UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

ZERMELO DENTRO DEL MULTIVERSO CONJUNTISTA

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

LIC. RAYMUNDO ROBERTO MEZA RIVERA

TUTOR: DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ (FFyL-UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO. DICIEMBRE DE 2021

ESTA TESIS DE MAESTRÍA FUE ELABORADA CON EL APOYO DE UNA
BECA NACIONAL CONACyT.

A mi familia y amigos

La aritmética –básicamente como cualquier otra disciplina– consiste, en términos generales, de proposiciones que comprehenden multitudes infinitas de aseveraciones particulares. Sus axiomas conciernen dominios de cosas que pueden ser mapeadas uno-a-uno (o uno-a-muchos) sobre dominios parciales propios y, por tanto, realmente son "actualmente infinitos". Asumir tales dominios infinitos (¡los cuales no siempre tienen que ser "conjuntos" en el sentido teórico-conjuntista de la palabra!) es, por eso, hacer el supuesto básico que subyace toda la matemática, la cual, como tal, ciertamente requiere también alguna justificación (¡de acuerdo con el principio de razón suficiente!). Una "prueba", en el sentido propio de la palabra, por supuesto, no es posible cuando se trata de un supuesto axiomático, como aquí es el caso. Sin embargo, igualmente imposible es la realización mediante un modelo explícitamente específico y preparado, en tanto que el infinito como tal desafía, después de todo, cualquier intento para ponerlo de manifiesto. Tal supuesto es capaz de ser justificado meramente por su éxito, por el hecho de que aquél (¡y sólo aquél!) ha hecho posible la creación y el desarrollo de toda la aritmética existente, la cual es, en esencia, simplemente la ciencia del infinito. Pero ¿está justificada la existencia de esta ciencia? ¿No podría ser que el caso que esta hipótesis del infinito aparentemente tan fructífera llevase contradicciones dentro de la matemática, y destruyese así la esencia real de esta ciencia, que se jacta tanto de la corrección de sus inferencias? Por paradójico que parezca en el caso de una ciencia que ha alcanzado los mayores éxitos en los dos mil años de su desarrollo, no podemos descartar, sin considerar más de cerca, la posibilidad de que nuestra matemática descanse sobre contradicciones.

—Ernst Zermelo (1929b)

Agradecimientos

El presente trabajo fue posible gracias al apoyo de una serie de personas con quienes siempre me encontraré en deuda.

En primer lugar, quisiera agradecer a mi tutor, el Dr. Cristian Gutiérrez, quien a lo largo de varios años me ha apoyado como nadie en mi formación académica. Cristian, sin duda, una vez más la deuda que tengo contigo es enorme. No sabes cuanto te agradezco toda la paciencia, la orientación, el tiempo, la disposición y la consideración que, sin importar el día y la hora, me has brindado sin pensarlo y muchas sin pedirlo. Es por ti principalmente que pude realizar este trabajo en tan escaso periodo de tiempo. Realmente me considero muy afortunado por contar contigo como maestro. En verdad, muchísimas gracias por toda la confianza que me has depositado y por la amistad que me has extendido durante todos estos años.

Agradezco también a cada uno de mis lectores el Dr. Mario Gómez Torrente, el Dr. Max Fernández de Castro, el Dr. Alejandro Vázquez del Mercado y el Dr. Carlos Álvarez por toda la disposición, la atención y el cuidado que dedicaron en la revisión de este escrito, y en tan poco tiempo. Desgraciadamente, por la situación de pandemia actual, no pude expresarles mi agradecimiento en persona, pero verdaderamente fue un honor para mí contar con un comité constituido por autoridades tan respetables y a quienes tanto admiro. En verdad estoy muy agradecido por todo su apoyo durante este proceso de mi formación académica. En particular, quisiera destacar el apoyo que me proporcionó el Dr. Gómez Torrente quien, además de aceptar dirigirme dentro del Programa de Estudiantes Asociados del Instituto de Investigaciones Filosóficas, me hizo varias observaciones pertinentes y comentarios muy valiosos durante la etapa más temprana de mi proyecto, y que ciertamente contribuyeron en la calidad del presente.

Por otro lado, quisiera agradecer a mi madre, Blanca Estela Rivera Bermeo, y a mi hermano, Renato Alejandro Meza Rivera, quienes siempre han estado presentes en mi vida. Gracias por todo su apoyo, cariño, motivación y comprensión, así como su paciencia en los momentos más complicados. Indudablemente, por ustedes he llegado donde estoy ahora.

A mis amigos Cristina Flores, Abraham Olivetti, Eduardo Granados, Isis Espinoza, Juan Sandoval, Ulises Aroche, Patricio Ávila y Javier Gómez les agradezco mucho su apoyo, su motivación, sus observaciones y sugerencias durante el desarrollo de este trabajo, así como todas las alegrías la compañía que me han brindado dentro y fuera del ámbito académico. En especial, quisiera agradecer a César Escobedo, quien siempre se ha mostrado dispuesto a resolver cualquier duda que me ha surgido relacionada con algún área de la matemática, particularmente con la teoria de conjuntos. Cesar, en verdad agradezco mucho tu paciencia para explicarme cualquier tema que no me ha quedado claro y por prestarme tu ayuda para comprender los asuntos más fascinantes de la matemática. Por otra parte, también quisiera agradecer a Ana Lucía Terán Cornejo, quien me hizo una serie de observaciones y comentarios muy valiosos en relación con la redacción de este escrito, así como una serie de sugerencias respecto de varias traducciones de las citas que ocupé. Ana, realmente te agradezco mucho tu tiempo, tu apoyo y tu comprensión, así como la inspiración y el cariño que me has dado durante estos meses. En fin, muchas, muchas gracias a todos.

También me gustaría agradecer al Dr. Luis Estrada y a los miembros del seminario FiCiForTes, quienes me hicieron excelentes comentarios y sugerencias durante la etapa temprana de esta investigación y me motivaron a trabajar en la precisión y claridad de una serie de ideas. De igual modo, quisiera agradecer al Instituto de Investigaciones Filosóficas y al Programa de Estudiantes Asociados por los recursos que pusieron a mi disposición durante la realización del presente escrito.

Finalmente, quisiera agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo que me otorgaron a lo largo de mis estudios de maestría y de esta investigación.

Índice general

Introducción

Quizá una de las maneras de precisar las investigaciones realizadas por alguna disciplina —sea científica o matemática— es establecer con claridad al menos los aspectos ontológicos, epistemológicos y metodológicos que las conducen. No obstante, muchas veces la determinación de estas cuestiones no es tan inmediata como podría desearse. Que esto puede resultar algo bastante difícil se hace patente particularmente en el caso de la matemática, donde los criterios de existencia, las cualidades del conocimiento y las metodologías para su desarrollo parecen alejarse peligrosamente de aquéllas "mejor instauradas" de la ciencia natural. Con todo, la distancia —tal vez aparente— entre unos y otros no es motivo para desacreditar los esfuerzos por esclarecer los estándares en que se desenvuelve la primera. Después de todo, la historia ha sido juez y testigo de la utilidad y contribución que la matemática ha ejercido dentro de las instituciones científicas; de hecho, tal ha sido su éxito que hoy día no es extraño asumir su intervención en prácticamente cualquier disciplina de carácter científico.

Por ejemplo, no resulta muy difícil reconocer el papel que la ciencia natural ha jugado sobre las diferentes concepciones que el hombre se ha formado sobre el mundo en las múltiples etapas del progreso intelectual; en cada momento —y dependiendo de la profundidad y severidad de los prejuicios injeridos por las distintas tradiciones populares—, la ciencia ha influido, en menor o mayor grado, sobre la determinación de los objetos existentes y sus propiedades, los criterios de justificación epistémica, los métodos admisibles para llevar a cabo las investigaciones, etcétera. Aunque estos elementos han variado de tiempo en tiempo y de conformidad con los varios descubrimientos y formulaciones teóricas realizados por las ciencias empíricas, el estado específico del desarrollo matemático durante esos periodos frecuentemente se ha inmiscuido en la decisión de tales asuntos. Por decir algo: la matemática ha prestado sus servicios para la caracterización de estructuras abstractas bajo los sistemas físicos y sociales, así como para la elucidación de sus propiedades; ha suministrado recursos conceptuales para describir y modelar los fenómenos que estudian las ciencias naturales; ha permitido justificar y precisar los resultados obtenidos mediante los procedimientos de dichas ciencias; ha posibilitado la interacción entre las diferentes ramas de la ciencia al ofrecerles un terreno formal y común sobre el cual trasladar sus problemas de unas a otras, de manera que muchas veces ha facilitado su resolución y fomentado el avance científico. En pocas palabras, el amplio alcance de la matemática, su adaptabilidad, aplicabilidad y precisión han promovido su implementación sobre una cantidad considerable de estudios, al punto de situarse en la base de las prácticas y del desarrollo de la mayoría de las disciplinas científicas.

Sin embargo, si bien parece haber una clara relación entre las prácticas científicas y las matemáticas, la naturaleza de esta relación no lo es tanto. Esto ha ocasionado que una parte de la labor en filosofía de la ciencia se haya concentrado sobre la elaboración de respuestas a preguntas del tipo: ¿Cómo es que los objetos abstractos de la matemática colaboran con el estudio de las entidades concretas de la ciencia natural?, ¿cómo pueden ajustarse los métodos de la matemática con los métodos de las ciencias empíricas?, ¿cómo es que las prácticas matemáticas muchas veces permiten dotar de sentido y precisión a las prácticas científicas?, ¿por qué la matemática resulta tan fundamental para el desarrollo de las ciencias y para extender la comprensión sobre el mundo físico? Contestar estas cuestiones no es una tarea sencilla y requiere un examen cuidadoso.[1] Más aún, para poder abordar estos asuntos de manera satisfactoria, muy probablemente el filósofo de la ciencia deba considerar primeramente el trabajo del filósofo de la matemática y atender las inquietudes contra las que este último se enfrenta:

> ¿De qué, si es que de algo, trata la matemática? ¿Cómo se realiza la matemática? ¿Sabemos matemáticas y, en dado caso, cómo sabemos matemáticas? ¿Cuál es la metodología de la matemática y en qué medida es esta metodología confiable? ¿Qué lógica es la adecuada para la matemática? ¿En qué medida son los principios de la matemática objetivos e independientes de la mente, el lenguaje y la estructura social de los matemáticos? (Shapiro, 2009, p. 5)

De este modo, la importancia por comprender las peculiaridades de los métodos, saberes y objetos de la matemática no es despreciable: más allá de la claridad que puede brindar sobre su relación con el quehacer científico, el análisis de estos temas adicionalmente promete contribuir con un mayor entendimiento de ciertas cuestiones relacionadas con el objeto de estudio de disciplinas filosóficas más generales, como son, la ontología y la epistemología.

Con todo, lo anterior parece sugerir de antemano la relevancia de la comprensión de la matemática y sus prácticas para la reflexión filosófica sobre ella y la ciencia, pero tal vez uno pueda (o incluso deba) ir un poco más lejos y cuestionar la metodología misma que se utiliza para su estudio. Hasta este punto, parece que se ha partido desde la perspectiva del filósofo y desde cómo éste se aproximaría a la reflexión en torno de la matemática, pero es probable que este modo de proceder resulte inadecuado: al comprender mejor las prácticas de la matemática, y su historia, bien puede ser el caso que algunas de las preguntas desplegadas por el filósofo no sean relevantes desde el punto de vista de la matemática misma o que, de hecho, estén mal planteadas; que sean únicamente de interés para

[1] Tal vez uno de los primeros en ofrecer una respuesta seria a estas cuestiones fue Kant con su tesis acerca de que tanto la aritmética como la geometría son sintéticas *a priori*. Como dice Shapiro (2009): "De acuerdo con Kant, la matemática se relaciona con las formas ordinarias de la percepción en el espacio y tiempo. Desde esta perspectiva, la matemática se aplica al mundo físico porque se ocupa de las maneras en que percibimos el mundo físico." (p.5).

aquél, pero no para el matemático. De este modo, conocer las prácticas de la matemática y su evolución histórica puede ser una herramienta valiosa no solamente para establecer las cuestiones filosóficamente relevantes para la matemática, sino también para proponer una metodología de investigación hacia su análisis filosófico. No obstante, como puede imaginarse, abordar el análisis filosófico de una disciplina desde un enfoque metodológico particular requiere ser justificado de algún modo; esto es precisamente lo que se intentará en un primer momento (el objeto del primer capítulo). Sin embargo, antes de insistir sobre este punto, cabe plantear el objetivo principal que aquí se persigue.

El presente trabajo consiste en implementar la metodología del *filósofo segundo* (la cual se analiza en el primer capítulo) con el propósito de establecer con cierta claridad cuál, si es que alguno, es el *objeto de estudio* de una disciplina matemática particular: la *teoría de conjuntos*. Para conseguir esto, el cuerpo principal del texto estará consagrado a la presentación de una serie de fragmentos representativos de la historia de los conjuntos —comprehendidos principalmente entre la segunda mitad del siglo XIX y los primeros treinta años del siglo XX (aproximadamente)—. El análisis de estos episodios históricos permitirá dar cuenta de ciertas directrices metodológicas que determinaron el desarrollo peculiar de dicha teoría dentro de ese periodo y, en última instancia, permitirá proponer un objeto de estudio de la teoría de conjuntos con base en el trabajo de Ernst Zermelo. Más precisamente, el objetivo aquí no consiste en establecer las preguntas filosóficas relevantes para esta disciplina matemática ni en ofrecer respuestas a ellas de manera definitiva. En cambio, la meta que se persigue en este trabajo es mucho más reducida: proponer y defender el llamado *multiverso zermeliano* como el objeto de estudio más apropiado de la teoría de conjuntos (en esto se concentrará el tercer capítulo), al menos desde el marco metodológico sugerido por el *naturalismo matemático* de Penelope Maddy y en virtud de las prácticas, objetivos y motivaciones teórico-conjuntistas particulares que arroja la reflexión sobre ciertos episodios históricos (los considerados en el segundo capítulo). En última instancia, será sobre la base del multiversismo zermeliano que se podrá ofrecer una caracterización más precisa de los *modelos pretendidos*[2] de la teoría de conjuntos.

Dicho lo anterior, el primer capítulo estará dedicado a la presentación del marco metodológico de la investigación sobre el cual estará apoyado el análisis filosófico de la teoría de conjuntos en el presente trabajo, este es, como ya se ha adelantado, el marco metodológico matemático-naturalista de la filósofa norteaméricana Penelope Maddy. Para ello, en un inicio se ofrecerá una rápida caracterización del naturalismo en general, así como

[2]Nótese el artículo definido en "plura". En efecto, como se verá hacia el final de este trabajo, la teoría de conjuntos tanto en su versión de primer orden como en su versión de orden superior no es *categórica*; es decir, que no tiene un único modelo salvo isomorfismo. Sin embargo, la *no-categoricidad* de una y otra teoría es muy distinta en uno y otro caso. En el segundo caso especialmente, resulta que la teoría si bien no es categórica, es *cuasi-categórica*; cosa que permitirá contar con modelos pretendidos no isomorfos pero con relaciones estructurales muy bien-definidas.

su relación con el *anti-revisionismo externo* y el *revisionismo interno* (sección 1.1.1); con base en estos últimos será que se facilitará la introducción de la perspectiva de la filosofía segunda, la cual, como consecuencia de su proceder metodológico, dará lugar a la investigación y reflexión de las disciplinas matemáticas a partir de las pautas establecidas por sus mismas prácticas y objetivos peculiares, es decir, al naturalismo matemático (sección 1.1.2); adicionalmente, para completar el panorama, se ofrecerá un breve recuento de cómo la matemática se consolidó como una práctica de suyo. Posteriormente, se concluirá con un par de secciones adicionales. La primera de ellas (sección 1.2), se ocupará de señalar muy superficialmente algunas razones detrás de la elección de este marco metodológico particular; la segunda (sección 1.2.2), de extender los motivos para consagrar este trabajo al caso muy especial de la teoría de conjuntos.

Con el segundo capítulo se dará comienzo propiamente al análisis que compete a este trabajo. Una vez que el primero —se espera— ha dejado claro que, para realizar un análisis filosófico de la teoría de conjuntos desde el marco metodológico de la filosofía segunda, ante todo, es menester efectuar un análisis de la práctica de esta teoría, se procederá con el examen de una serie de episodios históricos y representativos alrededor del surgimiento axiomático de la teoría de conjuntos y de su desarrollo durante los primeros treinta años del siglo pasado. Es a partir de estos episodios que se podrá identificar algunas de las motivaciones, ideas y objetivos más característicos detrás de la consolidación de la práctica de esta disciplina. Justamente, lo anterior es lo que permitirá en el tercer capítulo dar cuenta de las directrices metodológicas al fondo de la práctica teórico-conjuntista durante esa época.

El segundo capítulo está compuesto principalmente por tres secciones: la primera está dedicada a la historia de la teoría de conjuntos previa a su primera axiomatización; la segunda, se ocupa de los eventos ocurridos alrededor de la primera axiomatización de la teoría de conjuntos; la tercera, de examinar los acontecimientos alrededor de la segunda axiomatización ofrecida por Zermelo en 1930. En particular, respecto de la primera sección, se destaca la introducción de la metodología *no-constructiva* en la práctica matemática, a partir de la cual se recuperarán una serie de elementos característicos de la tradición asociada con la *escuela de Gotinga* (sección 2.1.1). Después se aborda el modo en que ciertos personajes partidarios de está tradición se vieron en la necesidad de introducir la noción de conjunto para fundamentar, precisar y generalizar los resultados obtenidos en las diferentes áreas de la matemática. Los matemáticos que aquí se consideran son Bernhard Riemann, Richard Dedekind y Georg Cantor (sección 2.1.2). A partir de la influencia de estos autores es que se presentará posteriormente el *programa temprano de David Hilbert* y el *surgimiento de las paradojas* (sección 2.1.3). Además, se destacará el impacto que esto tendría sobre el desarrollo del pensamiento de Zermelo y el surgimiento de la teoría axiomática de los conjuntos (en especial, sobre su primera versión de 1908), así como la relevancia que tuvo el *teorema del buen-orden* para motivarla (sección 2.1.4).

A continuación, se pasará al estudio de la *primera axiomatización de la teoría de conjuntos*; particularmente, se abordará la discusión en torno de la noción de "*definitud*" (sección 2.2), la cual se encuentra dentro de la formulación original del *axioma de separación*. Como se verá, la vaguedad de esta noción desataría la polémica entre los teóricos de conjuntos que adoptaban una postura más cercana al constructivismo (*e. g.*, Thoralf Skolem y Hermann Weyl) y Zermelo, quien se mantendría fiel al programa no-constructivista de Gotinga. Con base en esta discusión es que se abordará la *segunda versión de la teoría axiomática de conjuntos* ofrecida por Zermelo.

Finalmente, para concluir el segundo capítulo, se desarrollará el análisis alrededor de la disputa entre Zermelo y Skolem de manera más cuidadosa. En particular, se presentarán las objeciones de Skolem con base en su formulación de la *teoría de conjuntos en primer orden* y en el *metateorema de Löwenheim-Skolem*. A raíz de su propuesta para clarificar la noción problemática de "definitud" en términos de "definibilidad en primer orden", Skolem sería capaz de mostrar la *relativización de las nociones cardinales* en la teoría de conjuntos, lo cual socavaba el rol de esta última como fundamento para el resto de la matemática. Zermelo, en gran medida, dedicaría su trabajo posterior sobre teoría de conjuntos a proponer una alternativa que evitara esta relativización. Con su nueva axiomatización en 1930, Zermelo a su vez ofrecería una serie de resultados interesantes y que contribuirían con la elaboración del mencionado "multiverso conjuntista" (sección 2.3).

Para terminar, el tercer capítulo se dedicará a presentar con más detalle los resultados obtenidos por Zermelo (1930a), a saber, los conocidos *teoremas de desarrollo* e *isomorfismo de los dominios normales* (modelos de la teoría de conjuntos). Es a partir de estos resultados que Zermelo elaborará su versión de la *jerarquía acumulativa de los conjuntos bien-fundados*. Sin embargo, su investigación alrededor de los *modelos de la teoría de conjuntos* lo orillaría a realizar una serie de reflexiones de carácter filosófico para justificar la introducción de ciertos elementos extra-teóricos, estos son, los *cardinales fuertemente inaccesibles*, los cuales jugarían un papel fundamental sobre el desarrollo de su multiverso teórico-conjuntista. Al ofrecer una interpretación filosófica de sus resultados, es que el matemático alemán finalmente consolidaría de manera más precisa su concepción de la noción de "*conjunto*".

El trabajo concluye con una serie de observaciones explícitas del modo en que el objeto de estudio de la teoría de conjuntos propuesto por Zermelo, el "multiverso zermeliano", comprehende satisfactoriamente los objetivos y motivaciones, así como los métodos sugeridos por las prácticas teórico-conjuntistas reflejadas por los fragmentos históricos que se analizaron dentro del segundo capítulo. De esta manera, con base en el análisis de la práctica del teórico de los conjuntos a lo largo del periodo histórico bajo consideración, y de conformidad con la metodología del naturalismo matemático, se espera que el presente trabajo pueda sostener satisfactoriamente al multiverso zermeliano como el genuino objeto de estudio de la teoría de conjuntos.

Por último, cabe aclarar que las traducciones textuales dentro del presente son propias, salvo en los casos señalados.

Capítulo 1

El marco metodológico de la investigación

Como ya se ha adelantado en la introducción, este trabajo pretende enfrentar el problema de determinar, si es posible, cuál es el modelo pretendido de la teoría de conjuntos. Pero, para enfrentar este problema, ante todo, resulta oportuno establecer el marco desde el cual se espera conseguir el objetivo. Esto se hará desde un "naturalismo matemático" —como lo ha llamado Paseau (2016)—, más precisamente, desde un *naturalismo matemático à la* Maddy. El objetivo de la siguiente sección, pues, consiste en introducir muy rápidamente esta *postura* o *aproximación hacia la indagación filosófica*. Se espera que, en última instancia, esta presentación permita poner de manifiesto las motivaciones detrás de ella, así como su pertinencia como marco natural para el desarrollo de la discusión posterior.

1.1. Un estudio naturalmente naturalista

Como señala Papineau (2021), en rigor el término "naturalismo" no goza de un significado muy preciso dentro de la filosofía contemporánea. Es por ello que para llevar a cabo una caracterización mínima de este término, y que al mismo tiempo revele el vínculo con el análisis de la matemática que aquí se persigue, se tomarán como eje central los tres tipos de naturalismo que Maddy (2005) identifica[3] y se mencionará brevemente su relación con el llamado "anti-revisionismo". Posteriormente, se presentará la propuesta de Maddy con un poco más de detalle y se revisarán algunas motivaciones para sostener esta postura particular.

[3]En este texto, la filósofa estadounidense examina el naturalismo de Quine, Burguess (y Rosen) y el suyo. Paseau (2016) los ha nombrado *naturalismo científico*, *matemático-cum-científico* y *matemático*, respectivamente.

1.1.1. Naturalismo y anti-revisionismo

De manera un poco despreocupada, el naturalismo podría sencillamente considerarse como una postura que defiende la identificación, descripción e investigación de la realidad exclusivamente dentro del ámbito de la *ciencia natural* tal que no requiere justificación más allá de la observación o del método hipotético-deductivo. No obstante, algunos filósofos que orgullosamente se colocan el rubro de "naturalistas" se mostrarían, si bien no totalmente en desacuerdo, un tanto ofendidos por la falta de cuidado y angustiados por ser confundidos —dentro del prestigioso círculo filosófico— con charlatanes pseudo-naturalistas.[4] Es así que conviene elaborar un poco más el significado del término —dentro de los límites que este trabajo permite— con el fin de evitar equívocos. Una vez más, una forma de hacerlo es analizar lo que el naturalismo tiene que decir respecto de la ontología, la epistemología y la metodología; en otras palabras, reflexionar en torno de la ontología, epistemología y metodologías naturalizadas.[5] Una vez hecho esto se espera que su relación con el anti-revisionismo emerja naturalmente. Este último permitirá describir con mayor facilidad la idea detrás de la filosofía segunda.

La ontología naturalizada, *grosso modo*, reconoce que *lo que hay* está determinado por un marco conceptual de conformidad con la ciencia natural en el sentido más amplio. (Tal vez el eslogan simplista "Lo que hay es lo que dice la ciencia que hay" ilustre un poco el punto.) Sin embargo, algunos tipos de naturalismo varían en ontología debido a que difieren sobre qué disciplinas forman parte del *corpus* científico (*e. g.*, naturalistas como Burguess y Rosen no se limitarían a las "ciencias naturales", sino que serían más laxos y estarían dispuestos a incluir la matemática dentro de las ciencias) y también por cómo interpretan "sentido más amplio". Hay quien considera esto último como refiriéndose a "la mejor teoría científica del momento" (*e. g.*, Quine), o "la más unificadora" (*e. g.*, Friedman o Kitcher) o "la más explicativa" (sea lo que "explicativo" signifique), etc. Como caso representativo de la ontología naturalizada se puede mencionar el famoso criterio ontológico quineano, el cual, bajo algunos supuestos adicionales, le permiten al filósofo americano extender su ontología hasta abarcar las entidades matemáticas.[6]

[4] Justamente, desacuerdos sobre qué disciplinas son las que abarcan las ciencias naturales y sobre cuáles son los criterios de justificación metodológicos y de existencia son la raíz de las diferencias que Maddy distingue en su artículo respecto de los tres tipos de naturalismo que particularmente eligió.

[5] Barceló en *Penelope Maddy y el naturalismo en filosofía de las matemáticas* (2020, inédito), entre otras cosas, se da a la tarea de caracterizar el naturalismo a partir de cuatro tesis. Sin embargo, en lo personal, creo que precisamente las tesis que él considera centrales (y cuya modificación posibilita una versión moderada o exacerbada del naturalismo) no están satisfactoriamente demarcadas la una de la otra; además, es algo difícil apreciar la relación —de manera directa al menos— entre el contenido de las tesis y el rubro que les asigna.

[6] El argumento quineano de indispensabilidad de las matemáticas intenta sostener un realismo matemático con base en consideraciones naturalistas y holistas confirmacionales. El *holismo confirmacional*, *grosso modo*, es una posición que considera los enunciados o creencias acerca del mundo como dispuestos en un sistema o red susceptible de revisión con base en la evidencia, y cuya confirmación o disconfirmación no ocurre sobre un único enunciado, sino que se extiende al sistema en su totalidad. Así pues, el argumento de indispensabilidad puede reconstruirse de la siguiente manera:

Las mejores teorías científicas requieren de la matemática para ser formuladas (de hecho, varios intentos

La razón de mencionar esto ahora es que precisamente una de las disputas más frecuentes entre naturalistas se debe a la cuestión del estatus ontológico de los objetos de la matemática y a las razones detrás de su aceptación (o rechazo). Por ejemplo, tanto Quine como Burguess, Rosen y Maddy concordarían sobre la existencia de objetos matemáticos,[7] pero no sobre sus razones para concederlos: Quine los admite en virtud de su famoso argumento de indispensabilidad (véase la nota 6); Burguess, Rosen y Maddy, por su lado, se muestran renuentes frente a dicho argumento y prefieren justificar la existencia de tales objetos por otros medios; a saber, Burguess y Rosen se contentan porque la práctica matemática posee el estatus de una disciplina científica y ésta dice que los hay; Maddy es un caso más complicado, pero podría decirse que sigue a Quine, Burguess y Rosen en parte. Rápidamente: Maddy simpatiza con Quine en que los objetos matemáticos son indispensables para la ciencia,[8] pero no lo acompaña con su argumento de indispensabilidad ni tampoco se atreve a decir que sólo la parte de la matemática que ha encontrado aplicación en la ciencia es la que existe;[9] asimismo, comparte con Burguess y Rosen que la matemática es una práctica propia y distinta de la ciencia natural capaz de afirmar la existencia de sus objetos (aunque crudamente), pero se separa de ellos en tanto que la ciencia natural es, para ella, la que determinaría el "genuino" carácter ontológico de dichos objetos.

Por su parte, la epistemología naturalizada se encarga de inspeccionar "cómo es que los seres humanos, tal como los describe la fisiología, la psicología, la lingüística, y el resto, adquieren conocimiento confiable del mundo, tal como lo describe la física, la química, la geología, y demás" (Maddy, [2005, pp. 438-9]) Sobre esta línea cabe mencionar que el

---

por reinterpretar la ciencia sin apelar a maquinaría matemática u otros elementos abstractos han fracasado); la consideración del naturalismo condiciona la ontología al marco conceptual de la mejor teoría científica, *i. e.*, esta ontología naturalizada determina lo que hay en el mundo y cómo opera. En relación con lo anterior, la mejor teoría científica establece la existencia de las cosas que aparecen cuantificadas existencialmente dentro de sus enunciados (este es precisamente el criterio de compromiso ontológico de Quine). Por otro lado, la evidencia hasta el momento ha confirmado la mejor teoría del mundo en cierto grado —por algo es considerada como la mejor— y el tipo de evidencia que apoya tal teoría corresponde con ciertas virtudes teóricas. Ahora bien, por su carácter holista confirmacional, la confirmación de la teoría se extiende completamente sobre ella y esto incluye tanto a los enunciados empíricos como a los matemáticos que aparecen dentro de ella; esto es, los enunciados matemáticos necesarios para la formulación de la teoría son confirmados al participar en una teoría que goza de las virtudes teóricas y, por el criterio de compromiso ontológico, los objetos que aparecen en ellos bajo cuantificación existencial existen.

Por tanto, un realismo matemático en ontología se puede sostener siempre que se admita una ontología naturalizada, el papel indispensable que juegan los enunciados matemáticos en la formulación de la mejor teoría del mundo y su confirmación de conformidad con ciertas virtudes teóricas, así como el criterio de compromiso ontológico quineano.

[7]Esto no debe interpretarse como si debiera ser así para cualquier naturalista. Alguien bien podría ser naturalista y rechazar la existencia de los objetos de la matemática, por decir, uno de corte nominalista-ficcionalista.

[8]"[L]a mayoría de sus mejores teorías [del naturalista] involucran al menos un poco de matemáticas, y muchas de sus teorías más preciadas y efectivas pueden solo ser establecidas en lenguaje matemático de nivel superior" (Maddy [2005, p. 448]).

[9]Maddy (2005) dice: "ramas de la matemática alguna vez pensadas lejanas y removidas de aplicaciones han ido a gozar [después] papeles centrales en la ciencia" (p. 448).

grado de certeza o de fiabilidad es a lo más el mismo del que goza la ciencia, no más ni menos. En otras palabras, el parámetro del conocimiento está dado por la ciencia y sus prácticas o, si no se quiere ser tan estricto, por prácticas que demuestren ser *tan* confiables como las científicas.[10] Esto, en última instancia, posibilita el estudio científico de la misma ciencia.

Una vez más, discrepancias entre lo que distintos naturalistas consideran como "científico" es lo que genera las principales disputas respecto de la epistemología, así como diferencias de opinión sobre si hay que admitir o no prácticas ajenas a las paradigmáticas científicas que demuestren su valía a nivel epistémico. Por ejemplo, alguien como Quine se atiene estrictamente a las prácticas de la ciencia natural, mientras que alguien como Burguess o Rosen reconocerían otras prácticas valiosas y confiables como las matemáticas y las tomarían en cuenta para afirmar otro tipo de conocimiento (o, por lo menos, una noción de conocimiento más incluyente que la quineana); alguien como Maddy, por su parte, representa un caso un tanto intermedio que reconocería el valor y peculiaridad de las prácticas matemáticas, así como su papel dentro de la ciencia (de manera muy semejante a Burguess y Rosen), pero coincidiría con Quine en que la ciencia natural siempre tiene la última palabra (*e. g.*, Maddy afirma que hay números porque la práctica matemática lo *dice*, pero que *realmente* los haya y qué *sean* es algo que le compete enteramente a la ciencia natural).[11]

Por último, sólo resta el caso de la metodología naturalizada. Ésta hace alusión a que los métodos adecuados y aceptables dentro de cualquier investigación o práctica científica son los de la ciencia.[12] Ahora bien, de pasada, esto parece acercarse peligrosamente al territorio de la petición de principio: las prácticas científicas se realizan de conformidad con los métodos de la ciencia, ¡pero estos métodos se determinan gracias a las prácticas científicas!

En realidad, esto se ve más escandaloso de lo que es, pues ya se ha dicho que parte de la labor naturalista es estudiar la ciencia desde la ciencia misma, como quien dice, "un estudio *intra*-científico de la ciencia", y el análisis metodológico son gajes de ese oficio. En efecto, es sobre la marcha que las prácticas de investigación permiten el escrutinio normativo asociado con los métodos científicos, donde adherirse a esa normatividad de fondo es requisito de toda especulación y formulación teórica. En palabras de Maddy (2005):

> normas de confirmación y construcción teórica frecuentemente surgen en la práctica científica, desde simples cánones de observación a través de elaboradas pautas de diseño experimental hasta máximas altamente desarrolladas como el mecanicismo. Conforme la ciencia progresa, éstas son puestas a prueba, a veces exitosamente y a veces no, y de esta manera su exigencia por un papel en la formación de la futura ciencia es correspondientemente fortalecido o soslayado. (p. 440)

[10]Esta segunda opción es justamente la que Barceló (2020, inédito) destaca como uno de los aspectos del naturalismo moderado.

[11]Véase la sección II.5. de Maddy (2005).

[12]De nuevo, Barceló (2020, inédito) comenta que es posible un naturalismo que debilite esta afirmación y se contente con incorporar métodos que demuestren ser tan adecuados como los ejemplares de la ciencia.

La cosa, pues, ya no suena tan descabellada y para muchos incluso podría sonar convincente. Con todo, alguien quisquilloso podría mostrarse intranquilo. Después de todo, ¿qué es lo que sugiere al naturalista adoptar un método particular o una teoría? ¿Qué los confirma? La respuesta corta: la evidencia. El problema ahora es determinar qué tomar por "evidencia". Y es aquí donde, personalmente, me parece que el asunto se torna un tanto arbitrario. La evidencia hace alusión al gozo de ciertas "virtudes teóricas" como simplicidad, familiaridad de principio, alcance, fecundidad, conformidad con la observación, economía, naturalidad, generalidad, modestia, refutabilidad, etc.[13] No es raro que diferencias respecto de las virtudes teóricas sean, en gran medida, fuente de divergencias metodológicas entre los naturalistas.

Y a todo esto, ¿qué relación tiene el naturalismo con el anti-revisionismo? Al inicio de esta sección se prometió que tras un recuento sobre el naturalismo esto se haría patente de forma natural. Una mirada minuciosa sobre los párrafos pasados y me atrevería a decir que la deuda está casi saldada. "Casi" porque el naturalismo es anti-revisionista en un sentido,[14] pero revisionista en otro. Primero, considérese el caso del "evidente" anti-revisionismo apreciable en las líneas de arriba. En cada una de las esferas —ontológica, epistemológica y metodológica— puede observarse que es *dentro de* y *de conformidad con* la ciencia[15] que se afirma lo que hay, que se determina el conocimiento y que se establece una metodología; en otras palabras, la ciencia es la que describe e identifica la realidad, no hay una base más firme de conocimiento que la misma ciencia y "ningún método *extra*-científico de justificación podría ser más convincente que los métodos de la ciencia" (Maddy [2005, p. 438]). Dicho brevemente, el naturalismo no reconoce críticas externas ni apoyos ajenos más allá de la ciencia. En particular, para el naturalista, la ciencia *no* es susceptible de *revisión* por parte de la filosofía. No por nada "Quine describe su naturalismo como el 'abandono de la meta de una filosofía primera' [...] [la cual pretende] descubrir certezas precientíficas, primeramente filosóficas que pudieran apuntalar nuestro

[13]Se exhorta al lector no malinterpretar lo anterior, la arbitrariedad mencionada no tiene que significar algo negativo. Muy de la mano con Maddy, la arbitrariedad, pienso, es un reflejo de que las virtudes teóricas, que incluso me atrevería a llamar "heurísticas", están ligadas a los propósitos de la teoría y al proceso de ensayo y error que progresivamente le arroja buenos resultados. En este sentido, la elección y el valor asignado a tales virtudes depende de los propósitos de una teoría o disciplina científica, y las metodologías que se adoptan son resultado de un proceso largo.

[14]Barceló (2020, inédito) tal vez no estaría de acuerdo con escuchar esto tan tajantemente, pues él menciona la posibilidad de ser naturalista sin ser revisionista. Yo he optado por no meterme en más detalles y justifico esta fuerte afirmación en tanto que me he basado principalmente en el naturalismo presentado por Maddy (2005), el cual irradia anti-revisionismo (en un sentido).

[15]Por comodidad, he preferido usar el término "ciencia" y no "ciencia natural" por los diferentes tipos de naturalismo que pudieran incorporar prácticas no enteramente "naturales" como parte de la ciencia (*e. g.*, Burguess y Rosen). Reconozco que esto no hace justicia a otros tipos de naturalismo más peculiares y que pueden colocarse bajo el rótulo de "moderados". A pesar de esto, dado que la extensión del presente trabajo imposibilita considerar cada caso particular, me permito sencillamente hablar en esos términos en tanto que parece bastar para explicar la cuestión de modo suficientemente general (aunque no del todo preciso).

conocimiento" (Maddy [2005, p. 438]).

En resumen, el naturalismo expresa abiertamente su desprecio por la soberbia de cualquier disciplina externa a la ciencia que pretenda corregirla, revisarla o decirle cómo llevar a cabo sus prácticas —y esto usualmente lo expresa mientras mira de reojo hacia la filosofía—. De ahí el carácter anti-revisionista que frecuentemente se le adjudica al naturalismo. No obstante, esto no quiere decir que la filosofía no pueda jugar un papel en la reflexión científica, sino solamente que este papel es, en todo caso, *secundario* y debe estar sometido a la ciencia. Por tanto, el naturalista "ve la ciencia natural como una investigación sobre la realidad, falible y corregible pero no sujeta de rendir cuentas a tribunal supra-científico alguno" (Quine, [1975, p. 72]).

Esta última cita de Quine resulta especialmente útil porque comprehende en una sola línea tanto el sentido anti-revisionista como el revisionista del naturalismo. El primero, se espera, ya ha quedado claro; el segundo es el asunto ahora. El revisionismo admisible para el naturalista es al que se refiere Quine al decir de la ciencia natural que es "falible y corregible". Esto tiene que ver en cierto modo con el barco de Neurath: la ciencia no está acabada, sus prácticas, teorías, metodologías, etcétera, no están garantizadas, sino que son susceptibles de ponerse a prueba y de ser corregidas en caso de ser necesario, claro, siempre y cuando la probación y la corrección, o sea, la "revisión", se lleve a cabo *dentro* del marco científico. Y sí, el filósofo también puede enviar sus "comentarios y sugerencias" al correo del científico, pero únicamente en caso de estar articuladas desde el *interior* de la ciencia.

Por tanto, el naturalismo rechaza despectivamente el "revisionismo externo", y en ese sentido es anti-revisionista, pero recibe cordialmente el "revisionismo interno", y en ese sentido es revisionista.[16]

Una vez caracterizada la actitud de los naturalistas un tanto superficialmente, a continuación, se dibujará muy esquemáticamente el tipo de naturalismo defendido por Maddy en una serie de trabajos (véase Maddy [2005; 2007; 2011]). Primero, se describirá rápidamente la metodología del "filósofo segundo" y se mostrará su asociación directa con el "naturalismo matemático"; después, se presentarán una serie de motivaciones para sostener el naturalismo, aunque, más específicamente, para sostener un naturalismo *à la* Maddy; finalmente, se cerrará este capítulo con una breve exposición acerca del interés por perseguir una investigación matemático-naturalista de la teoría de conjuntos. Se espera que

[16]Una discusión interesante en relación con el revisionismo/anti-revisionismo en el naturalismo es acerca de si la lógica es o no revisable. Uno inmediatamente podría decir que sí, siempre que ello conlleve un beneficio —más precisamente, un *mayor* beneficio— para el progreso o las prácticas (en diferentes ámbitos) científicas que ello suscite. Sin embargo, diferentes reacciones al respecto han mostrado que la cosa no es tan simple: uno puede ir desde el famoso dicho quineano de "cambio de lógica, cambio de tema" —que de cierto modo inhabilita la discusión entre partidarios de diferentes posiciones lógicas— hasta reconocer que el progreso científico no es posible si no se presupone de algún modo una lógica fija detrás de la aceptación o rechazo de teorías. Sobre esto, véase Maddy (2005, pp. 443-4, 450).

con esto queden satisfechas las intenciones anunciadas en la introducción de este trabajo.

