuila, O. Huerta-Carranza y R. Diaz-Uribe, "Evaluación de la Superficie de un Espejo Plano Mediante el Método de Pantallas Nulas.," presentado en el XXXII Congreso de Instrumentación (SOMI), Acapulco, Guerrero., México, del 25 al 27 de octubre 2017.
- [35] M. Campos-García, A. Peña-Conzuelo, U. Espinoza-Nava, J. R. Díaz-Uribe, J. A. Aguirre-Caro, "Dynamic null-screens: a proposal for characterizing the PTSC with adaptive patterns," *Proc. SPIE*, **10692**, Optical Fabrication, Testing, and Metrology VI, 106921J (15 June 2018).
- [36] R. Díaz-Uribe, O. Huerta-Carranza, M. I. Rodríguez-Rodríguez, and M. Avendaño-Alejo, "Testing Free Forms with Optical Deflectometry," in *Latin America Optics and Photonics Conference, OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2018)*, paper Th5B.1.
- [37] R. Díaz-Uribe, O. Huerta-Carranza and M. Avendaño-Alejo, "A method to characterize ophthalmic progressive lenses," presentado en 9th Visual and Physiological Optics meeting (VPO 2018), Athens, Greece, del 29 al 31 de agosto del 2018.
-

-
- [38] D. Gonzalez-Utrera, D. Aguirre-Aguirre, M. I. Rodríguez-Rodríguez, and R. Diaz-Uribe, "Null-screen testing of the complementary freeform surfaces of an adjustable focus lens," *Opt. Express* **29**(14), 21698-21710 (2021).
- [39] O. Huerta-Carranza, M. Avendaño-Alejo, and R. Díaz-Uribe, "Null screens to evaluate the shape of freeform surfaces: progressive addition lenses," *Opt. Express* **29**(17), 27921-27937 (2021).
- [40] S. A. Klein, "Axial curvature and the skew ray error in corneal topography," *Optom. Vis. Sci.* **74**(11), 931-944 (1997).
- [41] O. Huerta-Carranza, "Desarrollo de un algoritmo para corregir los errores en topografía corneal debido a desalineaciones," Tesis de maestría (Posgrado de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017).
- [42] P. Arulmozhivarman, L. Praveen Kumar, and A. R. Ganesan, "Measurement of moments for centroid estimation in Shack-Hartmann wavefront sensor a wavelet-based approach and comparison with other methods", *Optik* **117**(2), 82-87 (2006).
- [43] A. K. Ghatak and K. Tahyagarajan, "Geometrical Theory of Third-Order Aberrations," en *Contemporary Optics*, (Plenum, 1978), pp. 31-70.
- [44] M. González-Cardel and R. Díaz-Uribe, "An analysis on the inversion of polynomials," *Rev. Mex. Fís. E* **52**(2), 163-171 (2006).
- [45] Z. Gong, Z. Liu, and G. Zhang, "Flexible global calibration of multiple cameras with nonoverlapping fields of view using circular targets", *Appl. Opt.* **56**(11), 3122-3131 (2017).
- [46] W. Greiner, "Theory of the Top," en *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, (Springer, 2010), pp. 209-256.
- [47] J. Rodríguez, M. T. Martín, J. Herráez, and P. Arias, "Three-dimensional image orientation through only one rotation applied to image processing in engineering", *Appl. Opt.* **47**(35), 6631-6637 (2008).
- [48] S. C. Chapra, "Numerical Integration Formulas," en *Applied numerical methods with MATLAB® for engineers and scientists* (McGraw-Hill, 2018), pp. 488-523.
- [49] T. H. Cormen , C. E. Leiserson , R. L. Rivest y C. Stein, " Single-Source Shortest Paths, " en *Introduction to Algorithms*, (MIT Press, 2009), pp. 643-683.
- [50] S. Banerjee, A. Roy, "Singular Value and Jordan Decompositions," en *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*, (Crc Press, 2014), pp. 371-400.
- [51] G. M. Dai, "Ocular Wavefront Representation," en *Wavefront Optics for Vision Correction*, (SPIE Press, 2008), pp. 33-95.
- [52] G.W. Griffiths, L. Plociniczak, W.E. Schiesser, "Analysis of cornea curvature using radial basis functions- Part I: Methodology," *Comput. Biol. Med.* **77**, 274-284 (2016).
- [53] M. P. Do Carmo, "The Geometry of the Gauss Map," en *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated* (Dover Publications, 2016), pp. 136-219.
- [54] A. Cordero-Davila, A. Cornejo-Rodríguez, and O. Cardona-Núñez, "Ronchi and Hartmann tests with the same mathematical theory," *Appl. Opt.* **31**, 2370-2376 (1992).
- [55] F. S. Granados-Agustín, O. Cardona-Núñez, R. Díaz-Uribe, E. Percino-Zacarías, A. M. Zárate-Rivera, A. Cornejo-Rodríguez, "Analysis of the common characteristics of the Hartmann, Ronchi, and Shack-Hartmann tests," **125**(2), 667-670 (2014).
- [56] J. L. Rayces, "Exact relation between wave aberration and ray aberration," *Opt. Acta* **11** (2), 85-88 (1964).
-

-
- [57] Y. Mejia, "Exact relations between wave aberration and the sagitta difference, and between ray aberration and the slope difference," *Optik* **123**(8), 726-730 (2012).
- [58] R. Díaz-Urbe and O. Huerta-Carranza, "Generalized Rayces Equations for aspheric reference surface," presentado en ICO-23, Santiago de Compostela, España, del 26 al 29 agosto del 2014.
- [59] O. Huerta-Carranza, R. Díaz-Urbe, and M. Avendaño-Alejo, "Exact equations to measure highly aberrated wavefronts with the Hartmann test," *Opt. Express* **28**, 30928-30942 (2020).
- [60] J. Sasian, "The wave aberration function," en *Introduction to Aberrations in Optical Imaging Systems*, (Cambridge, 2013), pp. 67-75.
- [61] W. T. Welford, "Monochromatic aberrations," en *Aberrations of Optical Systems*, (Routledge, 1986), pp. 92-129.
- [62] Y. Mejia, D. A. Mora, and D. E. Diaz, "Power maps and wavefront for progressive addition lenses in eyeglass frames", *Optom. Vis. Sci.* **91**(10), (2014).
- [63] W. Y. Hsu, Y. L. Liu, Y. C. Cheng, C. H. Kuo, C. C. Chen, and G. D. Su, "Design, fabrication, and metrology of ultra-precision optical freeform surface for progressive addition lens with B-spline description," *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* **63**(1), 225-233 (2012).
- [64] J. Yu, F. Fang, and Z. Qiu, "Aberrations measurement of freeform spectacle lenses based on Hartmann wavefront technology", *Appl. Opt.* **54**(5), 986-994 (2015)
- [65] Y. Li, X. Hu, H. Jiang, H. Feng, and H. Chen, "Alignment tolerant dual-surface sphero-cylindrical progressive addition lens," *OSA Continuum* **3**(3), 580-593 (2020).