1.1.2. La filosofía segunda y el naturalismo matemático de Maddy

Como ya se ha indicado en la sección anterior, el naturalismo se dice de muchas formas y esto puede llegar a oscurecer el uso de la palabra; de ahí que Maddy adopte el término "filosofía segunda", el cual "expresa [la] predilección por realizar el análisis filosófico de una disciplina después del análisis de las prácticas que se dan en ella" (Gutiérrez [2015, p. 125]). Que esta noción resulta altamente relacionada con aquellas del anti-revisionismo externo y revisionismo interno introducidas líneas arriba se pondrá de manifiesto en un momento. Considérese lo siguiente:

> Imagine una simple investigadora que se propone descubrir cómo es el mundo, el rango de lo que hay, así como sus varias propiedades y comportamientos. Ella inicia [su pesquisa] con sus creencias perceptuales, desarrolla gradualmente métodos de observación y experimentación más sofisticados, de construcción teórica y prueba, y demás; ha idealizado al punto de sentirse igualmente a gusto en todas las diversas investigaciones empíricas, desde la física, química, y astronomía hasta la botánica, psicología y antropología. [...] [C]ree que tanto ella como sus colegas investigadores están involucrados dentro de una exploración del mundo altamente falible, pero parcial y potencialmente exitosa, y como todo lo demás, ella atiende el asunto de cómo y por qué los métodos que ella y los otros ocupan en sus indagaciones funcionan cuando lo hacen y no funcionan cuando no lo hacen; de esta manera, ella gradualmente mejora sus métodos sobre la marcha. (Maddy [2011, p. 38])

De este modo, como parte de su empresa inquisitiva, la investigadora eventualmente ha llegado a cuestionarse sobre sus métodos y su relación con el mundo, así como sobre su relación con el conocimiento; preguntas como ¿cuál es el alcance de tales métodos de investigación?, ¿de qué manera éstos permiten acceder a la realidad de las cosas?, ¿cómo hacen posible la adquisición de conocimiento sobre el mundo?, entre otras, han hecho su aparición y se han convertido a su vez en objeto de sus indagaciones. "De esta tediosa manera, mediante pasos completamente naturales, [la] investigadora ha llegado a hacer preguntas típicamente clasificadas como filosóficas. Ella no lo [hizo] desde un punto privilegiado fuera de la ciencia, sino como una participante activa, totalmente desde adentro" (Maddy, [2011, p. 39]). Lo anterior, como se puede adivinar, ha pretendido describir el proceder inquisitivo de quien Maddy ha llamado "filósofa segunda".

En contraste, uno puede elaborar la imagen de un investigador cuyo examen sobre el mundo parta desde una posición distinta; a saber, un individuo que se aproxime a su labor desde un punto alternativo que considere la filosofía como una empresa totalmente independiente del sentido común y de la ciencia, incluso capaz de corregir y justificar esta última. En esta ocasión, el investigador en cuestión adopta previamente una actitud filosófica particular que le puede permitir revisar y reforzar sus métodos de indagación a partir de ciertos propósitos y consideraciones *extra*-científicos implicados por su postura. Este es el caso del "filósofo primero" (véase Maddy [2011, p. 40]).

Con base en lo anterior, el lector probablemente ya pueda advertir en qué sentido la posición metodológica del filósofo segundo se ajusta a los estándares promovidos por el anti-revisionismo externo y el revisionismo interno: por un lado, el investigador que se mueve sobre esta línea no está dispuesto a modificar sus métodos de indagación por consideraciones ni motivaciones ajenos a los sugeridos por sus prácticas científicas; por el otro, está preparado para la constante mejora y perfeccionamiento de sus métodos en virtud del progreso de sus prácticas al interior de la ciencia.

Sin embargo, este no es el final de la historia para la filósofa segunda:

> En el curso de [sus] investigaciones, [la] investigadora comienza a percatarse de que la lógica y la aritmética son herramientas esenciales en sus esfuerzos por comprender el mundo, y ella eventualmente observa que el cálculo, el análisis superior, y mucha de la matemática pura son invaluables también para aprehender los comportamientos que estudia y para formular sus teorías explicativas. Esto le da buenas razones para perseguir ella misma la matemática, como parte de sus investigaciones del mundo, pero ella también reconoce que [la matemática] se desenvuelve al utilizar métodos que parecen algo distintos a los de observación, experimentación y formación de teorías que guían el resto de su investigación. Esto despierta preguntas de dos tipos generales. Primero, como parte de la evaluación y apreciación continua de sus métodos de investigación, ella querrá dar cuenta de los métodos de la matemática pura; ella querrá saber cómo llevar de mejor forma este tipo particular de indagación. Segundo, como parte de su estudio general de las prácticas humanas, ella querrá dar cuenta de qué es la matemática pura: ¿Qué tipo de actividad es? ¿Cuál es la naturaleza de su objeto de estudio? ¿Cómo y por qué se entrelaza tan notablemente con sus investigaciones empíricas? (Maddy, [2011, p. 39])[17]

Es aquí donde el naturalismo matemático de Maddy entra en escena: la investigadora, a partir de su estudio sobre el mundo, ha llegado a reconocer la importancia de las disciplinas matemáticas en su labor; asimismo, se ha percatado de sus discrepancias con respecto de otras disciplinas (las científicas) y de la peculiaridad de sus métodos; esto eventualmente la ha llevado a cuestionarse sobre las prácticas particulares de la matemática, sus objetivos, su objeto de estudio, su relación con la ciencia, entre otras cosas.[18] Es así que Maddy mantiene que el modo apropiado de aproximarse a la investigación de estas cuestiones requiere explícitamente del conocimiento previo de la práctica y sus aspectos relevantes, así como del reconocimiento de sus métodos de prueba usuales, sus motivaciones, sus

[17]El lector seguramente habrá notado que varias preguntas aquí aducidas ya se habían mencionado en la introducción de este capítulo.

[18]Tal como Maddy (2005) describe:

> [la filósofa segunda] comienza en la ciencia empírica, y eventualmente se torna (al igual que Quine) al estudio científico de tal ciencia. Ella se sorprende con los siguientes dos fenómenos: primero, la mayoría de sus mejores teorías involucran al menos algo de matemáticas, y muchas de las teorías más efectivas y valiosas sólo pueden ser expresadas en un lenguaje altamente matemático; el segundo es que las matemáticas, en tanto que práctica, emplea métodos de aquellos que empleados en su estudio de la ciencia empírica. Ella podría, como el Quineano, ignorar aquellos métodos distintivos y evaluarlas bajo los mismos estándares que la ciencia natural, pero esto parece ser inadecuado. Los métodos responsables por la existencia de las matemáticas que ahora ve ante sí son métodos distintivamente matemáticos; la segunda filósofa siente que es su responsabilidad examinar, comprender y evaluar tales métodos bajo sus propios términos, para investigar cómo las matemáticas resultantes trabajan y no en sus aplicaciones empíricas ; y comprender cómo y por qué un cuerpo de enunciador generados de esta manera puede (o no) ser aplicado tal como es. (p. 448)

presupuestos. De esta manera —a diferencia de Quine, por ejemplo—,[19] la evaluación, apreciación, corrección, comprensión y análisis de las disciplinas matemáticas estarán basados enteramente en consideraciones concernientes a las prácticas de estas mismas disciplinas. En palabras de Gutiérrez (2015):

> Maddy propone abandonar la metodología de la filosofía primera. Desde su punto de vista, si se quiere ofrecer un análisis correcto de las matemáticas como disciplina, primero es necesario conocer las prácticas matemáticas, cuáles son sus objetivos, con qué objetos trabajan los matemáticos (si es que con alguno), qué tipo de pruebas utilizan, qué métodos son preferidos por los matemáticos, etcétera. Su propuesta es hacer Filosofía Segunda, es decir, que las reflexiones filosóficas tomen como punto de partida el análisis de la disciplina, y no al revés. (p. 128)

En este punto —para complementar lo anterior y presentar más claramente la perspectiva matemático-naturalista—, tal vez conviene revisar rápidamente el análisis que Maddy realiza en torno de la *matemática aplicada* y la *matemática pura*.

En algunos textos (*e. g.*, Maddy [2008; 2011, cap. I]), la filósofa estadounidense se ha dedicado a examinar el cambio que sufrió la relación entre la matemática aplicada y la pura a lo largo de la historia. Si bien el recorrido histórico que ofrece en ellos no pretende ser completamente exacto ni exhaustivo, su análisis resulta aquí muy oportuno para dar cuenta y respaldar de manera general el modo en que la matemática se consolidó como una práctica independiente —con métodos y objetivos muy particulares (distintos de las disciplinas científicas de carácter empírico)—, propensa de ser evaluada y criticada solamente en sus propios términos. No obstante, reconstruir cabalmente el argumento de dichos textos no será necesario para alcanzar el propósito de esta digresión, simplemente bastará —como diría Maddy— con bosquejar "cómo la matemática aplicada llegó a ser pura". Antes de presentar este recuento, no está de más insistir una vez más sobre lo que Maddy pretende hacer con esto, a saber, defender convincentemente la idea de que la matemática debe considerarse una práctica de suyo, cuyo análisis filosófico, en última instancia, debe realizarse únicamente sobre la base que sugiere el examen de sus prácticas, métodos, desarrollo histórico, y demás.

De acuerdo con Maddy (2011), durante el renacimiento existía una fuerte tendencia por asumir que el universo operaba de conformidad con leyes matemáticas, que la naturaleza estaba escrita en lenguaje matemático. De ahí que las investigaciones principalmente buscarán descubrir estas leyes, las cuales describían matemáticamente tanto el movimiento como las fuerzas presentes en los sistemas físicos. En consecuencia, el criterio de corrección de los recursos y herramientas matemáticos estaba dado en virtud de su exactitud para conseguir esta tarea. Es por ello que, en esta época, la matemática y la ciencia natural se encontraban —por decirlo de algún modo— en un "mismo nivel"; pues, por un lado, las teorías matemáticas se desarrollaban en función de su aplicabilidad a las ciencias empíricas y, por el otro, el éxito de esta aplicabilidad servía como árbitro último

[19] Quine, por ejemplo, propone realizar los estudios de la matemática desde disciplinas científicas. Véase Cristian (2015, p. 124-125).

de su validez.

Evidentemente, lo anterior no ocurre en la actualidad: la matemática hoy por hoy progresa por sí sola y sin ataduras al mundo físico; sus conceptos y teorías, por ejemplo, no requieren ser interpretadas por las ciencias empíricas para ser aprobados. Sobre esta línea, Maddy señala que el surgimiento de la matemática pura a partir de la matemática aplicada de alguna manera coincidió con el proceso de separación entre la matemática y la ciencia, el cual estuvo acompañado por un "cambio gradual en [el] entendimiento de cómo la matemática funciona en su aplicación sobre el mundo" (Maddy, [2011, p. 2]). Así, la autora ubica al menos tres aspectos determinantes detrás de este desprendimiento, estos son: *a)* la introducción paulatina de conceptos matemáticos carentes de correlato físico directo (*e. g.*, números negativos, números complejos, espacios n-dimensionales, álgebras abstractas, etc.); *b)* el surgimiento de las geometrías no-euclidianas; y *c)* la concepción progresiva de las estructuras matemáticas como modelo, idealización o aproximación de los fenómenos físicos.[20] Respecto del primer punto, la filósofa explica que, aproximadamente a mediados del siglo XIX, los matemáticos comenzaron a poner en la mira objetivos independientes de su aplicabilidad inmediata sobre el mundo (*e. g.*, realizar comparaciones estructurales, generalizar resultados, unificar teorías) para guiar sus estudios.[21] En cuanto a *b)*, Maddy relata cómo los intentos por demostrar el famoso quinto postulado de Euclides[22] provocaron que eventualmente la geometría euclidiana, alguna vez considerada como la verdadera teoría detrás del espacio físico, perdiera su lugar privilegiado y se convirtiera en uno de los muchos espacios abstractos estudiados por los matemáticos. Por último, sobre *c)*, la autora considera una serie de casos[23] que ponen de manifiesto el

[20]Desgraciadamente, por más interesante que sea, perseguir estos puntos con detalle no será posible en este trabajo, pues alejaría el curso de la presentación y los propósitos que se han contemplado. No obstante, el lector interesado en estos temas puede dirigirse directamente a las fuentes (Maddy [2008; 2011, cap. I]) o la reconstrucción hecha por Gutiérrez (2015, secc. 4.3.1.2).

[21]Como ejemplo de esto puede mencionarse: las generalizaciones del espacio físico de tres dimensiones a espacios de n dimensiones (donde n es un número natural); la aceptación de algunas entidades particulares para contar con ciertos dominios cerrados bajo determinadas operaciones, *e. g.*, la añadidura de números complejos para contar con un campo cerrado bajo la operación de raíz n-ésima (dónde n es un número par); la introducción de estructuras algebráicas; etcétera. Más adelante se elaborará con mayor cuidado el periodo histórico en que ocurrió esta suerte de "revolución abstracta" en la práctica matemática (véase la sección 2.1.1).

[22]El quinto postulado de Euclides afirma: si un segmento de línea interseca dos líneas rectas que forman dos ángulos interiores en el mismo lado que suman menos de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas, si se extienden indefinidamente, se encuentran en el lado en el que los ángulos suman menos de dos ángulos rectos.

La búsqueda por una demostración de este postulado a partir de los otros cuatro fue uno de los problemas más trabajados por los matemáticos desde la antigüedad hasta 1868, cuando Eugenio Beltrami demostró que todos los fracasos se debían a la independecia de este postulado respecto del resto.

[23]Tal vez el más representativo de éstos es el caso de la confirmación de la teoría atómica, con el cual se mostró de manera decisiva que las estructuras dadas por la maquinaria matemática no describían genuinamente la estructura de la realidad, sino que, en cambio, debían concebirse como puros modelos abstractos o idealizaciones de esta última. Esto puede ilustrarse claramente mediante el uso frecuente del cálculo diferencial e integral en los estudios científicos, que modelaba fenómenos físicos considerándolos como continuos cuando muchos de ellos no lo eran de acuerdo con la teoría atómica; no obstante, aun si las ecuaciones diferenciales e integrales no eran literalmente verdaderas, éstas resultaban extremadamente

modo en que se fue abandonando poco a poco la idea de la matemática como el lenguaje en que la naturaleza estaba escrita, hasta convertirse en el estudio de conceptos, teorías y estructuras abstractas de aplicabilidad a lo más aproximada sobre los sistemas físicos.

En fin, el asunto que Maddy busca rescatar aquí es que el surgimiento de la matemática pura estuvo íntimamente relacionado con un cambio de perspectiva respecto del papel que jugaba la aplicabilidad de la matemática en la ciencia. Como se mencionó más atrás, antes la validez de los métodos matemáticos dependía totalmente de su correspondencia con el estudio y las prácticas de las ciencias empíricas; pero ahora, tras una serie de desarrollos, la matemática se ha liberado de sus cadenas empíricas para perseguir sus investigaciones sin tener que preocuparse por si éstas son aplicables o no.[24] Esto, de pronto, promovió el nacimiento de un sinnúmero de ramas matemáticas y desplegó ante el científico un amplio catálogo de estructuras para elegir. De esta manera, aun cuando en ocasiones pudieran ser utilizados por las comunidades científicas, por su parte, estos constructos matemáticos ya han establecido su autonomía como meros modelos abstractos y no como las auténticas estructuras detrás de los fenómenos físicos. Es justamente en este sentido, pues, que "la matemática aplicada llegó a ser pura".

Lamentablemente, no todo fue miel sobre hojuelas. Esta libertad tuvo un costo: la matemática finalmente logró soltarse de sus ataduras científicas, pero eso al mismo tiempo significó la pérdida de gran parte de su justificación y fundamento metodológico. Más precisamente, los matemáticos después de un tiempo se dieron cuenta que muchos de sus resultados descansaban sobre consideraciones de carácter empírico o pragmático, incluso sobre intuiciones vagas o nociones poco precisas.[25] Esto de pronto despertó en la comunidad matemática la necesidad por identificar claramente los métodos implementados dentro de sus prácticas, así como por establecerlos y desarrollarlos del modo más riguroso posible. Este es un momento crucial para reconocer la independencia de las prácticas de la matemática respecto de las científicas: si la matemática se ha desprendido de la ciencia y no puede apelar más a factores de corte empírico, ¿cuáles son entonces sus métodos y objetos de estudio? ¿Qué los determina? Maddy considera que, para abordar estas cuestiones adecuadamente, uno requiere situarse dentro del ámbito correspondiente, pues resulta evidente que

> la matemática, como práctica, utiliza métodos diferentes de los que [la naturalista] ha encontrado en sus estudios de la ciencia empírica. Ella [bien] podría, como el quineano, ignorar lo distintivo de esos métodos y mantener a la matemática bajo los mismos estándares de la ciencia natural, pero esto le parece erróneo. Los métodos responsables de la existencia de las matemáticas que ahora ve ante ella son distintivamente métodos matemáticos; ella siente que su responsabilidad es examinar, comprender, y evaluar estos métodos *en sus propios términos*; investigar cómo las

útiles para simplificar y representar de manera eficiente dichos fenómenos físicos.

[24]Salvo para conseguir presupuesto. Con esto no se quiere decir que no haya otro tipo de influencia externa o intereses económicos, pero en general no está sujeta a estos propósitos.

[25]Como ejemplo, quizá cabe considerar el caso de las disputas alrededor de los fundamentos del cálculo y la falta de precisión en la noción de infinito.

> matemáticas resultantes funcionan (o no) en sus aplicaciones empíricas; y entender cómo y por qué es que ese cuerpo de enunciados generados de esta forma puede (o no) ser aplicado como se ha hecho. (Maddy [2005, p. 448])[26]

Los párrafos anteriores, se espera, hayan bastado para —si no convencer totalmente— al menos mostrar al lector la plausible autonomía de la práctica matemática respecto de las prácticas de las ciencias empíricas. Recuérdese que el interés detrás de esto era sencillamente esclarecer la perspectiva matemático-naturalista de Maddy, la cual, *grosso modo*, defiende que "[l]as matemáticas y sus prácticas son el juez último del desarrollo, el trabajo y los resultados dados por la filosofía de las matemáticas" (Gutiérrez [2015, p. 128]).[27]

Para recapitular, hasta ahora se ha ofrecido una rápida caracterización del naturalismo en general, así como su relación con el anti-revisionismo externo y el revisionismo interno; con base en estos últimos fue que se facilitó la introducción de la perspectiva de la filosofía segunda, la cual, como consecuencia de su proceder metodológico, dio lugar a la investigación y reflexión de las disciplinas matemáticas a partir de las pautas establecidas por sus mismas prácticas y objetivos peculiares (naturalismo matemático); adicionalmente, para completar el panorama, se ofreció un breve recuento de cómo la matemática se consolidó como una práctica de suyo.

Sin embargo, probablemente todavía no ha quedado claro por qué se ha optado por desarrollar la presente discusión dentro de los límites sugeridos por el naturalismo matemático o, dicho de manera más general, han faltado mencionarse explícitamente las motivaciones subyacentes bajo esta preferencia por realizar el análisis matemático (y filosófico) dentro de los parámetros señalados por las prácticas matemáticas. Más aún, como el lector ya habrá notado, ¡la teoría de conjuntos no ha hecho siquiera su aparición a estas alturas!

La siguiente sección, por tanto, se ocupará de presentar muy superficialmente algunas razones detrás de la elección de este marco metodológico particular; posteriormente, se mencionarán los motivos para consagrar este trabajo al caso muy especial de la teoría de conjuntos.

1.2. Algunas motivaciones naturales

En realidad, no es muy habitual encontrar argumentos explícitos en favor del naturalismo dentro de la literatura. Usualmente, la mayoría de los naturalistas sencillamente asumen su posición y trabajan a partir de ella con la esperanza de que, a lo largo de sus trata-

[26] El énfasis fue añadido.

[27] Paseau (2016) no estaría del todo de acuerdo con comprometerse completamente con esta lectura de Maddy, pues él señala que los estándares naturalistas detrás de la práctica matemática propiamente y los estándares detrás de la filosofía de las matemáticas podrían ser distintos. Para una breve exposición de esta interpretación heterogénea de Maddy, véase (secc. 5).

mientos, sus implicaciones resulten automáticamente atractivas y convincentes (Paseau [2016]). Pero, cabe preguntarse, ¿qué factores provocaron que estos filósofos se suscribieran al naturalismo en primer lugar?

Paseau (2016) sugiere tres posibles motivos: *i)* el éxito de los estándares o métodos de la ciencia (y la matemática); *ii)* el consenso sobre cuestiones dentro del dominio de la ciencia (y la matemática); y *iii)* el éxito histórico de la ciencia (y la matemática). Acerca de *i)*, el autor indica que el éxito de la ciencia (y la matemática) puede ser entendido en términos de una amplia concepción compartida entre sus practicantes respecto de las preguntas que guían sus pesquisas y del progreso disciplinario en el tratamiento de tales preguntas. Con respecto de *ii)*, Paseau menciona que, a diferencia de la filosofía —por ejemplo—, en la ciencia (y la matemática) por lo general existe un acuerdo bastante extendido en relación con las cuestiones sobre sus dominios de investigación, y que esto a final de cuentas despierta cierta preferencia por los estándares científicos (y matemáticos). Finalmente, en cuanto al éxito histórico, Paseau lo vincula con el hecho de que la autoridad habitualmente asociada con los estándares científicos (y matemáticos) proviene de un mejor registro de seguimiento (*track record*, en inglés) respecto de la solución de sus problemas o preguntas que otras áreas de estudio.

Como puede adivinarse, estas razones no están exentas de problemas y se encuentran lejos de ser totalmente claras; mucho más de ser definitivas. Por ejemplo:[28] sobre el primer punto, uno fácilmente podría elaborar contraejemplos con disciplinas exitosas en los términos establecidos, es decir, cuyas metodologías sean altamente compartidas entre sus practicantes y que sean progresivas —en tanto que respondan las preguntas que se plantean dentro de ella—, pero que aún así carezcan de credibilidad alguna;[29] sobre el inciso *ii)*, uno tal vez podría señalar que el consenso alcanzado dentro de la comunidad científica (o matemática) se trata de un asunto bastante arbitrario y contingente, obtenido muchas veces por consideraciones subjetivas y no-epistémicas, o incluso por estándares de carácter filosófico; por último, en cuanto a *iii)*,[30] uno podría objetar que, aun cuando los estándares científicos (y matemáticos) han mostrado tener un buen registro de seguimiento respecto de soluciones a cuestiones planteadas por la ciencia (y la matemática) —es más, concédase que incluso gozan de un registro mayor al que la filosofía posee en relación con sus propias cuestiones—, estos estándares no tienen fuerza en lo que atañe a otras esferas, especialmente los estándares científicos (y matemáticos) no cuentan con la autoridad para establecer materias referentes a la filosofía de la ciencia (y a la filosofía de la matemática).

[28]Para más ejemplos de problemas concernientes con las motivaciones *i)*, *ii)* y *iii)*, véase las secciones 4.3, 4.4 y 4.5, respectivamente, en Paseau (2016).

[29]Paseau, por ejemplo, formula el caso de una disciplina ficticia, la "gurulogía", en la cual sus practicantes consideran sólo las preguntas enunciadas por cierto gurú, y como respuestas admisibles únicamente aquellas ofrecidas por éste. (Se asume que el gurú es consistente al menos.) Pensando que el gurú responde todas las preguntas que plantea, la gurulogía sería progresiva y, en consecuencia, exitosa, pero ciertamente no gozaría de credibilidad.

[30]De hecho, esta objeción se puede adaptar también sobre los otros rubros.

A pesar de esto, y si se consideran los motivos habituales a los que aluden los partidarios de posturas no-naturalistas, parece que —a diferencia del filósofo primero mencionado en la sección pasada, por ejemplo— el naturalista al menos se encuentra mejor parado; si bien no exactamente por su propio pie, de manera parasitaria por el pie de la ciencia (y la matemática). Como sea, lo anterior sólo sirve para motivar —parcial y tentativamente si se quiere— la adopción del naturalismo en general; mas no específicamente un naturalismo matemático. Esto requiere ciertas consideraciones adicionales.

Ciertamente, el naturalista aún tiene pendiente la tarea de formular argumentos mejor acabados para resguardar su postura. De hecho —como se dijo—, extrañamente se trata de un asunto que ha sido ampliamente ignorado en la literatura y que, sin duda, merece ser trabajado con mayor cuidado por el defensor de esta perspectiva. Por el carácter de esta presentación, a saber, una mera introducción al marco metodológico naturalista para el desarrollo de la reflexión posterior, no se profundizará más sobre este tema; con todo, un tratamiento cuidadoso de las dificultades antes señaladas y la búsqueda de mejores razones sigue vigente. Dicho esto, se suplica al lector que se deje persuadir —aunque sea provisionalmente para los fines de este trabajo— por las motivaciones antes referidas.

La primera motivación para mantener una postura como la del filósofo segundo ya está dada en la sección pasada. Como se ha visto, la matemática —por una u otra razón—[31] terminó por emanciparse de la ciencia y, por consiguiente, sus prácticas se consolidaron independientemente de su aplicabilidad a los estudios empíricos. Esto llevó a reconocer sus métodos como propios y ajenos a los de las ciencias naturales, libres de perseguir objetivos distintos a los establecidos por estas últimas, pero al mismo tiempo libres de justificaciones proporcionadas por su uso o por factores físicos. Una opción sería —de modo un tanto evocativo al filósofo primero— admitir la separación de la práctica matemática respecto de la científica y, en consecuencia, considerarse autorizado para aproximarse a aquélla desde un enfoque totalmente distinto al naturalista; incluso quizá insistiendo que éste se trata de un enfoque característico de las ciencias naturales. Alguien con esta perspectiva probablemente intentaría justificar los métodos y dirigir los objetivos de la matemática con base en consideraciones externas. Por ejemplo: este personaje podría —*à la* Quine— proponer el estudio de la matemática a la luz de diversas disciplinas científicas (*e. g.*, psicología, sociología, antropología, lingüística, neurociencia), o bien adoptar previamente una postura filosófica y guiar la investigación matemática a partir de ella.[32] Mientras que, en principio, aproximaciones de este estilo podrían no ser malas necesariamente, una mirada minuciosa podría revelar en ellas ciertos inconvenientes. Por otro lado, alguien más comprometido con continuar una metodología semejante a la del naturalista, pero que al mismo tiempo respete la autonomía de las prácticas matemáticas, parece que se vería naturalmente inclinado a adaptar o trasladar la misma idea al ámbito de la matemática: si el parámetro del conocimiento, los métodos y los objetos del mundo están dados por la

[31] Véase los incisos *a)-c)* de la sección anterior.

[32] Entre los simpatizantes de este modo de proceder, puede mencionarse a Gödel y Feferman (véase Gutiérrez, 2015, cap. III).

práctica científica, y la práctica matemática ahora se ha revelado independiente de esta última; entonces el parámetro del conocimiento y los métodos matemáticos, así como sus objetos abstractos, podrían determinarse a partir de la práctica matemática. (De nuevo, esto no se espera que sea un argumento decisivo para sostener el naturalismo matemático, es suficiente con despertar una cierta motivación para suscribirse a este programa.)

Ahora bien, una segunda motivación puede ofrecerse a partir de los inconvenientes que presentan alternativas del tipo "filosofía primera" adelantados líneas arriba. Como apunta Gutiérrez (2015), hay varias razones que podrían sugerir la adopción de la metodología matemático-naturalista por encima de aquélla del filósofo primero. En primer lugar, la preferencia por alguna determinada postura filosófica o alguna disciplina científica en especial (o conjunto de disciplinas) para elaborar el análisis de la práctica matemática, parece ciertamente arbitraria. En el primer caso, la elección por una u otra posición filosófica parece atender a razones puramente subjetivas, quizá dependientes de la tradición en que se educó el individuo que la sostiene; estos motivos muchas veces apelan a intuiciones muy particulares que tienen poco o nada que ver con la matemática, sus métodos de prueba u objetivos. En el segundo caso, la cosa en realidad no es muy diferente y parece que sencillamente se ha cambiado de punto de partida: "[s]e ha cambiado una postura filosófica por una postura científica, pero de nuevo no hay una justificación sobre la elección hecha" (Gutiérrez, [2015, p. 124]). Una vez más el fallo por qué disciplina o disciplinas científicas considerar para el estudio de la matemática se ha realizado de modo previo y aparentemente sin un interés genuino por recuperar los rasgos constitutivos de la práctica matemática. Con todo —continúa Gutiérrez—, alguien podría replicar que mudarse de una perspectiva filosófica a una científica sí implica una ganancia, pues esta última se encuentra mejor justificada en tanto que se apoya sobre una tradición mejor establecida y confirmada por la evidencia y sus métodos. Aún así,

> [c]uando un fenómeno es adoptado como objeto de estudio de una disciplina científica (o de varias), se asume implícita o explícitamente que las metodologías de esta(s) disciplina(s) son adecuadas para estudiarlo, incluso en algunos casos se asume que dichas metodologías agotan su estudio (estudian todos sus aspectos relevantes). Pero que una cierta metodología sea adecuada o no para estudiar un fenómeno no es algo que se decida *a priori*, en la mayoría de los casos requiere largos periodos de observación y análisis previo (guiado por principios preteóricos muy generales). Si elegimos de manera previa una disciplina científica para realizar el estudio de la práctica matemática, ¿cuál es el garante de que sus metodologías son adecuadas para el estudio de la práctica matemática? En mi opinión, no hay ningún garante y la decisión es arbitraria. (Gutiérrez, 2015, p. 125)

De esta forma, en ambos casos la estrategia ha consistido en apelar a consideraciones de carácter externo para llevar a cabo el análisis de la matemática; sin embargo, el paso por uno u otro camino se ha visto entorpecido tanto por la falta de justificaciones para su adopción anticipada como por su incapacidad para recuperar cabalmente la práctica en cuestión. En efecto, estas perspectivas usualmente suelen forzar el quehacer matemático de acuerdo con sus políticas y mostrar un desconocimiento sobre su particularidad, de modo que muchos aspectos importantes pasan desapercibidos al momento de la reflexión filosófica; en consecuencia, no abarcan el objeto que pretenden estudiar a plenitud. En cambio, el naturalismo matemático sí promete hacerlo. Así pues, la predilección por la metodología matemático-naturalista adicionalmente puede promoverse en virtud de su condición libre de prejuicios y de su aptitud para rescatar una serie de aspectos relevantes dentro de la práctica matemática e incluirlos dentro de su análisis filosófico.

Para terminar esta sección, cabe mencionar una última motivación para suscribirse al programa naturalista de Maddy, esta es: el enfoque matemático-naturalista impulsa la unificación entre dos áreas de investigación, la matemática y la filosofía. En otras palabras, la metodología del filósofo segundo, al apostar por el examen previo de la práctica matemática para realizar sus reflexiones filosóficas, abre un puente de comunicación entre una y otra área. Como se vio hace unos momentos, este modo de proceder pretende recuperar lo mejor posible los aspectos más significativos del quehacer matemático para incorporarlos dentro del análisis filosófico. Esto a la larga motiva la reunión y la colaboración entre el matemático y el filósofo, pues pretende darle tratamiento a cuestiones que no resultan atractivas o relevantes únicamente al filósofo, sino también al matemático.

Baste lo anterior para motivar la adopción del marco metodológico del naturalismo matemático. No obstante, el preámbulo de este trabajo no estaría completo sin antes mencionar cuál es el interés por consagrar este estudio específicamente a la teoría de conjuntos. El siguiente apartado, pues, se encargará de desplegar algunas razones para perseguir el análisis de esta disciplina matemática.

1.2.1. Naturalmente, la teoría de conjuntos

Retómese la caricatura que Maddy ha dibujado en torno de la separación de la matemática y la ciencia y, por consiguiente, alrededor del surgimiento de la matemática pura. Así pues —como el lector recordará—, una vez liberada la matemática de su captora, la ciencia, los matemáticos cayeron en cuenta de que sus resultados, métodos de demostración y objetos de estudio se encontraban apoyados en gran medida, o bien sobre intuiciones vagas, o bien sobre justificaciones de carácter empírico (ofrecidas por las ciencias naturales). De pronto, pues, nació la necesidad por apoyar sus prácticas sobre otro suelo y, en particular, por establecer sus métodos de manera clara y con la mayor precisión posible. La herramienta principal para conseguir este propósito fue el *método axiomático*. Las ventajas del método axiomático son bien conocidas, entre otras cosas, permite colocar de manera puntual los supuestos sobre los que descansan las diferentes teorías matemáticas; asimismo, permite examinar con claridad las consecuencias que se siguen de tales supuestos e identificar si a partir de ellos se deriva alguna contradicción.[33]

[33]Por el momento no se profundizará sobre el método axiomático. Esto se dejará para más adelante cuando Hilbert y una versión temprana de su programa tomen parte en esta historia (véase la sección

Por fin, es en este momento que la teoría de conjuntos hace su tan esperada aparición. Mientras se daban a la tarea de describir axiomáticamente las diferentes estructuras con que trabajan, los matemáticos se percataron en algún punto que las teorías de tales estructuras podían ser modeladas mediante ciertos constructos abstractos: los *conjuntos*.

Originalmente, la teoría de conjuntos surgió de manera no-axiomática y estuvo motivada totalmente por una concepción intuitiva, y no del todo precisa, de conjunto: una colección bien determinada por los objetos que la constituyen.[34] Sin embargo, el descubrimiento de ciertos resultados paradójicos dentro de esta prematura teoría de conjuntos[35] impulsó un tratamiento que gozara —como las otras teorías matemáticas— de los "beneficios rigurosos de la axiomatización" (Maddy, [2011, p. 33]) y que hiciera frente a las antinomias. Como consecuencia, tras un considerable periodo de desarrollo, la teoría de conjuntos terminó por consolidarse mediante lo que actualmente se conoce como el *sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección* (ZFC).[36]

A partir de entonces, la teoría de conjuntos se ha caracterizado por su calidad como *fundamento*[37] para la matemática clásica. Esto ha llegado a tal grado que, por ejemplo, para muchos matemáticos determinar la existencia de una estructura u objeto matemático significa encontrarle un representante conjuntista, o establecer algún resultado en algún área de la matemática equivale a derivarlo como teorema a partir de los axiomas teórico-conjuntistas.

> De esta forma, la teoría de conjuntos nos confiere una sola herramienta que puede

2.1.3).

[34]Unas de las primeras caracterizaciones de la noción de conjunto son aquéllas famosamente ofrecidas por Cantor (1932): "una colección [. . .] en un todo de objetos definidos y bien-distinguidos [. . .] de nuestra intuición o pensamiento" (p. 282), "muchos, que pueden considerarse como uno, *i. e.*, una totalidad de elementos definidos que pueden combinarse en un todo mediante una ley" (p. 204).

[35]En la sección 2.1.3 se abordará esto con más detenimiento.

[36]La "C" hace alusión al axioma de elección (*choice*, en inglés).

[37]La concepción de "fundamento" no es unánime entre los filósofos de la matemática ni probablemente entre los matemáticos. Gutiérrez (2015), por ejemplo, reconoce al menos dos maneras de interpretar el término. Fundamentar (o justificar) una teoría —dice— puede significar reducir sus objetos y las relaciones entre ellos a los de otra teoría que se considera no necesita ser fundamentada; la otra alternativa consiste en entender el término como la reconstrucción de los objetos de una teoría (y sus relaciones) mediante los objetos de otra teoría que se considera mejor justificada (véase Gutiérrez [2015, p. XV, nota 2]).

Por su parte, autores como Tsementzis y Halvorson (2018) consideran que la noción de fundamento en matemáticas consiste en una "lógica central" (*e. g.*, la lógica clásica de orden uno) que expresa una "teoría" (*e. g.*, los axiomas de ZFC con ayuda del símbolo de relación $\in$), la cual describe un "universo de objetos básicos" (*e. g.*, la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien-fundados); de tal suerte que sobre esto puede apoyarse una "filosofía del análisis lógico" (el nombre russelliano para "filosofía analítica") y así reconocer su uso en la clarificación y el abordaje de problemas filosóficos.

Otras interpretaciones del término "fundamento", incluyen —por decir algo— las ofrecidas por Ladyman y Presnel (2016), quienes en su análisis pretenden identificar varios sentidos del término y extender criterios de caracterización sin comprometerse con que éstos sean definitivos. Uno de estos sentidos sencillamente refiere a ser un lenguaje unificador y un marco conceptual. Otro sentido considera al anterior y le añade definiciones para entidades matemáticas en los símbolos del lenguaje. Por último, el otro sentido que mencionan estos autores va más allá del lenguaje e involucra ofrecer un terreno de ideas preteóricas y respuestas a preguntas de carácter semántico, metafísico, epistemológico y metodológico; además, este sentido debe ser "autónom", o sea, no estar apoyado sobre otro sistema fundacional.

> dar un significado explícito a cuestiones de existencia y de coherencia; que puede hacer precisos conceptos y estructuras previamente poco claros; que puede identificar perfectamente supuestos generales fundamentales que juegan con varios aspectos diferentes en diferentes campos; que puede facilitar interconexiones entre diversas ramas de la matemática todas ya representadas uniformemente; que puede formular y responder preguntas de demostrabilidad y refutabilidad; que puede abrir la puerta a nuevas hipótesis fuertes para sentar viejas preguntas abiertas; y demás. En este sentido filosóficamente modesto, pero matemáticamente rico, la teoría de conjuntos puede decirse fundamentar la matemática pura contemporánea. (Maddy, 2011, 34)

Personalmente, creo que esto por sí solo ya resulta un excelente motivo para perseguir el análisis de la teoría de conjuntos; pero, por si acaso esto fuera poco, considérese lo siguiente. La teoría de conjuntos —como se espera hacer patente en el transcurso del siguiente capítulo— por su naturaleza abstracta, desarrollo histórico y objetivos, como se acaba de adelantar, ha adquirido un lugar privilegiado al fondo del resto de las teorías matemáticas clásicas; la práctica de esta teoría, por su calidad de fundamento, de alguna manera refleja parte de los intereses y objetivos de la práctica de la matemática clásica pura (*e. g.*, claridad conceptual, precisión de estructuras, unificación de áreas, consistencia de teorías). En algún sentido, pues, la práctica teórico-conjuntista —como una suerte de modelo a escala— representa parte de la práctica matemática general. De este modo, analizar las prácticas de la teoría de conjuntos con la meta de determinar con cierta claridad sus componentes metodológicos, ontológicos y epistemológicos parece ciertamente un ejercicio valioso, en tanto que podría contribuir al esclarecimiento de cuestiones filosóficas pertinentes para la práctica matemática general. Dicho de otra forma, por el carácter peculiar de la teoría de conjuntos, responder preguntas del tipo "¿cuál es la metodología de la teoría de conjuntos y por qué?", "¿cuál es el objeto de estudio de la teoría de conjuntos?" y "¿cómo es que se sabe o se amplía el conocimiento sobre los conjuntos?" podría arrojar luz sobre preguntas más generales en filosofía de las matemáticas, como son: ¿cuáles son los métodos de la matemática?, ¿cuáles son sus objetos de estudio?, ¿cómo se adquiere el conocimiento en matemáticas?

Por lo tanto, preguntas como las que se presentaron en la introducción son las que, si bien de manera indirecta, se esperan responder en última instancia. Así, la teoría de conjuntos se propone aquí como un vehículo hacia la consecución de este propósito.

Con esto, se espera que el interés por estudiar la teoría de conjuntos se haya hecho patente. En el siguiente capítulo se dará inicio propiamente al análisis que compete a este trabajo. Como se ha insistido una y otra vez, para realizar un análisis de la teoría de conjuntos desde el marco metodológico del naturalismo matemático, ante todo, es menester efectuar un análisis de la práctica de esta teoría. Esto es lo que se espera conseguir a continuación mediante el examen de ciertos episodios históricos y representativos de la teoría de conjuntos. A partir de esto, se intentarán identificar, en un primer momento, los métodos de la teoría de conjuntos, o sea, las directrices que podrían sugerir al teórico de conjuntos el modo de llevar a cabo su empresa; pues recuérdese —como se dijo anteriormente— que “normas de confirmación y construcción teórica frecuentemente surgen en la práctica”.

Capítulo 2

Una breve historia de los conjuntos

No es difícil encontrar dentro de la literatura sobre filosofía de la matemática la afirmación de que la teoría de conjuntos es suficiente para proporcionar un "fundamento"[38] para prácticamente toda la matemática clásica. Este hecho tan notable normalmente se ha asociado con la idea de que cada objeto o estructura matemática puede representarse mediante un sustituto conjuntista y de que sus propiedades pueden ser descritas mediante el lenguaje de dicha teoría; a su vez, esto se encuentra relacionado con el hecho de que cualquier enunciado matemático puede ser formalizado en este lenguaje y de que cualquier teorema matemático clásico puede derivarse a partir de los axiomas conjuntistas y un cálculo deductivo adecuado[39] (*e. g.*, el presentado por Enderton [2004] o Mendelson [1997] para lenguajes de orden uno o como el trabajado por Shapiro [2003] para lenguajes de orden dos, por mencionar algunos). Lo anterior ha permitido, entre otras cosas, formular con uniformidad y precisión matemática cuestiones acerca de entidades abstractas o sobre la demostrabilidad de alguna conjetura o hipótesis.[40] En pocas palabras, la teoría de conjuntos tradicionalmente ha servido como marco general para la justificación y sistematización del estudio matemático de la matemática misma, esto es, la *metamatemática* (*à la* Hilbert). Por último, pero no menos importante, la teoría de conjuntos ha suministrado un terreno común para las diferentes disciplinas matemáticas, de manera que ha posibilitado su interacción y facilitado la resolución de sus problemas al permitir el traslado seguro de diversos recursos metodológicos y resultados entre ellas.[41]

[38] Véase la nota 37.

[39] Aquí "cálculo deductivo adecuado" puede entenderse como completo o correcto, o ambos (si es que ciertas condiciones del lenguaje y reglas de inferencia se satisfacen).

[40] El hecho de que en este lenguaje se pueda formalizar cualquier enunciado matemático tendrá relevancia filosófica cuando se presente el axioma de solubilidad en el marco del programa de Hilbert, *grosso modo*, este hecho nos permitirá establecer un criterio objetivo para determinar si un problema matemático está bien planteado.

[41] No es la única disciplina que ha trabajado sobre esto. La teoría de categorías también ha tenido una función similar en años recientes. Pero no se profundizará sobre esto, pues no es el objetivo de este trabajo.

No obstante, para conseguir semejantes logros, y colocarse en este lugar privilegiado por encima de otras disciplinas matemáticas, la teoría de conjuntos tuvo que superar una serie de obstáculos y atravesar un largo proceso de refinamiento: desde paradojas y modificaciones en su axiomatización hasta controversias en torno de sus principios y las prácticas matemáticas que reflejaba. Este capítulo, pues, consistirá en la presentación de una serie de episodios históricos representativos alrededor del surgimiento axiomático de la teoría de conjuntos y de su desarrollo durante los primeros treinta años del siglo pasado (aproximadamente). Sorprendentemente, el propósito de esto no es aburrir al lector con la repetición de una historia que ya ha sido contada en numerables ocasiones por autores muchísimo más competentes (*e. g.*, Ferreirós [2008], Ebbinghaus [2007]), sino identificar algunas de las motivaciones, ideas, objetivos y, ¿por qué no?, prejuicios más característicos detrás de la consolidación de la práctica de esta disciplina. Esto justamente es lo que al final permitirá —en el siguiente capítulo— dar cuenta de los métodos al fondo de la práctica teórico-conjuntista de esta época. Cabe recordar que, como ya se dijo en el capítulo anterior, esto se realizará con el objetivo de hacer un análisis de la teoría de conjuntos desde la metodología del naturalismo matemático.

Aunque un análisis de la teoría de conjuntos desde la metodología de la filosofía segunda ya ha sido elaborado por Maddy (1988a; 1988b; 2011), personalmente, me parece que la autora omite dentro de su examen ciertos acontecimientos significativos en la historia de los conjuntos[42] y que, probablemente, merezcan ser recuperados para comprender la metodología que seguían los teóricos de conjuntos de la época.[43] Como consecuencia, ciertos factores metodológicos de esta práctica matemática lucirán distintos a los propuestos por Maddy; a la larga, esto arrojará una versión alternativa de los rasgos epistemológicos y ontológicos que constituyen buena parte de esta disciplina.[44]

Cabe apuntar que lo de arriba no pretende insinuar que el análisis en este trabajo sea completo o capture la práctica del teórico de los conjuntos a cabalidad. En realidad, dicho examen se encuentra inserto dentro de una de las varias posibles tradiciones de la investigación teórico-conjuntista; asimismo, un análisis completo requeriría agotar los aspectos de la práctica sugeridos por la historia de la disciplina hasta la actualidad (y no sólo hasta los años treinta del siglo pasado). Si bien realizar un trabajo de esta naturaleza sería extremadamente valioso, esto excedería la extensión y las características que una tesis de maestría exige.

[42] En particular, la disputa en torno de la noción de “definitud” presente en la primera versión del axioma de separación, no ha sido trabajada a profundidad por la autora

[43] Se recuerda al lector no confundir la metodología matemático-naturalista con la metodología de la teoría de conjuntos. La primera, *grosso modo*, se refiere a las estrategias o los métodos de aproximación al análisis de una cierta disciplina desde un punto de vista filosófico; la segunda, al conjunto de métodos o directrices que guían la práctica del teórico de los conjuntos.

[44] Probablemente esto se deba, como la misma Maddy insinúa, a que ella se centró en el análisis de las prácticas de los teóricos de conjuntos integrados al grupo CABAL.

2.1. Hacia la primera axiomatización de la teoría de conjuntos

Para comprender los motivos y la necesidad de empotrar la teoría de conjuntos dentro del método axiomático, resulta pertinente, en primer lugar, tener cierta noción del panorama histórico en que se envolvían las investigaciones matemáticas de la época. Ante todo, es conveniente revisar —si bien de manera superficial— el contexto matemático de la segunda mitad del s. XIX, así como la actitud de los matemáticos y filósofos frente a la lógica. Por supuesto, la historia sobre el nacimiento de la teoría de conjuntos, el progreso de la matemática moderna y la lógica simbólica no es tan sencilla para ser contada en unas cuantas líneas; una exposición detallada requeriría más espacio del que aquí se dispone y desviaría la atención del momento histórico que principalmente se pretende analizar dentro del presente capítulo; a saber, el periodo del desarrollo axiomático de la teoría impulsado mayormente por Zermelo. Con todo, hay algunos aspectos relativos a la etapa temprana de la teoría que merecen ser traídos a colación en este lugar, ya que, en menor o mayor grado, estarán presentes durante el curso de los acontecimientos. Estos aspectos se encuentran en íntima relación con cuestiones del tipo: ¿cómo llegaron los matemáticos del s. XIX a la noción de conjunto?, ¿cómo se convencieron de que les ofrecería una base y un lenguaje adecuados para sus disciplinas?, ¿cómo un matemático como Cantor se convenció de la importancia de desarrollar una teoría de los conjuntos? (Ferreirós, 2007, p. xxviii; 1996, p. 6)

La intención de las siguientes secciones, entre otras cosas, será sentar llanamente los precedentes del surgimiento de las paradojas y del programa de Hilbert (en sus inicios) que, como se verá más adelante, serán esenciales para la promoción de la axiomatización de la teoría en cuestión. Dicho esto, a continuación, se presentará el episodio piloto de esta historia: la inclusión de métodos no-constructivos dentro de la práctica matemática.

2.1.1. La introducción de la metodología no-constructiva en matemáticas

Si bien la disputa entre partidarios de la matemática constructiva y no-constructiva frecuentemente se asocia con la "crisis en los fundamentos" declarada por Hermann Weyl a inicios de los años veinte del siglo pasado, en realidad, los orígenes de la discusión pueden rastrearse mucho antes —más precisamente, hacia la segunda mitad siglo XIX (o incluso antes; véase Ferreirós [2010])—. Más allá de un interés puramente histórico, el análisis de esta disputa puede ser motivado, entre otras cosas, por su relevancia dentro del desarrollo filosófico y metodológico de las disciplinas matemáticas a lo largo del siglo XX. Ciertamente, entre las diversas disciplinas, la teoría de conjuntos jugó un papel protagónico en gran parte de estas discusiones y padeció el progreso de la práctica matemática en carne propia. Ahora bien, como ya se adelantó, la controversia entre uno y otro estilo en el quehacer matemático antecedió al mencionado protagonismo de la teoría de conjuntos. En este apartado justamente se abordará de manera breve ese momento previo.

Durante la segunda mitad del s. XIX, en Alemania, la lucha por la supremacía en la investigación matemática se daba especialmente entre dos universidades: la Universidad de Gotinga y la Universidad de Berlín. Aun cuando a cada una estaban afiliados personajes con perspectivas muy variadas, puede reconocerse la presencia de dos tradiciones[45] principales, cada una de ellas asociada con una y otra institución.

Considérese, en primer lugar, el caso de Gotinga,[46] la tradición que —cabe adelantarse— tendría el mayor impacto sobre el desarrollo teórico-conjuntista. A lo largo del siglo XIX, el rechazo de la concepción kantiana de la matemática —como la construcción *a priori* de conceptos dados en la intuición—[47] fue adquiriendo cada vez más fuerza. *Grosso modo*, las razones detrás de esta tendencia tenían que ver con la incapacidad y obsolescencia de las nociones espacio-temporales (provenientes del mundo físico) para sostener o fundamentar algunas de las herramientas matemáticas que se habían desarrollado durante el siglo previo y que se habían mostrado científicamente útiles. El tratamiento tradicional de la geometría y del cálculo, en un inicio, parecían adaptarse naturalmente a justificaciones de esta índole; pero una mirada más concienzuda —especialmente sobre este último— develaba dificultades y oscuridades conceptuales dentro de los supuestos bajo las definiciones básicas de estas disciplinas. El ejemplo paradigmático de lo anterior es justamente el del cálculo, donde nociones como la de “límite”, “continuidad” o “números infinitesimales”[48] resultaban vagas y problemáticas —por ejemplo, algunas versiones requerían la noción de infinito en acto—, y, por tanto, necesitaban ser esclarecidas y establecidas de manera precisa. Esto al final promovió la búsqueda por una justificación o fundamento satisfactorio del cálculo; entre estos esfuerzos, fue que aparecieron propuestas como la *aritmetización del cálculo*, la cual pretendía eliminar el infinito mediante una reducción a la teoría de números. Este proyecto, iniciado probablemente por Joseph-Louis Lagrange, sería desarrollado por personajes posteriores como Augustin-Louis Cauchy, Karl Wierstrass y Bernard Bolzano.[49] En particular, este último fue de suma importancia para lo

[45]Por “tradición matemática” entiéndase una tendencia particular hacia la investigación matemática entre individuos de una comunidad que comparten elementos conceptuales, preferencias por ciertas nociones matemáticas básicas, juicios respecto de problemas significativos a tratar, perspectivas metodológicas que afectan su aproximación a la matemática, etcétera (Ferreirós, 2007, p. XXIII).

[46]La siguiente no pretende ser una descripción muy precisa.

[47]Recuérdese que para Kant (2009) el conocimiento está conformado por las formas a priori proporcionadas por las capacidades cognitivas del sujeto: las intuiciones puras de la sensibilidad, que aportan las formas del espacio y del tiempo al conocimiento de los objetos del mundo; y los conceptos puros del entendimiento, que proporcionan las formas que estructuran el conocimiento de los objetos del mundo.

[48]Dicho burdamente, números que, respecto de las operaciones aritméticas, se comportaban en ocasiones como números mayores que cero; pero, en otras, como el cero.

[49]Como se verá en unos instantes más, este proyecto de eliminación del infinito aunado a la preeminencia de procesos constructivos sería central para desarrollos decimonónicos durante la segunda mitad del s. XIX, impulsados principalmente por la escuela de Berlín.

que después se conocería como el programa de *rigorización del cálculo*. Como señala Coffa (1991):

> La palabra "rigor", usada normalmente por matemáticos e historiadores para describir el propósito y el logro de los mayores proyectos fundacionistas del siglo XIX, es ambigua; es a la vez una noción semántica y epistemológica. La búsqueda de rigor podría ser, y frecuentemente fue, una búsqueda de certeza, de un "*Grund*" inamovible. Pero fue también la búsqueda de una clara explicación de las nociones básicas de una disciplina (una reducción "ideológica"[...]). (p. 54)

En este trabajo no se profundizará mucho más sobre el tema de la fundamentación del análisis ni la relevancia de Bolzano en todo esto,[50] lo que aquí se intenta destacar es la creciente inclinación de matemáticos como éste por desprender sus conceptos de nociones como la de movimiento, o de naturaleza geométrica y temporal.[51] Dicho de otro modo, "[u]n propósito no menos importante fue la clarificación de lo que se decía" (Coffa, [1991, p. 54]), para esto era necesario purificar los conceptos de nociones "dinámicas" y espacio-temporales y, en cambio, convertirlos en nociones que apelaran solamente a principios básicos de los números y las funciones (o a la lógica).[52] Sin embargo, algunos elementos de la disciplina se rehusaban a separarse de elementos de carácter infinitario, y "[a]lgunos [matemáticos] consideraron que no se podía ofrecer una justificación sólida del análisis si no se ofrecía también una clarificación de la noción de infinito" (Gutiérrez, [2015, p. XVII]). La teoría de conjuntos eventualmente surgiría, en parte, como una respuesta a esta búsqueda por la precisión, clarificación y generalización de conceptos relacionados con el infinito. Pero no se vaya tan rápido. Regrésese al punto al que se pretendía llegar con todo esto.

El creciente rechazo de la doctrina kantiana dentro de la matemática,[53] despertó una propensión por la *abstracción* como parte del análisis matemático, propensión que alcanzaría su máxima expresión a manos de los matemáticos de Gotinga: Peter Gustav Dirichlet, Bernhard Riemann y Richard Dedekind.[54]

[50] El lector interesado puede dirigirse al texto de Coffa (1991), principalmente al cap. 2.

[51] Por ejemplo, Bolzano se dio a la tarea de caracterizar primero una noción de "continuidad" que no incluyera elementos geométricos ni dinámicos.

[52] Un ejemplo de esto es la definición de continuidad ofrecida por Bolzano:

> la expresión que una función $f(x)$ varía de acuerdo a la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites significa sólo esto: si x es alguno de tales valores, la diferencia $f(x+w) - f(x)$ puede ser hecha más pequeña que cualquier cantidad dada con tal de que w pueda ser tomada tan pequeña como queramos (Bolzano [1817, pp. 427-8] en Coffa [1991, p. 56])

[53] El abandono de la intuición pura como parte de la matemática y la preservación de su carácter *a priori*, "es considerar la matemática como un desarrollo teórico basado únicamente sobre los conceptos del entendimiento" (Ferreirós, [2007, p. 16]). Es decir, lo que podría considerarse uno de los antecedentes del *logicismo*.

[54] Como se mencionará más adelante, Gauss también era partidario de este estilo abstracto y, de hecho, puede considerarse un precursor de esta tradición. No obstante, Gauss no coincidiría totalmente con ellos sobre ciertas cuestiones (*e. g.*, no consentiría algo como el infinito actual). Cabe señalar, que Gauss enseñó en Gotinga durante la primera mitad del s. XIX, pero durante ese periodo se dedicó principalmente a impartir clases de astronomía hasta su muerte en 1855. De hecho, al fallecer fue que Dirichlet fue convocado por la Universidad de Gotinga.

La predilección por la abstracción sería promovida principalmente tras la llegada de Dirichlet a Gotinga, cuya perspectiva singular ejercería una enorme influencia sobre los —en ese entonces— jóvenes estudiantes Riemann y Dedekind. Esta perspectiva se iría depurando gradualmente y terminaría por caracterizarse por los siguientes rasgos:

> *i)* la aceptación de la noción de una función "arbitraria" propuesta por Dirichlet;
>
> *ii)* una total aceptación por los conjuntos infinitos y el infinito superior;
>
> *iii)* una preferencia por "poner pensamientos en lugar de cálculos" (Dirichlet), y por concentrarse sobre "estructuras" caracterizadas axiomáticamente; y
>
> *iv)* una confianza sobre los métodos de prueba "puramente existenciales". (Ferreirós, 2010, p. 1)

Quizá no esté de más hacer un breve comentario sobre estos puntos antes de pasar al caso de la "tradición de Berlín".[55]

Como menciona Ferreirós (2007), los matemáticos afiliados a la tradición de Gotinga intentaban colocar constantemente las teorías matemáticas dentro de un marco más general que evitara la dependencia a las "formas de representación"[56] para establecer definiciones y que, en su lugar, optara por nociones abstractas para hacer el trabajo; que estableciera objetos básicos, y que incluyera la definición de sus propiedades internas o estructurales desde un inicio (*i. e.*, de un concepto fundamental). La razón principal detrás de su inclinación por este modo peculiar de proceder era su generalidad y su carencia de arbitrariedad (Ferreiros, [2007, p. 31]). Cada uno de los puntos de arriba, pues, pretende capturar los diferentes aspectos expresados por estas líneas. Estos aspectos son los que constituyen los llamados *métodos no-constructivos.*

El punto *i)* precisamente hace referencia a esta preferencia por las nociones abstractas y a este abandono de las formas de representación para el caso particular de las funciones: "[Dirichlet] propuso tomar una función como cualquier correlación definida abstractamente, tal vez arbitraria, entre valores numéricos" (Ferreirós, 2007, p. 27); independiente de alguna expresión analítica que la represente. Esta noción abstracta de función es la que está de fondo a la definición que Riemann ofrecería de una integral, y la que Dedekind perfeccionaría años más tarde mediante la noción de "mapeo".

Respecto de *ii)*, se puede decir que estos matemáticos estaban conscientes de la existencia de una cantidad infinita de objetos matemáticos, pues eran parte de los objetos con los que trabajaban en su día a día y encontraban además enormes ventajas al poder considerarlos como agrupados en una sola colección, en un conjunto. Si bien en un principio hubo una resistencia por considerar que se podía tener el infinito en acto, y por ello

[55] Para una exposición más detallada de esta tradición, véase Ferreirós (2007, pp. 24-31).

[56] Las "formas de representación" se refieren a las diferentes expresiones posibles (*e. g.*, fórmulas) para representar objetos matemáticos; por ejemplo: expresiones analíticas, funciones analíticas, secuencias, series, ecuaciones algebraicas. Estas formas de representación incluyen un algoritmo para computar o calcular el objeto con que se está trabajando.

se optaba por sostener que el infinito sólo existía en potencia, la misma práctica matemática y las necesidades inherentes en las pruebas fueron lo que los llevaron a aceptar la existencia de estos conjuntos infinitos como existentes en acto.[57]

En cuanto al inciso *iii)*, éste se encuentra en íntima relación con el primero. La idea detrás de "poner pensamientos en lugar de cálculos" es minimizar el papel que juegan el tratamiento algorítmico y los cálculos; o sea, dejarlos de tomar como parte esencial de las demostraciones matemáticas. Dicho de otro modo, esta célebre frase se trata de "una defensa explícita de la postura respecto de que las teorías matemáticas no deben estar basadas sobre fórmulas y cálculos —ellas [las teorías] deben siempre estar basadas sobre conceptos generales claramente formulados, con las expresiones analíticas o medios de cálculo relegados al desarrollo posterior de la teoría—" (Ferreirós, 2010, p. 2). El estudio de estructuras se relaciona con el punto ii) en tanto que muchas de las estructuras matemáticas de interés eran estructuras con dominios infinitos (*e. g.*, la estructura de los naturales y la estructura de los reales).

Por último, solamente resta hablar sobre *iv)*.[58] Llanamente, la idea detrás de los métodos de prueba "puramente existenciales" —como su nombre sugiere— consiste en asumir la existencia de ciertos objetos abstractos, por lo general conjuntos, con el propósito de demostrar algún teorema a partir de ellos. En otras palabras, el método consiste en establecer previamente algún supuesto que postule la existencia de cierta entidad matemática y, tras un proceso inferencial (respaldado por alguna lógica), concluir una determinada proposición matemática. Estos métodos de prueba provocaron mucha controversia en su momento (y de hecho aún lo hacen), justamente porque, para deducir un determinado teorema, establecían la existencia de un objeto sin más clarificación o justificación; esto es, no indicaban ni describían un procedimiento para *construir* el objeto mediante las operaciones de las que su teoría disponía. Este tipo de pruebas serían fuertemente descalificadas por la escuela de Berlín.

La tradición asociada con la Universidad de Berlín, por su lado, puede describirse a grandes rasgos como un contrapeso de la perspectiva que se acaba de presentar. Esta tradición, como se ha insinuado, mostraba tendencias más *constructivistas* y era representada por personajes como Ernst Kummer, Karl Wierstrass y Leopold Kronecker. Aun cuando no sería del todo incorrecto caracterizar la perspectiva de Berlín como el rechazo de las tesis *i)-iv)* de más arriba, vale la pena hacer un par de anotaciones adicionales.

Uno de los rasgos característicos de esta tradición era su convicción por desarrollar la matemática a partir de nociones puramente aritméticas. Si bien el proyecto de rigorización mencionado anteriormente llevó a los matemáticos de Gotinga a dirigir sus investigacio-

[57]Para una exposición más detallada sobre el infinito, su introducción e importancia dentro de los estudios matemáticos, véase Oppy (2021).

[58]Este rasgo quedará más claro posteriormente en el episodio sobre el axioma de elección y el teorema del buen-orden (véase la sección 2.1.4).

nes por rumbos más abstractos, en Berlín este programa fue avanzado con base en las ya mencionadas formas de representación, los algoritmos y los cálculos efectivos; por ejemplo: para Wierstrass, la noción de función era simplemente la noción de función analítica, es decir, aquella representable por una serie de potencias localmente convergente. Por otra parte, cabe señalar que la opinión en relación con el infinito no era unánime entre los matemáticos de Berlín: mientras Wierstrass admitía los números irracionales, pero desde el punto de vista de las series infinitas, Kronecker tenía inclinaciones más finitistas (sólo estaba dispuesto a admitir —si acaso— el infinito en potencia) y rechazaba los irracionales en virtud de su indefinibilidad a partir de los naturales mediante alguna expresión analítica.[59]

Antes de concluir este apartado, conviene hacer una curiosa observación. Georg Cantor, considerado por muchos como el creador de la teoría de conjuntos, asistió y recibió su educación en Berlín; no obstante, era más adepto de la perspectiva abstracta asociada con la mencionada tradición de Gotinga. Su contacto con la investigación de Riemann y Dedekind, y más que nada su correspondencia con este último, ejercerían una enorme influencia sobre el curso de sus investigaciones.[60] Es precisamente en torno de estos tres personajes que girará la siguiente sección.

2.1.2. El surgimiento de la teoría de conjuntos

Si bien existen vestigios de la noción (intuitiva) de “conjunto”[61] que se remontan al menos hasta los primeros siglos de la era común, los orígenes de su versión matemática más contemporánea probablemente se ubican en los trabajos de Dedekind y Cantor (alrededor de 1870) o, más estrictamente, un poco antes en las investigaciones de Riemann sobre topología y geometría.[62] Como señala Ferreirós en múltiples trabajos (1996, 2007, 2020), hay evidencia documental que pone de manifiesto la fuerte influencia que la metodología, perspectivas e ideas matemáticas de Riemann ejercieron sobre Dedekind y Cantor y, por

[59]El lector habrá notado esta caracterización un tanto despreocupada, esto se debe a que la tradición que tuvo mayor impacto sobre el desarrollo de la teoría de conjuntos fue la de Gotinga. La tradición de Berlín se introdujo principalmente para redondear la exposición. Para una exposición más detallada de esta tradición, véase Ferreirós (2007, pp. 31-8).

Con todo, cabe mencionar que la perspectiva constructivista también jugará un papel muy importante en el desarrollo de la teoría de conjuntos. Como se verá más adelante, herederos de esta tradición, como Skolem, realizarían aportaciones a la lógica y observaciones sobre la teoría de conjuntos que afectarían notablemente el curso de su desarrollo.

[60]Su preferencia por este punto de vista provocaría una reacción extremadamente negativa entre los miembros de la escuela de Berlín y le valdría una dura crítica por parte de Wierstrass, pero principalmente por parte de Kronecker.

[61]Por comodidad, en las siguientes menciones de esta noción se omitirán las comillas.

[62]Los estudios sobre el infinito —en particular, los realizados por Bolzano— y los avances en la geometría habían impulsado el desarrollo de disciplinas como la topología y la geometría proyectiva, donde elementos como la medida y la métrica requerían ser abstraídos. Un poco más adelante se tocará el papel del infinito en este desarrollo, así como la influencia que tuvo el enfoque conceptual a la matemática iniciado por Dirichlet.

consiguiente, sobre el desarrollo de la teoría de conjuntos durante sus primeras fases. Concretamente, el concepto riemanniano de *variedad*[63] (*manifold*, en inglés)[64] y el estilo singular en su tratamiento de cuestiones sobre fundamentos de las disciplinas matemáticas —el cual tiene rasgos que inevitablemente resultan reminiscentes de las aproximaciones teórico-conjuntistas más contemporáneas— revelan al primero como precursor directo de los segundos. De hecho, en su conferencia "Sobre las hipótesis que yacen bajo los fundamentos de la geometría", Riemann ya sugiere establecer la matemática sobre la base de la noción de conjunto o variedad:

> Las nociones de magnitud solamente son posibles donde hay un concepto antecedente general que admite diferentes formas de determinación. Según se dé lugar o no a una transición continua entre estas determinaciones, de una a otra, forman una variedad continua o discreta; las determinaciones individuales son llamadas puntos en el primer caso, en el último caso, elementos de la variedad (Riemann [1854/1868] en Ferreirós [2007, p. 47])

Como se puede apreciar, aquí ya se encuentra "una clara referencia a la relación tradicional de concepto-clase, donde la variedad resulta ser la clase o el conjunto de todas las 'determinaciones' que caen bajo el concepto general" (Ferreirós, [2007, p. 63]). No obstante, cabe preguntarse, ¿qué motivó a este matemático a apoyarse sobre semejante noción? La razón de esto no es arbitraria.

A lo largo del s. XIX, no era inusual identificar la matemática como la "ciencia de las magnitudes".[65] El problema, como puede suponerse, era determinar de manera clara qué se entendía por "magnitud".[66] El desarrollo abstracto de la matemática promovido por Carl Friedrich Gauss —y Bolzano— durante la primera mitad de siglo, y continuado eventualmente por Dirichlet y Riemann, puede verse llanamente como una reacción a la carencia de conceptos más satisfactorios sobre los cuales fundamentar la matemática.

Recuérdese que antaño existía una fuerte tendencia por decidir cuestiones de carácter metafísico en torno de los objetos de la matemática en virtud de su aplicabilidad a sistemas físicos:[67] el lector probablemente habrá leído alguna vez sobre antiguas y acaloradas disputas alrededor de "sinsentidos" como, por ejemplo, el número cero, los números negativos y los irracionales. Pues bien, a ellas se sumaba el caso de los números complejos. Uno de los detonantes del, llámese, "giro abstracto" de la matemática fue precisamente la necesidad de Gauss por establecer la existencia matemática de estos últimos. (Específicamente, los requería para estudiar residuos bicuadráticos[68] y para su demostración del

[63]No confundir con la noción gaussiana de variedad topológica n-dimensional; a saber, un espacio topológico tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad homeomorfa a una n-bola euclidiana. En este contexto el concepto de variedad se encuentra más cercano a la idea de colección.

[64]*Mannigfaltigkeit*, en alemán.

[65]Véase Ferreirós (2007, cap. II secc. 1.1.1).

[66]Entre las definiciones más representativas de la época, uno puede señalar la ofrecida por Euler (1796): "aquello que es capaz de incremento o disminución, o aquello que puede agregarse o sustraerse a algo" (véase, Ferreirós [2007, p. 42]).

[67]Recuérdese la reconstrucción en la sección 1.1.2.

[68]Un *residuo bicuadrático* (mod p; donde p es un número primo) es cualquier número *conguente* con la cuarta potencia de un entero (mod p). Una *relación de congruencia* es una relación de equivalencia

teorema fundamental del álgebra.[69]) En su defensa,

> Gauss consideró la interpretación de los números complejos como puntos en un plano como una mera ilustración del significado mucho más abstracto de los números complejos. Él sostiene que algunas situaciones físicas permiten ocupar un tipo particular de números, y algunas no. Es suficiente que haya situaciones en que se produzcan partes fraccionarias u opuestas para dotar de sentido pleno a una teoría de fracciones o de números negativos. Lo mismo ocurre con los números complejos, los cuales, desde su perspectiva, sólo encuentran aplicación cuando no estamos lidiando con sustancias, sino con relaciones entre sustancias. (Ferreirós, [2007, pp. 43-44])

De acuerdo con Gauss, “el matemático abstrae completamente la cualidad de los objetos y el contenido de sus relaciones; él mismo tan solo se ocupa con contar y comparar sus relaciones entre sí” (Gauss [1963/1929, vol. 2, p. 176] en Ferreirós [2007, p. 44]). Dicho lo anterior, no es de sorprender que Gauss en algún punto dirigiese su investigación hacia la abstracción de las propiedades subyacentes bajo los sistemas físicos característicos de las variedades $n-$dimensionales, y que invitase al estudio de varias cuestiones desde un punto de vista prácticamente topológico. Fue justamente dentro de estas ideas que Riemann encontró una razón para respaldarse en su concepto de variedad.[70]

Por motivos de extensión, no se profundizará demasiado sobre el modo específico en que Riemann implementó su novedoso concepto sobre las diferentes áreas (*e. g.*, teoría de funciones,[71] geometría diferencial, topología). En su lugar, sencillamente se insistirá que Riemann propuso la noción de variedad como un nuevo fundamento para la teoría abstracta de las magnitudes, dicha noción “explícitamente establec[ía] vínculos entre magnitudes discretas y continuas, sugiriendo que la aritmética, la geometría y sus desarrollos superiores pueden todos ser restablecidos dentro de este marco”; con esto Riemann “transgredió los límites de la concepción tradicional de la matemática, convirtiéndola en una disciplina de alcance y aplicabilidad ilimitadas, en tanto que abarcaba todos los objetos posibles” (Ferreirós, 2007, p. 65).

> Conceptos cuyas determinaciones forman una variedad discreta son tan comunes que, al menos en los lenguajes cultivados, para cualesquiera cosas que se hayan dado siempre es posible encontrarles un concepto bajo el cual están incluidas (por tanto, en la teoría de las magnitudes discretas, los matemáticos pueden proceder sin titubear a partir del postulado que ciertas cosas dadas pueden ser consideradas como homogéneas)[...]
> Las partes definidas de una variedad, distinguidas por una marca o por una frontera, son llamadas quanta. Sus comparaciones con respecto de su cantidad son conseguidas en el caso de las magnitudes discretas al contarse, en el caso de las magnitudes

$E^{\mathfrak{A}}$ definida sobre una estructura algebraica $\mathfrak{A}$ cuyas relaciones $P^{\mathfrak{A}}$ y funciones $f^{\mathfrak{A}}$ son *compatibles* con $E^{\mathfrak{A}}$; es decir, si $(t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ y $t_i E^{\mathfrak{A}} t'_i$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $(t_1, \ldots, t_n) \in P^{\mathfrak{A}}$; y si $t_i E^{\mathfrak{A}} t'_i$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) E^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(t'_1, \ldots, t'_n)$.

[69]El *teorema fundamental del álgebra* establece que todo polinomio de grado n, de una sola variable, con grado mayor que cero y con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces en el campo de los complejos.

[70]Aunque en este trabajo no se tocará, a su vez hay buena evidencia de la influencia filosófica de Herbart sobre Riemann; véase Ferreirós (1996; 2007).

[71]Otro nombre para el análisis.

> continuas al medirse. [. . .]
> Medir consiste en la superposición de magnitudes para ser comparadas; por tanto, esto requiere medios para transportar una magnitud como el estándar para otra.[72] En la ausencia de esto, dos magnitudes pueden solamente ser comparadas cuando una es parte de la otra; en cuyo caso también solamente podemos determinar el más o menos, y no el qué tanto. Las investigaciones que pueden en este caso instaurarse sobre ellas forman una parte general de la teoría de las magnitudes, independiente de determinaciones métricas, en las cuales las magnitudes son consideradas, no como existiendo independientemente de su posición ni como expresables en términos de una unidad, sino como dominios en una variedad. Tales investigaciones se han convertido en una necesidad para varias ramas de la matemática. (Riemann, [1854, p. 274]) en Ferreirós (2007, pp. 68-9)

De esta forma, Riemann sostiene claramente que distintos objetos pueden tomarse como "homogéneos" siempre y cuando caigan bajo el mismo concepto (*i. e.*, pertenecer a la misma variedad), y que "cualesquiera objetos pueden convertirse en elementos de una variedad, *i. e.*, en objetos matemáticos" (Ferreirós, [2007, p. 68]). Más aún, como ilustra el fragmento anterior,

> Riemann entendía las superficies de su teoría de funciones, y las variedades de su geometría diferencial, como basadas sobre la noción de concepto-extensión, *i. e.*, de clase o conjunto. Sobre esta base, él propuso una revisión de la noción clásica de magnitud; consideró las variedades, *i. e.*, las clases, como un fundamento satisfactorio para la aritmética, la topología y la geometría —en pocas palabras, para la matemática pura—. (Ferreirós, [2007, p. 70])

Riemann, pues, introdujo la noción de variedad como un recurso para *clarificar* los conceptos, las propiedades y las relaciones estudiados por las diferentes áreas de la matemática, áreas cuyo progreso exigía cada vez una mayor abstracción y generalidad. Así, la aproximación abstracta de Riemann contribuiría en gran medida sobre los desarrollos posteriores que enfatizaban una diferenciación progresiva de las características abstractas o estructurales de diferentes objetos.

La influencia de esta aproximación sería notable particularmente en los trabajos de Dedekind y Cantor, quienes encontrarían en ella modos interesantes de indagación, planteamiento de preguntas y desarrollo de técnicas. Por ejemplo, son los trabajos de Riemann —como aquéllos sobre series trigonométricas— los que tendrían un impacto sobre las investigaciones de Cantor en torno del análisis real y que, en última instancia, llevarían a éste ocuparse del estudio de "conjuntos-de-puntos" (*i. e.*, subconjuntos arbitrarios de reales) y a definir operaciones sobre ellos que podrían ser iteradas hasta el infinito, y todavía después; por otro lado, a partir de sus estudios sobre teoría de números algebraicos, Dedekind (1871) —inspirado por la noción de variedad riemanniana— empezaría a manejar conceptos de carácter teórico-conjuntista, como lo muestran sus definiciones de campo, su tratamiento de ideales, de relaciones de equivalencia y homomorfismos, entre

[72]Mas adelante, Cantor parece recuperar esta idea con su teoría de cardinales transfinitos, los cuales se convertirían en ese "estándar" para comparar en términos de tamaño los diferentes infinitos.

otros.

Aquí vale la pena detenerse un poco sobre las aportaciones de Cantor y Dedekind sobre el estudio de los conjuntos para su posterior promoción como una disciplina matemática autónoma. Primero, considérese rápidamente el caso cantoriano de los conjuntos-de-puntos antes aludido.

Alrededor de 1870, las investigaciones de Cantor estaban orientadas hacia la generalización de un teorema sobre la representación de funciones mediante series trigonométricas (esto tiene conexión con las famosas series de Fourier);[73] esto finalmente lo conseguiría al establecer la unicidad de la representación para cualquier serie convergente (cosa que de hecho justificaba la introducción de la función de Riemann para cualquier serie trigonométrica convergente (Ferreirós, [2007 p. 158]). Para ello (véase la nota 70), Cantor consideraría la posibilidad de admitir una cantidad finita e infinita de puntos excepcionales (o sea, puntos donde la serie no convergía al valor dado por la función representada) y se percataría que la unicidad se preservaba siempre y cuando se acumularan alrededor de un solo punto límite; no obstante, aún iría más lejos, y extendería su resultado más allá de los puntos excepcionales y sus puntos de acumulación. Es así que Cantor llegaría a su noción de "conjunto derivado" (véase, Maddy [2011, pp. 41-2]). Para definir esta noción, el matemático alemán asumiría de antemano la existencia del conjunto $\mathbb{R}$ de reales[74] y consideraría subconjuntos arbitrarios P de éste (*i. e.*, los ya mencionados "conjuntos-de-puntos"); un punto límite l de P (para P infinito) sería, pues, un número real tal que todos sus vecindarios contienen puntos de P. (Nótese el carácter abstracto de la definición de punto límite.) De esta manera, un conjunto derivado P' de P sería definido como el *conjunto* de todos los puntos límites de P (véase Ferreirós [2020, secc. 1]). Lo interesante aquí es que la misma operación podía ser aplicada sobre P' (cuando P' es infinito) y generar a su vez un segundo conjunto derivado de todos sus puntos límite (llámese P''); este proceso podía ser iterado progresivamente.[75] Lo relevante para los propósitos de este trabajo es que por primera vez no se consideraban los puntos de manera aislada, sino en *conjunto* como una entidad de suyo, sobre la cual adicionalmente podía definirse una operación, la derivación de conjuntos. De este modo, "un nuevo tipo de entidad —[el] conjunto— fue introducido como un medio efectivo hacia una meta explícita y concreta: extender [el]

[73]Las series de Fourier se habían convertido en la herramienta matemática general para representar funciones sobre $\mathbb{R}$ (Ferreirós, [2007, p. 147]). Fourier había establecido la existencia y unicidad de representaciones de funciones arbitrarias mediante series trigonométricas, en virtud de la integrabilidad de la serie término-a-término. Heine consiguió generalizar el resultado al demostrar la unicidad de la representación, bajo la condición de la convergencia uniforme de la serie (con base en un resultado previo de Wierstrass —que requería la convergencia uniforme para que una serie fuese integrada término-a-término—), dentro del intervalo de representación, excepto en un número finito de puntos. La generalización que Cantor pretendía (y conseguiría) alcanzar estaba relacionada con este teorema de Heine. Cantor lo lograría, como se verá en unos instantes, al admitir una cantidad finita (o infinita) de puntos excepcionales, cosa que a la larga lo motivaría a trabajar con conjuntos-de-puntos. Véase Ferreirós (2007, pp. 157-8).

[74]Aquí, por ejemplo, claramente se ve la preferencia de Cantor señalada anteriormente por el estilo metodológico de la escuela de Gotinga

[75]Cantor demostraría que si el $n-$ésimo conjunto derivado de un conjunto de puntos excepcionales es vacío (para un natural n) entonces la representación es única (Maddy, [2011, 42]).

entendimiento de las representaciones trigonométricas" (Maddy, [2011, p. 42]).

Por su lado, Dedekind —en la misma época— ya comenzaba a implementar a su manera, y sobre sus áreas de *expertise* (teoría de números y álgebra), la metodología de corte abstracto que le había sido heredada por su maestro Dirichlet y su amigo Riemann.[76] Probablemente, una de las aplicaciones más sobresalientes de esta perspectiva sobre las investigaciones del momento, sería el uso de nociones conjuntistas por parte de Dedekind en su teoría de ideales. En ella, decidía reemplazar el concepto indefinido de "números ideales" —introducido por Kummer (quien simplemente los tomaba por los "factores faltante" en anillos donde la factorización única fallaba)— por el *conjunto* de los números que habría tomado para dividir independientes de su representación.[77] Aquí, de modo semejante que Cantor, Dedekind claramente insistía sobre el tratamiento de conjuntos de números propiamente como objetos, susceptibles de operaciones especiales definidas sobre ellos por su calidad de conjuntos (Maddy, [2011, p. 43]). Asimismo, la actitud no-constructivista que Dedekind compartía con Riemann (y Dirichlet) lo motivaría a buscar los fundamentos del análisis lejos de representaciones geométricas; esto es, entre otras cosas, a buscar una justificación del axioma del supremo[78] con base en la clarificación de la noción de continuidad, y no en consideraciones de tipo geométrico. Esto lo llevaría a establecer su elegante definición de *continuidad*[79] y de los reales[80] en términos de las famosas *cortaduras de Dedekind*, es decir, conjuntos con ciertas características.[81] A diferencia de la definición de $\mathbb{R}$ ofrecida por Cantor (*i. e.*, como la totalidad de sucesiones de Cauchy de racionales),[82] la cual estaba atada a formas de representación particulares (las sucesiones), la definición de Dedekind pretendía ser mucho más *general*, pues cada real era asociado a lo sumo con dos cortaduras (mientras que en la definición cantoriana cada real se correspondía con varias secuencias).[83] Además, la búsqueda por un fundamento riguroso del cálculo lo conduciría hacia el camino de la aritmetización —mencionada en la sección anterior—, cosa que lo motivaría a formular su famosa axiomatización de la

[76]Hacer un recuento exhaustivo de la enorme contribución de este matemático en el desarrollo teórico-conjuntista resulta sencillamente imposible en este trabajo; con todo, una pequeña mención de sus aportaciones más representativas y sus motivaciones serán suficientes para ilustrar el gran impacto que tendría sobre el desarrollo matemático de inicios del siglo XX.

[77]Los ideales no siempre son caracterizables por una forma de representación.

[78]El *axioma del supremo* establece que si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no-vacío y está acotado superiormente, entonces A tiene una mínima cota superior (*i. e.*, supremo).

[79]La continuidad está caracterizada por la noción de *Dedekind-completud* donde toda cortadura de Dedekind de reales es generada por un número real r, o sea, a toda cortadura en $\mathbb{Q}$ le corresponde un elemento en $\mathbb{R}$.

[80]Los reales son el conjunto de todas las cortaduras de Dedekind.

[81]Una *cortadura de Dedekind* es un subconjunto propio no-vacío A de $\mathbb{Q}$ tal que no tiene máximo (*i. e.*, si $x \in A$, entonces existe $y \in A$ tal que $y > x$) y está "cerrado hacia abajo" por la relación de orden (*i. e.*, si $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leq y$ y $y \in A$, entonces $x \in A$).

[82]Una sucesión de reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cualquier real $\varepsilon > 0$, existe $0 < N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geq N$, $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

[83]Véase, Maddy (2011, p. 44).

teoría de números, asociada más frecuentemente con Peano.[84]

Como consecuencia de estas nuevas aproximaciones a la matemática, y por la afinidad de sus enfoques, eventualmente Cantor y Dedekind establecerían una rica correspondencia que los llevaría a atender una serie cuestiones de naturaleza cada vez más conjuntista; lo cual culminaría con la publicación de importantes resultados, y que hoy día son bastante conocidos. Por mencionar uno de estos casos: Cantor en algún punto plantearía la cuestión en torno de la posibilidad de colocar los naturales ($\mathbb{N}$) en correspondencia uno-a-uno con los reales, a lo que Dedekind respondería con una prueba de la equivalencia[85] entre los números algebraicos[86] y $\mathbb{N}$; posteriormente, Cantor presentaría una prueba de la no-numerabilidad de $\mathbb{R}$, en lo que podría considerarse un antecedente del bien conocido teorema que lleva su nombre.[87]

Como sea, durante los años siguientes, Cantor publicaría una serie de resultados (*e. g.*, la equipotencia entre los irracionales y $\mathbb{R}$, así como entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$) que lo guiarían a presentar en 1878 una primera formulación de la famosa *hipótesis del continuo* (HC).[88] Esto condujo su atención hacia el estudio sobre la topología de los reales —relacionada con los mencionados conjuntos-de-puntos— y a demostrar resultados como el teorema de Cantor-Bendixson, la biyectabilidad entre el continuo y los conjuntos perfectos, etcétera.[89]

Finalmente, fue de este modo que

> [s]u trabajo sobre conjuntos-de-puntos llevaron a Cantor, en 1882, a concebir los números transfinitos. Este fue un punto de inflexión en su investigación, pues a partir de este momento estudió la teoría abstracta de conjuntos independientemente de cuestiones más específicas relacionadas con los conjuntos-de-puntos y su topología (hasta mediados de la década de 1880 estas cuestiones habían ocupado un lugar destacado en su agenda). Posteriormente, Cantor se concentró en los números cardinales y ordinarles transfinitos, y en los tipos de orden generales, independientemente de las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$. (Ferreirós, 2020, secc. 2).

Cabe señalar que el análisis que llevó a Cantor a su tratamiento de los números transfinitos dependió en gran medida de una perspectiva peculiar para concebir la noción de

[84]"La de Dedeind no era una axiomatización de la teoría de números en el sentido moderno, sino, más bien, un análisis estructural de los números naturales. Fue Peano quien, en 1889, formuló los axiomas de la teoría de números en el sentido moderno" (Vanaanen, 2015, p. 2).

[85]Esto es, colocar en correspondencia uno-a-uno un conjunto sobre otro, es decir, establecer una *biyección.*

[86]Un *número algebraico* es un número real o complejo que es raíz de un polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tal que $a_i \in \mathbb{Q}$, $0 \neq a_n \in \mathbb{Q}$ y el grado del polinimio es $n > 0$.

[87]El teorema de Cantor y su famosa demostración mediante la construcción del conjunto diagonal aparecería en una publicación de 1892. *Grosso modo*, el teorema sostiene que el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto dado A no puede ponerse en biyección con A, pero que sí existe una función inyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$; lo que mostraría que el conjunto potencia es estrictamente más grande que el conjunto original.

[88]Se trata de una presentación débil de HC, a saber, que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es, o bien contable, o bien no-contable.

[89]Para la formulación y demostración de estos resultados, véanse los teoremas 4.5 y 4.6 en Jech (2006, pp. 40-1).

"tamaño".[90] Esta noción —a diferencia de la defendida por Bolzano, por ejemplo—[91] utilizaría como característica definitoria la noción de biyección; de este modo, dos conjuntos tendrían el mismo tamaño —la misma *cardinalidad*— si y sólo si podían colocarse en correspondencia uno-a-uno el uno *sobre* el otro; se necesitaba la existencia de una función, un mapeo, que estableciera dicha relación.[92] De acuerdo con esta definición de tamaño y dado el teorema de Cantor —que impide biyectar un conjunto con su potencia—, habría una cantidad infinita de infinitos, unos más grandes que otros, una aseveración muy atrevida para la época y que despertó la suspicacia de matemáticos como Kronecker sobre la nueva teoría y las entidades que postulaba. La teoría de Cantor sobre ordinales y cardinales transfinitos se convertiría en "el avance más significativo que [se tiene] sobre el entendimiento del infinito." (Oppy, 2021, secc. 3.1.1). Cabe señalar que la introducción de los ordinales transfinitos cumplía dos funciones: *i)* "establecer una escala bien-definida de cardinalidades transfinitas crecientes";[93] *ii)* "expresar el 'tipo de orden' de cualquier posible conjunto bien-ordenado" (Ferreirós, 2020, secc.2). De la misma manera, los cardinales transfinitos, en la reconstrucción que posteriormente realizaría Zermelo, se convertirían en el estándar de medida del tamaño (la cardinalidad) de los conjuntos infinitos, siempre y cuando se aceptase el axioma de elección o, para ser más precisos su equivalente, el teorema del buen-orden. Si bien esto por sí mismo es una historia de gran relevancia para la teoría de conjuntos, el objetivo aquí es concentrarse más en la noción de "definitud" y su relación con el axioma de separación por lo que se no dirá mucho más sobre este punto. (El lector interesado en esta discusión puede revisar Moore [1982]). Sin embargo, resulta oportuno destacar que una buena presentación de la teoría de conjuntos, que recupere gran parte de los objetivos originales de la teoría, debe poder dar cuenta de las nociones de ordinalidad y cardinalidad transfinitos de manera adecuada.[94]

De cualquier manera, este análisis llevaría eventualmente a Cantor al estudio de los conjuntos ordenados y a enfocarse en un tipo especial de ellos, a saber, los *conjuntos bien-ordenados*.[95] (Los ordinales transfinitos fungían, entre otras cosas, como el "tipo-ordinal"

[90] Véase Oppy (2021, secc. 2,4).

[91] Bolzano era partidario de la noción de tamaño "parte-todo" (Oppy, 2021, secc. 3), que concebía la relación de tamaño con base en la relación de contención. Por ejemplo, la cantidad de cuadrados, de acuerdo con esta perspectiva, sería menor que la de los naturales.

[92] Parte del problema que se analizará adelante es, o bien si se debe exigir que la función sea definible en el lenguaje, o bien si admitir la existencia de una función independientemente de que ésta pueda ser expresada o descrita por una fórmula del lenguaje teórico.

[93] Esto permitía entre otras cosas, formular el problema del continuo de manera más precisa y demostrar el teorema de Cantor-Bendixon.

[94] Con "adecuada" se quiere decir que la teoría genere números y cardinales transfinitos que efectivamente lo sean y no solo objetos que cumplan este papel con base en un modelo particular de la teoría. Otra manera de presentar este requisito de adecuaciones es pedir que las nociones de ordinal y cardinal sean *absolutas* para los modelos de la teoría o para una subcolección privilegiada de ellos. Sobre este punto, se elaborará más adelante con referencia a los teoremas de isomorfismo de Zermelo sobre los modelos conjuntistas.

[95] Un *conjunto bien-ordenado* se trata de un conjunto A junto con un buen-orden definido sobre él, esto es, un orden total R tal que $\forall x \subseteq A(x \neq \emptyset \to \exists y \in x\, \forall z \in x(z \neq y \to yRz))$. Un *orden total* (o *lineal*) es una relación R definida sobre un conjunto A que es transitiva (*i. e.*, $\forall x, y, z \in A((xRy \wedge yRz) \to xRz)$),

de cualquier conjunto bien-ordenado.)[96] Cabe señalar que Cantor creía que HC era cierta —lo cual implicaría que $\mathbb{R}$ puede bien-ordenarse— e incluso se atrevió a conjeturar que la buena-ordenación de todo conjunto era una "ley del pensamiento":

> El concepto de conjunto bien-ordenado se revela él mismo como fundamental para la teoría de variedades. Que siempre sea posible disponer cualquier conjunto bien-definido en la forma de un conjunto bien-ordenado es, me parece, una ley muy básica del pensamiento, rica en consecuencias, y particularmente notable en virtud de su validez general. (Cantor [1883b, p. 550])

¿Y qué hay de Dedekind? Él, por su parte, "formuló algunos principios básicos de la teoría de conjuntos (y mapeos); ofreció axiomas para el sistema de números naturales; probó que la inducción matemática es conclusiva y que las definiciones recursivas son impecables; desarrolló la teoría básica de la aritmética; introdujo los cardinales finitos; y probó que su sistema de axiomas es categórico" (Ferreirós, 2020, secc. 2). Aunque estos logros son bastante impresionantes, resulta conveniente destacar el último. Dedekind (1888) ofrece una versión de su teoría de números, la cual presenta una serie de principios que resultan suficientes para ofrecer una caracterización única salvo isomorfismo de la estructura de los naturales; es decir, sus principios lograban caracterizar una $\omega-$secuencia categóricamente. De tal suerte que su trabajo no sólo se centraba en presentar el tipo de operaciones que se podían aplicar sobre los números, sino en determinar la estructura del conjunto en cuestión. Con esto, Dedekind logró clarificar conceptualmente lo que significa ser un número natural, más allá de los posibles representantes que se podrían tomar de ellos; dicho de otro modo, el matemático consiguió una *clarificación del concepto* de número natural mediante la *determinación categórica* de la estructura. Es importante mencionar que su caracterización no es reducible a la caracterización hecha por Peano, en tanto que la aritmética en la versión de este último estaba expresada en primer orden, razón por la cual este último no podía caracterizar categóricamente los modelos de dicha teoría; esto como consecuencia del teorema de Löwenheim-Skolem. En algún sentido, podría decirse que el tipo de operaciones que tanto la versión de Dedekind como la de Peano presentan son las mismas; la diferencia relevante radica en el esfuerzo hecho por Dedekind para ofrecer una representación categórica de los modelos de la aritmética. Esto no era poco común en la época, muchos matemáticos en busca de una clarificación conceptual de los dominios matemáticos, al preocuparse por la estructura, y no por las representaciones, ofrecían sus teorías en versiones categóricas.[97] Se resalta este punto porque una situación similar se presentará entre la presentación tradicional de la teoría de conjuntos en primer orden y su formulación propuesta por Zermelo (1930a). Aun cuando ambas pueden demostrar los mismos teoremas, la axiomatización de Zermelo logra ofrecer, en algún sentido, una

---

irreflexiva (*i. e.*, $\forall x \in A \neg xRx$) y tricotómica (*i. e.*, $\forall x, y \in A(xRy \lor yRx \lor x = y)$).

[96]Véase la sección 2.1.4 del presente trabajo.

[97]"Los primeros usuarios de la lógica de segundo orden, como Hilbert, Ackermann, Bernays, Huntington y Veblen, prestaron atención sustancial a un concepto que tuvo un impacto duradero sobre nuestro entendimiento de la lógica de segundo orden, a saber, la categoricidad" (Vaananen, 2015, p. 3).

caracterización categórica de los modelos de la teoría de conjuntos. Esto se explorará en el siguiente capítulo y será el punto central del presente análisis.

En fin, a partir de estas líneas —y lo señalado anteriormente—, uno puede coincidir con Maddy (2011) acerca de que Dedekind introdujo los conjuntos con propósitos puramente matemáticos en mente:

> [u]n álgebra no-constructiva y libre de representaciones; una caracterización rigurosa de la continuidad para servir como fundamento del análisis y un estudio más general de estructuras continuas; una caracterización rigurosa de los naturales y una fundamentación resultante de la aritmética. (p. 45)

Es importante tomar en cuenta que la concepción de la lógica a lo largo de dicho siglo—y, de hecho, al menos durante la primera mitad del siguiente—[98] fue "variable", influenciada en gran medida por los avances y debates alrededor de la matemática y las actitudes filosóficas hacia su estudio (*e. g.*, el giro abstracto mencionado más arriba); cosa que fomentaría tanto la ampliación de su alcance hasta abarcar —más allá del cálculo de proposiciones— la teoría de clases (y conjuntos)[99] y la teoría de relaciones a finales de siglo como su posterior reducción a inicios del siguiente (Ferreirós, 2011, pp. 443-4). Si bien un examen cuidadoso acerca del papel que jugó la prematura teoría de conjuntos sobre el desarrollo de la lógica resultaría de la mayor relevancia para una reconstrucción más completa, desgraciadamente por motivos de extensión no será posible profundizar aquí sobre esto. No obstante, el lector interesado puede consultar los trabajos de Ferreirós (2007; 2011) y Kresiel (1967). Con todo, un análisis sobre este aspecto de la historia de los conjuntos permitiría establecer de manera más acabada el contexto en que Dedekind y Cantor (y un joven Hilbert) llevarían a cabo sus investigaciones, así como el contexto dentro del cual vendrían a ocurrir los famosos eventos que caracterizaron los primeros años del s. XX: el surgimiento de las paradojas, los inicios del programa de Hilbert, el teorema del buen-orden y la discusión sobre el muy controversial axioma de elección y, finalmente, la primera axiomatización de la teoría de conjuntos.

2.1.3. El programa temprano de Hilbert y el surgimiento de las paradojas

Hacia finales del siglo XIX, la Universidad de Gotinga ya era una de las más avanzadas en investigaciones matemáticas, esto debido en gran medida a las innovaciones metodológicas que tanto Riemann como Dedekind integraron dentro de los estudios en diferentes áreas de la matemática. Con el cambio de siglo llegarían Felix Klein y David Hilbert, quienes

[98] El papel de las investigaciones y disputas dentro de la comunidad matemática continuaría siendo clave para el progreso de la lógica durante el siglo XX.

[99] El desarrollo de la lógica durante este periodo explica que fuese usual en esos tiempos incluir a los conjuntos como una noción lógica; de ahí que Quine famosamente identificara el logicismo como un reduccionismo a lógica y teoría de conjuntos.

se encargarían de convertirla en el centro líder de la investigación en fundamentación de la matemática (Ebbinghaus [2007, p. 29]). En particular, Hilbert mostraría gran interés en el trabajo de Dedekind y adoptaría no solo sus nociones algebraicas, sino también su terminología conjuntista, y compartiría su predilección por el método axiomático (Ferreirós, [2007, 254]). El interés filosófico de Hilbert por cuestiones relacionadas con los fundamentos de la matemática se haría patente de manera definitiva con la presentación de su famosa lista con los veintitrés problemas.

La historia es bien conocida: en 1900, con motivo del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París, Hilbert arrojó una lista con veintitrés problemas matemáticos sin resolver. El primero de ellos, el problema del continuo junto con el problema del buen orden; el segundo, el problema de la consistencia de los axiomas de los números reales. Este par de problemas —junto con los otros primeros cuatro— "puede ser leída también como un programa para la futura investigación fundacional en Gotinga" (Ebbinghaus, [2007, p. 40]). Cabe mencionar, como señala Ferreirós [2010], que "[e]sos dos problemas, y el axioma de elección empleado por el joven colega de Hilbert, Zermelo, para mostrar que $\mathbb{R}$ (el continuo) puede ser bien-ordenado, son ejemplos por antonomasia de los rasgos *i)-iv)*" (p. 2), listados arriba en la sección 2.1.1.

El propósito de mencionar estos problemas ahora es doble: poner de manifiesto las directrices del programa temprano de Hilbert, y que lo llevarían a reconocer la importancia de las paradojas conjuntistas (el objeto de este apartado); y sentar los precedentes de la discusión en torno de la muy controvertida demostración del teorema del buen-orden (la cual se abordará rápidamente en la siguiente sección). La relevancia de estos acontecimientos es que permitirán hacer notar una serie de motivaciones y objetivos bajo el desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos.

Así pues, con la mira sobre el primer objetivo, diríjase la atención en un principio hacia el segundo de los veintitrés problemas, a saber, el problema que concierne la consistencia de los axiomas de $\mathbb{R}$. Éste, como dice Hilbert, representa una instancia de

> la más importante de las cuestiones que pueden ser preguntadas con respecto de los axiomas: [p]robar que no son contradictorios, esto es, que un número finito de pasos lógicos basados sobre ellos jamás pueden llevar a resultados contradictorios. (Hilbert [1999] en Ebbinghaus [2007, p. 41])

Como sugiere la cita anterior, el método axiomático jugaría un papel muy importante, en tanto que "[l]a investigación de los fundamentos de una disciplina científica comienza al establecerse un sistema axiomático que contiene una 'descripción exacta y completa de las relaciones subsistentes entre ideas elementales' de esa disciplina" (Ebbinghaus, [2007, p. 41]). La relevancia del método axiomático había sido apuntada por Hilbert un año antes en su famosa obra *Fundamentos de la Geometría* (1899), donde presentaba un sistema con veinte axiomas independientes cuyo significado pudiera reconocerse y cuyas consecuencias pudieran valorarse lo más claro posible (p. 4).[100] En esta obra, el matemático alemán a su

[100] Esta actitud estaba íntimamente relacionada con la postura logicista que Hilbert defendía durante los primeros años del s. XX.

vez investigó el sistema de axiomas como un objeto propio —su completud, consistencia y la independencia de sus axiomas— y la cuestión sobre su consistencia la redujo a la consistencia de los axiomas aritméticos. En otras palabras, la prueba de la consistencia de los axiomas hilbertianos de la geometría quedaba relegada a una prueba de consistencia relativa a los axiomas de los reales.[101] No obstante, una prueba directa de la consistencia de estos últimos aún resultaba necesaria y Hilbert insistiría sobre ella al colocarla un año después en su lista de los problemas de París. Las razones detrás de la confianza de este matemático en el método axiomático tal vez no sean muy evidentes en este punto; mas un pequeño análisis histórico servirá para clarificarlo.

Como señala Torres (1999), los orígenes del método axiomático se remontan hasta la antigua Grecia, donde Euclides —bajo la influencia aristotélica de los *Segundos Analíticos*— "fija[ría] las bases para la organización del conocimiento geométrico" (Torres, [1999, p. 11]) en sus famosos *Elementos*. El procedimiento que implementó consistía en una organización del conocimiento (en este caso, geométrico) en un cuerpo lógicamente bien estructurado que establecía clara y distintamente una jerarquía deductiva: iniciaba con una previa identificación de los conceptos intuitivos y proposiciones autoevidentes (postulados y nociones comunes) más fundamentales para, a partir de ellos, inferir deductivamente el resto de las nociones y proposiciones (teoremas) de la teoría de conformidad con un razonamiento apoyado sobre las formas del discurso argumentativo ordinario.[102]

La idea de considerar los axiomas como verdades incuestionables cambiaría durante el siglo XIX —debido en gran medida al surgimiento de las geometrías no-euclidianas—;[103] éstos pasarían a tomar el lugar de hipótesis (meros supuestos y el punto de partida de las demostraciones), enunciadas por medio de términos indefinidos (términos primitivos) o definidos (términos basados en los primitivos), sobre las cuales se deducían el resto de las proposiciones (teoremas). Entre algunas de las implicaciones más sobresalientes de la transición desde la axiomática intuitiva (*i. e.*, el modelo iniciado en la antigua Grecia) a la formal (*i. e.*, la moderna del s. XIX), cabe mencionar el abandono del significado de los conceptos intuitivos, que permitían introducir de contrabando proposiciones intuitivas adicionales a las establecidas por los axiomas en las pruebas, para dar lugar a términos indefinidos —desprovistos de significado— que evitaban la añadidura de información más allá de la incluida en los axiomas;[104] y la aceptación de axiomas únicamente por procedimiento y no en virtud de su verdad o autoevidencia. No obstante, el enfoque moderno trajo consigo la pérdida de la verdad de los axiomas y con ella una serie de posibilidades

[101]La geometría proporciona un modelo aritmético del espacio euclidiano, pues resulta tan solo una interpretación particular del álgebra lineal y la teoría de ecuaciones lineales: los "puntos" de la geometría no son más que "pares ordenados de reales" y las "rectas" no son más que "conjuntos de pares de reales que son soluciones de ecuaciones de primer grado en dos variables". Véase Torres (1999, p. 16, nota 6).

[102]Establecer un orden o una jerarquía entre proposiciones era necesario para evitar incurrir en demostraciones viciosas (*ad infinitum* o circulares).

[103]Recuérdese lo mencionado en la sección 1.1.2.

[104]En algún sentido, podría decirse que con esta modificación se "purificaban" las demostraciones, se desplegaba de manera clara y exacta toda la información con que se disponía.

problemáticas; por ejemplo: no se tenía la garantía que una deducción correcta no llevara a una contradicción ni que toda proposición de la teoría matemática en cuestión fuera demostrable.

Es dentro de este contexto donde precisamente se encontraba Hilbert, la intuición de los conceptos se había conseguido eliminar al omitir sus significados en las pruebas, pero

> ésta persist[ía] en la aceptación espontánea de ciertas evidencias relativas a los procedimientos lógicos de demostración, en las expresiones del lenguaje corriente que figuran en los axiomas, en locuciones como "hay", si... entonces..., no, tres, cada, etc., a las que se les da su sentido usual y de cuyo significado depende la aceptación de los argumentos y demostraciones (Torres [1999, p. 17])

De este modo, el método axiomático moderno hasta los comienzos del s. XX consistía, *grosso modo*, en la postulación de un conjunto de axiomas[105] y en la inferencia de teoremas desde aquéllos mediante el empleo del único aparato deductivo autorizado en aquel entonces, este es, el sugerido por la lógica tradicional aristotélica. El desarrollo de la lógica eventualmente exigiría un desprendimiento de significado similar al que se dio con respecto de los axiomas —requeriría la enunciación explícita de todas las reglas de inferencia— y daría lugar a la consideración de diversas lógicas con sus respectivos aparatos deductivos, cosa que finalmente promovería la formalización del lenguaje; pero esa es otra historia.[106]

Así pues, para Hilbert era indispensable que la solución de cualquier problema matemático se ofreciera dentro del marco del método axiomático, donde la corrección de los resultados se sostiene mediante un razonamiento matemático riguroso, es decir, sobre la base de un número finito de inferencias a partir de un número finito de supuestos o hipótesis (véase Hilbert [1996] en Ebbinghaus [2007]).[107] Su urgencia por el establecimiento de la consistencia de las diferentes teorías matemáticas, por otro lado, se encontraba en consonancia con su actitud logicista característica durante este periodo, la cual —como muestra la siguiente cita— también exhibía ciertos tintes de lo que podría interpretarse como una especie platonismo pleno, o sea, la postura filosófica que sostiene la consistencia como criterio de existencia:[108]

> Si se asignan atributos contradictorios a un concepto, digo que matemáticamente el concepto no existe [...] Pero si se puede probar que los atributos asignados al

[105]Cabe aclarar que si bien la historia oficial (la que se está reconstruyendo) afirma que los axiomas (postulados) carecían por completo de significado, en la mayoría de los casos los axiomas recuperaban información preteórica o intuitiva sobre un conjunto de fenómenos dados o sobre un campo del conocimiento matemático de interés particular.

[106]Por ahora, no resulta necesario considerar el panorama completo de esta evolución. Con todo, el lector interesado puede consultar Torres (1999, pp. 19ss.) o el recorrido histórico hecho por Ferreirós (2001).

[107]La razón para solicitar pruebas finitas era poder tener la garantía de que las matemáticas mismas podrían dar cuenta de ellas, además de que de esta forma cumplía con todos los requisitos que otras tradiciones en matemáticas pedían para las pruebas (por ejemplo, los constructivistas).

[108]Ferreirós (2008) señala que mantener esta postura para Hilbert "era una manera de remover cualquier contenido metafísico de la noción de existencia matemática", pues las paradojas conjuntistas (véase más abajo) le sugerirían que "en lugar de saltar directamente desde conceptos bien-definidos hasta sus conjuntos correspondientes, uno debe probar primero que los conceptos son lógicamente consistentes" (p. 4).

> concepto nunca pueden conducir a una contradicción mediante la aplicación de un número finito de inferencias lógicas, digo que la existencia matemática del concepto [...] queda entonces probada. (Hilbert [1996b] en Ebbinghaus [2007], p. 41)

Uno de los intereses de Hilbert por exhibir la existencia de modelos de teorías estaba vinculado con las pruebas de consistencia de otras teorías; por decir algo, la consistencia de la geometría podría establecerse mediante la exhibición de uno de sus modelos, pero la existencia de este modelo podría depender de que una teoría como el análisis real describiera consistentemente tal modelo. Sin embargo, la cadena debía frenarse en algún punto; por ello, Hilbert intentaría demostrar la consistencia de la matemática desde la matemática misma (y, en última instancia, recurriendo al finitismo).[109] Como sea, lo que se intenta rescatar con este comentario es una primera motivación para axiomatizar la teoría de conjuntos, en tanto que Hilbert estaba convencido que “una prueba de existencia vía una axiomatización consistente también debería ser posible, por ejemplo, para las clases numéricas y cardinales de Cantor [*i. e.*, la teoría cantoriana de ordinales y cardinales]” (Ebbinghaus, [2007, p. 41]).

Ahora bien, el compromiso de Hilbert con el método axiomático al mismo tiempo estaba acompañado por su convicción en la verdad del llamado *axioma de solubilidad*, es decir, por

> la convicción (que todo matemático comparte, pero que hasta ahora nadie ha apoyado con una prueba) de que todo problema matemático [bien] definido necesariamente debe ser susceptible de una solución exacta, ya sea en la forma de una respuesta real a la pregunta formulada, o mediante la prueba de la imposibilidad de su solución y, por tanto, el fracaso necesario de todos los intentos. (Hilbert [1996b] en Ebbinghaus [2007, p. 40])

De acuerdo con Gutiérrez (2015), la actitud positiva de Hilbert frente a dicho axioma puede explicarse a grandes rasgos como una oposición directa hacia los programas agnósticos impulsados por los hermanos du Bois-Reymond durante la segunda mitad del XIX, quienes divulgaban la imposibilidad de la ciencia para decidir sobre cualquier cuestión que se le presentara. En particular, Paul du Bois-Reymond había adaptado el argumento de su hermano mayor, Emil, al contexto de la matemática, con el que defendía la imposibilidad de resolver cualquier problema matemático, en particular, cuál es la naturaleza del continuo matemático; Hilbert reaccionaría ante esta postura y dedicaría prácticamente toda su vida a investigaciones relacionadas, en menor o mayor grado, con la demostración del mencionado axioma. De este modo, finalmente nacería el famoso programa de Hilbert, motivado por la búsqueda de una prueba del axioma de solubilidad y de la consistencia de las teorías matemáticas. Una de las instancias del axioma garantizaría que puede conocerse la naturaleza del continuo matemático, siempre y cuando se pueda mostrar que está

[109] Treinta años más tarde Gödel demostraría su famoso segundo teorema de incompletud de la aritmética, con el cual la intención de demostrar la consistencia de teorías matemáticas recursivamente axiomatizables lo suficientemente poderosas para expresar las nociones básicas de la aritmética quedaba inhabilitada.

relacionado con un problema matemático bien planteado; como se verá a continuación, esto requiere de la axiomatización de la teoría de conjuntos.

Sin embargo, en un giro inesperado de los acontecimientos, dramáticamente surgirían una serie de paradojas que repentinamente pondrían a temblar el edificio entero de la matemática.[110] Originalmente, las paradojas, se creía, solamente afectaban a la teoría de conjuntos como disciplina matemática propia; como se verá enseguida, esta opinión se modificaría radicalmente con la publicación de la *paradoja de Zermelo-Russell*, la cual pondría en jaque al programa temprano de Hilbert.

En 1897, Hilbert establecería correspondencia con Cantor, en la cual discutirían como asunto principal el descubrimiento de ciertos resultados paradójicos en la teoría de conjuntos. El primero de estos resultados es el que ahora se conoce como la *paradoja de Cantor*, la cual imposibilita la existencia del conjunto de todos los alephs. La existencia de "totalidades inconsistentes" —como Cantor los llamaba— como el conjunto de todos los alephs o el conjunto de todos los ordinales (la *paradoja de Burali-Forti*),[111] convencerían a Hilbert de los problemas originados por el *principio de comprehensión irrestricta*[112] dentro de la teoría de conjuntos. "Una axiomatización adecuada, sin embargo, excluiría estas totalidades problemáticas desde un principio" (Ebbinghaus [2007, p. 45]). Como se ha señalado, Hilbert no percibiría la importancia de las paradojas teórico-conjuntistas al inicio, pero pronto una motivación adicional se asomaría con más fuerza.

Como se indicó párrafos atrás, alrededor de esta época los procesos inferenciales aún no se depuraban totalmente y la intuición todavía ejercía una influencia muy marcada sobre ellos. En especial, para autores como Dedekind, Peano, Hilbert, Russell, entre otros, "[e]l principio [de comprehensión irrestricta] era pensado como una ley lógica básica, de modo que toda la teoría de conjuntos era meramente una parte de la lógica elemental" (Ferreirós, 2010, p. 4). El verdadero impacto de las paradojas se dejaría sentir, pues, con la publicación de la paradoja de Zermelo-Russell en *Los principios de la matemática* (1903) de Russell y el reconocimiento por parte de Frege, en la segunda edición de sus *Leyes Básicas de la aritmética* (1903), de la inconsistencia del sistema fundacional ahí presentado. Esto significaba un grave problema para la matemática en general, pues se había hecho patente que los métodos deductivos empleados hasta ese momento por los matemáticos inevitablemente llevaban a la contradicción. Cuando Frege le informó a Hilbert sobre el descubrimiento de la paradoja, éste ya tenía conocimiento de ella desde hacía tres o cuatro

[110] El impacto real del surgimiento de las paradojas en las matemáticas es algo muy debatible, en tanto parece que muchos matemáticos no consideraron esto como un problema grave para su práctica. En cualquier caso, el problema fue del todo relevante para aquellos matemáticos interesados en la fundamentación de la disciplina.

[111] De manera similar a la de Cantor, la paradoja de Burali-Forti sostiene que no existe el conjunto de todos los ordinales, pues de otra forma sería él mismo un ordinal y llegaríamos a una contradicción.

[112] El axioma de comprehensión irrestricta (también conocido como principio de comprehensión irrestricto) establece que para cualquier propiedad bien-definida P existe un objeto A que consiste en el conjunto $A = \{x : P(x)\}$. Este principio era considerado por autores desde Riemann a Hilbert como un principio lógico básico, en unos instantes se verá cómo esta suposición significará un grave problema para el programa de Hilbert.

años;[113] no obstante, fue hasta ese momento que parece haberse percatado genuinamente de su relevancia, tal como lo muestra el siguiente fragmento en su respuesta a Frege:

> Hasta ahora, todos los lógicos y matemáticos han creído que una noción ha surgido tan pronto como puede ser determinado para cualquier objeto si éste cae o no bajo ella. Considero esta suposición como la brecha más esencial en el edificio tradicional de la lógica. Esto me parece a mí insuficiente. Más bien, lo esencial consiste en reconocer que los axiomas que definen la noción son consistentes. (Frege [1976, pp. 78-9] en Ebbinghaus [2007, p. 48])

Por tanto, la inferencia deductiva basada sobre la "lógica [a]ristotélica común y sus métodos estándar de formación de conceptos, utilizados hasta entonces sin vacilación, habían mostrado ser responsables de las nuevas contradicciones" (Ebbinghaus [2007, p. 46]). La razón por la cual esto significaba una seria amenaza al programa de Hilbert era sencillamente porque las pruebas de consistencia de las teorías matemáticas —entre ellos, el análisis real (el segundo de los veintitrés problemas de París)— no podía llevarse a cabo con un aparato deductivo cuya lógica generase contradicciones. "Eventualmente [Hilbert] concluyó que la teoría de conjuntos había mostrado la necesidad de perfeccionar la teoría de la lógica. También era necesario establecer la teoría de conjuntos axiomáticamente, como una teoría *matemática* básica apoyada sobre axiomas matemáticos (no lógicos), y Zermelo emprend[ería] esta tarea" (Ferreirós, [2010, p. 4]). Dicho lo anterior, no resulta muy aventurado proponer el programa inicial de Hilbert como uno de los factores relevantes para la promoción de la axiomatización de la teoría de conjuntos, pues fue tras el "giro filosófico" de dicho programa —detonado por las paradojas— que esta axiomatización sería considerada como un elemento crucial para el establecimiento del concepto de número (Ebbinghaus [2007, p. 81]). De hecho,

> [e]s el mismo Zermelo quien muestra que su trabajo puede ser entendido como el intento de servir a este propósito superior, *i. e.*, fundar el concepto de número consistentemente, basado sobre la teoría axiomática de conjuntos y llevada a cabo de acuerdo con los criterios de Hilbert. (Ebbinghaus [2007, p. 81])

Sobre esta línea, más que la axiomatización estuviese motivada por mor de las paradojas *per se*, aquélla fue inspirada por el daño que éstas infringieron sobre el programa de fundamentación hilbertiano, pues "se había hecho evidente que no sería posible poner el programa en práctica, y especialmente la prueba de la consistencia de los axiomas de los números reales, a no ser que las subdisciplinas de la matemática y la lógica que fueron afectadas por las paradojas hubiesen sido ellas mismas bien-fundadas" (Ebbinghaus [2007, p. 81]).

[113] Zermelo (tres o cuatro) años antes había descubierto dicha paradoja independiente y previamente que Russell, y se la había comunicado a Hilbert. Husserl también daría constancia del descubrimiento de la paradoja a manos de Zermelo en unas notas con fecha de abril de 1902 (Ebbinghaus [2007, p. 49]).

2.1.4. El teorema del buen-orden y el "principio lógico" de elección

Recuérdese nuevamente el primero de los problemas de París: demostrar la hipótesis del continuo de Cantor, es decir, que la cardinalidad del continuo ($\mathbb{R}$) es igual que $\aleph_1$ (el primer cardinal transfinito no-contable). Como se mencionó anteriormente, junto con éste, "Hilbert menciona otro 'muy notable' problema 'que se encuentra en la conexión más cercana con el teorema mencionado y que, tal vez, ofrece la clave de su prueba' " (Ebbinghaus [2007, p. 40]): demostrar que todo conjunto puede ser bien-ordenado, esto es, que sobre un conjunto cualquiera (contable o no-contable) puede definirse un orden total estricto tal que todo subconjunto no-vacío tenga un elemento mínimo bajo dicho orden.[114]

En 1904,[115] se daría un paso importante en relación con este problema: Zermelo conseguiría resolver el "apéndice" de arriba, o sea, ofrecería una demostración del *teorema del buen-orden*. Sin embargo, con ella se desencadenaría uno de los debates más acalorados en toda la historia de las matemáticas. Para entender el carácter de la controversia quizá conviene presentar una reconstrucción actual de dicha prueba.

- **Teorema del buen-orden.** Todo conjunto es bien-ordenable.
  Demostración. Sea A un conjunto cualquiera. Ahora, por el axioma de elección, existe una función de elección, llámese f tal que a cada $x \in \mathcal{P}(A)$ le asigna uno de sus elementos. Ahora, defínase por recursión sobre los ordinales la siguiente secuencia:

  $$a_0 = f(A);$$
  $$a_\alpha = f(A - \{a_\xi : \xi < \alpha\}) \text{ si el conjunto es diferente que } \emptyset;$$
  $$a_\alpha = x \text{ arbitrario si el conjunto es igual que } \emptyset.$$

  Sea θ el mínimo ordinal tal que $A - \{a_\xi : \xi < \theta\} = \emptyset$. Es claro que la secuencia $(a_0, \ldots, a_\theta)$ bien-ordena al conjunto A.[116]

- *Corolario.* El tamaño de todo conjunto infinito puede ser determinado mediante un $\aleph_\alpha$ (con α un ordinal).

El inconveniente o, mejor dicho, la disconformidad se debía a que, como se puede apreciar, Zermelo obtendría el resultado de una forma muy peculiar, en tanto que formularía

[114] Véase la nota 95.

[115] Durante el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Heidelburgo ese año, König ofrecería una prueba falaz que refutaba la conjetura de Cantor. Cantor, Bernstein, Zermelo y Hausdorff detectarían independientemente un error en su demostración. No es claro quien refutó la refutación de König primero. Kowalewski, por ejemplo, sostiene que al siguiente día que König presentó la prueba Zermelo encontró la brecha en la prueba; Grattan-Guinness y Purkert, por su parte, aseguran que fue Hausdorff quien notó el error semanas después del congreso. Véase Ebbinghaus (2007, p. 54).

[116] Ésta no es la versión original de la prueba, pero se optó por ella para facilitar la exposición.

explícitamente como prerrequisito un "principio lógico" irreducible, "pero [que] es aplicado por doquier en las deducciones matemáticas sin vacilación" (Zermelo, [1904, p. 516]); a saber, el *principio de elección*, mejor conocido ahora como el *axioma de elección* (AC). Esto precisamente sería el detonante de una intensa crítica alrededor de la metodología en matemáticas.

El axioma de elección establece que para cualquier familia S de conjuntos no-vacíos existe una función $f : S \longrightarrow \bigcup S$, la llamada *función de elección*, que asigna a todo elemento A de S un representante en A.[117] Como es bien sabido, este axioma es equivalente al teorema del buen-orden (en lenguajes de primer orden),[118] y a un gran número de otros enunciados (*e. g.*, el lema de Zorn, la comparabilidad cardinal, el axioma multiplicativo, etc.).[119]

Como se ha dicho, el axioma sería mal recibido por gran parte de la comunidad matemática de la época (Borel, Peano, König, Bernstein, entre otros), y se convertiría en "el axioma más discutido de las matemáticas, segundo solamente por el axioma de las paralelas de Euclides que fue introducido hace más de dos mil años" (Fraenkel y Bar-Hillel [1958, p. 57] en Ebbinghaus [2007, p. 64]). Principalmente, el descontento estaba dirigido hacia el hecho de que establecía la existencia de funciones de elección sin describir una regla explícita para establecer el mapeo. De hecho, el "principio lógico de elección" —como lo consideraba Zermelo— puede asociarse justamente con la tradición abstracta promovida en Gotinga y que fue mencionada en la sección 2.1.1, pues postulaba tal cual una *función arbitraria* e independiente de sus "formas de representación". (Esto no es de extrañarse, pues Zermelo llegó a la Universidad de Gotinga en 1897 para convertirse en el colaborador más importante de Hilbert, al menos durante la primera década del s. XX.)[120] Así, la controversia era puramente metodológica: "[l]as discusiones estaban más preocupadas por el método de prueba que por su resultado" (Ebbinghaus, 2007, p. 57).

> Como aseguró Moore (1982, pp. 83-4), la situación se caracterizó por dos aspectos: primero, no había una frontera muy precisa entre los métodos constructivos y no-constructivos; y segundo, aquellos que usaban el axioma de elección tácitamente no eran conscientes de su fuerza deductiva. Así que, "como el golpe de un rayo, la demostración de Zermelo repentinamente iluminó el paisaje y provocó que los matemáticos escudriñaran los supuestos sobre los cuales habían estado descansando desprevenidos." (Ebbinghaus [2007, p. 80])

Con todo, en este punto quizá aún no resulta muy clara la necesidad por establecer el axioma en cuestión. Esto probablemente se ponga más de manifiesto en lo que sigue. Para

[117] En su formulación simbólica contemporánea:

$$\forall S(\emptyset \notin S \to \exists f : S \longrightarrow \bigcup S \; \forall A \in S(f(A) \in A))$$

.

[118] En segundo orden, buen-orden es más fuerte que elección.

[119] Para la presentación de estas y otras equivalencias adicionales, véase Enderton (1977, cap. 6) o Jech (2006, cap. 5).

[120] Ésta no se trata de una exageración, el mismo Hilbert reiteraría en varias ocasiones el alta estima en que tenía a Zermelo (véase Ebbinhaus [2007, pp. 29-38]).

facilitar esto, se hará un pequeño salto en el tiempo hasta la publicación de la segunda prueba que ofrecería Zermelo en 1908. Como se mencionará en unos momentos, Zermelo (1908a) presentaría una serie de ejemplos —que van desde el análisis hasta la teoría de conjuntos— para mostrar la indispensabilidad del axioma de elección. Entre ellos, se encontraba el *teorema de la contabilidad de la unión contable de conjuntos contables*, demostrado por Cantor en 1878. El problema que encontraba Zermelo en este tipo de pruebas era que el procedimiento empleado apelaba a una "vaga intuición", a saber, descansaba sobre consideraciones espacio-temporales; más precisamente, la prueba de Cantor estaba "contaminada", porque hacía alusión a la noción de "instantes en el tiempo" al momento de realizar una selección sucesiva de elementos. Más precisamente, "[s]i realmente es la selección 'sucesiva' sobre lo que se está apoyando, entonces parece que uno debe estar asumiendo un subconjunto de instantes de tiempo que está bien-ordenado y que forma un orden base desde el cual las selecciones 'sucesivas' son realizadas" (Hallet, 2016, pp. 85-6).[121]

Con su alternativa, Zermelo hacía visible su compromiso con la metodología abstracta de Gotinga, la cual pretendía desprender las demostraciones de este tipo de elementos. El axioma de elección, *grosso modo*, "ahorraba" esta selección progresiva y simplemente daba por sentada desde un inicio la selección acabada, como si se hubiese realizado de manera "simultánea".[122] En fin, esta es la razón que lo llevaría a demostrar buen-orden con base en elección.

Como sea, regresando a la controversia, sumado a la sospecha por el compromiso (no-constructivo) con la existencia de una función arbitraria de elección, las objeciones también se complementaban con exigencias de la demostración del axioma (*e. g.*, Borel y Peano), con observaciones de corte empirista (influenciadas por Peano y Dedekind) —como el escepticismo de poder realizar y completar procesos infinitos, el énfasis sobre las limitaciones humanas para aplicar reglas una cantidad infinita de veces, etc.—; así como con observaciones antirrealistas que acusaban a Zermelo de emplear una definición impredicativa que derivaba circularidad (Poincaré);[123] incluso las acompañaban inquietudes de carácter más filosófico (Poincaré, por ejemplo, llegó a reclamar que el axioma de elección se trataba de un juicio sintético *a priori*). En fin, las críticas no dejaban de llover por todos lados.

[121]En otras palabras, "lo que realmente se presupone es un subconjunto bien-ordenado de instantes temporales que actúa como la base para una definición recursiva" (Hallet, 2016, p. 86).

[122]Zermelo (1908a) modificaría ciertos factores para incluso evitar la noción de "elección simultánea".

[123]Esto puede verse más fácilmente en términos contemporáneos: la función de elección da lugar a un *conjunto de elección* (*i. e.*, el rango de la función constituido por los representantes de cada miembro de la familia sobre la que se definió la función), llámese C; de acuerdo con la concepción iterativa de los conjuntos, C está formado por miembros de miembros de C, cada uno formado en estratos anteriores, lo que implicaría que existe un conjunto que los contiene a todos. Esto se debe a que cada estrato se construye a partir del axioma de potencia, así si los objetos ya existen en un nivel dado en el siguiente nivel, entonces aparecerán todos en una colección.

No obstante, cuatro años más tarde, con gran sagacidad, claridad, e incluso sarcasmo, Zermelo (1908a) lograría hacer frente a cada una de las objeciones por su propia mano. Su defensa del axioma, como señala Maddy (2011), estaría apoyada tanto sobre su intuitiva evidencia como sobre el éxito de su utilidad. La defensa por ambos flancos puede apreciarse, en el primer caso, con la exhibición puntual de varios ejemplos (siete, para ser exactos) en que tal axioma fue empleado indiscriminada y tácitamente; y en el segundo, con su efectividad, productividad y promesa (p. 47).

Contra la objeción concerniente con la indemostrabilidad del axioma, Zermelo respondería con gran elocuencia que, en efecto, no sería capaz de demostrarlo, pero que "incluso en matemáticas, como es bien sabido, la *indemostrabilidad* de ningún modo es equivalente a *invalidez*, puesto que, después de todo, no todo puede ser probado, pero toda prueba en cambio presupone principios indemostrados". Acto seguido, contraatacaría diciendo: "con el fin de rechazar un principio tan fundamental, uno tendría que haber asegurado que algún caso particular no se sostenía o derivar consecuencias contradictorias desde él; pero ninguno de mis oponentes ha hecho algún intento por hacer esto". Posteriormente, Zermelo citaría a Peano y sus axiomas como ejemplo, y destacaría un elemento metodológico que, de hecho, parece apuntar hacia alguna especie de naturalismo: "[e]videntemente [Peano llegó a sus principios] al analizar los modos de inferencia que durante el curso de la historia llegaron a reconocerse como válidos y al apuntar que esos principios son intuitivamente evidentes y necesarios para la ciencia". Lo mismo, dice, se aplica al axioma de elección. Esto último, en parte, justamente hace referencia al éxito de la utilidad que señala Maddy. Pero por si esto fuera poco, Zermelo arremetería una vez más desde otro flanco: "[q]ue este axioma [...] ha sido usado frecuentemente, y exitosamente, en los más diversos campos de la matemática, por *R. Dedekind*, *G. Cantor*, *F. Bernstein*, *A. Shoenflies*, *J. König*, y otros, es un hecho indiscutible", y este uso tan extendido "sólo puede ser explicado por su autoevidencia, la cual, por supuesto, no debe confundirse con su demostrabilidad. No importa si esta autoevidencia es en cierto grado subjetiva —es ciertamente una fuente necesaria de principios matemáticos, incluso si no se trata de una herramienta de las pruebas matemáticas—" (p. 113). Por último, tras presentar otra analogía —esta vez con el quinto postulado de Euclides— con relación a la independencia del axioma, Zermelo recriminaría a aquéllos que pretenden proscribir de la ciencia "hechos fundamentales o problemas" por el simple hecho de no poder lidiar con "ciertos principios prescritos", y redondearía su argumento concluyendo: "los principios deben ser juzgados desde el punto de vista de la ciencia, y la ciencia no desde el punto de vista de principios establecidos de una vez por todas." (p. 113).

Antes de concluir este apartado, resulta conveniente destacar un par de aspectos que permitirán apreciar todavía más la pertinencia de considerar este episodio de la historia de los conjuntos para los propósitos que aquí se persiguen. Esto a su vez facilitará la transición a la siguiente sección que se ocupará, finalmente, de la primera axiomatización de la teoría de conjuntos.

Si bien los puntos señalados por Maddy (2011, pp. 45-7) son factores importantes a considerar como parte de la metodología de la teoría de conjuntos (para ella particularmente, como criterios de justificación para la adopción de nuevos axiomas), en realidad parece no prestar la debida atención a lo que, personalmente, podría tratarse del aspecto más importante en relación con este episodio histórico y que, sin duda, merece ser rescatado como rasgo metodológico de esta teoría, a saber, el interés por sostener elección y por demostrar el teorema del buen-orden. De hecho, autores como Kanamori (1996, p. 11) y Moore (1982, p. 159) han reconocido y enfatizado el papel esencial que jugaría este interés en la axiomatización de la teoría, y que vendría el mismo año de la publicación de la segunda prueba de dicho teorema.

El interés por sostener elección, en parte, ya se ha explicado más arriba; quizá solamente falte profundizar un poco más sobre el carácter *lógico* que Zermelo le atribuía.[124] En realidad, esto no es muy claro. Como dice Hallet (2016), si es "lógico" en el sentido de una "ley de pensamiento" (sea lo que eso signifique) o de un elemento intrínseco del razonamiento matemático (exhibido por el uso indiscriminado previamente mencionado), es algo muy difícil de determinar (p. 94). Parece ser, pues, que sobre este respecto sólo hay lugar dentro del terreno de la especulación. Así, con mucho riesgo y sin mucho fundamento, uno podría atreverse a conjeturar que el carácter lógico del principio de elección proviene de fenómenos inherentes a la inferencia lógica, muy comúnmente adoptados con confianza en los cálculos deductivos; en concreto, uno podría pensar atribuir el carácter lógico de tal principio, la *intuición* de poder "seleccionar" o "elegir" un elemento de un conjunto no-vacío, al hacerlo corresponder con una aplicación particular de la regla de instanciación existencial (I$\exists$), donde, por ejemplo, de $\exists x Px$ puede inferirse que Pc (donde c es una constante nueva); el axioma de elección, de algún modo, podría considerarse como una generalización de esta selección intuitiva a cualquier conjunto no-vacío; en el caso de su contraparte lógica, la regla I$\exists$ sería la generalización para cualquier propiedad o, incluso más general, para cualquier fórmula del lenguaje $\varphi(x)$, de $\exists x \varphi x$ se sigue φc; donde c es una constante nueva. Por otro lado, uno podría especular que elección es lógico por razones más cercanas al razonamiento matemático en términos conjuntistas. En lo personal, pienso que uno quizá podría estar más confiado en apostar más a esta alternativa y atribuir AC como algo lógicamente intrínseco a los conjuntos. En este sentido, AC

[124] Tal como Zermelo afirma:

> No hemos formulado explícitamente aquí el 'axioma de elección' porque difiere en carácter de los otros axiomas y no puede ser utilizado para delimitar los dominios. No obstante, lo utilizamos como un *principio lógico general* sobre el cual se basa toda nuestra investigación; en particular, es sobre la base de este principio que asumiremos, en lo que sigue, que todo conjunto es capaz de de ser bien-ordenado" (1930a, p. 31).

(El énfasis fue añadido.)

es lógico en relación con la noción de *conjunto bien-definido*,[125] en tanto que los conjuntos —alguien podría defender— sólo pueden concebirse si están bien-definidos, o sea, "que es imposible pensar en una colección como conjunto sin permitir al mismo tiempo que sus elementos puedan ser arreglados de manera discreta de algún modo, o incluso que tal arreglo puede ser deducido automáticamente desde la 'definición' [de conjunto]" (Hallet, [2016, p. 84]). Como el lector habrá notado, la primera parte de la cita anterior hace alusión justamente al teorema del buen-orden; la segunda parte, justamente es a lo que uno podría apelar para defender AC como principio lógico, pues, como se ha visto, si AC es parte de la "definición" de conjunto (muy *à la* Hilbert —*i. e.*, uno de sus axiomas—), entonces uno puede bien-ordenar cualquier conjunto y concebirlo, por supuesto, siempre y cuando se trate de una colección bien-definida.[126]

Ahora bien, el interés por demostrar la buena-ordenación de todo conjunto podría deberse probablemente a lo mencionado en las últimas líneas del párrafo de arriba, pero asociar este interés tan solo con ello honestamente parece muy aventurado. En realidad, el interés por sostener el buen-orden de los conjuntos está más relacionado con el corolario presentado al inicio de esta sección, el cual a su vez está ligado con lo adelantado en la sección 2.1.2. Como se comentó en esa sección, la cardinalidad (el tamaño) de un conjunto en relación con otro puede determinarse si puede establecerse una correspondencia uno-a-uno entre uno y el otro, o entre uno y una parte del otro, independientemente de cómo estén estructurados (*e. g.*, si están bien-ordenados, no importaría su tipo-ordinal). Sin embargo, si un conjunto A está bien-ordenado y puede biyectarse con un único ordinal inicial α, entonces uno puede representar el tamaño de A con α (*i. e.*, $\mathrm{card}(A) = \alpha$). La importancia del buen-orden ahora comienza a ser clara: si uno pudiera bien-ordenar cualquier conjunto, entonces uno podría establecer una "medida" de tamaño para cualquier conjunto *via* ordinales iniciales. Aquí, cabe señalar que Cantor asumiría el "principio del buen-orden" como una "ley del pensamiento", es decir, asumiría sin necesidad de prueba que cualquier conjunto pudiera bien-ordenarse —supuesto del que dudaría más tarde—, y representaría cada ordinal inicial transfinito con los famosos "alephs" ($\aleph$). Como sea, con esta representación ordinal de tamaños, uno podría generar una cadena infinita de cardinales, esto es, una $\aleph-$secuencia, la cual, *grosso modo*, fungiría como una "escala de medida" que representaría la cardinalidad de cualquier conjunto bien-ordenado. Por tanto, la importancia de establecer la buena-ordenación de cualquier conjunto es que eso significaría poder asignarles una cardinalidad representada directamente por algún $\aleph$ en

[125] Que esté "bien-definido" un conjunto será de la mayor importancia en la discusión que vendrá más adelante. De hecho, como se verá, para Zermelo esto será una condición necesaria para ofrecer una buena caracterización de "conjunto". Una clara influencia de Cantor. Véase el cap. 3 del presente trabajo.

[126] Si esta intuición sobre el carácter lógico de elección es correcta, uno tiene razones adicionales para sostener el axioma de buena-fundación (cuya relevancia también hoy suele discutirse), pues los conjuntos mal-fundados no pueden bien-ordenarse por la relación de pertenencia ($\in$).

la $\aleph-$secuencia; lo cual a su vez querría decir que la $\aleph-$secuencia sería *la* escala que permitiría comparar cualquier conjunto en términos de su cardinalidad.[127] El teorema del buen-orden, pues, como afirmaría Zermelo, permite establecer la teoría de los cardinales transfinitos sobre un fundamento firme, "y [que] todo conjunto, para el que la totalidad de sus subconjuntos, y demás, tiene sentido, puede ser considerado como bien-ordenado y su cardinalidad como un 'aleph' " (Zermelo, [1908a, p. 119]).[128] Además, el buen-orden podría proporcionar un fundamento sólido sobre el cual erigir una noción de cardinal infinito que sirviera como un marco apropiado para abordar el problema del continuo (Hallet, [2016, p. 87]).

Por lo tanto, al tomar en cuenta las observaciones de Kanamori (1996) y Moore (1982) respecto del apremio de Zermelo por alojar su prueba dentro de un marco axiomático adecuado, uno bien puede proponer que una de las motivaciones o, mejor dicho, uno de los objetivos principales de la teoría *axiomática* de conjuntos es precisamente formular una teoría del infinito, no únicamente en relación con el orden, sino también con el tamaño; dicho con otros términos, formular una *teoría de ordinales* y *cardinales transfinitos*.

La ordinalidad y la cardinalidad, al ser nociones básicas de la teoría de conjuntos, deben poderse determinar clara y distintamente. Por ello, cuando Skolem quince años más tarde presentaría su paradoja, y con ella la relativización de las nociones cardinales, Zermelo se mostraría tan reacio para admitir la teoría de conjuntos en su versión de primer orden, "pues el cardinal es por naturaleza una propiedad de los conjuntos" (Zermelo, 1909b).[129] Que la $\aleph-$secuencia sea *la* escala de medida de tamaño, que ésta puede establecerse por el teorema del buen-orden y que, además, éste sea lo suficientemente relevante para motivar la axiomatización de la teoría —o sea, un marco riguroso y preciso para realizar la demostración—, sugiere que la teoría de conjuntos debe ser tal que sea capaz de preservar de manera *absoluta*[130] las nociones conjuntistas básicas, a saber, no únicamente las nociones ordinales, sino también las cardinales.

Como se ha reiterado ya, una de las motivaciones para axiomatizar la teoría de con-

[127]Esto, de hecho, se conoce como el *teorema de la comparabilidad cardinal*, el cual Hartogs demostraría ser equivalente al teorema del buen-orden en 1915. El teorema de la comparabilidad cardinal establece que para cualesquiera conjuntos A y B, o bien $A \preceq B$, o bien $B \preceq A$. Adicionalmente, si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A = B$; este es el conocido *teorema de Cantor-Bernstein*.

[128]Véase Hallet (2016, pp. 82-3, 88).

[129]Obviamente, el teorema del buen-orden puede derivarse en la axiomatización de orden uno, lo que se está diciendo aquí es que esa axiomatización no es la apropiada porque provoca la relativización de *la* escala de los alephs. En algún sentido, pues, no sería "*la* escala", sino "*una de muchas* escalas" correspondientes con el modelo bajo consideración. En estos modelos de primer orden los alephs *realmente no* son los alephs, sino una especie de impostores (o simuladores) conjuntistas que se hacen pasar por dichos cardinales transfinitos; es decir, que son conjuntos que satisfacen las fórmulas desde el punto de vista del modelo, pero que visto desde fuera del modelo no son cardinales.

[130]Más adelante se propondrá que los modelos pretendidos de la teoría no sólo deben ser tales que los conjuntos sean conjuntos y la pertenencia se comporte como la pertenencia, sino que también deben preservar las nociones teórico-conjuntistas de interés, estas son, las nociones ordinales y cardinales.

juntos era ofrecer un marco apropiado para fortalecer la posición de AC y poder efectuar la demostración del teorema del buen-orden. En la siguiente sección, por fin se dará tratamiento al tan esperado episodio alrededor de la primera axiomatización de la teoría de los conjuntos.

2.2. La primera axiomatización de la teoría de conjuntos (1908) y el problema de la "definitud"

La historia popular cuenta que Hilbert le encomendó a Zermelo la misión de precisar la teoría de conjuntos mediante una axiomatización con el objetivo principal de frenar las paradojas, es decir, formular un fundamento consistente para la teoría de conjuntos basado en el método axiomático; sin embargo, como se ha insistido en las secciones anteriores, sostener que ésta era la única motivación no parece del todo correcto, e incluso podría ser pernicioso para la comprensión del trabajo de Zermelo. A la evasión de las paradojas tendría que agregarse la contribución al programa temprano de Hilbert, en especial, fundamentar el concepto de número consistentemente, y el establecimiento de un marco adecuado para llevar a cabo la demostración del teorema del buen-orden. El entrelazamiento de estas tres motivaciones, podría decirse, es lo que daría origen a la singular axiomatización que propondría inicialmente Zermelo en 1908.

Poco después de su llegada a Gotinga en 1897, bajo la influencia de Hilbert, Zermelo movería sus intereses[131] hacia los estudios sobre fundamentación, teoría de conjuntos y lógica. Así, desde un primer momento, los criterios programáticos de Hilbert ejercerían una enorme influencia sobre el trabajo de Zermelo sobre estas materias (al menos durante los primeros quince años del s. XX); tal influencia tampoco sería diferente respecto de su demostración sobre el buen-orden.

Como ya se ha indicado anteriormente, el programa de Hilbert demandaba la presentación de las teorías matemáticas con base en el método axiomático. Este método consiste, de acuerdo con Hallet (2016, p. 91), en cuatro puntos:

1. la postulación de la existencia de un dominio, de un "sistema de cosas" (o "sistema de cosas" en el caso de teorías multi-variadas);
2. la presentación de una lista finita de axiomas;
3. el requisito de demostraciones finitas, las cuales (en principio) inician con los axiomas (y solamente con los axiomas) y proceden desde estos hacia una conclusión mediante un "número finito de inferencias" (*i. e.*, pasos inferenciales aceptables);
4. la provisión de una demostración de consistencia para estos axiomas, la cual mostrará que no es derivable una contradicción mediante tal demostración dentro del sistema dado.

[131] Tras concluir su doctorado sobre el cálculo de variaciones y servir como asistente de Max Planck durante casi tres años en Berlín, Zermelo se matriculó en la universidad de Gotinga en 1987 para su *Habilitation* en matemática aplicada y física teórica.

Como puede apreciarse este método demanda la postulación de un dominio, un "sistema de cosas", donde todo lo que se sabe sobre sus elementos constitutivos está dado por los axiomas y sus consecuencias lógicas a partir de una serie finita de pasos, y nada más;[132] además, requiere la demostración de la consistencia de los axiomas para establecer la existencia matemática del dominio en cuestión. De esta manera, cuando un cierto dominio es axiomatizado, una prueba posterior acerca de la consistencia de la teoría permite confirmar matemáticamente la existencia del dominio, una existencia libre de enigmas ontológicos o metafísicos. En otras palabras, "los axiomas 'crean' los dominios, y las pruebas de consistencia justifican su existencia" (Hallet, [2016, p. 92]). La demostración del teorema del buen-orden exhibiría muchos de estos rasgos hilbertianos: primero, Zermelo comienza por establecer clara y explícitamente el contexto de la prueba, o sea, asume un conjunto "bien-definido" junto con su potencia —el cual será el dominio de la prueba—; segundo, a diferencia de Cantor, no opera con un conjunto bien-ordenado preexistente —como el de los instantes en el tiempo— que se proyecta sobre dicho conjunto bien-definido, sino que Zermelo forma el conjunto bien-ordenado sobre el que se apoya mediante una función de elección; y tercero, Zermelo ofrece una prueba *à la* Hilbert en un número finito de pasos lógicos; de nuevo, cosa distinta al supuesto cantoriano del buen-orden como "ley de pensamiento". Más todavía, una de las defensas del AC que Zermelo ofrecería —más precisamente, a Poincaré— está en íntima correspondencia con la perspectiva hilbertiana de la existencia matemática: contra la crítica impredicativa de elección, una de las respuestas que ofrecería Zermelo sería justamente que los objetos no son creados por las "determinaciones" en relación con el dominio definido por el sistema axiomático, sino que simplemente son destacados o señalados de otros en el dominio que ha sido axiomatizado. Dicho de otro modo, y como se haría patente con la axiomatización —que publicaría dos semanas después del artículo con la segunda prueba del buen-orden—, Zermelo postula un dominio de objetos (en este caso "conjuntos") cuya existencia depende de aquello que los axiomas *en su totalidad* establecen; mostrar que algo particular existe es simplemente mostrar por medio de inferencias finitas que eso está dentro de tal dominio. Sin AC ciertas demostraciones existenciales sobre ciertos conjuntos sencillamente no podrían ofrecerse, pues sin las funciones de elección, en este caso, no podrían señalarse objetos en tal dominio; es decir, exhibir su existencia en relación con el dominio en cuestión. Si bien las definiciones de los dominios, sus caracterizaciones axiomáticas, son en cierto modo arbitrarias, éstas deben librarse de elementos metafísicos y su existencia debe estar apoyada en su consistencia.

Por otro lado, el método axiomático, como también se señaló, está diseñado de tal manera que también permite revelar los supuestos que descansan bajo teoremas comúnmente aceptados. Esto es evidente en el caso de AC y el teorema del buen-orden, en tanto que el

[132]Como se mencionó, dentro del método axiomático moderno, los "rasgos intuitivos" sobre las cosas que constituyen el dominio ya no pueden ser apelados en las demostraciones; por decir algo, si el "sistema de cosas" está conformado por puntos, líneas y planos, con todo, no puede asumirse contenido "geométrico intuitivo" acerca de tales objetos para apoyar las demostraciones.

primero se manifiesta como condición necesaria y suficiente para el segundo. Aun cuando esta demostración no está dada axiomáticamente, está en consonancia con la aproximación hilbertiana; pues la prueba revela como una conclusión se sigue mediante una serie finita de pasos desde supuestos claramente identificados, como el principio de elección en este caso. “Lo que la prueba de Zermelo además muestra es que el principio de elección es fundamental si ha de existir una teoría cantoriana del número cardinal infinito seria” (Hallet, [2016, 93]).

Finalmente, Zermelo presentaría su axiomatización tomando bajo consideración tanto los objetivos del programa de fundamentación de Hilbert respecto del concepto de número y su consistencia, como las paradojas conjuntistas, en particular la paradoja de Zermelo-Russell y la paradoja de Richard. Lo anterior es puesto claramente de manifiesto por las palabras con que Zermelo (1908b) abre su artículo:

> La teoría de conjuntos es esa rama de la matemática cuya tarea consiste en investigar matemáticamente las nociones fundamentales de “número”, “orden” y “‘función”, al tomarlas en su forma prístina y simple, y así desarrollar los fundamentos lógicos de toda la aritmética y el análisis. Por lo tanto, ésta [la teoría de conjuntos] constituye un componente indispensable de la ciencia de la matemática. En el presente, no obstante, la mera existencia de esta disciplina parece estar amenazada por ciertas contradicciones, o “antinomias”, que pueden ser derivadas de sus principios —principios que gobiernan nuestro pensamiento necesariamente, al parecer— y sobre las cuales ninguna solución completamente satisfactoria ha sido encontrada aún. En particular, en miras de la “antinomia de Russell” del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, hoy día ya no parece admisible asignar como su “extensión” un “conjunto”, o “clase”, a una noción arbitraria y lógicamente definible. La definición original de Cantor de un “conjunto” como “una colección, reunida en un todo, de ciertos objetos bien-distinguidos de nuestra percepción y pensamiento” requiere, por lo tanto, ciertamente de cierta restricción; sin embargo, no se le ha reemplazado exitosamente por una que sea tan simple y que no dé lugar a tales reservas. Bajo estas circunstancias, en este punto no nos queda más que proceder en la dirección opuesta y, al empezar desde la ‘teoría de conjuntos” tal como ha sido dada históricamente, localizar los principios requeridos para establecer los fundamentos de esta disciplina matemática. Para resolver este problema, por un lado, debemos restringir estos principios lo suficiente para excluir todas las contradicciones y, por el otro, tomarlos como suficientemente amplios para retener todo lo que es valioso dentro de esta teoría. (p. 261)

Un pequeño comentario sobre esta célebre introducción resulta oportuno aquí, pues en ella se sugieren una serie de aspectos metodológicos a considerar como hilos conductores para el desarrollo de la teoría de conjuntos. La importancia de estas observaciones radica en que reflejan de manera clara las motivaciones y objetivos que Zermelo tenía en mente al momento de ofrecer su axiomatización, así como las inquietudes que aquejaban a la comunidad matemática durante esa época.

En primer lugar, se puede apreciar el papel atribuido a la teoría de conjuntos como disciplina matemática fundacional, haciendo hincapié sobre un reduccionismo de conceptos matemáticos a conceptos teórico-conjuntistas: tomar los conceptos de número, orden y función en su “forma prístina y simple”. Esto justamente está en íntima consonancia con lo que ya se ha señalado en secciones anteriores en relación con el involucramiento en que se encuentra el trabajo de Zermelo con el programa de Hilbert. Como se ha insistido, Zermelo espera fundamentar con su teoría las nociones aritméticas de manera consistente y con ello el resto de la matemática (recuérdese que la consistencia de la aritmética permite extender pruebas de consistencia relativa de otras teorías matemáticas —como al análisis y la geometría—). La relevancia de esta empresa esencial, y su intención por ofrecer una prueba de consistencia en algún momento, se pone de manifiesto cuando líneas más abajo confiesa: “Aún no he sido capaz de demostrar rigurosamente que mis axiomas son ’consistentes’, aunque esto es ciertamente esencial; en su lugar, he tenido que limitarme a señalar, ahora y entonces, que las “antinomias” descubiertas hasta ahora se desvanecen todas si se adoptan como base los pricnipios aquí propuestos” (Zermelo, [1908b, p. 262]). Si bien es incapaz en ese momento de brindar una prueba de la consistencia de su teoría, Zermelo hace lo segundo mejor: mostrar cómo al menos su axiomatización puede sortear las paradojas que obstaculizaban hasta ese momento el desarrollo de la teoría de conjuntos.

De esta forma, como también lo hace notar, Zermelo pone de manifiesto a las paradojas como motor de la axiomatización, pero a diferencia de la historia popular, no se colocan como un problema por sí mismas, sino directamente en función de sus repercusiones sobre el programa de Hilbert. Así pues, el verdadero impacto de las paradojas se medía en relación con la socavación que significaban para el terreno teórico-conjuntista, y sobre el cual se podían apoyar el resto de las disciplinas matemáticas. Para detener los resultados paradójicos, Zermelo recurriría hacia una metodología que ciertamente contiene matices de carácter naturalista: en lugar de proceder a la manera del filósofo primero y fijar principios en un primer momento desde los cuales desenvolver las investigaciones, Zermelo reconoce no tener otra alternativa más que “proceder en la dirección opuesta” y, de manera reminiscente a la filosofía segunda, propone “empezar desde la ’teoría de conjuntos’ tal como fue dada históricamente” para así poder “localizar los principios requeridos para establecer los fundamentos de esta disciplina matemática”. Como dice en otro lado: “[p]ara estos desarrollos [uno debe] apoyarse en los conceptos básicos y los métodos generales de la teoría de conjuntos como fueron creados por *G. Cantor* y *R. Dedekind*” (1909b, 11).[133] Cabe confesar en este punto que estos fragmentos precisamente fueron una de las motivaciones principales que me sugirieron perseguir este trabajo desde un marco metodológico naturalista, en tanto que explícitamente el creador de la teoría axiomática de los conjuntos expresa el rol fundamental que la misma práctica e historia teórico-conjuntista jugó como árbitro último para la adquisición de los principios que regularían el desenvolvimiento de las investigaciones en esta área de la matemática. Sin embargo, “para resolver el problema, por un lado, debemos restringir suficientemente los

[133]Nótese como Zermelo reconoce a Dedekind como cocreador de la teoría de conjuntos, a diferencia de la popular que establece a Cantor como *el* creador de la teoría.

principios para excluir todas las contradicciones, y por el otro, tomarlos suficientemente amplios para retener todo lo que es valioso dentro esta teoría". Con esto último, Zermelo refiere un par de criterios adicionales: la restricción del principio de comprehensión irrestricto para evitar caer en contradicción y, al mismo tiempo, la retención de "todo lo que es valioso dentro esta teoría", es decir, "el sistema debe ser tan fuerte para producir 'todos los teoremas principales de la teoría de conjuntos, incluyendo aquéllos sobre equipolencia y buen-orden"(Ebbinghaus, [2007, p. 93]). En otras palabras, la teoría de conjuntos debe ser consistente y recuperar los resultados principales de la teoría.[134]

A partir de lo anterior es que Zermelo (1908b) finalmente intenta "mostrar cómo toda la teoría creada por *G. Cantor* y *R. Dedekind* puede ser reducida a unas pocas definiciones y siete 'principios', o 'axiomas', que parecen ser mutuamente independientes." Una vez más siguiendo a Hilbert, Zermelo comienza por definir un dominio de objetos inespecificados $\mathfrak{B}$ junto con una relación binaria ($\in$) definida sobre $\mathfrak{B}$, la *relación de pertenencia* (o *membresía*). Algunos de los objetos en $\mathfrak{B}$ son conjuntos —el *conjunto vacío* ($\emptyset$) o un objeto con al menos un elemento—, el resto son designados como *urelementos* —objetos sin elementos distintos de $\emptyset$—. Tras presentar algunas definiciones adicionales —la *relación de subconjunto* ($\subseteq$), la noción de conjuntos disjuntos y la noción de *definitud*—, Zermelo despliega sus siete axiomas: *extensionalidad*, *conjuntos elementales*,[135] *separación*, *conjunto potencia*, *unión*, *elección* e *infinito*. (Véase el Anexo I.)

Como señala Ebbinghaus, los axiomas tienen una prehistoria (2007, p. 86), no fueron meras ocurrencias de último momento como a veces la historia popular parece insinuar; en realidad, fue a partir de un muy concienzudo análisis de los resultados obtenidos por Cantor y Dedekind que Zermelo optó finalmente por ellos.[136] En particular, procuró evitar conceptos cuestionables y se limitó únicamente a ocupar principios y operaciones que hasta ese momento no habían sido fuente de contradicción.[137]

Sin lugar a dudas, el axioma más importante y —como se verá en unos momentos— el más problemático dentro del sistema ofrecido por Zermelo (1908b) sería el *axioma de separación*:

[134]Hallet (2016) dice: "Hay razones para llamar al sistema de Zermelo la primera axiomatización real de la teoría de conjuntos. Es claro, sobre todo, que la intención de Zermelo era revelar la naturaleza fundamental de la teoría de conjuntos y preservar sus logros y, al mismo tiempo, proporcionar un reemplazo general para el [principio de comprehensión]." Esto también puede servirnos como guía de evaluación desde la práctica matemática para propuestas teóricas nuevas, principalmente aquellas motivadas por razones filosóficas. En este sentido, teorías de conjuntos que no tengan resultados relevantes de la teoría clásica deberían ser rechazados o por lo menos cuestionados. Por supuesto, esto está en debate. Un posible ejemplo sería la teoría "*New Foundations*" propuesta por Quine, pues pierde resultados relevantes como el teorema de la recursión.

[135]Zermelo dentro de este axioma colapsa los axiomas que actualmente se conocen como el *axioma de conjunto vacío* y *conjunto par*.

[136]Para complementar las motivaciones que tuvo Zermelo para adoptar tales axiomas, quizá cabe dirigirse al famoso artículo de Maddy (1988a), donde, entre otras cosas, investiga los criterios de fondo a la adopción de los axiomas de la teoría.

[137]Los primeros bosquejos de una axiomatización de la teoría se encuentran en cuadernos para sus cursos de teoría de conjuntos (1900/1) y se estima que fueron añadidos entre 1904 y 1906. Véase Ebbinghaus (2007, p. 86).

> **Axioma III.** Siempre que la función proposicional $\mathfrak{E}(x)$ es definida para todos los elementos de un conjunto M, M posee un subconjunto $M_{\mathfrak{E}}$ que contiene precisamente como elementos a aquellos elementos x de M para los cuales $\mathfrak{E}(x)$ es verdadera.
>
> (Axioma de separación.) (p. 263)

La discusión que se desencadenaría alrededor de este axioma, me parece que no ha sido muy atendida en el análisis filosófico de la teoría (un caso notable es Maddy, quien no parece profundizar sobre esto en momento alguno). En esta discusión participarían figuras tan relevantes como Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel, Hermann Weyl, John von Neumann y Thoralf Skolem, entre otros. Probablemente, se trata de uno de los momentos más sobresalientes en la historia de los conjuntos, cuya discusión tendría gran repercusión sobre el desarrollo posterior de la teoría; es por ello que resulta tan extraño que no haya sido considerado por los filósofos más conocidos de la teoría de conjuntos.[138] Resulta casi irónico que justamente el axioma que sería dispuesto como solución y que lograría rescatar la teoría de conjuntos de los resultados paradójicos fuera "el punto más débil o, mejor dicho, el único punto débil [de la axiomatización]" (Fraenkel, [1922b, p. 31]). El problema al que se enfrentaba tal axioma tenía que ver con la imprecisión de su enunciación o, más precisamente, con la vaguedad de una de las nociones clave dentro de ella, a saber, la noción de "*definitud*"[139] de una función proposicional sobre los elementos de un conjunto.

Como se ha adelantado, con la finalidad de frenar las paradojas los principios de la teoría de conjuntos debían limitarse "suficientemente para excluir las paradojas"; la restricción fundamental estaba incorporada dentro del axioma de separación, donde

> En lugar de permitir —en términos cantorianos— "la colección de objetos bien-distinguidos de nuestra percepción y pensamiento" dentro de un todo sin limitación alguna, limita comprehensiones *1)* a elementos de un conjunto dado con el objeto de ocuparse, entre otras, de la paradoja de Zermelo-Russell; y *2)* interpreta la noción de buena-distinción en un sentido angosto con el objeto de ocuparse de la paradoja de Richard. (Ebbinghaus, [2007, p. 90])

En efecto, a Zermelo no le preocupaban únicamente las paradojas "ultrafinitarias" como la paradoja de Cantor, Burali-Forti o Zermelo-Russell, sino también paradojas como la de Richard. El axioma de separación, como se hace notar en su enunciación de más arriba, restringe la comprehensión sin límites a comprehensión dentro de conjuntos; de

[138] Con esto no se quiere afirmar que no exista reflexión alguna sobre el tema, mas que muchas de las figuras más reconocidas en filosofía de la teoría de conjuntos no lo consideran. La mayoría de las referencias que personalmente he encontrado son de naturaleza histórica (*e. g.*, Ebbinghaus, Moore, Hallet). Esto, en principio, podría no ser problemático para algunas tradiciones filosóficas, pero me parece que lo es para filósofos que pretenden realizar sus reflexiones desde la práctica matemática.

[139] En este trabajo he optado por traducir el término en inglés "*definiteness*" por "definitud", esto para reservar el término "definibilidad" a la noción formal más contemporánea asociada con la *definibilidad de $m-$relaciones en lenguajes de orden n*: una relación $R^m \subseteq M^m$ es definible en una $\mathcal{L}-$estructura $\mathfrak{M}$ (donde $\mathcal{L}$ es un lenguaje de orden n, y M es el dominio de $\mathfrak{M}$) con parámetros en $X \subseteq M$ si y sólo si existe una fórmula $\varphi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ y $b_1, \ldots, b_n \in X$ tal que para toda $a_1, \ldots, a_m \in M$, $(a_1, \ldots, a_m) \in R^m$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{M}} \varphi[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots b_n]$.

este modo, en lugar de poder formar el conjunto de Zermelo-Russell, $\mathrm{Z}R = \{x : x \notin x\}$, por comprehensión irrestricta, uno a lo más puede formar el conjunto $ZR_S = \{x \in S : x \notin x\}$, el cual a diferencia de generar una contradicción como ZR, origina el siguiente teorema:

- **Teorema 10.**[140] No existe el conjunto universal.
  Demostración. Sea S un conjunto. Por separación existe ZR_S tal que para cualquier x sucede que $x \in ZR_S$ si y sólo si $x \in S$ y $x \notin x$. De ahí que, si $ZR_S \in ZR_S$, entonces $ZR_S \in S$ y $ZR_S \notin ZR_S$, y si $ZR_S \in S$ y $ZR_S \notin ZR_S$, entonces $ZR_S \in ZR_S$. Si $ZR_S \in ZR_S$, entonces se sigue una contradicción. Por tanto, $ZR_S \notin ZR_S$. Pero entonces, por *modus tollendo tollens*, o bien $ZR_S \notin S$, o bien $ZR_S \in ZR_S$. Por lo tanto, por silogismo disyuntivo, para cualquier S, existe $ZR_S \notin S$.

Como corolario Zermelo señala: "[s]e sigue del teorema que no todos los objetos x del dominio $\mathfrak{B}$ pueden ser elementos del mismo conjunto; esto es, el dominio $\mathfrak{B}$ no es él mismo un conjunto, y esto, hasta donde ahora nos concierne, elimina la "antinomia de Russell". (Zermelo, 1908b, p. 265).

No obstante, a Zermelo también le inquietaba paradojas de otra naturaleza como la *paradoja de Berry*[141] y particularmente la paradoja de Richard. Considérese esta última. La paradoja de Richard —en una de sus versiones— surge al enumerar las propiedades unarias definidas sobre $\mathbb{N}$ y al definir la propiedad "x es *richardiano*" como aquella propiedad satisfecha por los elementos y sólo los elementos de $\mathbb{N}$ que *no* poseen la propiedad que numeran en la lista; ahora supóngase que n numera la propiedad "ser richardiano", ¿es n richardiano? Si lo es, entonces no es richardiano, pues numera la propiedad que posee; y si no lo es, entonces es richardiano, pues no posee la propiedad que numera.

Por tanto, con el objeto de sortear esta paradoja Zermelo recurriría a la restricción de las funciones proposicionales (*i. e.*, enunciados sin saturar)[142] admisibles dentro del axioma de separación, y consideraría únicamente aquellas funciones proposicionales "definida", es decir, aquellas afirmaciones en que "las relaciones fundamentales del dominio [la pertenencia y la identidad], mediante los axiomas y las leyes universalmente válidas de la lógica,

[140] La numeración corresponde con la numeración en el artículo de Zermelo.

[141] La *paradoja de Berry* surge de considerar, por ejemplo, el enunciado "el menor entero positivo no definible en menos de sesenta caracteres". Hay una cantidad finita de enteros positivos definibles en menos de sesenta caracteres pues el alfabeto español tiene veintisiete letras —sencillamente, calcúlese las combinaciones de estos veintisiete caracteres en una secuencia de sesenta lugares (27^{60}) y nótese que de este número finito solamente un subconjunto propio tendrá significado—, no obstante, hay una cantidad infinita de naturales. Por tanto, hay una cantidad infinita de números no-definibles en menos de sesenta caracteres. Ahora bien, al considerar un buen-orden sobre este conjunto infinito, y tomando el menor de ellos, evidentemente se llega a una contradicción con el enunciado original si consideramos que éste define correctamente al número antes aludido. Pero justo lo que está en juego en una clarificación de la noción de definitud es que tal cosa suceda.

[142] Cabe mencionar que en este tiempo la distinción entre sintaxis y semántica no era muy clara, Zermelo no diferenciaría entre propiedades y sus descripciones, véase Ebbinghaus (2007, p. 193) y la nota 164. Asimismo, la formalización de los lenguajes aún no era adoptada por todos los matemáticos, entre ellos Zermelo.

determinan sin arbitrariedad si se sostiene o no [para cualquier elemento del dominio]" (Zermelo, [1908b, p. 263]). Como puede verse, el problema con la caracterización de esta noción es que caía en circularidad, puesto que "[la] definitud refiere a los axiomas, pero al mismo tiempo es una parte esencial de su formulación" (Ebbinghaus, [2007, p. 92]). Esta definición desataría la polémica y levantaría las objeciones de Fraenkel, Skolem y Weyl. Cada uno de ellos ofrecería una alternativa similar para formular más satisfactoriamente dicha noción. El primero, ofrecería una definición recursiva de función proposicional a partir de unas más básicas;[143] los otros dos, identificarían "definitud" con "definibilidad en primer-orden".[144] Finalmente, sería la propuesta en la terminología de Skolem la que sería adoptada:[145] una función proposicional $\mathfrak{E}$ es definible en un lenguaje de primer orden si y sólo si es construida a partir de las expresiones básicas gramaticalmente correctas $\ulcorner x \in y \urcorner$ y $\ulcorner x = y \urcorner$, y el uso de cero o más conectivas lógicas y/o cuantificadores de individuo.

Sin embargo, lejos de resolver el problema pacíficamente, la precisión skolemiana del concepto de definitud desencadenaría una batalla que culminaría con la segunda axiomatización zermeliana de la teoría de conjuntos (expresada en segundo orden) y con la derrota de Zermelo, pues la axiomatización estándar hoy día está expresada en un lenguaje de primer orden tal como propuso Skolem. Con todo, un análisis de esta disputa permite apreciar que, aun si Skolem ganase desde una perspectiva histórica y su contribución fuese ciertamente fundamental para el desarrollo de la teoría, la propuesta de Zermelo todavía puede ser útil para la reflexión filosófica sobre la teoría de conjuntos, en especial, en asuntos relacionados con la fundamentación de la teoría y la determinación de los modelos de la misma.

En este último sentido, justamente algo que se quiere destacar en este trabajo es que los combatientes en esta disputa no luchaban por principios mutuamente excluyentes, sus posturas pueden ser compatibles y ofrecernos una perspectiva más detallada y acabada del universo conjuntista. La propuesta que se ofrecerá más adelante pretende recuperar los propósitos tanto del matemático noruego como los del alemán, y articularlos de un modo que permitan precisar de mejor manera el trabajo de esta disciplina matemática y su objeto de estudio. La perspectiva de Skolem facilitará dar cuenta de los rasgos epistemológicos de la teoría; la de Zermelo, de los rasgos ontológicos (los modelos). En el siguiente apartado se abordará el último episodio histórico a considerar en este trabajo para posteriormente proponer algunas reflexiones filosóficas.

[143] Zermelo acusaría esta definición por ser "constructiva" o "genética", pues descansaba sobre la noción de número finito y la aplicación finita de pasos inductivos. La teoría de conjuntos, de acuerdo con Zermelo no podía descansar sobre la noción de número, sino que ésta debía establecerse a partir de la teoría de conjuntos.

[144] Véase la nota 139.

[145] Para una exposición más detallada, véase Ebbinhaus (2007, pp. 189-94).

2.3. Zermelo *vs.* Skolem y la segunda axiomatización de la teoría de conjuntos (1930)

Si bien Zermelo (1908b) con su axiomatización había logrado sortear las paradojas que tradicionalmente atormentaban la teoría de conjuntos, el éxito de sus esfuerzos se había visto cuestionado y diezmado por las observaciones que arrojó el examen minucioso de autores como Fraenkel, Weyl y Skolem. Como se indicó en el apartado anterior, irónicamente el inconveniente que estos matemáticos apuntaban se encontraba precisamente en la enunciación del axioma más importante dentro del sistema de Zermelo y que admirablemente había conseguido detener los resultados paradójicos: el axioma de separación. El problema dentro de tal axioma se encontraba en su formulación original, más específicamente, en la vaguedad de uno de los términos centrales que aparecían en ella, la "definitud". Como también se dijo, Skolem propondría precisar el término problemático mediante su identificación con la noción de "definibilidad en primer orden", cosa que ciertamente resolvía la imprecisión que presentaba la enunciación original de Zermelo, ¿por qué, entonces, le molestaba tanto a éste la contribución de aquél? La respuesta corta: por su diferencia de opinión metodológica; a diferencia del alemán, el noruego mostraba tendencias más constructivistas y una preeminencia por las nociones aritméticas:[146]

> Los teórico-conjuntistas suelen opinar que la noción de entero debería ser definida y que el principio de inducción matemática debería ser demostrado. Pero es claro que no podemos definir ni demostrar *ad infinitum*; tarde o temprano llegamos a algo que ya no es definible ni demostrable. Nuestra única preocupación, entonces, debería ser que los fundamentos iniciales sean algo inmediatamente claro, natural, y no sujeto a cuestión. Esta condición es satisfecha por la noción de entero y por inferencias inductivas, pero sin duda no es satisfecha por axiomas teórico-conjuntistas del tipo de Zermelo o por cualquier cosa restante de ese estilo; si tuviéramos que aceptar la reducción de la primeras nociones a las últimas, las nociones teórico-conjuntistas tendrían que ser más simples que la inducción matemática, y razonarcon ellas menos cuestionable, pero esto corre completamente contra el estado actual de las cosas. (Skolem [1923, p. 230])

Más aún, "[d]ado que la consistencia del sistema axiomático de Zermelo puede ser establecida solamente mediante la metamatemática, la cual, a su vez, requiere definiciones recursivas e inferencias inductivas, sería circular insistir sobre reducir la noción de 'finito' a la teoría de conjuntos" (Ferreirós, [2007, p. 360]). Sin embargo, Zermelo difería radicalmente de este punto de vista, pues sostenía —por decirlo de algún modo— ciertos "prejuicios" que bien podrían ubicarse dentro de la tradición de Gotinga. En particular, defendía que la matemática se debía realizar de conformidad con la lógica clásica, concediendo al *tertium non datur* un lugar esencial dentro del quehacer matemático; asimismo, mantenía que la genuina matemática estaba comprometida con estructuras infinitas y

[146] Ferreirós (2007) dice: "Su trabajo algebraico muestra la influencia de Kronecker, por lo que no es sorprendente que tuviera un fuerte interés en las demostraciones constructivas de teoremas conocidos." (p. 360)

que, como ciencia del infinito, no podía ser justificada por una teoría de la demostración finitista como la propuesta por el programa tardío de Hilbert,[147] sino por su éxito.

La predilección de Zermelo por la matemática clásica se encontraba en íntima relación con una especie de platonismo, pues afirmaba que "[t]odos los sistemas matemáticos desarrollados hasta ahora y, por tanto, el razonamiento matemático en general, refieren a un dominio existente o hipotético de objetos, tal como el dominio de los números naturales o el dominio de los números reales" (Ebbinghaus, [2007, p. 181]). Esto justamente se encuentra en profunda relación con la importancia de contar con la categoricidad de las teorías matemáticas tradicionales, pues, como es bien conocido,

> [u]na buena propiedad de un sistema categórico de axiomas es la *completud* (semántica): [c]ualquier enunciado φ [expresado] en el lenguaje en que el sistema axiomático esta escrito está decidido por Γ en el siguiente sentido. O bien todo modelo de Γ satisface φ, o bien todo modelo de Γ satisface $\neg\varphi$. En otras palabras, o bien φ, o bien $\neg\varphi$, es una consecuencia lógica (semántica) de Γ. La razón es muy simple: Γ tiene, salvo isomorfismo, un único modelo M. En tanto que el isomorfismo preserva verdad en lógica de segundo orden, φ o $\neg\varphi$ es una consecuencia lógica (semántica) de Γ de acuerdo con que φ sea verdadero en M o falso en M. (Väänänen [2015, p. 465])

Además, y probablemente más relevante, esto parece estar en concordancia con uno de los principios metodológicos de la escuela de Gotinga, mencionado más arriba; a saber, la caracterización de un dominio matemático (una estructura) mediante su presentación axiomática.

Con todo, de acuerdo con Zermelo, la justificación de la existencia de modelos infinitos no podía ofrecerse *via* pruebas de consistencia *à la* Hilbert, pues creía que las inferencias lógicas relevantes aplicadas en las pruebas matemáticas eran tan complejas que no podían ser capturadas a cabalidad, es decir, formalizarse en su totalidad y de manera finita. Además, "tal prueba de consistencia tendría que lidiar con un conjunto infinito de enunciados y, por lo tanto, resultaría meramente en una reducción de una cuestión concerniente con un dominio infinito a otra, lo cual conduciría a un *regressus ad infinitum*" (Ebbinghaus, [2007, p. 182]). En algún punto —afirma Zermelo—, debe postularse o asumirse algo "[y] el supuesto más simple que podemos hacer y que basta para la fundamentación de la aritmética (así como para la matemática clásica en su totalidad) es precisamente esta idea de los 'dominios infinitos'. Ésta, casi inevitablemente, se impone sobre nosotros en la medida que nos involucramos en el pensamiento lógico-matemático, y, de hecho, toda nuestra ciencia se ha construido sobre ella a lo largo de su desarrollo histórico" (Zermelo

[147] Como indica Torres (2001), el programa de Hilbert puede resumirse en los siguientes cuatro puntos:

1. Formalizar la matemática clásica.
2. Demostrar, con base en la matemática finitista, que la formalización es consistente.
3. Demostrar, en caso de que así sea, que la formalización es sintácticamente completa.
4. Construir un algoritmo para determinar la validez de las fórmulas del cálculo de predicados. (p. 181)

[1929b, p. 8]). Y, en cuanto a la justificación del infinito, añade: "[t]al supuesto es susceptible de justificación solamente por su éxito, por el hecho de que éste (¡y sólo éste!) ha hecho posible la creación y desarrollo de toda la aritmética existente, que es, en esencia, simplemente una ciencia del infinito" (p. 6).

Al contrario, Skolem era bastante escéptico respecto de esta perspectiva y de la teoría de conjuntos como fundamento, y sostenía que la aritmética recursiva era la base más firme para sostener el edificio de la matemática. De acuerdo con el matemático noruego, la esencia del método axiomático radica en el uso de "enunciados-número" (*number-statements*, en inglés),[148] es decir, proposiciones que refieren sólo a individuos, objetos básicos, y sobre los que únicamente se cuantifica —*i. e.*, lo que actualmente serían enunciados expresados en un lenguaje de orden uno—, porque en los sistemas axiomáticos uno procede tan sólo en función de lo que está expresado explícitamente por los axiomas; si uno adoptara expresiones de orden superior, como, por ejemplo, "todos los predicados de individuo", entonces uno presupondría de antemano el significado de "todos los predicados" independientemente de lo que puede conocerse puramente mediante los axiomas y las reglas de inferencia, lo cual iría en contra del método axiomático (uno conoce las propiedades de los objetos de un dominio en virtud de las demostraciones). Para clarificar un poco mejor esta postura peculiar, quizá cabe mencionar que Skolem está asumiendo —en la terminología de Shapiro (2003)— una suerte de actitud "algebraicista", considera que cualesquiera objetos (meros individuos) pueden servir como dominio de un modelo, en virtud de que se interpreten adecuadamente las relaciones básicas del sistema. De esta manera, cuando dejó de utilizarse de manera intuitiva y pasó a formularse axiomáticamente, la teoría de conjuntos cesó de contar con un significado fijo y pasó a estar sujeta a diversas interpretaciones modelo-teóricas. Más aún, tal como se mencionó en la sección pasada, cuando Skolem propuso formular en primer orden el sistema axiomático de Zermelo, a su vez sugirió identificar la noción de "definitud" con la noción de "definibilidad en primer orden"; con ello, el axioma de separación se transformó en un *esquema de axioma*,[149] lo cual ocasionó que el sistema zermeliano se convirtiera en un sistema con una cantidad numerable de axiomas, pues el axioma original se terminó por reemplazar con una cantidad contable de sus instancias (véase el Apéndice III). Esto traería consecuencias metalógicas muy importantes para la teoría axiomática de conjuntos, pues implicaría la no-categoricidad de la teoría y la relativización de ciertas nociones fundamentales dentro de ella, como son las nociones de "potencia" y "cardinalidad". La pérdida de categoricidad de la teoría

[148]El término se debe a que el noruego consideraba los números como los principales representantes de individuos.

[149]A diferencia de los axiomas, que son fórmulas bien formadas del lenguaje formal, los esquemas de axioma son fórmulas expresadas en el metalenguaje (*metafórmulas*), donde una o más *variables esquemáticas* (o *metavariables*) aparecen. Las metavariables pueden ser instanciadas por subfórmulas del lenguaje formal; una vez que todas han sido instanciadas, la fórmula resultante es una fórmula bien formada del lenguaje formal.

sería resultado inmediato del conocido *teorema de Löwenheim-Skolem*; la relativización también lo es, pero ésta se pondría más de manifiesto a partir de la llamada *paradoja de Skolem*.

La contribución del primer gran resultado de la teoría de modelos fue demostrar algo sustancial y aparentemente paradójico alrededor de la relación entre una teoría formal, expresada en un lenguaje de primer orden, y su interpretación (Arsenijevic, [2012, p. 64]). Por supuesto, esto se refiere al teorema de Löwenheim-Skolem. En sentido formal, el teorema no parece muy problemático, pero es al momento de reflexionar filosóficamente sobre este resultado que surge la perplejidad y el desconcierto. No obstante, antes de presentar debidamente este metateorema, cabe hacer un par de anotaciones: en primer lugar, el teorema es prácticamente exclusivo de la lógica clásica de primer orden;[150] en segundo, el teorema en cuestión suele presentarse en dos versiones, una *descendente* y una *ascendente*, sin embargo, para los fines de este trabajo bastará con concentrarse en una versión "sintética" que reúne ambas versiones (en realidad, se trata de un corolario que reúne ambos resultados en uno solo).

La primera aparición del ahora llamado teorema de Löwenheim-Skolem se remonta a 1915 cuando Leopold Löwenheim presentó una versión del teorema para el caso particular de una sola fórmula del lenguaje. En 1920, Skolem generalizaría este resultado para un conjunto Γ contable de fórmulas, y dos años más tarde en su artículo "Algunos comentarios sobre la teoría axiomática de conjuntos" refinaría su demostración y adicionalmente ofrecería la paradoja que lleva su nombre. Finalmente, en 1928, Alfred Tarski presentaría lo que actualmente se conoce como *teorema ascendente de Löwenheim-Skolem* (o *teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski*).[151] Poco después, un resultado más general que el presentado por Skolem (1922) —atribuido también a Tarski— fue dado a conocer, el cual fue llamado *teorema descendente de Löwenheim-Skolem*.

- **Teorema descendente de Löwenheim-Skolem.**[152] Sea Γ un conjunto de fórmulas satisfacible expresadas en un lenguaje de cardinalidad λ; entonces Γ es satisfacible en alguna estructura de cardinalidad menor o igual a λ.

[150] Más precisamente, de la teoría de modelos para la lógica clásica de primer orden. Por esto, es posible obtener el resultado incluso para lógicas de segundo orden con semánticas modelo-teóricas de orden uno, como semánticas tipo Henkin; con todo, el teorema no puede obtenerse en lógicas de segundo con las llamadas semánticas estándar ni lógicas de primer orden debilitadas como las constructivistas.

De hecho, la versión descendente (véase a continuación) se trata justamente de uno de los criterios aludidos por Lindström para caracterizar la lógica clásica de primer orden —el otro criterio es la compacidad del lenguaje—. *Grosso modo*, el resultado de Lindström señala que la lógica de primer orden es la lógica con mayor poder expresivo que sostiene los resultados de Löwenheim-Skolem (descendente) y compacidad; véase, Hernández (2015, pp. 30-31).

[151] Este resultado nunca fue publicado y solamente aparece mencionado en la nota editorial del artículo de Skolem de 1934. De esta manera, propiamente el resultado aparece por primera vez publicado en un artículo de Anatoly Maltsev de 1936. Véase Arsenijevic (2012, [secc. 4.2]).

[152] La versión de Skolem (1922) consideraba el caso específico cuando $\lambda = \aleph_0$.

- **Teorema ascendente de Löwenheim-Skolem.** Sea Γ un conjunto de fórmulas expresadas en un lenguaje de cardinalidad λ satisfacible en una estructura de tamaño infinito; entonces Γ es satisfacible en alguna estructura de cardinalidad κ para cualquier cardinal $\kappa \geq \lambda$.

- *Corolario (versión sintética del teorema).* Sea Γ un conjunto de fórmulas satisfacible en una estructura de tamaño infinito, entonces Γ es satisfacible en estructuras de cualquier cardinalidad infinita.

El caso de interés surge al considerar cuando Γ es igual que el conjunto de axiomas de la teoría de conjuntos en primer orden; como dicha teoría es recursivamente axiomatizable, entonces el conjunto de consecuencias lógicas del conjunto de axiomas es igual que el conjunto de las consecuencias de la teoría, o sea, igual que la teoría misma. De ahí que Löwenheim-Skolem puede aplicarse *casi* de manera natural a la axiomatización; "casi" porque, para obtener el resultado, uno debe presuponer algo nada trivial, a saber, que la teoría es satisfacible.[153] Es más, si tiene modelo, éste debe tener cardinalidad infinita, puesto que el modelo tendría que satisfacer, entre otras cosas, el axioma de infinito. Por tanto, la teoría tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita; en particular, posee uno de tamaño numerable.

Como se dijo, *formalmente* este resultado no parece ser muy problemático, sin embargo, el problema salta a la vista cuando uno reflexiona sobre él. El teorema literalmente implica la existencia de múltiples modelos, gran parte de ellos se trata de modelos no-estándar. Esto quiere decir que la teoría no es categórica, pues tiene modelos que no son isomorfos con sus modelos pretendidos; en otras palabras, "[l]a no-categoricidad de una teoría significa que no podemos distinguir formalmente lo que es distinguible en la teoría informal o semi-formal correspondiente" (Arsenijevic, [2012, p. 66]). ¡Esto significa que la teoría expresada en primer orden es incapaz de recuperar todas las nociones intuitivas que originalmente se le asocian![154]

Por si esto fuera poco, la precisión de la noción problemática dentro del axioma formulado por Zermelo para frenar las paradojas, traería con ironía una nueva especie de paradoja. Justamente, la paradoja de Skolem vendría a mostrar de manera clara cómo algunas nociones intuitivas dentro del concepto de conjunto perdían fácilmente su significado al caracterizarse mediante axiomatizaciones de primer orden. A diferencia de la

[153]En 1930, Gödel demostraría la completud de ciertos cálculos deductivos apropiados para lenguajes de primer orden. Con este resultado, bastaría con presuponer la consistencia de la teoría para garantizar que tiene modelo.

[154]Uno podría estar tentado a creer que esto puede resolverse sencillamente, que lo que sucede tan solo es que la teoría está "incompleta" y que agregando los axiomas pertinentes pueden eventualmente capturarse todas las nociones de interés; desgraciadamente, la cosa no es tan simple: cualquier axiomatización en primer orden de la teoría está condenada a sufrir las consecuencias del teorema, sin importar cuantos axiomas sean añadidos ni cuantas modificaciones se le hagan a los ya considerados.

aritmética, que era para el noruego incuestionablemente más clara y natural,[155] el resultado paradójico le sirvió como constancia para desacreditar la teoría de conjuntos como un fundamento adecuado para la matemática, pues ¿cómo podría la teoría de conjuntos desempeñarse como la base de la matemática cuando ella misma no es capaz de capturar todas las nociones elementales que la caracterizan?

La paradoja proviene de considerar un par de resultados; más específicamente, un par de teoremas: el primero, proveniente de la lógica clásica de orden uno, el mencionado metateorema de Löwenheim-Skolem; el segundo, proveniente de la teoría de conjuntos, el famoso *teorema de Cantor.*

- **Teorema de Cantor.** Para cualquier conjunto A, el conjunto potencia de A ($\mathcal{P}(A)$) tiene estrictamente mayor cardinalidad que A mismo. De manera un poco más formal: Sea f una función de A en $\mathcal{P}(A)$, entonces $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ no es biyectiva y, por tanto, para todo conjunto A, $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(A))$.[156]

- *Corolario.* $\mathrm{card}(\omega) = \aleph_0 < \mathrm{card}(\mathcal{P}(\omega))$.

El corolario anterior significa que hay al menos un conjunto $X = \mathcal{P}(\omega)$ tal que ω puede colocarse en correspondencia uno-a-uno *en* X, pero *no sobre* X; es decir, no son biyectables. En consecuencia, $\mathrm{card}(\omega) = \aleph_0 < X$, o sea, X es no-numerable. Esto quiere decir que la teoría de conjuntos, en caso de ser satisfacible, posee una función proposicional, llámese $\varphi_{unc}(x)$, que se satisface dentro de sus modelos.

Lo anterior, junto con Löwenheim-Skolem, da lugar a un resultado desconcertante en un primer momento. Como se señaló párrafos atrás, la teoría de conjuntos posee un modelo infinito, por lo que posee modelos de cualquier cardinalidad infinita (por Löwenheim-Skolem); en particular, posee uno de cardinalidad $\aleph_0$ (por la versión descendente del teorema). Sin embargo, dentro de la teoría es demostrable un enunciado que afirma la existencia de conjuntos no-contables (por Cantor). ¿Cómo puede un elemento del dominio del modelo, que en su totalidad es a lo más numerable, satisfacer una fórmula de primer orden que asegura la no-numerabilidad de algunos conjuntos? Puesto de otro modo, sea $\mathfrak{A}$ un modelo numerable de la teoría de conjuntos y $c^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$ tal que satisface $\varphi_{unc}(x)$; no obstante, $\mathfrak{A}$ es numerable, lo que significa que $\mathrm{card}(c^{\mathfrak{A}})$ es a lo más igual que $\mathrm{card}(\mathfrak{A}) = \aleph_0$, ¡pero $c^{\mathfrak{A}}$ satisface $\varphi_{unc}(x)$, la fórmula que dice "x es no-numerable"!

Este es justamente el resultado al que Skolem haría alusión con el propósito de desestimar el rol fundacional de la teoría axiomatizada por Zermelo, pues la explicación que ofrecería el primero alrededor de esta "anomalía" ilustraba claramente de una vez por todas, y con el poder de la demostración, que nociones esenciales dentro de la teoría de

[155]Parece que en su momento no era consciente de la versión ascendente, la cual implicaba la no-categoricidad de la aritmética expresada en lenguaje de primer orden. De manera similar a separación, el axioma de inducción en primer orden también se sustituye por un esquema de axioma.

[156]Para cualesquiera dos conjuntos X e Y, $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$ si y sólo si existe una función inyectiva $f : X \longrightarrow Y$ que no es biyectiva; es decir, f es inyectiva pero no sobreyectiva.

conjuntos perdían su calidad de *absolutas*. De acuerdo con Skolem, en realidad aquí sólo hay la “apariencia” de una paradoja, la cual puede ser explicada mediante el análisis de la semántica modelo-teórica que se ocupa para asignar significado a los parámetros del lenguaje. Dentro del lenguaje de primer orden para la teoría de conjuntos, el parámetro “$\in$” se interpreta mediante una relación binaria definida sobre el dominio de una estructura $\mathfrak{A}$; en cambio, a “$\forall x$”[157] se le asigna $\mathrm{dom}(\mathfrak{A}) = A$ (sea lo que fueren los objetos que constituyen el dominio). Así, dentro de un determinado modelo numerable de la teoría de conjuntos, el término “conjunto” no se refiere a cualquier conjunto, sino solamente a aquéllos delimitados por el dominio del cuantificador universal; es decir, solamente a aquellos conjuntos incluidos dentro del modelo bajo consideración. Es por ello que, dentro de ese modelo particular, los conjuntos aparentan ser no-numerables cuando en realidad desde afuera uno se percate que son numerables. Esto puede verse de manera más clara si se considera el hecho de que, para determinar la cardinalidad de un conjunto, se requiere establecer una biyección entre él y algún cardinal; las biyecciones son funciones y en la teoría de conjuntos las funciones son conjuntos. De esta forma, dentro del modelo no se puede establecer tal biyección simplemente porque la función requerida es un conjunto que no se encuentra dentro del dominio en cuestión. La aparente paradoja de Skolem, pues, surge al apegarse a las nociones intuitivas, e introducirlas de contrabando al momento de interpretar las fórmulas del lenguaje formal por medio de diferentes estructuras. Después de todo, aun cuando uno se limite a considerar estructuras cuyos dominios consistan únicamente en conjuntos, nada exige que la interpretación de “$\in$” coincida exactamente con la noción intuitiva de pertenencia ni que todas las afirmaciones expresadas en el lenguaje formal de primer orden limiten su significado a lo que intuitivamente representan; tal como es el caso de la función proposicional que expresa “x es un conjunto no-numerable”, la cual en rigor solamente indica “hay una función inyectiva de ω en x pero no sobreyectiva”. De hecho, como se mencionó previamente, el objeto $c^{\mathfrak{A}}$ de una cierta estructura numerable $\mathfrak{A}$ que satisface “x es un conjunto no-numerable” contiene a lo más una cantidad numerable de elementos, por lo que forzosamente deben haber $2^{\aleph_0}$ biyecciones “visibles” de ω sobre $c^{\mathfrak{A}}$ desde fuera del modelo. Lo que la paradoja de Skolem muestra es que $\mathrm{dom}(\mathfrak{A}) = A$ no contiene una sola de tales biyecciones. Es decir, desde fuera del modelo el enunciado “$\varphi_{unc}(c)$” es falsa, pero al momento de interpretarlo con $\mathfrak{A}$ los cuantificadores en él, y que corren únicamente sobre los objetos de A, no hallan biyección alguna de ω sobre $c^{\mathfrak{A}}$; motivo por el cual dicho enunciado resulta verdadero en esa estructura. Lo anterior precisamente da cuenta de la “relativización” de la que habla Skolem.

Con todo, es probable que aún persista la duda acerca de cómo es posible que una estructura a pesar de ser modelo (ya sea numerable o no-numerable) de todos y cada uno de los axiomas de la teoría, no pueda garantizar la recuperación de todas las nociones conjuntistas de manera “correcta”. La respuesta es simple: así como una estructura nu-

[157]Si los cuantificadores son símbolos no-lógicos o lógicos, está sujeto a discusión. Esta cuestión no es muy relevante para el presente trabajo y se optó por tomarlos como no-lógicos.

merable "malinterpreta" la noción de cardinalidad, igualmente cualquier otra estructura no-estándar[158] malinterpreta los axiomas de la teoría. Quizá el ejemplo más claro de esto es el axioma de conjunto potencia: el axioma intuitivamente afirma que para un conjunto a cualquiera existe uno b que contiene todos sus subconjuntos; mas lo que el axioma realmente asegura, al considerar un modelo cualquiera $\mathfrak{A}$ de la teoría de conjuntos, es que existe un conjunto b que contiene exactamente todos los subconjuntos de a y que viven en $\mathrm{dom}(\mathfrak{A}) = A$. Sin embargo, cuando a es infinito y $\mathfrak{A}$ numerable, evidentemente la mayoría de tales subconjuntos no se encuentran en el dominio A, pues hay una cantidad $2^{\aleph_0}$ de ellos y a tan solo es de tamaño $\aleph_0$; es decir, b se trata en realidad de un conjunto más pequeño que la auténtica potencia de a (Bays, [2014, secc. 2.4]).

Ante esta situación, fue que Zermelo se resistiría contra el virus del "skolemismo" —la doctrina de realizar (o interpretar) cualquier teoría en modelos contables— mediante la insistencia de mantener la noción de definitud en segundo orden, esto es, de considerar separaciones basadas sobre funciones proposicionales arbitrarias: "la totalidad de funciones proposicionales definidas *1)* contiene las relaciones básicas y está cerrado bajo las operaciones de negación, conjunción, disyunción, y cuantificación en primero y segundo orden y *2)* no posee una parte propia que satisfaga *1)*" (Ebbinghaus, [2007, pp. 192-3]). El problema que Skolem encontraría con esta estrategia ya se mencionó antes: los cuantificadores de orden dos corren sobre las propiedades que precisamente se pretenden definir.

No del todo contento con su caracterización de separaciones arbitrarias, Zermelo posteriormente intentaría integrar la noción de definitud dentro del concepto mismo de conjunto. Su objetivo ciertamente era frenar la relativización provocada por los resultados de Skolem y conservar las nociones cardinales invariantes bajo transiciones entre modelos. En general, conseguir la *absolutez* de las nociones conjuntistas relevantes:

> Un "conjunto" en el sentido de la teoría de conjuntos bajo toda circunstancia debe tener una "cardinalidad", que está únicamente determinada por medio de su definición, esto es, cualesquiera dos "clases" o "dominios" que caigan bajo la definición deben ser "equivalentes" en el sentido de Cantor, es decir, debe ser posible mapearlos uno-a-uno uno sobre el otro. Pero esto es ciertamente el caso para dominios que están determinados por medio de sistemas "categóricos", los cuales, *e. g.*, satisfacen un sistema axiomático categórico tal como los conjuntos "contables", que satisfacen el sistema de los postulados de Peano. Por consiguiente, la idea de definir "conjuntos" de manera general como los "dominios de sistemas categóricos" parece sugerirse a sí misma. (Zermelo [1929b, p. 9])

Como la cita de arriba sugiere, paulatinamente los esfuerzos de Zermelo por precisar satisfactoriamente el concepto de conjunto lo llevarían a concentrarse en los estudios de categoricidad, pues las teorías categóricas tienen la ventaja de fijar los valores de verdad de sus enunciados y de sentar sus nociones de manera absoluta. Por ejemplo, tal

[158]Restringir esta "malinterpretación" a los modelos no-estándar no es del todo correcto, también los modelos estándar en el sentido hasta ahora considerado participan de ella. La última sección del trabajo se dedicará precisamente a plantear una estrategia para reformular y refinar la noción de "modelo estándar" de tal forma que éstos no sean susceptibles de malinterpretar los axiomas de ZFC ni tampoco cualquier otra noción conjuntista elemental.

como notó Skolem, el problema del continuo no podría resolverse adecuadamente desde una teoría no-categórica. Esto eventualmente llevaría a Zermelo a proponer una nueva axiomatización en su célebre artículo ”Sobre números frontera y dominios de conjuntos: Nuevas investigaciones en los fundamentos de la teoría de conjuntos” (1930a). Sin embargo, a diferencia de su artículo de 1908, el objetivo no consistía meramente en introducir un nuevo sistema axiomático, sino en demostrar varios teoremas relacionados con los modelos de esta nueva teoría y, a partir de ellos, esclarecer una serie de cuestiones filosóficas con respecto de los objetivos, las motivaciones y el objeto de estudio de la teoría. Por su relevancia para los propósitos de este trabajo, conviene revisar rápidamente las ideas trabajadas en este artículo.

Para comenzar con esta breve exposición, ante todo, parece inevitable insistir nuevamente sobre el parecido que comparte Zermelo con la perspectiva del filósofo segundo. Como parte del preámbulo en su “*Reporte* a la Asociación de Emergencia de la Ciencia Alemana” (s1930d), y tras explicar rápidamente los motivos que lo orillaron a involucrarse de nueva cuenta en las investigaciones sobre fundamentación de la matemática, Zermelo confiesa que,

> después de todo, [cree poder] contribuir a la clarificación de las cuestiones relevantes [acerca de la teoría de conjuntos]: no como un “filósofo” que pronuncia principios apodícticos, que frecuentemente aumentan la confusión al introducir aún otra opinión, sino como un matemático que encuentra conexiones objetivas, las cuales pueden, en cambio, servir como un fundamento seguro para cualquier teoría filosófica. (pp. 2-3)

Es con esta actitud que el matemático alemán se propondría abordar una serie de preguntas “decisivas” sobre la teoría de conjuntos:

> ¿Cómo es que un “dominio” de “conjuntos” y “urelementos” se debe constituir para que satisfaga los axiomas “generales” de la teoría de conjuntos? ¿Es nuestro sistema axiomático “categórico” o hay una multitud de modelos “teórico-conjuntistas” esencialmente distintos? ¿Es el concepto de “conjunto”, en oposición al de una mera “clase”, uno absoluto, susceptible de ser determinado por medio de características lógicas, o es tan sólo un concepto relativo, dependiente del modelo teórico-conjuntista sobre el cual sucede que está apoyado? Este es el problema que me planteé a mí mismo y resolví en mi artículo “Sobre números frontera y dominios de conjuntos” (p. 3).

Como Zermelo mismo reconoce, estas serían las cuestiones que trabajaría y resolvería en el mencionado artículo. Con todo, será hasta el próximo capítulo que se presentará con un poco más de detalle el contenido de este artículo para posteriormente pasar a proponer el llamado “multiverso zermeliano” como *el posible* objeto de estudio de la teoría de conjuntos, esto con base en la metodología del naturalismo matemático. Por lo pronto, en este apartado tan solo se esbozará muy brevemente la forma en que el matemático alemán modificaría su sistema de axiomas, así como el modo en que sus resultados lo llevarían a considerar la peculiar estructura en que se pueden arreglar sus modelos y a precisar conceptualmente la noción de conjunto.

Así pues, en primer lugar, el matemático se vio en la necesidad de fortalecer su sistema axiomático original con dos axiomas adicionales:[159] el *axioma de reemplazo*, sugerido por Fraenkel;[160] y el *axioma de regularidad* (también conocido como *axioma de buena-fundación*), introducido por von Neumann.[161] La importancia del primero radica en que posibilita contar tanto con el *teorema de la recursión* y el *teorema de la inducción transfinitos*[162] como con la existencia de conjuntos generados por estas técnicas; la del segundo, en que "excluye todos los conjuntos 'circulares', todos los conjuntos 'auto-pertenecientes' en particular, y todos los conjuntos 'desarraigados' en general, [este axioma] siempre ha sido satisfecho dentro de todas la aplicaciones prácticas de la teoría de conjuntos, y, por tanto, no resulta una restricción esencial de la teoría por ahora." (Zermelo [1930a, p. 31]). Adicionalmente, regularidad sería crucial en este artículo para poder descomponer en estratos bien diferenciados el "desarrollo" de los modelos de la teoría y generar una versión zermeliana de la *jerarquía acumulativa de los conjuntos bien-fundados*.[163]

Otras observaciones que vale la pena mencionar respecto de la nueva axiomatización son: la consideración de elección no como axioma, sino explícitamente como principio lógico (véase la sección 2.1.4); la omisión intencionada del axioma de infinito, esto para dar cabida a modelos finitarios que fueran aceptables para los partidarios del intuicionismo (no obstante, Zermelo recuperará este axioma en las reflexiones finales de este artículo); la formulación de separación y reemplazo en segundo orden, en la cual Zermelo se reservaría a expresar explícitamente la problemática noción de "definitud" y se limitaría a considerar separaciones y reemplazos "arbitrarios"; y, por último, nuevamente la inclusión de urelementos. Este sistema axiomático sería precisamente el llamado *sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel menos infinito* expresado en segundo orden ($\mathrm{ZFCU}^{-}{}_{2}$); con infinito es el sistema ZFCU_2.[164] (Véase el Apéndice II.)

Una vez presentada la nueva axiomatización, por fin puede mencionarse el objetivo que inicialmente persigue Zermelo (1930a), este es, demostrar que

[159] También realizaría ciertas modificaciones en sus axiomas originales; por ejemplo: separaría el axioma de conjuntos elementales en los axiomas de conjunto par y conjunto vacío; asimismo, evitaría colocar la noción de definitud en el axioma de separación y par, y se limitaría a señalar en una nota al pie que las funciones proposicionales son totalmente arbitrarias. Véase el Apéndice II.

[160] De hecho, Skolem también había formulado este axioma, pero Zermelo, aun cuando fue informado de esto, se limitó a reconocer la contribución únicamente a Fraenkel. Originalmente, el axioma de reemplazo fue sugerido por Fraenkel para garantizar la existencia de $\aleph_\omega = \{\omega, \mathcal{P}(\omega), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)), \dots\}$

[161] En especial, von Neumann lo había considerado para generar una prueba de consistencia relativa de tal axioma y con el propósito de aproximarse a una teoría de conjuntos categórica. Véase Ebbinghaus (2007, p. 198).

[162] Para la presentación de estos resultados, véase Jech (2006, pp. 21-2).

[163] Actualmente, buena-fundación además se utiliza para extender los resultados de recursión e inducción a *todos* los conjuntos, así como para obtener resultados importantes como el *lema del colapso de Mostowski*, los *teoremas de inducción* y *recursión bien-fundadas*, etc. Para otros resultados relacionados con regularidad, véase Jech (2006, cap. 6).

[164] Zermelo (1930a), como se mencionó, no considera elección como axioma, sino como principio lógico. Por otro lado, el sistema lo nombra sencillamente ZF' (para el caso sin infinito) y ZF (con infinito). Aquí se ha optado por ocupar su acrónimo contemporáneo.

> un *dominio normal*[165] está determinado salvo mapeos isomorfos por dos números: la cardinalidad de su "base", esto es, la totalidad de sus "urelementos" (los cuales no son propiamente conjuntos), y su "característica", esto es, el *tipo-ordinal* de todas las "secuencias básicas" contenidas en él o de todos los números ordinales representados en él por conjuntos. (Zermelo, 1930a, p. 401)[166]

Para conseguir sus resultados, Zermelo en primer lugar elaboraría el concepto de "secuencia básica", del cual se servirá para llevar a cabo la demostración de una serie de teoremas (¡siete en total!) o, mejor dicho, *metateoremas*. Sin más preámbulo, una *secuencia básica* es un conjunto transitivo bien-ordenado por la relación de pertenencia ($\in$) generado por un urelemento. Dicho llanamente, las secuencias básicas son conjuntos estructuralmente similares a los famosos ordinales de von Neumann, con la salvedad de que las primeras parten de un urelemento y no del conjunto vacío ($\emptyset$).

Entre algunas de las —ahora no muy sorprendentes— propiedades que Zermelo menciona que poseen estas secuencias básicas, se encuentra una sobre la que conviene detenerse rápidamente. Se trata de la última de ellas. Ésta afirma que la totalidad de las secuencias básicas g_α generadas por un urelemento u dentro de un cierto dominio normal, llámese P, forma un subdominio bien-definido; adicionalmente, los ordinales α forman a su vez un segmento bien-definido Z_π de los ordinales de tipo-ordinal π. Zermelo hace hincapié sobre que P no contiene elemento alguno cuyos elementos sean todas las mencionadas secuencias básicas ni algún conjunto bien-ordenado de tipo-ordinal π. Más aún, π se trata del supremo de todos los ordinales representados en P (Zermelo, [1930a, pp. 32-3]).

La primera parte del título del artículo hace referencia justamente a ordinales como π. Estos "números frontera" (en inglés, *boundary numbers*), o también "característica" del dominio normal, requieren satisfacer dos propiedades que, por simplicidad, pueden atribuirse a lo que contemporáneamente se conoce como *cardinales fuertemente inaccesibles*; es decir, π debe ser un ordinal inicial límite regular fuerte.[167] (Informalmente, uno puede entender este tipo de cardinales como aquellos que no pueden ser alcanzados por reemplazos, uniones ni potencias de ordinales menores que ellos.)

> Pero las primeras dudas acerca de la posible existencia de un cardinal regular y límite no se desprenden tan sólo de la dificultad para encontrar algún ejemplo conocido. Si se observan con cuidado los procedimientos de construcción y definición para un conjunto en la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel, podemos constatar que las operaciones conjuntistas de unión, de separación, de sustitución, o aun de elección,

[165] Este es el término que emplea Zermelo para referirse a lo que actualmente se conoce por "modelo".

[166] El énfasis fue añadido.

[167] En la actualidad, la noción de cardinal inaccesible fuerte contiene adicionalmente la restricción de ser mayor que ω.

Un *número cardinal* de un conjunto X es es el único ordinal inicial con el que es biyectable.

Un ordinal α es *inicial* si y sólo si no existe un ordinal $\beta < \alpha$ con el que sea biyectable.

Un ordinal α es *límite* si y sólo si $\alpha = \bigcup \alpha = \sup(\alpha) = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$.

Un cardinal λ es *regular* si y sólo si $\lambda = \mathrm{cf}(\lambda)$.

Un cardinal κ es *fuerte* si y sólo si para cualquier $\lambda < \kappa$ e $\iota < \kappa$, $\lambda^\iota < \kappa$.

Puesto que el sistema axiomático no incluye el axioma de infinito, ω sería el primero de estos números frontera.

> no permiten definir un conjunto cuya potencia sea un aleph regular y límite a partir de conjuntos cuya cardinalidad sea menor. Dicho en otras palabras, si se parte de un conjunto (o de una familia arbitraria de conjuntos) con cierta cardinalidad, las operaciones conjuntistas mencionadas no permiten encontrar ningún conjunto cuya cardinalidad sea mayor que las de los conjuntos dados y que sea regular y límite. (Álvarez, 1994, p. 56)

Como se verá en el siguiente capítulo, sería sobre la base de estos grandes cardinales que Zermelo elaboraría una serie de reflexiones en torno del objeto de estudio de la teoría de conjuntos *en general*; en especial, sería capaz de demostrar que un "dominio normal" (un modelo) de la teoría coincide con su versión estructurada acumulativamente en estratos bien-diferenciados, logrando con ello ofrecer una caracterización más clara del universo conjuntista, mejor dicho, del *multiverso conjuntista*, y del *concepto de conjunto*, muy semejante al que normalmente se le asocia en la actualidad: la concepción iterativa de conjunto. Más aún, el matemático —sobre la base de los números frontera— conseguiría demostrar la no-categoricidad de la teoría, pero de manera muy distinta a como lo hizo Skolem. De hecho, en este caso, que la teoría no fuese categórica, para Zermelo sería algo muy deseable, puesto que permitía la *aplicabilidad ilimitada* de la teoría sobre las investigaciones de la matemática. Incluso, todavía más: aun si la teoría no poseía modelos únicos salvo isomorfismo, ¡el tipo de no-categoricidad alcanzada por sus resultados concedía la preservación absoluta de las potencias y de la cardinalidad!

En última instancia, las reflexiones filosóficas acerca de lo anterior le darían confianza al matemático para afirmar que las objeciones contra la teoría de conjuntos —especialmente, las que parten de las "antinomias ultrafinitarias"— "se deben tan solo a una confusión entre la *teoría de conjuntos en sí misma*, la cual *no está categóricamente* determinada por sus axiomas, y los *modelos* individuales que la representan" (Zermelo, [1930a, p. 47]).

Para concluir este apartado —y, con él, este recuento histórico— cabe señalar las últimas caracterizaciones de la noción de conjunto que Zermelo ofrecería sobre la base de los resultados presentados en el mencionado artículo y de la imagen conceptual que de éstos surgía. No obstante, el verdadero significado de estas "definiciones" se espera que surja más claramente sobre el análisis que se llevará a cabo en el próximo capítulo.

Así pues, con base en sus reflexiones y resultados, Zermelo se daría a la tarea de reformular de manera más precisa la famosa definición cantoriana de conjunto[168] y llegaría a sostener que "[u]n 'conjunto' es un dominio finito o infinito de cosas bien-distinguibles[169] u objetos que pueden ser caracterizados por medio de un sistema categórico de postulados" (Zermelo, [1932d, p. 2]). Esto último es lo que Zermelo nombraría con el término "dominio *cerrado*", y se atrevería a afirmar que "[e]s precisamente esto lo que Cantor realmente

[168] "[C]ualquier colección [. . .] en un todo de objetos bien-distinguidos y definidos de nuestra intuición o pensamiento."

[169] Zermelo (1929b) dice: "[un conjunto] es una comprehensión bien-definida de objetos donde para cada cosa está determinado si pertenece o no a ella" (p. 9).

quiso decir con su bien conocida definición de 'conjunto', y esto puede ser tratado como conjunto donde sea y sin contradicción en todas las consideraciones y deducciones matemáticas. Todo dominio cerrado —continúa— puede ser bien-ordenado y posee ambas, una cardinalidad y un número ordinal" (Zermelo, [s1930e, p. 5]).

En contraposición con los dominios cerrados, Zermelo (s1930e) también introduciría el concepto de "dominio *abierto*", esto es, "una secuencia bien-ordenada de dominios que se comprehenden sucesivamente unos a otros, constituidos de modo que cada subdominio cerrado siempre puede todavía ser extendido dentro de ella" (p.5). Este dominio abierto es exactamente el que se identificará con el *multiverso zermeliano*. Este modelo abierto si bien, a diferencia de los cerrados, no cuenta con un cardinal ni con un ordinal asociado, puede bien-ordenarse de modo que "todos los elementos de un estrato anterior preceden a todos los elementos de uno subsecuente" (p. 5).[170] Sin embargo, como muestra Zermelo (1930a), los dominios cerrados pueden ser considerados como modelos (dominios normales) de la teoría, pero también como "conjuntos" dentro de un modelo adecuadamente amplio.

Por tanto, dentro del dominio abierto existen dominios cerrados de característica variable que pueden realizar $ZFCU_2$. En otras palabras, "tales dominios normales son dominios 'cerrados' y, al mismo tiempo, 'modelos' teórico-conjuntistas especiales que difieren esencialmente uno de otro y representan la teoría de conjuntos más o menos *incompletamente*" (Zermelo, [s1930e, p. 5]). De esta manera, de acuerdo con Zermelo, el único modelo capaz de capturar completamente la teoría de conjuntos, y en toda su auténtica[171] *generalidad*, es el multiverso abierto de universos cerrados: "La teoría de conjuntos en su totalidad puede ser completamente representada sólo en un 'modelo abierto', y esto es así en mi 'modelo teórico-conjuntista' basado sobre el 'desarrollo canónico' o 'absoluto' " (Zermelo, [s1930e, p. 5]).

En el próximo capítulo, finalmente se pretenderá justificar la perspectiva zermeliana alrededor de los conjuntos y defender el multiverso propuesto por el alemán como un posible —y plausible— objeto de estudio de la teoría de conjuntos, razones que provendrán del análisis de la práctica teórico-conjuntista que ha sugerido a partir de esta "breve historia de los conjuntos" y, por supuesto, de conformidad con la metodología del naturalista matemático.

[170] Como consecuencia del "teorema de desarrollo canónico" que se mencionará en unos instantes.
[171] Sin perder las nociones fundamentales de la teoría.

Capítulo 3

Hacia el multiversismo zermeliano

Por fin, ha llegado el momento de implementar la metodología del filósofo segundo con el propósito de establecer con cierta claridad *un posible* objeto de estudio de la teoría de conjuntos, el que mejor daría cuenta de los objetivos, las metodologías y las prácticas de la teoría de conjuntos, por lo menos respecto a los episodios históricos considerados. Para conseguir esto, el capítulo anterior estuvo consagrado a la exposición de dichos episodios históricos que, en lo personal, parecen reflejar la práctica más representativa de esta disciplina matemática, al menos durante el periodo bajo consideración (1850-1930 aprox.). Si bien es cierto que la elección de estos episodios específicos pudiera parecer artificial o conveniente para defender el muy particular objeto de estudio que aquí se propone, parece difícil que alguien pueda negar la importancia que éstos tuvieron sobre el desarrollo de la teoría. Como se ha confesado anteriormente, el objetivo de este trabajo *no* consiste en establecer de manera *definitiva* las directrices metodológicas ni el objeto de estudio de la teoría de conjuntos; asimismo, los capítulos históricos aquí presentados evidentemente están lejos de ser exhaustivos y detallados, y su análisis tampoco pretende ser tan ambicioso como para aspirar hacia un propósito superior. La meta aquí es sencillamente proponer y defender el *multiverso zermeliano* como *el posible* objeto de estudio de la disciplina desde el marco metodológico del naturalismo matemático, y únicamente en relación con prácticas, objetivos y motivaciones teórico-conjuntistas *particulares* que la reflexión sobre *ciertos* episodios históricos (los desplegados en el segundo capítulo) ha arrojado. Dicho lo anterior, enseguida se dará comienzo a ello.

Ahora bien, para llevar a cabo esta empresa, en primer lugar, conviene retomar de nueva cuenta el artículo de Zermelo (1930a), pues una breve exposición de los resultados ahí obtenidos arrojará una perspectiva más clara y precisa del multiverso concebido por este matemático. Así pues, tras haber presentado el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel y descrito las propiedades de los números frontera (*i. e.*, ser cardinales fuertemente inaccesibles), Zermelo ofrece un primer resultado, el cual, en pocas palabras, sienta las condiciones para determinar si un cierto dominio parcial se trata de un dominio normal:[172]

[172]Cada uno de los siguientes teoremas vienen presentados en itálicas en el texto original.

> **Lema.** Un dominio parcial M de un dominio normal P es él mismo un dominio normal si *1)* contiene, entre cada uno de sus conjuntos m, también los elementos de m, y si *2)* contiene todo conjunto m del dominio normal P cuyos elementos x están todos en M. Si M a su vez incluye la "base" entera del dominio total P, entonces M es idéntico a P. (Zermelo, [1930a, p. 35])

En términos contemporáneos, lo que este lema dice es que una subestructura M de un modelo P de $ZFCU_2$ es ella misma un submodelo de la teoría si es *transitiva* y *extensional.* Si además M tiene exactamente los mismos urelementeo (la misma base) que P, entonces $M = P$. Es a partir de ese momento que Zermelo se dedica a demostrar tres "teoremas de desarrollo" que le servirán para probar posteriormente otros cuatro teoremas, a saber, tres "teoremas de isomorfismo" y un "teorema de automorfismo". Desgraciadamente, por motivo de brevedad, me limitaré solamente a enunciar estos teoremas y a mencionar muy informalmente lo que está de fondo a cada uno.

> Primer teorema de desarrollo. Todo dominio normal P de característica π puede ser descompuesto en una [secuencia] bien-ordenada de "estratos" Q_α no-vacíos y disjuntos de tipo π, tal que cada estrato Q_α incluye todos los elementos de P que no ocurren en estrato previo alguno y cuyos elementos pertenecen al "segmento"[173] P_α, esto es, a la suma de los estratos previos. El primer estrato Q_α incluye todos los urelementos. (Zermelo, [1930a, p. 413])

Dicho brevemente, este teorema establece que puede generarse una partición bien-ordenada de todo dominio normal, de tal manera que cada clase de equivalencia Q_α contiene únicamente los subconjuntos generados por elementos pertenencientes al estrato anterior. Cada Q_α contiene las secuencias básicas g_α de mismo índice.[174]

> **Segundo teorema de desarrollo.** En el desarrollo de un *dominio unitario*,[175] cada segmento P_α tiene la cardinalidad de $\varphi(\alpha)$,[176] pero contiene solo conjuntos de menor número cardinal, mientras que el estrato correspondiente Q_α ya contiene conjuntos de esta cardinalidad. Cada segmento del primer tipo $P_{\beta+1}$[177] contiene como conjuntos todos los subdominios de la P_β inmediatamente previa, y cada segmento del segundo tipo contiene todos los segmentos previos y sus subdominios. En cuanto al dominio unitario en sí, éste tiene la cardinalidad de su característica π y contiene como conjuntos todos sus subdominios de menor cardinalidad. (Zermelo, [1930a, p. 415])

A grandes rasgos, este teorema de desarrollo describe el crecimiento "canónico" de un dominio que tiene por base un solo urelemento, es decir, se trata de una descripción de

[173] Por "segmento" entiéndase "dominio parcial".

[174] En este sentido, Q_α se comporta como el rango (en inglés, *rank*) de las secuencias básicas g subindexadas por α. (No confundir "*rank*" con "*range*"; la traducción al español de una y otra noción es un tanto desafortunada.)

[175] Un "dominio unitario" es simplemente un dominio normal cuya base posee un solo urelemento.

[176] La función φ es similar a la conocida función $\beth$ utilizada por los teórico-conjuntistas. *Grosso modo*, φ asigna cada ordinal ξ a su ordinal inicial perteneciente al cardinal 2^ξ, *i. e.*, el cardinal de $\mathcal{P}(\xi)$.

[177] Por "segmento del primer tipo" se entiende un dominio parcial subindexado por un ordinal sucesor; mientras que los de "segundo tipo" se refieren a aquéllos subindexados por un ordinal límite.

crecimiento análoga al muy familiar universo de von Neumann (V) —al menos hasta un nivel subindexado por π—. (De hecho, para cualquier urelemento u, el dominio unitario generado a partir de u y característica π es isomorfo a V_π. (Esto es todavía más claro al considerar los teoremas de isomorfismo, los cuales se presentarán en unos momentos.)

> **Tercer teorema de desarrollo (Teorema del desarrollo "canónico").** Todo dominio normal con base Q puede ser descompuesto en una secuencia bien-ordenada de "estratos" separados Q_α que inicia con Q, donde nuevamente la suma de los estratos previos corresponde con cada estrato como un "segmento", y donde cada Q_α contiene como conjuntos todos aquellos subdominios del correspondiente segmento P_α que no yacen aún en el segmento mismo y que no son de cardinalidad mayor que $\varphi(\alpha)$. Esta última restricción se abandona en el caso del "dominio unitario", donde el desarrollo "libre" y el "canónico" coinciden. Para el desarrollo "canónico", cada segmento P_τ es él mismo un dominio normal cuyo índice τ satisface las condiciones I y II[178] de un "número frontera".(Zermelo, [1930a, p. 417])

De los tres teoremas de desarrollo, este último es quizá el más relevante. Muy llanamente lo que establece este teorema es que se puede "controlar" el crecimiento de cualquier dominio normal P. El problema con los *desarrollos* usualmente descritos para los dominios normales es que "crecen" demasiado rápido —en cualquier "momento", las potencias pueden provocar que algún segmento del dominio "explote" y genere repentinamente una inmensidad de subconjuntos de "un momento a otro"—. Lo que el tercer teorema de desarrollo establece es que puede ofrecerse un "arreglo" de cualquier dominio normal tal que el "crecimiento" quede "acotado" al "pasar" de un segmento al siguiente.

Es importante notar que los teoremas anteriores *no es que generen dominios*, los dominios ya están dados. Lo único que señalan dichos teoremas es que tales dominios se pueden "acomodar" útilmente de cierta forma. Esta "utilidad" tal vez no es muy clara todavía, sin embargo, se pondrá de manifiesto con los siguientes *teoremas de isomorfismo.*[179]

> **Primer teorema de isomorfismo.** Dos dominios normales con la misma característica y con bases equivalentes son isomorfos. De hecho, el mapeo isomorfo de cada dominio sobre el otro está *únicamente* determinado por el mapeo de sus bases. (Zermelo, [1930, p. 421])

Este teorema es bastante claro. Intuitivamente, si las bases tienen el mismo tamaño, se puede definir una biyección entre las bases, de manera que al aplicar sobre las imágenes las operaciones conjuntistas se dé lugar a un dominio estructuralmente idéntico al que se generaría al aplicar tales operaciones a las preimágenes.

> **Segundo teorema de isomorfismo.** Dados dos dominios normales con bases equivalentes y distintos números frontera π, π', uno es siempre isomorfo a un segmento canónico del otro. (Zermelo, 1930a, p. 421)

[178] Recuérdese que en el presente texto se optó por omitir explícitamente estas condiciones y, en su lugar, "incluirlas" implícitamente dentro del concepto de "cardinal inaccesible fuerte".

[179] Recuérdese que, en términos muy generales, un *isomorfismo* es una biyección entre estructuras que *preserva* las relaciones y las funciones.

Este teorema *emplea* el tercer teorema de desarrollo y el teorema anterior. Por el primero, se puede contar con un segmento canónico del dominio "más alto" con la característica más pequeña —y que a su vez es un dominio normal—, de modo que este segmento tendrá una base equivalente y característica igual que el dominio original "más bajo". Por lo anterior, y dado el primer teorema de isomorfismo, se sigue naturalmente el resultado.

> **Tercer teorema de isomorfismo.** Dados dos dominios normales con la misma característica, uno siempre es isomorfo a un subdominio (propio o impropio) del otro. (Zermelo, [1930a, p. 423])

El teorema anterior considera el caso en que los dominios tienen la misma "altura", pero posiblemente bases no-equivalentes. *Grosso modo*, uno puede definir una inmersión isomorfa del dominio más angosto en el más ancho, *i. e.*, establecer un isomorfismo entre el dominio angosto y un subconjunto del ancho. Así, por el lema de páginas atrás, este subconjunto del dominio ancho es un dominio normal a su vez.

Cabe destacar que si la base de un dominio normal es mayor o igual que su característica, no existirá un conjunto que contenga todos los urelementos y, además, habría subconjuntos que se le "escaparía" al modelo.

Finalmente, tan solo resta:

> **Teorema de automorfismo.** Los automorfismos, esto es, mapeos isomorfos de un dominio normal sobre sí mismo, corresponden uno-a-uno a los mapeos equivalentes de la base sobre sí misma, y son por tanto posibles sólo para un número base $\mathfrak{q} > 1$; todos los dominios son "monomórfos". El grupo de todos los automorfismos es isomorfo al grupo de permutaciones que pertenecen a la base. Similarmente, los "meromorfismos", esto es, mapeos isomorfos del dominio normal sobre una parte de sí mismo, corresponden a los mapeos uno-a-uno de la base (infinita) sobre partes equivalentes. (Zermelo, [1930a, p. 425])

En realidad, este teorema tiene más carácter de corolario, se sigue de manera inmediata a partir de los resultados anteriores; sin embargo, para los propósitos actuales no será necesario revisar tan cuidadosamente los detalles sobre éste.

No obstante, un resultado muy relevante que no aparece en este artículo, pero que se sigue directamente de los anteriores y que vale la pena revisar, es el siguiente *teorema de cuasi-categoricidad*.

> **Teorema de cuasi-categoricidad para $\mathbf{ZFCU^{-}{}_2}$.** Para cualesquiera dominios normales de [$\mathrm{ZFCU^{-}{}_2}$] $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$, existen subdominios (propios o impropios) de cada uno $\mathfrak{M}'$ y $\mathfrak{N}'$, respectivamente, tal que $\mathfrak{M}' \cong \mathfrak{N}'$. (Véase Gutiérrez, [2011, p. 75])

Una consecuencia de esto es la existencia de un *dominio normal mínimo* isomorfo a un subdominio de cualquier otro dominio normal.

Como puede apreciarse, los resultados anteriores implican la no-categoricidad de $\mathrm{ZFCU_2}$ adelantada casi al final del capítulo anterior, por supuesto, siempre y cuando se *admita* la existencia de más de un cardinal fuertemente inaccesible (de haber sólo uno, la teoría sí sería categórica).[180] No obstante, es importante notar que, a diferencia del primer orden donde la no-categoricidad está implicada por el teorema de Löwenheim-Skolem, aquí la no-categoricidad es consecuencia de los teoremas de isomorfismo. Probablemente, una de las diferencias más notables es que si bien desde el punto de vista de Zermelo puede existir más de un modelo, en todos ellos las nociones cardinales y ordinales se recuperan de manera adecuada; al contrario de lo que sucede con las teorías en primer orden (como ya se ha dicho). Con todo, Zermelo apreciaba la falta de categoricidad como una ventaja, prueba de la —literalmente infinita— aplicabilidad de la teoría de conjuntos sobre las investigaciones de la matemática. Para Zermelo, la teoría de conjuntos debería ser tal que fuese lo suficientemente flexible para dar cabida dentro de ella a modelos de todas las teorías matemáticas posibles y, por ello mismo, no debería estar acabada.

Una nota final que es importante mencionar sobre esta exposición es que algunos de los modelos de la teoría de conjuntos expresada en primer orden sí pueden asegurar la recuperación de las nociones cardinales de manera absoluta; a saber, aquellos tales que el conjunto de sus ordinales sea un cardinal fuertemente inaccesible. Cosa que parece cerrar el círculo, pues de la teoría de conjuntos en primer orden que recuperan las nociones de ordinalidad y cardinalidad de manera adecuada son exactamente los que Zermelo había señalado.[181]

De esta manera, con la demostración de estos teoremas, Zermelo fue capaz de establecer la coincidencia de un dominio normal (un modelo) de la teoría con su versión estructurada acumulativamente en estratos bien-definidos, brindando con ella una caracterización más clara del universo conjuntista y del concepto de conjunto, muy semejante al que normalmente se le asocia en la actualidad: la concepción iterativa de conjunto de von Neumann. Sin embargo, para completar satisfactoriamente el objeto de estudio de la teoría que pretendía precisar, Zermelo tenía que brindar ciertas justificaciones adicionales respecto de algunos supuestos extra-teóricos que la teoría misma era incapaz de ofrecer. En especial, la existencia de una secuencia ilimitada de números frontera. Para conseguir esto, Zermelo optaría por apoyarse en consideraciones que caían más allá de hechos puramente matemáticos y que se aproximaban más a las reflexiones que la práctica, objetivos y motivaciones de la teoría sugerían. Antes de abordar esto, tal vez sea conveniente señalar de manera puntual la postura que Zermelo (1930a) mantiene frente a sus resultados:

i) ZFCU_2 es satisfacible;

ii) los modelos de ZFCU_2 están determinados salvo isomorfismo por la cardinalidad de su base y su "característica" (esta última debe ser un cardinal fuertemente inaccesi-

[180]Como se sabe, la existencia de este tipo de cardinales es indecidible a partir de los axiomas de ZFC en cualesquiera de sus presentaciones aquí consideradas. Sin embargo, actualmente gran parte de la comunidad matemática los admite y trabaja con ellos —hasta con conjuntos todavía más grandes—.

[181]Esto lo trabaje con un poco más de detalle en mi tesis de licenciatura.

ble);

iii) es necesario postular axiomáticamente en la metateoría la "existencia de una secuencia ilimitada de números frontera";

iv) ZFCU_2 no es categórica;

v) la no-categoricidad de ZFCU_2 "no es una desventaja, sino una ventaja, pues la enorme importancia y aplicabilidad de la teoría de conjuntos descansa precisamente en este hecho" (p. 45);

vi) "[t]odo dominio categóricamente determinado puede también ser concebido como un 'conjunto' de uno u otro modo" (p. 46); y

vii) las "antinomias ultrafinitarias" de la teoría de conjuntos surgen a partir de la confusión entre la teoría no-categórica de conjuntos y los modelos que la representan.

El punto *i)* se trata sencillamente del supuesto inicial que Zermelo establece para llevar a cabo su investigación. Si bien Zermelo asume la satisfacibilidad de la teoría con base en el supuesto indemostrado de su consistencia —cosa que, como ahora se sabe, no se sigue necesariamente en lenguajes de orden superior, en tanto que el resultado de completud, que Gödel presentaría ese mismo año, no se extiende a ese tipo de lenguajes—, las razones para sostener este último supuesto claramente caen más allá de lo que puede afirmarse tanto lógica como matemáticamente. Como sea, Zermelo parece respaldarse en que las prácticas asociadas con su teoría hasta el momento no hubieran arrojado razones para sospechar que las cosas fueran de otro modo. Asimismo, el supuesto de la satisfacibilidad de la teoría con base en su consistencia parece descansar sobre las consideraciones de carácter hilbertiano mencionadas en la sección 2.1.3, lo cual ciertamente posee una carga filosófica de fondo. Una alternativa de carácter más matemático que quizá Zermelo habría podido ofrecer en favor de *i)* (pasando de largo la observación sobre la incompletud de cálculos deductivos de orden dos), sería apoyarse sobre una prueba de consistencia relativa de ZFCU_2 sobre ZFCU_2–"Regularidad"; sin embargo, esto sólo postergaría el problema, pues eventualmente el matemático habría tenido que justificar ZFCU_2–"Regularidad" de alguna manera.

Sobre *ii)* ya no hay mucho qué decir, pues justamente la demostración matemática de éste fue el objeto de demostrar los teoremas de desarrollo e isomorfismo. No obstante, *iii)* sí requiere respaldarse sobre hechos que caen fuera de la matemática y la lógica, dado que la existencia de "números frontera", cardinales fuertemente inaccesibles, es indecidible en ZFCU_2 (de hecho, la existencia de ω no es siquiera demostrable en $\text{ZFCU}^{-}{}_2$). Defender la existencia de números frontera sería una empresa extremadamente relevante para completar la imagen zermeliana del objeto de estudio de la teoría de conjuntos. Aun cuando los teoremas habían sentado el hecho de que variar el tamaño de la base de dominios con características iguales arrojaba diferentes modelos, la cuestión que quedaba sin decidir todavía era lo que sucedía al variar las características de cardinalidad inaccesible fuerte, dado que la existencia de estos grandes cardinales no es decidible por los axiomas en primer lugar. Frente a este dilema, el matemático observaría que ZFCU$^{-}{}_{2}$, la teoría finitaria de conjuntos, con base en los resultados de su artículo, de tener modelo —el cual, cabe señalar, contiene únicamente conjuntos finitos— se correspondería con un segmento P_ω; la existencia de este dominio a su vez serviría para garantizar la consistencia de ZFCU$^{-}{}_{2}$. Con todo, la teoría "cantoriana" de conjuntos, es decir, ZFCU$_2$, al incluir el axioma de infinito garantiza la existencia al menos de ω dentro del modelo; así pues, al suponer la satisfacibilidad de esta teoría, y sobre la base de los teoremas de desarrollo e isomorfismo, la *totalidad* de las secuencias básicas del modelo tendría asociada un tipo-ordinal κ, mas ningún conjunto dentro de ese modelo tendría tamaño κ. De esta forma, en caso de existir características $\kappa > \omega$, debería existir la más pequeña de ellas, o sea, el primer cardinal fuertemente inaccesible, llámese κ_1. Es así que, aun si $\omega \notin P_\omega$, $\omega \in P_{\kappa_1}$, así como a cualquier segmento P_κ (para toda $\kappa > \kappa_1$). De manera similar, así como $\kappa_1 \notin P_{\kappa_1}$, $\kappa_1 \in P_{\kappa_\alpha}$ (para cualquier ordinal $\alpha > 1$). Así, como se puede apreciar,

> la cuestión [en torno de la existencia de números frontera y su cantidad] recibe *diferentes* respuestas en los diferentes "modelos" de la teoría de conjuntos y, por lo tanto, no está decidida meramente por los axiomas. Nuestro sistema axiomático es *no-categórico* después de todo, lo cual, en este caso, no es una desventaja, sino una *ventaja*. Pues la enorme importancia y aplicabilidad ilimitada de la teoría de conjuntos descansa precisamente sobre este hecho. (Zermelo, [1930a, p. 45])

Dado lo anterior, como puede verse, la elaboración de la defensa de *iii)* ha llevado a Zermelo a considerar casi inevitablemente los incisos *iv)* y *v)*; y a partir de ellos —especialmente al reflexionar sobre *v)*— será que encontrará las razones faltantes para convencerse sobre la existencia de cardinales inaccesibles fuertes. El supuesto sobre la satisfacibilidad de la teoría infinitaria de conjuntos en segundo orden orilló a Zermelo a considerar *ii)*, un modelo de cardinalidad fuertemente inaccesible κ_α (donde α es un ordinal), puesto que debía garantizar que en éste vivieran ω, las separaciones y los reemplazos "arbitrarios", así como también todas las potencias; sin embargo, al preguntarse por la existencia de cardinales como κ_α dentro de algún modelo de ZFCU$_2$, casi por analogía con el caso de ω, reconocería que κ_α debía habitar al menos en un modelo de tamaño κ_β (donde $\beta > \alpha$). Al considerar modelos de ZFCU$_2$ de distinto tamaño, el matemático alemán se percataría inmediatamente de la no-categoricidad de su teoría; pero, contra todo pronóstico, lejos de ver esta consecuencia como un problema, lo vería como una ventaja, ya que, como se verá en unos momentos, le permitiría extender la noción de conjunto de manera ilimitada hasta abarcar el dominio de cualquier modelo. Con base en esta admirable generalización, Zermelo conseguiría clarificar el concepto de conjunto, aun cuando contase con múltiples modelos; más aún, contrario a lo ocurrido por la pérdida de la categoricidad de la teoría axiomatizada en primer orden —como consecuencia de Löwenheim-Skolem—, en este caso, ¡la falta de categoricidad no implicaba la pérdida de las potencias ni de las nociones cardinales!

"Por supuesto —continuaría Zermelo—, siempre es posible *forzar* artificialmente la deseada categoricidad con la añadidura de más 'axiomas', pero sólo a costa de la generalidad. Puesto que [estos] nuevos postulados [...] simplemente no incumben del todo a la teoría de conjuntos *como tal*", sino que únicamente caracterizan un modelo especialmente elegido (Zermelo, 1930a, p. 45). "[L]a teoría de conjuntos como *ciencia* debe primero desarrollarse en su máxima generalidad. La investigación comparativa de *modelos* individuales puede, posteriormente, ser aproximada como un problema especial" (p. 46). No obstante, al demostrar *ii)*, esto es, que todo modelo de ZFCU_2 está totalmente determinado por su "ancho" (su cantidad de urelementos) y por su "altura" (la totalidad de sus secuencias básicas o característica de tipo-ordinal igual que algún cardinal inaccesible fuerte κ_α), Zermelo ha abierto la posibilidad de especificar el modelo en cuestión, llámese $\mathfrak{U}_{\kappa_\alpha}$, de manera categórica mediante "postulados adecuados", es decir, axiomas de la metateoría de conjuntos. Pero si $\mathfrak{U}_{\kappa_\alpha}$ aparece como elemento en algún otro modelo $\mathfrak{U}_{\kappa_\beta}$ de ZFCU_2, entonces parece razonable

> [proponer] como hipótesis general que *todo dominio categóricamente determinado puede también ser concebido como un "conjunto" de un modo u otro* [inciso *vi)*]; esto es, que puede ocurrir como elemento de un dominio normal (escogido adecuadamente). De esto se sigue que a cada dominio normal le corresponde uno más alto con la misma base [...] y, por tanto, también a cualquier "número frontera" [κ_α] un número frontera mayor [κ_β]. (Zermelo, 1930a, p. 46)

Además, cada modelo determinado de manera categórica (con bases equivalentes) se encuentra contenido como segmento canónico de otro, y este último a su vez puede robustecerse para ser un dominio normal con una característica mayor todavía. "Por tanto, a toda totalidad categóricamente determinada de 'números frontera' le sigue una mayor, y la secuencia de 'todos' los números frontera es tan ilimitada como la serie numérica misma, lo que permite la posibilidad de asociar uno-a-uno cada índice transfinito con un número frontera particular" (Zermelo, [1930a, p. 46]).

Como se puede apreciar, con su búsqueda por la noción *general* de "conjunto", Zermelo ha evitado concentrarse sobre modelos particulares, por decirlo de algún modo, ha evitado caer sobre la noción de "conjunto en un modelo específico"; esto le ha permitido *aplicar* la noción de conjunto sobre los dominios mismos de los diversos modelos de su teoría de manera exitosa, sin generar paradoja alguna (justamente lo expresado en *vii)*):

> [l]as "antinomias ultrafinitarias de la teoría de conjuntos", a las que apelan los reaccionarios científicos y los anti-matemáticos en su lucha contra la teoría de conjuntos con tal pasión desenfrenada, son sólo "contradicciones" aparentes, debido solo a una confusión entre la *teoría de conjuntos misma*, la cual no está categóricamente determinada por sus axiomas, y los *modelos* individuales que la representan: lo que en un modelo aparece como un "no-conjunto ultrafinito o superconjunto", ya es un "conjunto" completamente válido con número cardinal y tipo-ordinal en el siguiente modelo más alto y, en cambio, sirve él mismo como la piedra angular bajo la construcción de un nuevo dominio. (Zermelo, [1930a, p. 46-7])

En este punto, es que conviene recuperar la caracterización con que se concluyó el capítulo anterior a la luz de los resultados recién presentados, esta es, aquélla en relación con los *dominios abiertos* y *cerrados*. Como se ha visto, en su afán por la mayor generalidad y aplicabilidad, Zermelo ha elaborado la imagen progresiva de dominios normales anidados, cada uno capaz de realizar $ZFCU_2$ (*i. e.*, ser modelo de la teoría) y de ser susceptible de determinación categórica, este tipo de dominios, los "dominios cerrados" como Zermelo (s1930e) los llama, si bien "representan la teoría de conjuntos", éstos lo hacen de manera "más o menos *incompletamente*". Sin embargo, estos modelos cerrados se encuentran dispuestos acumulativamente dentro de un marco particular, un "dominio abierto", el cual, aunque no tiene asociado un número cardinal ni ordinal, puede ser bien-ordenado; es decir, se trata de "una secuencia bien-ordenada de dominios que se comprehenden sucesivamente unos a otros, constituidos de modo que cada subdominio cerrado siempre puede todavía ser extendido dentro de ella" (p. 5). Este "dominio abierto", pues, es el único capaz de capturar realmente a cabalidad la teoría de conjuntos, cosa que declara de manera explícita: "[l]a teoría de conjuntos en su totalidad puede ser completamente representada sólo en un 'modelo abierto', y esto es así en mi 'modelo teórico-conjuntista' basado sobre el 'desarrollo canónico' o 'absoluto' " (p. 5). Así, dentro del dominio abierto, constituido por una secuencia acumulativa de dominios cerrados —los cuales a su vez son capaces de realizar la teoría, mas no de manera completa—, cada modelo cerrado y categóricamente caracterizable puede ser considerado como un "*conjunto*" desde el punto de vista de un modelo adecuadamente más amplio, y sin caer en paradojas. Precisamente, la conjetura (pues no es demostrable) de que "*todo dominio categóricamente determinado puede también ser concebido como un 'conjunto' de un modo u otro*" (Zermelo, 1930a, p. 46) es lo que finalmente llevaría a Zermelo a concebir su definición última de "conjunto": "[u]n 'conjunto' es un dominio finito o infinito de cosas bien-distinguibles u objetos que pueden ser caracterizados por medio de un sistema categórico de postulados" (Zermelo, [1932d, p. 2]). Este dominio abierto, este *multiverso abierto* de *universos cerrados*, por tanto, ha llegado a convertirse en el auténtico objeto de estudio de la teoría de conjuntos y, de esta manera,

> [l]as dos tendencias diametralmente opuestas de la mente pensante, las ideas de *progreso* creativo y *compleción* sintética, que forman también la base de las "antinomias" de Kant, encuentran su representación simbólica, así como su reconciliación simbólica en la serie de números transfinitos, la cual descansa sobre la noción de buen-orden y la cual, aunque carente de verdadera compleción en virtud de su progreso no-acotado, posee estaciones de paso relativas, a saber, aquellos "números frontera", los cuales separan los modelos de tipo inferior de los superiores. (Zermelo, [1930a, p. 47])

Por último, solamente resta presentar manifiestamente el modo en que el objeto de estudio de la teoría de conjuntos propuesto por Zermelo, el "multiverso zermeliano", comprehende satisfactoriamente los objetivos y motivaciones, así como los métodos sugeridos por las prácticas teórico-conjuntistas reflejadas por los fragmentos históricos que se analizaron dentro del segundo capítulo. En primer lugar, cabe recordar la tradición de Gotinga dentro de la cual Zermelo se encontraba sumergido, así como la forma en que los pioneros de la teoría de conjuntos, Riemann, Dedekind y Cantor, canalizaron sus investigaciones con base en aquélla para dar lugar al surgimiento de esta disciplina. Como ya se han tratado con más holgura estas cuestiones en las secciones 2.1.1 y 2.1.2, no será necesario explayarse ahora y únicamente bastará con señalar algunos aspectos relevantes de manera muy puntual.

Como se vio en esos apartados, la matemática en general, y la teoría de conjuntos en particular, debía realizarse de conformidad con la metodología *no-constructiva* impulsada por la tradición de Gotinga, caracterizada mediante los incisos *i)-iv)* de la sección 2.1.1. La teoría de conjuntos en su segunda versión axiomatizada ciertamente parece recuperar tales puntos. Más concretamente, la teoría al estar formulada en segundo orden considera funciones "arbitrarias" independientemente de sus "formas de representación" o de que sean definibles o no por el lenguaje (de hecho —como se dijo—, los axiomas de separación y reemplazo en tal axiomatización hacen alusión explícitamente a funciones *arbitrarias*). Por otro lado, la teoría de Zermelo incluye el axioma de infinito, cosa que refleja el compromiso del alemán por desenvolver sus investigaciones hasta abarcar conjuntos infinitos, pues, para él, la matemática era la "ciencia del infinito" —como la llamó en su momento—; asimismo, al incluir el axioma de infinito, Zermelo abre la posibilidad de trabajar con ordinales y cardinales transfinitos. Esto claramente exhibe "la aceptación de conjuntos infinitos y el infinito superior".

Por otra parte, como se señaló en la sección 2.1.3, bajo la influencia de Hilbert, Zermelo sostenía la existencia matemática de un sustrato de naturaleza abstracta de fondo a las teorías matemáticas caracterizadas por medio de un sistema axiomático, siempre y cuando se confirmara esa existencia en función de la consistencia de dichas teorías. De este modo, las teorías no descansaban sobre expresiones analíticas o cálculos, sino sobre "conceptos generales abstractos" de fondo.

De la misma manera, la teoría de Zermelo también satisface el cuarto punto del enfoque no-constructivo, en tanto que adopta necesariamente métodos de prueba "puramente existenciales", como lo pone de manifiesto su defensa e incorporación del axioma de elección dentro de su sistema y su lucha por resguardar su demostración del teorema del buen-orden; incluso su compromiso con este tipo peculiar de demostración resulta todavía más sobresaliente cuando considera dicho axioma como "principio lógico" (como se dijo en la sección 2.1.4).

Ahora bien, como se vio en la sección 2.1.2, con el "giro abstracto" y la implementación de los métodos no-constructivos dentro de los desarrollos matemáticos, Riemann se comprometió con encontrar un *fundamento* abstracto y general de las teorías matemáticas, y que le permitiera adquirir *claridad conceptual* respecto de los objetos de investigación en *todas* las diferentes áreas. Al hallar la respuesta en la noción de "variedad", Riemann inicia un proceso de abstracción en las investigaciones sobre las magnitudes que le permite considerar indistintamente diversos objetos de manera *homogénea*; esto promovería la *interacción* entre los estudios de las magnitudes discretas y continuas, y adicionalmente motivaría la búsqueda de un "estándar" para comparar magnitudes. Los estudios posteriores de Dedekind (*e. g.*, en teoría de números algebraicos y teoría de ideales) y Cantor (*e. g.*, sobre conjuntos-de-puntos y órdenes) ilustrarían la utilidad de la noción abstracta de variedad, o conjunto, para precisar y generalizar resultados. En particular, las investigaciones de Cantor sobre números ordinales y cardinales transfinitos contribuirían notablemente sobre el esclarecimiento de propiedades relacionadas con el infinito, y sobre las características de un "*estándar de medida*" transfinito. Dedekind, por su parte, con el método de cortaduras para definir el campo de los reales, entre otras cosas, mostraría el enorme poder y *aplicabilidad* de la noción abstracta de conjunto para representar los objetos de las diferentes áreas de la matemática; adicionalmente, sus aportaciones sobre teoría de conjuntos permitirían precisar nociones como la de infinito, continuidad, mapeo, homomorfismos, etc. De la misma forma, con su caracterización categórica de la teoría de números, Dedekind promovería la implementación del método axiomático y pondría de manifiesto su capacidad para caracterizar de *manera precisa* —por supuesto, bajo ciertas condiciones— las estructuras matemáticas, esto *via* la *categoricidad* de las teorías axiomáticas.

Con el planteamiento de su multiverso teórico conjuntista, Zermelo no sólo ha conseguido determinar cuál es el objeto de estudio pretendido de la teoría de conjuntos *en general*, sino que también ha logrado ofrecer una caracterización *conceptualmente clara* de la noción misma de "conjunto". Esto, en gran medida, se debe a la serie de enunciados que componen su sistema de axiomas, pero también a la *cuasi-categoricidad* de éste. En este sentido, se ha conseguido precisar la noción de conjunto sobre esta propiedad del sistema, pues cada dominio normal es susceptible de ser caracterizado salvo isomorfismo al poseer una característica fuertemente inaccesible y, por consiguiente, sus objetos han heredado esta precisión. Esta *precisión conceptual* con base en la categoricidad de las teorías es indiscutiblemente influencia de Dedekind, quien logró demostrar que su teoría de número poseía esta propiedad. En relación con $ZFCU_2$, la cuasi-categoricidad es suficiente para recuperar las nociones centrales de la teoría, por ejemplo, el buen-orden, la ordinalidad y la cardinalidad transfinitas. Que el multiverso zermeliano sea bien-ordenable y cada segmento caracterizable de manera categórica, permite establecer la $\aleph-$secuencia como "estándar objetivo" de medida para conjuntos infinitos. Como las reflexiones alrededor del teorema de Löwenheim-Skolem y la paradoja de Skolem han enseñado, que dichos conceptos sean variables de un modelo a otro, como sucede en la teoría de conjuntos expresada en orden uno, prohibe garantizar que la $\aleph-$secuencia sea *el* estándar para determinar el tamaño de los conjuntos. Del mismo modo, el hecho de que los modelos zermelianos recuperen las nociones cardinales de manera absoluta, implica que cuando la teoría habla sobre tales entidades *realmente* se refiere a ellas y no a entidades "impostoras" que se hacen pasar por ellas, tal como sucede con los modelos skolemianos por la ausencia de funciones dentro de los modelos en cuestión.

Asimismo, cabe mencionar que estas observaciones acerca de los modelos *à la* Zermelo no son necesariamente incompatibles con la perspectiva según la cual los conjuntos son aquellos bien-definidos por una función proposicional de primer orden. Esto, aunque parezca extraño, en realidad es muy sencillo de explicar: si al final del día resultase que Skolem siempre tuvo razón y los conjuntos fuesen solamente aquellos definibles en primer orden, entonces uno tal vez podría aceptar el axioma de constructibilidad —es decir, $V = L$— y, aún así, no habría problema alguno, ya que la caracterización ofrecida por zermelo simplemente se compromete con *todos* los conjuntos bien-determinados, pero no con *cuáles* sean estos. Así que, aun cuando los conjuntos únicamente resultasen ser aquellos definibles en primer orden, los resultados de zermelo continuarían siendo válidos. Ahora, la propuesta de Zermelo, junto con su generalidad, le puede resultar más fácilmente atractiva a alguien, pues puede mantenerse incluso sin importar que la versión skolemiana sea la correcta o no. La diferencia más relevante entre ambas teorías no-categóricas es que, mientras la axiomatización en primer orden relativiza las nociones cardinales, la axiomatización de Zermelo permite recuperarlas absolutamente, respetando con ello uno de los objetivos fundamentales de la teoría, a saber, ofrecer no solamente una teoría de ordinales, sino también de cardinales transfinitos.

En otro orden de cosas, parece que para Skolem la mayor parte del conocimiento matemático —o tal vez todo— se adquiere mediante demostraciones, o sea, que el conocimiento sobre las propiedades y relaciones entre individuos (como llamaba a los objetos de los modelos) se obtiene meramente a partir de los axiomas y las consecuencias deducidas a partir de ellos. Esto puede parecer insuficiente en algún sentido, dado que, de restringirse a las demostraciones, no podría obtenerse una determinación completa de los dominios matemáticos infinitos. Sin embargo, esto sí podría hacerse mediante la caracterizaciones axiomáticas categóricas una vez que se ha elegido previamente el dominio de interés, típicamente esto suele hacerse a través de la cuantificación sobre variables de segundo orden, tal como lo hizo Zermelo con sus sistemas. Con todo, también cabe reconocer que la propuesta de Zermelo no parece aportar más elementos que la propuesta tradicional en primer orden, al menos en *términos deductivos*. Cuando Skolem identifica la noción de "definitud" con la de "definibilidad en primer orden", logra disolver la vaguedad del término más problemático dentro de la axiomatización de 1908 y con ello motivar una formulación extremadamente más clara y precisa de la teoría de conjuntos; Zermelo, por su cuenta, contribuye con la nada despreciable clarificación conceptual de la noción de conjunto y, en este sentido, puede incluso servir de apoyo para la propuesta en primer orden de Skolem: le ofrece criterios para identificar, entre todos los modelos de cualquier cardinalidad transfinita (recuérdese la "versión sintética" del teorema de Löwenheim-Skolem), cuáles son los modelos relevantes, los modelos *verdaderamente* pretendidos de la teoría, los modelos que realmente mantienen invariantes todas las nociones conjuntistas de interés. Evidentemente, el partidario de la versión en primer orden de la teoría que considere valiosa la contribución de Zermelo, debe suscribirse de antemano a la postura que reconozca la importancia de la absolutez de las nociones cardinales y las potencias. No obstante, para poder gozar de semejante contribución, Skolem tendría que dar cuenta de las condiciones que se requieren para frenar la relativización de tales nociones y, de manera análoga que Zermelo, adoptar ciertos elementos de manera *extra*-teórica, estos son, los cardinales fuertemente inaccesibles, pues —como se ha dicho— los modelos que efectivamente consiguen capturar aquellas nociones (también en el caso del primer orden) son los que están subindexados por alguno de tales cardinales grandes (de acuerdo con su desarrollo estratificado en virtud de regularidad). Esto justamente se encuentra en consonancia con el trabajo de Zermelo. De esta manera, los anterior parece mostrar que la teoría de conjuntos no necesariamente tiene que estar anclada sobre una presentación particular, es decir, estar restringida a un lenguaje de orden fijo, sino que incluso uno podría reconocer que cada una de las presentaciones expresadas mediante lenguajes de distinto orden puede aportar elementos distintos para complementar la comprensión de la teoría y sus modelos. De la misma manera, esto parece insinuar que la teoría propiamente está plagada de una serie de ideas acerca de dominios matemáticos específicos y que sus teorías no son más que representaciones lingüísticas útiles para la investigación de éstos.

Ahora bien, regresando a la tradición de Gotinga y sus partidarios, como se ha visto, desde su aparición en escena, Zermelo en gran medida adoptaría los criterios establecidos por Cantor y los matemáticos de Gotinga para desarrollar su teoría de conjuntos. En relación con esto, considérese rápidamente lo siguiente.

Desde un principio —también por la enorme influencia del programa temprano de Hilbert— Zermelo pretendía establecer una teoría lo suficientemente poderosa tanto para retener los resultados obtenidos por Dedekind y Cantor como para fundamentar las nociones básicas de la matemática, especialmente la noción de número, la cual, como mostraban los programas de aritmetización de la matemática, bastaba para servir de base al resto de las disciplinas (*e. g.*, el análisis real y la geometría). La actitud de Zermelo ante la teoría de conjuntos como fundamento fue particularmente evidente cuando se presentó su disputa con Skolem en la sección 2.2. En efecto, la teoría axiomática de conjuntos como lo muestra Zermelo, principalmente en los artículos analizados en la sección 2.1.4, es capaz de derivar los axiomas de la aritmética. Un tema que conviene destacar en relación con esto, es el interés de Zermelo por ocupar la teoría de conjuntos como un fundamento que lograra establecer *consistentemente* los conceptos estudiados por las diversas disciplinas matemáticas, lo cual está en sintonía precisamente con el programa de Hilbert, pues para él era necesario mostrar que las teorías axiomáticas propuestas no implicaban lógicamente contradicciones. Si bien Zermelo es consciente de no haber ofrecido una prueba directa de la consistencia de su teoría —cosa que actualmente se sabe es imposible por el segundo teorema de incompletud de Gödel—, fue capaz al menos de mostrar que su teoría lograba sortear las paradojas que amenazaban la teoría ingenua de conjuntos. Más aún, con base en la propuesta zermeliana uno es capaz de ofrecer lo segundo mejor, a saber, *pruebas de consistencia relativa*. Como se sabe, se puede demostrar que la teoría de números es consistente relativamente a la teoría de conjuntos al asumir un modelo de esta última. Algo muy similar es posible hacer desde el multiverso zermeliano: en función de modelos adecuadamente más "amplios", modelos más "angostos" pueden ser concebidos como conjuntos (tal como se señaló párrafos atrás); así, la existencia de modelos de cardinalidad inaccesible fuerte, puede emplearse para garantizar la consistencia de teorías de conjuntos "incompletas", es decir, teorías que se comprometen tan solo con una cantidad muy específica de cardinales fuertemente inaccesibles menores que el cardinal del modelo "más grande" cuya existencia se asumió inicialmente. Por lo tanto, en algún sentido muy débil, la teoría de conjuntos en la versión de Zermelo puede ocuparse para ofrecer pruebas de consistencia para todas las disciplinas matemáticas; es más, por las observaciones que se acaban de hacer, la generalidad de la teoría permite obtener pruebas de consistencia (*relativa*) de la teoría de conjuntos desde la misma teoría de conjuntos. De este modo, aun si Zermelo no pudo (y jamás habría podido) ofrecer una prueba contundente de la consistencia de su teoría de conjuntos, sí pudo ser capaz de mostrar elementos en favor de ésta.

Por otra parte, su teoría estaba diseñada para representar de manera "homogénea" diversos objetos independientemente de su naturaleza; esto se hace patente, por ejemplo, en su interés por incluir *urelementos* en sus axiomatizaciones. Ciertamente, desde el punto de vista actual, esto puede parecer algo arcaico e innecesario, en especial, considerando que hoy día la teoría estándar de conjuntos suele concentrarse en la parte "pura" de conjuntos;[182] no obstante, como Zermelo le indicaría a Fraenkel en una de sus cartas: "Parece cuestionable demandar que cada elemento de un conjunto deba ser él mismo un conjunto. Bien, formalmente esto funciona y simplifica la formulación. Pero ¿qué sucede entonces con la aplicación de la teoría de conjuntos a la geometría y la física?" (OV 4.19 en Ebbinghaus [2007, p. 201]). En realidad, cuando uno se detiene a reflexionar sobre los motivos para incorporar urelementos dentro de la teoría de conjuntos, uno se percata que Zermelo

[182] Como el término sugiere, la *teoría pura de conjuntos* (o *teoría de conjuntos hereditarios*) está formulada de tal forma que excluye términos que refieran a cualquier otra cosa que no sea un conjunto; de esta forma, los elementos de los conjuntos son también conjuntos, y que los elementos de estos últimos son a su vez conjuntos, y así sucesivamente.

estaba realmente interesado por conservar su máxima aplicabilidad sobre otras áreas, es decir, parecería que no se contentaba con reconstruir las entidades de las diferentes teorías sobre la base de meros “sustitutos conjuntistas” que se comportaran adecuadamente de acuerdo con ellas, sino que deseaba poder utilizar y manipular los “objetos auténticos”, los objetos pretendidos, de tales disciplinas. Otro comentario que se puede añadir en torno de la consideración de urelementos y su pertinencia en la actualidad, es que no es raro que los matemáticos mismos, de hecho, aún en estos tiempos trabajen con ellos constantemente, por ejemplo: con frecuencia, utilizan los símbolos de los lenguajes como urelementos para definir estos últimos de manera recursiva.

Como sea, la teoría de conjuntos, pero sobre todo el multiverso zermeliano, claramente puede ser aplicado para describir las diferentes teorías y, en especial, a la luz de los teoremas de desarrollo e isomorfismo, es capaz de facilitar su interacción mutua. En suma, como se espera haber puesto de manifiesto en este trabajo, las prácticas de la teoría de conjuntos, sus objetivos y motivaciones —al menos dentro del periodo comprehendido entre 1850 y 1930 (aproximadamente)—, determinaron el rumbo en que la teoría de conjuntos se desarrollaría, y estos factores encontrarían su expresión en el objeto de estudio de la teoría propuesto por Zermelo: el llamado multiverso zermeliano.

Conclusión

A lo largo de estas líneas, se ha elaborado el examen de una serie de episodios históricos y representativos alrededor del surgimiento axiomático de la teoría de conjuntos y de su desarrollo durante los primeros treinta años del siglo XX; el análisis de los fragmentos de esta “breve historia de los conjuntos” ha permitido poner de manifiesto algunos objetivos, motivaciones e ideas que las prácticas teórico-conjuntistas durante dicho periodo parecen sugerir. Con base en la metodología hacia la investigación filosófica promovida por el naturalismo matemático de Penelope Maddy, este análisis histórico de las prácticas de la teoría de los conjuntos fue realizado con el propósito de determinar las directrices de fondo al progreso de las prácticas mismas de esta disciplina y, a partir de ellas, poder defender la hipótesis central de este trabajo; a saber, que el llamado *multiverso zermeliano* es el objeto de estudio de la teoría de conjuntos más apropiado de acuerdo con este examen.

De esta manera, en un principio fue conveniente presentar dicho marco metodológico, así como justificar su implementación y pertinencia para el estudio filosófico de la teoría de conjuntos. Para esto, en un primer momento, fue necesario ofrecer una caracterización general del naturalismo en relación con el análisis matemático, lo cual se hizo tomando como eje central los tres tipos de naturalismo identificados por Maddy (2005); es decir, el de ella misma, el de Quine y el de Burguess (y Rosen). A partir de esto, se reveló la relación de esta perspectiva con el anti-revisionismo externo y el revisionismo interno, cosa que facilitó la introducción de la filosofía segunda de Maddy, la cual, como consecuencia de su proceder metodológico, impulsa la investigación y reflexión de las disciplinas matemáticas en función de las pautas establecidas por sus mismas prácticas y objetivos peculiares, esto es, el naturalismo matemático. No obstante, con el objeto de introducir las motivaciones para suscribirse al programa matemático-naturalista, resultó apropiado realizar un breve recuento de “cómo la matemática aplicada llegó a ser pura” para, de este modo, reconocer su carácter como práctica autónoma. Finalmente, se señalaron unos cuantos motivos adicionales detrás de la predilección por este marco metodológico particular; en especial, se destacó su condición como una postura “libre de prejuicios” y de su aptitud para rescatar una serie de aspectos relevantes dentro de la práctica matemática e incluirlos dentro de su análisis filosófico. Asimismo, se desplegaron algunos motivos para consagrar este trabajo al caso específico de la teoría de conjuntos; sobre esto, se destacó su carácter como fundamento para el resto de las disciplinas matemáticas y cómo este lugar privilegiado le ha permitido adquirir y reflejar los intereses y objetivos de la práctica matemática en general, lo que puede contribuir con el esclarecimiento de cuestiones filosóficas concernientes no sólo a la primera, sino también a la matemática pura.

Posteriormente, se presentaron los mencionados episodios históricos relevantes para el desarrollo de la teoría de conjuntos. En primer lugar, se describió rápidamente el nacimiento de la tradición abstracta en matemáticas y su influencia sobre la introducción de la metodología no-constructiva dentro de sus prácticas, la cual, como se mencionó, fue incorporada y promovida principalmente por los matemáticos de Gotinga. En particular, este estilo metodológico sobresalía por implementar conceptos generales para clarificar las teorías matemáticas, por disminuir la carga de los cálculos y las "formas de representación", sostener la existencia de conjuntos infinitos y el infinito superior, y por apoyar los métodos de prueba "puramente existenciales". Fue dentro de esta tradición, la tradición no-constructivista, que Riemann, Dedekind y Cantor realizaron sus aportaciones más significativas. En especial, se consideró el modo en que el primero introdujo la noción de "variedad", una noción más semejante a la noción de "conjunto" que a la de variedad gaussiana, con el fin de ofrecer claridad conceptual, así como un fundamento abstracto y general a sus estudios sobre "magnitudes". Después, se describió cómo los segundos adoptaron dicha noción y la aplicaron dentro de sus áreas de investigación (teoría de números algebraicos y de ideales, en el caso del primero; conjuntos-de-puntos y órdenes, en el caso del segundo). Asimismo, se señaló cómo el desarrollo del estilo no-constructivista y la búsqueda de un "estándar para determinar tamaños" influyó sobre la formulación de la teoría cantoriana de los ordinales y cardinales transfinitos. Por otro lado, se hizo hincapié en cómo el método de cortaduras de Dedekind exhibió el enorme poder y aplicabilidad de la noción de conjunto para representar los objetos de estudio de las distintas áreas de la matemática; además, se resaltó tanto la influencia de Dedekind sobre la implementación posterior del método axiomático como el impacto que su caracterización categórica de la teoría de números tuvo para hacer patente la precisión y clarificación de estructuras con base en esta propiedad de los sistemas axiomáticos.

Lo anterior llevó a considerar la importancia del método axiomático dentro del programa temprano de Hilbert, en tanto que aquél permite establecer la corrección de los resultados mediante un razonamiento matemático riguroso, o sea, sobre la base de un número finito de inferencias a partir de un número finito de supuestos o hipótesis. Para facilitar la introducción de dicho programa y su influencia sobre la primera axiomatización de la teoría de conjuntos, se mencionó el modo en que el segundo de los problemas presentados por Hilbert en París —la demostración de la consistencia de los axiomas aritméticos— mostraba su interés por resolver cualquier problema matemático bien planteado y determinar la consistencia de las teorías matemáticas en general. En relación con esto último, fue que se mencionó el rol que jugó el surgimiento de las paradojas teórico-conjuntistas, pues, como se apuntó, éstas significaban una seria amenaza al programa de Hilbert, en tanto que las deseadas pruebas de consistencia no podían realizarse mediante una lógica y métodos de formación conceptuales que generaran contradicciones. Lo anterior, es decir, tanto la disolución de las paradojas como la búsqueda de un fundamento consiste de la noción de número, sirvió para promover, entre otras cosas, la primera axiomatización de la teoría de conjuntos.

Como elemento adicional para la formulación axiomática de la teoría de conjuntos, se mencionó rápidamente el episodio en torno de las "problemáticas" demostraciones del teorema del buen orden ofrecidas por Zermelo y la famosa controversia alrededor de su famoso "principio lógico" de elección. El problema, como se dijo en su momento, en realidad, tenía que ver más con el método de prueba que con el resultado, pues tales demostraciones ponían al descubierto uno serie de elementos metodológicos de la matemática no-constructiva: la postulación de funciones "arbitrarias", la realización completa de procesos infinitos, el uso de métodos de prueba puramente existenciales, etc. En referencia con esto, fue destacada la muy admirable defensa de Zermelo y los tintes matemático-naturalistas que parecen estar presentes dentro de sus argumentos. Por otra parte, tras especular sobre el carácter "lógico" que Zermelo le atribuía al axioma de elección, se acusó a Maddy por no tomar bajo consideración la directriz metodológica más importante que este capítulo de la historia de los conjuntos sugiere; a saber, el interés por alojar la prueba del buen-orden dentro de un sistema axiomático. Esto, como se señaló, resultaba fundamental para poder formular una teoría sobre el infinito no únicamente en relación con el orden, sino también con el tamaño: una teoría de ordinales y cardinales transfinitos. Para sentar esto de manera más clara, también se mencionó la necesidad del teorema del buen-orden para establecer objetiva y absolutamente la $\aleph-$secuencia como *la* escala de medida de tamaño. Con base en esto, a su vez se mencionó la relevancia por considerar estos elementos como nociones centrales de la teoría y, por tanto, la importancia por ofrecer una axiomatización de la teoría de conjuntos que las preservara.

Ahora bien, a partir del examen de los fragmentos históricos previos, fue que se determinaron las motivaciones más significativas para la primera formulación axiomática de la teoría de conjuntos de Zermelo (1908b): sortear las paradojas, ofrecer un marco para establecer consistentemente el concepto de número y empotrar la demostración del teorema del buen-orden. En este punto, fue que se retomó el asunto de la recuperación absoluta de las nociones cardinales desde la teoría en cuestión, pero esta vez a la luz de la discusión en torno de la noción de "definitud"; esta noción tan problemática, como se indicó, irónicamente se encontraba presente dentro de la enunciación original del axioma de separación, el axioma que precisamente había conseguido frenar las paradojas. El inconveniente con dicha noción radicaba en su vaguedad y circularidad; por consiguiente, Skolem propuso identificar el término con "definibilidad en primer orden" para resolver sus deficiencias. Sin embargo, como se hizo notar, esto despertaría la disconformidad de Zermelo, pues, entre otras cosas, el teorema de Löwenheim-Skolem implicaba la relativización de las potencias y las nociones cardinales, los cuales, como insistía Zermelo, eran fundamentales para el concepto de conjunto mismo.

Sobre la base de la mencionada disputa fue que finalmente se introdujo el contexto alrededor de la segunda axiomatización de la teoría de conjuntos ofrecida por Zermelo (1930a). La diferencia principal respecto de la primera (1908b) fue la añadidura de los axiomas de reemplazo y buena-fundación, así como la omisión de la noción de "definitud" en favor de simplemente separaciones y reemplazos "arbitrarios". Sin embargo, en esta ocasión, el énfasis no se hizo sobre el nuevo sistema axiomático, sino sobre los resultados que Zermelo presentó simultáneamente con éste, a saber, los llamados teoremas de desarrollo e isomorfismo; los cuales dependían en gran medida del axioma de regularidad. Con base en estos resultados, el matemático alemán fue capaz de "arreglar" los dominios normales de su teoría (los modelos) y de determinarlos en función de la cantidad de sus urelementos y la totalidad de sus secuencias básicas, siempre y cuando esta última tuviera el tipo-ordinal de un cardinal fuertemente inaccesible; de esta forma, fue capaz de establecer inmersiones isomorfas entre ellos. De esta manera, se concluyó el segundo capítulo con algunas observaciones respecto de cómo tales resultados fueron principalmente los responsables de que Zermelo consiguiera consolidar su imagen de la estructura teórico-conjuntista y del concepto de conjunto.

Por último, se abrió el tercer capítulo con una breve presentación de los teoremas de desarrollo e isomorfismo con el objeto de ofrecer una imagen más clara de la versión zermeliana de la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien-fundados. De este modo, se destacó la reflexión que realizó Zermelo sobre su investigación y, adicionalmente, se llevó a cabo un análisis más detallado sobre los puntos centrales de su perspectiva, incorporando también elementos de sus trabajos posteriores sobre el concepto de conjunto y sus dominios normales. En especial, se analizó la interpretación que dicho matemático mantuvo frente a sus investigaciones y el tipo de consideraciones que lo llevaron a proponer y defender la existencia extra-teórica de los cardinales inaccesibles fuertes. Asimismo, se resaltó la contribución que la imagen progresiva de dominios normales anidados significó sobre su aceptación de dichos cardinales grandes. En relación con esto fue que se introdujo el concepto zermeliano de "dominio abierto", constituido por una disposición acumulativa e ilimitada de dominios normales "cerrados". Cada uno de los dominios cerrados que conforman el dominio abierto, desde la perspectiva de Zermelo, es capaz de realizar la teoría de conjuntos, mas no de manera completa, y son susceptibles de caracterización categórica; asimismo, se hizo hincapié en cómo desde ellos se recuperaban de manera absoluta las nociones conjuntistas centrales, incluyendo las nociones ordinales y cardinales. Es a partir de esto que se señaló el modo en que Zermelo (1930a) se permitió establecer la conjetura fundamental dentro de su perspectiva modelo-teórica, esta es, que "todo dominio categóricamente determinado puede también ser concebido como un 'conjunto' de un modo u otro" (p. 46). Fue así que, el dominio abierto, el multiverso abierto de universos cerrados, el multiverso zermeliano, en última instancia, reclamó su lugar como el auténtico objeto de estudio de la teoría de conjuntos, y el único capaz de realizarla de manera completa. Con base en lo anterior, fue que al final se pudo sostener la concepción zermeliana de conjunto como "un dominio finito o infinito de cosas bien-distinguibles u objetos que pueden ser caracterizados por medio de un sistema categórico de postulados" (Zermelo, [1932d, p. 2]).

Incluso si se ha logrado el cometido de este trabajo y se ha mostrado de manera satisfactoria que hay buenas razones para considerar que el multiverso zermeliano es el objeto de estudio pretendido de la teoría, todavía quedan muchas preguntas pendientes por contestar; por ejemplo: ¿cómo interactúan las técnicas contemporáneas de construcción de modelos con el multiverso zermeliano?, ¿cuál es la relación entre el multiversimo zermeliano y otros multiversismo propuestos?, ¿cuál es el lugar del multiverso zermeliano dentro de los debates más actuales en filosofía teoría de conjuntos entre los partidarios de posturas universistas y multiversistas?, ¿existe una relación fuerte entre la teoría de conjuntos de Zermelo (1930a) y la teoría de categorías?, ¿el principio de Zermelo que sostiene que los dominios cerrados son conjuntos desde el punto de vista de dominios más amplios es equiparable al axioma de los universos de Grothendieck?, etc. Sin embargo, se espera, con este trabajo haber sentado las bases para abordar estas cuestiones en una investigación posterior.

Apéndice I. Axiomas de la teoría de conjuntos ZCU, Zermelo (1908b)

Axioma I. Si todo elemento de un conjunto M es también elemento de N y vice versa, si, por tanto, tanto $M \subseteq N$ y $N \subseteq M$, entonces siempre $M = N$; o, más sucintamente: Todo conjunto está determinado por sus elementos.

(Axioma de extensionalidad.)

Axioma II. Existe un conjunto (ficticio), el "*conjunto vacío*", 0, que no contiene ningún elemento. Si a es un objeto del dominio, existe un conjunto $\{a\}$ que contiene a a y sólo a a como elemento; si a y b son dos objetos cualesquiera del dominio, existe siempre un conjunto $\{a, b\}$ que contiene como elementos a a y b pero a ningún objeto x distinto de ambos.

(Axioma de conjuntos elementales.)

Axioma III. Siempre que la función proposicional $\mathfrak{E}(x)$ es definida para todos los elementos de un conjunto M, M posee un subconjunto $M_{\mathfrak{E}}$ que contiene precisamente como elementos a aquellos elementos x de M para los cuales $\mathfrak{E}(x)$ es verdadera.

(Axioma de separación.)

Axiom IV. A todo conjunto T le corresponde otro conjunto $\mathfrak{U}T$, el "*conjunto potencia*" de T, que contiene como elementos precisamente a todos los subconjuntos de T.

(Axioma de conjunto potencia.)

Axiom V. A todo conjunto T corresponde un conjunto $\mathfrak{S}T$, la "*unión*" de T, que contiene como elementos precisamente a todos los elementos de los elementos de T.

(Axioma de unión.)

Axioma VI. Si T es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos distintos de 0 y mutuamente disjuntos, su unión $\mathfrak{S}T$ incluye por lo menos un subconjunto

S_1 con un y sólo un elemento en común con cada elemento de T.

(Axioma de elección.)

Axioma VII. Existe en el dominio por lo menos un conjunto Z que contiene al conjunto vacío como elemento y está constituido de tal modo que a cada uno de sus elementos a corresponde otro elemento de la forma $\{a\}$, en otras palabras, que con cada uno de sus elementos a también contiene al conjunto correspondiente $\{a\}$ como elemento.

(Axioma de infinito.)

Apéndice II. Axiomas de la teoría de conjuntos $ZFCU_2$, Zermelo (1930a)

B) *Axioma de extensionalidad:* Todo conjunto está determinado por sus elementos, siempre que tenga elementos.

A) *Axioma de separación:* Toda función proposicional $\mathfrak{f}(x)$ separa de cada conjunto m un subconjunto $m_{\mathfrak{f}}$ que contiene todos los elementos x para los cuales $\mathfrak{f}(x)$ es verdadero. O bien: Para cada parte de un conjunto hay un conjunto correspondiente que contiene todos los elementos de esta parte.

P) *Axioma de par:* Si a y b son cualesquiera dos elementos, entonces hay un conjunto que contiene a ambos como sus elementos.

U) *Axioma del conjunto potencia:* Para todo conjunto m le corresponde un conjunto $\mathfrak{U}m$ que contiene como elementos todos los subconjuntos de m, incluyendo el conjunto vacío y m mismo. Aquí, un "urelemento" escogido arbitrariamente $\mathfrak{u}_0$ toma el lugar del "conjunto vacío".

V) *Axioma de la unión:* Para cualquier conjunto set m there corresponds a set $\mathfrak{S}m$ que contiene los elementos de sus elementos.

E) *Axioma de reemplazo:* Si los elementos x de m son reemplazados de manera única por arbitrarios elementos x' del dominio, entonces el dominio contiene también un conjunto m' que tiene como sus elementos todos estos elementos x'.

F) *Axioma de fundación:* Toda cadena (decreciente) de elementos en la cual cada término es elemento del precedente, termina con un índice finito en un urelemento. O bien, lo que es lo mismo: Todo dominio parcial T contiene al menos un elemento t_0 que no tiene un elemento t en T.

Apéndice III. Axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección expresada en primer orden (ZFC)

Axioma de Extensionalidad. Si X y Y tienen exactamente los mismos elementos, entonces $X = Y$.

$$\forall X \forall Y (\forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y) \rightarrow X = Y)$$

Axioma de Par. Para cualesquiera dos conjuntos A y B, existe un conjunto C que tiene como elementos exactamente a A y B.

$$\forall A \forall B \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

Esquema de axioma de separación. Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos en primer orden con $x_1, \ldots, x_n, x$ como únicas variables libres, $p_1, \ldots, p_n$ parámetros y X un conjunto cualquiera, entonces existe un conjunto C que tiene como elementos a todos objetos que son elementos de X y satisfacen la fórmula $\varphi(p_1, \ldots, p_n, x)$.

$$\forall p_1 \ldots \forall p_n \forall X \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow (x \in X \wedge \varphi(p_1, \ldots, p_n, x)))$$

Axioma de unión. Para todo conjunto X existe un conjunto C que tiene como elementos a los elementos de los elementos de X.

$$\forall X \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow \exists A (A \in X \wedge x \in A))$$

Axioma de conjunto potencia. Para cualquier conjunto X existe un conjunto

C, denotado $\mathcal{P}(X)$, que tiene como elementos a todos los subconjuntos de X.

$$\forall X \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow x \subseteq X)$$

Axioma de Infinito. Existe un conjunto inductivo.

$$\exists C(\emptyset \in C \wedge \forall x(x \in C \rightarrow x \cup \{x\} \in C))$$

Esquema de axioma de reemplazo. Para cualquier conjunto A y fórmula φ del lenguaje de la teoría de conjuntos en primer orden cuyas variables libres sean $x, y, w_1, \ldots, w_n, A$, si para cada x en A existen una *única* y que satisface la fórmula $\varphi(x, y)$ con parámetros $w_1, \ldots, w_n, A$, entonces existe un conjunto B cuyos elementos son todas las y que satisfacen $\varphi(x, y, w_1, \ldots, w_n, A)$ para algún elemento x de A.

$$\forall w_1, \ldots, w_n, \forall A(\forall x(x \in A \rightarrow (\exists y \varphi(x, y, w_1, \ldots, w_n) \wedge$$

$$(\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1, w_1, \ldots, w_n) \wedge \varphi(x, y_2, w_1, \ldots, w_n)) \rightarrow y_1 = y_2))) \rightarrow$$
$$\exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \varphi(x, y, w_1; \ldots, w_n))))$$

Axioma de regularidad. Todo conjunto no-vacío X tiene un elemento y con el que no tiene elementos en común.

$$\forall X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in X \rightarrow y \cap X = \emptyset))$$

Axioma de elección. Para cualquier familia S de conjuntos no-vacíos existe una función $f : S \longrightarrow \bigcup S$ que asigna a todo elemento A de S un representante en A.

$$\forall S(\emptyset \notin S \rightarrow \exists f : S \longrightarrow \bigcup S \; \forall A \in S(f(A) \in A))$$

.

Bibliografía

Álvarez J., C. (1994). De la determinación del infinito a la inaccesibilidad en los cardinales transfinitos. Crítica. *Revista Hispanoamericana De Filosofía, 26*(78), 27-71. https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.1994.956

Arsenijević, M. (2012). The Philosophical Impact of the Löwenheim-Skolem Theorem. En *Between Logic and Reality* (pp. 59-81). Springer, Dordrecht.

Barceló, A. (2020) Penelope Maddy y el naturalismo en filosofía de las matemáticas. (Artículo no publicado.) Consultado el 20 de enero de 2021. http://www.filosoficas.unam.mx/docs/37/files/Maddy %20Libro.pdf.

Bays, T. (2014). Skolem's Paradox, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/paradox-skolem/>.

Cantor, G. (1932). Abhandlungen zur Mengenlehre en *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Ernst Zermelo (ed.). Berlin: Springer-Verlag.

Coffa, J. A. (1991). *The semantic tradition from Kant to Carnap: To the Vienna station*. Cambridge University Press.

Dedekind, R. (1888). The nature and meaning of numbers. Essays on the theory of numbers. En W. W. Herman (ed.), Dover Press, New York, (1963), pp. 31-115.

Ebbinghaus, H. D. (2003). Zermelo: Definiteness and the universe of definable sets. *History and Philosophy of Logic, 24*(3), 197-219.

Ebbinghaus, H. D., y Peckhaus, V. (2007). *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ebbinghaus, H. D., y Kanamori, A. (eds.) (2010). *Ernst Zermelo: Collected Works, Vol. 1: Set Theory, Miscellanea*. Springer-Verlag.

Enderton, H. B. (1977). *Elements of set theory*. Academic press.

———. (2004). *Una introducción matemática a la lógica.* IIFs-UNAM.

Ferreirós, J. (1996). Traditional logic and the early history of sets, 1854–1908. *Archive for History of Exact Sciences, 50*(1), 5-71.

———. (2001). The road to modern logic—an interpretation. *Bulletin of Symbolic Logic, 7*(4), 441-484.

———. (2007). *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics.* Birkhäuser Verlag AG.

———. (2010). The Crisis in the Foundations of Mathematics. In *The Princeton companion to mathematics* (pp. 142-156). Princeton University Press.

———. (2020). The Early Development of Set Theory, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/settheory-early/>.

Fraenkel, A. (1922b). The notion "definite" and the independence of the axiom of choice. En van Heijenoort, J. (2002). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Harvard University Press. pp. 284-289.

——— y Bar-Hillel, Y. (1958). *Foundations of Set Theory.* North-Holland.

Frege, G. (1903). *Basic Laws of Arithmetic: Derived using concept-script.* Oxford University Press.

Gutiérrez-Ramírez, C. A. (2011). Estructuralismo, teoría de conjuntos y teoremas de categoricidad (tesis de maestría), Posgrado en Filosofía de la Ciencia–UNAM.

———. (2015). ¿Es la hipótesis del continuo una proposición absolutamente indecidible? Un estudio filosófico (tesis de doctorado), Posgrado en Filosofía de la Ciencia–UNAM.

Hallett, M. (2016). Zermelo's Axiomatization of Set Theory, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/zermelo-set-theory/>.

van Heijenoort, J. (2002). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Harvard University Press.

Hernández-Deciderio, G. (2015). Capacidades de los sistemas lógicos formales: El caso de algunos sistemas lógicos clásicos y de lógica libre (tesis de doctorado). Universidad de Salamanca.

Hilbert, D. (1900). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society, 8*(10), 437-479.

———. (1991). *Fundamentos de la geometría.* Editorial CSIC.

Jech, T. (2006). *Set Theory.* Springer Monographs in Mathematics.

Kanamori, A. (1996). The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen. *Bulletin of Symbolic Logic, 2*(1), 1-71.

Kant, I (2009). *Crítica de la Razón Pura.* Fondo de cultura Económica.

Kreisel, G. (1967). Informal rigour and completeness proofs. En Irme Lakatos (ed.) (1967) *Problems in the philosophy of mathematics*, pp. 138-86. North-Holland.

Ladyman, J. y Presnell, S. (2016). Does Homotopy Type Theory Provide a Foundation for Mathematics? En *The British Journal for the Philosophy of Science 0*, pp. 1-44.

Maddy, P. (1988a). Believing the axioms. I. *The Journal of Symbolic Logic, 53*(2), 481-511.

———. (1988b). Believing the axioms. II. *The Journal of Symbolic Logic, 53*(3), 736-764.

———. (2005). Three Forms of Naturalism. In Stewart Shapiro (ed.), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* Oxford University Press.

———. (2007). *Second philosophy: A naturalistic method.* Oxford University Press.

———. (2008). How applied mathematics became pure. *Review of Symbolic Logic, 1*(1):16-41.

———. (2011). *Defending the axioms: On the philosophical foundations of set theory.* Oxford University Press.

Mendelson, E. (1997). *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman & Hall.

Moore, G.H. (1982). *Zermelo's Axiom of Choice. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences.* Springer.

Oppy, G., Hájek A., Easwaran K. y Mancosu, P. (2021) Infinity, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/infinity/>.

Papineau, David, Naturalism, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/naturalism/>.

Paseau, A. Naturalism in the Philosophy of Mathematics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/naturalism-mathematics/>

Russell, B. (1903). *The principles of mathematics.* Routledge.

Shapiro, S. (2003). *Foundations without foundationalism: A case for second-order logic.* Clarendon Press.

———. (2009). Philosophy of Mathematics and Its Logic: Introduction. En S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (pp. 3-28). Oxford University Press. DOI:10.1093/oxfordhb/9780195325928.003.0001

Skolem, T. (1922). Some remarks on axiomatized set theory. En van Heijenoort, J. (2002). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Harvard University Press. pp. 290-301.

———. (1923). The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains. En van Heijenoort, J. (2002). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Harvard University Press. pp. 302-333.

Torres-Alcaraz, C. (1999). Los sistemas formales. UNAM.

———. (2001). Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica: la filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel (tesis de doctorado). Posgrado en Filosofía–UNAM.

Tsementzis, D. y Halvorson, H. (2018). Foundations and Philosophy. En *Philosophers' Imprint 18.*

Väänänen, J. (2015). Second-Order Logic and Set Theory. *Philosophy Compass, 10*(7), pp. 463-478.

Zermelo, E. (1904). Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 114-119.

———. (1908a). Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 120-159.

———. (1908b). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 188-229.

———. (1909b). Ueber die Grundlagen der Arithmetik. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 252-259.

———. (1929b). Vortrags-Themata für Warschau 1929. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 374-389.

———. (1930a). Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 400-429.

———. (1930d). Bericht an die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft über meine Forschungen betreffend die *Grundlagen der Mathematik.* En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 434-439.

———. (1930e). Über das mengentheretische Modell. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 446-453.

———. (1932d). Mengenlehre 1932. En Ebbinghaus, H.D. y Kanamori A. (eds.) (2010) *Ernst Zermelo. Collected works.* Springer, pp. 564-571.